STOKASTİK

DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE MODELLEME

Batuhan BOZDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı

Haziran 2010

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Batuhan BOZDAĞ'ın "**Stokastik Diferansiyel Denklemlerle Modelleme**" başlıklı **İstatistik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 14.06.2010 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof. Dr. ALADDİN ŞAMİLOV**	**.................**
Üye	: **Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK**	**.................**
Üye	: **Prof. Dr. MEMMEDAĞA MEMMEDLİ**	**.................**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . . . **tarih ve** . . . . **sayılı kararıyla onaylanmıştır.**

Prof. Dr. Rıdvan SAY

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE MODELLEME

Batuhan BOZDAĞ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV

2010, 56 Sayfa

Bu tez çalışmasında stokastik diferansiyel denklemlerin iki alt denklem sınıfı olan rassal diferansiyel denklemler ve Itô stokastik diferansiyel denklemleri ile somut problemlerin modellenmesi konusu ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle stokastik diferansiyel denklemler teorisi için gerekli olan matematiksel temeller verilmiş, iki somut problem için stokastik diferansiyel denklem modelleri kurulmuş ve çözümlenmiştir.

İlk olarak, bir radyoaktif bozunma problemi bir rassal diferansiyel denklem ile modellenmiş ve bu modelin çözümü elde edilmiştir. Daha sonra çözüme ilişkin bazı çıkarsamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar, tablo ve şekiller ile sunulmuştur.

İkinci olarak ise hisse senetleri fiyatları için Samuelson modeli tanıtıldıktan sonra bu çalışmada verilen modelleme yöntemiyle fiyatlar için bir stokastik diferansiyel denklem modeli kurulmuştur. İki modeli fiyat tahminleri bazında karşılaştırabilmek için MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti ele alınmıştır. MATLAB dilinde yazılan programlar yardımıyla her iki modelin parametreleri tahmin edilmiştir. Daha sonra, elde edilen modeller nümerik olarak çözdürülmüş ve hesaplanan tahminler tablolar ve şekiller yardımıyla ortaya konulmuştur. Son olarak her iki model Euclid metriğine göre karşılaştırılmış ve Samuelson modelinin çalışmada verilen yöntemle elde edilen modelden daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Itô stokastik diferansiyel denklemi, Rassal diferansiyel denklem, Samuelson

ABSTRACT

Ms. Thesis

MODELLING WITH STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Batuhan BOZDAĞ

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV

2010, 56 Pages

In this thesis subject of modelling real life problems with random differential equations and Ito stochastic differential equations are considered. For this purpose, necessary mathematical fundementals for theory of stochastic differential equations are given. Moreover, for two real life problems stochastic differential equation models are constructed and solved .

First of all, a radioactive decay problem is modelled by a random differential equation and a solution of this model is obtained. Then some inferences about the solution are made and obtained results are illustrated with tables and figures.

Secondly, after introduction of Samuelson model for stock prices, in this work a particular stochastic differential equation model is constructed for stock prices via modelling procedure given in literature. To compare both models for estimation of stock prices, daily closing prices of MOTOROLA stock between 20.03.09-11.05.09 are investigated. Parameters are estimated for both models via programs written with MATLAB. Then obtained models are solved numerically and calculated estimations are illustrated with tables and figures. It should be noted that Samuelson model provides better estimations when it's compared to the model suggested in this work.

Keywords: Itô stochastic differential equation, Random differential equation, Samuelson

TEŞEKKÜR

Yükseköğrenim hayatımın ve bu tez çalışmasının her aşamasında desteğini hiç esirgemeyen, bilgi birikimi, bilime ve hayata bakış açısıyla ufkumu genişleten, öğrencisi olmaktan onur duyduğum, değerli hocam Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV'a, şahsıma ve bilime olan inancı doğrultusunda daima yanımda olarak bana güç ve destek veren annem Dilek YAĞCI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Batuhan BOZDAĞ

Haziran 2010

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

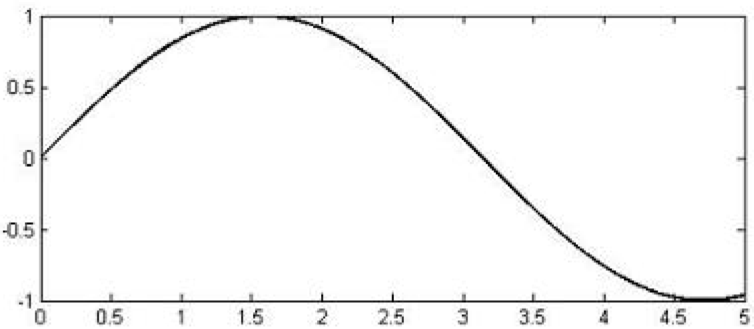
TABLOLAR DİZİNİ

1 GİRİŞ

Bilindiği üzere diferansiyel denklemler teorisi sürekli dinamik sistemlerin modellenmelerinde sıklıkla kullanılan bir araçtır. Verilen bir dinamik sistem için kurulan

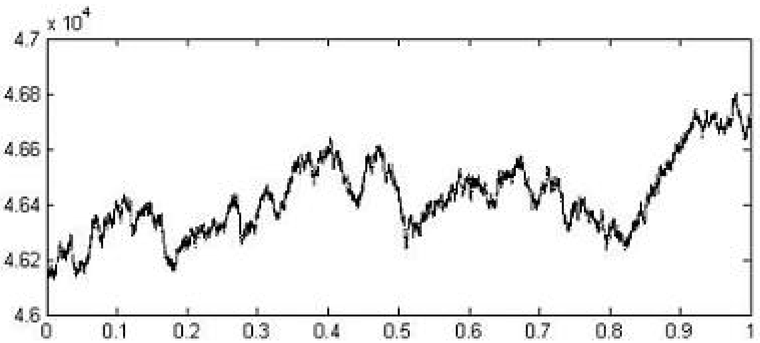
$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Cauchy probleminin çözümü olan deterministik $X(\cdot) : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellebilir yani pürüzsüz bir fonksiyondur. Bu tür bir fonksiyonun grafiği Şekil 1.1'de verilmiştir.



Şekil 1.1: Pürüzsüz bir fonksiyonun grafiği

Ancak Şekil 1.2'de görüldüğü gibi bir çok uygulamada yapılan deneylerle elde edilen gerçekleşmelerden görülmüştür ki gerçekleşmeler bir çok noktada diferansiyellenemez fonksiyonlar olabilmektedirler.



Şekil 1.2: Deneylerden elde edilen bir gerçekleşme

Bu nedenle bu tür problemleri modellemek için diferansiyel denkleme ek olarak bir dalgalanma terimine ihtiyaç duyulur. Genellikle bu dalgalanma terimi literatürde, Wiener süreci adı verilen bir stokastik sürecin, formal olmayan diferansiyelidir[1]. Bununla birlikte problemi modelleyecek diferansiyel denklem $T \subset \mathbb{R}$, $W(\cdot,\cdot) : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ Wiener süreci ve $Y(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ rassal değişken olmak üzere

$$\begin{cases} dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))dt + \psi(t, X(t,\omega))dW(t,\omega) \\ X(0,\omega) = Y(\omega) \end{cases} \tag{1.2}$$

olacaktır. Bu denkleme Ito stokastik diferansiyel denklemi denir.

Ancak böyle bir diferansiyel denklemin analizi Newton kalkülüsünden fazlasını gerektirmektedir. Bu nedenle öncelikle bu tezin 2,3,4 ve 5'inci bölümlerinde bu tür bir diferansiyel denklemin analizinin yapılabilmesi için gerekli olan matematiksel araçlar verilmiştir.

İkinci bölümde, bir stokastik diferansiyel denklemin çözümü stokastik süreç olarak elde edildiğinden, stokastik süreçler teorisine ait bazı kavramlar incelenmiş, tanımlamalar verilmiş ve çözümler neticesinde somut problem hakkında bazı çıkarsamaların yapılabilmesi için stokastik süreçlerin istatistiklerine değinilmiştir. Ayrıca yine bu bölümde stokastik diferansiyel denklemler teorisinin ortaya çıkmasına neden olan Wiener süreci ele alınmıştır ve Wiener süreci ile ilgili temel teoremlere yer verilmiştir.

Stokastik integral ve stokastik diferansiyel denklemler teorisi ile birlikte olasılık teorisinde filtrasyon, adaptasyon vb. kavramların ortaya çıkışı kaçınılmaz olmuştur. Bu kavramların anlaşılabilmesi için ise yine olasılık teorisinden sigma cebir ve koşullu beklenti kavramlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Üçüncü bölümde bu nedenle sigma cebirler ve koşullu beklenen değer hakkında gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiş, stokastik integraller ve stokastik diferansiyel denklemlerin bazı özelliklerinin hem anlaşılabilmeleri hemde kanıtlanabilmeleri için gerekli olan koşullu beklenen değerin özellikleri de bu bölümde ele alınmıştır.

Stokastik diferansiyel denklemler Wiener sürecinin sahip olduğu bazı özellikler nedeniyle diferansiyel terimler cinsinden ifade edilememektedirler. Bu tür diferansiyel denklemler gerçekte bir integral denklemden başka bir şey değildirler ve

[1] Wiener süreci hiç bir noktada diferansiyellenemez olduğundan bu diferansiyel yalnızca bir gösterimdir. Bu nedenle bu diferansiyele formal olmayan denilmiştir.

yalnızca sembolik olarak diferansiyel terimler cinsinden yazılırlar. Ancak bu integral denklemlerde ortaya çıkan bazı integraller Newton anlamda analiz yardımıyla çözülemememektedirler. Bu sebep Itô analizi ismi de verilen yeni bir integral teorisi olan Itô stokastik integrali teorisinin ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Dördüncü bölümünde ise bu yeni teori ile karşılaştırılabilmesi ve eski teoriden yeni teoriye genişlemenin yapılabilmesi için öncelikle bilinen Riemann-Stieltjes integrali ele alınmıştır. Daha sonra sezgisel olarak genişlemenin nasıl yapılabileceği gösterilemeye çalışılmış ve son olarakta Itô integral teorisi bazı özel süreçler ve genel süreçler için ele alınmıştır. Kuşkusuz yeni bir integral teorisi için gerekli olan en önemli araç Newton analizinin Newton-Leibnitz lemması gibi integrallerin hesaplanmasına olanak sağlayan bir lemmadır. Itô analizinde ise benzer olarak integrallerin analitik formda hesaplanabilmesi için gerekli olan bu araç Itô lemmasıdır. Newton-Leibnitz lemmasının aksine Ito lemmasının kendi içinde bir kaç genelleşmesi söz konusudur[10]. Ancak bu tez çalışması için temel lemma ve bir genelleşme yeterlidir. Bu temel lemma ise dördüncü bölümün sonunda verilmiştir.

Stokastik diferansiyel denklemler rassallığın kaynağına ve integralleyici sürece göre bir kaç alt denklem sınıfına ayırılırlar. Bu çalışmada ise stokastik diferansiyel denklemlerin iki türü ele alınmıştır. Bunlardan birincisi rassallığın yalnızca başlangıç değerlerden kaynaklandığı ve çözümleri Itô analizi gerektirmeyen rassal diferansiyel denklemler, diğeri ise rassallığın hem başlangıç değer hem de adi diferansiyel denkleme eklenen formal olmayan Wiener diferansiyelinden kaynaklandığı Itô stokastik diferansiyel denklemleridir. Adi diferansiyel denklemler teorisinden de bilindiği gibi diferansiyel denklemler sınıflarında modellerin problemleri temsil edebilmeleri için denklemlerin çözümlerinin bazı koşulları sağlamaları çok önemlidir. Çözümlerin varlığı ve tekliği, sürekliliği ve sınırlılığı bu koşullardan bir kaçıdır. Özellikle çözümün var ve tek olması adi diferansiyel denklemlerde de olduğu gibi temeldir. Çünkü öncelikle eğer somut problem için kurulan bir stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü yok ise somut problem hakkında hiç bir bilgi edinilemez ve model kullanışsız olur. Bununla birlikte Çözüm var ancak tek değil ise hangi çözüm üzerinden analizin yapılacağı bilinemeyeceğinden yine problem hakkında hiç bir çıkarsama yapılamaz ve model kullanışsız olur. Bu nedenler dışında adi diferansiyel denklemler teorisinde olduğu gibi analitik çözüme sahip stokastik diferansiyel denklemler sınıfı çok dar bir sınıftır ve modellerin çözümleri nümerik yöntemler gerektirmektedirler. Ancak nümerik çözüm yapılmadan önce modelin çözümünün var ve tek olduğunun garantilenmesi için yine varlık ve teklik teoremi gerekmektedir.

Beşinci bölümde bu nedenle, rassal diferansiyel denklem ve Ito stokastik diferansiyel denklemi tanımlandıktan sonra adi diferansiyel denklemler teorisine benzer olarak Ito stokastik diferansiyel denklemi için öncelikle çözüm kavramları daha sonra ise çözümün varlık ve teklik, sınırlılık ve süreklilik teoremleri ele alınmış ve Ito stokastik diferansiyel denkleminin kesin çözümü genelleşmiş Itô lemması yardımıyla verilmiştir. Ancak daha önce de belirtildiği gibi Itô stokastik diferansiyel denkleminde kesin çözümü elde edilebilen denklemler sınıfı çok dar bir sınıftır ve bu nedenle bir çok denklemin çözümleri nümerik yöntemlerle elde edilmelidir. Itô stokastik diferansiyel denklemi için bir kaç nümerik çözüm yöntemi bulunmakta olmasına rağmen bu çalışmada yalnızca Euler-Maruyama nümerik çözüm yöntemi ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının asıl konusu olan stokastik diferansiyel denklemlerle yapılan modellemeler ise adi diferansiyel denklemler teorisinin modelleme yöntemlerine oldukça benzemektedir. Klasik teoriden farklı olarak modelin geçerliliğinin ispatlanabilmesi için Fokker-Planck adı verilen bir kısmi türevli diferansiyel denkleme ihtiyaç duyulur.

Altıncı bölümde bu nedenle, ilk olarak Fokker-Planck denklemi verilmiştir. Itô stokastik diferansiyel denklemleri ile yapılan modellemelerde adi diferansiyel denklemler teorisine benzer olarak öncelikle bir kesikli sistem, bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin geçiş olasılıklarıyla birlikte kurulur. Daha sonra ise değişimin beklenen değer ve varyans fonksiyonları hesaplanır ve son olarak beklenen değer fonksiyonu ve varyans fonksiyonu yardımıyla zaman değişimi sıfıra yaklaşırken bu sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonunun yaklaşık olarak Fokker-Planck denklemini sağladığı görülür. Diğer yandan ise ilgili stokastik diferansiyel denklemin çözümünün olaslık yoğunluk fonksiyonunun da Fokker-Planck denklemini sağladığı ispatlanabilir ve bu sayede başta ele alınan stokastik diferansiyel denklem modeli ilgili problem için mantıksal bir model olarak kabul edilebilir. Yine altıncı bölümde bu modelleme sürecinin bütün aşamaları detaylarıyla birlikte ele alınmıştır. Bir Itô stokastik diferansiyel denklem modeli kurulduktan sonra bu denklemin özel somut problemlere uygulanabilmesi için modelde ortaya çıkan parametrelerin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu parametrelerin tahminleri için literatürde parametrik ve parametrik olmayan bir kaç yöntem bulunmasına karşın bu çalışmanın altıncı bölümünde uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan quasi-likelihood yöntemi ele alınmıştır.

Son olarak altıncı bölümde hem rassal diferansiyel denklemler ile ilgili hem de Itô stokastik diferansiyel denklemleri ile ilgili iki uygulama yapılmış ve sonuçlar ortaya konularak sonuçlar hakkında bazı çıkarsamalar yapılmıştır. Her iki uygulama için günümüzün önemli problemleri seçilmeye çalışılmıştır ve rassal diferansiyel denklem modeli radyoaktif bozunma problemine ve Itô stokastik diferansiyel denklem modeli ise hisse senedi fiyat tahmini problemine uygulanmıştır.

Rassal diferansiyel denklem modeli için yapılan uygulamada öncelikle modelin kurulma aşamaları gösterilmiş ve model kurulmuştur. Daha sonra bu model analitik olarak çözümlenerek somut bir problem için belirli bir zaman sonraki tahminler yapılmıştır ve bu tahminler tablo ve grafik halinde ortaya konulduktan sonra bölüm ikide verilen, stokastik sürecin beklenen değer fonksiyonu yardımıyla ortalama kalan madde miktarı tahmin edilmiştir.

Itô stokastik diferansiyel denklem modeli için yapılan uygulamada ise öncelikle hisse senedi fiyatları için daha önce bahsedilen modelin kurulma aşamaları detaylı olarak gösterilerek Itô stokastik diferansiyel denklem modeli ortaya konulmuştur. Ayrıca bu uygulamada daha önce hisse senetleri fiyatları için ortaya konulan bir başka stokastik diferansiyel denklem modeli ile bu çalışmada ele alınan modelleme yöntemiyle elde edilen stokastik diferansiyel denklem modeli $\mathbb{R}^n$' nin Euclid metriğine görede karşılaştırılmıştır. Elbette bu karşılaştırılmanın yapılabilmesi için öncelikle New York Stock Exchange(NYSE)' işlem gören MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti ele alınmış, her iki modelin parametreleri quasi-likelihood yöntemi ile tahmin edilmiş, Euler-Maruyama şemaları kurulmuş ve bu şemalar yardımıyla her iki modelden tahminler elde edilmiş ve bu tahminler yine tablolar ve grafikler halinde ortaya konulduktan sonra Euclid metriğine göre iki model karşılaştırılmıştır. Bu analizler sonucu bu çalışmada ele alınan yöntemle elde edilen modelin ilgili veri seti için daha kötü sonuçlar vermesine rağmen metriğin değerlerinin bir birine yakınlığından dolayı sonuçların bir birlerinden çokta farklı olmadığı söylenmiştir.

2 STOKASTİK SÜREÇLER

Stokastik integraller tanımlanmadan önce bu integrallerin anlaşılmasında çok önemli bir rol oynayan stokastik süreçler ve bu süreçlerin bazı özelliklerinin bilinmesi oldukça önemlidir. Ayrıca bazı özel stokastik süreçler integrallerin tanımlanmasında çok daha önemli bir rol oynadıklarından bu özel süreçler üzerinde ayrıca durmak ve onların özelliklerini derinlemesine incelemek önem kazanmaktadır.

Tanım 2.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *bir olasılık uzayı olmak üzere bu olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış rassal değişkenlerin bir koleksyonuna bir stokastik süreç denir ve*

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

şeklinde yazlır. Burada T 'ye parametre kümesi denir.

T kümesi tanımdaki gibi soyut bir parametre kümesi olabilmesine rağmen genellikle literatürde $T \subset \mathbb{R}$ olarak alınır ve bu çalışmada $T \subset \mathbb{R}$ olarak alınacaktır. Stokastik süreçler parametre kümesi T' ye göre ve rassal değişkenlerin durumlarına göre sınıflandırılır. Eğer parametre kümesi bir aralıksa yani ($T = [a, b], T = [a, b), \ldots$) ise o zaman stokastik sürece sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer parametre kümesi sayılabilir bir küme ise o zaman stokastik sürece kesikli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer $\forall t \in T$ için X_t rassal değişkenleri sürekli rassal değişkenler ise o zaman stokastik sürece sürekli, eğer $\forall t \in T$ için X_t rassal değişkenleri kesikli rassal değişkenler ise sürece kesikli stokastik süreç denir.

Sokastik süreçlerin daha farklı özelliklerini inceleyebilmek için bir stokastik sürecin farklı bir tanımı yararlı olacaktır.

Tanım 2.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *bir olasılık uzayı T parametre kümesi olmak üzere* $X(\cdot, \cdot) : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *iki değişkenli fonksiyonu eğer* $\forall t \in T$ *için P-ölçülebilir ise X' e bir stokastik süreç denir.*

Buradan görülüyor ki sabit bir $t_0 \in T$ zamanı için $X(t_0, \cdot) : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyondur bu da $X(t_0, \omega)$' nın bir rassal değişken olduğunu gösterir.

Eğer bir $\omega_0 \in \Omega$ sabitlenirse o zaman $X(\cdot, \omega_0) : T \to \mathbb{R}$ zamanın bir fonksiyonu olur ve bir stokastik sürecin örnek yolu, gerçekleşmesi veya yörüngesi olarak adlandırılır. Çalışmanın geri kalanında bu fonksiyon için gerçekleşme terimi kullanılacaktır.

Stokastik süreçler için bir başka önemli tanım ise ölçülebilir stokastik süreç kavramıdır.

Tanım 2.3. (Ölçülebilir stokastik süreç) $X(\cdot, \cdot) : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ *bir stokastik süreç,* μ*, T ve* $\mathbb{R}$ *üzerinde Lebesgue ölçümü,* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*,* $\mathbb{R}$*' nin Borel cebiri ve* $\mathfrak{B}(T)$*, T' nin Borel cebiri olmak üzere eğer* $X(t, \omega)$*,* $((T \times \Omega, \mathfrak{B}(T) \otimes \mathfrak{F}, \mu \times P), (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})))$ *ölçülebilirse o zaman* $X(t, \omega)$*' ya ölçülebilir stokastik süreç denir.*

Bu tanımdan Fubini teoremi yardımıyla hemen şu sonuç çıkarılabilir. $X(t, \omega)$ ölçülebilir bir stokastik süreç ise o zaman Fubini teoreminden

$$P(\omega : X(t, \omega) \quad \text{ölçülebilirdir}) = 1$$

olur. Yani hemen her $\omega \in \Omega$ için gerçekleşmeler ölçülebilir fonksiyonlardır[9].

Rassal değişkenlerde olduğu gibi stokastik süreçlerde de dağılım fonksiyonu önemli bir rol oynar. Bir stokastik sürecin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4. *Bir X süreci verilsin.* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$*' lerin her bir seçimi için*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}), \qquad t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$$

rassal vektörlerinin dağılımlarına X sürecinin sonlu boyutlu dağılımları denir.

Tanım 2.5. *Verilmiş bir X sürecinin bütün sonlu boyutlu dağılımları çok değişkenli normal dağılım ise o zaman sürece Gauss süreci denir.*

Tanım 2.6. (Ayrılabilir Fonksiyon)[3] (U, d_1) *ve* (V, d_2) *metrik uzaylar ve D, U' nun sayılabilir, yoğun alt kümesi olsun.* $f : (U, d_1) \to (V, d_2)$ *bir fonksiyon olmak üzere eğer* $\forall t \in U$ *için D' de* $t_i \to t$ *iken* $f(t_i) \to f(t)$ *olacak şekilde bir* $\{t_j\}$ *dizisi bulunabiliyorsa o zaman f fonksiyonuna D-ayrılabilir fonksiyon denir.*

Tanım 2.7. **(Ayrılabilir Süreç)**[3] *X, $\Omega \times T$ üzerinde bir stokastik süreç, D, T' nin sayılabilir, yoğun alt kümesi ve N, Ω' nın sıfır ölçümlü öyle bir altkümesi olsun ki $\forall \omega \notin N$ için $X(\cdot, \omega)$, D-ayrılabilir olsun. Bu durumda X sürecine ayrılabilir stokastik süreç denir.*

2.1 Stokastik Süreçlerin İstatistikleri

İlgilenilen bir problem için kurulan stokastik diferansiyel denklem modelinin çözümü olan stokastik süreçten problemin çözümü yardımıyla bazı çıkarsamalar yapılmak istenebilir. Örneğin bir hisse senedi modelinin çözümü için belli bir zaman sonra hisse senedinin ortalama fiyatı tahmin edilmek ya da bir sabit zaman noktasında hisse senedi fiyat tahmini için bir güven aralığı kurulmak istenebilir. Bu tür çıkarsamaların yapılabilmesi için bir stokastik sürecin aşağıdaki gibi tanımlanan ortalama, kovaryans vb. fonksiyonları kavramları gereklidir.

Tanım 2.8. *Verilmiş bir X süreci için $\mu_X : T \to \mathbb{R}$, $\forall t \in T$ olmak üzere ;*

$$\mu_X(t) = EX_t$$

olarak tanımlanan fonksiyona X' in beklenen değer fonksiyonu denir.

Tanım 2.9. *Verilmiş bir X süreci için $c_X : T \times T \to \mathbb{R}$, $\forall t, s \in T$ olmak üzere;*

$$c_X(t,s) = Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))]$$

olarak tanımlanan fonksiyona X' in kovaryans fonksiyonu denir.

Eğer $t = s$ ise o zaman covaryans fonksiyonu X'in varyans fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 2.10. *Bir $X = (X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ süreci verilsin. Eğer $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$' lerin her bir seçimi ve $t_1 + h, t_2 + h, \ldots, t_n + h \in T$ olacak şekilde $\forall h$ için;*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$$

oluyorsa o zaman X sürecine kesin durağan süreç denir. Burada $\stackrel{d}{=}$ sembolü iki rassal vektörün dağılım fonksiyonlarının eşit olması anlamına gelir.

Tanım 2.11. *Bir* $X = (X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ *süreci verilsin. Eğer* $\forall t, s \in T$ *ve* $\forall t + h, s + h \in T$ *olacak şekilde* $\forall h$ *için;*

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$$

oluyorsa o zaman X sürecine durağan artışlara sahiptir denir.

Tanım 2.12. *Bir* $X = (X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ *süreci verilsin. Eğer* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *olacak şekilde* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$*' lerin her bir seçimi*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_n-1}$$

rassal değişkenleri bağımsızlarsa o zaman X sürecine bağımsız artışlara sahip süreç denir.

2.2 Wiener Süreci

Tanım 2.13. *Bir* $W(t, \omega) : [0, \infty] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *stokastik süreci eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa W sürecine Brown hareketi ya da Wiener süreci denir.*

1. $P(\omega : W(0, \omega) = 0) = 1$ *dir. Diğer deyişle bir olasılıkla Wiener süreci sıfırdan başlar.*

2. *Durağan ve bağımsız artışlara sahiptir.*

3. $\forall t > 0$ *için* $W(t, \omega)$ *normal* $N(0, t)$ *dağılımına sahiptir.*

4. $P(\omega : W(\cdot, \omega) \quad \text{sürekli}) = 1$ *dir. Bir başka deyişle Wiener sürecinin hemen her gerçekleşmesi süreklidir.*

Wiener sürecinin önemli özelliklerinden biri onun bir Gauss süreci olmasıdır. Olasılık teorisinden iyi bilinen iki lemma yardımıyla ise Wiener sürecinin bir Gauss süreci olduğu ispatlanabilir.

Lemma 2.1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *rassal değişkenleri bağımsız ve normal dağılmışlar ise o zaman* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *rassal vektörünün dağılımı çok değişkenli normal dağılım olur.*

Lemma 2.2. $\mathbf{X^T} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *rassal vektör,* $\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{T}} = (EX_1, EX_2, \ldots, EX_n)$, *X' in ortalama vektörü ve* $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{n\times n}$, *X' in kovaryans matrisi olmak üzere* $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *çok değişkenli normal dağılımına sahip olsun ve* $\mathbf{Y}^T = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ *olmak üzere,* $\mathbf{a}$ *skaler vektörü ve* $\mathbf{B}$ *skaler matrisi için* $Y = \mathbf{a} + \mathbf{B}X$ *afin dönüşümü verilsin. Bu durumda* $\mathbf{Y}$ *vektörü* $\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$ *ortalamalı ve* $\mathbf{B\Sigma B^T}$ *kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılıma sahiptir.*

Teorem 2.1. *Wiener süreci bir Gauss sürecidir.*

Kanıt. Keyfi $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ alalım. Wiener süreci bağımsız artışlara sahip olduğundan $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_n-1}$ rassal değişkenleri bağımsız ve her biri normal dağılmış rassal değişkenlerdir. O zaman Lemma 2.1' den $(W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_n-1})$ rassal vektörünün dağılımı çok değişkenli normal dağılım olur.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\mathbf{Y} = BX$ afin dönüşümü uygulanırsa, $\mathbf{Y} = (W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_0, \ldots, W_{t_n} - W_0)$ elde edilir ki Lemma 2.2' den $\mathbf{Y}$ de çok değişkenli normal dağılıma sahip olur. $W_0 = 0$ olduğundan $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$' in dağılımı çok değişkenli normal dağılım olur. $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \infty)$'lerin seçimi keyfi olduğundan Wiener süreci bir Gauss süreci olur. □

Teorem 2.2. $\forall s < t$ *için* $W_t - W_s$ *ve* W_{t-s}, $N(0, t-s)$ *normal dağılımına sahiptir.*

Teorem 2.3. $W = (W_t, t \in [0, \infty))$ *Wiener sürecinin kovaryans fonksiyonu*

$$c_W(s,t) = min(s,t)$$

dir.

Kanıt. Genelliği bozmadan $s < t$ kabul edelim. O zaman Wiener sürecinin (2) ve (3) özelliklerinden

$$c_W(s,t) = E(W(s)W(t)) = E(W(s)(W(t) - W(s)) + W^2(s)) = 0 + s = s$$

elde edilir. □

Wiener sürecinin izleyen özellikleri kanıtsız şekilde verilecektir ancak bu özellikler Ito integralinin tanımlanmasında çok önemli bir rol oynamaktadırlar.

Teorem 2.4. [10] *Wiener sürecinin hemen her gerçekleşmesi hiç bir yerde diferansiyellenemezdir. Matematiksel ifadeyle*

$$P\left(\omega : \limsup_{t\to t_0} \frac{W_t - W_{t_0}}{t - t_0} = \infty\right) = 1$$

olur.

Teorem 2.5. [10] *Wiener sürecinin hemen her gerçekleşmesi hiç bir keyfi sonlu* $[0, T]$ *aralığı için sınırlı varyasyona sahip değildir. Diğer deyişle* $[0, T]$*' nin bütün olası* $\tau : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *parçalanmaları için*

$$P\left(\omega : \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |W_{t_k}(\omega) - W_{t_{k-1}}(\omega)| = \infty\right) = 1$$

olur.

3 KOŞULLU BEKLENTİ VE MARTİNGAL

Bu bölümde martingal kavramına temel teşkil eden ve stokastik integrallerin özelliklerinin kanıtlanmasında gerekli olan bir rassal değişken verildiğinde koşullu beklenti kavramı ele alınmıştır. Koşullu beklenti kavramının daha anlaşılır olarak ortaya konulabilmesi için ise üç temel kısım oluşturulmuştur. Öncelikle üretilen sigma cebir tanımlanmış, daha sonra olay verildiğinde koşullu beklenti kavramı, kesikli halde koşullu beklenti kavramıyla birlikte verilmiş ve genel koşullu beklenti kavramı incelenmiştir. Daha sonra yine martingal kavramının tanımlanabilmesine olanak sağlayan filtrasyon, adaptasyon vb. kavramlar ele alınmış ve son olarak martingal kavramı incelenmiş ve martingal kavramı ile ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir.

3.1 Sigma Cebir

Sigma cebir kavramı ölçüm teorisinin önemli ve iyi bilinen kavramlarından biridir ve hem olasılık hem de stokastik süreçler teorisi için temel teşkil etmektedir. Ancak bilinen sigma cebir kavramından öte, bir rassal değişkenin ve rassal değişkenlerin ailelerinin ürettikleri sigma cebir kavramları, stokastik integrallerin tanımlanmasında gerekli olan filtrasyon, martingal vb. kavramların tanımlanabilmesi için temel oluşturmaktadırlar. Bu nedenle bu bölümde öncelikle sigma cebir kavramı ele alınacak ve daha sonra bir rassal değişkenin, bir rassal vektörün ve en önemlisi bir stokastik sürecin ürettiği sigma cebir kavramları incelenecektir.

Tanım 3.1. *Bir Ω kümesi verilsin. Eğer Ω' nın alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{F}$ ailesi;*

1. $\emptyset$ *ve* $\Omega \in \mathfrak{F}$
2. *Eğer* $A \in \mathfrak{F}$ *ise o zaman* $A^c \in \mathfrak{F}$
3. *Eğer* $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F}$ *ise o zaman* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

koşullarını sağlıyorsa o zaman $\mathfrak{F}$ ailesine Ω üzerinde bir sigma cebir denir.

Bir $\mathfrak{C}$ küme ailesi verildiğinde eğer bu küme ailesi bir sigma cebir değilse bu aileye bazı yeni kümeler ekleyerek bir sigma cebir elde edilebilir. Bu $\mathfrak{C}$ ailesine minimum sayıda küme eklenerek elde edilen sigma cebire ya da buna denk olarak $\mathfrak{C}$ ailesini içeren tüm sigma cebirlerin kesişimine $\mathfrak{C}$ ailesinin ürettiği minimal sigma cebir denir ve $\sigma(\mathfrak{C})$ ile gösterilir. Matematiksel olarak bir rassal değişkenin ürettiği sigma cebir aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.2. (Rassal değişkenin ürettiği sigma cebir)[12] *X, verilmiş bir rassal değişken olsun. O zaman $U \subset \mathbb{R}$ açık kümeler olmak üzere bütün $\{\omega : X(\omega) \in U\}$ kümelerinin ürettiği minimal sigma cebire, diğer deyişle $\sigma(\{\omega : X(\omega) \in U\})$'ye X rassal değişkeninin ürettiği sigma cebir denir ve $\sigma(X)$ ile gösterilir.*

Buradan görülüyor ki X rassal değişkeni $(\sigma(X), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ölçülebilirdir. Bu tanım yardımıyla bir rassal vektörün ve bir stokastik sürecin ürettiği sigma cebir kavramları ise şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.3. (Stokastik sürecin ürettiği sigma cebir)[12] $\{X_i, i \in I\}$ *rassal değişkenlerin bir koleksyonu olsun. Bu durumda*

$$\sigma(X_i, i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i)\right)$$

sigma cebirine $\{X_i, i \in I\}$ koleksyonunun ürettiği sigma cebiri denir.

3.2 Bir Olay Verildiğinde Koşullu Beklenti

Tanım 3.4. (Bir olay verildiğinde koşullu beklenti) *Bir B olayı verildiğinde X rassal değişkeninin koşullu beklentisi*

$$E(X|B) = \frac{E(XI_B)}{P(B)} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 0 & ,\omega \notin B \text{ ise} \\ 1 & ,\omega \in B \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve bu fonksiyona B olayının indikatör fonksiyonu denir.

Eğer X bir kesikli rassal değişken ise o zaman (3.1) formülü şu hale dönüşür;

$$\begin{aligned} E(X|B) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{P(\{\omega : X(\omega) = x_k\} \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = x_k|B) \end{aligned}$$

Eğer X, f_X yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rassal değişken ise o zaman (3.1) formülü;

$$\begin{aligned} E(X|B) &= \frac{1}{P(B)} \int_{-\infty}^{\infty} x I_B(x) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{P(B)} \int_B x f_X(x) dx \end{aligned}$$

haline dönüşür.

Bu tanımlamalar gösteriyor ki bir olay verildiğinde koşullu beklenti kabaca, kısıtlanmış bir olasılık uzayı üzerinde elde edilen beklenen değerdir.

Bir olay verildiğinde bir rassal değişkenin koşullu beklentisini tanımı yardımıyla kesikli halde bir rassal değişken verildiğinde başka bir rassal değişkenin koşullu beklentisi kavramı tanımlanabilir. $Y(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ verilmiş kesikli bir rassal değişken olsun ve $A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}, i = 1, 2, \ldots$ kümelerini ele alınsın. Açıktır ki bu kümeler Ω nın bir parçalanışıdır. Yani

$$\forall i \neq j \quad \text{için} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ve} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$

olur.

Tanım 3.5. *X, Ω üzerinde $E|X| < \infty$ koşulunu sağlayan bir rassal değişken olmak üzere bir Y kesikli rassal değişkeni verildiğinde X rassal değişkeninin koşullu beklentisi;*

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|A_i) = E(X|Y = y_i) \qquad \omega \in A_i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımdan görülüyor ki bir Y kesikli rassal değişkeni verildiğinde X rassal değişkeninin koşullu beklentisi, bilinen beklenen değerden farklı olarak, yine bir rassal değişkendir.

Koşullu beklentiye bu temel girişten sonra filtrasyon, martingal, vb. kavramların anlaşılması için asıl gerekli olan genel koşullu beklenti kavramı tanımlanabilir.

3.3 Genel Koşullu Beklenti

Bir önceki bölümde koşullu beklenti bir kesikli rassal değişkenin öngörüntülerinden oluşan küme sistemi yardımıyla tanımlanmıştı. Ancak somut problem-ler için bir rassal değişkenin ürettiği sigma cebir kavramı maalesef yeterli değildir. Bu nedenle somut problemlerde elde edilen informasyonu modellemek için soyut sigma cebirlere ihtiyaç duyulur. Bu soyut sigma cebirler yardımıyla ise yine somut problemleri çözmek için önemli bir araç olan genel koşullu beklenti kavramı tanımlanabilir.

Tanım 3.6. **(Genel koşullu beklenti)**[14] *X,* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *olasılık uzayında tanımlanmış bir rassal değişken ve* $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ *bir alt sigma cebir olsun. Eğer bir Y rassal değişkeni*

1. *Y,* $(\mathfrak{F}_0, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ *ölçülebilir,*

2. $\forall A \in \mathfrak{F}_0$ *için* $E(XI_A) = E(YI_A)$

koşullarını sağlıyor ise o zaman Y rassal değişkenine X'in $\mathfrak{F}_0$*' a göre koşullu beklentisi denir ve* $Y = E(X|\mathfrak{F}_0)$ *olarak gösterilir.*

Bu tanımdan sonra doğal olarak "Böyle bir rassal değişken var mıdır?" ve "Varsa tek midir?" soruları ortaya çıkmaktadır. Ölçüm teorisinin en önemli teoremlerinden biri olan Radon-Nikodym teoremi yardımıyla böyle bir rassal değişkenin var ve tek olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1. **(Radon-Nikodym Teoremi)**[14] $(\Omega, \mathfrak{F})$ *bir ölçülebilir uzay,* P*,* σ*-sonlu, pozitif olmak üzere* P *ve* ν*,* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *üzerinde iki ölçüm ve* ν*,* P*' ye göre mutlak sürekli olsun (*$A \in \mathfrak{F}$ *için P(A)=0 ise v(A)=0' dır). Bu durumda* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *üzerinde tanımlı bir ölçülebilir X fonksiyonu vardır öyle ki*

$$\nu(A) = \int_A X dP$$

olur. Bu X fonksiyonu tektir ve bu fonksiyona ν*' nün* P*' ye göre Radon-Nikodym türevi denir ve*

$$X = \frac{d\nu}{dP}$$

olarak gösterilir.

Teorem 3.2. *Genel koşullu beklenti tanımını gerçekleyen bir ve yalnız bir rassal değişken vardır.*

Kanıt. X, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde bir integrallenebilen rassal değişken ve $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ bir alt σ-cebir ve $P_{\mathfrak{F}_0}$, P' nin $\mathfrak{F}_0$ üzerine kısıtlanmışı olsun. $(\Omega, \mathfrak{F}_0)$ üzerinde bir ν_X işaretlenmiş, sınırlı ölçümü

$$\nu_X(A) = E(XI_A) = \int_{\Omega} XI_A dP_{\mathfrak{F}_0}$$

olarak tanımlansın. $\forall A \in \mathfrak{F}_0$ için $P_{\mathfrak{F}_0} = P$ olduğundan ν_X' in P' ye göre mutlak sürekli olduğu açıktır. Buradan Radon-Nikodym teoremine göre $(\Omega, \mathfrak{F}_0)$ üzerinde bir ve yalnız bir Y rassal değişkeni vardır ki $Y = \dfrac{d\nu_X}{dP_{\mathfrak{F}_0}}$ dir ve Y

1. Y, $\mathfrak{F}_0$ ölçülebilirdir,

2. $\forall A \in \mathfrak{F}_0$ için

$$E(XI_A) = \nu_X(A) = \int_{\Omega} YI_A dP_{\mathfrak{F}_0} = E(YI_A)$$

koşullarını sağlar. □

3.3.1 Koşullu Beklentinin Özellikleri

Bu alt bölümde koşullu beklentinin özellikleri verilecektir. Koşullu beklentinin verilecek olan bu özellikleri bu çalışmada ele alınacak olan Ito stokastik integralinin özelliklerinin ispatlanması için yeterlidir. Koşullu beklentinin diğer özellikleri ise [8]'de bulunabilir.

1. $E(X) = E[E(X|\mathfrak{F}_0)]$' dir.

   Kanıt. Eğer tanımın 2. koşulunda $A = \Omega$ alınırsa özellik ispatlanmış olur. □

2. Eğer X ve $\mathfrak{F}_0$ bağımsızlarsa

$$E(X|\mathfrak{F}_0) = E(X)$$

   olur.

Kanıt. $E(X)$ sabit olduğundan her sigma cebirine göre ölçülebilirdir. O halde $\mathfrak{F}_0$' a göre de ölçülebilirdir. Diğer yandan $\forall A \in \mathfrak{F}_0$ için X ve I_A bağımsız rassal değişkenler olduklarından $E(XI_A) = E(X)E(I_A) = E[I_A E(X)]$ olur. $\square$

3. Koşullu beklenti lineerdir yani X_1 ve X_2 rassal değişkenler $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$$E[(aX_1 + bX_2)|\mathfrak{F}_0] = aE[X_1|\mathfrak{F}_0] + bE[X_2|\mathfrak{F}_0]$$
olur.

4. Eğer X, $\mathfrak{F}_0$ ölçülebilir ise
$$E[X|\mathfrak{F}_0] = X$$
olur.

5. $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_0$ olsun. Bu durumda
$$E[E(X|\mathfrak{F}_0)|\mathfrak{F}_1] = E[X|\mathfrak{F}_1]$$
olur.

6. X, $\mathfrak{F}_0$ ölçülebilir ve Y, $E(|Y|) < \infty$ ve $E(|XY|) < \infty$ koşullarını sağlayan bir rassal değişken olsun. Bu durumda
$$E(XY|\mathfrak{F}_0) = XE(Y|\mathfrak{F}_0)$$
olur.

(3-6) özelliklerinin hepsi tanım yardımıyla hemen ispatlanabilir.

3.4 Martingal

Martingal kavramınının tanımlanması için bir kaç ek kavrama ihtiyaç duyulur. Bunlardan biri daha önce tanımlanan koşullu beklenti kavramıdır. Diğer gerekli kavramlar ise aşağıda tanımlanmıştır.
$(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ koleksyonu aynı $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uzayı üzerine kurulmuş sigma cebirlerin bir koleksyonu ve $\forall t \geq 0$ için $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ olsun.

Tanım 3.7. *Ω üzerindeki sigma cebirlerin bir $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ ailesi verilsin. Eğer $\forall s \leq t$ için*

$$\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$$

oluyorsa o zaman $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ ailesine bir filtrasyon denir.

Tanım 3.8. *Bir $Y = (X_t, t \geq 0)$ stokastik süreci ve bir $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ filtrasyonu verilsin. Eğer $\forall t \geq 0$ için X_t, $\mathfrak{F}_t$ ölçülebilir ise o zaman X stokastik süreci $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ filtrasyonuna uyarlanmıştır denir. Bir X stokastik süreci her zaman X tarafından üretilen*

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$$

filtrasyonuna uyarlanmıştır ve bu filtrasyona doğal filtrasyon denir.

Tanım 3.9. *$X = (X_t, t \geq 0)$ stokastik süreci ve $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ filtrasyonu verildiğinde eğer;*

1. *$\forall t \geq 0$ için $E|X_t| < \infty$*

2. *X, $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$' ye uyarlanmıştır*

3. *$\forall s < t$ için $E[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s$*

koşulları sağlanıyorsa o zaman X sürecine $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ filtrasyonuna göre bir sürekli zamanlı martingal denir ve $(X, (\mathfrak{F}_t))$ yazılır.

Tanım 3.10. *$X = (X_n, n = 0, 1, \ldots)$ kesikli zamanlı stokastik süreci ve $(\mathfrak{F}_n, n = 0, 1, \ldots)$ filtrasyonu verildiğinde eğer;*

1. *$\forall n = 0, 1, \ldots$ için $E|X_n| < \infty$*

2. *X, $(\mathfrak{F}_n, n = 0, 1, \ldots)$' ye uyarlanmıştır*

3. *$\forall n = 0, 1, \ldots$ için $E[X_n|\mathfrak{F}_{n-1}] = X_{n-1}$*

koşulları sağlanıyorsa o zaman X sürecine $(\mathfrak{F}_n, n = 0, 1, \ldots)$ filtrasyonuna göre bir kesikli zamanlı martingal denir ve $(X, (\mathfrak{F}_n))$ yazılır.

Kısalık açışından genellikle eğer ilgili filtrasyon belli ise yalnızca stokastik sürecin yazılması yeterlidir.

Aşagıdaki teoremde bir martingalin en temel özelliği verilmiştir.

Teorem 3.3. *Eğer bir X süreci martingal ise o zaman beklenti fonksiyonu sabittir.*

Kanıt. Martingal olma özelliğinden $\forall s < t$ için $E[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s$ olur. Eğer her iki taraftan beklenen değer alırsak o zaman $E(X_s) = E(E[X_t|\mathfrak{F}_s])$ elde ederiz. Koşullu beklentinin 1. özelliğinden ise $E(E[X_t|\mathfrak{F}_s]) = E(X_t)$ yazabiliriz. Yani $\forall s < t$ için $E(X_s) = E(X_t)$ olur.

□

Bu teorem sonucunda bir stokastik sürecin martingal olup olmadığı hemen kontrol edilebilir. Eğer stokastik sürecin beklenti fonksiyonu sabit değil ise o zaman hemen o stokastik sürecin martingal olmadığı söylenebilir. Ancak beklenti fonksiyonu sabitse martingal olma hakkında kesin bir yargıya varılamaz.

4 STOKASTİK İNTEGRALLER

Stokastik integraller, stokastik diferansiyel denklemlerin çözümü için gerekli en önemli kavramdır. İleriki kısımlarda görülecektir ki Wiener sürecinin diferansiyellenemezlik ve sınırsız varyasyona sahip olma özeliklerinden dolayı stokastik diferansiyel denklemler, integral denklemler olarak ele alınacaktır. Ancak bu tür integral denklemlerde ortaya çıkan integrallerden bazıları bilinen integraller, Riemann-Stieltijes ya da Lebesgue integralleri, gibi tanımlanamamaktadır. Bu bölümde öncelikle daha ileri integrallere temel oluşturması açısından bilinen Riemann-Stieltijes integralinin tanımı ve bir kaç özelliği verilmiştir. Daha sonra stokastik integrallerin tanımlanması için gerekli olan sezgisel yöntem anlatılmaya çalışılmış ve son olarak bazı özel süreçler ve genel süreçler için stokastik integraller tanımlanmıştır.

4.1 Riemann-Stieltjes İntegrali

Bir fonksiyonun Riemann-Stieltjes integrali matematiksel olarak şöyle tanımlanır;

Tanım 4.1. [15] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *iki fonksiyon ve* $\forall t \in [a,b]$ *için* $|f(t)|, |g(t)| < \infty$ *olsun.* $[a,b]$ *aralığının keyfi* $\tau_N : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ *parçalanışı olsun ve* $\|\tau\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N} |t_i - t_{i-1}|$ *olarak tanımlayalım.* $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ *keyfi nokta olmak üzere*

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

toplamına τ *için Riemann-Stieltijes toplamı denir. Eğer* $n \to \infty$ *iken ve* $\|\tau\| \to 0$ *iken* S_τ *toplamı bir sayıya yakınsıyor ise o zaman bu sayıya* f *fonsyonunun* g *fonksiyonuna göre Riemann-Stieltijes integrali denir ve*

$$\int_a^b f(t)dg(t)$$

ile gösterilir.

Buradan hemen şu sorular ortaya çıkmaktadır: Riemann-Stieltjes integrali ne zaman vardır ve integralleyici fonksiyon g yerine Wiener sürecinin bir gerçekleşmesi alınabilir mi?. Bu soruya yanıt aramak için integralin varlığı hakkında bir kaç teorem verilebilir.

Teorem 4.1. *f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığının aynı t_0 noktasında süreksiz olmasın ve f sürekli g ise sınırlı varyasyona sahip olsun bu durumda $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ integrali vardır.*

İntegralleyici fonksiyonu bir Wiener süreci olan integrallerin varlığı için ise şöyle bir teorem verilebilir.

Teorem 4.2. *f deterministik bir fonksiyon ya da bir stokastik sürecin gerçekleşmesi olmak üzere; eğer f, $[a, b]$ üzerinde diferansiyellenebilir ve sınırlı türeve sahip ise o zaman ;*

$$\int_a^b f(t)dW(t, \omega)$$

integrali her Wiener süreci gerçekleşmesi için vardır.

Bu teoremden şu integrallerin varlığını hemen sonuç olarak alabiliriz;

$$\int_a^b e^t dW(t, \omega), \quad \int_a^b sin(t)dW(t, \omega), \quad \int_a^b t^p dW(t, \omega), \quad p \geq 0$$

çünkü bu üç fonksiyonunda $[a, b]$ aralığı üzerinde türev fonksiyonları sınırlıdır.

Bununla beraber bu teorem yalnızca bir varlık teoremidir ve bu integrallerin Wiener süreci cinsinden elde edilebileceği anlamına gelmemektedir.

4.2 Ito İntegrali

Önceki bölümde verilen teoremlerin hiç biri $\int_0^1 W(t, \omega)dW(t, \omega)$ integrali için geçerli olmadığından bu integralin varlığından henüz söz edemeyiz. Ancak bu integralin tanımlanması için gerekli yöntem aşağıdaki örnek yardımıyla segisel olarak elde edilebilir.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}} \Delta_i W$$

Riemann-Stieltjes toplamını ele alınsın. Burada $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $[0, t]$' nin bir ayrışımı $\Delta W : \Delta_i W = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots n$ ise $\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ artışına karşılık gelen Wiener süreci artışı olsun. Böylece S_n toplamı $[t_{i-1}, t_i]$ aralığının sol ucunda ki R-S toplamından başka birşey değildir. Şimdi S_n şu formda yazılırsa;

$$S_n = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i W)^2 = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(t)$$

Wiener süreci bağımsız ve durağan artışlara sahip olduğundan;

$$E(\Delta_i W \Delta_j W) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \text{var}(\Delta_i W) = t_i - t_{i-1} = \Delta_i, & i = j \end{cases}$$

ve

$$EQ_n(t) = \sum_{i=1}^{n} E(\Delta_i W)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = t$$

olur. Yine Wiener sürecinin bağımsız artışlarından ve $\text{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$ eşitliğinden;

$$\text{var}(Q_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}[(\Delta_i W)^2] = \sum_{i=1}^{n} [E(\Delta_i W)^4 - \Delta_i^2]$$

Bilindiği gibi eğer $X \sim N(0,1)$ ise o zaman

$$E(\Delta_i W)^4 = EW^4_{t_i - t_{i-1}} = 3\Delta_i^2$$

olur buradan da

$$\text{var}(Q_n(t)) = 2\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2$$

olur. Böylece, eğer $||\tau_n|| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \to 0$ olduğunda

$$\text{var}(Q_n(t)) \leq 2||(\tau_n)|| \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 2t||\tau_n|| \to 0$$

olur. $\text{var}(Q_n(t)) = E(Q_n(t) - t)^2$ olduğundan buradan $Q_n(t)$' nin ortalama kare anlamda t' ye yakınsadığı görülmüş olur. $S_n = 0.5[W_t^2 - Q_n(t)]$ olduğundan $n \to \infty$ limiti $0.5[W_t^2 - t]$' ye yakınsar. Bu limit

$$\int_0^t W(s,\omega) dW(s,\omega) = 0.5[W_t^2 - t]$$

olarak kullanabilir. Bu sonuç ise daha genel $\int_0^t X(s,\omega)dW(s,\omega)$ integrallerin nasıl tanımlanması gerektiği hakkında sezgisel bir yaklaşım kazandırır.

4.2.1 Adi Süreçler İçin Ito İntegrali

Ito integralinin tanımlanışı gerçekte Lebesque integraline hayli benzemektedir. Bu nedenle ilk önce Ito integrali adi süreç adı verilen bir stokastik süreç sınıfında tanımlanır ve daha sonra genel süreçlere genelleştirilir.

Öncelikle [a,b] sabitlenmiş bir aralığı, $W = (W_t, t \in [a,b])$ Wiener sürecini göstersin ve $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a,b]\}$ ise

1. $\forall t \geq 0$ için $W(t, \omega)$, $\mathfrak{F}_t$ ölçülebilirdir,

2. $\forall s \leq t$ için $W(t) - W(s)$, $\mathfrak{F}_s$' den bağımsızdır

koşullarını sağlayan bir filtrasyon olsun.

Bununla birlikte $\mathfrak{M}^2[a, b]$ ile öyle $\{X(t, \omega), t \in [a, b]\}$ stokastik süreçlerinin uzayı gösterilecektir öyle ki bu stokastik süreçler

1. $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a, b]\}$' ye uyarlanmış,

2. $\int_a^b EX^2(s, \omega)\, ds < \infty$

koşullarını sağlarlar.

Ayrıca $\mathfrak{M}^2[a, b]$ uzayının $||X|| = \int_a^b EX^2(s, \omega)\, ds$ normuyla bir Banach uzayı olduğu da kanıtlanabilir.

Bu tanımlamalarla birlikte adi süreç aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.2. **(Adi Süreç)**[8] *Bir $\xi = (\xi(t, \omega), t \in [a, b]) \in \mathfrak{M}^2[a, b]$ süreci verilsin ve $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $[a, b]$' nin bir parçalanışı olsun ;*

$$X(t, \omega) = \sum_{i=1}^{N} \xi_{i-1}(\omega) I_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$$

şeklinde olarak tanımlanan X sürecine bir adi süreç denir. Açıktır ki bu şekilde tanımlanan X süreci $\mathfrak{M}^2[a, b]$' ye aittir.

Adi süreçler için Ito integrali ise şu şekilde tanımlanır.

Tanım 4.3. **(Adi Süreçler İçin Itô İntegrali)**[8] *$X \in \mathfrak{M}^2[a, b]$ bir adi süreç olsun. O zaman X' in $[a, b]$ üzerindeki Ito integrali*

$$\int_a^b X(s, \omega)\, dW(s, \omega) := \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)(W(t_i, \omega) - W(t_{i-1}, \omega))$$

olarak tanımlanır.

Bu integralin sonucu bir rassal değişken olarak alınır. Eğer integralin üst sınırı bir değişken ise o zaman tanım şu hale dönüşür.

Tanım 4.4. *$X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ bir adi süreç olsun. O zaman X' in $t \in [a,b]$ olmak üzere Ito integrali*

$$\int_a^t X(s,\omega)\,dW(s,\omega) := \int_a^b X(s,\omega)\,I_{[a,t]}(s)\,dW(s,\omega)$$

olarak tanımlanır.

Bu integralin sonucunda ise bir stokastik süreç elde edilir. Adi süreçler için Ito integralinin en önemli özelliği integral sonucu ortaya çıkan stokastik sürecin verilen $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ filtrasyonuna göre martingal olmasıdır.

Teorem 4.3. *$X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ bir adi süreç olsun. Bu durumda verildiğinde;*

$$\eta(t,\omega) = \int_a^t X(s,\omega)\,dW(s,\omega), \quad t \in [a,b]$$

stokastik süreci $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a,b]\}$ filtrasyonuna göre bir martingaldir.

Kanıt. $a \leq s < t \leq b$ olsun.

$$\eta(t,\omega) = \eta(s,\omega) + \int_s^t X(s,\omega)\,dW(s,\omega)$$

olur. Her iki tarafın $\mathfrak{F}_s$' e göre koşullu beklentisini alırsak koşullu beklentinin lineerlik özelliğiyle birlikte

$$E(\eta(t,\omega)|\mathfrak{F}_s) = E(\eta(s,\omega)|\mathfrak{F}_s) + E(\int_s^t X(s,\omega)\,dW(s,\omega)|\mathfrak{F}_s)$$

elde edilir. $\eta(t,\omega)$' da $\{\mathfrak{F}_t, t \in [a,b]\}$' a uyarlanmış olduğundan

$$E(\eta(t,\omega)|\mathfrak{F}_s) = \eta(s,\omega) + E(\int_s^t X(u,\omega)\,dW(u,\omega)|\mathfrak{F}_s)$$

olur. O zaman

$$E(\int_s^t X(u,\omega)\,dW(u,\omega)|\mathfrak{F}_s) = 0 \tag{4.1}$$

olduğunu gösterilirse teorem kanıtlanmış olur. $X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ bir adi süreç olduğundan

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{N} \xi_{i-1}(\omega) I_{[t_{i-1},t_i)}(t)$$

olarak gösterilebilir ve integrali

$$\int_s^t X(u,\omega)\,dW(u,\omega) := \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega)) \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır. (4.2)' i (4.1)' in sol tarafında yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
&E(\int_s^t X(s,\omega)\,dW(s,\omega)|\mathfrak{F}_s)\\
&\quad= E(\textstyle\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega))|\mathfrak{F}_s)\\
&\quad= \textstyle\sum_{i=1}^n E(\xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega))|\mathfrak{F}_s)\\
&\quad= \textstyle\sum_{i=1}^n E[E(\xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega))|\mathfrak{F}_{t_{i-1}})|\mathfrak{F}_s]\\
&\quad= \textstyle\sum_{i=1}^n E[\xi_{i-1}(\omega)E((W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega))|\mathfrak{F}_{t_{i-1}})|\mathfrak{F}_s]\\
&\quad= 0
\end{aligned}
$$

□

4.2.2 Adi Süreçler İçin Itô İntegralinin Özellikleri

Adi süreçler için Itô integrali bilinen Riemann-Stieltjes integraline benzer özellikler göstermektedir. Bu özelliklerden bir kaçı şöyledir.

$X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ bir adi süreç ve $\int_a^b X(s,\omega)\,dW(s,\omega)$ X' in $[a,b]$ aralığı üzerindeki Itô integrali olsun.

1. Itô integralinin beklenen değeri:

$$E(\int_a^b X(s,\omega)\,dW(s,\omega)) = 0$$

dır.

Kanıt. $E(\int_a^b X(s,\omega)\,dW(s,\omega))$

$$
\begin{aligned}
&= E(\textstyle\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega)))\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n E(\xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega)))\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n E[E(\xi_{i-1}(\omega)(W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega))|\mathfrak{F}_{t_{i-1}})]\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n E[\xi_{i-1}(\omega)E((W(t_i,\omega)-W(t_{i-1},\omega))|\mathfrak{F}_{t_{i-1}})]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

2. Itô integrali izometri özelliğini sağlar:

$$E(\int_a^b X(s,\omega)\,dW(s,\omega))^2 = E(\int_a^b X^2(s,\omega)\,dt)$$

olur.

Kanıt.

$E(\int_a^b X(s,\omega)\,dW(s,\omega))^2$
$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_{i-1}\xi_{j-1}(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))(W(t_j,\omega) - W(t_{j-1},\omega))$

olur. Genelliği bozmadan $i < j$ alalım.

$$\begin{aligned}
&E(\xi_{i-1}\xi_{j-1}(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))(W(t_j,\omega) - W(t_{j-1},\omega))\\
&= E(E[\xi_{i-1}\xi_{j-1}(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))(W(t_j,\omega) - W(t_{j-1},\omega))|\mathfrak{F}_{t_{j-1}}])\\
&= E(\xi_{i-1}\xi_{j-1}(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))E[(W(t_j,\omega) - W(t_{j-1},\omega))|\mathfrak{F}_{t_{j-1}}])\\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Öte yandan i=j ise

$$\begin{aligned}
&E(\xi_{i-1}^2(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))^2)\\
&\quad = \quad E(E[\xi_{i-1}^2(\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))^2|\mathfrak{F}_{t_{i-1}}])\\
&\quad = \quad E(\xi_{i-1}^2(\omega)E[(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))^2])\\
&\quad = \quad E(\xi_{i-1}^2(\omega)(t_i - t_{i-1}))\\
&\quad = \quad E(\xi_{i-1}^2(\omega))(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $i = j$ ve $i < j$ durumları birlikte dikkate alınırsa özellik ispatlanmış olur. □

3. $X^{(1)}$ ve $X^{(2)}$ $[a,b]$ üzerinde iki adi stokastik süreç ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere;

$$\int_a^b c_1\,X^{(1)} + c_2\,X^{(2)}\,dW = c_1\int_a^b X^{(1)}\,dW + c_2\int_a^b X^{(1)}\,dW$$

olur.

4.2.3 Genel Itô Stokastik İntegrali

Bir önceki bölümde adi süreçler için tanımlanan Itô integrali aynı Lebesgue integralinin genelleştirilmesinde olduğu gibi keyfi stokastik süreçler için genelleştirilebilir. Genelleştirmenin yapılabilmesi için ise aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyulur.

Lemma 4.1. *$X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ stokastik süreç ve $E(X(t)X(s))$, $(s,t) \in [a,b]^2$' nin sürekli bir fonksiyonu olsun. Bu durumda $\mathfrak{M}^2[a,b]$' de adi süreçlerin öyle bir $\{X_n\}$ dizisi vardır ki*

$$\int_a^b E(X(t,\omega) - X_n(t,\omega))^2 dt \to 0$$

olur.

Kanıt. $\tau_n : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, [a,b]' nin bir parçalanması olsun ve

$$X_n(t,\omega) = X(t_{i-1},\omega), \quad t_{i-1} \leq t < t_i$$

olarak tanımlansın. $E(X(t,\omega)X(s,\omega))$, $(s,t) \in [a,b]^2$' nin sürekli bir fonksiyonu olduğundan

$$\lim_{s\to t} E[(X(t,\omega) - X(s,\omega))^2] = 0$$

olur. O zaman $\forall t \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} E[(X(t,\omega) - X_n(t,\omega))^2] = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ eşitsizliğinden

$$(X(t,\omega) - X_n(t,\omega))^2 \leq 2(X^2(t,\omega) + X_n^2(t,\omega))$$

elde edilir. Buradan

$$E(X(t,\omega) - X_n(t,\omega))^2 \leq 2(EX^2(t,\omega) + EX_n^2(t,\omega)) \leq 4 \sup_{t\in[a,b]} EX^2(t,\omega) \tag{4.4}$$

olur. Eşitsizlik (4.3) ve (4.4)' den Lebesgue baskın yakınsama teoremi kullanılabilir ve

$$\int_a^b E(X(t,\omega) - X_n(t,\omega))^2 dt \to 0$$

gösterilmiş olur. □

Diğer deyişle keyfi bir $X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ stokastik süreci verildiğinde $\mathfrak{M}^2[a,b]$' de bu sürece yakınsayan bir $\{X_n\}$ adi süreç dizisi vardır. Artık bu lemma yardımıyla Itô integrali keyfi stokastik süreçlere genelleştirebilir.

Teorem 4.4. [8] *$X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ stokastik süreç, $\{X_n\}$ ise bu sürece yakınsayan adi süreçler dizisi, $\{I(X_n) = \int_a^b X_n(t,\omega)\, dW(t,\omega)\}$ ise $\{X_n\}$ adi süreç dizisinin Ito integralleri dizisi olsun. Bu durumda öyle bir $I(X) \in L^2(\Omega)$ vardır öyle ki;*

$$E(I(X) - I(X_n))^2 \to 0$$

olur bu I(X) rassal değişkeni ise X stokastik sürecinin Itô integrali olarak alınır ve $I(X) = \int_a^b X(t,\omega)\, dW(t,\omega)$ olarak gösterilir.

Kanıt. Adi süreçler için Itô integralinin izometri özelliğinden

$$E(I(X_n) - I(X_m))^2 = \int_a^b E(X_n(t,\omega) - X_m(t,\omega))^2 dt$$

yazılabilir. $\{X_n\}$ adi süreç dizisi ise $\mathfrak{M}^2[a,b]$' de bir önceki teoreme göre yakınsak bir dizi olduğundan aynı zamanda bir Cauchy dizisidir. O halde $n, m \to \infty$ iken $E(I(X_n) - I(X_m))^2 \to 0$ olur. Bu da o anlama gelir ki $\{I(X_n)\}$ dizisi $L^2(\Omega)$' da bir Cauchy dizisidir. $L^2(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olduğundan $\{I(X_n)\}$ dizisi $L^2(\Omega)$' da yakınsaktır. □

Bu teorem sonucunda genelleştirilmiş Ito integrali adi süreçlerin Ito integralleri dizisinin limiti olarak tanımlamış oldu.

Genelleştirilmiş Ito integrali ile ilgili hemen akla gelebilecek bir soru ise "bu integral Riemann-Stieltjes toplamlarının limiti olarak alınabilirmi?" sorusudur. İzleyen teorem yardımıyla bu sorunun yanıtı evet olacaktır.

Teorem 4.5. [8] $X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ *stokastik süreci verilsin ve kabul edelim ki* $\forall s,t \in [a,b]$ *için* $E(X(s)X(t))$ *sürekli fonksiyon olsun. O zaman* $\tau_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, $[a,b]$*' nin bir parçalanması ve* $\|\tau_n\| = \max_{i=0,1,\ldots,N} t_i - t_{i-1}$ *olmak üzere*

$$\int_a^b X(t,\omega)\,dW(t,\omega) = \lim_{\|\tau_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} X(t_{i-1},\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega))$$

olur.

Kanıt. Lemma 4.1'in kanıtında olduğu gibi $\tau_n : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, [a,b]' nin bir parçalanması olsun ve

$$X_n(t,\omega) = X(t_{i-1},\omega), \quad t_{i-1} \le t < t_i$$

olarak tanımlansın. O zaman $E(X(t,\omega)X(s,\omega))$, $(s,t) \in [a,b]^2$' nin sürekli bir fonksiyonu olduğunda

$$\int_a^b E(X(t,\omega) - X_n(t,\omega))^2 dt \to 0$$

olduğu yine Lemma 4.1'in kanıtında gösterilmiştir. Buradan genel Itô integralinin tanımından

$$\int_a^b X(t,\omega)\,dW(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} I(X_n)$$

olur. Adi süreçlerin Itô integralleri tanımından ise

$$\begin{aligned} I(X_n) &= \sum_{i=1}^{N} X_n(t_{i-1},\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega)) \\ &= \sum_{i=1}^{N} X(t_{i-1},\omega)(W(t_i,\omega) - W(t_{i-1},\omega)) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur. □

Bu teorem sonucunda görülüyor ki bir genel Itô integrali integrant sürecin $[t_{i-1}, t_i)$ alt aralıklarının sol uçtaki değerlerinin Riemann-Stieltjes toplamının limitinden başka bir şey değildir.

4.2.4 Genel Ito İntegralinin Özellikleri

$X \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ bir adi süreç ve $I(X) = \int_a^b X(s,\omega)\, dW(s,\omega)$ X' in $[a,b]$ aralığı üzerindeki Itô integrali olsun.

1.
$$EI(X) = E(\int_a^b X(s,\omega)\, dW(s,\omega)) = 0$$
olur.

2. Ito stokastik integrali izometri özelliğini sağlar;
$$E(\int_a^b X(t,\omega)\, dW(t,\omega))^2 = E\left(\int_a^b X^2(t,\omega)\, dt\right)$$
olur.

3. $X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ iki stokastik süreç ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere;
$$\int_a^b c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)}\, dW = c_1 \int_a^b X^{(1)}\, dW + c_2 \int_a^b X^{(1)}\, dW$$
olur.

Bu özelliklerin hepsi Teorem 4.5'ten adi süreçlerin Itô integralinin özelliklerinin ispatlarına benzer olarak ispatlanabilir.

4.3 Ito Lemması

Şimdiye kadar genel süreçler için Ito integralini tanımlandı. Ancak bu bölüme kadar ele alınan bilgilerle hala bu integrallerin Wiener süreci cinsinden nasıl ifade edilebilecekleri bilinmemektedir. Bu yüzden Ito lemması çok önemlidir ve Ito lemması stokastik analizin temel lemması olarakta adlandırılır. Çünkü Ito lemması Newton analizinin temel teoreminin bir benzeridir. Bu temel lemmanın 3 tanede genelleştirilmesi söz konusudur ancak biz bu çalışmada yalnızca temel lemma ile yetineceğiz.

Teorem 4.6. [10] *f, ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda;*

$$f(W(t,\omega)) - f(W(s,\omega)) = \int_s^t f'(W(x,\omega))dW(x,\omega) + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W(x,\omega))dx$$

olur.

Aşağıdaki örnek Ito kalkülüsü ile Newton-Leibnitz kalkülüsü arasındaki temel farkı ortaya koymaktadır.

Örnek 1. *Ito lemması yardımıyla $\int_0^t W(s,\omega)dW(s,\omega)$ integralinin değerini hesaplanmaya çalışılsın. $f(t) = t^2$ olsun. O zaman $f'(t) = 2t$, $f''(t) = 2$ olur. Bu durumda $s < t$ için Ito lemmasından*

$$W^2(t,\omega) - W^2(s,\omega) = 2\int_s^t W(x,\omega)dW(x,\omega) + \int_s^t dx$$

Eğer $s = 0$ dersek o zaman;

$$\int_0^t W(x,\omega)dW(x,\omega) = \frac{1}{2}(W^2(t,\omega) - t)$$

olarak elde edilir.

Buradan görüldüğü gibi Newton kalkülüsünün temel lemması Ito kalkülüsünde geçerli değildir.

5 STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1 Rassal Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde stokastik diferansiyel denklemlerin en sade biçimi olan rassal diferansiyel denklemlere değinilmiştir. Rassal diferansiyel denklemler bilinen adi diferansiyel denklemlerin Cauchy problemlerinde başlangıç koşul veya koşullarının rasgeleştirilmesiyle elde edilmektedir. Diğer bir deyişle Cauchy probleminin verilen deterministik başlangıç koşulu yerine bir rassal değişken getirilmektedir. Diğer bi deyişle bu türlü denklemlerde rassallık yalnızca başlangıç koşullarından kaynaklanmaktadır.

Bir

$$\begin{cases} F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \qquad \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \tag{5.1}$$

Cauchy problemi verilsin. Problem (5.1)' de eğer her bir başlangıç koşulunu rasgeleştirirsek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenler olmak üzere;

$$\begin{cases} F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \\ X(t_0) = X_0 \\ X'(t_0) = X_1 \\ \qquad \vdots \\ X^{(n-1)}(t_0) = X_{n-1} \end{cases} \tag{5.2}$$

elde ederiz. Problem (5.2)' nin çözümü Ito kalkülüsü gerektirmez. Bilinen adi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri ile çözümler elde edilebilir ve çözüm bir stokastik süreç olarak karşımıza çıkar.

Rassal diferansiyel denklemler genellikle başlangıç değerlerin kesin olarak elde edilemediği durumlarda kullanılır. Örneğin; belirli bir bölgedeki karınca nüfusu veya bir radyoaktif maddenin bozunması diferansiyel denklemlerle modellenmek istenildiğinde bu problemlerin başlangıç değerlerini kesin olarak elde etmek zor olacaktır. Ancak istatistiksel yöntemlerle başlangıç değerlerin dağılımları yaklaşık olarak tahmin edilebilir. Bu nedenle başlangıç değerleri, belirli dağılımlara sahip rassal değişkenler olarak ele alabiliriz.

5.2 Ito Stokastik Diferansiyel Denklemleri

Bir önceki kısımda RDD' lerde rassallığın yalnızca başlangıç değerden kaynaklandığını gördük. Ancak problemlerde rassallık hem başlangıç değerden hemde deterministik diferansiyel denkleme eklenen Wiener süreci gibi bir rassal terimden kaynaklanabilir. Bu tür diferansiyel denklemlere genel olarak stokastik diferansiyel denklemler denir ve genel formda;

$$dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))dt + \psi(t, X(t,\omega))dW(t,\omega) \tag{5.3}$$

olarak gösterilir.

Ancak burada Wiener süreci hemen hemen kesin diferansiyellenemez olduğundan dW gösterimi anlamsız olacaktır. Bu nedenle bu gösterim yalnızca;

$$X(t,\omega) = X(t_0,\omega) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s, X(s,\omega))dt + \int_{t_0}^{t} \psi(s, X(s,\omega))dW(s,\omega)$$

integral denkleminin sembolik bir gösterimidir. Burada ilk integral bilinen Riemann integrali, ikinci integral ise Ito integralidir.

5.2.1 Itô Stokastik Diferansiyel Denklemlerinde Çözüm Kavramları

Tanım 5.1. $W(t,\omega) \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ *standart Wiener süreci olmak üzere, eğer bir* X *stokastik süreci*

$$dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))dt + \psi(t, X(t,\omega))dW(t,\omega) \tag{5.4}$$

denklemini sağlıyor ise X *stokastik sürecine* (5.4) *denkleminin bir çözümü denir.*

Buradan hemen şu sonuç çıkarılabilir. $W(t,\omega) \in \mathfrak{M}^2[a,b]$ olduğundan $W(t,\omega)$' nın uyarlanmış olduğu bir filtrasyon sözkonusudur. Eğer (5.4) denklemi integral denklem halinde düşünülürse o zaman çözüm olan X stokastik sürecininde aynı filtrasyona uyarlanmış olacağı açıktır.

Stokastik diferansiyel denklemlerin iki tür çözümü sözkonusudur. Bunlardan biri kuvvetli, diğeri ise zayıf çözüm olarak adlandırılır. Kuvvetli çözümlerde gerçekleşme davranışları önemlidir. Stokastik diferansiyel denklemin bir kuvvetli çözümü denklemdeki Wiener süreci başka bir Wiener süreci ile değiştirildiğinde hemen hemen gerçekleşmeleri değişmeyen çözümdür.

Zayıf çözümde ise gerçekleşmeler önemli değildir yalnızca dağılımsal özellikler önemlidir. Bu nedenle zayıf çözüm için yalnızca (5.4) denklemini sağlayacak bir özel Wiener süreci bulunması yeterlidir.

5.2.2 Kuvvetli Çözümlerin Varlığı ve Tekliği

Verilen bir diferansiyel denklemin bir probleme uygulanabilmesi için öncelikle onun çözümünün olup olmadığı araştırılmalıdır. Eğer verilen diferansiyel denklemin bir çözümü yoksa gelecek için herhangi bir tahmin yapmamız mümkün olmayacaktır. Bununla beraber eğer bir diferansiyel denklemin çözümü var ama birden fazla ise yine gelecekteki tahminleri hangi çözüme göre yapacağımızı bilemeyeceğimizden diferansiyel denklemin, problem için bir önemi kalmamaktadır. Bu nedenle bir probleme uygun diferansiyel denklem modeli kurulduktan sonra öncelikle "Denklemin çözümü var mıdır ?" ve "Varsa çözüm tek midir?" sorularına cevap aranması gereklidir. Deterministik diferansiyel denklemler için "Picard Varlık ve Teklik Teoremi" benzer şekilde Itô stokastik diferansiyel denklemleri için de [8]'de şu şekilde verilmiştir.

Teorem 5.1. *$W(t,\omega)$ standart Wiener süreci ve $W(t,\omega) \in \mathfrak{M}^2[0,T]$ olmak üzere*

$$\begin{cases} dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))dt + \psi(t, X(t,\omega))dW(t,\omega) \\ X(0,\omega) = X_0 \end{cases}$$

stokastik Cauchy problemi (SCP) verilsin. Başlangıç koşulu için $EX_0^2 < \infty$, X_0, $\mathfrak{F}_0$ ölçülebilir olsun ve $\forall t \in [0,T]$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için katsayı fonksiyonları $\varphi(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aşağıdaki koşulları sağlasınlar;

1. *$[0,T] \times \mathbb{R}$ üzerinde ölçülebilir olsunlar,*

2. *Doğrusal büyüme koşulunu sağlasınlar*

$$|\varphi(t,x)|^2, |\psi(t,x)|^2 \leq C(1 + x^2)$$

3. *İkinci değişkene göre Lipchitz koşulunu sağlasınlar*

$$|\varphi(t,x)-\varphi(t,y)|+|\psi(t,x)-\psi(t,y)|\leq K|x-y|$$

Bu durumda SCP' nin $[0,T]$ *aralığında bir ve yalnız bir* $X=\{X(t,\omega),t\in[0,T]\}$ *sürekli kuvvetli çözümü vardır.*

Çözümlerin varlığı ve tekliği garantilendikten sonra tahminleme süreci için iki önemli kavram çözümlerin sınırlılığı ve sürekliliğidir. Modelin probleme uygunluğu açısından bu iki durumunda modelin çözümünün varlığı ve tekliği garantilendikten sonra dikkatlice kontrol edilmelidir. Sırasıyla çözümün sınırlılığı ve sürekliliği teoremleri ise [1]'de aşağıdaki gibi verilmişlerdir.

Teorem 5.2. [1] (5.3) *denkleminde katsayı fonksiyonları* $\varphi(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\psi(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall s,t\in[0,T]$ *ve* $\forall x,y\in\mathbb{R}$ *için aşağıdaki koşulları sağlasın.*

1. $|\varphi(t,x)-\varphi(s,y)|^2\leq K(|t-s|+|x-y|^2)$
2. $|\varphi(t,x)|^2\leq K|1+|x|^2|$
3. $|\psi(t,x)-\psi(s,y)|^2\leq K(|t-s|+|x-y|^2)$
4. $|\psi(t,x)|^2\leq K|1+|x|^2|$

ve $X=\{X(t,\omega),t\in[0,T]\}$, *denklem* (5.3)*' nin bir çözümü olsun. Bu durumda* $\forall t\in[0,T]$ *için*

$$E|X(t)|^2\leq 3(E|X(0)|^2+KT^2+KT)\exp(3K(T+T^2))$$

olur.

Teorem 5.3. [1] (5.3) *denkleminde katsayı fonksiyonları* $\varphi(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\psi(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall s,t\in[0,T]$ *ve* $\forall x,y\in\mathbb{R}$ *için aşağıdaki koşulları sağlasın.*

1. $|\varphi(t,x)-\varphi(s,y)|^2\leq K(|t-s|+|x-y|^2)$
2. $|\varphi(t,x)|^2\leq K|1+|x|^2|$

3. $|\psi(t,x)-\psi(s,y)|^2 \leq K(|t-s|+|x-y|^2)$

4. $|\psi(t,x)|^2 \leq K|1+|x|^2|$

ve $X = \{X(t,\omega), t \in [0,T]\}$*, denklem* (5.3)*' nin bir çözümü olsun. Bu durumda öyle bir* $C \geq 0$ *sabiti vardır öyle ki* $\forall t, r \in [0,T]$ *için;*

$$E|X(t)-X(r)|^2 \leq C|t-r|$$

olur.

Buradan eğer $\delta = \epsilon/C$ seçersek; $\forall\epsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ olur öyle ki $|t-r| \leq \delta$ iken $||X(t)-X(r)|| \leq \epsilon$ olur. Bu da bize çözümlerin bu koşullar altında [0,T] aralığında sürekli olduğunu gösterir.

5.2.3 Itô Stokastik Diferansiyel Denklemlerinin Kesin Çözümleri

Şu ana kadar Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin çözümü, çözümün varlığı ve tekliği, çözümün sürekliliği ve sınırlılığı gibi kavramlar ele alındı. Ancak henüz Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin kesin çözümlerinin nasıl elde edilebileceği konusuna değinilmedi. Bu alt bölümde bazı Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin kesin çözümlerinin Itô stokastik diferansiyel denklemleri için Ito Lemması yardımıyla nasıl elde edilebileceğine değinilecektir.

Teorem 5.4. (Itô stokastik diferansiyel denklemi için Ito lemması)[5] *Itô stokastik diferansiyel denklemi* (5.3) *verilsin ve* $F(t,x)$ *ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda ;*

$$\begin{aligned} dF(t,X) &= \left(\frac{\partial F(t,X)}{\partial t} + \varphi(t,X)\frac{\partial F(t,X)}{\partial x} + \frac{1}{2}\varphi^2(t,X)\frac{\partial^2 F(t,X)}{\partial x^2}\right)dt \\ &+\psi(t,X)\frac{\partial F(t,X)}{\partial x}dW(t) \end{aligned}$$

formülü geçerli olur. Burada $\dfrac{\partial F(t,X)}{\partial x} = \left.\dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right|_{x=X}$ *anlamına gelir.*

Kısım 5.3.2'nin başında belirtildiği gibi Itô stokastik diferansiyel denklemleri için Ito Lemması yardımıyla bazı Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin kesin çözümleri elde edilebilir. Kesin çözümü elde edilebilen Itô stokastik diferansiyel denklemlerinden en önemlilerinden biri ise genelde finansal uygulamalarda kullanılar birinci mertebeden sabit katsayılı bir lineer Itô stokastik diferansiyel denklemi olan

$$\begin{cases} dX(t,\omega) = \mu X(t,\omega)\,dt + \sigma X(t,\omega)\,dW(t,\omega) \\ X(0,\omega) = X_0(\omega) \end{cases} \tag{5.5}$$

denklemidir.

Denklem (5.5) verilsin ve $F(t,x) = \ln(x)$ olsun. Burada, katsayı fonksiyonları $\varphi(t, X(t,\omega)) = \mu X(t,\omega)$ ve $\psi(t, X(t,\omega)) = \sigma X(t,\omega)$ olmak üzere kısmi türevler hesaplanırsa;

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

olur. Buradan Itô stokastik diferansiyel denklemleri için Ito Lemması uygulanırsa;

$$d(\ln X(t,\omega)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t,\omega)$$

elde edilir. Bu ifade ise integral formda;

$$\ln X(t,\omega) - \ln X(0,\omega) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_0^t \sigma dW(s,\omega)$$

anlamına gelir. Buradan;

$$\ln\left(\frac{X(t,\omega)}{X(0,\omega)}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t,\omega)$$

olur. O zaman (5.5)' ün çözümü;

$$X(t,\omega) = X_0(\omega)\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W(t,\omega)\right)$$

olarak elde edilir.

5.2.4 Euler-Maruyama Nümerik Çözüm Yöntemi

Bir önceki bölümde bir birinci mertebeden sabit katsayılı lineer stokastik diferansiyel denklemin kesin çözümünün Itô lemması yardımıyla nasıl bulunacağını görmüş olduk. Yine Itô lemması veya bazı özel yöntemlerle bazı Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin kesin çözümlerini elde etmek mümkündür. Ancak adi diferansiyel denklemler teorisinde olduğu gibi kesin çözümü elde edilebilen Itô stokastik diferansiyel denklemleri sınıfı çok dar bir sınıftır. Bu nedenle Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümlerinin bulunması çok önemlidir. Itô stokastik diferansiyel denklemlerinin birkaç nümerik çözüm yöntemleri olmasına karşın bu çalışmada yalnızca Euler-Maruyama(EM) nümerik çözüm yöntemi ele alınmıştır.

Genel anlamda bir

$$dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))\, dt + \psi(t, X(t,\omega))\, dW(t,\omega) \tag{5.6}$$

Itô stokastik diferansiyel denkleminin EM şeması $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için ;

$$\begin{aligned} &Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + \varphi(t_i, Y_i(\omega))\Delta t + \psi(t_i, Y_i(\omega))\Delta W_i(\omega) \\ &Y_0(\omega) = X(0,\omega) \end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklindedir [1,7,10]. Burada $Y_i(\omega) \approx X(t_i,\omega)$, $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = T/N$, ve $\Delta W_i(\omega) = (W(t_{i+1},\omega) - W(t_i,\omega)) \sim N(0,\Delta t)$' dir. Bu metodun $\Delta t \to 0$ için gerçek çözüme yakınsadığı gösterilebilir. [2,7]'da bu yakınsama kanıtlanmıştır ancak en kısa şekilde ispat [2]'de verilmiştir. Bu ispat için yine [2]'de verilen bir yardımcı teoreme yani, stokastik Gronwall eşitsizliğine, ihtiyaç duyulur.

Teorem 5.5. (Stokastik Gronwall Eşitsizliği) *$\epsilon(t,\omega)$ ve $\eta(t,\omega)$, $\mathfrak{M}^2[0,T]$' ye ait olsun ve $\{t_i\}_{i=0}^N$, [0,T]' nin bir ayrışımı olmak üzere, $\epsilon(t,\omega)$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için $t_i \le t < t_{i+1}$ olduğunda $\epsilon(t,\omega) = \epsilon(t_i,\omega)$ olacak şekilde bir basamak fonksiyonu olsun. Eğer $i = 0, 1, \ldots, N$ için*

$$|\epsilon(t_i,\omega)| \le |\int_0^{t_i} a(s,\omega)ds + \int_0^{t_i} b(s,\omega)dW(s,\omega)|$$

koşulunu sağlayan ve $\mathfrak{M}^2[0,T]$' ye ait olan $a(t,\omega)$ ve $b(t,\omega)$ fonksiyonları varsa ve $|a(t,\omega)| \le \alpha_0|\eta(t,\omega)| + \alpha_1|\epsilon(t,\omega)|$ ve $|b(t,\omega)| \le \beta_0|\eta(t,\omega)| + \beta_1|\epsilon(t,\omega)|$ eşitsizliklerini sağlayan negatif olmayan, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ ve β_1 sayıları varsa o zaman $\forall t \in [0,T]$ için

$$E\epsilon^2(t,\omega) \le 4(\alpha_0\sqrt(t) + \beta_0)^2 \exp((4t)(\alpha_1\sqrt(t) + \beta_1)^2) \int_0^t E\eta^2(s,\omega)ds \tag{5.8}$$

eşitsizliği geçerli olur.

Bu yardımcı teorem yardımıyla $\Delta t \to 0$ iken EM çözümünün gerçek çözüme yakınsadığı gösterilebilir. Bu amaçla ilk önce (5.7) EM nümerik şeması göz önüne alınsın. Buradan;

$$Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t_i, Y_i(\omega))ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(t_i, Y_i(\omega))dW(s,\omega) \tag{5.9}$$

ve (6.25)' e karşılık gelen integral denklemden ise

$$X(t_{i+1},\omega) = X(t_i,\omega) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(s, X(s,\omega))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(s, X(s,\omega))dW(s,\omega) \tag{5.10}$$

yazılabilir. (5.9) ve (5.10)' den

$$\begin{aligned} Y_{i+1}(\omega) - X(t_{i+1},\omega) &= Y_i(\omega) - X(t_i,\omega) \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi(t_i, Y_i(\omega)) - \varphi(s, X(s,\omega)))dt \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\psi(t_i, Y_i(\omega)) - \psi(s, X(s,\omega)))dW(s,\omega) \end{aligned}$$

Buradan $\forall i = 0, 1, \ldots, N-1$ ve $\forall t_i \leq s < t_{i+1}$ için

$$\begin{aligned} \epsilon(s,\omega) &= Y_n - X(t_n,\omega) \\ \zeta(s,\omega) &= \varphi(t_i, Y_i(\omega)) - \varphi(s, X(s,\omega)) \\ \tau(s,\omega) &= \psi(t_i, Y_i(\omega)) - \psi(s, X(s,\omega)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \epsilon(t_N,\omega) &= Y_N - X(t_N,\omega) \\ \zeta(t_N,\omega) &= \varphi(t_N, Y_N(\omega)) - \varphi(t_N, X(t_N,\omega)) \\ \tau(t_N,\omega) &= \psi(t_N, Y_N(\omega)) - \psi(t_N, X(t_N,\omega)) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\epsilon(t_i,\omega) = \int_0^{t_i} \zeta(s,\omega)ds + \int_0^{t_i} \tau(s,\omega)dW(s,\omega)$$

elde ederiz. $\varphi(t,x)$ ve $\psi(t,x)$' in Lipschitz sürekliliğinden ise $\forall t_i \leq s < t_{i+1}$ için $X(t_n,\omega) = \tilde{X}(s,\omega)$ ve $X(t_N,\omega) = \tilde{X}(t_N,\omega)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |\zeta(s,\omega)| &\leq L(\Delta t + |X(s,\omega) - \tilde{X}(s,\omega)| + |\epsilon(s,\omega)|) \\ |\tau(s,\omega)| &\leq L(\Delta t + |X(s,\omega) - \tilde{X}(s,\omega)| + |\epsilon(s,\omega)|) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = L$ olmak üzere (5.8) eşitsizliğinden

$$E\epsilon^2(t,\omega) \leq 4L^2(\sqrt{t}+1)^2 \exp(4L^2(\sqrt{t}+1)^2 t) \int_0^t E(\Delta t + |X(s,\omega) - \tilde{X}(s,\omega)|)^2 ds \tag{5.11}$$

olur. Diğer yandan

$$E(|X(t,\omega) - \tilde{X}(t,\omega)|^2) \leq C\Delta t \tag{5.12}$$

olduğu Itô integralinin temel özelliklerinden görülebilir. O zaman (7.6) ve (7.7)' den $\Delta t \to 0$ için

$$E\epsilon^2(t,\omega) = O(\Delta t)$$

olur.

6 STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE MODELLEME VE UYGULAMALAR

6.1 Fokker-Planck Denklemi

Tanım 6.1. [1] *Bir*

$$\begin{cases} dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))\,dt + \psi(t, X(t,\omega))\,dW(t,\omega) \\ X(0,\omega) = X_0(\omega) \end{cases} \tag{6.1}$$

Itô stokastik diferansiyel denklemi verilsin, $f(t,x)$ bu stokastik diferansiyel denklemin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $f(0,x)$, X_0'ın $t = 0$' daki olasılık yoğunluğu olmak üzere

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial(f(t,x)\varphi(t,x))}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(f(t,x)\psi^2(t,x))}{\partial x^2} \tag{6.2}$$

denklemine Fokker-Planck denklemi denir.

Teorem 6.1. [1] *Bir $dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))\,dt + \psi(t, X(t,\omega))\,dW(t,\omega)$ stokastik diferansiyel denklemi verildiğinde, $f(t,x)$ bu denklemin çözümü olan X stokastik sürecinin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere Fokker-Planck denklemini sağlar.*

Bu teoremi kanıtlamak için varyasyon hesabın DuBois-Reymond lemması gereklidir.

Lemma 6.1. **(DuBois-Reymond)**[17] *$\mathbb{C}_0^\infty(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde tanımlı, destek kümesi M' nin içinde bir kompakt küme olan tüm sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı olmak üzere eğer $\forall h \in \mathbb{C}_0^\infty(M)$ için*

$$\int_M f(x)h(x)dx = 0$$

ise o zaman hemen her $x \in M$ için $f(x) = 0$ olur.

Bu lemma yardımıyla Teorem 6.1 kanıtlanabilir.

Kanıt. (Teorem 6.1)[1] $dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega))\,dt + \psi(t, X(t,\omega))\,dW(t,\omega)$ stokastik diferansiyel denklemi verilsin ve $F(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ olsun. Eğer $F(x)$' e Itô lemmasını uygularsak

$$\begin{aligned} dF(X(t)) &= \left(\varphi(t,X)\frac{\partial F(X)}{\partial x} + \frac{1}{2}\varphi^2(t,X)\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x^2} \right) dt \\ &\quad + \psi(t,X)\frac{\partial F(X)}{\partial x} dW(t) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{dE(F)}{dt} = E\left(\frac{\partial F}{\partial x}\varphi + \frac{1}{2}\psi^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} \right)$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\varphi + \frac{1}{2}\psi^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} \right) dx$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial (f(t,x)\varphi(t,x))}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (f(t,x)\psi^2(t,x))}{\partial x^2} \right] dx = 0$$

olur. O zaman DuBois-Reymond lemmasından

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial (f(t,x)\varphi(t,x))}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (f(t,x)\psi^2(t,x))}{\partial x^2}$$

elde edilir. □

6.2 Stokastik Diferansiyel Denklemlerle Modelleme

Stokastik diferansiyel denklemlerle yapılan modellemeler bilinen adi diferansiyel denklemlerle yapılan modellemelerin bir genişlemesidir. Adi diferansiyel denklemler teorisinde olduğu gibi stokastik diferansiyel denklem modellemelerinde de yine ilk önce küçük Δt zaman aralığında bağımlı değişkenin değişimi ele alınarak önce bir kesikli sistem geçiş olasılıklarıyla belirlenir. Daha sonra ise beklenen değişim ve değişimin ikinci momenti belirlenir ve Fokker-Planck denklemi sonucunda ilgili stokastik diferansiyel denklem modeli elde edilir. Bu bölümde [1]'de verilen modelleme yöntemi detaylarıyla birlikte ele alınacaktır.

S bir dinamik sistem olsun ve $S(t)$ bir t anında S' nin değerini ve ΔS ise Δt zaman değişiminde S için değişimi göstersin. Kabul edelim ki küçük Δt zaman değişiminde S için değişimler $\Delta S = \lambda$, $\Delta S = -\lambda$ ve $\Delta S = 0$ olsunlar. Yani Δt değişimi için sistemde ya λ' lık bir artış ya λ' lık bir azalış ya da hiç bir değişim olmamaktadır. $b(t,x)$ ve $d(t,x)$ geçiş oranları olmak üzere bu değişimler ve

Tablo 6.1: Değişimler ve Değişimlere Karşılık Gelen Olasılıklar

ΔS	Olasılık
$\Delta S_1 = \lambda$	$p_1 = b(t,x)\Delta t$
$\Delta S_2 = -\lambda$	$p_2 = d(t,x)\Delta t$
$\Delta S_3 = 0$	$p_3 = 1-(p_1+p_2)$

değişimlere karşılık gelen olasılıklar Tablo 6.1'de verilmiştir. Şimdi ise bölümün başında açıklandığı gibi değişimin beklenen değer ve sıfır etrafında ikinci momenti hesaplansın. Bu durumda

$$E(\Delta S) = \sum_{i=1}^{3} p_i \Delta S_i = \lambda b(t,x)\Delta t - \lambda d(t,x)\Delta t = (b-d)\lambda\Delta t$$

ve

$$E[(\Delta S)^2] = \sum_{i=1}^{3} p_i (\Delta S_i)^2 = \lambda^2 b(t,x)\Delta t + \lambda^2 d(t,x)\Delta t = (b+d)\lambda^2\Delta t$$

olur. $\mu(t,x) = E(\Delta S)/\Delta t$, $\sigma^2(t,x) = E[(\Delta S)^2]/\Delta t$ ve $\sigma(t,x) = \sqrt{\sigma^2(t,x)}$ olarak tanımlansın. $p(t,x)$, S' nin t anındaki olasılık yoğunluğu olmak üzere toplam olasılık kuralından

$$\begin{aligned} p(t+\Delta t, x) &= p(t,x)[1-(p_1+p_2)] + b(t,x-\lambda)p(t,x-\lambda)\Delta t \\ &+d(t,x+\lambda)p(t,x+\lambda)\Delta t \end{aligned} \tag{6.3}$$

yazılabilir. (6.3) denkleminde 2. ve 3. toplananların 1. ve 2. çarpanlarının (t,x) noktası civarında 2. mertebeden Taylor polinomları sırasıyla

$$b(t,x-\lambda)p(t,x-\lambda) \approx pb - \frac{\partial(pb)}{\partial x}\lambda + \frac{\partial^2(pb)}{\partial x^2}\lambda^2 \tag{6.4}$$

$$d(t,x+\lambda)p(t,x+\lambda) \approx pd + \frac{\partial(pd)}{\partial x}\lambda + \frac{\partial^2(pd)}{\partial x^2}^2 \tag{6.5}$$

olur. Eğer (6.4) ve (6.5), (6.3)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p(t+\Delta t, x) &= p(t,x) - p(t,x)b\Delta t - p(t,x)d\Delta t \\ &+pb\Delta t - \frac{\partial pb}{\partial x}\lambda\Delta t + \frac{\partial^2 pb}{\partial x^2}\lambda^2\Delta t \\ &+pd\Delta t + \frac{\partial pd}{\partial x}\lambda\Delta t + \frac{\partial^2 pd}{\partial x^2}\lambda^2\Delta t \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $\Delta t \to 0$ için kısmi türev fonksiyonelinin lineerliğini de kullanarak

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial((b-d)\lambda p)}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial^2((b+d)\lambda^2 p)}{\partial x^2}(t,x) \tag{6.6}$$

Fokker-Planck kısmi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. Yani aslında bu sistemin olasılık yoğunluğu $p(t,x)$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial(\mu(t,x)p)}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial^2(\sigma^2(t,x)p)}{\partial x^2}(t,x) \tag{6.7}$$

Fokker-Planck denklemini sağlamış olur. Diğer yandan

$$\begin{cases} dS(t,\omega) = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dW(t,\omega) \\ S(t_0,\omega) = S_0(\omega) \end{cases} \tag{6.8}$$

denkleminin çözümünün olasılık yoğunluk fonksiyonunun da Fokker-Planck denklemini sağladığı daha önce görülmüştü. O halde (6.8) denklemi verilen dinamik sistem için uygun bir model olarak alınabilir. Kısaca özetlemek gerekirse bir dinamik sistem verilen metod ile modellenmek istenildiğinde öncelikle kesikli sistem ve geçiş olasılıkları elde edilmeli daha sonra sistemdeki değişimin sıfır etrafında birinci ve ikinci momentleri elde edilmeli ve ilgili stokastik diferansiyel denklem modeli kurulmalıdır.

6.3 Parametrelerin Tahminleri

Stokastik diferansiyel denklemlerin somut problemlere uygulanabilmesi için parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Stokastik diferansiyel denklemlerin parametrelerinin tahminleri için parametrik ve parametrik olmayan bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu çalışmada ise literatürde yaygın olarak kullanılan quasi-likelihood yöntemi açıklanacak ve kullanılacaktır. Bu amaçla

$$dX(t,\omega) = \varphi(t, X(t,\omega); \boldsymbol{\theta}))\, dt + \psi(t, X(t,\omega); \boldsymbol{\theta})\, dW(t,\omega) \tag{6.9}$$

parametrelere bağlı stokastik diferansiyel denklemi ele alınsın. Burada $\theta \in \mathbb{R}^m$ m-boyutlu bilinmeyen parametre vektörüdür. $x_0, x_1, \ldots, x_N$ değerleri, (6.9) denkleminin çözümü olan X stokastik sürecinin eşit zaman aralıklarında gözlemlenmiş değerleri olmak üzere problem bu gözlemler verildiğinde parametre vektörünün tahmin edilmesidir. $P(t_k, x_k|x_{k-1}, t_{k-1}; \boldsymbol{\theta})$, (t_{k-1}, x_{k-1}) durumundan (t_k, x_k) durumuna geçiş olasılık yoğunluğu ve $P_0(x_0|\boldsymbol{\theta})$ baslangıç durumunun olasılık yoğunluğu olsun. Bu durumda likelihood fonksiyonu parametre vektörünün bir fonksiyonu olarak

$$M(\boldsymbol{\theta}) = P_0(x_0|\boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^{N} P(t_k, x_k|x_{k-1}, t_{k-1}; \boldsymbol{\theta}) \tag{6.10}$$

olarak yazılır. $\boldsymbol{\theta}$' nın tahmini için (6.10)' in maksimize edilmesi gerekir. Ya da bunun yerine $L(\boldsymbol{\theta}) = -\ln(M(\boldsymbol{\theta}))$ fonksiyonu da minimize edilebilir. Yani $\boldsymbol{\theta}$' nın tahmincisi

$$L(\boldsymbol{\theta}) = -\ln(P_0(x_0|\boldsymbol{\theta})) - \sum_{i=1}^{N} \ln(P(t_k, x_k|x_{k-1}, t_{k-1}; \boldsymbol{\theta})) \tag{6.11}$$

fonksiyonuna minimum değer veren $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{R}^m$' dir. Bu süreçte en önemli problemlerden birisi geçiş olasılıklarının tahmin edilmesidir. Geçiş olasılıklarının tahmini için Euler-Maruyama yönteminden yararlanılabilir. Denklem (6.9) verildiğinde ilgili Euler-Maruyama şemasından $i = 1, 2, \ldots, N$ için

$$X(t_i, \omega) \approx x_{i-1} + \varphi(t_{i-1}, x_{i-1}; \boldsymbol{\theta})\Delta t + \psi(t_{i-1}, x_{i-1}; \boldsymbol{\theta})\sqrt{\Delta t}\, \eta_i(\omega) \tag{6.12}$$

yazılabilir. Burada $X(t_i, \omega)$ sürecin gerçek değerleri ve $\eta_i(\omega)$ standart normal dağılmış rassal değişkenlerdir. $X(t_i, \omega)$ yaklaşık olarak, $\eta_i(\omega)$'nın afin dönüşümü olduğundan Lemma 3' ten $\mu_i = x_{i-1} + \varphi(t_{i-1}, x_{i-1}; \boldsymbol{\theta})\Delta$ ve $\sigma_i^2 = \psi^2(t_{i-1}, x_{i-1}; \boldsymbol{\theta})\Delta t$ olmak üzere

$$X(t_i, \omega) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

olur. Açık halde yazılmak istenirse geçiş olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t_i, x_i|t_{i-1}, x_{i-1}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(\frac{-(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \tag{6.13}$$

olur. Bu o demektir ki geçiş olasılıklarını yaklaşık olarak normal olarak kabul edebilir ve (6.11) minimize edilerek parametre vektörünün tahmincisini elde edilebilir. Ancak bu minimizasyon işlemi her zaman analitik olarak yapılamayabilir. O nedenle Nelder-Mead nümerik minimizasyon yöntemi[11], (6.11)'yi minimize etmek için kullanılabilir. Geçiş olasılıkları bu yöntemle elde edilen maksimum likelihood prosedürüne literatürde quasi-likelihood prosedürü denir.

6.4 Radyoaktif Bozunma Probleminin Rassal Diferansiyel Denklemler ile Modellenmesi

Daha önce de belitildiği gibi rassal diferansiyel denklemler rassallığın yalnızca başlangıç değerden kaynaklandığı stokastik diferansiyel denklemlerdir ve çözümleri stokastik analiz gerektirmez. Ama yine de rassal diferansiyel denklemler önemli problemlere cevap vermektedirler. Kuşkusuz bir radyoaktif elementin bozunmasının tahminleri yıllar boyunca önemli problemlerden biri olmuştur ve temelden detaya çeşitli diferansiyel denklem modelleri ile modellenmiştir. Bu modellerde başlangıç madde miktarı deterministik olarak kabul edilmektedir ancak belirli bir bölgedeki radioaktif madde miktarı tahmin edilmek isteniyorken bazen başlangıç değer kesin olarak belirlenemeyebilir. Fakat eldeki bazı bilgiler yardımıyla başlangıç değer belirli bir dağılıma sahip bir rassal değişken olarak belirlenebilir ya da "başlangıç değer eğer verilen bir dağılıma sahip bir rassal değişken olsaydı şu andaki kalan madde miktarı ne kadar olurdu?" sorusuna cevap bulunmak istenebilir her iki durumda da problem bir rassal diferansiyel denklemle çözülebilir. Rassal diferansiyel denklemlerde modelin kurulması deterministik diferansiyel denklemler teorisi ile aynıdır. Radyoaktif bozunma modeli o zaman şu sekilde kurulabilir. $N(t)$, t anındaki radyoaktif madde içinde bulunan atom sayısını, Δt zamandaki değişimi ve ΔN ise Δt zamanında bozunacak atom sayısını göstersin. Yapılan deneyler sonucu görülmüştür ki bir radyoaktif maddenin bozunacak olan atom sayısı, maddede bulunan atom sayısı ve zaman ile doğru orantılıdır. Bu durumda $\alpha > 0$ maddenin cinsine bağlı bir sabit olmak üzere

$$-\Delta N = \alpha N(t)\Delta t \tag{6.14}$$

yazılabilir. Buradan eğer denklemin her iki tarafı Δt' ye bölünür ve $\Delta t \to 0$ olursa o zaman

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\alpha N(t) \tag{6.15}$$

diferansiyel denklemi elde edilir ve problem kısmen modellenmiş olur. Diğer yandan başlangıç madde miktarı kesin olarak bilinmesin ancak başlangıç madde miktarı $N(0) = N_0$' ın dağılımı bilinsin. Bu informasyonla birlikte ise problem tamamen modellenmiş olur. Denklem (6.15)' nin diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen çözümü

$$N(t) = Ce^{-\alpha t} \tag{6.16}$$

dir. Buradan özel olarak (6.15) denkleminin $N(0) = N_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü ise

$$N(t) = N_0 e^{-\alpha t} \tag{6.17}$$

olur.

Farzedelimki bir bölgedeki bir radyoaktif maddenin başlangıç dağılımı $N_0 \sim N(50\,\text{br.}, 4)$ olsun ve 5 sene sonra bu maddenin ortalama ne kadarının kalacağını hesaplamak istensin. Radyoaktif maddenin bozunma sabiti $\alpha = 0.1317$ yıl^{-1}' olsun. Bu durumda kullanacağımız model

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = -0.1317N(t) \\ N(0) = N_0 \sim N(50, 4) \end{cases} \tag{6.18}$$

olacaktır. O zaman bu modelin çözümü (6.17)' den

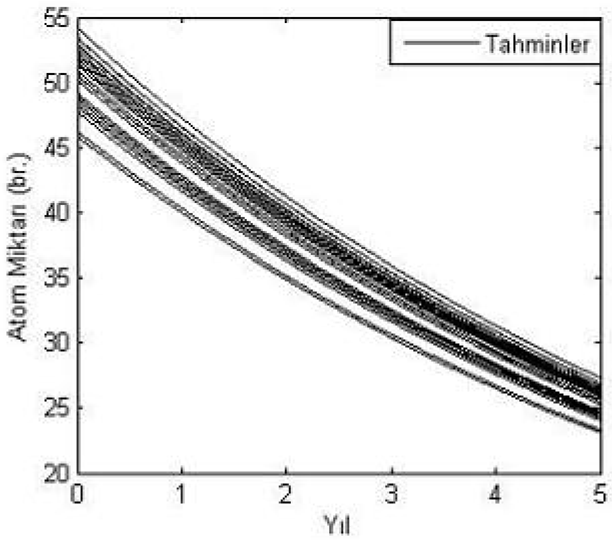
$$N(t) = N_0 e^{-0.1317t} \tag{6.19}$$

olur. Tablo 6.2'de 24 gerçekleşme için 5 yıl sonraki kalan madde miktarı tahminleri verilmiştir.

Tablo 6.2: Gerçekleşmeler ve 5 yıl sonra kalan madde miktarları

Gerçekleşme	Kalan Tahmini Madde Miktarı	Gerçekleşme	Kalan Tahmini Madde Miktarı	Gerçekleşme	Kalan Tahmini Madde Miktarı
1	26.9680	7	26.1444	13	26.2619
2	25.3382	8	26.3787	14	26.7053
3	25.5324	9	23.1421	15	26.4854
4	24.4042	10	24.5549	16	23.3332
5	25.5220	11	26.9598	17	27.3563
6	24.6729	12	25.6953	18	26.6521

Ayrıca Şekil 6.1'de ise bu gerçekleşmeler grafik üzerinde gösterilmişlerdir. Tablo 6.2'den ise 5 yıl sonra ortalama 25.5704 br. madde kalacağı söylenebilir.



Şekil 6.1: Denklem (6.19)' in 18 gerçekleşmesi

6.5 Hisse Senedi Fiyatlarının Itô Stokastik Diferansiyel Denklemi ile Modellenmesi ve Samuelson Modeli ile Karşılaştırılması

Stokastik diferansiyel denklemlerin en önemli uygulama alanlarından biri finansal sistemlerdir. Kısa dönem faiz oranlarının ve hisse senedi fiyatlarının modelleri stokastik diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Bu uygulamada bir önceki bölümde verilen modelleme yöntemi ile [1]'de iki hisse senedi için verilen fiyat modelinin özel bir hali elde edilerek daha önce P.A. Samuelson tarafından elde edilen bir modelle veri seti üzerinde euclid metriğine göre karşılaştırılacaktır.

Hisse senetleri fiyatları sürekli bir stokastik süreç olarak ilk kez L. Bachelier tarafından "Theorie de la speculation" isimli makalesinde ele alınmıştır. Bachelier hisse senedi fiyatları için

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \mu t + \sigma W(t,\omega) \tag{6.20}$$

stokastik sürecini önermiştir. Burada $X(0,\omega)$ bir rassal değişkendir ve hisse senedinin başlangıç değerini temsil etmektedir ve $W(t,\omega)$ standart Wiener sürecidir. Ancak bu model negatif değerler alabildiğinden ve hisse senedi fiyatları hiç bir zaman negatif olamayacağından bu model günümüzde geçerli değildir. Bununla birlikte bu çalışma stokastik diferansiyel denklemler teorisinin ortaya çıkmasında ve gelişmesinde çok önemli bir rol oynamıştır. P.A. Samuelson ise [10] hisse senedi fiyatları için;

$$X(t,\omega) = X(0,\omega)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t,\omega)} \tag{6.21}$$

modelini önermiştir. Daha sonra bu modelin;

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \mu\int_0^t X(s,\omega)ds + \sigma\int_0^t X(s,\omega)dW(s,\omega) \tag{6.22}$$

integral denkleminin bir çözümü olduğu görülmüştür. Burada birinci integral bir Lebesgue integrali ikinci integral ise Itô integralidir. Şimdi bu modele alternatif modeli ortaya koymak için küçük Δt zaman değişimini düşünelim. Bu Δt zaman değişimi için ΔH hisse senedi fiyatındaki değişimi göstersin. Bu durumda ΔH değişimi için üç durum söz konusu olur. Bu değişimleri $\Delta H = 1$, $\Delta H = -1$ ve $\Delta H = 0$ ile gösterelim. Burada küçük Δt değişimi için $\Delta H = 1$ hisse senedi fiyatındaki bir birimlik artışı, $\Delta H = -1$ bir birimlik azalışı ve $\Delta H = 0$ ise hisse senedi fiyatında herhangi bir değişim olmadığını gösterir. Hisse senedi fiyatlarındaki değişim olasılıkları hisse senedi fiyatlarıyla doğru orantılı olarak kabul edilir [1]. Bu kabulle birlikte fiyatlardaki değişimler ve bu değişimlere karşılık gelen olasılıklar, b ve d kazanç ve kayıp oranlarını göstermek üzere Tablo 6.3'te verilmiştir. Tablo yardımıyla değişim için sıfır etrafındaki birinci ve ikinci momentler

Tablo 6.3: Değişimler ve Değişimlere Karşılık Gelen Olasılıklar

ΔH	Olasılık
$\Delta H_1 = 1$	$p_1 = b(t,x)H\Delta t$
$\Delta H_2 = -1$	$p_2 = d(t,x)H\Delta t$
$\Delta H_3 = 0$	$p_3 = 1-(p_1+p_2)$

elde edilebilir.

$$E(\Delta S) = \sum_{i=1}^{3} p_i\Delta S_i = b(t,x)H\Delta t - d(t,x)H\Delta t = (b-d)H\Delta t$$

ve

$$E[(\Delta S)^2] = \sum_{i=1}^{3} p_i(\Delta S_i)^2 = b(t,x)H\Delta t + d(t,x)H\Delta t = (b+d)H\Delta t$$

olur. Buradanda $\mu(t,x) = (b-d)H$ ve $\sigma^2(t,x) = (b+d)H$ olarak elde edilir. O zaman bir önceki bölümde verilen modelleme yöntemine göre hisse senedi fiyatına uygun stokastik diferansiyel denklem

$$\begin{cases} dH(t,\omega) = (b-d)H(t,\omega)dt + \sqrt{(b+d)H(t,\omega)}dW(t,\omega) \\ H(t_0,\omega) = H_0(\omega) \end{cases} \tag{6.23}$$

olacaktır. Bu modelde parametreler birer stokastik süreç ifade etmektedirler. Ancak bu çalışmada parametreler sabit olarak kabul edilerek, parametreler $(b-d) = \varphi$ ve $(b+d) = \psi$ olarak alınacaktır. Şimdi (6.22) ile (6.23) modellerini Tablo 6.4'te verilen New York Stock Exchange(NYSE)' işlem gören MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti üzerinde karşılaştıralım. Bu karşılaştırılmanın yapılabilmesi için ilk önce her iki mo-

Tablo 6.4: MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti

	Fiyat		Fiyat		Fiyat		Fiyat		Fiyat		Fiyat
1	3.96	7	4.20	13	4.54	19	5.10	25	5.81	31	5.71
2	4.31	8	4.23	14	4.54	20	5.56	26	5.71	32	5.87
3	4.23	9	4.33	15	4.9	21	5.24	27	5.81	33	6.31
4	4.20	10	4.63	16	4.81	22	5.57	28	5.96	34	6.22
5	4.55	11	4.56	17	4.68	23	5.66	29	5.53	35	6.50
6	4.37	12	4.69	18	4.87	24	5.51	30	5.54	36	6.27

delin parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Quasi-likelihood yöntemi kullanılarak parametreler için tahminler (6.22) denklemi için $\hat{\mu} = 0.0142$, $\hat{\sigma} = 0.0436$ ve (6.23) denklemi için $\hat{\varphi} = 0.0129$, $\hat{\psi} = 0.0096$ olarak elde edilmişlerdir. Parametrelerin tahminleri de elde edildikten sonra artık her iki modelden hisse senedi fiyatı tahminlerini elde edebilmek için her iki modelin Euler-Maruyama şemaları kurulmalıdır. Verilen bilgiler ışığında (6.22) denkleminin Euler-Maruyama şeması $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için;

$$\left.\begin{array}{l} Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + 0.0142\, Y_i(\omega)\,\Delta t + 0.0436\, Y_i(\omega)\sqrt{\Delta t}\,\eta_i(\omega) \\ Y_0(\omega) = 3.96 \end{array}\right\} \tag{6.24}$$

ve (6.23) denkleminin Euler-Maruyama şeması

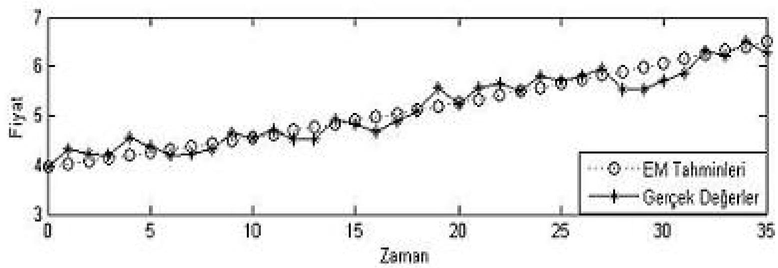
$$\left.\begin{array}{l} Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + 0.0129\, Y_i(\omega)\,\Delta t + \sqrt{0.0096\, Y_i(\omega)\,\Delta t}\,\eta_i(\omega) \\ Y_0(\omega) = 3.96 \end{array}\right\} \tag{6.25}$$

olacaktır. Bu Euler-Maruyama şemaları kullanılarak $\Delta t = 128$ ve $N = 50.000$ gerçekleşme için elde edilen MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatı tahminleri ve gerçek değerler birlikte Tablo 6.5'te verilmişlerdir.

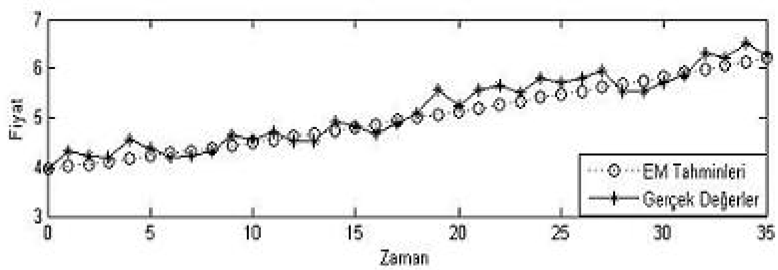
Tablo 6.5: Denklem (6.24) ve (6.25) denklemi ile yapılan tahminler

	Denklem (6.24) ile tahmin	Denklem (6.25) ile tahmin		Denklem (6.24) ile tahmin	Denklem (6.25) ile tahmin		Denklem (6.24) ile tahmin	Denklem (6.25) ile tahmin		Denklem (6.24) ile tahmin	Denklem (6.25) ile tahmin
1	3,9600	3,9600	10	4,4981	4,4456	19	5,1222	5,0043	28	5,8155	5,6147
2	4,0159	4,0105	11	4,5670	4,5083	20	5,1906	5,0638	29	5,8848	5,6747
3	4,0718	4,0609	12	4,6244	4,5585	21	5,2628	5,1274	30	5,9646	5,7450
4	4,1338	4,1179	13	4,6987	4,6264	22	5,3248	5,1805	31	6,0753	5,8433
5	4,1925	4,1708	14	4,7656	4,6858	23	5,4115	5,2591	32	6,1471	5,9052
6	4,2489	4,2211	15	4,8337	4,7470	24	5,4924	5,3308	33	6,2404	5,9873
7	4,3105	4,2769	16	4,9015	4,8065	25	5,5769	5,4058	34	6,3248	6,0591
8	4,3685	4,3286	17	4,9664	4,8636	26	5,6521	5,4715	35	6,4073	6,1309
9	4,4310	4,3846	18	5,0388	4,9285	27	5,7321	5,5419	36	6,5094	6,2204

Ayrıca Şekil 6.2 ve Şekil 6.3'te ise Tablo 6.5'te verilen değerler grafiklendirilmişlerdir.

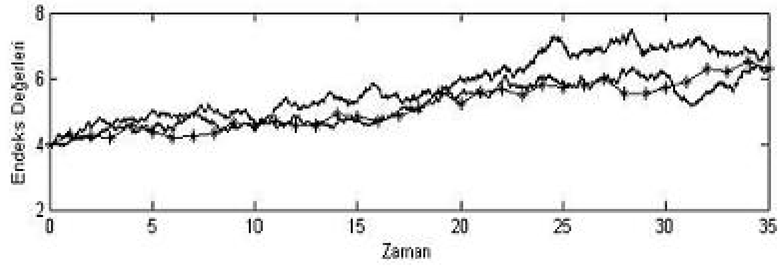


Şekil 6.2: Denklem (6.24) ile yapılan tahminler ve Gerçek Değerler

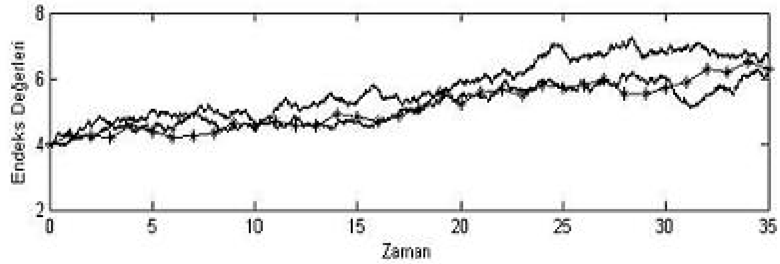


Şekil 6.3: Denklem (6.25) ile yapılan tahminler ve Gerçek Değerler

Bununla birlikte (6.24) denklemi ve (6.25) denkleminin ikişer gerçekleşmeleri Şekil 6.4 ve Şekil 6.5'te sırasıyla gerçek değerlerle birlikte grafiklendirilmişlerdir.



Şekil 6.4: Denklem (6.22)'un çözümü olan stokastik sürecin iki gerçekleşmesi ve Gerçek Değerler



Şekil 6.5: Denklem (6.23)'nin çözümü olan stokastik sürecin iki gerçekleşmesi ve Gerçek Değerler

Bu çalışmada model karşılaştırma kriteri olarak $\mathbb{R}^{36}$' nın Öklid metriği, diğer deyişle $i = 0, 1, \ldots, 35$ için $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{35})$ vektörü gerçek değerleri ve $\mathbf{x}^* = (x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{35}^*)$ vektörü ise tahmin değerlerini göstermek üzere, $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = (\sum_{i=0}^{35}(x_i - x_i^*)^2)^{1/2}$ kullanılmıştır.

Tablo 6.5'te verilen değerler yardımıyla ile hesaplanan uzaklıklar ise (6.22) ve (6.23) için $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1^*) = 1.209$ ve $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2^*) = 1.351$ olarak elde edilmişlerdir. Bu da (6.22) Samuelson modelinin (6.23) alternatif modelinden ele alınan veri seti için kullanılan parametre tahmin yöntemi, gerçekleşme sayısı ve tahmin adım sayısıda göz önüne alındığı zaman, standart metriğe göre daha iyi olduğunu göstermektedir. Ancak metrikden elde edilen uzaklıkların bir birlerinden epey uzak olmadıkları da dikkate alınırsa her iki modelin birbirlerine bu veriseti için yakın sonuçlar verdiği de söylenebilir.

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Ekonomiden fiziğe, biyolojiden mühendisliğe bir çok alanda ortaya çıkan dinamik sistemlerin pek çoğunda rassallık söz konusudur. O nedenledir ki bu disiplinlerde ortaya çıkan dinamik sistemlerin modellenmeleri için gerekli olan matematiksel araç stokastik diferansiyel denklemlerdir.

Bu amaçla bu çalışmada öncelikle stokastik diferansiyel denklemler teorisi için gerekli olan matematiksel temeller verilmiş ve iki somut problem için stokastik diferansiyel denklem modelleri kurulmuş ve çözümlenmiştir.

İlk olarak, bir radyoaktif bozunma problemi bir rassal diferansiyel denklem ile modellenmiş, bu modelin çözümü elde edilmiş, çözüme ilişkin bazı çıkarsamalar yapılmış ve modelden elde edilen sonuçlar, tablo ve şekiller halinde ortaya konulmuştur.

İkinci olarak ise hisse senetleri fiyatları için Samuelson modeli tanıtıldıktan sonra bu çalışmada verilen modelleme yöntemiyle, literatürde iki hisse senedi için bilinen modelin tek hisse senedi için özel hali ortaya konulmuştur. Modellerin uygulanabilmesi için MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti ele alınmıştır. MATLAB dilinde yazılan programlar yardımıyla her iki modelin parametreleri tahmin edilmiştir. Daha sonra, elde edilen modeller nümerik olarak çözdürülmüş ve çözüm neticesinde ortaya çıkan nümerik tahminler tablolar ve şekiller yardımıyla ortaya konulmuştur. Son olarak her iki model Euclid metriğine göre karşılaştırılmış ve Samuelson modelinin çalışmada verilen yöntemle elde edilen modelden daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Bu çalışmada ele alınan modellerde dahil, genel olarak stokastik diferansiyel denklem modelleri bir çok şekilde geliştirilebilirler.

İlk olarak, model kurulurken yapılan bazı varsayımlar için iyileştirmelere gidilebilir. Bunun için modelin varsayımlar aşamasına gelinmeden somut problemin yapısı hakkında gerekli informasyon toplanmalıdır ve hatta ilgilendiğimiz özel somut problem hakkında gerekirse varsayımlarda bazı hafifletmelere gidilmelidir. Ayrıca somut problemin bulunduğu ortam, zaman vb. koşullar da dikkate alınarak genel varsayımlara nazaran daha özel varsayımlara varılması modelin özel somut problem hakkında etkinliğini iyice arttıracaktır.

Model etkinliğinin arttırılması için önemli bir husus da model parametrelerin tahmin süreci ve yöntemidir. Model parametreleri somut problemlerde sıklıkla zamana bağlı değişkenler olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin bu çalışmada hisse senedi fiyatları için ele alınan modellerde hisse senedinin volatilitesi olarak da adlandırılan σ parametresi gerçekte, günden güne hatta dakikadan dakikaya değişebilmektedir. Bu nedenle bu parametrenin zamanın bir fonksiyonu olarak ele alınması modele büyük ölçüde olumlu katkıda bulunacaktır. Parametre tahminlerinin modele katkısının arttırılması için bir başka dikkat edilmesi gereken nokta ise tahminleme sürecinde ele alınan likelihood fonksiyonunun doğru belirlenebilmesidir. Bu o demektir ki kesikli sistemin geçiş olasılıkları ne kadar iyi belirlenebilirse tahmin sonuçlarıda o ölçüde daha iyi olacaktır ve buna bağlı olarak model sonuçlarıda daha kesin olacaktır. Ayrıca likelihood fonksiyonu analitik yöntemlerle maksimize edilemediği zamanlarda kullanılacak nümerik optimizasyon yönteminin de doğru seçimi, probleme uygun modelin geliştirilmesinde önem arz etmektedir.

Modelin çözümlenmesinde kullanılan nümerik çözüm yönteminin de tahminler üzerinde etkisi büyüktür. Stokastik diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemleri birden fazladır ve bu yöntemlerin bazılarının etkinlikleri teorik olarak karşılaştırılmıştır[6]. Ancak bir nümerik yöntem diğerine göre teorik olarak daha iyi sonuçlar versede bazen zaman, maliyet vb. parametrelerin kısıtlı oluşundan dolayı tahminlerin etkinliğinden bir miktar fedakarlık yapılabilir.

Son olarak eğer ele alınan problemde başlangıç değer deterministik değilde rassal ise, nümerik yöntemin başlangıç değerin dağılımına yüksek bağlılığı göz önüne alındığında başlangıç değerin dağılımının mümkün olduğunca kesin olarak tahmin edilmesi modelden elde edilen sonuçların somut problemle göstereceği tutarlılığı önemli derecede arttıracağı açıktır.

KAYNAKLAR

1. Allen, E., *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*, MATHEMATICAL MODELLING: Theory and Applications, Vol. 22, Springer, Dordrecht, Hollanda, 2007.

2. Amano, K., "A Stochastic Gronwall Inequality and Its Applications," *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **6-1**, 2005.

3. Billingsley, P., *Probability and Measure*, Wiley, A.B.D., 1986.

4. Bobrowski, A., *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes:An Introduction*, Cambridge University Press, New York, A.B.D., 2005.

5. Ito, K., "Stochastic Integral", *Proc. Imp. Acad.*, **20**, 519-523, 1944.

6. Ito, K., "On a Formula Concerning Stochastic Differentials", *Nagoya Math. J.*, **3**, 55-65, 1951.

7. Kloeden, P.E ve Platen, E., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Almanya, 1999.

8. Kuo, H.-H., *Introduction to Stochastic Integration*, Universitext, Springer, New York, A.B.D., 2006.

9. Lipster, R.S. ve Shiryaev A.N., *Statistics of Random Processes: I General Theory*, Springer-Verlag, Almanya, 2000.

10. Mikosch, T., *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Vol. 6, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1998.

11. Nelder, J.A. ve Mead, R., "A Simplex Method for Function Minimization," *Computer Journal*, **7**, 308-313, 1965.

12. Resnick, S.I., *A Probability Path*, Birkhauser, New York, A.B.D., 1999.

13. Samuelson, P.A., "Rational theory of warrant pricing," *Ind. Mngt. Rev.*, **6**, 13-31, 1965.

14. Shiryaev A.N., *Probability*, Graduate Texts in Mathematics, 2. Baskı, Springer, New York, A.B.D., 1996.

15. Şamilov A., *Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 2007.

16. Şamilov A., *Olasılıksal Dağılımların Karakteristik Fonksiyonları ve Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 2008.

17. Sobolev S.L., *Selected Works of S.L. Sobolev: Volume I: Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas*, Springer, New York, A.B.D., 2006.