# ORTAK DEĞİŞKENLERİN VARLIĞI DURUMUNDA FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Şükrü ACITAŞ
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Ocak – 2010

# JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Şükrü ACITAŞ**'ın **"Ortak Değişkenlerin Varlığı Durumunda Faktöriyel Tasarımlar"** başlıklı **İstatistik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 25.12.2009 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

| | | Adı-Soyadı | İmza |
|---|---|---|---|
| **Üye (Tez Danışmanı)** | **:** | **Doç. Dr. BİRDAL ŞENOĞLU** | .......... |
| **Üye** | **:** | **Prof. Dr. ALADDİN ŞAMİLOV** | .......... |
| **Üye** | **:** | **Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK** | .......... |

**Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .......... tarih ve .......... sayılı kararıyla onaylanmıştır.**

**Enstitü Müdürü**

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**ORTAK DEĞİŞKENLERİN VARLIĞI DURUMUNDA FAKTÖRİYEL TASARIMLAR**


**Şükrü ACITAŞ**

**Anadolu Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**İstatistik Anabilim Dalı**

**Danışman**: **Doç. Dr. Birdal ŞENOĞLU**


**2010, 95 sayfa**


Bu çalışmada ortak değişkene sahip faktöriyel tasarımlar ele alınmıştır. Bu tasarımlar için klasik teori, normallik varsayımına dayalı elde edilir. Buna karşın, hata terimleri normal dağılıma sahip değilse model parametrelerinin en küçük kareler (EKK) tahmin edicilerinin etkinliğinin ve test istatistiklerinin gücü ve istatistiksel sağlamlığının azaldığı Monte-Carlo simulasyon çalışması yardımıyla gösterilmiştir. Bu sonuçlar ortak değişkene sahip faktöriyel tasarımlarda normallik varsayımı geçerli olmadığı zaman, EKK ya alternatif olarak, daha etkin tahmin ediciler ile daha güçlü ve istatistiksel olarak sağlam test istatistiklerinin elde edilmesini gerektirir.

Bu nedenlerle ortak değişkene sahip faktöriyel tasarımlarda hata terimlerinin bağımsız ve özdeş olarak uzun kuyruklu simetrik (LTS) dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Bu durumda en çok olabilirlik tahmin edicileri analitik olarak elde edilemediğinden uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi kullanılmış ve bu yönteme dayalı olarak parametrelerin tahmin edicileri açık formüllerle ifade edilmiştir. Uyarlanmış en çok olabilirlik (UEÇO) tahmin edicilerinin EKK tahmin edicilerinden daha etkin olduğu Monte-Carlo simulasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. UEÇO tahmin edicilerine dayalı geliştirilen test istatistiklerinin asimptotik olarak F dağılımına sahip olduğunu kanıtlanmış ve küçük örneklem hacimleri için de bu test istatistiklerinin F dağılımına sahip olduğu Monte-Carlo simulasyon çalışması yardımıyla gösterilmiştir. Buna ek olarak UEÇO tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin klasik test istatistiklerinden daha güçlü ve istatistiksel olarak sağlam olduğu Monte-Carlo simulasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. Geliştirilen yöntem bir gerçek hayat örneği üzerinde uygulanmıştır.


**Anahtar Kelimeler :** Uzun kuyruklu simetrik dağılım, uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi, parametre tahmini, hipotez testi, etkinlik, istatistiksel sağlamlık

# ABSTRACT

**Master of Science Thesis**

**FACTORIAL DESIGNS IN THE PRESENCE OF COVARIATES**



**Şükrü ACITAŞ**

**Anadolu University**
**Graduate School of Sciences**
**Statistics Program**

**Supervisor**: **Assoc. Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU**


**2010, 95 pages**


In this study, factorial designs that have covariate are considered. Classical theory for these designs is obtained based on normality assumption. On the other hand if the error terms do not have normal distribution, it is shown that the efficiency of the least squares (EKK) estimators of the model parameters and the power and robustness of test statistics decrease via Monte-Carlo simulation study. These results require to obtain more efficient estimators and powerful and robustness test statistics alternative to EKK when the normality assumption is not valid in factorial designs that have covariate.

For these reasons it is assumed that the error terms in factorial designs that have covariate have independently and identically long tailed symmetric (LTS) distribution. Since the maximum likelihood estimators are not obtained analytically, modified maximum likelihood method is used in that case and estimators of the parameters are expressed with explicit formulas based on this method. The modified maximum likelihood (UEÇO) estimators are shown to be more efficient than EKK estimators in Monte-Carlo simulation study. Furthermore, test statistics are developed based on UEÇO estimators. These test statistics have asymptotically F distribution is proved and it is shown that they have F distribution also for small sample sizes by means of Monte-Carlo simulation. Additionally, the test statistics developed based on UEÇO estimators are shown to be more powerful and robust than classical test statistics in Monte-Carlo simulation study. The developed method is applied on a real life example.



**Keywords :** Long tailed symmetric distribution, modified maximum likelihood method, parameter estimation, hypothesis testing, efficiency, robustness

# TEŞEKKÜR

Yolumuzun kesiştiği andan itibaren saygıyla, sevgiyle, hoşgörüyle ve emekle ilmek ilmek ördüğümüz hem hoca-öğrenci hem ağbi-kardeş birlikteliğimiz için, paylaştığı engin akademik bilgi ve birikimi ile yürüdüğüm bu yolda elimi tutarak bana güven verdiği için, yürüdüğümüz bu uzun yolun en başında olmamamıza rağmen beni başarıya ve yorulmaksızın daha çok başarılara birlikte imza atacağımıza inandırdığı için, iyi bir hoca olmanın yanında iyi bir insan olmayı da öğrendiğim örnek kişiliği için, güleryüzü ve anlayışı için değerli danışman hocam Doç. Dr. Birdal Şenoğlu'na yürekten, gönülden sonsuz teşekkür ederim.

En başından beri yanımda olan ve yanımda olmasından her zaman güven duyduğum, kişiliğini örnek alıp kuru hırstan arınmış çalışma ve başarma azmini kendime rehber edindiğim, başarıları hedeflediğimiz bu uzun yolda bana yol gösterdiği için değerli ortak danışmanım Yard. Doç. Dr. Yeliz Mert Kantar'a yürekten, gönülden sonsuz teşekkür ederim.

Bir anda karşıma çıkan ve beni bu yolda yürümeye ikna eden, iyiki de bunu yapan, her zaman saygı, sevgi ve güven duyduğum, çok şey borçlu olduğum, küçücük dünyamın büyük insanı olan bölüm başkanımız Prof. Dr. Embiya Ağaoğlu'na yürekten, gönülden sonsuz teşekkür ederim.

Bana olan güvenleri ile bu yolda yürümem için destek olan, açmış oldukları derslerle istatistik ufkumun genişlemesinde büyük katkıları olan değerli hocalarım Prof. Dr. Alaaddin Şamilov, Prof. Dr. Ali Fuat Yüzer'e ve Doç. Dr. Berna Yazıcı'ya yürekten, gönülden sonsuz teşekkür ederim.

"Biz"e olan inancıyla, onunla çalışmaktan sohbet etmeye kadar, anı paylaşmaktan mutluluk duyduğum, varlığıyla hem güven hem sıcaklık veren değerli hocam Araş. Gör. Dr. İlhan Usta'ya yürekten, gönülden sonsuz teşekkür ederim.

Ve varlıklarıyla, maddi, manevi destekleriyle bugünlere gelmemde en büyük emeği harcayan, cefaların en fazlasını çeken aileme yürekten, gönülden sonsuz teşekkür ederim.

Şükrü ACITAŞ

Ocak 2010

## İÇİNDEKİLER

**ÖZET** . . . . . . . . . . i

**ABSTRACT** . . . . . . . . . . ii

**TEŞEKKÜR** . . . . . . . . . . iii

**İÇİNDEKİLER** . . . . . . . . . . iv

**ŞEKİLLER DİZİNİ** . . . . . . . . . . vi

**ÇİZELGELER DİZİNİ** . . . . . . . . . . vii

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ** . . . . . . . . . . ix

**1. GİRİŞ** . . . . . . . . . . **1**

1.1. Faktöriyel Tasarımlar . . . . . . . . . . 1

1.2. Kovaryans Analizi (ANCOVA) . . . . . . . . . . 3

1.3. Faktöriyel ANCOVA . . . . . . . . . . 4

1.4. Model Varsayımları Altında Faktöriyel ANCOVA . . . . . . . . . . 5

1.4.1. Parametre Tahmini . . . . . . . . . . 6

1.4.2. Hipotez Testi . . . . . . . . . . 10

1.5. Model Varsayımlarının Sağlanmaması Durumunda EKK Tahmin Edicilerinin Etkinliklerinin İncelenmesi . . . . . . . . . . 13

**2. NORMALLİK VARSAYIMINA ALTERNATİF YAKLAŞIMLAR** . . . . . . . . . . **22**

2.1. Varyans Analizinde Normallik Varsayımına Alternatif Yaklaşımlar . . . . . . . . . . 22

2.2. Kovaryans Analizinde Normallik Varsayımına Alternatif Yaklaşımlar . . . . . . . . . . 23

**3. NORMALLİK VARSAYIMININ SAĞLANMAMASI DURUMU** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **26**
3.1. Parametre Tahmini . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
3.1.1. EÇO Yöntemi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
3.1.2. UEÇO Yöntemi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
3.2. Hipotez Testi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
3.2.1. UEÇO Tahmin Edicilerine Dayalı Test İstatistikleri . . . 36
3.2.2. İndirgenmiş-Tam Model Hata Kareler Toplamları Farkına Dayalı Test İstatistikleri . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
3.3. Ortak Değişkenli $2^k$ Faktöriyel Tasarıma Genelleştirme . . . . . 40
3.3.1. Ortak Değişkene Sahip $2^3$ Modeli . . . . . . . . . . . . 40
3.3.2. Ortak Değişkenli $2^k$ Faktöriyel Tasarım . . . . . . . . . 45

**4. EĞİMLERİN HOMOJENLİĞİ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **46**
4.1. Hata Terimlerinin Normal Dağılıma Sahip Olması Durumu . . . 46
4.2. Hata Terimlerinin $LTS(p, \sigma)$ Dağılımına Sahip Olması Durumu 48

**5. MONTE-CARLO SİMULASYONLARI ve SONUÇLARI** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **50**
5.1. Parametre Tahmini . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
5.2. Hipotez Testi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
5.2.1. Test İstatistiklerinin I. Tip Hataları . . . . . . . . . . . . 66
5.2.2. Testin Gücü . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
5.2.3. İstatistiksel Sağlamlık (Robustness) . . . . . . . . . . . . 75
5.2.4. Eğim Testlerinin Karşılaştırılması . . . . . . . . . . . . . 80
5.2.5. Eğimlerin Homojenliği . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82

**6. UYGULAMA** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **85**

**7. SONUÇ ve ÖNERİLER** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **89**

**KAYNAKLAR** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **91**

## ŞEKİLLER DİZİNİ

6.1. Standart Normal Q-Q Grafiği . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
6.2. LTS Q-Q Grafiği . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86

# ÇİZELGELER DİZİNİ

1.1. Normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicileri . . . 15
5.1. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde parametre tahmini sonuçları . . . 52
5.2. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde parametre tahmini sonuçları . . . 54
5.3. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları . . . 58
5.4. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde test istatistiklerinin I. tip hataları . . . 68
5.5. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde test istatistiklerinin I. tip hataları . . . 69
5.6. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde test istatistiklerinin I. tip hataları . . . 70
5.7. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde test istatistiklerinin gücü . . . 72
5.8. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde test istatistiklerinin gücü . . . 73
5.9. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde test istatistiklerinin gücü . . . 74
5.10. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde test istatistiklerinin istatistiksel sağlamlığı . . . 77
5.11. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde test istatistiklerinin istatistiksel sağlamlığı . . . 78
5.12. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde test istatistiklerinin istatistiksel sağlamlığı . . . 79
5.13. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğim testlerinin I. tip hatası . . . 81
5.14. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğim testlerinin gücü . . . 81

5.15. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğim testlerinin istatistiksel sağlamlığı . . . . . . . . . 81
5.16. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğimlerin homojenliği testlerinin I. tip hatası . . . . . . 83
5.17. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğimlerin homojenliği testlerinin gücü . . . . . . . . . . 83
5.18. Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğimlerin homojenliği testlerinin istatistiksel sağlamlığı 84
6.1. Uygulama-veri seti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
6.2. Normalik varsayımına dayalı ANCOVA çizelgesi . . . . . . . . . . . . 87
6.3. UEÇO yöntemine dayalı ANCOVA çizelgesi . . . . . . . . . . . . . . . 87
6.4. Eğim parametresi için sonuçlar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | | |
|---|---|---|
| ANOVA | : | Varyans analizi |
| ANCOVA | : | Kovaryans analizi |
| EKK | : | En küçük kareler |
| EÇO | : | En çok olabilirlik |
| UEÇO | : | Uyarlanmış en çok olabilirlik |
| $L$ | : | EÇO olabilirlik fonksiyonu |
| $L^*$ | : | UEÇO olabilirlik fonksiyonu |
| NID | : | Bağımsız normal dağılıma sahip |
| LTS | : | Uzun kuyruklu simetrik dağılım |
| MVB | : | En küçük varyans sınırı |
| BLUE | : | En iyi, doğrusal, yansız tahminci |
| UMVUE | : | Her yerde en küçük varyanslı yansız tahminci |
| SS | : | Kareler toplamı |
| SSE(F) | : | Tam modelin hata kareler toplamı |
| SSE(R) | : | İndirgenmiş modelin hata kareler toplamı |
| $F$ | : | Klasik F testi |
| $F^*$ | : | UEÇO tahmincilerine dayalı test istatistiği |
| $F^{**}$ | : | İndirgenmiş-tam model hata kareler farkına dayalı test istatistiği |
| $\boldsymbol{F}$ | : | F dağılımı |
| $Ort$ | : | Ortalama |
| $Var$ | : | Varyans |
| $MSE$ | : | Hata kareler ortalaması |
| $sd$ | : | Serbestlik derecesi |
| $\forall$ | : | Her |
| $\exists$ | : | En az |
| $\square$ | : | Kanıtın bittiğini gösteren ifade |

# 1. GİRİŞ

Bu bölümde konunun akışı içersinde ihtiyaç duyulacak temel tanımlar ve ön bilgiler ele alınmıştır.

## 1.1. Faktöriyel Tasarımlar

Birden çok etkenin aynı zamanda hem ana etkilerini hem birbirleriyle olan etkileşimlerini inceleyen tasarımlar Fisher [1] ve Yates [2] tarafından geliştirilmiş faktöriyel tasarımlardır.

Hicks ve Turner [3] faktöriyel tasarımları bir etkenin tüm düzeylerinin deneydeki diğer tüm etkenlerinin bütün düzeyleri ile kombinasyonlanmış şekli olarak tanımlamışlardır. Ayrıca Hicks ve Turner [3] faktöriyel tasarımların avantajlarını aşağıdaki şekilde sıralamışlardır:

(i) Tek etkenli deneylerden daha etkinlerdir.

(ii) Her iki etkenin hesaplanmasında tüm veriler kullanılmaktadır.

(iii) İki ya da fazla etkenin etkileşimleri ile ilgili bilgi edilmektedir.

Bunlara ek olarak faktöriyel tasarımlar yeterli bilgi elde edilebilecek testlerin sayısını azaltmasından dolayı zaman ve harcama açısından da etkindirler (Şenoğlu [4], Montgomery [5], Hinkelmann ve Kempthorne [6]). Montgomery [5] benzer avantajları bir örnek üzerinde açıklamıştır.

A ve B gibi iki etkene sahip bir faktöriyel düzen için model denklemi aşağıdaki gibidir:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} i &= 1,2,\cdots,a \\ j &= 1,2,\cdots,b \\ k &= 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

Burada $\mu$ genel ortalamayı, $\tau_i$ A etkeninin $i-$inci düzey etkisini, $\gamma_j$ B etkeninin $j-$inci düzey etkisini, $(\tau\gamma)_{ij}$ de AB etkileşim etkisinin $i,j-$inci düzeyini gösteren model parametrelerdir. $y_{ijk}$ A etkenin $i-$inci, B etkenin $j-$inci düzeyindeki $k-$ıncı gözlem değeri, $\varepsilon_{ijk}$ ise rassal hata terimidir.

Faktöriyel tasarımların en sık kullanılan özel hallerinden biri, $2^k$ faktöriyel tasarımdır. $2^k$ faktöriyel tasarımlar, her biri iki düzeye sahip $k$ etkenli tasarımlardır. Etkenin iki düzeyi "düşük" ve "yüksek" olarak adlandırılır. $2^k$ faktöriyel tasarımın özel bir hali olan $2^2$ modeli (1.1) şeklinde olup değişen sadece $a = 2$ ve $b = 2$ olmasıdır.

Denklem (1.1) ile verilen modelde parametre tahmini ve hipotez testleri için aşağıdaki varsayımların sağlanması gerekir:

(i) Hata terimleri birbirleriyle bağımsızdır.

(ii) Hata terimleri sabit varyansa sahiptirler.

(iii) Hata terimleri 0 ortalama, $\sigma^2$ varyans ile normal dağılıma sahiptirler.

Bu varsayımlar kısaca

$$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2) \tag{1.2}$$

şeklinde de gösterilmektedir.

Bu çalışmada, sabit etkenli modellerle çalışılmıştır. Bir başka ifade ile analiz süresince

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = \sum_{j=1}^{b} \gamma_j = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\tau\gamma)_{ij} = 0 \tag{1.3}$$

olarak alınmıştır.

Faktöriyel tasarımların sık kullanılmasına rağmen uygulamada çoğu kez $y_{ijk}$ gözlem değerleri ile birlikte değişen ve ortak değişken olarak adlandırılan $x_{ijk}$ değişkenleri de söz konusu olmaktadır. Bunu bir örnekle açıklamak gerekirse; bir eğitimcinin öğrencilerin bir dersten dönem sonu başarılarının çeşitli öğretim yöntemlerine (etkenler) göre değişip değişmediğini araştırdığı bir çalışmada, öğrencilerin IQ düzeylerinin başarı üzerinde önemli bir etkisi olduğu da saptanmıştır. Eğitimcinin, söz gelişi, iki etken ve bu etkenlerin etkileşimine ek olarak bir de öğrencilerin IQ düzeylerini gözlemlemesi gerekmektedir. Bu araştırmada doğru bir analizin yapılabilmesi için öğrencilerinin IQ düzeylerinin analiz sürecinde arındırılması gerekir. Bu da deney tasarımının bir başka önemli konusu olan kovaryans analizini gündeme getirmektedir. Böyle bir örnek için en uygun yol, ayrıntıları bir sonraki alt bölümlerde anlatılan, (1.1) modeline ortak değişken ekleyerek kovaryans analizi yapmaktır.

## 1.2. Kovaryans Analizi (ANCOVA)

Tek yönlü kovaryans analizine ilişkin model denklemi

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(x_{ij} - \bar{x}) + \varepsilon_{ij}, \tag{1.4}$$

$$i = 1, 2, \cdots, a \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

dir. Burada $y_{ij}$ $i-$inci denemedeki $j-$inci gözlem, $\mu$ genel ortalama, $\tau_i$ A etkenin $i-$inci düzey etkisini gösteren model parametresi, $x_{ij}$ bağımlı değişken ile doğrusal ilişkisi olan ortak değişken, $\beta$ $x_{ij}$ ile $y_{ij}$ arasındaki doğrusal ilişkiyi ifade eden eğim parametresi ve $\varepsilon_{ij}$ rassal hata terimidir.

Bazı kaynaklarda (1.4) modeli aşağıdaki gibi de gösterilmektedir:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta x_{ijk} + \varepsilon_{ij}, \tag{1.5}$$

Yeniden parametreleme yapılarak (1.4) modeli ile (1.5) modeli arasında geçiş yapılabilir.

Denklem (1.4) ile verilen modelden de anlaşılacağı üzere kovaryans analizi regresyon analiz ile varyans analizinin bir birleşimidir.

Kovaryans analizinde amaç, test edilen etkenlerin dışında, bağımlı değişken ile ilişkisi bulunan ortak değişkenlerin doğrusal ya da daha yüksek dereceden ilişkisini bağımlı değişkenden arındırmaktır. Bu arındırma ile hatanın varyansı azalır ve böylece denemelerin etkisi tam olarak belirlenmiş olur.

Silknitter ve ark. [7] bağımlı değişken ile ilişkili olan ortak değişken ortadan kaldırılmadan yapılan analizde deneme etkilerinin maskeleneceğini belirtmişlerdir. Ayrıca, kovaryans analizi ile bloklama yapmanın arasındaki farka şu şekilde değinmişlerdir: Bloklama sadece hatanın kontrol edilebildiği ve kesin olarak farklı düzeylerde olduğu durumlarda kullanılırken, kovaryans analizi deney yapılırken kontrol edilemeyen hata terimleri olduğunda kullanılır.

Weber and Skillings [8] kovaryans analizini şu şekilde sınıflandırmışlardır: Eğer deneyde sadece bir ortak değişken var ve bu değişken ile bağımlı değişken arasında birinci dereceden doğrusal bir ilişki varsa bu analiz, basit kovaryans (simple covariance) analizi olarak adlandırılır. Eğer deney, iki veya daha fazla ortak değişken içeriyorsa analiz çoklu kovaryans (multiple covariance) analizi olarak adlandırılır.

Kovaryans analizinin yapılabilmesi için tıpkı varyans analizinde olduğu bazı varsayımların sağlanması gerekir. Bölüm 1.1 de verilen varsayımlara ek olarak kovaryans analizinde aşağıdaki varsayımların sağlanması gerekir.

(i) Bağımlı değişken ile ortak değişken arasında doğrusal bir ilişki vardır. Bir başka deyişle (1.4) modelinde $\beta \neq 0$ dır.

(ii) Denemeler aynı eğime sahip olmalıdırlar. Bu varsayım *eğimlerin homojenliği* varsayımı olarak adlandırılır.

(iii) Ortak değişken deneme ortalamaları arasındaki farktan etkilenmemelidir.

Bu varsayımların geçerli olması durumunda (1.4) modelinde parametre tahmini yapılabilmekte, hipotezler için test istatistikleri geliştirilmektedir.

### 1.3. Faktöriyel ANCOVA

Ortak değişkene sahip faktöriyel tasarımlar, tek yönlü kovaryans analizinin bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Tek yönlü kovaryans analizinden farklı olarak deneyde en az iki etken, bu etkenlerin etkileşimleri ve bir de ortak değişken söz konusudur. İki etken ve bir ortak değişkene sahip model aşağıdaki gibidir:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk}, \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} i = 1, 2, \cdots, a \\ j = 1, 2, \cdots, b \\ k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

Burada $x_{ijk}$ A etkenin $i-$inci, B etkenin $j-$inci düzeyindeki $k-$ıncı ortak değişkenin gözlem değerini, $\bar{x}$ de ortak değişkenlerin genel ortalamasını göstermektedir. (1.6) modelindeki $\beta$ parametresi, bağımlı değişken $y$ ile ortak değişken $x$ arasındaki ilişkiyi ifade eden eğim parametresidir.

Cochran [9] iki yönlü kovaryans analizinin doğası ve kullanımını çalıştığı makalesinde kovaryans analizinin başlıca kullanım amaçlarını aşağıdaki şekilde sıralamış ve açıklamıştır:

(i) Rassal deneylerde kesinliği arttırmak.

(ii) Gözlemsel çalışmalarda gürültü değişkenlerinin etkisini azaltmak.

(iii) Deneme etkilerinin doğasına ışık tutmak.

(iv) Çoklu sınıflandırmalarda regresyonlar fit etmek.

(v) Bazı gözlemlerin kayıp olduğu verileri analiz etmek.

Denklem (1.6) faktöriyel tasarımlar ve kovaryans analizinin bir birleşimi olduğundan (1.6) modelinin analizi faktöriyel ANCOVA olarak adlandırılabilir.

## 1.4. Model Varsayımları Altında Faktöriyel ANCOVA

Bu bölüm, faktöriyel ANCOVA modellerinde yukarıdaki bölümlerde bahsedilen varsayımların sağlanması durumunda modele ilişkin parametre tahminini ile ana etkiler ve etkişim etkisine ilişkin test istatistiklerinin elde edilişini içermektedir.

Genelliği bozmamak adına, bu bölüm ve bundan sonraki bölümlerde, faktöriyel tasarımların özel bir hali olan ve uygulamada da önemli bir yer tutan ortak değişkene sahip $2^k$ faktöriyel tasarımlar kullanılmıştır. $2^k$ faktöriyel tasarımlarda elde edilen sonuçlar kolaylıkla diğer durumlar için genelleştirilebilir. Bu durumda (1.6) modeli

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk}, \tag{1.7}$$

$$i = 1, 2 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

şeklinde ifade edilir.

### 1.4.1. Parametre Tahmini

***EKK Tahmin Edicileri***

Denklem (1.7) modelinde EKK yöntemi kullanılarak model parametreleri tahmin edilsin.

EKK yöntemi, hatanın kareler toplamının ilgili parametreye göre minimum yapılması mantığına dayandığından

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ijk}^2 && (1.8)\\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \left\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\right\}^2 && (1.9) \end{aligned}$$

olsun.

Bu durumda normal denklemler

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \left\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\right\} = 0,\\ \frac{\partial S}{\partial \tau_i} &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \left\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\right\} = 0,\\ \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \left\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\right\} = 0,\\ \frac{\partial S}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\right\} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \left\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\right\}(x_{ijk} - \bar{x}) = 0$$

olarak elde edilir.

Bu denklem sistemi çözüldüğünde (1.7) modelinin EKK tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{...}, \tag{1.10}$$

$$\tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} - \hat{\beta}(\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}), \tag{1.11}$$

$$\tilde{\gamma_j} = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} - \hat{\beta}(\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...}), \tag{1.12}$$

$$(\tilde{\tau\gamma})_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} - \hat{\beta}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...}), \tag{1.13}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}. \tag{1.14}$$

Burada

$$\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{2^2 n} \quad , \quad \bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{2n},$$

$$\bar{y}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{2n} \quad , \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n},$$

$$\bar{x}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{2^2 n} \quad , \quad \bar{x}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{2n},$$

$$\bar{x}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{2n} \quad , \quad \bar{x}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{n},$$

$$E_{xy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})$$

ve

$$E_{xx} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$$

dir.

Kovaryans analizinde de EKK tahmin edicileri BLUE olma özelliğine sahiptir. Ayrıca normallikten dolayı da UMVUE özelliği de sağlanmaktadır.

***EÇO Tahmin Edicileri***

Denklem (1.7) modelinde parametrelerin normallik varsayımı altında EÇO tahmin edicileri aşağıdaki şekilde bulunur.

$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$ olduğundan $\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \bar{x})$ olmak üzere

$$y_{ijk} \sim NID(\mu_{ij}, \sigma^2)$$

olur. Buradan EÇO tahmin edicilerinin bulunması için gerekli olabilirlik fonksiyonu

$$L = \prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{y_{ijk} - \mu_{ij}\}^2}\right) \tag{1.15}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{4n} \; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\{y_{ijk} - \mu_{ij}\}^2} \tag{1.16}$$

olarak elde edilir. (1.16) denklemi ile verilen olabilirlik fonksiyonun doğal logaritması alındığında log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = -2n\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\{y_{ijk} - \mu_{ij}\}^2 \tag{1.17}$$

olur. $\mu_{ij}$ yerine yazıldığında

$$\ln L = -2n\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\}^2 \tag{1.18}$$

olur.

Log-olabilirlik fonksiyonun ilgili parametrelere göre maximum yapılmasıyla EÇO tahmin edicileri bulunur. Normallik varsayımı altında EKK ile EÇO yöntemlerinin sonuçları çakıştığından parametrelerin EÇO tahmicileri bu kısımda verilmemiş, sadece hatanın varyansı $\sigma^2$ nin EÇO tahmin edicisi bulunmuştur.

Hatanın varyansı $\sigma^2$ nin EÇO tahmin edicisi (1.18) log-olabilirlik fonksiyonun $\sigma^2$ ye göre kısmi türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki şekilde bulunur;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{-2n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x})\}^2 = 0. \tag{1.19}$$

Gerekli işlemler yapıldığında

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\{y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{...})\}^2}{4n} \tag{1.20}$$

elde edilir. (1.20) denkleminin payı $E_{yyadj}$ ile gösterilsin. $E_{yyadj}$ ta $\tilde{\beta}$ yerine $\dfrac{E_{xy}}{E_{xx}}$ yazılıp, kare ifade açılıp düzenlendiğinde

$$E_{yyadj} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 - \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2}$$

olur. Eğer

$$E_{yy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

denirse

$$E_{yyadj} = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} \tag{1.21}$$

olur. Böylece

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{E_{yyadj}}{4n} \tag{1.22}$$

olarak tahmin edilir. (1.22) ile verilen $\tilde{\sigma}^2$ tahmin edicisi yanlıdır, gerekli yan düzeltmesi yapılırsa

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{E_{yyadj}}{2^2 n - 2^2 - 1} \tag{1.23}$$

$\sigma^2$ nin yansız tahmin edicisi olur.

Standart faktöriyel tasarımlardaki tahmin edicilerden farklı olarak burada herbir tahmin edici, ortak değişkenin etkisinden arındırılmıştır.

$E_{yyadj}$ ile gösterilen ifade, kovaryans analizindeki hata kareler toplamı olup, hata kareler toplamında bulunan $\dfrac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$ ortak değişkenden yani regresyondan kaynaklanan hata kareler toplamıdır ve bu toplamın $Eyy$ den çıkartılmasıyla hata da ortak değişkenin etkisinden arındırılmış olur. $\hat{\sigma}^2$ nin paydasında bulunan serbestlik derecesi ise bilinenin aksine 1 eksiktir; bu da ortak değişkenden kaynaklanmaktadır.

### 1.4.2. Hipotez Testi

Bu bölümde model varsayımlarının sağlandığı durumlarda faktöriyel ANCOVA modelinde ana etkiler, etkileşim etkileri ve eğim için kurulan hipotezleri test etmek için kullanılan test istatistikleri ele alınmıştır.

Montgomery [5] tek yönlü ANCOVA da, Wildth ve Ahtola [10] faktöriyel ANCOVA'da kullanılan test istatistiklerinin nasıl bulunduğunu incelemişlerdir.

Bu test istatistiklerinin bulunmasındaki temel mantık, sıfır hipotezi altındaki modelin (indirgenmiş model) hata kareler toplamı ile tam modelin hata kareler toplamı arasındaki farkın bulunmasıdır. Bu mantık esas alınarak öncelikle $2^2$ ortak değişkenli modelde ana etkiler, etkileşim etkisi için kullanılan test istatistiklerinin bulunuşu aşağıda açıklanmıştır. (Daha sonra ortak değişkenli $2^3$ tasarım için aynı çalışmalar yapılmıştır.)

Denklem (1.7) ile verilen modelde A etkeninin düzey etkileri arasındaki fark olup olmadığı

$$\begin{aligned} H_0 &: \forall \tau_i = 0 \\ H_1 &: \exists \tau_i \neq 0 \end{aligned}$$

hipotezleri ile test edilmek istensin. $H_0$ sıfır hipotezi altındaki indirgenmiş model

$$y_{ijk} = \mu + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \bar{x}_{...}) + \varepsilon_{ijk}, \tag{1.24}$$

dir. Bu modelde hata kareler toplamı $SSE(R)$ ile gösterilsin. $SSE(R)$, (1.24) modelinde yer alan eğim dışındaki parametrelerin alt bölüm 1.4.1 de bulunan EKK tahmin edicileri yerlerine yazılarak bulunan hata teriminin karesidir. Burada eğim parametresinin yeniden tahmin edilmesi gerekir, bu tahmin edici

$$A_{xy} = 2n\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})(\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}) \quad , \quad A_{xx} = 2n\sum_{i=1}^{2}(\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})^2$$

ve

$$A_{yy} = 2n \sum_{i=1}^{2} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$$

olmak üzere

$$\tilde{\beta}(R) = \frac{A_{xy} + E_{xy}}{A_{xx} + E_{xx}}$$

dir. Burada $\tilde{\beta}(R)$ $\tau_i$ parametresinin olmadığı indirgenmiş modeldeki eğim parametresinin EKK tahmin edicisidir. Böylece

$$SSE(R) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \{y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} + \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} - \tilde{\beta}(R)(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.} + \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})\}^2$$

olur. $\tilde{\beta}(R)$ yerine yazılır, kare ifade açılıp düzenlenirse

$$SSE(R) = E_{yy} + A_{yy} - \frac{(A_{xy} + E_{xy})^2}{A_{xx} + E_{xx}} \tag{1.25}$$

elde edilir.

Tam model (1.7) da hata kareler toplamı, herbir parametrenin EKK tahmin edicilerinin yerine yazılmasıyla elde edilir. Bu toplam, $SSE(F)$ ile gösterilsin.

$$SSE(F) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \{y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{...})\}^2$$

Son ifadede kare açılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$SSE(F) = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} \tag{1.26}$$

olarak bulunur. (1.21) denklemi göz önüne alındığında

$$SSE(F) = E_{yyadj} \tag{1.27}$$

olur.

$SS(R)$ ve $SS(F)$ ifadelerinin sırasıyla $2^2n - 2^2$ ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olduğu gösterilebilir. Buradan $SSE(R) - SSE(F)$ ifadesi 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olur. Böylece A etkeninin düzey etkileri arasında fark olup olmadığı

$$F_A = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{SSE(F)/(2^2n - 2^2 - 1)} \tag{1.28}$$

test istatistiği ile test edilebilir. $F_A$ ifadesinin 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceleri ile $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu açıktır. Buradaki $SSE(R) - SSE(F)$ farkının az olması A etkenin düzey etkileri arasında anlamlı bir fark olmadığını gösterir. Eğer fark büyükse, $H_0$ hipotezi reddedilir.

Denklem (1.28) ile verilen test istatistiğinin payı ve paydası ayrı ayrı düzenlensin.

$$SSE(R) - SSE(F) = E_{yy} + A_{yy} - \frac{(A_{xy} + E_{xy})^2}{A_{xx} + E_{xx}} - E_{yyadj}$$

ifadesi $A_{yyadj}$ ile gösterilsin. İfade düzenlendiğinde

$$A_{yyadj} = A_{yy} - \frac{(A_{xy} + E_{xy})^2}{A_{xx} + E_{xx}} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} \tag{1.29}$$

olur.

$$SSE(F) = \frac{E_{yyadj}}{2^2n - 2^2 - 1} = \tilde{\sigma}^2 \tag{1.30}$$

Denklem (1.29), (1.30) ve (1.28) birleştirildiğinde

$$F_A = \frac{A_{yyadj}}{\tilde{\sigma}^2} \tag{1.31}$$

elde edilir.

Benzer yolla B etkeninin ve AB etkileşim etkisinin test edilmesi için gerekli test istatistikleri elde edilebilir. Gerekli notasyonlar ve test istatistikleri aşağıda verilmiştir:

$$B_{xy} = 2n\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots})(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{x}_{\cdots}) \quad , \quad B_{xx} = 2n\sum_{j=1}^{2}(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{x}_{\cdots})^2$$

$$B_{yy} = 2n\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2 \quad , \quad B_{yyadj} = B_{yy} - \frac{(B_{xy} + E_{xy})^2}{B_{xx} + E_{xx}} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$$

olmak üzere

$$F_B = \frac{B_{yyadj}}{\tilde{\sigma}^2} \tag{1.32}$$

dir.

$$AB_{xy} = n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots})(\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{x}_{\cdots})$$

$$AB_{xx} = n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2$$

$$AB_{yy} = n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$$AB_{yyadj} = AB_{yy} - \frac{(AB_{xy} + E_{xy})^2}{AB_{xx} + E_{xx}} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$$

olmak üzere

$$F_{AB} = \frac{AB_{yyadj}}{\tilde{\sigma}^2} \tag{1.33}$$

dir.

Eğim parametresi $\beta$ nın anlamlılığı için de benzer süreç izlenerek bir test istatistiği geliştirilebilir. Bu durumda sıfır ve alternatif hipotez

$$H_0 \ : \ \beta = 0$$
$$H_1 \ : \ \beta \neq 0$$

dır. $H_0$ altındaki indirgenmiş modelin hata kareler toplamı

$$SSE(R) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\{y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\}^2 = E_{yy}$$

ve tam modelin kareler toplamı (1.27) ile verilen

$$SSE(F) = E_{yyadj}$$

dir. Bu durumda test istatistiği

$$F_{\beta} = \frac{E_{yy} - E_{yyadj}}{\tilde{\sigma}^2} \tag{1.34}$$

bulunur. Bu test istatistiğinin 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu gösterilebilir.

## 1.5. Model Varsayımlarının Sağlanmaması Durumunda EKK Tahmin Edicilerinin Etkinliklerinin İncelenmesi

Bu bölümde normallik varsayımının sağlanmaması durumu Monte-Carlo simulasyon çalışması ile incelenmiştir. Simulasyon çalışmasında (1.7) modelinde hata terimlerinin dağılımı, normal dağılımın makul alternatifleri olarak alınmış ve bu durumda bölüm 1.4.1 de EKK yöntemiyle elde edilen tahmin edicilerin ortalaması, varyansı ve hata kareler ortalaması 5, 10, 15 ve 20 örneklem hacimleri için hesaplanıp sonuçlar Çizelge 1.1 de sunulmuştur. Simulasyon $10,000$ tekrarla yapılmıştır. Simulasyon için (1.7) modelinde $\mu = 0$, $\tau_i = 0$, $\gamma_j = 0$, $(\tau\gamma)_{ij} = 0$, $\beta = 1$ ve $\sigma = 1$ alınmıştır. Ayrıca $x$ ortak değişkenin de standart normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. MATLAB dilinde yazılan programlarla sonuçlar elde edilmiştir.

Simulasyon çalışmasında hata terimlerinin dağılımı normal dağılıma alternatif olarak aşağıdaki dağılımlar olarak alınmıştır:

a. Student's $t$ Dağılımı: $t(5)$, $t(10)$, $t(20)$, $t(30)$

b. Laplace Dağılımı: $Laplace(0, 1)$

c. Lojistik Dağılım: $Logistic(0, 1)$

d. Dixon'nun Aykırı Değer Modeli:$(n-r)N(0, 1)+rN(0, 4)$, $r = [|0.5+0.1n|]$

e. Karma Model: $0.90N(0, 1) + 0.10N(0, 4)$

f. Bulaşık Model: $0.90N(0, 1) + 0.10Unifrom(-1, 1)$

Çizelge 1.1: Normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicileri

| | $N(0,1)$ | | | $t(5)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ |
| | | | $n=5$ | | | |
| $\mu$ | -0.00263 | 0.25034 | 0.25038 | 0.00171 | 0.42641 | 0.42642 |
| $\tau_1$ | 0.00069 | 0.26352 | 0.26353 | -0.00418 | 0.44050 | 0.44059 |
| $\gamma_1$ | 0.00355 | 0.26416 | 0.26422 | -0.00021 | 0.44499 | 0.44499 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00365 | 0.27027 | 0.27033 | 0.00122 | 0.45016 | 0.45016 |
| $\beta$ | 1.00369 | 0.35670 | 0.35677 | 1.00303 | 0.58541 | 0.58545 |
| $\sigma$ | 0.98426 | 0.16101 | 0.16225 | 0.96540 | 0.32227 | 0.32826 |
| | | | $n=10$ | | | |
| $\mu$ | 0.00274 | 0.23709 | 0.23716 | -0.00258 | 0.41123 | 0.41130 |
| $\tau_1$ | 0.00094 | 0.25162 | 0.25163 | 0.00035 | 0.43253 | 0.43253 |
| $\gamma_1$ | 0.00506 | 0.25395 | 0.25420 | -0.00035 | 0.41985 | 0.41985 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.01115 | 0.25161 | 0.25286 | -0.00225 | 0.42044 | 0.42050 |
| $\beta$ | 1.00942 | 0.30136 | 0.30224 | 0.99784 | 0.48738 | 0.48742 |
| $\sigma$ | 0.98285 | 0.14062 | 0.14356 | 0.98038 | 0.33930 | 0.34315 |
| | | | $n=15$ | | | |
| $\mu$ | -0.00143 | 0.24983 | 0.24986 | 0.00083 | 0.41863 | 0.41864 |
| $\tau_1$ | 0.00019 | 0.24774 | 0.24774 | -0.00358 | 0.42872 | 0.42891 |
| $\gamma_1$ | -0.00079 | 0.25186 | 0.25187 | 0.00007 | 0.43301 | 0.43301 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00036 | 0.25049 | 0.25049 | -0.00045 | 0.42680 | 0.42680 |
| $\beta$ | 1.00159 | 0.27139 | 0.27143 | 1.00114 | 0.46581 | 0.46583 |
| $\sigma$ | 0.99718 | 0.13708 | 0.13720 | 0.98794 | 0.36116 | 0.36335 |
| | | | $n=20$ | | | |
| $\mu$ | 0.00020 | 0.24510 | 0.24510 | -0.00135 | 0.42059 | 0.42063 |
| $\tau_1$ | -0.00203 | 0.25625 | 0.25633 | -0.00064 | 0.43010 | 0.43011 |
| $\gamma_1$ | 0.00134 | 0.25050 | 0.25054 | -0.00152 | 0.42815 | 0.42820 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00072 | 0.25705 | 0.25706 | 0.00194 | 0.42446 | 0.42454 |
| $\beta$ | 0.99741 | 0.26551 | 0.26564 | 0.99874 | 0.45435 | 0.45438 |
| $\sigma$ | 0.99736 | 0.13062 | 0.13075 | 0.99120 | 0.36075 | 0.36230 |

Çizelge 1.1 (Devam) Normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicileri

| | $t(10)$ | | | $t(20)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ |
| | | | $n = 5$ | | | |
| $\mu$ | 0.00415 | 0.30891 | 0.30900 | -0.00093 | 0.28011 | 0.28011 |
| $\tau_1$ | 0.00166 | 0.33332 | 0.33333 | -0.00200 | 0.29413 | 0.29415 |
| $\gamma_1$ | 0.00209 | 0.33762 | 0.33764 | 0.00181 | 0.29595 | 0.29596 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00101 | 0.33787 | 0.33787 | 0.00132 | 0.29623 | 0.29623 |
| $\beta$ | 1.00261 | 0.44961 | 0.44964 | 1.00315 | 0.39556 | 0.39561 |
| $\sigma$ | 0.98083 | 0.20976 | 0.21160 | 0.98163 | 0.18474 | 0.18643 |
| | | | $n = 10$ | | | |
| $\mu$ | 0.00364 | 0.31887 | 0.31900 | 0.00033 | 0.28097 | 0.28097 |
| $\tau_1$ | 0.00028 | 0.32298 | 0.32299 | 0.00178 | 0.28774 | 0.28777 |
| $\gamma_1$ | -0.00289 | 0.32206 | 0.32215 | 0.00423 | 0.28449 | 0.28466 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00284 | 0.31876 | 0.31884 | 0.00137 | 0.28830 | 0.28831 |
| $\beta$ | 1.00291 | 0.36064 | 0.36072 | 0.99743 | 0.32763 | 0.32770 |
| $\sigma$ | 0.99026 | 0.19625 | 0.19720 | 0.99160 | 0.16780 | 0.16851 |
| | | | $n = 15$ | | | |
| $\mu$ | 0.00023 | 0.31100 | 0.31101 | -0.00295 | 0.27737 | 0.27750 |
| $\tau_1$ | 0.00135 | 0.32062 | 0.32065 | -0.00215 | 0.28719 | 0.28725 |
| $\gamma_1$ | -0.00053 | 0.32238 | 0.32239 | -0.00066 | 0.27757 | 0.27758 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00027 | 0.31322 | 0.31322 | 0.00131 | 0.28877 | 0.28880 |
| $\beta$ | 0.99872 | 0.33849 | 0.33851 | 1.00104 | 0.30286 | 0.30287 |
| $\sigma$ | 0.99460 | 0.20052 | 0.20096 | 0.99388 | 0.15732 | 0.15788 |
| | | | $n = 20$ | | | |
| $\mu$ | 0.00068 | 0.30924 | 0.30925 | 0.00038 | 0.27516 | 0.27516 |
| $\tau_1$ | -0.00033 | 0.31419 | 0.31420 | 0.00025 | 0.27836 | 0.27836 |
| $\gamma_1$ | -0.00026 | 0.32222 | 0.32223 | 0.00076 | 0.28772 | 0.28773 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00050 | 0.32661 | 0.32661 | 0.00168 | 0.28608 | 0.28614 |
| $\beta$ | 0.99975 | 0.33315 | 0.33316 | 1.00133 | 0.30004 | 0.30007 |
| $\sigma$ | 0.99553 | 0.19215 | 0.19255 | 0.99691 | 0.15906 | 0.15925 |

Çizelge 1.1 (Devam) Normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicileri

| | $t(30)$ | | | $Laplace(0.1)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ |
| | | | $n = 5$ | | | |
| $\mu$ | 0.00067 | 0.26683 | 0.26683 | -0.00340 | 0.49955 | 0.49961 |
| $\tau_1$ | -0.00262 | 0.28646 | 0.28650 | 0.00202 | 0.53416 | 0.53418 |
| $\gamma_1$ | -0.00407 | 0.28436 | 0.28444 | -0.01239 | 0.53656 | 0.53732 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00373 | 0.28310 | 0.28317 | 0.00835 | 0.52653 | 0.52688 |
| $\beta$ | 1.00057 | 0.38079 | 0.38079 | 0.99998 | 0.72950 | 0.72950 |
| $\sigma$ | 0.97976 | 0.17086 | 0.17291 | 0.97170 | 0.32023 | 0.32423 |
| | | | $n = 10$ | | | |
| $\mu$ | 0.00076 | 0.26793 | 0.26794 | -0.00356 | 0.51438 | 0.51450 |
| $\tau_1$ | -0.00098 | 0.27520 | 0.27521 | -0.00014 | 0.50519 | 0.50519 |
| $\gamma_1$ | -0.00256 | 0.27796 | 0.27802 | -0.00187 | 0.50902 | 0.50906 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00132 | 0.27500 | 0.27501 | 0.00214 | 0.50681 | 0.50686 |
| $\beta$ | 0.99899 | 0.32068 | 0.32069 | 1.00050 | 0.60050 | 0.60051 |
| $\sigma$ | 0.99181 | 0.15379 | 0.15446 | 0.98579 | 0.30653 | 0.30855 |
| | | | $n = 15$ | | | |
| $\mu$ | 0.00161 | 0.26755 | 0.26759 | -0.00070 | 0.50039 | 0.50040 |
| $\tau_1$ | 0.00035 | 0.27657 | 0.27657 | -0.00081 | 0.50976 | 0.50977 |
| $\gamma_1$ | -0.00071 | 0.26795 | 0.26796 | -0.00152 | 0.48635 | 0.48638 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00163 | 0.28223 | 0.28227 | -0.00011 | 0.50293 | 0.50293 |
| $\beta$ | 0.99858 | 0.31115 | 0.31118 | 1.00195 | 0.56203 | 0.56209 |
| $\sigma$ | 0.99626 | 0.15232 | 0.15253 | 0.98929 | 0.30835 | 0.31007 |
| | | | $n = 20$ | | | |
| $\mu$ | 0.00187 | 0.26800 | 0.26807 | -0.00228 | 0.49883 | 0.49893 |
| $\tau_1$ | -0.00109 | 0.27265 | 0.27267 | -0.00275 | 0.49060 | 0.49075 |
| $\gamma_1$ | 0.00175 | 0.27332 | 0.27338 | -0.00191 | 0.49953 | 0.49960 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00273 | 0.27013 | 0.27028 | -0.00005 | 0.49152 | 0.49152 |
| $\beta$ | 1.00058 | 0.28420 | 0.28421 | 1.00188 | 0.53587 | 0.53594 |
| $\sigma$ | 0.99457 | 0.14718 | 0.14777 | 0.99358 | 0.32019 | 0.32101 |

Çizelge 1.1 (Devam) Normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicileri

| | *Lojistik*(0.1) | | | *Aykırı Değer Modeli* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ |
| | | | $n = 5$ | | | |
| $\mu$ | -0.00613 | 0.81940 | 0.81959 | 0.00077 | 0.39833 | 0.39833 |
| $\tau_1$ | 0.00005 | 0.87159 | 0.87159 | 0.00134 | 0.43245 | 0.43246 |
| $\gamma_1$ | -0.01055 | 0.86147 | 0.86202 | -0.00425 | 0.43155 | 0.43164 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00951 | 0.84917 | 0.84962 | -0.00310 | 0.43852 | 0.43857 |
| $\beta$ | 0.99863 | 1.17493 | 1.17494 | 1.00278 | 0.57675 | 0.57679 |
| $\sigma$ | 0.97961 | 0.22421 | 0.22629 | 1.23720 | 0.34794 | 0.62926 |
| | | | $n = 10$ | | | |
| $\mu$ | -0.00465 | 0.84353 | 0.84374 | 0.00173 | 0.32928 | 0.32931 |
| $\tau_1$ | -0.00010 | 0.82963 | 0.82963 | -0.00237 | 0.33749 | 0.33755 |
| $\gamma_1$ | -0.00183 | 0.82204 | 0.82208 | -0.00354 | 0.33112 | 0.33125 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00297 | 0.84485 | 0.84494 | 0.00246 | 0.33610 | 0.33616 |
| $\beta$ | 0.99644 | 0.95735 | 0.95747 | 0.99677 | 0.38654 | 0.38665 |
| $\sigma$ | 0.99194 | 0.20646 | 0.20711 | 1.12977 | 0.25264 | 0.42106 |
| | | | $n = 15$ | | | |
| $\mu$ | 0.00080 | 0.80766 | 0.80766 | 0.00059 | 0.30585 | 0.30586 |
| $\tau_1$ | -0.00415 | 0.82622 | 0.82647 | -0.00220 | 0.30562 | 0.30569 |
| $\gamma_1$ | -0.00298 | 0.80745 | 0.80758 | 0.00065 | 0.30362 | 0.30363 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00013 | 0.81702 | 0.81702 | -0.00189 | 0.30491 | 0.30497 |
| $\beta$ | 1.00292 | 0.89597 | 0.89610 | 0.99957 | 0.33235 | 0.33235 |
| $\sigma$ | 0.99474 | 0.20202 | 0.20244 | 1.08813 | 0.20962 | 0.32613 |
| | | | $n = 20$ | | | |
| $\mu$ | -0.00111 | 0.80952 | 0.80955 | 0.00042 | 0.28160 | 0.28160 |
| $\tau_1$ | -0.00230 | 0.81300 | 0.81311 | -0.00135 | 0.28589 | 0.28593 |
| $\gamma_1$ | -0.00030 | 0.81582 | 0.81582 | -0.00007 | 0.29803 | 0.29803 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00039 | 0.80170 | 0.80170 | -0.00152 | 0.29657 | 0.29662 |
| $\beta$ | 1.00043 | 0.88575 | 0.88576 | 0.99960 | 0.31072 | 0.31072 |
| $\sigma$ | 0.99368 | 0.20537 | 0.20616 | 1.06767 | 0.19315 | 0.28473 |

Çizelge 1.1 (Devam) Normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicileri

| | *Karma Model* | | | *Bulaşık Model* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ | $Ort$ | $n \times Var$ | $n \times MSE$ |
| | | | $n = 5$ | | | |
| $\mu$ | 0.00368 | 0.32943 | 0.32950 | 0.00137 | 0.33204 | 0.33205 |
| $\tau_1$ | 0.00064 | 0.36436 | 0.36436 | -0.00467 | 0.33968 | 0.33979 |
| $\gamma_1$ | -0.00208 | 0.35497 | 0.35499 | -0.00177 | 0.34703 | 0.34705 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00156 | 0.35807 | 0.35808 | 0.00255 | 0.33831 | 0.33834 |
| $\beta$ | 1.00308 | 0.47452 | 0.47457 | 0.99897 | 0.46729 | 0.46730 |
| $\sigma$ | 1.11648 | 0.30312 | 0.37096 | 1.11684 | 0.23801 | 0.30627 |
| | | | $n = 10$ | | | |
| $\mu$ | -0.00315 | 0.32892 | 0.32902 | -0.00066 | 0.31854 | 0.31854 |
| $\tau_1$ | -0.00219 | 0.33780 | 0.33785 | 0.00201 | 0.33318 | 0.33322 |
| $\gamma_1$ | -0.00040 | 0.33950 | 0.33950 | -0.00045 | 0.33374 | 0.33374 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00160 | 0.33387 | 0.33389 | 0.00286 | 0.33179 | 0.33187 |
| $\beta$ | 0.99730 | 0.38271 | 0.38278 | 1.00112 | 0.36874 | 0.36875 |
| $\sigma$ | 1.13061 | 0.29221 | 0.46281 | 1.12501 | 0.20909 | 0.36536 |
| | | | $n = 15$ | | | |
| $\mu$ | 0.00298 | 0.32170 | 0.32184 | -0.00194 | 0.32705 | 0.32711 |
| $\tau_1$ | 0.00094 | 0.34099 | 0.34101 | 0.00071 | 0.32765 | 0.32766 |
| $\gamma_1$ | 0.00012 | 0.33103 | 0.33103 | -0.00044 | 0.32848 | 0.32848 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00168 | 0.32756 | 0.32761 | -0.00070 | 0.33700 | 0.33701 |
| $\beta$ | 1.00018 | 0.35922 | 0.35922 | 1.00296 | 0.35839 | 0.35852 |
| $\sigma$ | 1.13254 | 0.28417 | 0.54768 | 1.13220 | 0.20254 | 0.46468 |
| | | | $n = 20$ | | | |
| $\mu$ | 0.00202 | 0.31863 | 0.31871 | -0.00079 | 0.31305 | 0.31306 |
| $\tau_1$ | 0.00010 | 0.33077 | 0.33077 | -0.00240 | 0.33296 | 0.33307 |
| $\gamma_1$ | 0.00055 | 0.32923 | 0.32924 | 0.00012 | 0.32886 | 0.32886 |
| $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00085 | 0.33164 | 0.33165 | -0.00115 | 0.32356 | 0.32359 |
| $\beta$ | 1.00164 | 0.34554 | 0.34559 | 1.00103 | 0.34691 | 0.34693 |
| $\sigma$ | 1.13534 | 0.28250 | 0.64885 | 1.13472 | 0.19416 | 0.55714 |

Çizelge 1.1 de sunulan sonuçlar, (1.7) modelinde hata terimlerinin dağılımının normalden uzaklaşması halinde EKK tahmin edicilerinin etkiliğinin hızla düştüğünü göstemektedir.

Benzer bir simulasyon çalışması alt bölüm 1.4.2 de ele alınan test istatistikleri için yapılabilir. Bu kısımda, sadece normallik varsayımının geçerli olmaması alt bölüm 1.4.2 deki test istatistiklerinin birinci tip hatalarını çok etkilememekle beraber, güçlerini kötü yönde etkilemektedir ve test istatistikleri istatistiksel olarak sağlam değildir, bilgisine değinilmiş olsun. Buna ilişkin simulasyon sonuçları ilerleyen bölümlerde detaylı bir şekilde verilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, (1.7) modelinde hata terimlerinin dağılımının normal dağılımın makul bir alternatifi olması durumunda EKK tahmin edicilerinin etkin olmadığını göstermektedir. Bu da normallik varsayımı sağlanmadığında etkin tahmin edicilerin, güçlü ve istatistiksel olarak sağlam test istatistiklerinin geliştirilmesini gerektirmektedir.

Tezin ilerleyen bölümlerinde ele alınan konular aşağıda açıklanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde faktöriyel ANCOVA modellerinde normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda literatürde yer almış çalışmalara yer verilmiş ve bu çalışmalardan yola çıkarak bu tez çalışmasında kullanılacak yöntem üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölüm, hata terimlerinin dağılımının uzun kuyruklu simetrik dağılım olduğu varsayılmış, uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemine dayalı olarak (1.7) modelinde parametre tahminleri yapılmış, bulunan tahmin edicilerin özelikleri incelenmiştir. Ayrıca yine uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemine dayalı olarak hipotezler için test istatistikleri geliştirilmiş, bu test istatistiklerinin dağılımı incelenmiştir. (1.7) modeli için yapılan tüm analizler, bölüm sonunda, önce ortak değişkene sahip $2^3$ ve ardından ortak değişkene sahip $2^k$ faktöriyel tasarım modelleri için genelleştirilmiştir.

Dördüncü bölümde, (1.7) modelinde eğimlerin homojenliği varsayımının sağlanmaması durumu incelenmiştir. Eğimlerin homojenliği için normal teoride kullanılan test istatistiğine karşılık, normallik varsayımı sağlanmadığında da eğimlerin homojenliği için bir test istatistiği geliştirilmiştir. Elde edilen bulgular üçüncü bölüme dayalı olarak ortak değişkene sahip $2^k$ faktöriyel tasarımlara genelleştirilmiştir.

Beşinci bölüm, elde edilen tüm teorik bilgilere ilişkin simulasyon çalışmasını ve sonuçlarını içermektedir.

Tez çalışmasında geliştirilen yöntemler, altıncı bölümde bir gerçek hayat örneği üzerinde uygulanmıştır.

Sonuç ve önerileri içeren yedinci bölümle tez çalışması bitirilmiştir.

# 2. NORMALLİK VARSAYIMINA ALTERNATİF YAKLAŞIMLAR

Giriş bölümünün sonunda yapılan simulasyon çalışması normallik varsayımının sağlanmaması durumunda EKK tahmin edicilerinin etkinliklerini yitirdiğini göstermiştir. Ayrıca test istatistiklerinin de gücünün azaldığı bilgisine değinilmişti. Bu nedenlerle faktöriyel ANCOVA modellerinde normallik varsayımı sağlanmadığında etkin tahminciler ve güçlü test istatistikleri elde etme gereği doğmaktadır. Bu bölümde sözü edilen bu gerekliliğe literatürde ne gibi katkılar yapıldığı araştırılmıştır.

Tek yönlü kovaryans analizine ilişkin literatürde bir çok çalışma yer almakta iken ortak değişkene sahip faktöriyel tasarımlarlara ilişkin, ulaşılabildiği kadarıyla, çok fazla çalışma yer almamaktadır. Bu nedenle bu bölümde tek yönlü ANCOVA modeli için geliştirilmiş veya önerilmiş yöntemler incelenmiştir. Bu incelemeye bağlı olarak bölüm sonunda, faktöriyel ANCOVA modellerinde normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda nasıl bir yol izleneceğine dair bilgiler verilmiştir.

## 2.1. Varyans Analizinde Normallik Varsayımına Alternatif Yaklaşımlar

Doğrusal modellerin önemli iki dayanağı olan regresyon analizi ve deney tasarımı, istatistiksel testlerin yapılabilmesi ve istatistiksel olarak “iyi” özelliklere sahip tahmin edicilerin elde edilebilmesi için, hataların sabit varyanslı ve dağılımının normal olması varsayımına dayalıdırlar. Ancak uygulamada hataların normal olmayan bir dağılımdan gelmesi daha sık karşılaşılan bir durumdur. Pearson [11] birçok örneklemin çarpık dağılımdan geldiğini belirtmiştir. Ayrıca Geary [12] “Normallik bir efsanedir, hiçbir zaman olmadı ve hiçbir zaman da olmayacak.” demiştir. Pearson ve Geary dışında Elveback ve ark. [13], Tiku ve ark. [14], Tiku ve Akkaya [15], Gayen [16], Srivastava [17], Tiku [18, 20], Donaldson [21], Spjøvoll ve Aastveit [22], çalışmalarında özellikle ANOVA modellerinde normal olmama durumunu incelemişlerdir.

Şenoglu [23], Şenoğlu ve Tiku [24] tek yönlü ve etkileşime sahip iki yönlü ANOVA modellerinde normallik varsayımının geçerli olmadığı durumları incemiş, hata terimlerinin dağılımının Weibull ve genelleştirilmiş lojistik dağılımı olması halinde uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemine dayalı olarak parametre tahminleri yapmış, test istatistikleri geliştirilmişlerdir. Şenoğlu ve Tiku [25] hata terimleri nin genelleştirilmiş lojistik dağılıma sahip olması halinde doğrusal bağıntılar için test istatistiği geliştirmişlerdir.

## 2.2. Kovaryans Analizinde Normallik Varsayımına Alternatif Yaklaşımlar

Tek yönlü kovaryans analizinde normallik varsayımı sağlanmadığında kullanılacak test istatistikleri ilk olarak Birch ve Myers [26] tarafından önerilmiştir. Önerilen yöntem Huber [27] tarafından geliştirilen ve robust regresyon analizinde kullanılan $M-$tahmincileri yani yeniden ağırlıklandırılmış EKK yöntemine dayanır. Test istatistiklerinin elde edilişi ise bölüm 1.4.2 de anlatıldığı gibidir, yani test istatistikleri indirgenmiş modelin ve tam modelin hata kareler toplamlarının arasındaki farka dayanmaktadır. Birch ve Myers [26] bu mantıkla önerdikleri test istatistiklerini $F-$like ve $t-$like olarak adlandırmışlar ve bu test istatistiklerinin birinci tip hatalarının önceden belirlenmiş $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine yaklaştıklarını $10,000$ kez tekrarla yaptıkları simulasyon çalışması ile göstermişlerdir. Böylelikle bir anlamda, önermiş oldukları test istatistiklerinin $\boldsymbol{F}$ ve $t$ dağılımına sahip olduklarını göstermişlerdir.

Şenoğlu [28] tek yönlü kovaryans analizinde hata terimlerinin kısa kuyruklu simetrik dağılımlar ailesinden bir dağılıma sahip olduğunu varsayarak, modelin parametrelerini UEÇO yöntemiyle tahmin etmiştir. Elde edilen sonuçların klasik yöntem olan EKK'dan daha etkin olduğunu yaptığı simulasyon çalışmaları ile göstermiştir.

Avcıoğlu [29], yaptığı yüksek lisans tezinde tek yönlü kovaryans analizinde hata terimlerinin uzun kuyruklu simetrik dağılıma sahip olduğunu varsaymıştır. UEÇO yöntemine dayalı olarak hem parametre tahmini yapmış ve bir test istatistiği geliştirmiştir. Bu test istatistiğinin Monte-Carlo simulasyon çalışması ile klasik test istatistiğinden istatistiksel olarak daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Şenoğlu ve Avcıoğlu [30] tek yönlü kovaryans analizi modelinde hata terimlerinin dağılımının genelleştirilmiş lojistik dağılımlar ailesinden biri olduğunu varsaymış ve bu durumda UEÇO yöntemine dayalı olarak parametre tahminleri yapmış, denemeler arasındaki farkı test etmek için bir test istatistiği geliştirmiştir. Elde edilen sonuçlar, önerilen test istatistiğinin normal teoride kullanılan test istatistiğinden istatistiksel olarak daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Bunun yanı sıra Şenoğlu [31], kovaryans analizi modellerinde bağımsız değişken $x$ in stotastik olması durumunu incelemiştir. Çalışmasında hem hata terimlerinin hem de bağımsız değişken $x$ lerin genelleştirilmiş lojistik dağılımlar ailesinden bir dağılıma sahip olduğunu varsaymış, parametre tahminleri yapmış ve test istatistikleri geliştirmiştir. Sonuçlar, geliştirilen test istatistiklerinin ve parametre tahmin edicilerinin normal teori sonuçlarından istatistiksel olarak daha iyi olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada ise, (1.7) normallik varsayımının aksine, hata terimlerinin uzun kuyruklu simetrik dağılımlar ailesinden bir dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Uzun kuyruklu simetrik dağılımlar ailesi

$$LTS(p,\sigma) = \frac{1}{qB(1/2, p-1/2)\sigma}\left(1+\frac{(y-\mu)^2}{q\sigma^2}\right)^{-p} \tag{2.1}$$

$$-\infty < y < \infty \quad , \quad q = 2p-3, \quad p \geq 2$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. (2.2) de $p$ şekil parametresi, $\mu$ konum parametresi, $\sigma$ ölçek parametresi ve $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonudur.

$$z = \frac{y-\mu}{\sigma}$$

denirse (2.1) ifadesi

$$LTS(p,\sigma) = \frac{1}{qB(1/2, p-1/2)\sigma}\left(1+\frac{1}{q}z^2\right)^{-p} \tag{2.2}$$

olur. Standartlaştırmadan dolayı $E(z)=0$ ve $Var(z)=1$ dir. Şekil parametresi $p$ nin farklı değerleri için dağılım farklı şekiller alır. Söz gelişi $p=1$ için Cauchy dağılımı elde edilir. Ayrıca

$$t = \frac{v}{q}z$$

$v=2p-1$ serbestlik dereceli $t$ dağılımına sahiptir. Buradan

$$z = \frac{q}{v}t$$

şeklinde tanımlanan rassal değişken $p$ şekil parametreli LTS dağılımına sahip olur.

LTS dağılımın sivriliği daima üçten büyüktür. Şekil parametresi $p$ nin sonsuz olması durumunda sivrilik değeri üçe yaklaşır, bu da $p$ nin sonsuz olması durumuda uzun kuyruklu simetrik dağılımın normal dağılıma yaklaştığını gösterir (Tiku ve Akkaya [15]).

Üçüncü bölümde UEÇO yöntemi esas alınarak, LTS hata dağılımı ile parametre tahmini yapılmış ve hipotezler için test istatistikleri geliştirilmiştir.

Benzer bir yol $M-$ tahmincileri yöntemi ile de geliştirilebilirdi ama Tiku ve Sürücü [32] dağılımın LTS olması durumunda UEÇO yönteminin en az $M-$ tahmincileri kadar iyi olduğunu hatta daha da iyi olduğunu göstermişlerdir.

# 3. NORMALLİK VARSAYIMININ SAĞLANMAMASI DURUMU

Bu bölümde (1.7) modelinde hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olması durumunda parametre tahminlerinin ve test istatistiklerinin UEÇO yöntemine dayalı olarak elde edilme süreci anlatılmaktadır.

## 3.1. Parametre Tahmini

Denklem (1.7) ile verilen model tekrar hatırlansın:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk},$$

$$i = 1,2 \quad ; \quad j = 1,2 \quad ; \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

Bu modelde normallik varsayımının aksine hata teriminin dağılımı bağımsız ve özdeş olarak $LTS(p,\sigma)$ olsun. Bir başka deyişle

$$\varepsilon_{ijk} \sim LTS(p,\sigma) = \frac{1}{qB(1/2,p-1/2)\sigma}\left[1+\frac{1}{q}\left(\frac{\varepsilon_{ijk}}{\sigma}\right)^2\right]^{-p} \tag{3.1}$$

olsun.

**Uyarı 3.1.1.** *Bu ve bundan sonraki bölümlerde şekil parametresi p nin bilindiği kabul edilmiştir.*

### 3.1.1. EÇO Yöntemi

$\varepsilon_{ijk} \sim LTS(p,\sigma)$ olması durumunda parametre tahminleri yapılsın. Olabilirlik fonksiyonu

$$z_{ijk} = \frac{\varepsilon_{ijk}}{\sigma} = \frac{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ijk} - \bar{x}_{...})}{\sigma} \tag{3.2}$$

olmak üzere

$$L = \prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{qB(1/2,p-1/2)\sigma}\left(1+\frac{1}{q}z_{ijk}^2\right)^{-p}\right\} \tag{3.3}$$

$$= \left(\frac{1}{qB(1/2,p-1/2)\sigma}\right)^{4n}\left\{\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{q}z_{ijk}^2\right)\right\}^{-p} \tag{3.4}$$

(3.5)

dır. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L = -4n \ln\left(qB(1/2, p-1/2)\sigma\right) - p \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{q} z_{ijk}^2\right) \tag{3.6}$$

olur. Parametrelerin EÇO tahmin edicileri ilgili parametreye göre (3.6) log-olabilirlik fonksiyonun minimum yapılmasıyla bulunur. Böylece gerekli kısmi türevlerin alınmasıyla aşağıdaki EÇO denklemleri elde elde edilir.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} g(z_{ijk}) = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} g(z_{ijk}) = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g(z_{ij(k)}) = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{k=1}^{n} g(z_{ijk}) = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} g(z_{ijk})(x_{ij[k]} - \bar{x}_{...}) = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} z_{ijk} g(z_{ijk}) = 0 \tag{3.12}$$

Burada

$$g(z) = \frac{z}{1 + \frac{1}{q} z^2}$$

dir.

$g(\cdot)$, doğrusal olmayan bir fonksiyon olduğundan (3.7)-(3.12) denklem sisteminin eş zamanlı çözümü analitik olarak yapılamaz. İstenen çözüm, bir başka deyişle parametrelerin tahmin edicileri, nümerik yöntemlerle bulunur. Ancak ki nümerik yöntemler de katlı köke yakınsama, hiç köke yakınsamama, yanlış köke yakınsama, başlangıç değer seçimi gibi zorluklara sahiptir (Vaughan [33]).

Yukarıda bahsedilen sakıncaları olmasına rağmen teoride EÇO tahmin edicilerinin, bazı koşullar altında, en küçük varyansa sahip olma gibi önemli özellikleri vardır.

EÇO yönteminin sakıncalarından kaçınan fakat onun güzelliğini de bırakmayan bir yöntem Tiku [34, 35] ile Tiku ve Suresh [36] tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntem, uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi olarak adlandırılmaktadır. Yöntem, en çok olabilirlikle elde edilen özelliklere asimptotik olarak sahiptir ve bu yöntemle parametrelerin tahmin edicileri analitik olarak elde edilmektedir.

### 3.1.2. UEÇO Yöntemi

UEÇO yönteminin ilk adımı

$$z_{ij(1)} \leq z_{ij(2)} \leq \cdots \leq z_{ij(n)}$$

sıralı istatistikleridir. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta $z_{ijk}$ lar sıralanırken (3.2) eşitliğinde $y_{ijk}$ ve $x_{ijk}$ değişkenlerinin sıralanmamasıdır. $y_{ij[k]}$ ve $x_{ij[k]}$ gösterimi, $k-$ıncı sıra istatistiği $z_{ij(k)}$ ya karşılık gelen eş değişken ya da birlikte değişken (concomitant) olarak adlandırılırlar. Dolayısıyla (3.2) eşitliği $z_{ijk}$ nın sıralı istatistiği söz konusu olduğunda

$$z_{ij(k)} = \frac{\varepsilon_{ij(k)}}{\sigma} = \frac{y_{ij[k]} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \beta(x_{ij[k]} - \bar{x}_{...})}{\sigma} \tag{3.13}$$

şeklini alır.

UEÇO yönteminin ikinci adımı (3.7)-(3.12) denklem sistemlerinde bulunan $g(\cdot)$ doğrusal olmayan fonksiyonun Taylor açılımı yardımıyla doğrusallaştırılmasıdır.

$g(z_{ij(k)})$ fonksiyonu, $t(k) = E(z_{ij(k)})$ civarında (çünkü asimptotik olarak $z_{ij(k)}$, beklenen değerine eşittir.) I. derece Taylor polinomuna açılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$g(z_{ij(k)}) \cong \alpha_k + \theta_k z_{ij(k)} \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha_k = \frac{(2/q)t_{(k)}^3}{(1+(1/q)t_{(k)})^2} \quad , \quad \theta_k = \frac{(1-1/q)t_{(k)}^2}{(1+(1/q)t_{(k)})^2} \quad , \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{3.15}$$

dir. Ayrıca $t_{(k)}$, $k-$ıncı sıra istatistiği $z_{ij(k)}$ nın beklenen değeri olduğundan,

$$F(t_{(k)}) = \int_{-\infty}^{t_{(k)}} f(z)dz = \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

eşitliği ile yaklaşık olarak bulunabilir. Burada $f(\cdot)$ ve $F(\cdot)$, LTS nin sırasıyla olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonudur. Ancak $F(\cdot)$ analitik olarak bilinmemektedir. Tiku ile Kumra [37] ve Vaughan [38] $t_{(k)}$, $\quad (k = 1, 2, \cdots, n)$ değerlerini çizelgeler halinde vermişlerdir.

$g(\cdot)$ fonksiyonu yerine onun (3.14) ile verilen doğrusal yaklaşımı (3.7)-(3.12) denklemlerinde yazıldığında

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \theta_k z_{ij(k)}) = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \tau_i} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \theta_k z_{ij(k)}) = 0, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_j} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \theta_k z_{ij(k)}) = 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \theta_k z_{ij(k)}) = 0, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta} = \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \theta_k z_{ij(k)})(x_{ij[k]} - \bar{x}_{\dots}) = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} = -\frac{4n}{\sigma} + \frac{2p}{q\sigma} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} z_{ij(k)}(\alpha_k + \theta_k z_{ij(k)}) = 0 \tag{3.21}$$

UEÇO denklemleri elde edilir. (3.16)-(3.17) denklem sistemi çözüldüğünde parametrelerin UEÇO tahmin edicileri

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\sqrt{A(A - 2^2 - 1)}}, \tag{3.22}$$

$$\hat{\beta} = K + L\hat{\sigma}, \tag{3.23}$$

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\beta}\hat{\mu}_{x\cdot\cdot[\cdot]}, \tag{3.24}$$

$$\hat{\tau}_i = \hat{\mu}_{i\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{xi\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot\cdot[\cdot]}), \tag{3.25}$$

$$\hat{\gamma}_j = \hat{\mu}_{\cdot j[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{x\cdot j[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot\cdot[\cdot]}) \tag{3.26}$$

ve

$$(\hat{\tau\gamma})_{ij} = \hat{\mu}_{ij[\cdot]} - \hat{\mu}_{i\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot j[\cdot]} + \hat{\mu}_{\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{xij[\cdot]} - \hat{\mu}_{xi\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot j[\cdot]} + \hat{\mu}_{x\cdot\cdot[\cdot]}) \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Burada kullanılan notasyonlar aşağıda açıklanmıştır.

$$\hat{\mu}_{\cdot\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_{ij[k]}}{4m} \quad , \quad \hat{\mu}_{i\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_{ij[k]}}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{\cdot j[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_{ij[k]}}{2m} \quad , \quad \hat{\mu}_{ij[\cdot]} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_{ij[k]}}{m},$$

$$\hat{\mu}_{x\cdot\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})}{4m} \quad , \quad \hat{\mu}_{xi\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{x\cdot j[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})}{2m} \quad , \quad \hat{\mu}_{xij[\cdot]} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})}{m},$$

$$S^*_{xy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_{ij[k]}(x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]}) \quad , \quad S^*_{xx} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})^2,$$

$$T^*_{xy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k \hat{\mu}_{ij[\cdot]}(x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]}) \quad , \quad T^*_{xx} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k \hat{\mu}_{xij[\cdot]}(x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]}),$$

$$E^*_{xy} = S^*_{xy} - T^*_{xy} \quad , \quad E^*_{xx} = S^*_{xy} - T^*_{xy},$$

$$K = \frac{E^*_{xy}}{E^*_{xy}} \quad , \quad L = \frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})}{E^*_{xy}},$$

$$m = \sum_{k=1}^{n}\theta_k \quad , \quad A = 4n,$$

$$B = \frac{2p}{q}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k \left\{y_{ij[k]} - \hat{\mu}_{ij[\cdot]} + K\left[\hat{\mu}_{xij[\cdot]} - (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})\right]\right\},$$

$$C = \frac{2p}{q}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k \left\{y_{ij[k]} - \hat{\mu}_{ij[\cdot]} + K\left[\hat{\mu}_{xij[\cdot]} - (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})\right]\right\}^2$$

Denklem (3.22) te paydanın $2\sqrt{A(A-2^2-1)}$ olarak alınması $\hat{\sigma}$ nın yansız bir tahmin edici olmasını sağlamaktadır.

**Uyarı 3.1.2.** *Uzun kuyruklu simetrik hata dağılımına sahip (1.7) modelinin parametrelerinin tahminin UEÇO yöntemiyle tahmin sürecinde dikkate alınması gereken temel noktalar aşağıda açıklanmıştır.*

*(i)* *LTS dağılımı simetrik olduğundan* $\alpha_k = -\alpha_{n-k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ *eşitliği sağlanır. Bunun sonucu olarak* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$ *elde edilir.*

*(ii)* $y_{ij(k)}$ *gözlem değerlerine verilen* $\theta_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ *ağırlıkları, simetrik bir özelliğe sahiptir; orta değere kadar artarlar sonra aynı şekilde azalırlar.* $\theta_k$ *ların bu özelliği aykırı değerlere daha az ağırlık vererek onların etkisini azaltmaya yarar.*

*(iii)* *Özellikle p nin küçük değerleri için bazen* $\theta_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ *ağırlıkları negatif çıkabilir. Bu durum* $\sigma$ *nın negatif tahmin edilmesine yol açabilir. Bundan dolayı Tiku ve ark. [39] p nin küçük değerlerinde*

$$\alpha_k^* = \frac{(1/q)t_{(k)}^3}{(1 + (1/q)t_{(k)}^2)^2} \quad , \quad \theta_k^* = \frac{1}{(1 + (1/q)t_{(k)}^2)^2} \quad , \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

*alınmasını önermişlerdir ve bu değişikliğin (3.14) ile verilen doğrusal yakınlaştırmayı değiştirmediğini göstermişlerdir. Böylece* $\sigma$ *nın UEÇO tahminici her zaman pozitif ve gerçel bir değerdir.*

*(iv)* $\alpha_k = 0$ *ve* $\theta_k = 1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ *alınması durumunda EKK tahmin edicileri elde edilir.*

**Teorem 3.1.3.** *Her* $p \geq 2$ *için* $g(z_{ij(k)}) - (\alpha_k + \beta_k z_{ij(k)})$ *farkı* $n \to \infty$ *için 0 a yaklaşır. Bir başka deyişle*

*(i)* $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} \right| = 0$$

*(ii)* $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_j} \right| = 0$$

*(iii)* $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} \right| = 0$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\frac{\partial \ln L}{\partial(\tau\gamma)_{ij}}-\frac{\partial \ln L^*}{\partial(\tau\gamma)_{ij}}\right|=0$$

$$(v)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}-\frac{\partial \ln L^*}{\partial\beta}\right|=0$$

$$(vi)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma}-\frac{\partial \ln L^*}{\partial\sigma}\right|=0$$

*dır.*

***Kanıt***. Teoremin kanıtı Hoeffding'in [40] beklenen değer operatörünün bir toplamın limiti olarak bulunabileceğini gösterdiği yardımcı bir teorem yardımıyla yapılmaktadır. Bu yardımcı teorem aşağıda kanıtsız olarak verilmiştir.

**Yardımcı Teorem 3.1.4.** *$z_i$, $i=1,2,\cdots,n$, konum parametresi $\mu=0$ ile ölçek parametresi $\sigma=1$ ve dağılım fonksiyonu $F(\cdot)$ olan dağılımdan alınan bağımsız rassal değişkenler olmak üzere*

$$z_{(1)}\leq z_{(2)}\leq\cdots\leq z_{(n)}$$

*sıralı istatistiği için $t_{i:n}=E(z_{(i)})$, $i=1,2,\cdots,n$, olsun. Burada*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|z|dF(z)<\infty$$

*olarak kabul edildiğinden $t_{i:n}$ değerli tüm $i=1,2,\cdots,n$ için sonludur.*

*Ayrıca $g(\cdot)$ gerçel değerli sürekli fonksiyonu için*

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(z)dF(z)<\infty$$

*ve*

$$|g(z)|\leq h(z)$$

*koşullarını sağlayan konveks $h(\cdot)$ fonksiyonu varolsun.*

*Bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(t_{i:n})=\int_{-\infty}^{\infty}g(z)dF(z)=E(g(z)) \tag{3.28}$$

*dir.*

Teorem (3.1.3) nin kanıtı (3.28) eşitliği yardımıyla

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma}$$

ifadelerinde (3.15) da verilen $\alpha_k$ ve $\theta_k$ değerleri yazıldığında elde edilir. □

Teorem (3.1.3), asimptotik olarak $\mu$, $\tau_i$, $\gamma_j$, $(\tau\gamma)_{ij}$, $\beta$ ve $\sigma$ nın UEÇO tahmin edicilerinin EÇO tahmin edicilerine denk olduğunu ifade etmektedir.

**Teorem 3.1.5.** *$X_1, X_2, \cdots, X_n$, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x|\theta)$ olan bir dağılımdan alınan örneklem ve bu örneklemin olabilirlik fonksiyonu*

$$L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

*olsun. $\rho(\theta)$ nın yansız bir tahmin edicisi $\mathcal{T}(X)$ olsun. Bu durumda regülerlik koşullarının sağlanması durumunda $\mathcal{T}(X)$ tahmin edicisinin MVB değerinin $\frac{1}{m(\theta)}$ olması için gerek koşul*

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = m(\theta)\left(\mathcal{T}(X) - \rho(\theta)\right) \tag{3.29}$$

*olarak yazılabilmesidir.*

Teoremin kanıtı için bakınız Kendall ve Stuart [40] bölüm 18.

Yansız bir tahmin edicinin MVB değerini bulmak için Teorem (3.1.5) kullanılabilir. Ayrıca EÇO tahmin edicileri log-olabilirlik fonksiyonu ile bulunduğundan, regülerlik koşullarının sağlanması durumunda yansız EÇO tahmin edicilerinin MVB değeri Teorem (3.1.5) yardımıyla bulunabilir.

Denklem (3.22)-(3.27) ile verilen UEÇO tahmin edicilerinin yansız tahmin ediciler olduğu gösterilebilir. Ayrıca (3.1) ile verilen $LTS(p, \sigma)$ dağılımı regülerlik koşullarını sağlar (Tiku ve Akkaya [15]). Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

**Teorem 3.1.6.** *$\sigma$ ve $\beta$ bilinmesi koşuluyla ve $M = m\dfrac{2p}{q}$ olmak üzere* *(i)* $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i$ *UEÇO tahmin edicisi* $\dfrac{\sigma^2}{2M}$ *varyansı ile asimptotik olarak MVB tahmin edicisidir.*

*(ii)* $\hat{\mu}_j = \hat{\mu} + \hat{\gamma}_j$ *UEÇO tahmin edicisi* $\dfrac{\sigma^2}{2M}$ *varyansı ile asimptotik olarak MVB tahmin edicisidir.*

*(iii)* $\hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu} + (\widehat{\tau\gamma})_{ij}$ *UEÇO tahmin edicisi* $\dfrac{\sigma^2}{M}$ *varyansı ile asimptotik olarak MVB tahmin edicisidir.*

***Kanıt.*** Sadece $(i)$ nin kanıtı burada yapılmıştır. Diğerlerinin kanıtı benzer şekilde yapılabilir.

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_i} = 2m\frac{2p}{q\sigma}(\hat{\mu}_i - \mu_i) = 0$$

olarak yazılabileceğinden Teorem (3.1.3) ve (3.1.5) ün bir sonucu olarak istenen elde edilir. □

**Sonuç 3.1.7.** *$\sigma$ ve $\beta$ bilinmesi koşuluyla ve $M = m\dfrac{2p}{q}$ olmak üzere*

*(i)* $\dfrac{\hat{\mu}_i - \mu_i}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{2M}}}$ *asimptotik olarak $N(0,1)$ dağılımına sahiptir.*

*(ii)* $\dfrac{\hat{\mu}_j - \mu_j}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{2M}}}$ *asimptotik olarak $N(0,1)$ dağılımına sahiptir.*

*(iii)* $\dfrac{\hat{\mu}_{ij} - \mu_{ij}}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{M}}}$ *asimptotik olarak $N(0,1)$ dağılımına sahiptir.*

Yukarıdaki sonuç $\hat{\mu}_i$, $\hat{\mu}_j$ ve $\hat{\mu}_{ij}$ UEÇO tahmin edicilerinin en iyi asimptotik normal (best asymptotically normal) tahmin edici özelliğine sahip olduğunu da ifade etmektedir.

**Teorem 3.1.8.** *$\mu$, $\tau_i$, $\gamma_j$, $(\tau\gamma)_{ij}$ ve $\beta$ nın bilinmesi koşuluyla (3.22) ile verilen $\sigma$ parametresinin UEÇO tahmin edicisi asimptotik olarak MVB tahmin edicisidir.*

**Sonuç 3.1.9.** *$\sigma^2$ parametresinin UEÇO tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2$ olmak üzere*

$$\frac{(2^2 n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \tag{3.30}$$

*yeterince büyük $n$ için $\nu = 2^2 n - 2^2 - 1$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına sahiptir.*

**Teorem 3.1.10.** *$\mu$, $\tau_i$, $\gamma_j$, $(\tau\gamma)_{ij}$ ve $\sigma$ nın bilinmesi koşuluyla (3.23) ile verilen $\beta$ parametresinin UEÇO tahmin edicisi $\dfrac{\sigma^2}{\frac{2p}{q}E^*_{xx}}$ varyansı ile asimptotik olarak MVB tahmin edicisidir.*

***Kanıt.***

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta} = E^*_{xx}\frac{2p}{q\sigma}(\hat{\beta} - \beta) = 0$$

olarak yazılabilir. Teorem (3.1.3) ve (3.1.5) ün sonucu olarak istenen elde edilir. □

**Sonuç 3.1.11.**

$$\frac{2p}{q}E^*_{xx}\left(\frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma^2}\right)^2 \tag{3.31}$$

*yeterince büyük $n$ için $\nu = 1$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına sahiptir.*

## 3.2. Hipotez Testi

Denklem (1.7) ile verilen ortak değişkene sahip $2^2$ faktöriyel tasarımlarda normallik varsayımının sağlanması durumunda A ve B etkenlerinin (ana etkenlerin) ve AB etkileşim etkisinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını test etmek için kullanılan test istatistikleri Bölüm 1.4.2 de anlatılmıştır. Bu bölümde (1.7) modelinde hata terimlerinin LTS dağılıma sahip olması durumunda ana etkiler ve etkişim etkisi ile eğimin anlamlılığı için test istatistikleri geliştirilmiş, bu test istatistiklerinin asimptotik olarak $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu kanıtlanmıştır.

Bölüm 1.4.2 de hipotezler için test istatistikleri geliştirmek için indirgenmiş modelin hata kareler toplamı ve tam modelin hata kareler toplamı farkından yararlanılmıştı. Bu bölümde, indirgenmiş model-tam model hata kareler toplamına dayalı test istatistiklerinin yanı sıra alt bölüm 3.1 de bulunan MVB özelliğine sahip UEÇO tahmin edicilerine dayalı olarak test istatistikleri de geliştirilmiştir.

Ana etkiler, etkileşim etkisi ve eğimin anlamlılığına ilişkin hipotezler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} H_{01} &: \forall\tau_i = 0 \\ H_{11} &: \exists\tau_i \neq 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} H_{02} &: \forall\gamma_j = 0 \\ H_{12} &: \exists\gamma_j \neq 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} H_{03} &: \forall(\tau\gamma)_{ij} = 0 \\ H_{13} &: \exists(\tau\gamma)_{ij} \neq 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta = 0 \\ H_1 &: \beta \neq 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.2.1. UEÇO Tahmin Edicilerine Dayalı Test İstatistikleri

**Teorem 3.2.1.** *(1.7) modelinde A etkeninin düzey etkileri arasında fark olup olmadığına ilişkin (3.32) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F_A^* = \frac{2M\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.36}$$

*dır ve $H_{01}$ hipotezi altında, büyük $n$ değerleri için $F_A^*$ test istatistiğinin dağılımı, 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımıdır.*

***Kanıt.*** Sonuç (3.1.7), $(i)$ e göre

$$\frac{\dfrac{(\hat{\mu}_i - \mu_i)^2}{\sigma^2}}{2M}$$

ifadesi 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Buradan

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \mu_i)^2}{\frac{\sigma^2}{2M}}$$

ifadesi 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olur. Burada da $\mu_i$ yerine $\bar{\mu}_i$ yazılırsa

$$\frac{\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\frac{\sigma^2}{2M}} \tag{3.37}$$

ifadesi 1 serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olur.

Sonuç (3.1.9) ile (3.37) denklemi birlikte düşünülürse

$$F_A^* = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\frac{\sigma^2}{2M}}\right) \Big/ 1}{\left(\frac{(2^2n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) \Big/ (2^2n - 2^2 - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\frac{\hat{\sigma}^2}{2M}}$$

elde edilir. Böylece

$$F_A^* = \frac{2M\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.38}$$

ifadesinin büyük $n$ değerleri için 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu gösterilmiş olur. □

**Teorem 3.2.2.** *(1.7) modelinde B etkeninin düzey etkileri arasında fark olup olmadığına ilişkin (3.33) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F_B^* = \frac{2M\sum_{j=1}^{2}\left(\hat{\mu}_j - \bar{\mu}_j\right)^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.39}$$

*dır ve $H_{02}$ hipotezi altında, büyük $n$ değerleri için $F_B^*$ test istatistiğinin dağılımı, 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımıdır.*

**Teorem 3.2.3.** *(1.7) modelinde AB etkileşimine ilişkin (3.34) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F^*_{AB} = \frac{M \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (\hat{\mu}_{ij} - \bar{\mu}_{ij})^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.40}$$

*dır ve $H_{03}$ hipotezi altında, büyük n değerleri için $F^*_{AB}$ test istatistiğinin dağılımı, 1 ve $2^2 n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi **F** dağılımıdır.*

Teorem (3.39) ve (3.40) ün kanıtı Teorem (3.36) in kanıtı gibi yapılır.

**Teorem 3.2.4.** *(1.7) modelinde eğimin anlamlığına ilişkin (3.35) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F^*_{\beta} = \frac{2p}{q} E^*_{xx} \frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.41}$$

*dır ve $H_{04}$ hipotezi altında, büyük n değerleri için $F^*_{\beta}$ test istatistiğinin dağılımı, 1 ve $2^2 n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi **F** dağılımıdır.*

***Kanıt.*** Sonuç (3.1.11) ve (3.1.9) birlikte düşünülürse

$$F^*_{\beta} = \frac{2p}{q} E^*_{xx} \frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

nın 1 ve $2^2 n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi **F** dağılımına sahip olduğu görülür. □

### 3.2.2. İndirgenmiş-Tam Model Hata Kareler Toplamları Farkına Dayalı Test İstatistikleri

**Teorem 3.2.5.** *(1.7) modelinde A etkeninin düzey etkileri arasında fark olup olmadığına ilişkin (3.32) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F^{**}_{A} = \frac{(A - 2^2 n - 2^2)\hat{\sigma}^2_R - (A - 2^2 n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.42}$$

*dir ve $H_{01}$ hipotezi altında, büyük n değerleri için $F^{**}_{A}$ test istatistiği 1 ve $2^2 n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi **F** dağılımına sahiptir. Burada $\hat{\sigma}^2_R$, (1.7) modelinde $\tau_i$ parametresinin olmadığı indirgenmiş modelde, $\hat{\sigma}^2$ tam modelde $\sigma^2$ nın UEÇO tahmin edicisidir.*

***Kanıt.*** İndirgenmiş modelde $\sigma$ $A - 2^2n - 2^2$ serbestlik derecesine sahiptir. Buradan

$$\frac{(A - 2^2n - 2^2)\hat{\sigma}_R^2}{\sigma^2} \tag{3.43}$$

ifadesi $A - 2^2n - 2^2$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılıma sahiptir.

Sonuç (3.1.9) göz önüne alınırsa

$$\frac{(A - 2^2n - 2^2)\hat{\sigma}_R^2 - (A - 2^2n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \tag{3.44}$$

ifadesi 1 serbetlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olur. Sonuç (3.1.9) ve (3.44) denklemi birlikte düşünülürse

$$F_A^{**} = \frac{(A - 2^2n - 2^2)\hat{\sigma}_R^2 - (A - 2^2n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

ifadesi büyük $n$ değerleri için 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli ise merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olur. □

**Teorem 3.2.6.** *(1.7) modelinde $B$ etkeninin düzey etkileri arasında fark olup olmadığına ilişkin (3.33) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F_B^{**} = \frac{(A - 2^2n - 2^2)\hat{\sigma}_R^2 - (A - 2^2n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.45}$$

*dir ve $H_{02}$ sıfır hipotezi altında, büyük $n$ değerleri için $F_B^{**}$ test istatistiği 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir. Burada $\hat{\sigma}_R^2$, (1.7) modelinde $\gamma_j$ parametresinin olmadığı indirgenmiş modelde, $\hat{\sigma}^2$ tam modelde $\sigma^2$ nın UEÇO tahmin edicisidir.*

**Teorem 3.2.7.** *(1.7) modelinde $AB$ etkileşiminin düzey etkileri arasında fark olup olmadığına ilişkin (3.34) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F_{AB}^{**} = \frac{(A - 2^2n - 2^2)\hat{\sigma}_R^2 - (A - 2^2n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.46}$$

*dir ve $H_{03}$ sıfır hipotezi altında, büyük $n$ değerleri için $F_{AB}^{**}$ test istatistiği 1 ve $2^2n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir. Burada $\hat{\sigma}_R^2$, (1.7) modelinde $(\tau\gamma)_{ij}$ parametresinin olmadığı indirgenmiş modelde, $\hat{\sigma}^2$ tam modelde $\sigma^2$ nın UEÇO tahmin edicisidir.*

**Teorem 3.2.8.** *(1.7) modelinde eğimin anlamlılığına ilişkin (3.35) hipotezi için gerekli test istatistiği*

$$F_{\beta}^{**} = \frac{(A - 2^2 n - 2^2)\hat{\sigma}_R^2 - (A - 2^2 n - 2^2 - 1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{3.47}$$

*dir ve $H_{04}$ sıfır hipotezi altında, büyük $n$ değerleri için $F_{\beta}^{**}$ test istatistiği 1 ve $2^2 n - 2^2 - 1$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir. Burada $\hat{\sigma}_R^2$, (1.7) modelinde $\beta$ parametresinin olmadığı indirgenmiş modelde, $\hat{\sigma}^2$ tam modelde $\sigma^2$ nın UEÇO tahmin edicisidir.*

Teorem 3.2.6, 3.2.7 ve 3.2.8 nın kanıtı Teorem 3.2.5 in kanıtı gibi yapılır.

## 3.3. Ortak Değişkenli $2^k$ Faktöriyel Tasarıma Genelleştirme

Bu bölümde önceki bölümlerde ortak değişkene sahip $2^2$ faktöiyel tasarım modeli için verilen formulasyonlar önce ortak değişkene sahip $2^3$ modeli için yapılmış, ardından ortak değişkenli $2^k$ faktöriyel tasarımlara genelleştirilmiştir.

### 3.3.1. Ortak Değişkene Sahip $2^3$ Modeli

Ortak değişkene sahip $2^3$ modeli

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \delta_k + (\tau\delta)_{ik} + (\gamma\delta)_{jk} + (\tau\gamma\delta)_{ijk} + \beta(x_{ijk\ell} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk\ell} \tag{3.48}$$

$$i = 1,2 \quad ; \quad j = 1,2 \quad ; \quad k = 1,2 \quad ; \quad \ell = 1,2,\cdots,n$$

dir. Burada $\tau_i$, $\gamma_j$ ve $\delta_k$ sırasıyla A, B ve C ana etkilerini, $(\tau\gamma)_{ij}$, $(\tau\delta)_{ik}$, $(\gamma\delta)_{jk}$ ve $(\tau\gamma\delta)_{ijk}$ de sırasıyla AB, AC, BC, ABC etkileşimlerini gösteren parametrelerdir. Ayrıca $\beta$, ortak değişken $x_{ijk\ell}$ ile bağımlı değişken $y_{ijk\ell}$ arasındaki doğrusal ilişkiyi gösteren eğim parametresi, $\bar{x}$ de ortak değişken $x_{ijk\ell}$ lerin ortalamasıdır ve $\varepsilon_{ijk\ell}$ rassal hata terimidir.

***UEÇO Tahmin edicileri***

(3.48) modelinde hata terimlerinin dağılımının $LTS(p,\sigma)$ olması durumunda parametrelerin EKK tahmin edicilerinin elde edilişi Bölüm 3.1.2 deki gibi yapılır. Sonuç olarak aşağıdaki UEÇO tahmin edicileri elde edilir.

$$\hat{\sigma} = \frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2\sqrt{A(A-2^3-1)}}, \tag{3.49}$$

$$\hat{\beta} = K + L\hat{\sigma}, \tag{3.50}$$

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}\hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}, \tag{3.51}$$

$$\hat{\tau}_i = \hat{\mu}_{i\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{xi\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}), \tag{3.52}$$

$$\hat{\gamma}_j = \hat{\mu}_{\cdot j\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{x\cdot j\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}), \tag{3.53}$$

$$(\hat{\tau\gamma})_{ij} = \hat{\mu}_{ij\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{i\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot j\cdot[\cdot]} + \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{xij\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{xi\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot j\cdot[\cdot]} + \hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}), \tag{3.54}$$

$$(\hat{\tau\delta})_{ik} = \hat{\mu}_{i\cdot k\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{i\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot\cdot k[\cdot]} + \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{xi\cdot k\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{xi\cdot\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot\cdot k[\cdot]} + \hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}), \tag{3.55}$$

$$(\hat{\gamma\delta})_{jk} = \hat{\mu}_{\cdot jk[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot j\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdot\cdot k[\cdot]} + \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{x\cdot jk[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot j\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdot\cdot k[\cdot]} + \hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}), \tag{3.56}$$

$$(\hat{\tau\gamma\delta})_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk[\cdot]} - \hat{\mu}_{ij\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{i\cdot k\cdot[\cdot]} + \hat{\mu}_{\cdot jk[\cdot]} + \hat{\mu}_{i\cdot\cdot[\cdot]} + \hat{\mu}_{\cdot j\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} - \hat{\beta}(\hat{\mu}_{xijk[\cdot]} - \hat{\mu}_{xij\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{xi\cdot k\cdot[\cdot]} + \hat{\mu}_{x\cdot jk[\cdot]} + \hat{\mu}_{xi\cdot\cdot[\cdot]} + \hat{\mu}_{x\cdot j\cdot[\cdot]} - \hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]}). \tag{3.57}$$

Burada

$$\hat{\mu}_{\cdots[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2^3 m} \quad , \quad \hat{\mu}_{i\cdot\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2^2 m},$$

$$\hat{\mu}_{\cdot j\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2^2 m} \quad , \quad \hat{\mu}_{ij\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{\cdot\cdot k[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2^2 m} \quad , \quad \hat{\mu}_{i\cdot k\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{\cdot jk[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{2m} \quad , \quad \hat{\mu}_{ijk[\cdot]} = \frac{\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}}{m},$$

$$\hat{\mu}_{x\cdots[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2^3 m},$$

$$\hat{\mu}_{xi\cdot\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2^2 m},$$

$$\hat{\mu}_{x\cdot j\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2^2 m},$$

$$\hat{\mu}_{xij\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{x\cdot\cdot k[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{xi\cdot k\cdot[\cdot]} = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2m},$$

$$\hat{\mu}_{x\cdot jk[\cdot]} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{2m}, \hat{\mu}_{xijk[\cdot]} = \frac{\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{m},$$

$$\theta_\ell = \frac{(1-1/q)t_{(\ell)}^2}{(1+(1/q)t_{(\ell)})^2} \quad , \quad m = \textstyle\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell \quad , \quad A = 8n,$$

$$S_{xy}^* = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell y_{ijk[\ell]}(x_{ij[k]} - \bar{x}_{....}),$$

$$S_{xx}^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})^2,$$

$$T_{xy}^* = \textstyle\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell\hat{\mu}_{ij\cdot[\cdot]}\hat{\mu}_{xij\cdot[\cdot]} \quad , \quad T_{xx}^* = \sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell\hat{\mu}_{xij\cdot[\cdot]}^2,$$

$$E_{xy}^* = S_{xy}^* - T_{xy}^* \quad , \quad E_{xx}^* = S_{xy}^* - T_{xy}^*,$$

$$K = \frac{E_{xy}^*}{E_{xy}^*} \quad , \quad L = \frac{\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell(x_{ijk[\ell]} - \bar{x}_{....})}{E_{xy}^*},$$

ve

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2p}{q}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell\left\{y_{ijk[\ell]}-\hat{\mu}_{ijk[\cdot]}+K\left[\hat{\mu}_{xijk[\cdot]}-(x_{ijk[\ell]}-\bar{x}_{....})\right]\right\},\\
C &= \frac{2p}{q}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell\left\{y_{ijk[\ell]}-\hat{\mu}_{ijk[\cdot]}+K\left[\hat{\mu}_{xijk[\cdot]}-(x_{ijk[\ell]}-\bar{x}_{....})\right]\right\}^2
\end{aligned}$$

dir.

Uyarı 3.1.2 deki $(iv)$ özelliğine göre yukarıda bulunan UEÇO tahmin edicilerinde $\alpha_\ell = 0$ ve $\theta_\ell = 1$ olarak alındığında ortak değişkenli $2^3$ modeli için EKK tahmin edicileri elde edilir.

***Normallik Varsayımı Altında Test İstatistikleri***

(3.48) modelinde hata terimlerinin normal dağılıma sahip olması durumunda ana etkiler ve etkileşim etkilerinin testi için gerekli test istatistikleri Bölüm 1.4.2 de olduğu gibi bulunur. Sonuç olarak aşağıdaki test istatistikleri elde edilir.

$$F_A = \frac{A_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_B = \frac{B_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_{AB} = \frac{AB_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2},$$

$$F_C = \frac{C_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_{AC} = \frac{AC_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_{BC} = \frac{BC_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2},$$

$$F_{ABC} = \frac{ABC_{yyadj}}{\hat{\sigma}^2}$$

Burada

$$A_{xy} = 4n\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...}) \quad , \quad A_{xx} = 4n\sum_{i=1}^{2}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2$$

$$A_{yy} = 2n\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 \quad , \quad A_{yyadj} = A_{yy} - \frac{(A_{xy}+A_{xy})^2}{A_{xx}+A_{xx}} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$$

olup diğer $B_{yyadj}$, $AB_{yyadj}$, $C_{yyadj}$, $AC_{yyadj}$, $BC_{yyadj}$ ve $ABC_{yyadj}$ ifadeleri bölüm 1.4.2 deki notasyonlara benzer şekilde yazılmaktadır.

***UEÇO Tahmin Edicilerine Dayalı Test İstatistikleri***

Denklem (3.48) ile verilen modelde hata terimlerinin $LTS(p, \sigma)$ dağılımına sahip olması durumunda ana etkiler ve etkileşim etkilerinin testi için gerekli

UEÇO tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri Bölüm 3.2.1 de olduğu gibi bulunur. Sonuç olarak aşağıdaki test istatistikleri elde edilir.

$$F_A^* = \frac{4M\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_B^* = \frac{4M\sum_{j=1}^{2}(\hat{\mu}_j - \bar{\mu}_j)^2}{\hat{\sigma}^2} \quad ,$$

$$F_{AB}^* = \frac{2M\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\hat{\mu}_{ij} - \bar{\mu}_{ij})^2}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_C^* = \frac{4M\sum_{i=1}^{2}(\hat{\mu}_k - \bar{\mu}_k)^2}{\hat{\sigma}^2} \quad ,$$

$$F_{AC}^* = \frac{2M\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\hat{\mu}_{ik} - \bar{\mu}_{ik})^2}{\hat{\sigma}^2} \quad , \quad F_{BC}^* = \frac{2M\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\hat{\mu}_{jk} - \bar{\mu}_{jk})^2}{\hat{\sigma}^2} \quad ,$$

$$F_{ABC}^* = \frac{M\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\hat{\mu}_{ijk} - \bar{\mu}_{ijk})^2}{\hat{\sigma}^2}.$$

Burada

$$\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i \quad , \quad \hat{\mu}_j = \hat{\mu} + \hat{\gamma}_j \quad , \quad \hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu} + (\widehat{\tau\gamma})_{ij} \quad , \quad \hat{\mu}_k = \hat{\mu} + \hat{\delta}_k$$

$$\hat{\mu}_{ik} = \hat{\mu} + (\widehat{\tau\delta})_{ik} \quad , \quad \hat{\mu}_{jk} = \hat{\mu} + (\widehat{\gamma\delta})_{jk} \quad , \quad \hat{\mu}_{ijk} = \hat{\mu} + (\widehat{\tau\gamma\delta})_{ijk}$$

alt bölüm 4.1.1 de bulunan UEÇO tahmin edicileridir.

***İndirgenmiş-Tam Model Hata Kareler Toplamı Farkına Dayalı Test İstatistikleri***

(3.48) modelinde hata terimlerinin $LTS(p,\sigma)$ dağılıma sahip olması durumunda ana etkiler ve etkileşim etkilerinin testi için gerekli indirgenmiş-tam model hata kareler toplamı farkına dayalı test istatistikleri Bölüm 3.2.2 de olduğu gibi bulunur. Sonuç olarak ana etkiler ve etkileşim etkisi için test istatistiği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F_A^{**} = \frac{(A - 2^3n - 2^3)\hat{\sigma}_R^2 - (A - 2^3n - 2^3 - 1)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

Burada $\hat{\sigma}_R^2$, $\tau_i$ parametresinin olmadığı indirgenmiş modelde, $\hat{\sigma}^2$ tam modelde hatanın varyansının UEÇO tahmin edicisidir. Bu test istatistiğine benzer olarak diğer ana etkiler ve etkileşim etkileri için test istatistikleri yazılabileceğinden diğer test istatistikleri tekrar belirtilmemiştir.

### 3.3.2. Ortak Değişkenli $2^k$ Faktöriyel Tasarım

Önceki bölümlerde ortak değişkenli $2^2$ ve $2^3$ faktöriyel tasarımlar için yapılan işlemler bu bölümde ortak değişkenli $2^k$ faktöriyel tasarım için genelleştirilmiştir.

A, B, C, $\cdots$, K gibi $k$ tane etken, bu etkenlerin etkileşimleri ve ortak değişkene sahip $2^k$ faktöriyel tasarımı için parametrelerin UEÇO tahmin edicileri gösterim olarak yukarıda verilenlere benzemektedir. Konuyu yoğun bir notasyonla anlatmamak için aşağıda sadece ortak değişkenli $2^k$ faktöriyel tasarımda $\sigma$ nın UEÇO tahmin edicisi verilmiştir.

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\sqrt{A(A - 2^k - 1)}}$$

Burada

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\cdots\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell \left\{ y_{ij\cdots k[\ell]} - \hat{\mu}_{ij\cdots k} + K\left[\hat{\mu}_{xij\cdots k} - (x_{ij\cdots k[\ell]} - \bar{x}_{....})\right]\right\}, \\ C &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\cdots\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}\theta_\ell \left\{ y_{ij\cdots k[\ell]} - \hat{\mu}_{ij\cdots k} + K\left[\hat{\mu}_{xij\cdots k} - (x_{ij\cdots k[\ell]} - \bar{x}_{....})\right]\right\}^2 \end{aligned}$$

dir.

Ortak değişkenli $2^k$ faktöriyel tasarımda test istatistikleri de ortak değişkenli $2^2$ ve $2^3$ faktöriyel tasarımlardaki gibi elde edilir. Burada yine notasyon yoğunluğundan kaçınmak için sadece $F_A^*$ test istatistiği verilmiştir.

$$F_A^* = \frac{2^{k-1} M \sum_{i=1}^{2} (\hat{\mu}_i - \bar{\mu}_i)^2}{\hat{\sigma}^2}$$

Formülde yer alan $\hat{\mu}_i$ ve $\bar{\mu}_i$ ifadeleri önceki bölümlerdekine benzer olarak tanımlanır.

# 4. EĞİMLERİN HOMOJENLİĞİ

Denklem (1.7) ile verilen modelde eğimlerin homojen olmaması durumu A, B etkenleri ve AB etkileşimi için ayrı ayrı değerlendirilir (Rencher ve Schaalje [44]). Bu bölümde (1.7) modelinde A etkenine ilişkin eğim parametresinin homojen olmadığı durum göz önüne alınmıştır. Normallik varsayımının sağlanması durumunda eğimlerin homojenliği için kullanılan test istatistiği Bölüm 4.1, hata terimlerinin $LTS(p, \sigma)$ dağılımına sahip olması durumunda UEÇO yöntemine dayalı olarak geliştirilen test istastistiği Bölüm 4.2 de ele alınmıştır.

## 4.1. Hata Terimlerinin Normal Dağılıma Sahip Olması Durumu

Denklem (1.7) modelinde hata terimlerinin normal dağılıma sahip olması durumunda A etkenine ilişkin eğim parametresi homojen olmasın. Bu durumda model

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta_i(x_{ijk} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk}, \tag{4.1}$$

$$i = 1,2 \quad ; \quad j = 1,2 \quad ; \quad k = 1,2,\cdots,n$$

şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \beta_1 = \beta_2 \\ H_1 &: \ \beta_1 \neq \beta_2 \end{aligned}$$

hipotezini test etmek için indirgenmiş model-tam model hata kareler toplamı farkından yararlanılır.

$H_0$ hipotezi altındaki indigenmiş model (1.7) denklemi ile verilen ortak değişkenli $2^2$ modelidir. Böylece indirgenmiş modelin hata kareler toplamı

$$SSE(R) = E_{yyadj} = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} \tag{4.2}$$

dir.

Denklem (4.1) ile verilen tam modelin hata kareler toplamı

$$E_{xy_i} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x})(y_{ijk} - \bar{y}), \quad i = 1,2;$$

$$E_{xxi} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x})^2, \quad i = 1, 2$$

olmak üzere

$$SSE(F) = E_{yy} - \sum_{i=1}^{2} \frac{{E_{xy_i}}^2}{E_{xxi}} \tag{4.3}$$

dir. Bu durumda $H_0$ sıfır hipotezi altında

$$F_h = \frac{(SSE(R) - SSE(F))/1}{SSE(F)/(2^2 n - 2^2 - 2)} \tag{4.4}$$

test istatistiği 1 ve $2^2 n - 2^2 - 2$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir (Rencher ve Schaalje [44]).

Denklem (4.1) modelinde EKK yöntemi ile $\beta_i$ eğim parametrelerinin ve $\sigma^2$ nin tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_i &= \frac{E_{xy_i}}{E_{xxi}} \\ \tilde{\sigma}^2 &= \frac{E_{yy} - \sum_{i=1}^{2} \frac{{E_{xy_i}}^2}{E_{xxi}}}{2^2 n - 2^2 - 2} \end{aligned}$$

$SSE(R) - SSE(F)$ işlemi yapılır ve $\sigma^2$ nin yukarıdaki tahmin edicisi dikkate alınırsa (4.4) test istatistiği

$$F_h = \frac{\sum_{i=1}^{2} \frac{{E_{xy_i}}^2}{E_{xxi}} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}}{\tilde{\sigma}^2} \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklem (4.6) ile verilen ortak değişkenli $2^3$ modelinde A etkenine ilişkin eğim parametresinin homojen olmaması durumunda model

$$y_{ijk\ell} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \delta_k + (\tau\delta)_{ik} + (\gamma\delta)_{jk} + (\tau\gamma\delta)_{ijk} + \beta_i(x_{ijk\ell} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk\ell} \tag{4.6}$$

$$i = 1, 2 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad ; \quad k = 1, 2 \quad ; \quad \ell = 1, 2, \cdots, n$$

şeklinde ifade edilir. Bu model için eğimlerin homojenliği test aşağıdaki test istatistiği ile yapılır.

$$F_h = \frac{\sum_{i=1}^{2} \frac{{E_{xy_i}}^2}{E_{xxi}} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}}{\tilde{\sigma}^2} \tag{4.7}$$

Burada

$$\begin{aligned}
E_{xy_i} &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_{ijk\ell}-\bar{x})(y_{ijk\ell}-\bar{y}), \quad i=1,2 \quad , \\
E_{xxi} &= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{n}(x_{ijk\ell}-\bar{x})^2, \qquad\qquad i=1,2
\end{aligned}$$

dir. $E_{xy}$ ve $E_{xx}$ ifadeleri alt bölüm 3.3.1 de açıklanmıştır.

## 4.2. Hata Terimlerinin $LTS(p,\sigma)$ Dağılımına Sahip Olması Durumu

Denklem (4.1) modelinde hata terimleri $LTS(p,\sigma)$ dağılımına sahip olsun. Bu durumda eğimlerin homojenliği için gerekli UEÇO yöntemine dayalı test istatistiği

$$F_h^* = \frac{(A-5)\hat{\sigma}_R^2 - (A-6)\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \tag{4.8}$$

dir. Burada $\hat{\sigma}_R^2$ indirgenmiş modeldeki hatanın varyansının UEÇO tahmin edicisi, $\hat{\sigma}^2$ tam modelde hatanın varyansının UEÇO tahmin edicisidir.

Teorem 3.1.9 nın bir sonucu olarak (4.8) test istatistiği 1 ve $2^2n-2^2-2$ serbestlik dereceli merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahiptir.

Denklem (4.1) modelinde hata terimleri $LTS(p,\sigma)$ dağılımına sahip olduğunda $\beta_i$ eğim parametrelerinin ve $\sigma^2$ nin UEÇO tahmin edicileri

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{B+\sqrt{B^2+4AC}}{2^2n-2^2-2} \tag{4.9}$$

$$\hat{\beta}_i = K_i + L_i\hat{\sigma} \tag{4.10}$$

dir. Burada

$$K_i = \frac{E^*_{xy_i}}{E^*_{xxi}} \quad , \quad L_i = \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x_{ij[k]}-\bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})}{E^*_{xxi}},$$

$$S^*_{xy_i} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_{ij[k]}(x_{ij[k]}-\bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]}) \quad , \quad S^*_{xxi} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k(x_{ij[k]}-\bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})^2,$$

$$T^*_{xy_i} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\hat{\mu}_{ij[\cdot]}\hat{\mu}_{xij[\cdot]} \quad , \quad T^*_{xxi} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\hat{\mu}^2_{xij[\cdot]},$$

$$E^*_{xy_i} = S^*_{xy_i} - T^*_{xy_i} \quad , \quad E^*_{xxi} = S^*_{xxi} - T^*_{xxi} \quad , \quad A = 4n$$

$$B = \frac{2p}{q} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left\{ y_{ij[k]} - \hat{\mu}_{ij[\cdot]} + K_i [\hat{\mu}_{xij[\cdot]} - (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})] \right\}$$

ve

$$C = \frac{2p}{q} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \theta_k \left\{ y_{ij[k]} - \hat{\mu}_{ij[\cdot]} + K_i [\hat{\mu}_{xij[\cdot]} - (x_{ij[k]} - \bar{x}_{\cdot\cdot[\cdot]})] \right\}^2$$

dir.

(4.6) ile verilen ortak değişkenli $2^3$ modelinde A etkenine ilişkin eğim parametresinin homojen olmaması durumunda $\hat{\sigma}^2_R$ ve $\hat{\sigma}^2$ nin UEÇO tahmin edicileriyle (4.8) test istatistiğine benzer olarak bir test istatistiği elde edilebilir.

**Uyarı 4.2.1.** *Denklem* (4.10) *ile verilen* $\hat{\beta}_i$, $(i = 1, 2)$ *tahmin edicisi* $\beta_i$ *ortalama,* $\dfrac{1}{E^*_{xxi}}\sigma^2$ *varyansı ile asimptotik olarak normal dağılıma sahiptir. Buradan*

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = \beta_2 \\ H_1 &: \beta_1 \neq \beta_2 \end{aligned}$$

*hipotezini test etmek için* $\Lambda = \dfrac{1}{E^*_{xx1}} + \dfrac{1}{E^*_{xx2}}$ *olmak üzere*

$$F_h^{**} = \frac{2p}{q} \frac{(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)^2}{\Lambda \hat{\sigma}^2} \tag{4.11}$$

*test istatistiği de kullanılabilir. Bu test istatistiği de 1 ve* $2^2n - 2^2 - 2$ *serbestlik dereceli merkezi* $\boldsymbol{F}$ *dağılımına sahiptir.*

Bu bölümde A etkeni için geliştirilen test istatistiği benzer süreç izlenerek B etkenin ve AB etkileşiminin eğimleri için de geliştirilebilir.

# 5. MONTE-CARLO SİMULASYONLARI ve SONUÇLARI

Bu bölümde önceki bölümlerde teorik olarak ele alınan ve özellikleri incelenen EKK ve UEÇO tahmin edicileri ile bu tahmin edicilere dayanan test istatistiklerinin Monte-Carlo simulasyonu ile karşılaştırılmıştır.

Parametrelerin UEÇO tahmin edicileri EKK tahmin edicileri ile karşılaştırılırken örneklem hacmi 5, 10, 15 ve 20 olarak alınmıştır.

Ayrıca test istatistiklerinin güçleri ve istatistiksel sağlamlıkları karşılaştırılırken örneklem hacmi 10 olarak alınmıştır çünkü diğer örneklem hacimleri için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Parametre tahmini ve test istatistiklerinin özelliklerine ilişkin simulasyon çalışması LTS dağılımının şekil parametresi $p$ nin 2, 2.5, 3.5 ve 5 değerleri için yapılmıştır.

Monte-Carlo simulasyon çalışması için MATLAB dilinde programlar yazılmıştır. Her bir simulasyon $10,000$ defa tekrarlanmıştır.

## 5.1. Parametre Tahmini

Denklem (1.7) modelinde hata terimlerinin dağılımı, denklem (3.1) ile verilen LTS dağılımı olsun. Simulasyon çalışmasında parametrelerin EKK ve UEÇO tahmin edicileri karşılaştırılırken (1.7) modelinde genelliği bozmadan

$$\mu = 0, \quad \tau_i = 0, \quad \gamma_j = 0, \quad (\tau\gamma)_{ij} = 0 \quad \beta = 1, \quad \sigma = 1$$
$$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2)$$

olarak alınmıştır. Bir başka deyişle simulasyon için oluşturulan model

$$y_{ijk} = \beta(x_{ijk} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk}$$

dır. Burada $x_{ijk}$ ların dağılımı $N(0,1)$ olarak alınmıştır. Bölüm 1 de parametrelerin EKK tahmin edicileri (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) ve (1.23) denklemleri ile verilmiştir. UEÇO tahmin edicileri ise Bölüm 3 te (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.23) ve (3.22) denklemleri ile verilmiştir.

$10,000$ kez tekrarla yapılan Monte-Carlo simulasyon çalışmasında her bir tahmin edicinin ortalaması, varyansı ve hata kareler ortalaması hesaplanmıştır.

Yan ve varyansı birlikte göz önüne alan $MSE$ değerinin düşük olması tahmin edicinin daha etkin olduğunu ifade eder. Öte yandan yorumlamayı kolaylaştırmak açısından bir de göreli (relatif) etkinlik ($RE$) değerleri hesaplanmıştır. $RE$ değeri

$$RE = 100 \times \frac{MSE_{UECO}}{MSE_{EKK}}$$

formülü ile bulunur. Burada $MSE_{UECO}$ ve $MSE_{EKK}$ değeleri ilgili parametrenin sırasıyla EKK ve UEÇO tahmin edicisinin $MSE$ değeridir. $RE$, UEÇO tahmin edicilerinin EKK tahmin edicilerine göre yüzde kaç etkin olduğunu gösteren bir ölçüdür.

Aynı simulasyon çalışması ortak değişkene sahip $2^3$ ve $2^4$ modelleri için de yapılmıştır.

Çizelge 5.1 de ortak değişkene sahip $2^2$, Çizelge 5.2 de ortak değişkene sahip $2^3$, Çizelge 5.3 te ortak değişkene sahip $2^4$ modeline ilişkin sonuçlar sunulmuştur.

Her bir tablodan hata terimlerinin LTS dağılımlar ailesinden bir dağılıma sahip olması durumunda $\sigma$ ve $\beta$ nın bazı durumları ($p$ nin küçük değerlerinde) hariç UEÇO tahmin edicilerinin, EKK tahmin edicilerinden daha etkin olduğu görülmektedir. Şekil parametresi $p$ nin ve örneklem hacmi $n$ nin büyüyen değerlerinde $\sigma$ nın UEÇO tahmin edicisi EKK tahmin edicisine göre daha etkin olmaktadır.

Ayrıca $RE$ değerleri, şekil parametresi $p$ büyüdükçe 100'e yaklaşmaktadır. Bir başka deyişle $p$ nin büyüyen değerlerinde EKK ve UEÇO tahmin edicilerinin değerlerinin birbirlerine yakın olduğu anlamına gelir. Bu ise beklenen bir durumdur; çünkü (3.1) denklemi ile verilen LTS de $p$ nin büyük değerleri normal dağılıma yaklaşmayı ifade eder (Tiku ve Akkaya [15]).

Çizelge 5.1: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| $n$ | | $Ort$ | | $n \times Var$ | | $n \times MSE$ | | $RE$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | EKK | UEÇO | EKK | UEÇO | EKK | UEÇO | |
| | | | | $p = 2$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00391 | 0.00157 | 0.24213 | 0.18331 | 0.24220 | 0.18333 | 75.69 |
| | $\tau_1$ | -0.00175 | -0.00196 | 0.25915 | 0.20308 | 0.25917 | 0.20310 | 78.36 |
| | $\gamma_1$ | -0.00116 | -0.00244 | 0.25941 | 0.21995 | 0.25942 | 0.21998 | 84.80 |
| | $\tau\gamma_{11}$ | -0.00139 | -0.00160 | 0.25202 | 0.21658 | 0.25203 | 0.21659 | 85.94 |
| | $\beta$ | 1.00164 | 1.00472 | 0.32868 | 0.59451 | 0.32870 | 0.59462 | 180.90 |
| | $\sigma$ | 0.90097 | 1.17638 | 0.76318 | 0.91678 | 0.81222 | 1.07233 | 132.03 |
| 10 | $\mu$ | 0.00046 | -0.00002 | 0.24626 | 0.14651 | 0.24626 | 0.14651 | 59.49 |
| | $\tau_1$ | -0.00217 | -0.00206 | 0.25498 | 0.15029 | 0.25503 | 0.15033 | 58.95 |
| | $\gamma_1$ | 0.00157 | -0.00043 | 0.24884 | 0.17275 | 0.24887 | 0.17275 | 69.41 |
| | $\tau\gamma_{11}$ | 0.00239 | 0.00265 | 0.25119 | 0.18704 | 0.25124 | 0.18711 | 74.47 |
| | $\beta$ | 1.00018 | 0.99854 | 0.28210 | 0.18105 | 0.28210 | 0.18107 | 64.19 |
| | $\sigma$ | 0.93271 | 1.15721 | 0.99468 | 0.80446 | 1.03996 | 1.05162 | 101.12 |
| | $\mu$ | -0.00109 | -0.00079 | 0.24214 | 0.13966 | 0.24215 | 0.13967 | 57.68 |
| 15 | $\tau_1$ | 0.00149 | 0.00052 | 0.25038 | 0.14265 | 0.25042 | 0.14266 | 56.97 |
| | $\gamma_1$ | -0.00179 | -0.00088 | 0.24845 | 0.16889 | 0.24850 | 0.16890 | 67.97 |
| | $\tau\gamma_{11}$ | 0.00023 | 0.00003 | 0.25318 | 0.18753 | 0.25318 | 0.18753 | 74.07 |
| | $\beta$ | 1.00035 | 0.99943 | 0.26747 | 0.16143 | 0.26747 | 0.16143 | 60.35 |
| | $\sigma$ | 0.94661 | 1.11763 | 1.32643 | 0.68988 | 1.36918 | 0.89743 | 65.54 |
| | $\mu$ | 0.00063 | 0.00086 | 0.25115 | 0.13803 | 0.25116 | 0.13804 | 54.96 |
| 20 | $\tau_1$ | 0.00110 | 0.00156 | 0.25408 | 0.14022 | 0.25410 | 0.14027 | 55.20 |
| | $\gamma_1$ | 0.00015 | 0.00089 | 0.25740 | 0.17238 | 0.25740 | 0.17239 | 66.97 |
| | $\tau\gamma_{11}$ | -0.00072 | -0.00169 | 0.25201 | 0.18210 | 0.25202 | 0.18216 | 72.28 |
| | $\beta$ | 1.00026 | 0.99931 | 0.26729 | 0.15859 | 0.26729 | 0.15860 | 59.34 |
| | $\sigma$ | 0.95304 | 1.09199 | 1.90988 | 0.67186 | 1.95399 | 0.84111 | 43.05 |
| | | | | $p = 2.5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | -0.00106 | -0.00020 | 0.24837 | 0.20481 | 0.24838 | 0.20481 | 82.46 |
| | $\tau_1$ | 0.00282 | 0.00155 | 0.27248 | 0.22608 | 0.27252 | 0.22609 | 82.96 |
| | $\gamma_1$ | 0.00238 | 0.00224 | 0.27234 | 0.22607 | 0.27237 | 0.22609 | 83.01 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00180 | -0.00133 | 0.26956 | 0.22537 | 0.26958 | 0.22538 | 83.61 |
| | $\beta$ | 0.99753 | 0.99709 | 0.35375 | 0.32762 | 0.35378 | 0.32766 | 92.62 |
| | $\sigma$ | 0.94829 | 1.14520 | 0.46259 | 0.52233 | 0.47596 | 0.62774 | 131.89 |
| 10 | $\mu$ | -0.00086 | -0.00037 | 0.25159 | 0.18775 | 0.25160 | 0.18776 | 74.63 |
| | $\tau_1$ | 0.00045 | 0.00051 | 0.25729 | 0.19773 | 0.25729 | 0.19773 | 76.85 |
| | $\gamma_1$ | 0.00041 | 0.00070 | 0.26142 | 0.19770 | 0.26142 | 0.19771 | 75.63 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00085 | -0.00077 | 0.24898 | 0.19113 | 0.24899 | 0.19113 | 76.76 |
| | $\beta$ | 1.00128 | 1.00207 | 0.28727 | 0.22884 | 0.28729 | 0.22888 | 79.67 |
| | $\sigma$ | 0.97620 | 1.07963 | 0.52672 | 0.37777 | 0.53238 | 0.44118 | 82.87 |
| 15 | $\mu$ | 0.00174 | 0.00158 | 0.25489 | 0.18672 | 0.25493 | 0.18676 | 73.26 |
| | $\tau_1$ | -0.00122 | -0.00071 | 0.25318 | 0.18991 | 0.25320 | 0.18992 | 75.00 |
| | $\gamma_1$ | -0.00008 | -0.00072 | 0.25427 | 0.18812 | 0.25427 | 0.18813 | 73.99 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00063 | 0.00192 | 0.25590 | 0.19379 | 0.25590 | 0.19384 | 75.75 |
| | $\beta$ | 0.99953 | 1.00121 | 0.27703 | 0.21053 | 0.27703 | 0.21055 | 76.00 |
| | $\sigma$ | 0.98095 | 1.05573 | 0.56083 | 0.35928 | 0.56628 | 0.40587 | 71.67 |
| 20 | $\mu$ | -0.00218 | -0.00104 | 0.24676 | 0.17885 | 0.24686 | 0.17887 | 72.46 |
| | $\tau_1$ | -0.00051 | 0.00005 | 0.25851 | 0.18958 | 0.25851 | 0.18958 | 73.33 |
| | $\gamma_1$ | 0.00119 | 0.00087 | 0.25137 | 0.18755 | 0.25140 | 0.18757 | 74.61 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00212 | 0.00034 | 0.25189 | 0.19018 | 0.25198 | 0.19018 | 75.47 |
| | $\beta$ | 0.99724 | 0.99683 | 0.26886 | 0.20111 | 0.26901 | 0.20131 | 74.83 |
| | $\sigma$ | 0.98324 | 1.03994 | 0.59762 | 0.33375 | 0.60323 | 0.36566 | 60.62 |

Çizelge 5.1 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 3.5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00156 | 0.00220 | 0.25199 | 0.23577 | 0.25200 | 0.23579 | 93.57 |
| | $\tau_1$ | -0.00258 | -0.00225 | 0.26394 | 0.24762 | 0.26398 | 0.24765 | 93.81 |
| | $\gamma_1$ | 0.00031 | 0.00032 | 0.26782 | 0.25069 | 0.26782 | 0.25069 | 93.61 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00051 | -0.00067 | 0.26774 | 0.25086 | 0.26775 | 0.25086 | 93.69 |
| | $\beta$ | 0.99898 | 1.00041 | 0.35661 | 0.33796 | 0.35661 | 0.33796 | 94.77 |
| | $\sigma$ | 0.97022 | 1.09295 | 0.27689 | 0.32728 | 0.28133 | 0.37048 | 131.69 |
| 10 | $\mu$ | 0.00033 | 0.00035 | 0.24873 | 0.22426 | 0.24873 | 0.22426 | 90.16 |
| | $\tau_1$ | 0.00137 | 0.00080 | 0.26181 | 0.23253 | 0.26183 | 0.23254 | 88.81 |
| | $\gamma_1$ | -0.00131 | -0.00179 | 0.26156 | 0.23321 | 0.26158 | 0.23324 | 89.17 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00168 | -0.00167 | 0.25632 | 0.23001 | 0.25635 | 0.23004 | 89.73 |
| | $\beta$ | 1.00013 | 0.99967 | 0.28802 | 0.26272 | 0.28802 | 0.26272 | 91.22 |
| | $\sigma$ | 0.98658 | 1.05866 | 0.28797 | 0.26457 | 0.28977 | 0.29898 | 103.18 |
| 15 | $\mu$ | 0.00003 | -0.00041 | 0.24047 | 0.21287 | 0.24047 | 0.21287 | 88.52 |
| | $\tau_1$ | -0.00010 | -0.00001 | 0.25776 | 0.22863 | 0.25776 | 0.22863 | 88.70 |
| | $\gamma_1$ | -0.00070 | -0.00030 | 0.25375 | 0.22397 | 0.25375 | 0.22397 | 88.26 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00050 | 0.00094 | 0.24555 | 0.21592 | 0.24556 | 0.21593 | 87.94 |
| | $\beta$ | 0.99866 | 0.99854 | 0.27857 | 0.24717 | 0.27860 | 0.24720 | 88.73 |
| | $\sigma$ | 0.99172 | 1.04261 | 0.27847 | 0.23171 | 0.27950 | 0.25894 | 92.64 |
| 20 | $\mu$ | -0.00051 | -0.00019 | 0.25233 | 0.22175 | 0.25234 | 0.22175 | 87.88 |
| | $\tau_1$ | -0.00057 | -0.00070 | 0.24506 | 0.21449 | 0.24507 | 0.21450 | 87.53 |
| | $\gamma_1$ | 0.00048 | 0.00005 | 0.25045 | 0.22176 | 0.25045 | 0.22176 | 88.54 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00037 | 0.00106 | 0.25379 | 0.22076 | 0.25379 | 0.22079 | 87.00 |
| | $\beta$ | 1.00156 | 1.00145 | 0.26944 | 0.24088 | 0.26949 | 0.24092 | 89.40 |
| | $\sigma$ | 0.99235 | 1.03168 | 0.28593 | 0.22111 | 0.28710 | 0.24119 | 84.01 |
| | | | | $p = 5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00081 | 0.05763 | 0.24868 | 0.24928 | 0.24869 | 0.26588 | 106.91 |
| | $\tau_1$ | -0.00053 | -0.00045 | 0.26618 | 0.26632 | 0.26618 | 0.26633 | 100.05 |
| | $\gamma_1$ | 0.00275 | 0.00274 | 0.27582 | 0.27492 | 0.27586 | 0.27496 | 99.67 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00246 | -0.00219 | 0.26404 | 0.26412 | 0.26407 | 0.26415 | 100.03 |
| | $\beta$ | 0.99841 | 0.99862 | 0.35792 | 0.35849 | 0.35793 | 0.35850 | 100.16 |
| | $\sigma$ | 0.97540 | 1.09452 | 0.22340 | 0.27911 | 0.22643 | 0.32378 | 142.99 |
| 10 | $\mu$ | -0.00126 | -0.00120 | 0.24276 | 0.23233 | 0.24278 | 0.23235 | 95.70 |
| | $\tau_1$ | 0.00026 | 0.00025 | 0.25192 | 0.23974 | 0.25192 | 0.23974 | 95.17 |
| | $\gamma_1$ | -0.00094 | -0.00068 | 0.26163 | 0.25087 | 0.26164 | 0.25087 | 95.89 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00339 | 0.00376 | 0.25044 | 0.23992 | 0.25056 | 0.24006 | 95.81 |
| | $\beta$ | 0.99751 | 0.99807 | 0.29642 | 0.28571 | 0.29648 | 0.28575 | 96.38 |
| | $\sigma$ | 0.98779 | 1.03626 | 0.20449 | 0.21050 | 0.20598 | 0.22365 | 108.58 |
| 15 | $\mu$ | -0.00036 | -0.00030 | 0.25934 | 0.24577 | 0.25934 | 0.24577 | 94.77 |
| | $\tau_1$ | -0.00042 | -0.00048 | 0.25338 | 0.24045 | 0.25339 | 0.24046 | 94.90 |
| | $\gamma_1$ | 0.00152 | 0.00160 | 0.25376 | 0.24073 | 0.25380 | 0.24076 | 94.86 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00030 | 0.00020 | 0.25470 | 0.24230 | 0.25471 | 0.24230 | 95.13 |
| | $\beta$ | 1.00037 | 1.00057 | 0.27937 | 0.26665 | 0.27937 | 0.26666 | 95.45 |
| | $\sigma$ | 0.99136 | 1.02755 | 0.20283 | 0.19801 | 0.20395 | 0.20940 | 102.67 |
| 20 | $\mu$ | 0.00200 | 0.00182 | 0.24481 | 0.23102 | 0.24489 | 0.23108 | 94.36 |
| | $\tau_1$ | -0.00191 | -0.00176 | 0.25719 | 0.24283 | 0.25726 | 0.24289 | 94.42 |
| | $\gamma_1$ | -0.00152 | -0.00142 | 0.25057 | 0.23737 | 0.25062 | 0.23741 | 94.73 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00168 | 0.00167 | 0.25328 | 0.23891 | 0.25333 | 0.23896 | 94.33 |
| | $\beta$ | 0.99866 | 0.99820 | 0.27406 | 0.25881 | 0.27409 | 0.25887 | 94.45 |
| | $\sigma$ | 0.99649 | 1.02521 | 0.20639 | 0.19398 | 0.20664 | 0.20669 | 100.03 |

Çizelge 5.2: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| $n$ | | $Ort$ | | $n \times Var$ | | $n \times MSE$ | | $RE$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | EKK | UEÇO | EKK | UEÇO | EKK | UEÇO | |
| | | | | $p = 2$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | -0.00033 | -0.00011 | 0.12349 | 0.08138 | 0.12349 | 0.08138 | 65.90 |
| | $\tau_1$ | 0.00176 | 0.00206 | 0.12427 | 0.08281 | 0.12428 | 0.08283 | 66.65 |
| | $\gamma_1$ | -0.00022 | -0.00001 | 0.12897 | 0.08814 | 0.12897 | 0.08814 | 68.34 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00097 | 0.00050 | 0.12406 | 0.08283 | 0.12406 | 0.08284 | 66.77 |
| | $\delta_1$ | 0.00066 | -0.00061 | 0.12851 | 0.08747 | 0.12851 | 0.08747 | 68.07 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00130 | 0.00102 | 0.12660 | 0.08355 | 0.12661 | 0.08356 | 65.99 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00146 | -0.00140 | 0.12559 | 0.08559 | 0.12560 | 0.08560 | 68.16 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00148 | 0.00000 | 0.12231 | 0.08472 | 0.12232 | 0.08472 | 69.25 |
| | $\beta$ | 0.99787 | 0.99795 | 0.16390 | 0.19660 | 0.16393 | 0.19662 | 119.95 |
| | $\sigma$ | 0.92946 | 1.17910 | 0.53894 | 0.47662 | 0.56382 | 0.63700 | 112.98 |
| 10 | $\mu$ | -0.00171 | -0.00131 | 0.12903 | 0.07328 | 0.12906 | 0.07330 | 56.79 |
| | $\tau_1$ | 0.00171 | 0.00089 | 0.13014 | 0.07297 | 0.13017 | 0.07297 | 56.06 |
| | $\gamma_1$ | 0.00031 | 0.00046 | 0.12911 | 0.07408 | 0.12911 | 0.07408 | 57.38 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00048 | -0.00057 | 0.12719 | 0.07130 | 0.12719 | 0.07130 | 56.06 |
| | $\delta_1$ | 0.00044 | 0.00020 | 0.12792 | 0.07522 | 0.12792 | 0.07522 | 58.80 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00134 | 0.00092 | 0.12645 | 0.07344 | 0.12647 | 0.07345 | 58.08 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00290 | 0.00179 | 0.12970 | 0.07372 | 0.12978 | 0.07376 | 56.83 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00113 | 0.00048 | 0.12796 | 0.07203 | 0.12798 | 0.07204 | 56.29 |
| | $\beta$ | 1.00087 | 1.00056 | 0.14823 | 0.09162 | 0.14824 | 0.09162 | 61.80 |
| | $\sigma$ | 0.95471 | 1.15854 | 0.97004 | 0.64538 | 0.99056 | 0.89673 | 90.53 |
| 15 | $\mu$ | 0.00055 | 0.00018 | 0.11997 | 0.06911 | 0.11997 | 0.06911 | 57.61 |
| | $\tau_1$ | 0.00067 | 0.00048 | 0.12018 | 0.06996 | 0.12019 | 0.06996 | 58.21 |
| | $\gamma_1$ | -0.00026 | -0.00087 | 0.12149 | 0.06950 | 0.12149 | 0.06951 | 57.21 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00069 | 0.00061 | 0.12176 | 0.07114 | 0.12177 | 0.07115 | 58.43 |
| | $\delta_1$ | -0.00087 | -0.00096 | 0.12261 | 0.07004 | 0.12262 | 0.07005 | 57.13 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00220 | 0.00154 | 0.12170 | 0.07082 | 0.12177 | 0.07086 | 58.19 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00093 | -0.00045 | 0.12372 | 0.07080 | 0.12374 | 0.07081 | 57.22 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00285 | 0.00198 | 0.12387 | 0.07070 | 0.12399 | 0.07075 | 57.06 |
| | $\beta$ | 0.99855 | 0.99875 | 0.13875 | 0.07567 | 0.13878 | 0.07569 | 54.54 |
| | $\sigma$ | 0.95640 | 1.11377 | 0.81079 | 0.36867 | 0.83931 | 0.56282 | 67.06 |
| 20 | $\mu$ | 0.00016 | -0.00009 | 0.12519 | 0.06916 | 0.12519 | 0.06916 | 55.24 |
| | $\tau_1$ | 0.00099 | 0.00068 | 0.12557 | 0.06887 | 0.12559 | 0.06888 | 54.85 |
| | $\gamma_1$ | -0.00012 | 0.00055 | 0.12736 | 0.07006 | 0.12736 | 0.07006 | 55.01 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00051 | -0.00013 | 0.12391 | 0.06826 | 0.12392 | 0.06826 | 55.08 |
| | $\delta_1$ | -0.00090 | 0.00008 | 0.12418 | 0.06836 | 0.12419 | 0.06836 | 55.04 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00070 | -0.00063 | 0.12517 | 0.06844 | 0.12518 | 0.06845 | 54.68 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00034 | 0.00000 | 0.12698 | 0.06871 | 0.12698 | 0.06871 | 54.11 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00051 | -0.00020 | 0.12562 | 0.06904 | 0.12563 | 0.06904 | 54.96 |
| | $\beta$ | 1.00010 | 0.99986 | 0.13487 | 0.07415 | 0.13487 | 0.07415 | 54.98 |
| | $\sigma$ | 0.96742 | 1.09247 | 1.20954 | 0.35655 | 1.23077 | 0.52756 | 42.86 |

Çizelge 5.2 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 2.5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00228 | 0.00189 | 0.12701 | 0.10185 | 0.12704 | 0.10186 | 80.19 |
| | $\tau_1$ | -0.00337 | -0.00296 | 0.13019 | 0.10444 | 0.13024 | 0.10448 | 80.22 |
| | $\gamma_1$ | 0.00109 | 0.00062 | 0.12892 | 0.10442 | 0.12893 | 0.10442 | 80.99 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00129 | 0.00011 | 0.12704 | 0.10250 | 0.12705 | 0.10250 | 80.68 |
| | $\delta_1$ | 0.00200 | 0.00187 | 0.12915 | 0.10547 | 0.12917 | 0.10549 | 81.67 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00157 | 0.00161 | 0.12856 | 0.10426 | 0.12857 | 0.10427 | 81.10 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00094 | 0.00043 | 0.12943 | 0.10424 | 0.12944 | 0.10424 | 80.53 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00025 | -0.00057 | 0.13217 | 0.10712 | 0.13217 | 0.10713 | 81.05 |
| | $\beta$ | 0.99925 | 0.99848 | 0.16717 | 0.14517 | 0.16717 | 0.14518 | 86.85 |
| | $\sigma$ | 0.97252 | 1.16158 | 0.29097 | 0.28771 | 0.29474 | 0.41825 | 141.90 |
| 10 | $\mu$ | -0.00162 | -0.00087 | 0.12086 | 0.09173 | 0.12089 | 0.09174 | 75.89 |
| | $\tau_1$ | 0.00132 | 0.00122 | 0.12797 | 0.09527 | 0.12799 | 0.09528 | 74.45 |
| | $\gamma_1$ | -0.00015 | -0.00035 | 0.13021 | 0.09810 | 0.13021 | 0.09810 | 75.34 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00002 | -0.00036 | 0.12608 | 0.09547 | 0.12608 | 0.09548 | 75.73 |
| | $\delta_1$ | 0.00059 | 0.00051 | 0.12477 | 0.09462 | 0.12477 | 0.09463 | 75.84 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00090 | 0.00147 | 0.12774 | 0.09500 | 0.12775 | 0.09503 | 74.38 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00015 | -0.00098 | 0.12796 | 0.09618 | 0.12796 | 0.09619 | 75.17 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00109 | 0.00118 | 0.12407 | 0.09337 | 0.12409 | 0.09338 | 75.25 |
| | $\beta$ | 1.00050 | 1.00095 | 0.14326 | 0.11066 | 0.14327 | 0.11067 | 77.25 |
| | $\sigma$ | 0.98480 | 1.07699 | 0.29632 | 0.17535 | 0.29863 | 0.23463 | 78.57 |
| 15 | $\mu$ | -0.00094 | -0.00020 | 0.12174 | 0.08931 | 0.12175 | 0.08931 | 73.36 |
| | $\tau_1$ | 0.00175 | 0.00194 | 0.12306 | 0.09122 | 0.12310 | 0.09128 | 74.15 |
| | $\gamma_1$ | 0.00152 | 0.00186 | 0.12754 | 0.09403 | 0.12758 | 0.09408 | 73.75 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00061 | 0.00046 | 0.12479 | 0.09257 | 0.12480 | 0.09257 | 74.18 |
| | $\delta_1$ | 0.00056 | 0.00050 | 0.12786 | 0.09389 | 0.12787 | 0.09390 | 73.43 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00042 | 0.00105 | 0.12598 | 0.09316 | 0.12598 | 0.09318 | 73.96 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00067 | 0.00079 | 0.12792 | 0.09342 | 0.12792 | 0.09343 | 73.04 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00067 | -0.00101 | 0.12507 | 0.09211 | 0.12508 | 0.09213 | 73.66 |
| | $\beta$ | 0.99870 | 0.99850 | 0.13396 | 0.10180 | 0.13398 | 0.10183 | 76.00 |
| | $\sigma$ | 0.98856 | 1.05112 | 0.32886 | 0.18113 | 0.33082 | 0.22033 | 66.60 |
| 20 | $\mu$ | 0.00034 | 0.00069 | 0.12370 | 0.09006 | 0.12370 | 0.09007 | 72.81 |
| | $\tau_1$ | -0.00014 | 0.00005 | 0.12951 | 0.09346 | 0.12951 | 0.09346 | 72.16 |
| | $\gamma_1$ | 0.00064 | 0.00087 | 0.12190 | 0.08999 | 0.12191 | 0.09000 | 73.83 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00013 | 0.00000 | 0.12722 | 0.09169 | 0.12722 | 0.09169 | 72.07 |
| | $\delta_1$ | -0.00103 | -0.00073 | 0.12345 | 0.08981 | 0.12347 | 0.08982 | 72.75 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00071 | 0.00017 | 0.12648 | 0.09248 | 0.12649 | 0.09248 | 73.11 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00002 | 0.00012 | 0.12666 | 0.09140 | 0.12666 | 0.09140 | 72.16 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00116 | -0.00031 | 0.12611 | 0.09090 | 0.12613 | 0.09091 | 72.07 |
| | $\beta$ | 0.99749 | 0.99835 | 0.13607 | 0.09752 | 0.13619 | 0.09758 | 71.65 |
| | $\sigma$ | 0.99062 | 1.03632 | 0.40233 | 0.18755 | 0.40410 | 0.21394 | 52.94 |

Çizelge 5.2 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 3.5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00261 | 0.00229 | 0.12540 | 0.11586 | 0.12543 | 0.11589 | 92.39 |
| | $\tau_1$ | -0.00064 | -0.00082 | 0.12961 | 0.11993 | 0.12961 | 0.11994 | 92.54 |
| | $\gamma_1$ | -0.00082 | -0.00083 | 0.13243 | 0.12291 | 0.13243 | 0.12291 | 92.81 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00145 | 0.00130 | 0.12671 | 0.11844 | 0.12672 | 0.11845 | 93.47 |
| | $\delta_1$ | 0.00249 | 0.00313 | 0.12862 | 0.11868 | 0.12865 | 0.11873 | 92.29 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00175 | -0.00171 | 0.12773 | 0.11887 | 0.12775 | 0.11888 | 93.06 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00024 | -0.00046 | 0.12747 | 0.11769 | 0.12747 | 0.11769 | 92.33 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00201 | -0.00219 | 0.13332 | 0.12394 | 0.13334 | 0.12397 | 92.97 |
| | $\beta$ | 1.00184 | 1.00240 | 0.16807 | 0.15503 | 0.16809 | 0.15506 | 92.25 |
| | $\sigma$ | 0.98552 | 1.10670 | 0.16149 | 0.18247 | 0.16254 | 0.23940 | 147.29 |
| 10 | $\mu$ | -0.00023 | -0.00003 | 0.12553 | 0.11098 | 0.12553 | 0.11098 | 88.41 |
| | $\tau_1$ | 0.00080 | 0.00095 | 0.12718 | 0.11257 | 0.12718 | 0.11258 | 88.52 |
| | $\gamma_1$ | -0.00084 | -0.00103 | 0.12570 | 0.11244 | 0.12571 | 0.11245 | 89.46 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00025 | 0.00038 | 0.12616 | 0.11298 | 0.12616 | 0.11298 | 89.55 |
| | $\delta_1$ | 0.00172 | 0.00167 | 0.12419 | 0.11062 | 0.12422 | 0.11065 | 89.07 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00081 | -0.00063 | 0.12630 | 0.11267 | 0.12630 | 0.11267 | 89.21 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00053 | -0.00019 | 0.12615 | 0.11304 | 0.12616 | 0.11304 | 89.60 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00079 | -0.00060 | 0.12563 | 0.11246 | 0.12563 | 0.11246 | 89.51 |
| | $\beta$ | 0.99962 | 0.99995 | 0.14316 | 0.12780 | 0.14317 | 0.12780 | 89.27 |
| | $\sigma$ | 0.99264 | 1.06225 | 0.16235 | 0.13636 | 0.16289 | 0.17511 | 107.50 |
| 15 | $\mu$ | 0.00093 | 0.00021 | 0.12328 | 0.10896 | 0.12329 | 0.10896 | 88.38 |
| | $\tau_1$ | 0.00066 | 0.00117 | 0.12480 | 0.10938 | 0.12480 | 0.10940 | 87.66 |
| | $\gamma_1$ | -0.00007 | -0.00002 | 0.12575 | 0.11057 | 0.12575 | 0.11057 | 87.93 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00069 | 0.00116 | 0.12770 | 0.11171 | 0.12771 | 0.11173 | 87.49 |
| | $\delta_1$ | -0.00027 | -0.00027 | 0.12923 | 0.11368 | 0.12923 | 0.11368 | 87.97 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00159 | -0.00170 | 0.12516 | 0.11098 | 0.12520 | 0.11103 | 88.68 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00027 | -0.00004 | 0.12628 | 0.11160 | 0.12628 | 0.11160 | 88.37 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00145 | -0.00116 | 0.12648 | 0.11132 | 0.12651 | 0.11134 | 88.00 |
| | $\beta$ | 1.00143 | 1.00156 | 0.13348 | 0.11804 | 0.13351 | 0.11807 | 88.44 |
| | $\sigma$ | 0.99371 | 1.04241 | 0.14969 | 0.11393 | 0.15029 | 0.14090 | 93.75 |
| 20 | $\mu$ | 0.00044 | 0.00001 | 0.12612 | 0.11044 | 0.12612 | 0.11044 | 87.57 |
| | $\tau_1$ | -0.00034 | -0.00014 | 0.12585 | 0.10984 | 0.12585 | 0.10984 | 87.27 |
| | $\gamma_1$ | 0.00052 | 0.00043 | 0.12618 | 0.11040 | 0.12619 | 0.11040 | 87.49 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00098 | -0.00046 | 0.12679 | 0.11089 | 0.12681 | 0.11090 | 87.45 |
| | $\delta_1$ | 0.00004 | 0.00016 | 0.12713 | 0.11034 | 0.12713 | 0.11034 | 86.79 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00069 | -0.00095 | 0.12505 | 0.10891 | 0.12506 | 0.10893 | 87.10 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00008 | 0.00022 | 0.12601 | 0.10802 | 0.12601 | 0.10802 | 85.72 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00021 | -0.00010 | 0.12852 | 0.11265 | 0.12852 | 0.11265 | 87.65 |
| | $\beta$ | 1.00120 | 1.00091 | 0.13076 | 0.11259 | 0.13079 | 0.11260 | 86.10 |
| | $\sigma$ | 0.99734 | 1.03411 | 0.14813 | 0.10851 | 0.14827 | 0.13178 | 88.88 |

Çizelge 5.2 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p=5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00046 | 0.00051 | 0.12742 | 0.12436 | 0.12742 | 0.12437 | 97.60 |
| | $\tau_1$ | 0.00217 | 0.00196 | 0.12941 | 0.12564 | 0.12944 | 0.12566 | 97.08 |
| | $\gamma_1$ | 0.00124 | 0.00103 | 0.12902 | 0.12565 | 0.12903 | 0.12566 | 97.39 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00054 | 0.00026 | 0.12865 | 0.12544 | 0.12865 | 0.12544 | 97.50 |
| | $\delta_1$ | 0.00123 | 0.00124 | 0.13087 | 0.12679 | 0.13088 | 0.12680 | 96.88 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00164 | 0.00166 | 0.13065 | 0.12725 | 0.13066 | 0.12726 | 97.40 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00059 | 0.00080 | 0.12937 | 0.12627 | 0.12937 | 0.12627 | 97.61 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00035 | -0.00051 | 0.13010 | 0.12626 | 0.13010 | 0.12627 | 97.05 |
| | $\beta$ | 0.99916 | 0.99959 | 0.16897 | 0.16493 | 0.16898 | 0.16494 | 97.61 |
| | $\sigma$ | 0.99111 | 1.06944 | 0.11111 | 0.12563 | 0.11150 | 0.14974 | 134.29 |
| 10 | $\mu$ | -0.00004 | -0.00018 | 0.12461 | 0.11889 | 0.12461 | 0.11889 | 95.41 |
| | $\tau_1$ | -0.00024 | -0.00011 | 0.12881 | 0.12243 | 0.12881 | 0.12243 | 95.05 |
| | $\gamma_1$ | -0.00110 | -0.00061 | 0.12752 | 0.12261 | 0.12754 | 0.12261 | 96.14 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00059 | 0.00044 | 0.12705 | 0.12142 | 0.12705 | 0.12142 | 95.57 |
| | $\delta_1$ | 0.00092 | 0.00077 | 0.12525 | 0.11944 | 0.12526 | 0.11945 | 95.36 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00041 | 0.00021 | 0.12582 | 0.12040 | 0.12582 | 0.12040 | 95.69 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00074 | 0.00062 | 0.12525 | 0.12002 | 0.12526 | 0.12003 | 95.82 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00037 | 0.00036 | 0.12764 | 0.12163 | 0.12764 | 0.12163 | 95.29 |
| | $\beta$ | 0.99758 | 0.99784 | 0.14400 | 0.13849 | 0.14406 | 0.13854 | 96.17 |
| | $\sigma$ | 0.99454 | 1.04213 | 0.10760 | 0.10942 | 0.10790 | 0.12717 | 117.86 |
| 15 | $\mu$ | -0.00002 | -0.00040 | 0.12324 | 0.11742 | 0.12324 | 0.11742 | 95.28 |
| | $\tau_1$ | 0.00007 | 0.00022 | 0.12393 | 0.11703 | 0.12393 | 0.11703 | 94.43 |
| | $\gamma_1$ | 0.00013 | 0.00000 | 0.12530 | 0.11904 | 0.12530 | 0.11904 | 95.01 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00053 | 0.00034 | 0.12570 | 0.11943 | 0.12570 | 0.11943 | 95.01 |
| | $\delta_1$ | 0.00040 | 0.00030 | 0.12604 | 0.11913 | 0.12605 | 0.11913 | 94.51 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00087 | 0.00086 | 0.12750 | 0.11989 | 0.12751 | 0.11990 | 94.04 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00117 | -0.00122 | 0.12589 | 0.11881 | 0.12591 | 0.11883 | 94.38 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00018 | -0.00012 | 0.12697 | 0.12064 | 0.12697 | 0.12064 | 95.01 |
| | $\beta$ | 0.99884 | 0.99885 | 0.13584 | 0.12905 | 0.13586 | 0.12907 | 95.00 |
| | $\sigma$ | 0.99556 | 1.03034 | 0.10393 | 0.09926 | 0.10423 | 0.11307 | 108.48 |
| 20 | $\mu$ | -0.00012 | -0.00019 | 0.12461 | 0.11822 | 0.12461 | 0.11822 | 94.87 |
| | $\tau_1$ | 0.00113 | 0.00091 | 0.12427 | 0.11735 | 0.12430 | 0.11737 | 94.42 |
| | $\gamma_1$ | -0.00066 | -0.00043 | 0.12541 | 0.11855 | 0.12542 | 0.11855 | 94.53 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00161 | -0.00145 | 0.12754 | 0.12071 | 0.12759 | 0.12075 | 94.64 |
| | $\delta_1$ | 0.00123 | 0.00112 | 0.12949 | 0.12284 | 0.12952 | 0.12287 | 94.87 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00006 | 0.00033 | 0.12732 | 0.12020 | 0.12732 | 0.12020 | 94.40 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00063 | 0.00055 | 0.12452 | 0.11753 | 0.12452 | 0.11754 | 94.39 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00020 | 0.00019 | 0.12180 | 0.11603 | 0.12180 | 0.11604 | 95.27 |
| | $\beta$ | 0.99842 | 0.99797 | 0.13210 | 0.12401 | 0.13215 | 0.12410 | 93.90 |
| | $\sigma$ | 0.99673 | 1.02457 | 0.10265 | 0.09631 | 0.10287 | 0.10838 | 105.36 |

Çizelge 5.3: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| $n$ | | $Ort$ | | $n \times Var$ | | $n \times MSE$ | | $RE$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | EKK | UEÇO | EKK | UEÇO | EKK | UEÇO | |
| | | | | $p = 2$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | -0.00101 | -0.00071 | 0.06232 | 0.03891 | 0.06232 | 0.03892 | 62.44 |
| | $\tau_1$ | -0.00129 | -0.00072 | 0.06340 | 0.04029 | 0.06340 | 0.04029 | 63.55 |
| | $\gamma_1$ | 0.00049 | 0.00005 | 0.06244 | 0.03974 | 0.06244 | 0.03974 | 63.65 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00172 | -0.00103 | 0.06268 | 0.03996 | 0.06270 | 0.03996 | 63.74 |
| | $\delta_1$ | 0.00093 | 0.00061 | 0.06211 | 0.04002 | 0.06212 | 0.04002 | 64.42 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00076 | -0.00031 | 0.06195 | 0.04009 | 0.06195 | 0.04009 | 64.71 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00144 | 0.00076 | 0.06398 | 0.04011 | 0.06399 | 0.04011 | 62.68 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00063 | 0.00100 | 0.06344 | 0.04033 | 0.06344 | 0.04034 | 63.58 |
| | $\lambda$ | -0.00204 | -0.00117 | 0.06313 | 0.04019 | 0.06315 | 0.04019 | 63.64 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00145 | 0.00172 | 0.06232 | 0.03887 | 0.06233 | 0.03889 | 62.39 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00038 | 0.00022 | 0.06405 | 0.03965 | 0.06405 | 0.03965 | 61.91 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00048 | 0.00022 | 0.06372 | 0.04048 | 0.06372 | 0.04048 | 63.53 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00107 | 0.00074 | 0.06300 | 0.03905 | 0.06301 | 0.03905 | 61.98 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00037 | -0.00030 | 0.06217 | 0.03941 | 0.06217 | 0.03941 | 63.39 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00182 | -0.00145 | 0.06405 | 0.03997 | 0.06407 | 0.03998 | 62.41 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00122 | 0.00108 | 0.06204 | 0.03966 | 0.06205 | 0.03967 | 63.93 |
| | $\beta$ | 0.99972 | 0.99799 | 0.07839 | 0.07887 | 0.07839 | 0.07889 | 100.64 |
| | $\sigma$ | 0.95312 | 1.18397 | 0.44213 | 0.39015 | 0.45311 | 0.55938 | 123.45 |
| 10 | $\mu$ | -0.00039 | 0.00000 | 0.06119 | 0.03510 | 0.06119 | 0.03510 | 57.36 |
| | $\tau_1$ | 0.00162 | 0.00096 | 0.06291 | 0.03654 | 0.06293 | 0.03655 | 58.07 |
| | $\gamma_1$ | 0.00074 | 0.00080 | 0.06301 | 0.03643 | 0.06302 | 0.03644 | 57.82 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00058 | -0.00020 | 0.06295 | 0.03638 | 0.06296 | 0.03638 | 57.78 |
| | $\delta_1$ | -0.00033 | -0.00023 | 0.06161 | 0.03578 | 0.06161 | 0.03578 | 58.08 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00026 | 0.00022 | 0.06264 | 0.03586 | 0.06264 | 0.03587 | 57.25 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00013 | 0.00086 | 0.06219 | 0.03571 | 0.06219 | 0.03572 | 57.44 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00221 | 0.00107 | 0.06208 | 0.03582 | 0.06213 | 0.03583 | 57.67 |
| | $\lambda$ | -0.00009 | -0.00040 | 0.06279 | 0.03522 | 0.06279 | 0.03522 | 56.09 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00071 | 0.00091 | 0.06445 | 0.03724 | 0.06446 | 0.03725 | 57.79 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00060 | 0.00005 | 0.06247 | 0.03607 | 0.06248 | 0.03607 | 57.73 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00017 | -0.00032 | 0.06281 | 0.03559 | 0.06281 | 0.03559 | 56.66 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00007 | -0.00012 | 0.06260 | 0.03640 | 0.06260 | 0.03640 | 58.14 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00119 | 0.00058 | 0.06090 | 0.03533 | 0.06092 | 0.03533 | 58.00 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | 0.00041 | 0.00013 | 0.06136 | 0.03537 | 0.06136 | 0.03537 | 57.65 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00071 | -0.00076 | 0.06243 | 0.03585 | 0.06244 | 0.03586 | 57.43 |
| | $\beta$ | 1.00156 | 1.00021 | 0.06922 | 0.04281 | 0.06925 | 0.04281 | 61.82 |
| | $\sigma$ | 0.96506 | 1.15486 | 0.60456 | 0.38409 | 0.61677 | 0.62391 | 101.16 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 2$ | | | | |
| 15 | $\mu$ | 0.00034 | 0.00084 | 0.06211 | 0.03500 | 0.06211 | 0.03501 | 56.37 |
| | $\tau_1$ | 0.00017 | 0.00010 | 0.06236 | 0.03483 | 0.06236 | 0.03483 | 55.85 |
| | $\gamma_1$ | 0.00066 | 0.00121 | 0.06262 | 0.03525 | 0.06263 | 0.03528 | 56.32 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00005 | -0.00022 | 0.06203 | 0.03462 | 0.06203 | 0.03462 | 55.82 |
| | $\delta_1$ | 0.00070 | 0.00040 | 0.06242 | 0.03555 | 0.06242 | 0.03555 | 56.95 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00048 | -0.00074 | 0.06217 | 0.03555 | 0.06217 | 0.03556 | 57.20 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00074 | 0.00071 | 0.06127 | 0.03426 | 0.06127 | 0.03427 | 55.93 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00063 | -0.00053 | 0.06302 | 0.03553 | 0.06303 | 0.03553 | 56.38 |
| | $\lambda$ | 0.00018 | 0.00025 | 0.06177 | 0.03445 | 0.06177 | 0.03445 | 55.77 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | -0.00047 | -0.00016 | 0.06061 | 0.03385 | 0.06062 | 0.03385 | 55.84 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00004 | 0.00017 | 0.06168 | 0.03447 | 0.06168 | 0.03447 | 55.89 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00029 | -0.00006 | 0.06285 | 0.03526 | 0.06285 | 0.03526 | 56.10 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00147 | 0.00108 | 0.06151 | 0.03468 | 0.06154 | 0.03470 | 56.38 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00072 | -0.00039 | 0.06198 | 0.03475 | 0.06199 | 0.03476 | 56.06 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00025 | -0.00016 | 0.06294 | 0.03510 | 0.06294 | 0.03510 | 55.77 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00084 | 0.00000 | 0.06206 | 0.03467 | 0.06207 | 0.03467 | 55.86 |
| | $\beta$ | 1.00005 | 1.00009 | 0.06967 | 0.03943 | 0.06967 | 0.03943 | 56.60 |
| | $\sigma$ | 0.97323 | 1.11880 | 0.68769 | 0.25824 | 0.69844 | 0.46992 | 67.28 |
| 20 | $\mu$ | -0.00087 | -0.00095 | 0.06356 | 0.03480 | 0.06357 | 0.03482 | 54.78 |
| | $\tau_1$ | 0.00007 | -0.00026 | 0.06375 | 0.03517 | 0.06375 | 0.03518 | 55.18 |
| | $\gamma_1$ | 0.00014 | 0.00006 | 0.06420 | 0.03486 | 0.06420 | 0.03487 | 54.31 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00023 | 0.00000 | 0.06446 | 0.03512 | 0.06446 | 0.03512 | 54.48 |
| | $\delta_1$ | 0.00008 | -0.00008 | 0.06354 | 0.03449 | 0.06354 | 0.03449 | 54.28 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00010 | -0.00013 | 0.06193 | 0.03375 | 0.06193 | 0.03375 | 54.49 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00002 | -0.00028 | 0.06291 | 0.03434 | 0.06291 | 0.03434 | 54.59 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00078 | 0.00100 | 0.06469 | 0.03430 | 0.06470 | 0.03432 | 53.05 |
| | $\lambda$ | 0.00019 | -0.00033 | 0.06218 | 0.03372 | 0.06219 | 0.03373 | 54.23 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | -0.00025 | -0.00027 | 0.06267 | 0.03410 | 0.06267 | 0.03410 | 54.41 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00011 | -0.00006 | 0.06349 | 0.03420 | 0.06349 | 0.03420 | 53.87 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00030 | 0.00055 | 0.06348 | 0.03452 | 0.06348 | 0.03453 | 54.39 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00019 | -0.00018 | 0.06321 | 0.03448 | 0.06321 | 0.03448 | 54.55 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00019 | 0.00004 | 0.06266 | 0.03413 | 0.06266 | 0.03413 | 54.46 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | 0.00064 | 0.00017 | 0.06286 | 0.03476 | 0.06287 | 0.03476 | 55.29 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00000 | -0.00027 | 0.06344 | 0.03495 | 0.06344 | 0.03495 | 55.09 |
| | $\beta$ | 1.00035 | 1.00019 | 0.06655 | 0.03638 | 0.06655 | 0.03638 | 54.66 |
| | $\sigma$ | 0.98043 | 1.09454 | 0.98495 | 0.23251 | 0.99261 | 0.41126 | 41.43 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 2.5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00044 | 0.00077 | 0.06259 | 0.05021 | 0.06259 | 0.05021 | 80.23 |
| | $\tau_1$ | -0.00029 | 0.00011 | 0.06404 | 0.05139 | 0.06404 | 0.05139 | 80.25 |
| | $\gamma_1$ | 0.00011 | -0.00040 | 0.06414 | 0.05147 | 0.06414 | 0.05147 | 80.24 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00146 | -0.00139 | 0.06450 | 0.05206 | 0.06451 | 0.05207 | 80.72 |
| | $\delta_1$ | -0.00022 | -0.00078 | 0.06399 | 0.05148 | 0.06399 | 0.05148 | 80.45 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00062 | 0.00002 | 0.06326 | 0.05121 | 0.06326 | 0.05121 | 80.96 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00098 | -0.00053 | 0.06426 | 0.05149 | 0.06427 | 0.05149 | 80.12 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00007 | 0.00042 | 0.06407 | 0.05061 | 0.06407 | 0.05061 | 78.99 |
| | $\lambda$ | 0.00030 | 0.00003 | 0.06406 | 0.05161 | 0.06406 | 0.05161 | 80.57 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00008 | 0.00022 | 0.06427 | 0.05185 | 0.06427 | 0.05185 | 80.68 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00105 | -0.00103 | 0.06393 | 0.05176 | 0.06394 | 0.05177 | 80.96 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00005 | -0.00027 | 0.06314 | 0.05055 | 0.06314 | 0.05055 | 80.06 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00054 | -0.00041 | 0.06519 | 0.05288 | 0.06519 | 0.05288 | 81.13 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00208 | 0.00112 | 0.06401 | 0.05175 | 0.06403 | 0.05176 | 80.83 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00046 | -0.00046 | 0.06384 | 0.05100 | 0.06384 | 0.05100 | 79.88 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00000 | -0.00055 | 0.06256 | 0.05023 | 0.06256 | 0.05023 | 80.28 |
| | $\beta$ | 1.00069 | 1.00090 | 0.07875 | 0.06612 | 0.07875 | 0.06612 | 83.96 |
| | $\sigma$ | 0.98331 | 1.16704 | 0.16846 | 0.14782 | 0.16985 | 0.28733 | 169.17 |
| 10 | $\mu$ | -0.00107 | -0.00046 | 0.06316 | 0.04715 | 0.06317 | 0.04715 | 74.64 |
| | $\tau_1$ | 0.00050 | 0.00010 | 0.06311 | 0.04681 | 0.06312 | 0.04681 | 74.16 |
| | $\gamma_1$ | 0.00000 | 0.00040 | 0.06421 | 0.04672 | 0.06421 | 0.04672 | 72.76 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00061 | 0.00025 | 0.06216 | 0.04677 | 0.06216 | 0.04677 | 75.23 |
| | $\delta_1$ | 0.00073 | 0.00046 | 0.06218 | 0.04557 | 0.06218 | 0.04557 | 73.29 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00032 | 0.00050 | 0.06331 | 0.04675 | 0.06331 | 0.04676 | 73.86 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00094 | 0.00064 | 0.06368 | 0.04737 | 0.06369 | 0.04738 | 74.40 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00155 | 0.00134 | 0.06321 | 0.04637 | 0.06323 | 0.04639 | 73.36 |
| | $\lambda$ | -0.00070 | -0.00073 | 0.06384 | 0.04776 | 0.06384 | 0.04777 | 74.83 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | -0.00105 | -0.00095 | 0.06168 | 0.04616 | 0.06170 | 0.04617 | 74.83 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00221 | 0.00112 | 0.06436 | 0.04793 | 0.06441 | 0.04794 | 74.43 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00018 | 0.00011 | 0.06288 | 0.04668 | 0.06288 | 0.04668 | 74.24 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00001 | -0.00001 | 0.06445 | 0.04807 | 0.06445 | 0.04807 | 74.58 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00047 | -0.00022 | 0.06319 | 0.04589 | 0.06319 | 0.04589 | 72.62 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00058 | -0.00076 | 0.06154 | 0.04645 | 0.06154 | 0.04645 | 75.48 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00003 | 0.00001 | 0.06262 | 0.04596 | 0.06262 | 0.04596 | 73.40 |
| | $\beta$ | 1.00064 | 1.00066 | 0.06974 | 0.05211 | 0.06974 | 0.05212 | 74.73 |
| | $\sigma$ | 0.99023 | 1.07649 | 0.18385 | 0.09186 | 0.18481 | 0.15037 | 81.36 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 2.5$ | | | | |
| 15 | $\mu$ | 0.00085 | 0.00013 | 0.06073 | 0.04501 | 0.06075 | 0.04501 | 74.10 |
| | $\tau_1$ | 0.00020 | -0.00004 | 0.06182 | 0.04491 | 0.06182 | 0.04491 | 72.64 |
| | $\gamma_1$ | -0.00073 | -0.00087 | 0.06230 | 0.04506 | 0.06231 | 0.04507 | 72.33 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00053 | 0.00034 | 0.06343 | 0.04666 | 0.06343 | 0.04667 | 73.57 |
| | $\delta_1$ | -0.00093 | -0.00066 | 0.06507 | 0.04684 | 0.06509 | 0.04684 | 71.97 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00002 | -0.00021 | 0.06227 | 0.04603 | 0.06227 | 0.04603 | 73.92 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00011 | -0.00005 | 0.06422 | 0.04667 | 0.06422 | 0.04667 | 72.67 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00068 | 0.00008 | 0.06408 | 0.04777 | 0.06409 | 0.04777 | 74.55 |
| | $\lambda$ | 0.00044 | 0.00009 | 0.06290 | 0.04531 | 0.06290 | 0.04531 | 72.04 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | -0.00010 | -0.00010 | 0.06205 | 0.04596 | 0.06205 | 0.04596 | 74.07 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00014 | -0.00004 | 0.06474 | 0.04790 | 0.06474 | 0.04790 | 73.99 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00028 | -0.00002 | 0.06234 | 0.04567 | 0.06234 | 0.04567 | 73.26 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00015 | -0.00020 | 0.06169 | 0.04497 | 0.06169 | 0.04497 | 72.90 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00049 | 0.00060 | 0.06364 | 0.04688 | 0.06364 | 0.04688 | 73.66 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00027 | 0.00020 | 0.06251 | 0.04655 | 0.06251 | 0.04655 | 74.46 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00050 | -0.00119 | 0.06321 | 0.04623 | 0.06321 | 0.04625 | 73.17 |
| | $\beta$ | 0.99944 | 0.99927 | 0.06745 | 0.05011 | 0.06746 | 0.05012 | 74.30 |
| | $\sigma$ | 0.99263 | 1.04673 | 0.17394 | 0.08250 | 0.17475 | 0.11526 | 65.95 |
| 20 | $\mu$ | -0.00067 | -0.00048 | 0.06210 | 0.04500 | 0.06210 | 0.04501 | 72.47 |
| | $\tau_1$ | -0.00097 | -0.00063 | 0.06303 | 0.04595 | 0.06305 | 0.04596 | 72.89 |
| | $\gamma_1$ | 0.00084 | 0.00074 | 0.06298 | 0.04592 | 0.06299 | 0.04594 | 72.93 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00093 | 0.00057 | 0.06291 | 0.04506 | 0.06292 | 0.04507 | 71.63 |
| | $\delta_1$ | 0.00008 | 0.00038 | 0.06282 | 0.04528 | 0.06282 | 0.04528 | 72.08 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00070 | -0.00060 | 0.06337 | 0.04550 | 0.06338 | 0.04551 | 71.80 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00080 | 0.00015 | 0.06274 | 0.04446 | 0.06276 | 0.04446 | 70.85 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00032 | 0.00027 | 0.06261 | 0.04528 | 0.06262 | 0.04528 | 72.32 |
| | $\lambda$ | 0.00022 | -0.00054 | 0.06186 | 0.04584 | 0.06186 | 0.04585 | 74.11 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00005 | -0.00011 | 0.06305 | 0.04504 | 0.06305 | 0.04504 | 71.43 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00017 | -0.00018 | 0.06089 | 0.04429 | 0.06089 | 0.04429 | 72.74 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00021 | -0.00069 | 0.06327 | 0.04618 | 0.06327 | 0.04619 | 73.00 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00035 | 0.00013 | 0.06164 | 0.04513 | 0.06164 | 0.04513 | 73.21 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00064 | 0.00025 | 0.06117 | 0.04445 | 0.06118 | 0.04445 | 72.66 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00047 | -0.00037 | 0.06232 | 0.04526 | 0.06232 | 0.04526 | 72.62 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00086 | 0.00076 | 0.06219 | 0.04571 | 0.06221 | 0.04572 | 73.50 |
| | $\beta$ | 1.00067 | 1.00036 | 0.06514 | 0.04748 | 0.06515 | 0.04748 | 72.88 |
| | $\sigma$ | 0.99292 | 1.03205 | 0.17740 | 0.07945 | 0.17841 | 0.09999 | 56.05 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p = 3.5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | 0.00018 | -0.00008 | 0.06102 | 0.05714 | 0.06102 | 0.05714 | 93.64 |
| | $\tau_1$ | -0.00041 | -0.00065 | 0.06384 | 0.05911 | 0.06384 | 0.05911 | 92.59 |
| | $\gamma_1$ | 0.00143 | 0.00129 | 0.06348 | 0.05947 | 0.06349 | 0.05948 | 93.67 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00024 | 0.00038 | 0.06340 | 0.05915 | 0.06340 | 0.05915 | 93.29 |
| | $\delta_1$ | -0.00062 | -0.00080 | 0.06300 | 0.05819 | 0.06301 | 0.05819 | 92.36 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00095 | 0.00088 | 0.06172 | 0.05738 | 0.06172 | 0.05738 | 92.97 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00064 | -0.00049 | 0.06437 | 0.05967 | 0.06437 | 0.05967 | 92.70 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00006 | -0.00007 | 0.06255 | 0.05760 | 0.06255 | 0.05760 | 92.09 |
| | $\lambda$ | 0.00137 | 0.00145 | 0.06287 | 0.05837 | 0.06288 | 0.05838 | 92.85 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00116 | 0.00122 | 0.06249 | 0.05807 | 0.06250 | 0.05807 | 92.92 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00032 | 0.00035 | 0.06450 | 0.05998 | 0.06450 | 0.05999 | 93.00 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00134 | -0.00103 | 0.06305 | 0.05880 | 0.06306 | 0.05881 | 93.26 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00078 | 0.00092 | 0.06400 | 0.05917 | 0.06401 | 0.05917 | 92.45 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00172 | 0.00160 | 0.06313 | 0.05868 | 0.06314 | 0.05870 | 92.96 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00043 | -0.00025 | 0.06192 | 0.05764 | 0.06192 | 0.05764 | 93.09 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00022 | 0.00009 | 0.06352 | 0.05877 | 0.06353 | 0.05877 | 92.52 |
| | $\beta$ | 0.99927 | 0.99859 | 0.08053 | 0.07494 | 0.08053 | 0.07495 | 93.07 |
| | $\sigma$ | 0.99094 | 1.11052 | 0.07509 | 0.08447 | 0.07551 | 0.14554 | 192.76 |
| 10 | $\mu$ | 0.00081 | 0.00066 | 0.06194 | 0.05483 | 0.06194 | 0.05483 | 88.52 |
| | $\tau_1$ | -0.00053 | -0.00031 | 0.06263 | 0.05605 | 0.06263 | 0.05605 | 89.49 |
| | $\gamma_1$ | -0.00079 | -0.00078 | 0.06280 | 0.05611 | 0.06280 | 0.05612 | 89.36 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00050 | -0.00047 | 0.06220 | 0.05540 | 0.06220 | 0.05540 | 89.06 |
| | $\delta_1$ | 0.00101 | 0.00087 | 0.06291 | 0.05598 | 0.06292 | 0.05598 | 88.97 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00189 | -0.00166 | 0.06286 | 0.05684 | 0.06290 | 0.05686 | 90.41 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00043 | -0.00040 | 0.06309 | 0.05641 | 0.06309 | 0.05641 | 89.42 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00050 | -0.00027 | 0.06197 | 0.05553 | 0.06197 | 0.05553 | 89.61 |
| | $\lambda$ | -0.00072 | -0.00049 | 0.06108 | 0.05514 | 0.06108 | 0.05514 | 90.27 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00065 | 0.00070 | 0.06273 | 0.05578 | 0.06273 | 0.05578 | 88.93 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00014 | 0.00008 | 0.06099 | 0.05426 | 0.06099 | 0.05426 | 88.96 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00059 | 0.00069 | 0.06188 | 0.05512 | 0.06189 | 0.05512 | 89.07 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00019 | 0.00003 | 0.06312 | 0.05599 | 0.06312 | 0.05599 | 88.72 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00164 | 0.00120 | 0.06327 | 0.05686 | 0.06330 | 0.05687 | 89.85 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00045 | -0.00057 | 0.06303 | 0.05609 | 0.06304 | 0.05609 | 88.99 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00008 | 0.00001 | 0.06256 | 0.05589 | 0.06256 | 0.05589 | 89.33 |
| | $\beta$ | 1.00106 | 1.00120 | 0.06726 | 0.06051 | 0.06727 | 0.06052 | 89.97 |
| | $\sigma$ | 0.99540 | 1.06386 | 0.07391 | 0.06466 | 0.07412 | 0.10544 | 142.26 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | $p = 3.5$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | $\mu$ | 0.00102 | 0.00096 | 0.06194 | 0.05436 | 0.06196 | 0.05438 | 87.77 |
| | $\tau_1$ | -0.00031 | 0.00008 | 0.06419 | 0.05660 | 0.06419 | 0.05660 | 88.17 |
| | $\gamma_1$ | 0.00054 | 0.00053 | 0.06271 | 0.05525 | 0.06272 | 0.05526 | 88.10 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00055 | 0.00029 | 0.06259 | 0.05497 | 0.06259 | 0.05497 | 87.82 |
| | $\delta_1$ | 0.00020 | 0.00067 | 0.06567 | 0.05703 | 0.06567 | 0.05704 | 86.85 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00058 | -0.00057 | 0.06394 | 0.05578 | 0.06395 | 0.05578 | 87.23 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00092 | 0.00087 | 0.06162 | 0.05400 | 0.06164 | 0.05401 | 87.63 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00037 | 0.00051 | 0.06235 | 0.05514 | 0.06235 | 0.05515 | 88.45 |
| | $\lambda$ | 0.00079 | 0.00070 | 0.06187 | 0.05396 | 0.06188 | 0.05396 | 87.20 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00091 | 0.00059 | 0.06309 | 0.05616 | 0.06310 | 0.05617 | 89.02 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00016 | -0.00030 | 0.06141 | 0.05371 | 0.06141 | 0.05371 | 87.46 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00018 | -0.00007 | 0.06327 | 0.05599 | 0.06327 | 0.05599 | 88.50 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00088 | -0.00095 | 0.06307 | 0.05503 | 0.06308 | 0.05505 | 87.27 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00070 | -0.00026 | 0.06337 | 0.05529 | 0.06338 | 0.05529 | 87.24 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | 0.00080 | 0.00053 | 0.06186 | 0.05432 | 0.06187 | 0.05432 | 87.81 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00046 | 0.00041 | 0.06316 | 0.05583 | 0.06316 | 0.05583 | 88.39 |
| | $\beta$ | 0.99872 | 0.99858 | 0.06653 | 0.05856 | 0.06655 | 0.05859 | 88.03 |
| | $\sigma$ | 1.00006 | 1.04695 | 0.07962 | 0.05794 | 0.07962 | 0.09100 | 114.30 |
| 20 | $\mu$ | -0.00054 | -0.00045 | 0.06237 | 0.05401 | 0.06238 | 0.05401 | 86.59 |
| | $\tau_1$ | -0.00037 | -0.00013 | 0.06385 | 0.05602 | 0.06386 | 0.05602 | 87.73 |
| | $\gamma_1$ | -0.00001 | -0.00012 | 0.06397 | 0.05589 | 0.06397 | 0.05589 | 87.36 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | 0.00001 | 0.00009 | 0.06245 | 0.05409 | 0.06245 | 0.05409 | 86.61 |
| | $\delta_1$ | -0.00006 | -0.00020 | 0.06349 | 0.05530 | 0.06349 | 0.05531 | 87.11 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00047 | 0.00074 | 0.06255 | 0.05450 | 0.06255 | 0.05451 | 87.14 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00033 | 0.00033 | 0.06236 | 0.05382 | 0.06237 | 0.05382 | 86.29 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00026 | -0.00003 | 0.06363 | 0.05546 | 0.06363 | 0.05546 | 87.15 |
| | $\lambda$ | 0.00058 | 0.00032 | 0.06252 | 0.05524 | 0.06253 | 0.05525 | 88.36 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00047 | 0.00038 | 0.06241 | 0.05457 | 0.06242 | 0.05458 | 87.44 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00078 | 0.00051 | 0.06251 | 0.05443 | 0.06252 | 0.05444 | 87.07 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00031 | 0.00012 | 0.06095 | 0.05367 | 0.06095 | 0.05367 | 88.05 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00018 | 0.00021 | 0.06143 | 0.05374 | 0.06143 | 0.05374 | 87.48 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00063 | -0.00053 | 0.06245 | 0.05487 | 0.06245 | 0.05487 | 87.86 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | 0.00078 | 0.00037 | 0.06359 | 0.05570 | 0.06360 | 0.05570 | 87.58 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00028 | -0.00021 | 0.06254 | 0.05409 | 0.06254 | 0.05409 | 86.49 |
| | $\beta$ | 0.99902 | 0.99897 | 0.06643 | 0.05863 | 0.06645 | 0.05865 | 88.26 |
| | $\sigma$ | 0.99815 | 1.03419 | 0.07713 | 0.05428 | 0.07719 | 0.07766 | 100.60 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p=5$ | | | | |
| 5 | $\mu$ | -0.00082 | -0.00070 | 0.06225 | 0.06059 | 0.06226 | 0.06059 | 97.32 |
| | $\tau_1$ | -0.00044 | -0.00038 | 0.06307 | 0.06128 | 0.06307 | 0.06128 | 97.17 |
| | $\gamma_1$ | 0.00049 | 0.00050 | 0.06317 | 0.06135 | 0.06317 | 0.06135 | 97.12 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00166 | -0.00150 | 0.06357 | 0.06180 | 0.06359 | 0.06181 | 97.21 |
| | $\delta_1$ | -0.00071 | -0.00051 | 0.06195 | 0.06028 | 0.06195 | 0.06028 | 97.31 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00052 | 0.00056 | 0.06350 | 0.06169 | 0.06350 | 0.06169 | 97.14 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00088 | 0.00085 | 0.06495 | 0.06317 | 0.06496 | 0.06317 | 97.25 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00130 | -0.00157 | 0.06308 | 0.06154 | 0.06309 | 0.06156 | 97.57 |
| | $\lambda$ | -0.00056 | -0.00056 | 0.06481 | 0.06311 | 0.06481 | 0.06311 | 97.37 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00304 | 0.00298 | 0.06184 | 0.06020 | 0.06189 | 0.06025 | 97.35 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00001 | -0.00001 | 0.06379 | 0.06207 | 0.06379 | 0.06207 | 97.30 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | 0.00078 | 0.00077 | 0.06337 | 0.06185 | 0.06337 | 0.06185 | 97.60 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00041 | -0.00022 | 0.06348 | 0.06193 | 0.06348 | 0.06193 | 97.56 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00083 | -0.00083 | 0.06477 | 0.06285 | 0.06478 | 0.06285 | 97.03 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00090 | -0.00087 | 0.06149 | 0.05965 | 0.06150 | 0.05965 | 96.99 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00034 | 0.00035 | 0.06424 | 0.06236 | 0.06424 | 0.06236 | 97.07 |
| | $\beta$ | 1.00061 | 1.00085 | 0.08139 | 0.07865 | 0.08139 | 0.07866 | 96.64 |
| | $\sigma$ | 0.99339 | 1.07097 | 0.05708 | 0.06416 | 0.05730 | 0.08934 | 155.91 |
| 10 | $\mu$ | -0.00063 | -0.00061 | 0.06268 | 0.05965 | 0.06268 | 0.05966 | 95.17 |
| | $\tau_1$ | -0.00044 | -0.00028 | 0.06248 | 0.06013 | 0.06248 | 0.06013 | 96.23 |
| | $\gamma_1$ | -0.00039 | -0.00053 | 0.06270 | 0.05960 | 0.06270 | 0.05960 | 95.06 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00029 | -0.00042 | 0.06449 | 0.06164 | 0.06449 | 0.06164 | 95.59 |
| | $\delta_1$ | -0.00164 | -0.00153 | 0.06374 | 0.06061 | 0.06377 | 0.06064 | 95.09 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | -0.00108 | -0.00104 | 0.06331 | 0.06071 | 0.06332 | 0.06072 | 95.90 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | -0.00192 | -0.00174 | 0.06414 | 0.06139 | 0.06418 | 0.06142 | 95.70 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00056 | 0.00051 | 0.06160 | 0.05862 | 0.06160 | 0.05862 | 95.16 |
| | $\lambda$ | 0.00029 | 0.00003 | 0.06222 | 0.05922 | 0.06222 | 0.05922 | 95.19 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00007 | 0.00016 | 0.06236 | 0.05916 | 0.06236 | 0.05916 | 94.86 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | -0.00096 | -0.00072 | 0.06286 | 0.05979 | 0.06287 | 0.05980 | 95.11 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00044 | -0.00053 | 0.06394 | 0.06135 | 0.06394 | 0.06136 | 95.96 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00004 | -0.00008 | 0.06202 | 0.05889 | 0.06202 | 0.05889 | 94.95 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00027 | -0.00018 | 0.06476 | 0.06187 | 0.06476 | 0.06187 | 95.54 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | 0.00051 | 0.00066 | 0.06173 | 0.05889 | 0.06174 | 0.05890 | 95.40 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00103 | -0.00112 | 0.06311 | 0.06022 | 0.06312 | 0.06023 | 95.42 |
| | $\beta$ | 1.00004 | 1.00015 | 0.07130 | 0.06805 | 0.07130 | 0.06805 | 95.44 |
| | $\sigma$ | 0.99830 | 1.04529 | 0.05312 | 0.05327 | 0.05314 | 0.07378 | 138.83 |

Çizelge 5.3 (Devam) Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde parametre tahmini sonuçları

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p=5$ | | | | |
| 15 | $\mu$ | -0.00010 | -0.00036 | 0.06376 | 0.06065 | 0.06376 | 0.06066 | 95.13 |
| | $\tau_1$ | 0.00012 | 0.00026 | 0.06346 | 0.06003 | 0.06346 | 0.06003 | 94.60 |
| | $\gamma_1$ | 0.00088 | 0.00060 | 0.06148 | 0.05852 | 0.06149 | 0.05853 | 95.19 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00106 | -0.00101 | 0.06273 | 0.05962 | 0.06275 | 0.05963 | 95.03 |
| | $\delta_1$ | 0.00045 | 0.00049 | 0.06240 | 0.05942 | 0.06240 | 0.05942 | 95.23 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00103 | 0.00105 | 0.06342 | 0.06015 | 0.06344 | 0.06017 | 94.85 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00032 | 0.00018 | 0.06280 | 0.05995 | 0.06281 | 0.05995 | 95.45 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | 0.00062 | 0.00052 | 0.06135 | 0.05793 | 0.06136 | 0.05794 | 94.43 |
| | $\lambda$ | -0.00013 | -0.00007 | 0.06229 | 0.05893 | 0.06229 | 0.05893 | 94.61 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | 0.00012 | 0.00014 | 0.06335 | 0.06003 | 0.06335 | 0.06003 | 94.76 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00035 | 0.00026 | 0.06224 | 0.05887 | 0.06224 | 0.05887 | 94.59 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00089 | -0.00081 | 0.06117 | 0.05796 | 0.06118 | 0.05797 | 94.74 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | -0.00028 | -0.00016 | 0.06224 | 0.05903 | 0.06224 | 0.05903 | 94.83 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | -0.00033 | -0.00025 | 0.06458 | 0.06142 | 0.06458 | 0.06142 | 95.11 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | -0.00048 | -0.00063 | 0.06253 | 0.05901 | 0.06253 | 0.05902 | 94.38 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | -0.00036 | -0.00039 | 0.06210 | 0.05939 | 0.06210 | 0.05939 | 95.64 |
| | $\beta$ | 0.99926 | 0.99925 | 0.06886 | 0.06507 | 0.06887 | 0.06508 | 94.49 |
| | $\sigma$ | 0.99893 | 1.03336 | 0.05066 | 0.04824 | 0.05068 | 0.06493 | 128.12 |
| 20 | $\mu$ | -0.00018 | 0.00000 | 0.06271 | 0.05925 | 0.06271 | 0.05925 | 94.49 |
| | $\tau_1$ | 0.00069 | 0.00068 | 0.06339 | 0.05985 | 0.06340 | 0.05986 | 94.41 |
| | $\gamma_1$ | -0.00038 | -0.00040 | 0.06265 | 0.05938 | 0.06265 | 0.05939 | 94.79 |
| | $(\tau\gamma)_{11}$ | -0.00013 | -0.00017 | 0.06232 | 0.05874 | 0.06232 | 0.05874 | 94.25 |
| | $\delta_1$ | -0.00122 | -0.00122 | 0.06463 | 0.06086 | 0.06466 | 0.06089 | 94.17 |
| | $(\tau\delta)_{11}$ | 0.00127 | 0.00107 | 0.06195 | 0.05854 | 0.06198 | 0.05857 | 94.49 |
| | $(\gamma\delta)_{11}$ | 0.00077 | 0.00072 | 0.06172 | 0.05848 | 0.06174 | 0.05849 | 94.75 |
| | $(\tau\gamma\delta)_{111}$ | -0.00057 | -0.00051 | 0.06303 | 0.05961 | 0.06304 | 0.05962 | 94.58 |
| | $\lambda$ | -0.00032 | 0.00000 | 0.06292 | 0.05926 | 0.06292 | 0.05926 | 94.18 |
| | $(\tau\lambda)_{11}$ | -0.00008 | 0.00003 | 0.06371 | 0.06046 | 0.06371 | 0.06046 | 94.90 |
| | $(\gamma\lambda)_{11}$ | 0.00022 | 0.00023 | 0.06259 | 0.05892 | 0.06260 | 0.05892 | 94.13 |
| | $(\tau\gamma\lambda)_{111}$ | -0.00042 | -0.00026 | 0.06141 | 0.05835 | 0.06142 | 0.05835 | 95.01 |
| | $(\delta\lambda)_{11}$ | 0.00093 | 0.00087 | 0.06161 | 0.05817 | 0.06163 | 0.05819 | 94.42 |
| | $(\tau\delta\lambda)_{111}$ | 0.00054 | 0.00033 | 0.06359 | 0.06020 | 0.06360 | 0.06020 | 94.66 |
| | $(\gamma\delta\lambda)_{111}$ | 0.00057 | 0.00068 | 0.06207 | 0.05794 | 0.06208 | 0.05795 | 93.35 |
| | $(\tau\gamma\delta\lambda)_{1111}$ | 0.00138 | 0.00119 | 0.06209 | 0.05882 | 0.06213 | 0.05885 | 94.72 |
| | $\beta$ | 1.00015 | 1.00010 | 0.06700 | 0.06272 | 0.06700 | 0.06272 | 93.62 |
| | $\sigma$ | 0.99892 | 1.02635 | 0.05229 | 0.04880 | 0.05232 | 0.06268 | 119.81 |

### 5.2. Hipotez Testi

Bu bölümde, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olması halinde ana etkileri ve etkileşim etkisini test etmek için geliştirilen (3.36)-(3.40) ve (3.42)-(3.46) denklemleri ile verilen $F^{*}$ ve $F^{**}$ test istatistiklerinin normallik varsayımına dayanan $F$ testleriyle karşılaştırılması Monte Carlo simulasyonlarıyla yapılmıştır. Bu kapsamda test istatistiklerinin I. tip hataları, güçleri ve istatistiksel sağlamlıkları karşılaştırılmıştır.

#### 5.2.1. Test İstatistiklerinin I. Tip Hataları

İlk olarak $F$, $F^{*}$ ve $F^{**}$ testlerinin dağılımının simulasyon ile merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımı olduğunu göstermek için önceden belirlenmiş $\alpha = 0.05$ anlam (önem) düzeyinde, önerilen test istatistikleri ile klasik $F$ testinin I. tip hata olasılıkları hesaplanmıştır. Bir başka deyişle her simulasyonda ortak değişkene sahip $2^2$ modelinde

$$
\begin{aligned}
P_{11} &= P(F_A \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{01}) \\
P_{12} &= P(F_B \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{02}) \\
P_{13} &= P(F_{AB} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{03}) \\
P_{21} &= P(F_A^{*} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{01}) \\
P_{22} &= P(F_B^{*} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{02}) \\
P_{23} &= P(F_{AB}^{*} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{03}) \\
P_{31} &= P(F_A^{**} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{01}) \\
P_{32} &= P(F_B^{**} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{02}) \\
P_{33} &= P(F_{AB}^{**} \geq \boldsymbol{F}_{0.05}(1, 2^2 n - 2^2 - 1) | H_{03})
\end{aligned}
$$

olasılıkları hesaplanmıştır. Aynı işlemler, benzer şekilde, ortak değişkene sahip $2^3$ ve $2^4$ modeli için de yapılmıştır. Ortak değişkenli $2^2$ modelinde A, B ana etkileri ile AB etkişim etkisi için hesaplanan I. tip hatalar, ortak değişkene sahip $2^3$ modelinde A, AB ve ABC; ortak değişkene sahip $2^4$ modelinde A, AB, ABC ve ABCD için hesaplanmıştır.

Simulasyon çalışmasının sonuçları Çizelge 5.4-5.6 de sunulmuştur.

Sonuçlar, $F^*$ ve $F^{**}$ testlerinin birinci tip hatalarının belirlenen $\alpha = 0.05$ düzeyine oldukça yakın olduğunu göstermektedir. Bu ise üçüncü bölümde asimptotik olarak merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu kanıtlanan $F^*$ ve $F^{**}$ test istatistiklerinin dağılımının küçük örneklem hacimleri için de merkezi $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu anlamına gelmektedir.

Ayrıca Çizelge 5.4-5.6 dan görülmektedir ki, hataların normal olmaması durumunda klasik $F$ testinin I. tip hatası belirlenen $\alpha = 0.05$ düzeyi civarında olmaktadır. Bu da merkezi limit teoreminden dolayı beklenen bir durumdur; ancak test istatistiklerinin güçleri için aynı durum söz konusu olmamaktadır. Elde edilen sonuçlar Şenoğlu ve Tiku [24] tek yönlü ANOVA modeli için elde ettiği sonuçlara benzemektedir.

Çizelge 5.4: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde test istatistiklerinin I. tip hataları

| $n$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $p = 2$ | | | $p = 2.5$ | |
| 5 | A | 0.045 | 0.052 | 0.034 | 0.044 | 0.044 | 0.034 |
| | B | 0.043 | 0.051 | 0.032 | 0.045 | 0.041 | 0.034 |
| | AB | 0.043 | 0.049 | 0.033 | 0.047 | 0.046 | 0.038 |
| 10 | A | 0.045 | 0.046 | 0.042 | 0.047 | 0.045 | 0.041 |
| | B | 0.047 | 0.056 | 0.055 | 0.047 | 0.042 | 0.038 |
| | AB | 0.045 | 0.052 | 0.053 | 0.044 | 0.039 | 0.035 |
| 15 | A | 0.047 | 0.050 | 0.047 | 0.046 | 0.043 | 0.040 |
| | B | 0.046 | 0.058 | 0.061 | 0.049 | 0.045 | 0.044 |
| | AB | 0.047 | 0.060 | 0.065 | 0.048 | 0.047 | 0.044 |
| 20 | A | 0.051 | 0.053 | 0.052 | 0.047 | 0.049 | 0.047 |
| | B | 0.045 | 0.063 | 0.065 | 0.050 | 0.048 | 0.046 |
| | AB | 0.047 | 0.062 | 0.069 | 0.048 | 0.046 | 0.043 |
| | | | $p = 3.5$ | | | $p = 5$ | |
| 5 | A | 0.046 | 0.048 | 0.039 | 0.049 | 0.046 | 0.038 |
| | B | 0.048 | 0.050 | 0.041 | 0.047 | 0.043 | 0.037 |
| | AB | 0.047 | 0.048 | 0.040 | 0.051 | 0.049 | 0.040 |
| 10 | A | 0.050 | 0.048 | 0.045 | 0.049 | 0.048 | 0.045 |
| | B | 0.051 | 0.046 | 0.042 | 0.047 | 0.046 | 0.044 |
| | AB | 0.047 | 0.043 | 0.040 | 0.051 | 0.049 | 0.046 |
| 15 | A | 0.049 | 0.045 | 0.043 | 0.050 | 0.048 | 0.046 |
| | B | 0.050 | 0.047 | 0.045 | 0.050 | 0.048 | 0.046 |
| | AB | 0.051 | 0.048 | 0.045 | 0.052 | 0.051 | 0.048 |
| 20 | A | 0.047 | 0.043 | 0.043 | 0.050 | 0.050 | 0.048 |
| | B | 0.051 | 0.048 | 0.047 | 0.047 | 0.046 | 0.045 |
| | AB | 0.050 | 0.047 | 0.046 | 0.048 | 0.046 | 0.044 |

Çizelge 5.5: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde test istatistiklerinin I. tip hataları

| $n$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $p=2$ | | | $p=2.5$ | |
| 5 | A | 0.047 | 0.036 | 0.030 | 0.047 | 0.037 | 0.032 |
| | AB | 0.044 | 0.038 | 0.032 | 0.047 | 0.037 | 0.035 |
| | ABC | 0.043 | 0.040 | 0.030 | 0.050 | 0.041 | 0.037 |
| 10 | A | 0.048 | 0.045 | 0.041 | 0.050 | 0.043 | 0.041 |
| | AB | 0.046 | 0.044 | 0.042 | 0.050 | 0.040 | 0.039 |
| | ABC | 0.045 | 0.045 | 0.043 | 0.047 | 0.042 | 0.040 |
| 15 | A | 0.047 | 0.052 | 0.051 | 0.047 | 0.042 | 0.041 |
| | AB | 0.047 | 0.049 | 0.048 | 0.047 | 0.045 | 0.044 |
| | ABC | 0.046 | 0.051 | 0.050 | 0.050 | 0.045 | 0.044 |
| 20 | A | 0.046 | 0.057 | 0.056 | 0.051 | 0.050 | 0.048 |
| | AB | 0.045 | 0.057 | 0.056 | 0.050 | 0.047 | 0.046 |
| | ABC | 0.051 | 0.058 | 0.058 | 0.050 | 0.046 | 0.045 |
| | | | $p=3.5$ | | | $p=5$ | |
| 5 | A | 0.049 | 0.042 | 0.039 | 0.050 | 0.046 | 0.043 |
| | AB | 0.045 | 0.042 | 0.038 | 0.048 | 0.048 | 0.044 |
| | ABC | 0.051 | 0.046 | 0.043 | 0.049 | 0.047 | 0.043 |
| 10 | A | 0.053 | 0.045 | 0.043 | 0.051 | 0.048 | 0.046 |
| | AB | 0.050 | 0.043 | 0.042 | 0.051 | 0.048 | 0.045 |
| | ABC | 0.048 | 0.042 | 0.041 | 0.050 | 0.046 | 0.044 |
| 15 | A | 0.048 | 0.042 | 0.041 | 0.051 | 0.047 | 0.046 |
| | AB | 0.050 | 0.044 | 0.043 | 0.050 | 0.047 | 0.046 |
| | ABC | 0.050 | 0.045 | 0.044 | 0.052 | 0.049 | 0.048 |
| 20 | A | 0.048 | 0.044 | 0.043 | 0.049 | 0.044 | 0.043 |
| | AB | 0.048 | 0.046 | 0.045 | 0.050 | 0.049 | 0.048 |
| | ABC | 0.054 | 0.049 | 0.048 | 0.045 | 0.045 | 0.044 |

Çizelge 5.6: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde test istatistiklerinin I. tip hataları

| $n$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $p = 2$ | | | $p = 2.5$ | |
| 5 | A | 0.048 | 0.039 | 0.034 | 0.049 | 0.035 | 0.034 |
| | AB | 0.049 | 0.036 | 0.032 | 0.052 | 0.038 | 0.035 |
| | ABC | 0.049 | 0.039 | 0.035 | 0.049 | 0.034 | 0.033 |
| | ABCD | 0.047 | 0.036 | 0.032 | 0.047 | 0.034 | 0.032 |
| 10 | A | 0.049 | 0.047 | 0.045 | 0.045 | 0.043 | 0.042 |
| | AB | 0.050 | 0.046 | 0.045 | 0.048 | 0.041 | 0.040 |
| | ABC | 0.047 | 0.045 | 0.044 | 0.050 | 0.041 | 0.040 |
| | ABCD | 0.047 | 0.046 | 0.334 | 0.046 | 0.038 | 0.038 |
| 15 | A | 0.049 | 0.051 | 0.050 | 0.048 | 0.042 | 0.041 |
| | AB | 0.047 | 0.052 | 0.052 | 0.053 | 0.046 | 0.044 |
| | ABC | 0.051 | 0.056 | 0.055 | 0.052 | 0.048 | 0.048 |
| | ABCD | 0.047 | 0.051 | 0.478 | 0.050 | 0.046 | 0.049 |
| 20 | A | 0.049 | 0.065 | 0.064 | 0.050 | 0.048 | 0.048 |
| | AB | 0.048 | 0.059 | 0.059 | 0.049 | 0.047 | 0.046 |
| | ABC | 0.052 | 0.055 | 0.055 | 0.050 | 0.046 | 0.046 |
| | ABCD | 0.050 | 0.063 | 0.555 | 0.050 | 0.048 | 0.053 |
| | | | $p = 3.5$ | | | $p = 5$ | |
| 5 | A | 0.052 | 0.042 | 0.040 | 0.050 | 0.045 | 0.044 |
| | AB | 0.051 | 0.045 | 0.043 | 0.051 | 0.048 | 0.047 |
| | ABC | 0.048 | 0.038 | 0.036 | 0.050 | 0.048 | 0.046 |
| | ABCD | 0.048 | 0.041 | 0.040 | 0.052 | 0.048 | 0.047 |
| 10 | A | 0.050 | 0.045 | 0.044 | 0.050 | 0.046 | 0.045 |
| | AB | 0.048 | 0.041 | 0.039 | 0.051 | 0.049 | 0.048 |
| | ABC | 0.047 | 0.040 | 0.039 | 0.048 | 0.045 | 0.045 |
| | ABCD | 0.051 | 0.043 | 0.042 | 0.049 | 0.045 | 0.044 |
| 15 | A | 0.051 | 0.046 | 0.045 | 0.051 | 0.047 | 0.047 |
| | AB | 0.050 | 0.042 | 0.041 | 0.049 | 0.047 | 0.046 |
| | ABC | 0.048 | 0.044 | 0.043 | 0.048 | 0.043 | 0.042 |
| | ABCD | 0.049 | 0.043 | 0.043 | 0.049 | 0.043 | 0.042 |
| 20 | A | 0.052 | 0.048 | 0.048 | 0.049 | 0.047 | 0.047 |
| | AB | 0.049 | 0.043 | 0.042 | 0.053 | 0.049 | 0.048 |
| | ABC | 0.051 | 0.047 | 0.047 | 0.052 | 0.048 | 0.048 |
| | ABCD | 0.048 | 0.045 | 0.044 | 0.051 | 0.048 | 0.047 |

### 5.2.2. Testin Gücü

$H_0$ sıfır hipotezi, $H_1$ alternatif hipotez ve $\psi$ de test istatistiği olmak üzere $\psi$ testinin gücü $\beta_\psi$ ile gösterilir ve

$$\beta_\psi = P(H_0 \text{ red}|H_1)$$

olarak tanımlanır.

Bu tez çalışmasında kullanılan ve geliştirilen test istatistiklerinin güçleri yukarıdaki tanım doğrultusunda hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır. Testin gücünü hesaplamak için her bir gözeye sabit $d$ sayıları eklenip çıkartılmış ve bu durumda $H_0$ hipotezinin reddedilmesi olasılığı hesaplanmıştır. Ortak değişkene sahip $2^2$ modelinde $d$ değerleri 0, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60 ve 0.70 olarak alınmıştır. Benzer şekilde ortak değişkene sahip $2^3$ ve $2^4$ modellerinde $d$ değerleri sırasıyla 0, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50 ve 0, 0.10, 0.20, 0.30 olarak alınmıştır. $d = 0$ olması durumunda I. tip hatanın elde edileceği açıktır.

Simulasyon çalışması örneklem hacminin 10 olduğu durum için yapılmış ve simulasyon çalışmasını sonuçları Çizelge 5.7-5.9 da sunulmuştur.

Çizelge 5.7-5.9 dan açıkça görülmektedir ki, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olması durumunda $F^*$ ve $F^{**}$ testleri klasik $F$ testinden daha güçlüdür.

Eğer, alt bölüm 5.2 de verilen I. tip hata sonuçları ile bu bölümde elde edilen testin gücü bilgileri birleştirilirse, $F^*$ ve $F^{**}$ testlerinin klasik $F$ testinden nispeten daha az I. tip hataya sahip fakat daha güçlü olduğu görülür.

Çizelge 5.7: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde test istatistiklerinin gücü

| $d$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $p=2$ | | | $p=2.5$ | |
| 0 | A | 0.045 | 0.046 | 0.042 | 0.050 | 0.048 | 0.045 |
| | B | 0.05 | 0.06 | 0.06 | 0.051 | 0.046 | 0.042 |
| | AB | 0.045 | 0.052 | 0.053 | 0.047 | 0.043 | 0.040 |
| 0.10 | A | 0.11 | 0.13 | 0.12 | 0.097 | 0.096 | 0.089 |
| | B | 0.10 | 0.12 | 0.12 | 0.092 | 0.094 | 0.087 |
| | AB | 0.10 | 0.13 | 0.13 | 0.097 | 0.099 | 0.094 |
| 0.20 | A | 0.27 | 0.36 | 0.34 | 0.24 | 0.27 | 0.26 |
| | B | 0.27 | 0.36 | 0.35 | 0.24 | 0.28 | 0.26 |
| | AB | 0.27 | 0.37 | 0.37 | 0.24 | 0.28 | 0.26 |
| 0.30 | A | 0.49 | 0.66 | 0.64 | 0.45 | 0.54 | 0.52 |
| | B | 0.49 | 0.66 | 0.65 | 0.43 | 0.53 | 0.51 |
| | AB | 0.49 | 0.67 | 0.66 | 0.44 | 0.54 | 0.52 |
| 0.40 | A | 0.70 | 0.87 | 0.86 | 0.65 | 0.78 | 0.76 |
| | B | 0.70 | 0.87 | 0.87 | 0.65 | 0.77 | 0.76 |
| | AB | 0.69 | 0.88 | 0.87 | 0.65 | 0.78 | 0.77 |
| 0.50 | A | 0.83 | 0.96 | 0.95 | 0.81 | 0.92 | 0.91 |
| | B | 0.83 | 0.96 | 0.96 | 0.81 | 0.92 | 0.92 |
| | AB | 0.83 | 0.96 | 0.96 | 0.81 | 0.92 | 0.92 |
| 0.60 | A | 0.91 | 0.99 | 0.99 | 0.90 | 0.98 | 0.97 |
| | B | 0.91 | 0.99 | 0.99 | 0.90 | 0.98 | 0.98 |
| | AB | 0.91 | 0.99 | 0.99 | 0.90 | 0.98 | 0.98 |
| 0.70 | A | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | 0.99 | 0.99 |
| | B | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | 1.00 | 1.00 |
| | AB | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 0.96 | 1.00 | 0.99 |
| | | | $p=3.5$ | | | $p=5$ | |
| 0 | A | 0.047 | 0.045 | 0.041 | 0.049 | 0.048 | 0.045 |
| | B | 0.047 | 0.042 | 0.038 | 0.047 | 0.046 | 0.044 |
| | AB | 0.044 | 0.039 | 0.035 | 0.051 | 0.049 | 0.046 |
| 0.10 | A | 0.094 | 0.092 | 0.087 | 0.094 | 0.096 | 0.091 |
| | B | 0.092 | 0.093 | 0.088 | 0.086 | 0.089 | 0.084 |
| | AB | 0.095 | 0.095 | 0.089 | 0.096 | 0.096 | 0.090 |
| 0.20 | A | 0.23 | 0.24 | 0.23 | 0.23 | 0.24 | 0.23 |
| | B | 0.22 | 0.24 | 0.23 | 0.22 | 0.23 | 0.22 |
| | AB | 0.22 | 0.24 | 0.23 | 0.21 | 0.23 | 0.22 |
| 0.30 | A | 0.42 | 0.47 | 0.46 | 0.41 | 0.46 | 0.45 |
| | B | 0.42 | 0.47 | 0.46 | 0.40 | 0.45 | 0.44 |
| | AB | 0.41 | 0.47 | 0.46 | 0.41 | 0.46 | 0.44 |
| 0.40 | A | 0.63 | 0.72 | 0.71 | 0.62 | 0.70 | 0.69 |
| | B | 0.63 | 0.71 | 0.70 | 0.62 | 0.70 | 0.69 |
| | AB | 0.63 | 0.71 | 0.70 | 0.62 | 0.70 | 0.68 |
| 0.50 | A | 0.79 | 0.88 | 0.87 | 0.79 | 0.87 | 0.86 |
| | B | 0.79 | 0.88 | 0.87 | 0.79 | 0.86 | 0.86 |
| | AB | 0.79 | 0.87 | 0.87 | 0.79 | 0.87 | 0.86 |
| 0.60 | A | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.90 | 0.95 | 0.95 |
| | B | 0.90 | 0.96 | 0.95 | 0.90 | 0.96 | 0.95 |
| | AB | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.90 | 0.96 | 0.96 |
| 0.70 | A | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | B | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | AB | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |

Çizelge 5.8: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde test istatistiklerinin gücü

| | | $p=2$ | | | $p=2.5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
| 0 | A | 0.047 | 0.036 | 0.030 | 0.048 | 0.045 | 0.041 |
| | AB | 0.044 | 0.038 | 0.032 | 0.046 | 0.044 | 0.042 |
| | ABC | 0.043 | 0.040 | 0.030 | 0.045 | 0.045 | 0.043 |
| 0.10 | A | 0.16 | 0.20 | 0.19 | 0.15 | 0.16 | 0.15 |
| | AB | 0.15 | 0.20 | 0.20 | 0.15 | 0.16 | 0.15 |
| | ABC | 0.16 | 0.21 | 0.20 | 0.14 | 0.15 | 0.15 |
| 0.20 | A | 0.46 | 0.62 | 0.61 | 0.42 | 0.50 | 0.49 |
| | AB | 0.47 | 0.63 | 0.62 | 0.43 | 0.50 | 0.49 |
| | ABC | 0.47 | 0.63 | 0.62 | 0.42 | 0.50 | 0.49 |
| 0.30 | A | 0.77 | 0.92 | 0.91 | 0.73 | 0.84 | 0.83 |
| | AB | 0.76 | 0.92 | 0.91 | 0.73 | 0.84 | 0.83 |
| | ABC | 0.76 | 0.92 | 0.91 | 0.73 | 0.84 | 0.83 |
| 0.40 | A | 0.92 | 0.99 | 0.99 | 0.92 | 0.97 | 0.97 |
| | AB | 0.92 | 0.99 | 0.99 | 0.91 | 0.97 | 0.97 |
| | ABC | 0.92 | 0.99 | 0.99 | 0.91 | 0.97 | 0.97 |
| 0.50 | A | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 1.00 | 1.00 |
| | AB | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 1.00 | 1.00 |
| | ABC | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 1.00 | 1.00 |
| | | $p=3.5$ | | | $p=5$ | | |
| 0 | A | 0.047 | 0.052 | 0.051 | 0.046 | 0.057 | 0.056 |
| | AB | 0.047 | 0.049 | 0.048 | 0.045 | 0.057 | 0.056 |
| | ABC | 0.046 | 0.051 | 0.050 | 0.051 | 0.058 | 0.058 |
| 0.10 | A | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| | AB | 0.14 | 0.14 | 0.13 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| | ABC | 0.15 | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 0.20 | A | 0.40 | 0.43 | 0.43 | 0.42 | 0.43 | 0.43 |
| | AB | 0.40 | 0.43 | 0.42 | 0.41 | 0.43 | 0.42 |
| | ABC | 0.40 | 0.43 | 0.42 | 0.42 | 0.44 | 0.43 |
| 0.30 | A | 0.72 | 0.77 | 0.77 | 0.72 | 0.76 | 0.76 |
| | AB | 0.73 | 0.78 | 0.77 | 0.71 | 0.76 | 0.75 |
| | ABC | 0.72 | 0.77 | 0.77 | 0.71 | 0.76 | 0.75 |
| 0.40 | A | 0.91 | 0.95 | 0.95 | 0.91 | 0.94 | 0.94 |
| | AB | 0.91 | 0.95 | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| | ABC | 0.91 | 0.95 | 0.95 | 0.91 | 0.94 | 0.94 |
| 0.50 | A | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.99 | 0.99 |
| | AB | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 1.00 | 0.99 |
| | ABC | 0.98 | 1.00 | 0.99 | 0.98 | 0.99 | 0.99 |

Çizelge 5.9: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde test istatistiklerinin gücü

| $d$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $p = 2$ | | | $p = 2.5$ | |
| 0 | A | 0.049 | 0.047 | 0.045 | 0.045 | 0.043 | 0.042 |
| | AB | 0.050 | 0.046 | 0.045 | 0.048 | 0.041 | 0.040 |
| | ABC | 0.047 | 0.045 | 0.044 | 0.050 | 0.041 | 0.040 |
| | ABCD | 0.047 | 0.046 | 0.334 | 0.046 | 0.038 | 0.038 |
| 0.10 | A | 0.28 | 0.37 | 0.36 | 0.25 | 0.27 | 0.27 |
| | AB | 0.28 | 0.37 | 0.37 | 0.25 | 0.28 | 0.27 |
| | ABC | 0.27 | 0.37 | 0.36 | 0.25 | 0.28 | 0.27 |
| | ABCD | 0.27 | 0.37 | 0.59 | 0.25 | 0.28 | 0.27 |
| 0.20 | A | 0.73 | 0.89 | 0.89 | 0.71 | 0.80 | 0.80 |
| | AB | 0.75 | 0.90 | 0.90 | 0.72 | 0.80 | 0.80 |
| | ABC | 0.75 | 0.89 | 0.89 | 0.72 | 0.80 | 0.80 |
| | ABCD | 0.75 | 0.90 | 0.94 | 0.73 | 0.81 | 0.81 |
| 0.30 | A | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | 0.99 | 0.99 |
| | AB | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | 0.99 | 0.99 |
| | ABC | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | ABCD | 0.96 | 0.99 | 1.00 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | | | $p = 3.5$ | | | $p = 5$ | |
| 0 | A | 0.050 | 0.045 | 0.044 | 0.050 | 0.046 | 0.045 |
| | AB | 0.048 | 0.041 | 0.039 | 0.051 | 0.049 | 0.048 |
| | ABC | 0.047 | 0.040 | 0.039 | 0.048 | 0.045 | 0.045 |
| | ABCD | 0.051 | 0.043 | 0.042 | 0.049 | 0.045 | 0.044 |
| 0.10 | A | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 |
| | AB | 0.25 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 |
| | ABC | 0.25 | 0.25 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.23 |
| | ABCD | 0.25 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.23 | 0.23 |
| 0.20 | A | 0.70 | 0.74 | 0.73 | 0.69 | 0.72 | 0.71 |
| | AB | 0.71 | 0.73 | 0.73 | 0.71 | 0.72 | 0.71 |
| | ABC | 0.71 | 0.74 | 0.73 | 0.70 | 0.71 | 0.71 |
| | ABCD | 0.71 | 0.73 | 0.72 | 0.71 | 0.71 | 0.71 |
| 0.30 | A | 0.96 | 0.98 | 0.98 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |
| | AB | 0.96 | 0.98 | 0.97 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |
| | ABC | 0.96 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |
| | ABCD | 0.96 | 0.98 | 0.97 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |

### 5.2.3. İstatistiksel Sağlamlık (Robustness)

Bölüm 5.1 de parametre tahmini ve bölüm 5.2 ile 5.2.2 te yapılan analizlerde şekil parametresi $p$ nin tam olarak bilindiği kabul edilmiştir. Halbuki uygulamada, şekil parametresi, tam olarak bilinmez ve her ne kadar Q-Q grafikleri ya da uyum iyiliği testleri yardımıyla tam olarak belirlenmeye çalışılsa da çoğu kez yanlış belirlenir. Öte yandan veri, belirlenmesi zor aykırı değerler içerebilir ya da kirlenmiş olabilir. Tüm bu durumlar, geliştirilen test istatistiklerinin, varsayılmış bir modelden sapmalar olduğunda I. tip hatasının ve gücünün ne yönde etkileneceği sorusunu doğal olarak akla getirir. Bu sorunun cevabı $F^*$ ve $F^{**}$ testlerinin istatistiksel olarak sağlamlığı kavramını gündeme taşır.

**İstatistiksel Sağlamlık Kriteri (Criterion Robustness)** Bir test istatistiğinin I .tip hatası varsayılan modelin makul alternatiflerinde önceden belirlenen $\alpha$ değerinden çok fazla büyük değilse bu test istatistiğine I. tip hata bakımından istatistiksel olarak sağlamdır denir.

**İstatistiksel Sağlamlığın Etkinliği (Efficiency Robustness)** Test istatistiğinin gücü, varsayılan bir model için yüksek; varsayılan modelin makul alternatifleri altında oldukça yüksek ise bu test istatistiğine etkinlik bakımından istatistiksel olarak sağlamdır denir.

Bu tanımlar Box [41], Box ve Tiao [42] tarafından verilmiştir. Ayrıca Tiku ve ark. [15] (önsöz), Tiku ve Akkaya [16] (bölüm 1 ve bölüm 7) kitaplarında bu tanımları, farklı dağılım ailelerini göz önüne alarak, detaylı bir şekilde incelenmişlerdir.

$F$, $F^*$ ve $F^{**}$ testlerinin yukarıdaki tanımlar açısından istatistiksel sağlamlığını incelemek için ortak değişkenli $2^2$, $2^3$ ve $2^4$ modellerinde hata terimlerinin gerçek dağılımının $p = 3.5$ şekil parametreli ve $\sigma = 1$ olan LTS olduğu varsayılmıştır. Bu hata dağılımının makul alternatifleri aşağıdaki dağılımlar olarak alınmıştır ve her bir durum için bölüm 5.2.1 ve 5.2.2 deki şekilde test istatistiklerinin I. tip hataları ve güçleri $n = 10$ için hesaplanmıştır. Sonuçlar Çizelge 5.10-5.12 de verilmiştir.

**Model I** $LTS(2, \sigma)$

**Model II** $LTS(2.5, \sigma)$

**Model III** *Dixon'nun Aykırı Değer Modeli*

$$(n-1)LTS(3.5, \sigma) + rLTS(3.5, 4\sigma), \quad r = [|0.5 + 0.1n|]$$

Bu modelde $(n-1)$ tane gözlem $LTS(3.5, \sigma)$ den gelirken, (hangisi olduğu bilinmeyen) $r$ tane gözlem $LTS(3.5, 4\sigma)$ dağılımından gelmektedir.

**Model IV** *Karma Model*

$$0.90LTS(3.5, \sigma) + 0.10LTS(3.5, 4\sigma)$$

**Model V** *Bulaşık Model*

$$0.90LTS(3.5, \sigma) + 0.10Uniform(-0.5, 0.5)$$

Çizelge 5.10-5.12 de yer alan sonuçlar, $F^*$ ve $F^{**}$ test istatistiklerinin yukarıda bahsedilen her iki kriter bakımından da klasik $F$ test istatistiğinden istatistiksel olarak daha sağlam olduğunu göstermektedir.

$F^*$ ve $F^{**}$ testlerinin $F$ testine göre buradaki üstünlüğü, formülü (3.15) denklemlerinde verilen $\theta_k$ ağırlıklarının orta değere kadar artan sonra azalan yani şemsiye özelliğine sahip olmasından kaynaklanmaktadır. $\theta_k$ ağırlıklarının bu özelliği aykırı değerlere az ağırlık vererek onların etkisini azaltmaktadır.

Çizelge 5.10: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde test istatistiklerinin istatistiksel sağlamlığı

| | | Gerçek Model | | | Alternatifler | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Model I | | | Model II | | |
| $d$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
| 0 | A | 0.047 | 0.045 | 0.041 | 0.045 | 0.034 | 0.031 | 0.047 | 0.041 | 0.039 |
| | B | 0.047 | 0.042 | 0.038 | 0.046 | 0.034 | 0.031 | 0.047 | 0.041 | 0.038 |
| | AB | 0.044 | 0.039 | 0.035 | 0.044 | 0.034 | 0.031 | 0.045 | 0.037 | 0.034 |
| 0.10 | A | 0.094 | 0.092 | 0.087 | 0.107 | 0.096 | 0.091 | 0.092 | 0.088 | 0.083 |
| | B | 0.092 | 0.093 | 0.088 | 0.104 | 0.097 | 0.091 | 0.096 | 0.091 | 0.086 |
| | AB | 0.095 | 0.095 | 0.089 | 0.102 | 0.094 | 0.089 | 0.099 | 0.091 | 0.087 |
| 0.20 | A | 0.23 | 0.24 | 0.23 | 0.27 | 0.30 | 0.29 | 0.24 | 0.26 | 0.25 |
| | B | 0.22 | 0.24 | 0.23 | 0.27 | 0.30 | 0.29 | 0.24 | 0.26 | 0.24 |
| | AB | 0.22 | 0.24 | 0.23 | 0.27 | 0.30 | 0.29 | 0.24 | 0.26 | 0.25 |
| 0.30 | A | 0.42 | 0.47 | 0.46 | 0.49 | 0.58 | 0.56 | 0.43 | 0.50 | 0.49 |
| | B | 0.42 | 0.47 | 0.46 | 0.49 | 0.58 | 0.57 | 0.44 | 0.52 | 0.50 |
| | AB | 0.41 | 0.47 | 0.46 | 0.49 | 0.59 | 0.57 | 0.44 | 0.51 | 0.50 |
| 0.40 | A | 0.63 | 0.72 | 0.71 | 0.69 | 0.82 | 0.81 | 0.66 | 0.76 | 0.75 |
| | B | 0.63 | 0.71 | 0.70 | 0.69 | 0.82 | 0.80 | 0.65 | 0.75 | 0.74 |
| | AB | 0.63 | 0.71 | 0.70 | 0.69 | 0.81 | 0.80 | 0.65 | 0.76 | 0.74 |
| 0.50 | A | 0.79 | 0.88 | 0.87 | 0.84 | 0.94 | 0.93 | 0.80 | 0.90 | 0.89 |
| | B | 0.79 | 0.88 | 0.87 | 0.84 | 0.94 | 0.93 | 0.80 | 0.90 | 0.89 |
| | AB | 0.79 | 0.87 | 0.87 | 0.83 | 0.94 | 0.93 | 0.80 | 0.91 | 0.90 |
| 0.60 | A | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.91 | 0.98 | 0.98 | 0.91 | 0.97 | 0.97 |
| | B | 0.90 | 0.96 | 0.95 | 0.92 | 0.98 | 0.98 | 0.90 | 0.97 | 0.97 |
| | AB | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.91 | 0.98 | 0.98 | 0.90 | 0.97 | 0.97 |
| 0.70 | A | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | B | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | AB | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.99 | 0.99 |
| | | Model III | | | Model IV | | | Model V | | |
| 0 | A | 0.048 | 0.045 | 0.042 | 0.050 | 0.037 | 0.034 | 0.045 | 0.040 | 0.037 |
| | B | 0.047 | 0.045 | 0.041 | 0.050 | 0.039 | 0.036 | 0.046 | 0.044 | 0.040 |
| | AB | 0.050 | 0.045 | 0.045 | 0.052 | 0.041 | 0.037 | 0.045 | 0.044 | 0.040 |
| 0.10 | A | 0.090 | 0.087 | 0.080 | 0.087 | 0.072 | 0.067 | 0.095 | 0.091 | 0.086 |
| | B | 0.094 | 0.093 | 0.087 | 0.083 | 0.072 | 0.067 | 0.091 | 0.090 | 0.085 |
| | AB | 0.089 | 0.089 | 0.086 | 0.086 | 0.074 | 0.069 | 0.101 | 0.096 | 0.091 |
| 0.20 | A | 0.23 | 0.25 | 0.23 | 0.18 | 0.19 | 0.18 | 0.23 | 0.25 | 0.23 |
| | B | 0.22 | 0.24 | 0.23 | 0.20 | 0.19 | 0.18 | 0.22 | 0.23 | 0.23 |
| | AB | 0.23 | 0.24 | 0.24 | 0.19 | 0.19 | 0.19 | 0.22 | 0.24 | 0.23 |
| 0.30 | A | 0.42 | 0.47 | 0.46 | 0.34 | 0.37 | 0.36 | 0.42 | 0.47 | 0.46 |
| | B | 0.42 | 0.46 | 0.45 | 0.34 | 0.38 | 0.37 | 0.41 | 0.47 | 0.45 |
| | AB | 0.42 | 0.47 | 0.46 | 0.35 | 0.38 | 0.37 | 0.42 | 0.48 | 0.47 |
| 0.40 | A | 0.64 | 0.72 | 0.72 | 0.52 | 0.59 | 0.58 | 0.62 | 0.71 | 0.70 |
| | B | 0.62 | 0.71 | 0.70 | 0.53 | 0.60 | 0.59 | 0.63 | 0.73 | 0.71 |
| | AB | 0.63 | 0.72 | 0.70 | 0.53 | 0.61 | 0.59 | 0.63 | 0.72 | 0.71 |
| 0.50 | A | 0.80 | 0.88 | 0.87 | 0.69 | 0.80 | 0.79 | 0.79 | 0.88 | 0.87 |
| | B | 0.80 | 0.88 | 0.88 | 0.69 | 0.79 | 0.78 | 0.80 | 0.88 | 0.87 |
| | AB | 0.79 | 0.88 | 0.87 | 0.69 | 0.79 | 0.79 | 0.79 | 0.88 | 0.87 |
| 0.60 | A | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.81 | 0.91 | 0.90 | 0.90 | 0.96 | 0.96 |
| | B | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.82 | 0.91 | 0.90 | 0.90 | 0.96 | 0.96 |
| | AB | 0.90 | 0.96 | 0.96 | 0.82 | 0.91 | 0.90 | 0.90 | 0.96 | 0.96 |
| 0.70 | A | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.90 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | B | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.90 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |
| | AB | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.90 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.99 | 0.99 |

Çizelge 5.11: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^3$ modelinde test istatistiklerinin istatistiksel sağlamlığı

| | | Gerçek Model | | | Alternatifler | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Model I | | | Model II | | |
| $d$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
| 0 | A | 0.047 | 0.052 | 0.051 | 0.047 | 0.032 | 0.030 | 0.047 | 0.038 | 0.036 |
| | AB | 0.047 | 0.049 | 0.048 | 0.045 | 0.031 | 0.030 | 0.048 | 0.037 | 0.035 |
| | ABC | 0.046 | 0.051 | 0.050 | 0.050 | 0.033 | 0.031 | 0.052 | 0.038 | 0.037 |
| 0.10 | A | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.16 | 0.16 | 0.15 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| | AB | 0.14 | 0.14 | 0.13 | 0.16 | 0.16 | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.14 |
| | ABC | 0.15 | 0.14 | 0.14 | 0.17 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.14 |
| 0.20 | A | 0.40 | 0.43 | 0.43 | 0.47 | 0.54 | 0.53 | 0.42 | 0.47 | 0.46 |
| | AB | 0.40 | 0.43 | 0.42 | 0.46 | 0.53 | 0.52 | 0.42 | 0.47 | 0.46 |
| | ABC | 0.40 | 0.43 | 0.42 | 0.49 | 0.53 | 0.52 | 0.44 | 0.47 | 0.46 |
| 0.30 | A | 0.72 | 0.77 | 0.77 | 0.76 | 0.87 | 0.86 | 0.74 | 0.81 | 0.81 |
| | AB | 0.73 | 0.78 | 0.77 | 0.76 | 0.87 | 0.87 | 0.73 | 0.81 | 0.80 |
| | ABC | 0.72 | 0.77 | 0.77 | 0.79 | 0.87 | 0.86 | 0.76 | 0.81 | 0.81 |
| 0.40 | A | 0.91 | 0.95 | 0.95 | 0.92 | 0.98 | 0.98 | 0.91 | 0.97 | 0.96 |
| | AB | 0.91 | 0.95 | 0.95 | 0.92 | 0.98 | 0.98 | 0.91 | 0.97 | 0.96 |
| | ABC | 0.91 | 0.95 | 0.95 | 0.94 | 0.98 | 0.98 | 0.93 | 0.97 | 0.96 |
| 0.50 | A | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 1.00 | 1.00 |
| | AB | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 1.00 | 1.00 |
| | ABC | 0.98 | 1.00 | 0.99 | 0.98 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 1.00 | 1.00 |
| | | Model III | | | Model IV | | | Model V | | |
| 0 | A | 0.061 | 0.044 | 0.043 | 0.050 | 0.037 | 0.034 | 0.054 | 0.045 | 0.044 |
| | AB | 0.058 | 0.044 | 0.042 | 0.048 | 0.036 | 0.035 | 0.051 | 0.047 | 0.046 |
| | ABC | 0.057 | 0.044 | 0.043 | 0.050 | 0.038 | 0.036 | 0.043 | 0.042 | 0.041 |
| 0.10 | A | 0.14 | 0.13 | 0.13 | 0.12 | 0.11 | 0.10 | 0.15 | 0.14 | 0.14 |
| | AB | 0.15 | 0.14 | 0.13 | 0.12 | 0.11 | 0.11 | 0.15 | 0.15 | 0.14 |
| | ABC | 0.15 | 0.14 | 0.13 | 0.12 | 0.11 | 0.10 | 0.14 | 0.14 | 0.13 |
| 0.20 | A | 0.41 | 0.42 | 0.41 | 0.33 | 0.34 | 0.34 | 0.43 | 0.45 | 0.44 |
| | AB | 0.41 | 0.42 | 0.41 | 0.33 | 0.34 | 0.33 | 0.42 | 0.43 | 0.43 |
| | ABC | 0.41 | 0.42 | 0.42 | 0.33 | 0.34 | 0.34 | 0.43 | 0.44 | 0.44 |
| 0.30 | A | 0.72 | 0.76 | 0.76 | 0.62 | 0.67 | 0.66 | 0.73 | 0.77 | 0.76 |
| | AB | 0.72 | 0.77 | 0.76 | 0.62 | 0.66 | 0.65 | 0.76 | 0.78 | 0.77 |
| | ABC | 0.72 | 0.76 | 0.75 | 0.62 | 0.67 | 0.66 | 0.75 | 0.77 | 0.76 |
| 0.40 | A | 0.91 | 0.95 | 0.94 | 0.84 | 0.89 | 0.88 | 0.92 | 0.95 | 0.95 |
| | AB | 0.91 | 0.95 | 0.94 | 0.85 | 0.89 | 0.89 | 0.94 | 0.96 | 0.95 |
| | ABC | 0.91 | 0.94 | 0.94 | 0.84 | 0.89 | 0.89 | 0.94 | 0.95 | 0.95 |
| 0.50 | A | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.98 | 0.98 | 0.98 | 0.99 | 0.99 |
| | AB | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.98 | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| | ABC | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.98 | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |

Çizelge 5.12: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^4$ modelinde test istatistiklerinin istatistiksel sağlamlığı

| | | Gerçek Model | | | Alternatifler | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Model I | | | Model II | | |
| $d$ | | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ | $F$ | $F^*$ | $F^{**}$ |
| 0 | A | 0.050 | 0.045 | 0.044 | 0.042 | 0.023 | 0.023 | 0.051 | 0.038 | 0.038 |
| | AB | 0.048 | 0.041 | 0.039 | 0.050 | 0.029 | 0.029 | 0.050 | 0.037 | 0.036 |
| | ABC | 0.047 | 0.040 | 0.039 | 0.044 | 0.025 | 0.025 | 0.049 | 0.036 | 0.036 |
| | ABCD | 0.051 | 0.043 | 0.042 | 0.048 | 0.026 | 0.026 | 0.048 | 0.037 | 0.036 |
| 0.10 | A | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.26 | 0.28 | 0.27 | 0.25 | 0.25 | 0.24 |
| | AB | 0.25 | 0.24 | 0.24 | 0.27 | 0.28 | 0.27 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| | ABC | 0.25 | 0.25 | 0.24 | 0.27 | 0.28 | 0.28 | 0.25 | 0.26 | 0.25 |
| | ABCD | 0.25 | 0.24 | 0.24 | 0.27 | 0.28 | 0.28 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| 0.20 | A | 0.70 | 0.74 | 0.73 | 0.73 | 0.83 | 0.83 | 0.71 | 0.78 | 0.77 |
| | AB | 0.71 | 0.73 | 0.73 | 0.75 | 0.84 | 0.83 | 0.70 | 0.77 | 0.77 |
| | ABC | 0.71 | 0.74 | 0.73 | 0.75 | 0.83 | 0.83 | 0.71 | 0.77 | 0.77 |
| | ABCD | 0.71 | 0.73 | 0.72 | 0.75 | 0.84 | 0.83 | 0.72 | 0.77 | 0.77 |
| 0.30 | A | 0.96 | 0.98 | 0.98 | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.98 | 0.98 |
| | AB | 0.96 | 0.98 | 0.97 | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.99 | 0.98 |
| | ABC | 0.96 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.99 | 0.99 | 0.95 | 0.98 | 0.98 |
| | ABCD | 0.96 | 0.98 | 0.97 | 0.95 | 0.99 | 0.99 | 0.96 | 0.98 | 0.98 |
| | | Model III | | | Model IV | | | Model V | | |
| 0 | A | 0.049 | 0.041 | 0.040 | 0.046 | 0.037 | 0.037 | 0.051 | 0.043 | 0.043 |
| | AB | 0.046 | 0.041 | 0.040 | 0.051 | 0.039 | 0.039 | 0.052 | 0.044 | 0.044 |
| | ABC | 0.046 | 0.040 | 0.040 | 0.047 | 0.036 | 0.036 | 0.048 | 0.041 | 0.040 |
| | ABCD | 0.050 | 0.042 | 0.041 | 0.048 | 0.034 | 0.034 | 0.048 | 0.040 | 0.04 |
| 0.10 | A | 0.24 | 0.25 | 0.24 | 0.18 | 0.17 | 0.17 | 0.25 | 0.25 | 0.25 |
| | AB | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.18 | 0.17 | 0.17 | 0.24 | 0.24 | 0.24 |
| | ABC | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.17 | 0.18 | 0.17 | 0.24 | 0.25 | 0.25 |
| | ABCD | 0.25 | 0.25 | 0.24 | 0.17 | 0.17 | 0.17 | 0.24 | 0.25 | 0.24 |
| 0.20 | A | 0.69 | 0.73 | 0.73 | 0.52 | 0.56 | 0.56 | 0.69 | 0.73 | 0.73 |
| | AB | 0.70 | 0.74 | 0.74 | 0.52 | 0.56 | 0.56 | 0.70 | 0.73 | 0.73 |
| | ABC | 0.71 | 0.73 | 0.73 | 0.52 | 0.56 | 0.55 | 0.71 | 0.74 | 0.73 |
| | ABCD | 0.71 | 0.73 | 0.73 | 0.53 | 0.56 | 0.56 | 0.71 | 0.73 | 0.73 |
| 0.30 | A | 0.95 | 0.97 | 0.97 | 0.85 | 0.90 | 0.90 | 0.95 | 0.97 | 0.97 |
| | AB | 0.96 | 0.97 | 0.97 | 0.84 | 0.89 | 0.89 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |
| | ABC | 0.96 | 0.97 | 0.97 | 0.85 | 0.89 | 0.89 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |
| | ABCD | 0.96 | 0.98 | 0.98 | 0.84 | 0.89 | 0.89 | 0.96 | 0.97 | 0.97 |

### 5.2.4. Eğim Testlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde (1.7) modelindeki eğim parametresi $\beta$ nın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını test etmek için normallik varsayımı altında kullanılan (1.34) ile verilen test istatistiği ve UEÇO yöntemine dayalı olarak geliştirilen (3.41) test istatistiklerinin I. tip hataları, güçleri ve istatistiksel olarak sağlamlıkları Monte-Carlo simulasyonları ile araştırılmıştır.

Simulasyon çalışması Bölüm 5.2.1, 5.2.2 ve 5.2.3 te anlatılan ana çerçeve ile $n = 10$ olması durumunda yapılmıştır. I. tip hata için anlam düzeyi $\alpha = 0.05$ belirlenmiştir. Testlerin gücü karşılaştırılırken eğim katsayısı $\beta$ eğim parametresine sabit $d$ değerleri 0, 0.20, 0.40, 0.60 ve 0.80 olarak eklenmiştir. İstatistiksel sağlamlık araştırılırken Bölüm 5.2.3 te kullanılan Model I, Model II, Model III, Model IV ve Model V kullanılmıştır. Bu bölümde, ortak değişkenli $2^3$ ve $2^4$ modeller için benzer sonuçlar elde edildiğinden, sonuçlar sadece ortak değişkenli $2^2$ model için verilmiştir. Simulasyon çalışmasının sonuçları Çizelge 5.13-5.5.15 te sunulmuştur.

Sonuçlar $F_\beta^*$ testinin I. tip hatasının $\alpha = 0.05$ düzeyinde olduğunu göstermektedir. $d$ nin büyüyen değerleri için $F_\beta^*$ testinin gücü, $F_\beta$ testininkinden daha büyük olmaktadır. Dolayısıyla $F_\beta^*$ normallik varsayımı sağlanmadığında $F_\beta$ testinden daha güçlü bir testtir ve dağılımı küçük örneklem hacimleri için de $\boldsymbol{F}$ tir. Ayrıca Çizelge 5.15 ten $F_\beta^*$ testinin $F_\beta$ testinden istatistiksel olarak daha sağlam olduğunu göstermektedir.

Çizelge 5.13: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğim testlerinin I. tip hatası

| $n$ | | $p=2$ | $p=2.5$ | $p=3.5$ | $p=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $F_\beta$ | 0.051 | 0.051 | 0.050 | 0.046 |
| | $F_\beta^*$ | 0.048 | 0.035 | 0.045 | 0.036 |
| 10 | $F_\beta$ | 0.049 | 0.050 | 0.051 | 0.051 |
| | $F_\beta^*$ | 0.042 | 0.039 | 0.043 | 0.046 |
| 15 | $F_\beta$ | 0.046 | 0.049 | 0.051 | 0.046 |
| | $F_\beta^*$ | 0.043 | 0.039 | 0.041 | 0.041 |
| 20 | $F_\beta$ | 0.050 | 0.050 | 0.048 | 0.051 |
| | $F_\beta^*$ | 0.052 | 0.041 | 0.043 | 0.050 |

Çizelge 5.14: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğim testlerinin gücü

| | $p=2$ | | $p=2.5$ | | $p=3.5$ | | $p=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ |
| 0 | 0.049 | 0.042 | 0.050 | 0.039 | 0.051 | 0.043 | 0.051 | 0.046 |
| 0.2 | 0.27 | 0.31 | 0.24 | 0.24 | 0.22 | 0.20 | 0.22 | 0.21 |
| 0.4 | 0.71 | 0.79 | 0.68 | 0.71 | 0.65 | 0.65 | 0.63 | 0.63 |
| 0.6 | 0.93 | 0.97 | 0.91 | 0.94 | 0.91 | 0.92 | 0.91 | 0.91 |
| 0.8 | 0.98 | 0.99 | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |

Çizelge 5.15: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğim testlerinin istatistiksel sağlamlığı

| | Gerçek Model | | Model I | | Model II | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ |
| 0 | 0.051 | 0.043 | 0.049 | 0.030 | 0.051 | 0.034 |
| 0.2 | 0.22 | 0.20 | 0.28 | 0.26 | 0.23 | 0.22 |
| 0.4 | 0.65 | 0.65 | 0.71 | 0.76 | 0.66 | 0.69 |
| 0.6 | 0.91 | 0.92 | 0.92 | 0.96 | 0.92 | 0.94 |
| 0.8 | 0.99 | 0.99 | 0.97 | 0.99 | 0.98 | 0.99 |
| | Model III | | ModelIV | | Model V | |
| $d$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ | $F_\beta$ | $F_\beta^*$ |
| 0 | 0.083 | 0.051 | 0.080 | 0.048 | 0.111 | 0.100 |
| 0.2 | 0.35 | 0.28 | 0.35 | 0.27 | 0.10 | 0.09 |
| 0.4 | 0.74 | 0.69 | 0.74 | 0.69 | 0.35 | 0.36 |
| 0.6 | 0.94 | 0.92 | 0.93 | 0.92 | 0.66 | 0.69 |
| 0.8 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.85 | 0.88 |

### 5.2.5. Eğimlerin Homojenliği

Denklem (1.7) modelinde hata terimlerinin normal dağılıma sahip olması durumunda A etkenine ilişkin eğim parametresinin homojen olmadığı (4.1) modelindeki $\beta_1$ ve $\beta_2$ parametrelerinin homojen olup olmadığını test etmek için normallik varsayımı altında kullanılan $F_h$ ile hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olması durumunda kullanılan $F_h^*$ test istatistiklerinin birinci tip hataları, güçleri ve istatistiksel sağlamlığı araştırılmıştır. Ortak değişkenli $2^3$ ve $2^4$ modeller için benzer sonuçlar elde edildiğinden, sonuçlar sadece ortak değişkenli $2^2$ model için verilmiştir. Simulasyon çalışması Bölüm 5.2.1, 5.2.2 ve 5.2.3 te anlatılan ana çerçeve ile $n = 10$ olması durumunda yapılmıştır. I. tip hata için anlam düzeyi $\alpha = 0.05$ belirlenmiştir. Testlerin gücü karşılaştırılırken eğim katsayısı $\beta_1$ eğim parametresine sabit $d$ değerleri 0, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1, 1.2, 1.4 ve 1.6 eklenerek $H_1$ hipotezi oluşturulmuştur. İstatistiksel sağlamlık araştırılırken Bölüm 5.2.3 te kullanılan Model I, Model II, Model III, Model IV ve Model V kullanılmıştır. Simulasyon çalışmasının sonuçları Çizelge 5.16-5.18 de verilmiştir.

Tüm sonuçlar, UEÇO yöntemine dayalı $F_h^*$ test istatistiğinin dağılımının küçük örneklem hacimleri için $\boldsymbol{F}$, gücünün klasik $F_h$ testinden daha yüksek olduğunu ve her iki sağlamlık kriteri açısından da istatistiksel olarak daha sağlam olduğunu göstermektedir.

**Uyarı 5.2.1.** *Bu tez çalışmasında yapılan analizlerde LTS dağılımının şekil parametresi p nin bilindiği varsayılmıştır. p nin de diğer parametreler gibi tahmin edilmesi gerektiği akla gelebilecek en doğal sorudur. Ancak, şekil parametrelerini tahmin etmek çoğu zaman zor bir iştir; çünkü tahmin edicilerin yanını ve varyansını azaltmak için büyük örneklem hacimleri gerekmektedir. Bu nedenle şekil parametresinin biliniyor kabul edilmesi etkin tahmin ediciler ve güçlü, istatistiksel olarak sağlam test istatistiklerinin geliştirilmesinde şekil parametresinin tahmin edicisini kullanmaktan daha yararlıdır (Şenoğlu ve Tiku [4],Tiku ve ark.[45]).*

Çizelge 5.16: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğimlerin homojenliği testlerinin I. tip hatası

| | | 2 | 2.5 | 3.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $F_h$ | 0.049 | 0.050 | 0.050 | 0.048 |
| | $F_h^*$ | 0.068 | 0.039 | 0.043 | 0.039 |
| 10 | $F_h$ | 0.050 | 0.051 | 0.048 | 0.048 |
| | $F_h^*$ | 0.047 | 0.043 | 0.043 | 0.045 |
| 15 | $F_\beta$ | 0.052 | 0.050 | 0.048 | 0.052 |
| | F* | 0.050 | 0.042 | 0.043 | 0.048 |
| 20 | $F_h$ | 0.048 | 0.049 | 0.049 | 0.050 |
| | $F_h^*$ | 0.048 | 0.046 | 0.043 | 0.047 |

Çizelge 5.17: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğimlerin homojenliği testlerinin gücü

| | $p = 2$ | | $p = 2.5$ | | $p = 3.5$ | | $p = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ |
| 0 | 0.050 | 0.047 | 0.051 | 0.043 | 0.048 | 0.043 | 0.048 | 0.045 |
| 0.2 | 0.10 | 0.11 | 0.09 | 0.08 | 0.09 | 0.08 | 0.09 | 0.09 |
| 0.4 | 0.26 | 0.29 | 0.23 | 0.23 | 0.21 | 0.21 | 0.21 | 0.21 |
| 0.6 | 0.48 | 0.55 | 0.43 | 0.44 | 0.41 | 0.41 | 0.40 | 0.40 |
| 0.8 | 0.69 | 0.76 | 0.65 | 0.66 | 0.62 | 0.63 | 0.62 | 0.62 |
| 1.0 | 0.83 | 0.89 | 0.81 | 0.84 | 0.79 | 0.80 | 0.79 | 0.79 |
| 1.2 | 0.91 | 0.95 | 0.91 | 0.93 | 0.91 | 0.91 | 0.90 | 0.90 |
| 1.4 | 0.95 | 0.98 | 0.95 | 0.97 | 0.96 | 0.96 | 0.96 | 0.96 |
| 1.6 | 0.97 | 0.99 | 0.98 | 0.99 | 0.98 | 0.99 | 0.98 | 0.99 |

Çizelge 5.18: Hata terimlerinin dağılımının LTS olması durumunda ortak değişkenli $2^2$ modelinde eğimlerin homojenliği testlerinin istatistiksel sağlamlığı

| | Gerçek Model | | Model I | | Model II | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ |
| 0 | 0.048 | 0.043 | 0.050 | 0.033 | 0.053 | 0.039 |
| 0.2 | 0.09 | 0.08 | 0.10 | 0.08 | 0.09 | 0.08 |
| 0.4 | 0.21 | 0.21 | 0.25 | 0.24 | 0.23 | 0.22 |
| 0.6 | 0.41 | 0.41 | 0.48 | 0.49 | 0.44 | 0.44 |
| 0.8 | 0.62 | 0.63 | 0.70 | 0.73 | 0.65 | 0.66 |
| 1.0 | 0.79 | 0.80 | 0.83 | 0.87 | 0.81 | 0.83 |
| 1.2 | 0.91 | 0.91 | 0.91 | 0.94 | 0.91 | 0.93 |
| 1.4 | 0.96 | 0.96 | 0.95 | 0.98 | 0.95 | 0.97 |
| 1.6 | 0.98 | 0.99 | 0.97 | 0.99 | 0.98 | 0.99 |
| | Model III | | ModelIV | | Model V | |
| $d$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ | $F_h$ | $F_h^*$ |
| 0 | 0.051 | 0.040 | 0.054 | 0.042 | 0.051 | 0.047 |
| 0.2 | 0.08 | 0.07 | 0.08 | 0.07 | 0.09 | 0.08 |
| 0.4 | 0.19 | 0.18 | 0.18 | 0.17 | 0.21 | 0.20 |
| 0.6 | 0.34 | 0.34 | 0.34 | 0.33 | 0.40 | 0.40 |
| 0.8 | 0.55 | 0.56 | 0.53 | 0.54 | 0.62 | 0.61 |
| 1.0 | 0.70 | 0.72 | 0.71 | 0.73 | 0.80 | 0.80 |
| 1.2 | 0.84 | 0.86 | 0.83 | 0.85 | 0.90 | 0.91 |
| 1.4 | 0.91 | 0.93 | 0.91 | 0.93 | 0.96 | 0.96 |
| 1.6 | 0.96 | 0.97 | 0.96 | 0.97 | 0.98 | 0.99 |

# 6. UYGULAMA

Bu bölümde Wildth ve Ahtola'nın [10] (sayfa 81) normallik varsayımı altında çözdüğü iki etkenli tek ortak değişkene sahip ANCOVA modeline ilişkin problem, UEÇO yöntemiyle çözülmüştür. UEÇO ile elde edilen sonuçların Wildth ve Ahtola'nın [10] elde ettiği sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür.

***Problem***

Kırsal bir bölgede yol üstünde yer alan alkol depolarının varlığı (A) ile alkol satma lisansları olan lokantaların varlığının (B) trafik kazalarının sayısı ($y$ bağımlı değişkeni) üzerinde önemli derecede bir etkisi olup olmadığı araştırılmaktadır.

Bunun yanı sıra yol üstünde yer alan ve alkol bulunduran yapıların (depo ya da lokanta) sayılarının ($x$ ortak değişkeni) da trafik kazalarına etkisi göz önüne alınmıştır.

***Model***

Araştırmada A etkeni yol üzerindeki alkol depolarının varlığı (evet/hayır), B etkeni alkol satmaya lisanslı lokantaların varlığı (evet/hayır) ve AB etkileşimi de yol üstünde yer alan hem alkol satmaya hem depolamaya lisanslı olan yapıların varlığı (evet/hayır) dır. Bunun yanı sıra $x$ ortak değişkeni de yol üstünde yer alan ve alkol bulunduran yapıların (depo ya da lokanta) sayılarıdır. Araştırmaya ilişkin veri seti Çizelge 6.1 de verilmiştir.

Yukarıdaki bilgiler göz önüne alındığında araştırma ortak değişkene sahip $2^2$ faktöriyel tasarımla çözülmelidir. Bu durumda model denklemi

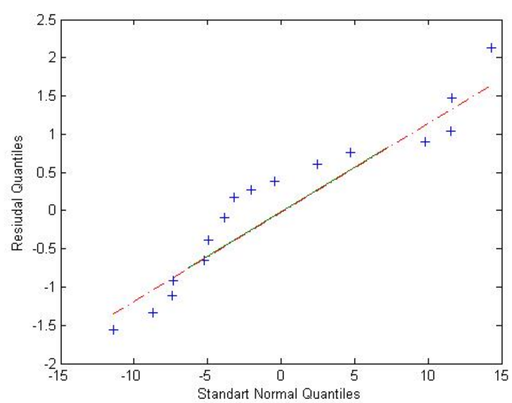
$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \bar{x}) + \varepsilon_{ijk},$$

$$i = 1,2 \quad ; \quad j = 1,2 \quad ; \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

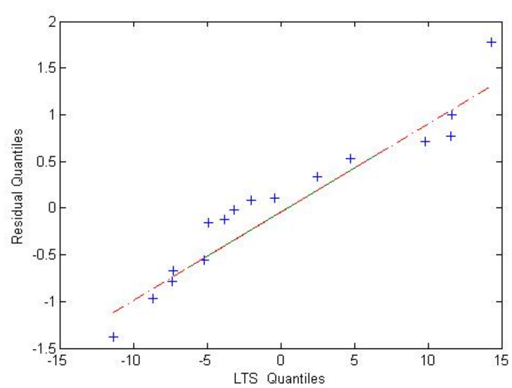
dir.

Çizelge 6.1: Uygulama-veri seti

| | A | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Düşük Düzey | | Yüksek Düzey | |
| B | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| Düşük Düzey | 206 | 226 | 248 | 229 |
| | 239 | 229 | 208 | 190 |
| | 217 | 215 | 225 | 195 |
| | 177 | 188 | 239 | 202 |
| Yüksek Düzey | 252 | 226 | 190 | 177 |
| | 228 | 196 | 261 | 225 |
| | 240 | 198 | 194 | 167 |
| | 246 | 206 | 217 | 176 |




Şekil 6.1: Standart Normal Q-Q Grafiği




Şekil 6.2: LTS Q-Q Grafiği

Çizelge 6.2: Normalik varsayımına dayalı ANCOVA çizelgesi

| Kaynak | SS | sd | MSE | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 696.0416 | 1 | 696.0416 | 7.7055 |
| B | 1427.4155 | 1 | 1427.4155 | 15.8021 |
| AB | 462.3342 | 1 | 462.3342 | 5.1182 |
| Hata | 993.6388 | 11 | 90.3308 | |
| Toplam | 3579.4300 | 14 | | |

Çizelge 6.3: UEÇO yöntemine dayalı ANCOVA çizelgesi

| Kaynak | SS | sd | MSE | $F^*$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 527.0131 | 1 | 527.0131 | 6.8999 |
| B | 1165.1714 | 1 | 1165.1714 | 15.2549 |
| AB | 502.2686 | 1 | 502.2686 | 6.5759 |
| Hata | 76.3802 | 11 | 6.9437 | |
| Toplam | 2270.8334 | 14 | | |

***Analiz***

Wildth ve Ahtola [10] bu problemi normallik varsayımı altında çözmüşler ve Çizelge 6.2 deki sonuçları elde etmişlerdir.

Ancak, normallik varsayımı altında yapılan bu çözümde kalıntıların standart normal Q-Q grafiği ile $p = 5$ şekil parametresine sahip LTS Q-Q grafiği çizdirildiğinde $p = 5$ şekil parametreli LTS dağılımının hatalara daha iyi uyduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle aynı analiz, ayrıntıları üçüncü bölümde detaylı bir şekilde anlatılan, UEÇO yöntemi ile çözülmüştür. UEÇO yöntemine dayalı sonuçlar Çizelge 6.3 te verilmiştir. Çizelge 6.4 te eğim parametresine ilişkin hem normallik varsayımı altında hem UEÇO yöntemine dayalı sonuçlar sunulmuştur.

***Sonuçlar***

$\alpha = 0.05$ önem düzeyinde, 1 ve 11 serbestlik derecesindeki kritik değer 4.84 tür.

Çizelge 6.2 ve Çizelge 6.3 ten $F$ ve $F^*$ test istatistiklerinin her ikisi de A, B etkenleri ile AB etkileşimlerinin istatistiksel olarak önemli olduğu sonucunu

Çizelge 6.4: Eğim parametresi için sonuçlar

| Eğim | Normallik | UEÇO |
|---|---|---|
| Tahminci | 0.7477 | 0.7451 |
| Test İst. | 39.6666 | 4.6804 |
| $H_0$ Red/Kabul | 0 | 1 |

vermektedir. Bir başka deyişle her iki test istatistiği de A, B ve AB etkileşimine ilişkin sıfır hipotezini reddetmiştir. Ancak, UEÇO yöntemiyle elde edilen $SS$, ve $MSE$ değerlerinin normallik varsayımı ile elde edilenlerden daha küçük olduğu görülmektedir. Bu da UEÇO yönteminin normal teoriden daha güvenilir olduğunu gösterir.

Ayrıca Çizelge 6.4 eğim parametresi $\beta$ nın EKK ve UEÇO tahminleri ile $F_\beta$ ile $F_\beta^*$ testlerinin sonuçları verilmiştir.

Normallik varsayımı altında eğim parametresi istatistiksel olarak anlamlı iken UEÇO yönteminde istatistiksel olarak anlamsız bulunmuştur.

UEÇO yöntemi dikkate alındığnda bu veri seti için (1.7) modelini kullanmak yerine ortak değişken içermeyen $2^2$ faktöriyel tasarım modelini kullanmak daha uygundur.

$F^{**}$ test istatistiği ile de benzer sonuçlar elde edildiğinden detaylar burada verilmemiştir.

# 7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Faktöriyel ANCOVA modellerinde hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olması durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. EKK tahmin edicilerinin etkinliklerinin azaldığı gözlemlenmiştir.
2. EÇO tahmin edicileri analitik olarak bulunamadığından UEÇO yöntemiyle parametrelerin tahmin edicileri analitik olarak bulunmuştur.
3. UEÇO tahmin edicilerinin EKK tahmin edicilerinden daha etkin olduğu gösterilmiştir.
4. UEÇO tahmin edicilerine dayalı olarak geliştirilen $F^*$ test istatistiklerinin büyük örneklem hacimleri için $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu kanıtlanmıştır.
5. Küçük örneklem hacimleri için de $F^*$ test istatistiklerinin dağılımının $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu simulasyon çalışması ile gösterilmiştir.
6. İndirgenmiş model-tam model hata kareler toplamına dayalı olarak geliştirilen $F^{**}$ test istatistiklerinin de büyük örneklem hacimleri için $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu kanıtlanmıştır.
7. Küçük örneklem hacimleri için de $F^{**}$ test istatistiklerinin dağılımının $\boldsymbol{F}$ dağılımına sahip olduğu simulasyon çalışması ile gösterilmiştir.
8. Geliştirilen $F^*$ ve $F^{**}$ test istatistiklerinin gücünün klasik $F$ testinin gücünden daha yüksek olduğu gösterilmiştir.
9. Geliştirilen $F^*$ ve $F^{**}$ test istatistiklerinin modelin yanlış belirlenmesi gibi durumlarda da I. tip hatasının 0.05 düzeyinde, gücünün de klasik $F$ testinden yüksek olduğu gösterilmiştir. Bu da geliştirilen $F^*$ ve $F^{**}$ test istatistiklerinin klasik $F$ test istatistiklerinden istatistiksel olarak daha sağlam olduğunu ifade etmektedir.

10. Eğimlerin homojenliği için test istatistikleri geliştirilmiş, bu test istatistiklerinin eğimlerin homojenliği için kullanılan klasik test istatistiğinden daha güçlü ve istatistiksel olarak sağlam olduğu gösterilmiştir.

11. Ortak değişkenli $2^2$ faktöriyel tasarımlar için geliştirilen süreç benzer şekilde ortak değişkenli $2^3$ ve $2^k$ modelleri için elde edilmiştir.

12. Simulasyon çalışmaları $2^3$ ve $2^4$ modelleri için de yapılarak bu tasarımlar için teorik olarak elde edilen bilgilerin geçerliliği gösterilmiştir.

Faktöriyel ANCOVA modelleri için aşağıda verilen durumlar ilerleyen çalışmalar için dikkate alınmıştır.

1. Hata terimlerinin dağılımının Weibull ve genelleştirilmiş lojistik dağılım gibi çarpık bir dağılıma sahip olması durumunda bu çalışmada geliştirilen yöntem izlenecektir.

2. Bu çalışmada tek bir ortak değişkenin varlığı ele alınmıştır, birden fazla ortak değişken içeren modeller için de analiz yapılacaktır.

# KAYNAKLAR

[1] Fisher, R. A. *The Design of Experiments*, Edinburgh, Oliver - Boyd, A.B.D., 1935.

[2] Yates, F. Design and analysis of factorial experiments, Tech. Comm. No. 35 Imperial Bureau of Soil Scinces, London, 1937.

[3] Hicks, C. R. ve Turner,K. V., *Fundemental Concepts in the Design of Experiments*, New York, A.B.D, 1999.

[4] Şenoğlu B., "Robust $2^k$ factorial design with Weibull error distribuitons", *Journal of Applied Statistics*, **32**, 1051-1006, 2005.

[5] Montgomery, D.C, *The Design and Analysis of Experiments*, John Wiley, New York, A.B.D, 2001.

[6] Hinkelmann K. ve Kempthorne, O., *The Design and Analysis of Experiments, Volume 1* John Wiley, New York, A.B.D, 1994.

[7] Silknitter, K. O., Wisnowski, J.W. ve Montgomery, D.C., "The analysis of covariance: A useful technique for analysing quality improvment experiments", *Quality and Reliability Engineering International*, **15**, 303-316, 1999.

[8] Weber, D.C. and Skillings, J.H, *A First Course in the Design of Experiments: A Linear Models Approach*, CRC Press LLC, New York, 2000.

[9] Cochran, W.G., "Analysis of covariance: Its nature and uses" Deparment of Biostatistics, Paper no: 319.

[10] Wildth, A. R. ve Ahtola, O. T., *The Analysis of Covariance*, SAge Publications, Beverly Hills, Londra, İngiltere, 1998.

[11] Pearson, E.S., "The analysis of variance in case of nonormal variation" *Biometrika*, **23**, 114-133, 1932.

[12] Geary, R.C., "Testing for normality", *Biometrika*, **34**, 209-242, 1947.

[13] Elveback, L.R., Guillier, C.L., Keating, F.R., "Health, Normality and Ghost of Gauss", *J. Ammerican Medical Assoc.*, **211**, 69-75, 1970.

[14] Tiku ,M.L., Tan, W.Y., Balakrishnan, N., *Robust Inference*, Marcel Dekker, New York, A.B.D, 1986.

[15] Tiku ,M.L., Akkaya, A.D., *Robust Estimation and Hypothesis Testing*, New Age International (P) Limited, Publishers, New Delhi, A.B.D, 2004.

[16] Gayen, A.K., "The distribution of the variance ratio in random samples of any size drawn from nonnormal universes", *Biometrika*, **37**, 236-255, 1950

[17] Srivastava, A.B.L., "Effect of nonnormality on the power of the analysis of variance test", *Biometrika*, **46**, 114-122, 1959

[18] Tiku, M.L., "Aproximating the general nonormal variance ratio sampling distributions", *Biometrika*, **51**, 83-95, 1964

[19] Tiku, M.L., "Power funstion of the F test under nonnormal situations", *J.Amer.Stat.Assoc.*, **66**, 913-916, 1971

[20] Tiku, M.L., "A laguerre product series expansion of the distribution of variance-ratios in two way classification", *J.Indian Soc.Agric.Stat.*,**16**, 304-316, 1964

[21] Donaldson, T.S., "Robustness of the F-tests to errors of both kinds and correlation between the numerator and denimator of the F ratio", *J.Amer.Stat.Assoc.*, **63**, 660-667, 1964

[22] Spjøtvoll, E. Aastveit, A.H., "Comparison of robust estimators on some data from field experiments", *Scand.J.Stat.*, **7**, 1-13, 1980

[23] Şenoğlu, B., *Experimental Design Under Nonnormality*, Doktora tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2000.

[24] Şenoğlu, B. ve Tiku, M.L, "Analysis of variance in experimental design with nonnormal error distributions", *Comm. Statist.-Theory Meth.*, **30(7)**, 1335-1352, 2001

[25] Şenoğlu, B. ve Tiku, M.L, "Linear contrasts in analysis of variance", *Biometrical Journal*, **44**, 359-374, 2002

[26] Birch, B.B., Myers, R.H., "Robust Analysis of Covariance", *Biometrics*, **38**, 699-713, 1982

[27] Huber, P.J. Ronchetti, E.M, *Robust Statistics*, John Wiley, New York, A.B.D, 2009.

[28] Şenoğlu, B., "Estimating parameters in one-way analysis of covariance model with short-ta,led symmetric error distributions", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **201**, 275-283, 2007.

[29] Avcıoğlu D.M., *Experimental Designs In The Presence of Covariates*, Yüksek Lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2003.

[30] Şenoğlu B., Avcıoğlu M.D., "Analysis of covariance with non-normal errors", *International Statistical Reviews*, **77(3)**, 366-377, 2009.

[31] Şenoğlu, B., "Robust Estimation and hypothesis testing of linear contrasts in analysis of covariance with stochastic covariates", *Journal of Applied Statistics*, **34**, 141-151, 2007.

[32] Tiku, M.L., Sürücü, B., "MML estimators are as good as M-estimators or better", *Statistics and Probability Letters*, **79**, 984-989, 2009.

[33] Vaughan, D. C., "On the Tiku-Suresh method of estimation", *Commun. Stat.-Theory and Methods*, **21**:451-469, 1992

[34] Tiku, M.L., "Estimating the mean and standart deviation from a censored normal sample", *Biometrika*, **54**,155-165, 1967.

[35] Tiku, M.L., "Estimating the parameters of log-normal distribution from a censored sample", *J. Amer. Stat. Assoc.*, **63**,134-140, 1968.

[36] Tiku M.L. ve Suresh, R.P., "A new method of estimation for location and scale parameters", *J. Stat. Plann. Inf.*, **30**, 281-292, 1992

[37] Tiku, M. L., Kumra, S., "Expected values and variances and covariances of ordered statistics for Student's t distribution with two degrees of freedom", *J. Stat.Comput. Simul.*, **21**, 391-404

[38] Vaughan, D. C., "The exact values of the expected values, variances and covariences of order statistics from the Cauchy distribution" , *J. Stat.Comput. Simul.*, **49**, 21-39, 1994

[39] Tiku, M. L., Islam, M. Q., Selcuk, A. S., "Nonnormal Regression: Part II, symmetric distributions", *Commun. Stat.-Theory and Methods*, **30(6)**, 1021-1045, 2001

[40] Kendall, M.D., Stuart, A., *The Advanced Thepry of Statistics, Volume 2*, Hafner Publishing Company, New York, A.B.D, 1967.

[41] Hoeffding, W., "On the distribution of the expected value of order statistics", *Annals Math. Stat.*, **24**, 93-100, 1953

[42] Box, G.E.P., "Nonnormality and tests on variances", *Biometrika*, **40**, 318-335, 1953

[43] Box, G.E.P., Tiao, G.C., "A note on criterion robustness and inference robustness", *Biometrika*, **51**, 169-173, 1964

[44] Rencher, A.C. ve Schaalje, G.B., *Linear Models in Statistics*, New Jersey, A.B.D, 2007.

[45] Tiku, M.L., Wong, W.K. and Vaughan, D.C. , "Time series models in non-normal situations: symmetric innovations" *J. Time Series Analysis*, **21**, 571-596, 2000