

**MOMENT KISITLARINA DAYALI
GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ YÖNTEMLERİ**

İlhan USTA
Doktora Tezi

İstatistik Bölümü Anabilim Dalı
Ekim-2009

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İlhan Usta'nın "Moment Kısıtlarına Dayalı Genelleştirilmiş Entropi Yöntemleri" başlıklı **İstatistik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 24.09.2009 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı) :	Prof. Dr. ALADDİN ŞAMİLOV
Üye :	Prof. Dr. EMBİYA AĞAOĞLU
Üye :	Prof. Dr. HASAN DURUCASU
Üye :	Prof. Dr. İSMİHAN BAYRAMOĞLU
Üye :	Prof. Dr. ALİ FUAT YÜZER

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MOMENT KISITLARINA DAYALI GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ YÖNTEMLERİ

İlhan USTA

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMILOV

2009, 141 sayfa

MaxEnt, MinxEnt entropi optimizasyon dağılımları çeşitli problemlerin çözümünde sağladığı başarıdan dolayı, başta istatistik olmak üzere, ekonomi, mühendislik bilimleri, uzay bilimleri ve daha birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Son yıllarda bu dağılımların istatistiksel veriyi modelleme açısından önemli geliştirilmesi olan MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt dağılımları tanımlanmış ve uygulanmaktadır. Fakat sürekli rassal değişkenler için entropi optimizasyon dağılımları ve geliştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının bulunması, taşıdıkları bazı özelliklerden dolayı birçok zorluklarla karşılaşmaktadır.

Bu tezde, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt, MinxEnt entropi optimizasyon dağılımları ve MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt geliştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının bulunmasını öneren Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı nümerik bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem olarak adlandırılmıştır. Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle elde edilmiş geliştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları ile çeşitli istatistiksel veriler modellenmiştir. Söz konusu yöntemle elde edilmiş dağılımların uyumu istatistiksel testler ve kriterler yardımıyla gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: MaxEnt ve MinxEnt Dağılımları, Geliştirilmiş MaxEnt ve MinxEnt Dağılımları, Gauss-Legendre Yöntemi

ABSTRACT

PhD Dissertation

THE GENERALIZED ENTROPY METHODS BASED ON MOMENT CONSTRAINTS

İlhan USTA

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMILOV

2009, 141 pages

MaxEnt, MinxEnt entropy optimization distributions have important applications in many fields such as particularly statistics, economy, engineering, space sciences and other fields, by virtue of success in the solving of several problems. Recently, MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt distributions, which are important generalizations of these distributions in terms of modelling statistical data, have been defined and applied in literature. However, many difficulties are encountered to obtain entropy optimization distributions and generalized entropy optimization distributions for continuous random variables due to certain properties of these distributions.

In this thesis, a numerical method based on the Gauss-Legendre approach, which is assigned to obtain MaxEnt, MinxEnt entropy optimization distributions and MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt generalized entropy optimization distributions for continuous random variables, is developed. We call this method as the method based on Gauss-Legendre approach. Various statistical data is modelled via generalized entropy optimization distributions obtained by means of the method based on Gauss-Legendre approach. The goodness of the distributions, which are obtained through this method is presented with statistical tests and criteria.

Keywords: MaxEnt and MinxEnt Distributions, Generalized MaxEnt and MinxEnt Distributions, Gauss-Legendre Method

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum doktora tezine hazırlık aşamasında, bölümümüzde açmış olduğu “Ölçüm Teorisi ve Olasılık”, “Entropi ve İformasyon Teorisi”, “İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri”, “İformasyon Teorisi ve İstatistik” gibi çok önemli konuları kapsayan doktora dersleriyle ve büyük bir özveriyle yazdığı “Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali”, “Olasılıksal Dağılımların Karakteristik Fonksiyonları ve Uygulamaları”, “Entropi, İformasyon ve Entropi Optimizasyon” kitaplarıyla bilgilerini bizlere aktaran, değerli vaktini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, benim tüm sorularıma yanıt bulan, tez konusunun belirlenmesi, içeriğin oluşturulması ve geliştirilmesinde bana en değerli vaktini ayıran çok değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV’ a en içte dileklerle teşekkür ederim. Ayrıca bu tez konusu sayesinde, yaptığımız teorik çalışmaların uygulamalarını da görmemizi sağladığı için değerli hocama bir kez daha çok teşekkür ederim.

Matematik bölümümdeki II. ana dalı tamamlamamı sağlayan, önemli birimlere gelmem de yardımcı olan, desteğini benden hiç esirgemeyen ve en ufak bir problemimde dahi beni yalnız bırakmayan güven, sevgi ve saygı duyduğum değerli hocam Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU’ na çok teşekkür ederim.

Gerek II. anadal süresince, gerek çalışmalarım süresince bana oldukça huzurlu bir çalışma ortamı sağlayıp, manevi desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER’ e teşekkür ederim.

Tez çalışması süresince bana zaman ayıran ve destek olan sayın Prof. Dr. Hasan DURUCASU’ ya teşekkür ederim.

Bana her konuda zaman ayıran ve dinleyen çok sevdiğim arkadaşlarım Yeliz Mert KANTAR ve Şükrü ACITAŞ’ a ayrıca teşekkür etmek isterim.

Beni yetiştiren aileme ve bu çalışma süresince gösterdiği sabır ile anlayış için eşim Betül USTA’ya özellikle teşekkür ederim.

İlhan USTA

2009

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. ENTROPİ OPTİMİZASYON METOTLARI	7
2.1. Sürekli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodu	7
2.2. Sürekli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımı.....	9
2.3. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxEnt Dağılımının Bulunmasına İlişkin İncelemeler.....	17
2.3.1. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxEnt Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımının Önemi.....	18
2.3.2. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxEnt Metodunda Moment Koşullarının Önemi.....	22
2.4. Sürekli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodu.....	25
2.5. Sürekli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımı	27
2.6. Sürekli Rassal Değişkenler için MinxEnt Dağılımına Bulunmasına İlişkin İncelemeler.....	29
2.6.1. Sürekli Rassal Değişkenler için MinxEnt Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımının Önemi.....	30
2.6.2. Sürekli Rassal Değişkenler için MinxEnt Metodunda Moment Koşullarının ve Önsel Dağılımın Önemi.....	34

3. SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MaxEnt DAĞILIMLARI	39
3.1. Sürekli Rassel Değişkenler için MinMaxEnt Dağılımı.....	41
3.2. Sürekli Rassel Değişkenler için MaxMaxEnt Dağılımı.....	42
3.3. Sürekli Rassel Değişkenler için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Dağılımlarının Bulunmasında Gauss-Legendre Yaklaşımına Dayalı Yöntem.....	43
4. SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MinxEnt DAĞILIMLARI	49
4.1. Sürekli Rassel Değişkenler için MaxMinxEnt Dağılımı.....	51
4.2. Sürekli Rassel Değişkenler için MinMinxEnt Dağılımı.....	52
4.3. Sürekli Rassel Değişkenler için MaxMinxEnt ve MinMinxEnt Dağılımlarının Bulunmasında Gauss-Legendre Yaklaşımına Dayalı Yöntem.....	53
5. ÖZEL ÖNSEL DAĞILIMLARA DAYALI ENTROPİ OPTİMİZASYON DAĞILIMLARI	59
6. ENTROPİ OPTİMİZASYON ve GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTORPİ OPTİMİZASYON DAĞILIMLARI İÇİN YARDIMCI KONULAR	65
6.1. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Dağılımları için Moment Fonksiyonları Kümesi ve Önsel Dağılım.....	65
6.2. Entropi Optimizasyon Probleminin Çözümü Olarak Normal Dağılımın ve Uygun Lagrange Çarpanlarının Analitik İfadelerinin Bulunması.....	68
6.3. Entropi Optimizasyon Probleminin Çözümü Olarak Gamma Dağılımının ve Uygun Lagrange Çarpanlarının Analitik İfadelerinin Bulunması.....	73
6.4. Model Belirlemek için Bazı Uyum Testleri ve İformasyon Kriterleri.	77

7. GAUSS-LEGENDRE YAKLAŞIMINA DAYALI YÖNTEMLE BULUNAN GENELLEŞTİRİLMİŞ MaxEnt DAĞILIMLARININ UYGULAMALARI	81
7.1. Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımlarının Uygulaması I.....	82
7.2. Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımlarının Uygulaması II.....	92
8. GAUSS-LEGENDRE YAKLAŞIMINA DAYALI YÖNTEMLE BULUNAN GENELLEŞTİRİLMİŞ MinxEnt DAĞILIMLARININ UYGULAMALARI	103
8.1. Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımlarının Uygulaması I.....	103
8.2. Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımlarının Uygulaması II.....	118
9. SONUÇ ve ÖNERİLER	132
KAYNAKLAR.....	134

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1.	P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 Legendre polinomlarının grafiği	12
2.2.	$N(0,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n = 25$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı	20
2.3.	$N(0,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n = 200$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı	21
2.4.	Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafiği.....	24
2.5.	$Gam(2,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n = 25$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı	33
2.6.	$Gam(2,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n = 200$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı.....	33
2.7.	Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafikleri	36
2.8.	Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafikleri.....	38
3.1.	Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	48
4.1.	Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	58

7.1.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	91
7.2.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	91
7.3.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	92
7.4.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	100
7.5.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	101
7.6.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	101
8.1.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri.....	114

- 8.2.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 115
- 8.3.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 115
- 8.4.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 116
- 8.5.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 117
- 8.6.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 117
- 8.7.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 128

- 8.8.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 128
- 8.9.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 129
- 8.10.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 130
- 8.11.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 130
- 8.12.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri..... 131

ÇİZELGELER DİZİNİ

2.1.	Gauss-Legendre nümerik integral yönteminde kullanılan Legendre kökleri ve bu köklere karşılık gelen Gauss ağırlıkları.....	15
2.2.	$X \sim N(0,1)$, $X \sim N(-1,3)$ ve $X \sim N(3,1.5)$ rassal değişkenleri için MaxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına göre incelenmesi..	19
2.3.	Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları için hesaplanan moment değerleri.....	23
2.4.	Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri	23
2.5.	$X \sim Gam(2,1)$, $X \sim Gam(3,0.5)$ ve $X \sim Gam(1.5,2.5)$ rassal değişkenleri için MinxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına göre incelenmesi.....	32
2.6.	Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımlara göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	35
2.7.	Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	37
3.1.	Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	46
3.2.	Hisse senedinin haftalık getirileri için $(MaxEnt)_m$ ve K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$, $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının entropi değerleri.....	47

4.1.	Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	56
4.2.	Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(MinxEnt)_m^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	57
6.1.	İstatistiksel dağılımlara uygun MaxEnt dağılımları için moment fonksiyonları	67
7.1.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarının örnek ölçüm değerlerine ilişkin tanımlayıcı istatistikler	83
7.2.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_1 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	84
7.3.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_2 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri	85
7.4.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_3 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	86
7.5.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_4 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	87
7.6.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	88

7.7.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının entropi değerleri.....	88
7.8.	Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi.....	89
7.9.	Iroquois nehrinin yıllık kuraklık ölçüm değerleri için tanımlayıcı istatistikler.....	93
7.10..	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_1 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	94
7.11.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri K_2 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	95
7.12.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_3 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	96
7.13.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_4 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri.....	96
7.14.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	97
7.15.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının entropi değerleri.....	98

7.16.	Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi.....	98
7.16.	(Devam) Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi.....	99
8.1.	Kuzey Florida ormanlarındaki am ağaçlarının çap değerleri için K_1 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	105
8.2.	Kuzey Florida ormanlarındaki am ağaçlarının çap değerleri için K_2 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	106
8.3.	Kuzey Florida ormanlarındaki am ağaçlarının çap değerleri için K_3 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	107
8.4.	Kuzey Florida ormanlarındaki am ağaçlarının çap değerleri için K_4 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	108
8.5.	Kuzey Florida ormanlarındaki am ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange arpanları değerleri.....	109

- 8.6.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri..... 109
- 8.7.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri..... 110
- 8.8.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri..... 111
- 8.9.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi..... 112
- 8.10.** Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi..... 112
- 8.11.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için tanımlayıcı istatistikler..... 119
- 8.12.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_1 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri..... 120

8.13.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_2 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	121
8.14.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_3 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	121
8.15.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_4 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	122
8.16.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max_{K_m} MinxEnt)_m^1$, $(Min_{K_m} MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	123
8.17.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max_{K_m} MinxEnt)_m^1$, $(Min_{K_m} MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	123
8.18.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max_{K_m} MinxEnt)_m^2$, $(Min_{K_m} MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri.....	124
8.19.	Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max_{K_m} MinxEnt)_m^2$, $(Min_{K_m} MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri.....	124

- 8.19. (Devam)** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri..... 125
- 8.20.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi..... 126
- 8.21.** Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi..... 126

1. GİRİŞ

İstatistiğin en önemli dallarından biri dağılımlar teorisidir. Bu teoride geliştirilen dağılımlar, istatistiksel çıkarsamanın temel hedeflerinden biri olan rassal değişkeni bir başka ifade ile istatistiksel veriyi modellemek için uygulanmaktadır. Fakat gerçek hayatta öyle istatistiksel veriler ortaya çıkmaktadır ki, bu veriler bilinen istatistiksel dağılımlarla modellenememektedir. Bu sebepten dolayı, daha esnek veya uyumlu dağılımların tanımlanması problemi önem taşımaktadır. Bu tür problemleri aşmak için gerek tek değişkenli gerekse çok değişkenli olmak üzere, çok sayıda olasılık dağılımlarının geliştirilmesine devam edilmektedir (Scott 1992; Hansen ve ark. 2007). Bu tür dağılımlara örnek olarak son yıllarda geliştirilen ve entropi optimizasyon metodlarının bir sonucu olarak bilinen maksimum entropi (MaxEnt) ve minimum çapraz entropi (MinxEnt) dağılımları diğer bir ifade ile entropi optimizasyon dağılımları gösterilebilir (Kapur ve Kesevan 1992; Cover ve Thomas 2006; Shamilov 2006, 2007; Shamilov ve ark 2006c; 2006d)

Bu dağılımların en önemlilerinden biri olan MaxEnt dağılımı, rassal değişkenden elde edilen moment bilgilerine göre Shannon entropi (Shannon 1948) ölçümünü maksimum yapan dağılımdır. Bu dağılımı istatistiksel verinin dağılım (olasılık yoğunluk fonksiyonu) modeli olarak öneren metoda MaxEnt metodu denir (Jaynes 1957). Bir başka ifade ile MaxEnt metodu, verilen birkaç moment kısıdını sağlayan sonsuz sayıda dağılımlar arasından, Shannon ölçümünü maksimum yapan dağılım fonksiyonunu, istatistiksel veri için aranan dağılım modelinin bir tahmini olarak önermektedir. Söz konusu MaxEnt metodu kesikli ve sürekli rassal değişkenler için geçerlidir.

Diğer bir önemli entropi optimizasyon dağılımı olan MinxEnt dağılımı, rassal değişkenden elde edilen moment bilgilerine ve aynı zamanda önsel dağılıma göre Kullback-Leibler çapraz entropi (Kullback ve Leibler 1951) ölçümünü minimum yapan dağılımdır. Söz konusu dağılımı önsel dağılıma sahip istatistiksel verinin dağılım modeli olarak öneren metoda MinxEnt metodu denir. (Kullback 1959). Bir başka ifade ile MinxEnt metodu, verilen birkaç moment kısıdını sağlayan sonsuz sayıda dağılımlar arasından, Kullback-Leibler ölçümünü

minimum yapan dağılım fonksiyonunu, önsel dağılıma sahip istatistiksel veri için aranan dağılım modelinin bir tahmini olarak öneren metottur. Söz konusu MinxEnt metodu kesikli ve sürekli rassal değişkenler için geçerlidir.

Günümüzde entropi optimizasyon metotları çeşitli problemlerin çözümünde sağladığı başarıdan dolayı, başta istatistik olmak üzere, ekonomi, finans, risk analizi, pazarlama, matematik, mühendislik bilimleri, uzay bilimleri ve daha birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. (Nailong 1977; Kapur ve Kesevan 1992; Fomby ve Hill 1997; Karmeshu 2003; Cover ve Thomas 2006; Shamilov ve ark. 2006a, 2006b; Shamilov ve ark. 2008b).

İstatistikte pek çok konu MaxEnt ve MinxEnt metotları, bir başka deyişle entropi optimizasyon metotları yardımıyla incelenmiştir (Kapur ve Kesevan 1992; Golan ve ark. 1996; Kullback 1959, 1997; Lind 1997; Shamilov 2005; Shamilov ve Kantar Mert 2005; Shamilov ve ark. 2008a; Kantar ve Usta 2008; Shamilov ve Asma 2008). Özellikle MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarıyla ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Örneğin Ryu (1993)'de MaxEnt dağılımını regresyon modelinde kullanmıştır. Buchen ve Kelly (1996) ve Borwein ve ark. (2003)'de menkul kıymetlerin opsiyonlu fiyatlarının dağılımını MaxEnt dağılımı yardımıyla incelemiştir. Zellner (1997) ve Zellner ve Tobias (2001)'de MaxEnt metodunu kullanarak Bayes metodundaki önsel dağılımı tahmin etmişlerdir. Zhu (1998)'de incelediği istatistiksel verinin dağılımını MinxEnt metodu yardımıyla bulmuştur. Ebrahimi (2000) ve Asadi ve ark. (2004)'de yaşam dağılımları için MaxEnt metodunu uygulamıştır. Pandey (2001a, 2001b) yıllarındaki çalışmalarında MinxEnt metodunu kullanarak dağılım fonksiyonunun tersinin tahminini yapmıştır. Rockinger ve Jondeau (2002)'de MaxEnt dağılımlarını incelemiş ve bu dağılımları zaman serisi modellerine uygulamıştır. Wu (2003)'de MaxEnt dağılımlarının hesaplaması üzerinde durmuş ve uygulama olarak bir ülkenin gelir dağılımını incelemiştir. Wu ve Stengos (2005)'de doğrusal regresyon modelindeki artıkların dağılımı MaxEnt dağılımları yardımıyla modellemiştir. Ayrıca aynı çalışmada MaxEnt dağılımları yardımıyla tahmin edilen regresyon katsayılarının hatasının, daha küçük olduğunu simülasyon çalışmasıyla göstermiştir. Ramirez ve Carta (2005) ve Li ve Li (2005a, 2005b)'deki çalışmalarda, rüzgâr hızının dağılımı MaxEnt dağılımlarıyla elde edilmiş ve istatistiksel dağılımlarla

karşılaştırılmıştır. Wu ve Perloff (2007)'de gruplandırılmış verilerin MaxEnt dağılımını tahmin etmiştir. Bera ve Park (2007, 2009) yıllarındaki çalışmalarında zaman serisi modellerindeki parametrelerinin tahminin MaxEnt dağılımına dayalı olarak incelemiştir. Ridder ve Rubinstein (2007)'de MinxEnt metodu yardımıyla nadir olayların (rare-event) olasılık dağılımını modellemiştir. Botev ve Kroese (2009)'de olasılık dağılımının tahmininde çapraz entropi metodunu kullanmıştır.

Literatürde, MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının hesaplanmasına ilişkin de çeşitli çalışmalar vardır. Örneğin Mead ve Papanicolaou (1984)'de MaxEnt dağılımının hesaplanması için teorik incelemeler yapmıştır. Zellner ve Highfield (1988) yılındaki çalışmasında, MaxEnt dağılımının hesaplanması için bir algoritma önermiştir. Ormoneit ve White (1999)'da MaxEnt dağılımının hesaplanmasında, Zellner ve Highfield önerdiği algoritmayı geliştirmişlerdir. Ximing (2003)'de MaxEnt dağılımının hesabında ardışık yaklaşımlar metodunu uygulamıştır. Woodbury (2004) de MinxEnt dağılımlarını elde eden FORTRAN programı yazmıştır. Muhlenbein ve Hons (2005)'da Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümünü incelemiş, MaxEnt ve MinxEnt dağılımların hesaplanması için çeşitli algoritmaları tartışmıştır. Li ve Li (2006)'da MaxEnt dağılımının hesaplanmasında Newton metoduna dayalı üç farklı algoritmayı karşılaştırmıştır. Balestrino ve ark. (2006)'da MaxEnt dağılımının tahminde etkin bir nümerik yaklaşım önermişlerdir.

Son yıllarda MaxEnt ve MinxEnt metotları yardımıyla, parametre tahmini, kontenjan tabloları, kuyruk teorisi, zaman serisi analizi gibi istatistiğin diğer önemli konuları da incelenmektedir.(Kapur ve Kesevan 1992; Ranney 1984; Ranney ve ark. 2005; Park ve Park 2001; Bera ve Park 2009).

Ayrıca Shamilov (2006, 2007) çalışmalarında, moment vektör fonksiyonlarından oluşan K kümesi üzerinde U entropi optimizasyon fonksiyonellini tanımlayarak, U 'ya minimum ve maksimum değer veren moment fonksiyonlarını bularak bu moment fonksiyonlarına uygun dağılımlar tanımlamıştır. Bu dağılımlardan en önemlileri, genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları olarak adlandırılmış olan MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt dağılımlarıdır. Genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları, verilmiş moment fonksiyonları kümesinden istatistiksel veriye entropi

optimizasyon ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan dağılımları belirleyen moment fonksiyonlarının bulunmasını gerçekleştirerek, istatistiksel veriyi kriterler açısından daha iyi modellemeyi sağlamaktadır.

Şamilov A. danışmanlığı ile Mert Kantar (2006)'da doktora tezinde ve Usta (2006) ise yüksek lisans tezinde MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarıyla ilgili çeşitli teorik incelemeler ve uygulamalar yapmışlardır.

Shamilov, Mert Kantar ve Usta (2008a) çalışmasında rüzgar hızının dağılımının modellenmesinde MinMaxEnt dağılımları kullanarak klasik istatistiksel dağılımlarla karşılaştırmışlardır. Ayrıca bu çalışmalarında rüzgar gücü tahminlerinin belirlenen MinMaxEnt dağılımları kullanılarak, daha az hatayla tahmin edilebileceğini göstermişlerdir. Shamilov ve ark.(2008b)'de MinMaxEnt dağılımının belirlenmesinde önem bir yere sahip olan K kümesinin uygunluğu kavramını geliştirerek gerekli teorik ve pratik incelemeleri yapmışlardır.

Yapılan araştırmalar sonucunda entropi optimizasyon dağılımları ve genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının taşıdığı özellikler bakımından, sürekli rassal değişkenler için bulunmasının hem teorik hem de nümerik açıdan bir problem oluşturduğu görülmüştür. Uygulama açısından bakıldığında da, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının bulunmasında karşılaşılan farklı zorluklar vardır. Söz konusu zorluklardan birisi, bu dağılımların bulunmasında önemli role sahip olan Lagrange çarpanlarının integral işareti altında olmasıdır. Bu durum integral hesabında nümerik yöntemlerden en iyisinin seçilmesini gerektirir. Yapılan incelemeler sonucunda nümerik integral hesabı yöntemlerinden en önemlisinin, Gauss-Legendre nümerik integral yöntemi olduğu görülmüştür (Fikhtengoltz 1959; Demidovich ve Maron 1970; Abramowitz ve Stegun 1972; Ormoneit ve White 1999; Rockinger ve Jondeau 2002).

Bu tez çalışmasında, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt entropi optimizasyon dağılımlarının bulunması problemi Gauss-Legendre integral hesabı yöntemiyle çözülmüştür ve yöntemin performansı incelenmiştir. Bu yöntem daha sonra sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının bulunması için de geliştirilmiştir. Bu yöntem Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem olarak adlandırılmıştır. Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle elde

edilmiş genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları ile çeşitli istatistiksel veriler modellenmiştir. Söz konusu yöntemle elde edilmiş dağılımların uyumu istatistiksel testler ve kriterler yardımıyla gösterilmiştir.

Tezin bundan sonraki bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt, MinxEnt metotları ve bu metotların önerdiği sırasıyla MaxEnt, MinxEnt dağılımları ele alınmıştır. Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının bulunması problemi Gauss-Legendre integral hesabı yöntemiyle çözülmüştür. Ayrıca aynı bölümde MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunmasına ait çeşitli incelemeler yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele K kümesi üzerinde minimum ve maksimum değer veren genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları bir başka ifade ile MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları(Shamilov 2006, 2007) tanıtılmıştır. Ayrıca bu bölümde, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt, MaxMaxEnt dağılımları için geliştirilmiştir.

Dördüncü bölümde, sürekli rassal değişkenler için MinxEnt metodu yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele K kümesi üzerinde maksimum ve minimum değer veren genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarından diğer bir ifade ile MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarından (Shamilov 2006, 2007) bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımları için geliştirilmiştir.

Beşinci bölümde, moment kısıtlarına bağlı özel önsel dağılımlara uygun olarak MinxEnt dağılımı için Lagrange çarpanlarının bulunması yöntemi teorem şeklinde ifade edilmiştir. Söz konusu teorem yardımıyla MinxEnt dağılımı ile aynı moment kısıtları sağlayan MaxEnt dağılımı için de Lagrange çarpanlarının bulunması problemi çözülmüştür.

Altıncı bölümde, genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları için sonlu sayıda elemandan oluşan moment vektör fonksiyonları kümesi, entropi optimizasyon dağılımları için Lagrange çarpanlarının analitik ifadelerinin

bulunması ve yaygın olarak kullanılan bazı istatistiksel testler ile kriterler ele alınmıştır.

Yedinci bölümde, sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının, diğer bir ifade ile MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının, çeşitli istatistiksel verilerin modellenmesine ilişkin uygulamalar sunulmuştur. Bu dağılımların istatistiksel veriye uyumu, çeşitli uyum iyiliği testleri ve bilgi kriterlerine göre incelenmiştir. Ayrıca bulunan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının uyumu görsel olarak da sunulmuştur

Sekizinci bölümde, sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının, diğer bir ifade ile MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının, çeşitli istatistiksel verilerin dağılımının bulunmasına ilişkin uygulamalar sunulmuştur. Bu dağılımların istatistiksel veriye uyumu, çeşitli uyum iyiliği testleri, bilgi kriterlerine ve görsel olarak da incelenmiştir.

Son bölümde elde edilmiş sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

2. ENTROPİ OPTİMİZASYON METOTLARI

Bu bölümde sürekli rassal değişkenler için, Shannon entropi ölçümünü maksimum yapmaya dayalı olan MaxEnt metodu ve Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümünü minimize etmeye dayalı olan MinxEnt metodu ele alınmıştır. Ayrıca sürekli rassal değişkenler için MaxEnt ve MinxEnt dağılımlarının bulunması problemi Gauss-Legendre yöntemiyle çözülmüştür.

2.1. Sürekli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodu

Shannon entropi ölçümünü, rassal değişkenden elde edilen moment bilgilerine göre maksimum yapan çözümü, rassal değişkenin dağılımı olarak kullanılmasını öneren metoda MaxEnt metodu, önerilen dağılıma da MaxEnt dağılımı denir. MaxEnt metodu mevcut bilgiyi etkin şekilde kullanamaya dayanır ve elde edilen MaxEnt dağılımı, bu rassal değişkene uygun diğer dağılımlar arasında en yansız olanıdır (Jaynes 1957). MaxEnt metodu kesikli ve sürekli rassal değişkenler için geçerlidir. Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodu aşağıda verilmiştir.

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. X sürekli rassal değişkeninin Shannon entropi ölçümü,

$$H(x) = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Sürekli X rassal değişkenin (2.1) ile ifade edilen entropi ölçümünü,

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (2.2)$$

$$\int_a^b g_j(x) f(x) dx = \mu_j, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.3)$$

kısıtları altında maksimum yapan optimizasyon probleminin $f(x)$ çözümünü, X sürekli rassal değişkenin dağılımı olarak kullanılmasını öneren metoda MaxEnt metodu denir. Bu metotta önerilen dağılıma MaxEnt dağılımı denir (Jaynes 1957).

(2.3) de ifade edilen $g_j(x)$, ($j=1, \dots, m$) moment fonksiyonları, μ_j , ($j=1, \dots, m$) moment değerleri denir.

Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodun da ortaya çıkan optimizasyon problemi Euler-Lagrange çarpanları yöntemi ile çözülebilir. L Lagrange yardımcı fonksiyoneli,

$$L \equiv -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx - (1 - \alpha_0) \left(\int_a^b f(x) dx - 1 \right) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\int_a^b g_j(x) f(x) dx - \mu_j \right) \quad (2.4)$$

şekilde tanımlanır. (2.4) de gerekli işlemler yapıldığında $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \exp \left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right)$$

veya

$$\Omega(\mathbf{\alpha}) = \exp(\alpha_0) = \int_a^b \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Omega(\mathbf{\alpha})} \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right), \quad \mathbf{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.5)$$

şeklinde bulunur (Kapur ve Kesevan 1992; Şamilov 2009). $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri (2.3) eşitlikleri ve nümerik yöntemler yardımıyla bulunabilir.

Bir başka deyişle, (2.5) ifadesi (2.3)' de yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b g_j(x) \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx}{\Omega(\mathbf{\alpha})}, \quad (j=1, \dots, m)$$

veya

$$\mu_j = \frac{\int_a^b g_j(x) \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx}{\int_a^b \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx}, \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.6)$$

eşitliklerinden yararlanarak α_j , ($j=1,\dots,m$) 'lerin değerleri bulunabilir. Ayrıca (2.6) ifadesinden görüldüğü gibi, α_1,\dots,α_m Lagrange çarpanları μ_1,μ_2,\dots,μ_m 'lere bağlıdır.

2.2. Sürekli Rassal Değişkenler için Maksimum Entropi Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımı

Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodunun uygulanmasında önemli aşamalardan biri Lagrange çarpanlarının bulunmasıdır. Bu problemin çözümü için çeşitli nümerik yöntemler uygulanabilir. Bu yöntemlerden en önemlisi Newton yöntemidir. Bunun nedeni Newton yöntemi ile kurulmuş yaklaşımlar dizisinin daha yüksek yakınsama hızına sahip olmasıdır.

Uygulama açısından bakıldığında, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodunun karşılaştığı farklı zorluklar vardır. Sürekli rassal değişkenler için söz konusu zorluklardan birisi Lagrange çarpanlarının integral altında bulunmasıdır. Bir başka ifade ile parametrelere bağlı integrallerin dahil olduğu denklemler sisteminden bu parametrelerin bulunması söz konusudur. Bu durum integral hesabında nümerik yöntemlerden en iyisinin seçilmesini gerektirir. Nümerik integral hesabı yöntemlerinden en önemlisi Gauss-Legendre integral yöntemidir (Abramowitz ve Stegun 1972; Ralston ve Rabinowitz 1978; Noble 2000; Rockinger ve Jondeau 2002; Woodbury 2004). Bu tez çalışmasında Gauss-Legendre integral hesabı yöntemi, MaxEnt dağılımının bulunmasında nümerik yöntem olarak kullanılmıştır.

Bu bölümde sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunmasında kullanılan Gauss-Legendre nümerik yöntemiyle ilgili gerekli ayrıntılar verilmiştir

Gauss-Legendre integral yönteminde öncelikle Legendre polinomu hakkında bilgi verilmelidir. Legendre polinomu aşağıda tanımlanan probleme dayalı olarak ortaya çıkmıştır: a ve b keyfi verilmiş sayılar olmak üzere,

$$\int_a^b X_n(x)Q(x)dx = 0 \quad (2.7)$$

öyle n . dereceden $X_n(x)$ polinomu bulmak gerekir ki, derecesi n 'den küçük olan keyfi $Q(x)$ polinomu için (2.7) eşitliği sağlansın.

Bu problemin çözümü olan n . dereceden $X_n(x)$ polinomu,

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n] \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilir. (2.8) eşitliğinde $a = -1$ ve $b = +1$ kabul edilirse $X_n(x)$,

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.9)$$

polinomuna dönüşür. (2.9) polinomuna Legendre polinomu denir ve $P_n(x)$ ile gösterilir. $P_n(x)$ Legendre polinomunda c_n sabiti,

$$c_n = \frac{1}{2^n n!} \quad (2.10)$$

formülü yardımı ile bulunur.

Legendre polinomları için $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ ve $P_0(x) = 1$ olduğu kabul edilir. Legendre polinomunun tanımına göre,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) Q(x) dx = 0 \quad (2.11)$$

eşitliği derecesi n 'den küçük olan keyfi $Q(x)$ için sağlanır. Özel olarak $Q(x) = P_m(x)$ alındığında (2.11) eşitliği,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (2.12)$$

şekline dönüşür. (2.12) eşitliğindeki n ve m sayıları, birbirine eşit olmayan pozitif tam sayılardır. Özel olarak $n = m$ seçildiğinde,

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{(2n+1)} \quad (2.13)$$

eşitliği geçerlidir.

Legendre polinomlarını daha kolay oluşturmak için, bu polinomlar arasında ardışık (recurrent) bağlantı vardır. Bu bağlantı

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde gösterilir. Yüksek dereceli Legendre polinomları, bu bağlantı yardımıyla ve $P_0 = 1$, $P_1 = x$ 'dan yola çıkarak daha kolay şekilde bulunur. (2.14) ardışık bağlantısı yardımıyla,

$$P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, P_3 = \frac{5x^3 - 3x}{2}, P_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}, \dots \quad (2.15)$$

Legendre polinomları bulunabilir (Fikhtengoltz, 1959).

Gauss-Legendre nümerik integral yönteminde önemli role sahip olan Legendre polinomlarının özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

polinomuna Legendre polinomu denir.

Legendre polinomlarının özellikleri:

1. $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$
2. $\int_{-1}^1 P_n(x) Q_k(x) dx = 0$, $k < n$

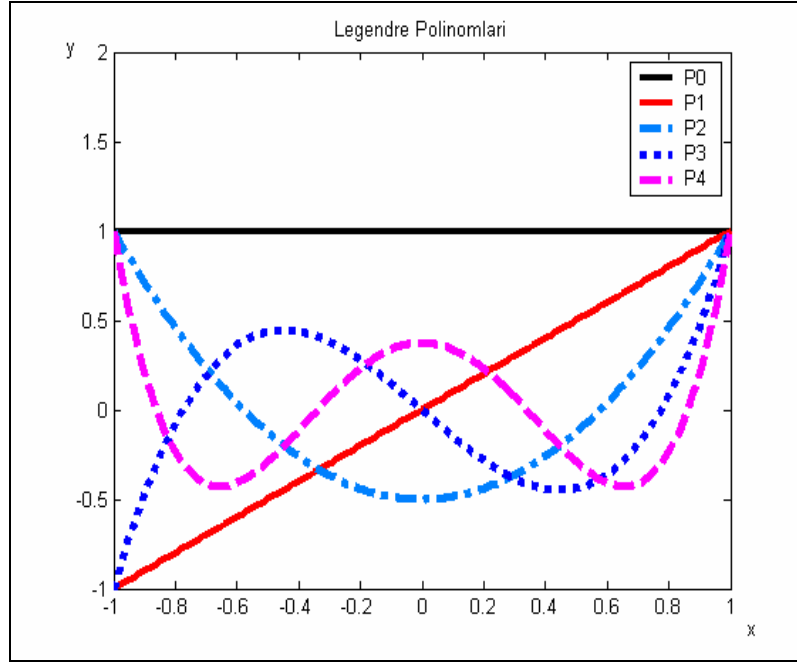
$Q_k(x)$ derecesi n 'yi aşmayan k dereceli keyfi polinomdur.

3. $P_n(x)$ Legendre polinomunun $(-1, 1)$ aralığında n tane birbirinden farklı reel kökleri vardır.

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, P_3 = \frac{5x^3 - 3x}{2}, P_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

olmak üzere, Şekil 2.1.'de $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ Legendre polinomlarının grafiği verilmiştir.

Şekil 2.1. P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 Legendre polinomlarının grafiği



$y = f(x)$ fonksiyonunun Gauss-Legendre integral formülü, $[-1,1]$ aralığı üzerinde tanımlanmaktadır ve bu durum lineer dönüşüm yardımıyla $[a,b]$ genel durumuna dönüştürülmektedir.

Gauss-Legendre integral formülü, aşağıda tanımlanan probleme dayalı olarak ortaya çıkmıştır. Buna göre problem şu şekildedir:

x_1, x_2, \dots, x_n noktaları ve A_1, A_2, \dots, A_n katsayılarını öyle seçmek gerekir ki,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (2.17)$$

formülü derecesi en yüksek N olan polinomların tümü için geçerli olsun.

$2n-1$ dereceli polinomlar $2n$ sayıda katsayı ile belirlendiği için, genel halde en yüksek derece $N = 2n - 1$ dir.

(2.17) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul, $f(x)$ fonksiyonunun $1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$ şeklinden seçilmesidir. Bir başka deyişle,

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^k, \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1) \quad (2.18)$$

geçerlidir. Eğer

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k x^k \quad (2.19)$$

şeklinde seçilirse,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \int_{-1}^1 x^k dx \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.18) eşitliği (2.20) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \sum_{i=1}^n A_i x_i^k \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} c_k x_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \end{aligned}$$

veya

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (2.21)$$

sonucuna ulaşılır

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & k \text{ çift ise} \\ 0 & k \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.22)$$

olduğu dikkate alındığında x_i ve A_i 'lerin bulunabilmesi için, (2.23) şeklinde verilen $2n$ sayıda denklemler sisteminin çözülmesi gerekir.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i &= 2, & k &= 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i x_i &= 0, & k &= 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2n-2} &= \frac{2}{2n-1}, & k &= 2n-2 \\ \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2n-1} &= 0, & k &= 2n-1 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

(2.23) sistemi lineer olmayan (nonlinear) denklem sistemidir ve bu sistemin çözümü büyük matematiksel zorluklara dayanmaktadır. Fakat (2.23) sistemini çözmek için aşağıda verilen yöntem uygulanır.

$P_n(x)$ Legendre polinomu olmak üzere,

$$f(x) = x^k P_n(x), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.24)$$

fonksiyonu ele alalım. Bu polinomların derecesi $2n-1$ 'den küçük olduğu için, (2.23) sistemi doğrultusunda (2.18) formülü geçerli olmak zorundadır. Bu durumda,

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^k P_n(x_i), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.25)$$

eşitliği yazılabilir. Legendre polinomlarının ikinci özeliğine göre,

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.26)$$

eşitliği geçerlidir. (2.25) eşitliği (2.26) eşitlinde dikkate alınırsa,

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k P_n(x_i) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.27)$$

elde edilir. (2.27) eşitliğinde $P_n(x_i) = 0$, ($i = 1, \dots, n$) kabul edilirse, A_i 'lerin keyfi değerleri için (2.27) eşitliği geçerlidir. Başka bir ifade ile (2.17) formülüne en yüksek kesinlik derecesi ile ulaşmak için x_i noktaları olarak Legendre polinomunun köklerini seçmek gerekir.

x_i 'ler bilindiğinde (2.23) sisteminin ilk n denkleminde A_i katsayıları bulunabilir. (2.23) sistemin determinantı Vandermonde determinantıdır ve sıfırdan farklıdır. Bir başka ifade ile, Legendre polinomlarının üçüncü özeliğine göre, polinomun kökleri reel birbirinden farklı olduğu için $D = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$ dır. Bu durumda A_i 'ler tek çözüme sahiptir.

x_i 'ler $P_n(x_i)$ Legendre polinomunun kökleri ve A_i 'ler (2.23) sistemi ile tanımlanıyor ise, bu durumda (2.17) formülüne Gauss-Legendre nümerik integral yöntemi denir.

(2.17) formülü, a ve b keyfi sayılar olmak üzere $[a, b]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonları içinde geçerlidir. $[a, b]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonları için

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.28)$$

integralinin Gauss-Legendre nümerik integral formülü,

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1,1] \quad (2.29)$$

lineer dönüşümü yapılarak bulunur. (2.29) dönüşümü (2.28) integralinde uygulandığında,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.30) eşitliği (2.17) formülünde dikkate alındığında,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right) \quad (2.31)$$

formülüne ulaşılır. (2.31) formülüne $[a,b]$ aralığında Gauss-Legendre nümerik integral formülü denir. t_i 'lere Legendre polinomunun kökleri, A_i 'lere ise bu köklere karşılık gelen Gauss ağırlıkları denir (Demidovich ve Maron 1970; Abramowitz ve Stegun 1972).

t_i 'lere Legendre polinomunun kökleri ve bu köklere karşılık gelen A_i Gauss ağırlıklarını bulmak için MATLAB dilinde program yazılmıştır. Bu program yardımıyla elde edilen kök ve ağırlıklar şu şekildedir.

Çizelge 2.1. Gauss-Legendre nümerik integral yönteminde kullanılan Legendre kökleri ve bu köklere karşılık gelen Gauss ağırlıkları

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$$

N	t Legendre Kökleri	A Gauss Ağırlıkları
2	± 0.5773502692	1.0000000000
3	± 0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3418548451 0.6521451549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888

Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımını bulmak için $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının bulunması gerekir. Bunun için $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ 'lerin $\mu_j, (j=1, \dots, m)$ 'lere bağıllığını gösteren

$$\mu_j = \frac{\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}{\int_a^b \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}, \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.32)$$

denklem sisteminden yararlanılır. $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ parametrelerine bağlı integrallerin dahil olduğu denklemler sisteminde bu parametrelerin bulunması gerektiğinden dolayı (2.32) sisteminin çözümü zordur.

Bu durum integral hesabında nümerik çözüm yöntemlerinin kullanılmasını gerektirir. Literatürde Gauss-Legendre yaklaşımı, integral hesabında nümerik çözüm yöntemleri arasında en iyisi olarak kabul edilmektedir (Fikhtengoltz 1959; Demidovich ve Maron 1970; Noble 2000; Rockinger ve Jondeau 2002).

Bu yaklaşım (2.32) sistemindeki,

$$\Omega(\mathbf{\alpha}) = \int_a^b \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx, \quad \mathbf{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.33)$$

integraline uygulansın. Gauss-Legendre nümerik integral formülünde,

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1,1] \quad (2.34)$$

$t \in [-1,1]$ Legendre polinomunu kökleri veya düğüm noktaları olmak üzere, (2.34)

lineer dönüşümü uygulandığında,

$$\Omega(\mathbf{\alpha}) = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j\left[\frac{1}{2}(t(b-a) + (b+a))\right]\right) dt \quad (2.35)$$

eşitliği elde edilir. (2.35) integralinde (2.31) Gauss-Legendre formülü uygulandığında,

$$\Omega(\mathbf{\alpha}) \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j\left[\frac{1}{2}(t_i(b-a) + (b+a))\right]\right)$$

veya

$$\eta_i = \frac{1}{2}(t_i(b-a) + (b+a)) \text{ olmak üzere}$$

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(\eta_i)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.36)$$

sonucu elde edilir. (2.32) eşitliğindeki

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx \quad (2.37)$$

integrali içinde benzer süreç izlendiğinde,

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i g_j(\eta_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(\eta_i)\right) \quad (2.38)$$

sonucu elde edilir. (2.32) eşitliği yaklaşık olarak,

$$\mu_j \approx \frac{1}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i g_j(\eta_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(\eta_i)\right), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.39)$$

ifade edilebilir. Böylece $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanları integral işareti altında olan ve (2.32) de ifade edilen denklem sistemi, parametreleri toplam işareti altında bulunan ve (2.39) da ifade edilen denklem sistemine dönüşür. Bu durum uygun nümerik çözüm yöntemlerinin uygulanmasını kolaylaştırmış olur. Diğer bir ifade ile sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının uygulanabilirliğini genişletmiş olur.

Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımı bir başka ifade ile $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanları (2.39) ile ifade edilen denklem sistemine çeşitli nümerik yöntemler uygulayarak bulunabilir.

2.3. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxEnt Dağılımının Bulunmasına İlişkin İncelemeler

Bu bölümde sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunmasıyla ilgili iki farklı inceleme yapılmıştır. İlk incelemede, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunmasında Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemin performansı simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. İkincisinde ise sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunması ve moment kısıt sayısına bağlı olarak elde edilen MaxEnt dağılımlarının değişimi incelenmiştir. Yapılan tüm hesaplamalar için MATLAB'da yazılan programdan yararlanılmıştır.

2.3.1. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxEnt Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımının Önemi

Bu uygulama ile sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunmasında ortaya çıkan Lagrange çarpanlarının hesaplanmasında kullanılan Gauss-Legendre yaklaşımının performansı, simülasyon çalışmasıyla ortaya konulmuştur. Simülasyon süreci şu şekilde oluşturulur:

- $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının analitik şekilde ifade edilebilen bir dağılım seçilir.
- Seçilen dağılım için $\alpha_j^*, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının gerçek (anakütle) değerleri belirlenir.
- Seçilen dağılımın Lagrange çarpanlarının gerçek değerleri ile n birimlik örnek seçilir.
- Seçilen örnekten, MaxEnt dağılımını belirleyen moment değerleri hesaplanır veya belli bir değer verilir.
- Seçilen dağılıma uygun moment kısıtları yardımıyla oluşturulan MaxEnt dağılımının Lagrange çarpanları Gauss-Legendre yaklaşımı ile hesaplanır.
- Bu süreç N defa tekrarlanır.
- Gauss-Legendre yaklaşımı yardımıyla hesaplanan bir başka ifade ile tahmin edilen Lagrange çarpanları değerlerine uygun *Bias* (yan), *MSE* (ortalama karesel hata) değerleri hesaplanır.

Yukarıdaki sürece göre oluşturulan simülasyon şu şekildedir:

- Bilindiği gibi, moment fonksiyonları $g_1(x) = x$ ve $g_2(x) = x^2$ şeklinde seçildiğinde MaxEnt dağılımı özel olarak Normal dağılıma dönüşür. Ayrıntılı bilgi Bölüm 6.2’de verilmiştir. Bu sebepten dolayına dağılım olarak, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Normal dağılımı seçilmiştir.
- Normal dağılımın parametreleri μ ve σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) şeklinde seçildiğinde, uygun α_1^*, α_2^* Lagrange çarpanları değerleri bulunur. Gerekli ayrıntı Bölüm 6.2’de anlatılmıştır.

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımından sırasıyla $n = 25, 50, 100, 200$ birimlik örnek seçilmiştir.
- Bu örnekten MaxEnt dağılımını belirleyen moment değerleri $\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_j(x)$, ($j = 1, 2$) tahmincileri yardımıyla hesaplanmıştır.
- Normal dağılım için $g_1(x) = x$ ve $g_2(x) = x^2$ moment fonksiyonlarına dayalı MaxEnt dağılımına uygun Lagrange çarpanları Gauss-Legendre yaklaşımı ile hesaplanmıştır.
- Süreç her bir örnek büyüklüğü için $N = 1000$ defa tekrarlanmıştır.
- Gauss-Legendre yaklaşımı yardımıyla hesaplanan Lagrange çarpanları değerlerine uygun *Bias*, *MSE* değerleri hesaplanmıştır.

Yukarıda ifade edilen simülasyon süreci sırasıyla $X \sim N(0,1)$, $X \sim N(-1,3)$ ve $X \sim N(3,1.5)$ rassal değişkenleri için uygulanmıştır ve sonuçlar Çizelge 2.2. de gösterilmiştir.

Çizelge 2.2. $X \sim N(0,1)$, $X \sim N(-1,3)$ ve $X \sim N(3,1.5)$ rassal değişkenleri için MaxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına göre incelenmesi

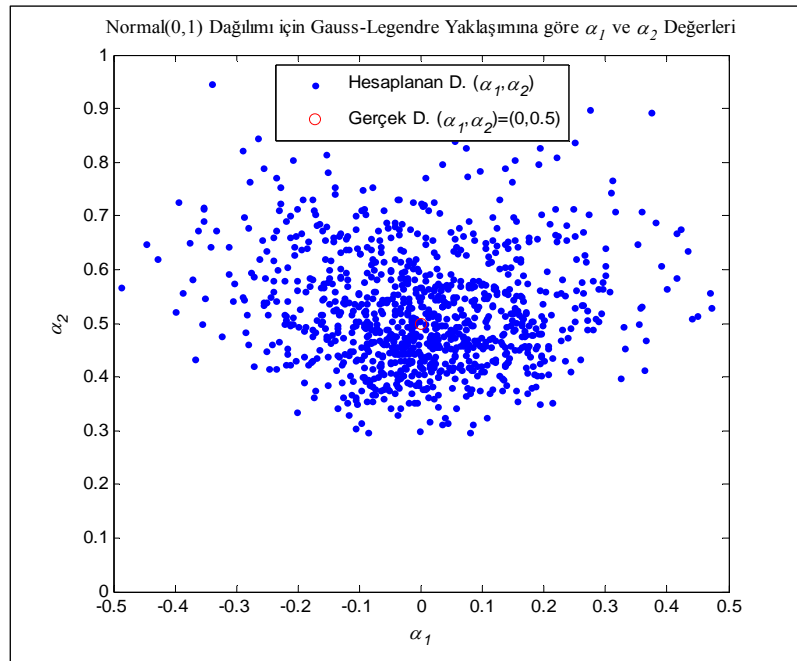
		Gauss-Legendre Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanlarına Uygun Sonuçlar					
		$N(0,1)$		$N(-1,3)$		$N(3,1.5)$	
		$\alpha_1^* = 0$	$\alpha_2^* = 0.5$	$\alpha_1^* = 0.333$	$\alpha_2^* = 0.166$	$\alpha_1^* = -2$	$\alpha_2^* = 0.333$
		α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
<i>Bias</i>	$n = 25$	-0.0083	0.0099	0.0527	0.0281	-0.0252	0.0197
	$n = 50$	0.0078	0.0059	0.0331	0.0162	-0.0125	0.0172
	$n = 100$	0.0028	0.0016	0.0111	0.0070	-0.0116	0.0099
	$n = 200$	-0.0008	0.0009	0.0086	0.0048	-0.0051	0.0090
<i>MSE</i>	$n = 25$	0.0340	0.0281	0.0337	0.0035	0.0997	0.0092
	$n = 50$	0.0203	0.0144	0.0156	0.0018	0.0864	0.0075
	$n = 100$	0.0105	0.0061	0.0080	0.0006	0.0551	0.0026
	$n = 200$	0.0045	0.0029	0.0031	0.0003	0.0250	0.0014

Çizelge 2.2 den görüldüğü gibi α_1 parametresi için n örnek büyüklüklerine ve seçilen dağılımlara uygun Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı olarak

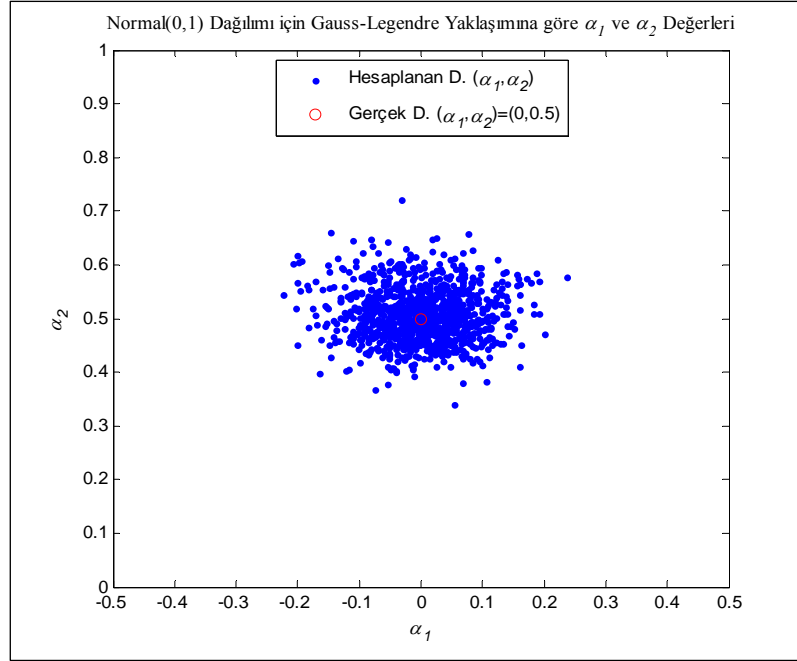
hesaplanan Lagrange çarpanlarının *Bias* değerleri -0.0008 ile 0.0527 arasında değişmektedir. α_2 parametresi için ise, uygun *Bias* değerleri 0.0009 ile 0.02806 arasında değişim göstermektedir. Benzer sonuçlar *MSE* değeri içinde gözlenmektedir. Örneğin α_1 parametresi için n örnek büyüklüklerine ve seçilen dağılımlara uygun *MSE* değerleri 0.0031 ile 0.0997 arasında değişirken, α_2 parametresi için uygun *MSE* değerleri 0.0003 ile 0.0281 arasında değişmektedir. Bir başka ifade ile Gauss-Legendre yaklaşımıyla hesaplanan Lagrange çarpanlarının değerlerine uygun *Bias* ve *MSE* değerleri oldukça küçüktür.

Beklendiği gibi bu sonuçlar aynı zamanda, n örnek büyüklüğü artıkça uygun *Bias* ve *MSE* değerlerinin azaldığını da göstermektedir. Diğer bir ifade ile n örnek büyüklüğüne bağlı olarak artan moment bilgisinin Gauss-Legendre yaklaşımıyla hesaplanan Lagrange çarpanlarının değerlerine yansıdığı görülmektedir. Bu sonuç görsel olarak Şekil 2.2 ve Şekil 2.3' de desteklenmektedir.

Şekil 2.2. $N(0,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n = 25$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı



Şekil 2.3. $N(0,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n = 200$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı



Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'den görüldüğü gibi, $X \sim N(0,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n=200$ birimlik örneklere uygun olacak şekilde hesaplanan Lagrange çarpanlarının α_1 ve α_2 değerlerinin belirlediği (α_1, α_2) noktalarının gerçek $\alpha_1 = 0$ ve $\alpha_2 = 0.5$ değerlerinin belirlediği $(0,0.5)$ noktası etrafındaki saçılımı, $n = 25$ birimlik örneklere göre daha yakındır. Diğer bir ifade ile n örnek büyüklüğüne bağlı olarak moment bilgisi arttıkça, hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı gerçek $(0,0.5)$ noktasına yaklaşmaktadır. Bu görsel sonuç simülasyon sürecinde seçilen tüm rassal değişkenler için de elde edilmiş olmasına rağmen sadece $X \sim N(0,1)$ rassal değişkeni için sunulmuştur.

Elde edilen tüm sonuçlara göre, Gauss-Legendre yaklaşımıyla hesaplanan Lagrange çarpanlarının değerlerinin gerçek değerlere oldukça yakın olduğu söylenebilir. Bir başka ifade ile sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunmasında Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemin kullanımı elverişlidir.

2.3.2. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxEnt Metodunda Moment Koşullarının Önemi

Bu bölümünde sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı olarak bulunmasıyla ilgili bir uygulama yapılmıştır. Dağılımı aranan X rassal değişkeni, İstanbul menkul kıymetler borsasında işlem gören bir hisse senedinin 1996 ile 1998 yılları arasındaki haftalık getiri değerleridir.

MaxEnt dağılımının bulunmasında moment koşullarının önemini göstermek için, moment fonksiyonları olarak literatürde yaygın olarak kullanılan kuvvet fonksiyonları ($g_j(x) = x^j$, $j = 1, \dots, m$) seçilmiştir (Ormoneit ve White 1999; Wu 2003). Ayrıca m moment kısıt sayısının artırılmasına bağlı olarak, α_j , ($j = 1, \dots, m$) Lagrange çarpanlarının değerlerindeki değişim ile uygun MaxEnt dağılımlarının değişimi incelenmiştir.

Hisse senedinin haftalık getirilerinin dağılımı için moment kısıtlarına bağlı olarak altı farklı $(MaxEnt)_m$, ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları aşağıda verilen Entropi optimizasyon probleminin çözümü şeklinde oluşturulur:

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \\ \int_a^b x^j f(x) dx &= \mu_j, \quad (j = 0, \dots, m), \quad (m = 1, \dots, 6) \text{ ve } (\mu_0 = 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

(2.40)'dan görüldüğü gibi, $(MaxEnt)_m$ dağılımı moment kısıt sayısına ($m = 1, \dots, 6$) bağlı olarak değişmektedir. (2.40) ile ifade edilen entropi optimizasyon problemindeki μ_j , ($j = 1, \dots, m$) moment değerleri,

$$\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.41)$$

yardımla hesaplanır. Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları için (2.41) yardımıyla hesaplanan moment değerleri Çizelge 2.3'de verilmiştir.

Çizelge 2.3. Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m=1,\dots,6$) dağılımları için hesaplanan moment değerleri

Moment Sayısı	Moment Değerleri					
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
I	0.2471	—	—	—	—	—
II	0.2471	4.8756	—	—	—	—
III	0.2471	4.8756	3.3137	—	—	—
IV	0.2471	4.8756	3.3137	117.0119	—	—
V	0.2471	4.8756	3.3137	117.0119	-19.1150	—
VI	0.2471	4.8756	3.3137	117.0119	-19.1150	4248.1754

Çizelge 2.3’de görüldüğü gibi, moment fonksiyonun ($g_j(x) = x^j$) derecesi artığında, μ_j moment değerlerinde büyük artışlar olmaktadır. Bu sonuç, moment fonksiyonları kuvvet momentleri şeklinde seçilmesinden ve hisse senedinin haftalık getirilerinin değerlerinde büyük veya küçük sıçramalar olmasından kaynaklanmaktadır. Bu durum MaxEnt dağılımını olumsuz yönde etkilemektedir (Dalén 1987; Wu ve Stengos 2005).

(2.40)’da belirtilen moment kısıtlarına ve Çizelge 2.3’de belirtilen moment değerlerine uygun olarak bulunan $(MaxEnt)_m$ ($m=1,\dots,6$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri Çizelge 2.4’de verilmiştir.

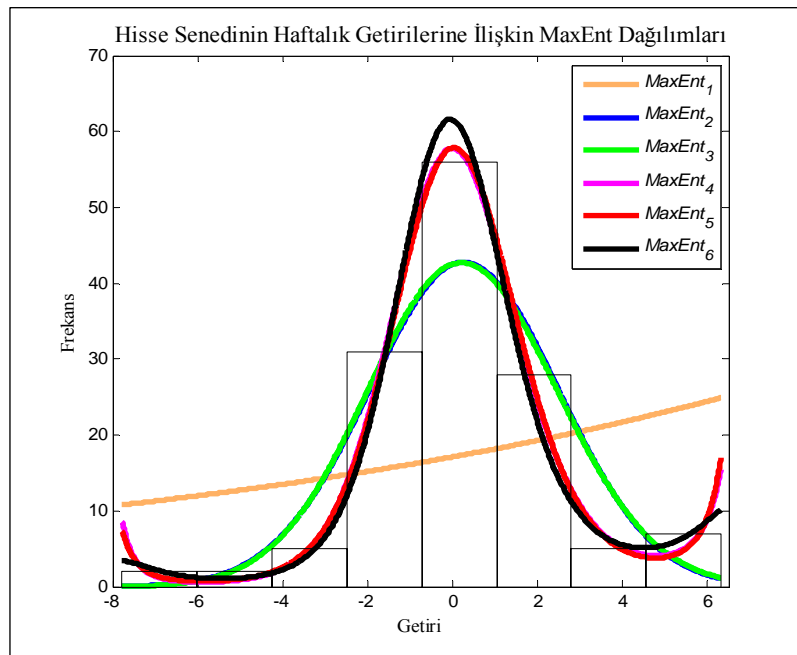
Çizelge 2.4. Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m=1,\dots,6$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

MaxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları Değerleri					
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(MaxEnt)_1$	-0,0593	—	—	—	—	—
$(MaxEnt)_2$	-0.0540	0.1008	—	—	—	—
$(MaxEnt)_3$	-0.0439	0.1010	-0.0007	—	—	—
$(MaxEnt)_4$	0.0015	0.2437	-0.0062	-0.0043	—	—
$(MaxEnt)_5$	-0.0193	0.2453	-0.0029	-0.0044	-0.0001	—
$(MaxEnt)_6$	0.0314	0.3010	-0.0121	-0.0088	0.0002	0.0001

Çizelge 2.4'e göre, $(MaxEnt)_m$ dağılımı için kısıt sayısının artırılması ile Lagrange çarpanlarının değerlerinde bir değişme olduğu görülmektedir. Fakat $g_j(x) = x^j$, $(j = 0, \dots, 5)$ moment fonksiyonlarına uygun $(MaxEnt)_5$ dağılımı için bulunan α_5 Lagrange çarpanı değeri oldukça küçüktür. Benzer sonuç $(MaxEnt)_6$ dağılımında α_5 ve α_6 Lagrange çarpanlarının değerleri içinde geçerlidir. Bu sonuç $g_5(x) = x^5$ ve $g_6(x) = x^6$ moment fonksiyonlarının $(MaxEnt)_m$ dağılımına modelleme bakımından önemli bir katkısı olmadığını gösterir. Ayrıca daha önce belirtildiği gibi $g_4(x)$, $g_5(x)$ ve $g_6(x)$ moment fonksiyonlarına bağlı moment değerleri, istatistiksel verideki büyük veya küçük değerlerden (sıçramalardan) olumsuz yönde etkilenmektedir. Bu olumsuzluklardan dolayı, MaxEnt dağılımı için moment fonksiyonları olarak, $g_j(x) = x^j$, $(j = 1, \dots, m)$ kuvvet fonksiyonlarının kullanılmasının yeterli olmayacağı söylenebilir. Bu durum, daha uygun moment fonksiyonlarının seçimini ön plana çıkarmaktadır (Wu ve Perloff 2007; Shamilov ve ark. 2008a, 2008b; Bera ve Park 2009). İleride bu konu bir bölüm (Bölüm 6.1) halinde tekrar ele alınacaktır.

Hisse senedinin haftalık getirileri için bulunan $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafiği Şekil 2.4'de gösterilmiştir.

Şekil 2.4. Hisse senedinin haftalık getirilerine uygun $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafiği



Şekil 2.4'den hisse senedinin haftalık getirileri için bulunan $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları arasında $(MaxEnt)_4$, $(MaxEnt)_5$ ve $(MaxEnt)_6$ dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu, görsel olarak görülmektedir. Fakat istatistiksel verinin büyük (sağ kuyruk) veya küçük (sol kuyruk) değerlerinde, söz konusu dağılımların olumsuz etkilendiği Şekil 2.4'den görsel olarak da gözlenmektedir. Diğer bir ifade ile Lagrange çarpanları ve moment değerlerinden çıkardığımız sonuç, görsel olarak da desteklenmektedir.

2.4. Sürekli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodu

Bir rassal değişkenden elde edilen moment bilgisini ve aynı rassal değişkene ait önsel dağılım bilgisini, Kullback-Leibler ölçümüne göre minimum yapacak şekilde kullanan metoda MinxEnt metodu ve bu metodunun önerdiği dağılıma da MinxEnt dağılımı denir. MaxEnt metodunda olduğu gibi MinxEnt metodu da, kesikli ve sürekli rassal değişkenler için geçerlidir. MinxEnt metodunun en önemli özelliği önsel dağılım bilgisini kullanmasıdır. Bununla beraber, düzgün dağılım önsel dağılım olarak seçildiği durumlarda, MinxEnt metodu ile MaxEnt metodu arasında çok yakın bir ilişki vardır. Bir başka ifade ile bu iki metot çakışır (Kullback 1997; Kapur ve Kesavan 1992).

Sürekli rassal değişkenler için MinxEnt metodunu kısaca şu şekilde özetlenebilir. X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve önsel dağılımı $q(x)$ olsun. X sürekli rassal değişkeninin Kullback-Leibler ölçümünü,

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (2.42)$$

ve moment kısıtları,

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (2.43)$$

$$\int_a^b g_j(x) f(x) dx = \mu_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.44)$$

şeklinde tanımlanır. (2.44) de ifade edilen $g_j(x)$, $(j=1,\dots,m)$ fonksiyonlarına moment fonksiyonları, μ_j , $(j=1,\dots,m)$ değerlerine de $g_j(x)$, $(j=1,\dots,m)$ moment fonksiyonları yardımıyla rassal değişkenden elde edilen moment değerleri denir.

(2.42)'de tanımlanan Kullback-Leibler ölçümünü (2.43), (2.44) kısıtları altında minimum yapan optimizasyon probleminin $f(x)$ çözümünü, X sürekli rassal değişkenin dağılımı olarak kullanılmasını öneren metoda MinxEnt metodu ve bu metotta önerilen dağılıma MinxEnt dağılımı denir (Kullback 1959).

Sürekli rassal değişkenler için MinxEnt metodun da ortaya çıkan optimizasyon problemi Euler-Lagrange çarpanları yöntemi ile çözülebilir. L Lagrange yardımcı fonksiyoneli,

$$L \equiv \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx - (\alpha_0 - 1) \left(\int_a^b f(x) dx - 1 \right) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\int_a^b g_j(x) f(x) dx - \mu_j \right) \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlanır. α_j , $(j=1,\dots,m)$ 'lere Lagrange çarpanları denir. L Lagrange yardımcı fonksiyoneli gereklilikler yapıldığında $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = q(x) \exp \left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right)$$

şeklinde bulunur (Kapur ve Kesevan 1992; Şamilov 2009). Bir başka ifade ile

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\alpha_0) = \int_a^b q(x) \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right) dx$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} q(x) \exp \left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x) \right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.46)$$

şeklinde gösterilebilir. Genel durumlarda α_j , $(j=1,\dots,m)$ Lagrange çarpanlarının değerlerinin analitik çözümü yoktur. α_j , $(j=1,\dots,m)$ 'ler nümerik yöntemler yardımıyla bulunabilir.

Nümerik yöntemler de kullanılan denklemler, (2.46) ifadesi (2.44)' de yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b q(x) g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})}, \quad (j = 1, \dots, m)$$

veya

$$\mu_j = \frac{\int_a^b q(x) g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}{\int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.47)$$

şeklinde bulunur. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 'lere bağlı olduğu (2.47) ifadesinden görülmektedir.

2.5. Sürekli Rassal Değişkenler için Minimum Çapraz Entropi Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımı

Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt metodunda olduğu gibi, MinxEnt metodunda da Lagrange çarpanlarının bulunması için Newton yöntemi kullanılabilir. Fakat Newton yönteminin uygulanmasında çeşitli zorluklarla karşılaşılır. Bu zorluklardan birisi yine MaxEnt metodunda olduğu gibi, parametrelere (Lagrange çarpanlarına) bağlı integrallerin dahil olduğu denklemler sisteminden bu parametrelerin bulunması gerekliliğidir. Diğer bir ifade ile sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunabilmesi için,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b q(x) g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}{\int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx}, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2.48)$$

denklemler sisteminden α_j , ($j = 1, \dots, m$) 'lerin hesaplanması gerekir Bu durum, MaxEnt metodunda olduğu gibi integral hesabında nümerik yöntemlerden en iyisinin seçilmesini gerektirir. Bölüm 2.2'de anlatıldığı gibi, integral hesabın nümerik yöntemlerinden en önemlisi Gauss-Legendre yöntemidir (Demidovich ve Maron 1970; Abramowitz ve Stegun 1972; Ralston ve Rabinowitz 1978). Bu sebepten dolayı sunulan bu tez çalışmasında, sürekli rassal değişkenler için

MinxEnt dağılımının bulunmasında MaxEnt dağılımında olduğu gibi, Gauss-Legendre nümerik yönteminden yararlanılmıştır.

Bu bölümde sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunmasında kullanılan Gauss-Legendre nümerik yöntemiyle ilgili gerekli ayrıntılar verilmiştir

Bölüm 2.2’de anlatıldığı gibi a ve b keyfi sayılar olmak üzere $[a,b]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonları için,

$$\int_a^b f(x)dx \quad (2.49)$$

integralinin Gauss-Legendre nümerik integral formülü,

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1,1] \quad (2.50)$$

olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right) \quad (2.51)$$

şeklinde tanımlanır. (2.50) formülünde t_i ’lere Legendre polinomunun kökleri, A_i ’lere ise bu köklere karşılık gelen Gauss ağırlıkları denir (Demidovich ve Maron 1970).

Gauss-Legendre yaklaşımı MinxEnt dağılımını bulmak için ilk olarak (2.48) sitemindeki,

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.52)$$

integraline uygulansın. (2.50) Gauss-Legendre formülüne uygun olarak gerekli düzenlemeler yapıldığında, $t_i \in (-1,1)$ Legendre polinomunun kökleri ve A_i ’ler düğüm noktaları olmak üzere,

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i q\left(\frac{1}{2}(t_i(b-a) + (b+a))\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j\left(\frac{1}{2}(t_i(b-a) + (b+a))\right)\right)$$

veya

$$\eta_i = \frac{1}{2}(t_i(b-a) + (b+a)) \quad (2.53)$$

olarak gösterilirse

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i q(\eta_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(\eta_i)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (2.54)$$

sonucu elde edilir. Benzer süreç (2.48) denklemler sistemindeki

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx \quad (2.55)$$

integraller için de uygulandığında,

$$\int_a^b g_j(x) q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i g_j(\eta_i) q(\eta_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(\eta_i)\right) \quad (2.56)$$

sonucu elde edilir. (2.48) denklemler sistemi yaklaşık olarak,

$$\mu_j \approx \frac{1}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i q(\eta_i) g_j(\eta_i) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(\eta_i)\right), \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.57)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Böylece α_j , ($j=1, \dots, m$) Lagrange çarpanları integral işareti altında olan ve (2.48) ile ifade edilen denklemler sistemi, α_j , ($j=1, \dots, m$) bilinmeyenleri toplam işareti altında bulunan ve (2.57) ile ifade edilen denklemler sistemine dönüşmüş olur. Görüldüğü gibi (2.57) sistemine uygun nümerik çözüm yöntemlerinin uygulanması (2.48)'e göre daha da kolaylaştırılmıştır. Bu durum ise sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının uygulanabilirliğini genişletmiş olur.

α_j , ($j=1, \dots, m$) Lagrange çarpanları (2.57) ile ifade edilen denklemler sistemine çeşitli nümerik yöntemler uygulanarak bulunabilir. Daha önce belirtildiği gibi, bu yöntemlerden en önemlisi Newton yöntemidir.

2.6. Sürekli Rassal Değişkenler için MinxEnt Dağılımına Bulunmasına İlişkin İncelemeler

Bu bölümde Bölüm 2.3'de yapılan incelemelere benzer olarak, sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunmasıyla ilgili iki farklı inceleme yapılmıştır. İlk incelemede, sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunmasında Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemin performansı, simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir. İkincisinde ise hem sürekli rassal

değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunması hem de moment kısıt sayısına ve önsel dağılım bilgisine bağlı olarak MinxEnt dağılımının değişimi incelenmiştir. Yapılan tüm hesaplamalar için MATLAB ile yazılan programdan yararlanılmıştır.

2.6.1. Sürekli Rassal Değişkenler için MinxEnt Metodunda Gauss-Legendre Yaklaşımının Önemi

Bu uygulamaya ile sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunmasında ortaya çıkan Lagrange çarpanlarının hesaplanmasında kullanılan Gauss-Legendre yaklaşımının performansı, simülasyon çalışmasıyla gözlenmiştir. Bölüm 2.3.1’de kullanılan simülasyon süreci benzer bir süreç bu bölümde de kullanılmıştır. Buna göre simülasyon süreci şu şekildedir:

- $\alpha_j, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının analitik şekilde ifade edilebilen bir dağılım seçilir.
- Seçilen dağılıma uygun bir önsel dağılım seçilir.
- Seçilen dağılıma ve önsel dağılıma uygun $\alpha_j^*, (j=1, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının gerçek (anakütle) değerleri belirlenir.
- Seçilen dağılımın Lagrange çarpanlarının gerçek değerleri ile n birimlik örnek seçilir.
- Seçilen örnekten, MinxEnt dağılımını belirleyen moment değerleri hesaplanır veya belli bir değer verilir.
- Seçilen dağılıma uygun moment kısıtları yardımıyla oluşturulan MinxEnt dağılımının Lagrange çarpanları Gauss-Legendre yaklaşımı ile hesaplanır.
- Bu süreç N defa tekrarlanır.
- Gauss-Legendre yaklaşımı yardımıyla hesaplanan bir başka ifade ile tahmin edilen Lagrange çarpanları değerlerine uygun $Bias$, MSE değerleri hesaplanır.

Yukarıdaki sürece göre oluşturulan simülasyon şu şekildedir:

- Moment fonksiyonları $g_1(x) = x$ ve $g_2(x) = \ln x$ şeklinde seçildiğinde MinxEnt dağılımı özel olarak Gamma dağılıma dönüşür. Ayrıntılı bilgi

Bölüm 6.3'de verilmiştir. Buna göre dağılım olarak $X \sim Gam(\lambda, \beta)$ gamma dağılımı seçilmiştir.

- Seçilen Gamma dağılımına uygun önsel dağılım olarak $q(x) = \exp(-\bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_1 x - \bar{\alpha}_2 \ln x)$ seçilmiştir.
- Gamma dağılımın parametreleri λ , β ve önsel dağılım parametreleri $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ şeklinde seçildiğinde, uygun α_1^* , α_2^* Lagrange çarpanları değerleri bulunur. Gerekli ayrıntılar Bölüm 6.3'de anlatılmıştır.
- $X \sim Gam(\lambda, \beta)$ gamma dağılımından sırasıyla $n = 25, 50, 100, 200$ birimlik örnek seçilmiştir.
- Bu örnekten MinxEnt dağılımını belirleyen moment değerleri $\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_j(x)$ ($j = 1, 2$) tahmincileri yardımıyla hesaplanmıştır.
- Gamma dağılım için $g_1(x) = x$ ve $g_2(x) = \ln x$ moment fonksiyonlarına dayalı MinxEnt dağılımına uygun Lagrange çarpanları Gauss-Legendre yaklaşımı ile hesaplanmıştır.
- Süreç her bir örnek büyüklüğü için $N = 1000$ defa tekrarlanmıştır.
- Gauss-Legendre yaklaşımı yardımıyla hesaplanan Lagrange çarpanları değerlerine uygun *Bias*, *MSE* değerleri hesaplanmıştır.

Yukarıda ifade edilen simülasyon süreci sırasıyla $X \sim Gam(2, 1)$, $X \sim Gam(3, 0.5)$ ve $X \sim Gam(1.5, 2.5)$ rassal değişkenleri için uygulanmıştır. Ayrıca her bir rassal değişken için sırasıyla $q(x) = \exp(-0.5 - x - \ln x)$, $q(x) = \exp(-0.3 - 0.5x - \ln x)$ ve $q(x) = \exp(2 - 0.6x + 0.5 \ln x)$ önsel dağılımları kullanılmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 2.5'de verilmiştir.

Çizelge 2.5. $Gam(2,1)$, $Gam(3,0.5)$ ve $Gam(1.5,2.5)$ rassal değişkenleri için MinxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına göre incelenmesi

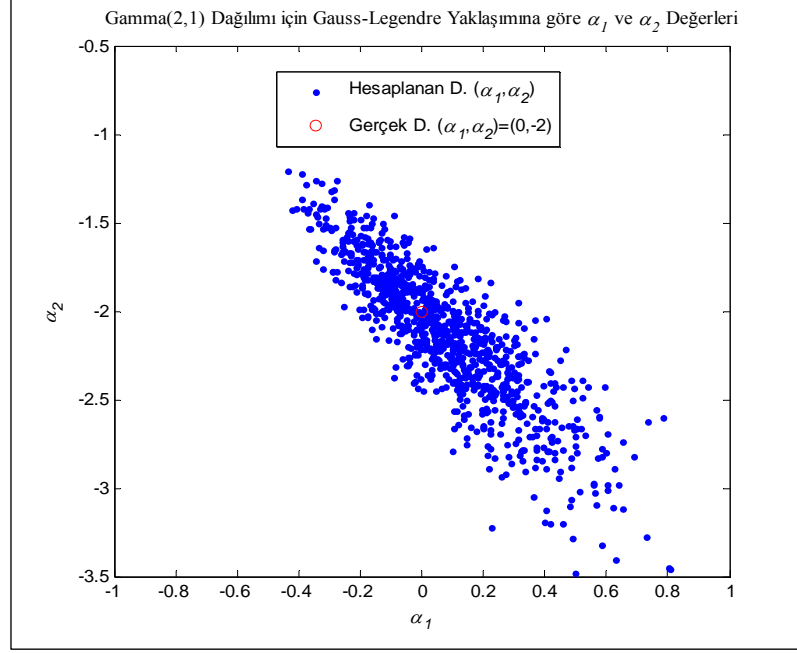
		Gauss-Legendre Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanlarına Uygun Sonuçlar					
		$Gam(2,1)$		$Gam(3,0.5)$		$Gam(1.5,2.5)$	
		$\alpha_1^* = 0$	$\alpha_2^* = -2$	$\alpha_1^* = 1.5$	$\alpha_2^* = -3$	$\alpha_1^* = -0.2$	$\alpha_2^* = 0$
		α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
<i>Bias</i>	$n = 25$	0.1199	-0.1732	0.2195	-0.3867	0.0519	-0.2175
	$n = 50$	0.0698	-0.1106	0.1223	-0.1959	0.0308	-0.0827
	$n = 100$	0.0365	-0.0594	0.0236	-0.0834	0.0260	-0.0766
	$n = 200$	0.0250	-0.0426	0.0114	-0.0098	0.0095	-0.0158
<i>MSE</i>	$n = 25$	0.1984	0.5806	0.4153	0.6131	0.0395	0.3103
	$n = 50$	0.0567	0.1184	0.1860	0.3961	0.0116	0.1007
	$n = 100$	0.0243	0.0739	0.0578	0.1153	0.0072	0.0613
	$n = 200$	0.0130	0.0354	0.0258	0.0433	0.0027	0.0282

Çizelge 2.5 den görüldüğü gibi α_1 parametresi için seçilen dağılımlara ve n örnek büyüklüklerine uygun Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı olarak hesaplanan Lagrange çarpanlarının *Bias* değerleri 0.0095 ile 0.2195 arasında değişmektedir. α_2 parametresi için ise, uygun *Bias* değerleri -0.3867 ile -0.0098 arasında değişim göstermektedir. Benzer sonuçlar *MSE* değeri içinde gözlenmektedir. Örneğin α_1 parametresi için n örnek büyüklüklerine ve seçilen dağılımlara uygun *MSE* değerleri 0.0027 ile 0.4153 arasında değişirken, α_2 parametresi için uygun *MSE* değerleri 0.0282 ile 0.6131 arasında değişmektedir. Bir başka ifade ile *Bias* ve *MSE* değerleri açısından, Gauss-Legendre yaklaşımıyla hesaplanan Lagrange çarpanlarının değerleri gerçek Lagrange çarpanları değerlerine oldukça yakındır.

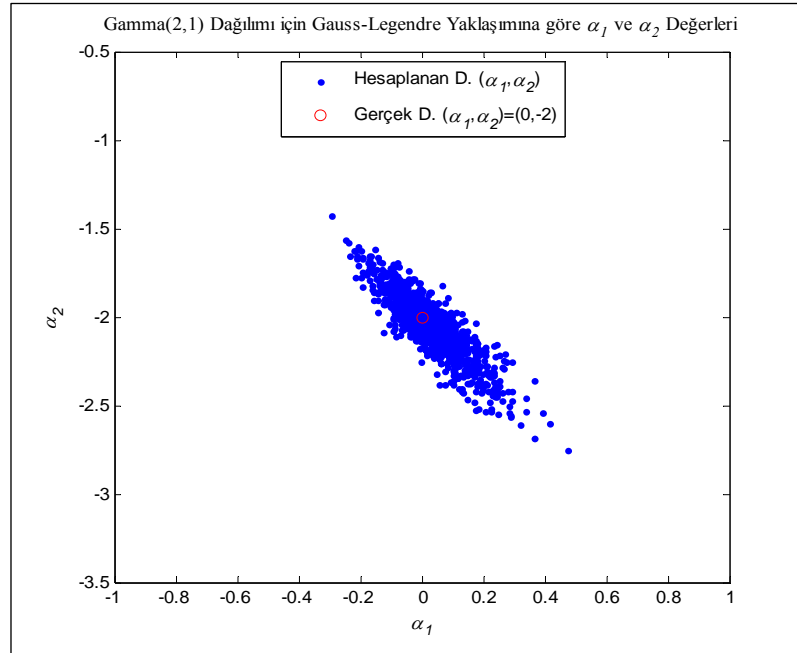
Çizelge 2.5 den aynı zamanda, n örnek büyüklüğü artıkça uygun *Bias* ve *MSE* değerlerin azaldığı da görülmektedir. Diğer bir ifade ile n örnek büyüklüğüne bağlı olarak artan moment bilgisinin, MinxEnt dağılımı için Gauss-Legendre yaklaşımıyla hesaplanan Lagrange çarpanlarının değerlerine yansıdığı gözlenmektedir. Bu sonuç Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da görsel olarak da desteklenmektedir. Bu sonuçlar simülasyon sürecinde seçilen tüm rassal

değişkenler için de elde edilmiş olmasına rağmen, sadece $X \sim Gam(2,1)$ rassal değişkeni için sunulmuştur.

Şekil 2.5. $Gam(2,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n=25$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktalarının saçılımı



Şekil 2.6. $Gam(2,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n=200$ birimlik örnekler için hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktalarının saçılımı



Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'dan görüldüğü gibi, $X \sim Gam(2,1)$ rassal değişkeninden çekilen $n=200$ birimlik örneklere ve $q(x) = \exp(-0.5 - x - \ln x)$ önsel dağılımına uygun olacak şekilde hesaplanan Lagrange çarpanlarının α_1 ve α_2 değerlerinin belirlediği (α_1, α_2) noktalarının gerçek $\alpha_1=0$ ve $\alpha_2=-2$ değerlerinin belirlediği $(0,-2)$ noktası etrafındaki saçılımı, $n=25$ birimlik örnekler için hesaplanan değerlere göre daha yakındır. Başka bir ifade ile n örnek büyüklüğüne bağlı olarak moment bilgisi artıkça, hesaplanan Lagrange çarpanlarına uygun (α_1, α_2) noktaların saçılımı gerçek $(0,-2)$ noktasına yaklaşmaktadır.

Elde edilen tüm sonuçlara göre, Gauss-Legendre yaklaşımıyla hesaplanan Lagrange çarpanlarının değerlerinin gerçek değerlere oldukça yakın olduğu söylenebilir. Bir başka ifade ile sürekli rassal değişkenler için önsel dağılım bilgisine sahip MinxEnt dağılımının bulunmasında Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemin kullanımı uygundur.

2.6.2. Sürekli Rassal Değişkenler için MinxEnt Metodunda Moment Koşullarının ve Önsel Dağılımın Önemi

Bu bölümde sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı olarak bulunmasıyla ilgili bir uygulama yapılmıştır. MaxEnt dağılımı ile önsel dağılım bilgisine sahip MinxEnt dağılımı arasındaki farkı uygulama üzerinde de göstermek amacıyla, dağılımı aranan X rassal değişkeni olarak, Bölüm 2.3.2. kullanılan hisse senedinin haftalık getiri değerleri alınmıştır. Ayrıca bu bölümde moment kısıt sayısına ve önsel dağılım bilgisine bağlı olarak, uygun MinxEnt dağılımlarının değişimi incelenmiştir.

Bu amaçla MinxEnt dağılımlarının bulunmasında, kuvvet fonksiyonları $(g_j(x) = x^j, (j = 1, \dots, m))$ moment fonksiyonları olarak seçilmiştir. Ayrıca MinxEnt dağılımı için iki farklı önsel dağılım $(q_r(x), (r = 1, 2))$ kullanılmıştır. Söz konusu MinxEnt dağılımlarının bulunması için Gauss-Legendre yaklaşımı uygulanmıştır.

Hisse senedinin haftalık getirilerinin dağılımı için her bir $q_r(x)$ ($r=1,2$) önsel dağılımına uygun altı farklı $(MinxEnt)_m^r$ ($m=1,\dots,6$) dağılımı , aşağıda verilen çapraz entropi optimizasyon probleminin çözümü şeklinde oluşturulur:

$$\left. \begin{aligned} D(f : q) &= \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \\ q(x) &= q_r(x), \quad (r=1,2) \\ \int_a^b x^j f(x) dx &= \mu_j, \quad (j=0,\dots,m), \quad (m=1,\dots,6) \text{ ve } (\mu_0=1) \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

(2.58)'den görüldüğü gibi, $(MinxEnt)_m^r$ ($r=1,2$) , ($m=1,\dots,6$) dağılımları önsel dağılıma ve moment kısıt sayısına bağlı olarak değişmektedir. $(MinxEnt)_m^r$ ($r=1,2$) , ($m=1,\dots,6$) dağılımı için önerilen (varsayılan) $q_r(x)$ önsel dağılımlar şu şekildedir:

$$q_1(x) = U(a, b) \quad \text{Düzgün Dağılım} \quad (2.59)$$

$$q_2(x) = N(\mu, \sigma^2) \quad \text{Normal Dağılım} \quad (2.60)$$

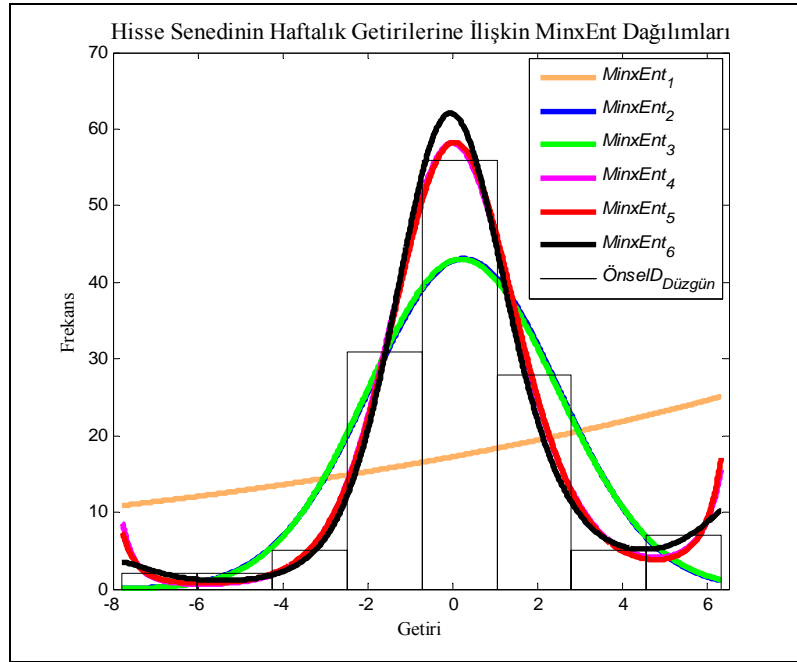
(2.59) ve (2.60)'da verilen önsel dağılımların ilgili parametreleri en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmiştir. Moment değerleri ise Bölüm 2.3.2. deki gibi oluşturulmuştur. Belirtilen moment kısıtlarına ve $q_1(x) = U(-7.77, 6.32)$ önsel dağılımına uygun olarak bulunan $(MinxEnt)_m^1$ ($m=1,\dots,6$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri Çizelge 2.6'da listelenmiştir.

Çizelge 2.6. Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^1$ ($m=1,\dots,6$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları Değerleri					
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(MinxEnt)_1^1$	-0.0593	—	—	—	—	—
$(MinxEnt)_2^1$	-0.0540	0.1008	—	—	—	—
$(MinxEnt)_3^1$	-0.0439	0.1010	-0.0007	—	—	—
$(MinxEnt)_4^1$	0.0015	0.2437	-0.0062	-0.0043	—	—
$(MinxEnt)_5^1$	-0.0193	0.2453	-0.0029	-0.0044	-0.0001	—
$(MinxEnt)_6^1$	0.0314	0.3010	-0.0121	-0.0088	0.0002	0.0001

Daha önce söylenildiği gibi, MinxEnt metodunda önsel dağılım olarak $q_1(x) = U(-7.77, 6.32)$ düzgün dağılımı seçildiğinde, bulunan MinxEnt dağılımı ile aynı moment kısıtları altında bulunan MaxEnt dağılımı çakışır. Bu teorik bilgi, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle elde edilen ve Çizelge 2.6 verilen uygulama sonuçlarıyla da desteklenmektedir. Bir başka ifade ile Çizelge 2.6'da verilen $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarına uygun $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının değerleri, Çizelge 2.4'de verilen $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarına uygun değerlerle aynıdır. Bu sonuç görsel olarak Şekil 2.7'de gözlenmektedir.

Şekil 2.7. Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 2.7'den görüldüğü gibi hisse senedinin haftalık getirileri için $U(-7.77, 6.32)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının görsel sonuçları ile Şekil 2.4'de verilen $(MaxEnt)_m$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının görsel sonuçları aynıdır.

Hisse senedinin haftalık getirileri için $g_j(x) = x^j$, ($j = 1, \dots, m$) moment kısıtlarına ve $q_2(x) = N(0.247, 4.85)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^2$

$(m = 1, \dots, 6)$ dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yonteme göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri Çizelge 2.7’de verilmiştir.

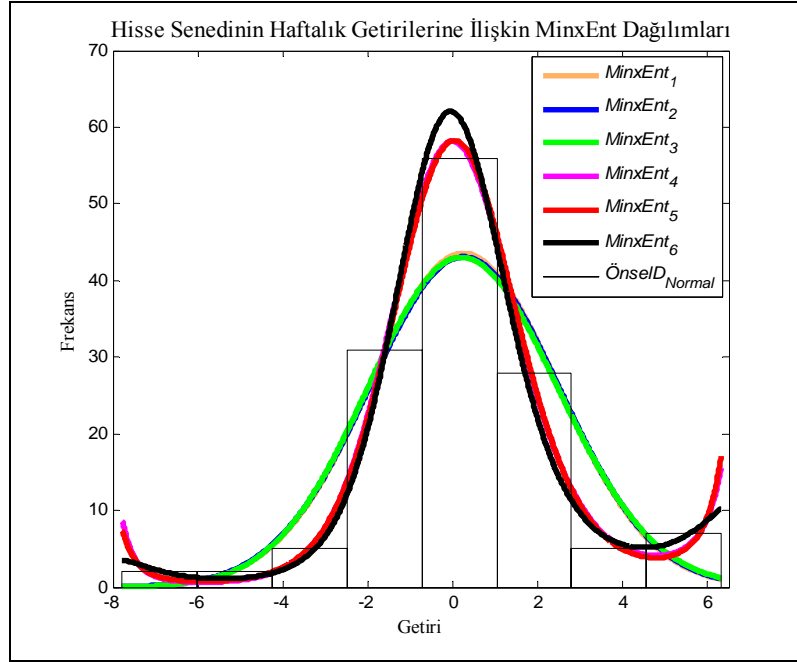
Çizelge 2.7. Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımlara göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları Değerleri					
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(MinxEnt)_1^2$	-0.0039	–	–	–	–	–
$(MinxEnt)_2^2$	-0.0031	-0.0023	–	–	–	–
$(MinxEnt)_3^2$	0.0071	-0.0021	-0.0007	–	–	–
$(MinxEnt)_4^2$	0.0524	0.1406	-0.0062	-0.0043	–	–
$(MinxEnt)_5^2$	0.0317	0.1422	-0.0029	-0.0044	-0.0001	–
$(MinxEnt)_6^2$	0.0823	0.1980	-0.0121	-0.0088	0.0002	0.0001

Çizelge 2.7 den, $q_2(x)$ önsel dağılım bilgisine sahip $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının uygun Lagrange çarpanlarının değerleri, moment kısıt sayısı m ’ye bağlı olarak değiştii görölmektedir. Bu durum önsel dağılım bilgisinin Lagrange çarpanlarını nasıl etkilediğini göstermektedir. Bunlara ek olarak $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları için bulunan Lagrange çarpanları değerleri arasında α_5 ve α_6 Lagrange çarpanlarının değerlerinin oldukça küçük olduğu Çizelge 2.7 den görölmektedir. Tüm bu sonuçlar, önsel dağılımın ve daha uygun moment fonksiyonlarının seçimini ön plana çıkmaktadır. Bu konu Bölüm 6.1’de tekrar ele alınacaktır.

Hisse senedinin haftalık getirileri için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $q_2(x) = N(0.247, 4.85)$ önsel dağılım bilgisine sahip $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının görsel sonuçları Şekil 2.8’de verilmiştir.

Şekil 2.8. Hisse senedinin haftalık getirileri için $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımlarının grafikleri



$N(0.247, 4.85)$ önsel dağılım bilgisinin $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları üzerindeki etkisi, Şekil 2.8'den daha net görülmektedir. Bir başka ifade ile moment kısıt sayısı küçük olan $(MinxEnt)_m^2$ ($m = 1, 2, 3$) dağılımları, önsel dağılım bilgisinden daha çok etkilenmiştir.

Uygulama sürecinde şimdiye kadar, hisse senedinin haftalık getirileri için $U(-7.77, 6.32)$, $N(0.247, 4.85)$ olacak şekilde önsel dağılımlar seçilerek ve moment koşullarını belirleyen aynı moment fonksiyonları kümesinden yararlanılarak, $(MinxEnt)_m^r$ ($r = 1, 2$), ($m = 1, \dots, 6$) dağılımları Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunmuştur. Bu sonuçlar teorik bilgilerin uygulamalı olarak da desteklendiğini göstermesinin yanı sıra MinxEnt metodunda önsel dağılımın ve moment fonksiyonları kümesinin seçiminin önemini de göstermektedir.

3. SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MaxEnt DAĞILIMLARI

Bu bölümde MaxEnt metodu yardımıyla tanımlanmış olan özel entropi optimizasyon fonksiyoneli ve bu fonksiyonelden yola çıkarak moment fonksiyonları kümesinde tanımlanmış olan genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları üzerinde durulmuştur. Diğer bir ifade ile verilmiş moment fonksiyonlar kümesinde istatistiksel veriye Shannon entropi ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan entropi optimizasyon dağılımları (Shamilov 2006,2007) tanıtılmıştır.

Bölüm 2.1’de anlatıldığı gibi Shannon entropi

$$H(x) = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (3.1)$$

ölçümünü (fonksiyoneli)

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (3.2)$$

$$\int_a^b g_j(x) f(x) dx = \mu_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.3)$$

moment kısıtları altında, rassal değişkenden elde edilmiş μ_j , ($j = 1, \dots, m$)

moment değerlerine göre maksimize ederek bulunan MaxEnt dağılım fonksiyonu,

$$f(x) = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) \quad (3.4)$$

şeklindedir. (3.4) formülünde α_j ($j = 0, \dots, m$) Lagrange çarpanları olmak üzere

$g_0(x) = 1$ dir. $g_j(x)$ ($j = 0, \dots, m$) moment fonksiyonlarıdır.

Dağılım fonksiyonu $f(x)$ ’in (3.4) ile ifade edilen değerini $H(x)$ ’in (3.1) ile ifade edilen formülünde yerine yazılarak $H(x)$ ’in maksimum değeri,

$$H_{\max} = \int_a^b \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilir. (3.5)’de (3.4) dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \left(\int_a^b f(x) g_j(x) dx \right) \quad (3.6)$$

olur. (3.3) eşitliğinden yararlanarak (3.6) formülü,

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (3.7)$$

şeklinde de yazılabilir. (3.7) formülünde $\mu_0 = 1$ olmak üzere, $\mu_j, (j = 0, \dots, m)$ 'ler uygun $g_j(x), (j = 0, \dots, m)$ moment fonksiyonları yardımıyla verilmiş rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

(3.7) ve (3.6) formüllerinden görüldüğü gibi $\mu_j, (j = 0, \dots, m)$ 'ler $g_j(x), (j = 0, \dots, m)$ moment fonksiyonlarına bağlı fonksiyoneller gibi ele alınabilir. Bu durumda moment fonksiyonları, $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ vektör fonksiyonu şeklinde yazıldığında H_{\max} , \mathbf{g} vektör fonksiyonuna bağlı bir fonksiyonel gibi yorumlanabilir.

Bu fonksiyonel \mathbf{g} moment vektör fonksiyonlarına bağlı değerleri (3.7) formülüyle belirlenen bir fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov 2006, 2007). Söz konusu fonksiyonel,

$$\tilde{S}(\mathbf{g}) = H_{\max} \quad (3.8)$$

şeklinde gösterilerek, MaxEnt fonksiyoneli olarak isimlendirilir.

Moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda \mathbf{g} moment vektör fonksiyonlarından oluşsun ve K şeklinde gösterilsin ($\mathbf{g} \in K$). Bu durumda (3.8) ile tanımlanmış $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyonelinin önemli özellikleri vardır. Bu özellikler aşağıda verilen teoremler şeklinde ifade edilir:

Teorem 3.1. (3.8) ile ifade edilen $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli K , $K \subset C[a, b]$ sürekli moment vektör fonksiyonları kümesinde süreklidir.

Teorem 3.2. $K \subset C[a, b]$ sürekli moment vektör fonksiyonları kümesi kompakt ise, $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli bu kümede en büyük ve en küçük değerine ulaşır.

Teorem 3.1. ve 3.2.'nin kanıtları (Shamilov 2006) çalışmasında bulunmaktadır.

Eğer K kümesi, sonlu sayıda \mathbf{g} moment vektör fonksiyonlarından oluşuyorsa yukarıda ifade edilen teoremler geçerlidir. Teorem 3.1 ve 3.2 ile ifade edilen özelliklerden yararlanılarak, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları diğer bir ifade ile genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.1. Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt Dağılımı

Sürekli rassal değişkenler için (3.8) de tanımlanmış $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli, $K \subset C[a, b]$ kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde minimum değerini $\mathbf{g}^{(*)} = (g_0^{(*)}, g_1^{(*)}, \dots, g_m^{(*)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın. Bir başka ifade ile,

$$\min_{\mathbf{g} \in K} \tilde{S}(\mathbf{g}) = \tilde{S}(\mathbf{g}^{(*)}) \quad (3.9)$$

şeklinde gösterilsin.

Tanım 3.1. $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde minimum değer veren $(\min_{\mathbf{g} \in K} \tilde{S}(\mathbf{g}) = \tilde{S}(\mathbf{g}^{(*)}))$ $\mathbf{g}^{(*)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $f^{(*)}(x)$ MaxEnt dağılımına, sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı denir.

Sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt dağılımı,

$$f^{(*)}(x) = \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(*)}(x)\right)$$

veya

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\alpha_0) = \int_a^b \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(*)}(x)\right) dx$$

olmak üzere

$$f^*(x) = \frac{1}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} \exp\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(*)}(x)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (3.10)$$

şeklindedir. Burada $\alpha_j, (j = 0, \dots, m)$ 'ler Lagrange çarpanlarıdır ve $\mathbf{g}^{(*)} = (g_0^{(*)}, g_1^{(*)}, \dots, g_m^{(*)})$ vektör fonksiyonu $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneline minimum değer verecek şekilde seçilmiş moment vektör fonksiyonudur.

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ Lagrange çarpanlarının varlığı, tekliği, μ_1, \dots, μ_m 'lere sürekli bağıllığı ve diğer teorik incelemelerin yanı sıra çeşitli uygulamalar (Shamilov 2006, 2007, Usta 2006) çalışmalarında verilmiştir.

3.2. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMaxEnt Dağılımı

Sürekli rassal değişkenler için (3.8) de tanımlanmış $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli, $K \subset C[a, b]$ kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde maksimum değer veren moment vektör fonksiyonu $\mathbf{g}^{(**)} = (g_0^{(**)}, g_1^{(**)}, \dots, g_m^{(**)})$ olsun. Bir başka ifade ile,

$$\max_{\mathbf{g} \in K} \tilde{S}(\mathbf{g}) = \tilde{S}(\mathbf{g}^{(**)}) \quad (3.11)$$

şeklinde gösterilsin.

Tanım 3.2. $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde maksimum değer veren $(\max_{\mathbf{g} \in K} \tilde{S}(\mathbf{g}) = \tilde{S}(\mathbf{g}^{(**)}))$ $\mathbf{g}^{(**)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $f^{(**)}(x)$ MaxEnt dağılımına, sürekli rassal değişkenler için MaxMaxEnt dağılımı denir (Shamilov 2006).

Sürekli rassal değişkenler için MaxMaxEnt dağılımı,

$$f^{(**)}(x) = \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(**)}(x)\right)$$

veya

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\alpha_0) = \int_a^b \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(**)}(x)\right) dx$$

olmak üzere

$$f^{(**)}(x) = \frac{1}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} \exp\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(**)}(x)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (3.12)$$

şeklinde bulunur. (3.12) eşitliğinde α_j , ($j = 0, \dots, m$) 'ler Lagrange çarpanlarıdır ve $\mathbf{g}^{(**)} = (g_0^{(**)}, g_1^{(**)}, \dots, g_m^{(**)})$ vektör fonksiyonu $\tilde{S}(\mathbf{g})$ fonksiyoneline maksimum değer verecek şekilde seçilmiş moment vektör fonksiyonudur (Shamilov 2006, 2007).

3.3. Sürekli Rassal Değişkenler için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Dağılımlarının Bulunmasında Gauss-Legendre Yaklaşımı

Bölüm 3.1 ve Bölüm 3.2 de tanımlandığı gibi sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları diğer bir ifade ile MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları, K moment vektör fonksiyonları kümesine bağlıdır. K moment vektör fonksiyonları kümesi genel anlamda sonsuz sayıda elemanlardan oluşur ve bu durumda genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının bulunması oldukça zordur (Shamilov 2006). Fakat uygulama açısından, K moment fonksiyonları kümesinin sonlu sayıda elemanlardan oluşması da önemlidir. Bu durum, istatistiksel dağılımlara uygun karakterize edici momentlerin sonlu sayıda olması ve bu dağılımların entropi optimizasyon dağılımları şeklinde bulunabilmesiyle de desteklenmektedir (Kagan ve ark. 1973; Kapur 1989).

Buna göre bu tez çalışmasında, sürekli rassal değişkenler için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının pratik uygulamaların yapılabilmesi için K kümesi, m sayıda bileşene sahip sonlu sayıda moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir ve K_m şeklinde gösterilmiştir. Bir başka ifade ile K_m kümesi, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ olacak şekilde $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$, ($m = 1, \dots, l$) ($i = 1, \dots, r_m$), moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca K_m kümesine uygun olarak bulunan genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları da, $(\text{Min MaxEnt})_{K_m, m}$ ve $(\text{Max MaxEnt})_{K_m, m}$ ($m = 1, \dots, l$) şeklinde gösterilmiştir.

$(\text{Min MaxEnt})_{K_m, m}$ dağılımı, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından öyle bir dağılımdır ki, bu dağılımın entropi değeri diğer dağılımların entropi değerlerinden küçüktür. Bir başka ifade ile $(\text{Min MaxEnt})_{K_m, m}$ dağılımı, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından istatistiksel veriye Shannon entropi ölçümüne göre en yakın dağılımdır.

$(\text{Max MaxEnt})_{K_m, m}$ dağılımı ise, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından öyle bir dağılımdır ki, bu dağılımın entropi değeri diğer dağılımların entropi değerlerinden büyüktür. Bir

başka ifade ile $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ dağılımı, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından istatistiksel veriye Shannon entropi ölçümüne göre en uzak dağılımdır (Shamilov 2006, 2007, Shamilov ve ark. 2008b).

Bunlara ek olarak $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MinMaxEnt)_{K_m}$ dağılımlarının entropi değerlerinin farkı, bir başka ifade ile $H[(MaxMaxEnt)_{K_m}] - H[(MinMaxEnt)_{K_m}]$ farkı K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonların belirlediği dağılımların verebileceği bilgi miktarını ifade eder (Shamilov 2006, Shamilov ve ark. 2008b).

Sürekli rassal değişkenler için $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, l$) dağılımlarının bulunması, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) kümesindeki her bir $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$ ($m = 1, \dots, l$), ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonuna (moment kısıdına) uygun MaxEnt dağılımının bulunmasına bağlıdır. Bundan dolayı, sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunması için Bölüm 2.2'de geliştirilmiş Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, l$) dağılımlarının bulunması için de önem taşımaktadır. Diğer bir ifade ile her bir $g^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonuna uygun MaxEnt dağılımındaki Lagrange çarpanlarının integral işareti altında bulunmasından dolayı, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem, sonlu sayıda moment fonksiyonlarına sahip K_m kümesi üzerinde MaxMaxEnt ve MinMaxEnt dağılımlarının bulunması için genelleştirilmiştir.

Sürekli rassal değişkenler için $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, l$) dağılımları, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) kümesindeki her bir $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$ ($m = 1, \dots, l$), ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonuna uygun Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MaxEnt dağılımları arsında, Shannon entropi ölçümü en küçük ve en büyük olacak şekilde seçilerek bulunur. Bu tez çalışmasında elde edilen dağılımlar sırasıyla, Gauss-

Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, l$) dağılımları olarak adlandırılmıştır.

Sürekli rassal değişkenler için $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, l$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunması süreci uygulama üzerinde gösterilmiştir. Buna göre dağılımı aranan X rassal değişkeni olarak, $(MaxEnt)_m$ dağılımının bulunmasında kullanılan (Bölüm 2.3.2) hisse senedinin haftalık getiri değerleri alınmıştır. Dağılımı aranan istatistiksel veri için, $m=1, \dots, 4$ bileşenli moment vektör fonksiyonuna uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları bulunmuştur. Söz konusu dağılımların bulunmasında kullanılan K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesi,

$$M = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \quad (3.13)$$

kuvvet fonksiyonları fonksiyonlarından oluşan kümeye bağlı olarak aşağıdaki gibi oluşturulur:

- K_1 : M kümesinin elemanlarının tüm birli birleşimlerinden oluşan küme
- K_2 : M kümesinin elemanlarının tüm ikili birleşimlerinden oluşan küme
- K_3 : M kümesinin elemanlarının tüm üçlü birleşimlerinden oluşan küme
- K_4 : M kümesinin elemanlarının tüm dörtlü birleşimlerinden oluşan küme

Bu göre örneğin K_4 kümesi,

$$\mathbf{g}^{(1)} = (x, x^2, x^3, x^4), \mathbf{g}^{(2)} = (x, x^2, x^3, x^5), \mathbf{g}^{(3)} = (x, x^2, x^4, x^5),$$

$$\mathbf{g}^{(4)} = (x, x^3, x^4, x^5), \mathbf{g}^{(5)} = (x^2, x^3, x^4, x^5)$$

moment vektör fonksiyonları olmak üzere,

$$K_4 = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \mathbf{g}^{(3)}, \mathbf{g}^{(4)}, \mathbf{g}^{(5)}\} \quad (3.14)$$

şeklinde oluşturulur.

Hisse senedinin haftalık getiri değerleri için K_m , ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}$,

$(m = 1, \dots, 4)$ dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları Çizelge 3.1 verilmiştir.

Çizelge 3.1. Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre				
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları				
	x	x^2	x^3	x^4	x^5
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	—	0.1001	—	—	—
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	—	0.1983	—	-0.0028	—
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	—	0.2436	-0.0062	-0.0043	—
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	—	0.2449	-0.0047	-0.0044	0.0001
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	-0.0593	—	—	—	—
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	0.0400	—	-0.0034	—	—
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	-0.0829	—	0.0080	—	-0.0002
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	0.1107	—	-0.0212	0.0025	0.0005

Çizelge 3.1'den sonuç olarak, K_1 bir bileşenli moment vektör fonksiyonları kümesinde, en küçük entropi değerine sahip $(Min MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı (x^2) moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımıdır. En büyük entropi değerine sahip $(Max MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı ise (x) moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımıdır. K_2 moment vektör fonksiyonları kümesi için uygun $(Min MaxEnt)_{K_2}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_2}$ dağılımları sırasıyla, (x^2, x^4) ve (x, x^3) moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MaxEnt dağılımlarıdır. K_3 kümesi için uygun $(Min MaxEnt)_{K_3}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_3}$ dağılımları, sırasıyla (x^2, x^3, x^4) ve (x, x^3, x^5) moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MaxEnt dağılımlarıdır. K_4 kümesi için uygun

dağılımlar ise sırasıyla, (x^2, x^3, x^4, x^5) ve (x, x^3, x^4, x^5) moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MaxEnt dağılımlarıdır.

Hisse senedinin haftalık getiri değerleri için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $(MaxEnt)_m$, $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının uygun entropi değerleri Çizelge 3.2'de tablolatırılmıştır.

Çizelge 3.2. Hisse senedinin haftalık getirileri için $(MaxEnt)_m$ ve K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$, $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının entropi değerleri

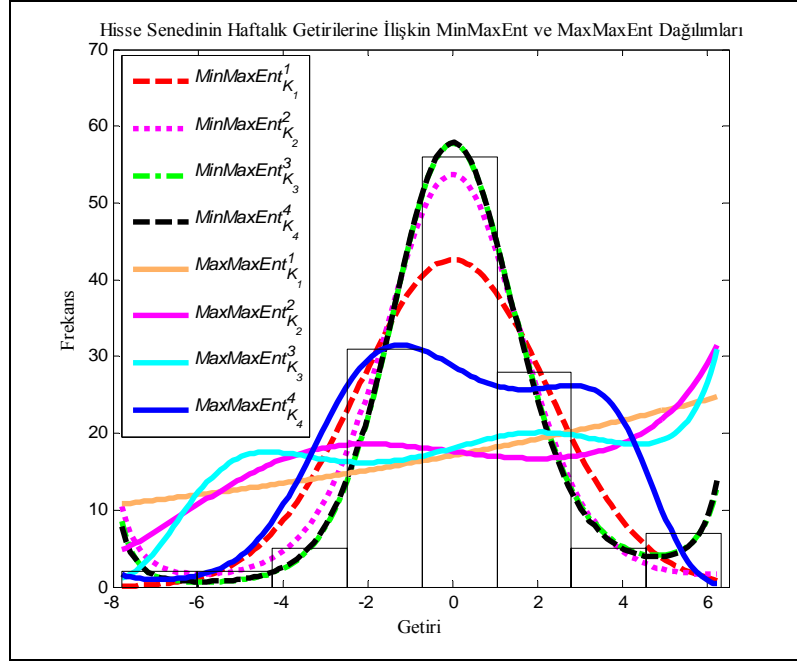
Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	Entropi Değerleri	MaxEnt Dağılımları	Entropi Değerleri i	Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	Entropi Değerleri
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	2.2086	$(MaxEnt)_1$	2.6175	$(Max MaxEnt)_{K_1}$	2.6175
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	2.1235	$(MaxEnt)_2$	2.2016	$(Max MaxEnt)_{K_2}$	2.6010
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	2.0797	$(MaxEnt)_3$	2.2015	$(Max MaxEnt)_{K_3}$	2.5893
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	2.0793	$(MaxEnt)_4$	2.0797	$(Max MaxEnt)_{K_4}$	2.3531

Çizelge 3.2'den görüldüğü gibi, hisse senedinin haftalık getiri değerleri için bulunan $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının entropi değerleri $(MaxEnt)_m$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının entropi değerlerinden küçüktür. Özellikle $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, 2, 3$) dağılımlarının uygun entropi değerleri, diğer değerlere göre oldukça küçüktür. Bir başka dikkat çeken bulgu, moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısı (moment kısıt sayısı) arttırıldığında $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımları için bulunan entropi değerleri, $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımları için bulunan entropi değerlerine yaklaşmaktadır.

Çizelge 3.2'de, hisse senedinin haftalık getiri değerleri için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $(MaxEnt)_m$, $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımları entropi ölçümü açısından karşılaştırılmıştır.

Şekil 3.1’de ise $(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının hisse senedinin haftalık getiri değerlerine uyumu, görsel olarak karşılaştırılmıştır.

Şekil 3.1. Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 3.1’den, K_m , ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun bulunan $(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının, hisse senedinin haftalık getiri değerlerine uyumu görsel olarak gözlenmektedir. Vurgulamak gerekir ki bu görsel sonuçlar, $(MaxEnt)_m$ ($m=1,\dots,4$) dağılımları için bulunan sonuçlara göre oldukça iyidir. Ayrıca Şekil 3.1’den, istatistiksel veriye entropi ölçümüne göre en uzak dağılım olan $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının da grafiği görülmektedir.

Sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m=1,\dots,l$) dağılımlarının çeşitli istatistiksel verilere olan uyumu, Bölüm 7’de daha ayrıntılı incelenmiştir.

4. SÜREKLİ RASSAL DEĞİŞKENLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ MinxEnt DAĞILIMLARI

Bu bölümde önsel dağılım bilgisine sahip MinxEnt metodundan yola çıkarak tanımlanmış olan özel entropi optimizasyon fonksiyoneli ve bu fonksiyonel yardımıyla moment fonksiyonları kümesi üzerinde tanımlanmış olan genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları tanıtılmıştır. Diğer bir ifade ile verilmiş moment fonksiyonlar kümesinde istatistiksel veriye Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan entropi optimizasyon dağılımları (Shamilov 2006, 2007) tanıtılmıştır.

Sürekli rassal değişkenler için Kullback-Leibler çapraz entropi fonksiyonelinin, $q(x)$ önsel dağılımı ve moment kısıtlarına göre minimumu,

$$f(x) = q(x) \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j(x)\right)$$

veya

$$f(x) = q(x) \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) \quad (4.1)$$

şeklinde elde edildiği Bölüm 2.4.1'de gösterilmiştir. (4.1) eşitliğinde α_j , ($j = 0, \dots, m$) Lagrange çarpanları, $g_0(x) = 1$ olmak üzere, $g_j(x)$, ($j = 0, \dots, m$) fonksiyonlarına moment fonksiyonları ve $q(x)$ önsel dağılımdır. Buna göre Kullback-Leibler çapraz entropi fonksiyonelinin minimum değeri, (4.1) ile ifade edilen $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu, $D(f:q)$ çapraz entropi fonksiyonelin de yerine yazıldığında,

$$D_{\min} = -\int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x)\right) dx \quad (4.2)$$

şeklinde elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$D_{\min} = -\sum_{j=0}^m \alpha_j \left(\int_a^b f(x) g_j(x) dx\right) \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinde,

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j$$

olduğundan (4.3) eşitliği,

$$D_{\min} = -\sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (4.4)$$

şeklinde de yazılabilir. (4.4) eşitliğinde $\mu_j, (j=0, \dots, m)$ 'ler $g_j(x), (j=0, \dots, m)$ uygun rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

(4.3) ve (4.4) eşitliklerinden görüldüğü gibi $\alpha_j, (j=0, \dots, 1)$ 'ler $g_j(x), (j=0, \dots, m)$ moment vektör fonksiyonuna bağlı fonksiyonlardır. Bir başka ifade ile moment fonksiyonları $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ vektör şeklinde yazıldığında D_{\min} ifadesi \mathbf{g} vektörüne bağlı bir vektör fonksiyoneldir.

Bu fonksiyonel MinxEnt metodu sonucu yardımıyla, \mathbf{g} moment vektör fonksiyonlarına bağlı D_{\min} değerine sahip fonksiyonel olarak tanımlanmıştır (Shamilov 2006, 2007). Bu fonksiyonel,

$$\tilde{U}(\mathbf{g}) = D_{\min} \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edilebilir ve MinxEnt fonksiyoneli olarak isimlendirilir.

Moment vektör fonksiyonlar kümesi, bileşenleri lineer bağımsız olan sonsuz sayıda \mathbf{g} moment vektör fonksiyonlarından oluşsun ve K şeklinde gösterilsin ($\mathbf{g} \in K$). Bu durumda $\tilde{U}(\mathbf{g})$ fonksiyonelinin önemli özellikleri teorem şeklinde ifade edilebilir:

Teorem 4.1. (4.5) ile ifade edilen $\tilde{U}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli sürekli vektör moment fonksiyonları kümesinde ($C[a,b]$) süreklidir.

Teorem 4.2. ($C[a,b]$) uzayına ait K kompakt kümesinde, $\tilde{U}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli en küçük ve en büyük değerine ulaşır.

Teorem 4.1. ve 4.2.'nin kanıtları (Shamilov 2006) çalışmasında bulunmaktadır.

Eğer K moment vektör fonksiyonlar kümesi sonlu sayıda \mathbf{g} moment vektör fonksiyonlarından oluşuyorsa teoremler şeklinde verilen özellikler geçerlidir. Bu özelliklere göre MaxMinxEnt ve MaxMinxEnt genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

4.1. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt Dağılımı

(4.5)'de tanımlanmış sürekli rassal değişkenler için $\tilde{U}(g)$ fonksiyoneli, $K \subset C[a, b]$ kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde maksimum değeri,

$$\max_{g \in K} \tilde{U}(g) = \tilde{U}(g^{(*)}) \quad (4.6)$$

şeklinde gösterilmek üzere $g^{(*)} = (g_0^{(*)}, g_1^{(*)}, \dots, g_m^{(*)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın.

Tanım 4.1. $\tilde{U}(g)$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde maksimum değer veren $(\max_{g \in K} \tilde{U}(g) = \tilde{U}(g^{(*)}))$ $g^{(*)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $f^{(*)}(x)$ MinxEnt dağılımına, sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı denir. (Shamilov 2006, 2007).

Sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı,

$$f^{(*)}(x) = q(x) \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(*)}(x)\right)$$

veya

$$\Omega(\alpha) = \exp(\alpha_0) = \int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(*)}(x)\right) dx$$

olmak üzere

$$f^{(*)}(x) = \frac{1}{\Omega(\alpha)} q(x) \exp\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(*)}(x)\right), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (4.7)$$

şeklindedir. (4.7) eşitliğinde $\alpha_j, (j=0, \dots, m)$ 'ler Lagrange çarpanlarıdır ve $g^{(*)} = (g_0^{(*)}, g_1^{(*)}, \dots, g_m^{(*)})$ vektör fonksiyonu $\tilde{U}(g)$ fonksiyoneline maksimum değer verecek şekilde seçilmiş moment vektör fonksiyonudur.

4.2. Sürekli Rassal Değişkenler için MinMinxEnt Dağılımı

(4.5)'de tanımlanmış sürekli rassal değişkenler için $\tilde{U}(\mathbf{g})$ fonksiyoneli, $K \subset C[a, b]$ kompakt moment vektör fonksiyonları kümesinde minimum değerini $\mathbf{g}^{(**)} = (g_0^{(**)}, g_1^{(**)}, \dots, g_m^{(**)})$ moment vektör fonksiyonunda alsın. Bir başka deyişle,

$$\min_{\mathbf{g} \in K} \tilde{U}(\mathbf{g}) = \tilde{U}(\mathbf{g}^{(**)}) \quad (4.8)$$

olacak şekilde $\mathbf{g}^{(**)}$ moment vektör fonksiyonu olsun.

Tanım 4.2. $\tilde{U}(\mathbf{g})$ fonksiyoneline K kompakt kümesinde minimum değer veren $(\min_{\mathbf{g} \in K} \tilde{U}(\mathbf{g}) = \tilde{U}(\mathbf{g}^{(**)}))$ $\mathbf{g}^{(**)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $f^{(**)}(x)$ MinxEnt dağılımına, sürekli rassal değişkenler için MinMinxEnt dağılımı denir (Shamilov 2006, 2007).

Bir başka ifade ile sürekli rassal değişkenler için MinMinxEnt dağılımı,

$$f^{(**)}(x) = q(x) \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(**)}(x)\right)$$

veya

$$\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\alpha_0) = \int_a^b q(x) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(**)}(x)\right) dx$$

olmak üzere

$$f^{(**)}(x) = \frac{1}{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} q(x) \exp\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j g_j^{(**)}(x)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (4.9)$$

şeklindedir ve $\mathbf{g}^{(**)} = (g_0^{(**)}, g_1^{(**)}, \dots, g_m^{(**)})$ vektör fonksiyonu $\tilde{U}(\mathbf{g})$ fonksiyoneline minimum değer verecek şekilde seçilmiş moment vektör fonksiyonudur. (4.9) eşitliğinde α_j , ($j = 0, \dots, 1$)'ler Lagrange çarpanlarıdır (Shamilov 2006, 2007).

4.3. Sürekli Rassal Değişkenler için MaxMinxEnt ve MinMinxEnt Dağılımlarının Bulunmasında Gauss-Legendre Yaklaşımı

Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2’de tanımlanmış olan sürekli rassal değişkenler için önsel dağılım bilgisine sahip MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımları, geliştirilmiş MaxEnt dağılımlarında olduğu gibi K moment vektör fonksiyonları kümesine bağlıdır. Söz konusu küme genel halde sonsuz sayıda elemanlardan oluşur. Fakat bu durumda, geliştirilmiş MinxEnt dağılımlarının bulunması oldukça zordur (Shamilov 2006). Pratik uygulamalar açısından ve istatistiksel dağılımlara uygun karakterize edici momentlerin sonlu sayıda olmasından dolayı, K moment fonksiyonları kümesinin sonlu sayıda elemanlardan oluşması da önemlidir (Kagan ve ark. 1973; Dumitrescu 1986; Kapur 1989).

Bu tez çalışmasında sürekli rassal değişkenler için önsel dağılım bilgisine sahip MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının pratik uygulamalarının yapılabilmesi için, geliştirilmiş MaxEnt dağılımlarında olduğu gibi K kümesi, m sayıda bileşene sahip sonlu sayıda moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir ve K_m şeklinde gösterilmiştir. Bir başka ifade ile K_m kümesi, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) olacak şekilde $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$, ($m = 1, \dots, l$) ($i = 1, \dots, r_m$), moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca K_m ($m = 1, \dots, l$) kümesine ve farklı $q_r(x)$ ($r = 1, \dots, v$) önsel dağılımlara uygun olarak bulunan geliştirilmiş MinxEnt dağılımları $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, \dots, v$), ($m = 1, \dots, l$) şeklinde gösterilmiştir.

$q_r(x)$ önsel dağılım bilgisine sahip $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ dağılımı, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından öyle bir dağılımdır ki, bu dağılımın çapraz entropi değeri diğer dağılımların çapraz entropi değerlerinden büyüktür. Diğer bir ifade ile $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ dağılımı, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör

fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından istatistiksel veriye Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümüne göre en yakın dağılımdır.

$q_r(x)$ önsel dağılım bilgisine sahip $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ dağılımı ise, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından öyle bir dağılımdır ki, bu dağılımın çapraz entropi değeri diğer dağılımların çapraz entropi değerlerinden küçüktür. Bir başka ifade ile $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ dağılımı, K_m kümesinin elemanları olan moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasından istatistiksel veriye Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümüne göre en uzak dağılımdır (Shamilov 2006, 2007).

Sürekli rassal değişkenler için $q_r(x)$ önsel dağılım bilgisine sahip $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, \dots, v$), ($m = 1, \dots, l$) dağılımlarının bulunması, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) kümesindeki her bir $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$ ($m = 1, \dots, l$), ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonuna ve $q_r(x)$ ($r = 1, \dots, v$) önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımının bulunmasına bağlıdır. Bu sebepten dolayı, sürekli rassal değişkenler için MinxEnt dağılımının bulunması için Bölüm 2.5'de geliştirilmiş Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, \dots, v$), ($m = 1, \dots, l$) dağılımlarının bulunması için de önemlidir. Bir başka ifade ile her bir $g^{(i)}$ ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonuna ve önsel dağılıma uygun MinxEnt dağılımının Lagrange çarpanlarının integral işareti altında bulunmasından dolayı, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem, sonlu sayıda moment fonksiyonlarına sahip K_m kümesi üzerinde MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının bulunması için genelleştirilmiştir

Sürekli rassal değişkenler için $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, \dots, v$), ($m = 1, \dots, l$) dağılımları, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) kümesindeki her bir $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$, ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonuna ve $q_r(x)$ ($r = 1, \dots, v$) önsel dağılımına uygun Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MinxEnt dağılımları arasında, Kullback-

Leibler çapraz entropi ölçümü en büyük ve en küçük olacak şekilde seçilerek bulunur. Söz konusu dağılımlar bu tez çalışmasında, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, \dots, v$), ($m = 1, \dots, l$) dağılımları olarak adlandırılmıştır.

Sürekli rassal değişkenler için $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, \dots, v$), ($m = 1, \dots, l$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunması süreci, uygulama üzerinde gösterilmiştir. Buna göre dağılımı aranan X rassal değişkeni olarak, Bölüm 3.3'de kullanılan hisse senedinin haftalık getiri değerleri alınmış ve $m = 1, \dots, 4$ bileşenli moment vektör fonksiyonuna ile $q_1(x) = N(0.247, 4.85)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımları bulunmuştur. Söz konusu dağılımların bulunmasında kullanılan K_m , ($m = 1, \dots, 4$) kümesi, Bölüm 3.3'dekine benzer şekilde oluşturulur. Bir başka ifade ile K_m , ($m = 1, \dots, 4$) kümesi,

$$M = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \quad (4.10)$$

kuvvet fonksiyonları fonksiyonlarından oluşan kümeye bağlı olarak aşağıdaki gibi oluşturulur:

- K_1 : M kümesinin elemanlarının tüm birli birleşimlerinden oluşan küme
- K_2 : M kümesinin elemanlarının tüm ikili birleşimlerinden oluşan küme
- K_3 : M kümesinin elemanlarının tüm üçlü birleşimlerinden oluşan küme
- K_4 : M kümesinin elemanlarının tüm dördü birleşimlerinden oluşan küme

Hisse senedinin haftalık getiri değerleri için K_m , ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x) = N(0.247, 4.85)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri Çizelge 4.1 verilmiştir.

Çizelge 4.1. Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre				
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları				
	x	x^2	x^3	x^4	x^5
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	—	—	—	-0.0009	—
$(Max MinxEnt)_{K_2}^1$	—	0.1005	—	-0.0030	—
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	—	0.1431	—	-0.0045	-0.0001
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	0.0115	0.1431	—	-0.0045	-0.0001
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	-0.0039	—	—	—	—
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	-0.0031	-0.0023	—	—	—
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	0.0071	-0.0021	-0.0007	—	—
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	0.1541	0.0121	-0.0239	—	0.0005

Çizelge 4.1'e göre, $q_1(x) = N(0.247, 4.85)$ önsel dağılımına ve K_1 moment vektör fonksiyonları kümesinde, en büyük çapraz entropi değerine sahip $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı (x^4) moment fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. En küçük entropi değerine sahip $(Min MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı ise (x) moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. K_2 moment vektör fonksiyonları kümesi için uygun $(Max MinxEnt)_{K_2}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımları sırasıyla, (x^2, x^4) ve (x, x^2) moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MinxEnt dağılımlarıdır. K_3 ve K_4 kümeleri için uygun $(Max MinxEnt)_{K_3}^1$ ve $(Max MinxEnt)_{K_4}^1$ dağılımları, sırasıyla (x^2, x^4, x^5) ve (x, x^2, x^4, x^5) moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MinxEnt dağılımlarıdır. $(Min MinxEnt)_{K_3}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_4}^1$ dağılımları ise, sırasıyla (x, x^2, x^3) ve (x, x^2, x^3, x^5) moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen dağılımlardır.

Hisse senedinin haftalık getiri değerleri için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $N(0.247, 4.85)$ önsel dağılım bilgisine sahip $(MinxEnt)_m^1$, $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının uygun çapraz entropi değerleri Çizelge 4.2’de listelenmiştir.

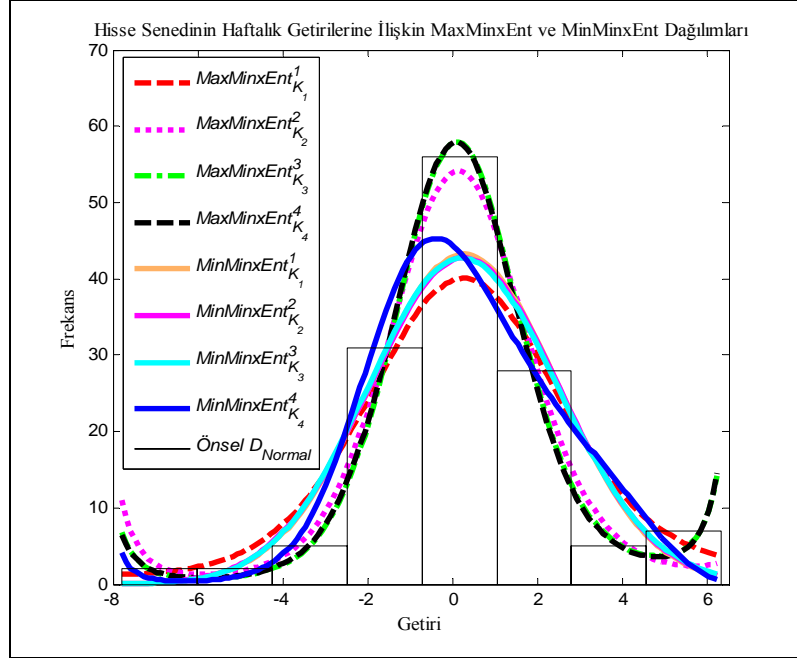
Çizelge 4.2. Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Çapraz Entropi Değerleri	MinxEnt Dağılımları	Çapraz Entropi Değerleri	Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Çapraz Entropi Değerleri
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	0.0309	$(MinxEnt)_1^1$	0.0031	$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	0.0031
$(Max MinxEnt)_{K_2}^1$	0.0979	$(MinxEnt)_2^1$	0.0032	$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	0.0032
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	0.1251	$(MinxEnt)_3^1$	0.0033	$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	0.0033
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	0.1253	$(MinxEnt)_4^1$	0.1251	$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	0.0273

Hisse senedinin haftalık getiri değerleri için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının uygun çapraz entropi değerleri $(MinxEnt)_m^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerlerinden büyük olduğu Çizelge 4.2’den görülmektedir. Dikkat çeken başka bir sonuç, istatistiksel veriye Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümüne göre en uzak dağılım olan $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerlerinin, $(MinxEnt)_m^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarıyla hemen hemen aynı olmasıdır. Ayrıca Çizelge 4.2’den, moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısı arttırıldığında $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının uygun çapraz entropi değerlerinin birbirine yaklaştığı da görülmektedir.

Hisse senedinin haftalık getiri değerleri için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının görsel sonuçları Şekil 4.1’de sunulmuştur.

Şekil 4.1. Hisse senedinin haftalık getirileri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$, $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 4.1'den, K_m , ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x) = N(0.247, 4.85)$ önsel dağılıma uygun bulunan $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu net bir şekilde görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.1'den, istatistiksel veriye çapraz entropi ölçümüne göre en uzak dağılım olan $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının uyumu da gözlenmektedir. Bu görsel sonuçlar, $(MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları için bulunan sonuçlara göre daha iyidir.

Sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan $(MaxMinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(MinMinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1, \dots, v$), ($m=1, \dots, l$) dağılımlarının çeşitli istatistiksel verilere olan uyumu, Bölüm 8'de daha ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

5. ÖZEL ÖNSEL DAĞILIMLARA DAYALI ENTROPİ OPTİMİZASYON DAĞILIMLARI

Entropi optimizasyon dağılımlarının bulunması problemi genel olarak Lagrange çarpanlarının hesaplanmasına dönüştürülmektedir. Lagrange çarpanlarının bulunması da moment kısıtlarına bağlı olarak, ayrıca bir problem oluşturmaktadır. Bu bölümde moment kısıtlarına bağlı özel önsel dağılımlara uygun olarak MinxEnt dağılımı için Lagrange çarpanlarının bulunması yöntemi teorem şeklinde ifade edilmiştir. Söz konusu teorem yardımıyla MinxEnt dağılımı ile aynı moment kısıtları sağlayan MaxEnt dağılımı için de Lagrange çarpanlarının bulunması problemi çözülmüştür.

$q(x)$ önsel dağılımına sahip Kullback-Leibler ölçümü

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (5.1)$$

fonksiyoneli ile ifade edilir. Bu fonksiyonelin,

$$\int_a^b g_j(x) f(x) dx = \mu_j, \quad (j = 0, \dots, m) \text{ ve } (g_0(x) = 1), (\mu_0 = 1) \quad (5.2)$$

kısıtları altında minimizasyon problemi Lagrange çarpanları yöntemi yardımıyla bulunabilir. (5.2) eşitliklerinde $g_j(x)$, ($j = 1, \dots, m$) moment fonksiyonları ve μ_j , ($j = 0, \dots, m$) ise moment değerleridir. Bilindiği üzere (5.1) fonksiyoneline (5.2) moment kısıtları altında minimum değer veren MinxEnt dağılım fonksiyonu,

$$f(x) = q(x) \exp \left(- \sum_{j=0}^m \alpha_j g_j(x) \right) \quad (5.3)$$

şeklinde bulunur. Burada α_j , ($j = 0, \dots, m$) Lagrange çarpanlarıdır.

Özel önsel dağılımlara uygun MinxEnt dağılımı için bulunan Lagrange çarpanları yardımıyla, MinxEnt dağılımı ile aynı moment kısıtları sağlayan MaxEnt dağılımı için de Lagrange çarpanlarının bulunabilmesi problemini çözmek için, uygun optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

Bölüm 2.1'de anlatıldığı gibi,

$$H(x) = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (5.4)$$

formülü ile ifade edilen Shannon ölçümüne,

$$\int_a^b g_j(x)f(x)dx = \mu_j, \quad (j = 0, \dots, m) \text{ ve } (g_0(x) = 1), (\mu_0 = 1) \quad (5.5)$$

kısıtları altında maksimum değer veren MaxEnt dağılım fonksiyonu $\tilde{f}(x)$ Lagrange çarpanları yöntemi ile,

$$\tilde{f}(x) = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \tilde{\alpha}_j g_j(x)\right) \quad (5.6)$$

şeklinde bulunur. Burada $g_j(x)$, $(j = 0, \dots, m)$ Kullback-Leibler ölçümü için ifade edilen optimizasyon probleminin (5.2) kısıtlarında bulunan moment fonksiyonları ile aynıdır, $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ 'ler ise Shannon ölçümü için ifade edilen optimizasyon problemine uygun Lagrange çarpanlarıdır.

(5.3) formülünde bulunan α_j , $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanları ile (5.6) formülünde bulunan $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanları arasındaki bağlantıyı ifade eden aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 5.1: (5.1) Kullback-Leibler fonksiyoneli için ifade edilmiş (5.1), (5.2) optimizasyon probleminde $q(x)$ fonksiyonu,

$$q(x) = \exp\left(-\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j g_j(x)\right) \quad (5.7)$$

şeklinde olsun. Burada $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ keyfi sayılardır.

Bu durumda, (5.1), (5.2) optimizasyon probleminin çözümü olan MinxEnt dağılımı için (5.3)'de ifade edilen Lagrange çarpanları α_j , $(j = 0, \dots, m)$ ve (5.4), (5.5) optimizasyon probleminin çözümü olan MaxEnt dağılımı için (5.6)'da ifade edilen Lagrange çarpanları ise $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ olduğunda

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha_j + \bar{\alpha}_j, \quad (j = 0, \dots, m) \quad (5.8)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanit. $q(x)$ (5.7) formülü ile verildiğinde, (5.1), (5.2) çapraz entropi optimizasyon probleminin çözümü yukarıda ifade edildiği gibi (5.3) formülü ile verilir. (5.3) eşitliği (5.2)'de dikkate alındığında $(\alpha_j + \bar{\alpha}_j)$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının bulunması için,

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=0}^m (\alpha_j + \bar{\alpha}_j) g_j(x)\right) dx = \mu_j, \quad (j = 0, \dots, m) \quad (5.9)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin $(\alpha_j + \bar{\alpha}_j)$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarına göre tek çözüme sahip olduğu bilinmektedir (Cramer 1966; Kapur ve Kesevan 1992; Shamilov 2007). Ayrıca (5.1)'de ifade edilen $D(f:q)$ çapraz entropi fonksiyonelinin (5.3) MinxEnt dağılımına uygun minimum değeri,

$$D_{\min} = -\sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (5.10)$$

şeklinde elde edilir.

(5.4), (5.5) entropi optimizasyon probleminin çözümü yukarıda ifade edildiği gibi (5.6) formülü ile verilir. (5.6) formülü (5.5)'de dikkate alındığında $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarının bulunması için,

$$\int_a^b g_j(x) \exp\left(-\sum_{j=0}^m \tilde{\alpha}_j g_j(x)\right) dx = \mu_j, \quad (j = 0, \dots, m) \quad (5.11)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanlarına göre tek çözüme sahip olduğu bilinmektedir (Cramer 1966; Kapur ve Kesevan 1992; Shamilov 2007). (5.3)'de ifade edilen $H(x)$ entropi fonksiyonelinin (5.6) ile ifade edilen MaxEnt dağılımına uygun maksimum değeri ise

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \tilde{\alpha}_j \mu_j \quad (5.12)$$

şeklinde bulunur.

(5.9) ve (5.11) sistemlerinde $g_j(x)$, $(j = 0, \dots, m)$ moment fonksiyonları ve μ_j , $(j = 0, \dots, m)$ moment değerleri aynı olduğu için bu sistemler eşdeğer sistemlerdir ve (5.9) sisteminin bilinmeyenleri olan $(\alpha_j + \bar{\alpha}_j)$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanları ile (5.11) sisteminin bilinmeyenleri olan $\tilde{\alpha}_j$, $(j = 0, \dots, m)$ Lagrange çarpanları çakışmak zorundadır. Böylece

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha_j + \bar{\alpha}_j, \quad (j = 0, \dots, m) \quad (5.13)$$

olduğu kanıtlanmış olur.

Bu teoremden yararlanılarak elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 5.1: Teorem 5.1.'in koşulları sağlandığı durumda,

$$D_{\min} + H_{\max} = \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j \quad (5.14)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: (5.13) eşitliği (5.10) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$D_{\min} = -\sum_{j=0}^m (\tilde{\alpha}_j - \bar{\alpha}_j) \mu_j$$

veya

$$D_{\min} = -\sum_{j=0}^m \tilde{\alpha}_j \mu_j + \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.12) eşitliği dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$D_{\min} = -H_{\max} + \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j$$

veya

$$D_{\min} + H_{\max} = \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j \quad (5.16)$$

sonucu elde edilir. Böylece (5.14) ispatlanmış oldu.

Sonuç 5.2: $q(x)$ dağılım fonksiyonu şeklinde seçilirse ve $H_{\max} \geq 0$ ise, bu durumda

$$\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j \geq 0 \quad (5.17)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j = 0 \quad (5.18)$$

ise $D_{\min} = H_{\max} = 0$ eşitliği sağlanır.

Kanıt: Eğer $q(x)$ dağılım fonksiyonu şeklinde seçilirse, $D(f, q)$ ölçüm fonksiyonelinin özelliğine göre $D_{\min} \geq 0$ olur. $f(x) \geq 0$ yoğunluk fonksiyonu,

$q(x) \geq 0$, $\int_a^b q(x) dx \leq 1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise,

$$-\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \leq -\int_a^b f(x) \ln q(x) dx$$

veya

$$\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \ln q(x) dx \quad (5.19)$$

eşitsizliği geçerlidir (Cramer 1966). (5.1) formülünden,

$$D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln f(x) dx - \int_a^b f(x) \ln q(x) dx \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.20)'de (5.19) dikkate alındığında,

$$D(f : q) \geq \int_a^b f(x) \ln f(x) dx - \int_a^b f(x) \ln q(x) dx \geq 0$$

veya

$$D(f : q) \geq 0 \quad (5.21)$$

olduğu kanıtlanmış olur. Eğer $q(x) \geq 0$, $\int_a^b q(x) dx = 1$ ise (5.21)'in eşitsizliği

yinede geçerlidir. Ayrıca $H_{\max} \geq 0$ olduğu kabul edildiği için (5.16) eşitliğinden,

$$\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j \geq 0 \quad (5.22)$$

olduğu ortaya çıkar. Eğer Teorem 5.1'de ifade edilen $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n$ sayıları,

$$\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j = 0 \quad (5.23)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilir ise (5.16) eşitliğinden

$$D_{\min} + H_{\max} = \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j = 0$$

veya

$$D_{\min} + H_{\max} = 0 \quad (5.24)$$

elde edilir. $H_{\max} \geq 0$ olduğu kabul edildiği ve $D_{\min} \geq 0$ olduğu için,

$$D_{\min} = H_{\max} = 0 \quad (5.25)$$

eşitliği sağlanmak zorundadır. Böylece Sonuç 5.2 ispatlanmış olur.

Sonuç 5.3: Eğer Teorem 5.1’de ifade edilen $\bar{\alpha}_j$ ($j=0, \dots, m$) sayıları keyfi seçildiğinde,

$$\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j - D_{\min} \quad (5.26)$$

farkı sabittir. Bir başka ifade ile $\bar{\alpha}_j$ ’lerin değişimi D_{\min} ’de etkilediği için (5.26)’nın değeri sabit kalmaktadır.

Kanıt: (5.14) eşitliği

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j - \sum_{j=0}^m \alpha_j \mu_j \quad (5.27)$$

şeklinde de yazıldığında $\bar{\alpha}_j$ ($j=0, \dots, m$)’lerin keyfi seçilmesine bağlı olmayarak, H_{\max} ’ın değeri sabittir. Çünkü H_{\max} değeri $\bar{\alpha}_j$ ’lere bağlı değildir. Böylece

$$\sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \mu_j - D_{\min} \text{ farkı sabittir.}$$

6. ENTROPİ OPTİMİZASYON VE GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON DAĞILIMLARI İÇİN YARDIMCI KONULAR

Bu bölümde genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları için sonlu sayıda moment fonksiyonlarından oluşan kümenin elemanları yardımı ile kurulan moment vektör fonksiyonları kümesi, entropi optimizasyon dağılımları için Lagrange çarpanlarının analitik ifadelerinin bulunması ve yaygın olarak kullanılan bazı istatistiksel testler ile kriterler ele alınmıştır.

6.1. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Dağılımları için Moment Fonksiyonları Kümesi ve Önsel Dağılım

Bölüm 3 ve Bölüm 4’de ifade edildiği gibi, sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları ve genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının tanımlanmasında, K moment fonksiyonları kümesi önemli bir yere sahiptir. Bir başka ifade ile genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları, K moment vektör fonksiyonları kümesine bağlıdır. Genel anlamda K kümesi, sonsuz sayıda moment vektör fonksiyonlarından oluşur. Fakat pratik uygulamalar açısından, K kümesinin sonlu sayıda elemanlardan oluşmasının da önemli olduğu Bölüm 3.3 ve Bölüm 4.3’de vurgulanmıştır. Ayrıca bu durumun, istatistiksel dağılımların karakterize edici momentlerin sonlu sayıda olması ve uygun dağılımların entropi optimizasyon probleminin çözümü şeklinde bulunabilmesiyle de desteklendiği söylenmiştir.(Kagan ve ark. 1973; Gokhale 1975; Dumitrescu 1986; Kapur 1989).

Bölüm 3.3 ve Bölüm 4.3’de genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının pratik uygulamaların yapılabilmesi için K kümesi, sonlu sayıda m tane bileşene sahip moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir ve K_m şeklinde gösterilmiştir. Bir başka ifade ile K_m kümesi, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) olacak şekilde $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$ ($m = 1, \dots, l$), ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonlarından oluşacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca K_m moment vektör fonksiyonları kümesi, literatürde yaygın olarak kullanılan kuvvet fonksiyonlarından yararlanılarak oluşturulmuştur. Fakat

Bölüm 2.3.2 ve Bölüm 2.6.2’de vurgulandığı gibi, kuvvet fonksiyonları moment fonksiyonları olacak şekilde seçilirse, bu durum uygun entropi optimizasyon dağılımlarını olumsuz yönde etkilemektedir (Dalén, 1987; Wu ve Stengos 2005; Bera ve Park 2009). Bu sebepten dolayı, K_m kümesinin elemanlarının kuvvet fonksiyonlarından farklı şekilde seçimi ön plana çıkmaktadır (Bera ve Park 2007, 2009; Shamilov ve ark. 2008a).

Son yıllarda yapılan çalışmalar ve bizim yaptığımız araştırmalarda, bilinen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentleri ve onların çeşitli birleşimlerinden oluşan moment fonksiyonlarına uygun entropi optimizasyon dağılımlarının, istatistiksel veriyi modellemede daha etkin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Örneğin Wu ve Stengos (2005) yılında yaptığı çalışmada, moment fonksiyonu olarak $x, x^2, \ln(1+x^2)$ ve $\sin x$ fonksiyonlarından yararlanmıştır. Wu ve Perloff (2007) yılındaki çalışmasında $x, x^2, \ln(1+x^2)$ ve $\arctan x$ fonksiyonlarını moment fonksiyonları olarak kullanmıştır. Shamilov ve ark.(2008a)’deki çalışmasında, moment fonksiyonu olarak $x, x^2, x^3, \ln x, (\ln x)^2$ ve $\ln(1+x^2)$ fonksiyonlarından yararlanmıştır. Bera ve Park (2007; 2009) yıllarındaki çalışmalarında $|x|^p, \ln(1+|x|^p), x/(1+x^2), \arctan x, \arctan x^2, \sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları yardımıyla moment fonksiyonlarını oluşturmuştur. Bu fonksiyonların seçiminde, istatistiksel dağılımların karakterize edici momentleri ve bu momentler yardımıyla bulunan entropi optimizasyon dağılımlarının özel olarak istatistiksel dağılımlara dönüşmesi durumu etkili olmuştur. Buna göre istatistikte yaygın olarak kullanılan dağılımların, MaxEnt dağılımı olarak elde edilmesi için uygun moment fonksiyonları Çizelge 6.1’de verilmiştir (Gokhale 1975; Kapur ve Kesevan 1992; Bera ve Park 2007, 2009).

Bu sebeplerden dolayı sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunan genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarında kullanılan K_m moment vektör fonksiyonları kümesi, bilinen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentlerinden ve onların çeşitli birleşimlerinden yararlanılarak oluşturulmuştur.

Çizelge 6.1. İstatistiksel dağılımlara uygun MaxEnt dağılımları için moment fonksiyonları

Dağılımın Adı	Moment Fonksiyonu	Elde Edilen Dağılım	Dağılımın yaygın kullanım şekli
Düzgün	Yok	$\exp(-\alpha_0)$	$\frac{1}{(b-a)}, a \leq x \leq b$
Üstel	$\int_a^b xf(x)dx = \mu$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x)$	$\frac{1}{\mu} \exp(-\frac{x}{\mu}), x \geq 0$
Normal	$\int_a^b xf(x)dx = \mu_1$ $\int_a^b x^2 f(x)dx = \mu_2$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}),$ $-\infty < x < \infty$
Log Normal	$\int_a^b \ln xf(x)dx = \mu_1$ $\int_a^b (\ln x)^2 f(x)dx = \mu_2$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 \ln x - \alpha_2 (\ln x)^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}} \exp(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}),$ $x \geq 0$
Gamma	$\int_a^b xf(x)dx = \alpha$ $\int_a^b \ln xf(x)dx = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x),$ $x \geq 0$
Laplace	$\int_a^b x - \mu f(x)dx = \sigma^2$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x ^2)$	$C(\theta) \exp(-\frac{ x-\mu }{\sigma^2}),$ $-\infty < x < \infty$
Gen. Üstel	$\int_a^b x^i f(x)dx = \mu_i$ $i = 1, \dots, N$	$\exp(-\sum_{i=0}^N \alpha_i x^i)$	$\exp(-\sum_{i=0}^N \alpha_i x^i),$ $-\infty < x < \infty$
Weibull	$\int_a^b x^a f(x)dx = 1, a > 0$ $\int_a^b \ln xf(x)dx = -\frac{\nu}{a}$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x^a - \alpha_2 \ln x)$	$ax^{a-1} \exp(-x^a),$ $x \geq 0$
Cauchy	$\int_a^b \ln(1+x^2) f(x)dx = 2 \ln 2$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 \ln(1+x^2))$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)},$ $-\infty < x < \infty$
Ki-Kare	$\int_a^b xf(x)dx = \nu$ $\int_a^b \ln xf(x)dx = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} + \ln 2$	$\exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x)$	$\frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}),$ $x \geq 0$

Genelleştirilmiş MinxEnt dağılımı için bir diğer önemli konu $q(x)$ önsel dağılım konusudur. Buna göre dağılımı aranan istatistiksel veriyle ilgili herhangi bir $q(x)$ önsel dağılım bilgisi varsa, bu durumda söz konusu $q(x)$ 'den yararlanılarak genelleştirilmiş MinxEnt dağılımı bulunur. Herhangi bir $q(x)$ bilgisi olmadığı durumda ise, önsel dağılım olarak, dağılımı aranan istatistiksel verinin daha önceki yıllarına ait verilerinin dağılımı veya literatürdeki uygulamalarda kabul görmüş dağılımlar kullanılabilir. (Pandey 2001a, 2001b; Woodbury ve Ulrych 2004; Ridder ve Rubinstein 2007; Shamilov ve ark. 2006b). Ayrıca şunu belirtmek gerekir ki, eğer istatistiksel veri sadece MinxEnt dağılımı ile modellenmiş olsaydı, bu durumda önsel dağılımın seçimi modellemenin başarısında önemli bir faktör olacaktı. Fakat genelleştirilmiş MinxEnt dağılımı ile verilmiş önsel dağılıma ve moment fonksiyonlarına bağlı olarak Kulback-Leibler ölçümüne göre en yakın dağılım seçildiğinden dolayı önsel dağılımın seçimi belli anlamda MinxEnt dağılımındaki kadar önem taşımamaktadır.

6.2. Entropi Optimizasyon Probleminin Çözümü Olarak Normal Dağılımın ve Uygun Lagrange Çarpanlarının Analitik İfadelerinin Bulunması

Bu bölümde Bölüm 2.3.1 kullanılan normal dağılımın, uygun entropi optimizasyon probleminin çözümü olarak ifade edilebildiği gösterilmiş ve söz konusu problemin çözümünde ortaya çıkan Lagrange çarpanlarının analitik ifadeleri bulunmuştur.

Normal dağılımın karakterize edici moment fonksiyonları x ve x^2 olduğundan dolayı, uygun entropi optimizasyon problemi,

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (6.1)$$

Shannon entropi fonksiyoneline,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (6.2)$$

doğal koşulu ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \mu \quad (6.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \sigma^2 + \mu^2 \quad (6.4)$$

moment koşulları altında maksimum değere veren dağılımın bulunması problemidir. Burada μ ve σ^2 parametreleri sırasıyla, Normal dağılımının ortalaması ve varyansındır. (6.1)-(6.4) probleminin çözümü Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. Lagrange çarpanları $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ile gösterildiğinde söz konusu problemin çözümü,

$$f(x) = \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2) \quad (6.5)$$

şeklinde bulunur.

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ Lagrange çarpanları (6.2)-(6.4) koşulları yardımıyla elde edilmiş,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2) dx &= \mu \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2) dx &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

sisteminden bulunur. α_1 Lagrange çarpanını bulmak için, (6.6) sisteminin ikinci eşitliğinde,

$$\exp(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\alpha_1 x - \alpha_2 x^2) dx = \mu \quad (6.7)$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\alpha_2 \left(x + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^2) dx = \mu \quad (6.8)$$

elde edilir. (6.8) görüldüğü gibi has olmayan integralin yakınsak olması için $\alpha_2 > 0$ olmak zorundadır. Bu sonuç dikkate alındığında (6.8) eşitliği,

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{\left(x + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^2}{\frac{1}{\alpha_2}}\right) dx = \mu \quad (6.9)$$

şeklinde yazılabilir. (6.9)'da

$$z = \frac{x + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}} \quad (6.10)$$

dönüşümü yapıldığında

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha_2}} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right) \exp(-z^2) dz = \mu$$

veya

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{\alpha_2}} \exp(-z^2) dz - \exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \exp(-z^2) dz = \mu \quad (6.11)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{\alpha_2}} \exp(-z^2) dz &= \\ = \exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \left(\exp(-z^2)\Big|_{-\infty}^{\infty}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

ve

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = 1 \quad (6.13)$$

olduğu için (6.11) 'den

$$-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} = \mu$$

veya

$$\alpha_1 = -2\mu\alpha_2 \quad (6.14)$$

sonuncuna ulaşılır.

α_2 Lagrange çarpanı bulmak için, (6.6) sisteminin üçüncü eşitliğinden

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\left(\frac{x + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}}\right)^2\right) dx = \sigma^2 + \mu^2 \quad (6.15)$$

elde edilir ve

$$z = \frac{x + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}} \quad (6.16)$$

dönüşümü yapıldığında

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha_2}} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^2 \exp(-z^2) dz = \sigma^2 + \mu^2$$

veya

$$\begin{aligned}
& A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\alpha_2} \exp(-z^2) dz - A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_1}{\alpha_2^{3/2}} z \exp(-z^2) dz + \\
& + A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \exp(-z^2) dz = \sigma^2 + \mu^2
\end{aligned} \tag{6.17}$$

sonucuna varılır. Burada $A = \exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right)$ dır. (6.17) eşitliğin sol tarafındaki

birinci integralin,

$$\begin{aligned}
& A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\alpha_2} \exp(-z^2) dz = \frac{A}{\alpha_2} \int_{-\infty}^{\infty} z(z \exp(-z^2)) dz = \\
& = \frac{A}{\alpha_2} \left(-z \exp(-z^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) + \frac{A}{\alpha_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2\alpha_2}
\end{aligned}$$

veya

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\alpha_2} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2\alpha_2}, \tag{6.18}$$

ikinci integralin,

$$A \frac{2\alpha_1}{\alpha_2^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp(-z^2) dz = A \frac{\alpha_1}{\alpha_2^{3/2}} \left(\exp(-z^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) = 0, \tag{6.19}$$

üçüncü integralin,

$$\begin{aligned}
& A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \exp(-z^2) dz = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \\
& = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2}
\end{aligned}$$

veya

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \exp(-z^2) dz = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \tag{6.20}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} = \sigma^2 + \mu^2 \tag{6.21}$$

eşitliği elde edilir.

(6.14) eşitliği (6.21) yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2\alpha_2} + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} = \sigma^2 + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2}$$

veya

$$\frac{1}{2\alpha_2} = \sigma^2 \quad (6.22)$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (6.23)$$

sonucuna ulaşılır.

α_0 Lagrange çarpanını bulmak için, (6.6) sisteminin birinci eşitliğini,

$$\exp\left(\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha_2 \left(x + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^2\right) dx = 1 \quad (6.24)$$

şeklinde ifade ederek α_1 ve α_2 'nin (6.14) ve (6.23) ile ifade edilen değerleri yerine yazıldığında,

$$\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \alpha_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right) dx = 1 \quad (6.25)$$

sonucuna varılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right) dx = \sqrt{2\pi}\sigma \quad (6.26)$$

olduğu (6.25)'de dikkate alındığında,

$$\exp\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \alpha_0\right) \sqrt{2\pi}\sigma = 1 \quad (6.27)$$

elde edilir. (6.27)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\alpha_0 = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \quad (6.28)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece normal dağılıma uygun (6.1)-(6.4) entropi optimizasyon probleminin (6.5) ile ifade edilen,

$$f(x) = \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2) \quad (6.29)$$

çözümü, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ Lagrange çarpanları analitik olarak,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \\ \alpha_1 &= -\frac{\mu}{\sigma^2} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

şeklinde bulunur.

(6.30) ile ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ Lagrange çarpanlarının analitik formülleri (6.29) da dikkate alındığında,

$$f(x) = \exp\left(-\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)\right) + \frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)$$

veya

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) \quad (6.31)$$

şeklinde normal dağılımın ($N(\mu, \sigma^2)$) yoğunluk fonksiyonuna dönüşür.

Not 6.1: (6.30) ile ifade edilen analitik formüllerden yararlanılarak, Bölüm 2.3.1 de MaxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunmasında kullanılan uygun α_1^* ve α_2^* Lagrange çarpanlarının değerleri,

- $X \sim N(0,1)$ için $\alpha_1^* = 0$ ve $\alpha_2^* = 0.5$,
- $X \sim N(-1,3)$ için $\alpha_1^* = 0.3333$ ve $\alpha_2^* = 0.1666$,
- $X \sim N(3,1.5)$ için $\alpha_1^* = -2$ ve $\alpha_2^* = 0.3333$

şeklinde bulunur.

6.3. Entropi Optimizasyon Probleminin Çözümü Olarak Gamma Dağılımının ve Uygun Lagrange Çarpanlarının Analitik İfadelerinin Bulunması

Bu bölümde Bölüm 2.6.1 kullanılan gamma dağılımının, uygun entropi optimizasyon probleminin çözümü olarak ifade edilebildiği gösterilmiş ve söz konusu problemin çözümünde ortaya çıkan Lagrange çarpanlarının analitik ifadeleri bulunmuştur.

Gamma dağılımının karakterize edici moment fonksiyonları olan x ve $\ln x$ yardımı ile kurulmuş uygun entropi optimizasyon problemi,

$$H(x) = -\int_0^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (6.32)$$

Shannon entropi fonksiyoneline,

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (6.33)$$

doğal koşulu ve

$$\int_0^{\infty} xf(x) dx = \lambda\beta \quad (6.34)$$

$$\int_0^{\infty} \ln xf(x) dx = \frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} + \ln \beta \quad (6.35)$$

moment koşulları altında maksimum değere veren dağılımın bulunması problemidir. (6.34) ve (6.35) eşitliklerindeki λ ve β , Gamma dağılımında sırasıyla şekil ve ölçek parametreleridir. (6.32)-(6.35) probleminin çözümü Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. Lagrange çarpanları $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ile gösterildiğinde söz konusu problemin çözümü,

$$f(x) = \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) \quad (6.36)$$

şeklinde bulunur.

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ Lagrange çarpanları (6.33)-(6.35) koşulları yardımıyla elde edilmiş,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) dx &= 1 \\ \int_0^{\infty} x \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) dx &= \lambda\beta \\ \int_0^{\infty} \ln x \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) dx &= \frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} + \ln \beta \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

sisteminin çözümü olarak bulunur.

(6.37) sisteminin birinci denklemi,

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) dx = \exp(\alpha_0)$$

veya

$$\int_0^{\infty} x^{-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \exp(\alpha_0) \quad (6.38)$$

şeklinde ifade edildiğinde ve

$$\int_0^{\infty} x^{-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{1-\alpha_2} \Gamma(1-\alpha_2) \quad (6.39)$$

olduğu dikkate alındığında,

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{1-\alpha_2} \Gamma(1-\alpha_2) = \exp(\alpha_0)$$

veya

$$\alpha_0 = \ln\left(\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{1-\alpha_2} \Gamma(1-\alpha_2)\right) \quad (6.40)$$

sonucuna ulaşılır.

α_1 Lagrange çarpanı bulmak için, (6.37) sisteminin ikinci denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\exp(-\alpha_0) \int_0^{\infty} x^{1-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \alpha\beta \quad (6.41)$$

elde edilir. (6.41) eşitliğinde,

$$\int_0^{\infty} x^{1-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{2-\alpha_2} \Gamma(2-\alpha_2) \quad (6.42)$$

olduğu dikkate alındığında,

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{2-\alpha_2} \Gamma(2-\alpha_2) \exp(-\alpha_0) = \lambda\beta \quad (6.43)$$

eşitliği elde edilir. α_0 'ın (6.40) ile ifade edilen değerleri(6.43) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{2-\alpha_2} \Gamma(2-\alpha_2) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_2-1} = \lambda\beta$$

veya

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) (1-\alpha_2) = \lambda\beta \quad (6.44)$$

sonucu elde edilir.

α_2 Lagrange çarpanı bulmak için, (6.39) denkleminin her iki tarafının α_2 parametresine göre türevi alındığında,

$$\int_0^{\infty} \ln(x) x^{-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{1-\alpha_2} \ln\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \Gamma(1-\alpha_2) + \Gamma'(1-\alpha_2) \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{1-\alpha_2} \quad (6.45)$$

elde edilir. α_0 'ın (6.40) ile ifade edilen değerleri (6.45)'de dikkate alındığında,

$$\int_0^{\infty} \ln(x) x^{-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \exp(\alpha_0) \left(\frac{\Gamma'(1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)} + \ln\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \right)$$

veya

$$\exp(-\alpha_0) \int_0^{\infty} \ln(x) x^{-\alpha_2} \exp(-\alpha_1 x) dx = \frac{\Gamma'(1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)} + \ln\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \quad (6.46)$$

sonucuna varılır. (6.37) sisteminin üçüncü eşitliği,

$$\exp(-\alpha_0) \int_0^{\infty} \ln x \exp(-\alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) dx = \frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} + \ln \beta \quad (6.47)$$

şeklinde yazılabilir. (6.47)'de (6.46) eşitliği dikkate alındığında,

$$\frac{\Gamma'(1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)} + \ln\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = \frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} + \ln \beta \quad (6.48)$$

sonucu elde edilir. α_1 ve α_2 Lagrange çarpanının değerleri (6.47) ve (6.48) eşitlikleri dikkate alındığında,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta} \quad (6.49)$$

ve

$$\alpha_2 = 1 - \lambda \quad (6.50)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, Gamma dağılımına uygun (6.32)-(6.35) entropi optimizasyon probleminin (6.36) ile ifade edilen,

$$f(x) = \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 \ln x) \quad (6.51)$$

çözümü, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ Lagrange çarpanlarının analitik ifadeleri,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \ln(\beta^\lambda \Gamma(\lambda)) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\beta} \\ \alpha_2 &= 1 - \lambda \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

olmak üzere bulunur.

(6.52) ile ifade edilen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ Lagrange çarpanlarının analitik formülleri (6.51)'de dikkate alındığında,

$$f(x) = \exp(-\ln(\beta^\lambda \Gamma(\lambda)) - \frac{1}{\beta}x - (1 - \lambda) \ln x)$$

veya

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\lambda \Gamma(\lambda)} \exp(-\frac{1}{\beta}x - (1 - \lambda) \ln x) \quad (6.53)$$

elde edilir. (6.53)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda) \beta^\lambda} x^{\lambda-1} \exp(-\frac{x}{\beta}) \quad (6.54)$$

şeklinde gamma dağılımının ($Gam(\lambda, \beta)$) yoğunluk fonksiyonuna dönüşür.

Not 6.2: Bölüm 2.3.1 de MinxEnt dağılımının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunmasında kullanılan uygun α_1^* ve α_2^* Lagrange çarpanlarının değerleri, (6.54) ile ifade edilen α_1, α_2 Lagrange çarpanlarının analitik formüllerinden ve Bölüm 5'de ifade edilen Teorem 5.1'den yararlanılarak,

- $X \sim Gam(2,1)$ ve $q(x) = \exp(-0.5 - x - \ln x)$ için $\alpha_1^* = 0$ ve $\alpha_2^* = -2$,
- $X \sim Gam(3,0.5)$ ve $q(x) = \exp(3 - 0.5x - \ln x)$ için $\alpha_1^* = 1.5$ ve $\alpha_2^* = -3$,
- $X \sim Gam(1.5, 2.5)$ ve $q(x) = \exp(2 - 0.6x + 0.5 \ln x)$ için $\alpha_1^* = -0.2$ ve $\alpha_2^* = 0$

şeklinde bulunur.

6.4. Model Belirlemek için Bazı Uyum Testleri ve İnfomasyon Kriterleri

Bu bölümde, sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan genelleştirilmiş MaxEnt dağılımları ve genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının istatistiksel veriye uyumunu göstermek için yaygın olarak

kullanılan bazı uyum iyiliği testleri (goodness of fit) ve informasyon kriterleri üzerinde durulmuştur.

İstatistikte birçok önemli uyum iyiliği testleri ve informasyon kriterleri vardır. Bu testler arasında en sık uygulananlar ise Ki-Kare (χ^2), Kolmogorov-Smirnov (KS) testleridir (Gibbons ve Chakraborti 1985; D'Agostino ve Stephens 1986; Huber-Carol ve ark. 2002; Wang ve ark. 2004). İformasyon kriterleri arasında en sık kullanılanlar ise Akaike informasyon (AIC , AIC_c) Bayesian informasyon (BIC , BIC_c) kriterleridir (Akaike 1974; Schwarz 1978; Burnham ve Anderson 2004; Hoeven 2005; Shabri ve Jemain 2006). Bu tez çalışmasında adı geçen uyum iyiliği testleri ve informasyon kriterleri, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMinxEnt, MinMinxEnt dağılımlarının istatistiksel veriye uyumunu göstermek için uygulanmıştır. χ^2 ve KS uyum iyiliği testleri kısaca aşağıda anlatılmıştır.

n birimlik X_1, X_2, \dots, X_n rassal örneği, dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan bir anakütleden olsun. Verilen rassal örnek için belirlenen (bulunan) dağılım fonksiyonu $F_0(x)$ olmak üzere χ^2 ve KS testlerinde hipotezler,

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad \text{bütün } x \text{ 'ler için}$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x) \quad \text{bazı } x \text{ 'ler için}$$

şeklinde ifade edilir.

χ^2 testi için test istatistiği,

k : n birimlik rassal örnekten oluşturulan frekans dağılımının sınıf sayısı

O_i : i . sınıfın gözlenen frekansı ($i = 1, 2, \dots, k$)

E_i : i . sınıfın beklenen (teorik) frekansı ($i = 1, 2, \dots, k$)

olmak üzere,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (6.55)$$

şekilde hesaplanır. Bilindiği üzere, χ^2 test istatistiği χ_{k-s-1}^2 dağılımına zayıf yakınsar. Burada s , belirlenen $F_0(x)$ dağılım fonksiyonundaki bilinmeyen

parametre sayısı olmak üzere, $k - s - 1$ serbestlik derecesidir. χ^2 test istatistiğine uygun olasılık değeri,

$$P_{\chi^2} = P(\chi_{n-s-1}^2 > \chi^2) \quad (6.56)$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda, P_{χ^2} olasılığı belirlenen α anlamlılık düzeyinden büyük ise H_0 hipotezi kabul edilir. Bir başka ifade ile X_1, X_2, \dots, X_n rassal örneği, χ^2 testine göre α anlamlılık düzeyinde $F_0(x)$ dağılım fonksiyonundan gelmiştir denir (Gibbons ve Chakraborti 1985; D'Agostino ve Stephens 1986; Şamilov 2008).

KS testi için test istatistiği,

Y_1, Y_2, \dots, Y_n : n birimlik rassal örneğin sıralı istatistikleri ($X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$)

olmak üzere,

$$D = \max_{1 \leq i \leq n} \left(F_0(Y_i) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F_0(Y_i) \right) \quad (6.57)$$

şeklinde hesaplanır. Bilindiği gibi, D istatistiği Kolmogorov dağılımına (K^*) zayıf yakınsar. D test istatistiğine uygun olasılık değeri,

$$P_D = P(K^* > D) \quad (6.58)$$

olmak üzere, P_D olasılığı belirlenen α anlamlılık düzeyinden büyük ise bu durumda H_0 hipotezi kabul edilir. Bir başka ifade ile X_1, X_2, \dots, X_n rassal örneği, KS testine göre α anlamlılık düzeyinde $F_0(x)$ dağılım fonksiyonundan gelmiştir denir (Gibbons ve Chakraborti 1985; D'Agostino ve Stephens 1986).

AIC ve BIC bilgi kriterlerine bağlı süreç kısaca aşağıda anlatılmıştır.

AIC kriterinin değeri,

L : Belirlenen $F_0(x)$ dağılım fonksiyonuna uygun en çok olabilirlik (maximum likelihood) fonksiyonu

s : $F_0(x)$ dağılım fonksiyonunda bilinmeyen parametre sayısı,

n : Örneklem sayısı

olmak üzere,

$$AIC = -2 \ln L + 2s \quad (6.59)$$

şeklinde hesaplanır (Akaike1974). Örneklem sayısı n küçük olduğunda AIC kriteri kötü sonuçlar verdiği için, AIC kriterinde küçük örneklem için düzeltme terimi kullanılmıştır (Hurvich ve Tsai,1990). Küçük örneklem için AIC_c kriteri:

$$AIC_c = -2 \ln L + 2s + \frac{2s(s+1)}{n-s-1},$$

veya

$$AIC_c = AIC + \frac{2s(s+1)}{n-s-1} \quad (6.60)$$

şeklinde hesaplanır. n değeri yeterince büyük olduğunda, AIC_c 'nin değeri AIC değerine yaklaşır.

Aday dağılımlar arasından en küçük AIC veya AIC_c değerine sahip olan dağılım, AIC veya AIC_c kriterlerine göre en uygun dağılım olarak seçilir. (6.59) ve (6.60)'dan görüldüğü gibi, AIC ve AIC_c kriterlerinin bilinmeyen parametre sayısını ceza faktörü olarak dikkate almaktadır. Bir başka ifade ile parametre sayısının artması istatistiksel modellemeyi artırmasının yanı sıra bilinmeyen parametre yükünü beraberinde getirmektedir (Burnham ve Anderson 2002 Shabri ve Jemain 2006). BIC kriterinin değeri ise,

$$BIC = -2 \ln L + s \ln n \quad (6.61)$$

şeklinde hesaplanır (Schwarz 1978). BIC kriterinde de küçük örneklem için düzeltme terimi kullanılmıştır (McQuarrie 1999; Tremblay ve Wallach 2004). Küçük örneklem için BIC_c kriteri,

$$BIC_c = -2 \ln L + \frac{s(\ln n)n}{n-s-1}, \quad (6.62)$$

şeklinde hesaplanır.

BIC veya BIC_c kriterlerine göre en uygun dağılım AIC veya AIC_c kriterlerine benzer şekilde seçilir. Bir başka deyişle aday dağılımlar arasından en küçük BIC veya BIC_c değerine sahip olan dağılım, en uygun dağılımdır. (6.61) ve (6.62)'den görüldüğü gibi BIC ve BIC_c kriterleri de AIC kriterine benzer olarak, bilinmeyen parametre sayısını ceza faktörü olarak dikkate almaktadır. Fakat dikkate alınan bu ceza faktörü, AIC kriterine göre daha ağırdır. (Burnham ve Anderson 2002, 2004).

7. GAUSS-LEGENDRE YAKLAŞIMINA DAYALI YÖNTEMLERİN BULUNAN GENELLEŞTİRİLMİŞ MaxEnt DAĞILIMLARININ UYGULAMALARI

İstatistiğin en önemli dallarından biri olan dağılımlar teorisidir ve bu teoride geliştirilen dağılımlar istatistiksel veriyi modelleyerek daha iyi sonuçlar almak için uygulanmaktadır. Gerçek hayatta öyle istatistiksel veriler ortaya çıkmaktadır ki, bu veriler bilinen istatistiksel dağılımlarla temsil edilememektedir. Bundan dolayı da istatistikte sürekli olarak daha esnek veya uyumlu dağılımların tanımlanması problemi önem taşımaktadır (Johnson ve ark. 1994, 1995; Hansen ve ark. 2007; Silverman 1986; Balakrishnan ve Lai 2009). Bu tür dağılımlara örnek olarak son yıllarda geliştirilen entropi optimizasyon dağılımları olan MaxEnt, MinxEnt dağılımları ve genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları olan MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt, MinMinxEnt dağılımları gösterilebilir (Kapur ve Kesevan 1992; Shamilov 2006, 2007). Bu dağılımlar daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi, taşıdığı özellikler bakımından oldukça esnek ve güçlü dağılımlardır. Fakat teorik şekilde tanımlanan bu dağılımların uygulanabilirliğinin genişletilmesi ayrıca bir problem oluşturmaktadır. Teorik şekilde tanımlanmış söz konusu dağılımların uygulanabilirliğinin genişletilmesi, daha öncede ifade edildiği gibi bu tez çalışmasında Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı bir yöntem yardımıyla gerçekleştirilmiştir.

Bu bölümde, sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının, diğer bir ifade ile MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının, çeşitli istatistiksel verilerin modellenmesiyle ilgili uygulamaları sunulmuştur. Bu dağılımların istatistiksel veriye uyumu, Bölüm 6.4'de verilen uyum iyiliği testleri ve bilgi teorisi kriterlerine göre incelenmiştir. Ayrıca bulunan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının uyumu görsel olarak da sunulmuştur.

Sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması için gerekli olan tüm hesaplamalar MATLAB ile hazırlanmış program yardımıyla yapılmıştır.

7.1. Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımlarının Uygulaması I

Bu bölüm de sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının diğer bir ifade ile MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının, bir uygulaması olarak, kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının gövdelerine ait çap ölçümlerinin dağılımının bulunması problemi ele alınmıştır. Dağılımı aranan X rassal değişkeni, kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarının inch (inch) birimi cinsinden (1 inch=2.54 cm) ölçüm değerleridir (Schreuder ve Hafley 1977; Karain ve Dudewicz 2000). Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarının dağılımı, Karain ve Dudewicz (2000) tarafından genelleştirilmiş Lamda dağılımı yardımıyla modellenmiştir. Bu bölümde söz konusu dağılım, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları şeklinde modellenmiştir. Modellemede kullanılan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları bir, iki, üç ve dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna uygun olarak tanımlanmıştır.

Bir, iki, üç ve dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna uygun bir başka ifade ile moment kısına uygun $(\text{Min MaxEnt})_{K_m}$ ve $(\text{Max MaxEnt})_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının, kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap ölçümlerine uyumu, Bölüm 6.4’de verilen KS , χ^2 uyum iyiliği testleri ile AIC , AIC_c , BIC ve BIC_c bilgi kriterlerine göre incelenmiştir. Ayrıca bulunan $(\text{Min MaxEnt})_{K_m}$ ve $(\text{Max MaxEnt})_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının uyumu grafikler yardımıyla da gösterilmiştir.

Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarına ait $n = 89$ birimlik örnek ölçüm (gözlem) değerlerine ilişkin tanımlayıcı istatistikler Çizelge 7.1’de verilmiştir. Bir, iki, üç ve dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna uygun $(\text{Min MaxEnt})_{K_m}$ ve $(\text{Max MaxEnt})_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarına ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 7.2–7.9’da listelenmiştir. Bu sonuçlara ek olarak $(\text{Min MaxEnt})_{K_m}$ ve $(\text{Max MaxEnt})_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının görsel uyumu Şekil 7.1–7.3’de verilmiştir.

Çizelge 7.1. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarının örnek ölçüm değerlerine ilişkin tanımlayıcı istatistikler

İstatistikler	Hesaplanan Değerler (İnç)
n (Gözlem sayısı)	89
Mn (Minimum değer)	2.2
Mx (Maksimum değer)	14.8
\bar{X} (Ortalama)	6.7404
S^2 (Varyans)	6.7479
γ_1 (Çarpıklık)	0.4544
γ_2 (Basıklık)	2.7450

Çizelge 7.1'den görüldüğü gibi, Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarına ait ölçüm değerleri 2.2 ile 14.8 arasında değişmektedir. Ölçüm değerlerinin ortalaması 6.7404, varyansı 6.7479, çarpıklığı 0.4544 ve basıklığı ise 2.745 dir.

Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarının dağılımı için araştırılan $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması süreci ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bölüm 3.3'de anlatıldığı gibi, sürekli rassal değişkenler için $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$), m sayıda bileşene sahip moment vektör fonksiyonlarından oluşan K_m kümesine bağlıdır. Bir başka ifade ile $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m = 1, \dots, l$) olacak şekilde $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$, ($i = 1, \dots, r_m$) moment vektör fonksiyonlarından oluşan kümeye bağlıdır. Buna göre K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesi,

$$M = \{\sqrt{x}, x, x^2, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1 + x^2), \arctan x, \arctan x^2\} \quad (7.1)$$

kümesi yardımıyla aşağıdaki gibi oluşturulur:

- K_1 : M kümesinin elemanlarının tüm birli birleşimlerinden oluşan küme
- K_2 : M kümesinin elemanlarının tüm ikili birleşimlerinden oluşan küme
- K_3 : M kümesinin elemanlarının tüm üçlü birleşimlerinden oluşan küme

- K_4 : M kümesinin elemanlarının tüm dörtlü birleşimlerinden oluşan küme

Bu moment fonksiyonlarının seçiminde Bölüm 6.1’de ifade edilen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentlerinden ve diğer moment fonksiyonlarından yararlanılmıştır. Böylece bilinen istatistiksel dağılımları da kapsayan daha geniş istatistiksel dağılımlar arasından, istatistiksel veriyi entropi ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan dağılımlar seçilmiştir.

K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonlar kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$, ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının belirlenmesinde Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri Çizelge 7.2–7.6’da listelenmiştir. Moment vektör fonksiyonlarının çizelgelerdeki gösterimlerinde kolaylık olması amacıyla, moment vektör fonksiyonunu oluşturan her bir bileşen M kümesinde buldukları sıra numarası ile gösterilmiştir. Örneğin “3 8” gösterimi, M kümesinde üçüncü sırada bulunan x^2 ve beşinci sırada olan arctan x^2 moment fonksiyonlarının oluşturduğu $(x^2, arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonunu ifade etmektedir.

Çizelge 7.2. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_1 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Fonksiyonları	Entropi Değerleri	Moment Fonksiyonları	Entropi Değerleri
1	2.4379	5	2.4352
2	2.4138	6	2.4591
<u>3</u>	<u>2.3731</u>	7	2.5014
4	2.4620	<u>8</u>	<u>2.5271</u>

Çizelge 7.2.’den görüldüğü gibi, K_1 kümesinin elemanları olan bir bileşenli moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasında istatistiksel veriye entropi ölçümüne göre en yakın dağılım olan $(Min MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı, “3” moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen, bir başka ifade ile (x^2) ’e uygun MaxEnt dağılımıdır. En uzak dağılım olan $(Max MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı ise “8” veya $(arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımıdır.

Ayrıca K_1 moment vektör fonksiyonları kümesinde en küçük entropi değerine sahip $(Min MaxEnt)_{K_1}$ dağılımına uygun entropi değeri 2.3731, en büyük entropi değerine sahip $(Max MaxEnt)_{K_1}$ dağılımına uygun entropi değeri ise 2.5271 dir.

Çizelge 7.3. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_2 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları	Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları	Entropi Değerleri
1 2	2.3072	2 6	2.3086	4 7	2.4633
<u>1 3</u>	<u>2.3053</u>	2 7	2.3162	4 8	2.4626
1 4	2.3140	2 8	2.4138	5 6	2.3168
1 5	2.4355	3 4	2.3054	5 7	2.3252
1 6	2.3111	3 5	2.3056	5 8	2.4352
1 7	2.4321	3 6	2.3053	6 7	2.4594
1 8	2.4383	3 7	2.3076	6 8	2.4592
2 3	2.3059	3 8	2.3137	<u>7 8</u>	<u>2.5047</u>
2 4	2.3097	4 5	2.3194		
2 5	2.3059	4 6	2.4597		

Çizelge 7.3.'den görüldüğü gibi, K_2 iki bileşenli moment vektör fonksiyonları kümesinde, en küçük entropi değerine sahip $(Min MaxEnt)_{K_2}$ dağılımı “1 3” veya (\sqrt{x}, x^2) moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımıdır. Bu MaxEnt dağılımına uygun entropi değeri de 2.3053'tür. K_2 moment vektör fonksiyonları kümesinde en büyük entropi değerine sahip $(Max MaxEnt)_{K_2}$ dağılımı ise “7 8” veya $(\arctan x, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımıdır ve entropi değeri de 2.5047'dir.

Çizelge 7.4. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_3 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri
1	2	3		2.3053	1	6	8	2.3071		3	4	7		2.3053
1	2	4		2.3089	1	7	8	2.4128		3	4	8		2.3052
1	2	5		2.3059	2	3	4	2.3052		3	5	6		2.3053
1	2	6		2.3084	2	3	5	2.3056		3	5	7		2.3052
1	2	7		2.3059	2	3	6	2.3052		3	5	8		2.3053
1	2	8		2.3058	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>7</u>	<u>2.3051</u>		3	6	7		2.3053
1	3	4		2.3052	2	3	8	2.3052		3	6	8		2.3053
1	3	5		2.3052	2	4	5	2.3059		3	7	8		2.3052
1	3	6		2.3052	2	4	6	2.3088		4	5	6		2.3175
1	3	7		2.3052	2	4	7	2.3062		4	5	7		2.3204
1	3	8		2.3052	2	4	8	2.3062		4	5	8		2.3170
1	4	5		2.3062	2	5	6	2.3059		4	6	7		2.4600
1	4	6		2.3119	2	5	7	2.3059		4	6	8		2.4598
1	4	7		2.3161	2	5	8	2.3058		<u>4</u>	<u>7</u>	<u>8</u>		<u>2.4638</u>
1	4	8		2.3171	2	6	7	2.3088		5	6	7		2.3174
1	5	6		2.3165	2	6	8	2.3087		5	6	8		2.3077
1	5	7		2.3140	2	7	8	2.3080		5	7	8		2.3301
1	5	8		2.4355	3	4	5	2.3053		6	7	8		2.3399
1	6	7		2.3128	3	4	6	2.3053						

Çizelge 7.4'den, K_3 moment vektör fonksiyonları kümesi için uygun $(Min MaxEnt)_{K_3}$ dağılımının $(x, x^2, \arctan x)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımı, $(Max MaxEnt)_{K_3}$ dağılımının ise $(\ln x, \arctan x, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımı olduğu görülmektedir. $(Min MaxEnt)_{K_3}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_3}$ dağılımlarına karşılık gelen entropi değerleri sırasıyla 2.3051 ve 2.4638'dir.

Çizelge 7.5. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_4 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları					Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları					Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları					Entropi Değerleri
1	2	3	4		2.3050	1	3	7	8	2.3051	2	4	6	7	2.3090		
1	2	3	5		2.3050	1	4	5	6	2.3065	2	4	6	8	2.3062		
1	2	3	6		2.3052	1	4	5	7	2.3081	2	4	7	8	2.3061		
1	2	3	7		2.3050	1	4	5	8	2.3066	2	5	6	7	2.3059		
1	2	3	8		2.3052	1	4	6	7	2.3134	2	5	6	8	2.3059		
1	2	4	5		2.3059	1	4	6	8	2.3070	2	5	7	8	2.3058		
1	2	4	6		2.3087	1	4	7	8	2.3186	2	6	7	8	2.3062		
1	2	4	7		2.3059	1	5	6	7	2.3066	3	4	5	6	2.3053		
1	2	4	8		2.3059	1	5	6	8	2.3069	3	4	5	7	2.3052		
1	2	5	6		2.3058	1	5	7	8	2.3258	3	4	5	8	2.3052		
1	2	5	7		2.3058	1	6	7	8	2.3070	3	4	6	7	2.3052		
1	2	5	8		2.3058	2	3	4	5	2.3050	3	4	6	8	2.3053		
1	2	6	7		2.3086	2	3	4	6	2.3052	3	4	7	8	2.3051		
1	2	6	8		2.3060	2	3	4	7	2.3049	3	5	6	7	2.3053		
1	2	7	8		2.3061	2	3	4	8	2.3052	3	5	6	8	2.3053		
1	3	4	5		2.3051	2	3	5	6	2.3049	3	5	7	8	2.3051		
1	3	4	6		2.3052	2	3	5	7	2.3050	3	6	7	8	2.3051		
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>7</u>		<u>2.3049</u>	2	3	5	8	2.3052	4	5	6	7	2.3179		
1	3	4	8		2.3052	2	3	6	7	2.3050	4	5	6	8	2.3077		
1	3	5	6		2.3051	2	3	6	8	2.3052	4	5	7	8	2.3218		
1	3	5	7		2.3052	2	3	7	8	2.3050	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>2.3405</u>		
1	3	5	8		2.3050	2	4	5	6	2.3059	5	6	7	8	2.3076		
1	3	6	7		2.3051	2	4	5	7	2.3059							
1	3	6	8		2.3052	2	4	5	8	2.3059							

Çizelge 7.5'e göre, K_4 kümesi için uygun $(Min MaxEnt)_{K_4}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_4}$ dağılımlarının sırasıyla $(\sqrt{x}, x^2, \ln x, \arctan x)$ ve $(\ln x, \ln(1+x^2), \arctan x, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MaxEnt dağılımlarıdır.

Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap ölçüm değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları ve entropi değerleri sırasıyla, Çizelge 7.6 ve Çizelge 7.7'de verilmiştir.

Çizelge 7.6. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre							
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları							
	\sqrt{x}	x	x^2	$\ln x$	$(\ln x)^2$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	—	—	0.011	—	—	—	—	—
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	-2.131	—	0.036	—	—	—	—	—
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	—	-0.411	0.041	—	—	—	-2.758	—
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	-14.567	—	0.056	18.298	—	—	-27.232	—
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	—	—	—	—	—	—	—	2.720
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	—	—	—	—	—	—	2.142	0.959
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	—	—	—	0.676	—	—	0.110	0.046
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	—	—	—	-3.636	—	3.897	-13.375	-12.294

Çizelge 7.7. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının entropi değerleri

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	x^2	—	—	—	2.3731
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	\sqrt{x}	x^2	—	—	2.3053
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	x	x^2	$\arctan x$	—	2.3051
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	\sqrt{x}	x^2	$\ln x$	$\arctan x$	2.3049
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	$\arctan x^2$	—	—	—	2.5271
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	—	—	2.5047
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	$\ln x$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	—	2.4638
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	$\ln x$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	2.3405

Çizelge 7.7'den görüldüğü gibi, K_m , ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$, ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının entropi değerleri 2.3731 ile 2.3049 arasında değişmektedir. Bir başka ifade ile moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısı veya moment kısıt sayısı artırıldığında

entropi değeri 2.3731'den 2.3049'e azalmaktadır. $(Max MaxEnt)_{K_m}$, $(m = 1, \dots, 4)$ dağılımlarının entropi değerleri ise 2.5271'den 2.3405'e azalmaktadır Bu sonuç her bir moment kısıdının belli miktarda bilgi üretmesinden dolayı kısıt sayısının artması ile entropi miktarının azalmasını göstermektedir. Böylece elde edilen sonuçlar istatistiksel veriyi modellemede moment fonksiyonlarının ve kısıt sayısının önemini göstermektedir.

$(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ $(m = 1, \dots, 4)$ dağılımlarının, incelemekte olduğumuz istatistiksel veriye uyumunu ifade eden uyum testleri ve kriterleriyle ilgili sonuçlar Çizelge 7.8'de verilmiştir.

Çizelge 7.8. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m $(m = 1, \dots, 4)$ moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ $(m = 1, \dots, 4)$ dağılımlarının uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	0.1387	0.0590	14.6860	0.0118	424.408	424.454	426.897	427.001
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	0.0666	0.7995	3.1512	0.5329	414.338	414.478	419.316	419.629
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	0.0659	0.8102	3.1283	0.3723	416.313	416.595	423.777	424.412
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	0.0632	0.8474	3.1356	0.2085	418.278	418.754	428.232	429.301
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	0.2689	0.0001	36.2713	0.0001	451.831	451.876	454.319	454.422
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	0.2308	0.0001	33.8248	0.0001	449.845	449.985	454.823	455.136
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	0.1753	0.0073	28.1390	0.0001	444.549	444.831	452.015	452.648
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	0.0815	0.5677	7.4583	0.0240	424.615	425.091	434.569	435.639

Çizelgeden görüldüğü gibi, KS testine göre kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımına her bir $(Min MaxEnt)_{K_m}$, $(m = 1, \dots, 4)$ dağılımı, %5 anlamlılık düzeyinde uyum sağlamaktadır. χ^2 testine göre ise, %5 anlamlılık düzeyinde $(Min MaxEnt)_{K_m}$ $(m = 2, 3, 4)$ dağılımlarının her biri istatistiksel veriye uyum sağlamaktadır.

KS ve χ^2 testlerine göre istatistiksel veriye uyum sağlayan, $(Min MaxEnt)_{K_m}$ $(m = 2, 3, 4)$ dağılımları arasında AIC ve BIC kriterlerine göre

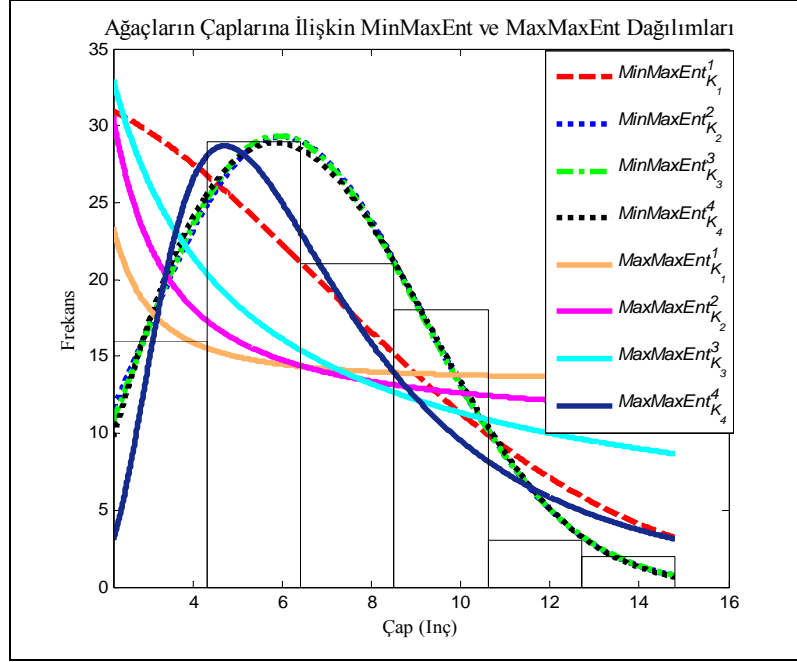
en iyi uyum sağlayan dağılım, bir başka ifade ile AIC ve BIC değerleri en küçük olan dağılım $(Min MaxEnt)_{K_2}$ dağılımıdır. AIC ve BIC kriterlerine göre ortaya çıkan sonuç, AIC_c ve BIC_c kriterlerine göre de desteklenmektedir. Bu sonuç moment kısıt sayısının artması istatistiksel modellemeyi artırmasına rağmen bilinmeyen parametre yükünü beraberinde getirmesinden kaynaklanmaktadır. Bir başka ifade ile AIC ve BIC kriterlerinin model seçiminde bilinmeyen parametre sayısını veya moment kısıt sayısını ceza faktörü olarak dikkate almasından kaynaklanmaktadır.

Böylece KS , χ^2 uyum iyiliği testleri ile AIC , AIC_c , BIC ve BIC_c bilgi kriterleri sonuçlarına göre kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımına en uyumlu dağılımın $(Min MaxEnt)_{K_2}$ dağılımı olduğu sonucuna varılır.

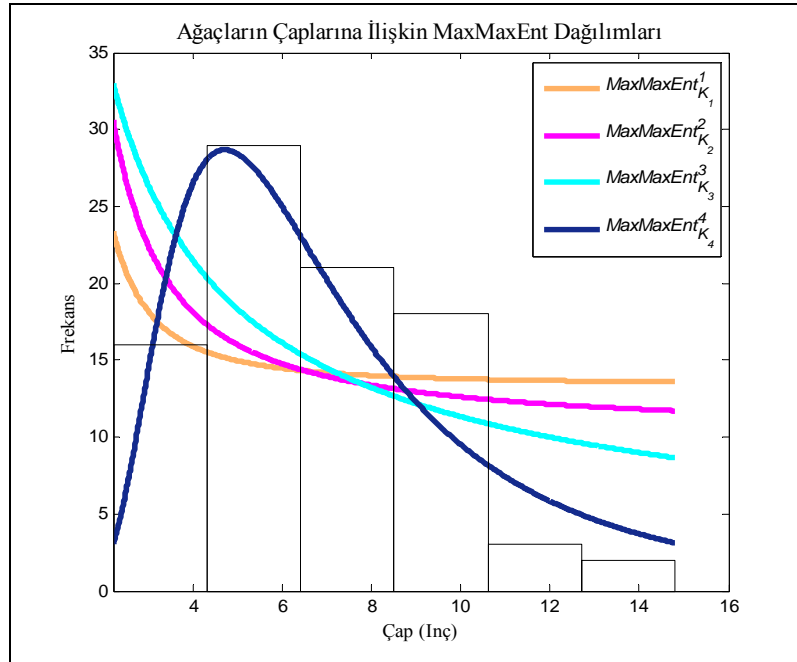
$(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları arasında, KS testine göre istatistiksel veriye %5 anlamlılık düzeyinde uyum sağlayan dağılım $(Max MaxEnt)_{K_4}$ dağılımıdır. Bilgi kriterlerine göre de bu sonuç desteklenmektedir. Bu sonuç, $(Max MaxEnt)_{K_4}$ dağılımının K_4 kümesinin elemanları olan dört bileşenli moment vektör fonksiyonlarının belirlediği dağılımlar arasında, istatistiksel veriye entropi ölçümüne göre en uzak dağılım olmasına rağmen uygun moment vektör fonksiyonunun ürettiği $(Max MaxEnt)_{K_4}$ dağılımının istatistiksel veriyi modelleyebileceği anlamına gelmektedir.

$(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının görsel olarak istatistiksel veriye uyumu Şekil 7.1–7.3’de verilmiştir.

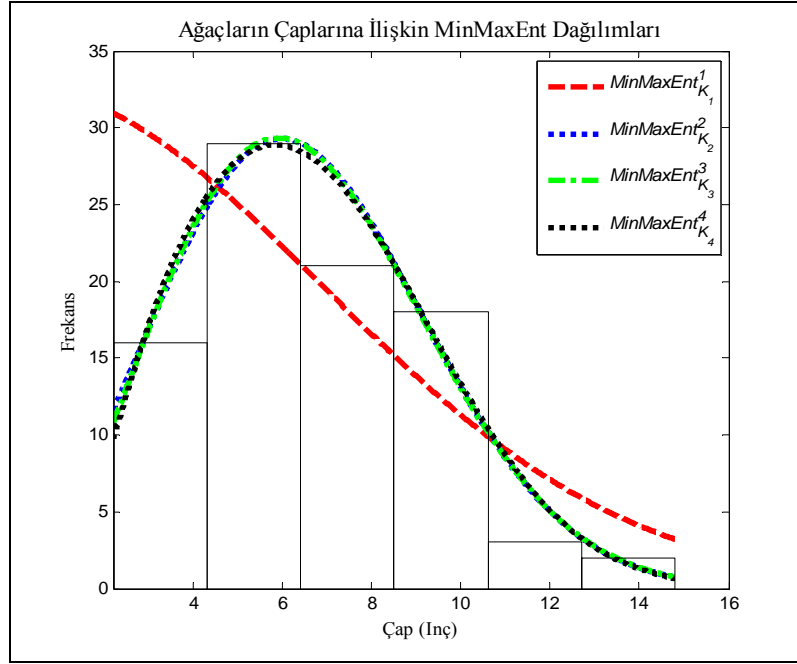
Şekil 7.1. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 7.2. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 7.3. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 7.1–7.3’den, K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m=2, \dots, 4$) ve $(MaxMaxEnt)_{K_4}$ dağılımlarının veriye uyumunun oldukça iyi olduğu görülmektedir.

Tüm bu elde edilen sonuçlara göre kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımı Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(MinMaxEnt)_{K_m}$ veya $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ dağılımları ile modellenebilir sonucuna varılır.

7.2. Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımlarının Uygulaması II

Bu bölümde genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının ikinci uygulaması olarak, Illinois eyaletindeki Chebanse kasabasının yakınındaki Iroquois nehrinin yıllık kuraklık dağılımının bulunması problemi ele alınmıştır. Dağılımı aranan X rassal değişkeni, bir yıl içinde nehirdeki en düşük 7-günlük ortalama akış hızı ölçüm değerleridir (Ang ve Tang 1984, Ghosh 1999). Akış hızı değerleri Nisan 1924 ile Mart 1956 tarihleri arasında m^3/s birimi cinsinden

($1 \text{ m}^3/\text{s} = 35.3146 \text{ cfs}$) ölçülmüştür. Iroquois nehrinin yıllık kuraklık dağılımı, Ghosh 1999 tarafından Weibull dağılımı yardımıyla incelenmiştir. Bu bölümde, yıllık kuraklık dağılımı Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları yardımıyla bulunmuştur. Söz konusu istatistiksel veriyi modellemede, bir, iki, üç ve dört bileşenli moment kısıtlarına dayalı MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları kullanılmıştır.

İlk uygulamaya benzer olarak $(\text{Max MinxEnt})_{K_m}$ ve $(\text{Min MinxEnt})_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu KS , χ^2 uyum iyiliği testleri ile AIC , AIC_c , BIC ve BIC_c bilgi kriterlerine göre incelenmiştir. Ayrıca bu sonuçların görsel olarak da desteklendiği gösterilmiştir.

Iroquois nehrinin yıllık kuraklık ölçümlerine ait $n = 32$ birimlik örnek ölçüm (gözlem) değerlerine ilişkin tanımlayıcı istatistikler Çizelge 7.9'da tablolaştırılmıştır. $(\text{Max MinxEnt})_{K_m}$ ve $(\text{Min MinxEnt})_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarına ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 7.10–7.16 ve Şekil 7.4–7.6'da verilmiştir.

Çizelge 7.9. Iroquois nehrinin yıllık kuraklık ölçüm değerleri için tanımlayıcı istatistikler

İstatistikler	Hesaplanan Değerler (m^3/s)
n (Gözlem sayısı)	32
Mn (Minimum değer)	0.3993
Mx (Maksimum değer)	4.1343
\bar{X} (Ortalama)	1.5388
S^2 (Varyans)	0.9325
γ_1 (Çarpıklık)	1.0282
γ_2 (Basıklık)	3.3502

Çizelge 7.9'dan görüldüğü gibi, Iroquois nehrinin 1924–1956 yıllarına ait kuraklık ölçüm değerleri 0.3993 ile 4.1343 arasında değişmektedir. Ölçüm değerlerinin ortalaması 1.5388, varyansı 0.9325, çarpıklığı ve basıklığı ise sırasıyla 1.0282 ve 3.3502 dir.

Iroquois nehrinin yıllık kuraklık dağılımı için incelenen $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması süreci ve elde edilen sonuçların ayrıntıları aşağıda verilmiştir.

Bu uygulamada da ilk uygulamaya benzer şekilde K_m , ($m = 1, \dots, 4$) kümesi, $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ olmak üzere $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$, ($i = 1, \dots, r_m$) elemanlarından oluşur.

K_m , ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesi,

$$M = \{\sqrt{x}, x, x^2, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2), \arctan x^2\} \quad (7.2)$$

istatistiksel dağılımların karakterize edici moment fonksiyonları ve diğer moment fonksiyonlarından oluşan M kümesine dayalı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

- K_1 : M kümesinin elemanlarının tüm birli birleşimlerinden oluşan küme
- K_2 : M kümesinin elemanlarının tüm ikili birleşimlerinden oluşan küme
- K_3 : M kümesinin elemanlarının tüm üçlü birleşimlerinden oluşan küme
- K_4 : M kümesinin elemanlarının tüm dörtlü birleşimlerinden oluşan küme

Bu kümelere uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$, ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının belirlenmesinde Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri Çizelge 7.10–7.13’de listelenmiştir. Moment vektör fonksiyonlarının çizelgelerdeki gösterimi ilk uygulamadakine benzer şekilde yapılmıştır.

Çizelge 7.10. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_1 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Fonksiyonları	Entropi Değerleri	Moment Fonksiyonları	Entropi Değerleri
1	1.0802	<u>5</u>	<u>1.1405</u>
2	1.0783	<u>6</u>	<u>1.0777</u>
3	1.0980	7	1.1220
4	1.0926		

Çizelge 7.10'a göre, K_1 moment vektör fonksiyonları kümesinde $(Min MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı "6" moment fonksiyonuna karşılık gelen, bir başka ifade ile $(\ln(1+x^2))$ 'e uygun MaxEnt dağılımıdır ve entropi değeri de 1.0777'dir. $(Max MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı ise "5" veya $(\ln x)^2$ moment fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımıdır ve entropi değeri de 1.1405'dir.

Çizelge 7.11. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri K_2 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları			Moment Vektör Fonksiyonları		
		Entropi Değerleri			Entropi Değerleri
1	2	1.0780	3	4	1.0807
1	3	1.0789	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>1.0943</u>
1	4	1.0775	3	6	1.0775
1	5	1.0776	3	7	1.0838
1	6	1.0780	4	5	1.0778
1	7	1.0752	4	6	1.0770
2	3	1.0770	<u>4</u>	<u>7</u>	<u>1.0739</u>
2	4	1.0780	5	6	1.0771
2	5	1.0781	5	7	1.0843
2	6	1.0774	6	7	1.0752
2	7	1.0783			

K_2 moment vektör fonksiyonları kümesinde $(Min MaxEnt)_{K_2}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_2}$ dağılımları sırasıyla, $(\ln x, \arctan x^2)$ ve $(x^2, (\ln x)^2)$ moment fonksiyonlarına karşılık gelen MaxEnt dağılımlarıdır. Ayrıca bu moment fonksiyonlarına uygun maksimum entropi değerleri sırasıyla 1.0739 ve 1.0943 olduğu Çizelge 7.11'den görülmektedir.

Çizelge 7.12. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_3 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Entropi Değerleri
1	2	3		1.0737	1	6	7		1.0751	3	5	6		1.0771
1	2	4		1.0780	2	3	4		1.0748	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>7</u>		<u>1.0829</u>
1	2	5		1.0780	2	3	5		1.0761	3	6	7		1.0698
1	2	6		1.0775	2	3	6		1.0764	4	5	6		1.0774
1	2	7		1.0781	2	3	7		1.0646	4	5	7		1.0730
1	3	4		1.0804	2	4	5		1.0778	4	6	7		1.0752
1	3	5		1.0772	2	4	6		1.0769	5	6	7		1.0687
1	3	6		1.0770	2	4	7		1.0740					
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>7</u>		<u>1.0594</u>	2	5	6		1.0771					
1	4	5		1.0778	2	5	7		1.0778					
1	4	6		1.0770	2	6	7		1.0774					
1	4	7		1.0735	3	4	5		1.0776					
1	5	6		1.0772	3	4	6		1.0768					
1	5	7		1.0744	3	4	7		1.0731					

Çizelge 7.12'e göre, K_3 kümesi için uygun $(Min MaxEnt)_{K_3}$ dağılımının $(\sqrt{x}, x^2, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımı, $(Max MaxEnt)_{K_3}$ dağılımının ise $(x^2, (\ln x)^2, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MaxEnt dağılımı olduğu sonucuna varılır.

Çizelge 7.13. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_4 kümesine uygun MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları					Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları					Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları					Entropi Değerleri
1	2	3	4		1.0749	1	3	5	6		1.0771	2	4	5	6		1.0774
1	2	3	5		1.0763	1	3	5	7		1.0593	2	4	5	7		1.0612
1	2	3	6		1.0774	1	3	6	7		1.0593	2	4	6	7		1.0593
1	2	3	7		1.0596	1	4	5	6		1.0774	2	5	6	7		1.0586
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>4</u>	<u>5</u>		<u>1.0778</u>	1	4	5	7		1.0734	3	4	5	6		1.0773
1	2	4	6		1.0776	1	4	6	7		1.0714	3	4	5	7		1.0597
1	2	4	7		1.0737	1	5	6	7		1.0577	3	4	6	7		1.0591
1	2	5	6		1.0772	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>		<u>1.0558</u>	3	5	6	7		1.0585
1	2	5	7		1.0726	2	3	4	6		1.0622	4	5	6	7		1.0717
1	2	6	7		1.0773	2	3	4	7		1.0591						
1	3	4	5		1.0775	2	3	5	6		1.0767						
1	3	4	6		1.0768	2	3	5	7		1.0587						
1	3	4	7		1.0593	2	3	6	7		1.0596						

Çizelge 7.13'den görüldüğü gibi, K_4 kümesi için uygun $(Min MaxEnt)_{K_4}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_4}$ dağılımlarının entropi değerleri sırasıyla 1.0558 ve 1.0778'dir. Ayrıca $(Min MaxEnt)_{K_4}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_4}$ dağılımlarının sırasıyla, $(x, x^2, \ln x, (\ln x)^2)$ ve $(\sqrt{x}, x, \ln x, (\ln x)^2)$ moment fonksiyonlarına karşılık gelen MaxEnt dağılımları olduğu da görülmektedir.

Iroquois nehrinin yıllık kuraklık dağılımı için K_m ($m=1, \dots, 4$) kümesi uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları ve entropi değerleri sırasıyla, Çizelge 7.14 ve Çizelge 7.15'de verilmiştir.

Çizelge 7.14. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları						
	\sqrt{x}	x	x^2	$\ln x$	$(\ln x)^2$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x^2$
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	—	—	—	—	—	0.858	—
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	—	—	—	2.695	—	—	-2.451
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	12.589	—	-0.469	—	—	—	-5.568
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	—	28.788	-2.192	-24.472	-9.434	—	—
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	—	—	—	—	1.088	—	—
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	—	—	0.217	—	-0.435	—	—
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	—	—	0.061	—	0.292	—	0.761
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	0.159	0.402	—	0.270	0.134	—	—

Çizelge 7.15. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının entropi değerleri

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları		Moment Vektör Fonksiyonları			Entropi Değerleri
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	$\ln(1+x^2)$	—	—	—	1.0777
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	$\ln x$	$\arctan x^2$	—	—	1.0739
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	\sqrt{x}	x^2	$\arctan x^2$	—	1.0594
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	x	x^2	$\ln x$	$(\ln x)^2$	1.0558
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	$(\ln x)^2$	—	—	—	1.1405
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	x^2	$(\ln x)^2$	—	—	1.0943
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	x^2	$(\ln x)^2$	$\arctan x^2$	—	1.0829
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	\sqrt{x}	x	$\ln x$	$(\ln x)^2$	1.0778

İlk uygulamaya benzer olarak moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısı artırıldığında, uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının entropi değeri 1.0777'den 1.055'e azalmaktadır. $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının uygun entropi değeri ise 1.1405'den 1.0778'e azalmaktadır.

$(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ $m=1,\dots,4$ dağılımlarıyla elde edilen bu sonuçların, incelemekte olduğumuz istatistiksel veriye uyumunu ifade eden uyum testleri ve kriterleri ile de desteklendiği Çizelge 7.16'da gösterilmiştir.

Çizelge 7.16. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Min MaxEnt)_{K_1}$	0.1056	0.8311	0.8332	0.9339	70.973	71.106	72.439	72.670
$(Min MaxEnt)_{K_2}$	0.0839	0.9639	0.9688	0.8088	72.728	73.141	75.659	76.376
$(Min MaxEnt)_{K_3}$	0.0702	0.9942	0.1502	0.9276	73.800	74.658	78.198	79.683
$(Min MaxEnt)_{K_4}$	0.0713	0.9930	0.2220	0.6375	75.569	77.050	81.432	83.999

Çizelge 7.16. (Devam) Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MaxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Max MaxEnt)_{K_1}$	0.1607	0.3427	2.9976	0.5582	74.989	75.122	76.455	76.686
$(Max MaxEnt)_{K_2}$	0.1078	0.8128	2.2087	0.5302	74.033	74.447	76.965	77.682
$(Max MaxEnt)_{K_3}$	0.0945	0.9116	1.0012	0.6062	75.307	76.164	79.704	81.189
$(Max MaxEnt)_{K_4}$	0.0955	0.9057	0.8931	0.3446	76.980	78.461	82.843	85.410

Çizelge 7.16'dan sonuç olarak, KS ve χ^2 testlerine göre Iroquois nehrinin kuraklık değerlerinin dağılımına her bir $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımı, %5 anlamlılık düzeyinde uyum sağladığı görülmektedir. KS testin de, test istatistiğine uygun olan P_D olasılık değeri 0.8311 ile 0.9942 arasında değişmekte iken, χ^2 testinde test istatistiğine uygun olan P_{χ^2} olasılık değeri 0.6375 ile 0.9339 arasında değişmektedir.

KS ve χ^2 testlerine göre istatistiksel veriye uyum sağlayan $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımları arasında, AIC ve BIC kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan dağılım, bir başka ifade ile AIC ve BIC değerleri en küçük olan dağılım $(Min MaxEnt)_{K_1}$ dağılımıdır. Bu sonuç AIC_c ve BIC_c kriterleri ile de desteklenmektedir.

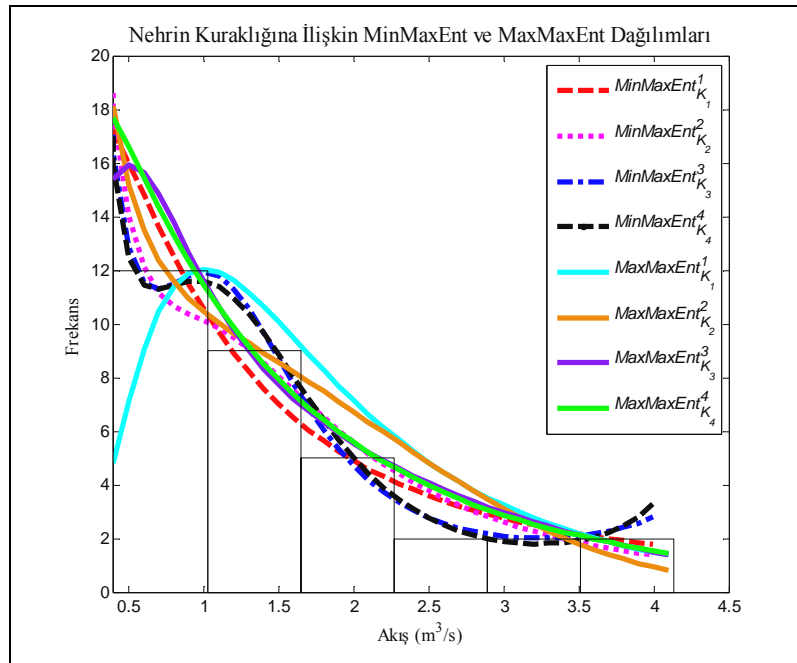
Böylece bulunan $(Min MaxEnt)_{K_m}$, ($m=1,\dots,4$) dağılımları arasında, uyum iyiliği testleri ve bilgi kriterlerine göre, Iroquois nehrinin kuraklık değerlerinin dağılımına en uyumlu dağılımın $(Min MaxEnt)_{K_1}$ dağılımı olduğu sonucuna varılır.

$(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımları arasında, KS ve χ^2 testlerine göre, Iroquois nehrinin kuraklık değerlerinin dağılımına %5 anlamlılık düzeyinde her bir $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m=1,\dots,4$) dağılımı uyum sağlamaktadır. Bu dağılımlar arasında, AIC ve AIC_c kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan dağılım ise

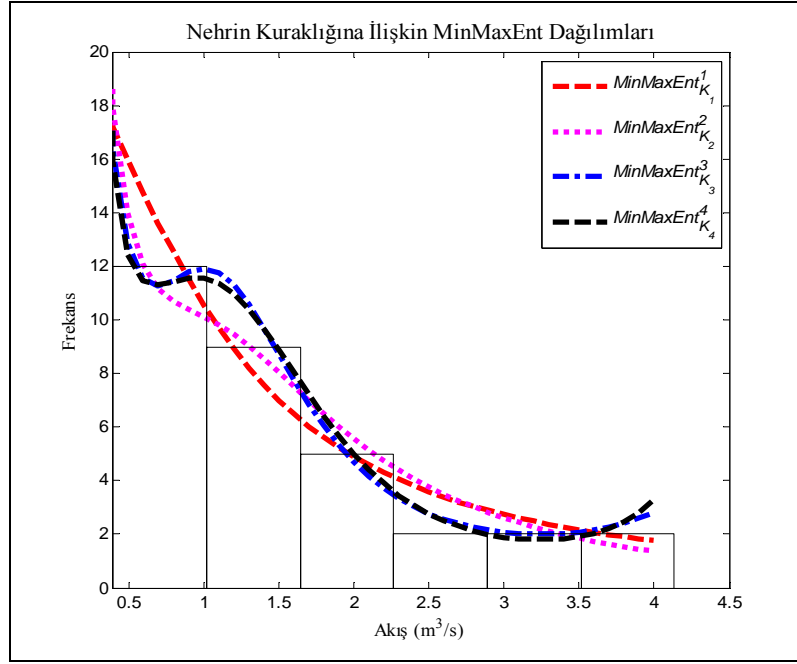
$(MaxMaxEnt)_{K_2}^2$ dağılımıdır. BIC ve BIC_c kriterlerine göre ise $(MaxMaxEnt)_{K_1}^1$ dağılımıdır. Bu sonuç $(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarının modellemedeki esnekliğini ve gücünü göstermesinin yanı sıra, K_m kümesinin de önemini göstermektedir.

$(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu grafiksel olarak Şekil 7.4–7.6’da verilmiştir.

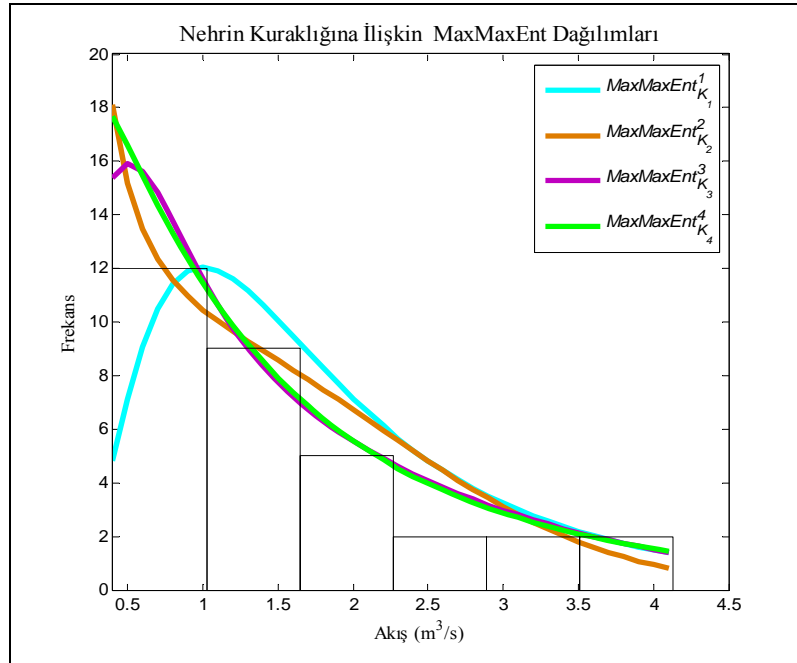
Şekil 7.4. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}^m$ ve $(MaxMaxEnt)_{K_m}^m$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 7.5. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MinMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 7.6. Iroquois nehrinin kuraklık değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MaxMaxEnt)_{K_m}$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 7.3–7.6’den, K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MaxEnt)_{K_m}$ ve $(Max MaxEnt)_{K_m}$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının görsel olarak veriye uyumu net bir şekilde sergilenmektedir.

Tüm bu analizlere göre, Iroquois nehrinin kuraklık değerlerinin dağılımı Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(Min MaxEnt)_{K_m}$ veya $(Max MaxEnt)_{K_m}$ dağılımları ile modellenilebilir sonucuna varılır.

8. GAUSS-LEGENDRE YAKLAŞIMINA DAYALI YÖNTEMLERLE BULUNAN GENELLEŞTİRİLMİŞ MinxEnt DAĞILIMLARININ UYGULAMALARI

Bu bölümde, sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının, başka bir ifade ile MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının, çeşitli istatistiksel verilerin modellenmesiyle ilgili uygulamalar sunulmuştur. Bu dağılımların istatistiksel veriye uyumu, Bölüm 6.4’de verilen uyum iyiliği testleri ve bilgi kriterlerine göre incelenmiştir. Ayrıca bulunan MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının uyumu grafikler yardımıyla da gösterilmiştir.

Sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması için gerekli olan tüm hesaplamalar MATLAB’da hazırlanmış program yardımıyla yapılmıştır

8.1. Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımlarının Uygulaması I

Bu bölümde sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının bir başka ifade ile MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının bir uygulaması olarak, Bölüm 7.1’de ele alınan kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının gövdelerine ait çap ölçümlerinin dağılımının bulunması problemi incelenmiştir. Aynı uygulamanın seçilmesinin amacı, genelleştirilmiş MinxEnt dağılımları ile genelleştirilmiş MaxEnt dağılımlarını ayıran en önemli özellik olan önsel dağılımın etkisini gözlemektir. Diğer bir ifade ile önsel dağılıma dayalı olan MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarının modellemedeki esneklik ve gücünü daha iyi ortaya koyabilmek için aynı istatistiksel veri seçilmiştir.

Dağılımı aranan X rassal değişkeni ile ilgili özellikler Bölüm 7.1’de verilmiştir. Bu bölümde kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımı, bir, iki, üç ve dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna ve iki farklı önsel dağılıma uygun Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımlarıyla modellenmiştir.

Bir, iki, üç ve dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna ve iki farklı önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu χ^2 ve KS testleri ile AIC , AIC_c , BIC ve BIC_c kriterlerine göre incelenmiştir. Ayrıca bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının görsel uyumu da sunulmuştur.

Bir, iki, üç, dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna ve iki farklı önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarına ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 8.1–8.8’de ve Şekil 8.1–8.6’da verilmiştir.

Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çaplarının dağılımı için incelenen $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması süreci ve elde edilen sonuçların detayları aşağıda verilmiştir.

Bölüm 4.3’de anlatıldığı gibi sürekli rassal değişkenler için MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımları, hem $K_m = \{\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)}, \dots, \mathbf{g}^{(r_m)}\}$ ($m=1,\dots,l$) olacak şekilde, m sayıda bileşene sahip $\mathbf{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_m^{(i)})$ ($i=1,\dots,r_m$) moment vektör fonksiyonlarından oluşan K_m kümesine hem de $q_r(x)$ önsel dağılımına bağlıdır. Bu uygulamada $q_r(x)$ önsel dağılımı olarak uygulama açısından yaygın kullanılan istatistiksel

$$q_1(x) = N(\mu, \sigma^2) \quad \text{Normal Dağılım} \quad (8.1)$$

$$q_2(x) = Gam(\alpha, \beta) \quad \text{Gamma Dağılım.} \quad (8.2)$$

dağılımları seçilmiştir. Mevcut süreç farklı önsel dağılımlar seçilerek de gerçekleştirilebilir.

K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesi,

$$M = \{\sqrt{x}, x, x^2, \ln x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2), \arctan x, \arctan x^2\} \quad (8.3)$$

kümesine dayalı olarak Bölüm 7.1’deki uygulamaya benzer şekilde oluşturulmuştur.

$q_r(x)$ ($r=1,2$) önsel dağılımları arasında ilk olarak $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri Çizelge 8.1–8.6 de listelenmiştir. Moment vektör fonksiyonlarının çizelgelerdeki gösterimi, Bölüm 7'deki uygulamadakilere benzer şekilde yapılmıştır.

Çizelge 8.1. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_1 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Fonksiyonları	Çapraz Entropi Değerleri	Moment Fonksiyonları	Çapraz Entropi Değerleri
1	0.0486	5	0.0484
2	0.0467	6	0.0502
<u>3</u>	<u>0.0437</u>	<u>7</u>	<u>0.0528</u>
4	0.0504	8	0.0497

Çizelge 8.1.'den görüldüğü gibi, $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımına ve K_1 kümesinin elemanları olan bir bileşenli moment vektör fonksiyonlarına uygun dağılımlar arasında istatistiksel veriye Kullback-Leibler çapraz entropi ölçümüne göre en yakın dağılım olan $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı, “7” moment fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. Bir başka ifade ile $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı, $(\arctan x)$ 'e uygun MinxEnt dağılımıdır. En uzak dağılım olan $(Min MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı ise “3” veya (x^2) moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. Buna göre $q_1(x)$ önsel dağılımı ve K_1 kümesi için en büyük çapraz entropi değere sahip olan $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımının uygun çapraz entropi değeri 0.0528, en küçük çapraz entropi değerine sahip olan $(Min MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımının uygun çapraz entropi değeri ise 0.0437 dir.

Çizelge 8.2. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_2 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları			Çapraz Entropi Değerleri			Moment Vektör Fonksiyonları			Çapraz Entropi Değerleri			Moment Vektör Fonksiyonları			Çapraz Entropi Değerleri		
1	2	0.0598	2	6	0.0591	4	7	0.0505	1	2	0.0598	2	6	0.0591	4	7	0.0505
1	3	0.0614	2	7	0.0467	4	8	0.0505	1	3	0.0614	2	7	0.0467	4	8	0.0505
1	4	0.0493	2	8	0.0467	5	6	0.0572	1	4	0.0493	2	8	0.0467	5	6	0.0572
1	5	0.0484	3	4	0.0603	5	7	0.0484	1	5	0.0484	3	4	0.0603	5	7	0.0484
1	6	0.0498	3	5	0.0619	5	8	0.0484	1	6	0.0498	3	5	0.0619	5	8	0.0484
1	7	0.0487	3	6	0.0606	6	7	0.0503	1	7	0.0487	3	6	0.0606	6	7	0.0503
1	8	0.0486	3	7	0.0580	6	8	0.0503	1	8	0.0486	3	7	0.0580	6	8	0.0503
<u>2</u>	<u>3</u>	<u>0.0621</u>	<u>3</u>	<u>8</u>	<u>0.0437</u>	7	8	0.0529	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>0.0621</u>	<u>3</u>	<u>8</u>	<u>0.0437</u>	7	8	0.0529
2	4	0.0586	4	5	0.0566				2	4	0.0586	4	5	0.0566			
2	5	0.0614	4	6	0.0503				2	5	0.0614	4	6	0.0503			

Çizelge 8.2.'e göre, $N(6.74,6.75)$ önsel dağılımına ve K_2 iki bileşenli moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımı, “2 3” şeklinde gösterilen moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. Diğer bir deyişle K_2 kümesinin elemanlarına uygun dağılımlar arasında istatistiksel veriye Kullback-Leibler ölçümüne göre en yakın dağılım olan $(Max MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımı, (x, x^2) moment vektör fonksiyonuna uygun MinxEnt dağılımıdır. $(Max MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımına uygun çapraz entropi değeri 0.0621'dir. $q_1(x)$ önsel dağılımı ve K_2 moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Min MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımı ise, “3 8” veya $(x^2, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. $(Min MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımına uygun çapraz entropi değeri de 0.0437'dir.

Çizelge 8.3. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_3 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
1	2	3		0.0627	1	6	8	0.0498	3	4	7		0.0629	
1	2	4		0.0589	1	7	8	0.0487	3	4	8		0.0625	
1	2	5		0.0629	2	3	4	0.0627	3	5	6		0.0629	
1	2	6		0.0592	2	3	5	0.0620	3	5	7		0.0629	
1	2	7		0.0629	2	3	6	0.0627	3	5	8		0.0627	
1	2	8		0.0624	2	3	7	0.0628	3	6	7		0.0629	
1	3	4		0.0628	2	3	8	0.0627	3	6	8		0.0625	
1	3	5		0.0629	2	4	5	0.0629	3	7	8		0.0617	
1	3	6		0.0628	2	4	6	0.0587	4	5	6		0.0570	
1	3	7		0.0629	2	4	7	0.0584	4	5	7		0.0564	
1	3	8		0.0627	2	4	8	0.0620	4	5	8		0.0563	
1	4	5		0.0565	<u>2</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>0.0630</u>	4	6	7		0.0503	
1	4	6		0.0499	2	5	7	0.0629	4	6	8		0.0503	
1	4	7		0.0494	2	5	8	0.0626	4	7	8		0.0506	
1	4	8		0.0493	2	6	7	0.0590	5	6	7		0.0570	
1	5	6		0.0572	2	6	8	0.0590	5	6	8		0.0570	
1	5	7		0.0485	<u>2</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>0.0467</u>	5	7	8		0.0484	
1	5	8		0.0485	3	4	5	0.0629	6	7	8		0.0503	
1	6	7		0.0498	3	4	6	0.0626						

Çizelge 8.3'den, $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımı ve K_3 moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_3}^1$ dağılımının $(x, (\ln x)^2, \ln(1+x^2))$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımı olduğu görülmektedir. $(Min MinxEnt)_{K_3}^1$ dağılımı ise $(x, \arctan x, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. $(Max MinxEnt)_{K_3}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_3}^1$ dağılımlarına karşılık gelen çapraz entropi değerleri sırasıyla, 0.0630 ve 0.467'dir.

Çizelge 8.4. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_4 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları					Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları					Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları					Çapraz Entropi Değerleri
1	2	3	4		0.0630	1	3	7	8	0.0632	2	4	6	7	0.0589		
1	2	3	5		0.0629	1	4	5	6	0.0571	2	4	6	8	0.0588		
1	2	3	6		0.0627	1	4	5	7	0.0563	2	4	7	8	0.0622		
1	2	3	7		0.0630	1	4	5	8	0.0620	2	5	6	7	0.0630		
1	2	3	8		0.0627	1	4	6	7	0.0499	2	5	6	8	0.0629		
1	2	4	5		0.0629	1	4	6	8	0.0499	2	5	7	8	0.0628		
1	2	4	6		0.0591	1	4	7	8	0.0494	2	6	7	8	0.0623		
1	2	4	7		0.0630	1	5	6	7	0.0571	3	4	5	6	0.0629		
1	2	4	8		0.0624	1	5	6	8	0.0619	3	4	5	7	0.0629		
1	2	5	6		0.0630	<u>1</u>	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>0.0485</u>	3	4	5	8	0.0630		
1	2	5	7		0.0629	1	6	7	8	0.0498	3	4	6	7	0.0629		
1	2	5	8		0.0627	2	3	4	5	0.0629	3	4	6	8	0.0625		
1	2	6	7		0.0591	2	3	4	6	0.0627	3	4	7	8	0.0635		
1	2	6	8		0.0591	2	3	4	7	0.0630	3	5	6	7	0.0629		
1	2	7	8		0.0626	2	3	4	8	0.0627	3	5	6	8	0.0629		
1	3	4	5		0.0629	2	3	5	6	0.0630	3	5	7	8	0.0632		
1	3	4	6		0.0628	2	3	5	7	0.0630	<u>3</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>0.0636</u>		
1	3	4	7		0.0630	2	3	5	8	0.0627	4	5	6	7	0.0569		
1	3	4	8		0.0628	2	3	6	7	0.0629	4	5	6	8	0.0569		
1	3	5	6		0.0629	2	3	6	8	0.0627	4	5	7	8	0.0562		
1	3	5	7		0.0629	2	3	7	8	0.0629	4	6	7	8	0.0503		
1	3	5	8		0.0632	2	4	5	6	0.0630	5	6	7	8	0.0614		
1	3	6	7		0.0629	2	4	5	7	0.0629							
1	3	6	8		0.0628	2	4	5	8	0.0628							

Çizelge 8.4'den sonuç olarak, $q_1(x)$ önsel dağılımına ve K_4 kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_4}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_4}^1$ dağılımları sırasıyla $(x^2, \ln(1+x^2), \arctan x, \arctan x^2)$ ve $(\sqrt{x}, (\ln x)^2, \arctan x, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MinxEnt dağılımlarıdır.

Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap ölçüm değerleri için $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları ve çapraz entropi değerleri sırasıyla, Çizelge 8.5 ve Çizelge 8.6'da verilmiştir.

Çizelge 8.5. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre							
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları							
	\sqrt{x}	x	x^2	$\ln x$	$(\ln x)^2$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	—	—	—	—	—	—	2.1100	—
$(Max MinxEnt)_{K_2}^1$	—	0.3722	-0.0230	—	—	—	—	—
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	—	-1.3017	—	—	3.4007	-1.8644	—	—
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	—	—	-0.0281	—	—	4.1593	-42.3304	27.9487
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	—	—	0.0017	—	—	—	—	—
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	—	—	0.0016	—	—	—	—	0.00001
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	—	0.0412	—	—	—	—	0.0012	0.0005
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	0.0264	—	—	—	0.0763	—	0.0036	0.0015

Çizelge 8.6. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	$\arctan x$	—	—	—	0.0528
$(Max MinxEnt)_{K_2}^1$	x	x^2	—	—	0.0621
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	x	$(\ln x)^2$	$\ln(1+x^2)$	—	0.0630
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	x^2	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	0.0636
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	x^2	—	—	—	0.0437
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	x^2	$\arctan x^2$	—	—	0.0437
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	x	$\arctan x$	$\arctan x^2$	—	0.0467
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	\sqrt{x}	$(\ln x)^2$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	0.0485

Çizelge 8.6'dan görüldüğü gibi, $N(6.74,6.75)$ önsel dağılımı ve K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri 0.0528'den 0.0636'a artmaktadır. Bir başka ifade ile moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısı

artırıldığında çapraz entropi değeri 0.0528'den 0.0636'a artmaktadır. $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri ise 0.0437'den 0.0485'e artmaktadır. Bu sonuç her bir moment kısının belli miktarda informasyon üretmesinden dolayı kısıt sayısının artması ile çapraz entropi miktarının arttığını göstermektedir.

Uygulamanın bu bölümüne kadar $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımı ve K_m , ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max\ MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^1$, ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunması ayrıntılarıyla incelenmiştir. Bundan sonra ise kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap ölçüm değerleri için $q_2(x) = Gam(6.55, 1.02)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle bulunması incelenmiştir. Buna göre gereken sonuçlar, detayları anlatılmadan Çizelge 8.7 ve Çizelge 8.8'de verilmiştir.

Çizelge 8.7. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max\ MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre							
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları							
	\sqrt{x}	x	x^2	$\ln x$	$(\ln x)^2$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$(Max\ MinxEnt)_{K_1}^2$	—	—	—	—	—	—	—	3.7001
$(Max\ MinxEnt)_{K_2}^2$	—	—	-0.0031	—	—	—	—	4.7965
$(Max\ MinxEnt)_{K_3}^2$	9.5145	-2.6433	0.0553	—	—	—	—	—
$(Max\ MinxEnt)_{K_4}^2$	—	-3.4862	0.0758	—	4.1742	—	—	5.3828
$(Min\ MinxEnt)_{K_1}^2$	—	—	—	—	0.0018	—	—	—
$(Min\ MinxEnt)_{K_2}^2$	—	—	—	—	0.0019	—	—	0.00001
$(Min\ MinxEnt)_{K_3}^2$	—	—	—	—	0.0020	—	0.0001	0.00001
$(Min\ MinxEnt)_{K_4}^2$	0.0007	—	—	—	0.0019	—	0.0001	0.00001

Çizelge 8.8. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları		Moment Vektör Fonksiyonları			Çapraz Entropi Değerleri
$(Max MinxEnt)_{K_1}^2$	$\arctan x^2$	—	—	—	0.0263
$(Max MinxEnt)_{K_2}^2$	x^2	$\arctan x^2$	—	—	0.0263
$(Max MinxEnt)_{K_3}^2$	\sqrt{x}	x	x^2	—	0.0293
$(Max MinxEnt)_{K_4}^2$	x	x^2	$(\ln x)^2$	$\arctan x^2$	0.0296
$(Min MinxEnt)_{K_1}^2$	$(\ln x)^2$	—	—	—	0.0190
$(Min MinxEnt)_{K_2}^2$	$(\ln x)^2$	$\arctan x^2$	—	—	0.0190
$(Min MinxEnt)_{K_3}^2$	$(\ln x)^2$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	—	0.0191
$(Min MinxEnt)_{K_4}^2$	\sqrt{x}	$(\ln x)^2$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	0.0191

Çizelge 8.8'e göre, $Gam(6.55,1.02)$ önsel dağılımına uygun moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısı artırıldığında, $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri 0.0263'den 0.0296'a artmaktadır. $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri ise 0.0190'dan 0.0191'e artmaktadır.

$q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ ve $q_2(x) = Gam(6.55, 1.02)$ önsel dağılımlarına ve K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının, bir başka ifade ile $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının, istatistiksel veriye uyumu istatistiksel testler ve kriterler yardımıyla da desteklendiği Çizelge 8.9 ve Çizelge 8.10'da gösterilmiştir.

Çizelge 8.9. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Max_{K_1} MinxEnt)_1^1$	0.0943	0.3837	4.3121	0.3654	414.069	414.115	416.557	416.660
$(Max_{K_2} MinxEnt)_2^1$	0.0660	0.8092	3.2782	0.3507	414.843	414.982	419.820	420.133
$(Max_{K_3} MinxEnt)_3^1$	0.0636	0.8412	3.1315	0.2089	416.301	416.583	423.766	424.400
$(Max_{K_4} MinxEnt)_4^1$	0.0683	0.7752	3.1267	0.0770	418.246	418.722	428.201	429.269
$(Min_{K_1} MinxEnt)_1^1$	0.1159	0.1691	5.6118	0.2301	415.713	415.759	418.201	418.304
$(Min_{K_2} MinxEnt)_2^1$	0.1159	0.1691	5.6119	0.1321	417.713	417.852	422.690	423.003
$(Min_{K_3} MinxEnt)_3^1$	0.1017	0.2956	5.3149	0.0701	419.179	419.461	426.645	427.279
$(Min_{K_4} MinxEnt)_4^1$	0.0945	0.3809	5.1245	0.0236	420.866	421.342	430.821	431.889

Çizelge 8.10. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Max_{K_1} MinxEnt)_1^2$	0.0793	0.6015	4.5940	0.3315	413.772	413.818	416.260	416.364
$(Max_{K_2} MinxEnt)_2^2$	0.0601	0.8857	3.6121	0.3065	414.442	414.581	419.419	419.732
$(Max_{K_3} MinxEnt)_3^2$	0.0653	0.8187	3.1335	0.2087	416.280	416.562	423.746	424.379
$(Max_{K_4} MinxEnt)_4^2$	0.0643	0.8316	3.1352	0.0766	418.177	418.654	428.132	429.201
$(Min_{K_1} MinxEnt)_1^2$	0.0822	0.5568	3.5171	0.4753	414.140	414.186	416.629	416.732
$(Min_{K_2} MinxEnt)_2^2$	0.0822	0.5569	3.5172	0.3185	416.140	416.280	421.118	421.431
$(Min_{K_3} MinxEnt)_3^2$	0.0821	0.5574	3.5175	0.1723	418.140	418.423	425.606	426.240
$(Min_{K_4} MinxEnt)_4^2$	0.0821	0.5587	3.5183	0.0607	420.140	420.616	430.095	431.164

Çizelge 8.9 ve Çizelge 8.10'dan, KS ve χ^2 testlerine göre kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımına, $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımı uygun her bir $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımının ve $q_2(x) = Gam(6.55, 1.02)$ önsel dağılımına uygun her bir

$(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımının %5 anlamlılık düzeyinde uyum sağladığı görülmektedir.

KS ve χ^2 testlerine göre istatistiksel veriye uyum sağlayan $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları arasında, AIC ve BIC kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan dağılım $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımıdır. $(Max MinxEnt)_{K_1}^2$ dağılımı ise, $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları arasında bilgi kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan dağılımdır. AIC_c ve BIC_c kriterlerine göre de benzer sonuçlar desteklenir.

Diğer bir genelleştirilmiş MinxEnt dağılımı olan $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları arasında, KS testine göre her bir $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımı, χ^2 testine göre ise $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 3$) dağılımları, %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel veriye uyum sağladığı Çizelge 8.9'dan görülmektedir. Çizelge 8.10'dan ise KS ve χ^2 testlerine göre her bir $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımının istatistiksel veriye %5 anlamlılık düzeyinde uyum sağladığı sonucu çıkarılır. Uyum sağlayan bu dağılımlar arasında bilgi kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan dağılım, sırasıyla $(Min MinxEnt)_{K_1}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_1}^2$ dağılımıdır.

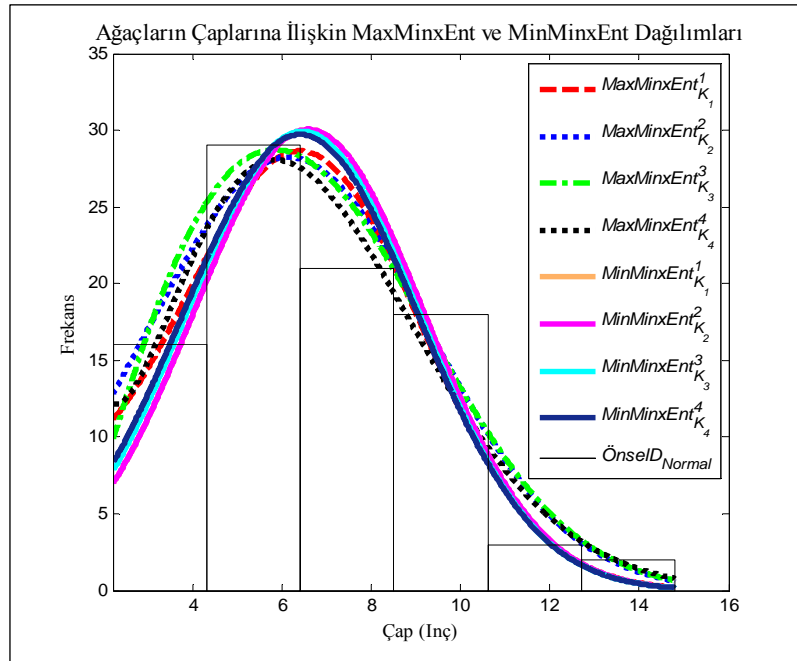
Ayrıca Çizelge 8.9 ve Çizelge 8.10'dan görüldüğü gibi, $q_2(x) = Gam(6.55, 1.02)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_1}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları hem uyum iyiliği testleri hem de bilgi kriterleri bakımından, $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımı uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarına göre istatistiksel veriye daha iyi uyum sağladığı sonucuna varılır. Bu sonuç $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları ile $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımları arasında daha da fazla ön plana çıkmaktadır. Bir başka ifade ile önsel dağılım istatistiksel veriyi modellemedeki etkisi gözlenmektedir.

Diğer taraftan kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımı için önsel dağılımına dayalı olan geliştirilmiş MinxEnt dağılımların sonuçları ile Bölüm 7.1’de elde edilen geliştirilmiş MaxEnt dağılımların sonuçları karşılaştırıldığında, hem $N(6.74,6.75)$ hem de $Gam(6.55,1.02)$ önsel dağılımlarına uygun geliştirilmiş MinxEnt dağılımlarının geliştirilmiş MaxEnt dağılımlarına göre istatistiksel veriyi modellemede daha esnek ve güçlü olduğu yorumu yapılabilir.

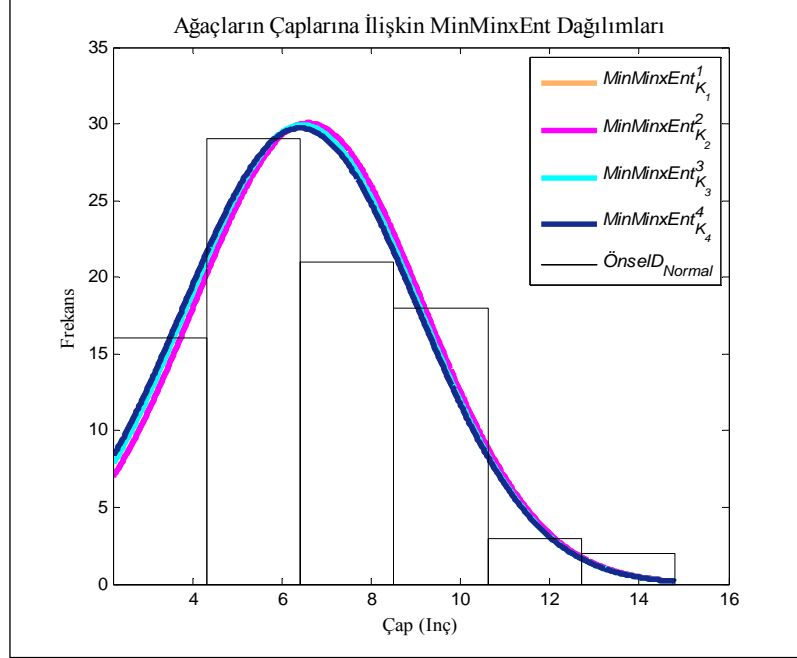
Elde edilen tüm KS , χ^2 uyum iyiliği testleri ile AIC , AIC_c , BIC ve BIC_c bilgi kriterleri sonuçlarına göre, $(MaxMinxEnt)_{K_1}^2$ dağılımının hatta $(MinMinxEnt)_{K_1}^2$ dağılımının da kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımına uyumlu olduğu sonucuna varılır.

Ayrıca $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu görsel olarak Şekil 8.1–8.3’de verilmiştir.

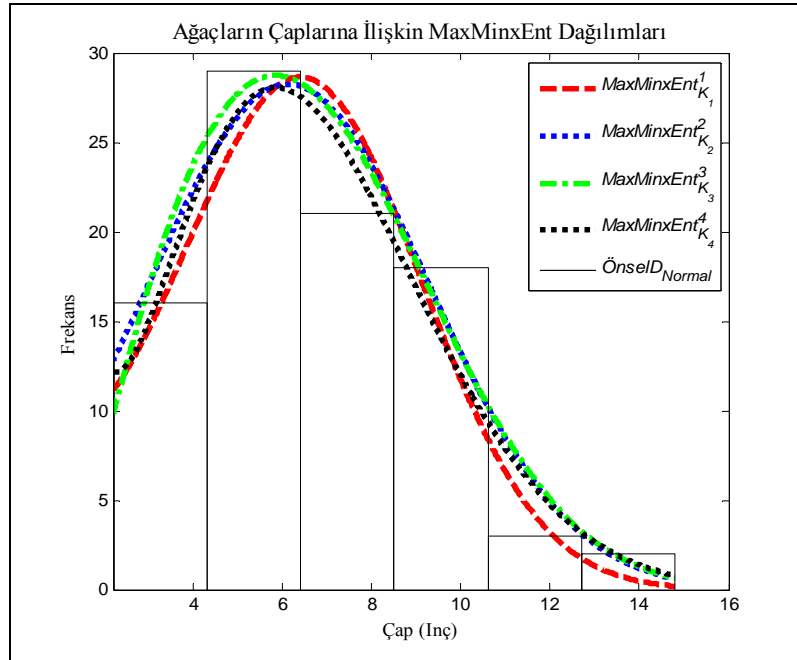
Şekil 8.1. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$, $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.2. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri

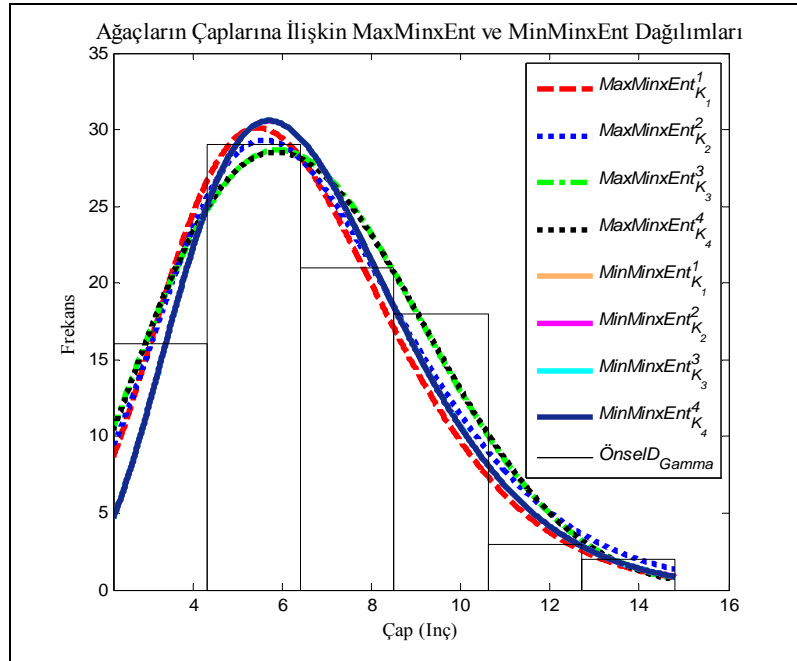


Şekil 8.3. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri

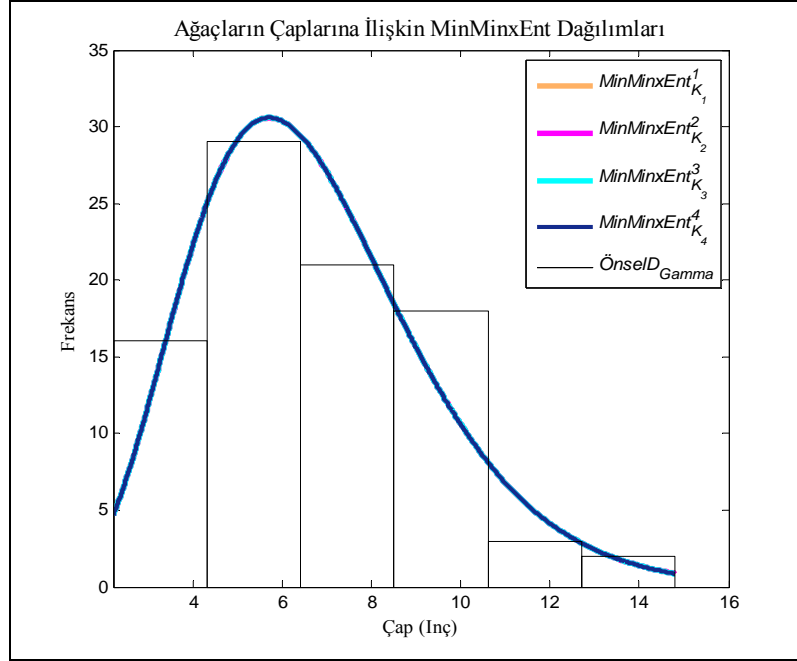


Şekil 8.1–8.3'den, $q_1(x) = N(6.74, 6.75)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye olan uyumu grafiksel olarak görülmektedir. $(MaxMinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(MinMinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının görsel sonuçları ise Şekil 8.4–8.6'da verilmiştir.

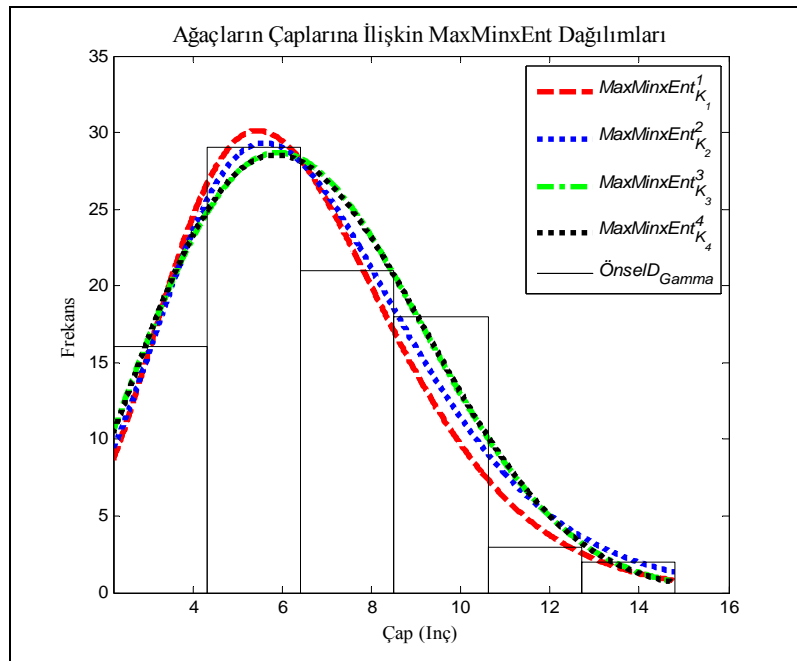
Şekil 8.4. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^2$, $(MinMinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.5. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(\text{MinMinxEnt})_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.6. Kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(\text{MaxMinxEnt})_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.4–8.6’den, $q_2(x) = Gam(6.55, 1.02)$ önsel dağılımına ve K_m ($m = 1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye olan uyumu görsel olarak açıkça görülmektedir.

Tüm bu analiz sonuçlarına göre, kuzey Florida ormanlarındaki çam ağaçlarının çap değerlerinin dağılımının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ dağılımlarıyla modellenebileceği sonucuna varılır.

8.2. Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımlarının Uygulaması II

Bu bölümde genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının ikinci uygulaması olarak, İstanbul menkul kıymetler borsasında işlem gören bir hisse senedinin aylık getirilerine ilişkin dağılımının bulunması problemi ele alınmıştır. Dağılımı aranan X rassal değişkeni, bir ay içinde hisse senedinin getiri oranlarının değerleridir. (imkb.gov.tr). Getiri oranlarının değerleri 1996 yılı ile 2007 tarihleri arasında aylık getirilerden elde edilmiştir. Literatürde hisse senedi veya borsa indeksi için getiri dağılımları çeşitli istatistiksel dağılımlarla incelenmiştir (Harris ve Küçüközmen 2001; Linden 2001). Bu bölümde, hisse senedinin aylık getirilerinin dağılımı Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımları yardımıyla bulunmuştur. Söz konusu istatistiksel verinin dağılımının bulunmasında, iki farklı önsel dağılım ve her bir önsel dağılım için bir, iki, üç ve dört bileşenli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımları kullanılmıştır.

Daha önce yapılan uygulamalara benzer olarak $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r = 1, 2$), ($m = 1, \dots, 4$) dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu, uyum iyiliği testleri ve bilgi kriterleriyle birlikte görsel olarak da incelenmiştir.

Hisse senedinin getirilerine ait $n=138$ birimlik örnek değerlerine ilişkin tanımlayıcı istatistikler Çizelge 8.11’de gösterilmiştir. $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarına ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 8.12–8.21 ve Şekil 8.7–8.12’de verilmiştir.

Çizelge 8.11. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için tanımlayıcı istatistikler

İstatistikler	Hesaplanan Değerler
n (Gözlem sayısı)	138
Mn (Minimum değer)	-0.5775
Mx (Maksimum değer)	0.9824
\bar{X} (Ortalama)	0.0494
S^2 (Varyans)	0.0685
γ_1 (Çarpıklık)	0.9974
γ_2 (Basıklık)	5.1126

Hisse senedinin 1996–2007 yıllarına ait aylık getiri değerleri, -0.5775 ile 0.9824 arasında değiştiği Çizelge 8.11’den görülmektedir. Aylık getiri değerlerinin ortalaması 0.0494, varyansı 0.0685, çarpıklığı ve basıklığı ise sırasıyla 0.9974 ve 5.1126 dır.

Hisse senedinin aylık getiri değerleri dağılımı için araştırılan $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^r$ ($r=1,2$), ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması süreci ve elde edilen sonuçların ayrıntıları aşağıda verilmiştir.

Bu uygulamada da ilk uygulamaya benzer şekilde K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesi,

$$M = \{x, x^2, \ln(1+x^2), x/(1+x^2), \arctan x, \arctan x^2\} \quad (8.4)$$

istatistiksel dağılımların karakterize edici moment fonksiyonları kümesine dayalı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

- K_1 : M kümesinin elemanlarının tüm birli birleşimlerinden oluşan küme
- K_2 : M kümesinin elemanlarının tüm ikili birleşimlerinden oluşan küme
- K_3 : M kümesinin elemanlarının tüm üçlü birleşimlerinden oluşan küme

- K_4 : M kümesinin elemanlarının tüm dörtlü birleşimlerinden oluşan küme.

$q_r(x)$ önsel dağılımı olarak, literatürde hisse senetlerinin veya borsa indekslerinin getiri değerlerinin dağılımının bulunmasında yaygın olarak kullanılan

$$q_1(x) = Lap(\mu, \lambda) \quad \text{Laplace Dağılımı} \quad (8.5)$$

$$q_2(x) = N(\mu, \sigma^2) \quad \text{Normal Dağılım} \quad (8.6)$$

dağılımları seçilmiştir (Linden 2001). Fakat önsel dağılım olarak farklı istatistiksel dağılımlar da seçilebilir.

İlk uygulamadakine benzer olarak, $q_r(x)$ ($r=1,2$) önsel dağılımları arasında ilk olarak $q_1(x) = Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun, Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri Çizelge 8.12–8.15’de verilmiştir.

Çizelge 8.12. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_1 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Fonksiyonları	Çapraz Entropi Değerleri	Moment Fonksiyonları	Çapraz Entropi Değerleri
1	0.0488	<u>4</u>	<u>0.0478</u>
<u>2</u>	<u>0.0579</u>	5	0.0482
3	0.0534	6	0.0557

Çizelge 8.12’ göre, $q_1(x) = Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımı ve K_1 kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı, “2” veya (x^2) moment fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır. Bu MinxEnt dağılımına uygun çapraz entropi değeri 0.0579’dir. $(Min MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımı ise “4” veya ($x/(1+x^2)$) moment fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır ve uygun çapraz entropi değeri ise 0.0478 dir.

Çizelge 8.13. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_2 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları			Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları			Çapraz Entropi Değerleri
1	2		0.0578	2	6		0.0569
1	3		0.0548	3	4		0.0550
1	4		0.0481	3	5		0.0541
1	5		0.0485	3	6		0.0553
1	6		0.0555	<u>4</u>	<u>5</u>		<u>0.0479</u>
2	3		0.0567	4	6		0.0562
<u>2</u>	<u>4</u>		<u>0.0589</u>	5	6		0.0558
2	5		0.0584				

Çizelge 8.13.'e görüldüğü gibi, $q_1(x) = Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımı ve K_2 kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımı, “2 4” veya $(x^2, x/(1+x^2))$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır ve çapraz entropi değeri de 0.0589'dir. $(Min MinxEnt)_{K_2}^1$ dağılımı ise, “4 5” veya $(x/(1+x^2), \arctan x)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımıdır ve uygun çapraz entropi değeri de 0.0479'dur.

Çizelge 8.14. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_3 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
1	2	3		0.0563	2	3	4		0.0574
1	2	4		0.0593	2	3	5		0.0569
1	2	5		0.0584	2	3	6		0.0563
1	2	6		0.0566	2	4	5		0.0589
1	3	4		0.0554	2	4	6		0.0576
1	3	5		0.0548	2	5	6		0.0572
1	3	6		0.0548	3	4	5		0.0555
<u>1</u>	<u>4</u>	<u>5</u>		<u>0.0482</u>	3	4	6		0.0557
<u>1</u>	<u>4</u>	<u>6</u>		<u>0.0801</u>	3	5	6		0.0553
1	5	6		0.0557	4	5	6		0.0564

Çizelge 8.14'den, $Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımı ve K_3 moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_3}^1$ dağılımının

$(x, x/(1+x^2), \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımı, $(\text{Min MinxEnt})_{K_3}^1$ dağılımının ise $(x, x/(1+x^2), \arctan x)$ moment vektör fonksiyonuna karşılık gelen MinxEnt dağılımı olduğu görülmektedir. $(\text{Max MinxEnt})_{K_3}^1$ ve $(\text{Min MinxEnt})_{K_3}^1$ dağılımlarına karşılık gelen çapraz entropi değerleri sırasıyla 0.0801 ve 0.0482'dir.

Çizelge 8.15. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_4 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun MinxEnt dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları					Çapraz Entropi Değerleri	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
1	2	3	4		0,0575	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>0,0548</u>
1	2	3	5		0,0569	1	4	5	6	0,0565
1	2	3	6		0,0562	2	3	4	5	0,0573
1	2	4	5		0,0594	2	3	4	6	0,0569
1	2	4	6		0,0577	2	3	5	6	0,0565
1	2	5	6		0,0571	2	4	5	6	0,0576
1	3	4	5		0,0558	3	4	5	6	0,0557
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>6</u>		<u>0,0813</u>					

Çizelge 8.15'den sonuç olarak, K_4 kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(\text{Max MinxEnt})_{K_4}^1$ ve $(\text{Min MinxEnt})_{K_4}^1$ dağılımları sırasıyla $(x, \ln(1+x^2), x/(1+x^2), \arctan x^2)$ ve $(x, \ln(1+x^2), \arctan x, \arctan x^2)$ moment vektör fonksiyonlarına karşılık gelen MinxEnt dağılımlarıdır ve uygun çapraz entropi değerleri sırasıyla 0.0813 ve 0.0548'dir.

Hisse senedinin aylık getiri değerleri dağılımı için $q_1(x) = \text{Lap}(0.18, 0.02)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(\text{Max MinxEnt})_{K_m}^1$ ve $(\text{Min MinxEnt})_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları ve çapraz entropi değerleri sırasıyla, Çizelge 8.16 ve Çizelge 8.17'de verilmiştir.

Çizelge 8.16. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre					
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları					
	x	x^2	$\ln(1+x^2)$		$\arctan x$	$\arctan x^2$
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	—	-1.2390	—	—	—	—
$(Max MinxEnt)_{K_1}^2$	—	-1.3645	—	0.2111	—	—
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	-7.6450	—	—	8.9310	—	1.2913
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	-7.7742	—	1.4031	9.0820	—	0.1130
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	—	—	—	-0.0092	—	—
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	—	—	—	-0.0375	-0.0419	—
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	-0.0453	—	—	-0.0379	-0.0425	—
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	-0.0128	—	-0.5899	—	0.0489	-0.6603

Çizelge 8.17. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	x^2	—	—	—	0.0579
$(Max MinxEnt)_{K_2}^1$	x^2	$x/(1+x^2)$	—	—	0.0589
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	x	$x/(1+x^2)$	$\arctan x^2$	—	0.0801
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	x	$\ln(1+x^2)$	$x/(1+x^2)$	$\arctan x^2$	0.0813
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	$x/(1+x^2)$	—	—	—	0.0478
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	$x/(1+x^2)$	$\arctan x$	—	—	0.0479
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	x	$x/(1+x^2)$	$\arctan x$	—	0.0482
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	x	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$	0.0548

Çizelge 8.17'den görüldüğü gibi, $Lap(0.18,0.02)$ önsel dağılımı ve K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri, moment vektör fonksiyonundaki bileşen sayısına bağlı olarak 0.0579'den 0.0813'e artmaktadır.

$(Min MinxEnt)_{K_m}^1$, $(m=1, \dots, 4)$ dağılımlarının çapraz entropi değerleri ise 0.0478'den 0.0548'e artmaktadır.

Hisse senedinin aylık getirileri için $q_2(x) = N(0.04, 0.06)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı bulunmasına ilişkin sonuçlar Çizelge 8.18 ve Çizelge 8.19'da verilmiştir.

Çizelge 8.18. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına göre hesaplanan Lagrange çarpanları değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Gauss-Legendre					
	Yaklaşımına göre Hesaplanan Lagrange Çarpanları					
	x	x^2	$\ln(1+x^2)$	$x/(1+x^2)$	$\arctan x$	$\arctan x^2$
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	—	—	—	0.2764	—	—
$(Max MinxEnt)_{K_1}^2$	—	-0.5208	—	0.3314	—	—
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	—	-0.5433	—	0.1687	0.1093	—
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	0.0124	-0.5620	—	0.1611	0.0720	—
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	—	—	—	—	—	0.1713
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	—	-0.0520	-0.0440	—	—	—
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	0.0877	—	0.0129	—	—	0.0145
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	0.1086	-0.0561	-0.0479	—	—	-0.0533

Çizelge 8.19. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
$(Max MinxEnt)_{K_1}^2$	$x/(1+x^2)$	—	—	—	0.0103
$(Max MinxEnt)_{K_2}^2$	x^2	$x/(1+x^2)$	—	—	0.0106
$(Max MinxEnt)_{K_3}^2$	x^2	$x/(1+x^2)$	$\arctan x$	—	0.0109
$(Max MinxEnt)_{K_4}^2$	x	x^2	$x/(1+x^2)$	$\arctan x$	0.0114

Çizelge 8.19. (Devam) Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	Moment Vektör Fonksiyonları				Çapraz Entropi Değerleri
$(Min MinxEnt)_{K_1}^2$	$\arctan x^2$	—	—	—	0.0086
$(Min MinxEnt)_{K_2}^2$	x^2	$\ln(1+x^2)$	—	—	0.0086
$(Min MinxEnt)_{K_3}^2$	x	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x^2$	—	0.0088
$(Min MinxEnt)_{K_4}^2$	x	x^2	$\ln(1+x^2)$	$\arctan x^2$	0.0089

Çizelge 8.19'a göre, $N(0.04,0.06)$ önsel dağılımı ve K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun, $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri 0.0103'den 0.0114'a artmaktadır. $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının çapraz entropi değerleri ise 0.0086'dan 0.0089'e artmaktadır. Bu sonuçlar Çizelge 17'deki sonuçlarla karşılaştırıldığında, $q_1(x) = Lap(0.18,0.02)$ önsel dağılımının önemi daha da net ortaya çıkmaktadır.

Ayrıca hisse senedinin aylık getirileri için $q_1(x) = Lap(0.18,0.02)$ ve $q_2(x) = N(0.04,0.06)$ önsel dağılımlarına ve K_m , ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu, testler ve kriterler yardımıyla da incelenmiştir. İlgili sonuçlar Çizelge 8.20 ve Çizelge 8.21'de verilmiştir.

Çizelge 8.20. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Max MinxEnt)_{K_1}^1$	0.0691	0.4931	5.9325	0.5477	-14.858	-14.829	-11.931	-11.858
$(Max MinxEnt)_{K_2}^1$	0.0681	0.5221	6.0169	0.4213	-13.106	-13.017	-7.251	-7.032
$(Max MinxEnt)_{K_3}^1$	0.0624	0.6320	4.1111	0.5335	-17.410	-17.231	-8.629	-8.187
$(Max MinxEnt)_{K_4}^1$	0.0582	0.7162	4.2069	0.3787	-15.505	-15.204	-3.796	-3.055
$(Min MinxEnt)_{K_1}^1$	0.0700	0.4860	9.6630	0.2085	-12.032	-12.003	-9.105	-9.033
$(Min MinxEnt)_{K_2}^1$	0.0686	0.5121	9.3078	0.1570	-10.069	-9.980	-4.215	-3.996
$(Min MinxEnt)_{K_3}^1$	0.0675	0.5336	9.0179	0.1084	-8.133	-7.954	0.648	1.090
$(Min MinxEnt)_{K_4}^1$	0.0639	0.6040	6.3070	0.1774	-8.127	-7.826	3.582	4.323

Çizelge 8.21. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının istatistiksel uyum testleri ve kriterlerine göre incelenmesi

Genelleştirilmiş MinxEnt Dağılımları	D	P_D	χ^2	P_{χ^2}	AIC	AIC_c	BIC	BIC_c
$(Max MinxEnt)_{K_1}^2$	0.0889	0.2122	24.5427	0.0001	19.8146	19.8440	22.7418	22.8143
$(Max MinxEnt)_{K_2}^2$	0.0967	0.1418	20.1980	0.0001	21.4674	21.5563	27.3219	27.5409
$(Max MinxEnt)_{K_3}^2$	0.0951	0.1547	20.1262	0.0001	23.6319	23.8110	32.4136	32.8549
$(Max MinxEnt)_{K_4}^2$	0.0984	0.1289	19.8106	0.0001	25.6438	25.9445	37.3528	38.0937
$(Min MinxEnt)_{K_1}^2$	0.1136	0.0525	22.7166	0.0001	20.3138	20.3432	23.2411	23.3135
$(Min MinxEnt)_{K_2}^2$	0.1148	0.0484	21.9880	0.0001	22.3039	22.3928	28.1584	28.3774
$(Min MinxEnt)_{K_3}^2$	0.1043	0.0925	24.0106	0.0001	24.2397	24.4188	33.0215	33.4627
$(Min MinxEnt)_{K_4}^2$	0.1045	0.0912	22.7500	0.0001	26.2185	26.5193	37.9275	38.6685

Çizelge 8.20 ve Çizelge 8.21'den, KS testine göre hisse senedinin aylık getirilerinin dağılımına, $Lap(0.18,0.02)$ önsel dağılımı uygun her bir $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımının ve $N(0.04,0.06)$ önsel dağılımına uygun her bir $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımının %5 anlamlılık düzeyinde uyum sağladığı görülmektedir. χ^2 testine göre ise, bu sonuç sadece

$(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(m=1, \dots, 4)$ dağılımları için desteklenmektedir. Ayrıca bir başka dikkate çeken sonuç, $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$, $(m=1, \dots, 4)$ dağılımlarına uygun P_D ve P_{χ^2} olasılık değerlerinin, $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$, $(m=1, \dots, 4)$ dağılımlarına uygun değerlerden oldukça büyük olmasıdır.

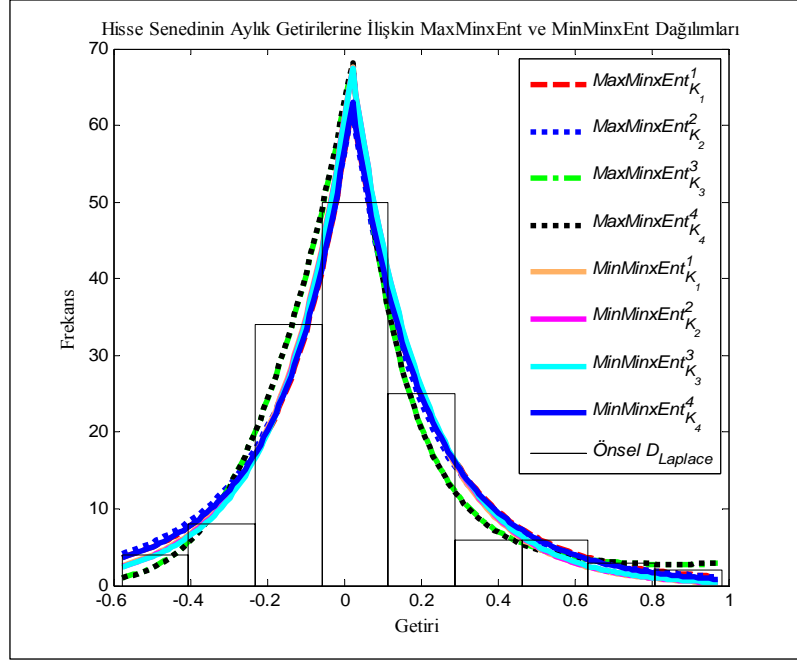
KS ve χ^2 testlerine göre istatistiksel veriye uyum sağlayan $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ $(m=1, \dots, 4)$ dağılımları arasında, AIC ve BIC kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan dağılımlar sırasıyla, $(Max MinxEnt)_{K_3}^1$ ve $(Max MinxEnt)_{K_1}^1$ dağılımlarıdır. $(Max MinxEnt)_{K_m}^2$ $(m=1, \dots, 4)$ dağılımları arasında her iki kritere göre en iyi uyum sağlayan dağılım, $(Max MinxEnt)_{K_1}^2$ dağılımı dağılımdır. Benzer sonuçlar AIC_c ve BIC_c kriterlerine göre de desteklenmektedir.

$(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^2$ $(m=1, \dots, 4)$ dağılımları için, $(Max MinxEnt)_{K_m}^r$ $(r=1, 2)$, $(m=1, \dots, 4)$ dağılımlarında elde edilen benzer sonuçlar geçerlidir.

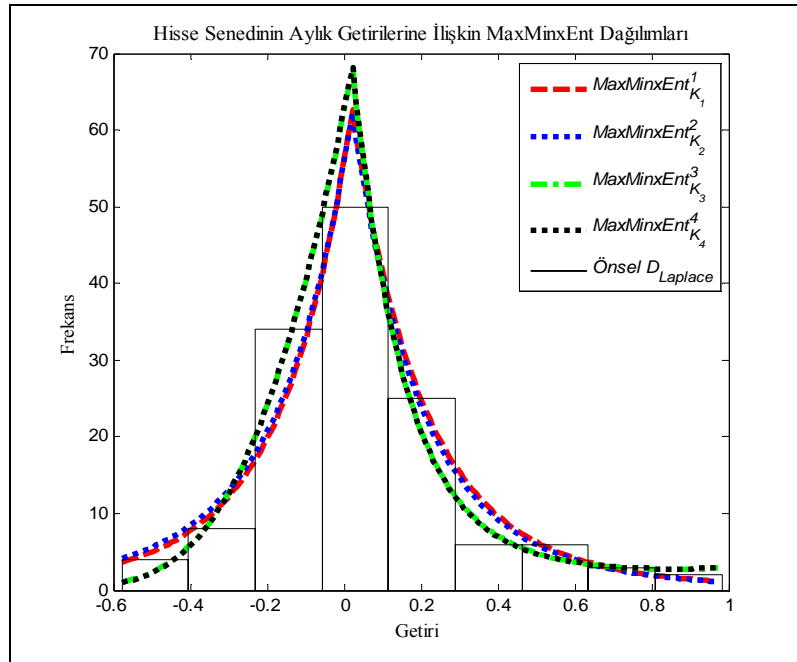
Tüm uyum iyiliği testleri ile informasyon kriterlerinin sonuçlarına göre, hisse senedinin aylık getirilerinin dağılımına en uyumlu dağılımın $(Max MinxEnt)_{K_3}^1$ dağılımı olduğu sonucuna varılır.

Ayrıca K_m , $(m=1, \dots, 4)$ moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x) = Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımına uygun $(Max MinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(Min MinxEnt)_{K_m}^1$ $(m=1, \dots, 4)$ dağılımlarının istatistiksel veriye uyumu görsel olarak Şekil 8.7–8.9’da incelenmiştir.

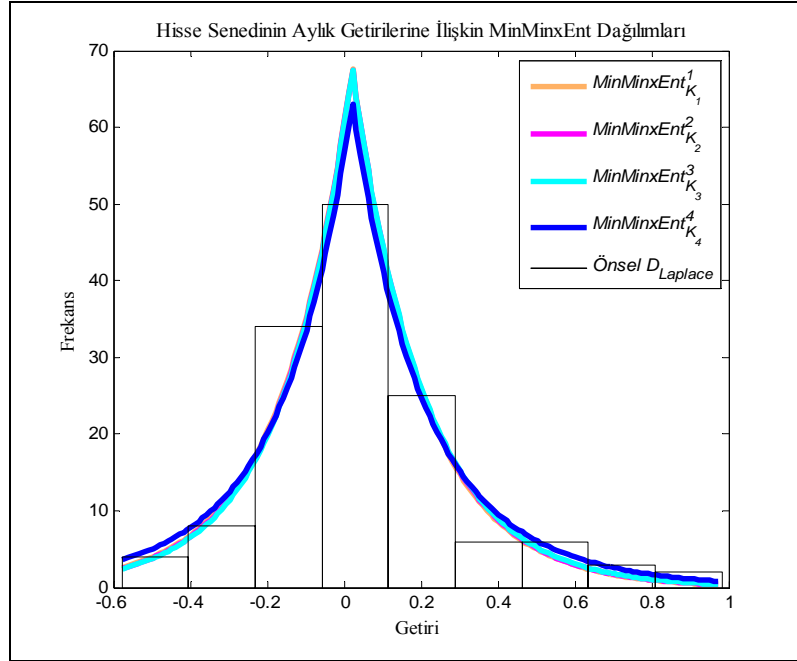
Şekil 8.7. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$, $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.8. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri

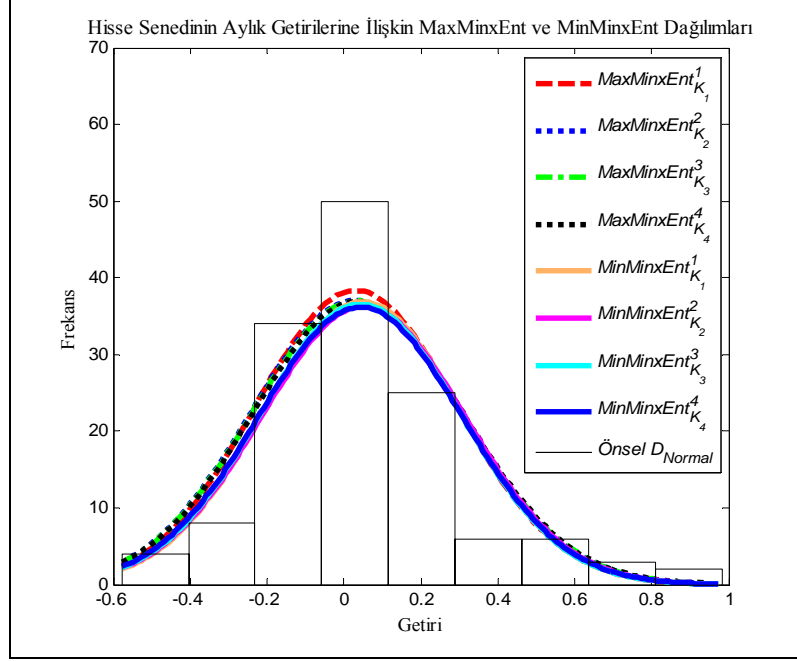


Şekil 8.9. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_1(x)$ önsel dağılımına uygun $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri

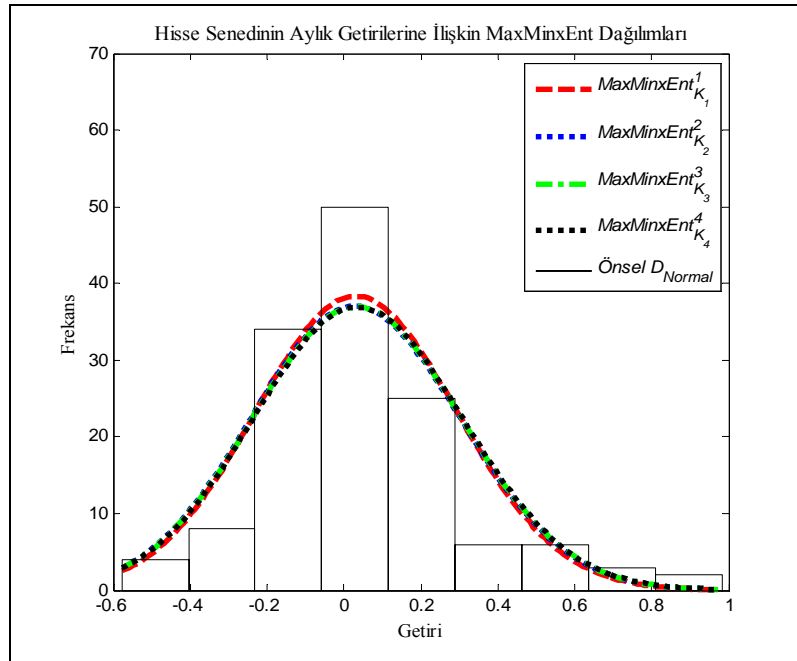


Şekil 8.7–8.9’den görüldüğü gibi $q_1(x) = Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^1$ ve $(MinMinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının, hisse senedinin aylık getiri değerlerine uyumu görsel olarak da desteklenmektedir. $(MaxMinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(MinMinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarıyla ilgili görsel sonuçlar ise, Şekil 8.10–8.12’de verilmiştir.

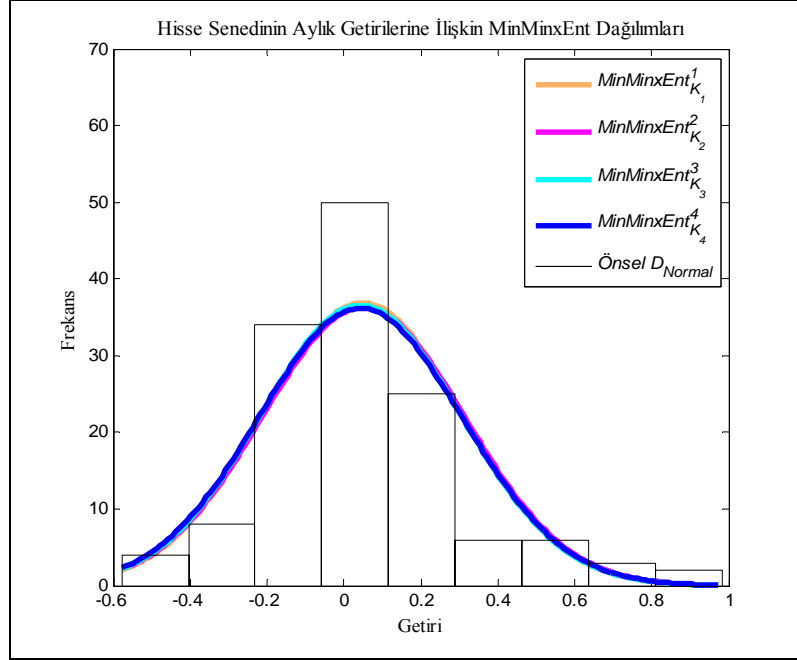
Şekil 8.10. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^2$, $(MinMinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.11. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1, \dots, 4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(MaxMinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1, \dots, 4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.12. Hisse senedinin aylık getiri değerleri için K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine ve $q_2(x)$ önsel dağılımına uygun $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının grafikleri



Şekil 8.10–8.12’den, hisse senedinin aylık getiri değerleri için $q_2(x) = N(0.04, 0.06)$ önsel dağılımına ve K_m ($m=1,\dots,4$) moment vektör fonksiyonları kümesine uygun $(Max\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ve $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarının görsel uyumunun oldukça zayıf olduğu görülmektedir. Bir başka ifade ile bu görsel sonuçlar, uyum iyiliği testleri ve bilgi kriterleri sonuçlarını desteklemektedir.

Tüm bu analiz sonuçlarına göre vurgulamak gerekir ki, $Lap(0.18, 0.02)$ önsel dağılımına uygun $(Max\ MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımları, $N(0.04, 0.06)$ önsel dağılımına uygun $(Max\ MinxEnt)_{K_1}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımlarına göre hisse senedinin aylık getirileri değerlerine daha iyi uyum sağlamaktadır. Bu sonuç $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^1$ ($m=1,\dots,4$) dağılımları ile $(Min\ MinxEnt)_{K_m}^2$ ($m=1,\dots,4$) dağılımları arasında daha da fazla ön plana çıkmaktadır.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ve öneriler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

1. Sürekli rassal değişkenler için MaxEnt dağılımının bulunması problemi Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle çözülmüştür ve bu yöntemin performansı incelenmiştir.
2. Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle, sürekli rassal değişkenler için önsel dağılım bilginse sahip MinxEnt dağılımının bulunması problemi çözülmüştür ve bu yöntemin performansı incelenmiştir.
3. Sürekli rassal değişkenler için entropi optimizasyon dağılımlarının da moment fonksiyonlarının ve moment kısıtları sayısının etkisi gözlenmiştir.
4. Sürekli rassal değişkenler için geliştirilmiş MaxEnt dağılımlarının bulunması problemi Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle çözülmüştür.
5. Sürekli rassal değişkenler için önsel dağılım bilginse sahip geliştirilmiş MinxEnt dağılımlarının bulunması problemi Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntemle çözülmüştür.
6. Özel önsel dağılımlara dayalı entropi optimizasyon dağılımları incelenmiştir.
7. Geliştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları için moment fonksiyonları kümesi ve önsel dağılım konuları üzerinde durulmuştur.
8. Sürekli rassal değişkenler için entropi optimizasyon dağılımlarının ve geliştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunması için MATLAB'da program yazılmıştır.
9. Sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan geliştirilmiş MaxEnt dağılımlarının, istatistiksel veriye uyumu iki farklı örnek üzerinde gösterilmiştir. Bu uyumu göstermek için uyum iyiliği testlerinden, bilgi kriterlerinden ve görsel yorumlardan yararlanılmıştır.

10. Sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan önsel dağılım bilgisine sahip genelleştirilmiş MinxEnt dağılımlarının, istatistiksel veriye uyumu iki farklı örnek üzerinde gösterilmiştir. Bunun için uyum iyiliği testlerinden, bilgi teorisi kriterlerinden ve görsel sonuçlardan yararlanılmıştır.
11. Sürekli rassal değişkenler için genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının bulunması için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem uygulanabilir.
12. Sürekli rassal değişkenler için Gauss-Legendre yaklaşımına dayalı yöntem ile bulunan genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları, istatistiksel veriyi modellemek için istatistiksel dağılımlara alternatif olarak kullanılabilir.
13. Genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımları için K_m moment vektör fonksiyonları kümesinin oluşturulmasında, uygulamalarda kullanılan moment fonksiyonlarından yararlanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. ve Stegun, I.A. (1972), *Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications*, New York.
- Akaike, H. (1974), "A new look at the statistical model identification," *IEEE .Trans Auto. Control*, **19**, 716-723.
- Ang, A.H.S. ve Tang, W.H. (1984), *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II: Decision, Risk and Reliability*, Wiley, New York.
- Asadi, M., Ebrahimi, N., Hamedani, G.G. ve Soofi, E.S. (2004), "Maximum dynamic entropy models," *Journal of Applied Probabilty*, **41(2)**, 379-390.
- Balestrino A., Caiti A. ve Crisostomi, E. (2006), "Efficient numerical approximation of maximum entropy estimates," *International Journal of Control*, **79(9)**, 1145-1155.
- Balakrishnan, N.ve Lai, C.D. (2009), *Continuous Bivariate Distributions*, 2nd ed. Springer
- Botev, Z.I. ve Kroese, D.P. (2009), "The generalized cross entropy method, with applications to probability density estimation," *Methodology and Computing in Applied Probability*, **10(3)**, 435-451
- Buchen, P. W. ve Kelly, M. (1996), "The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices," *The Financial and Quantitative Analysis*, **31(1)**, 143-159.
- Burnham, K.P. ve Anderson, D.R. (2002), *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*, 2nd ed. Springer-Verlag
- Burnham, K.P. ve Anderson, D.R. (2004), "Multimodel Inference: understanding AIC and BIC in Model Selection," *Amsterdam Workshop on Model Selection*
- Bera, A. ve Park, Y.S. (2007), "Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model," *Working Paper*.
- Bera, A. ve Park, Y.S (2009), "Maximum entropy autoregressive conditional heteroskedasticity model," *Journal of Econometrics*, **150(2)**, 219-230.

- Borwein, J., Choksi, R., ve Maréchal, P. (2003) “Probability distributions of assets inferred from option prices via the principle of maximum entropy,” *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **14(2)**, 464-478
- Cramer, H. (1966), *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press.
- Cover, T.M. ve Thomas, J.A. (2006), *Elements of Information Theory*, A Wiley-Interscience Publication, New York, USA.
- D’Agostino, R.B. ve Stephens, M.A. (1986), *Goodness of fit Techniques*, CRC Press
- Dalén, J. (1987), “Algebraic bounds on standardized sample moments,” *Statistics and Probability Letters*, **5**, 329–331.
- Demidovich, B.P. ve Maron, I.A. (1970), *Osnovi Vichislitelnoy Matematiki*, Navka Press.
- Dumitrescu, M.B. (1986), “The application of the principle of minimum cross-entropy to the characterization of the exponential-type probability distributions,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **38** 451-457.
- Ebrahimi N. (2000), “The maximum entropy method for lifetime distributions,” *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, **62 (A)**, Pt. 2, 236-243
- Fikhtengoltz, G.M. (1959), *Kurs Differentialnogo i Integralnogo Ischisleniya II*, Fizmatgiz Pres.
- Fomby, T.B. ve Hill, C.R. (1997), *Applying Maximum Entropy to Econometric Problems*, JAI Press.
- Gibbons, J.D. ve Chakraborti, S. (1985), *Nonparametric Statistical Inference*, Marcel Dekker, New York.
- Gokhale, D.V. (1975), “Maximum entropy characterization of some distributions,” *Statistical Distribution in Scientific Work*, **3**, 299-304.
- Ghosh, A. (1999), “A FORTRAN program for fitting Weibull distribution and generating samples,” *Computers and Geosciences*, **25**, 729-738.
- Golan, A., Judge, G. ve Miller, D. (1996), *Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data*, John Wiley & Sons, New York, USA.

- Hansen, C.B., McDonald, J.B. ve Theodossiou, P. (2007), "Some Flexible Parametric Models for partially adaptive Estimators of Econometric Models" *The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*. 1 (7).
- Harris, R.D.F. ve Küçüközmen, C.C. (2001), "The empirical distribution of stock returns: evidence from an emerging European market," *Applied Economics Letters*, **8**, 367-371.
- Hoeven, N. (2005), "The probability to select the correct model using likelihood-ratio based criteria in choosing between two nested models of which the more extended one is true," *Journal of Statistical Planning and Inference*, **135**, 477-486
- Huber-Carol, C., Balakrishnan, N., Nikulin, M. ve Mesbah, M. (2002), *Goodness-of-Fit Tests and Model Validity*, Birkhäuser Press, Boston.
- Hurvich, C.M. and Tsai, C.L. (1990), "The impact of model selection on inference in linear regression," *Am Statistician*, **44**, 214–217.
- Johnson, N.L., Kotz, S. ve Balakrishnan, N. (1994), *Continuous Univariate Distributions, Volume1*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York
- Johnson, N.L., Kotz, S. ve Balakrishnan, N. (1995), *Continuous Univariate Distributions, Volume2*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York
- Jaynes, E.T. (1957), "Information theory and statistical mechanics," *Phys. Rev.*, **106**, 620-630.
- Kagan, A.M, Linik, Y.V. ve Rao, C.R. (1973), *Characterization Problems in Mathematical Statistics*, Wiley, New York.
- Kantar, Y.M. ve Usta, I. (2008), "Analysis of wind speed distributions: Wind distribution function derived from minimum cross entropy principles as better alternative to Weibull function," *Energy Conversion and Management* **49**, 962–973.
- Kapur, J. N. (1989) *Maximum Entropy Models in Science and Engineering*, Wiley, New York.
- Kapur, J.N. ve Kesevan, H.K. (1992), *Entropy Optimization Principle with Applications*, Academic Press.

- Karain, Z.A. ve Dudewicz, E.J. (2000), *Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods*, Chapman & Hall/CRC.
- Karmeshu, J. (2003), *Entropy Measures, Maximum Entropy Principle and Emerging Applications*, Springer.
- Kullback, S. ve Leibler, R.A. (1951), "On Information and Sufficiency," *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 79–86.
- Kullback S. (1959), *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York, USA.
- Kullback, S. (1997), *Information Theory and Statistics*, Dover Publications, New York, USA.
- Li, M. ve Li, X. (2005a), "MEP-type distribution function: a better alternative to Weibull function for wind speed distribution", *Renewable energy*, **30(8)**, 1221-1240.
- Li, M. ve Li, X. (2005b), "Investigation of wind characteristics and assessment of wind energy potential for Waterloo region, Canada," *Energy conversion management*, **46**, 3014-3033.
- Li, M. ve Li, X. (2006), "A second-order Newton-Raphson method for improved numerical stability in the determination of droplet size distributions in sprays," *Atomization and Sprays*, **16(1)**, 71-82.
- Lind N.C. (1997), "Three information theoretical methods to estimates a random variable," *Journal of Environmental Management*, **49**, 43-51.
- Linden, M. (2001), "A model for stock return distribution," *International Journal of Finance and Economics*, **6**, 159-169.
- McQuarrie, A.D. (1999), "A small-sample correction for the Schwarz SIC model selection criterion," *Statistics & Probability Letters*, **44**, 79-86.
- Mead, L.R. ve Papanicolaou, N. (1984), "Maximum entropy in the problem of moments," *Journal of Mathematical Physics*, **25(8)**, 2404-2417.
- Mert Kantar, Y. (2006), *Entropi optimization metodlarıyla rassal değişkenlerin dağılımlarının incelenmesi*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

- Muhlenbein, H. ve Hons, R. (2005), "The estimation of distributions and the minimum relative entropy principle," *Evolutionary Computation*, **13 (1)**, 1-27.
- Nailong, W. (1977), *The Maximum Entropy Method*, Springer-Verlag, Berlin
- Noble, J.V. (2000), "Gauss-Legendre principal value integration" *Computing in Science & Engineering*, **2(1)**, 92-95.
- Ormoneit, D. ve White, H. (1999), "An efficient algorithm to compute maximum entropy densities," *Econometric Review*, **18(2)**, 127-140.
- Pandey, M.D. (2001a), "Extreme quantile estimation using order statistics with minimum cross-entropy principle," *Probabilistic Engineering mechanics*, **16 (1)**, 31-42.
- Pandey, M.D. (2001b), "Minimum cross-entropy method for extreme value estimation using peaks-over-threshold data," *Structural Safety*, **23(4)**, 345-363.
- Park, S. ve Park, D. (2001), "Correcting moment for goodness of fit tests based on two entropy estimates," *Journal of statistical computations and simulations*, **73 (9)**, 682-694.
- Ralston, A. ve Rabinowitz, P. (1978) *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Ramirez, P. ve Carta J.A. (2005), "The use of wind probability distributions derived from the maximum entropy principle in the analysis of wind energy. A case study," *Energy and Conversion Management*, **47**, 2564-2577
- Ranneby, B. (1984), "The maximum spacing method: an estimated method related to the maximum likelihood method," *Scand.J.Statistics*, **11**,93-112.
- Ranneby, B., Jammalamadakab, S.R. ve Teterukovskiy, A. (2005), "The maximum spacing estimation for multivariate observations," *Journal of Statistical Planning and Inference*, **129(1)**, 427-446.
- Rockinger, M. ve Jondeau, E. (2002), "Entropy densities with an application to autoregressive conditional skewness and kurtosis," *Journal of Econometrics*, **106(1)**, 119-142.
- Ridder, A. ve Rubinstein, R. (2007), "Minimum cross-entropy methods for rare-event simulation," *Simulation*, **83(11)**, 769-784.

- Ryu, H. K. (1993). "Maximum entropy estimation of density and regression functions," *Journal of Econometrics*, **56**, 397-440.
- Schwarz, G. (1978), "Estimation the dimension of a model," *Annals Statistics* **6**, 461-464.
- Schreuder, H.T. ve Hafley, W.L. (1977), "A useful bivariate distribution for describing stand structure of tree heights and diameters," *Biometrics* **33(3)**, 471-478.
- Shabri, A. ve Jemain A.A. (2006), "Application of multi criteria method to identify the best-fit statistical distribution," *Journal of Applied Sciences*, **6(4)**, 926-932.
- Scott, D.W. (1992), *Multivariate density estimation. Theory, practice and visualization*, Wiley, New York.
- Shamilov A. (2005), "Comparison of classical estimate methods based on maximum entropy," *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, Izmir University of Economics,
- Shamilov, A. (2006), "A development of entropy optimization methods," *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(5)**, 568-575.
- Shamilov, A. (2007), "Generalized entropy optimization problems and The existence of their solutions," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **382(2)**, 465-472.
- Şamilov A. (2008) *Olasılıksal Dağılımların Karakteristik Fonksiyonları ve Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir.
- Şamilov, A. (2009), *Entropi, İnfomasyon ve Entropi Optimizasyon*, Anadolu Üniveristesesi Yayınları, Eskişehir.
- Shamilov A., Kantar Mert Y. (2005), "On a distribution minimizing maximum entropy", *Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations*, Izmir University of Economics,
- Shamilov, A., Usta, İ. ve Kantar Mert, Y. (2006a), "The distribution of minimizing maximum entropy: alternative to Weibull distribution for wind speed," *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(6)**, 695-700.

- Shamilov, A., Kantar Mert, Y. ve Usta İ. (2006b), "On a functional defined by means of Kullback-Leibler measure and its statistical applications," *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5(6)**, 671-676.
- Shamilov, A., Ağaoğlu, E., Usta, İ., Kantar Mert, Y., Girifitinoğlu, Ç. ve Yolaçan, Ş. (2006c), "MinMaxEnt dağılımı yardımıyla modelleme", *5. İstatistik Günleri Sempozyumu*.
- Shamilov, A., Girifitinoğlu, Ç., Yolaçan, Ş., Usta, İ. ve Kantar Mert, Y. (2006d), "Dünya ülkelerinin kentsel ve kırsal nüfus homojenliğinin genişletilmiş maksimum entropi yöntemi ile belirlenmesi," *5. İstatistik Günleri Sempozyumu*.
- Shamilov, A., Kantar Mert, Y. ve Usta, I. (2008a), "Use of MinMaxEnt distributions defined on basis of MaxEnt method in wind power study," *Energy Conversion & Management*, **49(4)**, 660-677.
- Shamilov, A., Girifitinoglu, C., Usta, I. ve Kantar Mert, Y. (2008b), "A new concept of relative suitability of moment function sets," *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 521-529.
- Shamilov, A. ve Asma, S. (2008), "Finite Mixtures of MaxEnt Distributions," *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 530-537.
- Shannon, C.E. (1948), "Mathematical theory of communication," *Bell System Tech. J.*, **27**, 623-659.
- Silverman, B.W. (1986), *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman & Hall, London
- Tremblay, M. ve Wallach, D. (2004), "Comparison of parameter estimation methods for crop models," *Agronomie*, **24**, 351-365.
- Usta, İ. (2006), *MaxEnt ve MinxEnt optimizasyon prensiplerine bağlı nümerik incelemeler ve istatistiksel uygulamalar*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Wang, Y., Yam, R.C.M. ve Zuo, M J. (2004), "A multi-criterion evaluation approach to selection of the best statistical distribution," *Computers & Industrial Engineering*, **47**, 165–180.
- Woodbury, A.D. (2004), "A FORTRAN program to produce minimum relative entropy distributions," *Computers & Geosciences*, **30 (1)**, 131-138

- Woodbury, A.D. ve Ulrych, T.J. (2004), "Minimum relative entropy and probabilistic inversion in groundwater hydrology," *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **12**, 317-358.
- Wu, X. (2003), "Calculation of maximum entropy densities with application to income distribution," *Journal of Econometrics*, **115(2)**, 347-354.
- Wu, X. ve Stengos, T. (2005), "Partially Adaptive Estimation via Maximum Entropy Densities," *Econometrics Journal*, **8(3)**, 352-366.
- Wu, X. ve Perloff, J. M. (2007) "GMM estimation of a maximum entropy distribution with interval data," *Journal of Econometrics*, **138(2)**, 532-546.
- Zellner, A. ve Highfield, A.R. (1988), "Calculation of maximum entropy distribution and approximation of marginal posterior distributions," *Journal of Econometrics*, **37(2)**, 195-209.
- Zellner A. (1997). "The Bayesian method of moment (BMOM): theory and applications," *Advances in Econometrics*, **12**, 85-105.
- Zellner A., Tobias J. (2001). "Further result on Bayesian methods of moments analysis of the multiple regression model," *International Economic Review* **42 (1)**, 121-139.
- Zhu, Q., (1998), "Minimum Cross-Entropy Approximation for Modeling of Highly Intertwining Data Sets at Subclass Levels," *Journal of Intelligent Information Systems*, **11(2)**, 139-152.