

**ZAMAN SERİLERİNDE  
ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ**

Çiğdem GİRİFTİNOĞLU  
Doktora Tezi

İstatistik Anabilim Dalı  
Ekim-2009

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Çiğdem Giriftinoğlu**'nun "**Zaman Serilerinde Entropi Optimizasyon Yöntemleri**" başlıklı **İstatistik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 09.10.2009 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. ALADDİN ŞAMILOV	.....
Üye	: Prof. Dr. EMBİYA AĞAOĞLU	.....
Üye	: Doç. Dr. HALUK HÜSEYİN	.....
Üye	: Prof. Dr. TAHİR KHANİYEV	.....
Üye	: Prof. Dr. MEMMEDAĞA MEMMEDLİ	.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

## ÖZET

### Doktora Tezi

## ZAMAN SERİLERİNDE ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Çiğdem GİRİFTİNOĞLU

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV  
2009, 148 sayfa

Bu tez çalışmasında, MaxEnt yönteminden yararlanarak, bir zaman serisi için tam otokovaryans sayısı  $m$ 'in biliniyor olduğu varsayımı altında,  $m$ 'den sonraki gecikmeli otokovaryans kısıtlı MaxEnt dağılımlarının bu stokastik süreç için kabul edilebilirliği, Jaynes'in konsantrasyon teoremi yardımı ile araştırılmıştır. Otokovaryans kısıtlarının artırılmasıyla elde edilen MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği sürecinin, otoregresif modelin gecikme sayısını belirlemek ve parametrelerini tahmin etmek için de işletilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca ele alınan istatistiksel veriyi en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunması problemi olan Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Probleminin (GEOP) formülasyonu verilmiş, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının bu problemin çözümü olduğu gösterilmiştir. Ardından, moment fonksiyonları ve moment değerleri parametreye bağlı olan MaxEnt dağılımları için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları tanımlanarak, kayıp değerli zaman serileri için bu dağılımlar ele alınmıştır. MaxEnt, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının entropi değerleri arasında bağıntılar kurularak, söz konusu dağılımlardan en büyük bilgiyi içerenin MinMaxEnt olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç doğrultusunda kayıp değer ve gelecek değer tahminlemesi birer problem olarak ele alınarak, çözüm için MinMaxEnt dağılımına dayalı bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntemin, öngörü ve kayıp değer sayısına bağlı durumlara göre Matlab'da programları yazılmıştır. Geliştirilen yöntemin performansı bir, iki, üç ve dört gecikmeli otoregresif modellerden türetilen zaman serileri üzerinde, farklı sayıda kayıp değerler için MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminlerin MSE'leri (ortalama kare hata) simülasyon çalışması ile hesaplanarak, değerlendirilmiştir. Bununla birlikte söz konusu yöntem tek, iki ve daha fazla öngörü için kullanılarak, simülasyon çalışması ile MSE değerleri hesaplanmış ve yöntemin geçerliliği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** MinMaxEnt Dağılımı, MaxEnt Dağılımı, Kayıp Değerli Zaman Serileri, Kayıp Değer ve Gelecek Değer Tahmini, Otoregresif Modelleme

## ABSTRACT

PhD Dissertation

### ENTROPY OPTIMIZATION METHODS IN TIME SERIES

Çiğdem GİRİFTİNOĞLU

Anadolu University  
Graduate School of Sciences  
Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV  
2009, 148 pages

In this thesis, via Maximum Entropy Method under the assumption that the number of exact autocovariances for time series is known, the acceptability of MaxEnt Distributions with autocovariances beyond the lag  $m$  is investigated by virtue of Jaynes's concentration theorem. It is proposed that the process for acceptability of MaxEnt Distributions can be also used to determine lag number and to estimate parameters of autoregressive model. Moreover, it is given that the formulation of Generalized Entropy Optimization Problem (GEOP) which requires obtaining distribution represents given statistical data in the best form and it is shown that MinMaxEnt and MaxMaxEnt Distributions are a solution of this problem. Later, MinMaxEnt and MaxMaxEnt for MaxEnt Distributions with moment functions and moment values dependent on parameter are defined, these distributions are found for the time series with missing values. By means of relations established between entropy values of MaxEnt, MinMaxEnt and MaxMaxEnt distributions, it is proved that the distribution containing the largest information is MinMaxEnt distribution. Through the result, estimating of missing and feature value is considered respectively as a problem and a method based on MinMaxEnt distribution is developed for solving these problems. The computations are performed by the programmes written in Matlab in order to use the developed method according to the number of forecast and missing values. The performance of the developed method is evaluated by mean square errors (MSE) calculated from simulations for different number of missing values on the time series generated by models with lag one, two, three and four. Furthermore, MSE's are calculated from simulation studies by using mentioned method for one, two and more forecasting and the validity of this method is shown.

**Keywords:** MinMaxEnt Distribution, MaxEnt Distribution, Time Series with Missing Value, Estimating of Missing and Feature Value, Autoregressive Modelling

## TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışmasının oluşmasında, başlangıcından bitimine kadar her aşamada beni yönlendiren, sabırla yardımlarını esirgemeyen, vermiş olduğu “Ölçüm Teorisi ve Olasılık”, “Entropi ve İnfomasyon Teorisi” ve “İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri” gibi eşsiz yüksek lisans ve doktora dersleriyle özverili bir şekilde değerli bilgilerini bizlere aktaran, yazmış olduğu “Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali” , “Olasılıksal Dağılımların Karakteristik Fonksiyonları ve Uygulamaları” ve “ Entropi, İnfomasyon ve Entropi Optimizasyon” isimli kitaplarıyla yolumuza ışık tutan, yaptığı seminer çalışmalarıyla ufkumuzu genişleten, sadece bilimsel değil hayat tecrübelerini de bizimle paylaşarak, her duruma uygunluğuyla hayranlık uyandıran ve eşsiz kıssadan hisseleriyle deneyimlemeden öğrenmemizi sağlayan, akademik hayatıma attığım ilk adımdan itibaren arkamda olduğunu hissettiren ve her türlü desteğini benden esirgemeyen, sadece tez danışmanım değil, amaçlarımı ve önceliklerimi belirlemede yardımcı olan, beni dinleyen, teşvik eden, odaklanmamı sağlayan ve cesaretlendiren sevgili hocam Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV’a sonsuz teşekkür ederim.

Bölümümüze getirdiği yeniliklerle ve bilime verdiği önemle sürekli gelişmemizi sağlayan, tüm çalışmalarında desteğini esirgemeyen, güven, sevgi ve saygı duyduğum değerli hocam, Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU’na teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans ve doktora çalışmalarımnda beni her zaman yüreklendiren ve desteğini esirgemeyen, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER’e en derin teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme toplantıları süresince çalışmalarımızı yakından takip ederek değerli görüşlerini ve yapıcı eleştirilerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Haluk HÜSEYİN’e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan ve bu günlere ulaşmamı sağlayan sevgili aileme de sonsuz güven ve destekleri için ayrıca teşekkür ederim.

Çiğdem GİRİFTİNOĞLU

Ekim-2009

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>ii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>viii</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	<b>ix</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	<b>xi</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. GENEL KAVRAMLAR</b>	<b>7</b>
2.1. Stokastik Süreç.....	7
2.2. Stokastik Süreçlerin İstatistikleri .....	9
<b>3. ZAMAN SERİSİ İÇİN MAXENT DAĞILIMININ KURULMASI</b>	<b>16</b>
3.1. Maksimum Entropi Yöntemi ve Maksimum Entropi Dağılımı .....	16
3.2. Zaman Serisi için MaxEnt Olasılık Dağılımı Formu .....	17
3.3. Lagrange Çarpanlarının Elde Edilmesi .....	22
3.3.1 Reel değerli zaman serisi için Lagrange çarpanları .....	31
3.3.2 Reel değerli zaman serisi için kovaryans matrisinin determinantı.....	32
3.4. Otokovaryans Fonksiyonları için Ekstrapolasyon .....	33
<b>4. MAXENT DAĞILIMLARININ KABUL EDİLEBİLİRLİĞİ</b>	<b>38</b>
4.1. Jaynes'in Entropi Konsantrasyon Teoremi .....	38
4.2. Konsantrasyon Teoremi Yardımıyla MaxEnt Dağılımlarının Kabul Edilebilirliği.....	43

<b>5. MaxEnt YÖNTEMİNE DAYALI OTOREGRESİF MODELLEME</b>	<b>46</b>
5.1. Oto regresif Modelde Gecikme Sayısının MaxEnt Yöntemi ile Belirlenmesi .....	46
5.2. Oto regresif Modelde Parametrelerin MaxEnt Yöntemi ile Tahmini .....	49
<b>6. GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ</b>	<b>50</b>
6.1 Entropi Optimizasyon Ölçümüne Dayalı Özel Dağılımlar .....	50
6.2. Shannon Entropi Ölçümüne Uygun Entropi Optimizasyon Fonksiyoneli.....	53
6.3. Kullback-Leibler Ölçümüne Uygun Entropi Optimizasyon Fonksiyoneli.....	55
6.4. Sonlu sayıda moment kısıtları ile GEOP .....	56
6.5. Parametreye Bağlı Sonlu Sayıda Moment Kısıtları ile GEOP.....	57
<b>7. ZAMAN SERİLERİ İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON DAĞILIMLARI</b>	<b>59</b>
7.1. Çok Boyutlu Normal Dağılımın MaxEnt Dağılımı Şeklinde Bulunması .....	59
7.2. Çok Boyutlu Normal Dağılımın Maksimum Entropi Değeri.....	61
7.3. Zaman Serileri için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Dağılımları .....	64
<b>8. ZAMAN SERİSİ HAKKINDA İNFORMASYON BAĞINTILARI</b>	<b>66</b>
8.1. MaxEnt, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Dağılımlarının Entropi Değerleri Arasındaki Bağlıntılar .....	66

8.2. MaxEnt Dağılımının Verdiği İnfomasyon Yardımı ile Zaman Serisi Hakkında İnfomasyonun Değerlendirilmesi.....	70
<b>9. MinMaxEnt YÖNTEMİNE DAYALI KAYIP VE GELECEK DEĞERLERİN TAHMİNİ</b>	<b>72</b>
9.1. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Kayıp (Ara) Değer Tahmini.....	72
9.2. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Kayıp Değer Tahmini için Simülasyon.....	74
9.3. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Kayıp Değer Pozisyonuna göre Simülasyon.....	77
9.4. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki ve Daha Fazla Kayıp Değer Tahmini .....	90
9.5. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki Kayıp Değer Tahmini için Simülasyon.....	92
9.6. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Gelecek Değer Tahmini.....	93
9.7. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Gelecek Değer Tahmini için Simülasyon.....	94
9.8. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki ve Daha Fazla Gelecek Değer Tahmini .....	96
9.9. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki Gelecek Değer Tahmini için Simülasyon.....	97
<b>10. SONUÇ VE ÖNERİLER</b>	<b>98</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>100</b>
<b>Ek-1 MaxEnt Dağılımı Elde Edilen Matlab Program Kodları.....</b>	<b>103</b>
<b>Ek-2 Tek Kayıp Değer Tahmini için Matlab Program Kodları .....</b>	<b>106</b>



<b>Ek-3 Her Pozisyon için Tek Kayıp Değer Tahminine ait Matlab</b>	
<b>Program Kodları.....</b>	<b>110</b>
<b>Ek-4 Her Pozisyon için Tek Kayıp Değer Tahminiyle Simülasyona</b>	
<b>ait Matlab Program Kodları .....</b>	<b>114</b>
<b>Ek-5 Belirli Pozisyonlar için Tek Kayıp Değer Tahminiyle</b>	
<b>Simülasyona ait Matlab Program Kodları .....</b>	<b>118</b>
<b>Ek-6 Belirli Bir Pozisyon için Tek Kayıp Değer Tahminiyle</b>	
<b>Simülasyona ait Matlab Program Kodları .....</b>	<b>122</b>
<b>Ek-7 İki Kayıp Değer için Matlab Program Kodları.....</b>	<b>126</b>
<b>Ek-8 Üç Kayıp Değer Tahmini için Matlab Program Kodları .....</b>	<b>130</b>
<b>Ek-9 İki Kayıp Değer Tahmininde Simülasyon için Matlab Program</b>	
<b>Kodları .....</b>	<b>134</b>
<b>Ek-10 Tek Gelecek Değer Tahmini için Matlab Program Kodları.....</b>	<b>138</b>
<b>Ek-11 Çok Değişkenli MinMaxEnt ile İki Öngörü için Matlab</b>	
<b>Program Kodları (Simülasyon).....</b>	<b>141</b>
<b>Ek-12 Yinelemeli MinMaxEnt ile İki Öngörü için Matlab Program</b>	
<b>Kodları (Simülasyon).....</b>	<b>145</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

1.1. Tek bir parçacığın hareketi (Brownian Hareketi) .....	8
1.2. Rassal amplitüt ve fazlı bir jeneratörün voltajı .....	8
2.3. $x(t)$ rassal değişkeninin $F(x,t)$ dağılımının frekans yorumu.....	10

## ÇİZELGELER DİZİNİ

3.1. Dow Jones indekslerinin günlük kurları .....	35
4.1. MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliğinde kullanılan veri seti .....	43
4.2. Kısıt sayısı arttırıldığında MaxEnt Dağılımı parametre değerleri.....	44
5.1. AR(2) modelinden üretilen zaman serisi değerleri .....	47
5.2. Zaman serisi için iki ve üç gecikmeli MaxEnt dağılımları .....	48
5.3. AR(4) modelinin parametreleri ve MaxEnt tahminleri.....	49
9.1. AR(4) modelinden türetilen zaman serisi .....	74
9.2. İki ve üç gecikmeli MinMaxEnt kayıp değer tahminleri .....	75
9.3. Türetilen 100 zaman serisi için (MinMaxEnt) <sub>2</sub> tahminlerinin MSE değerleri.....	77
9.4. Belirli pozisyonlar için 100 zaman serisi üzerinde elde edilen MSE ve MAD değerleri .....	79
9.5. Simülasyon için kullanılan zaman serisi modelleri.....	81
9.6. Pozisyon 7'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	82
9.7. Pozisyon 14'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	83
9.8. Pozisyon 21'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	84
9.9. Pozisyon 28'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	85
9.10. Pozisyon 35'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	86
9.11. Pozisyon 42'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	87
9.12. Pozisyon 49'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	88
9.13. Pozisyon 56'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	89
9.14. Pozisyon 63'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	90

9.15. Pozisyon 70'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri.....	91
9.16. İki kayıp değerli zaman serileri için MinMaxEnt tahminlerinin MSE değerleri.....	94
9.17. Tek gelecek değer tahmini için simülasyon sonuçları .....	96
9.18. İki gelecek değerin MinMaxEnt tahminleri için MSE değerleri.....	98

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

EOD	: Entropi Optimizasyon Dağılımları
GEOD	: Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Dağılımları
GEOP	: Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Problemi
MaxEnt	: Maksimum Entropi
MinxEnt	: Minimum Çapraz Entropi
MinMaxEnt	: Minimum-Maksimum Entropi
MaxMaxEnt	: Maksimum-Maksimum Entropi
MSE	: Ortalama Kare Hata
MAD	: Ortalama Mutlak Hata
$(MaxEnt)_m$	: $m$ kısıtlı MaxEnt Dağılımı
$(MinMaxEnt)_m$	: $m$ kısıtlı MinMaxEnt Dağılımı
$AR(k)$	: $k$ gecikmeli Otoregresif Model

## 1. GİRİŞ

Bir stokastik sürecin tek bir gerçekleşmesi olarak ifade edilebilen zaman serisi, zamana bağlı ölçülmüş bir veri seti dizisidir. Mühendislikten ekonomiye birçok alanda zaman serisi örnekleriyle karşılaşmak mümkündür. Zaman serisi formunda bir veri seti ile çalışmayı gerektirmeyen bir bilim dalı bulmak oldukça zordur. Bir zaman serisinin karakteristik özelliği, onun gelecekteki davranışının tam olarak tahmin edilememesidir. Zaman serisi analizi istatistiğin önemli bir alanını oluşturmaktadır. Zamana bağlı kayıt edilen verilerden oluşması nedeniyle de zaman serisinde kayıp gözlemler oldukça yaygındır. Kayıp değer problemi, veri analizinde model belirlemenin tipik sorunlarından biridir. Bir zaman serisi için oldukça yaygın olan bu sorunun nedenleri, gözlemek istenilen frekanslarda verinin mevcut olmaması; kayıt hatalarının olması ve “aykırı değer” lerin silinmesi şeklinde sıralanabilir. Bu nedenle zaman serisi analizinde çeşitli sebeplerle bir ya da birkaç gözlemin kayıp olması durumunda önemli bir problem, modelin tahmin edilmesi ve kayıp değerler için tahminlerin elde edilmesidir. Kayıp değerlerin tahminlerinin zaman serisine dâhil edilmesi, verinin doğasını daha iyi anlamaya ve daha iyi öngörüler yapmaya imkân sağlar. Birçok çalışmada (Little ve Rubin 1987; Pourahmadi 1989) tamamlanmamış otoregresif zaman serileri ele alınmış, bu durumda parametre tahminleri ya gözlenmiş verinin tam Gaussian likelihood fonksiyonu maksimize edilerek ya da EM algoritması kullanılarak yapılmıştır (Shumway ve Stoffer, 2000). Ayrıca literatürde kayıp değerlerin yerine konması için de birçok metot geliştirilmiştir. Pourahmadi (1989) durağan bir zaman serisinin kayıp değerlerini tahmin etmek için tam bir çözüm önermiş ve ortalama kare hataya göre en iyi lineer ara değer bulucuyu (interpolator) belirlemiştir. Lineer ara değer bulucu (LI) metoduna göre özel olarak  $AR(1)$  modelinde,

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad |\rho| < 1 \quad (1.1)$$

$X_t$ ,  $t$  anındaki gözlem değeri,  $\varepsilon_t$ 'ler ise beyaz gürültünün (white noise) bir dizisi olmak üzere  $X_k$  kayıp değeri  $\frac{\rho}{1+\rho^2}(X_{k-1} + X_{k+1})$  bilinen formülü ile hesaplanır (Brockwell ve Davis 1991).

Roy ve Chakraborty (2006) ise (1.1)'deki model için iki kayıp değer tahmin metodunu karşılaştırmışlardır. İlk metot olarak kayıp değer yerine geride kalan  $(n-1)$  gözlem değerinin ortalaması olan  $\sum_{t=1, t \neq k}^n X_t / (n-1)$  koymayı öneren ortalama yerleştirme metodu (average replacement method), ikinci metot olarak  $X_k$  kayıp değer yerine  $X_1, \dots, X_{k-1}$ 'e dayandırılan  $\rho X_{k-1}$  tahminini koymayı öneren öngörü yerleştirme metodu FR (forecast replacement method) kullanılmıştır. A. Hamaz ve M. Ibazizen (2009) ise LI ile FR metotlarının oluşturduğu kayıp değer tahminlerini Pitman yakınlığı olarak bilinen bir ölçüme göre karşılaştırmışlar ve özel olarak birinci dereceden otoregresif model için LI metodunun FR metodundan üstünlüğünü göstermişlerdir. Farklı zaman serileri için kayıp değerlerin tahmininde farklı stratejilere ihtiyaç duyulur ve mümkün olan en iyi tahmini elde etmek için bu stratejileri kullanmak gerekir.

Zaman serisi analizi yöntemleri stokastik modelleme, deterministik modelleme ve durum uzaylı modelleme olmak üzere üçe ayrılmaktadır. Bunlardan stokastik modelleme, geleneksel Box Jenkins'in otoregresif, hareketli ortalama ve otoregresif-hareketli ortalama modelleri ile temsil edilebilir. ARIMA modelleri olarak bilinen bu teknikler istatistiksel kavramlara ve prensiplere dayandırılır ve birçok zaman serisi örneklerini modelleyebilir. Bu modeller bilinen veri örneklerini belirlemek için sistematik bir yaklaşım kullanır ve belirlenen örneklerin çeşidini üretebilen uygun formülleri seçer. Uygun model belirlendiğinde, bilinen zaman serisi verisi, modeldeki parametreler için uygun değerleri belirlemede kullanılır. Ayrıca ARIMA modelleri, seçilen modelin geçerliliğini doğrulamak için birçok istatistiksel testleri de sağlar. Bununla birlikte Box-Jenkins ARIMA modellerinin bir dezavantajı her zaman periyodunda verinin kaydedildiğini varsaymasıdır. Bu yüzden kayıp değerli zaman serisine Box-Jenkins ARIMA yaklaşımından önce, kayıp değerleri tahmin etmek için uygun ara değer hesaplama tekniklerini uygulamak gerekmektedir. Deterministik modelleme

olarak bilinen yöntemde ise zaman serisinin bilinmeyen bir fonksiyona uygunluğu varsayılır ve bu fonksiyona fit etmeye çalışılır. Burada kayıp değerler, fonksiyonun kayıp değerde aldığı değer kullanılarak tahmin edilir. Geleneksel zaman serisi yaklaşımlarından farklı olarak, bu metot zaman üzerinde değişkenler arasındaki ilişkiyi göz ardı etmektedir. Bu yaklaşım zaman serisi için “en iyi fit”in elde edilmesine dayandırılır ve “en iyi fit” sürecinin açık bir şekilde tanımlanmış olması gerekmektedir. Zaman serisi analizine farklı bir yaklaşım durum uzay modelinin kullanımınıdır. Bu yaklaşım bir zaman serisinin belli bileşenlerin bir kümesi olduğu fikri üzerinde durur. Kalman filtreleme ve Maksimum Benzerlik tahminleme yöntemleri durum uzaylı modellemenin önemli prosedürlerindedir. Maksimum benzerlik yönteminin modifiye edilmesiyle kayıp değerli bir veri seti için tahmin ve öngörü yapmak mümkün olur. Chi Fung D.S. (2006) yapmış olduğu tez çalışmasında, kayıp değerli zaman serisini modelleyebilmek için yukarıda sözü edilen tekniklerden en uygununu belirlemek üzerine araştırmalar yapmıştır. Deterministik ve stokastik modellemeleri karşılaştırmanın yanı sıra, kayıp değer tahmini ve öngörü yapmak için Box-Jenkins ARIMA modelleri ile durum uzay modellerini de karşılaştırmıştır.

Bu modelleme çalışmalarının yanı sıra Şamilov (2006), (2007), (2008)’ de bir istatistiksel veriyi en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunması problemi olan Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon probleminin (GEOP) formülasyonu ayrıntıları ile verilmiş, sonlu sayıda moment kısıtları üreten bir moment fonksiyonlar kümesine göre istatistiksel veriye en yakın ve en uzak dağılımların bulunması problemi ele alınmıştır ve farklı istatistiksel veriler üzerinde uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle stokastik süreç ve istatistiksel özellikleri ile durağan stokastik süreçler gibi gerekli kavramlar ele alınmış, daha sonra bir stokastik sürecin tek bir gerçekleşmesi olarak düşünülen zaman serisi için Maksimum Entropi yöntemi (MaxEnt) kullanılarak bir dağılım belirlenmiştir.  $[y_0, y_1, y_2, \dots, y_T]^T$  şeklinde ele alınan zaman serisi için  $y_k$  k. sıralı rassal değişken olmak üzere gözlemler arasındaki aralığın eşit olduğu varsayılır. Ele alınan zaman serisi için bir diğer basitleştiren matematiksel varsayım gözlemlerin ortalamasının sıfır olduğudur. Bu varsayım kısıtlayıcı değildir çünkü,



$$\bar{y} = \frac{1}{T+1} \sum_{j=0}^T y_j \quad (1.2)$$

ifadesi sıfır olmasa da zaman serisi,

$$y'_i = y_i - \bar{y} \quad (1.3)$$

ile sıfır ortalamalı başka bir zaman serisine dönüştürülebilir.

Dahası gözlenen zaman serilerini üreten stokastik sürecin durağan olduğu farz edilir. Bu koşul sürecin özelliklerinin zamanla değişmez olması anlamına gelir. Böylece eğer süreç bir olasılık dağılımı ile modellenebiliyorsa, bu dağılımın istatistiksel özellikleri (ortalama ve varyansı) zamandan bağımsızdır. Durağan olmayan zaman serileri veri üzerinde fark alma gibi uygun bir dönüşümle durağan hale getirilebilir.

$$y''_j = y_{j+1} - y_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, T-1 \quad (1.4)$$

eşitliğindeki gibi fark alma işlemi veri durağanlaşana kadar tekrar edilir. Özetle MaxEnt dağılımı kurma sürecinde verilen  $y$  kesikli zaman serisi aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır:

- Örneklemeler zamanda eş uzaylıdır,
- Seri sıfır ortalamalıdır,
- Stokastik sürecin verdiği gözlemler durağandır.

Ayrıca stokastik sürecin önemli bir özelliği  $y_j$  değeri ve  $k$  gecikmeli  $y_{j+k}$  değeri arasındaki kovaryans ile verilir. Bu  $k$  gecikmeli otokovaryans  $r_k$  olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$r_k = \text{cov}[y_j, y_{j+k}] = E[(y_j^* - \mu_y^*)(y_{j+k} - \mu_y)]. \quad (1.5)$$

Burada  $\mu_y$  sürecin ortalaması,  $y^*$  ise  $y$ 'nin kompleks eşleniğini ifade eder. Sürecin sıfır ortalamalı olduğu farz edildiği için yukarıdaki eşitlik,

$$r_k = E[y_j y_{j+k}] \quad (1.6)$$

eşitliğine indirgenir ve reel bir zaman serisi için  $y_j^* = y_j$  olur.

Aynı zamanda durağan bir süreç  $r_{-k} = r_k^*$  şeklinde eşlenik simetri özelliği gösterir. Bir başka deyişle aynı sıranın ileri ve geri gecikmeleri birbirinin kompleks eşlenikleridir. Reel bir zaman serisi için ise  $r_{-k} = r_k$  olur.

Böylece sıfır ortalamalı durağan bir stokastik sürecin bir gerçekleşmesi olarak düşünülen bir zaman serisini tanımlayan dağılımların seçimini kısıtlayan bilgi,  $y_i$  değerlerinin ilişkilerini yansıtan otokovaryanslardır. Maksimum Entropi Formülasyonunda  $m$  gecikmeye kadar otokovaryansların veriden tahmin edilmesinden tam olarak bilindiği (ölçülmüş nicelikler olduğu) varsayılır. Ancak çok nadir örneklerde bu durum geçerlidir, çoğu durumda ise veri sadece satır zaman serisinden oluşmaktadır. Bu yüzden her bir otokovaryans bizim bilgimiz dahilinde değil, daha çok veriden çıkarılmış olan bir niceliktir. Bu durum, maksimum entropi formülasyonunun ihtiyaç duyduğu tam otokovaryanslar yerine tahmini otokovaryans fonksiyonunun kullanımını gerektirir. Problem formülasyonundaki bu yetersizlik, bir çözüme doğru ilerlediğimizi kabul etmeyi gerektirir. Bununla birlikte, bu noksanlık sonuçların yorumlanması süresince akılda tutulmalıdır (Kapur ve Kesevan 1992).

Bir stokastik sürecin bilgisi bu şekilde verildiğinde, onun aşağıdaki bazı karakteristikleri istenebilir;

- Maksimum entropiye sahip (en muhtemel ya da en sapmasız) ve mevcut bilgiyle uyumlu  $p(y)$  olasılık dağılımı,
- Bilinen maksimum  $m$  gecikmeliler dışında en uyumlu otokovaryansların tahmini (ekstrapolasyon )

Böylece yukarıda sözü edilen koşulları sağlayan reel değerli bir zaman serisi için  $m$  gecikmeli otokovaryans kısıtları (1.6) şeklinde verildiği takdirde boyutu zaman serisinin gözlem değerleri sayısına eşit olan çok boyutlu normal dağılım şeklinde ortaya çıkan MaxEnt dağılımının kurulma süreci Bölüm 3’de ayrıntılarıyla ele alınmıştır.

Bölüm 4’de ise MaxEnt yönteminden yararlanarak, bir zaman serisi için tam otokovaryans sayısı  $m$ ’in biliniyor olduğu varsayımı altında,  $m$ ’den sonraki gecikmeli otokovaryans kısıtlı MaxEnt dağılımlarının bu stokastik süreç için kabul edilebilirliği kavramı, Jaynes’in konsantrasyon teoremi yardımı ile araştırılmıştır.

Bölüm 5’de de otokovaryans kısıtlarının artırılmasıyla elde edilen MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği sürecinin,  $AR(k)$  modelinin  $k$  gecikme

sayısını belirlemek ve parametrelerini tahmin etmek için de işletilebileceği önerilmiştir.

Bununla birlikte MaxEnt dağılımından yola çıkarak elde edilen entropi optimizasyon fonksiyoneli, bir istatistiksel veriyi en iyi şekilde modellemeyi öneren genelleştirilmiş entropi optimizasyon (GEO) dağılımlarının kurulmasına imkan sağlamaktadır.

Bölüm 6'da GEO dağılımlarından MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları, biri sonlu sayıda moment kısıtları üreten bir moment fonksiyonlar kümesine göre, diğeri ise parametreye bağlı moment kısıtlarına göre olmak üzere iki ayrı şekilde tanımlanmıştır.

Bölüm 7'de parametreye bağlı moment kısıtlı GEO dağılımları, kayıp değerlerin bir parametre şeklinde otokovaryans kısıtlarında yer almasıyla, kayıp değerli zaman serileri için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları şeklinde elde edilmiştir.

Bölüm 8'de, kayıp değerli zaman serileri için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının entropi değerleri ve MaxEnt dağılımının entropi değeri yardımı ile gözlenen zaman serisine uygun olasılık dağılımının entropi değeri arasında çeşitli eşitsizlikler şeklinde ifade edilen bağıntılar kurulmuştur. Bu tür bağıntılar aracılığı ile de gözlenmiş zaman serisi hakkında bilgi bağıntıları oluşturulmuştur. Entropi değerleri arasındaki bağıntılar Teorem 8.1, Teorem 8.2 ve Teorem 8.3 ile, bilgi bağıntısı ise Teorem 8.4 ile ifade edilmiştir. Burada Teorem 8.3. ile MinMaxEnt dağılımının kayıp değer için bir tahmin üretebildiği ispatlanarak, kayıp değer tahmini ve öngörü yapmak için MinMaxEnt dağılımına dayalı yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

Bölüm 9'da farklı otoregresif modellerden türetilen veri setleri üzerinde simülasyon çalışmaları yapılarak, farklı sayıda kayıp değer ve gelecek değer tahminleri için MSE'ler (ortalama kare hata) hesaplanmış ve yöntemin geçerliliği gösterilmiştir.

## 2. GENEL KAVRAMLAR

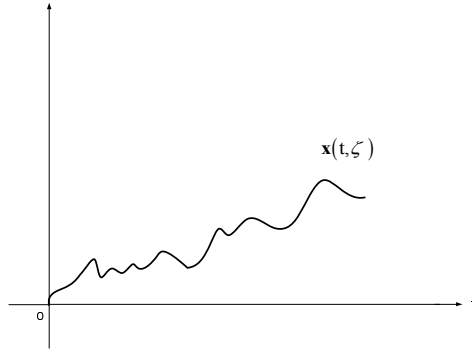
### 2.1. Stokastik Süreç

Bilindiği gibi bir rassal değişken  $y$ ,  $(\Omega, \zeta, P)$  olasılık uzayında  $\Omega$  elementer olaylar kümesi,  $\zeta$  ise  $\Omega$ 'nın alt kümelerinden oluşan  $\sigma$ -cebiri olmak üzere, her  $\zeta$  çıktısına bir  $y(\zeta)$  sayısını atayan, bir başka deyişle  $\Omega$ 'yı reel sayılar kümesine götüren ölçülebilir fonksiyondur. Reel sayılar kümesinin alt kümelerinden oluşan  $\sigma_y$  borel sisteminin keyfi  $A \in \sigma_y$  kümesinin ters görüntüsü olan  $y^{-1}(A) = \{\zeta : y(\zeta) \in A\}$  kümesi  $R$  reel sayılar kümesine aitse bu durumda  $y$  ölçülebilir bir fonksiyondur. Bir stokastik süreç  $\mathbf{x}(t)$  ise her  $\zeta$ 'ye bir  $\mathbf{x}(t, \zeta)$  fonksiyonu atayan bir kuraldır. Böylece bir stokastik süreç,  $\zeta$  parametresine bağlı zaman fonksiyonlarının bir ailesi ya da  $t$  ve  $\zeta$ 'nin bir fonksiyonudur.  $\zeta$ 'nin tanım kümesi tüm deneysel çıktılar kümesi iken,  $t$ 'nin tanım kümesi ise  $R$  reel sayılar kümesidir.

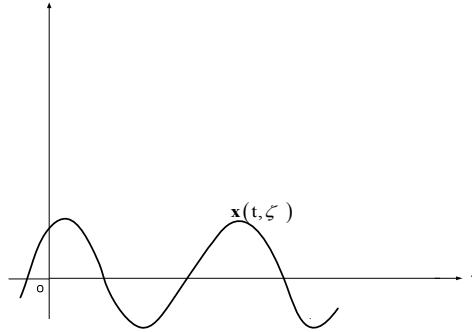
Eğer  $R$  reel eksen ise,  $\mathbf{x}(t)$  sürekli zamanlı bir süreç, eğer  $R$  tam sayılar kümesi ise,  $\mathbf{x}(t)$  kesikli zamanlı bir süreçtir. Böylece kesikli zamanlı bir süreç, bir rassal değişkenler dizisidir. Ayrıca  $\mathbf{x}(t)$ 'nin değerleri sayılabilir ise, kesikli duruma sahip bir süreç, sayılabilir değilse sürekli duruma sahip bir süreçtir. Bunların kombinasyonları da söz konusudur.

$\mathbf{x}(t)$  stokastik süreç için aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

1.  $\mathbf{x}(t, \zeta)$  fonksiyonlarının bir ailesidir, bu yorumda  $t$  ve  $\zeta$  değişkenlerdir.
2. Tek bir zaman fonksiyonudur ( ya da verilen sürecin bir örneğidir ). Bu durumda,  $t$  bir değişken,  $\zeta$  ise sabitlenmiştir.
3. Eğer  $t$  sabitlenir,  $\zeta$  bir değişken olursa, o zaman  $\mathbf{x}(t)$ , verilen sürecin  $t$  anındaki durumunu ifade eden bir rassal değişkendir.
4. Eğer  $t$  ve  $\zeta$  sabitlenir ise o zaman  $\mathbf{x}(t, \zeta)$  bir sayıdır.



**Şekil 1.1.** Tek bir parçacığın hareketi (Brownian Hareketi)



**Şekil 1.2.** Rassal amplitüt ve fazlı bir jeneratörün voltajı

Bir stokastik sürece bir fiziksel bir örnek, bir sıvıdaki moleküllerle çarpışmada mikroskobik parçacıkların hareketidir (brownian hareketi).  $x(t)$  süreci, tüm parçacıkların hareketlerinden oluşur (ensemble). Bu sürecin tek bir gerçekleşmesi (realization)  $x(t, \zeta)$ , özel bir parçacığın hareketidir ve şekil 1.1’de gösterilmiştir. Diğer bir örnek Şekil 1.2’de ise, rassal bir  $r$  amplitüt ve  $\varphi$  fazlı bir jeneratörün voltajıdır. Bu durumda  $x(t)$  süreci doğal sinüs dalgalarının bir ailesinden oluşur;

$$x(t) = r \cos(\omega t + \varphi).$$

Tek bir örneklem ise;

$$x(t, \zeta_i) = r(\zeta_i) \cos(\omega t + \varphi(\zeta_i))$$

fonksiyonu ile gösterilir.

Tanıma göre her iki örnekte stokastik süreçtir, fakat bununla birlikte onlar arasında temel farklar mevcuttur. İlk örnek, ( regular ), sonlu sayıda

parametrelerle tanımlanamayan fonksiyonların bir ailesinden oluşur. Ayrıca,  $\mathbf{x}(t)$ 'nin bir örnekleme olan  $\mathbf{x}(t, \zeta)$ 'nin geleceği, geçmişi ile belirlenemez. Son olarak, belli koşullar altında, bir regüler  $\mathbf{x}(t)$  sürecinin istatistikleri tek bir örnekleme göre belirlenebilir. İkinci örnek ise (predictable) doğal sinüs dalgalarının bir ailesinden oluşur ve  $r$  ve  $\varphi$  rassal değişkenlerince tamamiyle belirlenebilir. Dahası,  $\mathbf{x}(t, \zeta)$ ,  $t \leq t_0$  için biliniyorsa,  $t > t_0$  için de belirlenir. Son olarak,  $\mathbf{x}(t)$ 'nin bir örnekleme olan  $\mathbf{x}(t, \zeta)$  tüm sürecin özelliklerini belirlemez, çünkü o sadece  $r$  ve  $\varphi$ 'nin  $r(\zeta)$  ve  $\varphi(\zeta)$  özel değerlerine bağlıdır (Papoulis 1991).

## 2.2. Stokastik Süreçlerin İstatistikleri

Bir stokastik süreç, her bir  $t$  için biri olmak üzere sayılamayan sayıda sonsuz rassal değişkenlerdir. Belirli bir  $t$  için  $\mathbf{x}(t)$ ,

$$F(x, t) = P(\mathbf{x}(t) \leq x)$$

dağılımlı bir rassal değişkendir.

Bu fonksiyon  $t$ 'ye bağlıdır ve onun değeri, belirli bir  $t$  anında, verilen bu sürecin  $\mathbf{x}(t, \zeta)$  örneklemelerinin  $x$  sayısını aşmadığı tüm  $\zeta$  çıktılarından oluşan  $\{\mathbf{x}(t) \leq x\}$  olayının olasılığına eşittir (Şekil 2.3).  $F(x, t)$  fonksiyonu,  $\mathbf{x}(t)$  sürecinin birinci mertebeden dağılımı olarak adlandırılır. Onun  $x$ 'e göre türevi:

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$$

$\mathbf{x}(t)$  sürecinin birinci mertebeden yoğunluğu olarak adlandırılır.

Birinci mertebeden dağılımın frekans yorumu ise Şekil 2.3 dikkate alınarak yapılabilir. Eğer deney  $n$  kez tekrarlanırsa, her bir deneme için biri olmak üzere  $n$  tane  $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$  fonksiyonları gözlenir. Gözlenen fonksiyonların ordinatlarının  $t$  anında  $x$  çizgisini aşmayan denemelerinin sayısı  $n_t(x)$  olmak üzere

$$F(x, t) \approx \frac{n_t(x)}{n}$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathbf{x}(t)$  sürecinin ikinci mertebeden dağılımı ise  $\mathbf{x}(t_1)$  ve  $\mathbf{x}(t_2)$  rassal değişkenlerinin ortak dağılımıdır:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2).$$

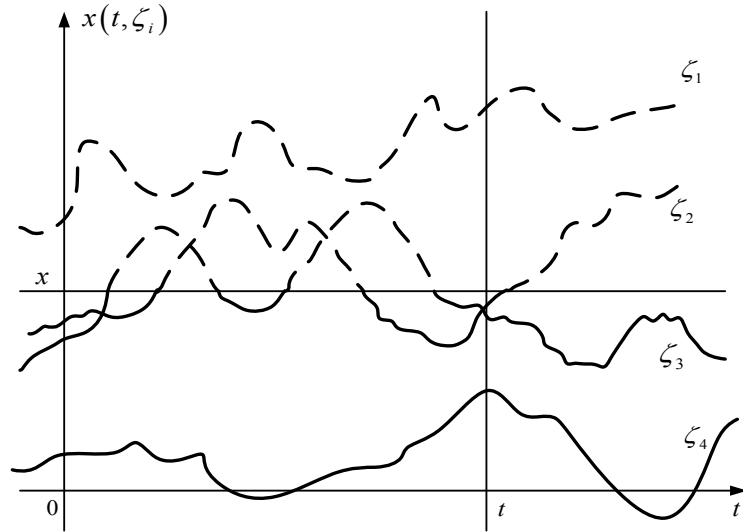
Buna uygun yoğunluk ise

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

şeklinde ifade edilir ve burada

$$F(x_1, t_1) = F(x_1, \infty; t_1, t_2) ; f(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

olur. Böylece  $\mathbf{x}(t)$  sürecinin n. mertebeden dağılımı,  $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$  rassal değişkenlerinin  $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  ile ifade edilen ortak dağılımıdır.



**Şekil 2.3.**  $x(t)$  rassal değişkeninin  $F(x,t)$  dağılımının frekans yorumu

Bir stokastik sürecin istatistiksel özelliklerini belirlemek için her  $x_i, t_i$  ve  $n$  için  $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  fonksiyonunun bilgisine ihtiyaç duyulur. Bununla birlikte birçok uygulamalar için sadece bazı ortalamalar, özellikle de  $x(t)$  ve

$x^2(t)$ 'nin beklenen değerleri kullanılır. Bu nicelikler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

*Ortalama:*  $x(t)$ 'nin  $\eta(t)$  ortalaması,  $x(t)$  rassal değişkeninin beklenen değeridir:

$$\eta(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t) dx$$

*Otokorelasyon:* Bir  $x(t)$  stokastik sürecinin  $R(t_1, t_2)$  otokorelasyonu  $x(t_1)x(t_2)$  çarpımının beklenen değeridir:

$$R(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

$R(t_1, t_2)$ 'nin  $t_1 = t_2 = t$  köşegeni üzerindeki değeri  $x(t)$ 'nin ortalama üssüdür (average power) :

$$R(t, t) = E\{x^2(t)\} \geq 0.$$

Bir  $x(t)$  stokastik sürecinin  $R(t_1, t_2)$  otokorelasyonu pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Bir başka deyişle herhangi  $a_i$  ve  $a_j$  için

$$\sum_{i,j} a_i a_j R(t_i, t_j) \geq 0$$

şeklindedir. Bu aşağıdaki özdeşliğin bir sonucudur:

$$0 \leq E \left\{ \left| \sum_i a_i x(t_i) \right|^2 \right\} = \sum_{i,j} a_i a_j E \{ x(t_i) x(t_j) \}.$$

*Otokovaryans:* Bir  $x(t)$  stokastik sürecinin  $C(t_1, t_2)$  otokovaryansı  $x(t_1)$  ve  $x(t_2)$  rassal değişkenlerinin kovaryansıdır:

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2).$$

Başka bir deyişle  $x(t)$  stokastik sürecinin  $C(t_1, t_2)$  otokovaryansı merkezileştirilmiş  $\tilde{x}(t) = x(t) - \eta(t)$  sürecinin otokorelasyonudur:

$$C(t_1, t_2) = E \left[ (x(t_1) - \eta(t_1))(x(t_2) - \eta(t_2)) \right].$$



Ayrıca  $C(t_1, t_2)$  otokovaryansının  $t_1 = t_2 = t$  köşegeni üzerindeki değeri  $C(t, t)$  ise  $x(t)$ 'nin varyansına eşittir.

Kovaryansları standardize etmek için uygun rassal değişkenleri onların standart sapmasına bölmek uygun olacaktır:

$$r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}}$$

ve bu oran  $x(t)$  sürecinin korelasyon katsayısıdır. Bir başka deyişle bir  $x(t)$  sürecinin  $r(t_1, t_2)$  korelasyon katsayısı,  $x(t)/C(t, t)$  normleştirilmiş sürecin otokovaryansıdır. Böylece o da pozitif tanımlıdır ve onun için

$$|r(t_1, t_2)| \leq 1, \quad r(t, t) = 1$$

geçerli olacaktır (Papoulis 1991).

### **İlişkisiz ve Bağımsız Artışlar**

Eğer bir  $x(t)$  sürecinin  $x(t_2) - x(t_1), \dots, x(t_n) - x(t_{n-1})$  artışları her bir  $t_1 < \dots < t_n$  ve  $n \geq 1$  için ilişkisiz (veya bağımsız) rassal değişkenler ise bu durumda söz konusu  $x(t)$  süreci ilişkisiz (veya bağımsız) artışlı bir süreçtir denir (Papoulis 1991).

### **Tamamen rassal süreçler; “Beyaz Gürültü”**

Bir  $\{X_t\}$  süreci,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , olmak üzere, ilişkisiz rassal değişkenler dizisinden oluşuyorsa, bir başka deyişle tüm  $s \neq t$  için  $\text{cov}\{X_s, X_t\} = 0$  ise “tamamen rassal süreç” olarak adlandırılır (Priestley 1981).

### **Normal Süreçler**

Eğer  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  rassal değişkenleri her bir  $t_1 < \dots < t_n$  ve  $n \geq 1$  için ortak normal ise bu  $x(t)$  süreci normal olarak adlandırılır. Normal bir sürecin istatistikleri onun  $\eta(t)$  ortalaması ve  $C(t_1, t_2)$  otokovaryansı ile tamamıyla belirlenebilir. Çünkü aslında,  $E\{x(t)\} = \eta(t)$ ,  $\sigma_x^2(t) = C(t, t)$ 'dir.

Buradan  $x(t)$ 'nin birinci dereceden yoğunluk fonksiyonunun  $f(x,t)$ ,  $N(\eta(t); \sqrt{C(t,t)})$  şeklinde normal olduğu sonucuna varılır. Benzer şekilde  $x(t)$ 'nin ikinci dereceden yoğunluğu da,  $r(t_1, t_2)$   $x(t_1)$  ve  $x(t_2)$  rassal değişkenlerinin korelasyon katsayısı olmak üzere,  $N(\eta(t_1), \eta(t_2); \sqrt{C(t_1, t_1)}, \sqrt{C(t_2, t_2)}; r(t_1, t_2))$  ortak normal yoğunluktur. Dahası  $x(t)$  sürecinin  $n$ . mertebeden karakteristik fonksiyonu,

$$\exp\left\{j \sum_i \eta(t_i) \omega_i - \frac{1}{2} \sum_{i,k} C(t_i, t_k) \omega_i \omega_k\right\}$$

şeklinde verilir. Onun ters Fourier dönüşümü olan  $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  ise  $x(t)$  sürecinin  $n$ . mertebeden yoğunluğu olacaktır (Papoulis 1991).

### Durağan Süreçler

Süreçlerin özel bir sınıfı olan durağan süreçler, istatistiksel özelliklerinin zaman boyunca değişmeyen oluşuyla karakterize edilirler. Eğer  $X(t)$  süreci durağan süreç ise, onun istatistiksel özellikleri zamana bağlı olarak değişmeyeceği için  $X(1), X(2), X(3), \dots, X(t), \dots$ , rassal değişkenlerinin tümü aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmalıdır. Bununla birlikte durağanlık özelliği bundan daha fazlasını gerektirir ki örneğin  $\{X(1), X(4)\}, \{X(2), X(5)\}, \{X(3), X(6)\}, \dots$ , rassal değişkenleri de aynı iki değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmalıdır. Benzer şekilde örneğin  $\{X(2), X(4), X(7)\}, \{X(3), X(5), X(8)\}, \dots$ , rassal değişkenlerinin tümü de aynı üç değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmalıdır ve vb. Bu özelliklerin tümü şu şekilde özetlenebilir; herhangi  $t_1, t_2, \dots, t_n$  zaman noktaları kümesi için  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ 'nin ortak olasılık dağılımı, her zaman noktasının aynı miktarda atlatılmasıyla da değişmemiş kalmalıdır. Bu özelliğe sahip bir süreç “tamamen (completely) durağan” olarak adlandırılır ve formal tanımını aşağıdaki gibidir.

**Tanım 2.1.** Eğer her bir  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ve her bir  $k$  için,  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ 'nin ortak olasılık dağılımı

$\{X(t_1+k), X(t_2+k), \dots, X(t_n+k)\}$ 'nin ortak olasılık dağılımı ile özdeş ise, bir başka deyişle  $F(\cdot)$ , rassal değişkenler kümesinin dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv F_{X(t_1+k), \dots, X(t_n+k)}(x_1, \dots, x_n)$$

oluyor ise  $\{X(t)\}$  süreci tamamen durağan süreç olarak adlandırılır.

Tamamen durağanlık oldukça ağır bir şarttır ve daha hafif bir koşul olan “ $m$ . dereceden durağanlık” kavramı ortaya çıkar. Bu zayıf koşul altında, örneğin  $X(t_1)$ 'in olasılık dağılımının  $X(t_1+k)$ 'nin olasılık dağılımı ile özdeş olması şartında ısrar edilmez, sadece bu iki dağılımın temel özelliklerinin bir başka deyişle onların belirli bir dereceye kadar momentlerinin aynı olması yeterlidir. Benzer olarak,  $\{X(t_1), X(t_2)\}$ 'nin ortak dağılımının  $\{X(t_1+k), X(t_2+k)\}$ 'nin ortak dağılımı ile özdeş olmasında ısrar edilmez, sadece belirli dereceye kadar momentlerinin eşitliği beklenir. “ $m$ . dereceden durağanlık” kavramı aşağıdaki tanım ile daha iyi anlaşılır.

**Tanım 2.2.** Eğer her bir  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ve her bir  $k$  için,  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ 'nin  $m$ . dereceden ortak momentleri,  $\{X(t_1+k), X(t_2+k), \dots, X(t_n+k)\}$ 'nin uygun  $m$ . dereceden ortak momentleri var ve eşit ise  $\{X(t)\}$  süreci  $m$ . dereceden durağan süreç olarak adlandırılır.

Böylece her bir  $k$  ve  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m$ 'yi sağlayan tüm pozitif  $m_1, m_2, \dots, m_n$  tamsayıları için,

$$E\left[\left\{X(t_1)^{m_1}\right\} \dots \left\{X(t_n)^{m_n}\right\}\right] = E\left[\left\{X(t_1+k)^{m_1}\right\} \dots \left\{X(t_n+k)^{m_n}\right\}\right]$$

yazılabilir. Özel olarak,  $m_2 = m_3 = \dots = m_n = 0$  olarak alındığında, her bir  $t$  ve tüm  $m_1 \leq m$ 'ler için

$$E\left[\left\{X(t)^{m_1}\right\}\right] = E\left[\left\{X(0)^{m_1}\right\}\right] \quad (k = -t \text{ alındığında})$$

=  $t$  'den bağımsız bir sabit

olur. Ayrıca her bir  $t, s$  ve tüm  $m_1 + m_2 \leq m$ 'yi sağlayan  $m_1, m_2$ 'ler için

$$E\left[\left\{X(t)^{m_1}\right\}\left\{X(s)^{m_2}\right\}\right] = E\left[\left\{X(0)^{m_1}\right\}\left\{X(s-t)^{m_2}\right\}\right]$$

$$= \text{sadece } (s-t) \text{ 'nin fonksiyonu}$$

elde edilir.

Bu durumda 2. dereceden durağanlık denildiğinde aşağıdaki özellikler geçerli olacaktır:

- i.  $E[X(t)] = \mu$ , ( $t$ 'den bağımsız bir sabit), bir başka deyişle tüm zaman noktalarında aynı ortalamaya sahiptir.
- ii.  $E[X^2(t)] = \mu_2'$  ( $t$ 'den bağımsız bir sabit)

Böylece  $\text{var}\{X(t)\} = \mu_2' - \mu^2 = \sigma^2$  'de  $t$ 'den bağımsız bir sabittir, tüm zaman noktalarında aynı varyansa sahiptir

- iii. Dahası, her bir  $t, s$  için,  $E[X(t)X(s)] = \text{sadece } (s-t)$  'nin fonksiyonudur. Böylece,

$$\text{cov}\{X(t)X(s)\} = E[X(t)X(s)] - \mu^2$$

olduğu için

$$= \text{sadece } (s-t) \text{ 'nin fonksiyonu}$$

olur. Bir başka deyişle herhangi iki noktadaki değer arasındaki kovaryans, bu noktaların zaman eksenindeki yerine değil, bu zaman noktaları arasındaki mesafeye bağlıdır (Priestley 1981).

### 3. ZAMAN SERİSİ İÇİN MAXENT DAĞILIMININ KURULMASI

MaxEnt Yöntemi, tek bir gerçekleşmesi (realization) gözlenmiş zaman serisi olan bir stokastik süreç için MaxEnt dağılımını bir model olarak önermektedir. Bir başka deyişle MaxEnt dağılımı, söz konusu stokastik sürecin dağılımı için bir tahmindir. Böylece bu bölümde, öncelikle, durağan zaman serileri için olasılık dağılımının, otokovaryans fonksiyonlarının kısıt olarak verilmesiyle Maksimum Entropi Yöntemi aracılığıyla elde edilmesi süreci incelenmiştir. Otokovaryans fonksiyonlarının kısıt olarak verilmesiyle ortaya çıkan optimizasyon problemine Lagrange Çarpanları yöntemi uygulandığında MaxEnt olasılık dağılımının, zaman serisinin durağan olması nedeniyle varyans-kovaryans matrisi bir toeplitz matris olan çok değişkenli Normal formunda olduğu görülmüştür. Daha sonra Toeplitz matrisin özelliklerinden yararlanarak, otokovaryans fonksiyonlarının beklenen değerleri, kompleks değişkenli bir fonksiyonun kontur integrali şeklinde ifade edilmiştir. Bu ilişkiden ortaya çıkan  $2m+1$  sayıda denklemin çözülmesiyle Lagrange çarpanlarının değerlerine ulaşılmıştır. Elde edilen lagrange çarpanları değerleri ile, MaxEnt olasılık dağılımı belirlenmiştir. Ayrıca,  $m$  gecikmeden sonraki otokovaryans değerlerini tahmin için, yinelemeli bir ekstrapolasyon eşitliği elde edilmiştir. Tüm bu süreç bir zaman serisi üzerinde işletilmiş, Matlab'da program yazılarak değerler elde edilmiştir.

#### 3.1. Maksimum Entropi Yöntemi ve Maksimum Entropi Dağılımı

Maksimum entropi dağılımı, Jaynes'in Maksimum Entropi prensibi ile elde edilen dağılımdır. Maksimum entropi yöntemi ise istatistiksel verinin maksimum entropi dağılımı şeklinde modellenmesidir. Maksimum entropi (MaxEnt) dağılımı Shannon entropi ölçümünü, verilen moment kısıtları altında maksimize eden dağılımdır. Görüldüğü gibi MaxEnt dağılımı bir optimizasyon probleminin çözümüdür. MaxEnt yöntemi ise istatistiksel veriyi bu dağılım şeklinde modellemeyi önermektedir. Kesikli  $X$  rassal değişkeni için Shannon entropi ölçümü  $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$  fonksiyonu şeklinde, sürekli  $X$  rassal

değişkeni için  $H(X) = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx$  fonksiyoneli şeklinde ifade edilir.

Verilen moment kısıtları ise kesikli  $X$  rassal değişkeni için

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m; \mu_0 = 1, g_0(x) \equiv 1 \text{ şeklinde, sürekli } X \text{ rassal}$$

değişkeni için  $\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m; \mu_0 = 1, g_0(x) \equiv 1$  şeklinde ifade

edilir. Söz konusu optimizasyon problemlerinin çözümü Lagrange çarpanları yöntemi ile gerçekleştirilir.

Bir zaman serisi hakkında verilen bilgi, olasılıklar üzerindeki doğal kısıt ile birlikte,  $m$  gecikmeli otokovaryansların beklenen değerlerinden oluştuğunda, bu zaman serisi için MaxEnt dağılımının, sıfır ortalamalı ve  $\Lambda^{-1}$  kovaryans matrisli,

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{T+1}{2}} |\Lambda^{-1}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Lambda \mathbf{y}\right)$$

çok değişkenli normal dağılım olduğu gösterilecektir. Böylece maksimum entropi yöntemi bize, gözlenmiş bir zaman serisi şeklinde gerçekleşmeye sahip stokastik süreç için belli bir dağılım önermektedir.

### 3.2. Zaman Serisi için MaxEnt Olasılık Dağılımı Formu

$(-\infty, +\infty)$  arasında değişen değişkenlerin ortalama, varyans ve kovaryansları kısıt olarak verildiğinde, MaxEnt olasılık dağılımının çok değişkenli (multivariate) Normal Dağılım olduğu gösterilebilir. Buradan yola çıkarak bir zaman serisi  $\mathbf{y} = (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_T)$  şeklinde bir vektör rassal değişken olarak düşünüldüğünde, sıfır ortalamalı bu rassal değişkenlerin varyans ve kovaryansları,

$$E[y_i y_j^*] = \sigma_{ij}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, T \quad j = 0, 1, 2, \dots, T$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $y_j^*$  ile  $y_j$ 'nin kompleks eşleniği gösterilmiştir. Bu zaman serisi için durağanlık varsayımı dikkate alındığında,

$$E[y_j y_{j+k}^*] = \sigma_{j,j+k} = r_k, \quad E[y_j^* y_{j+k}] = \sigma_{j+k,j} = r_{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.1)$$

eşitlikleri elde edilir. Shonnon'un,

$$H = -\int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.2)$$

ile ifade edilen (3.2) entropi ölçümünü, (3.1) ile verilen kısıtlar altında maksimize etmek için Lagrange çarpanları yöntemi uygulanır. Bu amaçla oluşturulan yardımcı fonksiyonel,

$$\begin{aligned} U = & -\int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \alpha \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - 1 \right) \\ & - \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{T-k} \lambda_{j,j+k} \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) y_j y_{j+k}^* d\mathbf{y} - \sigma_{j,j+k} \right) \\ & - \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{T-k} \lambda_{j+k,j} \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) y_j^* y_{j+k} d\mathbf{y} - \sigma_{j+k,j} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Burada  $\lambda_{j,j+k}$  ve  $\lambda_{j+k,j}$ 'ler Lagrange çarpanlarıdır.

Durağanlık koşullarını ifade eden (3.1) eşitliklerindeki gösterimler dikkate alındığında yardımcı  $U$  fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} U = & -\int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \alpha \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - 1 \right) - \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{T-k} \lambda_{j,j+k} \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) y_j y_{j+k}^* d\mathbf{y} - r_k \right) \\ & - \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{T-k} \lambda_{j+k,j} \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) y_j^* y_{j+k} d\mathbf{y} - r_{-k} \right) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Burada  $\lambda_{j,j+k} = \lambda_k$  ve  $\lambda_{j+k,j} = \lambda_{-k}$  olarak gösterildiğinde

$$\begin{aligned} U &= -\int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \alpha \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - 1 \right) \\ &\quad - \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) y_j y_{j+k}^* d\mathbf{y} - r_k \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} \left( \int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) y_j^* y_{j+k} d\mathbf{y} - r_{-k} \right) \end{aligned}$$

olur ve

$$U = \int_{\mathbb{R}^{T+1}} \mathbf{F} d\mathbf{y} + \alpha + \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} r_k + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} r_{-k} \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{F} = -p(\mathbf{y}) \ln p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y}) \left( \alpha + \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right)$$

şeklindedir.

Çok değişkenli fonksiyonlara bağlı fonksiyoneller için Euler Denkleminin genellemesi aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{F}_p - \frac{\partial}{\partial y_0} \mathbf{F}_{q_0} - \frac{\partial}{\partial y_1} \mathbf{F}_{q_1} - \dots - \frac{\partial}{\partial y_T} \mathbf{F}_{q_T} = 0. \quad (3.4)$$

Burada  $q_j = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y_j}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, T$ .

Ostrogradsky Denklemi olarak anılan bu denklem, aşağıdaki gibi de yazılabilir;

$$\mathbf{F}_p - \sum_{j=0}^T \frac{\partial}{\partial y_j} \mathbf{F}_{q_j} = 0. \quad (3.5)$$

Burada  $\mathbf{F}$  integrantı  $\mathbf{F}_{q_j} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q_j}$  'leri içermediği için, (3.3) fonksiyonelinin

ekstremalleri,  $p(\mathbf{y})$  'ye göre türevin sifira eşitlenmesiyle, bir başka ifadeyle

$$\mathbf{F}_p = -1 - \ln p(\mathbf{y}) - \left( \alpha + \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right) = 0$$

denkleminin çözümü olarak



$$\ln p(\mathbf{y}) = -(\alpha + 1) - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right\}$$

veya

$$p(\mathbf{y}) = \exp(-\alpha - 1) \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right\} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\frac{1}{2}$  çarpanı, normal dağılım formuna benzetebilmek için yapılmış ve bu durumda ortaya çıkan  $2\lambda_k$  ve  $2\lambda_{-k}$  lagrange çarpanları yerine yeni sembol kullanılmayarak  $\lambda_k$  ve  $\lambda_{-k}$  yazılmıştır.

$\int_{\mathbb{R}^{T+1}} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$  doğal kısıtında (3.6) eşitliği yerine yazıldığında,

$$\int_{\mathbb{R}^{T+1}} \exp(-\alpha - 1) \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right\} d\mathbf{y} = 1,$$

$$\exp(\alpha + 1) = \int_{\mathbb{R}^{T+1}} \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right\} d\mathbf{y}$$

veya

$$(\alpha + 1) = \ln Z(\boldsymbol{\lambda})$$

olur. Burada

$$Z(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathbb{R}^{T+1}} \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right\} d\mathbf{y} \quad (3.7)$$

şeklindedir.  $(\alpha + 1) = \ln Z(\boldsymbol{\lambda})$  eşitliği (3.6)'da yerine yazıldığında  $p(\mathbf{y})$  MaxEnt Olasılık dağılımı,

$$p(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{1}}{Z(\boldsymbol{\lambda})} \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=1}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j+k} \right\} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. (3.8) formülü vektör-matris gösterimi ile

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\lambda})} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{y}^*} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada  $\mathbf{y} = [y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_T]'$ ,  $\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} y_0^* \\ y_1^* \\ \vdots \\ y_T^* \end{bmatrix}$  ve

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_m & & 0 \\ \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & & \lambda_m & \\ \vdots & \lambda_{-1} & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \lambda_{-m} & \vdots & \ddots & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_m \\ & \lambda_{-m} & & \lambda_{-1} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \lambda_0 & \lambda_1 \\ 0 & & & \lambda_{-m} & \dots & \lambda_{-1} & \lambda_0 \end{bmatrix}_{(T+1) \times (T+1)}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi  $\mathbf{\Lambda}$  matrisinde  $\lambda_{ij} = \lambda_{j-i}$  olduğundan  $(T+1) \times (T+1)$  boyutlu bir Toeplitz matristir. Burada  $\mathbf{\Lambda}$  matrisinin gösterimindeki sıfırlar boyutu  $(T+1) \times (T+1)$ 'e tamamlayacak şekildedir. Ayrıca  $|j-i| \leq m$  olduğunda  $\lambda_{j-i}$ ,  $|j-i| > m$  olduğunda ise sıfırdır. Böyle matrise “şeritli (banded) toeplitz matris” denir. Bu matrisin kovaryans matrisi olarak nitelendirilebilmesi için pozitif tanımlı olması gerekmektedir.  $r_{-k} = r_k^*$  olduğundan, (3.9) eşitliğindeki üstel ifade için  $\lambda_{-k} = \lambda_k^*$  ve böylece  $(\mathbf{\Lambda}^*)' = \mathbf{\Lambda}$  olur. Aynı zamanda  $\mathbf{\Lambda}$  matrisinin bir Hessian matris olduğu anlaşılır. Bu durumda, (3.9) olasılık yoğunluk fonksiyonunun çok değişkenli normal dağılım formuna sahip olduğu görülür.

$N$  boyutlu, sıfır ortalamalı ve  $\mathbf{\Sigma}$  kovaryans matrisli  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]'$  bir vektör rassal değişken için çok değişkenli normal formu;

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}} \quad (3.10)$$

şeklindedir. (3.9) formu ile karşılaştırıldığında,  $\mathbf{y}$ 'nin sıfır ortalamalı  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$  kovaryans matrisli çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu sonucuna varılır ve bu durumda,

$$Z(\boldsymbol{\lambda}) = (2\pi)^{\frac{T+1}{2}} |\mathbf{\Lambda}^{-1}|^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir, buradan MaxEnt olasılık dağılımı

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{T+1}{2}} |\mathbf{\Lambda}^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}} \quad (3.12)$$

formuna sahip olur.

### 3.3. Lagrange Çarpanlarının Elde Edilmesi

Yukarıda gösterildiği gibi gözlenmiş bir zaman serisi şeklinde gerçekleşmeye sahip stokastik süreç için MaxEnt olasılık dağılımı,  $m$  gecikmeli otokovaryans kısıtları verildiğinde (3.12) formülü ile ifade edilir. Burada yer alan  $\mathbf{\Lambda}$  toeplitz matrisinin Lagrange çarpanlarından oluşması nedeniyle, bu çarpanların elde edilmesi önem taşımaktadır. Bu amaçla (3.11) formülü dikkate alınarak

$$\ln Z(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{T+1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{\Lambda}|$$

yazılabilir.  $\mathbf{\Lambda}$  matrisi pozitif tanımlı olduğundan, onun  $q_0, q_1, \dots, q_T$  özdeğerleri pozitifdir ve bu matrisin determinanı özdeğerlerinin çarpımı ile,

$$|\mathbf{\Lambda}| = \prod_{j=0}^T q_j$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla,

$$\ln Z(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{T+1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^T \ln q_j \quad (3.13)$$

olur. Bilindiği üzere bir şeritli toeplitz matriste  $m \ll T$  olduğunda, bu toeplitz matrisin özdeğerleri asimtotik olarak ( $T \rightarrow \infty$ ),

$$q_j = g(z_j) = \sum_{k=-m}^m \lambda_k e^{\frac{2\pi ijk}{T+1}} \quad j = 0, 1, 2, \dots, T, \quad i^2 = -1. \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir (Gray 2001). Burada  $z_j$ 'ler,  $z^{T+1} = 1$  denkleminin  $(T+1)$  sayıda köküdür ve kompleks düzlemde birim çember üzerinde yer alır. Ayrıca  $\mathbf{\Lambda}$  matrisi Hermitian matris olduğu için tüm özdeğerleri reeldir. Sözü edilen bu kökler,

$$z_j = e^{\frac{2\pi ij}{T+1}}$$

şeklinde gösterilir ve (3.14) de yerine yazıldığında,

$$q_j = g\left(\exp\left(\frac{2\pi ij}{T+1}\right)\right) = g(z_j) = \sum_{k=-m}^m \lambda_k z_j^k \quad (3.15)$$

olur. (3.15) eşitliği (3.13)'de dikkate alındığında,

$$\ln Z(\lambda) \sim \frac{T+1}{2} \left\{ \ln(2\pi) - \frac{1}{T+1} \sum_{j=0}^T \ln g\left(\exp\left(\frac{2\pi ij}{T+1}\right)\right) \right\} \quad (3.16)$$

elde edilir.

Riemann integrali tanımına göre,  $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$  integrali,  $[0, 2\pi]$  tanım

aralığını  $T+1$  parçaya bölerek, her bir parçanın uzunluğu ile o parçanın başlangıç noktasındaki fonksiyonun değerinin çarpılıp, toplanmasıyla yaklaşık

hesaplanabilir. Dolayısıyla,  $2\pi = \sum_{j=0}^T \frac{2\pi}{T+1}$  olduğundan, her bir parçanın uzunluğu,

$\frac{2\pi}{T+1}$  olur ve

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^T f\left(\frac{2\pi j}{T+1}\right) \frac{2\pi}{T+1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{j=0}^T f\left(\frac{2\pi j}{T+1}\right)$$

olur. Bu eşitlik  $T$ 'nin çok büyük değerlerinde (3.16) eşitliğindeki toplam yerine yaklaşık olarak kullanılabilir. Bu ifade de  $f(\theta) = g(e^{i\theta})$  şeklinde kabul edildiğinde,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{j=0}^T \ln g\left(\exp\frac{2\pi ij}{T+1}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(e^{i\theta}) d\theta \quad (3.17)$$

eşitliği yazılabilir. (3.17) eşitliği (3.16)'de dikkate alındığında,

$$\frac{2}{T+1} \ln Z(\lambda) \sim \left\{ \ln(2\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(e^{i\theta}) d\theta \right\}$$

olur. Burada  $g(e^{i\theta})$  için (3.15) eşitliği kullanılırsa asimptotik olarak,

$$\frac{2}{T+1} \ln Z(\lambda) \sim \left\{ \ln(2\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( \sum_{k=-m}^m \lambda_k e^{i\theta k} \right) d\theta \right\}$$

eşitliğine ulaşılır. Her iki tarafta  $\lambda_k$  'ya göre kısmi türev alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{2}{T+1} \frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda_k} &\sim -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln \left( \sum_{k=-m}^m \lambda_k e^{i\theta k} \right) d\theta \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta k}}{\sum_{k=-m}^m \lambda_k e^{i\theta k}} d\theta \\ \frac{2}{T+1} \frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda_k} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta k}}{g(e^{i\theta})} d\theta \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m \end{aligned} \quad (3.18)$$

sonucuna varılır. Burada  $\frac{\partial \ln Z(\lambda)}{\partial \lambda_k}$  türevini elde etmek için daha önce ulaşılan

$$Z(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{T+1}} \exp -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=0}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j-k} \right\} dy$$

eşitliğinde her iki tarafın  $\ln$ 'i ve  $\lambda_k$  'lara göre türevi alındığında,

$$\begin{aligned} \ln Z(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{T+1}} -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^m \lambda_k \sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^* + \sum_{k=0}^m \lambda_{-k} \sum_{j=0}^{T-k} y_j^* y_{j-k} \right\} dy \\ \frac{\ln Z(\lambda)}{\partial \lambda_k} &= -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=0}^{T-k} y_j y_{j+k}^*}_{(T+1)\hat{r}_k} \\ \frac{\ln Z(\lambda)}{\partial \lambda_k} &= -\left( \frac{T+1}{2} \right) \hat{r}_k \end{aligned} \quad (3.19)$$

olur ve (3.19) eşitliği (3.18)'de dikkate alındığında,

$$-\frac{2}{T+1} \left( \frac{T+1}{2} \right) \hat{r}_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta k}}{g(e^{i\theta})} d\theta$$

sonucuna varılır. Buradan

$$\hat{r}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta k}}{g(e^{i\theta})} d\theta \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m \quad (3.20)$$

eşitliğine ulaşılmış olur.

(3.20) eşitliği, lagrange çarpanları için ( $g$ 'nin içindeki) her otokovaryansın beklenen değeri ile ilişkili  $(2m+1)$  denklem üretir. Bu eşitlik  $|k| \leq m$  olduğunda, yani  $k$ , otokovaryans tahminlerinin elde edilebilir olduğu

bölgede iken,  $\lambda$  'ları seçmeye imkan verir.  $|k| > m$  olduğunda ise (3.20),  $m$ 'den büyük gecikmelerin otokovaryansları için tahmin edilmiş maksimum entropi ekstrapolasyonunu ifade eder. Daha sonra bu tahmin edilmiş otokovaryanslar  $\tilde{r}_k$  ile gösterilecektir.

Öncelikle (3.20) integralini daha kolay hesaplayabilmek için, kompleks düzlemde saat yönünün tersinde birim çember üzerinde bir kontur integrale dönüşümü uygun olacaktır.

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

dönüşümü yapılarak (3.20)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \hat{r}_k &= \frac{1}{2\pi} \oint_c \frac{z^k}{g(z)} \frac{dz}{iz} \\ \hat{r}_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z^{k-1}}{g(z)} dz \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada  $c$  birim çemberdir.

Cauchy teoremine göre,  $f(z)$ 'nin analitik (türeve sahip) olduğu tek bağlantılı bir bölge içinde herhangi kapalı  $c$  üzerinde integrali için,

$$\oint_c f(z) dz = 0 \quad (3.22)$$

eşitliği geçerlidir. Fakat, eğer  $f(z)$ ,  $z = z_0$ 'da bir kutba sahip ise, bir başka deyişle o noktadaki türevi tanımsız ise ve bu nokta  $c$ 'nin içinde yer alıyorsa, o zaman (3.22) eşitliği sıfır olmayacaktır. Bu durumda Cauchy integralinin değeri,

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (3.23)$$

formülü ile ifade edilir. (3.21)'deki integrantın kutuplarını belirlemek için ise  $g(z) = 0$  polinomunun köklerini tespit etmek gerekir. (3.15) eşitliğinden  $g(z)$  açık bir şekilde,

$$g(z) = \frac{\lambda_{-m}}{z^m} + \frac{\lambda_{-m+1}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_{-1}}{z} + \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_m z^m$$

olarak yazılır ve ortak paydada toplandığında,

$$g(z) = \frac{\lambda_{-m} + \lambda_{-m+1}z + \dots + \lambda_{-1}z^{m-1} + \lambda_0 z^m + \lambda_1 z^{m+1} + \dots + \lambda_m z^{2m}}{z^m}$$

eşitliğinden,  $g(z)$ 'nin  $2m$  dereceli polinom ile  $z^m$  oranı şeklinde olduğu görülür.  $z \neq 0$  olduğu için  $2m$  dereceli bu polinomun cebirin esas teoremine göre  $2m$  sayıda kökü vardır. Bu köklerin  $m$  tanesi birim çember içinde iken,  $m$  tanesi birim çember dışında olacaktır. Bunu göstermek için,

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = \lambda_{-m}z^m + \lambda_{-m+1}z^{m-1} + \dots + \lambda_{-1}z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \dots + \frac{\lambda_m}{z^m}$$

eşitliğinden

$$g^*\left(\frac{1}{z}\right) = \lambda_m(z^*)^m + \lambda_{m-1}(z^*)^{m-1} + \dots + \lambda_1(z^*) + \lambda_0 + \frac{\lambda_{-1}}{(z^*)} + \frac{\lambda_{-2}}{(z^*)^2} + \dots + \frac{\lambda_{-m}}{(z^*)^m}$$

elde edilir. Buradan ise,

$$g^*\left(\frac{1}{z}\right) = g(z^*)$$

olduğu görülür. Bu durumda,  $g(z^*) = 0$  ise  $g^*\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ 'dır. Buradan  $g\left(\frac{1}{z}\right) = 0$

olur. O halde köklerden  $m$  tanesi  $z_j^*$  ise, diğer  $m$  tanesi de  $\frac{1}{z_j}$  olacaktır. Bir

başka deyişle,  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*$  kökler olduğunda, geriye kalan kökler  $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_m}$

şeklinde yazılabilir. Böylece  $|z^*| < 1$  ise  $\frac{1}{|z^*|} > 1$  olacağı için mevcut  $2m$  kökün  $m$

tanesi birim çember içinde ise,  $m$  tanesi birim çember dışında kalacaktır.

Bu durumda  $g(z)$ ,

$$g(z) = G_m(z)G_m^*(z^*) \quad (3.24)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Burada,

$$G_m(z) = g_0 + \frac{g_1}{z} + \frac{g_2}{z^2} + \dots + \frac{g_m}{z^m} \quad (3.25)$$

iken,

$$G_m^*(z^*) = g_0^* + g_1^*z + g_2^*z^2 + \dots + g_m^*z^m \quad (3.26)$$

olacaktır. Birim çember içindeki tüm kökleri  $G_m(z)$ , birim çember dışındaki tüm kökleri de  $G_m^*(z^*)$  içerecek şekilde  $g$ 'ler seçilir. Böylece,

$$g(z) = \left( g_0 + \frac{g_1}{z} + \frac{g_2}{z^2} + \dots + \frac{g_m}{z^m} \right) (g_0^* + g_1^* z + g_2^* z^2 + \dots + g_m^* z^m)$$

olur ve

$$\begin{aligned} g(z) &= g_0 g_0^* + g_0 g_1^* z + g_0 g_2^* z^2 + \dots + g_0 g_m^* z^m \\ &\quad + g_1 g_0^* + g_1 g_1^* z + g_1 g_2^* z^2 + \dots + g_1 g_m^* z^m \\ &\quad + g_2 g_0^* + g_2 g_1^* z + g_2 g_2^* z^2 + \dots + g_2 g_m^* z^m \\ &\quad \vdots \\ &\quad + g_m g_0^* + g_m g_1^* z + g_m g_2^* z^2 + \dots + g_m g_m^* z^m \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde yazıldığında, (3.15) eşitliğindeki  $z^k$ 'lerin katsayıları olan bilinmeyen lagrange çarpanları, (3.27) eşitliğindeki  $z^k$ 'lerin katsayıları olan  $g$ 'ler cinsinden,

$$\lambda_k = \sum_{m=0}^{m-k} g_j g_{j+k}^* \quad \lambda_{-k} = \lambda_k^* \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece  $g_i$ 'ler elde edildiğinde,  $\lambda_k$  lagrange çarpanlarına ulaşılmış olacaktır.  $g_i$ 'lerin elde edilebilmesi için (3.21) integrantının hesabı gerekmektedir.

Bunun için, (3.21) integrantında  $g(z)$  yerine, (3.24) eşitliği yazıldığında,

$$\hat{r}_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_c z^{k-1} [G_m(z) G_m^*(z^*)]^{-1} dz$$

elde edilir. Aşağıdaki toplam dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} g_0 \hat{r}_k + g_1 \hat{r}_{k-1} + g_2 \hat{r}_{k-2} + \dots + g_m \hat{r}_{k-m} &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_c \frac{g_0 z^{k-1}}{g(z)} dz + \oint_c \frac{g_1 z^{k-2}}{g(z)} dz \right. \\ &\quad \left. + \dots + \oint_c \frac{g_m z^{k-m-1}}{g(z)} dz \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

yazılabilir. Bu eşitlik daha kompakt bir şekilde,

$$\sum_{j=0}^m g_j \hat{r}_{k-j} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z^{k-1} G_m(z)}{G_m(z) G_m^*(z^*)} dz$$

olarak gösterilebilir ve

$$\sum_{j=0}^m g_j \hat{r}_{k-j} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z^{k-1}}{G_m^*(z^*)} dz \quad (3.30)$$



eşitliğine ulaşılır. Burada  $G_m^*(z^*)$ , birim çember dışındaki kökleri içerdiği için kontur integral kolayca hesaplanabilir.

$k > 0$  için  $z^{k-1}$  analitik olduğundan ve  $\frac{z^{k-1}}{G_m^*(z^*)}$ 'nin kutup noktası

olmadığından, (3.22) ile ifade edilen Cauchy teoremine göre bu integralin değeri sıfır olacaktır.

$k = 0$  için ise,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z(g_0^* + g_1^* z + g_2^* z^2 + \dots + g_m^* z^m)} dz$$

olur. Payda  $g_0^*$  parantezine alındığında,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{zg_0^* \left( 1 + \frac{g_1^*}{g_0^*} z + \frac{g_2^*}{g_0^*} z^2 + \dots + \frac{g_m^*}{g_0^*} z^m \right)} dz$$

elde edilir ve burada  $\frac{g_1^*}{g_0^*} z + \frac{g_2^*}{g_0^*} z^2 + \dots + \frac{g_m^*}{g_0^*} z^m$  toplamı  $b$  ile gösterilerek, paya  $b$

ekleyip çıkarmakla,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{zg_0^*} \left( \frac{1+b-b}{1+b} \right) dz$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{zg_0^*} \left( 1 - \frac{b}{1+b} \right) dz,$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{zg_0^*} \left( 1 - \frac{\frac{g_1^*}{g_0^*} z + \frac{g_2^*}{g_0^*} z^2 + \dots + \frac{g_m^*}{g_0^*} z^m}{1 + \frac{g_1^*}{g_0^*} z + \frac{g_2^*}{g_0^*} z^2 + \dots + \frac{g_m^*}{g_0^*} z^m} \right) dz,$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left( \frac{1}{zg_0^*} - \frac{\frac{1}{(g_0^*)^2} (g_1^* + g_2^* z^1 + \dots + g_m^* z^{m-1})}{1 + \frac{g_1^*}{g_0^*} z + \frac{g_2^*}{g_0^*} z^2 + \dots + \frac{g_m^*}{g_0^*} z^m} \right) dz$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece integrant iki kısma ayrılmış olur. İkinci kısım  $f_1(z)$  ile gösterildiğinde,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left( \frac{1}{zg_0^*} - f_1(z) \right) dz$$

veya

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{zg_0^*} dz - \oint_c f_1(z) dz$$

elde edilir.  $f_1(z)$ 'nin payı  $z$ 'nin pozitif kuvvetlerini içerdiğinden analitik fonksiyondur. Paydası ise  $\frac{1}{g_0^*} G_m^*(z^*)$ 'dir ve  $G_m^*(z^*)$ 'nin kutup noktaları

çemberin dışında olduğundan,  $\frac{1}{g_0^*}$  ile çarpmakla kutuplar değişmeyecektir. Bu

nedenle  $f_1(z)$  fonksiyonu birim çember içinde analitiktir ve kontur integrali (3.22) eşitliğine göre,

$$\oint_c f_1(z) dz = 0$$

olur.

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i g_0^*} \oint_c \frac{1}{z} dz$$

kontur integrali ise, (3.23) Cauchy integrali formülünde  $f(z)=1$  ve  $z_0=0$ ,  $f(z_0)=f(0)=1$  olduğu göz önüne alınarak,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i g_0^*} 2\pi i$$

$$h(z) = \frac{1}{g_0^*} \tag{3.31}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{z^{k-1}}{G_m^*(z^*)} dz = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ \frac{1}{g_0^*}, & k = 0 \end{cases}$$

ya da

$$\sum_{j=0}^m g_j \hat{r}_{k-j} = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ \frac{1}{g_0^*}, & k = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) eşitlikleri  $g_i$ 'lere göre çözülebilen  $(m+1)$  sayıda denklemlerin

$$\begin{aligned} g_0 \hat{r}_0 + g_1 \hat{r}_{-1} + \dots + g_m \hat{r}_{-m} &= \frac{1}{g_0^*} \\ g_0 \hat{r}_1 + g_1 \hat{r}_0 + \dots + g_m \hat{r}_{1-m} &= 0 \\ \vdots & \\ g_0 \hat{r}_m + g_1 \hat{r}_{m-1} + \dots + g_m \hat{r}_0 &= 0 \end{aligned}$$

sistemini üretir.

Bu denklemler sisteminin her iki tarafı  $g_0$ 'a bölüldüğünde ve  $\frac{g_j}{g_0}$  oranı,

$a_j$  ile gösterildiğinde (3.32), matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_0 & \hat{r}_{-1} & \hat{r}_{-2} & \dots & \hat{r}_{-m} \\ \hat{r}_1 & \hat{r}_0 & \hat{r}_{-1} & \dots & \hat{r}_{-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \hat{r}_{-1} \\ \hat{r}_m & \hat{r}_{m-1} & \hat{r}_{m-2} & \dots & \hat{r}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/g_0 g_0^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

(3.33)'de görüldüğü gibi otokovaryanslar matrisi bir toeplitz matristir ve  $\hat{r}_{-k} = \hat{r}_k^*$  olduğundan, aynı zamanda Hermitian matris olur. Bu otokovaryans matrisi  $\mathbf{R}_m$  ile işaret edildiğinde (3.33),

$$\mathbf{R}_m \mathbf{a} = \mathbf{s}_m$$

şeklinde gösterilebilir.

Lagrange çarpanları ile  $a_j$ 'ler arasındaki ilişki ise (3.28) ve  $a_j = \frac{g_j}{g_0}$

eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{m=0}^{m-k} g_j g_{j+k}^* \\ &= \sum_{m=0}^{m-k} g_0 a_j g_0^* a_{j+k}^* \\ \lambda_k &= g_0 g_0^* \sum_{m=0}^{m-k} a_j a_{j+k}^* \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilir. Böylece, (3.33) sisteminin çözümü olarak  $a_j$ 'ler ve  $1/g_0 g_0^*$  elde edilerek, lagrange çarpanları ve dolayısıyla (3.12) ile belirlenmiş MaxEnt olasılık dağılımı bulunmuş olur (Kapur ve Kesavan 1992).

### 3.3.1 Reel değerli zaman serisi için Lagrange çarpanları

(3.34) ile elde edilen Lagrange çarpanlarının analitik formunu oluşturabilmek amacıyla bir dizi işlem aşağıdaki gibi gerçekleştirilir. Öncelikle (3.33) matris formu zaman serisinin reel sayılardan oluşması halinde,

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_0 & \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \dots & \hat{r}_m \\ \hat{r}_1 & \hat{r}_0 & \hat{r}_1 & \dots & \hat{r}_{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \hat{r}_1 \\ \hat{r}_m & \hat{r}_{m-1} & \hat{r}_{m-2} & \dots & \hat{r}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/|g_0|^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şekline dönüşür.  $(m+1)$  bilinmeyene sahip  $(m+1)$  denklemden oluşan bu sistemin çözümü

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_m^{-1} \mathbf{s}_m \quad (3.35)$$

olur. Burada  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{D}$  olarak dikkate alınarak,  $m+1 = m'$  olarak gösterildiğinde,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} D_{11}/|g_0|^2 \\ D_{21}/|g_0|^2 \\ \vdots \\ D_{m'1}/|g_0|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

elde edilir ve  $|g_0|^2 = D_{11}$  ile  $a_j = \frac{D_{j+1,1}}{D_{11}}$ ,  $j = 1, \dots, m$  eşitliklerine ulaşılır. Böylece

zaman serisinin reel değerli olduğu durumda (3.34) formülü

$$\lambda_k = |g_0|^2 \sum_{j=0}^{m-k} a_j a_{j+k} \quad (3.37)$$

formülüne dönüşür ve elde edilen eşitlikler yerine yazıldığında, reel değerli zaman serisi için Lagrange çarpanları

$$\lambda_k = D_{11} \sum_{i=1}^{m'-k} \frac{D_{i1} D_{i+k,1}}{D_{11}^2} \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir.

### 3.3.2 Reel değerli zaman serisi için kovaryans matrisinin determinanı

Reel değerli zaman serisi için Lagrange çarpanları formülü elde edildikten sonra, MaxEnt dağılımı formunda ortaya çıkan bir toeplitz matris olan kovaryans matrisinin determinanı için analitik formül oluşturma sürecine geçilir.

$|\Lambda|$  değeri için ise öncelikle  $\Lambda$  matrisinin özdeğerleri olan  $q_j$ 'ler hesaplanır. Özdeğerler için asimptotik ifade (3.14) formülü ile

$$q_j = \sum_{k=-m}^m \lambda_k e^{\frac{2\pi ijk}{T+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, T, \quad i^2 = -1$$

şeklinde verilmişti (Gray 2001). Burada Euler formülüne göre,

$$e^{\frac{2\pi ijk}{T+1}} = \cos\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right)$$

olarak yazıldığında,

$$q_j = \sum_{k=-m}^m \lambda_k \left( \cos\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right) \right)$$

eşitliği elde edilir. Toplam açık bir şekilde yazıldığında,

$$\begin{aligned} q_j &= \lambda_{-m} \left( \cos\left(\frac{2\pi jm}{T+1}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi jm}{T+1}\right) \right) \\ &\quad + \lambda_m \left( \cos\left(\frac{2\pi jm}{T+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi jm}{T+1}\right) \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \lambda_{-1} \left( \cos\left(\frac{2\pi j}{T+1}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi j}{T+1}\right) \right) \\ &\quad + \lambda_1 \left( \cos\left(\frac{2\pi j}{T+1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{T+1}\right) \right) + \lambda_0 \end{aligned}$$

ve zaman serisinin reel değerli olması halinde  $\lambda_{-m} = \lambda_m$  eşitliği dikkate alındığında,

$$q_j = \sum_{k=1}^m 2\lambda_k \cos\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right) + \lambda_0 \quad (3.39)$$

formülüne ulaşılır.  $\lambda_k$ 'nin (38) formülü burada yerine yazılarak,  $\Lambda$  matrisinin öz değerleri olan  $q_j$ 'ler için,

$$q_j = \sum_{k=1}^m 2D_{11} \sum_{i=1}^{m'-k} \frac{D_{i1} D_{i+k,1}}{D_{11}^2} \cos\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right) + D_{11} \sum_{i=1}^{m'} \frac{D_{i1}^2}{D_{11}^2} \quad (3.40)$$

Formülü, özdeğerlerin çarpımı ile ifade edilen  $|\Lambda|$  determinanı için ise

$$|\Lambda| = \prod_{j=0}^T \left( \sum_{k=1}^m 2D_{11} \sum_{i=1}^{m'-k} \frac{D_{i1} D_{i+k,1}}{D_{11}^2} \cos\left(\frac{2\pi jk}{T+1}\right) + D_{11} \sum_{i=1}^{m'} \frac{D_{i1}^2}{D_{11}^2} \right) \quad (3.41)$$

formülü elde edilmiş olur.

Böylece reel değerli bir zaman serisi verildiğinde onun Maksimum Entropi Dağılımı, söz konusu zaman serisinin  $\mathbf{R}_m^{-1}$  kovaryans matrisinin elemanları yardımıyla (3.41) formülü sayesinde kurulabilir.

### 3.4. Otokovaryans Fonksiyonları için Ekstrapolasyon

$m \ll T$  varsayımı altında Lagrange çarpanları için çözüm sürecinde,  $|k| > m$  dahil olmak üzere tüm  $k$ 'lar için geçerli,

$$\hat{r}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta k}}{g(e^{i\theta})} d\theta$$

eşitliği elde edilmişti ve bu integrali çözmekle Lagrange çarpanları elde edilebilirdi. Bu da

$$\mathbf{R}_m \mathbf{a} = \mathbf{s}_m$$

denklemler sisteminin  $\mathbf{a}$  için çözülmesiyle,  $\lambda$ 'ların elde edilmesine olanak verirdi. Bu aynı ifade aynı zamanda  $m$  gecikmeden sonraki otokovaryans fonksiyonlarının beklenen değerleri için  $m$ 'den sonraki her gecikme için  $\mathbf{R}_m$ 'e ekstra bir satır eklenerek, ekstrapolasyon yapmaya uygun bir metot verir, öyle ki;

$$\mathbf{R}_{m+j} \mathbf{a} = \mathbf{s}_{m+j} \quad j = 1, 2, \dots, T - m$$

şeklinde yada çözülmesi gereken ekstra denklemler bakımından aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{m+1} a_0 + \hat{r}_m a_1 + \dots + \hat{r}_1 a_m &= 0 \\ \tilde{r}_{m+2} a_0 + \tilde{r}_{m+1} a_1 + \dots + \hat{r}_2 a_m &= 0 \\ \vdots & \\ \tilde{r}_T a_0 + \tilde{r}_{T-1} a_1 + \dots + \tilde{r}_{T-m} a_m &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$a$  bulunduğu için bu denklemler ardı ardına gelen işlemlerle kolayca çözülebilir ve her denklem yalnızca bir bilinmeyen içerdiği için de, denklemlerin hepsi çözülebilecektir. Aslında tekrarlanan ilişki,

$$\tilde{r}_k = -(a_1\tilde{r}_{k-1} + a_2\tilde{r}_{k-2} + \dots + a_j\tilde{r}_{k-j} + a_{j+1}\hat{r}_{j+1} + \dots + a_m\hat{r}_{k-m}) \quad (3.43)$$

eşitliği ile yazılabilir. Burada  $k > m$  ve  $k - j > m$  'dir.

Böylece görüldüğü gibi Maksimum entropi metodu bilinen  $m$  gecikmeli otokovaryans kısıtları sayesinde maksimum  $T$  gecikmesine kadar olmak üzere bilinmeyen otokovaryansların beklenen değerleri için bir ekstrapolasyon yapmaya imkan sağlar. Ancak elbette ki ekstrapole edilmiş otokovaryanslar yeni bir maksimum entropi dağılımı elde etmek için ek kısıtlar olarak dahil edilse bile, ekstrapole edilmiş otokovaryansların bilgisi,  $p(\mathbf{y})$ 'nin entropisini değiştirmeyecektir. Maksimum entropi algoritması bu otokovaryanslar verilmeden çekilen maksimum entropi dağılımı ile aynı dağılımı üretecektir, çünkü verilen bu ekstrapole kısıtlar diğer  $m$  gecikmeli otokovaryansların lineer kombinasyonudur.

### 3.5. MaxEnt Olasılık Dağılımının Elde Edilmesine Dair Bir Uygulama

Yukarıda ayrıntılarıyla ele alınan  $m$  gecikmeli otokovaryans kısıtları ile bir zaman serisi için MaxEnt dağılımının kurulması ve  $m$  gecikmeden sonraki otokovaryansların tahmin edilmesi süreci Ek-1'de verilen Matlab'da yazılmış bir program sayesinde işletilmiştir. Uygulama için 1982 yılının 21 Mayıs ile 17 Ağustos dönemine ait Dow Jones indeksinin günlük kurları zaman serisi olarak ele alınmış ve gözlemler Çizelge 3.1.'de verilmiştir (Kapur ve Kesavan 1992).

**Çizelge 3.1.** Dow Jones indekslerinin günlük kurları

841	810	801	805	844	815
840	804	815	807	840	804
845	803	821	819	838	799
836	816	812	830	833	784
832	810	817	833	831	789
829	805	818	832	832	784
823	809	822	837	818	786
822	798	815	837	818	791
824	794	803	837	824	804
819	798	803	838	831	833

Burada 60 gözlem mevcuttur ve 5 gecikmeye kadar otokovaryanslar,

$$\hat{r}_k = \frac{1}{60} \sum_{j=1}^{60-k} (y_j - \bar{y})^2$$

formülü ile  $\hat{r}_0 = 267.30$ ,  $\hat{r}_1 = 230.25$ ,  $\hat{r}_2 = 186.36$ ,  $\hat{r}_3 = 142.19$ ,  $\hat{r}_4 = 100.49$ ,  $\hat{r}_5 = 67.18$  veriden hesaplanarak, kısıt olarak verilir. MaxEnt olasılık dağılımının hesaplanabilmesi için gereken değerler;

$$\begin{bmatrix} 267.30 & 230.25 & 186.36 & \dots & 67.18 \\ 230.25 & 267.30 & 230.25 & \dots & 100.49 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 230.25 \\ 67.18 & 100.49 & 142.19 & \dots & 267.30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/|g_0|^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

sisteminin Matlab'da çözülmesiyle aşağıdaki gibi elde edilir;

$$a_1 = -0,9887, \quad a_2 = 0,0849, \quad a_3 = 0,022, \quad a_4 = 0,0786, \quad a_5 = -0,0079 \quad \text{ve} \\ 1/|g_0|^2 = 0,0152.$$

Bu değerler,  $\lambda_k = |g_0|^2 \sum_{j=0}^{m-k} a_j a_{j+k}$  eşitliği ile lagrange çarpanlarının

bulunmasına olanak verir,



$$\lambda = \begin{bmatrix} -0,00012 \\ 0,001313 \\ -0,00086 \\ 0,001059 \\ -0,01626 \\ 0,03027 \\ -0,01626 \\ 0,001059 \\ -0,00086 \\ 0,001313 \\ -0,00012 \end{bmatrix}$$

ve buradan da  $q_j$ 'ler ,

$$q_j = \lambda_{-5} e^{-\frac{10\pi}{60}ij} + \lambda_{-4} e^{-\frac{8\pi}{60}ij} + \lambda_{-3} e^{-\frac{6\pi}{60}ij} + \lambda_{-2} e^{-\frac{4\pi}{60}ij} + \lambda_{-1} e^{-\frac{2\pi}{60}ij} + \lambda_0 + \lambda_1 e^{\frac{2\pi}{60}ij} + \dots + \lambda_5 e^{\frac{10\pi}{60}ij}$$

$$q_j = 2\lambda_5 \cos \frac{10\pi}{60} j + 2\lambda_4 \cos \frac{8\pi}{60} j + 2\lambda_3 \cos \frac{6\pi}{60} j + 2\lambda_2 \cos \frac{4\pi}{60} j + 2\lambda_1 \cos \frac{2\pi}{60} j + \lambda_0$$

formülü yardımıyla Ek-1'de verilen program ile,

$$q = (0.0006, 0.0006, 0.0006, 0.0009, 0.0013, 0.0021, 0.0033, 0.0050, 0.0072, 0.0100, 0.0132, 0.0168, 0.0205, 0.0241, 0.0276, 0.0308, 0.0336, 0.0361, 0.0383, 0.0404, 0.0426, 0.0450, 0.0477, 0.0509, 0.0543, 0.0580, 0.0615, 0.0647, 0.0673, 0.0689, 0.0695, 0.0689, 0.0673, 0.0647, 0.0615, 0.0580, 0.0543, 0.0509, 0.0477, 0.0450, 0.0426, 0.0404, 0.0383, 0.0361, 0.0336, 0.0308, 0.0276, 0.0241, 0.0205, 0.0168, 0.0132, 0.0100, 0.0072, 0.0050, 0.0033, 0.0021, 0.0013, 0.0009, 0.0006, 0.0006)$$

şeklinde elde edilmiştir. Böylece  $\Lambda$  matrisinin özdeğerlerine ulaşılmış olur ve

$$|\Lambda| = \prod_{j=0}^T q_j \text{ özelliğinden yararlanarak, determinant değeri } 8.1398e-110 \text{ olarak}$$

hesaplanır ve nihayet MaxEnt Olasılık dağılımı,

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{60}{2}} |\Lambda^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Lambda \mathbf{y}}$$

$$p(\mathbf{y}) = 3.3566e-078e^{\frac{1}{2}\mathbf{y}'\Lambda\mathbf{y}}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\Lambda$  matrisi yukarıda elde edilen Lagrange çarpanlarından oluşan bir toeplitz matristir.

Ayrıca, beş gecikmeden sonraki otokovaryans değerleri için yapılan ekstrapolasyon ile altı, yedi ve sekiz gecikmeler için otokovaryans değerleri (3.43) formülü ile,

$$\tilde{r}_6 = 57.8921 \quad \tilde{r}_7 = 51.5369 \quad \tilde{r}_8 = 46.0417$$

olarak bulunmuştur.

#### 4. MAXENT DAĞILIMLARININ KABUL EDİLEBİLİRLİĞİ

MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği denildiğinde, tek bir gerçekleşmesi zaman serisi olan durağan bir stokastik sürecin, tam otokovaryans sayısı  $m$ 'in biliniyor olduğu varsayımı altında,  $m$  dışındaki otokovaryanslı MaxEnt dağılımlarının bu stokastik süreç için kabul edilebilirliği anlaşılacaktır. Bu nedenle de öncelikle verilmiş zaman serisi için otokovaryans sayısı  $m$  olan MaxEnt dağılımı kurularak, Jaynes'in konsantrasyon teoremi yardımı ile bu dağılımın entropi değeri için "konsantrasyon aralığı" belirlenir. Daha sonra ise  $m$  dışındaki otokovaryanslı MaxEnt dağılımlarının entropi değerlerinin bu aralığa girip girmediği tespit edilerek, söz konusu MaxEnt dağılımın entropi değerinin aralığa dahil olması halinde kabul edilebilirliğine karar verilir.

MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği kavramının geliştirilmesinde önemli bir rolü sahip ve aşağıda ayrıntıları ile ispatlanacak olan Jaynes'in konsantrasyon teoremi, gözlem sayısının büyük değerlerinde, verilen moment kısıtlarını sağlayan olasılık dağılımlarının entropilerinin, aynı kısıtları sağlayan MaxEnt dağılımının entropi değerinin küçük komşuluğunda bulunduğunu ifade etmektedir.

##### 4.1. Jaynes'in Entropi Konsantrasyon Teoremi

Bilindiği üzere,

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (4.1)$$

entropi fonksiyonuna

$$\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (g_0(x) \equiv 1, \mu_0 = 1) \quad (4.2)$$

kısıtları altında maksimum değer veren dağılım,

$$p_i = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.3)$$

formüllerleriyle bulunur. Burada  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  Lagrange çarpanlarıdır.  $1, g_1(x), \dots, g_m(x)$  lineer bağımsız moment fonksiyonlarıdır. (4.3)'ü, (4.1)'de yerine yazmakla  $H_{\max}$ ,

$$\begin{aligned}
 H_{\max} &= -\sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} \left( -\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} g_j(x_i) \\
 H_{\max} &= \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi ise (4.2) koşullarını sağlayan herhangi başka bir  $q_1, q_2, \dots, q_n$  dağılımı ele alınsın. Bu dağılımın entropisi ise,

$$H = -\sum_{i=1}^n q_i \ln q_i \tag{4.5}$$

şeklinde gösterildiğinde,

$$\Delta H = H_{\max} - H$$

farkı değerlendirilsin. (4.4) ve (4.5) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
 H_{\max} - H &= \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j + \sum_{i=1}^n q_i \ln q_i \\
 &= \sum_{j=0}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n q_i g_j(x_i) + \sum_{i=1}^n q_i \ln q_i \\
 H_{\max} - H &= \sum_{i=1}^n q_i \left( \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) + \ln q_i \right) \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) formülünden her iki tarafın logaritması alındığında

$\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) = -\ln p_i$  olur ve (4.6)'dan

$$\begin{aligned}
 H_{\max} - H &= \sum_{i=1}^n q_i (-\ln p_i + \ln q_i), \\
 H_{\max} - H &= \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

sonucuna varılır.

(4.7) formülünde  $q_i = p_i(1 + \varepsilon_i)$ ,  $1 + \varepsilon_i > 0$  alınsın. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i &= \sum_{i=1}^n p_i(1 + \varepsilon_i) = 1 \text{ olduğu dikkate alındığında,} \\ \sum_{i=1}^n p_i(1 + \varepsilon_i) &= 1 \\ \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n p_i \varepsilon_i &= 1 \\ 1 + \sum_{i=1}^n p_i \varepsilon_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n p_i \varepsilon_i &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir.

(4.7) formülünde  $q_i = p_i(1 + \varepsilon_i)$  olduğu dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \Delta H &= \sum_{i=1}^n p_i(1 + \varepsilon_i) \ln \frac{p_i(1 + \varepsilon_i)}{p_i} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(1 + \varepsilon_i) \ln(1 + \varepsilon_i) \end{aligned}$$

olur.

$|\varepsilon_i| < 1$  değerleri için  $\ln(1 + \varepsilon_i)$ 'nin Taylor açılımı

$$\ln(1 + \varepsilon_i) = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^2}{2} + \frac{\varepsilon_i^3}{3} - \dots$$

olduğu için

$$\ln(1 + \varepsilon_i) \approx \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^2}{2}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \Delta H &\approx \sum_{i=1}^n p_i(1 + \varepsilon_i) \left( \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^2}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \left( \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^2}{2} + \varepsilon_i^2 - \frac{\varepsilon_i^3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\approx \sum_{i=1}^n p_i \left( \varepsilon_i + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \right),$$

$$\Delta H \approx \sum_{i=1}^n p_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\varepsilon_i^2}{2}$$

eşitliği elde edilir ve burada (4.8) göz önüne alınırsa,

$$\Delta H = H_{\max} - H \approx \sum_{i=1}^n p_i \frac{\varepsilon_i^2}{2} \quad (4.9)$$

sonucuna varılır.

$$q_i = p_i (1 + \varepsilon_i) \text{ eşitliğinden elde edilen } \varepsilon_i = \frac{q_i - p_i}{p_i} \text{ değeri (4.9)'da yerine}$$

yazıldığında,

$$\Delta H = H_{\max} - H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{q_i - p_i}{p_i} \right)^2$$

$$\Delta H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(q_i - p_i)^2}{p_i}$$

veya

$$\Delta H = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n \frac{(Nq_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $N$  toplam gözlem sayısı,  $Nq_1, Nq_2, \dots, Nq_n$  gözlenen frekanslar ( $G_i$ ),  $Np_1, Np_2, \dots, Np_n$ 'de beklenen frekanslardır ( $B_i$ ). Böylece,

$$2N\Delta H \approx \sum_{i=1}^n \frac{(Nq_i - Np_i)^2}{Np_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(G_i - B_i)^2}{B_i} \quad (4.11)$$

elde edilir. Pearson teoremine göre  $\sum_{i=1}^n \frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}$ ,  $\nu = n - m - 1$  serbestlik

derecesi ile  $\chi^2$  dağılımına sahiptir (Cramer 1966). Bu nedenle de

$$2N\Delta H \sim \chi_\nu^2 \quad (4.12)$$

sonucuna varılır. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 4.1. (Jaynes'in Entropi Konsantrasyon teoremi):**  $N$ 'nin büyük değerleri için  $2N(H_{\max} - H)$ ,  $n - m - 1$  serbestlik dereceli  $\chi^2$  dağılımına sahiptir.

Jaynes'in Entropi Konsantrasyon teoremine göre verilen (4.2) koşullarını sağlayan herhangi  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  olasılık dağılımının  $H$  entropisinin, aynı koşulları sağlayan maksimum entropi dağılımının  $H_{\max}$  entropisine yakınlığı,  $\chi^2$  dağılımı ile değerlendirilebilir. Mevcut olan  $\chi^2$  tablosu yardımı ile,

$$P(\chi^2 \leq \chi_v^2(0.95)) = 0.95, \quad P(\chi^2 \leq \chi_v^2(0.99)) = 0.99$$

yazılabilir. Burada  $\Delta H = H_{\max} - H$  olduğu ve (4.12) bağıntısı dikkate alınır,

$$\begin{aligned} P\left[H_{\max} - H \leq \frac{\chi_v^2(0.95)}{2N}\right] &= 0.95 \\ P\left[H_{\max} - H \leq \frac{\chi_v^2(0.99)}{2N}\right] &= 0.99 \end{aligned} \quad (4.13)$$

yada

$$\begin{aligned} P\left[H_{\max} \geq H \geq H_{\max} - \frac{\chi_v^2(0.95)}{2N}\right] &= 0.95 \\ P\left[H_{\max} \geq H \geq H_{\max} - \frac{\chi_v^2(0.99)}{2N}\right] &= 0.99 \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitlikleri geçerli olacaktır. Yukarıdaki eşitsizlikler, (4.2) koşullarını sağlayan herhangi olasılık dağılımının entropisi  $H$ , aynı koşulları sağlayan maksimum entropi dağılımının entropisi  $H_{\max}$  olduğunda,  $H$ 'ın %95 olasılıkla

$H_{\max} - \frac{\chi_v^2(0.95)}{2N}$ , den, %99 olasılıkla da  $H_{\max} - \frac{\chi_v^2(0.99)}{2N}$ , den büyük olacağını

ifade eder. Bir başka ifadeyle (4.2) koşullarını sağlayan herhangi bir olasılık dağılımının entropi değeri  $H$ , aynı kısıtları sağlayan MaxEnt dağılımının entropi değeri  $H_{\max}$  civarında yoğunlaşır.

(4.13) ve (4.14)'den sırasıyla %95 ve %99 **entropi aralıkları**

$$\left[H_{\max} - \frac{\chi_v^2(0.95)}{2N}, H_{\max}\right] \text{ ve } \left[H_{\max} - \frac{\chi_v^2(0.99)}{2N}, H_{\max}\right] \quad (4.15)$$

şeklinde elde edilir.

## 4.2. Konsantrasyon Teoremi Yardımıyla MaxEnt Dağılımlarının Kabul Edilebilirliği

Öncelikle, yukarıda ayrıntıları ile ele alınan MaxEnt Dağılımı elde etme süreci Priestley (1981)'den alınan Çizelge 4.1'deki veriler için iki, üç ve dört gecikmeye kadar otokovaryans kısıtları

$$\hat{r}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-k} (y_j - \bar{y})(y_{j+k} - \bar{y}) \quad (4.16)$$

formülü ile hesaplanarak gerçekleştirilmiştir.

**Çizelge 4.1.** MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliğinde kullanılan veri seti

<b>t</b>	<b>y</b>	<b>t</b>	<b>y</b>	<b>t</b>	<b>y</b>	<b>t</b>	<b>y</b>
<b>1</b>	-0.22	<b>11</b>	2.03	<b>21</b>	0.9	<b>31</b>	-0.85
<b>2</b>	-0.31	<b>12</b>	-0.78	<b>22</b>	-2.18	<b>32</b>	1.17
<b>3</b>	-0.24	<b>13</b>	1.11	<b>23</b>	-1.87	<b>33</b>	-0.97
<b>4</b>	0.76	<b>14</b>	0.12	<b>24</b>	0.36	<b>34</b>	0.48
<b>5</b>	0.18	<b>15</b>	2.04	<b>25</b>	1.12	<b>35</b>	-0.16
<b>6</b>	-1.29	<b>16</b>	3.26	<b>26</b>	-0.16	<b>36</b>	0
<b>7</b>	0.57	<b>17</b>	0.02	<b>27</b>	0.66	<b>37</b>	0.84
<b>8</b>	-0.13	<b>18</b>	-1.81	<b>28</b>	0.6		
<b>9</b>	-0.84	<b>19</b>	-0.07	<b>29</b>	-0.16		
<b>10</b>	0.86	<b>20</b>	2.02	<b>30</b>	-2.01		

MaxEnt Dağılımı elde etme sürecinde, aşağıdaki çizelgede yer alan değerlere ulaşılmıştır. Burada aynı veri seti üzerinde, verilen kısıt sayısı birer birer artırılarak iki, üç ve dört gecikmeye kadar otokovaryanslar kısıt olarak verildiğinde elde edilen parametre değerleri ve MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.



**Çizelge 4.2.** Kısıt sayısı artırıldığında MaxEnt Dağılımı parametre değerleri

	<b>2 Gecikmeli Otokovaryans Kısıtı ile MaxEnt</b>	<b>3 Gecikmeli Otokovaryans Kısıtı ile MaxEnt</b>	<b>4 Gecikmeli Otokovaryans Kısıtı ile MaxEnt</b>
$ g_0^2 $	1.1627	1.1629	1.1630
$\hat{a}_1$	-0.2833	-0.2747	-0.2746
$\hat{a}_2$	0.6017	0.5977	0.6023
$\hat{a}_3$	-	0.0142	0.0121
$\hat{a}_4$	-	-	0.0077
$\lambda_0$	1.6769	1.6663	1.6729
$\lambda_1$	-0.5275	-0.5005	-0.5032
$\lambda_2$	0.6996	0.6905	0.7021
$\lambda_3$	-	0.0165	0.0116
$\lambda_4$	-	-	0.0090
$ \Lambda $	264.2192	266.1762	266.7758
$H_{\max}$	49.7123	49.7086	49.7075

Çizelge 4.2’de iki gecikmeli otokovaryans kısıtlarının verilmesiyle elde edilen maksimum entropi değeri üzerinde Jaynes’in konsantrasyon teoremi yardımıyla,

$$H(p(y)) - \frac{\chi^2_{\nu}(0.95)}{2N} \leq H(p'(y)) \leq H(p(y))$$

$$\nu = 37 - 3 - 1 = 33, \chi^2_{33}(0.95) = 47.3998$$

olmak üzere,

$$49.7123 - \frac{47.3998}{2*37} \leq H \leq 49.7123$$

$$49.0718 \leq H \leq 49.7123$$

aralığı belirlenebilir. Burada üç gecikmeli otokovaryans kısıtının eklenmesiyle elde edilen entropi değerinin bu aralığa girdiği gözlemlendiğinden, sonradan verilen

bu kısıtın orijinal  $p(y)$ 'de önemli düzeyde bir sapmaya yol açmadığı ve dolayısıyla da elimizdeki bilginin tanımlayıcısı olarak  $p'(y)$ 'nin daha uygun olacağı sonucuna varılır.

Aynı süreç dört gecikmeye kadar otokovaryans kısıtlarının verilmesiyle de işletilerek, elde edilen MaxEnt değerinin belirlenen aralığa girip girmediği araştırıldığında, üç gecikmeli için entropi aralığı

$$\nu = 37 - 4 - 1 = 32, \chi_{32}^2(0.95) = 46.1942$$

olmak üzere

$$49.7086 - \frac{46.1942}{2 \cdot 37} \leq H \leq 49.7086$$

$$49.0844 \leq H \leq 49.7086$$

şeklinde kurulur. Dört gecikmeye kadar otokovaryans kısıtlı MaxEnt dağılımının entropi değeri 49.7075 de, Jaynes'in konsantrasyon teoremi ile oluşturulan aralığa ait olduğundan, uygun bir dağılım olarak ele alınır.

## 5. MaxEnt YÖNTEMİNE DAYALI OTOREGRESİF MODELLEME

Bu bölümde otokovaryans kısıtlarının artırılmasıyla elde edilen MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği sürecinin,  $AR(k)$  otoregresif modelinin  $k$  gecikme sayısını belirlemek ve parametrelerini tahmin etmek için de işletilebileceği gösterilmiştir.

### 5.1. Otoregresif Modelde Gecikme Sayısının MaxEnt Yöntemi ile Belirlenmesi

İstatistikte Box Jenkins modelleri olarak bilinen otoregresif hareketli ortalamalar modellerinden  $k$ . dereceden otoregresif model  $AR(k)$ ,  $X_t$  bir zaman serisi,  $X_{t-i}$  ise zaman serisinin  $i$  gecikmeli değerleri, bir başka deyişle sürecin  $t-i$  anında aldığı değerler olmak üzere,

$$X_t = \sum_{i=1}^k \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\phi_i$  modelin parametreleri,  $\varepsilon_t$  ise *beyaz gürültü* (*white noise*) olarak adlandırılan sıfır ortalamalı,  $\sigma_\varepsilon^2$  varyanslı bağımsız ve özdeş normal dağılıma sahip rassal değişkenler dizisi, hata terimidir.

Bölüm 4’de ele alınan, otokovaryans kısıtlarının artırılmasıyla elde edilen MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği sürecinin,  $AR(k)$  modelindeki  $k$  gecikme sayısını belirlemek için de işletilebileceği önerilebilir. Uygulama için  $X_t - 0.4X_{t-1} + 0.7X_{t-2} = \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  ile  $AR(2)$  modelinden türetilmiş Çizelge 5.1’deki 90 değerden oluşan zaman serisi kullanılmıştır.

**Çizelge 5.1.** AR(2) modelinden üretilen zaman serisi değerleri

<i>t</i>	<i>x</i>	<i>t</i>	<i>x</i>	<i>t</i>	<i>x</i>	<i>t</i>	<i>x</i>	<i>t</i>	<i>x</i>	<i>t</i>	<i>x</i>
1	1	16	1.86	31	0.56	46	3.96	61	-1.43	76	0.2
2	-0.5	17	3.55	32	1.02	47	0.14	62	-2.38	77	-0.08
3	-1.66	18	-0.55	33	1.61	48	-2.6	63	1.15	78	-1.2
4	-0.1	19	-4.07	34	-0.31	49	0.63	64	2.27	79	-1.88
5	-1.11	20	-1	35	-1.04	50	0.91	65	0.45	80	0.15
6	0.81	21	3.02	36	1.45	51	0.65	66	-1.21	81	-0.03
7	0.53	22	1.48	37	1.46	52	0.37	67	-1.11	82	0.01
8	0.21	23	-1.14	38	0.31	53	-0.09	68	-0.02	83	0.79
9	-0.58	24	-1.15	39	-1.59	54	0.81	69	1.22	84	-0.11
10	-2.6	25	0.28	40	0.15	55	1.27	70	1.84	85	-1.3
11	0.82	26	2.07	41	1.39	56	-1.72	71	0.04	86	1.37
12	4.48	27	0.95	42	0.69	57	-2.93	72	-0.28	87	0.23
13	0.22	28	0.19	43	-0.46	58	-0.72	73	-0.23	88	-1.02
14	-4.47	29	0.09	44	-1.34	59	2.42	74	0.31	89	-2.43
15	2.45	30	-1.16	45	-0.11	60	0.73	75	1.03	90	-0.04

Değerleri Çizelge 5.1’de verilen zaman serisi için gecikme sayısının belirlenmesi amacıyla öncelikle iki kısıtlı MaxEnt dağılımı  $(MaxEnt)_2$  elde edilmiş, daha sonra entropi konsantrasyon aralığı belirlenerek, üç kısıtlı MaxEnt dağılımı  $(MaxEnt)_3$ ’ün entropi değerinin bu aralığa dahil olup olmadığı araştırılmak üzere hesaplanan tüm değerler Çizelge 5.2’de verilmiştir.

**Çizelge 5.2.** Zaman serisi için iki ve üç gecikmeli MaxEnt dağılımları

MaxEnt Dağılımını Belirleyen Değerler	$(MaxEnt)_2$	$(MaxEnt)_3$
$ g_0^2 $	0.9751	0.9939
$a_1$	-0.3440	-0.2417
$a_2$	0.7445	0.6972
$a_3$	-	0.1374
$\lambda_0$	1.6309	1.5538
$\lambda_1$	-0.5852	-0.3125
$\lambda_2$	0.7259	0.6599
$\lambda_3$	-	0.1366
$ \Lambda $	0.1035	0.5759
$H_{\max}$	128.8383	127.9804

Çizelge 5.2'den yararlanarak Jaynes'in konsantrasyon teoremi yardımıyla kurulan entropi aralığı,  $\nu = 90 - 4 = 86$ ,  $\chi_{86}^2(0.95) = 108.6479$  olduğu için

$$128.8383 - \frac{108.6479}{2 \cdot 90} \leq H \leq 128.8383$$

$$128.8383 - 0.6035 \leq H \leq 128.8383,$$

$$128.2348 \leq H \leq 128.8383$$

şeklinde gerçekleşir.

Bölüm 4'de varılan sonuçtan farklı olarak bu veri seti üzerinde gerçekleştirilen otokovaryans kısıtı artırma işlemi sonucunda elde edilen maksimum entropi değerinin, Jaynes'in konsantrasyon teoremi yardımıyla kurulan aralığa dahil olmadığı görülmüştür. Böylece artırılan 3. dereceden otokovaryans kısıtının, serinin MaxEnt olasılık dağılımı üzerinde büyük bir sapmaya yol açtığı ve dolayısıyla da  $(MaxEnt)_3$ 'ün, söz konusu zaman serisi için MaxEnt olasılık

dağılımı olarak kabul edilmemesi gerektiği sonucuna varılır. Böylelikle  $AR(k)$  modelindeki  $k$  gecikme sayısının iki olarak seçilmesi önerilir.

## 5.2. Otoregresif Modelde Parametrelerin MaxEnt Yöntemi ile Tahmini

Bir zaman serisi analizi yaparken iki temel amaç söz konusudur. İlk olarak modelin parametreleri, (5.1)'deki  $\phi_i$ 'ler, tahmin edilerek zamana göre sıralanmış gözlemler dizisinin doğasını belirlemek amaçlanırken, ikinci olarak zaman serisinin gelecek değeri için tahmin, bir başka deyişle öngörü yapmak amaçlanır. Burada sözü edilen parametrelerin tahmini için, literatürde bilinen yöntemlerden farklı olarak MaxEnt dağılımı kurma sürecinde elde edilen  $a_i$ 'lerin,  $\phi_i$  parametreleri için birer tahmin oluşturabileceği önerilmiştir. Uygulama için  $X_t - 2.7607X_{t-1} + 3.8106X_{t-2} - 2.6535X_{t-3} + 0.9238X_{t-4} = \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$  şeklinde  $AR(4)$  modeli ile Matlab'ta türetilmiş 500 değerden oluşan zaman serisi üzerinde Ek-1'de kodları verilen Matlab programında MaxEnt dağılımı bulma süreci işletilerek elde edilen parametre tahminleri Çizelge 5.3'deki gibidir.

Çizelge 5.3. AR(4) modelinin parametreleri ve MaxEnt tahminleri

Model Parametreleri		MaxEnt Parametreleri	
$\phi_1$	-2.7607	$a_1$	-2.5231
$\phi_2$	3.8106	$a_2$	3.2642
$\phi_3$	-2.6535	$a_3$	-2.1246
$\phi_4$	0.9238	$a_4$	0.7178

Çizelge 5.3'den görüldüğü gibi model parametreleri ile MaxEnt yöntemi uygulanarak tahmin edilmiş parametreler birbirine oldukça yakın bulunmuştur.

## 6. GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ

Burada öncelikle Entropi Optimizasyon probleminin (EOP) formülasyonu, daha sonra da ele alınan istatistiksel veriyi en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunması problemi olan Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon probleminin (GEOP) formülasyonu verilecektir. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemi denildiğinde ise istatistiksel veriyi GEOP'un çözümü şeklinde modellemeyi öneren yöntem anlaşılmaktadır.

**EOP:**  $X$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f^{(0)}(x)$ ,  $L$  entropi optimizasyon ölçümü,  $g$  ise  $m$  sayıda moment kısıtı üreten bir moment vektör fonksiyonu olsun. EOP, verilen  $g$  moment fonksiyonuna uygun olan ve  $L$ 'ye ekstremum değer veren dağılımın bulunması problemidir.

**GEOP:**  $X$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f^{(0)}(x)$ ,  $L$  entropi optimizasyon ölçümü,  $K$  ise verilen moment vektör fonksiyonlar kümesi olsun. Verilen  $K$  kümesinden öyle  $g^{(1)}, g^{(2)} \in K$ , moment vektör fonksiyonlarının bulunması gerekir ki  $g^{(1)}$ 'in belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu  $f^{(1)}(x)$ , verilmiş  $f^{(0)}(x)$  yoğunluk fonksiyonuna  $L$  ölçümüne göre en yakın,  $g^{(2)}$ 'in belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu  $f^{(2)}(x)$ , verilmiş  $f^{(0)}(x)$  yoğunluk fonksiyonuna  $L$  ölçümüne göre en uzak olsun (Shamilov, 2006).

### 6.1. Entropi Optimizasyon Ölçümüne Dayalı Özel Dağılımlar

Verilen  $L$  entropi optimizasyon ölçümünü

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (6.1)$$

kısıtları altında optimize etme problemi ele alınsın. Burada,  $\mu_0 = 1$ ,  $g_0(x) = 1$  ve  $1, g_1(x), \dots, g_m(x)$  lineer bağımsız moment fonksiyonlarıdır.

Bu bölümde  $L$  olarak, Shannon ölçümü veya Kullback-Leibler ölçümü kullanılacaktır. Benzer formülasyon kesikli rassal değişkenler için de verilebilir. Bu durumda,  $L$  bir fonksiyon olarak, (6.1) kısıtları da toplam şeklinde verilir.

$f^{(0)}(x)$  yoğunluk fonksiyonu ve  $K$  moment vektör fonksiyonlar kümesinden keyfi  $g(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  seçildiğinde, bu moment vektör fonksiyonuna uygun olarak  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  değerleri elde edilir ve  $L$ 'ye optimum değer veren bir  $f(x)$  entropi optimizasyon dağılımı bulunur. Sonuç olarak, seçilen her keyfi  $g(x)$  vektör fonksiyonuna karşılık  $L$ 'nin bir optimum değeri elde edilmiş olur. Böylece,  $L$ 'nin optimum değeri  $g(x)$  vektör fonksiyonlarına veya uygun  $f(x)$  yoğunluk fonksiyonlarına bağlı bir entropi optimizasyon fonksiyoneli olarak dikkate alınabilir. Bu nedenle de söz konusu fonksiyonel duruma bağlı olarak  $U(g)$  ya da  $U(f)$  ile gösterilecektir.

$C_{[a,b]}$ ,  $[a, b]$  aralığında tanımlanmış,  $\|g\|_C = \max_{[a,b]} \|g(x)\|$  metriğine sahip sürekli vektör fonksiyonlar uzayı olsun. Burada  $\|\cdot\|$  Euclide uzaklığıdır.

Eğer  $g \in C_{[a,b]}$  ise  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  vektörü  $\|\cdot\|_C$  normuna göre  $g(x)$ 'e sürekli bağlıdır. Başka bir ifadeyle,  $g(x)$ 'in  $\|\cdot\|_C$  normunda küçük değişimine,  $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$  vektörünün  $\|\cdot\|$  Euclide uzaklığına göre küçük değişimi karşılık gelir.

Eğer  $U(g)$ , sürekli moment vektör fonksiyonların kompakt  $K$  kümesinde ( $K \in C_{[a,b]}$ ) sürekli ise, bu küme üzerinde en büyük ve en küçük değerlerini alır.  $U$  fonksiyoneline en küçük değer veren  $g^{(1)}$  ve en büyük değer veren  $g^{(2)}$  moment vektör fonksiyonları, özel dağılımların tanımlanmasını sağlamaktadır.

$$\min_{g \in K} U(g) = U(g^{(1)}); \quad \max_{g \in K} U(g) = U(g^{(2)}) \quad (6.2)$$



olarak gösterilsin. Böylece  $\mathbf{g}^{(1)}$  ve  $\mathbf{g}^{(2)}$  moment vektör fonksiyonları,  $L$  ölçümünü optimize eden  $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$  özel olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tanımlar.

$L$  Shannon Entropi ölçümü olarak ele alındığında, bir başka deyişle

$$L = H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (\text{veya } H = \sum_i p_i \ln p_i)$$

olduğunda bu dağılımların entropileri arasında aşağıdaki eşitsizlikler geçerli olur:

$$H(f^{(0)}) \leq U(f^{(1)}) \leq U(f^{(2)}). \quad (6.3)$$

Aslında burada  $U(\mathbf{g}), \mathbf{g}(x)$  moment vektör fonksiyonu ile üretilen moment koşulları altında, entropi fonksiyoneli  $H$ 'in maksimum değeridir. Başka bir ifadeyle  $H_{\max}$ 'dir. Bu nedenle de  $f^{(1)}(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma MinMaxEnt dağılımı,  $f^{(2)}(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma ise MaxMaxEnt dağılımı denir (Shamilov, 2007). Lagrange çarpanları yöntemiyle  $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$  yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$f^{(1)}(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j^{(1)} g_j(x)}, \quad (6.4)$$

$$f^{(2)}(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j^{(2)} g_j(x)}. \quad (6.5)$$

$L$  Kulback-Leibler ölçümü olarak ele alındığında, bir başka deyişle

$$L = D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx \quad (\text{veya } D = \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{q_i}),$$

olduğunda,

$$D(f^{(0)} : q) \geq U(f^{(2)} : q) \geq U(f^{(1)} : q), \quad (6.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$f^{(1)}(x) = q(x) e^{-\sum_{j=0}^m \tilde{\lambda}_j^{(1)} g_j(x)}; \quad f^{(2)}(x) = q(x) e^{-\sum_{j=0}^m \tilde{\lambda}_j^{(2)} g_j(x)}. \quad (6.7)$$

Bu durumda  $U(\mathbf{g}), \mathbf{g}(x)$  moment vektör fonksiyonu ile üretilen moment koşulları altında,  $D$  fonksiyonelinin minimum değeridir, bir başka deyişle

$D_{\min}$ 'dir. Bu nedenle de  $f^{(1)}(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma MinMinxEnt dağılımı,  $f^{(2)}(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma ise MaxMinxEnt dağılımı denir (Shamilov, 2007).

**Not 1:** (3) eşitsizliğinden görüldüğü gibi MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları entropi optimizasyon ölçümü

$$L = H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx$$

Shannon entropi ölçümü olduğunda GEOP'nin çözümleridir. (6) eşitsizliğinden görüldüğü gibi MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımları entropi optimizasyon ölçümü

$$L = D(f : q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx$$

Kullback-Leibler ölçümü olduğunda GEOP'nin çözümleridir.

**Not 2:** MinMaxEnt , MaxMaxEnt ve MinMinxEnt , MaxMinxEnt dağılımlarının tanımları  $U(\mathbf{g})$  entropi optimizasyon fonksiyonelinin  $K$  kompakt moment vektör fonksiyonlar kümesinde aldığı en büyük ve en küçük değerlerle ilişkilidir. Bu nedenle de  $U(\mathbf{g})$ 'nin ekstremum değerlerinin bulunabildiği durumların ele alınması önem taşımaktadır. Öncelikle  $U$  fonksiyonelinin bazı özellikleri ele alınacaktır.

## 6.2. Shannon Entropi Ölçümüne Uygun Entropi Optimizasyon Fonksiyoneli

$L$  ölçümü,  $H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx$  Shannon entropi ölçümü olarak ele

alındığında,  $H$  fonksiyonelinin (6.1) kısıtları altında maksimum değeri,

$$f(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)}, \quad (6.8)$$

olduğunda gerçekleşir. Burada  $\lambda_0 = \ln \int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx$ , ve  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  Lagrange

çarpanları olup

$$f_k(\lambda) = \int_a^b e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} g_k(x) dx - \mu_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6.9)$$

sisteminin bir çözümü olarak elde edilebilir. Bu sistemin  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  çözümü

$\mathbf{g}(x) = (1, g_1(x), \dots, g_m(x))$  moment vektör fonksiyonuna ve  $\boldsymbol{\mu} = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$

moment değerlerine bağlıdır. Bir başka deyişle,

$$\lambda = \lambda(\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}) \quad (6.10)$$

olarak yazılabilir. Böylece,  $f$ , (6.8) formülü ile,  $\lambda$  ise (6.10) ile ifade edildiğinde,

$$H_{\max} = H(f), \quad (6.11)$$

olur.

$f$ 'in ifadesi (6.11)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} H_{\max} = H(f) &= -\int_a^b e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \ln \left( e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \right) dx \\ &= -\int_a^b e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \left( -\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x) \right) dx = \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \end{aligned}$$

ya da

$$H_{\max} = \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j, \quad (6.12)$$

olur. Burada  $\lambda_0 = \ln \int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx$  ve  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  ise (6.9)'un (6.10) şeklinde

ifade edilmiş çözümüdür. Sonuç olarak,

$$U(\mathbf{g}) = H_{\max}(\mathbf{g}) = \sum_{j=0}^m \lambda_j(\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}) \mu_j \quad (6.13)$$

şeklinde yazılabilir (Shamilov, 2009).

### 6.3. Kullback-Leibler Ölçümüne Uygun Entropi Optimizasyon Fonksiyoneli

$L$  ölçümü,  $D(f; q) = \int_a^b f(x) \ln \frac{f(x)}{q(x)} dx$  Kullback-Leibler ölçümü olarak

ele alındığında  $D(f; q)$ 'nin (6.1) kısıtları altında minimum değeri,

$$f(x) = q(x) e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \quad (6.14)$$

olduğunda gerçekleşir.

Burada  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  Lagrange çarpanları

$$f_k(\lambda) = \int_a^b q(x) e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} g_k(x) dx - \mu_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6.15)$$

denklemler sisteminin çözümüdür ve  $\lambda_0 = \ln \int_a^b q(x) e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx$ .

(6.15) sisteminin çözümü  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

$$\lambda = \lambda(\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}) \quad (6.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,  $\mathbf{g}(x) = (g_1, \dots, g_m)$ 'dir.

Böylece  $f$ , (6.14) formülü ile,  $\lambda$  ise (6.16) ile ifade edildiğinde,

$$D_{\min} = D(f; q) \quad (6.17)$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} D_{\min} &= D(f; q) = \int_a^b q(x) e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \ln e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} dx \\ &= \int_a^b q(x) e^{-\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \left( -\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x) \right) dx \\ D_{\min} &= D(f; q) = -\sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j, \end{aligned} \quad (6.18)$$

Burada  $\lambda_0 = \ln \int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx$  ve  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  ise (6.15)'in (6.16) şeklinde ifade

edilmiş çözümdür. Sonuç olarak,

$$U(\mathbf{g}) = D_{\min} = -\sum_{j=0}^m \lambda_j(\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}) \mu_j. \quad (6.19)$$

şeklinde yazılabilir (Shamilov, 2007).

**Not 3:** (6.13) ve (6.19) formüllerinden görüldüğü gibi  $U$  entropi fonksiyoneli her iki durumda da  $(\lambda_1(\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}), \dots, \lambda_m(\mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}))$  Lagrange çarpanları ve  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  moment değerlerine bağlıdır.  $U(\mathbf{g})$  fonksiyonelinin  $K$  kompakt moment vektör fonksiyonlar kümesinde ekstremum değerlerinin bulunması oldukça zor bir problemdir ve nadir hallerde direkt olarak çözülebilir. Bu nedenle de  $U(\mathbf{g})$ 'nin ekstremum değerlerinin elde edilebildiği özel durumların ayırt edilmesi önemlidir. Şimdi söz konusu durumların bazıları ele alınacaktır.

#### 6.4. Sonlu sayıda moment kısıtları ile GEOP

Lineer bağımsız  $1, g_1(x), \dots, g_r(x)$  moment fonksiyonları ile bu fonksiyonlar ve istatistiksel veri ile elde edilen  $1, \mu_1, \dots, \mu_r$  moment değerleri verilmiş olsun.  $K = \{g_1(x), \dots, g_r(x)\}$  verildiğinde,  $K^{(r,m)}$ ,  $K$ 'dan alınan  $r$  sayıda elemanların tüm  $m$ 'li kombinasyonlarından oluşan kümeyi gösterebilir.  $K^{(r,m)}$ 'den alınan her bir kombinasyon, verilmiş istatistiksel veri ve (6.1)'e uygun olarak  $L$  fonksiyoneli için moment koşulunu belirler. Kombinasyonlar sayısı ve  $L$ 'nin bu kombinasyonlara uygun değerlerinin sayısı sonlu olduğu için,  $L$ 'nin bu değerleri arasından en büyüğü ve en küçüğü vardır ve bulunabilir. Sözü edilen bu değerler,  $L = H$  veya  $L = D(f; q)$  olduğunda sırasıyla MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MinMinxEnt, MaxMinxEnt dağılımlarının bulunmasına imkan verir.

$K^{(r,m)}$  kümesinin elemanları sayısı  $C_r^m = l$ 'dir. Bu nedenle de  $l$  sayıda moment kısıtları altında  $U(g)$ 'nin en büyük ve en küçük değerleri elde edilebilir. Böylece,

$$\min_{1 \leq j \leq l} U(g_j) = U(g^{(1)}), \max_{1 \leq j \leq l} U(g_j) = U(g^{(2)}) \quad \text{olmak üzere } g^{(1)} \text{ MinMaxEnt}$$

dağılımını  $g^{(2)}$  ise MaxMaxEnt dağılımını tanımlar.

$L = D(f; q)$  olarak alındığında, (6.19) yardımıyla da MinMinxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarını elde etmek mümkündür. (6.19)'a göre,

$$\min_{1 \leq j \leq l} U(g_j) = U(\tilde{g}^{(1)}), \max_{1 \leq j \leq l} U(g_j) = U(\tilde{g}^{(2)}) \quad \text{olmak üzere } \tilde{g}^{(1)} \text{ MinMinxEnt}$$

dağılımını,  $\tilde{g}^{(2)}$  MaxMinxEnt dağılımını tanımlar (Shamilov, 2008a).

## 6.5. Parametreye Bağlı Sonlu Sayıda Moment Kısıtları ile GEOP

Burada GEOP'un kısıtlarının parametreye bağlı olduğu durum ele alınarak, söz konusu problemin uygulaması zaman serisinde kayıp verilerin tahmininde Bölüm 7'de ele alınacaktır.

$$\int_a^b f(x) g_j(x, \nu) dx = \mu_j(\nu), \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (6.20)$$

şeklinde kısıtlar verilmiş olsun. Burada  $g_0(x) \equiv 1$ ,  $\mu_0 = 1$ ,  $\nu$ , sayısal veya vektörel parametre,  $f(x)$  ise EO ölçümü  $L$ 'ye (6.20) kısıtları altında ekstremum değer veren ve bulunması gereken olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$L = H = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx$$

Shannon entropi ölçümü olarak ele alındığında,

(6.13) ile tanımlanan  $U$  entropi optimizasyon fonksiyoneli  $\nu$  parametresine bağlı,

$$U(\nu) \equiv U(g) = - \sum_{j=0}^m \lambda_j(\mathbf{g}(x, \nu), \boldsymbol{\mu}(\nu)) \mu_j(\nu). \quad (6.21)$$

fonksiyonuna dönüşür. MaxMaxEnt ve MinMaxEnt dağılımları,  $\nu$  parametresinin  $G$  tanım bölgesinde  $U(\nu)$  fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerleri ile belirlenir.  $\lambda_j(\mathbf{g}(x, \nu), \boldsymbol{\mu}(\nu))$  Lagrange çarpanlarının  $\nu$ 'ye bağlı sürekliliği kapalı

fonksiyonların global varlık teoremi ile gösterilebilir.  $U(\nu)$ ,  $\nu$ 'ye bağlı sürekli fonksiyon olduğundan,

$$\min_{\nu \in G} U(\nu) = U(\nu^{(1)}), \quad \max_{\nu \in G} U(\nu) = U(\nu^{(2)}) \quad (6.22)$$

eşitliklerini sağlayan  $\nu^{(1)}$  ve  $\nu^{(2)}$  bulunabilir. Bu değerler (6.20)'de yerine yazılarak sırasıyla  $U(\nu)$ 'ye minimum değer veren  $f^{(1)}(x)$ ,  $U(\nu)$ 'ye maksimum değer veren  $f^{(2)}(x)$  fonksiyonları bulunabilir. Bu fonksiyonların belirlediği dağılımlar sırasıyla MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarıdır.

## 7. ZAMAN SERİLERİ İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPI OPTİMİZASYON DAĞILIMLARI

Bölüm 3’de gösterildiği gibi bir zaman serisi, MaxEnt yöntemi ile çok boyutlu normal dağılım şeklinde modellenebilir. Bu modelden yararlanarak Bölüm 6’da ayrıntılarıyla ele alınan Genelleştirilmiş Entropi optimizasyon Dağılımlarının bir zaman serisi için kurulabilmesinde öncelikle çok boyutlu normal dağılımın MaxEnt Dağılımı şeklinde elde edilmesi ve bu dağılımın entropi fonksiyonunun ortaya konması gerekmektedir. Bu amaçla sözü edilen konulara değinilecektir.

### 7.1. Çok Boyutlu Normal Dağılımın MaxEnt Dağılımı Şeklinde Bulunması

Daha önce ele alındığı gibi  $n$  boyutlu normal dağılımın yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (7.1)$$

şeklindedir. Burada  $|\Sigma|$  ile  $\Sigma$  varyans kovaryans matrisinin determinanı gösterilmiştir. Ortalama, varyans ve kovaryanslar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(x_i) = \mu_i, \quad (7.2)$$

$$E[(x_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2, \quad (7.3)$$

$$E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (7.4)$$

Burada,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere aşağıdaki teorem geçerlidir.



**Teorem 7.1.**

$$H(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ln f(x) dx$$

fonksiyoneline

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1 \quad (7.5)$$

doğal kısıtı ve (7.4) kısıtları altında maksimum değer veren dağılım (7.1) formülü ile verilen  $n$  boyutlu normal dağılımdır.

**İspat:** (7.1) fonksiyoneline (7.4) ve (7.5) kısıtları altında maksimum değer veren  $f(x)$  fonksiyonunu bulunması bir optimizasyon problemidir ve Lagrange çarpanları yöntemi ile bulunabilir. Bu amaçla,

$$G \equiv - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ln f(x) dx - \lambda_0 \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx - 1 \right) - \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) f(x) dx - \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)$$

yardımcı fonksiyoneli için Ostrogradsky Euler Denklemi yazılır:

$$-\ln f(x) - f(x) \frac{1}{f(x)} - \lambda_0 - \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) = 0.$$

Buradan,

$$f(x) = e^{-1 - \lambda_0 - \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)}$$

veya

$$e^{-1 - \lambda_0} = B, \quad \Lambda = [\lambda_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

olduğunda,

$$f(x) = B e^{-(x-\mu)^T \Lambda (x-\mu)} \quad (7.6)$$

formülüne ulaşılır. Burada,  $B$  sabiti ve  $\Lambda$  matrisinin elemanları bilinmeyenlerdir. Bu bilinmeyenler (7.6) formülünün (7.4) ve (7.5) kısıtlarında dikkate alınmasıyla bulunabilir. Bu amaçla (7.6)'yı (7.5) ve (7.4) kısıtlarında yerine yazmakla,

$$\int_{\mathbb{R}^n} B e^{-(x-\mu)^T \Lambda (x-\mu)} dx = 1 \quad (7.7)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) B e^{-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} d\mathbf{x} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (7.8)$$

elde edilir. Karakteristik fonksiyonların açılımından bu sistemi sağlayacak dağılımın (7.1) yoğunluk fonksiyonu formuna sahip olduğu ortaya çıkar. Bu nedenle  $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 'in (7.8) sistemi için bir çözüm olduğu sonucuna varılır (Shamilov, 2008b). Bir başka deyişle varyans-kovaryans matrisinin tersi bu sistemin bir çözümüdür ve bu sistemin tek bir çözüme sahip olduğu bilindiğinden teorem ispatlanmış olur.

## 7.2. Çok Boyutlu Normal Dağılımın Maksimum Entropi Değeri

Yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}} \quad (7.9)$$

olan  $n$  boyutlu normal dağılım ele alınsın. Burada  $A$  pozitif tanımlanmış ( $n \times n$ ) matris,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ve  $A^{-1}$  varyans kovaryans matrisidir. Yukarıda gösterildi ki  $n$  boyutlu normal dağılım uygun kısıtlar verildiğinde MaxEnt dağılımı olarak elde edilebilir. Bir başka deyişle verilen (7.4) ve (7.5) kısıtlarını sağlayan sonsuz sayıda olasılık dağılımlarından,  $n$  boyutlu normal dağılımın maksimum entropi değerine sahip olduğu gösterilmiştir. Bu durumda (7.9) ile gösterilen  $n$  boyutlu normal dağılımın yoğunluk fonksiyonunun entropi değeri, maksimum entropi değeri olacaktır. Shannon entropi ölçümünden yola çıkarak (7.9)'un entropi değeri,

$$H(f) = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \ln f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \left( -\frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} + \ln \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \right) d\mathbf{x}$$

şeklinde hesaplanır ve buradan

$$H(f) = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \ln \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} d\mathbf{x} + \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} d\mathbf{x}$$

$$H(f) = -\ln \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} + \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} d\mathbf{x} \quad (7.10)$$

olur. (7.10)'da bulunan  $I_1 = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} d\mathbf{x}$  integralinde  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$

ortogonal dönüşümü yapıldığında,

$$I_1 = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Q}\mathbf{y})'\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y})} \frac{1}{2} (\mathbf{Q}\mathbf{y})'\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y}) |\det \mathbf{Q}| dy$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y}} \frac{1}{2} \mathbf{y}'\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} dy$$

sonucuna varılır.

$$\text{Burada } \mathbf{Q} \text{ ortogonal matrisi öyle seçilebilir ki } \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eşitliği sağlansın. Burada  $\lambda_i$ 'ler,  $\det|\mathbf{A} - \lambda E| = 0$  denkleminin kökleridir, bir başka deyişle  $\mathbf{A}$  matrisinin özdeğerleridir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 dy_1 \dots dy_n \\ &= \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2} \frac{1}{2} \lambda_i y_i^2 dy_1 \dots dy_n \\ &= \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} \frac{1}{2} \lambda_i y_i^2 dy_i \right) \prod_{k \neq i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2} dy_k \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} \frac{1}{2} \lambda_i y_i^2 dy_i &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y_i de^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} \\ &= -\frac{1}{2} y_i e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i \end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$I_1 = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i \right) \prod_{k \neq i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2} dy_k$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2} dy_k$$

eşitliği elde edilir.  $I_1$  'de yer alan  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2} dy_k$  integralinde  $\sqrt{\lambda_k} y_k = z_k$  dönüşümü

yapıldığında,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_k y_k^2} dy_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z_k^2} \frac{dz_k}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{2\pi}$$

olur ve böylece,

$$I_1 = \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}}$$

eşitliğine ulaşılır.  $\sqrt{|\mathbf{A}|} = \sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}$  olduğu bilindiğinden

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$I_1 = \frac{n}{2}$$

sonucuna varılır.

$I_1$  'in değeri (7.10)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} H(f) &= -\ln \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} + \frac{n}{2} = -\ln \frac{\sqrt{|\mathbf{A}|}}{(2\pi)^{n/2}} + \ln e^{n/2} \\ &= \ln \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|\mathbf{A}|}} + \ln e^{n/2} = \ln \frac{(2\pi e)^{n/2}}{\sqrt{|\mathbf{A}|}} \end{aligned}$$

$$H(f) = \ln \frac{(2\pi e)^{\frac{n}{2}}}{|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}} \quad (7.11)$$

şeklinde,  $n$  boyutlu normal dağılımın maksimum entropi değeri elde edilmiş olur.

### 7.3. Zaman Serileri için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Dağılımları

Bölüm 3’de gösterildiği gibi  $T + 1$  sayıda gözlem değerine sahip bir zaman serisinin MaxEnt Dağılımı,

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{T+1}{2}} |\Lambda^{-1}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \Lambda \mathbf{y}\right) \quad (7.12)$$

şeklinde sıfır ortalamalı ve  $\Lambda^{-1}$  kovaryans matrisli bir çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Bu nedenle de MaxMaxEnt ve MinMaxEnt dağılımlarının tanımlanmasında önem taşıyan  $U$  entropi optimizasyon fonksiyonelinin değeri çok boyutlu normal dağılımın entropi değeri olan (7.11) formülüne göre,

$$U = H_{\max} = H(p(\mathbf{y})) = \ln \frac{(2\pi e)^{\frac{T+1}{2}}}{|\Lambda|^{\frac{1}{2}}}, \quad (7.13)$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

Bölüm 3’de oluşturulan MaxEnt Dağılımı kurma sürecinde Lagrange çarpanları ve kovaryans matrisinin determinanı için analitik formüllerden görüldüğü gibi  $\lambda_k$ ’lar ile  $|\Lambda|$ ’nın  $\hat{r}_0, \hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m$  otokovaryanslarının bir fonksiyonudur.  $\hat{r}_0, \hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m$  otokovaryanslarının  $y_0, y_1, \dots, y_T$  zaman serisi gözlem değerlerine bağlı olması nedeniyle de, (7.13) ile elde edilen  $U$  entropi optimizasyon fonksiyonu da  $y_0, y_1, \dots, y_T$ ’nin bir fonksiyonu olur. Bu fonksiyon,  $y_0, y_1, \dots, y_T$  gözlem değerlerinden bir ya da birkaçının bilinmediği ve tahmin edilmek istendiği durumlarda, bu değerlerin bilinmeyen parametre olarak dikkate alınmasıyla yeni dağılımlar tanımlamaya imkan verir. Bu amaç doğrultusunda  $y_0, y_1, \dots, y_T$  zaman serisi gözlem değerlerinden biri, bilinmeyen  $\gamma$  parametresi olarak alındığında, entropi optimizasyon fonksiyonu  $\gamma$ ’nın bir fonksiyonu olur ve  $U(\gamma)$  ile gösterilir. Burada, bilinmeyen  $\gamma$  parametresi zaman serisinin alabileceği en küçük  $\alpha$  ve en büyük  $\beta$  değerleri arasında değişmektedir. Bu değerlerin bilinmediği durumda  $\alpha = \min(y_0, y_1, \dots, y_T)$  ve  $\beta = \max(y_0, y_1, \dots, y_T)$  şeklinde tanımlanabilir.  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  iken  $U(\gamma), \gamma$ ’ya göre sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda

$$\min_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = U(\gamma_0). \quad (7.14)$$

$$\max_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = U(\gamma_1) \quad (7.15)$$

olsun.

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda  $y_0, y_1, \dots, y_T$  gözlem değerlerinden birinin  $\gamma(y_j = \gamma)$  bilinmeyen parametre olarak alınmasıyla, otokovaryans kısıtları altında (7.12) formülü ile elde edilen MaxEnt olasılık yoğunluk fonksiyonu da  $\gamma$ 'nın bir fonksiyonu olarak yazılabilir ve  $p(\gamma)$  ile gösterilir. MaxEnt olasılık yoğunluk fonksiyonu ile aynı kısıtları sağlayan herhangi bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ise  $p_0(\gamma)$  ya da  $p_0(y)$  ile gösterildiğinde aşağıdaki özel dağılımlar tanımlanabilir.

**Tanım 1:**  $U(\gamma)$ 'nin minimum değer aldığı nokta  $\gamma_0$  iken,  $p(\gamma_0)$  dağılımı MinMaxEnt dağılımı olarak adlandırılacaktır.  $U(\gamma)$ 'nin maksimum değer aldığı nokta  $\gamma_1$  iken,  $p(\gamma_1)$  dağılımı, MaxMaxEnt dağılımı olarak adlandırılacaktır.

Böylece verilen zaman serisinde kayıp değer olması halinde  $\mathbf{R}_m^{-1}$  kovaryans matrisinin bilinmeyen kayıp değer  $\gamma$ 'ya bağlı olması nedeniyle, daha önce ayrıntıları ile ele alınan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt GEO dağılımları, (7.12) formu ve dolayısıyla (7.13) şeklinde elde edilen maksimum entropi değeri de  $\gamma$ 'ya bağlı ortaya çıkar. Böylece  $\gamma$ 'ya bağlı (7.13) fonksiyonunu maksimize eden  $\gamma_1$ 'in (7.12)'de yerine yazılmasıyla MaxMaxEnt, (7.13) fonksiyonunu minimize eden  $\gamma_0$ 'ın (7.12)'de yerine yazılmasıyla da MinMaxEnt Dağılımları elde edilmiş olur.

Tanımlanan bu dağılımlar,  $y_0, y_1, \dots, y_T$  zaman serisinin bilinmeyen teriminin tahmin edilmesine ve öngörü (forecast) yapılmasına imkan tanır. Bu amaç doğrultusunda MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxEnt dağılımlarının entropi değerleri arasında eşitsizlikler şeklinde ifade edilmiş bağıntılar teoremler şeklinde verilecektir.

## 8. ZAMAN SERİSİ HAKKINDA İNFORMASYON BAĞINTILARI

Yukarıda ifade edildiği gibi bir zaman serisi verildiğinde, bir gerçekleşmesi bu zaman serisi olan bir stokastik sürecin MaxEnt dağılımı, boyutu zaman serisinin gözlem değerleri sayısına eşit olan çok boyutlu normal dağılımdır. Bu dağılımın yoğunluk fonksiyonundan yola çıkarak elde edilen entropi değeri, genelleştirilmiş entropi optimizasyon dağılımlarının kurulmasına imkan sağlamıştır. Söz konusu GEO dağılımları MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları olarak, farklı entropi değerlerine sahip olduklarından bu değerler ve MaxEnt dağılımının entropi değeri yardımı ile gözlenen zaman serisine uygun entropi değerleri arasında çeşitli eşitsizlikler şeklinde ifade edilen bağıntılar kurulabilir. Bu tür bağıntılar aracılığı ile de zaman serisi hakkında bilgi bağıntıları oluşturulabilir. Sözü edilen bağıntılar aşağıdaki bölümlerde ele alınacaktır. Entropi değerleri arasındaki bağıntılar Teorem 8.1, Teorem 8.2 ve Teorem 8.3 ile, bilgi bağıntısı ise Teorem 8.4 ile ifade edilmiştir.

### 8.1. MaxEnt, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Dağılımlarının Entropi Değerleri Arasındaki Bağıntılar

**Teorem 8.1.**  $y_0, y_1, \dots, y_T$ ,  $\gamma = y_k$ ;  $0 \leq k \leq T$  kayıp (bilinmeyen) değere sahip reel değerli durağan bir zaman serisi olsun.  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ ,  $\alpha = \min_{0 \leq k \leq T} y_k$ ;  $\beta = \max_{0 \leq k \leq T} y_k$  iken  $U(\gamma)$  entropi optimization fonksiyonu (7.13) eşitliği ile ifade edilir ve burada  $|\Lambda|$ , (3.38) eşitliği ile elde edilen  $\lambda_k$ 'lar yardımıyla (3.41) aracılığıyla  $\gamma$ 'ya bağlı elde edilir. Bununla birlikte  $p(\gamma_0)$  ve  $p(\gamma_1)$  sırasıyla MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarıdır ve

$$\min_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = U(\gamma_0); \max_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = U(\gamma_1) \quad (8.1)$$

iken

$$p(\gamma_0) = p(\gamma) \Big|_{\gamma=\gamma_0}; p(\gamma_1) = p(\gamma) \Big|_{\gamma=\gamma_1} \quad (8.2)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda MinMaxEnt-  $p(\gamma_0)$ , MaxEnt-  $p(\gamma)$  ve MaxMaxEnt-  $p(\gamma_1)$  dağılımlarının entropileri arasında

$$H(p(\gamma_0)) \leq H(p(\gamma)) \leq H(p(\gamma_1)). \quad (8.3)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

**İspat:** (3.38) ve (3.41) eşitliklerinden sırasıyla elde edilen  $\lambda_k$  ve  $|\Lambda|$ , kayıp değer  $y_k = \gamma$  bilinmeyen parametreye bağlı oldukları için, (7.12) formülü ile tanımlanan  $p(y)$  ve (7.13) formülü ile tanımlanan  $U(\gamma)$ ,  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  aralığı üzerinde  $\gamma$ 'nın sürekli fonksiyonlarıdır. Bu nedenle  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olan  $U(\gamma)$  en büyük ve en küçük değerlerini alır. Böylece (8.1) eşitliklerini sağlayan  $\gamma_0$  ve  $\gamma_1$  elde edilebilir ve

$$U(\gamma_0) \leq U(\gamma) \leq U(\gamma_1) \quad (8.4)$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu eşitsizliklerde  $U(\gamma)$ 'nın (7.13) ile ifade edilen tanımı dikkate alınır, (8.3) eşitsizliği (8.4)'ün sonucu olarak alınabilir ve teorem ispatlanmış olur.

Aşağıdaki teorem ise, bir zaman serisinin gelecekteki değeri  $y_{T+1} = \gamma$  bilinmeyen parametre olarak ele alındığında, MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxEnt dağılımlarının entropileri arasında eşitsizlikler şeklindeki bağlantıyı ifade eder. Bir bakıma Teorem 1'in modifeye edilmiş halidir.

**Teorem 8.2.**  $y_0, y_1, \dots, y_T$  reel değerli durağan bir zaman serisi verilsin ve  $y_{T+1}$  öngörü değeri bilinmeyen  $\gamma$  parametresi olarak gösterilsin.  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ ,  $\alpha = \min_{0 \leq k \leq T} y_k$ ;  $\beta = \max_{0 \leq k \leq T} y_k$  ve  $p(y)$  (7.12) ile elde edilen  $y_0, y_1, \dots, y_T, y_{T+1} = \gamma$  zaman serisi için MaxEnt dağılımı olmak üzere, (3.41) formülü ile elde edilen  $|\Lambda|$ , (3.38) ile elde edilen  $\lambda_k$ 'nin bilinmeyen  $\gamma$  parametresine bağlı olması ile  $p(\tilde{\gamma}_0)$ ,  $p(\tilde{\gamma}_1)$  sırasıyla MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarıdır. Burada

$$\min_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = U(\tilde{\gamma}_0); \max_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = U(\tilde{\gamma}_1). \quad (8.5)$$



iken

$$p(\tilde{\gamma}_0) = p(y) \Big|_{\gamma=\tilde{\gamma}_0} ; p(\tilde{\gamma}_1) = p(y) \Big|_{\gamma=\tilde{\gamma}_1} \quad (8.6)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu durumda MinMaxEnt-  $p(\tilde{\gamma}_0)$ , MaxEnt-  $p(\gamma)$  ve MaxMaxEnt-  $p(\tilde{\gamma}_1)$  dağılımlarının entropileri arasında aşağıdaki eşitsizlik geçerli olacaktır:

$$H(p(\tilde{\gamma}_0)) \leq H(p(\gamma)) \leq H(p(\tilde{\gamma}_1)) . \quad (8.7)$$

Yukarıda tanımlanan MinMaxEnt dağılımı aşağıdaki teorem yardımıyla bir zaman serisi için öngörü yapmakta veya kayıp değer tahmininde yeni bir yaklaşım olarak kullanılabilceği daha sonra Bölüm 8’de uygulamaları ile birlikte gösterilecektir.

**Teorem 8.3.**  $y_0, y_1, \dots, y_T$  durağan bir zaman serisi,  $y_{T+1} = \gamma$  (veya  $y_k = \gamma$ ) bilinmeyen terimine sahip olmak üzere  $y = [y_0, y_1, \dots, y_T, \gamma]$  (veya  $y = [y_0, \dots, \gamma, \dots, y_T]$ ) şeklinde ele alınsın.  $p(y)$  ya da  $p(\gamma)$ , bilinmeyen  $\gamma$  parametresine bağlı MaxEnt dağılımıdır ve burada  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ ,  $\alpha = \min_i y_i$ ,  $\beta = \max_i y_i$ ’dir.  $U(\gamma)$  entropi optimizasyon fonksiyonu  $U(\gamma) = H(p(\gamma))$  iken  $\gamma_0$  ve  $\gamma_1$ ,

$$\max_{\gamma \in [\alpha, \beta]} H(p(\gamma)) = \max_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = H(p(\gamma_1)) = U(\gamma_1),$$

$$\min_{\gamma \in [\alpha, \beta]} H(p(\gamma)) = \min_{\gamma \in [\alpha, \beta]} U(\gamma) = H(p(\gamma_0)) = U(\gamma_0),$$

eşitliklerden elde edilmek üzere  $p(\gamma_1)$  MaxMaxEnt ve  $p(\gamma_0)$  MinMaxEnt dağılımlarıdır. Bu durumda  $p(\gamma_0)$  MinMaxEnt dağılımını üreten  $\gamma_0$ , bilinmeyen  $\gamma$  değeri için bir tahmin oluşturur.

**İspat:**  $p_0(\gamma)$ ,  $y = [y_0, y_1, \dots, y_T, \gamma]$  (veya  $y = [y_0, \dots, \gamma, \dots, y_T]$ ) şeklinde verilen zaman serisinin olasılık dağılımı iken  $H(p_0(\gamma))$  entropisine sahip olsun. Daha sonra Bölüm 4’de ayrıntıları ile verilen Jaynes’in konsantrasyon teoremine göre,

$p(\gamma)$  MaxEnt dağılımının sağladığı kısıtları sağlayan herhangi bir olasılık dağılımı  $p_0(\gamma)$  iken, onun entropisi  $H(p_0(\gamma))$  %95 olasılıkla  $H(p(\gamma)) - \frac{\chi_v^2(0.95)}{2(T+1)}$ , den, %99 olasılıkla  $H(p(\gamma)) - \frac{\chi_v^2(0.99)}{2(T+1)}$ , den büyük olacaktır. Diğer bir deyişle  $N$ 'in büyük değerleri için verilen kısıtlar kümesini sağlayan olasılık dağılımlarının birçoğunun entropileri maksimum entropi değeri civarında toplanır:

$$H(p(\gamma)) - \frac{\chi_v^2(0.95)}{2(T+1)} \leq H(p_0(\gamma)) \leq H(p(\gamma)) \quad (8.8)$$

$$H(p(\gamma)) - \frac{\chi_v^2(0.99)}{2(T+1)} \leq H(p_0(\gamma)) \leq H(p(\gamma)). \quad (8.9)$$

Böylece (8.8), (8.9) eşitsizlikleri aracılığıyla  $H(p_0(\gamma))$  asimtotik olarak  $H(p(\gamma))$  gibi düşünülebilir. Bu durumda,  $y = [y_0, y_1, \dots, y_T, \gamma]$  (veya  $y = [y_0, \dots, \gamma, \dots, y_T]$ ) şeklinde gözlenen zaman serisi hakkında çözmemiz gereken belirsizlik ya da kazanmamız gereken bilgi miktarı;

$$\Delta H = H(p(\gamma_1)) - H(p(\gamma))$$

ya da

$$\Delta U = U(\gamma_1) - U(\gamma) \quad (8.10)$$

ile elde edilir. Teorem 8.1 (Teorem 8.2) dikkate alındığında  $U(\gamma_0) \leq U(\gamma) \leq U(\gamma_1)$  olduğu bilindiğinden, (8.10) eşitliğindeki  $\Delta U$ 'nun  $\gamma = \gamma_0$  olduğunda maksimum değerine ulaştığı söylenebilir. Sonuç olarak  $\gamma = \gamma_0$  alındığında MinMaxEnt dağılımı  $p(\gamma_0)$  elde edilmiş olur. Böylece gözlenen zaman serisi  $y = [y_0, y_1, \dots, y_T, \gamma]$ 'de (veya  $y = [y_0, \dots, \gamma, \dots, y_T]$ ) bilinmeyen parametre  $\gamma$  için, bir başka deyişle öngörü değeri veya kayıp değer için bir tahmin olarak MinMaxEnt dağılımını üreten  $\gamma_0$  değeri alınabilir. Teorem ispatlanmış olur.

## 8.2. MaxEnt Dağılımının Verdiği İnfomasyon Yardımı ile Zaman Serisi Hakkında İnfomasyonun Değerlendirilmesi

Jaynes'in Konsantrasyon teoremi yardımıyla, MaxEnt dağılımı ile aynı kısıtları sağlayan bir kayıp değerli zaman serisinin tüm dağılımlarının entropileri arasında

$$H_{\max}(\gamma) - \frac{\chi^2}{2(T+1)} \leq H(\gamma) \leq H_{\max}(\gamma) \quad (8.11)$$

şeklindeki bir eşitsizlikten söz edilebilir. Burada  $H(\gamma)$  verilmiş kısıtları sağlayan bilinmeyen  $\gamma$  parametresini içeren zaman serisinin herhangi bir olasılık dağılımının entropi değeri iken,  $H_{\max}(\gamma)$  ise aynı kısıtları sağlayan yine bilinmeyen  $\gamma$  parametresini içeren MaxEnt dağılımının entropi değeridir.  $y_0, y_1, \dots, y_T$  bir zaman serisini göstermek üzere,  $\gamma$  herhangi pozisyonadaki bir kayıp değeri göstermektedir ve  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ ,  $\min\{y_i\} = \alpha$ ,  $\max\{y_i\} = \beta$  'dır.

$\gamma$  bilinmeyen parametresinin iki değerine karşılık gelen infomasyon kazanımı için bir eşitsizlik elde etmek amacıyla,  $\gamma$ 'nın iki ayrı  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  değerine karşılık gelen MaxEnt olasılık dağılımlarının ve aynı kısıtları sağlayan olasılık dağılımlarının entropi değerleri arasındaki fark ele alınır. Bu nedenle  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  için (8.11) eşitsizliği yazılarak,

$$H_{\max}(\tau_1) - \frac{\chi^2}{2(T+1)} \leq H(\tau_1) \leq H_{\max}(\tau_1) \quad (8.12)$$

$$H_{\max}(\tau_2) - \frac{\chi^2}{2(T+1)} \leq H(\tau_2) \leq H_{\max}(\tau_2)$$

yada

$$H_{\max}(\tau_2) \geq H(\tau_2) \geq H_{\max}(\tau_2) - \frac{\chi^2}{2N} \quad (8.13)$$

elde edilir ve (8.12) ve (8.13) eşitsizlikleri taraf tarafa çıkarıldığında,

$$H_{\max}(\tau_1) - H_{\max}(\tau_2) - \frac{\chi^2}{2(T+1)} \leq H(\tau_1) - H(\tau_2) \leq H_{\max}(\tau_1) - H_{\max}(\tau_2) + \frac{\chi^2}{2(T+1)} \quad (8.14)$$

sonucuna varılır. Burada  $H_{\max}(\tau_1) - H_{\max}(\tau_2) = \Delta H_{\max} = I_1$  ve  $H(\tau_1) - H(\tau_2) = \Delta H = I_2$  şeklinde gösterimler kullanıldığında (8.14) eşitsizlikleri,

$$\Delta H_{\max} - \frac{\chi^2}{2(T+1)} \leq \Delta H \leq \Delta H_{\max} + \frac{\chi^2}{2(T+1)}$$

$$|\Delta H - \Delta H_{\max}| \leq \frac{\chi^2}{2(T+1)} \quad (8.15)$$

şekline dönüşmüş olur. Böylece bu bağıntı aşağıdaki teorem şeklinde ifade edilebilir.

**Teorem 8.4.**  $\Delta H_{\max} = I_1$ ,  $\{y_i\}$  gözlenmiş zaman serisindeki  $\gamma$  kayıp değerinin aldığı herhangi iki farklı değere uygun gelen MaxEnt dağılımı entropilerinin farkını bir başka deyişle MaxEnt dağılımının verdiği informasyonu, aynı şekilde  $\Delta H = I_2$  de MaxEnt dağılımı ile aynı kısıtları sağlayan herhangi olasılık dağılımının verdiği informasyonu ifade etmek üzere, onlar arasında,

$$|I_2 - I_1| \leq \frac{\chi^2}{2(T+1)} \quad (8.16)$$

bağıntısı var olmaktadır.

(8.16) eşitsizliği gösteriyor ki  $\frac{\chi^2}{2(T+1)}$  yeterince küçük ise,  $\{y_i\}$

gözlenmiş zaman serisinin MaxEnt dağılımının verdiği informasyon miktarı, aynı kısıtları sağlayan olasılık dağılımının verdiği informasyon miktarına oldukça yakın olacaktır.

## 9. MinMaxEnt YÖNTEMİNE DAYALI KAYIP VE GELECEK DEĞERLERİN TAHMİNİ

Bu bölümde Bölüm 8’de ispatlanmış Teorem 8.3 dikkate alınarak zaman serisinin kayıp ve gelecek değerleri için tahminleme problemi ele alınacak ve tahmin süreci MinMaxEnt dağılımına dayalı gerçekleştirilecektir.

### 9.1. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Kayıp (Ara) Değer Tahmini

Bu bölümde Bölüm 8’de ispatlanmış teoremlerin sağlandığını ve MinMaxEnt dağılımı kurma sürecinin kayıp değer için iyi bir tahminleme süreci olarak işletilebileceğini göstermek amacıyla bir uygulama yapılmıştır. Öncelikle  $y_0, y_1, \dots, y_T$ ,  $\gamma = y_k$ ;  $0 \leq k \leq T$  kayıp (bilinmeyen) değere sahip reel değerli durağan bir zaman serisi olduğunda,  $\gamma$  kayıp değerli bu zaman serisi için MinMaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\gamma_0))$  ve MaxMaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\gamma_1))$  hesaplanarak Teorem 8.1 yardımıyla herhangi  $\gamma$  değerine uygun MaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\gamma))$  için bir aralık belirlenir. Sözü edilen zaman serisi için hesaplanan MaxEnt dağılımının entropisinin bu aralığa girdiği gösterilebilir. Bu amaçla,

$$X_t - 2.7607X_{t-1} + 3.8106X_{t-2} - 2.6535X_{t-3} + 0.9238X_{t-4} = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

modelinden Matlab’da türetilen ve Çizelge 9.1.’de verilen 30 gözlem değerli bir zaman serisi ele alınmıştır.

**Çizelge 9.1.** AR(4) modelinden türetilen zaman serisi

t	$X_t$	t	$X_t$	t	$X_t$
<b>1</b>	-1.9172	<b>11</b>	-34.1657	<b>21</b>	-74.6286
<b>2</b>	8.8041	<b>12</b>	-56.8119	<b>22</b>	-28.4727
<b>3</b>	5.8994	<b>13</b>	-47.0279	<b>23</b>	31.9604
<b>4</b>	-4.9992	<b>14</b>	-6.0415	<b>24</b>	72.1508
<b>5</b>	-11.4250	<b>15</b>	43.5992	<b>25</b>	71.8607
<b>6</b>	-3.6937	<b>16</b>	72.2938	<b>26</b>	33.8458
<b>7</b>	16.4869	<b>17</b>	60.5811	<b>27</b>	-18.4783
<b>8</b>	33.3703	<b>18</b>	12.9017	<b>28</b>	-55.9572
<b>9</b>	30.1568	<b>19</b>	-44.9481	<b>29</b>	-60.8923
<b>10</b>	2.4457	<b>20</b>	-80.9485	<b>30</b>	-34.7771

Öncelikle  $x_6 = -3.6937$  değerinin kayıp olduğu varsayalım.  $\gamma$  ile gösterilen bilinmeyen bu değer, MaxEnt dağılımının kurulması durumunda  $H_{\max}$  fonksiyonunda bir parametre olarak yer alır. Bu fonksiyonun minimizasyonunu gerçekleştiren  $\gamma_0$ , Teorem 8.3'e göre bilinmeyen kayıp değer için bir tahmin teşkil edecektir. Matlab'ta yazılan Ek-2'de verilmiş bir program aracılığı ile MinMaxEnt dağılımını üreten bu değer  $\gamma_0 = \hat{x}_6 = -3.55$  olarak elde edilmiştir. Bununla birlikte MinMaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\gamma_0)) = 104.1340$ , MaxMaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\gamma_1)) = 140.5021$  olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla Teorem 8.1'e göre,

$$104.1340 \leq H(p(\gamma)) \leq 140.5021$$

aralığı belirlenmiş olur. Zaman serisinin MaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(x)) = 104.1346$ 'nın bu aralığa ait olduğu, dolayısıyla Teorem 8.1'in sağlandığı gösterilmiş olur. Ayrıca Teorem 8.3'e göre MinMaxEnt dağılımını belirleyen  $\gamma_0$  değerinin kayıp değer için bir tahmin oluşturduğu,  $\gamma_0 = -3.55$  değerinin  $-3.6937$  kayıp değerine oldukça yakın olması ile gösterilmiş olur.

## 9.2. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Kayıp Değer Tahmini için Simülasyon

Bu bölümde tek bir kayıp değer için yapılan MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminleme süreci, aynı veri seti üzerinde mümkün her bir değer için kayıp kabul edilmesiyle gerçekleştirilmiştir. Daha sonra tahmin edilmiş değerler ile gerçek değerler arasındaki farkların karelerinin ortalaması olan ortalama kare hata ( $MSE$ ) hesaplanarak, önerilen tahminleme sürecinin performansı değerlendirilmiştir. Uygulama olarak Çizelge 9.1'deki zaman serisi üzerinde iki gecikmeli  $(MinMaxEnt)_2$  ve üç gecikmeli  $(MinMaxEnt)_3$  dağılımlarına dayalı hesaplanan tahminler ve ( $MSE$ ) değeri Ek-3'deki program aracılığı ile Çizelge 9.2'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 9.2. İki ve üç gecikmeli MinMaxEnt kayıp değer tahminleri

$t$	$X(t)$	$(MinMaxEnt)_2$	$(MinMaxEnt)_3$
1	-1.9172	-	-
2	8.8041	-	-
3	5.8994	5.6387	-
4	-4.9992	-5.4169	-5.2914
5	-11.4250	-11.8323	-11.8093
6	-3.6937	-3.5559	-3.6118
7	16.4869	16.1702	16.1592
8	33.3703	32.9922	33.2251
9	30.1568	29.3102	29.5001
10	2.4457	2.5585	2.6745
11	-34.1657	-34.6224	-34.6565
12	-56.8119	-56.7917	-56.8670
13	-47.0279	-46.9790	-47.0769
14	-6.0415	-6.4423	-6.4176

**Çizelge 9.2. (Devam)** İki ve üç gecikmeli MinMaxEnt kayıp değer tahminleri

<b>t</b>	$X(t)$	$(MinMaxEnt)_2$	$(MinMaxEnt)_3$
<b>15</b>	43.5992	43.2731	43.4434
<b>16</b>	72.2938	71.6972	71.8809
<b>17</b>	60.5811	60.2642	60.3586
<b>18</b>	12.9017	12.8657	12.8027
<b>19</b>	-44.9481	-44.9732	-45.0940
<b>20</b>	-80.9485	-80.9485	-80.9485
<b>21</b>	-74.6286	-74.4715	-74.7012
<b>22</b>	-28.4727	-28.3051	-28.3925
<b>23</b>	31.9604	31.2631	31.3760
<b>24</b>	72.1508	71.8033	72.0291
<b>25</b>	71.8607	71.3803	71.5250
<b>26</b>	33.8458	33.5386	33.5998
<b>27</b>	-18.4783	-18.5549	-18.5836
<b>28</b>	-55.9572	-56.1478	-
<b>29</b>	-60.8923	-	-
<b>30</b>	-34.7771	-	-
	$(MSE)$	<b>0.1294</b>	<b>0.0861</b>

Çizelge 9.2’den görüldüğü gibi hem iki hem de üç gecikmeli MinMaxEnt tahminleme sonuçlarının  $(MSE)$  değerleri oldukça küçük çıkmıştır. Böylece önerilen sürecin performansının iyi olduğu sonucuna varılır. Bununla birlikte  $(MinMaxEnt)_3$  ile elde edilen tahminlerin  $(MSE)$  değeri,  $(MinMaxEnt)_2$  ile elde edilenden daha küçük olması nedeniyle, otokovaryans kısıt sayısının artması sonucu, tahminleme sürecinin performansının arttığı gözlenmiştir.

Tahminleme yönteminin performansı hakkında daha iyi bir bilgiye sahip olabilmek için tek bir zaman serisi için yapılan Çizelge 9.2’deki süreç, her biri 50 gözlem değerine sahip 100 zaman serisi için işletilerek bir simülasyon çalışması yapılmıştır.



Gerçekleştirilen simülasyon aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

1. Belirli bir zaman serisi modelinden 50 gözleme sahip veri seti türetilir.
2. Belirli  $m$  sayıda gecikmeli otokovaryans kısıtlı MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminler, veri setinin (ilk  $m$  ve son  $m$  sayıda değerleri hariç) tüm değerleri için yapılır.
3. Veri seti için ortalama kare hata hesaplanır.
4. Süreç 100 kez tekrarlanır.

Simülasyon çalışmasında

$$X_t - 2.7607X_{t-1} + 3.8106X_{t-2} - 2.6535X_{t-3} + 0.9238X_{t-4} = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

modelinden her biri 50 değere sahip 100 ayrı zaman serisi üretilerek, Ek-4'de verilen Matlab'ta yazılmış program aracılığıyla, iki gecikmeli otokovaryans kısıtlı MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminler yapılmış ve 100 veri seti için elde edilen MSE değerleri Çizelge 9.3'te verilmiştir.

**Çizelge 9.3.** Türetilen 100 zaman serisi için (MinMaxEnt)<sub>2</sub> tahminlerinin MSE değerleri

No	MSE	No	MSE	No	MSE	No	MSE
1	0.0699	26	0.0763	51	0.2270	76	0.1224
2	0.3352	27	0.1029	52	0.1176	77	0.1871
3	0.0906	28	0.1099	53	0.2740	78	0.0910
4	0.1815	29	0.3705	54	0.3734	79	0.1458
5	0.2406	30	0.1619	55	0.1158	80	0.0605
6	0.1940	31	0.0780	56	0.0735	81	0.1445
7	0.1394	32	0.5575	57	0.1205	82	0.0974
8	0.1156	33	0.1527	58	0.3967	83	0.1649
9	0.5051	34	0.1021	59	0.2581	84	0.1004
10	0.0865	35	0.1921	60	0.0951	85	0.0804
11	0.0775	36	0.0978	61	0.0692	86	0.3792
12	0.1982	37	0.5068	62	0.1343	87	0.1383
13	0.0743	38	0.1007	63	0.0883	88	0.4664

**Çizelge 9.3. (Devam)** Türetilen 100 zaman serisi için (MinMaxEnt)<sub>2</sub> tahminlerinin MSE değerleri

No	MSE	No	MSE	No	MSE	No	MSE
14	0.1398	39	0.0805	64	0.0998	89	0.1780
15	0.5759	40	0.0904	65	0.1356	90	0.1030
16	0.1246	41	0.0699	66	0.5838	91	0.1060
17	0.1907	42	0.1066	67	0.3519	92	0.1581
18	0.0688	43	0.1057	68	0.1029	93	0.0947
19	0.1121	44	0.1204	69	0.1418	94	0.1138
20	0.1085	45	0.2319	70	0.0707	95	0.1410
21	0.0699	46	0.2078	71	0.0925	96	0.1156
22	0.0872	47	0.2491	72	0.2429	97	0.1092
23	0.2822	48	0.1083	73	0.1568	98	0.0939
24	0.0793	49	0.1085	74	0.1428	99	0.1581
25	0.0452	50	0.1080	75	0.2707	100	0.0997

Çizelge 9.3'den görüldüğü gibi simülasyon çalışmasında 100 farklı zaman serisinden elde edilen MinMaxEnt dağılımı tahminleri için MSE değerleri oldukça küçük çıkmıştır. Böylece söz konusu tahminleme sürecinin performansının iyi olduğu gözlenmiştir.

### **9.3. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Kayıp Değer Pozisyonuna göre Simülasyon**

Bir önceki bölümde yapılan simülasyon çalışmasında her zaman serisinin mümkün tüm ara değerleri birer birer kayıp kabul edilerek MSE hesaplanmıştır. Kayıp değerli bir zaman serisinde kayıp değer tahmini için yapılan bazı çalışmalarda ise, kayıp değer bulunduğü pozisyon için tahminin ortalama kare hatasının değişimi incelenmiş, bir simülasyon çalışması yapılarak farklı pozisyonlardaki kayıp değerler için ayrı ayrı MSE'ler hesaplanmıştır (Chi Fung 2006).

Bu nedenle bu bölümde öncelikle  $X_t + 0.8X_{t-1} + 0.2X_{t-2} = \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, 0.5)$  şeklindeki  $AR(2)$  modeli ile  $X_t + 0.35X_{t-1} + 0.18X_{t-2} - 0.14X_{t-3} = \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, 1)$  şeklindeki  $AR(3)$  modelinden türetilen veriler üzerinde Ek-5'te verilen program aracılığı ile aşağıdaki adımlardan oluşan simülasyon çalışması yapılmıştır.

1. Belirli bir zaman serisi modelinden 50 değere sahip veri seti türetilir.
2. Veri setinden belirli bir pozisyondaki değer alınır ve karşılaştırma için saklanır.
3. Söz konusu pozisyondaki değer için belirli sayıda gecikmeli otokovaryans kısıtlı MinMaxEnt dağılımına dayalı tahmin yapılır.
4. Ortalama kare hata için, saklanan gerçek değer ile tahmin arasındaki sapma belirlenir.
5. Süreç 100 kez tekrarlanır ve sonunda söz konusu pozisyona ait MSE ile MAD (ortalama mutlak sapma) hesaplanır.
6. Kayıp değer pozisyonu  $N-m$ 'i aşmayana kadar değiştirilerek, sürece devam edilir.

**Çizelge 9.4.** Belirli pozisyonlar için 100 zaman serisi üzerinde elde edilen MSE ve MAD değerleri

No	Model	pozisyon	MAD MSE	No	Model	pozisyon	MAD MSE
1	AR 2	7	0.4679 0.3690	1	AR 3	7	0.5618 0.4958
2	AR 2	14	0.5168 0.3927	2	AR 3	14	0.5862 0.5494
3	AR 2	21	0.4137 0.2793	3	AR 3	21	0.5109 0.4218
4	AR 2	28	0.4297 0.2823	4	AR 3	28	0.4919 0.4116
5	AR 2	35	0.4373 0.3297	5	AR 3	35	0.5774 0.5234
6	AR 2	42	0.4659 0.3258	6	AR 3	42	0.5047 0.3765
7	AR 2	49	0.3956 0.2688	7	AR 3	49	0.6582 0.6882

Çizelge 9.4’de, her biri 50 gözlemlilik 100 ayrı zaman serisi üzerinde pozisyonlara göre hesaplanan MSE ve MAD değerleri verilmiştir. Pozisyona göre tahminleme performansının değişip değişmediğini araştırmak amacıyla ise Çizelge 9.5’te verilen 16 zaman serisi modellerinden türetilen zaman serileri dikkate alınarak 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 ve 70’inci pozisyonadaki kayıp değerler için MinMaxEnt dağılımına dayalı tahmin yapılmış ve 16 ayrı modelden her bir pozisyon için MSE değerleri, Ek-6’da verilen Matlab’da yazılmış program kullanılarak hesaplanmıştır.

**Çizelge 9.5.** Simülasyon için kullanılan zaman serisi modelleri

AR	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon^2$
1	0.2	0.04
1	0.4	0.04
1	0.6	0.04
1	0.8	0.04
1	-0.2	0.04
1	-0.4	0.04
1	-0.6	0.04
1	-0.8	0.04
1	0.2	0.4
1	0.4	0.4
1	0.6	0.4
1	0.8	0.4
1	-0.2	0.4
1	-0.4	0.4
1	-0.6	0.4
1	-0.8	0.4

Çizelge 9.5’de verilen her bir modelden 100 veri seti oluşturulmuş, her bir veri seti için belirli bir pozisyondaki kayıp değer alınarak, MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminler yapılmıştır. Gerçekleştirilen simülasyon aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

1. Belirli bir zaman serisi modelinden 100 değere sahip veri seti türetilir.
2. Veri setinden belirli bir pozisyondaki değer alınır ve karşılaştırma için saklanır.
3. Söz konusu pozisyondaki değer için belirli sayıda gecikmeli otokovaryans kısıtlı MinMaxEnt dağılımına dayalı tahmin yapılır.
4. Ortalama kare hata için, saklanan gerçek değer ile tahmin arasındaki sapma belirlenir.
5. Süreç 100 kez tekrarlanır ve sonunda MSE hesaplanır.

**Çizelge 9.6.** Pozisyon 7'deki kayıp değeri için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1564	0.0374	9	AR 1	0.2	0.4	0.4945	0.3745
2	AR 1	0.4	0.04	0.1609	0.0407	10	AR 1	0.4	0.4	0.5089	0.4071
3	AR 1	0.6	0.04	0.1285	0.0244	11	AR 1	0.6	0.4	0.4062	0.2441
4	AR 1	0.8	0.04	0.1387	0.0285	12	AR 1	0.8	0.4	0.4387	0.2845
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1547	0.0361	13	AR 1	-0.2	0.4	0.4893	0.3608
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1522	0.0356	14	AR 1	-0.4	0.4	0.4813	0.3556
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1333	0.0283	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4217	0.2835
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1235	0.0224	16	AR 1	-0.8	0.4	0.3905	0.2243

**Çizelge 9.7.** Pozisyon 14'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1438	0.0358	9	AR 1	0.2	0.4	0.4547	0.3576
2	AR 1	0.4	0.04	0.1557	0.0380	10	AR 1	0.4	0.4	0.4924	0.3799
3	AR 1	0.6	0.04	0.1487	0.0319	11	AR 1	0.6	0.4	0.4703	0.3195
4	AR 1	0.8	0.04	0.1251	0.0244	12	AR 1	0.8	0.4	0.3957	0.2441
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1530	0.0379	13	AR 1	-0.2	0.4	0.4840	0.3794
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1717	0.0464	14	AR 1	-0.4	0.4	0.5431	0.4638
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1402	0.0293	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4434	0.2932
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1312	0.0258	16	AR 1	-0.8	0.4	0.4147	0.2582

**Çizelge 9.8.** Pozisyon 21'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1563	0.0414	9	AR 1	0.2	0.4	0.4943	0.4143
2	AR 1	0.4	0.04	0.1356	0.0275	10	AR 1	0.4	0.4	0.4287	0.2750
3	AR 1	0.6	0.04	0.1359	0.0286	11	AR 1	0.6	0.4	0.4297	0.2857
4	AR 1	0.8	0.04	0.1321	0.0266	12	AR 1	0.8	0.4	0.4177	0.2655
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1573	0.0397	13	AR 1	-0.2	0.4	0.4975	0.3967
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1462	0.0338	14	AR 1	-0.4	0.4	0.4624	0.3375
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1348	0.0283	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4264	0.2826
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1198	0.0224	16	AR 1	-0.8	0.4	0.3787	0.2242



**Çizelge 9.9.** Pozisyon 28'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1589	0.0415	9	AR 1	0.2	0.4	0.5026	0.4155
2	AR 1	0.4	0.04	0.1354	0.0301	10	AR 1	0.4	0.4	0.4282	0.3007
3	AR 1	0.6	0.04	0.1448	0.0352	11	AR 1	0.6	0.4	0.4579	0.3525
4	AR 1	0.8	0.04	0.1273	0.0253	12	AR 1	0.8	0.4	0.4026	0.2531
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1592	0.0391	13	AR 1	-0.2	0.4	0.5034	0.3913
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1490	0.0339	14	AR 1	-0.4	0.4	0.4711	0.3387
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1383	0.0308	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4373	0.3076
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1239	0.0233	16	AR 1	-0.8	0.4	0.3919	0.2328

**Çizelge 9.10.** Pozisyon 35'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1762	0.0471	9	AR 1	0.2	0.4	0.5572	0.4710
2	AR 1	0.4	0.04	0.1471	0.0343	10	AR 1	0.4	0.4	0.4652	0.3428
3	AR 1	0.6	0.04	0.1127	0.0205	11	AR 1	0.6	0.4	0.3565	0.2054
4	AR 1	0.8	0.04	0.1200	0.0226	12	AR 1	0.8	0.4	0.3794	0.2255
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1684	0.0444	13	AR 1	-0.2	0.4	0.5326	0.4439
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1589	0.0412	14	AR 1	-0.4	0.4	0.5026	0.4115
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1549	0.0405	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4898	0.4056
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1518	0.0362	16	AR 1	-0.8	0.4	0.4800	0.3624

**Çizelge 9.11.** Pozisyon 42'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1492	0.0373	9	AR 1	0.2	0.4	0.4718	0.3732
2	AR 1	0.4	0.04	0.1862	0.0475	10	AR 1	0.4	0.4	0.5887	0.4754
3	AR 1	0.6	0.04	0.1240	0.0250	11	AR 1	0.6	0.4	0.3921	0.3497
4	AR 1	0.8	0.04	0.1195	0.0236	12	AR 1	0.8	0.4	0.3780	0.2356
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1504	0.0383	13	AR 1	-0.2	0.4	0.4756	0.3828
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1500	0.0364	14	AR 1	-0.4	0.4	0.4745	0.3640
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1453	0.0332	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4595	0.3321
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1371	0.0292	16	AR 1	-0.8	0.4	0.4336	0.2920

**Çizelge 9.12.** Pozisyon 49'daki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1519	0.0378	9	AR 1	0.2	0.4	0.4804	0.3781
2	AR 1	0.4	0.04	0.1403	0.0304	10	AR 1	0.4	0.4	0.4436	0.3037
3	AR 1	0.6	0.04	0.1451	0.0324	11	AR 1	0.6	0.4	0.4588	0.3240
4	AR 1	0.8	0.04	0.1245	0.0227	12	AR 1	0.8	0.4	0.3937	0.2272
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1555	0.0388	13	AR 1	-0.2	0.4	0.4919	0.3881
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1482	0.0350	14	AR 1	-0.4	0.4	0.4688	0.3505
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1337	0.0280	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4227	0.2804
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1210	0.0233	16	AR 1	-0.8	0.4	0.3825	0.2331

**Çizelge 9.13.** Pozisyon 56'daki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

<b>No</b>	<b>Model</b>	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		<b>No</b>	<b>Model</b>	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				<b>MAD</b>	<b>MSE</b>					<b>MAD</b>	<b>MSE</b>
<b>1</b>	AR 1	0.2	0.04	0.1666	0.0407	<b>9</b>	AR 1	0.2	0.4	0.5267	0.4074
<b>2</b>	AR 1	0.4	0.04	0.1744	0.0479	<b>10</b>	AR 1	0.4	0.4	0.5516	0.4791
<b>3</b>	AR 1	0.6	0.04	0.1410	0.0315	<b>11</b>	AR 1	0.6	0.4	0.4459	0.3147
<b>4</b>	AR 1	0.8	0.04	0.1009	0.0163	<b>12</b>	AR 1	0.8	0.4	0.3190	0.1627
<b>5</b>	AR 1	-0.2	0.04	0.1729	0.0425	<b>13</b>	AR 1	-0.2	0.4	0.5467	0.4251
<b>6</b>	AR 1	-0.4	0.04	0.1642	0.0399	<b>14</b>	AR 1	-0.4	0.4	0.5193	0.3990
<b>7</b>	AR 1	-0.6	0.04	0.1314	0.0294	<b>15</b>	AR 1	-0.6	0.4	0.4156	0.2944
<b>8</b>	AR 1	-0.8	0.04	0.1164	0.0210	<b>16</b>	AR 1	-0.8	0.4	0.3681	0.2098

**Çizelge 9.14.** Pozisyon 63'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

<b>No</b>	<b>Model</b>	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		<b>No</b>	<b>Model</b>	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				<b>MAD</b>	<b>MSE</b>					<b>MAD</b>	<b>MSE</b>
<b>1</b>	AR 1	0.2	0.04	0.1634	0.0377	<b>9</b>	AR 1	0.2	0.4	0.5167	0.3771
<b>2</b>	AR 1	0.4	0.04	0.1386	0.0345	<b>10</b>	AR 1	0.4	0.4	0.4381	0.3451
<b>3</b>	AR 1	0.6	0.04	0.1275	0.0246	<b>11</b>	AR 1	0.6	0.4	0.4033	0.2460
<b>4</b>	AR 1	0.8	0.04	0.1348	0.0287	<b>12</b>	AR 1	0.8	0.4	0.4263	0.2874
<b>5</b>	AR 1	-0.2	0.04	0.1632	0.0404	<b>13</b>	AR 1	-0.2	0.4	0.5160	0.4040
<b>6</b>	AR 1	-0.4	0.04	0.1496	0.0360	<b>14</b>	AR 1	-0.4	0.4	0.4732	0.3599
<b>7</b>	AR 1	-0.6	0.04	0.1474	0.0341	<b>15</b>	AR 1	-0.6	0.4	0.4660	0.3406
<b>8</b>	AR 1	-0.8	0.04	0.1199	0.0204	<b>16</b>	AR 1	-0.8	0.4	0.3792	0.2040

**Çizelge 9.15.** Pozisyon 70'deki kayıp değer için iki gecikmeli MinMaxEnt tahminlerinin MAD ve MSE değerleri

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1557	0.0350	9	AR 1	0.2	0.4	0.4925	0.3504
2	AR 1	0.4	0.04	0.1384	0.0308	10	AR 1	0.4	0.4	0.4376	0.3077
3	AR 1	0.6	0.04	0.1402	0.0294	11	AR 1	0.6	0.4	0.4434	0.2939
4	AR 1	0.8	0.04	0.1153	0.0208	12	AR 1	0.8	0.4	0.3646	0.2077
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1513	0.0337	13	AR 1	-0.2	0.4	0.4783	0.3375
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1469	0.0328	14	AR 1	-0.4	0.4	0.4647	0.3277
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1397	0.0317	15	AR 1	-0.6	0.4	0.4419	0.3167
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1115	0.0208	16	AR 1	-0.8	0.4	0.3525	0.2081

16 ayrı modelden 100'er gözlemlik zaman serileri üzerinde 7, 14, 21,28, 35, 42, 49, 56, 63 ve 70'inci pozisyonlardaki kayıp değerler için hesaplanan MSE ve MAD değerleri Çizelge 9.6-Çizelge 9.15 ile verilmiştir.

#### 9.4. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki ve Daha Fazla Kayıp Değer Tahmini

Bir önceki bölümde, Teorem 8.3 yardımıyla, tek bir kayıp değer için tahminleme süreci ele alındı. Teorem 8.3., iki veya daha fazla kayıp değer tahmininde de uygulanabilir.

Bir zaman serisi ve bilinmeyen kayıp değerler  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ,  $n \geq 1$  şeklinde bir vektör olsun. Bu durumda kısıt olarak verilen (4.16) otokovaryans fonksiyonları, (3.41) ile ifade edilen  $|\Lambda|$  determinant fonksiyonu ve dolayısıyla da (7.11)'deki  $H_{\max}$  fonksiyonu  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  olmak üzere  $n$  değişkenli fonksiyonlar olur. MinMaxEnt Dağılımını belirleyen  $\gamma_0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots, \gamma_n^0)$ 'ın bulunması ise, çok değişkenli  $H_{\max}$  fonksiyonunun minimumunun bulunması problemine dönüşmüş olur. Bu amaç doğrultusunda yukarıda tek kayıp değer tahmininde kullanılan Çizelge 9.1'deki veri seti için  $x_6 = -3.6937$  kayıp değerinin yanı sıra  $x_{11} = -34.1657$  değerinin de kayıp olduğu varsayılarak Teorem 8.3 yardımıyla bu iki kayıp değer için MinMaxEnt dağılımını belirleyen  $\gamma_0$  vektörünün oluşturduğu tahminler belirlenir ve gerçek değerleriyle karşılaştırılır. Ek-7'de verilen Matlab'da yazılmış programda gerçekleştirilen hesaplamalar sonucunda, MinMaxEnt dağılımını belirleyen vektör  $\gamma_0 = (-3.5565, -34.6223)$  şeklinde elde edilir.  $x_6$  ile  $x_{11}$  için oluşturulan bu tahminlerin gerçek değerlerle olan yakınlığı, açık bir şekilde görülmektedir.

Bununla birlikte kayıp değer sayısı bir kez daha arttırılarak üç kayıp değerli zaman serisinde MinMaxEnt yönteminin tahmin sonuçları araştırılmak üzere Çizelge 9.1.'de verilen 30 gözlemden oluşan veri seti ele alınmıştır ve  $x_4 = -4.9992$ ,  $x_7 = 16.4869$  ve  $x_{10} = 2.4457$  değerleri kayıp olarak kabul edilerek MinMaxEnt yöntemi ile tahminleri yapılmıştır. Ek-8'de verilen Matlab'da yazılmış program sayesinde yapılan hesaplamalar sonucunda MinMaxEnt yöntemi ile elde edilen tahminler, bir başka deyişle MinMaxEnt dağılımını belirleyen  $\gamma_0$  vektörü  $\gamma_0 = (-5.4174, 16.1695, 2.5574)$  şeklinde alınmıştır. Ayrıca, kayıp değer bulduğu pozisyon değiştirilerek yine üç kayıp değerli Çizelge 9.1.'de verilen seriden ilk 13 gözlemden oluşan zaman serisi ele alınmıştır ve bu sefer  $x_5 = -11.4250$ ,  $x_8 = 33.3703$  ve  $x_{11} = -34.1657$  değerleri kayıp kabul edilerek süreç işletilmiştir. Sözü edilen program sayesinde  $\gamma_0$  vektörü  $\gamma_0 = (-11.8335, 32.9906, -34.6237)$  olarak elde edilir ve böylece tahminlerle



gerçek değerlerin yakın olduğu sonucuna varılır. Ardından aynı süreç yeniden kayıp değer pozisyonları değiştirilerek  $x_6 = -3.6937$ ,  $x_9 = 30.1568$  ve  $x_{12} = -56.8119$  değerlerinin kayıp kabul edilmesiyle MinMaxEnt yöntemi sayesinde elde edilen  $\gamma_0 = (-3.5566, 29.3103, -56.7928)$  tahminlerinin de yine gerçek değerlere çok yakın olduğu görülmüştür. Aynı şekilde dört ve üzeri kayıp değerli zaman serisi için tahminleme süreci işletilebilir.

### 9.5. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki Kayıp Değer Tahmini için Simülasyon

Bir önceki bölümde, iki kayıp değerli zaman serisinde MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın olduğu gösterilmişti. Bu bölümde ise önerilen yöntemin iki kayıp değerli zaman serilerindeki performansını değerlendirmek amacıyla, farklı pozisyonlardaki ikili kayıp değerler için bir simülasyon çalışması yapılarak tahminlerin MSE'leri hesaplanmıştır.

Gerçekleştirilen simülasyon aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

1. Belirli bir zaman serisi modelinden 50 gözleme sahip veri seti türetilir.
2. İki gecikmeli otokovaryans kısıtlı MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminler belirli pozisyonlardaki ikili kayıp değerler için yapılır.
3. Sözkonusu tahminlerin gerçek değerlerden sapmaları hesaplanır.
4. Süreç 50 kez tekrarlandıktan sonra belirli pozisyonlara ait MSE hesaplanır.

Yapılan çalışmada  $X_t + 0.8X_{t-1} + 0.2X_{t-2} = \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0, 0.5)$  modelinden her biri 50 değere sahip 50 ayrı zaman serisi üzerinde, Ek-9'da verilen Matlab'ta yazılmış program aracılığıyla, herbir ikili kayıp değer için iki gecikmeli otokovaryans kısıtlı MinMaxEnt dağılımına dayalı tahminler yapılarak elde edilen MSE değerleri Çizelge 9.16'da verilmiştir. Çizelge simetrik olduğu için sadece alt üçgen verilmiştir.

**Çizelge 9.16.** İki kayıp değerli zaman serileri için MinMaxEnt tahminlerinin MSE değerleri

Pozisyon	7	14	21	28	35	42
14	0.3957	-				
21	0.3412	0.3380	-			
28	0.3325	0.3310	0.2839	-		
35	0.3849	0.3579	0.3213	0.3050	-	
42	0.3708	0.3618	0.3234	0.2975	0.3418	-
49	0.3167	0.2990	0.2583	0.2447	0.2766	0.2717

Çizelge 9.16’da  $(x_7, x_{14}), (x_{14}, x_{21}), \dots, (x_{42}, x_{49})$  şeklinde ikili kayıp değerlerden oluşan zaman serileri için yapılan simülasyon çalışması sonucunda elde edilen MSE değerleri incelendiğinde oldukça küçük oldukları görülmektedir ve böylece ikili kayıp değer tahmininde MinMaxEnt yönteminin performansının iyi olduğu sonucuna varılır.

### 9.6. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Gelecek Değer Tahmini

Bu bölümde  $y_0, y_1, \dots, y_T$  reel değerli bir zaman serisinde  $y_{T+1}$  öngörü değerinin bilinmeyen  $\gamma$  parametresi olarak ele alınmasıyla, Teorem 8.2 ve Teorem 8.3’ün uygulamasında, Priestley (1981)’den alınmış 59 gözlemden oluşan zaman serisi kullanılmıştır. Gerçek değer ile MinMaxEnt Yöntemi ile elde edilen öngörü değerinin karşılaştırılabilmesi amacıyla, zaman serisi 58 değerli gibi düşünülüp, aslında bilinen 59. değer  $y_{59} = 1.48$  için öngörü yapıldığı varsayılmıştır. Ek-10’da kodları verilen yazılmış Matlab programında yapılan hesaplamalar sonucunda  $\tilde{\gamma}_0 = \hat{y}_{59} = 1.58$  olarak elde edilmiştir. Gerçek değer ile MinMaxEnt dağılımına dayalı elde edilen öngörü değerinin yakınlığı görülmektedir.

Ayrıca MinMaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\tilde{\gamma}_0)) = 85.8204$ , MaxMaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(\tilde{\gamma}_1)) = 102.5777$  olarak elde edilmiştir. Teorem 8.2’ye göre oluşturulan entropi aralığı

$$85.8204 \leq H(p(\gamma)) \leq 102.5777$$

olur ve  $y_0, y_1, \dots, y_T, y_{T+1}$  zaman serisinin MaxEnt dağılımının entropisi  $H(p(y)) = 85.8284$  'ün bu aralığa girdiği gösterilmiş olur.

### **9.7. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı Tek Gelecek Değer Tahmini için Simülasyon**

MinMaxEnt dağılımına dayalı kayıp değer tahminleri için yapılan simülasyon çalışmalarına benzer olarak, bu bölümde öngörü tahmini için de simülasyon çalışması yapılmış, yöntemin öngörü yapmak için geçerliliği gösterilmiştir. Bunun için Çizelge 9.5'de verilen 16 modelden her biri 100 gözlemlik 100'er zaman serisi türetilmiş ve 99 gözlem dikkate alınarak 100. pozisyondaki değer için Ek-6'da verilen program aracılığıyla MSE ve MAD'ler hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 9.17'deki gibidir ve yöntemin öngörü yapmak için de kullanılabileceği önerilmiştir.

**Çizelge 9.17.** Tek gelecek değer tahmini için simülasyon sonuçları

No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$		No	Model	$\phi_1$	$\sigma_\varepsilon$	$(MinMaxEnt)_2$	
				MAD	MSE					MAD	MSE
1	AR 1	0.2	0.04	0.1619	0.0453	9	AR 1	0.2	0.4	0.5121	0.4528
2	AR 1	0.4	0.04	0.1557	0.0356	10	AR 1	0.4	0.4	0.4922	0.3557
3	AR 1	0.6	0.04	0.1814	0.0527	11	AR 1	0.6	0.4	0.5737	0.5265
4	AR 1	0.8	0.04	0.1899	0.0581	12	AR 1	0.8	0.4	0.6006	0.5810
5	AR 1	-0.2	0.04	0.1612	0.0446	13	AR 1	-0.2	0.4	0.5097	0.4465
6	AR 1	-0.4	0.04	0.1584	0.0372	14	AR 1	-0.4	0.4	0.5011	0.3724
7	AR 1	-0.6	0.04	0.1757	0.0505	15	AR 1	-0.6	0.4	0.5556	0.5052
8	AR 1	-0.8	0.04	0.1988	0.0629	16	AR 1	-0.8	0.4	0.6288	0.6291

Ancak Çizelge 9.17’deki MSE’ler ile tek kayıp değerli zaman serilerinde yapılan simülasyon çalışmaları sonuçları örneğin Çizelge 9.15.’deki 70. pozisyon için elde edilenler karşılaştırıldığında, yöntemin kayıp değerler için MSE’lerinin daha düşük olduğu görülmektedir. Bu aslında sürpriz bir sonuç değildir, çünkü kayıp değer (bilinmeyen parametre olarak) gecikme sayısına göre önceki ve de sonraki değerlerle ilişkisi otokovaryans kısıtlarında yer almakta iken, sondan bir sonraki değer olan gelecek değer sadece önceki değerlerle ilişkisi otokovaryans kısıtlarında yer almaktadır. Böylece, “sonraki gözlemlerle olan ilişkinin eksikliğinden doğan bilgi kaybı, gelecek değer için yapılan tahminlerin MSE’lerinin daha yüksek çıkmasına neden olur” şeklinde bir yorum getirilebilir.

## 9.8. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki ve Daha Fazla Gelecek Değer Tahmini

Bir önceki bölümde gösterildiği gibi tek öngörü yapmak için kullanılan MinMaxEnt dağılımına dayalı yöntem, iki ve daha fazla gelecek değer tahmini için de geliştirilebilir. Sözkonusu yöntem iki ve daha fazla öngörü yapmak için iki türlü uygulanabilir. İlki, tek öngörü değerinin elde edilmesi için gerçekleştirilen sürecin öngörü sayısına göre yinelemeli olarak işletilmesidir. Bir başka deyişle  $y_{T+1}$  gelecek değerinin MinMaxEnt dağılımına dayalı tahmininin zaman serisinde yerine yazılmasıyla elde edilen  $y = [y_0, y_1, \dots, y_T, y_{T+1} = \tilde{y}_0]$  zaman serisine yeniden öngörü süreci uygulanarak, bir sonraki  $\hat{y}_{T+2}$  değeri elde edilir. Yinelemeli bu süreç öngörü sayısına bağlı olarak tekrarlanır. İkinci olarak tahminleme süreci yinelemeli olarak değil, iki ve daha fazla kayıp değer tahminindeki gibi çok değişkenli  $H_{\max}$  fonksiyonunun minimizasyonu ile direkt olarak da uygulanabilir.

Yinelemeli olarak iki öngörü değeri elde etmek için burada öncelikle 58 değer üzerinden MinMaxEnt yöntemi ile öngörü yapılarak bulunmuş  $\tilde{y}_0 = \hat{y}_{59} = 1.58$  tahmininin ardından  $y = [y_0, y_1, \dots, y_{58}, \hat{y}_{59} = 1.58]$  değerlerinden oluşan zaman serisi üzerinde yeniden MinMaxEnt yöntemi uygulanarak Ek-10'da verilen program aracılığı ile  $\tilde{y}_0 = \hat{y}_{60} = -0.7750$  olarak elde edilmiştir. 59. ve 60. değerler için yapılan bu tahminler gerçek değerler  $y_{59} = 1.48$  ve  $y_{60} = -1.14$  ile karşılaştırıldığında birbirlerine yakınlığı görülmektedir.

Ayrıca aynı veri seti üzerinde 59. ve 60. değerlerin tahmini için problemin yinelemeli olarak değil, çok değişkenli  $H_{\max}$  fonksiyonunun minimizasyonu ile Ek-7'de kodları verilen programda çözülmesiyle  $\hat{y}_{59} = 1.18$  ve  $\hat{y}_{60} = -0.9420$  olarak elde edilir.

## 9.9. MinMaxEnt Dağılımına Dayalı İki Gelecek Değer Tahmini için Simülasyon

Bu bölümde, Bölüm 9.8’de gösterildiği gibi, iki gelecek değer tahmini için iki ayrı şekilde yapılan tahminleme süreçlerinin simülasyon çalışmaları gerçekleştirilerek, yinelemeli tahminleme süreci ve çok değişkenli  $H_{\max}$  fonksiyonunun minimizasyonu ile tahminleme süreci, MSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

Uygulamada, parametreleri Çizelge 9.18’de verilen  $AR(1)$  modelinden iki,  $AR(2)$  modelinden iki olmak üzere dört modelin her birinden türetilen 50 gözlemlik 100’er zaman serileri kullanılmıştır. Bu zaman serileri üzerinde her iki tahminleme süreci ayrı ayrı uygulanarak elde edilen öngörü değerleri için hesaplanan MSE’ler Çizelge 9.18’de karşılaştırılmıştır. Yinelemeli tahminleme için Ek-12’de, çok değişkenli MinMaxEnt tahminleri için Ek-11’de kodları verilen Matlab programları yazılarak hesaplamalar yapılmıştır.

**Çizelge 9.18.** İki gelecek değer için MinMaxEnt tahminleri için MSE değerleri

<b>Model</b>	$\phi_i$	$\sigma_\varepsilon^2$	<b>Yinelemeli MinMaxEnt MSE</b>	<b>Çok Değişkenli MinMaxEnt MSE</b>
$AR(1)$	0.2	0.04	0.0429	0.0432
$AR(1)$	0.8	0.04	0.0796	0.0728
$AR(2)$	0.8 0.2	0.5	0.6229	0.6055
$AR(2)$	0.4 -0.7	0.5	0.7535	0.6606

Çizelge 9.18’den iki tahminleme sürecinin MSE değerlerinin oldukça küçük çıkmasının yanı sıra, iki süreç arasında önemli bir fark olmadığı görülmüştür.

## 10. SONUÇ VE ÖNERİLER

MaxEnt Yöntemi, tek bir gerçekleşmesi gözlenmiş zaman serisi olan bir stokastik süreç için MaxEnt dağılımını bir model olarak önermektedir. Bir başka deyişle MaxEnt dağılımı, söz konusu stokastik sürecin dağılımı için bir tahmindir. Bu dağılım çok değişkenli normal dağılımdır ve dağılımı belirleyen analitik formüller asimptotik olarak elde edilebilir. Buradan yola çıkarak bu tez çalışmasında, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Durağan zaman serileri için olasılık dağılımının, otokovaryans fonksiyonlarının kısıt olarak verilmesiyle Maksimum Entropi Yöntemi aracılığıyla elde edilmesi süreci incelenmiş, Matlab'ta program yazılarak bu dağılımı belirleyen değerler bulunmuştur.
2. MaxEnt yönteminden yararlanarak, bir zaman serisi için tam otokovaryans sayısı  $m$ 'in biliniyor olduğu varsayımı altında,  $m$ 'den sonraki gecikmeli otokovaryans kısıtlı MaxEnt dağılımlarının bu stokastik süreç için kabul edilebilirliği, Jaynes'in konsantrasyon teoremi yardımı ile araştırılmıştır.
3. Otokovaryans kısıtlarının artırılmasıyla elde edilen MaxEnt dağılımlarının kabul edilebilirliği sürecinin,  $AR(k)$  modelinin  $k$  gecikme sayısını belirlemek ve parametrelerini tahmin etmek için de işletilebileceği önerilmiştir.
4. İstatistiksel veriyi en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunması problemi olan Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Probleminin (GEOP) formülasyonu, moment fonksiyonları ve moment değerleri parametreye bağlı olan MaxEnt dağılımları için verilmiş, bu problemin çözümü olarak MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları elde edilmiştir.
5. Kayıp değerli zaman serileri için MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları, kayıp değerlerin parametreler olarak otokovaryans kısıtlarında yer almasıyla, moment değerleri parametreye bağlı GEOP'nin çözümü şeklinde kurulmuştur.
6. MaxEnt, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımlarının entropi değerleri arasındaki bağıntılar Teorem 8.1, Teorem 8.2 ve Teorem 8.3 ile, bilgi değeri arasındaki bağıntı ise Teorem 8.4 ile ifade

edilmiştir. Söz konusu dağılımlardan en büyük bilgiyi içerenin MinMaxEnt olduğu gösterilmiştir.

7. MaxEnt dağılımına dayalı kayıp değeri ve gelecek değeri tahminleri birer problem olarak ele alınarak, çözüm için MinMaxEnt dağılımına dayalı bir yöntem geliştirilmiştir.
8. MinMaxEnt dağılımına dayalı geliştirilen yöntemin kayıp değeri ve öngörü sayısına bağlı durumlarına göre Matlab’da programları yazılmıştır.
9. MinMaxEnt dağılımına dayalı geliştirilen yöntemin performansı farklı sayıda gecikmeli otoregresif modellerden türetilen zaman serileri üzerinde, farklı sayıda kayıp değerleri için elde edilen tahminlerin MSE’leri simülasyon çalışması ile hesaplanarak, değerlendirilmiştir.
10. MinMaxEnt dağılımına dayalı geliştirilen yöntem tek, iki ve daha fazla öngörü için kullanılarak, simülasyon çalışması ile MSE değerleri hesaplanmış, yöntemin geçerliliği gösterilmiştir.



## KAYNAKLAR

- Andersen N.( 1978.), “Comments OD. the Performance of Maximum Entropy Algorithms”, *Proceedings of the IEEE*, **66**, 11.
- Blackman, R. ve Tukey, J. (1958), *The measurement of power spectra*, Dover Publications, New York.
- Brockwell, P. ve Davis R. A. (1991), *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York.
- Brockett, P. L., Charnes A. ve Pack K.H. (1986), “Computation of Minimum Cross Entropy Spectral Estimates:An Unconstrained Dual Convex Programming Method,” *IEEE Transactions On Information Theory*, **32**, 2.
- Burg, J.P. (1967), “Maximum Entropy Spectral Analysis” , *37. Annual Meeting of the Society of Exploration Geophysics*.
- Byrne C. L. Ve Fitzgerald R. M. (1983), “An Approximation Theoretic Approach to Maximum Entropy Spectral Analysis,” *IEEE Transactions On Acoustics, Speech, And Signal Processing*, **31**, 3.
- Chi Fung D. S. (2006), “ Methods for the Estimation of Missing Values in Time Series,” Yüksek Lisans Tezi, Cowan Üniversitesi, Western, Avusturalya.
- Cramer H. (1966), *Mathematical Methods of Statistics*, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, Princeton.
- Gray R. M. (2001), *Toeplitz and Circulant matrices: A review*, Department of Electrical Engineering Stanford University, A.B.D., <http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf>.
- Hamaz, A. ve Ibazizen, M. (2009), “Comparison of Two Estimation Methods of Missing Values Using Pitman-Closeness Criterion,” *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **38**, 2210-2213.
- Holm S. (1983), “Spectral Moment Matching in the Maximum Entropy Spectral Analysis Method,” *IEEE Transactions On Information Theory*, **29**, 2.
- Ihara, S. (1984), “Maximum Entropy Spectral Analysis and ARMA Processes,” *IEEE Transactions On Information Theory*, **30**, 2.
- Jenkins G.M. ve Watts D.G. (1969), *SPECTRAL ANALYSIS and its applications*, HOLDEN-DAY.

- Kapur, J.N. ve Kesavan, H.K. (1992), “*Entropy Optimization Principles with Applications*,” ACADEMIC PRESS, A.B.D..
- Kolmogorov A.N. ve Fomin S.V.(1970), *Introductory Real Analysis* , PRENTICE-HALL, A.B.D..
- Little, R. ve Rubin, D. (1987), *Statistical Analysis with Missing Data*, Wiley, New York.
- Papoulis A. (1991), *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, Singapore.
- Pourhamadi, M. (1989), “Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series,” *Journal of Time Series Analysis* , **10(2)**, 149–69.
- Pourahmadi, M. (2001), *Foundations of Time Series Analysis and Prediction Theory*, Wiley, New York, A.B.D..
- Priestley M.B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*, ACADEMIC PRESS, INC., London.
- Shamilov, A. (2006), “A development of entropy optimization methods”, *WSEAS Trans. Math.* **5**, 568-575.
- Shamilov, A. (2007), “Generalized entropy optimization problems and the existence of their solutions”, *Physica A.*, **382**, 465-472.
- Shamilov, A., Giriftinoglu, C., Usta, I., Mert Kantar, Y. (2008a), “A new concept of relative suitability of moment function sets”, *Applied Mathematics and Computation(SCI)*, **206**, 521-529
- Shamilov, A. (2008b), *Olasılıksal Dağılımların Karakteristik Fonksiyonları ve Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir.
- Shamilov, A. (2009), *Entropi, İnfomasyon ve Entropi Optimizasyon*, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir.
- Shore, J. (1981), “Minimum Cross-Entropy Spectral Analysis,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **29**, 230-237.
- Shumway, R. H. ve Stoffer, D. S. (2000), *Time Series Analysis and its Applications*, Springer Verlag, New York.
- Tzannes, M.A. ve Noonan, J.P., “Minimum Relative Entropy Spectral Estimation with ucertainities in the autocorrelation measurements”, IEEE.

Tzannes, M.A., Politis, D. ve Tzannes, N.S., (1985), "A General Method of Minimum Cross Entropy Spectral Estimation," *IEEE Transactions on Acoustics,Speech and Signal Processing*, **33**, 748-752.

Wu N. (1997), *The Maximum Entropy Method*,Springer.

Zhuang, X., Chen, L. ve Chen, S. (1993) "An Experimental Comparison Between Maximum Entropy and Minimum Relative-Entropy Spectral Analysis," *IEEE Transactions On Signal Processing*,. **41**, 4.

## Ek-1 MaxEnt Dağılımı Elde Edilen Matlab Program Kodları

```
a=zeros(1,m+1);
lamda=zeros(1,m+1);
r=zeros(1,N-1);
q=zeros(1,N);
%zaman serisi
x=[841,840,845,836,832,829,823,822,824,819,810,804,803,816,810,805,809,798,
794,798,801,815,821,812,817,818,822,815,803,803,805,807,819,830,833,832,837
,837,837,838,844,840,838,833,831,832,818,818,824,831,815,804,799,784,789,78
4,786,791,804,833]
N=size(x,2)
%otokovaryans kısıtlarının sayısı
m=5
%otokovaryans kısıtlarının hesaplanması
[c] = xcov(x,m)
r0=c(m+1)/N
r(1)=c(m+2)/N
r(2)=c(m+3)/N
r(3)=c(m+4)/N
r(4)=c(m+5)/N
r(5)=c(m+6)/N
%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=zeros(m+1,m+1);
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
```

```

    end
end
R;

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
a(4)=D(4,1)/D(1,1);
a(5)=D(5,1)/D(1,1);
%Lamdalar hesaplanıyor.
    for k=0:m
        for j=0:m-k
            lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
        end
        lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
    end
    lamda;
%qj'ler hesaplanıyor.
    for j=0:N-1
        for k=1:m
            q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
        end
        q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
    end
    q;
dett=prod(q); % determinant hesaplanıyor.
%MaxEnt dağılımının sabiti hesaplanıyor.
sabit=1/((2*pi)^(N/2)*dett^(-0.5))
%m gecikmeden sonraki otokovaryans değerleri için ekstrapolasyon yapılıyor.
for k=m+1:N-1

```

```
for j=1:2
    r(k)=r(k)- r(k-j)*a(j+1);
end
end
r
```

## Ek-2 Tek Kayıp Değer Tahmini için Matlab Program Kodları

```
%AR(4) modelinden veri üretiliyor.
coeff = garchset('R',4,'AR', [2.7607, -3.8106, 2.6535, -0.9238 ],'C',0, 'K',1 )
[e,ss,x] = garchsim(coeff,30);
%Zaman serisi gözlem değeri sayısı
N=size(x,1);
%otokovaryans kısıt sayısı
m=2;
l=6 %kayıp değer pozisyonu
a=vpa(zeros(1,m+1));
lamda=vpa(zeros(1,m+1));
r=vpa(zeros(1,N-1));
q=vpa(zeros(1,N));
c0x=0;
cx=vpa(zeros(1,m));
syms ort
syms t;% kayıp değer t parametresi olarak gösteriliyor
top=(sum(x)-x(l));
ort=(top+t)/N;

syms y %kayıp değerli zaman serisi y serisine aktarılıyor
for i=1:N
    if i==l
        y(l)=t;
    else
        y(i)=x(i);
    end
end
%t parametresine(kayıp değere)bağlı otokovaryans kısıtları
%oluşturuluyor
for i=1:N
```

```

    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end

r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end

end

R;

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);

```



```

%a(4)=D(4,1)/D(1,1);
%a(5)=D(5,1)/D(1,1);

%Lamdalar hesaplanıyor.
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
lamda;

%qj'ler hesaplanıyor.
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end
q;
% t'ye bağılı Determinant hesaplanıyor.Bu ifade mesaa fonksiyonunun içine
% yerleştiriliyor.
dett=prod(q);

%determinant fonk. minimize ediliyor.
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t=y;\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);

```

```

[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, min(x), max(x));
clear mesaa.m
clear(s)
%Hmaxmax hesaplanıyor
Hmaxmax=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/fval);
%determinant fonksiyonu maksimize ediliyor ve MinMaxEnt ile kayıp
%değer tahmini yapılıyor
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t=y;\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, min(x), max(x));
clear mesaa.m
clear(s)
%Hminmax hesaplanıyor
Hminmax=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/-fval);
tt %kayıp değer tahmini
error=x(1)-tt

```

### Ek-3 Her Pozisyon için Tek Kayıp Değer Tahminine ait Matlab Program Kodları

```
coeff = garchset('R',4,'AR', [2.7607, -3.8106, 2.6535, -0.9238 ],'C',0, 'K',1 )  
[e,ss,x] = garchsim(coeff,30);
```

```
N=size(x,1);
```

```
m=2;
```

```
z=0
```

```
err=0
```

%t'ye bağlı otokovaryans kısıtları veriliyor.

```
for l=m:N-m-1 % kayıp değer pozisyonu
```

```
    a=vpa(zeros(1,m+1));
```

```
    lamda=vpa(zeros(1,m+1));
```

```
    r=vpa(zeros(1,N-1));
```

```
    q=vpa(zeros(1,N));
```

```
    c0x=0;
```

```
    cx=vpa(zeros(1,m));
```

```
    z=z+1
```

```
    top=(sum(x)-x(l+1));
```

```
    syms ort
```

```
    syms t;
```

```
    ort=(top+t)/N;
```

```
    syms y
```

```
    for i=1:N
```

```
        if i==l+1
```

```
            y(l+1)=t;
```

```
        else
```

```
            y(i)=x(i);
```

```
        end
```

```

end
for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end
end
r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
end
R;
% aj leri içeren A vektörü ile gkare'yi içeren B vektörü

D=inv(R);
gkare=D(1,1);

```

```

a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1);
%a(5)=D(5,1)/D(1,1);
    %Lamdalar hesaplanıyor.
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
    lamda;
%qj'ler hesaplanıyor.
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end
q;
% t'ye bağılı Determinant hesaplanıyor.Bu ifade mesa fonksiyonunun içine
% yerleştiriliyor.

dett=prod(q);

fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t=y;\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');

```

```
fclose(fid);
[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, min(x), max(x));
clear mesaa.m
clear(s)
Hminmax(z)=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/-fval);
ttt(l+1)=tt
err=err+(x(l+1)-ttt(l+1))^2;
dett=0;
end
error=err/z
```

#### **Ek-4 Her Pozisyon için Tek Kayıp Değer Tahminiyle Simülasyona ait Matlab Program Kodları**

```
coeff = garchset('R',4,'AR', [2.7607, -3.8106, 2.6535, -0.9238 ],'C' ,0, 'K',1 )
[e,ss,x] = garchsim(coeff, 50,100);
N=size(x,1);
NN=size(x,2);
m=2;
summ=sum(x);
minn=min(x);
maxx=max(x);
er=zeros(1,NN);
SE=zeros(1,NN);
Hmax=zeros(1,NN);
z=0
for d=1:NN
    d
    clear maplemex
    for l=m:N-m-1 % kayıp değer pozisyonu
        a=vpa(zeros(1,m+1));
        lamda=vpa(zeros(1,m+1));
        r=vpa(zeros(1,N-1));
        q=vpa(zeros(1,N));
        c0x=0;
        cx=vpa(zeros(1,m));
        j=0;
        z=z+1
        top=(summ(d)-x(l+1,d));
        syms ort
        syms t;
        ort=(top+t)/N;
        syms y
        for i=1:N
```

```

    if i==l+1
        y(l+1)=t;
    else
        y(i)=x(i,d);
    end
end
for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end
r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
end
end

```



R;

% aj leri içeren A vektörü ile gkare'yi içeren B vektörü

D=inv(R);

gkare=D(1,1);

a(1)=1;

a(2)=D(2,1)/D(1,1);

a(3)=D(3,1)/D(1,1);

%a(4)=D(4,1)/D(1,1);

%a(5)=D(5,1)/D(1,1);

%Lamdalar hesaplanıyor.

for k=0:m

for j=0:m-k

lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)\*a(j+k+1);

end

lamda(k+1)=lamda(k+1)\*gkare;

end

lamda;

%qj'ler hesaplanıyor.

for j=0:N-1

for k=1:m

q(j+1)=q(j+1)+2\*lamda(k+1)\*cos((2\*pi\*k\*j)/N);

end

q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);

end

q;

% t'ye bağlı Determinant hesaplanıyor.Bu ifade mesaa fonksiyonunun  
içine

% yerleştiriliyor.

```

dett=prod(q);

fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t=y;\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, minn(d), maxx(d));
clear mesaa.m
clear(s)
Hmax(d)=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/-fval);
ttt(l+1,d)=tt;
er(d)=x(l+1,d)-ttt(l+1,d);
SE(d)=SE(d)+(er(d))^2;
dett=0;
end
MSE(d)=SE(d)/z
end

```

## Ek-5 Belirli Pozisyonlar için Tek Kayıp Değer Tahminiyle Simülasyona ait Matlab Program Kodları

```
coeff = garchset('R',2,'AR', [-0.8, -0.2],'C',0, 'K',0.5 )
[e,s,x] = garchsim(coeff,50,100);

N=size(x,1);
NN=size(x,2);
m=2;
summ=sum(x);
minn=min(x);
maxx=max(x);

er=zeros(N,NN);
SE=0;
AD=0;
l=0
Hmax=zeros(1,NN);
for l=6:N-m:6      %7'şer 7'şer kayıp değer pozisyonu değiştiriliyor.
    for d=1:NN      %Her belirli pozisyon için 100 zaman serisi üzerinde
        tahminler yapılıyor.
            clear maplemex
            a=vpa(zeros(1,m+1));
            lamda=vpa(zeros(1,m+1));
            r=vpa(zeros(1,N-1));
            q=vpa(zeros(1,N));
            c0x=0;
            cx=vpa(zeros(1,m));
            j=0;
            top=(summ(d)-x(l+1,d));
            syms ort
            syms t;
```

```

ort=(top+t)/N;
syms y
for i=1:N
    if i==1+1
        y(1+1)=t;
    else
        y(i)=x(i,d);
    end
end
for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end
r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
R;

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1);
%a(5)=D(5,1)/D(1,1);

%Lamdalar hesaplanıyor.
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
lamda;

%qj'ler hesaplanıyor.
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end
q;

```

% t'ye bağılı Determinant hesaplanıyor.Bu ifade mesaa fonksiyonunun  
içine

% yerleştiriliyor.

dett=prod(q);

fid=fopen('mesaa.m', 'w');

fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');

fprintf(fid,'t=y;\n');

s = char(dett);

fprintf(fid,'fu=(-%s);\n', s);

fprintf(fid,'return;\n\n');

fclose(fid);

[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, minn(d), maxx(d));

clear mesaa.m

clear(s)

Hmax(d)=(N/2)\*log(2\*pi\*exp(1))+1/2\*log(1/-fval);

ttt(l+1,d)=tt;

er(l+1,d)=x(l+1,d)-ttt(l+1,d);

AD=AD+abs(er(l+1,d));

SE=SE+(er(l+1,d))^2;

dett=0;

end

end

MAD=AD/NN

MSE=SE/NN

## Ek-6 Belirli Bir Pozisyon için Tek Kayıp Değer Tahminiyle Simülasyona ait Matlab Program Kodları

```
coeff = garchset('R',1,'AR', [0.2],'C' ,0, 'K',0.04 )
[e,s,x] = garchsim(coeff,100,100);
N=size(x,1);
NN=size(x,2);
m=2;
summ=sum(x);
minn=min(x);
maxx=max(x);
er=zeros(1,NN);
SE=0;
AD=0;
Hmax=zeros(1,NN);
for d=1:NN
    l=48 % (l+1). pozisyon için MSE hesaplanıyor.
    d
    clear maplemex
    a=vpa(zeros(1,m+1));
    lamda=vpa(zeros(1,m+1));
    r=vpa(zeros(1,N-1));
    q=vpa(zeros(1,N));
    c0x=0;
    cx=vpa(zeros(1,m));
    j=0;
    top=(summ(d)-x(l+1,d));
    syms ort
    syms t;
    ort=(top+t)/N;
    syms y
    for i=1:N
```

```

    if i==l+1
        y(l+1)=t;
    else
        y(i)=x(i,d);
    end
end
for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end
r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
end
end

```



R;

D=inv(R);

gkare=D(1,1);

a(1)=1;

a(2)=D(2,1)/D(1,1);

a(3)=D(3,1)/D(1,1);

%a(4)=D(4,1)/D(1,1);

%a(5)=D(5,1)/D(1,1);

%Lamdalar hesaplanıyor.

for k=0:m

for j=0:m-k

lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)\*a(j+k+1);

end

lamda(k+1)=lamda(k+1)\*gkare;

end

lamda;

%qj'ler hesaplanıyor.

for j=0:N-1

for k=1:m

q(j+1)=q(j+1)+2\*lamda(k+1)\*cos((2\*pi\*k\*j)/N);

end

q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);

end

q;

% t'ye bağlı Determinant hesaplanıyor.Bu ifade mesaa fonksiyonunun  
içine

% yerleştiriliyor.

```

dett=prod(q);

fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t=y;\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, minn(d), maxx(d));
clear mesaa.m
clear(s)
Hmax(d)=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/-fval);
ttt(l+1,d)=tt;
er(d)=x(l+1,d)-ttt(l+1,d);
AD=AD+abs(er(d));
SE=SE+(er(d))^2;
dett=0;

end
MAD=AD/NN
MSE=SE/NN

```

## Ek-7 İki Kayıp Değer için Matlab Program Kodları

```
coeff = garchset('R',4,'AR', [2.7607, -3.8106, 2.6535, -0.9238 ],'C' ,0, 'K',1 )
[e,ss,x] = garchsim(coeff,30);

N=size(x,1)
m=2
err=0;
syms t1 %tahmin edilicek ilk kayıp değer
syms t2 %tahmin edilecek ikinci kayıp değer
syms ort
u=5 %kayıp değerler arasındaki pozisyon farkı %öngörü yapmak için u=1 olmalı.
w=6 %kayıp değerlerin başlangıç pozisyonu %öngörü yapmak için w=N-1 olmalı.
syms y

a=vpa(zeros(1,m+1));
lamda=vpa(zeros(1,m+1));
r=vpa(zeros(1,N-1));
q=vpa(zeros(1,N));
c0x=0;
cx=vpa(zeros(1,m));
top=sum(x)-x(w)-x(w+u);

for i=1:N
    if i==w
        y(i)=t1;
    else
        y(i)=x(i);
    if i==w+u
        y(i)=t2;
    else
        y(i)=x(i);
    end
end
```

```

        end
    end
end

ort=(top+t1+t2)/N;

for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end

r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
end
end

```

```

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1)
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end

dett=prod(q);
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t1=y(1);\n');
fprintf(fid,'t2=y(2);\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
x0=[1,1]
[tt,fval]= fminsearch(@mesaa,x0);
clear mesaa.m
clear(s)

```

$H_{max}=(N/2)*\log(2*\pi*\exp(1))+1/2*\log(1/-f_{val});$

$ttt(1)=tt(1)$  %birinci kayıp değer tahmini

$ttt(2)=tt(2)$  % ikinci kayıp değer tahmini

$err(1)=x(w)-ttt(1)$

$err(2)=x(w+u)-ttt(2)$

## Ek-8 Üç Kayıp Değer Tahmini için Matlab Program Kodları

```
coeff = garchset('R',4,'AR', [2.7607, -3.8106, 2.6535, -0.9238 ],'C' ,0, 'K',1 )
[e,ss,x] = garchsim(coeff, 30);
N=size(x,1)
m=2
err=0
error=0
j=0
syms t1 %tahmin edilicek değişken.
syms t2
syms t3
syms ort
w=4 %ilk kayıp değer pozisyonu
u=7 %ikinci kayıp değer pozisyonu
h=10 %üçüncü kayıp değer pozisyonu
syms y
a=vpa(zeros(1,m+1));
lamda=vpa(zeros(1,m+1));
r=vpa(zeros(1,N-1));
q=vpa(zeros(1,N));
c0x=0;
cx=vpa(zeros(1,m));
top=(sum(x)-x(w)-x(u)-x(h));

for i=1:N
    if i==w
        y(i)=t1;
    else
        y(i)=x(i);
        if i==u
            y(i)=t2;
```

```

else
    y(i)=x(i);
    if i==h
        y(i)=t3;
    else
        y(i)=x(i);
    end
end
end
end
end
ort=(top+t1+t2+t3)/N;
for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end
r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else

```



```

        R(i,j)=r0;
    end
end
end
end

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1)
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end

dett=prod(q);
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu = mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t1=y(1)\n');
fprintf(fid,'t2=y(2)\n');
fprintf(fid,'t3=y(3)\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);

```

```
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
x0=[1,1,1]
[tt,fval]= fminsearch(@mesaa,x0)
clear mesaa.m
clear(s)
Hmax=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/-fval);
tt % kayıp değerlerin tahminleri
err(1)=x(w)-tt(1)
err(2)=x(u)-tt(2)
err(3)=x(h)-tt(3)
```

## Ek-9 İki Kayıp Değer Tahmininde Simülasyon için Matlab Program Kodları

```
coeff = garchset('R',2,'AR', [-0.8, -0.2],'C',0, 'K',0.5 )  
[e,s,x] = garchsim(coeff,50,50);
```

```
N=size(x,1)  
NN=size(x,2)  
m=2  
summ=sum(x);  
err=0  
error=0  
syms t1 %tahmin edilicek ilk kayıp değer  
syms t2 %tahmin edilecek ikinci kayıp değer  
syms ort  
u=7 %kayıp değerler arasındaki pozisyon farkı  
w=7 %kayıp değerlerin başlangıç pozisyonu  
syms y
```

```
while w<=N-u  
    for d=1:NN  
        clear maplemex  
        d  
        a=vpa(zeros(1,m+1));  
        lamda=vpa(zeros(1,m+1));  
        r=vpa(zeros(1,N-1));  
        q=vpa(zeros(1,N));  
        c0x=0;  
        cx=vpa(zeros(1,m));  
        top=(summ(d)-x(w,d)-x(w+u,d));  
  
        for i=1:N  
            if i==w
```

```

        y(i)=t1;
    else
        y(i)=x(i,d);
    if i==w+u
        y(i)=t2;
    else
        y(i)=x(i,d);
    end
end
end

ort=(top+t1+t2)/N;

for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end

r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i

```

```

        R(i,j)=r(k);
    else
        R(i,j)=r0;
    end
end
end
end

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1)
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end

dett=prod(q);
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t1=y(1);\n');
fprintf(fid,'t2=y(2);\n');
s = char(dett);

```

```

fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
x0=[1,1]
[tt,fval]= fminsearch(@mesaa,x0);
clear mesaa.m
clear(s)
ttt(w)=tt(1);%birinci kayıp değer tahmini
ttt(w+u)=tt(2);% ikinci kayıp değer tahmini
err=err+((x(w,d)-ttt(w))^2+(x(w+u,d)-ttt(w+u))^2)
dett=0
end
error(w,w+u)=err/(2*NN)%w ile w+u'uncu kayıp değer için yapılan NN
sayıda tahminin MSE'si
w=w+7
err=0
end

```

## Ek-10 Tek Gelecek Değer Tahmini için Matlab Program Kodları

```
m=2
s=1% öngörü sayısı
x=[-0.22,-0.31,-0.24,0.76,0.18,-1.29,0.57,-0.13,-0.84,0.86,2.03,-0.78,-
1.11,0.12,2.04,3.26,0.02,-1.81,-0.07,2.02,0.9,-2.18,-1.87,0.36,1.12,-0.16,0.66,0.6,-
0.16,-2.01,-0.85,1.17,-0.97,0.48,-0.16,0,0.84,1,-0.5,-1.66,-0.1,-
1.11,0.81,0.53,0.21,-0.58,-2.6,0.82,4.48,0.22,-4.47,-2.45,1.86,3.55,-0.55,-4.07,-
1,3.02,1.48;]

N=size(x,2);
c0x=0;
cx=vpa(zeros(1,m));
a=vpa(zeros(1,m+1));
lamda=vpa(zeros(1,m+1));
r=vpa(zeros(1,N-1));
q=vpa(zeros(1,N));
syms t
syms t1 %tahmin edilicek değişken.
syms ort
top=sum(x)-x(N);
ort=(top+t)/N;

for i=1:N-s
    c0x=c0x+(x(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-s-k
        cx(k)=cx(k)+((x(i)-ort)*(x(i+k)-ort));
    end
end
r0=(c0x+(t-ort)^2)/N;
```

```

r(1)=(cx(1)+(x(N-1)-ort)*(t-ort))/N;
r(2)=(cx(2)+(x(N-2)-ort)*(t-ort))/N;

R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
end

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1)
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);

```



end

```
dett=prod(q);
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
    fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
    fprintf(fid,'t=y;\n');
    s = char(dett);
    fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
    fprintf(fid,'return;\n\n');
    fclose(fid);
    [tt,fval]=fminbnd(@mesaa, min(x), max(x));
    clear mesaa.m
    clear(s)
err=x(N)-tt
dettt=subs(dett,t,tt);
Hmax=(N/2)*log(2*pi*exp(1))+1/2*log(1/dettt);
```

## Ek-11 Çok Değişkenli MinMaxEnt ile İki Öngörü için Matlab Program Kodları (Simülasyon)

```
%coeff = garchset('R',2,'AR', [-0.8, -0.2],'C' ,0, 'K',0.5 )
%[e,s,x] = garchsim(coeff,50,10);
coeff = garchset('R',1,'AR', [0.8],'C' ,0, 'K',0.04 )
[e,s,x] = garchsim(coeff,50,100);
%coeff = garchset('R',2,'AR', [0.4, -0.7],'C' ,0, 'K',0.5 )
%[e,s,x] = garchsim(coeff,50,100);
N=size(x,1)
NN=size(x,2)
m=2
summ=sum(x);
err=0
error=0
syms t1 %tahmin edilicek ilk gelecek değer
syms t2 %tahmin edilecek ikinci gelecek değer
syms ort
u=1 %gelecek değerler arasındaki pozisyon farkı
w=N-1 %gelecek değerin başlangıç pozisyonu
syms y

for d=1:NN
    clear maplemex
    d
    a=vpa(zeros(1,m+1));
    lamda=vpa(zeros(1,m+1));
    r=vpa(zeros(1,N-1));
    q=vpa(zeros(1,N));
    c0x=0;
    cx=vpa(zeros(1,m));
    top=(summ(d)-x(w,d)-x(w+u,d));
```

```

for i=1:N
    if i==w
        y(i)=t1;
    else
        y(i)=x(i,d);
    if i==w+u
        y(i)=t2;
    else
        y(i)=x(i,d);
    end
end
end

ort=(top+t1+t2)/N;

for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end

r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1

```

```

    k=abs(j-i);
    if j~=i
        R(i,j)=r(k);
    else
        R(i,j)=r0;
    end
end
end

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1)
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end

dett=prod(q);
fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t1=y(1);\n');

```

```
fprintf(fid,'t2=y(2);\n');  
s = char(dett);  
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);  
fprintf(fid,'return;\n\n');  
fclose(fid);  
x0=[1,1]  
[tt,fval]= fminsearch(@mesaa,x0);  
clear mesaa.m  
clear(s)  
err=err+((x(w,d)-tt(1))^2+(x(w+u,d)-tt(2))^2)  
dett=0
```

end

error=err/(2\*NN) %iki gelecek değer tahmini yapıldığı için 2\*NN'e bölünür.

## Ek-12 Yinelemeli MinMaxEnt ile İki Öngörü için Matlab Program Kodları (Simülasyon)

```
coeff = garchset('R',1,'AR', [0.2],'C',0, 'K',0.04 )
[e,s,x] = garchsim(coeff,50,100);
n=size(x,1)
N=size(x,1)-1;
NN=size(x,2);
m=2;
summ=sum(x);
minn=min(x);
maxx=max(x);
er=zeros(1,NN);
SE=0;
for d=1:NN
    l=n-2 % (l+1). pozisyon için MSE hesaplanıyor.
    top=(summ(d)-x(l+1,d)-x(l+2,d));
    d
    while l<n
        clear maplemex
        a=vpa(zeros(1,m+1));
        lamda=vpa(zeros(1,m+1));
        r=vpa(zeros(1,N-1));
        q=vpa(zeros(1,N));
        c0x=0;
        cx=vpa(zeros(1,m));

        syms ort
        syms t;
        ort=(top+t)/N;
        syms y
        for i=1:N
            if i==l+1
```

```

        y(l+1)=t;
    else
        y(i)=x(i,d);
    end
end
end
for i=1:N
    c0x=c0x+(y(i)-ort)^2;
end

for k=1:m
    for i=1:N-k
        cx(k)=cx(k)+((y(i)-ort)*(y(i+k)-ort));
    end
end
r0=c0x/N;
r(1)=cx(1)/N;
r(2)=cx(2)/N;
%r(3)=cx(3)/N;

%R otokovaryans matrisi oluşturuluyor.
R=vpa(zeros(m+1,m+1));
for i=1:m+1
    for j=1:m+1
        k=abs(j-i);
        if j~=i
            R(i,j)=r(k);
        else
            R(i,j)=r0;
        end
    end
end
end
R;

```

```

D=inv(R);
gkare=D(1,1);
a(1)=1;
a(2)=D(2,1)/D(1,1);
a(3)=D(3,1)/D(1,1);
%a(4)=D(4,1)/D(1,1);
%a(5)=D(5,1)/D(1,1);

%Lamdalar hesaplanıyor.
for k=0:m
    for j=0:m-k
        lamda(k+1)=lamda(k+1)+a(j+1)*a(j+k+1);
    end
    lamda(k+1)=lamda(k+1)*gkare;
end
lamda;

%qj'ler hesaplanıyor.
for j=0:N-1
    for k=1:m
        q(j+1)=q(j+1)+2*lamda(k+1)*cos((2*pi*k*j)/N);
    end
    q(j+1)=q(j+1)+lamda(1);
end
q;

% t'ye bağılı Determinant hesaplanıyor.Bu ifade mesaa fonksiyonunun
içine
% yerleştiriliyor.

dett=prod(q);

```



```

fid=fopen('mesaa.m', 'w');
fprintf(fid,'function fu=mesaa(y)\n');
fprintf(fid,'t=y;\n');
s = char(dett);
fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
fprintf(fid,'return;\n\n');
fclose(fid);
[tt,fval]=fminbnd(@mesaa, minn(d), maxx(d));
clear mesaa.m
clear(s)
ttt(l+1,d)=tt;
er(d)=x(l+1,d)-ttt(l+1,d);
SE=SE+(er(d))^2;
x(l+1,d)=tt;
top=top+x(l+1,d);
l=l+1
N=N+1
dett=0;
end
N=N-2
end
MSE=SE/(2*NN)

```