KISITLI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNDE YAPAY DEĞİŞKENLER İLE MEVSİMSELLİĞİN ANALİZİ VE BİR UYGULAMA

Bahar BERBEROĞLU
Doktora Tezi

İstatistik Anabilim Dalı
Kasım-2006

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Bahar Berberoğlu'nun "**Kısıtlı En Küçük Kareler Yönteminde Yapay Değişkenler ile Mevsimselliğin Analizi ve Bir Uygulama**" başlıklı **İstatistik** Anabilim Dalındaki Doktora Tezi 30.10.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı):	**Prof.Dr.EMBİYA AĞAOĞLU**	**………….**
Üye	**: Prof.Dr.ALİ FUAT YÜZER**	**…………..**
Üye	**: Doç.Dr.MAMMADAGHA MAMMADOV**	**…..………**
Üye	**: Doç.Dr. ZEKİ ÇAKMAK**	**…………..**
Üye	**: Yard.Doç.Dr.YELİZ MERT KANTAR**	**…………..**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……………………tarih ve ………………...sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KISITLI EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNDE YAPAY DEĞİŞKENLER İLE MEVSİMSELLİĞİN ANALİZİ VE BİR UYGULAMA

Bahar BERBEROĞLU
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU

2006, 118 sayfa

Regresyon katsayıları arasındaki ilişkiler ile ilgili olarak bazı önsel bilgilere sahip olunabilir. Önsel bilgi örneklemden elde edilir ve önsel bilginin varlığında, etkin parametre tahminlerine ulaşmak için de kısıtlı en küçük kareler yöntemi kullanılır. Bu tezde lineer kısıtların varlığı durumunda kısıtlı en küçük kareler yöntemi incelenmiş ve kısıtların geçerliliğine ait testlerin önemi belirtilmiştir. Ayrıca ortalama hata kare kriteri, kısıtlı en küçük kareler yönteminde önemli bir kriter olması nedeniyle ele alınmıştır. Uygulamada oluşturulan modellerdeki X matrisinin tam sütun ranklı olması durumuna göre çözümlemeler yapılırken, X matrisinin tam sütun ranklı olmaması durumunda çözümlemelere dair yeni yaklaşımlardan da söz edilmiştir. Bu yeni yaklaşımlar özellikle yapay değişkenleri ele almıştır. Ayrıca mevsimsel değişkenler regresyon analizinde yapay değişken biçiminde ifade edilebilmektedir.

Türkiye'de 1999-2005 yıllarına ait üç aylık dönemlerinde işgücü piyasasına ait veriler ele alınarak kısıtlı en küçük kareler yöntemi uygulanmıştır. Yapay değişkenlerden oluşan, farklı trende sahip modeller üzerinde mevsimselliğin varlığı kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Önsel Bilgi, Lineer Kısıt, Kısıtlı En Küçük Kareler Yöntemi, Yapay değişkenler, Mevsimsellik.

ABSTRACT

Dissertation

ANALYSIS OF SEASONALITY IN RESTRICTED LEAST SQUARES METHOD WITH DUMMY VARIABLES AND AN APPLICATION

Bahar BERBEROĞLU

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU

2006, 118 pages

A priori information on some of the relations between the coefficients of regression may be available. This a priori information is received from the sample, and in the precense of a priori information in order to reach efficient estimation of the parameters, Restricted Least Squares (RLS) method is employed. In this thesis RLS is investigated under the precense of Linear Restrictions (constraints) and the importance of the tests about the validity of the restrictions are introduced. On the other hand Mean Square Error Kriteria is handled becouse of its importance in the method of RLS. While the estimations were carried out under the assumption that **X** matrix in the models which was established in last section (Application) of the thesis is full rank, new approaches on the estimation When **X** matrix is not of full rank, is also mentioned. These new approaches especially used dummy variables, and seasonal variables are defined as dummies in regression analysis.

The quarterly data of the Turkish Labour Market in the period between 1999-2005 is held and RLS method is applied. The precense of seasonality in the models which are constructed by dummy variables with different trends are determined with RLS method

Keywords: A priori Information, Linear Restrictions, Restricted Least Squares Method,Dummy Variables, Seasonality.

TEŞEKKÜR

Bu Tezin Hazırlanmasında ve Tüm Akademik
Yaşantım Boyunca Bana Gösterdiği Yakın İlgi ve
Sınırsız Desteğinden Dolayı
Değerli Hocam ve Danışmanım
Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU'na

Yardımlarını Her Zaman Aldığım
Değerli Hocam,
Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER'e
Ve
Değerli Hocam,
Doç. Dr. Mammadagha MAMMADOV'a

Gösterdiği Özveri ve Yaptığı Yardımlardan Dolayı,
Eşim,
Prof. Dr. C.Necat BERBEROĞLU'na

Teşekkür ederim

Bahar BERBEROĞLU
Kasım 2006

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

n	: Örneklem mevcudu
m	: Bağımsız değişkenlerin sayısı
k	: Kısıt sayısı
j	: Tahmin edilmek istenen regresyon katsayılarının sayısı
OHK	: Ortalama Hata Kare
HKT	: Hata Kareler Toplamı
GOHK	: Genelleştirilmiş Ortalama Hata Kare
GSYİH	: Gayri Safi Yurt İçi Hasıla

TABLOLAR DİZİNİ

GRAFİKLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Örneklemden elde edilen örnek bilgisini, parametrelerin bazılarının ya da hepsinin değerlerine ilişkin önsel bilgi ile kaynaştırabilen yöntemlerden birisi de Kısıtlı En Küçük Karelerdir.

Bu yöntem, bir ya birkaç parametrenin aralarında ya da birden fazla parametre için lineer (doğrusal) ilişkiye dair önsel bilginin varlığında kullanılır. Eğer bir parametre önsel bir bilgi ile dışarıdan bilgilendirilmiş ise, bu durum parametrelerin üzerine bir kısıt biçiminde yansıtılabilir. İşte varsayılan kısıt altında kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile kurulan modelde hata kareler toplamı minimumdur. Elbette burada konulan kısıtın da geçerliliği önemlidir.

Bu ilk bölümde, kısıt türleri ve bunlara ait farklı çözüm yolları kısaca incelenecektir. İkinci bölümde ise, konumuz gereği kısıtlı en küçük kareler yöntemi detaylı bir biçimde ele alınarak teorik yapısı irdelenecektir. Yine bu bölümde farklı lineer kısıtların nasıl test edildiği de belirtilecektir. Üçüncü bölümde, son yıllarda gelişen teorik bilgilerin ışığı altında, kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile ilgili farklı yapılar ele alınacaktır ve bu farklı yapılardan birisi, iktisadi bir olay çerçevesinde mümkün tüm detayları ile ele alınarak uygulaması yapılacaktır.

1.1. Kısıt Türleri

Regresyon katsayılarının değerleri söz konusu olduğunda genellikle uygun önsel bilgilere sahip olunamayabilir. Fakat regresyon katsayıları arasındaki ilişkiler ile ilgili olarak bazı önsel bilgilere sahip olunabilir. Örneğin, bir katsayı diğer iki katsayının toplamına eşit olabilir veya bir katsayı geometrik bir dizideki belli katsayılara eşit olabilir. Bu ifade ettiğimiz kısıtlar, katsayılar arasındaki ilişkilerin lineer veya nonlineer (doğrusal olmayan) olup olmadığına dayanır[1].

1.1.1. Lineer kısıtlar

Burada öncelikle lineer ilişki kavramını açıklamak gerekir. Y=f(x) fonksiyonunda y değişkeninin X'e göre lineer (doğrusal) olduğunu ifade edebilmek için $\partial Y / \partial X$ türevi incelenmelidir. Y değişkeni, X'e lineer olarak bağlıysa, Y'deki değişimin, X'deki değişime oranı ya da türevi X'in değerinden bağımsızdır. Y=f(x) fonksiyonunda eğer X yalnızca birinci kuvveti ile fonksiyonda yer alıyorsa, yani X değişkeni için fonksiyonda X^2, $X^{1/2}$ gibi terimler dışlanmışsa ve X başka bir Z gibi değişkenle çarpılmamış ya da bölünmemişse 'Y, X'e göre lineerdir' denir[2].

Parametreler üzerinde kurulan lineer kısıtları belirtmek için, iki model arasında birkaç karşılaştırmanın yapılması konuya belirginlik sağlar. Birinci model:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

ve ikinci model:

$$Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon$$

olsun. Bu iki denklem, eğer sıfır hipotezi $\gamma = 0$ olursa, birbirine eşit olacaktır veya $\gamma = 0$ kısıtlarının kümesine bağlı olarak bunların eşitliğinden söz edilebilir. Burada bu kısıtların konulmasının sebebi modelden belirli regresyon tahmincilerini tamamen devre dışı bırakmaktır ki bu aslında özel bir durumdur.

Bir modelde parametreler üzerine kısıtlar konulması önemli bir düşüncedir. Herhangi bir uygulanabilir lineer kısıt kümesinin doğrudan yer değiştirerek ifade edilebildiği durum şöyledir. Terimlerin yeniden düzenlenmesi ile modelin yeni bir versiyonu üretilir. Bu yeni model kısıtlı parametre tahminlerini içermektedir. Ancak bu parametreler neticede standart regresyon hesabıyla elde edilmişlerdir. Lineer kısıt kümesinin uygulanabilirliği ile anlatılmak istenen ise çelişkiler içeren bir kısıt kümesinin oluşturulmamasıdır. Yani söz konusu küme: $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1$ ve $\beta_2 + \beta_3 = 1$ gibi bir zıt durumu barındırmamalıdır.

$$Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon$$

Eşitliği hem β hem de γ içerdiğinden kısıtsız modeli ifade eder. Aynı zamanda,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

modeline de kısıtsız bir modelmiş muamelesi yapılır. Çünkü bu modelin yapısında kısıtlı ilişkiye yer verilmiştir.

k taneden oluşan lineer kısıt kümesine bağlı olarak tahmin edilmek istenen β parametreleri

$$R\beta = r$$

formunda yazılabilir. Burada R için, matrisin satırlarının lineer bağımsızlığına bağlı kalınarak, tutarsız ve gereksiz kısıtların olasılığı da hariç tutularak oluşturulması önemlidir [3].

1.1.2. Nonlineer kısıtlar

Regresyon katsayıları arasındaki ilişkiler nonlineer olduğunda, nonlineer kısıtlardan söz edilebilir. Katsayılar arasında kurulan bu nonlineer kısıtları açık bir şekilde göstermek için birinci dereceden otoregresif modellerden bahsedilebilir. Bunu gösterirken özellikle,

$$u_t \sim N(0,\sigma_u^2) \text{ ve } E(u_t \varepsilon_{t-1}) = 0$$

belirtilmelidir ve ayrıca

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t ,$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

olarak regresyon denklemi ifade edilir. Otoregresif dağılımda ε_t'nin göz önüne alınması ile, bir dönem önceki regresyon denklemi ρ ile çarpılır ve regresyon denkleminin orijinal formundan çıkartılması ile şu sonuca ulaşılır:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

buradan da

$$Y_t = \alpha(1-\rho) + \beta X_t - \beta\rho X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + u_t$$

denklemi elde edilir. Bu denklem α , β ve ρ parametreleri ile çoklu bir regresyon denklemidir. Bu denklemin kısıtsız hali yazıldığında,

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t$$

elde edilir. Bu iki denklemin karşılaştırılması ile,

$$\beta_1 = \alpha(1-\rho)$$
$$\beta_2 = \beta$$
$$\beta_3 = -\beta\rho$$
$$\beta_4 = \rho$$

katsayılar arası ilişkiler ifade edilebilir. Diğer bir deyişle,

$$\alpha = \frac{\beta_1}{1-\beta_4}$$
$$\beta = \beta_2$$
$$\rho = \beta_4$$

ayrıca

$$\beta_3 = -\beta_2\beta_4$$

olduğu görülür. Burada kısıtsız modelin 4 tane katsayısı varken, kısıtlı modelde 3 parametre olduğu görülmektedir. Buna ek olarak, kısıtsız katsayıların terimlerinde kısıtlı parametrelerden herhangi biri için tek bir çözüm yoktur ve kurulan ilişkilerde de nonlineer durum görülmektedir.

Nonlineer kısıtların geçerliliğini test etmek için aşağıdaki test türleri kullanılmaktadır:

- Benzerlik Oran Testi
- Wald Testi
- Lagrange Çarpan Testi

Genel prensiplere dayanan bu testler nonlineer kısıtları test etmek amacıyla kullanılırken, sadece asimtotik olarak geçerlidirler ve bu yüzden büyük örneklemlerde kullanılırlar.

Benzerlik oran testi, kısıtların doğru olması düşüncesine dayanır. Kısıtlarla maksimize edilen benzerlik fonksiyonunun değeri, kısıtların vurgulanmaması ile maksimize edilen benzerlik fonksiyonunun değerinden çok farklı değildir. Kısıtların ifade edilmesi ile logaritmik benzerlik fonksiyonunun maksimumu $L(\tilde{\beta},\tilde{\sigma}^2)$ olsun ve kısıtların ifade edilmemesi durumunda logaritmik benzerlik fonksiyonunun maksimumu $L(\hat{\beta},\hat{\sigma}^2)$ olsun. Asimtotik olarak,

$$LR = -2[L(\tilde{\beta},\tilde{\sigma}^2) - L(\hat{\beta},\hat{\sigma}^2)] \sim \chi_k^2$$

yazılır. Burada k kısıtların sayısını ifade eder ve kısıtsız katsayıların sayısından, kısıtlı katsayıların sayısı çıkarılarak hesaplanır. Kısıtlı model için,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum \tilde{u}_t^2$$

ve kısıtsız model için,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum \hat{u}_t^2$$

olsun. Bundan sonra,

$$LR = -2\left[-\frac{n}{2}\log(2\pi\tilde{\sigma}^2) - \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2}\sum \tilde{u}_t^2 + \frac{n}{2}\log(2\pi\hat{\sigma}^2) + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum \hat{u}_t^2\right]$$

$$= n[\log\tilde{\sigma}^2 - \log\hat{\sigma}^2]$$

olur. Kısıtsız katsayıların sayısı 4 ve kısıtlı modeldeki katsayı sayısı 3 olduğuna göre, kısıt sayısı 1 olacaktır. Şöyle ki,

$$\beta_3 = -\beta_2\beta_4$$

buradan da,

$$\beta_3 + \beta_2\beta_4 = 0$$

olacağına göre katsayılara bağlı tek bir kısıtın varlığı görülmektedir ve bu kısıt iki katsayının çarpımını da içermektedir. Kısıtların doğru olması koşulu altındaki sıfır hipotezi ile elde edilen şudur:

$$n[\log\tilde{\sigma}^2 - \log\hat{\sigma}^2] \sim \chi_1^2$$

Sıfır hipotezinin red edilmesi durumunda gecikmelerin daha karmaşık veya daha önceki zamanları da içeren bir boyutta olduğu düşünülebilir. Bundan başka, regresyon denkleminin yanlış belirlenmesi söz konusu olabilir.

İkinci bir test türü ise Wald Testi'dir. Bu teste, kısıtlı tahmincilerden çok kısıtsız tahmincilerin kullanılması ile, kısıtların bozulması durumunda başvurulur. Regresyon katsayıları üzerine kurulan kısıtların genel bir ifadesi, sıfır hipotezi olarak şöyle gösterilir:

$$g(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j) = 0$$

Eğer k tane kısıt bulunuyorsa ($k \times 1$) boyutlu bir g(.) vektörü vardır. Wald testi,

$$g(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_j)$$

ifadesinin sıfırdan sapması temeline dayanır. Wald istatistiği ve onun dağılımı,

$$W = g'[\hat{\sigma}^2 - Cov(\hat{g})]^{-1} g \sim \chi_k^2$$

ve burada

$$g' = g(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_j)'$$

olmaktadır.

$$g(.) = \beta_2 \beta_4 + \beta_3$$

kısıtı doğrultusunda hesaplanacak Wald istatistiğinin değeri,

$$W = \frac{(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_3)^2}{\hat{\sigma}^2(g)}$$

formülü aracılığıyla bulunur.

Nonlineer kısıtlara yönelik üçüncü bir test Lagrange Çarpan Testi'dir. Skor Testi olarak da ifade edilen bu test, kısıtsız tahmincilerin yerine kısıtlı tahminciler konulduğunda, benzerlik fonksiyonunu maksimize eden birinci-sıra koşullarının bozulması gerçeğine dayanır. L kısıtsız logaritmik benzerlik fonksiyonunu göstersin. S(β) ise, $(\partial L / \partial \beta)$ olarak skor değerini ifade etsin. $\beta = \hat{\beta}$ olması durumunda S(β) değerlendirilirse, sıfır değerini alır. Eğer $\beta = \tilde{\beta}$ olması durumunda S(β) değerlendirilirse, değeri genelde sıfırdan farklı çıkar. Bu test, $\beta = \tilde{\beta}$ sıfırdan sapması durumunda S(β)'nin değerlendirilmesi temeline dayanır. Buradaki test istatistiği ve onun dağılımı,

$$LM = S(\tilde{\beta})' I(\tilde{\beta})^{-1} S(\tilde{\beta}) \sim \chi_k^2$$

ve burada $\beta = \tilde{\beta}$ olması durumunda

$$S(\tilde{\beta}) = \frac{\partial L}{\partial \beta}$$

olmaktadır.

Buraya kadar anlatılan testler arasından seçim yapmak söz konusu olduğunda, testlerin özellikleri göz önünde bulundurularak, hangisinin kolaylık sağlayacağı belirlenir. Wald Testi, sadece kısıtsız tahmincileri içerir; Lagrange Çarpan Testi, sadece kısıtlı tahmincileri içerir; Benzerlik Oran Testi hem kısıtlı, hem de kısıtsız tahmincileri içerir.

1.1.3. Eşitsizlik kısıtları

Birçok durumda, bir regresyon katsayısı ile ilgili önsel bilgi, belli bir eşitlik olarak verilemez. Bu noktada kısıt eşitsizlik formunu alır ve regresyon katsayısı hakkında önsel bilgi şu şekilde yazılır:

$a \leq \beta_j \leq b$

Burada a ve b bilinen sayılardır ve b>a'dır. Burada görüldüğü üzere, regresyon katsayılarının biri üzerindeki eşitsizlik kısıtına bağlı olarak bir regresyon denkleminin katsayılarını tahminleme işlemi vardır. Bu tür kısıtların, kesin eşitlik şeklindeki kısıtlara nazaran tahmin işlemine katılması, pek kullanışlı olmamaktadır. Burada en basit yol, eşitsizlik kısıtının tamamen göz ardı edilmesiyle β_j'nın en küçük kareler tahmincisini elde etmektir. β_j'nın kısıtlı tahmincisini tanımlamak için şu ifadeler yazılabilir:

$$\begin{array}{lll} \hat{\beta}_j = \hat{\beta}_j^{ORD} & \text{eğer} & a \leq \hat{\beta}_j^{ORD} \leq b \\ \hat{\beta}_j = a & \text{eğer} & \hat{\beta}^{ORD} < a \\ \hat{\beta}_j = b & \text{eğer} & \hat{\beta}^{ORD} > b \end{array} \qquad (1.1)$$

Burada $\hat{\beta}_j^{ORD}$, β_j'nın kısıtsız sıradan en küçük kareler tahmincisidir. Elbette $\hat{\beta}_j$ limitli bir dağılımla sınırlandırıldığından, dağılımı x ekseni boyunca daha uzun bir normal dağılım olamaz. Fakat önsel bilgi doğruysa, örneklem büyüklüğü arttırılır. β_j, a'ya ya da b'ye eşit olmadıkça, eşitsizlik formunda belirtilen aralığın dışındaki sıradan, kısıtsız tahminlerin olasılığı küçülür. Böylece büyük örnekler için, $\hat{\beta}_j$'ların dağılımının normal dağıldığı kabul edilir. Aralığın merkezi β_j'nın gerçek değerine daha yakın olacağından, tahmin daha iyi olacaktır. Bu yaklaşımla eşitsizlik kısıtları bir dezavantaja sahiptir. Bu dezavantaj, β_j hakkındaki bilginin, kalan regresyon katsayılarının tahmininde göz ardı edilmesidir. Bundan dolayı alternatif bir yaklaşım olarak, eşitsizlik kısıtına bağlı maksimum benzerlik fonksiyonunun kullanılmasıyla, regresyon katsayı tahmincilerini elde etmek mümkündür. Bu kuadratik programlamada bir problemdir ve çözümü için Kuhn-Tucker koşullarının uygulanması gerekir. Bu çözüm (1.1) formülünde verilenlerle aynı olmaktadır. Özel bir durum olarak, eğer kısıt ($\hat{\beta}_j^{ORD}$ = a veya b) regresyon katsayılarının tahminlerine bağlıysa, ayrıca β_j = a veya b kısıtı ifade edildikten sonra, β_j değeri sıradan en küçük kareler yöntemi ile elde edilir. Sonuçta elde edilen tahminciler Eşitsizlik (inequality) Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmincileri olarak ifade edilirler.

1.1.4. Stokastik kısıtlar

Bazı durumlarda incelenen konuya ait önsel bilgi bir eşitsizlik kısıtı formunu alır. Bu kısıt kesin olmayan bazı belirsizliklere dayanır. Böylece kesinlikle ileri sürülenin yerine

$$a \leq \beta_j \leq b$$

şeklindeki bir olası durumun varlığı sözkonusu olur. Böyle bir gösterim, β_j ile ilgili olasılıksal bir ifadenin olduğunu gösterir. Böyle bir önsel bilgi olması durumunda, Jan Kmenta'nın da bahsettiği üzere, Theil ve Goldberger β_j'yi bir rassal değişkenmiş gibi işleme alarak Karma Tahmin Metodunu geliştirdiler. Bu metod β_j'nin, aralığın merkezindeki ortalama ile ve aralık uzunluğu dört standart sapmaya eşit olan bir standart sapma ile normal dağılmış bir değişken olduğunu varsayar. Aralığın orta noktasına yakın β_j değerleri, uçtaki değerlerin yani sınırların yakınında yer alanlara oldukça benzerdir ve bu aralıkta yer alan β_j'nin olasılığı 0,9544'e eşittir. Bu varsayımların ışığı altında şunlar ifade edilebilir:

$$\beta_j = \frac{a+b}{2} + u \qquad \text{ve} \qquad (b-a) = 4\sqrt{Var(u)}$$

Burada u, E(u) = 0 ortalama ve Var(u) = $(b\text{-}a)^2$ /16 ile normal dağılır. Karma Tahmin Metodu örneklem tarafından sağlanan bilgi ile regresyon katsayılarının bir veya daha fazlası ile ilgili önsel bilgiyi birleştirir. Bu eşitsizlik, kısıtı eklenen bir gözlemmişçesine kullanılır ve sonra da genişletilmiş örnekleme en küçük kareler yöntemi uygulanması ile Karma Tahmin Metodu gerçekleştirilir.

1.2. Önsel Kısıtların Tahmin Açısından Önemi

Burada tezin bu bölümünü bitirirken önsel kısıtların tahminlerle olan ilişkisindeki bazı noktalara dikkat çekmek yerinde olacaktır. Regresyon katsayıları üzerine konan önsel kısıtlar, aslında anakütle regresyon denklemi hakkında bir bilgiyi temsil etmektedir. Eğer bu bilgi doğru ise, tahmincilerin etkinliği bu bilgi sayesinde artar. Fakat bu etkinliğin hangi ölçüde artacağı öncelikle önsel bilginin özelliğine ya da daha doğrusu özgünlüğüne bağlıdır. Her kısıt, kısıtlayıcı nitelikte olmayabilir. Böyle bir durumda da önsel bilginin değeri göz ardı edilebilir. İkinci olarak ise, kısıtsız tahmincilerin varyanslarına bağlıdır. Esas olarak örneklemin mevcudu büyükdükçe önsel bilginin değeri azalır. Bunun sebebi kısıtsız tahmincilerin genel olarak örnek büyüklüğü arttıkça varyansların azalmasıdır. Böyle olunca da $n \to \infty$ yaklaşırken önsel bilgi işe yaramamaktadır. Fakat tahminler eğer kısıt tarafından belirlenen değerden farklı bir değerin etrafında toplanıyorlarsa, o zaman ya önsel bilgi yanlıştır, ya da geçersizdir. Ayrıca model yanlış da tanımlanmış olabilir. Ne yazık ki, iktisatta örneklemler tipik olarak küçüktür. Bu nedenle önsel bilgi değerlidir ve özellikle kullanılması önerilmektedir[1].

2. KISITLI EN KÜÇÜK KARELER

2.1.Kısıtlı ve Kısıtsız Extramum Noktası ve Lagrange Çarpanı

Varsayalım ki *Y* skaler bir değişken olsun. Yani *Y*, m tane bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olsun. Bu durumda m tane bağımsız değişken sayısı iken,

$x: x_1, x_2, \ldots, x_m$ *ve*

$Y = f(x)$

$Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m\ )$

olmaktadır.

Eğer *x*, E^m olarak gösterilen m boyutlu Euclidean uzayındaki *X* kümesine ait olursa, gradient vektörün sıfır olduğu x üzerinde *f(x)*'i maksimize (minimize) etmek söz konusu olduğunda x^0 için gereklilik ilk sırada yer alan bir durumdur. Şöyleki;

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x^0} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ . \\ . \\ . \\ \partial f/\partial x_m \end{bmatrix}_{\big|x=x^0} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_m \end{bmatrix}_{\big|x=x^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

buradaki $\big|x = x^0$, $x = x^0$'da değerlendirilen türevdir, $f_j = \partial f / \partial x_j$, $j = 1,2,\ldots,m.$ [4].

İkinci durum olan yeterlilik koşulu gösterilirken Hessian matrisinden yararlanılır. Bu matris kısmi ikinci türevler matrisidir ve genel olarak şu formülle ifade edilir[5]:

$$\nabla\nabla h(x) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h(x) \right\}$$

İkinci durum yeterlilik koşulu olarak ifade edilir ve maksimum minimum için $x = x^0$ noktasındaki Hessian matrisidir. Şöyleki,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x=x^0} = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x_1{}^2 \cdots \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_m \\ . \\ . \\ . \\ \partial^2 f/\partial x_m \partial x_1 \cdots \partial^2 f/\partial x_m \end{bmatrix}_{\big|x=x^0} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 \cdots \partial f_1/\partial x_m \\ \partial f_2/\partial x_1 \ldots \partial f_2/\partial x_m \\ \vdots \\ \partial f_m/\partial x_1 \cdots \partial f_m/\partial x_m \end{bmatrix}_{\big|x=x^0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x=x^0} = \begin{bmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1m} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2m} \\ \vdots \\ f_{m1} f_{m2} \cdots f_{mm} \end{bmatrix}_{\big|x=x^0}$$

matrisi negatif tanımlı yada pozitif tanımlıdır ve buradaki

$$f_{ij} = f_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{i, j = 1, 2, …, m}$$

olarak tanımlanır.

Burada $Y = X\beta + \varepsilon$ regresyon modelindeki ε'ye bağlı olarak hesaplanan hata kareler toplamının minimize edilmesi işlemine ait bir optimizasyon tekniği uyguladığında problem şöyle tanımlanabilir. β'nın uygun seçimi için hata kareler toplamını ifade eden fonksiyon şöyledir:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

Bu fonksiyon için birinci durum olan gereklilik koşulunu şöyle ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

Özellikle belirtilmelidir ki, $X'X$ tekil olmayan (nonsingular) bir matristir. Bu minimizasyon işleminde β'nın tahmini olarak $\hat{\beta}$ şu formül ile bulunur:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Daha sonra ikinci durum olan yeterlilik koşulu yerine getirilir. Burada X matrisinin tam ranklı (= m + 1) olduğunu varsaydığımızdan ve $X'X$ pozitif tanımlı olduğundan bu koşul yerine getirilir ve böylece,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} = 2(X'X)$$

pozitif tanımlı olur.

Kısıtlı optimizasyon durumu ele alındığında, k tane kısıt ve m tane de bağımsız değişken olduğunu varsayalım.

$g_i(x) = 0$ i=1,2,…,k ve m>k

olmak üzere

x = (x_1 x_2 … x_m)

olsun. Böylece hata kareler toplamının minimize edilmesi problemine ait *f(x)* fonksiyonu

g(x) = 0' bağlı bir fonksiyon olsun. Burada

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Lagrange çarpanları metodu ile k kısıt için k yeni değişken düzenlenir:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$$

Bunlar Lagrange çarpanları olarak ifade edilir ve bunların yardımı ile Lagrange fonksiyonu tanımlanır:

$$L(x,\mu) = f(x) - \mu' g(x)$$

Açıktır ki, L skalerdır ve x ve μ da m+k değişkenin bir fonksiyonudur. Gereklilik koşulu olan birinci durumda L'nin minimumu için tüm m+k'ların birinci kısmi türevlerinin sıfıra eşit olması gerekir. Şöyleki ,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu' g(x)) \\ -g(x) \end{bmatrix} = 0$$

olur. Böylece $g(x^0) = 0$ kısıtları x^0 çözümünde karşılaştırılır ve bu yüzden

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^0} = \mu \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x^0}$$

olur. k lineer kısıtlarına bağlı hata kareler toplamını minimize etmek için yaygın olarak matris formunda lineer kısıtlar şöyle gösterilir:

$$R\beta = r$$

Kısıtlar bu şekilde ifade edildikten sonra Kısıtlı En Küçük Kareler yöntemi Lagrangean fonksiyonu yardımıyla çözümlenir[4].

2.2.Kısıtlı En Küçük Kareler Yöntemi

Genel olarak regresyon modelini şu şekilde ifade ederiz:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1}$$

Y : (n×1) boyutlu vektör

X : (n×j) boyutlu matris

β : (j×1) boyutlu vektör

ε : (n×1) boyutlu vektör

Burada j sayıda tahmin edilmek istenen regresyon katsayısı vardır. k lineer kısıtı göstermenin yaygın şekli

$$R\beta = r$$

olarak yazılabilir. Burada

R: (k×j) boyutlu bilinen sabitlerin matrisi,

β : (j×1) boyutlu regresyon katsayılar vektörü,

r : (k×1) boyutlu bilinen sabitler vektörü olmaktadır.

Kısıtlı en küçük kareler yönteminde söz konusu kısıtlar altında hata kareler toplamını minimize etmek gibi bir amaç olduğundan, bu minimizasyon problemi Lagrangean çarpanlarının yardımı ile çözülebilir.

$$R\beta - r = 0 \tag{2.2}$$

kısıtı ile minimize edilmek istenen fonksiyon

$$S(\beta) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır. En Küçük Kareler'de hata kareler toplamının minimizasyon problemini Lagrangean formülasyonu ile şöyle çözeriz:

$$L(\beta, \mu) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) - 2\mu'(R\beta - r) \tag{2.4}$$

μ: Lagrangean çarpanlarının (k×1) boyutlu vektörüdür.

β: kısıtlı en küçük kareler tahmincisidir.

Minimizasyon koşulları şöyle verilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}^* - 2R'\mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} &= -2(R\hat{\beta}^* - r) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.5) no'lu formüllerde yazılan bu sistem bölümlendirilmiş matris şeklinde ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} X'X & R' \\ R & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\beta}^* \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ r \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$W \times d = v \tag{2.7}$$

$$d = W^{1} v \tag{2.8}$$

Daha açık bir şekilde yazmak gerekirse,

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}^* \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & R' \\ R & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} X'Y \\ r \end{bmatrix}$$

Olmaktadır ve burada

$W^{-1} = \begin{bmatrix} X'X & R' \\ R & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ $v = \begin{bmatrix} X'Y \\ r \end{bmatrix}$ $d = \begin{bmatrix} \hat{\beta}^* \\ \mu \end{bmatrix}$ ile işlem gerçekleştirilmektedir.

Tüm bu matris işlemlerinden de anlaşılacağı üzere, d bölümlendirilmiş vektörünün üst vektörü Kısıtlı En Küçük Kareler tahmincilerini barındıran $\hat{\beta}^*$ vektörüdür[6].

Ayrıca $\hat{\beta}^*$ için çözümlemelerde Sıradan En Küçük Kareler Tahmincisi olan

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \tag{2.9}$$

de kullanılır ve şöyle ifade edilir:

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X'X)^{-1} R'\mu$$

μ'yü çözmek için R ile üstteki eşitliğin önden çarpılması gerekir:

$$R\hat{\beta}^* = R\hat{\beta} + R(X'X)^{-1} R'\mu$$

$R\hat{\beta}^* = r$ kısıtını yerine kullanırsak,

$$r = R\hat{\beta}^* = R\hat{\beta} + R(X'X)^{-1} R'\mu \tag{2.10}$$

Bunun tekrar düzenlenmesi ile

$$\mu = \left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} (r - R\hat{\beta}) \tag{2.11}$$

elde edilir. Böylece son olarak,

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} (r - R\hat{\beta}) \tag{2.12}$$

$\hat{\beta}^*$: kısıtlı en küçük kareler tahmincisi

$\hat{\beta}$: sıradan (kısıtsız) en küçük kareler tahmincisi

olmak üzere yukarıda verilen bu denklem Kısıtlı En Küçük Karelerin parametre tahminleri ile Sıradan En Küçük Kareler tahminlerinin arasındaki ilişkiyi gösterir[3].

$S = X'X$ kısaltmasının kullanılmasıyla (12) nolu denklem şu şekilde de yazılır[7]:

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + S^{-1} R'\left[RS^{-1} R'\right]^{-1} (r - R\beta)$$

Birçok kaynakta ve kitapta kısıtlı en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}^*$ formül (2.12)'deki gibi tanımlanmaktadır ve bu tanım sıradan en küçük kareler tahmincisini de içeren bir tanımlamadır. Ancak (2.6), (2.7) ve (2.8) nolu matris gösterimleri sayesinde kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^*$'nın çözümü hem daha basit hem de sıradan en küçük kareler tahmincisine başvurulmadan gerçekleştirilen bir çözümdür. (2.6), (2.7) ve (2.8) nolu formüller ile elde edilen matris gösterimleri katsayılar matrisinin tam ranklılığını gerektirmeyen kısıtlı en küçük kareler tahmincisini ve onun kovaryans matrisini ifade edebilmektedir. Formül (2.12)'deki gibi standart gösterimler, kısıtsız tahminciye dayandığından kısa ranklı durumda kullanışsızdır. Formül (2.12) açıklayıcı değişkenlere ait *X* matrisinin full (tam) ranklı olması durumunda kullanılabilen bir formüldür[8].

Burada full rank özelliği için şu açıklamaların yapılması yerinde olacaktır. Bir A matrisinin sütun (kolon) rankı bu A matrisinde lineer olarak bağımsız kolonların maksimum sayısıdır. Benzer biçimde bu sıra rankı için de geçerlidir[9]. Şöyle ki, bir matris eğer sütun (satır) sayısına eşit ranka sahipse o matris full (tam) sütun (satır) ranklıdır [10]. Eğer bir A_{mxn} matrisinin sütun rankı n değerine eşitse o zaman A matrisi full sütun ranklıdır. Eğer sıra rankı m değerine eşitse aynı şekilde matris full sıra ranklıdır[9]. Genel olarak buradaki A matrisinin rankı ise şöyle belirtilebilir[11]:

$$Rank(A) \leq \min(m, n)$$

Ama kısıtların varlığında kısıtlı en küçük kareler tahmincisi kısıtsız tahminciye başvurulmadan da hesaplanabilmektedir. Birçok kaynakta *X* matrisinin tam ranklı olduğu aynı şekilde farz edilir ve *X'X* matrisi olan S'nin tekil olma durumu göz ardı edilir ama tahminin hesabı kısıtlardan ötürü hala mümkündür. Böylece *X*'i tam ranklı yapmak için kesin bir şekilde yeterli kısıtın çözümlendiğine dair zımni bir varsayım vardır. Klasik regresyon modelinin bu yorumunda *X*'in tam ranklı olması gerektiği biçiminde bir koşul yoktur.

Sırasıyla (2.6), (2.7) ve (2.8) ifadeleri tekrar göz önüne alındığında, $Wd = v$ formülü (j+k) lineer denklemlerinin bir sistemidir. Denklemlerin bu sistemi kısıtlı en küçük kareler tahmincisini tanımlar. S matrisi tekil olsa bile *W* matrisi tekil olmayabilir.

Formül (2.12) eğer $rank(X'X) = j$ olursa geçerlidir ama bu tek bir çözüme sahip formül (2.6) için gerekli değildir. Formül (2.6), $rank(W)=j+k$ olduğu sürece tek bir çözüme sahip olacaktır. Böylece bu kısıtların kombinasyonudur ve tahminci için yeterli katsayılar vardır. $d = W^{1} v$ formülü hem tam ranklı, hem de kısa ranklı durumlar için geçerlidir[8].

Tekrar $\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - R\hat{\beta})$ formülü ele alındığında şunu söylemek mümkündür: Kısıtlı en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}^*$, kısıtsız en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}$ ile düzeltme teriminin toplamından oluşur. Bu düzeltme terimi β tahmincisi için geçerli olan $R\beta = r$ kesin (exact) kısıtını doğrulayan bir terimdir[7]:

$$R\hat{\beta}^* = R\hat{\beta} + \left[RS^{-1}R'\right]\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}(r - R\beta)$$

Eğer $R\beta - r = 0$ kısıtları geçerli ve $E(u)=0$ ise, kısıtlı en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}^*$ yansızdır. İleride kısıtlı tahmincilerin özelliklerine değinilecektir ve böylece yansızlık özelliğinden de bahsedilecektir. Eğer $R\beta \neq r$ ise, kısıtlı en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}^*$ genellikle yanlıdır. Bu yansızlık konusuna ileride tekrar ayrıntılı olarak değinilecektir. Fakat konu gereği burada değinilmiştir. Böylece $\hat{\beta}^*$ yanlı olsun ya da olmasın $Var(u) = \sigma^2 I$ olacaktır ve $\hat{\beta}^*$'nın varyansı şöyle gösterilir:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}^*) &= Var(\hat{\beta}) - \sigma^2 (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1} \\ Var(\hat{\beta}^*) &= \sigma^2 (X'X)^{-1} - \sigma^2 (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1} \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Biçimsel analizi tamamlamak için F test istatistiği düşünülebilir. Eğer dağılımlar normal ise, kısıtsız tahminci $\hat{\beta}$ da normaldir ve

$$\hat{\beta} \sim N\left[\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow (R\hat{\beta} - r) \sim N\left[R\beta - r, \sigma^2 R(X'X)^{-1}R'\right] \qquad (2.14)$$

$R\beta = r$ sıfır hipotezi altında,

$$(R\hat{\beta} - r) \sim N[0, \sigma^2 R(X'X)^{-1}R']$$

ve

$$(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/\sigma^2 \sim \chi^2_k. \qquad (2.15)$$

Öncelikle $\hat{\beta}^*$ ve $\hat{\beta}$ arasındaki ilişkiyi veren formül ele alınırsa şu ifade yazılabilir:

$$e_R = y - X\hat{\beta}^*$$

$$e_R = y - X\hat{\beta} + X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta - r)$$

Böylece

$$e_R = e + X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta - r) \tag{2.16}$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı kareler toplamı formunda yazılırsa ve
$X'e = 0$ olduğundan,

$$e_R'e_R = e'e + (R\beta - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta - r)$$

veya

$$SSR_R - SSR = (R\beta - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\beta - r) \tag{2.17}$$

SSR_R : Kısıtlı regresyondan elde edilen artık kareler toplamı
SSR : Kısıtsız regresyondan elde edilen artık kareler toplamı
olmaktadır. Sonuç olarak bu formül kısıtlı ve kısıtsız regresyon modellerine ilişkin artık kareler toplamlarının arasındaki farkı ifade eder ve

$$H_0 : R\beta = r$$

hipotezi altında

$(SSR_R - SSR)/\sigma^2 \sim \chi^2_k$ olur[3]. (2.18)

Dağılımların normal olduğu varsayımı altında $e'e$'yi göstermek için *cov(b,e) = 0* olması yeterlidir.

$$e'e/\sigma^2 = SSR/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-j}$$

(2.17)'de verilen formülün sağ tarafındaki kuadratik form bağımsızdır.
Böylece $(SSR_R - SSR)/\sigma^2$ ve SSR/σ^2 bağımsızdır. $H_0 = R\beta = r$ hipotezi altında

$$F = \left[(SSR_R - SSR)/k\right]/\left[SSR/(n-j)\right] \sim F_{k,n-j} \tag{2.19}$$

olarak F test istatistiği geçerli olur[3].

(2.19) nolu formül 'Başparmak F istatistiği kuralı' olarak da ifade edilebilmektedir. $H_0 : R\beta = r$ kısıtı altında, k kısıt sayısını, n örneklem mevcudunu ve j de kısıtsız regresyonda tahmin edilmek istenen parametre sayısını ifade eder. Başparmak F istatistiği kuralının alternatif bir formülü iki regresyonun belirlilik katsayıları olan R^2'lerine dayandırılmaktadır[12]:

$$F = \frac{(R^2 - R_R^2)/k}{(1 - R^2)/(n-j)}$$

R^2 : Kısıtsız regresyondaki belirlilik katsayısı
R_R^2 : Kısıtlı regresyondaki belirlilik katsayısı

$Var(\hat{\beta}^*)$'yi basit bir gösterimle ifade etmek mümkündür. Kısa rank durumunda (2.13) nolu formülün sağ tarafı tanımlanamaz. Ama formül (2.7)'deki *W*'nin tam ranka sahip olduğu tüm durumlarda kısıtlı en küçük karelerin kovaryans matrisi tanımlanır. *r* matrisi non-stokastik olduğu sürece *Var(v)* matrisinin sol üst bloğu dışındaki tüm terimleri sıfıra eşittir. Sıfırdan farklı olan bölüm şudur:

$$Var[X'y] = Var[X'(X\beta + \varepsilon)] = Var[X'\varepsilon]$$

Böylece

$$Var\begin{bmatrix} \hat{\beta}^* \\ \mu \end{bmatrix} = W^{-1}Var(v)W^{-1'} = W^{-1}\begin{bmatrix} \sigma^2 X'X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}W^{-1'}$$

olur. Matrisinin sol üst bloğu $Var(\hat{\beta}^*)$'ye eşittir. Bu matris gösterimi şöyle basitleştirilebilir: W^{-1} matrisinin sol üst bloğu σ^2ile çarpılarak matris ürününün sol üst bloğu elde edilir. Bunu oluşturmak için *W*'nin inversi (tersi) parçalı matris biçiminde şöyle ifade edilir:

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Burada doğrudan çarpım ile $Var(\hat{\beta}^*)$'nin uygun gösterimi bulunur:

$$Var(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 C_{11} X'X C_{11}$$

W'nin tersi (inversi) ile *W*'nin sondan çarpımı sonucunda ortaya çıkan birim matrisin dört parçası şunlar olacaktır:

$$\begin{aligned} X'XC_{11} + R'C_{21} &= I_j \\ X'XC_{12} + R'C_{22} &= 0 \\ RC_{11} &= 0' \\ RC_{12} &= I_k \end{aligned}$$

Bu dört parçanın birincisi $\sigma^2 C_{11}$ ile önden çarpılır. Sol taraftaki toplamın sonucundaki ikinci terim üçüncü denklemden dolayı (üçüncü denklemin transpozu ile) bir sıfır matrisine dönüşür. Böylece elde edilen sonuç şu olur: kısıtlı en küçük kareler tahmincisinin kovaryans matrisi, $\sigma^2 W^{-1}$'in alt matrislerinden sol üstteki $\sigma^2 C_{11}$'dir.

Formül (2.13)'deki kompleks hesaplama, j×j boyutlu $\sigma^2 W^{-1}$'in alt matrisine basitçe indirgenir. Tam ranklı durumda da (2.13)'deki varyans matrisini üretmek için ayarlamalar, yukarıdaki gibi yapılabilir. Bu metot ayrıca tam ranklı durumda $\hat{\beta}^*$ ve μ'nün açıkça gösterilebilmesi için de kullanılabilmektedir.

X tam ranklı olduğunda Lagrange çarpanlarının vektörü formül (2.11) de gösterilmişti. Her Lagrange çarpanı sıfırdan farklıdır ve kısıt değiştirildiğinde hata kareler toplamının (HKT) da değişeceğini gösterir. Ayrıca kısıtlı tahmincinin bir başka gösterim ile ifadesi şu şekilde olabilir:

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'\mu$$

Kısıtlı hata kareler toplamı için,

$$\begin{aligned} e_R'e_R &= e'e + (Rb - r)'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(Rb - r) = e'e + \mu'(Rb - r) \\ &= e'e + \textstyle\sum_i \mu_i (R_i b - r_i) \end{aligned}$$

olur. R_i ve r_i , i'inci kısıtı tanımlar. Bu formül hata kareler toplamındaki artış için her kısıtın katkısını gösterir.

Genel olarak birçok standart ders kitabında kısıtlı en küçük kareler ele alındığında, *X* matrisinin tam sütun ranklı olmaması durumuna dair açıklamaların başarısız ya da yetersiz olduğu görülmektedir. Aslında *(X'X)* matrisine ait tersin alınması temel ya da esas amaç olduğu durumda, gerektiği kadar çok kısıtın tam olarak çözümlenmesi için yani tam rank sorununu çözmek için gerekli olacaktır. Bu sebeple bir ders kitabının X'in her zaman tam ranklı olduğunu varsayması için bir neden yoktur. Kısıtlı tahminciyi kısıtsız tahmincinin bir fonksiyonu olarak kabul eden genel sunum ve kısıtlı ile kısıtsız tahminler arasındaki farklar *X*'in tam sütun ranklı olduğu özel durum için geçerli olarak tanımlanmaktadır[8].

Greene ve Seaks'ın bu çalışması ışığında, Haisken De-New ve Schmidt farklı bölgelerde ikamet eden veya farklı endüstrilerde çalışan işçilerden oluşan bireylerin oluşturduğu gruplar arası ücret farklılıkların ölçülmesi için oluşturulan modelde Kısıtlı en küçük kareleri kullanmışlardır. Bu çalışmanın tamamında kullanılan regresyon modeli şöyledir:

$$y = \delta Z + \beta X + \varepsilon$$

Bu modelde *y*, n×1 boyutlu bağımlı değişken vektörüdür. *Z* regresörlerin n×g boyutlu matrisidir. *X* ilk elementi sabit terimi ihtiva eden ve bölge ya da endüstri olarak bahsedilen gruplar için k tane göstergeyi de barındıran n×(k+1) boyutlu matristir. Bu modeldeki parametreler ise, sırasıyla *δ*, g×1 ve *β*, (k+1)×1 vektörlerdir. Elbette ε de rassal hatalar vektörüdür. Tahmin sürecinde vektör üzerine, regressörlerden oluşan matrisin tersinin alınabilmesi için bir kısıt konulması gerekmektedir. Birçok durumda bireysel grup katsayıları ağırlıklı ortalamadan en fazla etkilenen sapmalar olarak ifade edilir ve böylece kısıt şöyle ifade edilir:

$$w'\beta = 0$$

Burada ağırlıklı ortalamalar ise şöyledir:

$$w = (0, w_1, \ldots, w_k)' \quad ve \quad i = (1, \ldots, 1)' \quad için \quad w'i = 1$$

Greene ve Seaks (1991) bu prosedürün kısıtlı en küçük kareler sürecine doğrudan nasıl uygulandığını göstermişlerdir. Haisken De-New ve Schmidt'in araştırmasına uygun olarak katsayı tahminleri şöyle olmuştur:

$$\begin{bmatrix} d^* \\ b^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'Z & Z'X & 0 \\ X'Z & X'X & w \\ 0 & w' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z'y \\ X'y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z'y \\ X'y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Burada λ, kısıtla bir arada bulunan Lagrange çarpanıdır. Hesaplanan parametrelerin varyans-kovaryans matrisi de şöyledir:

$$V\begin{pmatrix} d^* \\ b^* \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Bunun sonucunda hem duyarlı katsayılar elde etmek, hem de bunların doğru standart hatalarına tek bir regresyon işlemi sayesinde ulaşabilmek mümkün olmaktadır[13].

2.3. Kısıtlı Regresyon Modelinin Anlamlılığının Test Edilmesi

2.3.1. Lineer kısıtlar kümesinin testi

Başlangıç olarak lineer regresyon modeli tekrar şöyle yazılabilir:

$Y = X\beta + \varepsilon$

Lineer kısıtların kümesi şu şekilde düşünülebilir:

$$R_{11}\beta_1 + R_{12}\beta_2 + \ldots + R_{1j}\beta_j = r_1$$
$$R_{21}\beta_1 + R_{22}\beta_2 + \ldots + R_{2j}\beta_j = r_2$$
$$\vdots$$
$$R_{k1}\beta_1 + R_{k2}\beta_2 + \ldots + R_{kj}\beta_j = r_k$$

Bu K tane denklem tek bir denklem içinde birleştirilebilir:

$$R\beta = r$$

Burada *R*'nin her satırı bu K tane kısıtların her birinin içindeki katsayılardır. *R* matrisi β'lar ile uyuşan J tane sütuna, K kısıtlarının bir toplamı için K tane satıra sahiptir. Dolayısıyla bu matris K×J'lık bir matristir ve K, J'ye eşit veya daha az olması gerektiğinden, *R* tam satır ranklıdır. *R*'nin satırları doğrusal olarak bağımsız olmalıdır. Buna rağmen K=J'nin durumu *R*'nin bu doğrusal bağımsızlığını ihlal etmez. Eğer J, K=J kısıtını sağlıyorsa, *R* karedir ve tekil değildir. Böylece,

$$\beta = R^{-1}r$$

olur.

$R\beta = r$ kısıtı, J'de K kısıtlarını ifade eder, diğer taraftan β bağımsız parametrelerdir. Bu vurgulanan ya da belirtilen kısıtla, kural olarak sadece J-K sayıda bağımsız parametrenin kaldığı anlaşılmaktadır. Bunu görebilmek için bir yol, *R* matrisinin iki gruba bölünmesi ile mümkündür. Bu iki grubun birinde J-K, diğerinde de K sütunları bulunmalıdır. Böylece ilk set doğrusal olarak bağımsızdır. Sonra aynı şekilde β'nın bölümlendirilmesi ile ve aynı zamanda onun elementlerinin ihtiyaç duyulan herhangi bir şekilde yeniden sıralanması ile şu ifade yazılabilir:

$$R\beta = R_1\beta_1 + R_2\beta_2 = r$$

Eğer R_1'in K kolonları bağımsızsa,

$$\beta_1 = R_1^{-1}[r - R_2\beta_2]$$

olur. Her ne kadar β_2 değişmek için serbest ya da bağımsız olsa da önceden belirlenmiştir. Böylece sadece β_2'nin J-K elementi modellerdeki bağımsız parametrelerdir.

2.3.2. K Lineer kısıtın test edilmesi

$H_0 : R\beta = r$ hipotezi altında k tane lineer kısıtın bir kümesini düşünelim. R'nin her satırı katsayılara bağlı olarak tek bir lineer kısıtı göstermektedir. Lineer kısıtlar doğrultusunda lineer yapıdaki ilişkilerin farklı durumları söz konusu olabilir:

- Katsayıların birinin sıfır olması durumu,

$\beta_j = 0$:

R = [0 0 … 1 0 … 0]   ve   r = 0

- Katsayıların ikisinin birbirine eşit olması durumu,

$\beta_k = \beta_j$:

R = [0 0 1 … -1 … 0]   ve   r = 0

- Katsayıların bir kümesinin toplamının 1'e eşit olması durumu,

$\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$:

R = [0 1 1 1 0 …]   ve   r = 1

- Katsayıların bir alt kümesinin, hepsinin sıfıra eşit olması durumu,

$\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ ve $\beta_3 = 0$:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya $R\beta = r$ eşitliğine uygun bir şekilde yazılması mümkündür. Şöyleki,

$[\ I : 0\ ]\beta = 0$

- Birkaç kısıta aynı anda sahip olunması durumu[6],

$\beta_2 + \beta_3 = 1$, $\beta_4 + \beta_6 = 0$ ve $\beta_5 + \beta_6 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Klasik regresyon modelinde, *X*'ler için sabitlik varsayımı ve dağılımların normal olmasını içeren klasik regresyon varsayımları altında $H_0 : R\beta = r$ hipotezine karşın $H_1 : R\beta \neq r$ alternatif hipotezi kurulur. Kısıtlara bağlı ve kısıtlara bağlı olmayan iki regresyonun artık kareler toplamının karşılaştırılmasına dayanan F testi ile bu hipotezler test edilir. Bu test istatistiği denklem (2.19) formülünde verildiği üzere,

$$F = \left[(SSR_R - SSR)/k\right] / \left[SSR/(n-j)\right] \sim F_{k,n-j}$$

biçimindedir.

Sıfır hipotezi altında (2.19) formülünde hesaplanan istatistik k ve (n-j) serbestlik derecesi ile F dağılımına sahiptir. %5 anlam düzeyinde eğer hesaplanan F değeri k ve (n-j) serbestlik derecesi ile bulunan değerden daha büyük ise $H_0 : R\beta = r$ hipotezi red edilir ve karşılığında $H_1 : R\beta \neq r$ hipotezi kabul edilir. Burada belirtilmelidir ki,

j: kısıtsız modelde tahmin edilmek istenen regresyon katsayılarının sayısı

k: $R\beta = r$ matrislerindeki doğrusal bağımsız satırların sayısıdır yani kısıtların sayısıdır[3].

2.3.3. Bir tane lineer kısıtın test edilmesi

Sadece bir tane lineer kısıtın test edilmesi durumunda hipotez şöyle yazılsın:

$$H_0 : q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \ldots + q_j\beta_j = q'\beta = r$$

Burada genellikle bazı q'ların sıfır değerini alabileceği düşünülür. $q'\beta$'nın örnek tahmini için yukarıdaki hipotez göz önüne alınarak şu ifade yazılabilir:

$$q_1b_1 + q_2b_2 + \ldots + q_jb_j = q'b = \hat{r}$$

Eğer $\hat{r}$, r'den anlamlı bir şekilde farklı ise, örnek verilerinin H_0 hipotezi ile tutarlı bir durumu olmadığı sonucuna varılır. Bunun için aşağıdaki formül ile şu test istatistiğinden yararlanılır:

$$t = \frac{\hat{r} - r}{\hat{\sigma}(\hat{r})}$$

Burada paydada görüldüğü üzere $\hat{r}$'nın standart hatasının tahminine ihtiyaç vardır. $\hat{r}$, b'nin doğrusal bir fonksiyonu olduğundan ve b'nin kovaryans matrisi tahmin edildiğinden, $\hat{r}$'nın tahmini varyansı şöyle olmaktadır:

$$Var[\hat{r}] = q'[\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}]q$$

t istatistiğinin paydası, $\hat{r}$ tahmini varyansının kareköküne eşittir. t, gerçek katsayılar göz önünde bulundurularak hipotez edilmiş fonksiyon ile, bu katsayılarının tahminlerinin aynı fonksiyonu arasındaki standart hataları arasındaki farka dayanır. Eğer bu hipotez doğru bulunursa, bu durum aynı zamanda örnek değişkenliğinin de minimum olduğunu gösterir[6].

2.3.4. Kısıtların büyük örneklem testleri

F testi, dağılımların normalliğini içeren klasik regresyon modelinin tüm varsayımlarının kullanılmasıyla tanımlanmıştır, ama bu varsayımların bazılarında olası esnemelerin (sapmaların) olduğu iki önemli durum vardır. Eğer dağılımlar IID(0,σ^2) ise, yani 0 ortalama ve σ^2 varyans ile bağımsız olarak özdeş dağılıyorsa, ama normal değilse, büyük bir örneklemde yaklaşık olarak (2.19)'daki ifadeyi tartışmak mümkündür. Böylece H_0:$R\beta = r$ hipotezi altında ve büyük bir örneklem mevcudu (=n) için

$$(SSR_R - SSR)/\sigma^2 \text{ yaklaşık } \chi^2_k \tag{2.20}$$

(2.20)'de verilen büyük örneklem teorisi, eğer H_0 doğru ise, herhangi bir tutarlı tahminci tarafından σ^2 yerleştirildiğinde artıklar geçerlidir ve bu kısıtsız tahminciyi de içerir:

$$\hat{\sigma}^2 = e'e/(n-j)$$

ve kısıtlı tahminci

$\hat{\sigma}_R^2 = e_R' e_R /(n - j + k)$

olmaktadır. Bu tahmincilerin sadece tutarlı olmasından dolayı, serbestlik derecesi için tam bir ayarlamaya gerek yoktur ve her iki durum için de bölen kısmında n kullanılabilir. Diğer taraftan serbestlik derecesinin ayarlanması, uygulama özelliklerine özgü bazı şüpheleri hesaba katar. Bu uygulama özellikleri, bazı kısıtlı durumlarda sonlu bir örneklemden gelen sonuçlara bağlı kalır. (2.20)'deki formülün büyük bir örneklem içindeki normal olmayan dağılımın örneği olduğunu iddia edebileceğimiz gibi, *X* matrisinin bazı sütunlarının tesadüfi olması, fakat dağılımların ilişkisiz olması durumunda da benzer anlamda yaklaşık bir dağılım iddiasında da bulunabiliriz. Böyle bir modelde (2.20) formülünü büyük bir örneklem testine genellikle uygulamak mümkündür. Fakat dağılımlar arasında önemli düzeyde bir korelasyon olmaması gerekmektedir ve temel olarak kullanılan fark denklemi istikrarlı olmalıdır.

Her ne kadar (2.20)'u oluşturmamıza yarayan büyük örneklem teorisi F testinin uygulamasına tam olarak yeterli olmaz. Burada genellikle yapılan χ^2 testi yerine standart bir F testi bulup uygulamaktır. Eğer $\hat{\sigma}^2$ (2.20)'deki dağılımın varyansını tahmin etmek için kullanılır ise, F istatistiği ile χ^2 istatistiği arasındaki ilişki kF = χ^2 olacaktır. Belirli bir nominal anlamlılık düzeyinde χ^2 testi, $F_{k,\infty}$ kritik değerinin *g* ile çarpılması sonucunda elde edilen kritik değeri kullanır. Buna rağmen bu değer, herhangi bir sonlu örneklem için $F_{k,n-j}$ kritik değerinden daha küçüktür. Böylece F testi, χ^2'den daha az sıklıkla sıfır hipotezini red eder. Bu sonuç, χ^2 testindeki gerçek anlamlılık düzeyinin genellikle büyük örnek teorisindeki nominal anlamlılık düzeyinden daha yüksek olduğunu göstermektedir.

2.4. Kısıtlı Tahmincilerin Özellikleri

Denklem (2.19)'daki F testi, $R\beta = r$ kısıtlarının geçerliliğinin bir testi olmaktadır. Burada F değeri artık kareler toplamının kısıtlı ve kısıtsız değerlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilir. Buna paralel olarak da geçersiz doğrusal kısıtların varlığı genellikle kısıtlı tahmincilerin yanlı olmasına sebep olur. Kısıtlı tahminciler, kısıtsız tahmincilerin varyansına eşit veya daha küçük varyansa sahiptir ve dolayısıyla geçerli kısıtlar etkin bir tahmincinin kullanılmasına sebep olur. Geçerli kısıtlar için klasik varsayımlar altında kısıtlı tahminci en iyi lineer (doğrusal) sapmasız (BLUE) tahmincidir[3].

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda yansızlık ve kısıtsız tahmincilere göre daha küçük varyansa sahip olma durumu olan etkinlik şöyle ifade edilebilir:

Yansızlık: Eğer $R\beta = r$ geçerli ise, o zaman kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^*$ yansızdır.

Şöyleki:

$S = X'X$ olmak üzere,

$$E(\beta^*) = \beta + S^{-1}R'\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}(r - R\beta)$$

olmaktadır. Bu ifadeye göre kısıtlar geçerli olduğu zaman, $r - R\beta = 0$ olduğundan,

$$E(\beta^*) = \beta$$

olacaktır.

Etkinlik: Daha önce formül (2.13)'de de ifade edildiği üzere,

$$Var(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 S^{-1}R'\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}RS^{-1} \qquad (2.21)$$

olarak R'ye dayanan $\hat{\beta}^*$'nın kovaryans matrisini de göstermektedir. $\hat{\beta}^*$ kısıtlı tahmincisinin $\hat{\beta}$ kısıtsız tahmincisi ile karşılaştırıldığında daha küçük varyansa sahip olduğu da aşağıdaki şu formülde görülmektedir:

$$Var(\beta) - Var(\beta^*) = \sigma^2 S^{-1}R'\left[RS^{-1}R'\right]^{-1}RS^{-1} \geq 0 \qquad (2.22)$$

Bu yüzden, kesin (exact) lineer kısıtların kullanımı etkinlik özelliğinin de kazanılmasına yol açtığı görülmektedir[7].

Denklem (2.21)'deki fark $k \leq j$ rankı ile j sıralı pozitif yarı tanımlı matristir ve tüm diagonal elementleri en azından sıfırdır. Bu yüzden kısıtlı tahminciler en azından sıradan en küçük kareler tahmincilerinin varyanslarından daha geniş olmayan varyanslara sahip olurlar.

Kısıtlar azalan varyanslarda rol oynar. Fakat kısıt doğru olsun olmasın, varyansı küçültür. Kısıtların geçerliliği sadece yanlılık özelliğinde önem kazanır. Sıradan en küçük kareler tahmincisi yansız bir tahmincidir ama kısıtlı tahmincinin yansız olması için mutlaka kısıtlar geçerli olmalıdır. İşte bu yüzden denklem (2.19)'deki F testi büyük önem kazanır.

2.5. Kısıtlı ve Kısıtsız Tahminciler için Ortalama Hata Kare Kriteri

Güvenilir tahminlerin elde edilmesi söz konusu ise, parametre uzayındaki potansiyel kısıt kümesinin doğruluğu veya yanlışlığı önem kazanır. Ancak daha da önemlisi, daha iyi tahminlere yol açan kısıtların özel bir kümesinin olup olmadığıdır.

Bir tahminci için en iyi olmanın kriteri olarak, Ortalama Hata Kare bir kriter olarak ele alınabilir. Bir tahmin için ortalama hata kare (OHK), tahmin edicinin varyansı ile yanlılığının (sapmasının) karesinin toplamından oluşur. Bir T×1 boyutlu $\hat{\theta}$ tahmincilerinin vektörüne ait olan T×T boyutuna sahip ortalama hata kare kavramı şöyle genelleştirilebilir:

$$OHK(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}-\theta)(\hat{\theta}-\theta)' = \sum \hat{\theta}\hat{\theta} + (YAN\hat{\theta})(YAN\hat{\theta})'$$

Buradaki $\sum \hat{\theta}\hat{\theta}$, $\hat{\theta}$'nın varyans-kovaryans matrisidir, bu aynı zamanda $Var(\hat{\theta})$ olarak da ifade edilebilir ve $(YAN\hat{\theta})$, her bir $\hat{\theta}_i$ için yanlılık (parametre değerinden sapma) terimlerinin T×1 boyutlu vektörüdür.

Eğer $\hat{\theta}$ ve θ^*, iki alternatif T×1 boyutlu tahmincilerin vektörü olarak düşünülürse ve $\hat{\theta}$'nın θ^*'a göre daha iyi bir tahminci olup olmadığı göz önüne alınırsa, OHK kriterine göre $\hat{\theta}$ doğal olarak şöyle tanımlanır: $\hat{\theta}$'nın OHK'si θ^*'nin OHK'sinden daha büyük olmamalıdır. Bu ise şu anlama gelmektedir[14]:

$$E(\theta^*-\theta)(\theta^*-\theta)' - E(\hat{\theta}-\theta)(\hat{\theta}-\theta)' = \text{pozitif yarı tanımlı matris.}$$

Bilindiği üzere pozitif yarı tanımlı matris genel olarak şöyle tanımlanabilir: bir $Y'AY$ kuadratik formunun tüm Y'ler için $Y'AY \geq 0$ ve bazı $Y \neq 0$ için $Y'AY = 0$ olması durumunda A matrisi pozitif yarı tanımlıdır[15].

Lineer regresyonda ise, parametre uzayındaki bir kısıtı değerlendirmek için OHK kriteri ele alındığında, kısıtsız tahminci $\hat{\beta}$ için OHK matrisi ile kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^*$ için OHK matrisi arasındaki farkın pozitif yarı tanımlı bir matris olup olmadığı göz önünde bulundurulur. Bu kısaca şu şekilde ifade edilebilir:

$OHK(\hat{\beta}) - OHK(\hat{\beta}^*) =$ pozitif yarı tanımlı matris.

Eğer yukarıdaki bu fark pozitif yarı tanımlı ise, $\hat{\beta}^*$ kısıtlı tahmincisi, OHK kriteri göz önüne alındığında kısıtsız tahminciye göre daha iyi bir tahmincidir[14]. Eğer bir ortalama hata kare kriteri bu tahmincileri karşılaştırmak için kullanılırsa, kısıtlı en küçük kareler tahmincileri, β ve σ^2'nin bazı değerleri için sıradan en küçük kareler tahmincilerine tercih edilebilirler[16].

Kısıtlı tahminci için,

$$OHK\left(\hat{\beta}^*\right) = \sigma^2\left[I - S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}R\right]S^{-1} + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}\left[R\beta - r\right]\left[R\beta - r\right]'(R'S^{-1}R)^{-1}RS^{-1}$$

olduğu (2.21) nolu denklem göz önüne alındığında anlaşılır.

Sıradan en küçük kareler tahmincisi yansız olduğundan dolayı, varyans-kovaryans matrisi $\sigma^2 S^{-1}$ olacaktır.

Sonuç olarak, sıradan en küçük kareler tahmincisinin ortalama hata karesi ile kısıtlı en küçük kareler tahmincisinin ortalama hata karesi arasındaki fark şöyle ifade edilir:

$$OHK(\hat{\beta}) - OHK(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} - S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}\left[R\beta - r\right]\left[R\beta - r\right]'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$$

Yukarıdaki fark şu şekilde de yazılabilir:

$$OHK(\hat{\beta}) - OHK(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}\left[RS^{-1}R' - \frac{1}{\sigma^2}(R\beta - r)(R\beta - r)'\right](RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \quad (23)$$

Yukarıda yazılan formül (2.23)'deki bu farkın sonucu genel bir gösterimle şu formdadır:

$\sigma^2 ABA'$

Olmak üzere, B matrisi:

$$B = RS^{-1}R' - \frac{1}{\sigma^2}(R\beta - r)(R\beta - r)'$$

Ayrıca buradaki A matrisi:

$$A = S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}$$

olmaktadır. Bu A matrisi j×k boyutlu ve k≤j ranklıdır. Bu yüzden B matrisi pozitif yarı tanımlı matris olursa, ABA' matrisi de pozitif yarı tanımlı olur. Sonuç olarak $\hat{\beta}^*$ tahmincisinin, $\hat{\beta}$ tahmincisinden daha iyi olup olmadığı sorusu, aşağıdaki eşitsizliğin tüm k×1 boyutlu ve sıfırdan farklı ℓ vektörleri için sabit olup olmadığı sorusuna eşit bir hale dönüşür. Şöyle ki,

$$\ell'\left[RS^{-1}R' - \frac{1}{\sigma^2}(R\beta - r)(R\beta - r)'\right]\ell \geq 0$$

veya, $RS^{-1}R'$ pozitif tanımlı matris olduğundan,

$$Q = \frac{\ell'(R\beta - r)(R\beta - r)'\ell}{\sigma^2 \ell RS^{-1}R'\ell} \leq 1 \qquad (2.24)$$

olup olmadığına dikkat edilmelidir.

Denklem (2.24)'deki iki kuadratik formun oranı, Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinin bir versiyonunun koşullarına bağlı olarak şu sonuç elde edilir:

$$\sup_{\ell} Q = \frac{(R\beta - r)'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)}{\sigma^2}$$

Bu supremuma,

$$\ell^0 = (RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)$$

değerinde ulaşılır.

Şimdi, sadece ve sadece

$$\frac{(R\beta - r)'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)}{\sigma^2} \leq 1 \qquad (2.25)$$

olduğunda

$$RS^{-1}R' - \frac{1}{\sigma^2}(R\beta - r)(R\beta - r)' = \text{pozitif yarı tanımlı}$$

olduğu gösterilebilir.

İspat:

i. $\ell'\left[RS^{-1}R' - \frac{1}{\sigma^2}(R\beta - r)(R\beta - r)'\right]\ell \geq 0$, tüm $\ell \neq 0$ için geçerli olsun.

Bu tüm ℓ değerleri için (2.24)'deki eşitsizlik vurgulandığından $\ell^0 = (RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)$ özeli içindir.

ii. Şimdi (2.25) nolu denklem göz önüne alındığında, (2.25)'ün sol tarafı (2.24)'ün supremumu olduğundan (2.24) tüm ℓ 'ler için sağlanır. (2.25)'deki ifade ufak bir değişiklikle şöyle olur:

$$\lambda = \frac{(R\beta - r)'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)}{2\sigma^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (2.26)$$

Yukarıdaki (2.26) nolu iddia, genelleştirilmiş ortalama hata kare kriterine göre kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^*$'nın kısıtsız tahminci $\hat{\beta}$'dan daha iyi bir tahminci olduğuna dair gerek ve yeter koşuldur[14].

Burada

$$\lambda \leq \frac{1}{2}$$

olması şartı ile, $\hat{\beta}^*$'nın lineer kombinasyonlarının $\hat{\beta}$'nın aynı lineer kombinasyonlarından daha küçük OHK'ye sahip olduğu görülmektedir. Belirtildiği üzere λ, merkezi olmayan parametredir[16].

$\lambda \leq \frac{1}{2}$ formundan gelen kriter önemli bir adımdır. Çünkü λ, iyi tanımlanmış bir olasılık yoğunluk fonksiyonunda yer alan bir parametre olmaktadır. Böylece ortalama hata kare kriterine karşı gelen sıradan en küçük karelerin tahmincilerinden daha iyi yapısal tahminler veren kısıtların özel bir kümesine ait hipotezlerin testi yapılabilir[14].

Burada $\lambda=0$ eşitliğinin test edilmesi aynı zamanda $R\beta = r$ kısıtlarının doğruluğunun test edilmesi anlamını taşır ve sıfır hipotezi altında u'nun dağılımı merkezi F dağılımına dönüşür. Bu konu, düzgün en güçlü test başlığı altında daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.[16].

2.5.1.Düzgün en güçlü test özelliği

Düzgün en güçlü test, merkezi olmayan F dağılımına sahip u test istatistiğinin OHK kriterinin ele alınması ile kullanılır.

$f_\lambda(u)$, merkezi olmayan λ parametresi, k ve n-j serbestlik dereceleri ile u rassal değişkeninin merkezi olmayan F yoğunluğu şöyle olur:

$$f_\lambda(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2i+k+q}{2}\right)\left(\frac{k}{q}\right)^{\frac{1}{2}(2i+k)}\lambda^i e^{-\lambda}u^{\frac{1}{2}(2i+k-2)}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2i+k}{2}\right)i!\left(1+\frac{k\cdot u}{q}\right)^{\frac{1}{2}(2i+k+q)}} \qquad (2.27)$$

burada q=n-j olmaktadır ve ayrıca Γ, gamma fonksiyonunu simgelemektedir.

Lehmann tarafından verilmiş bir ipucunun kullanılması ile, tüm $\lambda_0 < \lambda_1$ 'ler için gerçek değerli $w=k\cdot u/q+k\cdot u$ fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyonu olarak $f_{\lambda_1}(u)/f_{\lambda_0}(u)$ gösterilebilir[17]. Burada gerçek değerli fonksiyonda w, u'nun monoton artan fonksiyonudur ve aynı zamanda bunun tersi de geçerlidir. Tüm bunlar doğrultusunda w'nin yoğunluk fonksiyonu olan $h_\lambda(w)$, doğrudan doruya şöyle yazılabilir:

$$h_\lambda(w)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2i+k+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2i+k}{2}\right)}w^{\frac{1}{2}(2i+k-2)}(1-w)^{\frac{1}{2}(q-2)} \qquad (2.28)$$

yukarıdaki fonksiyonda $0 \le w \le 1$ olur.

Ayrıca $\lambda=0$ için yukarıdaki $h_\lambda(w)$ beta dağılır. Burada $\lambda>0$ olduğunda $h_\lambda(w)$, merkezi olmayan betadır.

Merkezi olmayan F yoğunluk ailesi, w'de monoton benzerlik oranı özelliğine sahiptir. Böylece OHK kriterinin düzgün en güçlü testi şöyledir:

H_0: $\lambda \le 1/2$ ve H_1: $\lambda > 1/2$

H_0 Kabul: Eğer $W^* < W_\alpha$

H_0 Red : Eğer $W^* \ge W_\alpha$

Ayrıca kritik nokta W_α şöyle tanımlanır:

$$\int_0^{W_\alpha}\cdot h_{\frac{1}{2}}(W)dW=1-\alpha$$

burada W^*, özel bir problemin kurulmasında, W'nin hesaplanmış değeridir.

2.5.2.Kritik noktaların tablolaştırılması

(2.27) nolu denklemde gösterilen dağılımın ve (2.28)'deki integrasyonun terim terim uygulanması sonucunda ulaşılan nokta şudur:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i} e^{-\frac{1}{2}}}{i!} I_{W_\alpha}\left(\frac{1}{2}k+i, \frac{1}{2}q\right) = 1-\alpha \tag{2.29}$$

burada

$$I_{W_\alpha}\left(\frac{1}{2}k+i, \frac{1}{2}q\right) = \int_0^{W_\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{k+q}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}k+i\right)} w^{\frac{1}{2}k+i-1}(1-w)^{\frac{q}{2}-1} \quad \text{olacaktır.}$$

(2.29) nolu denklem sonsuz bir seridir. Onun terimleri kusurlu (incomplete) beta fonksiyon oranı ile poisson serisinden elementlerin üretilmesi ile oluşturulmuştur. Poisson ağırlıkları serisindeki her terim [0,1] ile sınırlıdır ve ağırlıkların toplamı 1'e eşittir. Ayrıca her kusurlu beta fonksiyon oranı, 0 ve 1 aralığına yayılır ve i indeksi yükseldikçe (arttıkça), azalır. Bu, hesaplanan ağırlığın, makul kesinlik gereksinimi için çok büyük olamayacağını gösterir.

Aşağıda da görüleceği gibi Tablo 2.1 merkezi olmayan beta yerine merkezi olmayan F yardımı ile gerçekleştirilmiştir. Böylece ters dönüşüm şöyle yapılır:

$$u_\alpha = \frac{q w_\alpha}{k(1-w_\alpha)}$$

Merkezi olmayan F formundaki tabloların gösterilmesindeki sebep, klasik regresyon testlerinde çok geniş olarak kullanılan merkezi F dağılımının kritik noktaları ile karşılaştırılması amacını taşır.

2.5.3.OHK Testi için kritik noktaların tabloda bulunması

Kullanılacak olan model Tablo 2.1'de j tane non-stokastik tahminciye bağlı bir bağımlı değişkenin çoklu bir regresyon modelidir. Regresyon hatasının sıfır ortalama ve sabit varyansla normal ve bağımsız bir şekilde dağıldığı varsayılsın. Araştırmacı,

$r'\beta = r_0$

olarak parametre uzayının özel bir kısıtını düşünür. Kritik noktalar sadece k=1 için tablolaştırılır. Sıfır hipotezi λ ≤ 1/2 'dir. Kısıtlı en küçük kareler tahminleri, kısıtsız tahminlerden daha küçük ortalama hata kareye sahiptir.

Bu yöntem

i. Hesaplama şu formül ile yapılır:

$$u^* = \frac{HKT(\hat{\beta}^*) - HKT(\hat{\beta})}{HKT(\hat{\beta})/(n-j)}$$

HKT: Hata Kareler Toplamı

Burada r', bir satır vektörüdür ve r_0 bir skalar olduğu sürece,

$$u^* = (r'b - r_0)^2 \div \hat{V}(r'b)$$

alternatif formda hesaplanır. Bu formüldeki $\hat{V}(r'b), r'b$'nin tahmini varyansıdır. Başka bir deyişle,

$$\hat{V}(r'b) = \hat{\sigma}^2 r'S^{-1}r$$

olmaktadır. Buradaki $\hat{\sigma}^2$ sembolü, sıradan en küçük kareler regresyonundaki regresyon varyansının yansız tahminini gösterir. Yukarıdaki formülde $HKT(\hat{\beta})$, kısıtsız hata kareler toplamıdır ve $HKT(\hat{\beta}^*)$ kısıtlı regresyondaki hata kareler toplamıdır.

Tablo 2.1: Lineer Bir Kısıt için Ortalama Hata Kare Testinin Kritik Noktaları[14]

n-j \ α	0,05	0,10	0,25	0,50
1,00	340,34	86,15	12,65	2,29
2,00	37,38	17,50	5,53	1,56
3,00	19,93	11,16	4,33	1,38
4,00	14,96	9,04	3,88	1,31
5,00	12,66	8,06	3,62	1,26
6,00	11,36	7,44	3,47	1,23
7,00	10,57	7,05	3,37	1,21
8,00	9,96	6,79	3,30	1,20
9,00	9,58	6,57	3,24	1,19
10,00	9,25	6,41	3,20	1,18
11,00	9,04	6,30	3,16	1,17
12,00	8,83	6,20	3,13	1,16
13,00	8,68	6,13	3,11	1,16
14,00	8,54	6,05	3,09	1,15
15,00	8,41	5,98	3,07	1,15
16,00	8,31	5,93	3,05	1,15
17,00	8,23	5,88	3,04	1,15
18,00	8,18	5,84	3,03	1,15
19,00	8,10	5,82	3,02	1,14
20,00	8,05	5,78	3,01	1,14
21,00	7,98	5,75	3,00	1,14
22,00	7,96	5,71	3,00	1,14
23,00	7,91	5,69	2,99	1,14
24,00	7,83	5,68	2,98	1,14
25,00	7,82	5,66	2,98	1,13
30,00	7,65	5,60	2,95	1,13
40,00	7,52	5,49	2,92	1,12
60,00	7,33	5,40	2,89	1,12
120,00	7,14	5,31	2,86	1,11

ii. Seçilen bir α düzeyi için, n-j serbestlik derecesine karşı gelen Tablo 2.1'deki u_α kritik nokta ile i'de hesaplanan u^* karşılaştırılır.

iii. Eğer $u^* \geq u_\alpha$ ise, OHK'de kısıtlı tahmincilerin daha iyi olduğunu ifade eden hipotez reddedilir. Eğer $u^* < u_\alpha$ ise, OKT'de kısıtlı tahmincilerin daha iyi olduğunu ifade eden hipotez kabul edilir.

2.5.4.Testin gücü

Tablo 2.2, λ ≤ ½'yi test etmek için kullanılan güç fonksiyonudur ve alternatif 1. tip hatalar için serbestlik derecelerinin 20'ye eşit olduğunu gösterir.

Tablo 2.2'deki kritik noktalara bakıldığı zaman, 0,05 anlam düzeyindeki λ ≤ ½' nin testinin, 0,01 anlam düzeyindeki λ = 0'ın testine eşit olduğu görülür. Benzer biçimde 0,10 anlam düzeyindeki λ ≤ ½ hipotezinin testi ile yaklaşık 0,03 anlam düzeyindeki λ = 0 hipotezinin testine ait kritik noktaların aynı olduğu görülür. Bu durumlar serbestlik derecesi 20'ye kadar geçerlidir.

Tablo 2.2: Alternatif 1.Tip Hatalar için n-j = 20 ile OHK Testinin Gücü[14]

α \ λ	0,000	1/4	1/3	1,000	2,250	4,000	6,250	7,560	9,000
0,050	0,010	0,028	0,035	0,102	0,267	0,510	0,749	0,839	0,906
0,100	0,026	0,061	0,074	0,185	0,407	0,665	0,861	0,922	0,960
0,250	0,098	0,176	0,201	0,388	0,653	0,859	0,960	0,982	0,993
0,500	0,298	0,407	0,440	0,646	0,854	0,960	0,993	0,997	0,999

Farklı kaynaklardan bir araya getirilen verileri test etmek için uygulanan süreç Chow tarafından şu şekilde belirtilmiştir:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim N\left(0, \sigma^2 I\right)$$

Burada bölümler iki zaman periyodunu göstermektedir. Her çapraz parçada n tane gözlem ve her çapraz parçada j tane parametre vardır.

Genel test prosedürü birçok soruyu ele alma konusunda oldukça esnektir ve en azından burada sözü edilen çok sayıda dağılım varsayımı altında yaklaşık olarak doğru sonuç verir. Buna rağmen bu prosedür altında bazı şikayetler ileri sürülebilir. Bunlara örnek vermek gerekirse:

i. Testi uygulayanlar, eğer test istatistiğini, merkezi F'de genel olarak tablolaştırılan 0.05 , 0.01 anlam düzeyinde 1. tip hatadan daha küçük bir değer aldığını görürlerse, sonuçların zor gerçekleşebileceğini düşünürler.

ii. Eğer örneklem büyüklüğü $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ olacak kadar büyük seçilir ise, ve μ bilinmiyorsa, sıfır hipotezi sonuçta red edilebilir. Bir sıfır hipotezi olarak, kesin bir şekilde μ'yü reel sayıların dışında seçme şansı sıfır olur ve $\mu_0 \neq \mu$ için, $\sigma_{\bar{x}}$'nın azaltılması ile $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi sonuçta red edilir.

iii. Kısıt geçersiz olduğu zaman bile, kısıtlı tahminciler araştırmacı tarafından kullanılabilir. $\hat{\beta}$ ve $\hat{\beta}^*$'nın dağılımlarına bakılırsa, yani sıradan en küçük kareler ve kısıtlı en küçük karelerin tahmincileri için sırasıyla şunlar yazılabilir:

$$(\hat{\beta} - \beta) \sim N(0, \sigma^2 S^{-1})$$

ve

$$(\hat{\beta}^* - \beta) \sim N\{-S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r), \sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}\}$$

Eğer kısıtlar geçerli ise, $\hat{\beta}^*$ tahmincisinin sapması sıfır olacaktır ve varyanslar daha küçük olacaktır. Dolayısıyla ,

$\sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$ = non-negatif tanımlı

olacaktır. Ama bazı araştırmacılar kısıtlar kesin olarak geçersiz olsa bile, kısıtlı tahmincilerin daha küçük varyanslara sahip olmasından ötürü kısıtlı modeli kullanmayı istemektedirler. Ancak bu durumda varyansı azaltmak adına, biraz yanlılığı kabul etmek zorunda kalırlar. Bir kriter olarak $R\beta = r$'nın doğruluğu karşılaşılması bakımından çok güçtür.

$\hat{\beta}^*$'nın $\hat{\beta}$'dan daha iyi bir tahminci olduğunun kabul edilebilmesi için sadece ve sadece gerçekleşmesi gereken koşul daha önce de belirtilenler doğrultusunda şudur:

$$OHK(\ell'\hat{\beta}^*) \leq OHK(\ell'\hat{\beta}) \longrightarrow \ell \neq 0$$

yukarıdaki eşitsizlikte ℓ , herhangi bir k×1 boyutlu sabit vektördür. OHK kriteri olarak bu eşitsizliği tanımlanması uygundur.

Düzgün en güçlü test, OHK'de kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^*$ için en iyi testdir. Konuyla ilgili hipotez merkezi olmayan parametrenin 1/2'den daha küçük olması ve buna karşın oluşturulan alternatif hipotezin 1/2'den daha büyük olduğuna ilişkin kurulur.

2.6. Zayıf Ortalama Hata Kare Kriteri

Her ne kadar OHK testi daha eski bir test olan merkezi F testinde ortaya çıkan sorunların çoğunun üstesinden gelse de, bu sorunların bir tanesi sıfır hipotezinin gücü nedeniyle önemini koruyacaktır. $\hat{\beta}^*$'ın her lineer kombinasyonunun OHK kriterine sahip olması nedeniyle her lineer kombinasyon göz önüne alındığında $\hat{\beta}^*$'nın $\hat{\beta}$'ya göre daha iyi bir tahminci olduğu kabul edilebilir.

Vektör tahminindeki daha zayıf bir ortalama hata kare kavramı şöyledir:

$$\Delta^2 = E(\hat{\theta}-\theta)'(\hat{\theta}-\theta) = tr[\sum \hat{\theta}\hat{\theta} + (YAN\hat{\theta})(YAN\hat{\theta})'] = \sum_i OHK(\hat{\theta}_i)$$

Geometrik olarak, parametre uzayının boyutu ne olursa olsun Δ^2, θ'dan $\hat{\theta}$'ya kadar olan Öklid mesafesinin ortalama karesidir.

Kısıtsız en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}$, yansızdır ve ortalama hata kare matrisi ile çok değişkenli normal dağılır:

$$OHK(\hat{\beta}) = \sigma^2 S^{-1} \tag{2.30}$$

$\hat{\beta}^*$'nın $\hat{\beta}$'ya olan ortalama uzaklığın karesi $\sigma^2 S^{-1}$ matrisinin izidir.

Yeniden ifade etmekte yarar vardır ki, kısıtlı en küçük kareler cebri göz önüne alındığında, β'nın $\hat{\beta}^*$ olarak kısıtlı tahmincisi şu formülle ifade edilebilir:

$$\hat{\beta}^* = \beta - S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)$$

Yukarıdaki bu son formülden de anlaşıldığı gibi, $\hat{\beta}^*$'nın olduğu modelin dağılım varsayımları çok değişkenli normaldir:

$$\hat{\beta}^* \sim N(\beta + YAN\hat{\beta}^*, \sum \hat{\beta}^* \hat{\beta}^*) \tag{2.31}$$

buradaki yanlılığın vektörü ve kovaryans matrisi şöyledir:

$$\begin{aligned} &YAN\hat{\beta}^* = -S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r) \\ &ve \\ &\sum \hat{\beta}^*\hat{\beta}^* = \sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Böylece, $\hat{\beta}^*$ için ortalama hata kare matrisi

$$\begin{aligned} OHK(\hat{\beta}^*) = \sigma^2 S^{-1} &- \sigma^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \\ &+ S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta - r)(R\beta - r)'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \end{aligned} \tag{2.33}$$

olacaktır. Bu ortalama hata kare matrisinin izi, $\hat{\beta}^*$'nın β'dan uzaklığının ortalama karesidir.

Kısıtlı tahmincinin, uzaklığın ortalama karesinde daha iyi olması, (2.33) nolu denklemin izinin (2.30) nolu denklemden daha küçük olması anlamını taşır. Bu durum için yeterli koşul merkezi olmayan λ parametresinin ½'den küçük olmasıdır. λ ≤ ½ eşitsizliğin varolması iki matris arasındaki farkın pozitif yarı tanımlı olması durumunda, bunların izlerinin farkının non-negatif olması sonucunu doğurur[16].

Merkezi olmayan F dağılımı için kritik noktaların tablosu, payın serbestlik derecesinin ½'ye, merkezi olmayan bir şekilde eşit olmasını ifade eder. Goodnight ve Wallace bu tabloda paydanın serbestlik derecesini 1-30, 40, 60, 120, 200, 400, 1000 ve payın serbestlik derecesini, 1-30, 40, 60, 120, 200 ve 1. Tip Hata değerlerini 0,05; 0,10; 0,25 ve 0,50 olarak belirtmişlerdir. Bu kritik noktalar ikinci zayıf Ortalama Hata Kare testi için kullanılabilir. Bu yaklaşım merkezi olmayan F(θ) için önerildi.

Goodnight ve Wallace'ın bu tablosu, k/2'nin merkezi olmayan F dağılımının kritik noktalarını içermektedir. Burada m payın serbestlik derecesidir ve sayısal integrasyon kritik değerlerin elde edilmesinde kullanılmaktadır.

$\lambda \leq \frac{k}{2}$, verilen serbestlik derecesinde, $\lambda \leq \frac{1}{2}$ hipotezinin testine karşı gelen kritik noktalardan daha büyüktür.

$R\beta = r$ olarak verilen kısıtların kümesi için, $\lambda \leq \frac{k}{2}$ testi, uygulayıcı tarafından belirlenen 1. Tip Hata değeri α her ne olursa olsun, F tablo değeri ile hesaplanan u istatistiği karşılaştırılmaya çalışılır.

Merkezi olmayan F yaklaşımı şu formüller yardımı ile bulunmaktadır:

$$\int_0^F g(u,k,q,\lambda)du \approx \int_{-\infty}^{x'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

burada

$$x' = \frac{\left(\frac{kF}{k+2\lambda}\right)^{1/3}\left[1-\frac{2}{9q}\right]-\left[1-\frac{2(k+4\lambda)}{9(k+2\lambda)^2}\right]}{\left[\frac{2(k+4\lambda)}{9(k+2\lambda)^2}+\frac{2}{9q}\left(\frac{kF}{k+2\lambda}\right)^{2/3}\right]^{1/2}}$$

olmaktadır[18].

Daha önce de belirtildiği gibi, λ parametresinin ½'den küçük olması, (2.30) ve (2.33) formüllerindeki matris izleri farkının non-negatif olmasına bağlıydı. $\hat{\beta}^*$'nın uzaklığın ortalama hata karesinde daha iyi olduğunu sağlayan bazı zayıf koşulların var olabileceği konusunda (2.30) ve (2.33) nolu denklemlerin farklarının izi alınabilir:

$$\begin{aligned} & trS^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta-r)(R\beta-r)'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \\ & \qquad \le \sigma^2 trS^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \end{aligned}$$

AB ve BA'nın izleri, trAB = trBA olarak tanımlandığından, yukarıdaki bu son eşitsizliğin sol tarafı skalar olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\left[(R\beta-r)'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}\right]\left[S^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}(R\beta-r)\right] = Z'Z$$

Burada Z köşeli parantezle gösterilen k×1 boyutlu vektörüdür.

$$\lambda = \frac{(R\beta-r)'(RS^{-1}R')^{-1}(R\beta-r)}{2\sigma^2}$$

Yukarıdaki denklemde ifade edilen λ'nın tanımına bağlı kalınarak, λ'nın yeni tanımı şu şekilde yapılır:

$$\lambda = \frac{Z'SZ}{2\sigma^2} \quad veya \quad 2\sigma^2\lambda = Z'SZ$$

Bu $Z'Z$'yi sınırlarını belirtmek adına bir eşitsizlik formu ile ifade etmek gerekirse, bu şu formül ile olur:

$$\frac{2\sigma^2\lambda}{\mu_1} \le Z'Z \le \frac{2\sigma^2\lambda}{\mu_k}$$

Burada μ_1 ve μ_k sırasıyla S matrisinin en büyük ve en küçük karakteristik kökleridir.

Böylece uzaklığın ortalama karesinde daha iyi olan kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^{*}$'nın alternatif bir yeterlilik koşulu şu formül ile yazılır:

$$\lambda \leq 0 \quad ve \quad \theta = \frac{1}{2}\mu_k trS^{-1}R'\left(RS^{-1}R'\right)^{-1}RS^{-1}$$

Merkezi olmayan F dağılımının kritik noktaları merkezi olmama parametresi ile ilgili olarak geniş bir alanda elde edilemez ve her durumun kendine ait görüntüsüne bağlı kalınarak gereken nümerik integrasyonun yapılması doğru olmaz[16]. Yine de $\theta<1/2$ olması durumunun geçerliliği konusunda Goodnight ve Wallace çeşitli θ değerleri için, merkezi olmayan $F(\theta)$'nın yaklaşık değer tespitini yapmışlardır.

Tespit edilen yaklaşık değerle, nümerik integrasyonla elde edilen değerlerin karşılaştırılması sonucunda iyi bir uyum gözlenmiştir. F, m, q ve λ'nın tüm değerlerine ait hataların sadece %2'si 0,015'ten büyüktür ve bu hatalar genellikle çok küçük F ve q değerleri için ortaya çıkmıştır. $F>2$ ve $q>1$ için 0,015'i aşan hiçbir hata bulunmamakta ve bu hataların sadece %1'i 0,01'den büyük olmaktadır[18].

Fakat yaklaşık değer tespiti ile ilgili olarak çeşitli θ değerleri için, merkezi olmayan $F(\theta)$ hesabı yapılmışsa da daha basit bir kriterin gerekliliği açıktır[16].

2.7. Zayıf Ortalama Hata Kare Kriterine Farklı Bir Yaklaşım

Modelin tekrar kurulması durumunda,

$$Y = XD^{-1}D\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I), \quad RD^{-1}D\beta = r$$

biçiminde modelin ve kısıtların lineer formu ifade edilir. Burada D şöyledir:

$$D = diag\{\sqrt{\sum X_1^2}, \sqrt{\sum X_2^2}, \ldots, \sqrt{\sum X_k^2}\}$$

Bundan başka,

$$D\beta = \beta^{\wedge}, \quad XD^{-1} = X^{\wedge}, \quad ve \quad RD^{-1} = G'$$

olduğu varsayılırsa, söz konusu model aşağıdaki gibi yeniden belirtilir:

$$Y = X^{\wedge}\beta^{\wedge} + \varepsilon$$
$$G'\beta^{\wedge} = r \qquad (2.34)$$

Bunlara bağlı olarak takip eden sonuçlar şunlar olur:

$b^{\wedge} = Db, \quad b^{\wedge} \sim N(\beta^{\wedge}, \sigma^2 H^{-1})$

ve

$\beta^{\wedge} = D\hat{\beta}^{\wedge}$

Yukarıdaki modelde $b^{\wedge}$ ve $\hat{\beta}^{\wedge}$ olarak belirtilen ifadeler sırasıyla, $\beta^{\wedge}$ parametresinin kısıtsız ve kısıtlı tahmincileridir. *H* ise bu modele ait katsayıların örnek korelasyon matrisidir.

Daha önce de belirtildiği gibi u istatistiği lineer formda şu şekilde yazılabilir:

$u = [Rb - r][RS^{-1}R']^{-1}[Rb - r]/\, j\sigma^2$

Burada belirtilen *u* istatistiği, β ve R'nin, $\beta^{\wedge}$ ve G şeklinde gerçekleşen yeniden parametrelendirme işlemine göre bir değişme göstermez. Yeniden parametrelendirmedeki değişmezlik, merkezi olmayan parametre λ için de geçerlidir. Böylece bu genelliği kaybetmeksizin, $R\,\beta = r$ şeklinde kısıtların kabul edilip edilemeyeceği sorusu, denklem (2.34)'de yeniden kurulmuş modeldeki $G'\beta^{\wedge} = r$'ın kabul durumunun olup olmadığı sorusuna bağlı olarak yeniden düzenlenir.

Yeniden parametrelendirme formu göz önüne alındığında,

$$E(b^{\wedge} - \beta^{\wedge})'(b^{\wedge} - \beta^{\wedge}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\gamma_i} \qquad (2.35)$$

olacaktır. Buradaki γ_i , H korelasyon matrisinin karakteristik kökleridir.

Bilindiği gibi,

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = trH = m$$

olmaktadır. Böylece γ_i'nin üzerine (2.35) formülünün minimumu, birleşebilen her γ_i içindir. Bu, $X^{\wedge}$ matrislerinin ortonormalliği ve X'in ortogonalliğine eşittir. Böylece $\beta^{\wedge}$'dan $b^{\wedge}$'a olan uzaklığın minimum ortalama karesi $m\sigma^2$'dir, daha düşük sınır, X'in ortogonal olması durumunda söz konusu olabilir. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$m\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i E(b_i^\wedge - \beta_i^\wedge) = E(b^\wedge - \beta^\wedge)' H (b^\wedge - \beta^\wedge)$$
$$\leq E(b^\wedge - \beta^\wedge)'(b^\wedge - \beta^\wedge) \qquad (2.36)$$

Ayrıca pozitif tanımlı H matrisi şöyledir:

$H = C' Z^{1/2} Z^{1/2} C$

Burada C ortogonaldir ve $Z^{1/2}$, H'nin özdeğerlerinin pozitif kareköklerini gösteren diagonal bir matristir. Denklem (2.36)'deki döndürülmüş ortalama uzaklığın karesi, bir $\sigma^2 \chi^2_{(m)}$'nın ortalaması olarak karakterize edilebilir, yani aşağıdaki eşitlikler geçerli olur,

$b^\wedge \sim N(\beta^\wedge, \sigma^2 H^{-1})$

Böylece

$W = Z^{1/2} C(b^\wedge - \beta^\wedge) \sim N(0, \sigma^2 I)$

ve

$v = W'W \sim \sigma^2 \chi^2_{(k)}$

ve

$Ev = k\sigma^2$

$\hat{\beta}^\wedge$'ın aynı dönüşümü, merkezi olmayan bir χ^2 sonucunu verir. (2.31) ve (2.32) nolu denklemlerden şunlar yazılabilir:

$$(\hat{\beta}^\wedge - \beta^\wedge) \sim N(-H^{-1}G(G'H^{-1}G)^{-1}[G'\beta^\wedge - r],$$
$$\sigma^2 H^{-1} - \sigma^2 H^{-1} G(G'H^{-1}G)^{-1} G'H^{-1}]$$

ve

$$\frac{1}{\sigma} Z^{1/2} C(\hat{\beta}^\wedge - \beta^\wedge) \sim N(-Z^{1/2} CG(G'HG)^{-1}[G'\beta^\wedge - r],$$
$$I - Z^{1/2} CG(G'HG)^{-1} G'CZ^{1/2}).$$

Sadece ve sadece $\frac{1}{\sigma} W^*$ 'ın kovaryans matrisi idempotent olursa, $W^{*\prime} W^* / \sigma^2$ kuadratik formu,

$$W^* = Z^{1/2} C(\hat{\beta}^\wedge - \beta^\wedge)$$

olması durumunda merkezi olmayan ki-kare dağılır. Bu koşul $\frac{1}{\sigma} Z^{1/2} C(\hat{\beta}^\wedge - \beta^\wedge)$ deki kovaryans matrisinin karesinin alınması durumunda buradaki örnekte görülebilir. $W^{*'}W^{*}/\sigma^2$ 'nin merkezi olmayan χ^2 dağılımının serbestlik derecesi m-k olan kovaryans matrisinin izidir. Merkezi olmayan parametre yine λ'dır ve $Z^{1/2}C\hat{\beta}^{\wedge}$'nın $Z^{1/2}C\beta^{\wedge}$ 'dan olan uzaklığın ortalama karesinin beklenen değeri şöyledir:

$$EW^{*'}W^{*} = E(\hat{\beta}^{\wedge} - \beta^{\wedge})'H(\hat{\beta}^{\wedge} - \beta^{\wedge}) = (m-k)\sigma^2 + 2\lambda\sigma^2 \qquad (2.37)$$

Süregiden analiz sonucu aşağıdaki tanıma ulaşılır:

Kısıtlı tahminci $\hat{\beta}^{*}$, sadece ve sadece,

$$E(\hat{\beta}^{\wedge} - \beta^{\wedge})'H(\hat{\beta}^{\wedge} - \beta^{\wedge}) \leq E(b^{\wedge} - \beta^{\wedge})'H(b^{\wedge} - \beta^{\wedge})$$

olursa, zayıf ortalama hata karede daha iyidir veya sadece ve sadece,

$$E(\hat{\beta}^{*} - \beta^{*})'S(\hat{\beta}^{*} - \beta^{*}) \leq E(b - \beta)'S(b - \beta)$$

olursa, eşdeğerdir.

(2.36) ve (2.37) nolu denklemlerin sonuçlarına göre, $\hat{\beta}^{*}$'nın zayıf ortalama hata karede daha iyi olması için gerek ve yeter koşul şudur:

$$\lambda \leq \frac{k}{2}$$

Bu oldukça iyi bir sonuçtur. Çünkü test istatistiği kolaylıkla tablolaştırılabilir. Bu eşitsizliğin zayıf ortalama hata kare kriteri, alternatif bir parametre uzayına yoğunlaşılmasıyla türetilebilir. $X\beta$'nın tahmini ile ilgilenildiğinde, $X\hat{\beta}$ ve $X\hat{\beta}^{*}$ olarak iki alternatif tahminci düşünülsün. $X\hat{\beta}^{*}$'nın E(Y/X)'nin tahmincisinden daha iyi olabileceği ancak ve ancak şu koşulla tanımlanır:

$$E(X\beta - X\hat{\beta}^{*})'(X\beta - X\hat{\beta}^{*}) \leq E(X\beta - X\hat{\beta})'(X\beta - X\hat{\beta})$$

Yukarıdaki bu eşitsizlik hemen şu eşitsizliğe dönüştürülebilir:

$$E(\hat{\beta}^{*} - \beta)'X'X(\hat{\beta}^{*} - \beta) \leq E(\hat{\beta} - \beta)'X'X(\hat{\beta} - \beta)$$

Elde edilen bu son eşitsizlik aslında $\lambda \leq k/2$ eşitsizliğine denktir. Böylece eğer bu koşullu ortalama tahmini ile ilgileniliyorsa, $\lambda \leq k/2$ kriteri, aslında β vektöründen daha uygundur.

Tek bir kısıt söz konusu olduğunda, zayıf ve güçlü ortalama hata kriterlerinin çakışması dikkat edilmesi gereken bir husustur.

Tablo 2.3 : Lineer Regresyondaki Kısıtların Testleri ve Alternatif Kriterleri[16]

KRİTER	λ'NIN KRİTİK DEĞERİ	TEST:u'NUN HESAPLANMASI VE KRİTİK DEĞER İLE KARŞILAŞTIRILMASI
$R\beta = r$ biçimindeki kısıtlar kümesinin doğru olması	λ=0	Merkezi F dağılımı
$OHK(\ell'\hat{\beta}^*) \leq OHK(\ell'\hat{\beta}) \longrightarrow \ell \neq 0$ veya $E(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)' - E(\hat{\beta}^*-\beta)(\hat{\beta}^*-\beta)'$ 'nın nonnegatif tanımlı matris olması (güçlü OHK kriteri)	λ ≤ ½	Merkezi olmayan F(1/2)
$E(\hat{\beta}-\beta)'(\hat{\beta}-\beta) - E(\hat{\beta}^*-\beta)'(\hat{\beta}^*-\beta)$ 'nın pozitif skaler olması (ilk zayıf OHK kriteri)	$\lambda \leq 0$	Merkezi olmayan F(θ)
$E(\hat{\beta}-\beta)'S(\hat{\beta}-\beta) - E(\hat{\beta}^*-\beta)'S(\hat{\beta}^*-\beta)$ 'nın pozitif skaler olması (ikinci zayıf OHK kriteri)	$\lambda \leq (k/2)$	Merkezi olmayan F(k/2)

Yukarıdaki tablo oluşturulan farklı kriterler için, λ'nın aldığı değere göre, u istatistiğinin hesaplanması ve karşılaştırılması işleminin hangi F tablosundan yapılabileceğini özetlemektedir[16].

2.8. Genelleştirilmiş Ortalama Hata Kare Kriterine Ait Durumlar

$\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$'nin standart doğrusal regresyon modelindeki katsayıların herhangi iki yansız tahmincisi olduğu varsayılsın.

$OHK(\hat{\beta}_i;\beta,\sigma^2) = E\left[(\hat{\beta}_i - \beta)(\hat{\beta}_i - \beta)'\right]$, $i = 1,2$ değerleri için tanım gereği,

$OHK(\hat{\beta}_2;\beta,\sigma^2) - OHK(\hat{\beta}_1;\beta,\sigma^2)$

farkının değeri, β ve σ^2 parametrelerinin tüm değerleri için pozitif yarı tanımlı bir matris olursa $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$'ye göre bir tahminci olarak daha etkin olacaktır.

Yukarıda yer alan ifadelerin bir genelleştirilmesi olarak, Genelleştirilmiş Ortalama Hata Kare (GOHK) Kriteri'nden söz edilebilmektedir. Ancak dikkat edilmelidir ki, GOHK kriteri sadece bir tahmincinin gerçek parametre değerlerinde daha iyi bir performansa sahip olmasını gerektirir. Böylece şu söylenebilir: Eğer $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$, katsayıların herhangi birer tahmincileri ise ve parametrelerin gerçek değerleri, β_0 *ve* σ_0^2 ise, o zaman GOHK kriteri altında sadece ve sadece,

$OHK(\hat{\beta}_2;\beta_0,{\sigma_0}^2) - OHK(\hat{\beta}_1;\beta_0,{\sigma_0}^2)$

farkı pozitif yarı tanımlı olduğunda, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$'ye tercih edilebilmektedir.

Buraya kadar standart doğrusal regresyon modelindeki katsayıların tahmincileri üzerinde duruldu ve ayrıca daha önceki konuda, sıradan en küçük karelerin tahmincisi ile kısıtlı en küçük karelerin tahmincisi arasında bir karşılaştırma yapılmasından söz edildi. Fakat burada farklı bir bakış açısı ile iki kısıtlı en küçük kareler tahmincisinin iyi bir tahminci olarak GOHK kriteri altında karşılaştırılması durumu da göz önünde tutulacaktır.

Gerçek parametre değerlerinin bilinmediği bir regresyon modelinde, GOHK kriteri altında, $\hat{\beta}_1$'in, $\hat{\beta}_2$'ye tercih edilmesinin gerekçesi açıklanmaya çalışılırsa, söz konusu tercih için aşağıda takip eden durumlardan birinin ortaya çıkması gerekir.

1. Durum: Parametrelerin tüm değerleri için,

$OHK(\hat{\beta}_2;\beta,\sigma^2) - OHK(\hat{\beta}_1;\beta,\sigma^2)$

farkının pozitif yarı tanımlı olmasıdır. Özellikle gerçek parametre değerleri için bu matrisin pozitif yarı tanımlı olması gerekir. Eğer $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$, iki kısıtlı en küçük kareler tahmincisi ise bu durum tipik bir şekilde meydana gelemez.

2. Durum: Parametrelerin uygun bir alt kümesi için,

$$OHK(\hat{\beta}_2;\beta,\sigma^2) - OHK(\hat{\beta}_1;\beta,\sigma^2)$$

farkının pozitif yarı tanımlı olmasıdır. Bu durumda gerçek parametre değerlerinin, matrisin pozitif yarı tanımlı olması durumundaki değer aralığının içine girip girmeyeceğini kesin olarak söylemek mümkün değildir.

3. Durum: Tahmincilerin ortalama hata kare matrisleri arasındaki farkın asla pozitif yarı tanımlı olmaması durumudur. Yani GOHK kriteri altında $\hat{\beta}_1$'in, $\hat{\beta}_2$'ye tercih edilmemesi söz konusudur. Ancak şu da belirtilmelidir ki, gerçek parametre değerleri için,

$$OHK(\hat{\beta}_2;\beta,\sigma^2) - OHK(\hat{\beta}_1;\beta,\sigma^2)$$

farkı indefinite bir matris olacağından iyi bir tahminci olarak, $\hat{\beta}_2$'nin $\hat{\beta}_1$'e tercih edilebileceğini de muhtemelen göstermez.

2.8.1. Kısıtlı en küçük kareler tahmincileri arasında karşılaştırmalar

Toro-Vizcarrondo ve Wallace'ın yaptığı çalışmalar doğrultusunda iki farklı kısıtlı en küçük kareler tahmincisi arasında da doğrudan karşılaştırma yapmak mümkün olabilir. Bu tahminciler arasında karşılaştırma yapmak için genelleştirilmiş ortalama hata kare kriterini kullanmak daima mümkün değildir. Eğer $\hat{\beta}_1^*$ ve $\hat{\beta}_2^*$, iki tane kısıtlı en küçük kareler tahmincilerini gösterirse, β ve σ^2'nin bazı değerleri için,

$$OHK(\hat{\beta}_1^*;\beta,\sigma^2) - OHK(\hat{\beta}_2^*;\beta,\sigma^2)$$

farkının pozitif yarı tanımlı olup olmayacağı belirtilmelidir. Bunun için bazı koşullar aşağıda belirtilecektir. Daha önce sıradan en küçük kareler ile kısıtlı en küçük kareler tahmincilerinin karşılaştırılması yapılmıştı. Fakat burada da teoremler yardımı ile bazı ek açıklamalara değinilecektir. Şimdi ifade edilecek Lemma 1 bazı ispatları geliştirmeye yardımcı olacaktır:

Lemma1.

A keyfi bir s×s boyutlu negatif tanımlı bir matris ve z'de herhangi bir s×1 boyutlu bir vektör olsun. Eğer s≥2 ise, o zaman $A + zz'$ matrisi pozitif yarı tanımlı matris olamaz.

İspat :

zz', s×s boyutlu matrisi, 1 veya 1'den daha az ranklıdır. s≥2 olduğu sürece, sıfırdan farklı bir sonuç vardır. s×1 boyutlu w vektörü için $w'zz'w = 0$ sonucu söz konusudur. Böylece A, negatif tanımlı olduğundan şu sonuca ulaşılır:

$$w'(A + zz')w = w'Aw < 0$$

Böylece $A + zz'$ matrisi pozitif yarı tanımlı olamaz.

Teorem 1:

$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1}(r - R\hat{\beta})$ olarak tanımlanmıştı ve buna bağlı olarak

$$OHK(\hat{\beta}^*) - OHK(\hat{\beta})$$

farkının pozitif yarı tanımlı olması durumunda β ve σ^2'nin değerleri vardır.

Teorem 1'e ait tüm detaylı açıklamalar yukarıda Toro-Vizcarrondo ve Wallace'ın çalışmasından yararlanılarak anlatılmıştır.

Teorem 2:

$\hat{\beta}^*$, daha önceden de şöyle tanımlanmıştı:

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1}(r - R\hat{\beta})$$

Bu formülün doğrultusunda aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

i. Eğer k≥2 ise, $OHK(\hat{\beta}^*) - OHK(\hat{\beta})$ farkının pozitif yarı tanımlı olması durumunda parametre değerleri yoktur.

ii. Eğer k=1 ise, β ve σ^2'nin bazı değerleri için, $OHK(\hat{\beta}^*) - OHK(\hat{\beta})$ farkı pozitif yarı tanımlı matristir.

İspat:

i. Sadece ve sadece

$$-\sigma^2 R(X'X)^{-1} R' + (R\beta - r)(R\beta - r)'$$

İfadesi pozitif yarı tanımlı olduğunda,

$$OHK(\hat{\beta}^{*}) - OHK(\hat{\beta})$$

farkının pozitif yarı tanımlı olması sonucuna, Toro-Vizcarrondo ve Wallace tarafından oluşturulan sonucun kullanılması ile ulaşmak mümkün olacaktır.

$$-\sigma^{2} R(X'X)^{-1} R'$$

ifadesi negatif tanımlı ve $R\beta - r$, k≥2 ile k×1 boyutlu vektör olduğu sürece, istenilen sonucu elde etmek için Lemma 1 uygulanabilir.

ii. Sadece ve sadece aşağıdaki eşitsizlik geçerli olursa,

$$-\sigma^{2} R(X'X)^{-1} R' + (R\beta - r)^{2} \geq 0$$

k=1 olduğu müddetçe,

$OHK(\hat{\beta}^{*}) - OHK(\hat{\beta})$ farkı pozitif yarı tanımlıdır.

Teorem 1 ve 2'den yararlanılarak,

$$OHK(\hat{\beta}^{*}) - OHK(\hat{\beta})$$

farkının pozitif yarı tanımlı veya belirsiz (indefinite) olduğu görülür. Fakat katsayılara ait tek bir lineer kısıtın oluşturulması durumunda bu matris negatif yarı tanımlı olabilir. Böylece genelleştirilmiş ortalama hata kare kriteri altında, sıradan en küçük kareler tahmincisinin, iki veya daha fazla kısıtın vurgulandığı ya da oluşturulduğu kısıtlı en küçük kareler tahmincisine göre daha baskın olması durumunda, parametre değerlerinin var olması söz konusu değildir.

Teorem 3:

$$\begin{bmatrix} R_i \\ R_3 \end{bmatrix} \hat{\beta}_i^{*} = \begin{bmatrix} r_i \\ r_3 \end{bmatrix} \quad \text{i =1,2 için}$$

kısıtına bağlı hata kareler toplamını minimize eden kısıtlı en küçük kareler tahmincisi olarak, $\hat{\beta}_i^{*}$'ı tanımlayalım.

R_p matrisinin boyutları p = 1,2,3 olmak üzere k_p ×m olmaktadır ve r_p'nin boyutu ise p = 1,2,3 olmak üzere k_p×1'dir. Ayrıca $\begin{bmatrix} R_1' & R_2' & R_3' \end{bmatrix}$ matrisinin rankı

$k_1+k_2+k_3 \leq m$'dır. Eğer k_1 ve k_2'nin her ikisi de sıfır değilse, aşağıdaki şu sonuçlara ulaşılır:

i. Eğer $k_2 \geq 2$ ise,

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

farkının pozitif yarı tanımlı olması için parametre değerleri yoktur.

ii. Eğer $k_2=0$ ise,

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

farkının pozitif yarı tanımlı olması için, β ve σ^2'nin değerleri vardır.

iii. Eğer $k_2=1$ ve $k_1=0$ ise, o zaman bazı parametre değerleri için

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

farkının değeri pozitif yarı tanımlıdır.

Bu son durum Chipman ve Rao(1964)'e göre şöyle ifade edilmiştir:

Eğer hem r = 0 hem de s = 0 olursa, r×s boyutlu bir A matrisi boş bir marris olarak tanımlanır. Eğer B matrisi s×t boyutlu bir matris ve r = 0 ise, o zaman AB, 0×t boyutlu bir matristir. Benzer şekilde eğer B herhangi bir t×r boyutlu bir matris ve s = 0 ise, o zaman BA, t×0 boyutlu matristir. Eğer r = s = 0 ise, o zaman tanım gereği, $A^{-1}=A$'dır. Yukarıdaki teoremde, $k_3 = 0$ olduğu durum, iki kısıtlı en küçük kareler tahmincisinin hiçbir ortak kısıtının olmadığı duruma karşı gelir. Eğer $k_1 = 0$ ise, o zaman $\hat{\beta}_1^*$ tarafından sağlanan her lineer kısıt ayrıca $\hat{\beta}_2^*$ tarafından da sağlanır. Eğer $k_2 = 0$ ise, $\hat{\beta}_2^*$ tarafından sağlanan her kısıt, $\hat{\beta}_1^*$ tarafından da sağlanır.

İspat:

Daha öncede notasyonu basitleştirmek adına $S = (X'X)^{-1}$ olarak gösterimler kullanılmıştı.

i. Burada $k_2 \geq 0$ olsun. $OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$ farkının pozitif yarı tanımlı bir yapıda olduğunu kolayca gösterilebilmesi için, sadece ve sadece

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} + BB' - CC' \qquad (2.38)$$

işleminin de pozitif yarı tanımlı olması gerekir. Burada

$$A_i = (-1)^i \sigma^2 \{R_i SR'_{i3}[R_{i3}SR'_{i3}]^{-1} R_{i3}SR'_i - R_i SR'_i\}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} R_1 SR'_{23}[R_{23}SR'_{23}]^{-1}\delta_{23} \\ R_2\beta - r_2 \\ R_3\beta - r_3 \end{bmatrix} \quad ve \quad C = \begin{bmatrix} R_1\beta - r \\ R_2 SR'_{13}[R_{13}SR'_{13}]^{-1}\delta_{13} \\ R_3\beta - r_3 \end{bmatrix}$$

ayrıca

$$R'_{i3} = (R'_i \quad R'_3) \quad , \quad \delta_{i3} = \begin{bmatrix} R_i\beta - r_i \\ R_3\beta - r_3 \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1,2.$$

olması gerekmektedir. Bu matrisin pozitif yarı tanımlı olması için gerekli koşul

$$A_2 + (R_2\beta - r_2)(R_2\beta - r_2)$$

matrisinin de pozitif yarı tanımlı olmasıdır. Lemma 1'e göre, A_2 negatif tanımlı ve $(R_2\beta_2 - r_2)$'de $k_2 \geq 2$ ile $k_2 \times 1$ olduğu müddetçe $A_2 + (R_2\beta - r_2)(R_2\beta - r_2)$ matrisi pozitif yarı tanımlı olamaz.

ii. $k_2=0$ olduğu farzedilsin. Eğer

$$\begin{bmatrix} R_1\beta - r_1 \\ R_3\beta - r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kısıtı β'yı sağlıyorsa, $OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$ farkının pozitif yarı tanımlı olabileceği (2.38)'den görülebilir.

iii. $k_2=1$ ve $k_1=0$ olduğu farzedilsin. Eğer $R_3\beta - r_3 = 0$ ise, o zaman (2.38) nolu formül, A_2 non-negatif olduğunda, pozitif yarı tanımlı olur. Bu koşulların her ikisini de sağlayan β ve σ^2'nin değerlerinin bulunması da mümkündür.

Sonuç olarak Teorem 3'de ifade edilmek istenen şudur:

i.şıkkında eğer $\hat{\beta}_2^*$, $\hat{\beta}_1^*$ tarafından sağlanmayan birden fazla lineer kısıtı içeriyorsa, o zaman genelleştirilmiş ortalama hata kare karşılaştırmaları belirsiz olmalıdır.

ii. ve iii. şıklarında genelleştirilmiş ortalama hata kare karşılaştırmalarının mümkün olduğu, çok sınırlı koşulları içerir. Bu koşullar k_1 veya k_2'nin sıfıra eşit olmasıdır.

Teorem 4:

$$\left[R_i^1, \quad R_i^2, \quad 0\right]\hat{\beta}_i^* = r_i \quad , \quad i = 1,2 \text{ için.}$$

kısıtını sağlayan kısıtlı en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_i^*$ olsun. Buradaki R_i^p, $k_i \times m_p$, $i, p = 1,2$ boyutunda ve $m_1+m_2 \leq m$ ile ifade edilen bir matristir ve r_i de, i=1,2 olmak üzere $k_i\times1$ boyutunda matristir. Bunun da ötesinde, $i \neq p$ için $R_i^p = 0$ olduğu farzedilsin ve R_i^i'nin rankı i=1,2 olmak üzere k_i'dir. Tüm bu ifadelerden aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

i. Eğer $k_2 \geq 2$ ise, $OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$ değerinin pozitif yarı tanımlı olması için parametre değerleri yoktur.

ii. Eğer $k_2=1$ ise, o zaman bazı parametre değerleri için $OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$ pozitif yarı tanımlıdır.

İspat:

i. Bunun ispatı Teorem 3'den elde edilir.

ii. $$(X'X)^{-1} = S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Burada, S_{ip} , i,p =1,2 için $m_i\times m_p$ boyutlu bir matris olsun.

Ayrıca

$$\beta' = [\beta_1', \beta_2', \beta_3']$$

olsun. Burada da β_i , i=1,2 için $m_i\times1$ boyutlu bir matris olsun. O zaman

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

değeri şöyle ifade edilebilir.:

$$S\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}S,$$

ve ayrıca,

$$A_i = (-1)^i[-\sigma^2 R_i^{i\prime} (R_i^i S_{ii} R_i^{i\prime})^{-1} R_i^i$$
$$+ R_i^{i\prime} (R_i^i S_{ii} R_i^{i\prime})^{-1} (R_i\beta_i - r_i)(R_i^i\beta_i - r_i)'(R_i^i S_{ii} R_i^{i\prime})^{-1} R_i^i] \quad , \quad i = 1,2.$$

olur.

Böylece, sadece ve sadece A_1 ve A_2, her ikisi de pozitif yarı tanımlı matrisler ise

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

pozitif yarı tanımlıdır ve eğer,

$$R_1^1\beta_1 - r_1 = 0$$

olursa, o zaman A_1 pozitif yarı tanımlı olmalıdır ve σ^2'nin verilen herhangi bir değeri için, ayrıca A_2'nin de pozitif yarı tanımlı olduğu β_2'nin de bir değerini bulmak daima mümkün olacaktır. Böylece, k_2=1 olduğunda,

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

pozitif yarı tanımlı bir matris olarak parametre değerleri vardır. Teorem 4, iki kısıtlı en küçük kareler tahmincisinin ortak kısıtlara sahip olmadığı durumu incelemektedir. Burada sadece $\hat{\beta}_2^*$, tek bir kısıt içerdiği zaman ,

$$OHK(\hat{\beta}_2^*) - OHK(\hat{\beta}_1^*)$$

ifadesinin pozitif yarı tanımlı olduğu durum için β ve σ^2'nin değerlerinin var olduğu gösterilmiştir. Böylece, eğer her iki tahminci birden fazla kısıt içerirse, karşılaştırmaları yapmak mümkün olmayacaktır[19].

3. ZAMANA, GÖZLEMLERE VE YAPAY DEĞİŞKENLERE BAĞLI OLARAK DEĞİŞİM GÖSTEREN KISITLAR

3.1.Zamana Bağlı Olarak Değişim Gösteren Doğrusal Kısıtlarda Kalman Filtresi

Zaman serilerinin kullanıldığı durumlarda, genellikle her zaman periyodunda kısıtlar özdeş olmaktadır. Bu kısıtların parametrelere göre lineer olması durumunda, daha önce ele alınan kısıtlı en küçük kareler yöntemi standart bir biçimde kullanılmaktadır.

Ancak, parametrelerin yanı sıra değişkenleri de içeren kısıtların var olduğu durumlara da rastlanmaktadır. Bu kısıtlar her zaman periyodunda farklı olacaktır ve bu durumda geleneksel yöntemler uygulanamayacaktır. Burada temel problem, sabit parametreler ile klasik lineer model uygulanırsa, parametreden çok kısıtın var olması durumu ile karşılaşılmasıdır. Böyle durumlarda uygulamalı iktisatçıların başvurduğu alışılmış yol ise, bunları ‘ortalamaya yakın’ ya da ‘ortalama civarında’ kabul ederek kısıt sayılarını azaltmaktır. Böylece zaman içinde değişen kısıtlar, zaman içinde değişmeyen kısıtlara dönüştürülmüş olur. Bu yaklaşım ile konu basitleştirilmiş olur. Ama önsel bilginin görmezden gelinmesi anlamında etkinlik azalır. Ek olarak, değişkenlerdeki kısıtlar non-lineer ise, ekonomi teorisinde bu metot ile tutarlılık özelliğini taşımayan kısıtlar ortaya çıkar. Böylece tahmin işleminde de yanlılık olur.

Sabit parametreli bir model ile karşılaştırma imkanı sağlamak için, kısıtların sayısını sınırlandırmak yerine, zaman içersinde değişen kısıtlarla bir arada uygulanabilecek kadar esnek bir model önerebilmek mümkündür. Belirli varsayımlar altında, model durum uzayı formunda ifade edilebilir. Bu durumda tahmin için Kalman Filtresi kullanılabilir. Zaman serileri analizinin bu standart aracı, zaman içersinde değişen kısıtların rutin bir yöntem ile birlikte kullanılmasını sağlar.

3.1.1. Zamana göre değişim gösteren kısıtların uygulanması ve Kalman Filtresi

Öncelikle aşağıdaki modeli ele almak gerekli olacaktır:

$$y_t = X_t\beta + u_t \quad , \quad t = 1,\ldots,T \tag{3.1}$$

Burada y_t ve u_t, n×1 boyutludur ve (n≥1)'dir. X_t, n×J boyutludur. *β,* bilinmeyen parametrelerin J×1 boyutlu vektörüdür ve u_t, N(0,H) olmak koşulu ile, diğer bir anlatımla, 0 ortalama ve H varyans ile normal dağılım göstermesi durumunda gerçekleşir. Parametrelerin

$$R_t\beta = r_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots,T \tag{3.2}$$

formunda zaman içerisinde değişen kısıtları sağlayabilmesi için gerekli olduğu varsayılsın. Burada R_t, K≤J rankına sahip K×J boyutlu matristir, r_t , K×1 boyutlu vektördür ve hem R_t, hem de r_t tüm t değerleri için bilinmektedir.

Bu kısıtlar, (3.1) numaralı formda yer alan modele ekonomik kısıtların uygulanması durumunda, *β* parametreleri ve değişkenler ile ilgili olarak ortaya çıkar.

(3.1) ve (3.2) formülleri arasında ilk anda ortaya çıkan bir tutarsızlık var olacaktır. TK kısıtlarını sağlamak için ve değişmez bir biçimde TK>J olması için J boyutunda olan bir *β* vektörü gerekli olacaktır. Uygulamada zaman içinde değişen kısıtlar göz ardı edilebilir. Fakat böyle bir bilginin tahmin sürecine alınması bunları 'ortalama' olarak uygulanması biçiminde olacaktır. Bu tür kısıtlar şu formda olur:

$$\overline{R}\beta = \overline{r} \tag{3.3}$$

Burada $\overline{R}$, K×J boyutludur ve K rankına sahiptir ve K≤J'dır. Böylece formül (3.2)'deki T kısıtlarının yerine, yukarıdaki (3.3) formülünde belirtilen basit kısıt konmuş olur ve *β*'nın tahmini standart kısıtlı en küçük kareler ile yapılmış olur.

Ancak (3.2)'nin yerine (3.3)'nin konması iki sonuç doğurur. Birincisi, $\overline{R}\beta = \overline{r}$ ile $R_t\beta = r_t$ tutarlı olsa bile, sonrakinin öncekini ima etmesi nedeniyle, $\overline{R}$ ve $\overline{r}$ 'nin, karşılıklı olarak R_t ve r_t yerine kullanılması bilgi yetersizliğine neden olacaktır. İkincisi ve potansiyel olarak daha önemlisi, $\overline{R}\beta = \overline{r}$ 'nın, zaman içerisinde değişen $R_t\beta = r_t$ kısıtlarınca ifade edilmemesi durumudur. Bu tipik olarak $R_t\beta = r_t$'nin değişkenlerde non-lineer olması durumunda ortaya çıkar. Bu durumlarda $\overline{R}\beta = \overline{r}$ kısıtlarının kullanılması, β tahminlerinde yanlılığın meydana gelmesi sonucunu doğurur.

Temel problem (3.1) numaralı modelin, her zaman periyodunda değişen kısıtların kullanılmasına izin verecek kadar esnek ve uygun olmamasıdır. $R_t\beta = r_t$'nin yerine $\overline{R}\beta = \overline{r}$'nin koyulması ile kısıtlardan taviz verilmesi, modelin esnek olmayan yapısını değiştirmez. Bu yöntem uygulandığında, ekonomik teori ile kurulmaya çalışılan bağ kaybolabilir.

Temel olarak modelin zaman içerisinde değişen kısıtların kullanılmasına izin verecek kadar esnek hale getirilmesi mümkün olabilir.

Özel olarak β'nın zaman içinde sabit olması yerine her zaman periyodunda değişebileceği varsayılır ve bu β_t ile gösterilir. Ayrıca β_t 'nin bazı lineer süreçlere bağlı olarak gelişebileceği varsayılır. Örneğin,

$$\beta_t = \delta + A\beta_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.4)$$

Bu formülde δ ve A sabittir ve ε_t , N(0 ,Q)'dur. Bu eşitlik,

$$y_t = X_t\beta_t + u_t \qquad (3.5)$$

ile birlikte, durum vektörü β_t için, bir durum uzayı modeli oluşturulur ve burada (3.4) ve (3.5) karşılıklı olarak dönüşüm eşitliği ve gözlem eşitliği biçiminde isimlendirilir.

Bir an için (3.2) numaralı kısıtların göz ardı edildiği, sadece yukarıdaki durum uzayı modelinin ele alındığı varsayılsın. Burada verilen δ , A katsayıları ile Q ve H varyanslarının bilinmesi durumunda, β_t 'nin optimal tahminlerinin Kalman Filtresi kullanımı ile bulunabileceği söylenebilir[20]. β_t durum vektörünün tahmini için çözüm, 1960 yılında Kalman tarafından orijinal bir şekilde verilmiştir. Bunu takiben Harvey'in notasyonu 1981 yılında kullanılmaya başlanmıştır[21].

Bu problem açısından Kalman Filtresi bir özelliği ile temel bir öneme sahiptir. Eğer (3.5) numaralı formül ile belirtilen gözlem eşitliği uygun bir biçimde arttırılırsa, yani bu gerçekleştirilirse, β_t tahminleri lineer kısıtları sağlayabilecek biçimde yapılır.

Özel olarak, eğer şöyle bir tanım yapılırsa,

$$y_t^* = \begin{bmatrix} y_t \\ r_t \end{bmatrix}, \quad Z_t = \begin{bmatrix} X_t \\ R_t \end{bmatrix}, \quad \eta_t = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$E(\eta_t \eta_t') = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bu durumda aşağıdaki formda yeni bir gözlem denklemi şöyle ifade edilir:

$$y_t^* = Z_t \beta_t + \eta_t$$

Bu denklem (3.4) dönüşüm denklemi ile uyumlu olacaktır ve yine bu arttırılmış gözlem denkleminin kullanıldığı Kalman Filtresi ile elde edilen β_t tahminleri şu koşulu sağlayacaktır[20]:

$$R_t \hat{\beta}_t = r_t$$

Bunu daha net bir biçimde açıklamak gerekirse zamana göre değişen lineer kısıta uyan β_t durum vektörünün bilindiği varsayılsın:

$$R_t \beta_t = r_t$$

Olsun, burada R_t ve r_t, sırasıyla K_t×J ve K_t×1 boyutları ile biliniyor kabul edilsin ve sadece kısıtların değil, kıstların sayısının da zaman ile değişebileceği göz önüne alınsın.

Teorem: Eğer $y_t = X_t \beta_t + u_t$ denklemi K_t yapay gözlemler tarafından arttırılıyorsa,

$$R_t \beta_t = r_t$$

o zaman, Kalman Filtresi tahminleri $\hat{\beta}_t$ ayrıca lineer kısıtları sağlar. Diğer bir deyişle,

$$R_t \hat{\beta}_t = r_t$$

olmaktadır. Burada $E(u_t u_t') = H_t$ ‘dir.

İspat: Harvey’in notasyonunda $\hat{\beta}_t$,

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t|t-1} + G_t \left(y_t - X_t \hat{\beta}_{t|t-1} \right)$$

ile verilir. Burada ,

$$\hat{\beta}_{t|t-1} = A_t \hat{\beta}_{t-1},$$
$$G_t = P_{t|t-1} X_t' F_t^{-1}$$
ve
$$F_t = X_t P_{t|t-1} X_t' + H_t$$

Olur. Buradaki $P_{t|t-1}$ matrisi simetrik pozitif yarı tanımlı bir matristir[21].

Şimdi, $R_t \beta_t = r_t$ yapay gözlemler ile $y_t = X_t \beta_t + u_t$ denklemi arttırılsın. Böylece yeni bir denklem olarak aşağıdaki denkleme ulaşılsın:

$$y_t^* = Z_t \beta_t + \eta_t$$

Daha önceden de ifade edildiği üzere,

$$y_t^* = \begin{bmatrix} y_t \\ r_t \end{bmatrix}, \quad Z_t = \begin{bmatrix} X_t \\ R_t \end{bmatrix}, \quad \eta_t = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \end{bmatrix}$$
ve
$$E(\eta_t \eta_t') = \begin{bmatrix} H_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olursa, $R_t \hat{\beta}_t = r_t$'yi oluşturmak için, arttırılmış sistem için R_tG_t'yi göz önüne almak gerekir:

$$\begin{aligned} R_t G_t &= R_t P_{t|t-1} Z_t F_t^{-1} \\ &= R_t P_{t|t-1} [X_t', R_t'] \begin{bmatrix} F^{11} & F^{12} \\ F^{21} & F^{22} \end{bmatrix} \\ &= [(R_t P_{t|t-1} X_t') F^{11} + (R_t P_{t|t-1} R_t') F^{21}, \\ &\qquad (R_t P_{t|t-1} X_t') F^{12} + (R_t P_{t|t-1} R_t') F^{22}] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Burada F_t^{-1}, açık bir şekilde bölümlendirilmiştir ve (i,j) blok F^{ij} ile gösterilmektedir. Arttırılmış sistem ile,

$$F_t = \begin{bmatrix} X_t \\ R_t \end{bmatrix} P_{t|t-1} \begin{bmatrix} X_t' & R_t' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_t = \begin{bmatrix} X_t P_{t|t-1} X_t' + H_t & X_t P_{t|t-1} R_t' \\ R_t P_{t|t-1} X_t' & R_t P_{t|t-1} R_t' \end{bmatrix}$$

Bölümlendirilmiş ters matriste standart teoremlerin kullanılması ile,

$$F^{21} = -(R_t P_{t|t-1} R_t')^{-1} R_t P_{t|t-1} X_t' F^{11}$$

ve (3.7)

$$(R_t P_{t|t-1} X_t') F^{11} + (R_t P_{t|t-1} R_t') F^{21} = 0$$

Ayrıca,

$$F^{12} = -(X_t P_{t|t-1} X_t' + H_t)^{-1} X_t P_{t|t-1} R_t' F^{22}$$

ve

$$F^{22} = [R_t P_{t|t-1} R_t' - R_t P_{t|t-1} X_t' (X_t P_{t|t-1} X_t' + H_t)^{-1} \times X_t P_{t|t-1} R_t']^{-1}$$

Bu son iki denklem şu sonucu verir:

$$(R_t P_{t|t-1} X_t') F^{12} + (R_t P_{t|t-1} R_t') F^{22} = I_{Jt} \qquad (3.8)$$

Böylece (3.6), (3.7) ve (3.8)'nin kullanılması ile, şu sonuca ulaşılır:

$$R_t G_t = \begin{bmatrix} 0 & I_{Jk} \end{bmatrix}$$

Arttırılmış sistem için,

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t|t-1} + G_t \left(y_t - X_t \hat{\beta}_{t|t-1} \right)$$

denkleminin tekrar göz önüne alınması sayesinde,

$$\begin{aligned} R_t \hat{\beta}_t &= R_t \hat{\beta}_{t|t-1} + R_t G_t (y_t^* - Z_t \hat{\beta}_{t|t-1}) \\ &= R_t \hat{\beta}_{t|t-1} + \begin{bmatrix} 0 & I_{Jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t - X_t \hat{\beta}_{t|t-1} \\ r_t - R_t \hat{\beta}_{t|t-1} \end{bmatrix} \\ &= R_t \hat{\beta}_{t|t-1} + (r_t - R_t \hat{\beta}_{t|t-1}) = r_t \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle,

$$R_t \hat{\beta}_t = r_t$$

olmaktadır ve böylece teorem ispatlanmıştır[21].

Yukarıda açıklandığı gibi, uygun biçimde arttırılmış Kalman Filtresi, β_t'nin zaman içinde değişen lineer kısıtlarını sağlayan tahminleri elde etmek için uygun bir metodoloji sunmaktadır.

Uygulamada δ, A, Q ve H'nin elemanlarının çoğu bilinmemektedir ve bunların $\hat{\beta}_t$'nin elde edilmesinden önce tahmin edilmesi gerekecektir.

Bir θ vektörünün bilinmeyen elemanları içerdiğini varsayalım. Verilen bir θ için benzerlik fonksiyonu aşağıdaki formda gösterilmiş olsun ve bu logaritmik olarak şöyle ifade edilsin:

$$\ln L(\theta|y^*) = C - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln|F_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} v_t F_t^{-1} v_t$$

Bu formüldeki $v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$ ele alındığı zaman, $\hat{y}_{t|t-1}$, y_t'nin bir adım önceki tahminidir ve F_t ise v_t'nin kovaryansıdır. Ayrıca v_t vektörü ve F_t matrisi Kalman Filtresinin ara sonuçlarından elde edilir. Böylece $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_T^*$ serilerine Kalman filtresini uygulamak ve θ için bir değer var saymak hem $\hat{\beta}_t$ *(t =1,2,…,T)*, hem de $\ln L(\theta|y^*)$ sonuçlarını doğuracaktır. Burada θ'nın maksimum benzerlik tahminleri Newton-Raphson prosedürü gibi bir nümerik optimizasyon işlemi ile elde edilebilir. Standart optimizasyon işlemlerinde karşılaşılan ve iyi bilinen pratik sorunlardan biri bunların benzerlik fonksiyonunun global maksimum noktasının yerini tespit etmekte etkin olmamasıdır. Bu nedenle, araştırmayı daha etkin kılmak için, optimizasyondan önce θ'nın boyutlarının azaltılması önem taşımaktadır.

θ'nın elemanları iki farklı kaynaktan gelmektedir. İlk olarak Q ve H'ın kovaryans matrislerinden gelen elemanları vardır. İkinci olarak, β_t'nin düzeyinden gelen elemanlar vardır. Örneğin, (3.4) numaralı denklemdeki δ, A'nın elemanları, δ parametrelerinin genelleştirilmiş en küçük kareler ile basit bir biçimde yeniden parametrelendirilmesi konusunda yöntemler vardır. Bunlar, nümerik optimizasyon prosedüründen elde edilebilirler[20].

3.2. Gözlemlere Bağlı Olarak Değişim Gösteren Eşitlik Kısıtlarında Genelleştirilmiş Kısıtlı En Küçük Kareler Yönteminin Kullanılması

Ekonometrik modellerde, parametrelerin çoğu zaman ekonomik teoriden gelen konu dışı bilgilere bağlı olduğu görülebilmektedir. Örneğin ölçeğe göre sabit getiri varsayımına dayalı bir log-lineer üretim fonksiyonu, girdi katsayılarının 1'e eşit olması gibi bir kısıta ya da koşula sahiptir. Ekonometri, gözlem sırasında değişme göstermeyen, neredeyse aynı şekilde olan kısıtları içeren birçok benzer örneği içermektedir. Kısıtlar 'konu dışındaki bilgi'nin gerek ve yeter ifadesidir. Aynı zamanda parametre tahminleri Kısıtlı En Küçük Kareler

Yöntemi'nin kullanılması ile tamamen standart bir hal alır. Ancak gözlem sırasında değişme gösteren kısıtların vurgulandığı diğer ekonomik modeller de vardır. Gözlem sırasında değişen kısıtların temel bir özelliği, bu kısıtların sabit parametre modelleri yapısında kullanılmasının mümkün olmamasıdır. Bunun sebebi her zaman parametreden fazla kısıt bulunmasıdır.

Burada parametrelerin gözlem sırasında değişme gösterdiği regresyon temelli bir metot ortaya konulacaktır. Bu metot her veri noktasındaki kısıtları kesin bir şekilde sağlayan tahminleri elde etme olanağı sağlar. Ama bir anlamda optimal olan tahminleri seçebilmek için verileri kullanmak gerekecektir.

Gözlem sırasında değişen kısıtlara bağlı olarak değişen bir parametre modelini, tahmin etmek için ortaya konacak genel yaklaşım, tanımlanabilen parametrelere değişmezlik varsayımını sağlamadan önce kısıtların modele konmasıdır. Bu yaklaşımı uygulamak için lineer denklemlerin genel teorisinin nasıl kullanılabileceği de önemlidir. Bir en küçük kareler tahmincisinin teorik özellikleri türetilirken bu tahmincinin belli koşullar altındaki gücü de önemlidir. Çünkü burada Kısıtlı En Küçük Kareler yönteminin tahmin açısından gücünü yitirmesi durumunda, Genelleştirilmiş Kısıtlı En Küçük Kareler büyük önem kazanmaktadır.

3.2.1. Gözlemlerin sırasına göre değişim gösteren kısıtların ifade edilmesi için genel metodoloji

Bilinmeyen β parametresinde lineer ve gözleme göre değişim gösteren kısıtların kümesi genel bir notasyonla şöyle gösterilebilir:

$$R_t\beta = r_t \quad , \quad t = 1,2,\ldots,T \qquad (3.9)$$

Burada β, J×1; R_t, K×J; r_t, K×1boyutlu matrislerdir ve R_t'nin rankı K<J'dır. Ayrıca R_t ve r_t non-stokastiktir ve tüm t değerleri için bilinmektedir. Burada J parametreye bağlı olarak araştırılan KT kısıtları vardır. Söz konusu yaklaşım gözleme göre değişim gösterebilen bilinmeyen β parametrelerinin sayısını arttırmaktır.

Böylece başlangıçtaki lineer model için şu gösterim yapılabilir:

$$y_t = X_t\beta_t + e_t \quad , \quad t = 1,\ldots,T \qquad (3.10)$$

Buradaki y_t, (N≥1) içsel değişkenlerin N×1 boyutlu vektöründeki t'inci gözlemidir. X_t , N×J boyutlu bir dizayn matrisidir. Ayrıca β_t, J×1 boyutlu bilinmeyen parametreler vektörüdür ve e_t, N×1 boyutlu hatalar vektörüdür.

Burada ayrıca genelliği kaybetmeden şunlar da belirtilmelidir:

$$E(e_t) = 0_N \quad ve \quad E(e_t e_t') = \sigma_e^2 I_N$$

Burada 0_N , N×1 boyutlu sıfır vektörüdür, σ_e^2 bilinmeyen bir skalerdir ve I_N , N×N boyutlu birim matristir. Burada özellikle vurgulanmalıdır ki, modelin en belirgin özelliği, β_t parametre vektörünün gözlem sırasınca değişmesidir. Tüm bu söylenenlerin ötesinde kısıtlar şu formda ifade edilebilirler:

$$R_t\beta_t = r_t$$

Model (3.10) ekonometride çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu modelde β_t üzerinde kurulan yapı gözlem sırasına göre olmaktadır. Elbette ki, genel lineer modelin en yaygın biçimde yazılımı şöyledir:

$$y_t = X_t\beta + e_t \qquad (3.11)$$

Yukarıdaki (3.11) formülü, β_t=β koşulunun tanımlanması ile (3.10) formülünün basitleştirilmiş bir halidir. Katsayılardaki bu değişmezlik varsayımı ekonometride çok yaygındır. Hatta sabit parametreli genel lineer modeli, genellikle model (3.10)'nin özel bir durumu olarak varsayılması ya da kabul edilmesi yerine, lineer model oluşturma sürecinin bir başlangıç noktası olarak kabul edildiği görülmektedir.

$R_t\beta_t = r_t$ ile verilen gözlemlere göre değişen kısıtlara bağlı olan Model (3.10)'deki gözlemlere göre değişen JT parametrelerini tahmin etmek buradaki temel problemdir. Aşağıda verilen kısıtsız bir modeli elde etmek için, Model (3.10)'de $R_t\beta_t = r_t$ kısıtlarını kullanmak burada basit bir yaklaşım olacaktır:

$$W_t = Z_t\gamma_t + e_t \qquad (3.12)$$

Bu modeldeki W_t ve Z_t , y_t ve X_t'nin bilinen dönüşümleridir. Ayrıca γ_t, β_t ile bilinen bir ilişkiye sahip bilinmeyen parametrelerin J×1 boyutlu yeni bir vektörüdür.

Model (3.12) için, aşağıdaki tanımlama (identifying) varsayımını belirtmek yararlı olacaktır:

$$\gamma_t = \gamma$$

Buradaki formülde γ, J×1 boyutlu sabit parametreler vektörüdür. Özel durumlar dışında, elde edilen modelin parametreleri sıradan en küçük kareler gibi standart ekonometrik tekniklerin kullanımı sayesinde tahmin edilebilir. Bu yaklaşımdaki son adım, β_t ve $\gamma_t=\gamma$ arasında var olan bilinen ilişkinin kullanılması ile $\beta_1,\ldots,\beta_t$'nin tahminlerini elde etmektir. Bu tahminler, $R_t\beta_t = r_t$ kısıtlarını tam olarak sağlar.

$\gamma_t = \gamma$ biçimindeki tanımlama (identifying) varsayımı teorik olarak kısıtsız parametre vektörü olan γ_t üzerindeki gözlemlere göre değişmeyen varsayımdır. Burada kısıtlar y_t'den w_t'ye kadar dönüşümlerde oluşturulur. Bu, genel kısıtlı en küçük kareler yaklaşımı ile zıttır. Tanımlama varsayımı, $R_t\beta_t = r_t$ teorik kısıtları sağlaması gereken bir parametre vektörü olan β_t üzerindeki gözlemlere göre değişmeme varsayımıdır.

Burada önerilebilecek alternatif yaklaşım, genel parametrik değişmezlik varsayımını, modelde gözleme bağlı olarak değişen kısıtların konulmasından sonrasına dek geciktirilmesine dayanır. Bu geciktirmenin anlamı, değişmezlik varsayımının teorik olarak kısıtsız parametreler üzerinde yapılmasıdır. Birkaç yol ile, modeldeki kısıtların yerine konması mümkündür[22].

3.2.2. Genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler

Lineer denklemlerin genel teorisinde, gözlemlere göre değişim gösteren parametrelere sahip $W_t = Z_t\gamma_t + e_t$ modeli elde etmek için,

$$y_t = X_t\beta_t + e_t \quad , \quad t = 1,\ldots,T$$

Modelinde $R_t\beta_t = r_t$ kısıtlarının yerleştirilmesi gerekir. $\gamma_t = \gamma$ ifadesi ile belirtilen tanımlama varsayımı altında, bu model parametreleri sıradan en küçük kareler gibi standart tekniklerin kullanılması ile tahmin edilebilir. Bu kısıtlar için R_t'nin rankı K≤J'dır ve genel çözüm:

$$\beta_t = R_t^+ r_t + H_t\gamma_t$$

ve

$$H_t = I_J - R_t^+ R_t$$

olarak belirtilir. Burada γ_t keyfi bir J×1 boyutlu vektördür. R_t^+, R_t'nin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersidir ve ayrıca yukarıda formül olarak belirtilen H_t matrisi, simetrik J×J boyutlu birim matristir. Bundan başka β_t vektörü yukarıdaki forma sahip olursa $R_t\beta_t = r_t$ kısıtlarını da sağlayacaktır.

$\beta_t = R_t^+ r_t + H_t \gamma_t$ denkleminin ışığında,

$$y_t = X_t \beta_t + e_t \quad , \quad t = 1, \ldots, T$$

modeli, N×1 boyutlu olmak üzere

$$w_t = y_t - X_t R_t^+ r_t$$

ve N×J boyutlu olmak üzere $Z_t = X_t H_t$ durumunda (3.12)'deki gibi yazılabilir. Açıkçası w_t ve z_t bütün t değerleri için gözlemlenmiştir. Her ne kadar (3.12) numaralı modelde γ_t elde edilemediyse de, $\gamma_t = \gamma$ varsayımı aşağıdaki modeli elde etmek için yapılır:

$$w_t = Z_t \gamma + e_t \tag{3.13}$$

Yukarıdaki bu model standart sabit parametreli genel lineer modeldir. Böylece, eğer Z matrisi $Z = (Z_1', \ldots, Z_T')'$ tam sütun ranklı olursa, γ'nin bir tahmini olarak belirtilen g, herhangi bir geleneksel ekonometrik teknikle elde edilir. Böylece β_t'nin tahminleri $\beta_t = R_t^+ r_t + H_t \gamma_t$'den şu şekilde hesaplanabilir:

$$b_t = R_t^+ r_t + H_t g \tag{3.14}$$

Bu bölümün kalan kısmında (3.13) numaralı modeldeki γ' nin sıradan en küçük kareler tahmincisi göz önüne alınmaktadır.

Hata vektörü olan e_t'ye ait daha önceki varsayım altında, (3.13)'deki γ'nin sıradan en küçük kareler tahmincisi olarak, en iyi lineer yansız olduğu belirtilmelidir.

$$g = (Z'Z)^{-1} Z'w \tag{3.15}$$

burada $w = (w_1', \ldots, w_T')'$ olmaktadır. (3.14) numaralı denklem b_t'yi, g'nin deterministik doğrusal bir fonksiyonu olarak ifade etmektedir. Böylece eğer, $\gamma_t = \gamma$ parametrik değişmezlik varsayımı hala geçerliyse, (3.13) ve (3.14) formülleriyle tanımlanan b_t tahmincisi, β_t'nin

$$y_t = X_t \beta_t + e_t \quad , \quad t = 1,\dots,T$$

ve

$$R_t\beta_t = r_t$$

formüllerinde en iyi lineer yansız tahmincisi olur.

(3.13) ve (3.14)'de tanımlanan tahminci çok sayıda başka özelliğe sahiptir. Aşağıdaki üç önerme ispatlarıyla beraber verilmiştir.

Önerme 1:

Tüm t değerleri için R_t=R ve r_t=r olsun. O zaman (3.13) ve (3.14) ile tanımlanan tahminci, kısıtlı en küçük kareler tahmincisi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$b_{RLS} = b + (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1}(Rb - r)$$

yukarıdaki formül için ifadelerin açık gösterimi şu şekildedir:

$$X = (X_1',\dots,X_T')' \quad , \quad y = (y_1',\dots,y_T')' \quad ve \quad b = (X'X)^{-1}X'y.$$

İspatı:

$X = (X_1',\dots,X_T')'$ *ve* $y = (y_1',\dots,y_T')'$ olarak tanımlandı. Tüm t değerleri için R_t=R ve r_t=r oluyorsa, bu durumda

$$(A.1) \quad H = I_J - R^+ R$$

$$(A.2) \quad Z = X(I_J - R^+ R) = XH$$

$$(A.3) \quad w = y - XR^+ r$$

ve g

$$(Z'Z)g = Z'w$$

normal denklemleri çözer. Tek olan b_{RLS}'yi, kısıtlı en küçük kareler yöntemi tahmin eder ve aynı zamanda tanımlanmayan vektör λ'ya bağlı

$$Rb_{RLS} = r \quad ve \quad (X'X)b_{RLS} = X'y + R'\lambda$$

denklemleri sağlanmalıdır. Yapı gereği,

$$b = R^+ r + Hg$$

formülü ile b'yi tahmin eden genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler yöntemi, *Rb*=*r*'yi de sağlamaktadır. Eğer

$$(X'X)b = X'y + R'\lambda$$

formülündeki gibi bir λ vektörü bulunabilirse, o zaman $b=b_{RLS}$ eşitliği söz konusu olur. Nitekim

$$\begin{aligned}(A.4)\qquad Z'Xb &= Z'XR^{+}r + Z'XHg \\ &= Z'XR^{+}r + (Z'Z)g \\ &= Z'XR^{+}r + Z'w \\ &= Z'\left[XR^{+}r + (y - XR^{+}r)\right] \\ &= Z'y\end{aligned}$$

olduğu düşünülsün. Böylece ,

$$Z'(Xb - y) = (I_J - R^{+}R)\left[(X'X)b - X'y\right] = 0$$

olur. Bu sebepten dolayı, $(X'X)b - X'y, (I_J - R^{+}R)$'nin ortogonal bileşenlerinde yer alır. R''nin kolonları tarafından kapsanan uzayda olur. Böylece λ için, $(X'X)b - X'y = R'\lambda$ ve $b=b_{RLS}$ sonucu ispatlanmış olmaktadır.

Açıklama 1:

Bu önermede, eğer kısıtlar gözleme bağlı olarak değişmiyorsa, söz konusu tahmincinin geleneksel kısıtlı en küçük karelerin tahmincisi gibi gücünü kaybedeceği ispatlanmaktadır. Bu nedenle buradaki tahminci Genelleştirilmiş Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmincisi'dir. Kısıtların gözlem sırasına göre sabit olması (değişmemesi) durumunda, en iyi lineer yansız genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisinin, geleneksel kısıtlı en küçük kareler tahmincisine özdeş olması sürpriz bir sonuç değildir. Bu durumda $\beta_t = \beta$ varsayımı uygun hale gelmektedir ve eğer kısıtlar doğruysa, geleneksel kısıtlı en küçük kareler tahmincisi en iyi yansız lineer tahminci olarak ifade edilebilir.

Önerme 2:

R_{1t}, K×J_1 boyutlu ve rank K (K<J_1) ve $J_2 \equiv J - J_1$ olan $R_t = [R_{1t}, 0_{K,J_2}]$de olsun. Ayrıca β_t *ve* b_t, $\beta_t = [\beta_{1t}', \beta_{2t}']'$ *ve* $b_t = [b_{1t}', b_{2t}']'$ şeklinde bölümlendirilmiş olsun. O zaman b_{2t} daima gözlemlere göre değişmezdir.

İspatı:

Eğer $R_t = [R_{1t}, 0_{,K_2}]$ ise, ispatı kolay bir biçimde şöyle gerçekleştirilir.

$$(A.5) \quad R_t^+ = \begin{bmatrix} R_{1t}^+ \\ 0_{J_2,K} \end{bmatrix}$$

ve

$$(A.6) \quad b_t = \begin{bmatrix} R_{1t}^+ \\ 0_{J_2,K} \end{bmatrix} r_t + (I_J - \begin{bmatrix} R_{1t}^+ \\ 0_{J_2,K} \end{bmatrix} \left[R_{1t}^+, 0_{K,J_2} \right]) g$$

$$b_t = \begin{bmatrix} R_{1t}^+ r_t \\ 0_{J_2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{J_1} - R_{1t}^+ R_{1t} & 0_{J_1,J_2} \\ 0_{J_2,J_1} & I_{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

yukarıdaki formülde g, $g = \left[g_1' \quad g_2' \right]'$ biçiminde bölümlendirilmiştir. Ayrıca $b_{2t}=g_2$ gözleme göre değişmezdir.

Açıklama 2:

Eğer β_t'nin herhangi bir elementi $R_t\beta_t = r_t$ tarafından kısıtlanmıyorsa, yani eğer kısıtlar β_t'nin bir elementinin evrimi ile ilgili olarak bir bilgi vermiyorsa, o zaman (3.14) ve (3.15) ile tanımlanan b_t'nin buna karşı olan elemanı gözlem sırasında sabit olacaktır.

Önerme 3:

(3.13) ve (3.14) ile tanımlanan katsayılar tahmincisinin tekrar sıralanması ile ilgili olarak değişmezdir.

İspatı:

(1)'deki katsayıların yeniden sıralanışı ile şu elde edilir:

$$(A.7) \quad y_t = X_t^* \beta_t^* + e_t$$

Burada $X_t^* = X_t W$, $\beta_t^* = W' \beta_t$ olmaktadır. Bundan başka, W ortogonal bir matristir. Katsayıların yeniden sıralanması durumunda değişmez olabilen, b_t'nin elementleri için gerek ve yeter koşulun, β_t^*' nin genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler tahmininin $b_t^* = W'b_t$ olmasıdır. Buraya dek elde edilenlere bir göz atılacak olursa, tekrar sıralanmış model (A.7)'ye karşı gelen kısıt denklemi şöyle olur:

$$(A.8) \quad R_t^* \beta_t^* = r_t$$

burada $R_t^* = R_t W$ ve $R_t^{*+} = (R_t W)^+$ eşitlikleri söz konusudur. (A.8)'e göre genel çözüm aşağıdaki gibidir:

$$(A.9) \quad \beta_t^* = R_t^{*+} r_t + (I_J - R_t^{*+} R_t^*)\gamma_t^*$$

burada γ_t^*, J×1 boyutlu keyfi bir vektördür. (A.7)'ye (A.9)'un eklenmesi ile şu elde edilir:

$$(A.10) \quad w_t^* = Z_t^* \gamma_t^* + e_t$$

burada

$$(A.11) \quad w_t^* = y_t - X_t^* R_t^{*+} r_t = y_t - X_t WW'R_t^+ r_t = w_t$$

ve

$$\begin{aligned} Z_t^* &= X_t^*(I_J - R_t^{*+} R_t^*) \\ &= X_t W(I_J - W'R_t^+ R_t W) \\ (A.12) \qquad &= X_t WW'(I_J - R_t^+ R_t)W \\ &= X_t (I_J - R_t^+ R_t)W \\ &= Z_t W \end{aligned}$$

(A.11)'in benzeri $\gamma_t^* = \gamma^*$ değişmezlik varsayımı altında şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} g^* &= (Z^{*\prime} Z^*)^{-1} Z^{*\prime} W^* \\ (A.13) \qquad &= (W'Z'ZW)^{-1} W'Z'w \\ &= W'g \end{aligned}$$

burada $w^* = (w_1^{*\prime}, \ldots, w_T^{*\prime})'$ ve $Z^* = (Z_1^{*\prime}, \ldots, Z_T^{*\prime})'$ olmaktadır. Son olarak, (A.10)'un benzeri şöyledir:

$$
\begin{aligned}
b_t^* &= R_t^{*+} r_t + (I_J - R_t^{*+} R_t^*) g^* \\
&= W' R_t^+ r_t + (I_J - W' R_t^+ R_t W) W' g \\
\text{(A.9)} \qquad &= W' \left[R_t^+ r_t + (I_J - R_t^+ R_t) W W' g \right] \\
&= W' \left[R_t^+ r_t + (I_J - R_t^+ R_t) g \right] \\
&= W' b_t
\end{aligned}
$$

Açıklama 3:

Bu önerme genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler tahmincisini,

$y_t = X_t \beta_t + e_t \quad , \quad t = 1, \ldots, T$

modelde

$R_t \beta_t = r_t$

formülündeki kısıtları yerleştirmek için farklı metotları kullanan öteki tahmincilerden ayırt etmektedir. Bu diğer tahminciler, gözleme göre değişme gösteren ve gözleme göre değişme göstermeyen alt kümelerdeki bölümlendirilen β_t vektörünü içerir. Bu tahmincilerle ilgili problem, bölümlendirmenin tamamen keyfi olmasıdır ve parametre tahminlerinin, katsayıların keyfi bir biçimde tekrar sıralanmasına göre sabit kalmadığını göstermesidir[22].

3.3. Kısıtlı En Küçük Kareler Yönteminde Yapay Değişkenlerin Kullanılması

3.3.1. Regresyon denklemlerinde yapay değişkenler

Yapay değişkenlerin kullanımı, eğer regresyonda kararlı tahminler elde edilmesi amaç ise, regresyon denkleminin parametreleri üzerine ilave kısıtlar konulmasını gerektirmektedir. Kullanımı mümkün kısıtlar arasında en yararlıları,

- Denklemin sabit terimini sıfıra eşitlemek,
- Yapay değişkenlerden birini denklem dışında bırakmaktır.

Tek sınıflandırma sistemi kullanılırken her iki kısıt da kullanılabilir. Ama eğer birkaç sınıflandırma sistemi kullanılıyorsa en iyi yöntem her sistemden bir yapay değişkenin denklemden çıkartılmasıdır.

Yapay değişken, genel olarak regresyon analizinde sayısal olarak ölçülüp ifade edilemeyen, ırk, cinsiyet, bölge, meslek gibi değişkenlerle ilgili bilgileri dahil etmek için kullanılan basit ve yararlı bir yöntemdir.

A. Sınıflandırmanın tek olması durumu:

Nümerik olarak ölçülebilen Y bağımlı değişkeninin X_1, X_2, gibi bir nümerik bağımsız değişken seti üzerindeki regresyon ile ilgilenildiği varsayılsın. Ayrıca anakütlenin, karşılıklı olarak ayrıcalıklı sınıflara bölündüğünün ve örneklemin her parçasının hangi sınıfa ait olduğunun bilindiği varsayılsın. Burada sadece X_1, X_2, gibi değişkenlerin Y üzerinde etkisini incelemekten başka aynı zamanda sınıf üyeliğinin de etkisini incelemek durumu söz konusu olabilir. Örneğin, bağımsız değişkenlerin yanı sıra yaşanılan bölge etkisinin de bağımlı değişkeni nasıl etkilediği ile ilgilenilebilinir. Bölgesel etki regresyon denklemine yapay değişken biçiminde sokulabilir. Bu örnekte R_1, R_2, R_3 olmak üzere, 3 tane bölge varsa bunun için yararlı olacak denklem şudur:

$$Y = aX + b_{11}R_1 + b_{12}R_2 + b_{13}R_3 + c_1 + u$$

Fakat burada c_1 ile b_{1i}'nin optimum tahminleri kesin olarak belirlenemez. Diğer bir deyişle R_i'ler arasında tam lineer çoklu bağlantı vardır. Regresyon parametrelerinin tahmini için gösterilecek her çaba ($X'X$) matrisinin tersinin alınamaması sebebiyle başarısız olacaktır. Yukarıdaki bu denklemde parametrelerin kararlı tahminlerini elde etmek için ek bir kısıt koymak gerekecektir. Bu kısıta örnek olarak, c_1'ye ya da b_{1i}'lerden birine ya da bu b_{1i}'lerin ortalamasına bir değerin önceden verilmesi olabilir. Eğer $c_1=0$ kısıtı verilirse, denklem şu formda olacaktır:

$$Y = aX + b_{21}R_1 + b_{22}R_2 + b_{23}R_3 + u$$

Bu denklemdeki katsayıların tahmini bilinen bir yol ile gerçekleştirilebilmektedir. Bundan başka alternatif olarak b_{1i}'lerden birini sıfıra eşitlemektir. Böyle bir durumda denklem,

$$Y = aX + b_{31}R_1 + b_{32}R_2 + c_3 + u$$

dönüşür ve bu form sıradan bir homojen olmayan regresyon denklemidir. Bu bahsedilen farklı kısıtlar muhtemelen Y'nin özdeş tahminlerine yol açacaktır ve iki versiyonun doğrudan sunumları farklı olduğu sürece birisi için yapılan parametre tahminleri ötekisinden elde edilecek olanlar için hazır olacaktır.

B.Karşılıklı etkileşimler:

Y'nin X üzerindeki regresyonunun kesişme noktasındaki bölgesel kaymalara ek olarak eğimdeki bölgesel varyasyon ile ilgilenmek mümkündür. Bu konu X'i ve yapay değişkenleri içeren bir karşılıklı etkileşim terimini kullanarak incelenebilir. Bu karşılıklı etkileşime sahip bir regresyon modeli şöyle gösterilebilir:

$$Y = (a + d_1 R_1 + d_2 R_2 + d_3 R_3) X + b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 + c + u$$

Kararsızlık problemi d_i ile a arasında çıkmaktadır. Benzer şekilde b_i ile c arasında da aynı sorun ortaya çıkar. Buradaki denklemde iki kısıt koymaya gerek vardır. Daha önce söz edilen uygun alternatifler burada da ortaya çıkar ve a = c = 0 veya bazı i'ler için $d_i = b_i = 0$ eşitliklerine yer verilebilir. Örneğin, a = 0 kısıtı ile $b_3 = 0$ kısıtını koymayı seçilebilir. Bu kararlı bir çözüm sağlar, ancak yorumlanması zor olur. Hem karşılıklı etkileşim terimini hem de doğrudan bölgesel etkileri homojen biçimlerde formüle edecek ve denklemden yapay değişkenlerden birini çıkaracak biçimde kurulmuş bu kısıtlar doğal olarak yorumlama zorluğu yaratacaktır.

C.Sınıfların bazı sistemleri:

Yukarıdakilere benzer değerlendirmeler belli bir sayıdaki sınıflandırmanın aynı anda yapılması durumunda da söz konusu olur. Genel olarak t sayıda sınıflandırma sistemi vardır bu sistemde i'inci değer, k_i sayıda karşılıklı özel sınıf içermektedir. Şöyle ki, t sayıda yapay değişken seti R_{ij} (i = 1,2,…,t ; j = 1,2,…,k_i) biçiminde tanımlanır. Böylece eğer değer i'inci sistemin j'inci sınıfına ait ise, $R_{ij} = 1$ olur, diğer tüm durumlarda ise $R_{ij} = 0$ olur. Böyle bir durumda

$$Y = aX + b_{11} R_1 + b_{12} R_2 + b_{13} R_3 + c_1 + u$$

formülünün genelleştirilmiş hali

$$Y = aX + \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=k_i} b_{ij} R_{ij} + c + u$$

olacaktır.

Açıkça görüldüğü üzere, sabitlerin b_i^* (i = 1,2,…,t) ve c^*'nin, $\sum_{i=1}^{i=t} b_i^* + c^* = 0$ olduğu durumda Y, özdeş bir biçimde $b_{ij} + b_i^*$ ve $c + c^*$ 'nin yukarıdaki son genelleştirilmiş denklemde b_{ij} ve c'nin yerine yerleştirilmesinden etkilenmeyecektir ve kararlı bir sonuç elde etmek için yine bir kısıt sistemine ihtiyaç vardır. Bu en kolay biçimde her bir setten yapay değişkenlerden birini atarak sağlanır. Başka bir deyişle i'nin her sınıf sistemi için bir j_i seçerek ve önceden $b_{ij_i} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,t)$'yi belirleyerek kolay bir kısıt koyma işlemi gerçekleştirilir [23].

3.3.2. Yapay değişkenlere ait bir mekanizma

Regresyon denklemlerinde kategorik değişkenlerin etkisini kapsayacak biçimde yapay değişkenlerin kullanılması ile ilgili prosedür genellikle bilinmektedir. Birçok durumda, özellikle sadece iki sınıf gözlemin bulunması durumunda normal biçimde sunulan sonuç hiçbir yorum problemi yaratmaz. Örneğin savaş öncesi ve savaş sonrası biçiminde ele alınan yapay değişken. Fakat çok sayıda yapay değişkenden oluşan bir setin kullanılması durumunda regresyonu uyarlamaya dönük mekanik problem ile sonuçların etkin bir biçimde sunulması problemi arasında ciddi bir fark vardır. Böyle bir çalışmada, Daniel B. Suits gelir ile yerleşim yerlerine bağlı olarak hane halklarının benzin tüketimleri arasındaki ilişkiyi ifade etmek için bir en küçük kareler regresyonu kullanmıştır ve hiç kuşkusuz Amerika Birleşik Devletlerinin verileri de, Kuzey Doğu, Orta-Kuzey, Batı ve Güney olmak üzere bölmüştür. Burada öncelikle güneye ait yapay değişkenin ele alınmaması, aslında bu bölgenin baz alındığını ifade etmektedir. Yani bir bölge baz alınarak diğer bölgelerdeki insan davranışlarındaki sapmalar ölçülmek istenmektedir. Fakat Suits her bölgeye ilişkin bir katsayının bulunmasına yönelik bir çözüm mekanizması oluşturulmayı amaçlamıştır. Bu çerçevede düşünerek oluşturduğu denklemin genel formu şöyledir:

$G = a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + b_1N + b_2C + b_3W + b_4S + u$

Bu eşitlikteki biçime sahip bir denklem b_i'lerin değerine bazı kısıtların konulması ile uyarlanabilecektir. Bilindiği üzere mekanik olarak b_i'lerden bir tanesinin sıfıra eşitlenmesi en basit kısıt olacaktır ve bu ilgili yapay değişkenin regresyondan çıkartılması ile sağlanacaktır. Güneyin katsayısına ait olarak, $b_4 = 0$ kısıtının konulması ile en küçük kareler tahmininin yapılabileceği bilinen bir yoldur. Ama bundan başka farklı bir mekanizma da geliştirilmiştir. Hiç kuşkusuz güneyin sıfır katsayısı da dahil olmak üzere her b_i'ye katsayı ortalamalarının sıfır olacağı biçiminde bir k sabiti eklemek genel olarak faydalı bir yol olacaktır. Bunun için,

$$b_i^* = b_i + k \quad (i = 1,2,3,4)$$

biçiminde bir katsayı seti istenir ve şu tanımlanır:

$$\sum b_i^* = \sum (b_i + k) = 0$$

Ayrıca k için gerekli değer şudur:

$$k = -(b_1 + b_2 + b_3 + 0) / 4$$

Bu sayede oluşturulan modelde güneyin de bir katsayısı vardır ve bu sayı k'ya eşit çıkmaktadır. Böylece denklemde temsil edilen sadece tüm bölgeler değil, ayrıca yapay değişkenlerin katsayıları ihmal edildiğinde oluşturulan denklemin benzin tüketimi ile gelir arasındaki ilişkiyi tüm Birleşik Devletler için ifade ettiği de görülmektedir. Yapay değişkenlerin katsayıları bir bölgedeki davranışların hangi ölçüde ulusal ortalamadan saptığını gösterir.

Suits'in önerdiği bir başka alternatif prosedür kısıt olarak $a_0 = 0$ alınması idi. Yine bu kısıt altında da her yapay değişken için bir katsayı elde edilebilecekti. Fakat bu katsayılar ortalama davranışlardan sapmaları açıkça gösterme özelliğine sahip olmayacaktı [24].

Suits'in ortalamadan sapmalar biçiminde yorumlamasına izin veren biçimde yapay değişken katsayılarının tahminlerinin düzeltilmesi için önerdiği prosedür 'ortalama' kavramı konusunda özel bir tanıma dayanmaktadır. Fakat Peter Kennedy buna bir alternatif önermiştir. Ama öncelikle mevcut form için söylenmesi gerekenler vardır. Çünkü

$$G = a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + b_1N + b_2C + b_3W + b_4S + u \qquad (3.16)$$

ilişkisi tahmin edilemezdi. Bunun sebebi ise tam çoklu doğrusallığa bağlı olarak tanımlanmış olmasıdır. Yani, a_0 ile b_1, b_2, b_3 ve b_4 ile tam bir çoklu doğrusal bağlantıdan söz edilmesi kuşkusuzdur. Çünkü *N, C, W* ve *S* değişkenlerine ait değerlerin toplamı sabit terime ait olan ve 1'lerden oluşan sütuna denk düşer. Fakat Suits bu problemde alışılmış kısıtlar kullanmıştır. Bu kısıt a_0 ile b_1, b_2, b_3 ve b_4'ün sıfıra eşit olması biçimindeydi. Ancak Suits,

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$$

biçiminde tanımlayıcı bir kısıtı kullanmak yerine, daha kolay anlaşılan ve yorumlanabilen tahmini sonuçların nasıl yapılacağını ikna edici bir biçimde savunmuştur.

Maalesef, Suits tekniğini sergilerken, ulusal ortalamanın özel bir tanımını kullandığını açıkça belirtmemiştir. Suits için 'ulusal ortalama' bu dört bölgenin her birinden seçilen dört tipik hane halkının ortalamasıdır. Kennedy için bu kavram tüm hane halklarının ortalamasıdır. Böylece yukarıdaki (3.16) eşitliğindeki ilişkinin toplanması ve toplam hane halkına bölünmesi aşağıdaki formülü doğurur:

$$\overline{G} = a_0 + a_1\overline{Y} + a_2\overline{Y}^2 + b_1 P_N + b_2 P_C + b_3 P_W + b_4 P_S$$

Burada $\overline{G}$, Birleşik Devletler hane halklarının benzin harcamasının ortalamasıdır. $\overline{Y}, \overline{Y}^2$ terimleri sırasıyla hane halkı gelir ortalaması ve ortalama karesidir. P_N, P_C, P_W, P_S, dört bölgede bulunan hane halkı oranlarıdır. Eğer ,

$$b_1 P_N + b_2 P_C + b_3 P_W + b_4 P_S = 0$$

kısıtı vurgulanırsa, o zaman a_0'ın tahmini olarak şu üretilir:

$$a_0^* = \overline{G} - a_1\overline{Y} - a_2\overline{Y}^2$$

Öyle ki, yapay değişkenlerin katsayıları göz ardı edildiğinde, denklem tüm Birleşik Devletleri kapsayan hane halkı geliri ile benzin tüketimi arasındaki ilişkiyi gösterir. Sonuç olarak, a_0'ın bu tahmini bir ulusal ortalama gibi görülebilir[25].

Tüm bu çalışmaları üzerine Greene, Suits'in iddia ettiği gibi $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ kısıtını kullanarak aynı veriler üzerinde çözümü kısıtlı en küçük kareler yardımı ile gerçekleştirmiştir. Böylece tüm b_i katsayılarının ulusal ortalamadan sapmalarını yorumlamak için daha yararlı olduğunu göstermiştir.

Suits'in açıkladığı gibi, $b_4 = 0$ kısıtı regresyonda güneyi dışarıda bırakarak kolaylıkla çözüldüğü sürece b_i'nin dört tahminini ve bunların standart hatalarını yeniden hesaplamak için biraz daha çaba harcanmalıdır. Kısıtlı en küçük karelere ait katsayılar vektörü ile Suits'in indirgenmiş modele en küçük kareleri uygulaması sonucu elde ettiği katsayılar vektörü aynıdır. Birçok standart ders kitabında, kısıtlı en küçük kareler ile ilgili açıklamalarda, tahmincinin bu tür bölgesel varyasyonlara dayalı olarak oluşturulan yapay değişkenlerin çoklu doğrusallık yaratmasına yönelik problemlerin uygulamalarındaki çözümleri yeterince belirttiğine dair kuşkular vardır. İşte bu sebeple, Suits ve Greene bu probleme ait çözümlerin nasıl türetildiğine değinmişlerdir.

Daha önce de söz edildiği gibi, birçok standart ders kitabı kısıtlı en küçük kareleri ele aldığında oldukça sık bir biçimde karşılaşılan X matrisinin tam sütun ranklı olmaması olasılığını açıklamakta başarısız olur. (X'X)'in tersinin alınmasının esas amaç olduğu durumda, gerektiği kadar çok kısıtın tam olarak çözümlenmesi tam rank sorununu çözmek için gerekli olacaktır. Artık Greene'in açıklamaları sayesinde, kısıtlı tahminciyi kısıtsız tahmincinin bir fonksiyonu olarak kabul eden genel sunum ve kısıtlı ile kısıtsız tahminciler arasındaki farklar, X'in tam ranklı olduğu özel durum için geçerli olarak tanımlanmasını sağlayacaktır [8].

Simon, Ramos ve Sanroma (2005/7) İspanya'daki bölgesel ücret farklılıkları ve toplu sözleşme ile ilgili bir çalışma yapmışlardır. Bölgesel mikro verileri kullanarak İspanya'daki bölgeler arası ücret farklılıkları analizini ortaya koyarken, Krueger ve Summers (1998)'ın başlattığı ve Haisken-DeNew ve Schmidt (1997)'in geliştirdiği standart prosedürü kullanmışlardır. Başka bir deyişle bölümler arası Mincerian ücret denklemini kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile aşağıdaki biçimde tahmin etmişlerdir:

$$w_{ij} = \alpha + \delta X_i + \beta Z_j + \gamma E_j + \varepsilon_{ij}$$

Bu modelde w_{ij}, j bölgesinde çalışan i işçisinin brüt saat ücretini ifade eder, X_i bireysel iş kontrollerini gösteren bir vektördür. Z_j İspanya'daki tüm bölgeleri (17 Bölge) kapsayan karşılıklı özel yapay setini ihtiva eder. E_j kuruluş denetimlerinin vektörüdür. δ, β ve γ tahmin edilecek parametrelerdir. Bu çalışmada önemle ilgilenilen β parametrelerinin vektörüdür. Bu denklemdeki regresörlerin çapraz ürün matrisi full (tam) ranklı olmadığı sürece şu kısıt kullanılmalıdır:

$$\sum_{j=1}^{17} n_j \beta_j = 0$$

Burada n_j, j bölgesindeki istihdam payıdır. Bu kısıtlı modelde her bölgeye bir yapay değişken atanır. Bölge katsayılarının ağırlıklı toplamı üzerindeki bu kısıt, modelin tahmin edilmesine olanak sağlar. Ayrıca bu sayede Haisken-DeNew ve Schmidt'in çalışmasında belirtildiği üzere katsayıların yansız standart hataları bulunur.

Bölgesel ücret farklılıklarının standart sapması bunların tümünün genel değişkenliğini ölçer:

$$SD(\beta) = \sqrt{\sum_j n_j \beta_j^2 - \sum_j n_j \sigma_j^2}$$

Bu formüldeki σ_j^2'ler hesaplanan bölge katsayılarının varyanslarıdır. *SD(β)*, β_j'lerin istihdam ağırlığı ile düzeltilmiş standart sapmalarını ifade etmektedir[26].

Dünya Bankası Kuzey Atlantik Serbest Bölgesi (NAFTA)'nın birlik dışı ülkelere yaptığı yabancı yatırımlara ilişkin etkinin ölçülmesine yönelik çalışmada da kısıtlı en küçük kareleri aynı kısıt çerçevesinde kullanmıştır. Doğrudan yatırım trendinin NAFTA öncesi ve sonrası etkilerinin ortak ve ülke bazında ayırt edilmesine yönelik olarak doğrudan sermaye yatırımı için yapay değişken setleri üzerinde panel regresyon kullanmıştır.

Ayrıştırma için doğrudan sermaye yatırım akınlarına basit bir panel regresyon uygulanabilir. Fakat burada da baz olarak bir ülke ve yıl seçmek gerekecekti. Bu yüzden kısıtlı en küçük kareler yöntemi kullanılmalıydı. Bu regresyonda birkaç tam yapay seti, açıklayıcı değişken olarak yer alırken, her set modeldeki bileşenlerden bir tanesini kapsayacak ve her tam yapay setinin katsayı toplamı sıfır olmalı biçiminde bir kısıt kullanılacaktı. Böylece Greene'nin 1991'deki bu çalışmasının öngördüğü biçimde kısıtlı en küçük kareler yöntemi, buradaki probleme bir çözüm oluşturmaktadır[27].

Ehrlich L., 1994-2004 yılları arasında Estonya ihracatının ürün çeşitliliğindeki değişimleri incelemiştir. Modeli kurarken de sektör, ülke ve dönem için yapay değişkenler oluşturmuştur. Yani burada analiz edilen değişken üç boyutludur. Bu yüzden modelde ihraç edilen her ürün belirli bir endüstriye ait olabilir ve bu belirli bir ülkeye belirli bir dönemde ihraç edilebilir. Bu üç boyutu da modelin kapsayabilmesi için modelde üç yapay değişken seti ilave edilmiştir. Bağımlı değişken Y_{irt} ise, i endüstrisine ait, t zamanında r ülkesine yapılan ihracatta ürün sayısındaki artış olmaktadır[28].

Tahmin edilen yorumların sonuçlarını basitleştirmek için bölgesel çalışmaları yapan yazarlar kısıtlı en küçük karelerin kullanılmasını önermişlerdir[29]. Kısıtlı en küçük kareler tahmini gözlenen değişken için her bir endüstrinin, bölgenin veya zaman aralığının etkisinin doğrudan doğruya tahmin edilmesini sağlar[30]. Sıradan en küçük kareler ile yapılan tahminler bu etkilerin doğrudan yapılmasına olanak sağlamaz. Çünkü sıradan en küçük karelerde bu etkiler referans değeri olarak ihmal edilen yapay değişkene bağlı olarak ölçülmektedir. Sıradan en küçük kareler tahmininde tüm yapay değişkenlerin kullanılması araştırmacıyı tam çoklu doğrusal bağlantıya götüreceğinden mümkün değildir.

Kısıtlı en küçük kareler yöntemi modele tüm yapay değişkenlerin alınmasını sağlarken aynı zamanda araştırmacıyı tam çoklu doğrusal bağlantı probleminden de kurtarır. Bunun nedeni hipotezdeki kısıtları regresyona basit bir biçimde katan kısıtlı en küçük kareler tahmincisidir. Tam çoklu doğrusal bağlantıdan kurtulmak için aynı kategoriye ait tüm yapay değişkenler toplamının sıfır olduğu varsayılır.

Endüstri dalının, ihracatın yapıldığı ülkenin ve ele alınan zaman aralığının etkilerinin ekonometrik analizinde tahmin prosedürü olarak geleneksel panel data tahmini kullanılmıştır ve burada her kategori için yapay değişkenlerin katsayıları toplamını sıfıra eşitleyen bir kısıt uygulanmıştır[28].

Hirschberg ve Slottje'nin 1999 yılındaki 'Tam (exact) Lineer Kısıtlara Bağlı Lineer Modellerin Tekrar Parametrelendirilmesi' isimli çalışmasında tam lineer kısıtlara sahip bir talep denklemi sisteminin tahmininde tekrar parametrelendirme yöntemi uygulanmıştır. Tekrar parametrelendirme ve orijinal modele lineer kısıtların konulması işleminde 2 kısıtın olduğu R matrisine daha sonra eklenen kısıt gecikmeli katsayının parametreleri toplamı sıfırdır biçimindeydi[31].

Daha sonra Hirschberg ve Slottje, Lye'yi de yanlarına alarak 2005'te yaptıkları 'Alternative Forms for Restricted Regressions' adlı çalışmada yine Greene'nin, X'in tekil olmadığı durumunu ele alarak tekrar parametrelendirme işlemine değinmişler ve bu tekrar parametrelendirme işleminin kısıtlı en küçük kareler tahmincisine bir alternatif yöntem olacağını belirtmişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile kısıtlı en küçük kareler yöntemi arasındaki ilişkiye de kısaca şöyle değinmişlerdir. Bunlara göre,

$$Y = X(\beta) + \varepsilon,$$
$$R\beta = r$$

olarak belirtilen kısıtlı lineer denklem probleminde, X(β) = Xβ olduğunda ve $\sum$ 'nın $\tilde{\sum}$ tarafından tahmin edildiği durumda geleneksel kısıtlı en küçük kareler probleminin çözümü şöyle olur:

$$\hat{\beta} = (X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Sigma}^{-1}Y + (X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}R'(R(X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}R')^{-1}(r - R(X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Sigma}^{-1}Y)$$

Burada $\sum$ varyans- kovaryans matrisidir ve $\tilde{\sum}$ varyans- kovaryans matrisinin tahminidir. $\tilde{\sum}$ varyans- kovaryans matrisinin tahminin bilinmesi durumunda X matrisine uygun dönüşümün yapıldığı matris Q ile belirtilebilir. Böylece tekil olmayan bir Q matrisi

$$Q = (X'\tilde{\Sigma}^{-1}X)^{-1}$$

olarak tanımlanırsa ve $\sum$ = I olduğu zaman, yukarıda belirtilen katsayılar tahmini şu hale dönüşür:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y + (X'X)^{-1}R'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}(r - R(X'X)^{-1}X'Y)$$

Dikkat edilecek olursa daha önce de belirtildiği gibi, bu katsayılar tahmini kısıtlı en küçük karelere aittir[32].

3.3.3. Mevsimsellik durumunda yapay değişkenlerin kullanılması

Aylık esasa göre verilen zaman serileri mevsimsel dalgalanmalarının etkisini de taşırlar. Örneğin çeşitli malların fiyatları üretim miktarına bağlı olarak senenin dört mevsimine ve aylara göre farklılık arz eder. Bu farka mevsim dalgalanmaları denir. Mevsimsel dalgalanmalarda aşağı yukarı bir düzenlilik gözlemlenmektedir. Söz konusu değerler 12'şerlik aylık aralarla bir minimum veya maksimum noktaya erişirler. Bir zaman serisinin aldığı değerler üzerinde mevsim etkisini hesaplamak demek, belirli bir aya ya da üç aya ait mevsim etkisinin normalden ne kadar uzaklaştığının tespit edilmesi demektir. Özetle mevsimselliğin ölçülmesi, normal değere nazaran aylık veya üç aylık değişmelerin nasıl olacağının belirlenmesidir[33].

Nitel bir değişken için genel kural, bu değişkenin her kategorisi için bir yapay değişken yaratmaktır. Bu değişken ya sıfır ya da bir değerlerini almaktadır. Dört kategori ile 'mevsim' değişkeni sınıflandırılabilir ve böylece her çeyrek için dört yapay değişkene ihtiyaç duyulur. Mevsime ait yapay değişkenler şöyle tanımlanır:

D_1=1 , tüm birinci çeyrek değerleri için
=0 , diğer çeyrek değerleri için
D_2=1 , tüm ikinci çeyrek değerleri için
=0 , diğer çeyrek değerleri için
D_3=1 , tüm üçüncü çeyrek değerleri için
=0 , diğer çeyrek değerleri için
D_4=1 , tüm dördüncü çeyrek değerleri için
=0 , diğer çeyrek değerleri için

Mevsim olarak tanımlanan bir değişken için dört kategori vardır. Böylece genelde, bir kavramsal değişkenin her bir sınıfı için bir deneysel değişken olmak üzere, regresyon denkleminde birkaç yapay değişken, bir kavramsal değişkeni içermesi için gereklidir. Bu çerçevede tahmin edilecek denklem ise şudur:

$$Y = b_0 + b_1 D_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4 + e$$

Mevsimsellik gösteren Y değişkenine ait değerleri değil de, yapay değişkenler ve sabit terim için değerleri genel yapıyı aşağıdaki biçimde göstermek mümkündür.

KATEGORİ	SABİT TERİM	D_1	D_2	D_3	D_4
Q1	1	1	0	0	0
Q2	1	0	1	0	0
Q3	1	0	0	1	0
Q4	1	0	0	0	1

Yukarıdaki bu tablo sabit terim için bir ve her yapay değişken için de birer tane olmak üzere beş tane katsayının tahmini için oluşturulmuştur. D_1'den D_4'e kadar olan sütunlardaki değerlerin toplamı 1'lerden oluşan bir sütunu verir. Elbette, bu sütun sabit terimin 1'lerden oluşan sütununa eşit olur. Bu aslında sıradan en küçük karelerin varsayımları ele alındığında çoklu doğrusal bağlantı olarak ifade edilmektedir. Çünkü bu varsayım 'bağımsız değişkenler arasında kesin doğrusal ilişki yoktur' biçiminde verilmektedir. Teknik olarak bu karşılaşılan duruma 'bağımsız değişkenler arasında tam lineer bağımlılık' denilebilir. Sıradan en küçük kareler varsayımlarından birinin bozulduğu anlamına gelen bu lineer bağımlılık altında regresyon katsayıları anlamlı olarak elde edilemez. Sonuç olarak bir kısıtın konulması gerekmektedir [34]. Kısıtlı en küçük kareler bir kısıtlanmış ilişkiye en küçük karelerin uygulanmasından başka bir şey değildir. Başka bir deyişle kısıtlı en küçük karelerde yapısal ilişkinin hata kareler toplamını söz konusu kısıt altında en küçüğe indirgeme işlemidir [35].

A. Katsayılardan birinin sıfıra eşitlenmesi

Yapay değişkenlerde, değişken değerinin üçer aylık dönemlerde değişip değişmediği araştırılırken dört tane üçer aylık dönemi temsil etmek üzere, sadece üç yapay değişken kullanılmaktadır[36]. Bu çok yaygın bir kullanımdır. Yapay değişken tuzağı diye de adlandırılan bu yöntemde mevsimlik yapay değişken kategorilerinden biri çıkartılır. Birinci çeyreğin çıkartıldığı modelde mevsimlik yapay değişkenleri şöyle gösterilir:

D_2: ikinci çeyreğe ait yapay değişken

D_3: üçüncü çeyreğe ait yapay değişken

D_4: dördüncü çeyreğe ait yapay değişken

Mevsimlik yapay değişkenleri ise şöyle bir tabloda göstermek mümkündür:

Kategori	Sabit	D_2	D_3	D_4
Q1	1	0	0	0
Q2	1	1	0	0
Q3	1	0	1	0
Q4	1	0	0	1

Üç yapay değişkenin de birinci çeyrekte (ya da göz ardı edilen kategoride) aldığı değer 0'dır. Tahmin edilecek denklem ise şöyledir [34]:

$$Y = b_0 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4 + e$$

Burada sırasıyla b_2, b_3 ve b_4 katsayıları ikinci, üçüncü ve dördüncü üç aylık dönemlerin temel döneme, yani göz ardı edilen kategoriye göre sabit farkları olup, mevsim etkilerini göstermektedirler[36].

Bu özel formül ile hesaplanan sabit terim, göz ardı edilen kategorinin fiyatı olarak yorumlanabilir. Ayrıca bu modelde bir kategoriye ait katsayı yorumlanırken bu kategorinin göz ardı edilen kategoriden ne kadar farklı olduğunu göstermektedir.

B.Katsayılar toplamının sıfıra eşitlenmesi

Öncelikle, genel olarak mevsimselliğe ait tüm değişkenleri içeren temel denklem,

$$Y = b_0 + b_1 D_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4 + e$$

olarak yazmak gerekecektir. Yukarıda tanımlandığı gibi, örneğin fiyat gibi mevsimlik bir Y değişkeni, belirli bir mevsimde, değişkenin 12 aylık ortalamasından sapma miktarı olarak hesaplanır. Aşağıdaki formül kapsamında,

$$Fiyat = b_0 + b_1(mevsim) + e$$

bu b_k'nın k'ıncı çeyrekte tüm döneme (yıl) ait ortalama fiyattan ne kadar saptığını ölçtüğü belirlenebilmektedir. Ayrıca eğer her katsayı tüm döneme ait ortalamadan sapmayı ölçmekte ise, mevsimlik katsayıların toplamı sıfır olmalıdır. Çünkü 12 aylık dönem için hesaplanan ortalamada mevsimsellik olmayacaktır. Bundan sonra b_0 sabiti tüm döneme ait ortalamaya eşit olacaktır. Bu sonucu elde etmek için aşağıdaki kısıtı koymak gerekir:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \quad \text{veya} \quad b_1 = (-b_2 - b_3 - b_4)$$

Bu kısıt temel denklemde yerine konulduğunda,

$$Y = b_0 + (-b_2 - b_3 - b_4) D_1 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4$$

Buradan da tahmin edilecek denklem formu şu olacaktır ve ayrıca elde edilen bu son denklem verilen kısıt altında, temel denkleme ait katsayıların nasıl tahmin edileceğine ait bir yolu gösterecektir:

$$Y = b_0 + b_2(D_2 - D_1) + b_3(D_3 - D_1) + b_4(D_4 - D_1)$$

Bu yol iki adımda gerçekleştirilir. Birinci adım yukarıdaki son denklem ile b_0, b_2, b_3 ve b_4 tahmin edilir, ikincisi ise verilen kısıt yardımı ile b_1'in bulunmasıdır [34].

Mevsimsel dalgalanmaların etkisinde olabilecek birçok ekonomik değişken tanımlanabilir. Nitekim Nanak Kakwani 2001 yılında Doğu Asya'daki krize dair sosyal bir perspektif oluştururken burada kullanılan modelde mevsimselliği ortadan kaldırmak için kısıtlı en küçük kareler yöntemini kullanmıştır.

Bilindiği üzere Doğu Asya hala dünyada en hızlı gelişen, başka bir deyişle en yüksek ekonomik büyümeye sahip bir bölgedir. Bu başarı piyasa ekonomisine dönük politikalara bağlanmıştır. Söz konusu bu çalışma, son ekonomik krizin büyümeye ağırlık veren makro ekonomik politikaların sabit gelirli grupların yaşam standardını koruma konusunda yetersiz olduğunu göstermektedir.

Yaşam standardı çok boyutlu bir kavramdır ve halkın iyi durumda olması ile ilgili çok sayıda unsuru kapsamaktadır. Bu kavram sosyal göstergeler cinsinden tanımlanır. Bu çalışma ekonomik krizin, fakirlik, gelir eşitsizliği, istihdam ve işgücüne katılma oranı gibi değişkenler üzerindeki etkilerini analiz etmektedir. Fakat burada Kore ve Tayland gibi iki ülkenin karşılaştırılması yapılırken, bu iki ülkenin hangi ölçüde krizden kurtulduğu ve bu iki ülke hükümetinin kriz ile ilgili rollerinin ne olduğu belirlenmektedir. Çünkü bu iki ülke krizden farklı etkilenmiş ve hükümetleri farklı tepkiler vermiştir.

Kriz sırasında ortaya çıkması muhtemel olan yapısal değişmeleri ölçmek, krizin etkisini izole edebilir. Ancak krizin hemen öncesi ile hemen sonrası dönemlere bakmak krizin etkisini izole etmeyecektir. Kriz döneminde olayların uzun dönem trendinden nasıl saptığını gözlemlemek gerekmektedir. Bu çalışmada uzun dönem trendlerini de ölçmek için yarı-logaritmik bir regresyon denklemi oluşturulmuştur[37].

Bu modelde yarı-logaritmik yapının kullanılması eğim katsayılarının üçer aylık mevsimsel mutlak bir değişmeye karşılık bağımlı değişkendeki oransal ya da göreli değişmeyi ölçer. Buna göre Y'deki göreli bir değişme 100 ile çarpıldığında, açıklayıcı değişkenlerdeki mutlak değişmeye karşılık Y'deki yüzde değişim ifade edilmiş olur[2].

Eğer Y_{it}, t'inci yıl ve i'inci çeyrekte işsizlik oranını ifade ederse, o zaman bu araştırma 8 yıla ait 32 çeyrekten oluşan bir dönem için şöyle gösterilmiştir:

$$Ln(Y_{it}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i D_{it} + \beta_t + u_{it} \qquad i = 1,2,3,4$$

Burada D_{it}, t'inci gözlem i'inci çeyreğe ait 1 değerini alan bir yapay değişkendir. Eğer D_{it} t'inci gözlem i'inci çeyreğe ait değilse 0 değerini alır. Modeldeki u_{it} değişkeni hata terimidir, sıfır ortalama ve sabit varyansla normal dağılıma sahip olduğu varsayılır.

Bu modelde dört yapay değişkenin toplamı $(D_{1t} + D_{2t} + D_{3t} + D_{4t})$ tüm t değerleri için 1'e eşittir. Bu durumda tam bir çoklu-doğrusallık problemi yarattığından tahmin doğrudan sıradan en küçük kareler yöntemi ile yapılamaz. Modeli tahmin etmek için yapay değişkenlerin katsayıları üzerinde en az bir kısıta ihtiyaç vardır. Tüm bir yıl için mevsimsel dalgalanmaların etkisinin sıfır olduğunu varsaymak mümkündür. Bu ise ,

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$

olduğunu ifade eder. Bu kısıt ile kısıtlı en küçük kareler yönteminin kullanılması modelin tahmin edilmesini sağlar [37].

3.3.4. Mevsimsel yapay değişkenlerin tuzağına ilişkin not:

Araştırmacılar bu mevsimsel yapay değişkenlerin üzerine kısıt koyarken ya bir katsayıyı sıfıra eşitlemektedir, ya da tüm yıl boyunca mevsimsel etkiye ait katsayı toplamlarını sıfıra eşitlemektedir. Bu yöntemler hiç kuşkusuz tahmin edilen katsayıların yorumunda farklılık yaratmaktadır. Bir mevsimsel katsayının sıfıra eşitlenmesi, yani o kategorinin ihmal edilmesi durumunda elde edilen diğer üç katsayı ihmal edilmiş kategoriden sapmayı ölçer. Tüm mevsimsel katsayıların toplamının sıfıra eşitlenmesi durumunda katsayılar genel ortalamadan sapmayı ölçer. Bu yüzden bunlardan hangisinin kullanılacağı genellikle araştırmacının seçimine ve hedefine bağlıdır. Belki de özel araştırma sorunları ve sonuçların nasıl sunulacağı bu seçimi etkiler[34].

3.3.5. Kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile mevsimselliğin ölçülmesi

Genel olarak F testi belli bir anda birden fazla katsayı ihtiva eden herhangi bir lineer hipotezin testini gerçekleştirmek için kullanılır. Bu testler temel alınan ekonomik teorinin ileri sürdüğü birden fazla katsayı değerinin, simultane olarak belirlendiği bir hipotezin var olması durumunda kullanılmasını gerektirir.

F testinin aynı anda birden fazla katsayı hakkındaki hipotezi değerlendirme biçimi çok ustaca yapılması gereken bir iştir. İlk adım, denkleme konacak kısıtlara bağlı özel bir sıfır hipotezi oluşturmaktır. Sonuçta sıfır hipotezinin doğru olması durumunda elde edilecek kısıtlı denklemin alacağı değerlerin grafiği ile asıl değerlerin grafiğinin birbirine benzediği düşünülebilir.

F testinde ikinci adım, bu kısıtlı denklemi sıradan en küçük kareler yöntemi ile tahmin etmek ve kısıtlı denklemin uyumunu kısıtsız denklemin uyumu ile karşılaştırmaktır. Eğer kısıtlı denklem ile kısıtsız denklemin uyumu arasında belirli bir farklılık yoksa sıfır önsavının red edilmemesi gerekir. Eğer kısıtlı denklemin uyumu kısıtsız denklemin uyumundan daha iyi ise sıfır hipotezini red ederiz. Kısıtlı denklemin uyumu aslı kısıtsız denklemin uyumundan daha üstün olmayacaktır. Bilindiği üzere bu uyum hata (artık) kareler toplamı ile ifade edilebilmektedir.

Kısıtlı modelin hata kareler toplamı, kısıtsız modelin hata kareler toplamından her zaman büyüktür veya eşittir. Çünkü kısıtsız modeli oluştururken sıradan en küçük kareler yöntemi kullanılmaktadır ve bu yöntemde hata kareler toplamını minimize eden katsayı değerlerinin de bulunduğu dikkatlerden kaçırılmamalıdır. Eğer kısıtsız regresyon, kısıtlı regresyonun tahmin ettiği katsayıların tam olarak aynısını verirse iki regresyonunda hata kareler toplamı birbirine eşit demektir ve böyle bir durumda da kısıtı sınayan F istatistiğinin değeri sıfır olacaktır. Ama bu çok nadir rastlanan bir durumdur. Böyle bir durumda da sıfır hipotezi red edilemez. Çünkü veriler kısıtların doğru olduğunu göstermektedir. Kısıtlı katsayılar ile kısıtsız katsayılar arasındaki fark büyüdüğü sürece sıfır hipotezinin doğruluğu kuşkulu hale gelir. Böylece hesaplanan F değeri, kritik F değerinin üzerine çıktığı zaman sıfır hipotezinde belirlenen kısıtlar test tarafından red edilmiş olur.

F testi için karar kuralı şöyledir:

Eğer $F \geq F_c$ ise H_0 red,

Eğer $F < F_c$ ise H_0 kabul edilir.

F_c: F tablosundan bulunan kritik F değeridir.

Daha önce de değinildiği gibi, mevsimsel yapaylar zaman serisi modellerinde verilerin mevsimlik değişimlerini dikkate almak için kullanılan yapay değişkenlerdir. Genel olarak model şöyledir:

$$Y_t = b_0 + b_2 D_{2t} + b_3 D_{3t} + b_4 D_{4t} + b_5 X_{Trend} + e_t$$

Bu modelde X_{trend} trendi belirten değişkendir ve t çeyreklik gözlemleri indekslemektedir. Burada 4 mevsimi temsil etmek üzere sadece üç tane yapay değişken olduğuna dikkat edilmelidir. Bu formülasyonda 1.çeyreğe ait katsayı sıfır olarak belirlenmiştir ve ayrıca b_2, Y'nin 2.çeyrekteki beklenen değerinin göz ardı edilen ve koşul olan 1.çeyrekteki beklenen değerinden ne kadar farklı olduğunu göstermektedir. Aynı yorumlar diğer çeyrekler için de yapılabilmektedir.

Mevsimsel yapayların kullanılması Y'yi ve mevsimlik olarak değer değiştirmeyen herhangi bir bağımsız değişkeni mevsimsellikten arındırır. Bu prosedür, tahmin öncesi Y ve X_{trend}'in mevsimsel olarak değişmedikleri sürece kullanılabilir. Birçok araştırmacı tahmin öncesi mevsimsel ayarlama tipinden kaçınır. Fakat mevsimsel yapaylar tüm zaman dönemi için sabit kalma gibi kendilerine ait sınırlandırmalara sahiptir. Sonuç olarak 'verilerin mevsimsellikten arındırılması için en iyi yaklaşım şudur' denilememektedir.

Verilerdeki anlamlı mevsimselliği test etmek için, yapayların her birini ayrı bir zamanda test etmek yerine, tüm sıfıra eşit olan yapayların eş zamanlı hipotezini test etmek gerekir. Başka bir deyişle, mevsimsel yapayları kullanan bir regresyon modelindeki mevsimselliğin uygun biçimde test edilmesi için t testi yerine, F testi ile test edilmesi daha doğrudur.

Bu durumda sıfır hipotezi mevsimselliğin olmadığı biçiminde kurulur:

$H_0 : b_2 = b_3 = b_4 = 0$

H_1: b_2, b_3, b_4 katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Bu durumda kısıtlı denklem şöyle olacaktır:

$$Y_t = b_0 + b_5 X_{Trend} + e_t$$

Mevsimsel yapaylara ait setin tamamının içerilip içerilmeyeceğini belirlemek için tahmin edilen kısıtlı denklem ile kısıtsız denklemin uyumları F testi yardımıyla karşılaştırılmalıdır. Burada ifade edilen bu örnek aslında sadece eğim katsayılarının bir alt kümesini içeren sıfır hipotezini test etmek için F testinin kullanıldığını belirtmektedir.

Bazı mevsimsel yapayların tahmin edilen katsayılarının düşük t değerlerine sahip olması nedeniyle modelden dışarı atılmaları tavsiye edilmemektedir. Tercihen mevsimsel yapay katsayılarının testi t testi yerine F testi ile yapılmalıdır. Çünkü F testi yardımıyla üç çeyreği de barındıran bir bileşik hipotez kurulmaktadır[38].

4.UYGULAMA

4.1.Türkiye'de Yaşanan 2001 Krizi

Türkiye Cumhuriyeti tarihinde bugüne dek yaşanan en büyük ekonomik kriz olarak adlandırılan kriz, Şubat 2001 krizidir. Yaşanan bu krizin, ekonomik büyümeye ağırlık veren makro ekonomik politikaların sabit gelirli grupların yaşam standardını korumak konusunda yetersiz olduğunu gösterdiği savunulmaktadır. Yaşam standardı çok boyutlu bir kavramdır ve halkın sosyo-ekonomik refahı ile ilgili çok sayıda unsuru kapsamaktadır. Bu kavram bir çok sosyal gösterge ile ölçülmektedir. İşsizlik oranı, iş gücüne katılma oranı, istihdam oranı gibi sosyal göstergeler bunların en önemlileridir.

Bu çalışma Şubat 2001 krizinde Türkiye'de yukarıda sıralanan yaşam standardı göstergelerinin kısa dönemde ekonomik şoklardan nasıl etkilendiğini göstermeyi amaçlamaktadır. Özellikle Şubat 2001 krizi ile birlikte işsizlik hem patlama yaptı, hem de kalıcılık görüntüsü vermeye başladı. Bu krizin yaşanmasına bağlı olarak, ülkenin iş gücü piyasasında görülen önemli etkiler sonucunda, kamuoyu işsizliği ülkenin en önemli sorunu olarak görmeye başlamıştır.

Türkiye'de yaşanan Şubat 2001 krizinin etkilerini gözlemleyebilmek için, hem kriz öncesi hem de kriz sonrasını kapsayan 1999-2005 yıllarına ait çeyreklik veriler ele alınmıştır. Farklı iki trende sahip doğrusal regresyon modeli 1999-2005 yıllarına ait çeyreklik iş gücüne katılma oranı, işsizlik oranı ve GSYİH verilerine uyarlamıştır.

Bu amaçla öncelikle bu araştırmada kullanılacak olan üçer aylık verileri bir tablo biçiminde sunmak ve bu değişkenlerin tanımlarına yer vermek gerekmektedir.

Tablo 4.1.: DİE (TUİK)'den elde edilen, 1999-2005 yıllarındaki üç aylık dönemlere göre işsizlik oranları, işgücüne katılma oranları ve GSYİH değerleri[39]

Üç Aylık Dönemler	İşsizlik Oranları	İşgücüne Katılma Oranları	GSYİH Değerleri
1999Q1	7,3	48,7	21758,6
1999Q2	5,4	53,1	26368,8
1999Q3	7,4	52,1	35279,1
1999Q4	8,3	48,5	27239,5
2000Q1	8,3	47,2	22978,6
2000Q2	6,1	51,7	28195,4
2000Q3	5,5	52,1	38046,4
2000Q4	6,2	48,5	29568,7
2001Q1	8,5	47	22750,6
2001Q2	6,7	50,7	25435,8
2001Q3	7,8	52,9	35186,9
2001Q4	10,4	48,7	26512
2002Q1	11,5	45,9	23273,5
2002Q2	9,3	50,6	27711,7
2002Q3	9,6	52,4	38000
2002Q4	11	50,3	29627,1
2003Q1	12,3	47,5	25155,8
2003Q2	10	49,4	28799,2
2003Q3	9,4	50,5	40085,8
2003Q4	10,3	47,1	31444,4
2004Q1	12,4	45,9	28130,7
2004Q2	9,3	49,2	32935,5
2004Q3	9,5	50,6	42196,3
2004Q4	10	48,4	33430,1
2005Q1	11,7	46,8	29982,9
2005Q2	9,2	49,3	34747,9
2005Q3	9,4	49,5	45450,9
2005Q4	10,6	48	36598,9

4.1.1. İşsizlik

İşsizliğin neden olduğu sorunlar ekonomik alanla sınırlı değildir. İşsizliğin olumsuz etkileri ayrıca siyasal ve toplumsal alanda da kendini gösterir. Ekonomik açıdan işsizlik, ülkede var olan işgücünün tam olarak kullanılmamasına neden olduğundan, üretim kaybına yol açar. Söz konusu üretim kaybı sonrasında Gayri Safi Milli Hasıla ve dolayısı ile Gayri Safi Yurtiçi Hasıla potansiyelin altında gerçekleşir ve sonuçta refah kayıpları ortaya çıkar. İşsizlik aynı zamanda ülkede gelir eşitsizliği ve yoksulluğu arttırır. İşsiz birey, sahip olduğu insan sermayesini kaybetmeye başlar ve sonuç olarak bu durum nitelik kaybı ve entellektüel yeteneklerin zedelenmesini doğurur. Bu olumsuzluklar geçmişte eğitime yapılan kamusal ve özel yatırımların heba olması demektir. İşsizlik, beraberinde toplumsal dışlanma ve toplumsal ilişkilerde kopuş aile yaşamında çözülme, toplumsal değerlerde ve sorumluluk duygusunda gerileme gibi sosyo-psikolojik sorunlara da yol açar. İşsizliğin artmasına bağlı olarak ekonomik ve toplumsal sorunların giderek yoğunlaşması, siyasal bunalımları da besleyen bir ortam yaratır. Anti demokratik populist eğilimler güçlenir. İçeride totaliter, dışarıda saldırgan akımlar iktidarı ele geçirebilirler.

İşsizlik nedenleri bakımından dünyadaki durumu ile ele alındığında, gelişmiş ülkeler ile gelişmekte olan ülkeler arasında benzerlikler olduğu kadar farklılıkların da olduğu söylenebilir. Gelişmiş ülkelerde işsizlik daha çok işgücü piyasasında kurumsal düzenin bir sonucu olarak ele alınmaktadır. İşgücü piyasasında ‘katılık-esneklik’ tartışması sorununa yaklaşımda başlıca eksendir. Örneğin, ABD ve İngiltere’de işsizlik oranının göreli olarak oldukça düşük olması, daha esnek işgücü piyasalarına bağlanır. Ancak bir de madalyonun öteki yüzüne bakıldığında, bu ülkelerin ekonomilerinde gelir eşitsizliğinin daha yüksek olması dikkat çekicidir.

Günümüzde ileri refah ülkeleri olarak kabul edilen bu ekonomilerin işsizlik sorunu ile mücadelede karşılarına çıkan en büyük engel de bu ikilemdir. Yani, daha az işsizlik ve buna karşın daha fazla eşitsizlik. İşgücü piyasasında daha fazla esnekliğin, emeği koruyan kurumsal yapıyı da fazla aşındırmadan nasıl gerçekleştirileceği Avrupa Birliği’nin de önemli bir sorunu olmaktadır. Bu ikilemi, belirli ölçüde aşmayı başarmış çok az ülke arasında Danimarka ve İsveç’in adından bahsetmek mümkündür.

Gelişmekte olan ülkelerde işsizlik sorunu, daha çok tarım ağırlıklı ekonomiden sanayi ve hizmet ağırlıklı ekonomiye doğru geçişin yarattığı değişimlerin bir ürünü olarak ortaya çıkar. Nüfus artışı ve kalkınma dönemine özgü bir olgu olarak, tarım kesiminden tarım dışı kesime işgücü göçü, yüksek miktarda istihdam olanaklarının düzenli olarak yaratılması ihtiyacını da beraberinde getirir. İstihdam ise yeni üretim kapasitelerinin kurulmasına, dolayısıyla daha yüksek bir büyüme temposunun gerçekleştirilmesine bağlı olmaktadır.

Türkiye'de görülen işsizlik, yaşanan krizlerin yanı sıra, kalkınma hızının da yetersiz olmasına bağlı olarak bir artış eğilimindedir. İstikrarlı ve sürdürülebilir yüksek bir büyüme hızına ulaşılmadığı sürece işsizlik sorunu ağırlaşmaya devam edecektir. Avrupa Birliği'nin Türkiye'nin üyeliğine olumsuz bakmasının en önemli nedeni işsizliğin halen yüksek düzeyde olması ve gelecekte de yükselme riski taşımasıdır. Avrupa Birliği haklı olarak Türkiye'nin üyeliği'nin kendi işsizlik sorununu arttıracağından endişe duyuyor.

Burada kimlerin işgücüne dahil olup çalışmadığı takdirde işsiz sayılabileceğini, kimlerin işgücünün dışında kaldığını ve ayrıca çalışmadığı halde kimlerin işsiz sayılmayacağını da belirtmek gerekmektedir.

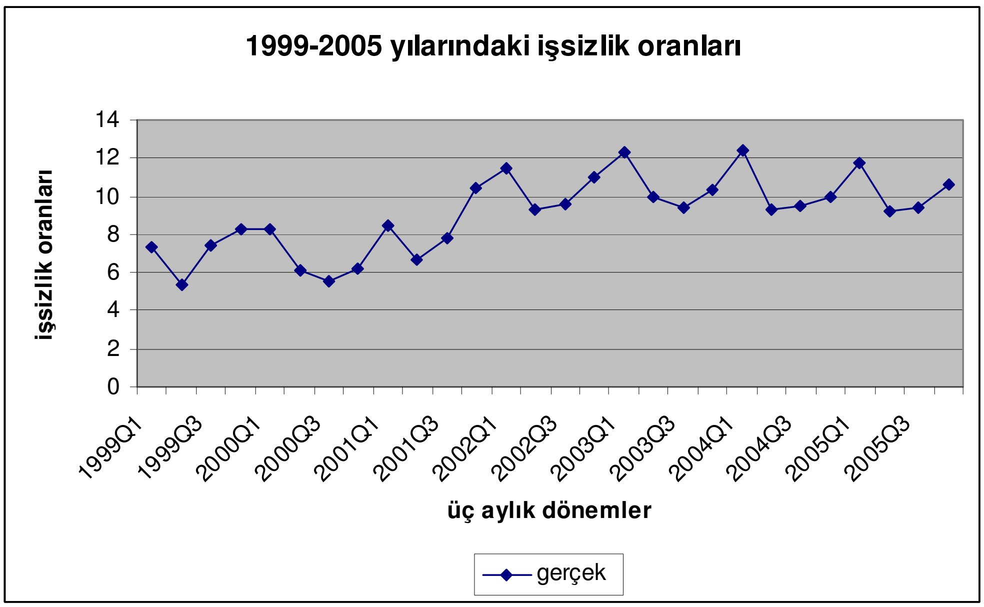
Yetişkin nüfusun yani 15 ve daha yukarıdaki yaştakilerin bir bölümü toplumsal konumları icabı işgücünün dışında kabul edilirler. 'Kurumsal nüfus' olarak adlandırılan bu grupta, silah altındakiler, cezaevlerindeki hükümlüler ve hastanedeki hastalar yer almaktadır. Geriye kalan yetişkin nüfus 'çalışabilir nüfus'tur. Bu topluluğun bir bölümü de özürlü olma veya eğitime devam etme gibi nedenlerle işgücü piyasasına giremezler. Diğer önemli bir bölümü de, kişisel tercihlerinden ötürü çalışmak istememektedirler; ev hanımları ile rantiyeler bu gruba verilecek örneklerdir. Çalışmak isteyenler ülkedeki işgücünü oluştururlar. Devlet İstatistik Enstitüsü (DİE) Hane Halkı İşgücü Anketleri sayesinde işgücü verileri derlenmektedir. Bu anket yapıldığı sırada çalışmakta olanlar istihdama, diğer bölüm ise çalışmayıp iş aramakta olduklarından işsizlere dahil edilirler. Anlaşılacağı üzere işsiz sayılabilmek için çalışmayı istemek yeterli değildir. Aktif bir biçimde iş aramak gereklidir.

Uluslar arası Çalışma Örgütü'ne (ILO) göre şu ifade edilecek üç grupta yer alan kişiler de işsiz olarak kabul edilmezler; Bir kişi, çalışmak istediği halde iş bulacağını hiç ummadığından, aktif olarak iş aramıyor olabilir ki buna 'iş bulma ümidi olmayanlar' denir. Bir kişi, zaman, zaman iş aramakta olup, son bir ayda iş aramamış olabilir. Kişi çalışmak istiyor olabilir ama sahip olduğu vasıflar itibariyle kabul edebileceği ücret düzeyinde ve koşullarda iş bulamayacağı inancında olabilir[40].

Ayrıca; iş bulmuş ya da kendi işini kurmuş ancak, işe başlamak ya da işbaşı yapmak için çeşitli eksikliklerini tamamlamak amacıyla bekleyenlerden 15 gün içinde işbaşı yapabilecek kişiler de işsiz nüfus kapsamına dahil edilir. Tüm bu tanımlardan sonra, işsizlik oranı için şu tanım verilebilir:

İşsizlik Oranı = İşsiz nüfusun işgücü içindeki oranıdır[41].

Öncelikle araştırmaya konu olan dönemlerde işsizlik oranlarının genel seyrini görmek amacıyla gerçek değerlere göre aşağıdaki grafiğin çizilmesi gereklidir.



Grafik 4.1: Türkiye'de 1999-2005 Yıllarında Gerçekleşen İşsizlik Oranları

Grafiğe bakıldığında işsizlik oranlarında farklı iki trende sahip bir durum gözlenmektedir. İncelenen veri aralığında bu iki farklı trendin oluşmasına sebep olabilecek bir krizin yaşandığı da bilinmektedir. 19.Şubat.2001 tarihinde gerçekleşen bu krizin olayın seyrine farklı bir eğilim kazandırabileceği göz önünde tutulmalıdır. Bu zaman serisi hem mevsimselliği hem de trendi toplamsal bir yapıda içermektedir.

Ağaoğlu'nun 1989'daki çalışmasında trend doğrularının kesişim apsisinin bilinmediği durum ele alınmıştır. Bu çalışmaya göre iki trend doğrusunun kesişim noktasının bulunabilmesi için modele yeni bir bağımsız değişken ilave edilmelidir. Bu ek değişkenin değerleri şöyle belirlenmektedir. Birinci doğrudan ikinci doğruya geçişi göstermek amacıyla ikinci doğruya ait tüm dönemlere 1, birinci doğruya ait tüm dönemlere 0 değerleri verilmelidir. Böylece birinci doğrudan ikinci doğruya geçişin (sıçrama) hangi noktada gerçekleştiği bulunabilir[42]. Bu sebeple modele bu sıçramayı belirleyecek bir $X_{özel}$ değişkeni eklenir. Sonuçta genel olarak kurulan model aşağıdaki hali alır:

$$Y_t = b_0 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4 + b_5 X_{özel} + b_6 T + \varepsilon$$

Bu model doğrultusunda birinci üç aylık dönem baz dönem olarak ele alınmıştır. Çünkü mevsimselliğin incelenmesinde sıradan en küçük kareler yönteminin uygulanabilmesi için mevsimsel yapay katsayılarından birini sıfır olarak ele almak ilgili dönemi baz olarak ele almakla eş değer bir durumdur. Tüm bu belirtilen koşulların ışığı altında oluşturulmuş bu model kısıtsız modeldir. Çünkü kısıtsız olduğu belirtilen bu model sıradan en küçük kareler yardımı ile oluşturulan bir modeldir.

2001 Şubat'ında Türkiye'de yaşanan krizin etkisinin hangi dönemlerde etkin olabileceği düşünülerek 2001'in 1. üç aylık döneminden başlayarak 2002'nin 1.üç aylık dönemine kadar olan 5 çeyreklik kısım iki farklı trend araştırmasına referans olacaktır. İki trendin kesişim apsisini bulmak için farklı dönemlere göre $X_{özel}$ değişkeni farklı yapılarda oluşturularak farklı modeller kurulmuştur. Buna ilişkin tablo aşağıdadır:

Tablo 4.2: İşsizlik oranının sıçrama noktasını tespit etmek için oluşturulan modeller

İşsizlik Oranı'nda Sıçramanın Olduğu Üç Aylık Dönemler	Hata Kareler Toplamı HKT (RSS)	R^2	Tahminlerin Standart Hatası (S^2)
2001'in 1. Çeyreği	20,312	0,805	0,9609
2001'in 2. Çeyreği	14,810	0,858	0,8205
2001'in 3. Çeyreği	10,524	0,899	0,6916
2001'in 4. Çeyreği	10,080	0,903	0,6769
2002'nin 1. Çeyreği	17,803	0,829	0,8996

Oluşturulan tüm bu modellerden hangisinin seçileceğine karar verirken Hata Kareler Toplamı (HKT) önemli olacaktır. Çünkü HKT'si en küçük model araştırmacıyı iyi tahminlere götürecek olan modeldir[43]. Buna göre 2001'in 4. çeyreği hem HKT'si hem de S^2'si en düşük olan modeldir. Bu sıradan en küçük kareler çözümlemeleri bilgisayarda SPSS Paket Programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4.3. 2001'in 4. çeyreğine göre oluşturulan modelin SPSS çıktısı

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	8,377	,333		25,150	,000
	D2	-2,292	,363	-,515	-6,314	,000
	D3	-1,928	,367	-,433	-5,256	,000
	D4	-1,218	,365	-,274	-3,337	,003
	T	6,746E-03	,030	,028	,224	,825
	S20014	3,186	,498	,807	6,399	,000

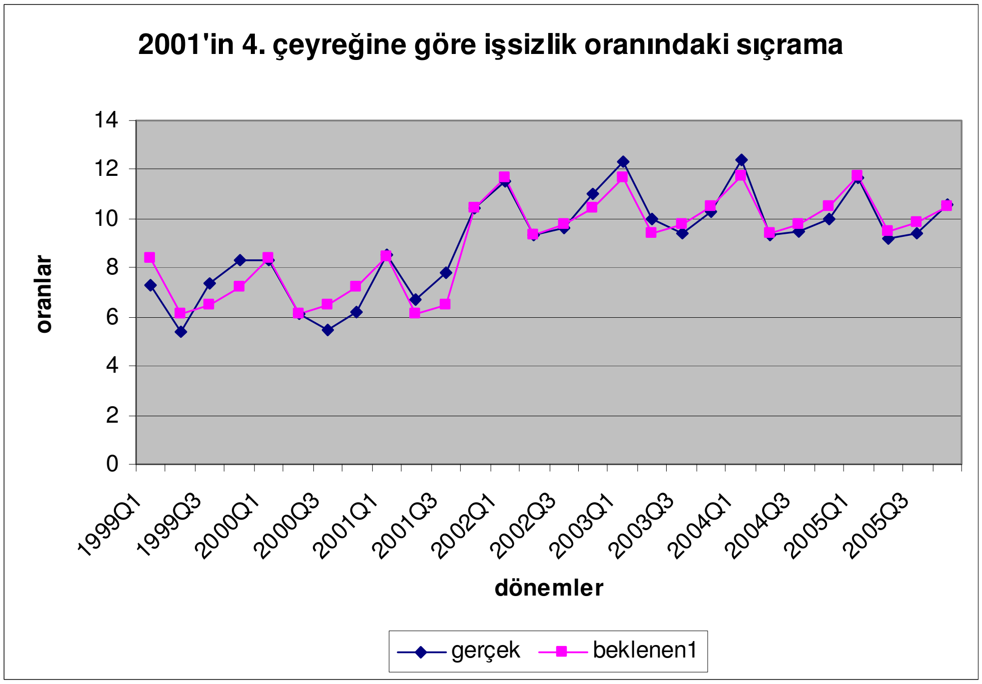
a. Dependent Variable: IŞSIZLIK

Burada kurulan kısıtsız model şöyledir:

$$Y_t = 8{,}377 - 2{,}292D_2 - 1{,}928D_3 - 1{,}218D_4 + 3{,}186X_{özel} + 0{,}006746T$$

Modelin anlamlılığı için hesaplanan F değeri ise 41,061'dir ve model anlamlıdır. Ayrıca katsayı anlamlılıklarına bakıldığında, sabit, D_2, D_3 ve $X_{özel}$'in anlam seviyesinin binde birden daha küçük olduğu da göze çarpmaktadır.

Kısıtsız modelin hesaplanan katsayılar sonucunda oluşturulan grafik şöyledir:



Grafik 4.2: 2001’in 4. çeyreğine göre işsizlik oranındaki sıçrama

Bundan sonra yapılacak işlem konulan kısıt çerçevesinde kısıtlı modeli bulmak olacaktır. Burada önemli olan noktalardan biri de hipotezleri kurarak kısıtın anlamlılığını test etmek ve bu doğrultuda iktisadi olaya özgü yorumu yapmaktır.

Daha önce teorik bölümde mevsimselliğin varlığını tespit etmek için kurulan hipotezler şöyleydi:

$H_0 : b_2 = b_3 = b_4 = 0$

H_1: b_2, b_3, b_4 katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Aslında burada 3 tane kısıt vardır ve sıfır hipotezinde 3 katsayı da eş zamanlı bir işlemle sınanacaktır. Buna göre R matrisinin satır sayısı konulan kısıt sayısına eşit olacaktır:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} \text{ ve } r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R\beta = r$ kısıtı altında Greene ve Seaks'ın önerdiği matris çözümü ise şöyleydi[8]:

$$\begin{bmatrix} X'X & R' \\ R & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\beta}^* \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ r \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} X'X & R' \\ R & 0 \end{bmatrix}$$

28	7	7	7	17	406	0	0	0
7	7	0	0	4	98	1	0	0
7	0	7	0	4	105	0	1	0
7	0	0	7	5	112	0	0	1
17	4	4	5	17	340	0	0	0
406	98	105	112	340	7714	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0

Elemanları yine matrislerden oluşan W matrisinin değerleri olan X'X, R've R matrisleri farklı renklerde yazılmıştır. Sıfır matrisi ise siyahtır. W matrisi bulunduktan sonra eşitliğin diğer tarafına W^{-1}olarak geçmektedir ve bu matris aşağıdaki matris ile önden çarpılır.

$$\begin{bmatrix} X'Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253{,}4 \\ 56 \\ 58{,}6 \\ 66{,}8 \\ 175{,}9 \\ 3973 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bunun sonucunda ulaşılan matris aşağıda belirtildiği üzere bir sütun vektörüdür ve ilk 6 terim kısıtlı modelin katsayıları diğer üç terim λ değerlerinden oluşur:

KISITLI	Katsayılar
sabit:	7,161285
D2	8,1E-15
D3	4,38E-15
D4	1,45E-14
Xözel	3,571875
trend	-0,01931
lamda	-6,5246
lamda	-3,78946
lamda	0,973797

Görüldüğü üzere D_2, D_3 ve D_4 yapay değişkenlerinin katsayı değerleri sıfıra çok yakındır.

Kısıtlı denklemin genel yapısı ise şöyledir:

$$Y_t = b_0 + b_5 X_{özel} + b_6 T + e_t$$

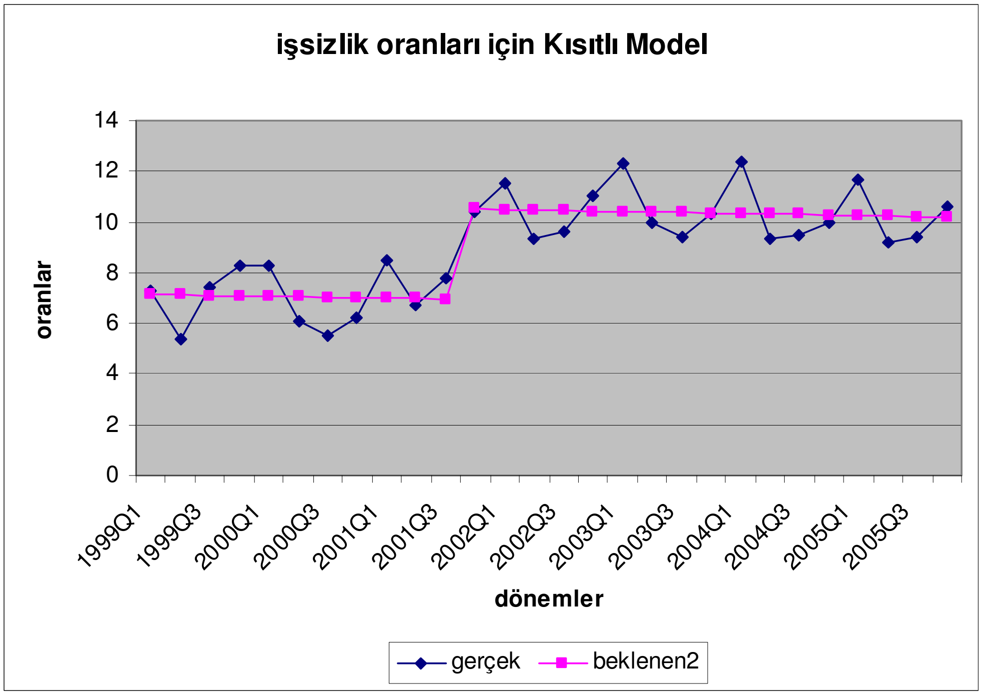
Bu formülün doğrultusunda kısıtlı model şöyle ifade edilir:

$$Y_t = 7{,}161285 + 3{,}571875 X_{özel} - 0{,}01931T$$

(0,447) (0,811) (0,049) $S^2 = 1{,}1164$

$R^2 = 0{,}701$ F = 29,285

Kısıtlı modelin oluşturulan grafiği de şöyledir:



Grafik 4.3: işsizlik oranları için kısıtlı model

Kısıtlı ve kısıtsız modeller elde edildikten sonra kısıtın anlamlılığını test etmek için F sınaması hem modellerin HKT'dan hem de R^2'lerinden yapılabilmektedir:

$$F = \frac{(R^2 - R_R^2)/k}{(1-R^2)/(n-j)}$$

$$F = \frac{0{,}903 - 0{,}701/3}{(1-0{,}903)/28-5} = \frac{0{,}06733}{0{,}00422} = 15{,}9656$$

%5 anlam düzeyinde, 3 ve 23 serbestlik derecelerine sahip F tablo değeri 3,03'tür.

$F_{tab}=3{,}03 < F_{hes}=15{,}9656$ olduğunda sıfır hipotezi red edilir. Böylece kısıt anlamsız çıkmıştır. Bunun sonucunda yapılacak yorum işsizlik oranları mevsimsellik özelliğini taşımaktadır ancak bununla birlikte yaşanan kriz sonucunda 2001'in 4. çeyreğinde işsizlik oranında önemli bir artış (sıçrama) görülmüştür.

4.1.2. İşgücüne Katılma Oranı

Her ekonomide ülkedeki nüfusun bir bölümü gelir elde etmek amacıyla çalışmakta ya da daha genel bir ifade ile çalışma isteğindedir. Dolayısıyla çalışmak isteyen her yetişkin birey belirli bir zaman kesitinde ya bir işte çalışıyordur, ya da işsiz olup iş aramakla meşguldür. Kısaca işgücü arzı istihdam edilen nüfus ile işsiz olup aktif olarak iş arayanların toplamıdır. Bu tanıma göre 15 yaşın üzerinde olan, yani yetişkin nüfusa dahil tüm bireyler işgücü kavramı içinde yer alır. Kimi bireyler eğitim nedeniyle, kimi bireyler askerlik gibi zorunlu bir nedenle, ev kadını gibi kimi bireyler de çalışmayı şu ya da bu nedenle istemediklerinden işgücünün dışında kalırlar. Yetişkin nüfus ile işgücü arasındaki bu fark, işgücü arzının önemli göstergelerinden olan işgücüne katılma oranını belirlemektedir. İşgücüne katılma oranı, işgücünün çalışabilir yaştaki nüfusa oranı olarak hesaplanmaktadır. Çalışabilir yaştaki nüfus, demografik dinamiklere ve kurumsal tanımlara bağlı olarak ülkeden ülkeye değişiklik gösterebilmektedir. Türkiye'de zorunlu eğitimi bitirme yaşı olan 15 ve daha yukarı yaştaki nüfus çalışabilir yaştaki nüfustur. Nüfus, çalışabilir yaştaki nüfus, işgücü ve işgücüne katılma oranı kavramları aşağıdaki gibi formülleştirilerek daha anlaşılır bir biçimde ifade edilebilir.

Nüfus(N) = Çalışabilir yaştaki nüfus(ÇN) + 15 yaşından küçükler

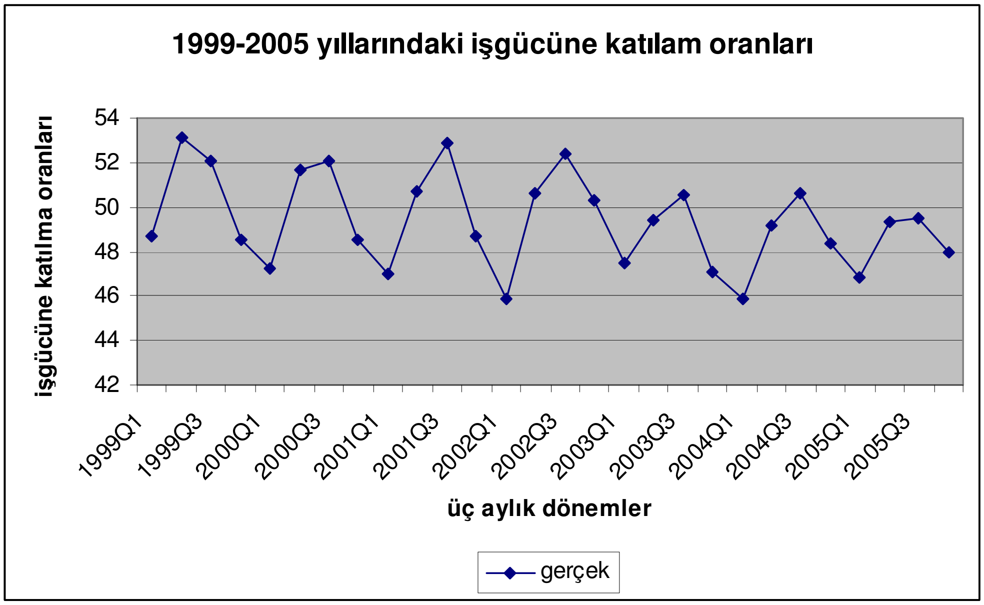
Çalışabilir yaştaki nüfus(ÇN) = İşgücü(İG) + İşgücüne dahil olmayanlar

İşgücü (İG) = İstihdam edilenler + İşsizler

İşgücüne katılma oranı (İKO) = (İG / ÇN) * 100

Bir ülkedeki işgücünün toplam çalışabilir yaştaki nüfusa oranı, o ülkedeki üretken olabilecek nüfusun büyüklüğünü göstermesi açısından önemli bir göstergedir. Bu gösterge, zaman içinde değişen nüfus yapısına, sosyo-kültürel yapılara ve ekonomik koşullara göre değişiklik gösterebilen bir göstergedir[40].

Burada da araştırmaya konu olan dönemlerde işgücüne katılım oranlarının genel yapısını görmek amacıyla gerçek değerlere göre aşağıdaki grafiğin çizilmesi gereklidir.



Grafik 4.4: Türkiye'de 1999-2005 Yıllarında Gerçekleşen İşgücüne Katılma Oranları

Grafiğe bakıldığında işgücüne katılma oranlarının da farklı iki trende sahip olabileceği düşünülmüştür. Çünkü incelenen dönem bu iki farklı trendin oluşmasına sebep olabilecek bir krizin yaşandığı yılları kapsamaktadır. Bu krizin burada ele alınan olayın seyrine çok farklı bir eğilim kazandırmadığı görülmektedir. Fakat buna rağmen buradaki zaman serisi için kesişim apsisinin yaşanan krizin büyüklüğü nedeniyle araştırılmasına gerek duyulmuştur. Burada oluşturulacak model hem mevsimselliği hem de trendi barındırmaktadır.

Burada da benzer şekilde modele bu sıçramayı belirleyecek bir $X_{özel}$ değişkeni eklenir.

Sonuçta genel olarak kurulan model aşağıdaki hali alır:

$$Y_t = b_0 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4 + b_5 X_{özel} + b_6 T + \varepsilon$$

Bu modelde yine birinci üç aylık dönem baz dönem olarak ele alınmıştır. Bu koşulların ışığı altında oluşturulmuş bu model de, sıradan en küçük kareler yardımı ile oluşturulan bir kısıtsız modeldir.

Daha önce de yapıldığı gibi, 2001'in 1. üç aylık döneminden başlayarak 2002'nin 1.üç aylık dönemine kadar olan 5 çeyreklik kısım iki farklı trend araştırmasına referans olacaktır. İki trendin kesişim apsisini bulmak için farklı dönemlere göre $X_{özel}$ değişkeni farklı yapılarda oluşturularak farklı modeller kurulmuştur. Buna ilişkin tablo aşağıdadır:

Tablo 4.4: İşgücüne katılma oranının sıçrama noktasını tespit etmek için oluşturulan modeller

İşgücüne Katılma Oranı'nda Sıçramanın Olduğu Üç Aylık Dönemler	Hata Kareler Toplamı HKT (RSS)	R^2	Tahminlerin Standart Hatası (S^2)
2001'in 1. Çeyreği	17,037	0,855	0,8800
2001'in 2. Çeyreği	16,733	0,858	0,8721
2001'in 3. Çeyreği	16,426	0,861	0,8641
2001'in 4. Çeyreği	17,206	0,854	0,8844
2002'nin 1. Çeyreği	17,153	0,854	0,8830

Buna göre 2001'in 3. çeyreği hem HKT'si hem de S^2'si en düşük olan modeldir. Bu sıradan en küçük kareler çözümlemeleri bilgisayarda SPSS Paket Programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4.5. 2001'in 3. çeyreğine göre oluşturulan modelin SPSS çıktısı

Coefficients[a]

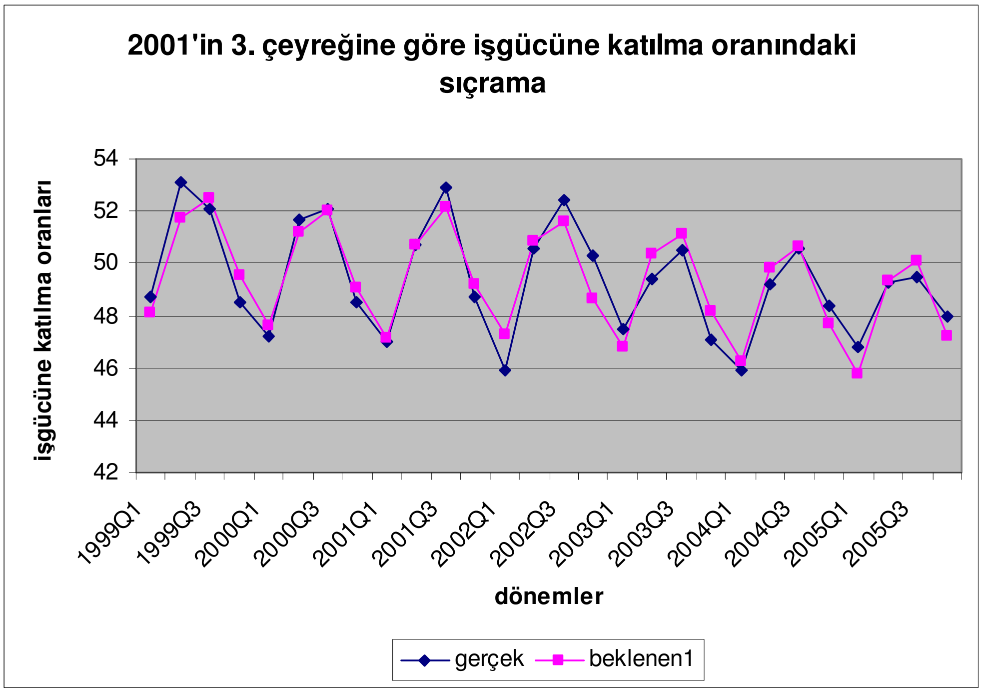
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	48,261	,423		114,140	,000
	D2	3,696	,463	,780	7,978	,000
	D3	4,602	,464	,972	9,908	,000
	D4	1,784	,466	,377	3,829	,001
	T	-,125	,037	-,492	-3,423	,002
	S20013	,636	,617	,149	1,032	,313

a. Dependent Variable: IŞGÜCÜ

Burada kurulan kısıtsız model şöyledir:

$$Y_t = 48{,}261 + 3{,}696D_2 + 4{,}602D_3 + 1{,}784D_4 + 0{,}636X_{özel} - 0{,}125T$$

Modelin anlamlılığı için hesaplanan F değeri ise 27,146'dır ve model anlamlıdır. Kısıtsız modelin grafiğine bakılacak olursa, aşağıdaki gibi fazla belirgin olmayan bir sıçramanın var olduğu görülebilir:



Grafik 4.5: 2001'in 3. çeyreğine göre işgücüne katılma oranındaki sıçrama

Bundan sonra yapılacak işlem kısıtlı modeli bulmak olacaktır. Fakat öncelikle hipotezleri kurarak kısıtın anlamlılığını test etmek ve burada yine iktisadi olayın yorumu yapmak gerekmektedir.

İşsizlik oranlarında olduğu gibi mevsimselliğin varlığını tespit etmek için kurulan hipotezler şöyledir:

H_0 : $b_2 = b_3 = b_4 = 0$

H_1: b_2, b_3, b_4 katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Yine burada da 3 tane kısıt vardır ve sıfır hipotezinde 3 katsayı da eş zamanlı bir işlemle sınanacaktır. Oluşturulacak R matrisi yine aynı yapıda olacaktır:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} \text{ ve } r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İşsizlik oranlarına ait çözümlemeleri yaparken kullanılan X matrisi yine aynıdır. Fakat sadece $X_{özel}$ matriste farklılaşmıştır. 2001'in 3. çeyreğine kadar sıfır ve daha sonra 1 değerini almıştır. Kısıtlı modelin katsayıları şunlardır:

KISITLI	Katsayılar
sabit	50,61767
D2	-7,5E-14
D3	-1,7E-15
D4	3,51E-14
X özel	0,76963
trend	-0,11958
lamda	8,316296
lamda	14,4837
lamda	-5,27926

Dikkat edilecek olursa, D_2, D_3 ve D_4 yapay değişkenlerinin katsayı değerleri sıfıra çok yakındır.

Kısıtlı denklemin genel yapısı şöyledir:

$$Y_t = b_0 + b_5 X_{özel} + b_6 T + e_t$$

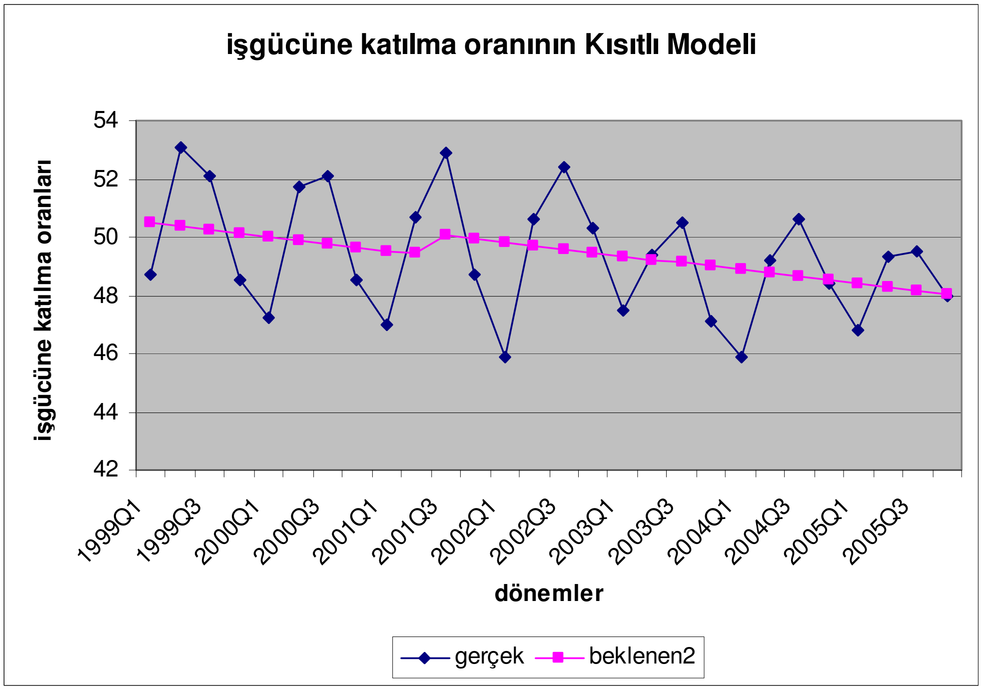
Bu formülün doğrultusunda kısıtlı model şöyle ifade edilir:

$$Y_t = 50{,}61767 + 0{,}76963 X_{özel} - 0{,}11958T$$

(0,800) (1,447) (0,086) $S^2 = 2{,}0435$

$R^2 = 0{,}113$ $F = 1{,}600$

Kısıtlı modelin grafiği ise şöyledir:



Grafik 4.6: işgücüne katılma oranının kısıtlı modeli

Kısıtlı ve kısıtsız modeller elde edildikten sonra kısıtın anlamlılığını test etmek için F sınamasına gerek duyulmaktadır. Bunun için kullanılacak olan formül şöyledir:

$$F = \frac{(R^2 - R_R^2)/k}{(1-R^2)/(n-j)}$$

$$F = \frac{0{,}861 - 0{,}113/3}{(1-0{,}861)/28-5} = \frac{0{,}24933}{0{,}00604} = 41{,}2566$$

%5 anlam düzeyinde, 3 ve 23 serbestlik derecelerine sahip F tablo değeri 3,03'tür.

$F_{tab}=3{,}03<F_{hes}=41{,}2566$ olduğunda sıfır hipotezi red edilir. Böylece kısıt anlamsız çıkmıştır. Bunun sonucunda yapılacak yorum işgücüne katılma oranları mevsimsellik özelliğini taşımaktadır ve yaşanan kriz sonucunda 2001'in 3. çeyreğinde işgücüne katılma oranında fazla belirgin olmayan bir artış (sıçrama) görülmüştür.

4.1.3. Gayri Safi Yurt İçi Hasıla (GSYİH)

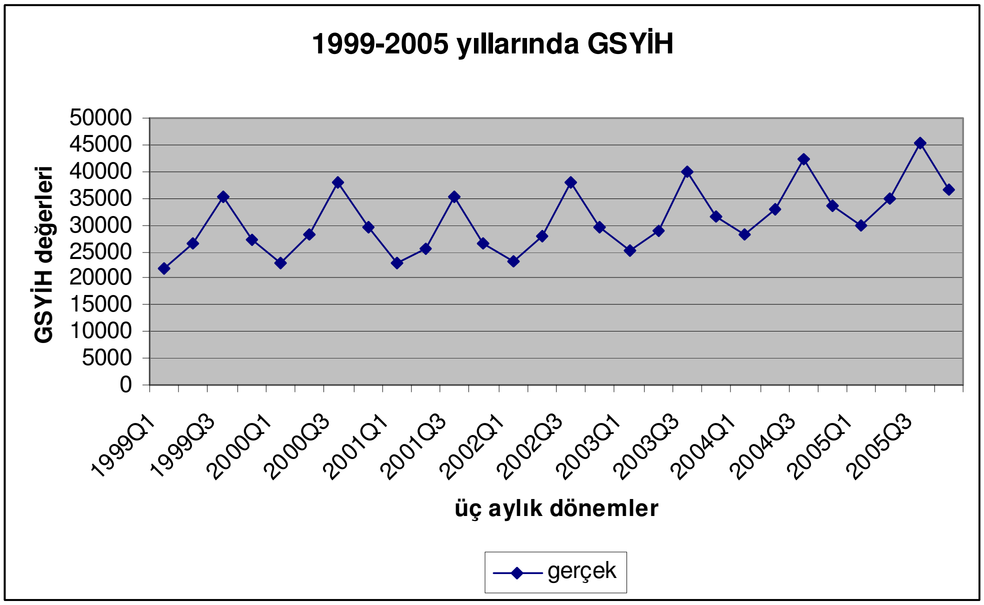
Bir ülke vatandaşlarının yaşam standardını ve refah düzeyini ölçüp değerlendirebilmek, o ülke ekonomisinin gücünü ve performansını anlayabilmek ve bu ülkeyi ekonomik açıdan nelerin beklediğini saptayabilmek için çok sayıda temel ekonomik değişkeni ele almak gerekmektedir. Bu temel ekonomik değişkenlerin değerlerini ve bunların değişimlerinin anlamlarını ve yaratacakları sonuçları anlayabilmek için de, ülke ekonomisinin bir bütün olarak büyüklüğüne ait bazı ölçütlerin elimizde olması gerekmektedir.

Bu ölçütlerin en sık kullanılanı Gayri Safi Milli Hasıla (GSMH) olmakta ve bir ekonomide belirli bir dönemde (genellikle bir yıl) üretilen tüm tamamlanmış mal ve hizmetlerin piyasa değerleri ile gayri safi toplamından oluşmaktadır. Ancak GSMH değerinin içerisinde, ilgili ekonomide yer alan ekonomik birimlerin ülke sınırları dışındaki üretim faaliyetleri ile ürettikleri tamamlanmış mal ve hizmetlerin tutarları da bulunmaktadır.

Bu yüzden ülke içerisinde yaşanan bir ekonomik olgunun (kriz veya dalgalanma gibi) etkilerini net bir biçimde saptamak istediğimiz zaman, bu ülkenin ülke sınırları dışındaki üretim faaliyetleri söz konusu olgudan etkilenmeyeceğinden ulaşılan sonuçlar yanıltıcı olabilir. Bu gerekçeye bağlı olarak ülke içerisinde yaşanan ekonomik sorunların etkilerini net biçimde görebilmek için Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (GSYİH) ölçütünü kullanmak daha doğru olmaktadır.

GSYİH hesabında söz konusu ülkeye ait ekonomik birimlerin yurt dışındaki faaliyetleri dikkate alınmamaktadır. Bu yüzden GSYİH toplam GSMH'nın ülke sınırları içerisinde yaratılan bölümünü ifade etmektedir[41].

Burada yine araştırmaya konu olan dönemlerde GSYİH'nın gelişimini görmek amacıyla gerçekleşen değerlere göre aşağıdaki grafiğin çizilmesi uygundur.



Grafik 4.7: Türkiye'de 1999-2005 Yıllarında Gerçekleşen GSYİH Değerleri

Grafiğe bakıldığında GSYİH değerlerinin farklı iki trende sahip olduğu görülmektedir. İncelenen dönemde yaşanan kriz bu iki farklı trendin oluşmasına sebep olmuştur. Burada da bu krizin olayın seyrine farklı bir eğilim kazandırdığı dikkat edilirse görülmektedir. Bu nedenle buradaki zaman serisi için kesişim apsisinin araştırılmasına gerek duyulmuştur. Buradaki model yine hem mevsimselliği hem de trendi barındırmaktadır.

Burada da yine modele bu sıçramayı belirleyecek bir $X_{özel}$ değişkeni eklenir.

Sonuçta genel olarak kurulan model aşağıdaki hali alır:

$$Y_t = b_0 + b_2 D_2 + b_3 D_3 + b_4 D_4 + b_5 X_{özel} + b_6 T + \varepsilon$$

Bu modelde de görüldüğü üzere birinci üç aylık dönem baz dönem olarak ele alınmıştır ve sıradan en küçük kareler yöntemiyle kısıtsız bir model kurulmuştur.

Benzer biçimde, 2001'in 1. üç aylık döneminden başlayarak 2002'nin 1.üç aylık dönemine kadar olan 5 çeyreklik kısım iki farklı trend araştırmasına referans olmuştur. İki trendin kesişim apsisini bulmak için farklı dönemlere göre farklı yapılarda $X_{özel}$ değişkeni oluşturularak modeller kurulmuştur. Buna ilişkin tablo aşağıdadır:

Tablo 4.6: Gayri Safi Yurtiçi Hasıla'nın sıçrama noktasını tespit etmek için oluşturulan modeller

GSYİH'da Sıçramanın Olduğu Üç Aylık Dönemler	Hata Kareler Toplamı HKT (RSS)	R^2	Tahminlerin Standart Hatası (S^2)
2001'in 1. Çeyreği	7810840	0,993	595,8508
2001'in 2. Çeyreği	12484309	0,988	753,3051
2001'in 3. Çeyreği	30107815	0,971	1169,8449
2001'in 4. Çeyreği	45096547	0,957	1431,7273
2002'nin 1. Çeyreği	54789872	0,947	1578,1156

Buna göre 2001'in 1. çeyreği hem HKT'si hem de S^2'si en düşük olan modeldir. Bu sıradan en küçük kareler çözümlemeleri bilgisayarda SPSS Paket Programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4.7. 2001'in 1. çeyreğine göre oluşturulan modelin SPSS çıktısı

Coefficients[a]

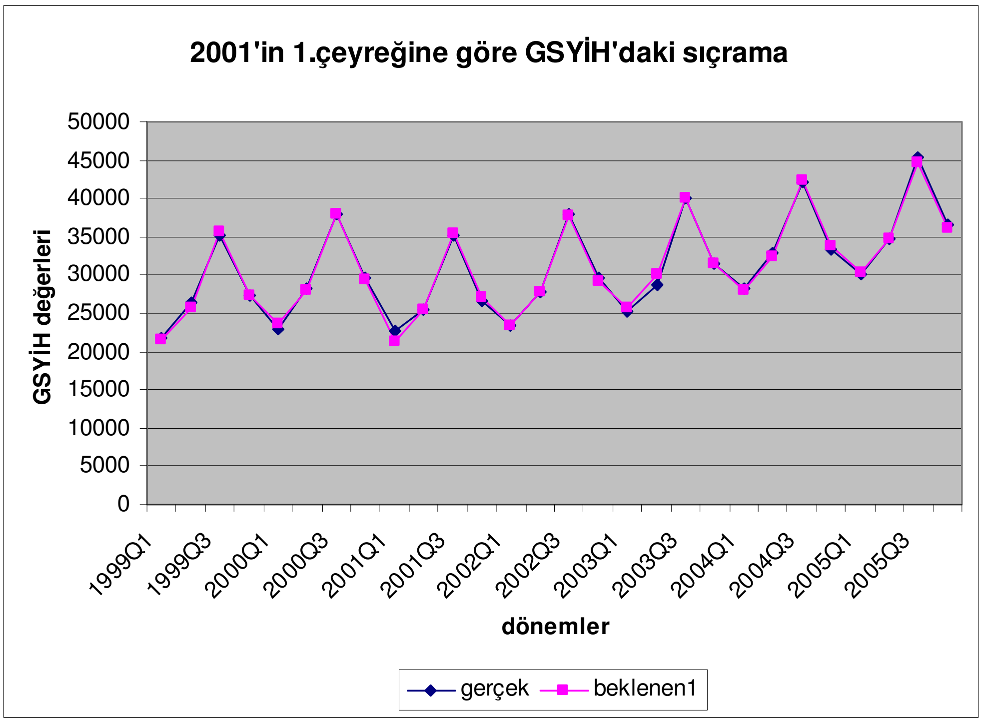
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	20867,264	295,253		70,676	,000
	D2	3737,987	319,324	,265	11,706	,000
	D3	13174,205	321,796	,935	40,940	,000
	D4	4056,726	325,875	,288	12,449	,000
	T	571,087	22,985	,756	24,846	,000
	S20011	-4801,806	407,044	-,356	-11,797	,000

a. Dependent Variable: GSYIH

Burada kurulan kısıtsız model şöyledir:

$$Y_t = 20867{,}26 + 3737{,}99D_2 + 13174{,}20D_3 + 4056{,}73D_4 - 4801{,}81X_{özel} + 571{,}09T$$

Modelin anlamlılığı için hesaplanan F değeri ise 582,296'dır ve model anlamlıdır. Kısıtsız model için çizilen grafikte gerçekleşen ve beklenen değerler aşağıdaki gibi bir seyir izlemektedir:



Grafik 4.8: 2001'in 1.çeyreğine göre GSYİH'daki sıçrama

Bundan sonra, kısıtlı modeli bulmak gerekir. Burada tekrar, hipotezler kurarak kısıtın anlamlılığını test etmek ve yine iktisadi olayın yorumu yapmak gerekmektedir.

Daha önce de olduğu gibi mevsimselliğin varlığını tespit etmek için kurulan hipotezler şöyledir:

H_0 : $b_2 = b_3 = b_4 = 0$

H_1: b_2, b_3, b_4 katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Yine burada da 3 tane kısıt vardır ve sıfır hipotezinde 3 katsayı da eş zamanlı bir işlemle sınanacaktır. Oluşturulacak R matrisi yine aynı yapıda olacaktır. $X_{özel}$ matrisi 2001'in 1. çeyreğine kadar sıfır ve daha sonra 1 değerini almıştır. Kısıtlı modelin katsayıları şunlardır:

KISITLI	Katsayılar
sabit	25628,16
D2	1,98E-11
D3	-1,1E-11
D4	2,03E-12
X özel	-6299,28
trend	678,0498
lamda	-10155,3
lamda	55149,46
lamda	-9421,63

Yine dikkat edilecek olursa, D_2, D_3 ve D_4 yapay değişkenlerinin katsayı değerleri sıfıra çok yakın değerlerdir.

Kısıtlı denklemin genel yapısı aşağıdaki gibidir:

$$Y_t = b_0 + b_5 X_{özel} + b_6 T + e_t$$

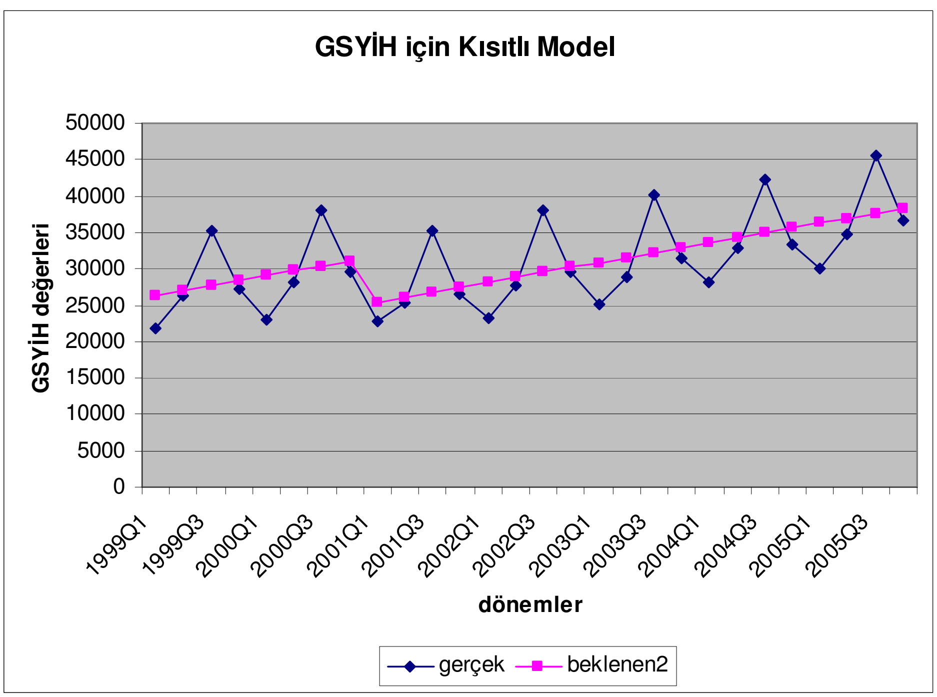
Bu formülün doğrultusunda kısıtlı model şöyle ifade edilir:

$$Y_t = 25628{,}16 - 6299{,}28 X_{özel} + 678{,}0498 T$$

(2011,210) (3450,490) (192,971) $S^2 = 5131{,}0026$

$R^2 = 0{,}368$ $F = 7{,}280$

Kısıtlı modelin grafiği ise şöyledir:



Grafik 4.9: GSYİH için kısıtlı model

Kısıtlı ve kısıtsız modeller elde edildiğine göre burada da kısıtın anlamlılığını test etmek için F sınamasına gerek duyulmaktadır. Böylece kullanılacak olan formül şöyledir:

$$F = \frac{(R^2 - R_R^2)/k}{(1-R^2)/(n-j)}$$

$$F = \frac{0{,}993 - 0{,}368/3}{(1-0{,}993)/28-5} = \frac{0{,}2083}{0{,}000304} = 684{,}414$$

%5 anlam düzeyinde, 3 ve 23 serbestlik derecelerine sahip F tablo değeri 3,03'tür.

F_{tab}=3,03 < F_{hes}=684,414 olduğunda sıfır hipotezi red edilir. Böylece kısıt anlamsız çıkmıştır. Bunun sonucunda yapılacak yorumda GSYİH değerleri mevsimsellik özelliğini taşımaktadır ve yaşanan kriz sonucunda 2001'in 1. çeyreğinde GSYİH değerlerinde önemli sayılabilecek bir azalış (sıçrama) görülmüştür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Önsel bilgi ışığında minimum hata kareler toplamını elde etmek söz konusu olduğunda Kısıtlı En Küçük Kareler Yöntemi uygun bir yöntemdir. Bu önsel bilgi ekonomi kuramından, hukuksal bir kaynaktan ya da başka ekonometrik kaynaklardan elde edilebilir.

Bu çalışmanın ilk bölümünde kısıtlı en küçük kareler yöntemi anlatılmış ve yönteme ait bazı teorik bilgilere yer verilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda X'in tam sütun ranklı olup olmamasına göre parametre tahminleri ve bu tahminlerin daha küçük varyanslı olmasına ilişkin bazı önemli yaklaşımlara değinilmiştir. Ayrıca ortalama hata kare, kısıtlı en küçük kareler açısından önemli bir kriter olması nedeniyle ele alınmıştır. Çünkü kısıtlı tahmincilerin ortalama hata kareler toplamı, kısıtsız tahmincilerin ortalama hata kareler toplamına eşit veya daha küçüktür.

Kısıtlı en küçük karelerin kullanıldığı alanlardan biri olan yapay değişkenler özellikle çalışmamızda geniş bir yer tutmuştur. İncelenen olaya özgü bir biçimde oluşturulan yapay değişkenlerin, bölgesel farklılıklar ve mevsimsel farklılıklar gibi durumları ortaya koyması açısından kısıtlı en küçük kareler yöntemi önemlidir.

Ayrıca bilinmektedir ki, bazı iktisadi olaylar kuvvetli mevsimsel yapıları içlerinde barındırırlar. İşgücü piyasasında mevsimselliğin varlığını tespit etmek söz konusu olduğunda kısıtlı en küçük kareler yöntemi kullanılabilmektedir.

Bu çalışmamızda Türkiye'de 1999-2005 yıllarına ait üç aylık dönemlerde kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile mevsimselliğin varlığını ele aldığımızda, bu iktisadi olayın sadece mevsimselliği içermediğini ve aynı zamanda iki farklı trende sahip olduğunu gördük. Bu farklı iki trend yapısının üzerinde durarak ele alınan dönemde, Türkiye'nin 19.Şubat.2001 tarihinde kriz yaşadığı gerçeği de göz önüne alınmıştır. Bu doğrultuda olayın birinci trendden ikinci trende hangi çeyrekte sıçrama yaptığını anlamak amacıyla modeller türetilmiş ve bunların içinden seçilmiş en iyi model üzerinde, kısıtlı en küçük kareler yöntemiyle mevsimselliğin varlığı araştırılmıştır.

Konulan kısıtların anlamlılığı F testi sayesinde eş zamanlı olarak sınanmıştır. Bilimin işlevselliği göz önünde tutularak, uygulamalı istatistik çerçevesinde oluşturulan bu çalışmada hem mevsimsellik hem de Şubat 2001 krizinin ülkenin işgücü piyasasındaki etkileri ele alınan değişkenler ve modeller doğrultusunda yorumlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1]. Kmenta, J.,*Elements of Econometrics,* Second Edition, Macmillian Publishing Company, New York, USA, 1986.

[2]. Gujarati, D.N.,*Temel Ekonometri*, Çevirenler: Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen, Literatür Yayıncılık, İstanbul, Mayıs 2001.

[3]. Stewart, J. & Gill, L.,*Econometrics*, – 2nd ed. – London : Prentice Hall Europe, 1998.

[4]. Ghosh, S.K., *Econometrics : Theory and Applications* ,Englewood Cliffs, N.J. ,USA, Prentice Hall, c1991.

[5]. Lehmann, E.L.& Casella, G., *Theory of Point Estimation*, – 2nd ed. – Springer-Verlag New York ve Secaucus, New Jersey, USA, 1998.

[6]. Greene, W.H., *Econometric Analysis*, – 3rd ed. – Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall International, c1997.

[7]. Rao, C.R., *Linear Models: Least Squares and Alternatives*, Secaucus, NJ, USA, Springer-Verlag New York,1999.

[8]. Greene,W.H., “The Restricted Least Squares Estimators: A Pedagogical Note”, *The Review of Economics and Statistics*, **73**, 563-567, 1991.

[9]. Sengupta, D.,*Linear Models: An Integrated Approach*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2003.

[10]. Bapat, R.B.,*Linear Algebra & Linear Models*, Secaucus, NJ, USA, Springer-Verlag New York, USA, 2000.

[11]. Johnston, J. & Dinardo, J., *Econometric Methods*, Fourth Edition, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, USA, 1997.

[12]. Stock J.H.& Watson M.W., *Introduction to Econometrics*, Boston, Mass.: Addison Wesley, USA, 2003.

[13]. Haisken De-New, J.P. & Schmidt, C.M., “Interindustry and Interregion Differentials: Mechanics and Interpratation”, *Review of Economics and Statistics*, **79**, 516-521, 1997.

[14]. Toro-Vizcarrondo, C. & Wallace, T.D., “A Test of the Mean Square Error Criterion for Restrictions in Linear Regressions”, *Journal of the American Statistical Association*, **63**, 558-572, 1968.

[15]. Graybill, F.A., *An Introduction to Linear Statistical Models*, Volume 1,McGRAW-HILL BOOK COMPANY, New York, Toronto, London,1961.

[16]. Wallace,T.D., “Weaker Criteria and Tests for Linear Restrictions in Regression”, *Econometrica*, **40 (4)**, 689-698, 1972.

[17].Lehmann,E.L., *Testing Statistical Hypothesis*, John Wiley & Sons, Inc. New York, USA;1959.

[18].Goodnight, J. & Wallace, T.D., “Operational Techniques and Tables for Making Weak MSE Tests for Restrictions in Regressions”, *Econometrica*, **40(4)**, 699-709, 1972.

[19].Guilkey, D. K.& Price, J. M., “On Comparing Restricted Least Squares Estimators”, *Journal of Econometrics*, **15**, 397-404, 1981.

[20].Doran, H.E.& Rambaldi, A.N., “Applying Linear Time-Varying Constraints to Econometric Models: With an Application to Demand Systems”, *Journal of Econometrics*, **79**, 83-95, 1997.

[21]. Doran, H.E., “Constraining Kalman Fitler and Smoothing Estimates to Satisfy Time-Varying Restrictions” , *The Rewiew of Economics and Statistics*, **74(3)**, 568-572, 1992.

[22].Doran, H.E. & O’Donnell, C.J., & Rambaldi, A.N., *Imposing Observation-Varying Equality Constraints Using Generalised Restricted Least Squares*, Discussion Paper No 323, New York, USA, April 2003, ISSN 1446-5523

[23]. Suits, D.B., “Use of Dummy Variables in Regression Equations” , *Journal of the American Statistical Association*, **52**, 548-551, 1957.

[24]. Suits, D.B., “Dummy Variables: Mechanics V. Interpretation” , *The Rewiew of Economics and Statistics*, **66(1)**, 177-180, 1984.

[25]. Kennedy, P., “Interpreting Dummy Variables” , *The Rewiew of Economics and Statistics*, **68(1)**,174-175, 1986.

[26]. Simon, H.J.& Ramos, R. & Sanroma, E., *Collective Bargaining and Regional Wage Differences in Spain: An emprical Analysis, Document de treball,* IEB: Institut d2Economia de Barcelona, Spain, 2005.

[27]. Dünya Bankası Araştırma Raporu, *The Impact of NAFTA on Foreing Investment in Third Countries*, Chapter 7, First version December 9 2002, This version March 6 2003.www.sice.oas.org/geograph/north/NAFTA(pdf)

[28]. Ehrlich, L., *Changes in Estonian Exports Product Variety* , Doctoral School in Economics, Doctoral Summer School, 30 July -2 August 2006, University of Tartu and Tallinn University of Technology, Nelijarve, Estonia, 2006.

[29]. Blien, U.& Wolf, K., "Regional Development of Employment in Eastern Germany: An Analysis With An Econometric Analogue to Shift-Share Techniques", *Regional Sciences*, **81**, 391-414, 2002.

[30].Patterson, M.G., "A Note on the Formulation of a Full-Analogue Regression Model of the Shift-Share Method", *Journal of Regional Science*, **31(2)**, 211-216, 1991.

[31]. Hirschberg, J.G.& Slottje, D.J., *The Reparameterization of Linear Models Subject to Exact Linear Restrictions*, Australia, July 1999, 1-32, unimelb.edu.au/ecowww/research 702 pdf

[32]. Hirschberg, J.G.& Slottje, D.J.& Lye, J., *Alternative Forms for Restricted Regressions*, Research Paper Number 954, The University of Melbourne, Department of Economics, ISSN 0819-2642, ISBN 0 7340 2611 0. Australia, November 2005,

[33]. Akkaya, Ş. & Pazarlıoğlu, M. V., *Ekonometri II*, Erkam Matbaacılık, İstanbul,1998.

[34]. Aaron, C.J. JR.& Marvin, B.J. & Rueben, C.B., *Econometrics Basic and Applied*, MACMILLAN PUBLISHING COMPANY, New York,USA, Collier Macmillan Publishers, London, UK,1987.

[35].Koutsoyiannis, A., *Ekonometri Kuramı*, Çevirenler: Prof.Dr. Ümit Şenesen,Yrd.Doç.Dr.Gülay Günlük Şenesen, VERSO YAYINCILIK, Ankara, Ekim1989.

[36]. Özer, H., *Nitel Değişkenli Ekonometrik Modeller*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, Mayıs 2004.

[37]. Kakwani, N.& Son, H.,*Asian Recovery: A Social Perspective,* Asia and Pasific Forum on Poverty: Reforming Policies and Institutions for Poverty Reduction, Asian Development Bank, Manila, Indonesia, 5-9 February, 2001.

[38]. Studenmund, A.H., *Using Econometrics a Practical Guide*, Fourth Edition, Addison Wesley Longman, Inc., London, UK.,2001.

[39] . Devlet İstatistik Enstitüsü, Türkiye İstatistik Kurumu, www.tuik.gov.tr

[40]. TÜSİAD, Türk Sanayicileri ve İşadamları Derneği, Yayın no.*TÜSİAD-T/2002/12-354*, İstanbul, Aralık 2002.

[41]. Berberoğlu, C.N., *Makro İktisada Giriş*, Birlik Ofset, ISBN 975-95030-5-0, Eskişehir, 1999.

[42]. Ağaoğlu, E., "İki Farklı Eğilime Sahip Zaman Serisinin Modellenmesi-(1970-1987) Türk İhracat Gelirlerine Uygun Tahmin Modeli", *A.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi*, C:2, S:1, Eskişehir, 135-149, 1989.

[43]. Draper, N.R. & Smith H.,*Applied Regression Analysis*, Third edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1998.

Ek: İşsizlik Oranlarının Matris Cebri ile Kısıtlı En Küçük Çözümü

7,3	1	0	0	0	0	1	KISITLI	katsayılar
5,4	1	1	0	0	0	2	sabit:	7,161285
7,4	1	0	1	0	0	3	D2	8,1E-15
8,3	1	0	0	1	0	4	D3	4,38E-15
8,3	1	0	0	0	0	5	D4	1,45E-14
6,1	1	1	0	0	0	6	özeldumy	3,571875
5,5	1	0	1	0	0	7	trend	-0,01931
6,2	1	0	0	1	0	8	lamda	-6,5246
8,5	1	0	0	0	0	9	lamda	-3,78946
6,7	1	1	0	0	0	10	lamda	0,973797
7,8	1	0	1	0	0	11		
10,4	1	0	0	1	1	12		
11,5	1	0	0	0	1	13		
9,3	1	1	0	0	1	14		
9,6	1	0	1	0	1	15		
11	1	0	0	1	1	16		
12,3	1	0	0	0	1	17		X'Ymatrisi
10	1	1	0	0	1	18		253,4
9,4	1	0	1	0	1	19		56
10,3	1	0	0	1	1	20		58,6
12,4	1	0	0	0	1	21		66,8
9,3	1	1	0	0	1	22		175,9
9,5	1	0	1	0	1	23		3973
10	1	0	0	1	1	24		0
11,7	1	0	0	0	1	25		0
9,2	1	1	0	0	1	26		0
9,4	1	0	1	0	1	27		
10,6	1	0	0	1	1	28		

X'X matrisi

28	7	7	7	17	406	0	0	0
7	7	0	0	4	98	1	0	0
7	0	7	0	4	105	0	1	0
7	0	0	7	5	112	0	0	1
17	4	4	5	17	340	0	0	0
406	98	105	112	340	7714	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0

W-1

0,160407	0	0	0	0,071253	-0,01158	-0,27273	-0,19165	-0,18182
0	0	0	0	-1,1E-16	7,07E-18	1	-1,3E-16	1,25E-16
1,8E-17	0	0	0	-1,6E-16	7,14E-18	-1,4E-16	1	0
1,77E-17	0	0	0	-7,5E-17	5,85E-18	0	-7,1E-17	1
0,071253	0	0	0	0,528111	-0,02703	0,037433	0,226622	-0,1123
-0,01158	0	0	0	-0,02703	0,001931	1,08E-17	-0,01351	1,23E-17
-0,27273	1	0	0	0,037433	-9,8E-18	-5,24064	1,759358	1,721925
-0,19165	0	1	0	0,226622	-0,01351	1,759358	-5,14605	1,721925
-0,18182	0	0	1	-0,1123	-4,5E-18	1,721925	1,721925	-5,16578

		X'X-1					R'	
0,24215	-0,13294	-0,12302	-0,12051	0,051932	-0,00992	0	0	0
-0,13294	0,287698	0,146825	0,144841	0,027778	-0,00198	1	0	0
-0,12302	0,146825	0,293651	0,146825	0,055556	-0,00397	0	1	0
-0,12051	0,144841	0,146825	0,290804	0,006039	-0,00198	0	0	1
0,051932	0,027778	0,055556	0,006039	0,541063	-0,02778	0	0	0
-0,00992	-0,00198	-0,00397	-0,00198	-0,02778	0,001984	0	0	0
		R						
0	1	0	0	0	0			
0	0	1	0	0	0			
0	0	0	1	0	0			
RX'X-1								
-0,13294	0,287698	0,146825	0,144841	0,027778	-0,00198			
-0,12302	0,146825	0,293651	0,146825	0,055556	-0,00397			
-0,12051	0,144841	0,146825	0,290804	0,006039	-0,00198			
RX'X-1R'				RX'X-1R'-1				
0,287698	0,146825	0,144841		5,240642	-1,75936	-1,72193		
0,146825	0,293651	0,146825		-1,75936	5,146047	-1,72193		
0,144841	0,146825	0,290804		-1,72193	-1,72193	5,165775		
	X'X-1R'			X'X-1R'*RX'X-1R'-1				b(kısıtsız)
-0,13294	-0,12302	-0,12051		-0,27273	-0,19165	-0,18182		8,377
0,287698	0,146825	0,144841		1	-5,6E-17	0		-2,292
0,146825	0,293651	0,146825		5,55E-17	1	0		-1,928
0,144841	0,146825	0,290804		-1,1E-16	-1,1E-16	1		-1,218
0,027778	0,055556	0,006039		0,037433	0,226622	-0,1123		3,186
-0,00198	-0,00397	-0,00198		8,24E-18	-0,01351	1,39E-17		0,006746
Rb		X'X-1R'*RX'X-1R'-1*Rb			b-X'X-1R'*RX'X-1R'-1*Rb			
-2,292		1,216039		sabit:	7,160961			
-1,928		-2,292		D2	0			
-1,218		-1,928		D3	0			
		-1,218		D4	0			
		-0,38594		özdummy:	3,57194			
		0,026054		trend:	-0,01931			
X'X-1R'*RX'X-1R'-1		RX'X-1						
0,081743	-0,13294	-0,12302	-0,12051	-0,01932	0,001662			
-0,13294	0,287698	0,146825	0,144841	0,027778	-0,00198			
-0,12302	0,146825	0,293651	0,146825	0,055556	-0,00397			
-0,12051	0,144841	0,146825	0,290804	0,006039	-0,00198			
-0,01932	0,027778	0,055556	0,006039	0,012952	-0,00075			
0,001662	-0,00198	-0,00397	-0,00198	-0,00075	5,36E-05			

dönem	gerçek	beklenen	Yg-Yb	(Yg-Yb)2	Yb-Yort	Yb-Yort2	Yg-Yort	Yg-Yort2
1999Q1	7,3	7,141975	0,158025	0,024972	-1,90803	3,640559	-1,75	3,0625
1999Q2	5,4	7,122665	-1,72267	2,967575	-1,92733	3,71462	-3,65	13,3225
1999Q3	7,4	7,103355	0,296645	0,087998	-1,94665	3,789427	-1,65	2,7225
1999Q4	8,3	7,084045	1,215955	1,478547	-1,96596	3,864979	-0,75	0,5625
2000Q1	8,3	7,064735	1,235265	1,52588	-1,98527	3,941277	-0,75	0,5625
2000Q2	6,1	7,045425	-0,94543	0,893828	-2,00457	4,018321	-2,95	8,7025
2000Q3	5,5	7,026115	-1,52612	2,329027	-2,02389	4,09611	-3,55	12,6025
2000Q4	6,2	7,006805	-0,80681	0,650934	-2,0432	4,174646	-2,85	8,1225
2001Q1	8,5	6,987495	1,512505	2,287671	-2,06251	4,253927	-0,55	0,3025
2001Q2	6,7	6,968185	-0,26819	0,071923	-2,08181	4,333954	-2,35	5,5225
2001Q3	7,8	6,948875	0,851125	0,724414	-2,10113	4,414726	-1,25	1,5625
2001Q4	10,4	10,50144	-0,10144	0,01029	1,45144	2,106678	1,35	1,8225
2002Q1	11,5	10,48213	1,01787	1,036059	1,43213	2,050996	2,45	6,0025
2002Q2	9,3	10,46282	-1,16282	1,35215	1,41282	1,99606	0,25	0,0625
2002Q3	9,6	10,44351	-0,84351	0,711509	1,39351	1,94187	0,55	0,3025
2002Q4	11	10,4242	0,5758	0,331546	1,3742	1,888426	1,95	3,8025
2003Q1	12,3	10,40489	1,89511	3,591442	1,35489	1,835727	3,25	10,5625
2003Q2	10	10,38558	-0,38558	0,148672	1,33558	1,783774	0,95	0,9025
2003Q3	9,4	10,36627	-0,96627	0,933678	1,31627	1,732567	0,35	0,1225
2003Q4	10,3	10,34696	-0,04696	0,002205	1,29696	1,682105	1,25	1,5625
2004Q1	12,4	10,32765	2,07235	4,294635	1,27765	1,63239	3,35	11,2225
2004Q2	9,3	10,30834	-1,00834	1,01675	1,25834	1,58342	0,25	0,0625
2004Q3	9,5	10,28903	-0,78903	0,622568	1,23903	1,535195	0,45	0,2025
2004Q4	10	10,26972	-0,26972	0,072749	1,21972	1,487717	0,95	0,9025
2005Q1	11,7	10,25041	1,44959	2,101311	1,20041	1,440984	2,65	7,0225
2005Q2	9,2	10,2311	-1,0311	1,063167	1,1811	1,394997	0,15	0,0225
2005Q3	9,4	10,21179	-0,81179	0,659003	1,16179	1,349756	0,35	0,1225
2005Q4	10,6	10,19248	0,40752	0,166073	1,14248	1,305261	1,55	2,4025
toplamlar:	253,4		0,002005	31,15658		72,99047		104,15

Yort:	9,05	s2	1,246263
R2:	0,700821	s	1,116361