DIRAC DELTA GENELLEŞMİŞ FONKSİYONUNUN RASSAL DEĞİŞKENLERİN DAĞILIMLARI TEORİSİNDE UYGULAMALARI

Yeliz MERT

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Temmuz-2003

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Yeliz MERT'in Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonunun Rassal Değişkenlerin Dağılımları Teorisinde Uygulamaları başlıklı İstatistik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 09.07.2003 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:Prof.Dr. Embiya AĞAOĞLU	
Üye	:Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV	
Üye	:Prof.Dr. Ali Fuat YÜZER	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23.07.2003 tarih ve ...24/2......... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DIRAC DELTA GENELLEŞMİŞ FONKSİYONUNUN
RASSAL DEĞİŞKENLERİN
DAĞILIMLARI TEORİSİNDE UYGULAMALARI

YELİZ MERT

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Embiya Ağaoğlu
2003, 75 sayfa

Bu tezde rassal değişkenlerin fonksiyonlarının dağılımları araştırılırken kullanılan klasik Değişken Değiştirme ve Dağılım Fonksiyonu metotlarına alternatif olan, Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonuna dayalı bir metot geliştirilmiştir.

Bu metot sürekli rassal değişkenlerin hem dağılımını ve hem de yoğunluk fonksiyonunu bulma olanağı sağlamanın yanı sıra kesikli rassal değişkenler için genelleşmiş yoğunluk fonksiyonu kavramı tanımlamaya imkan sağlamıştır. Böylece sürekli rassal değişkenlerin ve kesikli rassal değişkenlerin aynı şekilde incelenebilme imkanı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Heaviside genelleşmiş fonksiyonu, Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu, Genelleşmiş fonksiyon.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

APPLICATIONS OF DIRAC DELTA GENERALIZED FUNCTION
TO THEORY OF DISTRIBUTIONS OF RANDOM VARIABLES

YELİZ MERT

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU
2003, 75 pages

In this thesis, a method of obtaining distributions of transformed random variables was developed. This method based on the Heaviside generalized function, the Dirac delta generalized function and can be considered as alternative to classical Change of Variable and Distribution Functions methods.

Mentioned method allowed to obtain the distribution functions or the density functions of continuous random variables, and also defined the concept of generalized density function for discrete random variables. So, the opportunity of examining continuous random variables and discrete random variables in the same way was obtained.

Keywords : Heaviside generalized function, Dirac delta generalized function, Generalized function

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum bu yüksek lisans tezinde tez konusunu öneren, beni bu konuda cesaretlendiren ve çalışmalarım süresince desteğini benden hiç esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU'na teşekkür ederim.

Tezin her aşamasında değerli görüş, faydalı öneri ve yapıcı eleştirileriyle beni yönlendiren, yazdıklarımı dikkatle okuyup tartışan, bu tezin içeriğinin zenginleşmesini ve açıklamaların önemli ölçüde gelişmesini sağlayan değerli hocam Prof.Dr.Aladdin ŞAMİLOV'a, öneri ve eleştirileriyle beni yönlendiren bölüm başkanımız hocam Prof. Dr. Ali Fuat YÜZER'e ve tezin yazımında büyük desteği olan arkadaşım Dr. Serkan Ali DÜZCE'ye teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini benden hiç bir zaman esirgemeyen eşim Hakan KANTAR'a ve beni yetiştiren anne ve babama da en derin teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$Beta(a,b)$	:	Beta fonksiyonu $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ ilişkilendirilir.
$Gamma(m,\lambda)$	:	m, n parametreli gamma dağılımı; $f(x) = \dfrac{x^{m-1}\lambda^{-m}e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\Gamma(m)}$
$H(x)$	:	Heaviside genelleşmiş fonksiyonu
R^n	:	n-boyutlu reel uzay
$\delta(x)$	:	Dirac Delta genelleşmiş fonksiyonu
$E[x]$	:	X rassal değişkeninin beklenen değeri
$N(\mu,\sigma)$	:	Normal dağılım; $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$
$U(a,b)$	:	Uniform dağılım; $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $a < x < b$, $a < b$
$\blacksquare$	:	Kanıtın bittiğini gösteren işaret

1 GİRİŞ

Olasılık teorisinin ve matematiksel istatistiğin en önemli konularından biri rassal değişkenlerin dağılımları teorisidir. n sayıda $X_1, ..., X_n$ rassal değişken verildiğinde bu değişkenlere bağlı bir $Y = \varphi(X_1, ..., X_n)$ dönüştürülmüş rassal değişkeninin dağılımı ve bu rassal değişkenler sürekli olduğunda yoğunluk fonksiyonunun bulunması sık sık ortaya çıkan problemlerden biridir. Bu problemi çözmek için kullanılan bir çok metot vardır. Ancak bu metotlar arasında en çok kullanılan Değişken Değiştirme Metodu, Dağılım Fonksiyonu Metodudur (bakınız, [1-4]). Bu metotları kullanırken metotların bir çok kısıtı ve işlem zorluğu vardır. Örneğin Değişken Değiştirme Metodu uygulanırken, n tane sürekli rassal değişkenin dağılımı bilindiğinde, bunlara bağlı $Y = \varphi(X_1, ..., X_n)$ rassal değişkeninin dağılımı araştırıldığında, öncelikle $n-1$ tane dikkatli seçilmiş yardımcı değişken tanımlanmalı, $n \times n$'lik bir Jacobiyen hesaplanmalı ki bu Jacobiyen sürekli olmalı ve 0 olmamalıdır. Tüm bu işlemlerin ardından n tane dönüştürülmüş değişkene bağlı yoğunluk fonksiyonundan aranılan değişkenin marjinal yoğunluk fonksiyonu $n-1$ sayıda integral alınarak bulunur.

Dağılım Fonksiyonu Metodunda aynı durum ele alındığında, sürekli rassal değişkenlere bağlı $y = \varphi(X_1, ..., X_n)$ dönüştürülmüş rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonunu bulmak için ilk önce onun dağılım fonksiyonu bulunmak zorundadır.

Bu metotlarda böylesine işlem sayısının fazla olması ve bu işlemlerin zorluğu bu metotlara alternatif bir metot arayışına gidilmesine sebep olmuştur. Bu anlamda ilk adımı Chi ve Au [5] atmıştır.

Chi ve Au 'nun çalışmasında sürekli rassal değişkenlere bağlı dönüştürülmüş rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonunun bulunmasında Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu uygulanmıştır. Kesikli rassal değişkenlerin dağılımı için Kronecker delta sembolü uygulanmıştır.

Bu tezde rassal değişkenlerin ve dönüştürülmüş rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunmasında geliştirilmiş metot Heaviside genelleşmiş fonksiyonuna ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonuna dayalıdır. Heaviside genelleşmiş fonksiyonunun uygulanması sürekli rassal değişkenlere bağlı dönüştürülmüş rassal değişkenin hem dağılımını hemde yoğunluk fonksiyonunu bulma olanağı sağlamanın yanı sıra kesikli rassal değişkenler için genelleşmiş yoğunluk fonksiyonu kavramı tanımlama olanağı sağlamıştır.

Böylece geliştirilen bu metot sayesinde sürekli rassal değişkenlerin ve kesikli rassal değişkenlerin aynı şekilde incelenebilme imkanı elde edilmiştir. Bu fikir diferansiyel denklemler teorisinde adi, fonksiyonel-diferansiyel, kısmı türevli diferansiyel denklemlerin aynı bir soyut diferansiyel denklem altında birleştirilerek incelenebilemesi olanağına benzerdir(bakınız, [6]).

Bu çalışmada elde edilen metodun üstünlükleri kısaca şöyle sıralanabilir.

1. Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla bu metot hem kesikli, hem de sürekli rassal değişkenler için uygulanabilir.

2. Değişken Değiştirme Metodunda olduğu gibi, dönüşümün tanımlanabilmesi için ilave yeni değişkenlerin tanımlanmasına bu metotda gerek kalmaz.

3. Jacobiyen hesabına gerek kalmaz.

4. Bu metot dağılım fonksiyonunu bulmadan direk yoğunluk fonksiyonunu bulma olanağı sağlar.

Burada metodun uygulanmasında bilinmesi gereken en önemli husus Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun bazı özellikleridir. Bu çalışmanın amacı rassal değişkenlerin dağılımları araştırılırken kullanılan klasik metotlara Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla alternatif bir metot sunmaktır.

Birinci bölümde sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulan bazı kavramlar: olasılık teorisinin temel kavramları, genelleşmiş fonksiyonlar, Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu ve özellikleri, Heaviside genelleşmiş fonksiyonu verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun bu çalışmada ihtiyaç duyulan özelliklerinin ayrıntılı ispatı yapılmıştır.

İkinci bölümde dönüştürülmüş rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunması için çeşitli klasik metotlar verilmiş ve problemler üzerinde bu metotların uygulamaları yapılmıştır.

Üçüncü bölümde Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla dönüştürülmüş kesikli ve sürekli tipte rassal değişkenlerin dağılımları için bu çalışmanında odak noktası olan metot verilmiş ve problemler üzerinde uygulamaları yapılmıştır.

Dördüncü bölümde bu tezde, verilen rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunmasında uygulanan Değişken Değiştirme metodu, Dağılım Fonksiyonu metodu, Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla geliştirilen metot çeşitli problemler üzerinde karşılaştırılmıştır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Olasılık Uzayı

Ω boş olmayan herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$ da onun alt kümelerinden oluşan bir kümeler sistemi olsun. Eğer φ fonksiyonu $\mathcal{A}$ da tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon ise φ bir küme fonksiyonudur. Her $A \in \mathcal{A}$ için $\varphi(A) \geq 0$ oluyorsa φ negatif olmayan bir küme fonksiyonudur.

Bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan $\mathcal{F}$ kümeler sistemi için

1) $\varnothing \in \mathcal{F}$,

2) $A \in \mathcal{F}$ iken $A^c = (\Omega - A) \in \mathcal{F}$,

3) $i = 1, 2, ...$ için $A_i \in \mathcal{F}$ iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ özelliklerini sağlıyorsa $\mathcal{F}$ bir σ cebiridir.

$\mathcal{F}$ bir σ cebri ve φ de $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olsun. Bu durumda φ aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir ölçü tanımlar.

1) $\varphi(\varnothing) = 0$.

2) $\{A_i\}$, $\mathcal{F}$'de tanımlı ayrık bir kümeler dizisi ise

$$\varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Ω herhangi bir küme olmak üzere $\mathcal{F}$ de Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\sigma-$cebir olsun. P, $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlı bir ölçü ve $P(\Omega) = 1$ ise $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ üçlüsüne bir olasılık uzayı denir(bakınız, [7], [8]).

2.2 Rassal Değişken

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $X : \Omega \rightarrow R$ olsun. Eğer $x \in R$ için $X^{-1}((-\infty, x])$ kümesi $\mathcal{F}$ sistemi içinde yani $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\}$ ise X bir rassal değişkendir.

$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in \mathcal{F}$ özelliği X rassal değişkeninin ölçülebilirliğini ifade etmektedir. Bu özellik sayesinde $\forall x \in R$ için bir fonksiyon yani

$F_X(x) = P(X \leq x)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Buna rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

2.3 Rassal Değişkenin Dağılımı

Önce tanımlandığı gibi eğer X bir rassal değişken ise onun dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

olarak tanımlanır.

Buradan gözüküyor ki dağılım fonksiyonu $F_X(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyondur.

2.4 Rassal Değişkenlerin Dağılıma Göre Sınıflandırılması

Rassal değişkenin yukarıda tanımlanmış dağılım fonksiyonu yani

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

fonksiyonunun x'e bağlı özellikleri sayesinde rassal değişkenlerin sınıflandırılması yapılabilir. Rassal değişkenler dağılıma göre kesikli rassal değişken, mutlak sürekli rassal değişken, singular rassal değişken ve bunların çeşitli toplamlarından oluşan rassal değişken olarak sınıflandırılırlar.

2.4.1 Kesikli Rassal Değişken

$F_X(x)$ dağılım fonksiyonu X'in basamaklı ve monoton artan bir fonksiyonu ise X'e kesikli rassal değişken denir. Kesikli rassal değişken sayılabilir sayıda değerlere sahiptir. Kesikli rassal değişkenin hemen hemen heryerde türevi 0'a eşittir(bakınız.[9]).

2.4.2 Mutlak Sürekli Rassal Değişken

$F_X(x)$ dağılım fonksiyonu X'in mutlak sürekli bir fonksiyonu ise X'e mutlak sürekli rassal değişken denir.

$F(x)$ dağılım fonksiyonu mutlak sürekli olduğunda yoğunluk fonksiyonu iki farklı durumda olabilir. Yoğunluk fonksiyonu sürekli olan durum ki bu klasik teoride karşılaşılan sürekli rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonudur.

Yoğunluk fonksiyonu süreksiz olan durum ki bu klasik teoride karşılaşılmayan mutlak sürekli rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonudur.

Not: Her bir mutlak sürekli fonksiyon hemen hemen heryerde türeve sahiptir ve türev fonksiyonu toplamsaldır.

2.4.3 Singular Rassal Değişken

$F_X(x)$ dağılım fonksiyonu sürekli fonksiyon olmanın yanı sıra hemen hemen heryerde türevi sıfıra eşit ise buna singular dağılım denir. $F_X(x)$ dağılım fonksiyonu singular dağılım ise X'e singular rassal değişken denir.

Genellikle keyfi bir dağılım bu dağılımların toplamı şeklinde yazılabilir.

$F(x)$ singular rassal değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. $F(x)$ fonksiyonu sürekli olmanın yanısıra hemen hemen heryerde

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \text{ ve } F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

dir. Bu tür dağılım fonksiyonuna örnek olarak [10] da verilen bütün değişimi $[0, 1]$ aralığında bulunan Cantor eğrisi gösterilebilir:

$F(x) = 0$ eğer $x \leq 0$, $F(x) = 1$ eğer $x \geq 1$ ve Cantor eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$[0, 1]$ aralığı 3 eşit

$$[0, \frac{1}{3}],\ [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}],\ [\frac{2}{3}, 1]$$

aralıklarına bölünür. "İç" aralık da yani $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ aralığında $F(x) = \frac{1}{2}$ dır. Kalan iki aralık yeniden üç eşit kısma bölünür. Ve herbir "iç" aralıkta $f(x)$

fonksiyonu değeri $\frac{1}{4}$ ve $\frac{3}{4}$'e eşit olduğu kabul edilir. Yani

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \\ \frac{3}{4} & x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] \end{cases}$$

dir. Bundan sonra kalan aralıkların herbiri yeniden 3 kısıma bölünerek "iç" aralıklarda $F(x)$ fonksiyonunun değeri önce tanımlanmış komşu iki değerin ortalamasına eşit kabul edilir ve bu böylece devam ettirilir.

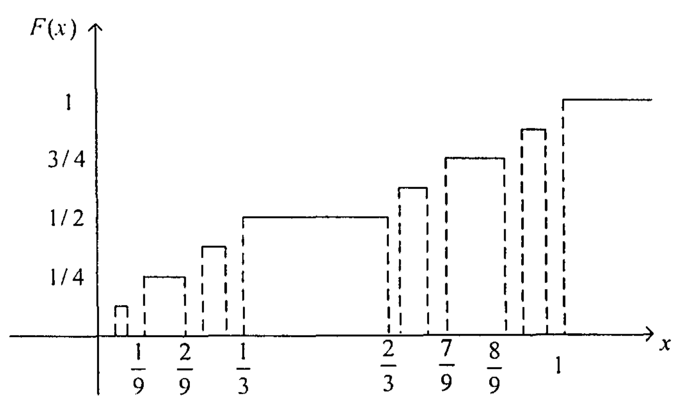
$F(x)$ fonksiyonunun sabit olduğu "iç" aralıkların uzunluklarının toplamı eşittir:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^k = \frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

$F(x)$ fonksiyonu iç aralıklara ait olmayan noktalarda sürekli olarak tanımlanır. Genel şekilde

$$F(x) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad k = 1, 2, ..., 2^{n-1}.$$

Burada n "iç" aralıkların sayısı başka değişle $F(x)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin sayısıdır. $\frac{2k-1}{2^n}$, $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$ değerleri $[0, 1]$ aralığının heryerinde sıktır. Yani $[0, 1]$ aralığının herbir noktasının istenilen küçük komşuluğunda bu diziden en az bir değer vardır. $F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiği şekil 2.1 de görülmektedir.



Şekil 2.1: Cantor basamağı

2.5 Genelleşmiş Fonksiyonlar

Genelleşmiş fonksiyon kavramını tanımlamak için önce bazı temel kavramlar bilinmelidir. Sözkonusu kavramlardan biri test fonksiyonu kavramıdır.

2.5.1 Test Fonksiyonları

Genelleşmiş fonksiyonlar, fonksiyonel gibi tanımlandıkları için önce bu fonksiyonellerin tanımlandığı fonksiyonlar kümesini belirtmek gerekiyor.

Bu tür fonksiyonlar kümesine test fonksiyonları kümesi denilecek. Ve K ile gösterilecek. K kümesi bütün merteben türevlere sahip, sınırlı taşıyıcılı (bounded support) $\varphi(x)$, $x \in R^n$ fonksiyonlarından oluşan bir kümedir. $\varphi(x)$ fonksiyonunun taşıyıcısı denildiğinde öyle x'ler anlaşılır ki bu x'ler için $\varphi(x) \neq 0$ dır. Buradan K'ya ait olan test fonksiyonun herbiri herhangi bir sınırlı küme dışında özdeşlikle sıfıra eşit olmak zorunda olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Örneğin, $x \in R^2$ olduğunda, $\varphi(x)$ fonksiyonunun taşıyıcısı sınırlı bir kapalı eğri yayı ise bu eğri yayı üzerinde bütün mertebeden türevler 0'a eşit olmak zorundadır.

Test fonksiyonların oluşturduğu K kümesine test fonksiyonlar uzayı denir. Test fonksiyonların toplamı ve reel bir sayı ile çarpımı test fonksiyonu olduğu için test fonksiyonlar uzayı lineer uzaydır.

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$ test fonksiyonlar dizisinin herbir fonksiyonu belli bir bölgenin dışında 0'a eşit ve bu dizi bütün mertebeden türevleriyle birlikte 0'a uniform yakınsıyor ise o zaman dizi 0'a yakınsıyor denir.

Örnek olarak aşağıdaki fonksiyon gözönüne alınabilir.

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - r^2}\right), & \text{eğer } r < a \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } r \geq a \text{ ise} \end{cases}$$

$$r = \left|\sqrt{\sum x_i^2}\right| \geq a,$$

$$\varphi_\nu(x) = \nu^{-1}\varphi(x,a) \qquad \nu = 1, 2, ...$$

dizisi K'da yakınsaktır.

$$\varphi_\nu(x) = \nu^{-1}\varphi(\frac{x}{\nu}, a) \qquad \nu = 1, 2, ...$$

dizisi kendi bütün mertebeden türevleriyle 0'a uniform yakınsar. Ancak K'da yakınsamaz çünkü dizinin bütün fonksiyonları için sınırlı ortak bir bölge yoktur ki o bölge dışında hepsi 0 olsun.

K'ya ait olan fonksiyonlar bir çok özelliğe sahiptir (bakınız, [11]). Örneğin, sınırlı taşıyıcılık özelliğine sahip verilmiş sürekli $f(x)$ fonksiyonu için K'ya ait öyle bir $\varphi(x)$ vardır ki $f(x)$'e istenildiği kadar yakındır. Yani bütün x'ler ve her bir $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

2.5.2 Genelleşmiş Fonksiyonlar; Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu

K'da tanımlanmış sürekli lineer fonksiyonel denildiğinde öyle bir kural verildiği anlaşılıyor ki bu kurala göre K'dan olan herbir $\varphi(x)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan (f, φ) reel sayısı karşılaştırılır.

(a) Her bir α_1 ve α_2 sayıları ve K'dan olan $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ iki fonksiyon olmak üzere

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$$

koşulu sağlanır. Bu özelliğe f'nin lineerliği denir.

(b) φ_1, $\varphi_2, ..., \varphi_\nu, ...$ dizisi K'da 0'a yakınsıyor ise

$$(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), ..., (f, \varphi_\nu)...$$

dizisi 0'a yakınsar. Bu özellik f'nin süreklilik özelliğidir. Örneğin, $f(x)$ R^n de her bir sınırlı bölgede mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise (f lokal toplanabilir bir fonksiyon olduğunda) bu fonksiyon yardımıyla K'dan olan her bir $\varphi(x)$'e

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \tag{2.1}$$

sayısı karşılık gelir. Burada (2.1)'deki integral $\varphi(x)$'in sıfıra eşit olmadığı bölge üzerinden alınmalıdır.

Kolayca görülebilir ki, f fonksiyoneli için (a) ve (b) özellikleri sağlanır. Burada (b) özelliği integrant uniform yakınsadığında, integral dışındaki limitle integral işaretinin yer değiştirmesi özelliğinden ortaya çıkar. (2.1) eşitliği K üzerinde tanımlanmış sürekli lineer fonksiyonelin birkaç özelliğini ifade etmektedir. Diğer özellikler daha sonra sunulacaktır.

K'dan olan her bir $\varphi(x)$ fonksiyonuna bu fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki $\varphi(x_0)$ değeri karşılık getirilirse, o zaman (a) ve (b) koşullarını sağlayan bir fonksiyonel tanımlanmış olur. Ancak bu fonksiyonel (2.1) şeklinde ifade edilemez. Yani bu fonksiyonel lokal integrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu yardımıyla (2.1) integrali şeklinde gerçekleştirilemez. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Her biri K'dan olan $\varphi(x)$ için

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

koşulunu sağlayan lokal integrallenebilir $f(x)$ fonksiyonu olduğunu varsayalım. Yukardaki örnekte dikkate alınan $\varphi(x,a)$ fonksiyonu için

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x,a)dx = \varphi(0,a) = e^{-1}. \tag{2.2}$$

Ancak $a \to 0$, (2.2) eşitliğinin sol tarafındaki integral sıfıra yaklaşıyor. Bu ise e^{-1} sonucu ile çelişmektedir.

Yukarıda tanımladığımız yani herbir $\varphi(x) \in K$ için değeri $\varphi(x_0)$ olan ve (a) ve (b) koşullarını sağlayan ancak (2.1) eşitliği gibi yazılamayan fonksiyonele $\delta(x)$ Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu denir.

Tanıma göre

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$$

yazılır. Genellikle bu

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0)$$

şekilde yazılabilir. K üzerinde tanımlanmış lineer sürekli fonksiyon olarak genelleşmiş fonksiyon tanımlandı. Genelleşmiş fonksiyonlar hakkında daha ayrıntılı bilgi için [11] önerilebilir. Eşitlik (2.1) şeklinde verilen fonksiyonlara regular, diğer fonksiyonlara da singular genelleşmiş fonksiyon denir. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu da bu singular genelleşmiş fonksiyonlardan birisidir. Daha sonraki bölümler de rassal değişkenlerin dağılımları teorisinde önemli yere sahip olan Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu detaylı olarak incelenecektir.

2.5.3 Genelleşmiş Türev Kavramı

φ test fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(f,\varphi') &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\varphi(x) \\
&= f(x)\varphi(x)\,|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x)\varphi(x)dx \\
&= f(\infty)\varphi(\infty) - f(-\infty)\varphi(-\infty) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x)\varphi(x)dx \\
&= 0 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x)\varphi(x)dx = -(v,\varphi),
\end{aligned}
$$

yada

$$
(f,\varphi') = -(v,\varphi) \tag{2.3}
$$

keyfi test fonksiyonu $\varphi(x)$ için (2.3) eşitliği sağlanıyor ise o zaman v fonksiyonuna f'nin genelleşmiş türevi denir. Ve $v = f'$ şeklinde gösterilir. Genellikle

$$
(f,\varphi^{(k)}) = (-1)^k(v,\varphi)
$$

eşitliğini sağlayan v fonksiyonuna f'nin k.mertebeden türevi denir. Ve $v = f^{(k)}$ gibi yazılır.

2.6 Heaviside Genelleşmiş Fonksiyonu ve Türevi

[8] de olduğu gibi Heaviside genelleşmiş fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan $H(0-) = 0$, $H(0+) = 1$ olduğu görülür. Her test fonksiyonu $\varphi(x)$ için

$$\begin{aligned} (H, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} H(x)\varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} H(x)\varphi(x)dx \\ &= 0 + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx, \end{aligned}$$

yada

$$(H, \varphi) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Yani (H, φ) test fonksiyonları uzayında lineer bir fonksiyonel tanımlar.

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0). \tag{2.4}$$

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{2.5}$$

(2.4) ve (2.5)'den

$$(H', \varphi) = (\delta, \varphi) \tag{2.6}$$

sonucu yazılabilir. (2.6) formülü $H'(t) = \delta(t)$ ifade etmektedir. Yani Heaviside genelleşmiş fonksiyonunun türevi Dirac delta genelleşmiş fonksiyonudur. Dikkat edilmelidir ki (2.6) formülü bilinen anlamda türev değil genelleşmiş anlamda türevdir.

2.7 Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonuna Dizisel Yaklaşım

2.7.1 Tarihçesi

Kuantum mekaniğinin önemli formülleri için Dirac tarafından bulunan fonksiyon, çoğunlukla Dirac'ın delta fonksiyonu olarak bilinir.

"Genelleşmiş fonksiyonlar" teorisinin önemli bir fonksiyonu olan delta fonksiyonu başlangıçta pekçok matematikçi tarafından kabul edilmemişti. Buna rağmen uzun yıllar, fizikçiler ve mühendisler fonksiyonun fonksiyonel yapısıyla ilgilenmezsizin bu fonksiyonu kullanmışlar ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonuna faydalı sonuçları olan, özel bir fonksiyon olarak bakmışlardır.

Dirac fonksiyonu son yüzyılda matemetiksel yapıya oturtulmuştur. Bu fonksiyon bilinen fonksiyon değil genelleşmiş fonksiyon yani lineer bir fonksiyonel olduğu ispatlanmıştır. Bu tür soyut tanımına rağmen Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu istatistiğin belli alanlarında özellikle de rassal değişkenlerin dağılımları teorisinde uygulanmaya başlanmıştır.

2.7.2 Tanımı

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu $\delta(x)$ notasyonuyla gösterilir ve

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{yada } \delta(x-y) = \begin{cases} \infty & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

olmanın yanısıra $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ koşulunu da sağlar.

Yukarıdaki şekilde tanımlanmış Dirac delta fonksiyonu bir dizinin limiti olarak anlam kazanabilir.

Örneğin

$$
\begin{aligned}
\delta(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/(4\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Bu dizilerden birinin limiti için $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ olduğu gösterilebilir.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} d(nx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

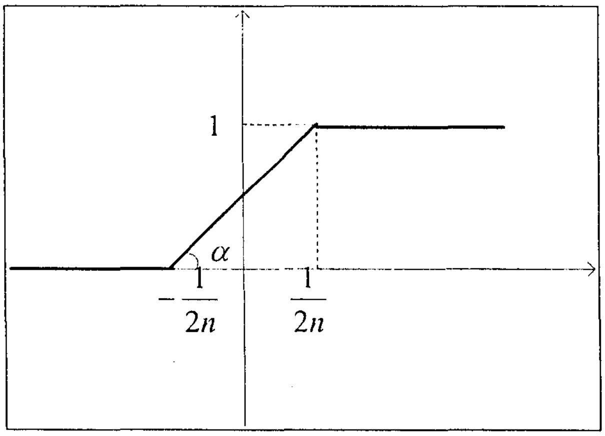
Heaviside genelleşmiş fonksiyonuyla Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu arasındaki bağlantı dizisel yaklaşım yardımıyla incelenebilir.

$$
f_n(x) = \begin{cases} nx + \frac{1}{2} & x \in (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) \\ 0 & x \in (-\infty, -\frac{1}{2n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{2n}, +\infty) \end{cases} \tag{2.7}
$$

şeklinde $f_n(x)$ tanımlanabilir. Buradan

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(x) = H(x), \quad x \neq 0
$$

olduğu görülür.

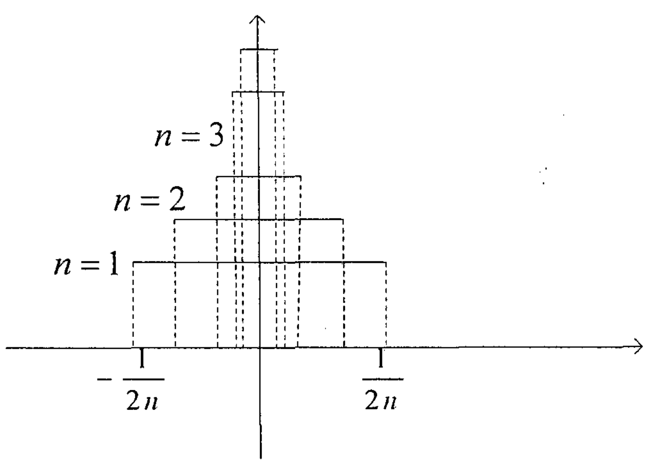


Şekil 2.2: Heaviside genelleşmiş fonksiyonuna yakınsayan $\{f_n(x)\}$ dizisi terimlerinin grafiği

(2.7) den $\tan\alpha = \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$, $\tan\alpha = n$ olması nedeniyle

$$f'_n(x) = \begin{cases} n & x \in (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) \\ 0 & x \notin (-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n}) \end{cases} \tag{2.8}$$

olduğu görülür. (2.8)'e ait $\{f'_n(x)\}$ ler dizisinin terimlerinin grafikleri şekil 2.3 de gösterilir



Şekil 2.3: Dirac delta genelleşmiş fonksiyonuna yakınsayan $\{f'_n(x)\}$ dizisi terimlerinin grafiği

(2.8)'den kolayca görülür ki

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0, \end{cases}$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \delta(x),$$

Böylece n sonsuza gittiğinde $\{f_n'(x)\}$ dizisinin limiti Dirac delta genelleşmiş fonksiyonudur:

$$H'(x) = \delta(x).$$

2.8 Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonunun Özellikleri

1. $f(x)$ sürekli bir fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$$

integrali $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğunda aşağıdaki gibi hesaplanır. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olması $f(x) = f(0) + 0(\varepsilon)$ burada ($\varepsilon \to 0$, $0(\varepsilon) \to 0$) eşitliğinin geçerli olması anlamına gelir. $\delta(x)$ fonksiyonunun özellikleri de dikkate alınarak aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f(0) + 0(\varepsilon))\delta(x)dx$$
$$= f(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx$$
$$= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx$$
$$= f(0) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx,$$

yada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx.$$

Sonuncu eşitlikte $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx$ integrali gözönüne alınıp,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx\right| &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |0(\varepsilon)|\,\delta(x)dx \\ &\leq \left|\sup_{\varepsilon} 0(\varepsilon)\right| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx \\ &\leq \left|\sup_{\varepsilon} 0(\varepsilon)\right| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \leq \sup_{\varepsilon} |0(\varepsilon)|\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yardımıyla $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0(\varepsilon)\delta(x)dx = 0$ ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

olduğu ispatlanır. ■

2. f, $x = x_0$'da sürekli ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0).$$

Kanıt. Değişken değiştirme yapılırsa $x - x_0 = y$, $dx = dy$, $f(x_0 + y) = g(y)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y + x_0)\delta(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(y)dy = g(0) = f(x_0).$$

■

3. $a \neq 0$ ve $f(x)$ sürekli ise

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x),$$

yada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$$

dır.

Kanıt.

i. $a > 0 \Rightarrow ax = y \quad adx = dy$. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{y}{a})\delta(y)dy \\ &= \frac{1}{a}f(0) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx,\end{aligned}$$

yada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \tag{2.9}$$

olur.

ii. $a < 0 \Rightarrow ax = y, \quad adx = dy$ olduğu için

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx &= \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(\frac{y}{a})\delta(y)dy \\ &= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{y}{a})\delta(y)dy \\ &= -\frac{1}{a}f(0) = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx,\end{aligned}$$

yada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \qquad (2.10)$$

olur. (2.9) ve (2.10) aşağıdaki tek formül şeklinde yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx. \qquad (2.11)$$

■

4. $\varphi(x)$ sürekli bir fonksiyon, x_n, $n = 1,...,k$ $\varphi(x)$'in ayrık kökleri ise ve $\varphi'(x_n) \neq 0$ koşulu sağlanıyor ise $\varphi(x)$ fonksiyonun Dirac delta fonksiyonu

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|\varphi'(x_n)|}$$

şeklinde verilir.

Kanıt. Her sürekli f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx &= \int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx \\ &+ \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx + ... + \int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx \\ &+ \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx \end{aligned} \qquad (2.12)$$

ilişkisi vardır. Ve $x \neq 0$ olduğunda, $\delta(x) = 0$ olduğu bilindiğine göre

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_n+\varepsilon}^{x_{n+1}-\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = 0, \qquad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = 0, \quad \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = 0 \qquad (2.14)$$

dır. (2.13) ve (2.14) (2.12) de dikkate alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-\varepsilon}}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx \qquad (2.15)$$

sonucu doğal olarak ortaya çıkar. (2.15) de bulunan

$$\int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx \tag{2.16}$$

integrali gözönüne alınırsa, $(x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon)$ aralığında $\varphi(x)$ sürekli diferansiyellenabilir fonksiyon olduğundan $\varphi'(x_k)\neq 0$ olduğu için $\varphi'(x_k)\neq 0$, $x\in(x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon)$.Bu nedenle $\varphi(x)$ fonksiyonu ters fonksiyona sahiptir.

i. $\varphi'(x) > 0$ ise φ fonksiyonu artandır. Artan sürekli bir fonksiyon bu aralıkta ters fonksiyona sahiptir. $\varphi(x) = t$ den $x = \psi(t)$ olduğu bulunur. $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ olduğu için $\psi'(t)dt = dx$ olur.

$x_n-\varepsilon < x < x_n+\varepsilon$ aralığında $\varphi(x)$ artan bir fonksiyon olduğu için

$$\varphi(x_n-\varepsilon) < \varphi(x) < \varphi(x_n+\varepsilon)$$

ve

$$\varphi(x_n-\varepsilon) < t < \varphi(x_n+\varepsilon)$$

olur. Bu değerler (2.16) integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx &= \int_{\varphi(x_k-\varepsilon)}^{\varphi(x_k+\varepsilon)} f(\psi(t))\delta[t]\psi'(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi(t))\psi'(t)\delta[t]dt \\
&= f(\psi(t))\psi'(t)\mid_{t=0} \\
&= f(\psi(0))\psi'(0) = f(x_n)\frac{1}{\varphi'(x_n)},
\end{aligned}$$

yada

$$\int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = f(x_n)\frac{1}{\varphi'(x_n)} \tag{2.17}$$

sonucu bulunur.

ii. $\varphi'(x) < 0$ ise φ fonksiyonu azalandır. Azalan ve sürekli bir fonksiyon bu aralıkta ters fonksiyona sahiptir. $\varphi(x) = t$ den $x = \psi(t)$ olduğu bulunur. $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ olduğu için $\psi'(t)dt = dx$ olur.

$x_n - \varepsilon < x < x_n + \varepsilon$ aralığında $\varphi(x)$ azalan bir fonksiyon olduğu için

$$\varphi(x_n + \varepsilon) < \varphi(x) < \varphi(x_n - \varepsilon)$$

ve

$$\varphi(x_n + \varepsilon) < t < \varphi(x_n - \varepsilon)$$

olur. Bu değerler (2.16) integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx &= \int\limits_{\varphi(x_k-\varepsilon)}^{\varphi(x_k+\varepsilon)} f(\psi(t))\delta[t]\psi'(t)dt \\
&= -\int\limits_{\varphi(x_k+\varepsilon)}^{\varphi(x_k-\varepsilon)} f(\psi(t))\delta[t]\psi'(t)dt \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\psi(t))\psi'(t)\delta[t]dt \\
&= -f(\psi(t))\psi'(t)\,|_{t=0} \\
&= -f(\psi(0))\psi'(0) = -f(x_n)\frac{1}{\varphi'(x_n)},
\end{aligned}$$

veya

$$\int\limits_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = -f(x_n)\frac{1}{\varphi'(x_n)} \tag{2.18}$$

olduğu sonucuna varılır. (2.17) ve (2.18) sonuçlarından

$$\int\limits_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = f(x_n)\frac{1}{|\varphi'(x_n)|} \tag{2.19}$$

olduğu görülür. Bu sonuç (2.15)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx &= \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_n)\frac{1}{|\varphi'(x_n)|} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\varphi'(x_n)|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_n)dx,
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[\varphi(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\varphi'(x_n)|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_n)dx,$$

veya

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\varphi'(x_n)|}\delta(x - x_n).$$

Örneğin $\varphi(x) = x^2 - a^2$ olursa,

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2\,|a|}\delta(x - a) + \delta(x + a)$$

şeklinde bulunur. ■

5. $\delta(x) = \delta(-x)$ yani Dirac delta fonksiyonu çift fonksiyondur.

Kanıt. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun 3. özelliği kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx = \frac{1}{|-1|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx,$$

yada

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx.$$

■

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu ve özellikleri hakkında daha ayrıntılı bilgi için [11, 12, 13] den yararlanılabilir.

3 DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ RASSAL DEĞİŞKENLERİN DAĞILIMLARININ BULUNMASI İÇİN ÇEŞİTLİ METOTLAR

Bu bölümde dönüştürülmüş rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunması için çeşitli klasik metotlar verilmiş ve örnekler üzerinde bu metotların uygulamaları yapılmıştır (bakınız, [2, 3]).

3.1 Rassal Değişken Dağılımının Tanımıyla Yoğunluk Fonksiyonunun Bulunması

$X_1, X_2, ..., X_n$ rassal değişkenler verildiğini varsayalım, $Y = u(X_1, X_2, ..., X_n)$ nin dağılımı denildiğinde

$$G(y) = P\{Y \leq y\} = P(u(X_1, X_2, ..., X_n) \leq y)$$

fonksiyonu anlaşılır.

Eğer $G(y)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$g(y) = G'(y)$$

fonksiyonuna yoğunluk fonksiyonu denir.

Dağılım fonksiyonu tanımından yola çıkarak dağılım fonksiyonu $G(y)$ ve yoğunluk fonksiyonu $g(y)$'nin bulunması yöntemine yaygın olarak Dağılım Fonksiyonu metodu denir.

Örnek 3.1.1 *X ve Y sırasıyla $\mathcal{X}^2_{(m)}$ ve $\mathcal{X}^2_{(n)}$ $\mathcal{X}^2$ dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler olsun.*

$$Z = (X/m) \ / \ (Y/n) \qquad (0 < x < \infty, \ 0 < y < \infty)$$

Z değişkeninin serbestlik derecesi m ve n olan f-dağılımı olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

Çözüm 3.1.1 *Dağılımın tanımı kullanılarak*

$$G(z) = P(Z < z) = P(\frac{nX}{mY} < z)$$

ifadesi yazılır ve $\forall z \in (0, \infty)$ *için*

$$D(z) = \{(x, y) : \ 0 < x < \infty, \ \frac{nx}{mz} < y\}$$

bölgesi tanımlanır. X *ve* Y *bağımsız rassal değişkenler olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu*

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y),$$

yani

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{(x+y)}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$$

şeklindedir. $G(z)$ *dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:*

$$G(z) = P(\frac{nx}{mz} < z) = \int_0^{\infty} \int_{\frac{nx}{mz}}^{\infty} f_1(x) f_2(y) dy dx.$$

Buradan yoğunluk fonksiyonu için

$$\begin{aligned} g(z) = G'(z) &= -\int_0^{\infty} f_1(x) f_2(\frac{nx}{mz}) \frac{n}{m}(-\frac{x}{z^2}) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} \frac{e^{-\frac{nx}{mz}} (\frac{nx}{mz})^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{n}{m}(\frac{x}{z^2}) dx, \end{aligned}$$

$$c = \frac{(\frac{n}{m})^{\frac{n}{2}} (-\frac{1}{z^2})(\frac{1}{z})^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})},$$

denilirse,

$$g(z) = G'(z) = c \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}(1+\frac{n}{mz})} x^{\frac{m+n}{2}-1} dx$$

ifadesi bulunur. Sonuncu integrali hesaplamak için $\frac{x}{2}(1+\frac{n}{mz}) = u$ *dönüşümü uygulanırsa,* $dx = \frac{du}{\frac{1}{2}(1+\frac{n}{mz})}$ *olduğundan ve integralin sınırları değişmediğinden*

$$\begin{aligned} g(z) &= c\int_0^\infty e^{-u}\frac{u^{\frac{n+m}{2}-1}}{[\frac{1}{2}(1+\frac{n}{mz})]^{\frac{m+n}{2}}}du \\ &= c\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{2^{-\frac{(m+n)}{2}}(1+\frac{n}{mz})^{\frac{m+n}{2}}}, \end{aligned}$$

$$g(z) = \frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{m}{2}-1}(mz+n)^{-\frac{m+n}{2}}$$

bulunur. Buradan görülür ki $Z = \frac{nX}{mY}$ *rassal değişkeni serbestlik derecesi* m *ve* n *olan f-dağılımına sahiptir.*

3.1.2 İki Sürekli Rassal Değişken Oranının Süreksiz Bir Yoğunluk Fonksiyonuna Sahip Olabileceğini Gösteren Bir Örnek

Herbirinin yoğunluk fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olan iki sürekli rassal değişkenin oranının yoğunluk fonksiyonunu bulalım.

Bağımsız rassal değişkenler olarak Couchy dağılımına sahip olan rassal değişkenleri gözönüne alalım. Bu rassal değişkenlerin oranının yoğunluk fonksiyonu bulunduğunda görülüyor ki bulunan yoğunluk fonksiyonu sürekli değildir.

Örnek 3.1.3 *Farzedelim* X_1 *ve* X_2 *bağımsız Couchy rassal değişkenleri olsun.*

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x_i < \infty, \; i = 1,2$$

verilmiştir.

$$Y = \frac{X_1}{X_2}$$

rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu dağılım fonksiyonu metoduyla aşağıdaki gibi bulunur.

Çözüm 3.1.3 *Dağılımın tanımından*

$$G(y) = P(\frac{X_1}{X_2} < y)$$

Y rassal değişkeninin dağılımını bulmak için aşağıdaki şekilde bölgeler gözönüne alınır.

i. $y > 0,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0$ *için bölge*

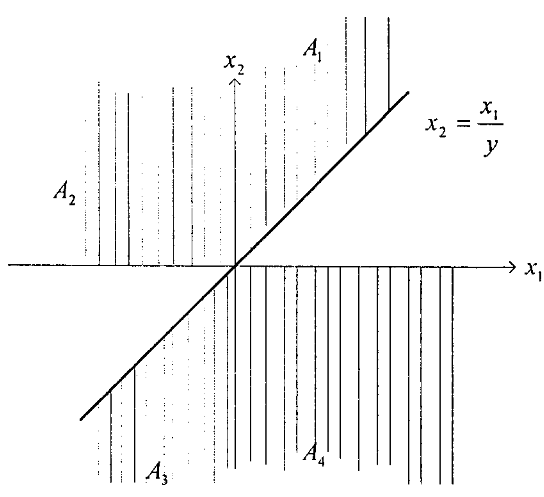
$$A_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ \frac{x_1}{y} < x_2\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0;\ x_2 > 0;\ \frac{x_1}{y} < x_2\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0;\ x_2 < 0;\ \frac{x_1}{y} > x_2\}$$

$$A_4 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0;\ x_2 < 0;\ \frac{x_1}{y} > x_2\}$$

Bu bölgelerin birleşimi $D(y)$ dir. Örnek 3.1.3 de ortaya çıkan bölgelerin tespiti şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1: Örnek 3.1.3 de ortaya çıkan bir bölgenin tespiti

$$D(y) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$D(y)$ bölgesinden yola çıkarak $G(y)$'nin dağılımı hesaplanır:

$$G(y) = P(\frac{X_1}{X_2} < y) = \iint\limits_{D(y)} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2,$$

$$\begin{aligned} G(y) &= P(\frac{X_1}{X_2} < y) = \iint\limits_{A_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 + \iint\limits_{A_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &+ \iint\limits_{A_3} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 + \iint\limits_{A_4} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_0^{\infty} dx_1 \int_{\frac{x_1}{y}}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 + \int_{-\infty}^{0} dx_1 \int_0^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\ &+ \int_{-\infty}^{0} dx_1 \int_{-\infty}^{\frac{x_1}{y}} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 + \int_0^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{0} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2, \end{aligned}$$

Y'nin dağılım fonksiyonundan yoğunluk fonksiyonu elde edilebilir.

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \int_0^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(\frac{x_1}{y}) \frac{x_1}{y^2} dx_1 + \int_{-\infty}^{0} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(\frac{x_1}{y}) \frac{-x_1}{y^2} dx_1, \end{aligned}$$

bu integralde işlemin sade olması için $x_1 = x$ denilebilir.

$$g(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \frac{1}{\frac{\pi(y^2+x^2)}{y^2}} \frac{x}{y^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \frac{1}{\frac{\pi(y^2+x^2)}{y^2}} \frac{-x}{y^2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)} dx + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{0} \frac{-x}{(1+x^2)(y^2+x^2)} dx,$$

integralin ikinci kısmında $t = -x$, $dt = -dx$, dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx + \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(-t)}{(1+t^2)(y^2+t^2)}(-dt), \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx + \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx \\
g(y) &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx, \qquad y > 0 \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

(3.1) de $\dfrac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}$ *rasyonel ifadesi basit kesirlere ayrılarak integral çözülebilir.*

$$\frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)} = \frac{ax+b}{(1+x^2)} + \frac{cx+d}{(x^2+y^2)}$$

ikinci taraf düzenlenirse

$$x = by^2 + d + (ay^2 + c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
ay^2 + c &= 1 \qquad & by^2 + d = 0 \\
a + c &= 0 \qquad & b + d = 0
\end{aligned}$$

sistemi bulunur. Bu sistem çözülürse

$$a = \frac{1}{1-y^2}\,, c = -\frac{1}{1-y^2},$$

ve

$$b(1-y^2) = 0; \quad y \neq \pm 1 \textit{ için } b = 0; d = 0$$

bulunur. Bu değerler (3.1) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx \\
&= \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+y^2}dx \\
&= \left\{\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\ln\left|x^2+y^2\right|\right\}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\ln\frac{x^2+1}{x^2+y^2}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}(0-\ln\frac{1}{y^2}),
\end{aligned}
$$

yani

$$
g(y) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\ln y^2, \quad y > 0 \tag{3.2}
$$

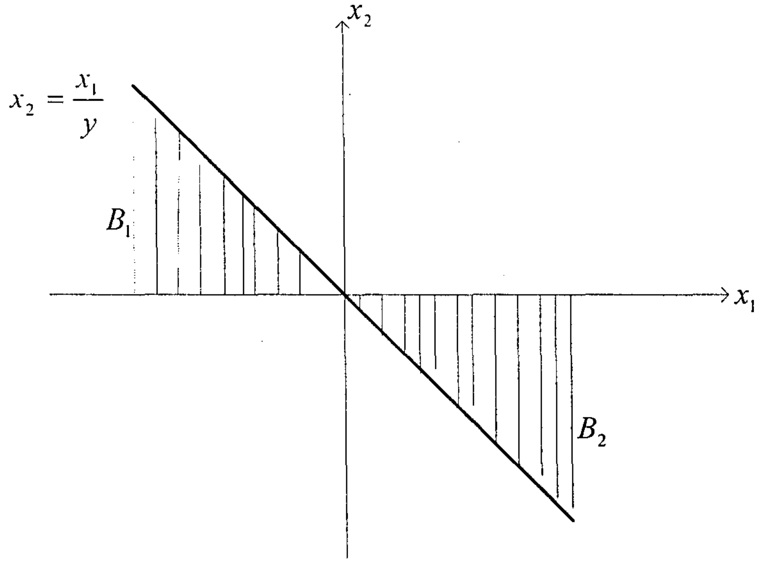
$y > 0$ *olduğunda* $g(y) > 0$ *koşulu sağlanır, çünkü* $0 < y < 1$ *olduğunda* $y^2 - 1 < 0$ *ve* $\ln y^2 < 0$ *olur.*

ii. $y < 0$ *olduğunda*

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{(x_1, x_2) : x_1 < 0;\ 0 < x_2 < \frac{x_1}{y}\} \\
B_2 &= \{(x_1, x_2) : x_1 > 0;\ \frac{x_1}{y} < x_2 < 0\}
\end{aligned}
$$

$$
D(y) = B_1 \cup B_2
$$

bölgeleri tanımlanır. Bu bölgelerin birleşimi $D(y)$ *dir.*



Şekil 3.2: Örnek 3.1.3 de ortaya çıkan başka bir bölgenin tespiti

Rassal değişkenin dağılımının tanımına göre;

$$G(y) = P(\frac{X_1}{X_2} < y) = \iint\limits_{D(y)} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2,$$

$$G(y) = P(\frac{X_1}{X_2} < y) = \iint\limits_{B_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 + \iint\limits_{B_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2,$$

$$G(y) = \int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_{\frac{x_1}{y}}^0 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 + \int\limits_{-\infty}^0 dx_1 \int\limits_0^{\frac{x_1}{y}} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2.$$

Y'nin dağılım fonksiyonundan yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \int\limits_0^\infty f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(\frac{x_1}{y}) \frac{x_1}{y^2} dx_1 + \int\limits_{-\infty}^0 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(\frac{x_1}{y}) \frac{-x_1}{y^2} dx_1, \end{aligned}$$

veya

$$g(y) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\pi(1+x^2)} \frac{1}{\frac{\pi(y^2+x^2)}{y^2}} \frac{x}{y^2} dx + \int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi(1+x^2)} \frac{1}{\frac{\pi(y^2+x^2)}{y^2}} \frac{-x}{y^2} dx,$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{-x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx$$

şeklinde bulunur. İntegralin ikinci kısmında $t = -x$, $dt = -dx$, dönüşümü uygulanırsa

$$g(y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} \frac{(-t)}{(1+t^2)(y^2+t^2)}(-dt),$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx,$$

veya

$$g(y) = \frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(y^2+x^2)}dx, \quad y < 0. \tag{3.3}$$

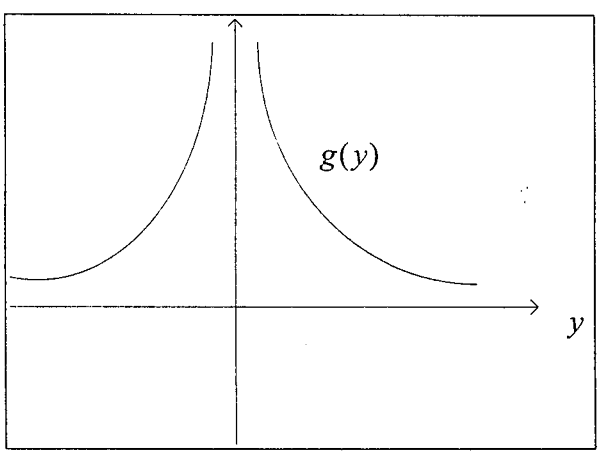
Sonuç olarak integralin çözümü

$$g(y) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\ln y^2, \quad y < 0 \tag{3.4}$$

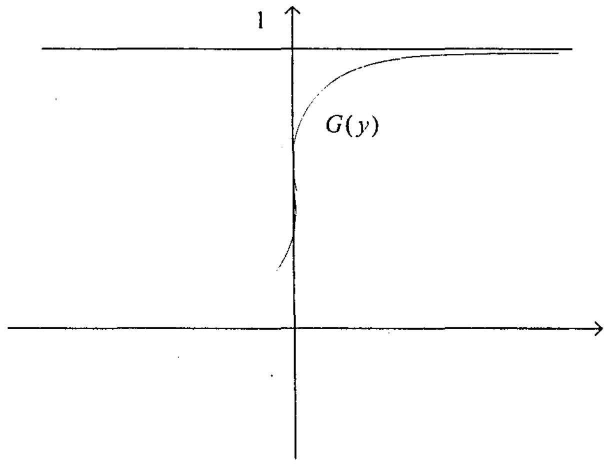
dir. $y > 0$ durumundaki sonucu ile $y < 0$ sonucu aynı çıktı. Yani (3.2) ve (3.4) sonuçları birleştirilerek

$$g(y) = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{y^2-1}\ln y^2, \quad y \in (-\infty,\infty)/\{0\} \tag{3.5}$$

yazılabilir.



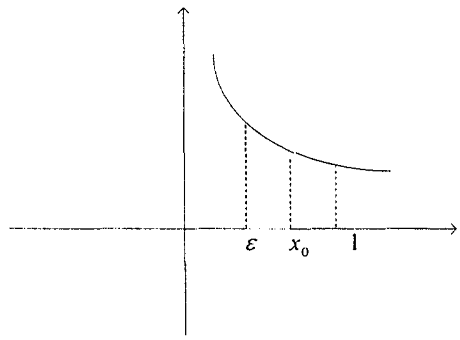
Şekil 3.3: Örnek 3.1.2 de ortaya çıkan yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.4: Örnek 3.1.2 de ortaya çıkan dağılılım fonksiyonunun grafiği

Bu örneğin dağılım fonksiyonunun tanımı ile çözümü sürecine bakılırsa, oldukça uzun karmaşık ve hata yapma olasılığının ne kadar yüksek olduğu görülebilir. Aynı örneğin Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla çözümü bundan sonraki bölümde verilecektir.

Yoğunluk fonksiyonu bulunduktan sonra bulunan bu fonksiyonun pozitifliği ve tanımlandığı bölge üzerinde integralinin yakınsaklığı gösterilmelidir. İntegralin yakınsaklığı aşağıdaki gibi gösterilebilir. Yoğunluk fonksiyonunun süreksizlik noktalarından biri 0 olduğu için 0 civarında yakınsaklık araştırılmalıdır.



Şekil 3.5: Örnek 3.1.3 de ortaya çıkan yoğunluk fonksiyonunun integralinin $x \to 0^+$ yakınsaklığının ispatı ve geometrik tespiti

$x = 0$ küçük civarında sözkonusu integralin yakınsak olduğu aşağıdaki gibi incelenebilir:

$$\int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1} dx = -\int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\ln x^2}{1 - x^2} dx$$

$\varepsilon < x < x_0 < 1$ seçilirse

$$\varepsilon^2 < x^2 < x_0^2,$$

$$-\varepsilon^2 > -x^2 > -x_0^2,$$

$$1 - \varepsilon^2 > 1 - x^2 > 1 - x_0^2,$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2} < \frac{1}{1-x^2} < \frac{1}{1-x_0^2},$$

olur. Böylece

$$\int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1} dx = -\int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\ln x^2}{1 - x^2} dx \leq \frac{2}{1 - x_0^2} \int_{\varepsilon}^{x_0} -\ln x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1-x_0^2}[-x \ln x \,|_{\varepsilon}^{x_0} + \int_{\varepsilon}^{x_0} x \frac{1}{x} dx] \\
&= \frac{2}{1-x_0^2}[-x \ln x \,|_{\varepsilon}^{x_0} + x \,|_{\varepsilon}^{x_0}] \\
&= \frac{2}{1-x_0^2}[-x_0 \ln x_0 + \varepsilon \ln \varepsilon + x_0 - \varepsilon],
\end{aligned}$$

veya

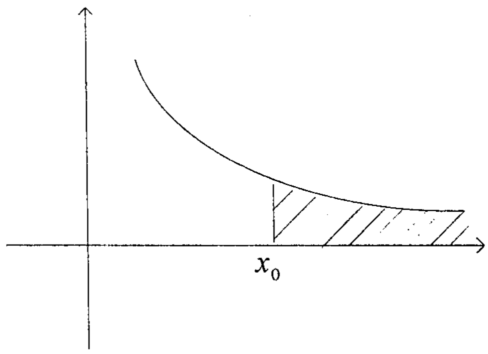
$$\int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\ln x^2}{x^2-1}dx \leq \frac{2}{1-x_0^2}[-x_0 \ln x_0 + x_0 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon],$$

sonuncu eşitsizlikten $\varepsilon \to 0^+$ koşulu altında limit alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{x_0} \frac{\ln x^2}{x^2-1}dx \leq \frac{2}{1-x_0^2}[-x_0 \ln x_0 + x_0] + \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \frac{2}{1-x_0^2}[-x_0 \ln x_0 + x_0]$$

olur. Bu sonuç $\dfrac{\ln x^2}{x^2-1}$ fonksiyonun 0 civarında yakınsak olduğunu gösterir.

Yoğunluk fonksiyonun süreksiz noktalarından diğeri $x = \infty$ dur.



Şekil 3.6: Örnek 3.1.3 de ortaya çıkan yoğunluk fonksiyonunun integralinin $x \to \infty$ yakınsaklığının ispatı ve geometrik tespiti

$$\lim_{N \to \infty} \int_{x_o}^{N} \frac{\ln x^2}{x^2-1}dx$$

limitinin var olduğu ispatlanır ise $\dfrac{\ln x^2}{x^2-1}$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında integralinin yakınsaklığı gösterilmiş olur. [14] de bulunan yöntem uygulanmaktadır.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\ln x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^2}{x^2} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$$

bağlantısı ve

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^2}{x^2} \quad \text{eşitliği} \quad \frac{\ln x^2}{x^2-1} = 0(\frac{\ln x^2}{x^2})$$

olduğunu gösterir.

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\int_{x_0}^{\infty}\frac{\ln x^2}{x^2}dx &= \lim_{N\to\infty}\int_{x_0}^{\infty}2\ln x d(-\frac{1}{x}) \\
&= \lim_{N\to\infty}(-\frac{1}{x})2\ln x\,|_{x_0}^{N}+\lim_{N\to\infty}2\int_{x_0}^{N}\frac{1}{x^2}dx, \\
&= \lim_{N\to\infty}(-\frac{1}{x}2\ln x-\frac{2}{x})\,|_{x_0}^{N} \\
&= \lim_{N\to\infty}(-\frac{1}{N}2\ln N-\frac{2}{N}+\frac{1}{x_0}2\ln x_0-\frac{2}{x_0}) \\
&= \frac{2\ln x_0}{x_0}-\frac{2}{x_0},
\end{aligned}
$$

yada

$$
\lim_{N\to\infty}\int_{x_0}^{N}\frac{\ln x^2}{x^2}dx=\frac{2\ln x_0}{x_0}-\frac{2}{x_0}.
$$

Bu sonuç gösteriyor ki $\int_{x_0}^{\infty}\frac{\ln x^2}{x^2-1}dx$ integrali yakınsaktır.

3.2 Değişken Değiştirme Metoduyla Yoğunluk Fonksiyonunun Bulunması

Önce kesikli rassal değişkenler için sonra ise mutlak sürekli rassal değişkenler için değişken değiştirme metodu incelenecektir.

3.2.1 Kesikli Rassal Değişken İçin Değişken Değiştirme Tekniği

$X_1,...,X_n$ rassal değişkenleri olasılık fonksiyonu $f_{X_1,...X_n}(x_1,...,x_n)$ olan kesikli rassal değişkenler olsun.

$$
A=\{(X_1,...,X_n):\ f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\geq 0\}.
$$

A, X_i'nin her olası sonucunun $n-$boyutlu kümesidir. Farzedelim

$$
Y_1=g_1(X_1,...,X_n),...,Y_k=g_k(X_1,...,X_n)
$$

'nin ortak olasılık fonksiyonu aransın. Burada $k < n$ ise dönüşümün 1-1 olması için yeni

$$Y_{k+1} = g_{k+1}(X_1, ..., X_n), ..., Y_n = g_n(X_1, ..., X_n)$$

değişkenleri tanımlanmalıdır. Böylece $Y_1, ..., Y_n$ değişkenleri tanımlanmış olur.

$$y_1 = g_1(x_1, ..., x_n), ..., y_n = g_n(x_1, ..., x_n)$$

dönüşümü A'dan B'ye 1-1 dönüşüm tanımlıyor ise $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ rassal değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu

$$g(y_1, ..., y_n) = f(g_1^{-1}(y_1, ..., y_n), ..., g_n^{-1}(y_1, ..., y_n)) \tag{3.6}$$

$$B = \{(y_1, ..., y_n) : g(y_1, ..., y_n) \geq 0\}$$

şeklindedir. Buradan hangi rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonu aranıyorsa, diğer değişkenler üzerinden toplam alınarak aranılan değişkenin marjinal olasılık fonksiyonu bulunmuş olur.

Örnek 3.2.2 *X_1, X_2 ortalamaları sırasıyla μ_1, μ_2 olan ve Poisson dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler olsun. X_1, X_2 değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu verilsin:*

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\mu_1^{x_1}\mu_n^{x_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{x_1!x_2!} & x_1 = 0, 1, 2...; x_2 = 0, 1, 2... \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

$Y = X_1 + X_2$ dağılımı aşağıdaki şekilde bulunur.

Çözüm 3.2.2 *X_i $i = 1, 2$ 'lerin her olası sonucunun kümesi*

$$A = \{(x_1, x_2) : x_i = 1, 2, ...; i = 1, 2\}$$

dır. Yeni Y_1, Y_2 değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= X_2 \end{aligned}$$

$$X_1 = Y_1 - Y_2$$
$$X_2 = Y_2$$

$$B = \{(y_1, y_2):\ y_1 = 0, 1, ...; y_2 = 0, 1, ..., y_1\}.$$

(3.6) formülüne göre

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{\mu_1^{y_1-y_2}\mu^{y_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{(y_1-y_2)!y_2!}, & (y_1, y_2) \in B \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan Y_1 'in marginal fonksiyonu

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) \\ &= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!}\sum_{y_2=0}^{y_1}\frac{y_1!}{(y_1-y_2)!y_2!}\mu_1^{y_1-y_2}\mu^{y_2}, \\ &= \frac{(\mu_1+\mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!}, \qquad y = 0, 1, ..., \end{aligned}$$

yani

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{(\mu_1+\mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} & y = 0, 1, ..., \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

dir. Yani $Y_1 = X_1 + X_2$ rassal değişkeni $\mu_1 + \mu_2$ parametreli Poisson dağılımına sahiptir.

3.2.3 Mutlak Sürekli Rassal Değişken İçin Değişken Değiştirme Tekniği

Farzedelim $(X_1, ..., X_n)$ n-boyutlu mutlak sürekli rassal değişkenin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)$ ile verilsin.

$$A = \{(X_1, ..., X_n):\ f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) > 0\}$$

A, X_i, $i = 1, ..., n$ 'nin her olası sonucunun $n-$boyutlu kümesidir.

Farzedelim $Y_1 = g_1(X_1, ..., X_n), ..., Y_k = g_k(X_1, ..., X_n)$ $1 \leq k \leq n$ rassal değişkenlerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{Y_1,...,Y_k}(y_1, ..., y_k)$ araştırılsın. Eğer $k < n$ ise o zaman

$$Y_{k+1} = g_{k+1}(X_1, ..., X_n), ..., Y_n = g_n(X_1, ..., X_n)$$

tane yeni değişken tanımlanmalıdır. Daha sonra $Y_1, ..., Y_n$'nin dağılımı bulunur. Bundan aranılan dağılım olan $Y_1, ..., Y_k$'nin dağılımı yeni değişkenler üzerinden $n-k$ tane integral alınarak elde edilir. Burada yeni değişkenlerin tanımlanması n-boyutlu uzaydan n-boyutlu uzaya bir dönüşüm tanımlanmasını sağlar.

Teorem 3.2.4 *$X_1, ..., X_n$'ler ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu*

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)$$

ile verilen mutlak sürekli rassal değişkenler olsun.

$$A = \{(x_1, ..., x_n) : \ f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) > 0\}.$$

A, X_i, $i = 1, ..., n$'nin her olası sonucunun $n-$boyutlu kümesidir. Farzedelim ki

$$y_1 = g_1(x_1, ..., x_n), ..., y_n = g_n(x_1, ..., x_n)\text{'ler}$$

dönüşümü A_i, $i = 1, ..., m$'den B'ye 1-1 dönüşüm olacak şekilde, A kümesi $A_1, ..., A_m$ kümelerine ayrışabilsin.

$$x_1 = g_{1i}^{-1}(y_1, ..., y_n), ..., x_n = g_{ni}^{-1}(y_1, ..., y_n) \quad i = 1, ..., m$$

B' den A_i $i = 1, ..., m$'ye ters dönüşümü göstersin.

$$J_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_{1i}^{-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_{2i}^{-1}}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_{ni}^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad i = 1, ..., m \text{ için}$$

determinantındaki tüm kısmi türevler B üzerinde sürekli olmanın yanısıra $J_i \neq 0$, $i = 1, ..., m$ olsun. O zaman $Y_1, ..., Y_n$ rassal değişkenlerin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Y_1,...,Y_n}(y_1, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{m} |J_i| \, f_{X_1,...,X_n}(g_{1i}^{-1}(y_1, ..., y_n), ..., g_{ni}^{-1}(y_1, ..., y_n)) \quad (3.7)$$
$$(y_1, ..., y_n) \in B.$$

şeklinde bulunur.

Kanıt. Eğer $(X_1, ..., X_n) \in A$ ise

$$P\{(X_1, ..., X_n) \in A\} = \int \cdots \int_A f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

yazılabilir. A_i kümeleri ayrık olduklarından

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A \text{ ve } A_i \bigcap A_j = 0, \; i \neq j$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} P\{(X_1, ..., X_n) \in A\} &= \int \cdots \int_{\bigcup_{i=1}^{m} A_i} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{m} \int \cdots \int_{A_i} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n \\ &= \int \cdots \int_B \sum_{i=1}^{m} f_{X_1,...,X_n}(g_{1i}^{-1}(y_1, ..., y_n), ..., g_{ni}^{-1}(y_1, ..., y_n)) \\ &\quad \times |J_i| \, dy_1 ... dy_n \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{X_1,...,X_n}(g_{1i}^{-1}(y_1, ..., y_n), ..., g_{ni}^{-1}(y_1, ..., y_n)) \, |J_i| \, . \quad (3.8)$$

(3.8) eşitliğine $g(y_1, ..., y_n)$ karşılık getirilirse

$$g(y_1, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{m} f_{X_1,...,X_n}(g_{1i}^{-1}(y_1, ..., y_n), ..., g_{ni}^{-1}(y_1, ..., y_n)) \, |J_i| \, .$$

Burada $g(y_1, ...y_n)dy_1...dy_n$ ifadesi $(y_1, ...y_n)$ noktasının sonsuz küçük olan $dy_1...dy_n$ hacmine ait olma olasılığıdır. Bu durumda $dy_1...dy_n$ sonsuz küçük hacim olduğu için $Y_1, ..., Y_n$ dağılımının yoğunluk fonksiyonu (3.7) formülüyle ifade edilmiş olur. ∎

Örnek 3.2.5 *U ve V yoğunlukları f_u ve f_v olan*

$$U \sim gamma(m,\lambda),\ V \sim gamma(n,\lambda)$$

gamma dağılmış bağımsız rassal değişkenler olsun.

$$Y = \frac{U}{U+V}$$

rassal değişkeni $B(m,n)$ dağılımına sahip olduğu gösterilebilir.

Çözüm 3.2.5 *U ve V bağımsız rassal değişkenlerinin o.y.f.*

$$f(u,v) = f(u)f(v)$$

dir.

$$A\{(u,v) : 0 < u < \infty,\ 0 < v < \infty\}$$

Değişken değiştirme metodunu uygulamak için yeni bir Z değişkenini tanımlanmalıdır.

$$Y = \frac{U}{U+V},\ Z = V$$
$$U = \frac{YZ}{1-Y},\ V = Z$$
$$B = \{(y,z) : 0 < y < \infty,\ 0 < z < \infty\}.$$

Dönüşümün Jacobiyeni

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{z}{(1-y)^2} & \dfrac{y}{1-y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z}{(1-y)^2}$$

şeklindedir. Teorem 3.7 uygulanarak yeni Y, Z değişkenlerinin o.y.f. aşağıdaki gibi bulunur:

$$f(y,z) = f(\frac{yz}{1-y}, z).\frac{z}{(1-y)^2},$$

yada

$$f(y,z) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}(\frac{yz}{1-y})^{m-1}e^{-\frac{\lambda yz}{1-y}}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}z^{n-1}e^{-\lambda z}\frac{z}{(1-y)^2}$$

ortak yoğunluk fonksiyonundan Y değişkeninin yoğunluk fonksiyonu bilinen kuralla alınabilir.

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^\infty \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\left(\frac{yz}{1-y}\right)^{m-1} e^{-\frac{\lambda yz}{1-y}} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\lambda z} \frac{z}{(1-y)^2} dz \\ &= \frac{\lambda^m \lambda^n y^{m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)(1-y)^{m+1}} \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-\lambda(1+\frac{y}{1-y})z} dz. \end{aligned}$$

Buradan

$$c = \frac{\lambda^m \lambda^n y^{m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)(1-y)^{m+1}}, \lambda(1+\frac{y}{1-y})z = u$$

denilerek,

$$\lambda(1+\frac{y}{1-y})dz = du$$

bulunur. Bu değerler $f(y)$'de bulunan integralde yerine yazılırsa

$$f(y) = c \int_0^\infty \frac{u^{m+n-1} e^{-u}}{\lambda^{m+n-1}(1+\frac{y}{1-y})^{m+n-1}} \frac{du}{\lambda(1+\frac{y}{1-y})}$$

$$\begin{aligned} &= c \frac{\Gamma(m+n)}{\lambda^{m+n}\frac{1}{y^{m+n}}} \\ &= \frac{\lambda^m \lambda^n y^{m-1}}{\Gamma(m)\Gamma(n)(1-y)^{m+1}} \frac{\Gamma(m+n)}{\lambda^{m+n}\frac{1}{y^{m+n}}}, \end{aligned}$$

yada

$$f(y) == \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} y^{m-1}(1-y)^{n-1} \quad 0 < y < 1.$$

Sonuç olarak Y rassal değişkenin $B(m,n)$ dağılımına sahip olduğu görülür.

4 DIRAC DELTA GENELLEŞMİŞ FONKSİYONU METODU

Bu bölümde Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla dönüştürülmüş kesikli ve sürekli tipte rassal değişkenlerin dağılımları için bu çalışmanında odak noktası olan metot verilmiş ve problemler üzerinde uygulamaları yapılmıştır.

4.1 Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu Yardımıyla Dönüştürülmüş Kesikli Rassal Değişkenlerin Dağılımları

Teorem 4.1.1 *X_i, $i = 1, ..., n$ ortak olasılık dağılım fonksiyonu $f(x_1, ..., x_n)$ olan kesikli rassal değişkenler olsun. A, X_i'nin her olası sonucunun n-boyutlu kümesi olsun.*

$$Y = u(X_1, X_2, ..., X_n)$$

rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) \\ &= P(\varphi(X_1, ..., X_n) < y) \\ &= \sum_{(x_1,...,x_n)\in A} f(x_1, ..., x_n) H(y - \varphi(x_1, ..., x_n)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada H tanımı aşağıda verilen Heaviside genelleşmiş fonksiyonudur.

$$H(y - \varphi(x_1, ..., x_n)) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } y - \varphi(x_1, ..., x_n) > 0 \\ 0, & \text{eğer } y - \varphi(x_1, ..., x_n) < 0. \end{cases}$$

Teorem 4.1.2 *X_i, $i = 1, ..., n$ ortak olasılık dağılım fonksiyonu $f(x_1, ..., x_n)$ olan kesikli rassal değişkenler olsun. A, X_i'nin her olası sonucunun n-boyutlu kümesi olsun.*

$$Y = u(X_1, X_2, ..., X_n)$$

rassal değişkeninin genelleşmiş olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \sum_{(x_1,...,x_n)\in A} f(x_1,...,x_n)H'(y-\varphi(x_1,...,x_n)) \\ &= \sum_{(x_1,...,x_n)\in A} f(x_1,...,x_n)\delta(y-\varphi(x_1,...,x_n)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

Not: Burada $G(y)$ bilinen anlamda diferansiyellenemez ancak genelleşmiş fonksiyon anlamında diferansiyellenebilir (bakınız, bölüm 2.5.3). Bunun için (4.2) formülü genelleşmiş fonksiyonları kullanarak genelleşmiş bir fonksiyon ifade eder.

Örnek 4.1.3 *X, Y ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen kesikli rassal değişkenler olsun.*

$$f(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } i+j<7,\ i,j=1,...,6 \\ \frac{1}{6}, & \text{eğer } i+j=7,\ i,j=1,...,6 \end{cases}$$

$Z = X + Y$ rassal değişkeninin dağılımını Dirac delta genelleşmiş fonksiyon yardımıyla bulunabilir.

Çözüm 4.1.3 *teorem 4.1.1 deki (4.1)' formülüne göre $Z = X+Y$ 'nin dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.*

$$\begin{aligned} G(z) &= P(Z<z) = P(X+Y<z) \\ &= \sum_{i,j=1}^{6} f(x_i,y_j)H(z-(x_i+y_j)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{eğer } z<7 \\ 1, & \text{eğer } z>7 \end{cases} \\ &= H(z-7). \end{aligned}$$

Formül (4.2)' ye göre de Z değişkeninin yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

$$\begin{aligned} g(z) &= G'(z) \\ &= H'(z-7) \\ &= \delta(z-7). \end{aligned}$$

Örnek 4.1.4 *örnek 4.1.3'ün koşulları gözönüne alınarak, $Z = X^2 + Y$ rassal değişkeninin dağılımı bulunabilir.*

Çözüm 4.1.4 *Teorem 4.1.1'e göre, $Z = X^2 + Y$ rassal değişkeninin dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.*

$$\begin{aligned} G(z) &= P(Z < z) = P(X^2 + Y < z) \\ &= \sum_{i,j=1}^{6} f(x_i, y_j) H(z - (x_i^2 + y_j)) \\ &= f(1,6)H(z - (1^2 + 6)) \\ &\quad + f(2,5)H(z - (2^2 + 5)) \\ &\quad + f(3,4)H(z - (3^2 + 4)) \\ &\quad + f(4,3)H(z - (4^2 + 3)) \\ &\quad + f(5,2)H(z - (5^2 + 2)) \\ &\quad + f(6,1)H(z - (6^2 + 1)) \\ &= \frac{1}{6}H(z-7) + \frac{1}{6}H(z-9) \\ &\quad + \frac{1}{6}H(z-13) + \frac{1}{6}H(z-19) \\ &\quad + \frac{1}{6}H(z-27) + \frac{1}{6}H(z-37). \end{aligned}$$

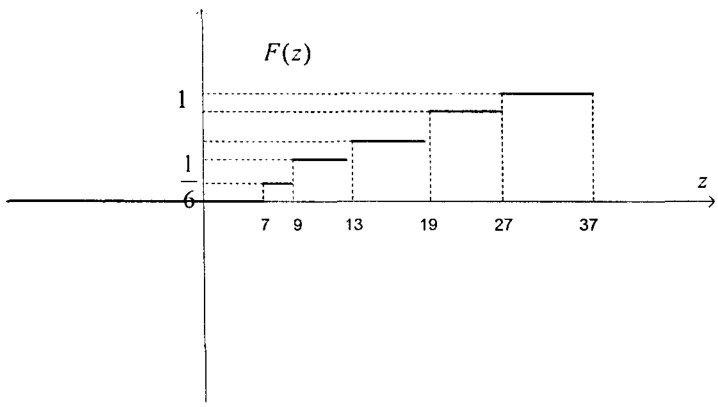
Teorem 4.1.2'i kullanılarak, Z değişkeninin yoğunluğu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} g(z) &= G'(z) \\ &= \frac{1}{6}H'(z-7) + \frac{1}{6}H'(z-9) \\ &+ \frac{1}{6}H'(z-13) + \frac{1}{6}H'(z-19) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{6}H'(z-27)+\frac{1}{6}H'(z-37),$$

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{6}\{\delta(z-7)+\delta(z-9) \\ &+\delta(z-13)+\delta(z-19) \\ &+\delta(z-27)+\delta(z-37)\}. \end{aligned}$$

Z rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonunun grafiği şekil 4.1'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1: Örnek 4.1.4 de ortaya çıkan dağılım fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.1.5 *$X_1, X_2, ..., X_n$ ortalamaları sırasıyla $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ olan ve Poisson dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler olsun. $X_1, X_2, ..., X_n$ değişkenlerinin ortak olasılık dağılım fonksiyonu verilsin.*

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=\begin{cases} \dfrac{\mu_1^{x_1}...\mu_n^{x_n}e^{-(\mu_1+...+\mu_n)}}{x_1!...x_n!} & x_1=0,1,2...;...;x_n=0,1,2... \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

$Y = X_1 + ... + X_n$ dağılımı nedir?

Çözüm 4.1.5 $\varphi(X_1,...,X_n) = X_1 + ... + X_n$ *şeklinde düşünülüp*

$$A=\{(x_1,x_2,...x_n):x_i=0,1,2...i=1,...,n\}$$

A, X_i'lerin her olası sonucunun n-boyutlu kümesidir. Teorem 4.1.1'in $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ *şeklinde tanımlanırken özel hali uygulandığında aşağıdaki gibi olur:*

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y = y) \\ &= P(\varphi(X_1, ..., X_n) = y) \\ &= \sum_{(x_1,...,x_n)\in A} f(x_1, ..., x_n) H(y - \varphi(x_1, ..., x_n)), \\ &= \sum_{(x_1,...,x_n)\in A} \frac{\mu_1^{x_1} ... \mu_n^{x_n} e^{-(\mu_1+...+\mu_n)}}{x_1!...x_n!} H(y - (x_1 + ... + x_n)), \\ &= \sum_{x_1+...+x_n=y} \frac{\mu_1^{x_1} ... \mu_n^{x_n} e^{-(\mu_1+...+\mu_n)}}{x_1!...x_n!} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1+...+\mu_n)}}{y!} \sum_{x_1+...+x_n=y} \frac{y! \mu_1^{x_1} ... \mu_n^{x_n}}{x_1!...x_n!} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1+...+\mu_n)} (\mu_1 + ... + \mu_n)^y}{y!} \qquad y = 0, 1, 2, \\ & ... \end{aligned}$$

$$G(y) = \frac{e^{-(\mu_1+...+\mu_n)} (\mu_1 + ... + \mu_n)^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, ...$$

bulunur. Burada

$$(\mu_1 + ... + \mu_n)^y = \sum_{(x_1+...+x_n)=y} \frac{y! \mu_1^{x_1} ... \mu_n^{x_n}}{x_1!...x_n!}$$

binomial toplam özelliği kullanılmıştır.

4.2 Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu Yardımıyla Dönüştürülmüş Mutlak Sürekli Rassal Değişkenlerin Dağılımı

Teorem 4.2.1 *X_i, $(i = 1, ..., n)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, ..., x_n)$ ile verilen n sayıda mutlak sürekli rassal değişkenler olsun. A, X_i'lerin her olası sonucunun n-boyutlu kümesi olsun. Rassal değişken*

$$Y = u(X_1, ..., X_n)$$

'nin olasılık dağılımı

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) = P(\varphi(X_1, ..., X_n) < y) \\ &= \int \cdots \int_{D(y)} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n \\ &= \int \cdots \int_{A} f(x_1, ..., x_n) H(y - \varphi(x_1, ..., x_n)) dx_1 ... dx_n, \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde verilir. Burada

$$D(y) = \{(x_1, ..., x_n) \in A : \varphi(x_1, ..., x_n) < y\}$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.2 *X_i, $(i = 1, ..., n)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, ..., x_n)$ ile verilen n sayıda mutlak sürekli rassal değişkenler olsun. A, X_i'lerin her olası sonucunun n-boyutlu kümesi olsun. Rassal değişken*

$$Y = \varphi(X_1, ..., X_n)$$

'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \int \cdots \int_{A} f(x_1, ..., x_n) \delta(y - \varphi(x_1, ..., x_n)) dx_1 ... dx_n \end{aligned} \tag{4.4}$$

formülü ile verilir.

Kanıt. Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu arasında $H'(t) = \delta(t)$ ilişkisi gözönüne alındığında

$$H'(y - \varphi(x_1, ...x_n)) = \delta(y - \varphi(x_1, ...x_n))$$

ve (4.4) formülünün (4.3)'ün doğal sonucu olması görülür. ■

Teorem 4.2.3 *X ve Y sırasıyla $\mathcal{X}^2_{(m)}$ ve $\mathcal{X}^2_{(n)}$ $\mathcal{X}^2$ dağılımına sahip bağımsız rassal değişkenler olsun.*

$$Z = (X/m) \ / \ (Y/n).$$

Bu durumda Z değişkeni serbestlik derecesi m ve n olan f-dağılımıdır.

Kanıt. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu kullanılarak teoremin ispatı aşağıdaki gibi verilebilir.

X ve Y bağımsız rassal değişkenlerinin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}$$

şeklindedir.

$$A = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$$

$$D(y) = \{(x,y) \in A,\ \frac{nx}{my} < y\}$$

kümeleri tanımlanır. Teorem 4.2.2 ve (4.4) formülü kullanılarak

$$g(z) = G'(z) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\delta[\frac{nx}{my} - z]dxdy,$$

$$g(z) = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}\ \delta(\frac{nx}{my} - z)\ dxdy$$

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun 2. ve 3. özellikleri gözönüne alındığında

$$\delta(\frac{nx}{my} - z) = \delta[\frac{n}{my}(x - \frac{myz}{n})],$$

$$g(z) = \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty \frac{my}{n} e^{-\frac{myz}{2n}} (\frac{myz}{n})^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} dy$$

yazılır. İntegralde $u = \frac{mz+n}{2n}y$ şeklinde değişken değiştirildiğinde $du = (\frac{mz+n}{2n})dy$ ve $g(z)$ aşağıdaki forma dönüşür.

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{24}-1}(\frac{2n}{mz+n})^{\frac{m+n}{2}}\int_0^\infty u^{\frac{n+m}{2}-1} e^{-u}du \\ &= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(mz+n)^{\frac{m+n}{2}}} \end{aligned}$$

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}(1+\frac{mz}{n})^{-\frac{m+n}{2}}, & z>0\\ 0, & \text{d. d.}\end{cases}$$

Buradan $g(z)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip Z rassal değişkeni m ve n serbestlik dereceli f dağılımıdır. ■

Teorem 4.2.4 *U ve V yoğunlukları f_u ve f_v olan $U \sim gamma(m,\lambda)$, $V \sim gamma(n,\lambda)$ gamma dağılmış bağımsız rassal değişkenler olsun. Bu durumda*

$$Y=\frac{U}{U+V}$$

rassal değişkeni $B(m,n)$ dağılımına sahiptir.

Kanıt. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla teoremin ispatı aşağıdaki gibidir. Bu ispat [15] de verilmiştir.
U ve V bağımsız rassal değişkenlerinin o.y.f.

$$f(u,v)=f(u)f(v)$$

şeklindedir. Y rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonunu bulmak için U, V rassal değişkenlrinden yola çıkarak

$$A\{(u,v):0<u<\infty,\ 0<v<\infty\}.$$

$$D(y)=\{(u,v)\in A:\frac{U}{U+V}<y\}$$

gibi kümeler tanımlanır. Y'nin yoğunluk fonksiyonunu bulmak için teorem 4.2.2 uygulandığında

$$f(y)=\iint_A f_u(u)f_v(v)\delta[\frac{u}{u+v}-y]dudv$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty f_u(u)f_v(v)\delta[\frac{u}{u+v}-y]dudv$$

ifadesi bulunur. $g(y) = \dfrac{u}{u+v}$ denilirse, $g(y) = 0 \Rightarrow v = \dfrac{u(1-y)}{y}$. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun 4. özelliği kullanılarak,

$$\delta[\frac{u}{u+v} - y] = \delta[g(v)] = \frac{1}{\left|g'[\frac{u(1-y)}{y}]\right|}\delta[v - \frac{u(1-y)}{y}]$$

yazılabilir. Buradan

$$g'(v) = -\frac{u}{(u+v)^2}, \quad g'[\frac{u(1-y)}{y}] = -\frac{y^2}{u}.$$

Böylece

$$\delta[g(v)] = \frac{u}{y^2}\delta[v - \frac{u(1-y)}{y}]. \tag{4.5}$$

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonun 2. özelliği ve (4.5) eşitliği $f(y)$'nin ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_u(u) f_v(v)\delta[g(v)]dudv \\ &= \frac{1}{y^2}\int_0^\infty u f_u(u) f_v[\frac{u(1-y)}{y}]du \qquad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{y^2}\int_0^\infty u\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}u^{m-1}e^{-\lambda u}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\left[\frac{u(1-y)}{y}\right]^{n-1} e^{-\lambda\left[\frac{u(1-y)}{y}\right]}du \\ &= \frac{\lambda^m\lambda^n}{\Gamma(m)\Gamma(n)}(\frac{1}{y^2})(1-y)^{n-1}\int_0^\infty u^m(\frac{u}{y})^{n-1}e^{-\frac{\lambda u}{y}}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)}y^{m-1}(1-y)^{n-1}\int_0^\infty (\frac{\lambda u}{y})^{m+n-1}e^{-\frac{\lambda u}{y}}d(-\frac{\lambda u}{y}) \\ &= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}y^{m-1}(1-y)^{n-1}, \end{aligned}$$

yada

$$f(y) == \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}y^{m-1}(1-y)^{n-1} \quad 0 < y < 1$$

olduğu bulunur. Sonuç olarak $f(y)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip Y rassal değişkeni $B(m,n)$ dağılımına sahiptir. ∎

Örnek 4.2.5 *(Uniform rassal değişkenlerin toplamı)* X_i $(i = 1, ..., n)$ *ortalamaları* $\mu = \frac{1}{2}$ *olan* $U(0,1)$ *dağılmış rassal değişkenler olsun.*

$$Y_n = X_1 + ... + X_n \tag{4.6}$$

Y_n *rassal değişkeninin dağılımı aşağıdaki gibidir.*

Çözüm 4.2.5 $Y_n = X_1 + ... + X_n$*'nin dağılımı Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla yani (4.4) formülü ve tümevarım metodu ile aşağıdaki gibi bulunur. Bu çözüm [15] de verilmiştir. İlk olarak n=2 için*

$$X_1 \sim U(0,1), \; X_2 \sim U(0,1) \text{ ve } f_{X_i}(x) = 1 \quad 0 < x < 1, \; i = 1,2$$

olduğunda

$$A\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, \; 0 < x_2 < 1\}$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

rassal değişkeninin dağılımı için

$$A\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, \; 0 < x_2 < 1\}$$

kümesi tanımlanarak teorem 4.2.2 uygulanır.

$$f_{Y_2}(y) = \iint_A f_{X_1}(x_1) \; f_{X_2}(x_2)\delta[x_1 + x_2 - y]dx_1dx_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f_{X_1}(x_1) \; f_{X_2}(x_2)\delta[x_1 + x_2 - y]dx_1dx_2$$

veya

$$f_{Y_2}(y) = \int_0^1 \int_0^1 f_{X_1}(x_1) \; f_{X_2}(x_2)\delta[x_2 - (y - x_1)]dx_2dx_1.$$

Çift katlı integral tekrar integrallere dönüştürüldüğünde

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y) &= \int_0^1 f_{X_1}(x_1)\{\int_0^1 f_{X_2}(x_2)\delta[x_2 - (y - x_1)]dx_2\}dx_1 \\ &= \int_0^1 f_{X_1}(x_1) \; f_{X_2}(y - x_1)dx_1 = \int_0^1 f_{X_2}(y - x_1)dx_1, \end{aligned}$$

veya

$$f_{Y_2}(y) = \int_0^1 f_{X_2}(y - x_1)dx_1$$

olur. Sonuncu integralde $y - x_1 = x$ denilirse, $-dx_1 = dx$ olur. İntegralin sınırları $x_1 = 0$ için $x = y$; $x_1 = 1$ için $x = y - 1$ olacaktır. Bu durumda

$$f_{Y_2}(y) = -\int_y^{y-1} f_{X_2}(x)dx = \int_{y-1}^{y} f_{X_2}(x)dx$$

olur. Sonuncu formülde $f_{X_2}(x) = 1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_{Y_2} = \begin{cases} \int_0^y dx & 0 < y < 1 \\ \int_{y-1}^{1} dx & 1 < y < 2, \end{cases}$$

yada

$$f_{Y_2} = \begin{cases} y & 0 < y < 1 \\ 2 - y & 1 < y < 2 \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. Yani $n = 2$ olduğunda $Y_2 = X_1 + X_2$ nin yoğunluk fonksiyonu bulunmuş olur.

Tümevarım metoduna dayalı olarak, $Y_{k-1} = X_1 + X_2 + ... + X_{k-1}$ rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Y_{k-1}}(y) = \begin{cases} \int_0^y f_{Y_{k-2}}(x)dx & 0 < y < 1 \\ \int_{y-1}^{j-1} f_{Y_{k-2}}(x)dx + \int_{j-1}^{y} f_{Y_{k-2}}(x)dx & j - 1 < y < j,\ j = 2, ..., k-2 \\ \int_{y-1}^{k-1} f_{Y_{k-2}}(x)dx & k - 2 < y < k - 1 \end{cases}$$

olduğunu kabul ederek, $n = k$ için, $Y_k = X_1 + X_2 + ... + X_k = Y_{k-1} + X_k$ rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu teorem 4.2.2 uygulandığında aşağıdaki gibi bulunur:

$$f_{Y_k}(y) = \int_0^1 \int_0^{k-1} f_{Y_{k-1}}(y_{k-1}) f_{X_k}(x_k)\delta[y_{k-1} + x_k - y]dy_{k-1}dx_k$$

$$= \int_0^1 f_{X_k}(x_k) \int_0^{k-1} f_{Y_{k-1}}(y_{k-1})\delta[y_{k-1} - (y - x_k)]dy_{k-1}dx_k,$$

veya

$$f_{Y_k}(y) = \int_0^1 f_{Y_{k-1}}(y - x_k)dx_k, \tag{4.7}$$

sonuncu integralde $x = y - x_k$ *değişken değiştirmesi yapılırsa,* $dx = -dx_k$ *;* $x_k = 0$ *için* $x = y$ *ve* $x_k = 1$ *için* $x = y - 1$ *olur. Ve böylece (4.7) aşağıdaki forma dönüşür.*

$$f_{Y_k}(y) = -\int_y^{y-1} f_{Y_{k-1}}(x)dx = \int_{y-1}^{y} f_{Y_{k-1}}(x)dx,$$

veya

$$f_{Y_k}(y) = \begin{cases} \int_0^y f_{Y_{k-1}}(x)dx & 0 < y < 1 \\ \int_{y-1}^{j-1} f_{Y_{k-1}}(x)dx + \int_{j-1}^{y} f_{Y_{k-1}}(x)dx & j-1 < y < j,\ j = 2, ..., k-1 \\ \int_{y-1}^{k} f_{Y_{k-1}}(x)dx & k-1 < y < k \end{cases} \tag{4.8}$$

Y_k*'nın yoğunluk fonksiyonu bulunur. Tümevarım metodu gözönüne alınırsa, (4.8) formülü istenilen* k *için* $f_{Y_k}(y)$ *dağılımını bulma olanağı sağlar.*

Bu formülden sonuç olarak, örneğin n=4 için formül (4.8) kullanılarak, 4 değişkenin toplamının dağılımı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$f_{Y_4}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3!}y^3 & 0 < y < 1 \\ -(1-y) + \frac{2(1-y)^3}{3!} + \frac{(2-y)^3}{3!} & 1 < y < 2 \\ (3-y) - \frac{(2-y)^3}{3!} - \frac{2(3-y)^3}{3!} & 2 < y < 3 \\ \frac{(4-y)^3}{3!} & 3 < y < 4. \end{cases}$$

Örnek 4.2.6 *(İki Couchy rassal değişkenin oranının dağılımı). X_1 ve X_2*

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i = 1, 2$$

bağımsız Couchy rassal değişkenleri olsun.

$$Y = \frac{X_1}{X_2}$$

rassal değişkeninin dağılımı istenmektedir.

Çözüm 4.2.6 *Teorem 4.2.2 uygulandığında,*

$$A = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \ -\infty < x_2 < \infty\};$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \delta[\frac{x_1}{x_2} - y] dx_1 dx_2, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) \left|x_2\right| \delta[x_1 - yx_2] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonun 2. özelliği uygulanırsa

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x_2\right| f_{X_2}(x_2) f_{X_1}(yx_2) dx_2$$

bulunur. Sonuncu integralde kolaylık sağlamak amacıyla x_2 yerine x yazarak ve $f_{X_1}(x)$, $f_{X_2}(x)$ verilmiş değerlerinen faydalanarak

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+x^2y^2} dx,$$

veya

$$f_Y(y) = \frac{-2\ln|y|}{\pi(1-y^2)} = \frac{2\ln|y|}{\pi(y^2-1)}, \quad y \in (-\infty, \infty) \backslash \{0\}$$

Y' nin dağılımı bulunmuş olur.

Bu örnek 2.bölümde dağılımın tanımı kullanılarak çözülmüştü. Bu iki çözüm karşılaştırıldığında Dirac delta fonksiyonu yardımıyla yapılan çözümün çok daha kolay uygulanabilir ve daha güçlü olduğu sonucuna ulaşılabilir. Ayrıca yapılan işlemlere şöyle bir bakıldığında hata yapma riskinin bu metotla ne kadar az olduğu kolayca görülebilir.

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla dönüştürülmüş rassal değişkenlerin yoğunluk fonksiyonunun bulunmasına ait başka bir teorem ispatlayalım.

Teorem 4.2.7 *Farzedilsin ki X_i, $i = 1, ..., n$ $N(0,1)$ dağılmış bağımsız rassal değişkenler olsun. X_i'nin $i = 1, ..., n$ o.y.f.*

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad i = 1, ..., n; \ -\infty < x < \infty$$

olduğu verilmektedir. Bu durumda $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$'nin yoğunluk fonksiyonu serbestlik derecesi n olan χ^2 dağılımıdır.

Kanıt. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla teoremin ispatı aşağıdaki gibidir. Bu ispat [15] de verilmiştir.
İlk olarak n=2 için başlanır.

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2$$

$$A = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \ -\infty < x_2 < \infty\}$$

$$D(y) = \{(x_1, x_2) \in A, \ X_1^2 + X_2^2 < y\}$$

Y_2 değişkeni için Teorem 4.2.2 uygulanırsa,

$$f_{Y_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(x) \delta[x_1^2 + x_2^2 - y] dx_1 dx_2 \tag{4.9}$$

bulunur. (4.9) integralinde Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun 4. özelliğini uygulamak için

$$g(x_1) = x_1^2 + x_2^2 - y$$

fonksiyonu gözönüne alınırsa, $g(x_1)$'in kökleri $x_{1,2} = \pm\sqrt{y - x_2^2}$ olduğu bulunur.

$$\frac{\partial g(x_1)}{\delta x_1} = g'(x_1) = 2x_1, \; g'(x_1) = \pm 2\sqrt{2 - x_2^2}.$$

$x_1 \neq 0$ için $g'(x_1)$ vardır. Ve bu nedenle (4.9) eşitliğinde Dirac delta genelleşmiş fonksiyonun sırayla 4. ve 2. özelliği uygulanabilir. Delta fonksiyonunun özelliklerinden yola çıkarak integral hesaplanır:

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_2(x_2)\frac{1}{2\sqrt{y - x_2^2}}\{\delta[x_1 - \sqrt{y - x_2^2}] + \\ &+\delta[x_1 + \sqrt{y - x_2^2}]\} \times dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

$\sqrt{y - x_2^2}$ fonksiyonu $y - x_2^2 \geq 0$ da tanımlı olduğu için x_2 kökü

$$\sqrt{y} \geq x_2 \geq -\sqrt{y}$$

eşitsizliğini sağlar ve sonuncu integral aşağıdaki integrale dönüşür.

$$f_{Y_2}(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{f_{X_2}(x_2)}{2\sqrt{y - x_2^2}}\{f_{X_1}(\sqrt{y - x_2^2}) + f_{X_1}(-\sqrt{y - x_2^2})\} dx_2.$$

X_1 ve X_2 normal dağılıma sahip bağımsız rassal değişkenler olduğu için

$$f_{X_1}(\sqrt{y - x_2^2}) = f_{X_1}(-\sqrt{y - x_2^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - x_2^2)}{2}},$$

$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}}$$

dir. Bulunmuş bu sonuçları $f_{Y_2}(y)$'nin ifadesinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{e^{-\frac{y}{2}} dx_2}{2\pi\sqrt{y - x_2^2}} = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dx_2}{\sqrt{y - x_2}}, \\ &= \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\pi}\{\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{y}}\} = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2} \end{aligned}$$

olur. Bu sonuç

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2$$

rassal değişkeninin

$$f_{Y_2}(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, \quad 0 < y < \infty$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu anlamına gelir. Yani $f_{Y_2}(y)$ serbestlik derecesi 2 olan χ^2 dağılımına sahiptir.

Şimdi tümevarım metodunu uygulamak amacıyla $Y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$ rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonunun

$$f_{Y_{n-1}}(y) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n-1}{2}-1} \quad 0 < y < \infty$$

olduğu varsayılarak

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

veya

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 + X_n^2 = Y_{n-1} + X_n^2$$

rassal değişkeninin dağılımı için

$$f_{Y_n}(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \quad 0 < y < \infty$$

olduğu gösterilmelidir. Y_{n-1} ve X_n nin dağılımları belli bağımsız rassal değişkenler oldukları için Teorem 4.2.2 tekrar uygulanarak

$$\begin{aligned}
f_{Y_n}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f_{X_n}(x_n) f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) \delta[y_{n-1} + x_n^2 - y] dy_{n-1} dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_n}(x_n) \int_{0}^{\infty} f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) \delta[y_{n-1} - (y - x_n^2)] dy_{n-1} dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_n}(x_n) f_{Y_{n-1}}(y - x_n^2) dx_n,
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_n^2} (\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y-x_n^2}{2}} (y-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} dx_n,$$

$$= \frac{2\,(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{0}^{\sqrt{y}} (y-x_n)^{\frac{n-1}{2}-1} dx_n,$$

$$= \frac{2\,(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{y^{\frac{n}{2}-1} B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})}{2},$$

veya

$$f_{Y_n}(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad 0 < y < \infty$$

olması sonucuna varılır. Bu ise Y_n'nin dağılımının serbestlik derecesi n olan χ^2 olduğunu gösterir. ∎

Teorem 4.2.8 *X_1 ve X_2 dağılımları $f_{X_1}(.)$ ve $f_{X_2}(.)$ olan bağımsız rassal değişkenler olsun. Bu durumda*

$$Y = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2}$$

rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \frac{2}{(1-y)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| \; f_{X_2}(x_2) f_{X_1}(x_2(\frac{1+y}{1-y}))dx_2$$

şeklindedir.

Kanıt. Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla teoremin ispatı aşağıdaki gibi yapılır. Burada ilk dikkat edilecek husus

$$\delta[g(x_1)] = \delta[\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} - y]$$

şeklinde $g(x_1)$ düşünülüp, Dirac delta genelleşmiş fonksiyonun 4. özelliğini uygulamak olacaktır. $g(x_1) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} - y$ ve $g(.)$'in tek kökü

$$x_1 = x_2(\frac{1+y}{1-y})$$

ve

$$g'(x_2(\frac{1+y}{1-y})) = \frac{(1-y)^2}{2x_2}$$

dir. Sonuç olarak Dirac delta genelleşmiş fonksiyonun 4.,3. ve 2. özellikleri sırayla uygulandığında $\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}$'in dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\delta[\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}-y]dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\frac{2\,|x_2|}{(1-y)^2}\delta[x_1-x_2(\frac{1+y}{1-y})]dx_1dx_2 \\
&= \frac{2}{(1-y)^2}\int_{-\infty}^{\infty} |x_2|\ f_{X_2}(x_2)f_{X_1}(x_2(\frac{1+y}{1-y}))dx_2, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

yani

$$f_Y(y) = \frac{2}{(1-y)^2}\int_{-\infty}^{\infty} |x_2|\ f_{X_2}(x_2)f_{X_1}(x_2(\frac{1+y}{1-y}))dx_2 \qquad (4.11)$$

dir. ■

Teorem 4.2.8 in uygulaması olarak herhangi formda bağımsız X_1 ve X_2 rassal değişkenleri için

$$Y = \frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}$$

nin dağılımı bulunabilir. Farzedilsin ki X_1 ve X_2'i normal dağılıma sahip bağımsız rassal değişkenler olsun. Formül(4.11) kullanılarak, $Y = \frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}$'nin dağılımı kolayca elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{2}{(1-y)^2}\int_{-\infty}^{\infty} |x_2|\, f_{X_2}(x_2)f_{X_1}(x_2(\frac{1+y}{1-y}))dx_2 \\
&= \frac{1}{(1-y)^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |x_2|\, e^{-\frac{1}{2}x_2^2(\frac{2(1+y^2)}{(1-y)^2})}dx_2
\end{aligned}$$

$f_Y(y)$'nin ifadesinde $\sigma^2(y) = \frac{(1-y)^2}{2(1+y^2)}$ sembolü kullanılır.

$$f_Y(y) = \frac{1}{(1-y)\sqrt{\pi(1+y^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} |x_2|\,\frac{1}{\sigma(y)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma(y)^2}x_2^2}dx_2,$$

yada

$$f_Y(y) = \frac{E[|x|]}{(1-y)\sqrt{\pi(1+y^2)}}$$

sonucuna varılmıştır.

Burada dikkat edilmelidir ki $\sigma^2(y) = \dfrac{(1-y)^2}{2(1+y^2)}$ ve $E[|x|]$, $N(0, \sigma^2(y))$ dağılımına sahip X rassal değişkeninin mutlak değerinin beklenen değeridir.

Sonucu formülde

$$E[|x|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| \frac{1}{\sigma(y)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma(y)^2}x_2^2} dx_2 = \sigma(y)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

olduğu gözönüne alınmıştır. Ve böylece X_1, $X_2 \sim N(0,1)$ ise $\dfrac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2}$ rassal değişkeni

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad -\infty < y < \infty$$

Cauchy yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız rassal değişkendir.

5 DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ RASSAL DEĞİŞKENLERİN DAĞILIMLARININ BULUNMASI METOTLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde dönüştürülmüş rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunmasında uygulanan Değişken Değiştirme metodu, Dağılım Fonksiyonu metodu, Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu metodu çeşitli problemler üzerinde karşılaştırılmıştır. Bu amaçla aynı problem bu metotlarla çözülmüş ve bu metotlardan Dirac delta fonksiyonu yardımıyla geliştirilen metodun diğer metotlardan daha üstün daha güçlü ve uygulama açısından daha kolay olduğunu sonucuna ulaşılmıştır.

5.1 Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu Metodunun Klasik Metotlarla Karşılaştırılması

5.1.1 Doğrudan Tanım Yardımıyla Bir Değişkene Bağlı Dönüştürülmüş Rassal Değişkenin Yoğunluk Fonksiyonun Bulunması

X rassal değişkeni verilmiş olsun. Bu rassal değişkenin $f(x)$ yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, $Y = \varphi(X)$ rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu, rassal değişkenin dağılımının doğrudan tanımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Farzedelim $y = \varphi(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir fonksiyon olmasının yanı sıra ters fonksiyona sahiptir. Bu koşul altında $Y = \varphi(X)$'in dağılım fonksiyonu

$$G(Y) = P(Y < y) = P(\varphi(x) < y) = \int_a^x f(s)ds$$

dir. $y = \varphi(x)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $x = \psi(y)$ denilirse, y'nin dağılım fonksiyonu

$$G(y) = \int_a^{\varphi(y)} f(s)ds$$

şeklindedir. Yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = G'(y) = f(\psi(y))\psi'(y) \tag{5.1}$$

şeklindedir. (5.1) formülü $y = \varphi(x)$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğunda geçerlidir. $y = \varphi(x)$ azalan bir fonksiyon olduğunda, $y = \varphi(x)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $x = \psi(y)$ denilirse, y' nin dağılım fonksiyonu,

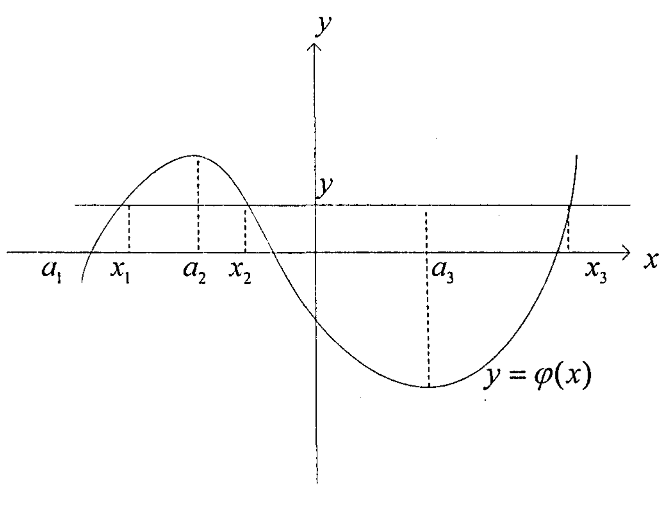
$$G(y) = \int_x^a f(s)ds = -\int_{\psi(y)}^a f(s)ds,$$

$$g(y) = G'(y) = -f(\psi(y))\psi'(y). \tag{5.2}$$

(5.1) ve (5.2) formülleri tek bir formül olarak yazılabilir:

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi(y)|\,.$$

$y = \varphi(x)$ fonksiyonu monoton olmadığında, genel dağılım metoduyla, dağılım ve yoğunluk fonksiyonu bulunabilir. $y = \varphi(x)$ fonksiyonu parçalı monoton bir fonksiyon olsun ve bu fonksiyonun grafiği şekil 5.1 deki gibi olsun.



Şekil 5.1: Bir rassal değişkene monoton parçalı şekilde bağlı dönüştürülmüş rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonunun bulunması için önerilen grafik

$Y = y$ doğrusu ile $y = \varphi(x)$ fonksiyonunun kesiştiği noktaların apsisleri $x_1, ..., x_n$olsun. $Y = \varphi(x)$ rassal değişkeninin dağılımı $G(y)$ ise

$$G(y) = P(\varphi(x) < y) = \int_{a_1}^{\psi_1(y)} f(s)ds + \int_{\psi_2(y)}^{a_2} f(s)ds + \int_{a_2}^{\psi_3(y)} f(s)ds,$$

yani

$$G(y) = P(\varphi(x) < y) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta_i(y)} f(s)ds$$

dir.

$$g(y) = G'(y)$$

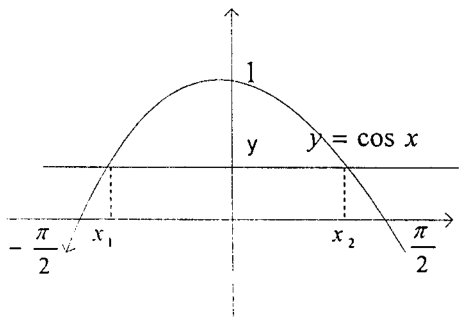
formülü yardımıyla yoğunluk fonksiyonu bulunabilir. Bu metodun uygulanması, $\Delta_i(y)$ aralıklarının bulunmasına bağlıdır. Bu aralıkların bulunmasıda genellikle kolay değildir.

Örnek 5.1.2 *X rassal değişkeni $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında düzgün dağılmış ve*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $Y = \cos x$ rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu ve yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

Çözüm 5.1.2 *$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında $y = \cos x$'in grafiği göz önüne alındığında, $Y = y$ doğrusu ile $y = \cos x$ grafiğinin kesiştiği noktalar $x_1 = -\arccos x$, ve $x_2 = \arccos x$ dir.*



Şekil 5.2: Örnek 5.1.2 deki dönüştürülmüş rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonunun bulunması için önerilen şekil

Dağılım fonksiyonunun tanımına göre:

$$G(y) = P(Y < y) = P(\cos x < y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_1} f(s)ds + \int_{x_2}^{\frac{\pi}{2}} f(s)ds,$$

$$G(y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} f(s)ds + \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(s)ds.$$

Şimdi dağılım fonksiyonu yardımıyla yoğunluk fonksiyonu bulunsun:

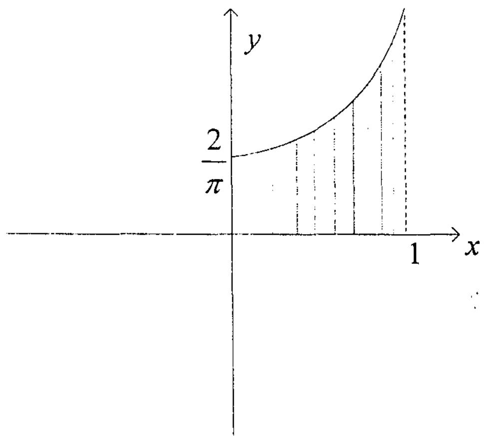
$$g(y) = G'(y) = f(-\arccos y)(-\arccos y)' - f(\arccos y)(\arccos y)',$$

$$\begin{aligned} g(y) &= f(-\arccos y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - f(\arccos y)\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \\ g(y) &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Yoğunluk fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ *aralığında tanımlanırsa*

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & 0 < y < 1 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

olur. $g(y)$ fonksiyonunun grafiği şekil 5.3 de verilmiştir.



Şekil 5.3: Örnek 5.1.2 de bulunmuş fonksiyonun grafiği

Şekil 5.3 de taranmış S alanı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 g(y)dy = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\arccos y\right]_0^1 = \frac{-2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Bu sonuç $g(y)$'nin yoğunluk fonksiyonunun belli özelliklerini sağladığını gösteriyor.

5.1.3 Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu Yardımıyla Bir Değişkene Bağlı Dönüştürülmüş Rassal Değişkenlerin Yoğunluk Fonksiyonlarının Bulunması

X sürekli rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. $Y = \varphi(x)$ dönüştürülmüş rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonu Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunur. Burada $y = \varphi(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olmanın yanısıra $\varphi'(x_k) \neq 0$, x_k, $k = 1, ..., n$, $y - \varphi(x) = 0$ denkleminin y 'ye bağlı kökleri olsun. $Y = \varphi(X)$ rassal değişkeninin yoğunluk fonksiyonu Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[y - \varphi(x)]dx.$$

Dirac delta genelleşmiş fonksiyonunun 4. özelliğine göre

$$g(y) = \sum_k \frac{1}{|\varphi'(x_k)|} f(x_k)$$

yazılabilir. $x_k = \psi(y)$ olduğu kabul edilirse, sonuç olarak

$$\begin{aligned} g(y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\varphi'(x_k)|} f(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\varphi'(\psi_k(y))|} f(\psi_k(y)) \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bir önceki örnek gözönüne alınıp Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi çözülebilir.

Çözüm 5.1.3 *Örnek 5.1.2 gözönüne alındığında*

$$g(y) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{|\varphi'(x_k)|} f(x_k)$$

gibi yazılabilir.

$$Y = \cos X, \quad y - \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \arccos y + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Rassal değişken $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *aralığında gözönüne alındığı için sonuncu formülde* $k = 0$ *yazılarak*

$$x_1 = -\arccos y, \; x_2 = \arccos y$$

bulunur. $\varphi(x) = \cos x$ *olduğu için* $\varphi'(x) = -\sin x$ *dir. Bilinen*

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

eşitliği de kullanılarak bu ifadeler $g(y)$ *de yerine yazılırsa,*

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{|-\sin(-\arccos y)|} f(x_1) + \frac{1}{|-\sin(\arccos y)|} f(x_2) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{|\sin(-\arccos y)|} + \frac{1}{|\sin(\arccos y)|}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\left|-\sqrt{1-\cos^2 x(-\arccos y)}\right|} + \frac{1}{\left|\sqrt{1-\cos^2 x(-\arccos y)}\right|}\right), \end{aligned}$$

veya

$$g(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

sonucu bulunur. Örnek 5.1.2 iki metotla yapılan çözümünde sonuçların çakıştığı görülmektedir. Ancak Dirac delta genelleşmiş fonksiyon yardımıyla çözüm ile karşılaştırıldığında bu metodun çok daha sade ve güçlü olduğu sonucuna varılır.

5.1.4 Doğrudan Tanım Yardımıyla ve Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonu Yardımıyla Çok Değişkene Bağlı Dönüştürülmüş Rassal Değişkenin Yoğunluk Fonksiyonun Bulunması

n sayıda $X_1, ..., X_n$ rassal değişken verildiğinde bu değişkenlere bağlı bir

$$Y = \varphi(X_1, ..., X_n)$$

dönüştürülmüş rassal değişkenin dağılımını ararken kullanılan klasik metotlar ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla geliştirilen metot arasındaki farkları görmek için aynı örnek üzerinde bu metotları ayrı ayrı uygulamak uygun olacaktır. Ve ulaşılan sonuçlardan Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu metodunun üstünlükleri, işlem kolaylığı ve güçleri daha net görülebilecektir. Bu amaçla aşağıdaki örneğin üç farklı çözümüne bakılabilir.

Örnek 5.1.5 *X_1 ve X_2 yoğunlukları f_{X_1} ve f_{X_2}ile $X_1 \sim gamma(\alpha, 1)$ ve $X_2 \sim gamma(\beta, 1)$ dağılmış bağımsız rassal değişkenler olsun. $Y = X_1 + X_2$ rassal değişkeninin yoğunluğu $f(y) = \dfrac{y^{\alpha+\beta}e^{-y}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ olan $gamma(\alpha+\beta, 1)$ dağılımına sahip olduğunu üç farklı yöntemle aşağıdaki gibi gösterilebilir.*

Çözüm(Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla)

X_1 ve X_2 rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu değişkenler bağımsız olduklarından

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}e^{-(x_1+x_2)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & x_1 > 0, x_2 > 0; \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

şeklindedir. Teorem 4.2.1 ve teorem 4.2.2 e uygun olarak A ve $D(y)$ kümeleri tanımlanmalıdır:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \infty,\ 0 < x_2 < \infty\}, \\ D(y) &= \{(x_1, x_2) \in A,\ x_1 + x_2 < y\}. \end{aligned}$$

teorem 4.2.1, teorem 4.2.2 sırasıyla uygulanırsa, Y'nin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) = P(X_1 + X_2 < y) \\ &= \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\ &= \iint\limits_{A} f(x_1, x_2)H(y - (x_1 + x_2))dx_1dx_2 \end{aligned}$$

olur. Yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \iint\limits_{A} f(x_1, x_2)\delta(y - (x_1 + x_2))dx_1dx_2 \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} e^{-(x_1+x_2)}\delta(y - (x_1 + x_2))dx_1dx_2. \end{aligned}$$

$$\delta(x_1 + x_2 - y) = \delta(x_2 - (y - x_1))$$

eşitliği gözönüne alındığında , sonuncu integral aşağıdaki gibi tekrar integrallere dönüşerek hesaplanır:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\infty x_1^{\alpha-1} e^{-x_1} \left\{ \int\limits_0^\infty x_2^{\beta-1} e^{-x_2} \delta(x_2 - (y - x_1))dx_1 \right\} dx_1, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\infty x_1^{\alpha-1} e^{-x_1} \{(y - x_1)^{\beta-1} e^{-(y-x_1)}\}dx_1, \\ &= \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\infty x_1^{\alpha-1}(y - x_1)dx_1, \end{aligned}$$

veya

$$g(y) = \frac{e^{-y} y^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Aynı problem dağılımın tanımı yardımıyla da çözülebilir.

$D(y)$ 'nin tanımı gözönüne alındığında

$$G(y) = \int_0^\infty dx_1 \int_0^{y-x_1} \frac{x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} e^{-(x_1+x_2)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} dx_2.$$

Buradan

$$g(y) = G'(y),$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x_1^{\alpha-1} e^{x_1} (y - x_1)^{\beta-1} e^{-(y-x_1)} dx_1$$

$$= \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x_1^{\alpha-1} (y - x_1)^{\beta-1} dx_1$$

$$= \frac{e^{-y} y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x_1^{\alpha-1} (1 - \frac{x_1}{y})^{\beta-1} dx_1.$$

Sonuncu integralde $\frac{x_1}{y} = t$ dönüşümü yapılarak,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{e^{-y} y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (yt)^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} y dt \\ &= \frac{e^{-y} y^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t)^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \frac{e^{-y} y^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

yada

$$g(y) = \frac{e^{-y} y^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

yada

$$g(y) = \frac{e^{-y} y^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

olduğu bulunur.

Problemin değişken değiştirme metoduyla çözümü

Aşağıdaki şekilde yeni değişkenler Y_1, Y_2 tanımlanabilir.

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad x_1 = y_1 y_2$$
$$Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad x_2 = y_1 - y_1 y_2$$
$$x_2 = y_1(1 - y_2).$$

Bu değişkenlere uygun Jacobiyan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1$$

olur. Teorem 3.2.4'e göre

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= |y_1| \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (y_1 y_2)^{\alpha-1} \times (y_1(1 - y_2))^{\beta-1} e^{-y_1} \\ &= \frac{y_2^{\alpha-1}(1 - y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1}, \end{aligned}$$

yada

$$g(y) = \frac{y_2^{\alpha-1}(1 - y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1}.$$
$$0 < y_1 < \infty, \; 0 < y_2 < \infty.$$

Buradan $g(y_1)$'in marjinal fonksiyonu elde edilir:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_0^1 g(y_1, y_2)\, dy_2 \\ &= \frac{y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 y_2^{\alpha-1}(1 - y_2)^{\beta-1}\, dy_2 \\ &= \frac{y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$g(y) = \frac{y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1}}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

Y nin yoğunluk fonksiyonu bulunur.

Örnek 5.1.5 da alınan sonuçlar karşılaştırıldığında Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla geliştirilen metodun diğer metota göre uygulanması daha kolay ve sonuca hemen ulaşması bakımından daha pratik olduğu görülür. Ayrıca $Y = \varphi(X_1, ..., X_n)$ dönüştürülmüş rassal değişkeninin yoğunluğu isteniyorsa onun dağılımını bulmaya gerek olmadığı görülmektedir. Ancak dağılımın tanımı kullanılarak yoğunlukların bulunabilmesi için önce dağılım fonksiyonu bulunmalıdır. Değişken değiştirme metodunda olduğu gibi yeni değişkenlere ve dolayısıyla Jacobiyen hesabına bu metotda gerek kalmamaktadır.

Sonuç olarak bu tezde geliştirilen metot şimdiye kadar kullanılan klasik metotlara alternatif olmakla beraber bu metotlardan işlemleri kolaylaştırması bakımından üstündür. Ayrıca Dirac delta genelleşmiş fonksiyon metodu, genelleşmiş fonksiyon gibi soyut bir kavramın rassal değişkenlerin dağılımları teorisine girişi olarak atılan adımlardan birisidir.

6 SONUÇLAR

Bu çalışmada

1. Olasılık teorisinin bazı temel kavramları, genelleşmiş fonksiyonlar, Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu ve özellikleri, Heaviside genelleşmiş fonksiyonu kavramları verilmiştir;

2. Dönüştürülmüş rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunması için çeşitli klasik metotlar verilmiş ve problemler üzerinde bu metotların uygulamaları yapılmıştır;

3. Rassal değişkenlerin dağılımları araştırılırken kullanılan klasik Değişken Değiştirme ve Dağılım Fonksiyonu metotlarına alternatif olan, Heaviside genelleşmiş fonksiyonu ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonuna dayalı bir metot geliştirilmiş ve bu metodun problemler üzerinde uygulamaları yapılmıştır;

4. Geliştirilmiş olan metot sürekli rassal değişkenlerin hem dağılımını ve hem de yoğunluk fonksiyonunu bulma olanağı sağlamanın yanı sıra kesikli rassal değişkenler için genelleşmiş yoğunluk fonksiyonu kavramı tanımlamaya imkan sağlamış ve böylece sürekli rassal değişkenlerin ve kesikli rassal değişkenlerin aynı şekilde incelenebilme olanağını sağlamıştır;

5. Verilen rassal değişkenlerin dağılımlarının bulunmasında uygulanan Değişken Değiştirme metodu, Dağılım Fonksiyonu metodu, Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu yardımıyla geliştirilen metot çeşitli problemler üzerinde karşılaştırılmış ve Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu metodunun üstünlükleri açıklanmıştır.

Kısaca sözkonusu metodun üstünlükleri şöyle sıralanabilir:

Geliştirilen metot

i. Değişken değiştirme metodundan farklı olarak dönüşümün tanımlanabilmesi için ilave yeni değişkenlerin tanımlanmasını gerektirmez;

ii. Jacobiyen hesabını gerektirmez;

iii. İşlem sayısını azalttığı için hata yapma riskini de azaltır.

6. Bu tezde geliştirilen Dirac delta genelleşmiş fonksiyonu metodu diğer metotlardan işlemleri kolaylıştırması bakımından üstünlük sağladığı gösterilmiş ve ayrıca genelleşmiş fonksiyon gibi soyut bir kavramın rassal değişkenlerin dağılımları teorisine girişi olarak atılan adımlardan birisi olmuştur.

KAYNAKLAR

1. CRAMER, H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, (1966).

2. HOGG, R., V.ve CRAIG, A., T., *Introduction to Mathematical Statistics,* Macmillan Publishing Co., Inc., New York, U.S.A.,(1978).

3. MOOD, A., M., GRAYBILL, F., A. ve BOES, D., C., *Introduction to the Theory of Statistics*, (1913).

4. İNAL, C. ve GÜNAY, S., *Olasılık ve Matematiksel İstatistik,* H.Ü: Fen Fakültesi Basımevi, Ankara, Türkiye, (1999).

5. AU, T. ve TAM, J., *Tranforming Variables Using the Dirac Generalized Function*, The American Statistician, **53**, 270-72, (1999).

6. SHAMİLOV, A.,Kh., *On Special Boundary Value Problems for Abstract Differential Equations in Hilbert Space,* Differentialnya Uravneniya, (Translated from Russ into English by "Differential Equations"), Russian,30, No:6, 77-83, (1994).

7. YÜZER, A., F., *Olasılık ve İstatistik*, A.Ü.:Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, Türkiye, (1996).

8. KOLMOGOROV, A.N. ve FOMIN, S.,V., *Introductory Real Analysis,* Dover Publications, New York, U.S.A., (1975).

9. AĞAOĞLU, E., *Uygulamalı Örnekleme*, A.Ü.:Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, Türkiye, (1998).

10. BOROVKOV, A., A., *Kurs Teorii Veroyatnostey,* Nauka, Moskva, 45-65, (1972).

11. GEL'FAND, I., M. ve SHILOV, G., E., *Generalized Functions*, Academic Press, New York ve London, U.S.A., (1964).

12. http-1:http://www.mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html(2003).

13. http-2:http://www.physics.umd.edu/courses/Phys604/Fall02/Notes/GeneralizedFunctions.pdf.(2003).

14. FROLOV, S., V. ve SHOSTOK, R., Y., *Kurs Visshey Mathematiki,* Vissaya Shkola, Moskva, (1966).

15. WAHED, S. ve MASOOM ALI, M., *Dirac Generalized Function: An Alternative to the Change of Variable Technique* , Journal of Statistical Research, **35**, 57-70, (2001).