OLASILIK DAĞILIMLARININ KARAKTERİZASYONU

Güvenç ARSLAN
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı
Ekim - 2001

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Güvenç ARSLAN'ın "OLASILIK DAĞILIMLARININ KARAKTERİZASYONU" başlıklı İstatistik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 03/10/2001 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (1. Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. İsmihan BAYRAMOĞLU	
Üye (2. Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Ersoy CANKÜYER	
Üye	: Prof. Dr. A. F. Yüzer	
Üye	: Prof. Dr. Kazım ÖZDAMAR	
Üye	: Prof. Dr. Embiya AĞAOĞLU	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 10/10/2001 tarih ve 31/1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Doktora Tezi

OLASILIK DAĞILIMLARININ KARAKTERİZASYONU

GÜVENÇ ARSLAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

1. Danışman : Prof. Dr. İsmihan BAYRAMOĞLU
2. Danışman : Prof. Dr. Ersoy CANKÜYER

2001, 72 sayfa

Bu tezde olasılık dağılımlarını karakterize eden, yani onların belirlenmesini sağlayan teoremler incelenerek yeni bazı karakterizasyon sonuçları elde edilmiştir. Bu tür sonuçlar tek başına önemli olduğu gibi modelleme ile ilgili çalışmalarda ve uygunluk (goodness-of-fit) testlerinin geliştirilmesinde de önemli olabilirler.

Bazı dağılımlara ait özellikler incelenerek aşağıda özetlenen yeni karakterizasyon teoremleri ispatlanmıştır.

1) $X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m,\ \varepsilon_i \sim U(0,1)$ ise $F \sim U(0,1)$.

2) $X_{1:m} \stackrel{d}{=} V_1V_2\cdots V_m,\ F_{V_i}(x) = x^i,\ 0 < x < 1$ ise $F \sim U(0,1)$.

3) $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m,\ P(\epsilon_i \le x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta^{-1}} & , \beta > 0 \text{ için } x \ge 1 \\ x^{-\beta^{-1}} & , \beta < 0 \text{ için } 0 < x < 1 \end{cases}$
ise $F(x) = 1 - (1+\beta x)^{-\beta^{-1}}$, $\begin{matrix} \beta > 0 \text{ için } x \ge 0 \\ \beta < 0 \text{ için } 0 < x \le -\frac{1}{\beta} \end{matrix}$.

4) $X_{L(n)} \stackrel{d}{=} (W_1 + \cdots W_n)^{-\frac{1}{\delta}},\ F_{W_i}(x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$ ise
$F(x) = e^{-x^{-\delta}},\ x > 0,\ \delta > 0$.

5) $X_{U(2)} - X_{U(1)} \stackrel{d}{=} X_{L(2)}$ ve F belli bir sınıftan ise F düzgün dağılımdır.

Anahtar Kelimeler: Sıra İstatistiği, Rekor Değeri, Karakterizasyon

ABSTRACT

PhD Thesis

CHARACTERIZATION OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS

GÜVENÇ ARSLAN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistics Program

Supervisor : Prof. Dr. İsmihan BAYRAMOĞLU
Co-supervisor : Prof. Dr. Ersoy CANKÜYER
2001, 72 pages

In this thesis, characterization of probability distributions, that is theorems to determine distributions, has been investigated and some new characterization results have been obtained. Such results being of importance on their own may also be important in modeling and in the development of goodness-of-fit tests.

By investigating properties of some distributions new characterization theorems, summarized below, have been proved.

1) If $X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m,\ \varepsilon_i \sim U(0,1)$, then $F \sim U(0,1)$.
2) If $X_{1:m} \stackrel{d}{=} V_1V_2\cdots V_m,\ F_{V_i}(x) = x^i,\ 0 < x < 1$, then $F \sim U(0,1)$.
3) If $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m,\ P(\epsilon_i \le x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta^{-1}} & , x \ge 1 \text{ if } \beta > 0 \\ x^{-\beta^{-1}} & , 0 < x < 1, \text{ if } \beta < 0 \end{cases}$,

   then $F(x) = 1 - (1+\beta x)^{-\beta^{-1}}$, $\begin{matrix} x \ge 0, \text{ if } \beta > 0 \\ 0 < x \le -\frac{1}{\beta}, \text{ if } \beta < 0 \end{matrix}$.
4) If $X_{L(n)} \stackrel{d}{=} (W_1 + \cdots W_n)^{-\frac{1}{\delta}},\ F_{W_i}(x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$, then $F(x) = e^{-x^{-\delta}},\ x > 0,\ \delta > 0$.
5) If $X_{U(2)} - X_{U(1)} \stackrel{d}{=} X_{L(2)}$ and F belongs to some class of distributions, then F is uniform.

Keywords: Order Statistics, Record Value, Characterization

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında büyük katkısı olan değerli bilim adamları Prof. Dr. İsmihan BAYRAMOĞLU'na ve Prof. Dr. Ersoy CANKÜYER'e en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Beni her zaman destekleyen ve moral veren İstatistik bölümündeki çalışma arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca desteğini benden hiç bir zaman esirgemeyen eşim Nursen ARSLAN'a ve beni yetiştiren anne ve babama da en derin teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$Beta(a,b)$	:	Beta dağılımı; $f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0\leq x\leq 1$, $a>0$, $b>0$
EX	:	X rasgele değişkeninin beklenen değeri
$Gamma(\alpha,\beta)$	:	Gamma dağılımı; $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\beta^{-\alpha}e^{-x/\beta}$, $x>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$
$O(f(x))$	:	Belirli x değerleri (örneğin $a\leq x\leq b$) için $\lvert g(x)\rvert\leq M\lvert f(x)\rvert$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir $g(x)$ ifadesi [1]
$\Re$	:	Gerçel sayılar
$U(a,b)$	:	Düzgün dağılım; $f(x)=\frac{1}{b-a}$, $a<x<b$, $a<b$
$X\stackrel{d}{=}Y$	:	X ve Y nin dağılımları eşittir
$X_{k:n}$	:	k ıncı sıra istatistiği
$X_{L(n)}$	:	n yinci alt rekor değeri
$X_{U(n)}$	:	n yinci üst rekor değeri

[1] Bu gösterimle ilgili daha ayrıntılı bilgi örneğin (Knuth 1968) kitabında bulunabilir.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada özellikle son yıllarda büyük gelişme görülen ve literatürde olasılık dağılımlarının karakterizasyonu olarak geçen konu incelenmiştir. Karakterizasyon çalışmalarının amacı olasılık dağılımlarını belirleyen özellikleri ortaya çıkarmaktır. Böylece belli şartlar altında sadece incelenen dağılıma ait olan özellik (veya özellikler) elde edilir. Bu tür çalışmaların hem kendi başına hem de uygulamalar açısından önemi büyüktür. Tabi elde edilen sonuçlar modelleme ile ilgili bazı problemlerde kolaylık sağlarsa sonuçlar daha da ilginç olacaktır. Örneğin, dağılımlar üzerindeki varsayımların sonuçlarına ışık tutan veya model varsayımları için hipotez testleri geliştirme potansiyeli olan karakterizasyon sonuçları daha çok ilgi çekecektir. Buna iyi bir örnek olarak üstel dağılımı karakterize eden şu klasik sonuç gösterilebilir: Herhangi bir n pozitif tamsayısı için $X_1, ..., X_n$ rasgele seçilmiş bir örneklem olmak üzere X_i $(i = 1, ..., n)$ rasgele değişkeninin üstel dağılmış olması için gerek ve yeter koşul her n pozitif tamsayısı için X_1 ile $n \cdot \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele değişkenlerinin aynı dağılıma sahip olmalarıdır.

Modellemeyle ilgili olarak söylenenlere az da olsa açıklık getirmek amacıyla şu örnek durumu ele alalım. Bir mühendis bir tür lifin demet halinde dayanıklılığını ölçmek istiyor. Demetteki herhangi bir lif koparsa demetin güvenilirliği bozulacağı için ilk lif kopana kadar geçen süre özellikle önemlidir. Söz konusu mühendis deneyler yapıyor ve sonunda kopmaya kadar geçen sürenin dağılımının demetteki lif sayısından bağımsız olduğunu gözlemliyor. Yani bir demette 5, 10 veya 15 adet lifin bulunması o demetin kopma süresini etkilememektedir. Bu lifin demet halinde dayanıklılığı ile ilgili çıkarımlar yapabilmek için her şeyden önce kopmaya kadar geçen sürenin dağılımını bulmak gerekecektir. Bilinen bir karakterizasyon sonucuna göre deney sonucunun bir Weibull modeline uygun olduğu ortaya çıkmaktadır (Arnold ve Huang 1995).

Görüldüğü gibi bazı karakterizasyon sonuçları oldukça faydalı bilgiler sağlamaktadır. Son örnekte karakterizasyon yardımıyla incelenen dağılım belirlenebilmiştir. Bazen bunun tam tersi bir durum da söz konusu olabilir.

Örneğin aynı sistem için az sayıda bileşen ve çok sayıda bileşen durumları karşılaştırıldığında yaşam eğrileri birbirinden çok farklı olduğu biliniyorsa veya böyle olduğu tecrübelerden ortaya çıkıyorsa aslında bir çok açıdan cazip olan üstel model kullanmaktan vazgeçmek gerekecektir. Bunun nedeni de ilk paragrafta belirtilen üstel dağılıma ait özelliktir (bkz. s. 32, Teorem 3.13).

Bu çalışmanın amacı literatürde belli bir noktaya gelmiş sonuçları incelemek ve bazı dağılımlara ait yeni karakterizasyon sonuçları elde etmektir. Üzerinde çalışılmış olan dağılımlardan bazıları düzgün, Frechét ve Pareto dağılımlarıdır. Sıra istatistikleri ve rekor değerleri kullanılarak bu dağılımlar için bazı yeni karakterizasyon sonuçları elde edilmiştir.

Karakterizasyon çalışmalarında özellikle sıra istatistikleri ve rekor değerleri çok önemli bir yere sahiptir. Sonuçların büyük bir çoğunluğunda ya sıra istatistikleri ya da rekor değerleri kullanılmıştır. Bu nedenle ikinci bölümde bazı temel kavramlar gözden geçirildikten sonra üçüncü bölümde sıra istatistikleri ve rekor değerleri tanımlanarak bunlarla ilgili temel dağılımlar incelenmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Karakterizasyon ile ilgili çalışmalarda rasgele değişkenler üzerine getirilen çeşitli koşullar olmaktadır. Bunlardan en basiti rasgele değişkenlerin ya sadece kesikli ya da sadece sürekli olmasıdır. Ancak bazı durumlarda daha genel haller için sonuçlar da elde edilmektedir. Bu nedenle bu tür sonuçları anlayabilmek ve takdir edebilmek için bazı kavramların bilinmesi gerekmektedir. Bu düşünceden hareketle burada rasgele değişkenler ile ilgili bazı temel kavramlar gözden geçirilecektir.

2.1. Olasılık Uzayı

Ω boş olmayan herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$ da onun alt kümelerinden oluşan bir kümeler ailesi olsun. Eğer φ fonksiyonu $\mathcal{A}$ da tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon ise φ bir *küme fonksiyonudur.* Her $A \in \mathcal{A}$ için $\varphi(A) \geq 0$ oluyorsa φ *negatif olmayan* bir küme fonksiyonudur.

Bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan $\mathfrak{F}$ kümeler ailesi için

1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$,
2) $A \in \mathfrak{F}$ iken $A^c = \Omega - A \in \mathfrak{F}$,
3) $i = 1, 2, ...$ için $A_i \in \mathfrak{F}$ iken $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{F}$ bir σ *cebridir.*

$\mathfrak{F}$ bir σ cebri ve φ de $\mathfrak{F}$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu olsun. Bu durumda φ aşağıdaki özellikleri sağlarsa *toplamsal* bir küme fonksiyonudur:

1) $\varphi(\emptyset) = 0$.
2) $\{A_i\}$, $\mathfrak{F}$ de tanımlı ayrık bir kümeler dizisi ise $\varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$.

Herhangi bir σ cebri üzerinde tanımlı negatif olmayan bir küme fonksiyonuna *ölçü* denir.

Ω herhangi bir küme olmak üzere $\mathfrak{F}$ de Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan bir σ-cebri olsun. P, $\mathfrak{F}$ üzerinde tanımlı bir ölçü ve $P(\Omega)$=1 ise $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ üçlüsüne bir *olasılık uzayı* denir (Burrill 1972).

2.2. Rasgele Değişken

$(\Omega,\mathfrak{F},P)$ bir olasılık uzayı ve $X : \Omega \rightarrow \Re$ olsun. Eğer $a\in \Re$ için $X^{-1}([a,\infty))$ kümesi $\mathfrak{F}$ ailesi içinde, yani $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\} \in \mathfrak{F}$ ise X bir *rasgele değişkendir.*

Uygulamalarda Ω kümesi değişik ölçümler yardımıyla gözlemlenebilen bir deneyin sonuçlarını göstermektedir. Bu ölçümler deney sonuçlarına sayılar karşı getirmektedir ve böylece rasgele değişken kavramı doğal bir biçimde ortaya çıkmaktadır.

Eğer X bir rasgele değişken ise onun *dağılım fonksiyonu*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2-1}$$

olarak tanımlanır.

2.2.1 Mutlak Sürekli ve Tekil Değişkenler

$(\Omega, \mathfrak{C}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $\varphi(E) = \int_E g d\mu$ ile tanımlanan küme fonksiyonu toplamsal olup $\mu(E) = 0$ ise $\varphi(E) = 0$ olur. μ ile φ arasındaki bu özellik her toplamsal küme fonksiyonunun bir integralden elde edilemeyeceğini hissettirmektedir. Bu nedenle söz konusu özelliğe sahip küme fonksiyonlarını karakterize etme problemi gündeme gelir.

Eğer $\mu(E) = 0$ özelliğini sağlayan ve ölçülebilen her E kümesi için $\varphi(E) = 0$ oluyorsa φ fonksiyonu μ ye göre *mutlak süreklidir* denir ve bu özellik $\varphi \ll \mu$ ile gösterilir. Diğer yandan ölçülebilen her E kümesi için $\varphi(E \cap Z^c) = 0$ olacak şekilde μ ölçüsü sıfır olan bir Z kümesi varsa φ fonksiyonu μ ye göre *tekildir* denir ve bu da $\varphi \perp \mu$ ile gösterilir. O halde mutlak sürekli bir fonksiyon μ ölçüsü sıfır olan her kümede sıfır olurken tekil bir fonksiyon için tam tersi söz konusudur. Yani tekil bir fonksiyon ancak μ ölçüsü sıfır olan kümeler üzerinde sıfırdan farklı değerler alabilir.

Aşağıdaki teorem (Lebesgue Decomposition Theorem) genel olarak toplamsal bir küme fonksiyonunun nasıl olduğu hakkında bilgi vermektedir. Dağılım fonksiyonları özel toplamsal fonksiyonlar olduğu için bu teorem aynı zamanda dağılım fonksiyonları için de geçerli olacaktır.

Teorem 2.1. *μ ölçüsü ve φ toplamsal fonksiyonu σ sonlu olsunlar. O zaman μ ye göre φ_s mutlak sürekli ve φ_t tekil olmak üzere tek olarak belirlenebilen ve $\varphi = \varphi_t + \varphi_s$ olacak şekilde φ_s ve φ_t toplamsal fonksiyonları vardır. Üstelik ölçülebilen her E kümesi için*

$$\varphi_s(t) = \int_E g d\mu \tag{2-2}$$

olacak biçimde sonlu değerler alan ve ölçülebilen bir g fonksiyonu vardır.

Bu teoremin özel bir durumu genelde *Radon-Nikodym teoremi* olarak bilinmektedir.

Teorem 2.2. **(Radon-Nikodym)** *μ ölçüsü ve φ toplamsal fonksiyonu σ sonlu olsun. O zaman ölçülebilen her E kümesi için*

$$\varphi_s(t) = \int_E g d\mu \quad . \tag{2-3}$$

olacak biçimde sonlu değerler alan ve ölçülebilen bir g fonksiyonu vardır.

2.2.2 Kafes Türü ve Dejenere Dağılımlar

X kesikli bir rasgele değişken olsun. a ve b gerçel sayılar olmak üzere X değişkeninin aldığı x_k değerleri

$$x_k = a + bk, \; k = 1, 2, ... \tag{2-4}$$

şeklinde ise X *kafes türü* (*lattice*) bir dağılımdır denir.

X kesikli rasgele değişkeninin tek bir noktada hariç olasılıkları sıfır ise X in dağılımı *dejenere* bir dağılımdır.

3. SIRA İSTATİSTİKLERİ, REKOR DEĞERLERİ VE KARAKTERİZASYON

Karakterizasyon çalışmaları incelenirse özellikle sıra istatistikleri ve rekor değerlerinin yoğun bir şekilde kullanıldığı görülür. Bu nedenle bu bölümde sıra istatistikleri ve rekor değerleri tanıtılarak bunların dağılımları incelenmiştir.

3.1. Tanımlar ve Temel Dağılım Teorisi

3.1.1 Sıra İstatistikleri ve Rekor Değerlerinin Tanımı

Sıra istatistikleri bir çok yerde ama özellikle de yaşam analizi ve güvenilirlik araştırmalarında doğal bir şekilde ortaya çıkarlar. Burada bunlardan bir kaç tanesine örnek vermek uygun olacaktır. Daha çok bilgi için örneğin (Arnold ve ark. 1992) incelenebilir.

Üstel dağılım ile ilgili bir çok öngörü probleminde ilgilenilen rasgele değişkenler sıra istatistiklerini içermektedir. Sıra istatistiklerinin önemini vurgulayan bazı uygulamalar aşağıda sıralanmıştır:

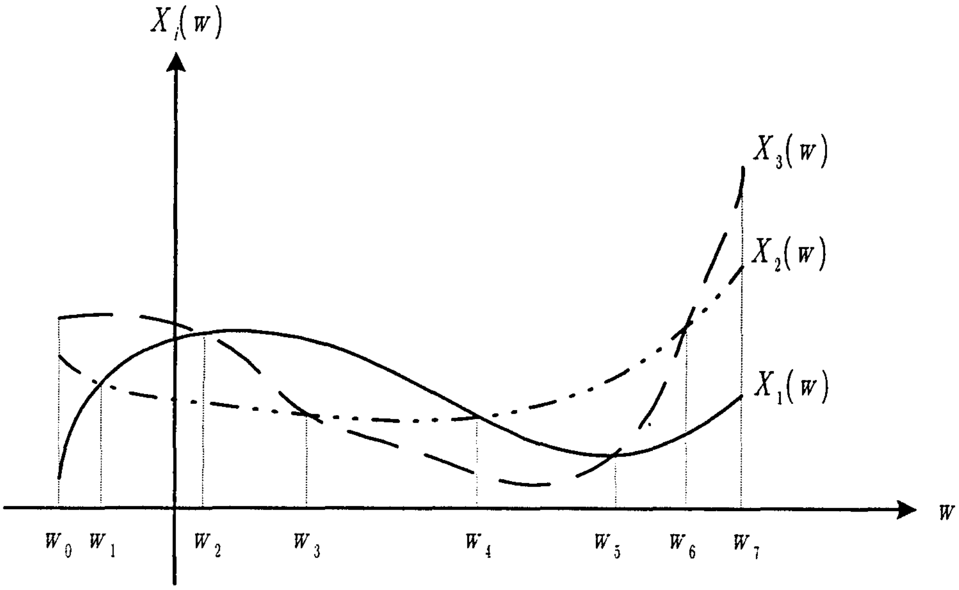
- Robust tahminciler: örnek ortalamasının aykırı değerlere karşı çok hassas olduğu bilinmektedir. Oysa örnek medyanı veya merkezi sıra istatistiklerinin ortalaması aykırı değerlere karşı daha az duyarlıdır.
- Aykırı değer tespiti
- Censored sampling
- Malzemelerin dayanıklılığı
- Karakterizasyon ve uygunluk testleri

$X_1, X_2, ..., X_n$ bir $D \subset \Re$ kümesi üzerinde tanımlı n adet rasgele değişken olsun. Her $\omega \in D$ için

$$\begin{aligned}
&X_{1:n}(\omega) \text{ ile } X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega) \text{ lerin en küçük değeri,}\\
&X_{2:n}(\omega) \text{ ile } X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega) \text{ lerin ikinci en küçük değeri,}\\
&\vdots \\
&X_{n:n}(\omega) \text{ ile } X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega) \text{ lerin en büyük değeri}
\end{aligned} \tag{3-1}$$

gösterilsin. Bu durumda her $\omega \in D$ için $X_{1:n}(\omega) \leq X_{2:n}(\omega) \leq ... \leq X_{n:n}(\omega)$ olacaktır.

Herhangi bir $X_{i:n}(1 \leq i \leq n)$ sıra istatistiği $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Bunu daha iyi anlamak için $n = 3$ iken bir örnek incelenecektir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. n=3 için sıra istatistiklerine bir örnek

$i = 1, ..., 7$ olmak üzere $A_i = [w_{i-1}, w_i)$ olsun. O zaman

$$X_{1:3}(w) = \begin{cases} X_1(w), w \in A_1 \cup A_6 \cup A_7 \\ X_2(w), w \in A_2 \cup A_3 \\ X_3(w), w \in A_4 \cup A_5 \end{cases} \tag{3-2}$$

Yani $X_1, X_2, ..., X_n$ bir rasgele örneklemse ve artan şekilde sıralanırsa, sıra istatistikleri olarak adlandırılan yeni $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ rasgele değişkenleri elde edilir.

Malzemelerin dayanıklılığı ile ilgili çalışmalarda "Ne kadar basınç veya kuvvet uygulanırsa incelenen malzeme dayanacaktır?" gibi sorular araştırılır. Bu gibi durumlar rekor değerlerinin incelenmesini gerektirir. Örneğin bir malzemenin en düşük dayanma sınırı tespit edilmek isteniyor. Bunun için ilk ürün X_1 birim basınç veya daha azına dayanana kadar test edilir. Eğer X_1 birim basınç veya daha azına dayanmazsa basınç kayıt edilir aksi halde ise ikinci ürüne geçilir. İkinci ürün için ancak dayanma basıncı X_1 den küçük olursa kayıt yapılır aksi halde bir sonraki ürün test edilir. Bu şekilde genel olarak m inci ürün için ancak $X_m < \min(X_1, ..., X_{m-1})$, $m > 1$ sağlanırsa kayıt yapılır. Kayıt edilen basınç değerleri alt rekor değerleri olmaktadır.

Genel halde uygulamadan bağımsız olarak rekor değerleri şu şekilde tanımlanır. $n \geq 1$ için $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$ olsun. Eğer $Y_j > Y_{j-1}$, $j > 1$ oluyorsa Y_j değerine $\{X_n, n \geq 1\}$ dizisinin bir üst rekor değeri denir. Yani $\{X_n, n \geq 1\}$ dizisindeki üst rekor değerleri ilk dizinin ardışık azami değerleridir. Azami değerler yerine asgari değerler alınırsa alt rekor değerleri elde edilir ve dizideki alt rekor değerleri ilk dizinin ardışık asgari değerleri olmaktadır.

3.1.2 Sıra İstatistiklerinin Dağılımı

Yukarıda verilen tanım oldukça geneldir. Bu haliyle sıra istatistiklerinin dağılımlarını incelemek çok güçtür. Bu nedenle bundan sonra $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip oldukları kabul edilecektir.

Burada sıra istatistiklerine ait dağılım ve özellikler (Arnold ve ark. 1992) kaynağına bağlı olarak yazılmıştır. Ancak bazı yerlerde söz konusu kaynakta verilmemiş ayrıntılar eklenmiştir.

Rasgele değişkenlerin sürekli olsun. Sıra istatistiklerinin dağılımlarını elde etmek için $\{x < X_{i:n} \leq x + \delta x\}$ olayını ele alalım. Bu olay, $X_1, X_2, ..., X_n$ lerden $i-1$ tanesinin x den küçük veya eşit, bir tanesinin $(x, x+\delta x]$ aralığında ve $n-i$ tanesinin de $x+\delta x$ den büyük olması demektir. δx yeterince küçük ise

$$\begin{aligned} P(x &< X_{i:n} \leq x + \delta x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1 - F(x+\delta x)]^{n-i} \\ & \times [F(x+\delta x) - F(x)] + O((\delta x)^2)) \end{aligned} \tag{3-3}$$

yazılabilir. $O((\delta x)^2)$, $(x, x+\delta x]$ aralığında birden fazla X_r elemanının bulunması olasılığı olup $(\delta x)^2$ mertebesinde bir terimdir. Son ifadede limit alınarak $X_{i:n}$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir;

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{P(x < X_{i:n} \leq x + \delta x)}{\delta x} \right\} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1 - F(x)]^{n-i} f(x), \\ & -\infty < x < \infty \end{aligned} \tag{3-4}$$

Burada $f(x)$, $F(x)$ fonksiyonunun türevini yani olasılık yoğunluk fonskiyonunu göstermektedir.

Şimdi de iki sıra istatistiğinin ortak dağılımını bulalım. Bunun için, $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, $\{x_i < X_{i:n} \leq x_i + \delta x_i, x_j < X_{j:n} \leq x_j + \delta x_j\}$ olayını ele alalım. Bu olay, $X_1, X_2, ..., X_n$ lerden $i-1$ tanesinin x_i den küçük veya eşit, bir tanesinin $(x_i, x_i + \delta x_i]$ aralığında, $j-i-1$ tanesinin $(x_i + \delta x_i, x_j]$ aralığında, bir tanesinin $(x_j, x_j + \delta x_j]$ aralığında ve $n-j$ tanesinin $x_j + \delta x_j$ den büyük olması demektir. O halde δx_i ve δx_j yeterince küçük ise

$$\begin{aligned} P(x_i &< X_{i:n} \leq x_i + \delta x_i, x_j < X_{j:n} \leq x_j + \delta x_j) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x_i)]^{i-1} \\ &\quad \times [F(x_j) - F(x_i + \delta x_i)]^{j-i-1}[1 - F(x_j + \delta x_j)]^{n-j} \\ &\quad \times [F(x_i + \delta x_i) - F(x_i)][F(x_j + \delta x_j) - F(x_j)] \\ &\quad + O\left((\delta x_i)^2 \delta x_j\right) + O\left(\delta x_i (\delta x_j)^2\right) \end{aligned} \tag{3-5}$$

yazılabilir. $O\left((\delta x_i)^2 \delta x_j\right)$ ve $O\left(\delta x_i (\delta x_j)^2\right)$ sırasıyla, $(x_i, x_i + \delta x_i]$ ve $(x_j + \delta x_j, x_j]$ aralıklarında birden fazla X_k bulunması olasılıklarıdır. Limit alınarak $X_{i:n}$ ve $X_{j:n}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ sıra istatistiklerinin ortak dağılımı

$$\begin{aligned} & f_{i,j:n}(x_i, x_j) = \\ &= \lim_{\delta x_i \to 0, \delta x_j \to 0} \left\{ \frac{P(x_i < X_{i:n} \leq x_i + \delta x_i, x_j < X_{j:n} \leq x_j + \delta x_j)}{\delta x_i \delta x_j} \right\} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\{F(x_i)\}^{i-1} \\ &\quad \times \{F(x_j) - F(x_i)\}^{j-i-1}\{1 - F(x_j)\}^{n-j} f(x_i) f(x_j) \ , \\ &\quad -\infty < x_i < x_j < \infty \end{aligned} \tag{3-6}$$

şeklinde bulunur. O halde genel olarak $1 \leq k \leq n$ ve $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k \leq n$ olmak üzere $X_{n_1:n}, X_{n_2:n}, ..., X_{n_k:n}$ sıra istatistiklerinin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{n_1, n_2, ..., n_k:n}(x_1, x_2, ..., x_k) &= \frac{n!}{(n_1 - 1)!(n_2 - n_1 - 1)!...(n - n_k)!} \\ \times F^{n_1 - 1}(x_1) f(x_1) [F(x_2) - F(x_1)]^{n_2 - n_1 - 1} & f(x_2) ... [1 - F(x_k)]^{n - n_k} f(x_k) \ , \\ x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k & \end{aligned} \tag{3-7}$$

olarak bulunur. $x_0 = -\infty$, $x_{k+1} = +\infty$, $n_0 = 0$, $n_{k+1} = n + 1$ tanımlanırsa

$$f_{n_1, n_2, \ldots, n_k:n}(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$
$$= n! \left[\prod_{j=1}^{k} f(x_j)\right] \prod_{j=0}^{k} \left\{ \frac{[F(x_{j+1}) - F(x_j)]^{n_{j+1}-n_j-1}}{(n_{j+1} - n_j - 1)!} \right\} \tag{3-8}$$

yazılabilir.

Kesikli rasgele değişkenler için sıra istatistiklerinin dağılımı genelde daha karmaşıktır. Tek bir sıra istatistiğinin dağılımından başlayalım. Bunun için herhangi bir X gözlem değeri için şu üç farklı olayı göz önüne alalım; $\{X < x\}$, $\{X = x\}$, $\{X > x\}$. Bu olayların olasılıkları sırasıyla $P(x-)$, $p(x)$ ve $1 - P(x)$ dir. $\{X_{i:n}\}$ olayı $i(n - i + 1)$ farklı şekilde meydana gelebilir; $r = 0, 1, \ldots, i - 1$ ve $s = 0, 1, \ldots, n - i$ olmak üzere $(i - 1 - r)$ tane gözlem değeri x den küçük, $(n - i - s)$ tanesi x den büyük ve kalanları ise x değerine eşittir. O halde

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{n-i} \frac{n!\{P(x-)\}^{i-1-r}\{p(x)\}^{s+r+1}\{1 - P(x)\}^{n-i-s}}{(i - 1 - r)!(s + r + 1)!(n - i - s)!} \tag{3-9}$$

olacaktır.

Şimdi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ için $X_{i_1:n}, X_{i_2:n}, \ldots, X_{i_k:n}$ sıra istatistiklerinin bileşik yoğunluk fonksiyonu incelenecektir. Bunun için de önce $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak yoğunluk fonksiyonu bulunacaktır. $1 \leq m \leq n$ olmak üzere $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ değerleri için

$$\begin{gathered} (x_1 = \ldots = x_{r_1}) < (x_{r_1+1} = \ldots = x_{r_2}) \\ < \ldots(x_{r_{m-2}+1} \ldots = x_{r_{m-1}}) < (x_{r_{m-1}+1} = \ldots = x_{r_m}) \ , \\ 1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_m = n \end{gathered} \tag{3-10}$$

geçerli olsun. O zaman $r_0 = 0$ kabul edilirse

$$f_{1,2,\ldots,n:n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! \prod_{s=1}^{m} \frac{[p(x_{r_s})]^{r_s - r_{s-1}}}{(r_s - r_{s-1})!} \tag{3-11}$$

elde edilir. Bu son ifade bir integral olarak yazılabilir. Bunun için

$$\begin{aligned} D \;\; = \;\; & \{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n, \\ & P(x_{r_s}-) \leq u_t \leq P(x_{r_s}), 1 \leq s \leq m, r_{s-1} + 1 \leq t \leq r_s\} \end{aligned} \tag{3-12}$$

tanımlanırsa

$$f_{1,2,\ldots,n:n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! \int_D du_1 du_2 \ldots du_n \tag{3-13}$$

olur. $1 \leq s \leq m$ ve $r_0 = 0$ olmak üzere

$$A_s = \Big\{(u_{r_{s-1}+1}, u_{r_{s-1}+2}, \ldots, u_{r_s}) : u_{r_{s-1}+1} \leq \ldots \leq u_{r_s} \text{ ve}$$

$$u_{r_{s-1}+1} \leq t \leq u_{r_s} \text{ için } P(x_{r_s}-) \leq u_t \leq P(x_{r_s})\} \tag{3-14}$$

ise $D = \bigcup_{s=1}^{m} A_s$ yazılıabilir. Her bir A_s kümesinde belli sayıda x değerleri eşittir; $x_{r_{s-1}+1} = ... = x_{r_s}$. Bu kümelerdeki integraller aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\int_{A_s} du_{r_{s-1}+1} du_{r_{s-1}+2} ... du_{r_s}$$

$$= \int_{P(x_{r_s}-)}^{P(x_{r_s})} \int_{P(x_{r_s}-)}^{u_{r_s}} ... \int_{P(x_{r_s}-)}^{u_{r_{s-1}+3}} \int_{P(x_{r_s}-)}^{u_{r_{s-1}+2}} du_{r_{s-1}+1} du_{r_{s-1}+2} ... du_{r_s} \tag{3-15}$$

O halde

$$\int_{A_s} du_{r_{s-1}+1} du_{r_{s-1}+2} ... du_{r_s}$$

$$= \frac{[P(x_{r_s}) - P(x_{r_s}-)]^{r_s - r_{s-1}}}{(r_s - r_{s-1})!} = \frac{[p(x_{r_s})]^{r_s - r_{s-1}}}{(r_s - r_{s-1})!} \tag{3-16}$$

dir.

Şimdi (3-13) kullanılarak $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ için $X_{i_1:n}, X_{i_2:n}, ..., X_{i_k:n}$ sıra istatistiklerinin bileşik yoğunluk fonksiyonu hesaplanacaktır. $k < n$ ise $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq ... \leq x_{i_k}$ için

$$f_{i_1,i_2,...,i_k:n}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}) = \sum f_{1,2,...,n:n}(x_1, x_2, ..., x_n) \ . \tag{3-17}$$

Buradaki toplam $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ hariç $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ koşulunu sağlayan x_r değerleri üzerinden alınmıştır. O halde, D_l kümeleri x_r değerlerinin değişik biçimlerde eşitlik durumularını göstermek üzere

$$f_{i_1,i_2,...,i_k:n}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}) = n! \sum_l \int_{D_l} du_1 du_2 ... du_n \ , \tag{3-18}$$

$$\bigcup_l D_l = \{(u_1, ..., u_n) : u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n, F(x_{i_r}-) \leq u_{i_r} \leq F(x_{i_r}), 1 \leq r \leq k\} .$$

$$B_r = \{(u_{i_{r-1}+1}, u_{i_{r-1}+2}, ..., u_{i_r-1}) :$$
$$u_{i_{r-1}+1} \leq u_{i_{r-1}+2} \leq ... \leq u_{i_r-1} \leq u_{i_r}\} \tag{3-19}$$

için

$$\int_{B_r} du_{i_{r-1}+1} du_{i_{r-1}+2} ... du_{i_r-1} = \int_{u_{i_{r-1}}}^{u_{i_r}} \int_{u_{i_{r-1}}}^{u_{i_r-1}} ... \int_{u_{i_{r-1}}}^{u_{i_{r-1}+2}} \int_{u_{i_{r-1}}}^{u_{i_{r-1}+2}} du_{i_{r-1}+1} du_{i_{r-1}+2} ... du_{i_r-1}$$

$$= \frac{\left(u_{i_r} - u_{i_{r-1}}\right)^{i_r - i_{r-1} - 1}}{(i_r - i_{r-1} - 1)!} \tag{3-20}$$

olduğundan

$$f_{i_1,i_2,\dots,i_k:n}(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}) = C(i_1,i_2,\dots,i_k;n)$$
$$\times \int_B \left\{ \prod_{r=1}^{k} (u_{i_r} - u_{i_{r-1}})^{i_r - i_{r-1} - 1} \right\} (1-u_{i_k})^{n-i_k} du_{i_1} \dots du_{i_k} \tag{3-21}$$

olarak hesaplanır. Burada $i_0 = 0$, $u_0 = 0$,

$$C(i_1,i_2,\dots,i_k;n) = n!/\left\{ (n-i_k)! \prod_{r=1}^{k} (i_r - i_{r-1} - 1)! \right\} \tag{3-22}$$

ve

$$B = \{(u_{i_1},\dots,u_{i_k}) : u_{i_1} \le u_{i_2} \le \dots \le u_{i_k}, \tag{3-23}$$
$$F(x_r-) \le u_r \le F(x_r), r = i_1, i_2, \dots, i_k\}. \tag{3-24}$$

3.1.3 Sıra İstatistiklerinin Momentleri

Mutlak sürekli bir dağılım fonksiyonuna sahip bir anakütleden çekilmiş bir örneklem için sıra istatistiklerinin momentleri (3-4) ve (3-6) formülleri kullanılarak

$$\mu_{i:n}^{(m)} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m \{F(x)\}^{i-1} \{1-F(x)\}^{n-i} f(x) dx, \tag{3-25}$$
$$1 \le i \le n, \quad m = 1, 2, \dots$$

ve

$$\mu_{i,j:n}^{(m_i,m_j)} = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}$$
$$\times \iint_{-\infty < x_i < x_j < \infty} x_i^{m_i} x_j^{m_j} \{F(x)\}^{i-1} \{F(x_j) - F(x_i)\}^{j-i-1} dx_i dx_j \tag{3-26}$$

olarak bulunur.

Standart düzgün dağılıma ait sıra istatistikleri kullanılarak (3-25) formülü daha sade bir biçimde yazılabilir. Bunun için ilk önce sıra istatistiklerinin önemli bir özelliği ifade edilecektir.

$U_{1:n}, U_{2:n} \dots, U_{n:n}$ sürekli standart düzgün dağılımdan rasgele seçilmiş bir örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. Eğer $F(x)$ sürekli ise $U = F(x)$ dönüşümü ile X rasgele değişkeni U standart düzgün rasgele değişkenine dönüşür. Bu durumda $F(X_{i:n})$ ile $U_{i:n}$ rasgele dağşkenlerinin dağılımı birbirine eşittir. Bu kısaca

$$F(X_{i:n}) \stackrel{d}{=} U_{i:n} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3-27}$$

şeklinde gösterilecektir.

F dağılım fonksiyonunun ters fonksiyonu

$$F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) \leq y\} \tag{3-28}$$

olmak üzere herhangi bir F dağılım fonksiyonu için

$$F^{-1}(U_i) \stackrel{d}{=} X_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3-29}$$

F^{-1} sıralamayı koruyan bir fonksiyon olduğundan

$$F^{-1}(U_{i:n}) \stackrel{d}{=} X_{i:n} \quad , \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3-30}$$

olacaktır.

O halde (3-30) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mu_{i:n}^{(m)} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 \{F^{-1}(u)\}^m u^{i-1}(1-u)^{n-i} du \\ 1 &\leq i \leq n, \quad m = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3-31}$$

Bu ifadede beta fonskiyonu bulunduğu gözönüne alınırsa $g_{i:n}(u)$, $Beta(i, n + 1 - i)$ yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere

$$\mu_{i:n}^{(m)} = \int_0^1 \{F^{-1}(u)\}^m g_{i:n}(u) du, \quad 1 \leq i \leq n, \quad m \geq 1 \tag{3-32}$$

yazılabilir.

3.1.4 Rekor Değerlerinin Dağılımı

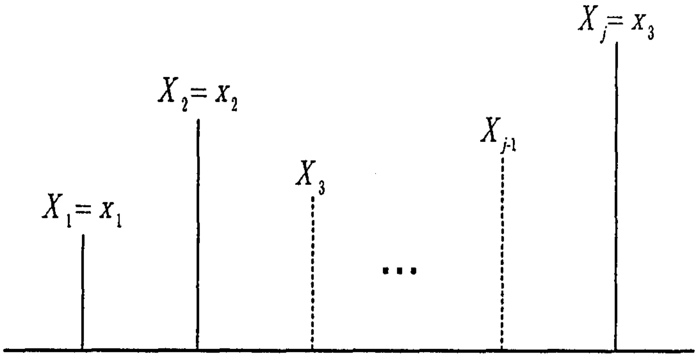
Rekor değerlerinin dağılımlarını elde etmek için $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız ve aynı birikimli dağılım fonksiyonuna sahip oldukları kabul edilecektir.

Üst rekor değerlerinin oluştuğu indisler $U(n)$, $n \geq 1$ ile gösterilirse, $U(1) = 1$ ve $U(n) = \min\{j \mid j > U(n-1),\ X_j > X_{U(n-1)},\ n > 1\}$ olacaktır.

İlk önce kesikli rasgele değişkenler ele alınacaktır. Bu durumda $P(x)$ birikimli dağılım fonksiyonu ve $p(x)$ de olasılık fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \frac{p(x_1)}{1 - P(x_1)} \frac{p(x_2)}{1 - P(x_2)} \cdots \frac{p(x_{n-1})}{1 - P(x_{n-1})} p(x_n), \\ -\infty &< x_1 < x_2 < ... < x_n < \infty \end{aligned} \tag{3-33}$$

Bunu görebilmek için $n = 3$ iken formülün nasıl elde edildiği gösterilecektir.

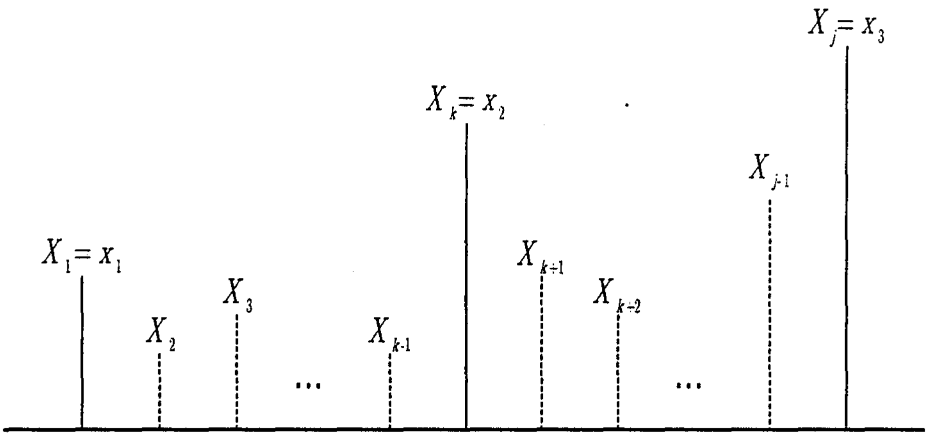


Şekil 3.2. Rekor değerleri için özel bir durum

Şekil 3.2 deki durum için

$$\begin{aligned} P(X_1 &= x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3 \,|U(2) = 2) \\ &= p(x_1)p(x_2)p(x_3)\sum_{j=3}^{\infty}[P(x_2)]^{j-3} \\ &= p(x_1)p(x_2)p(x_3)\sum_{j=0}^{\infty}[P(x_2)]^{j} = p(x_1)p(x_2)p(x_3)\frac{1}{1-P(x_2)} \end{aligned} \tag{3-34}$$

Şimdi $U(2) = k$, $k > 2$ olsun. Bu durumda $U(3) = j$ ise $j > k$ olmalıdır.



Şekil 3.3. Rekor değerleri için örnek bir durum.

Örneğin Şekil 3.3 deki durum için

$$\begin{aligned} P(X_1 &= x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3 \,|U(2) = k, U(3) = j) \\ &= P(X_1 = x_1, X_2 < x_1, ..., X_{k-1} < x_1, \\ X_k &= x_2, X_{k+1} < x_2, ..., X_{j-1} < x_2, X_j = x_3) \\ &= p(x_1)[P(x_1)]^{k-2}p(x_2)[P(x_2)]^{j-(k+1)}p(x_3). \end{aligned} \tag{3-35}$$

O halde

$$\begin{aligned}P(X_1 &= x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3) \\ &= P(X_1 = x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3 \,|U(2) = 2) \quad (3\text{-}36) \\ +\sum_{k,j} P(X_1 &= x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3 \,|U(2) = k, U(3) = j).\end{aligned}$$

$k > 2$ ve $j > k$ olduğundan

$$\begin{aligned}P(X_1 &= x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3) \\ &= p(x_1)p(x_2)p(x_3)\frac{1}{1-P(x_2)} \qquad (3\text{-}37) \\ &+p(x_1)p(x_2)p(x_3)\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty}[P(x_1)]^{k-2}[P(x_2)]^{j-(k+1)},\end{aligned}$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$P(X_1 = x_1, X_{U(2)} = x_2, X_{U(3)} = x_3) = \frac{p(x_1)}{1-P(x_1)}\frac{p(x_2)}{1-P(x_2)}p(x_3) \qquad (3\text{-}38)$$

elde edilir. Genel halde aynı yol izlenir ancak ayrıntılar ve hesaplamalar daha uzun olmaktadır.

Şimdi rasgele değişkenler sürekli olsun. $R(x) = -\ln(1 - F(x))$, $r(x) = \frac{dR}{dx} = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ tanımlarsak $0 \leq F(x) < 1$ olmak üzere $X_{U(1)}, X_{U(2)}, ..., X_{U(n)}$ rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, ..., x_n) &= r(x_1)r(x_2)...r(x_{n-1})f(x_n), \\ -\infty &< x_1 < x_2 < ... < x_n < \infty \qquad (3\text{-}39)\end{aligned}$$

olarak elde edilmektedir.

Bu formülün nasıl elde edilebileceğini görmek için $X_{U(1)}, X_{U(2)}, X_{U(3)}$ rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonksiyonunun elde edilişi aşağıda gösterilmişitir. Bunun için ilk önce

$$\begin{aligned}&P(X_1 \leq x_1, X_{U(2)} \leq x_2, X_{U(3)} \leq x_3) \\ &= P\left(X_1 \leq x_1, X_{k_2} > X_1, X_{k_3} > X_{k_2} \,|U(2) = k_2, U(3) = k_3, k_2 = 2, k_3 = 3\right) \\ &\quad +P\left(X_1 \leq x_1, X_{k_2} > X_1, X_{k_3} > X_{k_2},\right. \\ &\quad \left.X_{k_2+1} < X_{k_2}, ..., X_{k_3-1} < X_{k_2}, X_{k_3} > X_{k_2} \,|U(2) = k_2, U(3) = k_3, k_2 = 2\right) \\ &\quad +\sum_{k_2=3}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty} P\left(X_1 \leq x_1, X_2 < X_1, ..., X_{k_2-1} < X_1, X_{k_2} > X_1,\right. \\ &\quad \left.X_{k_2+1} < X_{k_2}, ..., X_{k_3-1} < X_{k_2}, X_{k_3} > X_{k_2} | \, U(2) = k_2, U(3) = k_3\right),\end{aligned}$$

yani

$$
\begin{aligned}
& P(X_1 \leq x_1, X_{U(2)} \leq x_2, X_{U(3)} \leq x_3) \\
= & \sum_{k_2=2}^{\infty} \sum_{k_3=k_2+1}^{\infty} P\left(X_1 \leq x_1, X_2 < X_1, ..., X_{k_2-1} < X_1, X_{k_2} > X_1,\right. \\
& \left. X_{k_2+1} < X_{k_2}, ..., X_{k_3-1} < X_{k_2}, X_{k_3} > X_{k_2} \,|\, U(2) = k_2, U(3) = k_3\right)
\end{aligned}
\tag{3-40}
$$

yazılırsa,

$$D = \{(t_1, t_2, t_3) : -\infty < t_1 < t_2 < t_3 \leq x_3, t_1 \leq x_1, t_2 \leq x_2\} \tag{3-41}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& P(X_1 \leq x_1, X_{U(2)} \leq x_2, X_{U(3)} \leq x_3) \\
= & \sum_{k_2=2}^{\infty} \sum_{k_3=k_2+1}^{\infty} \iiint_D F^{k_2-2}(t_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_1) dF(t_2) dF(t_3) \,.
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Toplam içindeki integralin sınırları incelenirse integral bölgesinin

$$
\begin{aligned}
t_1 &\leq \min(t_2, x_1) \\
t_2 &\leq \min(t_3, x_2) \\
t_3 &\leq x_3
\end{aligned}
\tag{3-42}
$$

olarak belirlendiği görülür. Yani

$$
\begin{aligned}
& \iiint_D F^{k_2-2}(t_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_1) dF(t_2) dF(t_3) \\
= & \int_{-\infty}^{x_3} \int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \int_{-\infty}^{\min(t_2,x_1)} F^{k_2-2}(t_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_1) dF(t_2) dF(t_3)
\end{aligned}
\tag{3-43}
$$

Diğer yandan

$$\int_{-\infty}^{\min(t_2,x_1)} F^{k_2-2}(t_1) dF(t_1) = \begin{cases} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(x_1), x_1 < t_2 \\ \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(t_2), x_1 \geq t_2 \end{cases} \tag{3-44}$$

olduğundan $x_1 < t_2$ için

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \int_{-\infty}^{\min(t_2,x_1)} F^{k_2-2}(t_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_1) dF(t_2) \\
= & \int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(x_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_2)
\end{aligned}
\tag{3-45}
$$

ve $x_1 \geq t_2$ için

$$\int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \int_{-\infty}^{\min(t_2,x_1)} F^{k_2-2}(t_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_1) dF(t_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(t_2) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_2) \ . \qquad (3\text{-}46)$$

Şimdi $x_2 < t_3$ için

$$\int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(x_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_2)$$

$$= \frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1} \frac{F^{k_3-k_2}(x_2)}{k_3-k_2} \ , \ (x_1 < t_2 \text{ den}) \qquad (3\text{-}47)$$

$$\int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(t_2) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_2)$$

$$= \frac{F^{k_3-1}(x_2)}{(k_2-1)(k_3-1)} \ , \ (x_1 \geq t_2 \text{ den}) \qquad (3\text{-}48)$$

ve $x_2 \geq t_3$ için

$$\int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(x_1) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_2)$$

$$= \frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1} \frac{F^{k_3-k_2}(t_3)}{k_3-k_2} \ , \ (x_1 < t_2 \text{ den}) \qquad (3\text{-}49)$$

$$\int_{-\infty}^{\min(t_3,x_2)} \frac{1}{k_2-1} F^{k_2-1}(t_2) F^{k_3-(k_2+1)}(t_2) dF(t_2)$$

$$= \frac{F^{k_3-1}(t_3)}{(k_2-1)(k_3-1)} \ , \ (x_1 \geq t_2 \text{ den}) \qquad (3\text{-}50)$$

bulunur.

Sonuçta

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(t_1,t_2,t_3) : -\infty < t_1 < t_2 < x_1, t_3 < x_2\} \ , \\ D_2 &= \{(t_1,t_2,t_3) : -\infty < t_1 < x_1 < t_2 < t_3 < x_2\} \ , \\ D_3 &= \{(t_1,t_2,t_3) : -\infty < t_1 < t_2 < x_1, x_2 < t_3 < x_3\} \ , \\ D_4 &= \{(t_1,t_2,t_3) : -\infty < t_1 < x_1 < t_2 < x_2 < t_3 < x_3\} \end{aligned} \qquad (3\text{-}51)$$

ve $f(t_1,t_2) = F^{k_2-2}(t_1)F^{k_3-(k_2+1)}(t_2)$ olmak üzere

$$\iiint\limits_{D} F^{k_2-2}(t_1)F^{k_3-(k_2+1)}(t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3) \tag{3-52}$$

$$= \left(\iiint\limits_{D_1} + \iiint\limits_{D_2} + \iiint\limits_{D_3} + \iiint\limits_{D_4}\right) f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3)$$

elde edilir. Buradan da

$$\iiint\limits_{D_1} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3) = \int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3)$$

$$= \frac{1}{k_2-1}\frac{F^{k_3-1}(x_1)}{k_3-1}F(x_2) \tag{3-53}$$

$$\iiint\limits_{D_2} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3) = \int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{x_1}^{t_3}\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3)$$

$$= \frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{(k_3-k_2)(k_3-k_2+1)} \tag{3-54}$$

$$\iiint\limits_{D_3} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3) = \int\limits_{x_2}^{x_3}\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{t_2} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3)$$

$$= \frac{1}{k_2-1}\frac{F^{k_3-1}(x_1)}{k_3-1}\left[F(x_3)-F(x_2)\right] \tag{3-55}$$

$$\iiint\limits_{D_4} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3) = \int\limits_{x_2}^{x_3}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(t_1,t_2)dF(t_1)dF(t_2)dF(t_3)$$

$$= \frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\frac{F^{k_3-k_2}(x_2)-F^{k_3-k_2}(x_1)}{k_3-k_2}\left[F(x_3)-F(x_2)\right] . \tag{3-56}$$

O halde

$$F(x_1,x_2,x_3) = P\left(X_1 \le x_1, X_{U(2)} \le x_2, X_{U(3)} \le x_3\right) =$$

$$= \sum_{k_2=2}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k_2-1}\frac{F^{k_3-1}(x_1)}{k_3-1}F(x_2) + \frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{(k_3-k_2)(k_3-k_2+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\frac{F^{k_3-k_2}(x_2)-F^{k_3-k_2}(x_1)}{k_3-k_2}\left[F(x_3)-F(x_2)\right]\right) , \tag{3-57}$$

$$-\infty < x_1 < x_2 < x_3 \,.$$

Şimdi bu iki katlı serinin yakınsak olduğu gösterilecektir:

İlk seri

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_2=2}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{1}{k_2-1}\frac{F^{k_3-1}(x_1)}{k_3-1}\\
&=\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left(\frac{F(x_1)}{k_2}+\frac{F^2(x_1)}{k_2+1}+\frac{F^3(x_1)}{k_2+2}+\ldots\right)\\
&\leq\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left(F(x_1)+\frac{F^2(x_1)}{2}+\frac{F^3(x_1)}{3}+\ldots\right)\\
&=\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left(-\ln\bar{F}(x_1)\right)=\left(-\ln\bar{F}(x_1)\right)^2
\end{aligned}
\tag{3-58}
$$

$0\leq F(x_1)<1$ için yakınsaktır. Yani

$$
\sum_{k_2=2}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{1}{k_2-1}\frac{F^{k_3-1}(x_1)}{k_3-1}F(x_2)=G(x_1,x_2)\,. \tag{3-59}
$$

İkinci seri için

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_2=2}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{(k_3-k_2)(k_3-k_2+1)}\\
&=\sum_{k_2=2}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left[\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{k_3-k_2}-\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{k_3-k_2+1}\right]\\
&=\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left(\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{k_3-k_2}-\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{F^{k_3-k_2+1}(x_2)}{k_3-k_2+1}\right)\\
&=\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left(-F(x_2)\ln\bar{F}(x_2)+F(x_2)+\ln\bar{F}(x_2)\right)\\
&=\left(-F(x_2)\ln\bar{F}(x_2)+F(x_2)+\ln\bar{F}(x_2)\right)\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\\
&=\left(\bar{F}(x_2)\ln\bar{F}(x_2)+F(x_2)\right)\left(-\ln\bar{F}(x_1)\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Üçüncü seri

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_2=2}^{\infty}\sum_{k_3=k_2+1}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\frac{F^{k_3-k_2}(x_2)-F^{k_3-k_2}(x_1)}{k_3-k_2}\\
&=\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{F^{k_2-1}(x_1)}{k_2-1}\left(-\ln\bar{F}(x_2)+\ln\bar{F}(x_1)\right)\\
&=\left(-\ln\bar{F}(x_2)+\ln\bar{F}(x_1)\right)\left(-\ln\bar{F}(x_1)\right)\,.
\end{aligned}
\tag{3-60}
$$

şeklinde hesaplanır.

Sonunda

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,x_3) &= G(x_1,x_2) \\ &+ \left(\bar{F}(x_2)\ln\bar{F}(x_2)+F(x_2)\right)\left(-\ln\bar{F}(x_1)\right) \\ &+ \left(-\ln\bar{F}(x_2)+\ln\bar{F}(x_1)\right)\left(-\ln\bar{F}(x_1)\right)[F(x_3)-F(x_2)] \end{aligned} \tag{3-61}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} F(x_1,x_2,x_3) \\ &= \frac{f(x_1)}{1-F(x_1)} \frac{f(x_2)}{1-F(x_2)} f(x_3) \ , \end{aligned} \tag{3-62}$$

veya kısaca

$$f(x_1,x_2,x_3) = r(x_1)r(x_2)f(x_3) \ , \ -\infty < x_1 < x_2 < x_3 \tag{3-63}$$

elde edilir.

Alt rekorlar için de benzer bir förmül geçerlidir. $H(x) = -\ln F(x)$, $0 \le F(x) < 1$ ve $h(x) = -\frac{d}{dx}H(x)$ ise $X_{L(1)}, X_{L(2)}, ..., X_{L(n)}$ rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{L(1),..L(n)}(x_1,...,x_n) &= h(x_1)h(x_2)...h(x_{n-1})f(x_n), \\ -\infty &< x_n < x_{n-1} < ... < x_1 < \infty. \end{aligned} \tag{3-64}$$

(3-64) elde edildikten sonra $X_{L(n)}$ nin veya $X_{L(i)}$ ile $X_{L(j)}$ rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonksiyonlarını elde etmek için integral almak yeterli olacaktır. Örneğin $X_{L(n)}$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$A = \{(x_1,...,x_{n-1}) : x_n < x_{n-1} < ... < x_2 < x_1\} \tag{3-65}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{X_{L(n)}}(x_n) &= \int_A h(x_1)...h(x_{n-1})f(x_n)dx_1...dx_{n-1} \\ &= f(x_n)\int_{x_n}^{\infty}\int_{x_{n-1}}^{\infty}...\int_{x_2}^{\infty} h(x_1)...h(x_{n-1})dx_1...dx_{n-2}dx_{n-1}. \end{aligned} \tag{3-66}$$

O halde

$$\begin{aligned} f_{L(n)}(x_n) &= f(x_n)\int_{x_n}^{\infty} h(x_{n-1})dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^{\infty} h(x_{n-2})dx_{n-2}...\int_{x_2}^{\infty} h(x_1)dx_1 \\ &= f(x_n)\frac{[H(x_n)]^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\{-\ln[F(x_n)]\}^{n-1}}{(n-1)!}f(x_n) \end{aligned} \tag{3-67}$$

olarak hesaplanır.

3.2. Dağılımların Karakterizasyonu

Sıra istatistikleri ve rekor değerleri yardımıyla karakterizasyon sonuçlarına geçmeden önce karakterizasyon çalışmalarının önemini vurgulamak için burada bazı bilgiler verilecektir. Özellikle moment problemi ve koşullu matematiksel beklenen değer bu anlamda çok önemlidir. Ancak daha önce normal dağılım ve üstel dağılıma ait bazı özelliklerin verilmesi konuya giriş bakımından uygun olacaktır.

3.2.1 Genel Bilgi

Bilindiği gibi birbirinden bağımsız ve normal dağılmış iki rasgele değişkenin toplamı olan rasgele değişken yine normal dağılmaktadır. Daha da önemli bir sonuç bunun tersi incelenerek elde edilmiştir. Yani biribirinden bağımsız iki rasgele değişkenin toplamı olan rasgele değişkenin normal dağılmış olduğu biliniyorsa acaba bileşenler hakkında bir şeyler söylenebilir mi? P. Lévy bileşenlerin de normal dağıldığını öne sürmüşse de bunların gerçekten de normal dağıldığını Cramér (1936) kanıtlamıştır. Bu şekilde normal dağılımın karakteristik bir özelliği elde edilmiştir.

Negatif olmayan rasgele değişkenler araçların veya canlıların yaşam sürelerini modellemek için kullanılırlar. Zaman geçtikçe değişik etkenlerden dolayı birimlerin zayıflaması beklenir. Uç bir durum ise yaşlanmadan etkilenmeyen sistemlerdir. F birikimli dağılım fonksiyonunu göstermek üzere $\bar{F}= 1 - F$ yaşam fonksiyonu olarak düşünülebilir. Eğer

$$\forall x, y \text{ için } \bar{F}\,(x+y) = \bar{F}\,(x)\,\bar{F}\,(y) \tag{3-68}$$

sağlanıyorsa böyle bir sistemin y birim kadar dayandığı biliniyorsa x birim kadar daha dayanma olasılığı sistemin x birim kadar dayanma olasılığına eşittir. Yani sistemin geçmişi önemli değildir, dolayısıyla sistem geçmişini hatırlamıyor denilebilir. Çok zayıf koşullar altında sürekli dağılımlar ailesi içinde bu özelliği sadece üstel dağılımın sağladığı gösterilebilir (bkz. 3.2.5). Kesikli dağılımlar ailesinde de sadece geometrik dağılım geçmişini hatırlamaz. O halde geçmişi hatırlamama özelliği üstel ve geometrik dağılımlarını karakterize eden bir özelliktir. Üstel dağılım için bu özelliğe bağlı bir çok karakterizasyon sonucu elde edilmiştir.

Bu iki sonucun ve buna benzer başka sonuçların önemini görebilmek için şimdi moment problemi gözden geçirilecektir.

3.2.2 Moment Problemi

Bir rasgele değişkeni belirlemek için ilk akla gelen yaklaşım rasgele değişkenin aldığı "ortalama" değerdir. Fonksiyonların ortalama değeri integral ile bulunduğundan bu tür integrallerin olasılık ve istatistik teorisinde önemli oldukları düşünülebilir. Gerçekten de bu tür integraller önemlidir ve moment kavramı bunlara dayanmaktadır.

k herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere dağılım fonksiyonu F olan X rasgele değişkeninin k mertebesindeki momenti

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) \tag{3-69}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $m_0 = E(X^0) = 1$ kabul edilecektir.

Momentlerin ilginç bir özelliği $[m_k]^{\frac{1}{k}}$ dizisinin k ya göre artan olmasıdır. Bu aynı zamanda bir rasgele değişkenin momentlerinin keyfi olamayacağını göstermektedir.

Burada bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonunu hatırlatıp onunla ilgili bazı özellikleri gözden geçirmek faydalı olacaktır. X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilirse X in karakteristik fonksiyonu

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(x), \quad t > 0 \tag{3-70}$$

şeklinde tanımlanır.

F_1 ve F_2 iki birikimli dağılım fonksiyonu olsun. Eğer bunların karakteristik fonksiyonu aynı ise o zaman F_1 ve F_2 dağılımları biribirine eşittir. Yani birikimli dağılım fonksiyonları ile onların karakteristik fonksiyonları arasında bire-bir bir bağıntı vardır.

Aşağıdaki teorem karakteristik fonksiyonlar ve momentler arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.1. *Eğer $E[X^n]$ tanımlı ise $k \leq n$ için φ_X in k mertebesinden türevleri vardır ve*

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E[X^k] \; ; \tag{3-71}$$

ayrıca

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} E[X^k] \frac{(it)^k}{k!} + R_n(t). \tag{3-72}$$

Burada

$$R_n(t) = (it)^n \int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{istx} dF_X(x) \right] ds \tag{3-73}$$

olup

$$|R_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{n!} E[|X|^n] \tag{3-74}$$

geçerlidir.

Bu teoremden sonra, momentler biliniyorsa karakteristik fonksiyon da biliniyor, dolayısıyla birikimli dağılım fonksiyonu da elde edilebilir diye düşünülebilir. Ancak bu düşüncenin doğru olmadığı değişik örneklerle gösterilmiştir. Örneğin C.C. Heyde log-normal dağılımın momentleri tarafından tek olarak belirlenemediğini göstermiştir.

Örnek 3.1. *X pozitif bir rasgele değişken olmak üzere $\log X$ normal dağılmış ise X log-normal dağılıma sahiptir denir. Standart normal dağılım için X in olasılık yoğunluk fonksiyonu*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2}, \; x > 0 \tag{3-75}$$

şeklindedir. $-1 \leq a \leq 1$ için

$$f_a(x) = f(x)\left[1 + a \sin(2\pi \log x)\right] \tag{3-76}$$

tanımlanırsa f_a nın tüm momentleri f nin momentleri ile aynıdır. $f_a \geq 0$ olduğundan

$$\int_0^{\infty} x^k f(x) \sin(2\pi \log x) dx = 0, \; k = 0, 1, ... \tag{3-77}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\log x = t = y + k$ dönüşümü ile son integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 + kt} \sin(2\pi t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sin(2\pi y) dy \tag{3-78}$$

olur. İntegral altındaki fonksiyon tek oluğu için bu da sıfıra eşittir.

Başka bir örnek Burrill'in kitabında bulunabilir (Burrill 1972).

Momentler yardımıyla birikimli dağılım fonksiyonunu belirleyebilmek için bazı şartlar gereklidir. Bu yöndeki en iyi sonuçlardan birisi Carleman koşulları adıyla literatüre geçmiştir. Bu teoreme göre F dağılım fonksiyonunu $m_k = E(X^k)$ momentleri ile tek olarak belirleyebilmek için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m_{2n})^{\frac{1}{2n}}} = \infty, \tag{3-79}$$

yani sol taraftaki serinin ıraksak olması gerekir. Buna göre

$$m_k = E(X^k) = \frac{1}{m+1}, \; m \geq 1 \tag{3-80}$$

dizisi F nin standart düzgün,

$$m_k = E(X^k) = k!, \; m \geq 1 \tag{3-81}$$

dizisi ise F nin standart üstel dağılım olmasını gerektirir.

O halde genel olarak bir dağılımı tek olarak belirleyebilmek için sonsuz sayıda momentin bilinmesi gerekmektedir. Ancak sıra istatistiklerinin ve rekor değerlerinin momentleri kullanılarak daha zayıf koşullar altında dağılımları karakterize etmek mümkündür. Örneğin Huang (1975)

$$\{E(X_{n_j:n_j}) : j = 1, 2, ...\}, \; n_1 < n_2 < ... \text{ ve } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} = \infty \tag{3-82}$$

ve

$$\{E(X_{1:n_j}) : j = 1, 2, ...\}, \; n_1 < n_2 < ... \text{ ve } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} = \infty \tag{3-83}$$

dizilerinin dağılımı tek olarak belirlediğini göstermiştir.

Momentler yardımıyla karakterizasyon konusunda daha çok bilgi 3.2.4 de verilecektir.

3.2.3 Koşullu Matematiksel Beklenen Değer

Daha sonra koşullu matematiksel beklenen değer kullanılarak karakterizasyon sonuçları verilecektir (bkz. 3.2.7). Bu nedenle burada kendi başına da önemli olan koşullu matematiksel beklenen değerin tanımını vermek uygun olacaktır.

ξ, $\{\Omega, \Im, P\}$ olasılık uzayında tanımlı $F(x)$ birikimli dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken ve $B \in \Im$ herhangi bir olay olsun.

Şimdi

$$F(x|B) = P\{\xi \leq x|B\} \tag{3-84}$$

tanımlayalım. Buna göre

$$E(\xi|B) = \int x dF(x|B) \tag{3-85}$$

olacaktır.

$\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ ailesi şu özelliklere sahip olsun: $B_i \in \Im$ olmak üzere $i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \varnothing$ ve $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. O zaman

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} P\{\xi \leq x|B_i\} P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} F(x|B_i)P(B_i) \tag{3-86}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} E\xi &= \int xd\left(\sum_{i=1}^{n} F(x|B_i)P(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \int xdF(x|B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)E(\xi|B_i) = EE(\xi|\mathfrak{B}). \end{aligned} \tag{3-87}$$

O halde $\hat{\xi} = E(\xi|\mathfrak{B})$ tanımlanırsa ξ ile tanımlanan yeni bir rasgele değişken elde edilir ve bu yeni değişkenin olasılık dağılımı aşağıdaki gibi olup

$$\begin{array}{cccccc} \hat{\xi} & : & E(\xi|B_1) & E(\xi|B_2) & ... & E(\xi|B_n) \\ P(\hat{\xi}) & : & P(B_1) & P(B_2) & ... & P(B_n) \end{array}$$

$E\xi = E\hat{\xi}$ geçerlidir.

$B \in \Im$ için

$$E(\xi|B) = \int \xi(w)P(dw|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B \xi(w)P(dw) \tag{3-88}$$

yazılır ve

$$E(\xi; B) = \int_B \xi(w)P(dw) \tag{3-89}$$

gösterimi kullanılırsa

$$E(\xi|B) = \frac{E(\xi; B)}{P(B)} \tag{3-90}$$

olur ve bu ifadeye ξ rasgele değişkeninin B olayına göre tanımlanmış koşullu matematiksel beklenen değeri denir.

Buraya kadar sadece sonlu bir aile için koşullu matematiksel beklenen değer tanımlanmıştır. Bu tanım bir adım daha ileri götürülürse sayılabilir sayıda elemandan oluşan bir aile için benzer bir tanım elde edilir. Söz konusu aile $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ olsun. $\Im_1$ ile bu ailenin doğurduğu σ-cebri gösterilsin;

yani $\Im_1 = \sigma(A_1, A_2, ..., A_n, ...)$. Şimdi $w \in A_k$ için

$$\hat{\xi}(w) \equiv y_k = E(\xi | A_k) = \int x dP\{x|A_k\} \tag{3-91}$$

tanımlanırsa

$$\hat{\xi}(w) = \sum_k \frac{E(\xi; A_k)}{P(A_k)} I_{A_k}(w) \text{ olur.} \tag{3-92}$$

(3-92) ile tanımlanan $\hat{\xi}$ rasgele değişkenine ξ rasgele değişkeninin $\Im_1$ σ-cebrine göre koşullu matematiksel beklenen değeri denir ve $E(\xi|\Im_1)$ ile gösterilir:

$$\hat{\xi}(w) = E(\xi|\Im_1) = \sum_k \frac{E(\xi; A_k)}{P(A_k)} I_{A_k}(w). \tag{3-93}$$

O halde $\hat{\xi}$ rasgele değişkeni Ω da tanımlıdır ve şu özelliklere sahiptir:

1) $\forall A \in \Im_1$ için $E(\hat{\xi}; A) = E(\xi; A)$.
2) $\hat{\xi}$ rasgele değişkeni $\Im_1$ ölçülebilendir.

Bu özel durumlar genel halde koşullu matematiksel beklenen değerin sağlaması gereken özellikleri göstermektedir.

$\Im_1 \subset \Im$ ve ξ de $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlı bir rasgele değişken olmak üzere $\Im_1$, $\Im$ nin herhangi bir alt σ-cebri olsun. Yine $(\Omega, \Im, P)$ uzayında tanımlanan $\hat{\xi}$ rasgele değişkeni

1) $\hat{\xi}(w), \Im_1$ ölçülebilen
2) $\forall A \in \Im_1$ için $E\{\hat{\xi}; A\} = E\{\xi; A\}$

özelliklerini sağlarsa $\hat{\xi}$ rasgele değişkenine ξ rasgele değişkeninin $\Im_1$ σ-cebrine göre koşullu matematiksel beklenen değeri denir ve $\hat{\xi}(w) = E(\xi|\Im_1)$ ile gösterilir.

Buradaki $\hat{\xi}$ rasgele değişkeninin, yani ξ rasgele değişkeninin $\Im_1$ σ-cebrine göre koşullu matematiksel beklenen değerinin varlığı Radon-Nikodym teoreminden (bkz. s. 5) çıkmaktadır.

Koşullu matematiksel beklenen değerin önemli olan ve karakterizasyon çalışmalarında kullanılan özelliklerinden birisi aşağıda ifade edilmiştir.

Özellik 3.1. *$\mathfrak{A}_1$ tüm $\Im_1$ ölçülebilen rasgele değişkenlerin sınıfı olsun. $a(w) \in \mathfrak{A}_1$ olmak üzere $\mathfrak{A}_1$ sınıfı içerisinde $E(\xi - a(w))^2$ ifadesini minimum yapan $a(w)$ rasgele değişkeni $a^*(w)$ ile gösterilirse*

$$a^*(w) = E(\xi\,|\Im_1)\,. \tag{3-94}$$

3.2.4 Momentler Yardımıyla Karakterizasyon

$X_1, X_2, ..., X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı birikimli F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. $X_{n:n}$ nin dağılımı F yi tamamen belirler. Bu hemen görülmektedir. Her x için $F_{n:n}(x) = [F(x)]^n$ olduğundan $F(x) = [F_{n:n}(x)]^{\frac{1}{n}}$. Aynı sonuç $F_{i:n}$ için de geçerlidir. Bunu görmek için

$$F_{i:n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} dt \tag{3-95}$$

formülünü incelemek yeterli olacaktır. İki F ve F' dağılımı bir x_0 noktasında farklı değerler alıyorsa o zaman bunlara karşılık gelen $X_{i:n}$ ve $X'_{i:n}$ sıra istatistiklerinin dağılımları da aynı noktada farklı değerler alacaktır.

Daha önce üçüncü bölümde bir dağılımın momentlerinin o dağılımı tek olarak belirleyebilmesi için bazı şartların gerektiği gösterilmişti. Acaba sıra istatistiklerinin momentleri için ne söylenebilir? Hoeffding (1953), $\mu_{i:n} = E(X_{i:n})$ olmak üzere $\{\mu_{i:n} : i = 1, 2, ..., n; n = 1, 2, ...\}$ dizisinin F^{-1} ve dolayısyla da F yi belirlediğini ispatlamıştır. Daha sonra Huang (1975)

$$\{E(X_{n_j:n_j}) : j = 1, 2, ...\},\ n_1 < n_2 < ... \text{ ve } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} = \infty \tag{3-96}$$

ve

$$\{E(X_{1:n_j}) : j = 1, 2, ...\},\ n_1 < n_2 < ... \text{ ve } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} = \infty \tag{3-97}$$

dizilerinin F dağılımını tek olarak belirlediğini göstermiştir.

O halde genelde herhangi bir dağılımı belirlemek için sıra istatistikleri de kullanılsa sayılabilir sayıda sonsuz momentin bilinmesi gerekiyor. Ancak Lin (1988a) sadece iki moment yardımıyla standart düzgün ve standart üstel dağılımlarını karakterize etmeyi başarmıştır. Bunu da sıra istatistikleri ve rekor değerlerinin momentleri arasında bağıntılar elde ederek gerçekleştirmiştir. Söz konusu çalışmada sıra istatistikleri ve rekor değerlerine ait teoremler arasında parallelik olduğu için burada sadece sıra istatistiklerine ait teoremler verilmiştir. Ayrıntılar için (Lin 1988a) incelenebilir.

Teorem 3.2. *$EX^2 < \infty$ olsun. O zaman k ve n, $2 \le k \le n$ koşulunu sağlayan sabitler olmak üzere*

$$(EX_{k:n})^2 \le \frac{nk}{(n+1)(k-1)} E(X^2_{k-1:n-1}). \tag{3-98}$$

Eşitlik olması için gerek ve yeter şart F nin $x = 0$ noktasında dejenere veya $F \sim U(0,c)$ olmasıdır. Burada

$$c = \left\{ \frac{n(n+1)}{k(k-1)} E(X^2_{k-1:n-1}) \right\}^{\frac{1}{2}} > 0. \tag{3-99}$$

Teorem 3.3. *a bir gerçel sayı ve m de pozitif bir tamsayı olmak üzere $E(X^{2m}) < \infty$ olsun. O zaman sabit her $n \ge 2$ için*

$$[E(X^m_{n:n}) - aE(X^m)]^2 \le \left[(a-1)^2 + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right] E(X^{2m}). \tag{3-100}$$

Eşitlik olması için gerek ve yeter şart F nin $x = 0$ noktasında dejenere veya

$$F(x) = \left[n^{-1}(a + c^{-1}x^m) \right]^{1/(n-1)}, x \in I \tag{3-101}$$

olmasıdır. Burada

$$c^2 = \left[(a-1)^2 + \frac{(n-1)^2}{2n-1} \right]^{-1} E(X^{2m}) \tag{3-102}$$

ve

(i) eğer m tek ve $a \le 0$ ise $c > 0$ ve $I = \left((-ac)^{1/m}, (c(n-a))^{1/m} \right)$,
(ii) eğer $m$çift ve $a \ge n$ ise $c < 0$ ve $I = \left(-(-ac)^{1/m}, -(c(n-a))^{1/m} \right)$.

Teorem 3.2 nin bir sonucu olarak $(0,1)$ de düzgün dağılım şu şekilde karakterize edilmiştir.

Sonuç 3.4. $E(X^2) = \frac{1}{3}$ *ve* $E(X_{2:2}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow F \sim U(0,1)$.

Teorem 3.3 den ise aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 3.5. $EX = \mu$, $EX^2 = \mu^2 + \frac{c^2}{3}$ *ve* $EX_{2:2} = \mu + \frac{c}{3} \Leftrightarrow F \sim U(\mu - c, \mu + c)$.

Bu teoremlerde sıra istatistikleri bulunan yerlerde rekor değerleri yazılarak benzer eşitsizlikler elde edilir. O zaman sadece sabitler ve eşitlik durumlarına karşı gelen dağılımlar değişmektedir. Bunlar yardımıyla örneğin standart üstel dağılım için aşağıdaki sonuç elde edilimiştir (Lin 1988a).

Sonuç 3.6. $E(X^2) = 2$ *ve* $E(X_{U(2)}) = 2 \Leftrightarrow F(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$.

$\mu_{i:n}$ momentleri yerine bunlar arasındaki bazı bağıntılar verilmiş olabilir. Böylece bu tür bilgiler dağılımı ne ölçüde karakterize eder sorusu gündeme gelir. Örneğin, $i < j$ olmak üzere her $n \geq 2$ için

$$E(X_{j:n} - X_{i:n}), i < j$$

sıra istatistiklerinin farklarının beklenen değerleri verilmişse dağılım belirlenebilir mi? Bu soru olumlu olarak yanıtlanmıştır. Gerçekten de

$$\{E[X_{i:n} - X_{i-1:n}] \, | n = i, i+1, i+2, ...\} \tag{3-103}$$

dizisnin F dağılımını karakterize ettiği gösterilmiştir (Govindarajulu ve ark. 1975). $X_{i:n} - X_{i-1:n}$ orijini kaydırmakla değişmeyeceği için $i = 1$ ($X_{0:n} \equiv 0$) durumu dışında F dağılımı ancak konum parametresi hariç karakterize edilebilir.

Sıra istatistikleri ve rekor değerlerinin momentlerini kullanarak karakterizasyon sonuçları bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. N herhangi sabit bir pozitif tamsayı olsun.

(1) Beklenen değeri sonlu olan dağılımlar içinde $\{EX_{n:n}, n \geq N\}$ dizisi F dağılımını karakterize eder (Chan 1967).

(2) Her n için $r_n \leq n$ olmak üzere herhangi bir $\{EX_{r_n:n}, n = 1, 2, ...\}$ dizisi F dağılımını karakterize eder (Pollak 1974).

(3) Eğer k tek ise herhangi bir $\{EX^k_{r:n}, r = 1, 2, ..., n, \; n = 1, 2, ...\}$ dizisi F dağılımını karakterize eder (Arnold ve Meeden 1975).

(4) Birden büyük herhangi sonlu momente sahip sürekli dağılımlar içinde $\{EX_{U(n)}, n \geq N\}$ dizisi F dağılımını karakterize eder (Kirmani ve ark. 1984). Bu sonuç kesikli dağılımlar için geçerli değildir (Ahsanullah ve Holland 1984).

(5) Her $k > 0$ için $\{EX_{k+1:N_j} - EX_{k+1:N_j+1}\}$ dizisi sonlu momente sahip ve F^{-1} mutlak sürekli olan tüm sürekli dağılımlar içinde konum parametresi hariç F dağılımını karakterize eder. k, m pozitif tamsayılar olmak üzere herhangi bir $l > 0$ için $E|X|^{m+l}$ ise $\{(n+k)!E^m_{U(n+k)} - n!EX^m_{U(n)}\}$ dizisi F dağılımını karakterize eder (Lin 1988b).

(6) $Y_{V(n)}$ ile $Y_1, Y_2, ...$ dizisine karşı gelen n yinci rekor değeri gösterilirse ve c bir sabit olmak üzere her $n > N$ için $EX_{U(n)} = EY_{V(n)} + c/n!$

sağlanıyorsa X ve Y aynı dağılıma sahiptir (Lin ve Too 1994).

Bunlara ek olarak Bairamov ve Aliev (1998) $\{E(X_{j:n} - X_{i:n}), n \geq 1\}$ ve $\{E(X_{U(n)} - X_{U(n-1)}), n > N\}$ dizileri yardımıyla karakterizasyon sonuçları elde etmişlerdir. $\mathfrak{S}_a$ ile a noktasına göre simetrik olan sürekli dağılımlar ailesi gösterilsin. Bairamov ve Aliev (1998) deki sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

Teorem 3.7. *Her n pozitif tamsayısı için $r_n \leq n$ olsun. Bu durmda $\{E(X_{n-r_n+1:n} - X_{r_n:n}), n \geq 1\}$ dizisi $a \in \Re$ için $\mathfrak{S}_a$ ailesinde sonlu beklenen değere sahip dağılımlar içinde F dağılımını karakterize eder.*

Teorem 3.8. *F ve Q sonlu beklenen değerli sürekli dağılımlar olsun. Bu durumda c sabit bir sayı olmak üzere her x için $F(x) = Q(x - c)$ olması için gerek ve yeter koşul belirli bir i ve $n = N_1, N_2, ...$ değerleri (burada $\sum N_j^{-1} < \infty$) için*

$$E(X_{i+1:n} - X_{i:n}) = E(Y_{i+1:n} - Y_{i:n}) \tag{3-104}$$

olmasıdır.

Teorem 3.9. *$\{X_n\}$ ve $\{Y_n\}$ birbirinden bağımsız sırasıyla aynı F ve Q dağılımına sahip rasgele değişkenler dizisi olmak üzere $k > 1$ için $E|X|^k$, $E|X|^k < \infty$ olsun. $\{X_{U(n)}\}$ ve $\{Y_{V(n)}\}$ karşı gelen rekor değerleri ve c bir sabit sayı olmak üzere $F(x) = Q(x-c)$ olması için gerek ve yeter koşul $N \geq 0$ tasmsayısı için*

$$E(X_{U(n)} - X_{U(n-1)}) = E(Y_{V(n)} - Y_{V(n-1)}), n \geq N \tag{3-105}$$

olmasıdır.

Bairamov (2000) aşağıdaki dağılımlar ailesini tanımlayarak ilginç bazı sonuçlar elde etmiştir. Bunlardan bazıları burada özetlenmiştir.

X negatif olmayan F dağılım fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken ve a da pozitif bir gerçel sayı olsun. Her $x \geq 0, y \geq 0$ için ya sadece

$$\bar{F}(a(x+y)) \geq (\bar{F}(x))^a(\bar{F}(y))^a \tag{3-106}$$

ya da sadece

$$\bar{F}(a(x+y)) \leq (\bar{F}(x))^a(\bar{F}(y))^a \tag{3-107}$$

sağlanıyorsa $F \in \mathfrak{F}_a$ yazılacaktır. Eğer $a = 1$ ise F ya NBU (new better than used) ya da NWU (new worse than used) olmaktadır. $\mathfrak{F}_1$ sınıfı için üstel dağılıma ait bir çok karakterizasyon sonucu elde edilmiştir (Ahsanullah 1977; Huang 1981; Krishnaji 1971; Ramachandran 1979; Shimizu 1979 ve Xu ve Yang 1995).

$X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}, ...$ birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenler olmak üzere a pozitif bir gerçel sayı olsun. $\xi_1(a), \xi_2(a), ...$ dizisi

$$\xi_n(a) = \begin{cases} 1, & X_{n+1} < a \sum_{i=1}^{n} X_i \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}, \; n = 1, 2, \ldots . \tag{3-108}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 3.10. *X rasgele değişkeni negatif olmayan ve $inf\{x : F(x) > 0\} = 0$ koşulunu sağlayan sürekli bir F dağılım fonksiyonuna sahip olsun. O zaman aşağıdaki iki önerme birbirine denktir.*

a) *X üstel dağılıma sahiptir;*

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}, \; \theta > 0 \tag{3-109}$$

b) *$n > 1$ koşulunu sağlayan bir n için $E\xi_n(a) = 1 - \frac{1}{(a+1)^n}$ ve $F \in \mathfrak{F}_a$.*

F sürekli olmak üzere $X_{U(n)+1}, X_{U(n)+1}, ...$ ile $X_{U(n)}$ den sonra gözlemlenen değerler gösterilsin. $X_{U(n)}, X_{U(n)+1}, X_{U(n)+2}, ...$ lerin birbirinden bağımsız ve aynı F dağılımına sahip oldukları gösterilebilir. Herhangi bir n için

$$\eta_n(i) = \begin{cases} 1, & X_{U(n)+i} < X_{U(n)} \\ 0, & X_{U(n)+i} \geq X_{U(n)} \end{cases}, \; i = 1, 2, \ldots \tag{3-110}$$

tanımlansın.

Teorem 3.11. *X rasgele değişkeni negatif olmayan ve $inf\{x : F(x) > 0\} = 0$ koşulunu sağlayan sürekli bir F dağılım fonksiyonuna sahip olsun. O zaman aşağıdaki iki önerme birbirine denktir.*

a) X (3-109) daki gibi üstel dağılıma sahiptir.

b) $n > 1$ koşulunu sağlayan bir n için $E\xi_n(1) = E\eta_n(1)$ ve $F \in \mathfrak{F}_1$.

3.2.5 Geçmişi Hatırlamama Özelliği

Daha önce de belirtildiği gibi (bkz. 3.2.1) geçmişi hatırlamama özelliği sözkonusu ise $\forall x, y$ için $\bar{F}(x + y) = \bar{F}(x) \bar{F}(y)$ geçerlidir.

$$\phi(x) = \log \bar{F}(x) \; , \; x \geq 0 \tag{3-111}$$

tanımlanırsa $\Re^+$ da tanımlı Cauchy fonksiyonel denklemi elde edilir:

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \ , \ x, y \geq 0. \tag{3-112}$$

ϕ üzerinde oldukça zayıf koşullar konursa (örneğin sağdan süreklilik gibi) sadece

$$\phi(x) = cx \ , \ c \in \Re \tag{3-113}$$

şeklinde çözümler garanti edilmiş olur. $\bar{F}$ bir yaşam fonksiyonu olduğundan ϕ sağdan süreklidir ve $\phi(0) = 0$. O halde $\lambda > 0$ için

$$\bar{F}\,(x) = e^{-\lambda x} \ , \ x \geq 0. \tag{3-114}$$

Yani sürekli dağılımlar ailesi içinde geçmişi hatırlamama özelliği sadece üstel dağılıma ait bir özelliktir.

3.2.6 Dağılımlar Arasında Bağıntılar ile Karakterizasyon

$X_{0:n} \equiv 0$ olmak üzere

$$Z_{k:n} = (n-k+1)\left(X_{k:n} - X_{k-1:n}\right), \ k = 1, 2, ..., n \tag{3-115}$$

tanımlayalım. O zaman

$$X_{k:n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Z_{i:n}}{n-i+1}, \ k = 1, 2, ..., n \tag{3-116}$$

yazılabilir. Bu ifadeye dayanan üstel dağılıma ait önemli bir özellik ilk defa Sukhatme (1937) çalışması ile literatüre geçmiştir.

Teorem 3.12. *Eğer F standart üstel dağılmış ise herhangi bir $n = 1, 2, ...$ için $Z_{k:n}$, $k = 1, ..., n$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahiptir. O halde her bir $X_{i:n}$ sıra istatistiği (3-116) de ifade edildiği gibi birbirinden bağımsız üstel rasgele değişkenlerin toplamıdır.*

(3-115) eşitliğinde $k = 1$ alınırsa

$$Z_{1:n} = nX_{1:n} \tag{3-117}$$

olacaktır. Üstel dağılım için

$$Z_{1:n} \stackrel{d}{=} X_{1:1} \text{ yani } nX_{1:n} \stackrel{d}{=} X_{1:1} \ , \ n = 2, 3, ... \tag{3-118}$$

geçerlidir. Bunun tersinin de doğru olduğu ilk defa net bir şekilde Desu (1971) tarafından ifade edilmiştir.

Teorem 3.13. (3-118) *özelliğini sağlayan ve dejenere olmayan yegane dağılım üstel dağılımdır.*

(3-118) özelliği bu tür farklar arasındaki bağıntıların özel bir durumu olarak düşünülebilir. Bu farklarla ilgili daha genel çalışmalar yapan ilk araştırmacılardan ikisi Puri ve Rubin (1970) dir.

Teorem 3.14. *X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rsagele değişkenler olsun. Eğer*

$$X_{1:1} \stackrel{d}{=} X_{2:2} - X_{1:2} \tag{3-119}$$

ise F ya kesikli, ya mutlak sürekli ya da tekildir; bunların karışımı söz konusu değildir;

(1) *F nin yoğunluk fonksiyonu varsa X_i ler üstel dağılmıştır.*

(2) *F nin destek kümesi (support) sınırlı ise dağılım ya dejeneredir ya da $X = 0$ ve $X = \alpha$, $\alpha > 0$ noktalarında kütlesi 1/2 dir.*

(3) *F kesikli ve $(0, \infty)$ aralığında her yerde yoğun değilse F nin orijinde kütlesi p_0 $(0 < p_0 < 1/2)$ olup kütlenin kalanı da pozitif $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \ldots$ noktalarında geometrik olarak dağılmıştır.*

Bu farklarla ilgili en dikkat çekici sonuçlardan birisi Rossberg (1972) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 3.15. *Eğer F kafes türü bir dağılım değil ve $k > 1$ olmak üzere bir n tamsayısı için $Z_{1:n} \stackrel{d}{=} Z_{k:n}$ ise F üstel dağılımdır.*

Daha yüksek mertebeden farklarla ilgili bir karakterizasyon Gather (1989) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.16. *F her $x > 0$ için kesin artan bir dağılım fonksiyonu olsun. O zaman F nin üstel olması için gerek ve yeter koşul j nin farklı iki j_1 ve j_2 değeri ve $1 \le i < j_1 < j_2 \le n$, $n \ge 3$ koşullarını sağlayan i, n değerleri için*

$$X_{j-i:n-i} \stackrel{d}{=} X_{j:n} - X_{i:n} \tag{3-120}$$

olmasıdır.

(3-118) özelliğinin biraz değişik bir durumu şu şekilde ifade edilebilir;

$$\text{her } n \text{ pozitif tamsayısı için } X_{1:n} \stackrel{d}{=} a_n + b_n X_{1:1}\,. \tag{3-121}$$

Bu özelliği sağlayan sadece üç tane dağılım vardır. Bunlar

$$\begin{aligned} &F_1(x;\alpha) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}},\ x < 0,\ \alpha > 0 && \text{(Frechét)} \\ &F_2(x;\alpha) = 1 - e^{-x^{\alpha}},\ x > 0,\ \alpha > 0 && \text{(Weibull)} \\ &F_3(x) = 1 - e^{-e^{x}},\ -\infty < x < \infty. && \end{aligned} \tag{3-122}$$

Bu üç dağılım bir dağılımlar ailesinin elemanları olarak düşünülebilir. Bunun için $F(x;\theta)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F(x;\theta) = 1 - e^{-(1-x\theta^{-1})^{-\theta}},\ 1 - x\theta^{-1} > 0,\ -\infty < \theta < \infty. \tag{3-123}$$

$\theta > 0$ için $F(x;\theta)$ ile $F_1(x;\theta)$ ve $\theta < 0$ için $F(x;\theta)$ ile $F_2(x;\theta)$ aynı tür dağılım olmaktadır. Ayrıca $\theta \to \pm\infty$ için de $F(x;\theta) \to F_3(x)$ geçerlidir.

Bunlardan farklı olarak bir tarafında bilinen bir dağılım veya dağılımlara ait ifadelerin bulunduğu bağıntılar yardımıyla karakterizasyon sonuçları da vardır. Şimdi kısaca bunlara bazı örnekler verilecektir. Örneğin Kotz ve Steutel (1988)

$$X \stackrel{d}{=} U(X_1 + X_2) \tag{3-124}$$

bağıntısını incelemişlerdir. Burada X_1 ve X_2 negatif olmayan birbirinden bağımsız, U da X_1 ve X_2 den bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere X, X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin hepsi aynı dağılım fonksiyonuna sahiptir. Söz konusu çalışmalarında (3-124) bağıntısında $U \sim U[0,1]$ ise X in üstel dağılıma sahip olduğu gösterilmiştir. Alamatsaz (1985) ise (3-124) de U yerine $U^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ alındığında bu bağıntıyı sağlayan dağılımları incelemiştir.

(3-124) bağıntısı aslında daha genel bir bağıntının özel bir hali olarak da düşünülebilir. X, Y herhangi rasgele değişkenler olmak üzere U nun destek kümesi (support) $[0,1]$ ve kendisi Y den bağımsız olsun. Bu koşullarda

$$X \stackrel{d}{=} UY \tag{3-125}$$

bağıntısı bir çok alanda önemli bir yere sahiptir. Alzaid ve Al-Osh (1991) de belirtildiği gibi örneğin ekonomik modellemede Y bir bireyin gerçek geliri iken X kayıtlara geçen geliri olarak yorumlanır. Güvenilirlik çalışmalarında (reliability theory) ise Y, belli bir kısmi bozulma meydana geldikten sonra bir sistemin X değerine düşen ömrü olarak yorumlanır. Bu bağıntıya dayalı karakterizasyon çalışmaları yapanlar arasında Krishnaji (1970) ve Olshen ve Savage (1970) sayılabilir.

Alzaid ve Al-Osh (1991), (3-124) bağıntısını inceleyerek aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

Teorem 3.17. *X_1, X_2 ve U negatif olmayan birbirinden bağımsız ve aynı dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere U nun destek* *kümesi de* $(0,1)$ *olsun. Ayrıca* X *in momentleri sonlu değerler almak üzere (3-124) bağıntısı sağlansın. O zaman* X *ile* U *nun momentleri biribirilerini tek olarak belirler.*

Bu teoremin bir sonucu olarak Kotz ve Steutel (1988) sonucunun daha genel bir halini elde etmişlerdir.

Sonuç 3.18. X_1, X_2, X *ve* U *Teorem 3-17 deki gibi ise* $U \sim Beta(\alpha,\alpha)$ *olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir* λ *için* $X \sim Gama(\alpha+\beta,\lambda)$ *olmasıdır.*

Ahsanullah ve Bairamov (1999) ise $Y_{(1)} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i}{X_{n:n}}$ istatistiğini kullanarak bir karakterizasyon sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 3.19. $U_1,...,U_n$ *birbirinden bağımsız ve* $(0,1]$ *de düzgün dağılmış rasgele değişkenler olsun. Ayrıca* X *azalmayan mutlak sürekli bir* F *dağılım fonksiyonuna sahip pozitif bir rasgele değişken olsun. O zaman*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < x \leq a \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \tag{3-126}$$

olması için gerek ve yeter koşul $m \geq 1$ *olmak üzere* $n = m$ *ve* $n = m+1$ *için*

$$Y_{(1)} \stackrel{d}{=} 1 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i \tag{3-127}$$

olmasıdır.

3.2.7 Koşullu Matematiksel Beklenen Değer ile Karakterizasyon

X ve Y rasgele değişkenleri için X bilindiğinde Y nin en küçük kareler kriterine göre yansız en iyi tahmincisi $E(Y|X)$ dir. $E(Y|X)$ ifadesi X in bir fonksiyonudur; bunu $g(X)$ ile gösterelim. En basit durum düşünülürse bu $g(x) = ax + b$ şeklinde doğrusal bir ifade olacaktır.

Üstel dağılımdan seçilmiş bir örneklem için $j > i$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$E\left(X_{j:n} \left| X_{i:n} = x\right.\right) = c + x \text{ , } c \text{ sabit} \tag{3-128}$$

olduğu görülür. Bu özellik acaba sadece üstel dağılım için mi geçerlidir? Ferguson (1967) $i = 1$, $j = 2$ özel durumu için bu soruyu olumlu olarak yanıtlamıştır.

Ferguson'un sonucundan sonra genel olarak

$$E\left(X_{i+k:n} \left| X_{i:n}\right.\right) = cX_{i:n} + d \tag{3-129}$$

özelliğini sağlayan dağılımlar araştırılmıştır. Wesolowski ve Ahsanullah (1997),

$k = 2$ durumunu mutlak sürekli dağılımlar için çözümlemişlerdir. Blazquez ve Rebollo (1997) ise k defa türevlenebilen F dağılımları için

$$E\left(X_{i+k:n}\left|X_{i:n}\right.\right) = cX_{i:n} + d \ , \ 1 \leq i < i + k \leq n \qquad \text{(3-130)}$$

özelliğini sağlayan dağılımları karakterize etmişlerdir. Ancak Dembińska ve Wesołowski (2000) ye göre kullanılan ispatta bazı şüpheli noktalar var. Dembińska ve Wesołowski (1998) aynı sonucu F üzerinde daha zayıf koşullarda ispatlamışlardır. Burada bu sonuç verilecektir.

Teorem 3.20. $X_1, X_2, ..., X_n$ *birbirinden bağımsız ve aynı sürekli F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler ve* $E(|X_{k+r:n}|) < \infty$ *olsun.* a *ve* b *gerçel sayılar ve* $k \leq n - r$ *olmak üzere*

$$E\left(X_{k+r:n}\left|X_{k:n}\right.\right) = aX_{k:n} + b \qquad \text{(3-131)}$$

ise o zaman aşağıdaki üç durumdan birisi geçerlidir:

1. $0 < a < 1$ ise $F(x) = \left(\frac{\nu - x}{\mu - \nu}\right)^{\theta}, -\infty < \mu < \nu < \infty, x \in (\mu, \nu), 0 < \theta,$
2. $a = 1$ ise $F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\gamma)}, \gamma \leq x, 0 < \lambda,$
3. $1 < a$ ise $F(x) = \left(\frac{\mu+\delta}{x+\delta}\right)^{\theta}, 0 < \mu + \delta, \mu < x, 0 < \theta.$

Aynı çalışmada aşağıdaki sonuç da elde edilmiştir.

Teorem 3.21. $X_1, X_2, ..., X_n$ *birbirinden bağımsız ve aynı sürekli F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler ve* $E(|X_{k:n}|) < \infty$ *olsun.* c *ve* d *gerçel sayılar ve* $k \leq n - r$ *olmak üzere*

$$E\left(X_{k:n}\left|X_{k+r:n}\right.\right) = cX_{k+r:n} + d \qquad \text{(3-132)}$$

ise o zaman aşağıdaki üç durumdan birisi geçerlidir:

1. $0 < c < 1$ ise $F(x) = \left(\frac{\sigma + x}{\sigma - \mu}\right)^{\theta}, \mu < \sigma, x \in (-\sigma, -\mu), \frac{1}{k} < \theta,$
2. $c = 1$ ise $F(x) = 1 - e^{\lambda(x+\gamma)}, x \leq -\gamma, 0 < \lambda,$ (3-133)
3. $1 < c$ ise $F(x) = \left(\frac{\mu+\nu}{-x+\nu}\right)^{\theta}, 0 < \mu + \nu, x < -\mu, 0 < \theta.$

Benzer çalışmalar rekor değerleri kullanılarak da yapılmıştır. Bu konuda Nagaraja (1977 ve 1988) çalışmalarında özel durumları incelemiştir. Daha sonra Dembińska ve Wesołowski (2000) bu sonuçları kullanarak genel halde çözüme gitmişlerdir. Bu sonuçlar iki teoremle burada özetlenecektir.

Teorem 3.22. $X_1, X_2, ...$ *birbirinden bağımsız ve aynı sürekli F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. Ayrıca* m *ve* k *sabit* *pozitif tamsayılar ve* $E(|X_{U(m+k)}|) < \infty$ *olsun.* a *ve* b *gerçel sayılar olmak üzere*

$$E\left(X_{U(m+k)} \middle| X_{U(m)}\right) = aX_{U(m)} + b \tag{3-134}$$

ise o zaman aşağıdaki üç durumdan birisi geçerlidir:

$$\begin{array}{ll} 1. & a = 1 \text{ ise } F(x) = 1 - e^{\lambda(x+\gamma)}, x \leq -\gamma, 0 < \lambda = \frac{k}{b}, \\ 2. & 1 < a \text{ ise } F(x) = \left(\frac{\mu+\delta}{-x+\delta}\right)^{\theta}, 0 < \mu + \delta, \mu < x, 0 < \theta, \\ 3. & 0 < a < 1 \text{ ise } F(x) = \left(\frac{\nu-x}{\nu-\mu}\right)^{\theta}, \mu < \nu, x \in (\mu, \nu), 0 < \theta. \end{array} \tag{3-135}$$

Teorem 3.23. $X_1, X_2, ...$ *birbirinden bağımsız ve aynı sürekli* F *birikimli dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. Ayrıca* m *sabit pozitif bir tamsayı ve* $E(|X_{U(m)}|) < \infty$ *olsun.* a *ve* b *gerçel sayılar olmak üzere herhangi pozitif bir* k *tamsayısı için*

$$E\left(X_{U(m)} \middle| X_{U(m+k)}\right) = cX_{U(m+k)} + d \tag{3-136}$$

ise o zaman aşağıdaki üç durumdan birisi geçerlidir:

$$\begin{array}{ll} 1. & c = 1 \text{ ise } F(x) = 1 - e^{-e^{\beta(x-\gamma)}}, x \leq -\gamma, 0 < \beta, \\ 2. & 0 < c < 1 \text{ ise } F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-x}\right)^{\theta}}, 0 < \alpha - \gamma, x < \alpha, 0 < \theta, \\ 3. & 1 < c \text{ ise } F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\gamma-\mu}\right)^{\theta}}, \mu < \gamma, \mu < x, 0 < \theta. \end{array} \tag{3-137}$$

Bütün bu sonuçlar regresyonun beklenen değerinin doğrusal olduğu durumlara karşılık gelmektedir. Ghitany ve ark. (1995) yaşam analizinde kullanılan bazı sürekli dağılımları karakterize eden genel bir teorem elde etmişlerdir. Bunun için de şu şekilde tanımlanan mutlak sürekli bir dağılımlar ailesi göz önüne almışlardır; her $\theta \in \Theta$ için $q(x;\theta)$ gerçel değerli bir fonksiyon ve $q'(x;\theta) \neq 0$, $q''(x;\theta)$ de $(0,\infty)$ aralığında tanımlı olmak üzere

$$f(x;\theta) = e^{-q(x;\theta)}\ , x \geq 0. \tag{3-138}$$

Teorem 3.24. X *mutlak sürekli negatif olmayan bir rasgele değişken ve* $r(x,\theta) = f(x)/\ \bar{F}\ (x)$ *olsun. Bu durumda* X*'in 3-138 şeklinde bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olması için gerek ve yeter koşul bütün* $y \geq 0$ *değerleri ve her* $\theta \in \Theta$ *için* $g(x;\theta) \neq 0$ *ve* $(0,\infty)$ *aralığında* $g'(x;\theta)$ *tanımlı olacak şekilde gerçel değerli bir* $g(x;\theta)$ *fonksiyonu için*

$$E\left\{\left[1 + \frac{q''(X;\theta)}{[q'(X;\theta)]^2}\right] g(X;\theta) - \frac{g'(X;\theta)}{q'(X;\theta)} \middle| X \geq y\right\} = \frac{g'(y;\theta)}{q'(y;\theta)} r(y;\theta) \tag{3-139}$$

sağlanmasıdır.

Adı geçen çalışmada bu teoremin bir uygulaması olarak gamma, Weibull ve Gompertz dağılımları karakterize edilmiştir. Daha sonra Bairamov ve Apaydın (2000) daha genel ve bir çok sürekli dağılımı karakterize etmeyi sağlayan bir teorem elde etmişlerdir. Söz konusu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.25. *X sürekli bir rasgele değişken ve h da $h(x) < \infty$ olacak şekilde türevi tanımlı ve*

$$x \in (0,1) \text{ için } h'(x) \neq \frac{h(1) - h(x)}{1 - x} \tag{3-140}$$

koşulunu sağlayan gerçel değerli bir fonksiyon olsun. O zaman X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun G olması için gerek ve yeter koşul her $z \in (0,1)$ için

$$E\{h'(G(X))\,|G(X) \geq z\} = \frac{h(1) - h(z)}{1 - z} \tag{3-141}$$

olmasıdır.

Bu teorem yardımıyla sıra istatistikleri için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 3.26. *$g(x) \equiv h'(G(x))$ olsun. Teorem 3-139 nın koşulları altında X rasgele değişkeninin dağılım fonskiyonunun G olması için gerek ve yeter koşul her $a_X < y < b_X$ için*

$$E\left\{\frac{1}{n-r}\sum_{i=r+1}^{n} g(X_{i:n})\,|X_{r:n} = y\right\} = \frac{h(1) - h(G(y))}{1 - G(y)} \tag{3-142}$$

olmasıdır. Burada $a_X = \inf\{x : F(x) > 0\}$ ve $b_X = \sup\{x : F(x) < 1\}$.

Görüldüğü gibi h fonksiyonun teoremlerde belrtilen koşullar dışında nasıl seçileceği söylenmemiştir. Böylece h uygun seçilerek değişik dağılımlar için karakterizasyon sonuçları elde edilebilir. Örneğin F, $(0,1)$ aralığında tanımlı ve

$$h(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ , \text{ yani } h'(x) = x^n \tag{3-143}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.27. *X rasgele değişkeninin $(0,1)$ aralığında düzgün dağılmış olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n \geq 1$ için*

$$E\{X^n\,|X \geq x\} = \frac{1}{n+1}(1 + x + ... + x^n)\ ,\ 0 < x < 1 \tag{3-144}$$

sağlanmasıdır.

Sonuç 3.28. *X rasgele değişkeninin $(0,1)$ aralığında düzgün dağılmış olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $k \geq 1$ için*

$$E\{\frac{1}{n-r}\sum_{i=r+1}^{n} X_{i:n}^{k} | X_{r:n}\} = \frac{1}{k+1}(1 + X_{r:n} + ... + X_{r:n}^{k}) \ , \ 0 < x < 1 \quad (3\text{-}145)$$

sağlanmasıdır.

4. BULGULAR

Bu bölümde çalışma sonunda düzgün, Frechét ve Pareto dağılımları için elde edilen yeni karakterizasyon sonuçları verilecektir.

4.1. Alt Rekorlar ile Düzgün Dağılıma ait bir Karakterizasyon

$X_1, X_2, ...$ ve $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve $(0,1)$ aralığında düzgün dağılmış rasgele değişkenler olsun. O zaman $m \geq 1$ için

$$X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \qquad (4\text{-}1)$$

bağıntısı sağlanır.

Gerçekten de önce sol tarafın dağılımı yazılırsa

$$P\left\{X_{L(m)} \leq x\right\} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{[-\ln F(u)]^{m-1}}{(m-1)!} dF(u) = \int\limits_{0}^{F(x)} \frac{[-\ln v]^{m-1}}{(m-1)!} dv, \qquad (4\text{-}2)$$

$0 < x < 1$ için $F(x) = x$ olduğundan

$$P\left\{X_{L(m)} \leq x\right\} = \int\limits_{0}^{x} \frac{[-\ln v]^{m-1}}{(m-1)!} dv, \ 0 < x < 1. \qquad (4\text{-}3)$$

Sağ tarafın dağılımını elde etmek için

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ u_{m-1} &= \varepsilon_{m-1} \\ u_m &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \end{aligned} \qquad (4\text{-}4)$$

dönüşümü uygulanmıştır. Bu durumda $\varepsilon_m = \dfrac{u_m}{u_1 u_2 ... u_{m-1}}$ ve $0 < \varepsilon_i < 1$, $i = 1, ..., m$ olduğu için

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{u_1 u_2 ... u_{m-1}} < 1 &\Rightarrow \frac{u_m}{u_2 u_3 ... u_{m-1}} < u_1 < 1, \\ \frac{u_m}{u_2 u_3 ... u_{m-1}} < 1 &\Rightarrow \frac{u_m}{u_3 u_4 ... u_{m-1}} < u_2 < 1, \\ &\vdots \\ \frac{u_m}{u_{m-2} u_{m-1}} < 1 &\Rightarrow \frac{u_m}{u_{m-1}} < u_{m-2} < 1, \\ \frac{u_m}{u_{m-1}} < 1 &\Rightarrow u_m < u_{m-1} < 1, \\ 0 < u_m &\leq x \end{aligned} \qquad (4\text{-}5)$$

olacaktır.

Söz konusu dönüşüm için $|J| = \dfrac{1}{u_1 u_2 ... u_{m-1}}$. O halde

$$P\{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_m \leq x\} = \int\limits_{\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_m):\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_m \leq x\}} f(\varepsilon_1)...f(\varepsilon_m)d\varepsilon_1...d\varepsilon_m \qquad (4\text{-}6)$$

olduğundan yukarıdaki dönüşümden sonra

$$P\{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_m \leq x\} = \int\limits_0^x \int\limits_{u_m}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^1 ....$$

$$... \int\limits_{\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^1 \frac{1}{u_1u_2...u_{m-1}} du_1...du_m. \qquad (4\text{-}7)$$

elde edilir.

İlk önce

$$\int\limits_{u_m}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^1 \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^1 \frac{du_1...du_{m-2}du_{m-1}}{u_1...u_{m-2}u_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\ln(u_m)\right]^{m-1} \qquad (4\text{-}8)$$

olduğu gösterilecektir. Bunun için de tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

İşlemleri takip etmede kolaylık sağlaması bakımından $n \leq m-1$ için $v_n = \dfrac{u_m}{u_nu_{n+1}...u_{m-1}}$ ve $v_m = u_m$ olsun. Bu durumda

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^1 \frac{1}{u_1}du_1 = \int\limits_{v_2}^1 \frac{1}{u_1}du_1 = -\ln(v_2)$$

$$= -\ln\left(\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}\right) = -\left[\ln\left(\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}\right) - \ln(u_2)\right], \qquad (4\text{-}9)$$

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^1 \frac{1}{u_1u_2}du_1du_2 = -\int\limits_{\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}}^1 \left[\ln\left(\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}\right) - \ln(u_2)\right]\frac{du_2}{u_2}$$

$$= -\int\limits_{v_3}^1 \left[\ln(v_3) - \ln(u_2)\right]\frac{du_2}{u_2} = \frac{1}{2}\left[\ln(v_3)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u_m}{u_3...u_{m-1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u_m}{u_4...u_{m-1}}\right) - \ln(u_3)\right]^2 \qquad (4\text{-}10)$$

hesaplanır.

(4-8) in doğru olduğunu göstermek için $n \leq m-3$ iken doğruluğu kabul edilsin; yani

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_n u_{n+1}\cdots u_{m-1}}}^{1} \int\limits_{\frac{u_m}{u_{n-1}u_n\cdots u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1 \ldots du_{n-1}}{u_1 \ldots u_{n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} [\ln (v_n)]^{n-1} \tag{4-11}$$

sağlanmaktadır. O zaman

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} \int\limits_{\frac{u_m}{u_n u_{n+1}\cdots u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1 \ldots du_n}{u_1 \ldots u_n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} [\ln (v_{n+1})]^n . \tag{4-12}$$

olduğu gösterilmelidir.

(4-11) hipotezinden,

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} \left(\int\limits_{\frac{u_m}{u_n u_{n+1}\cdots u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1 \ldots du_{n-1}}{u_1 \ldots u_{n-1}} \right) \frac{du_n}{u_n} \tag{4-13}$$

$$= \int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} [\ln (v_n)]^{n-1} \frac{du_n}{u_n} \tag{4-14}$$

$$= \int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\ln \left(\frac{u_m}{u_n u_{n+1} \ldots u_{m-1}} \right) \right]^{n-1} \frac{du_n}{u_n} \tag{4-15}$$

$$= \int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} [\ln (v_{n+1}) - \ln (u_n)]^{n-1} \frac{du_n}{u_n} \tag{4-16}$$

$$= \int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} (\ln v_{n+1})^{n-1-k} (-\ln u_n)^k \right] \frac{du_n}{u_n} \tag{4-17}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} (\ln v_{n+1})^{n-1-k} \int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{m-1}}}^{1} (-1)^k (\ln u_n)^k \frac{du_n}{u_n} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} (\ln v_{n+1})^{n-1-k} (-1)^k (-1) \frac{(\ln v_{n+1})^{k+1}}{k+1} \right] \tag{4-18}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}...u_{m-1}}}^{1} \left(\int\limits_{\frac{u_m}{u_n u_{n+1}...u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1...du_{n-1}}{u_1...u_{n-1}} \right) \frac{du_n}{u_n} \tag{4-19}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right] (\ln v_{n+1})^n . \tag{4-20}$$

Diğer yandan

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k+1)!} (-1)^{k+1} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} (-1)^{k+1} \right] = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} (-1)^{k+1} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} (-1)^{k} \right] = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (-1) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

yani

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right] = \frac{(-1)^n}{n!} , \tag{4-21}$$

olduğundan

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_{n+1}u_{n+2}...u_{m-1}}}^{1} \left(\int\limits_{\frac{u_m}{u_n u_{n+1}...u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1...du_{n-1}}{u_1...u_{n-1}} \right) \frac{du_n}{u_n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} (\ln v_{n+1})^n . \tag{4-22}$$

Son ifadede $n = m - 2$ alınırsa

$$\int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^{1} \int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-2}u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1...du_{m-2}}{u_1...u_{m-2}}$$

$$= \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} [\ln v_{m-1}]^{m-2} = \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \left[\ln \left(\frac{u_m}{u_{m-1}} \right) \right]^{m-2}$$

$$= \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} [\ln u_m - \ln u_{m-1}]^{m-2} , \tag{4-23}$$

ve buradan da

$$\int\limits_{u_m}^{1} \left(\int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^{1} \int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-2}u_{m-1}}}^{1} \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1} \frac{du_1...du_{m-2}}{u_1...u_{m-2}} \right) \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}}$$

$$= \int\limits_{u_m}^{1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} [\ln u_m - \ln u_{m-1}]^{m-2} \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}} \tag{4-24}$$

bulunur.

Benzer işlemler ile

$$\int_{u_m}^{1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} [\ln u_m - \ln u_{m-1}]^{m-2} \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}}$$

$$= \int_{u_m}^{1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \sum_{k=0}^{m-2} \left[\binom{m-2}{k} (\ln u_m)^{m-2-k} (-\ln u_{m-1})^k \right] \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \sum_{k=0}^{m-2} \left[\binom{m-2}{k} (\ln u_m)^{m-2-k} \int_{u_m}^{1} (-\ln u_{m-1})^k \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \sum_{k=0}^{m-2} \left[\binom{m-2}{k} (\ln u_m)^{m-2-k} (-1)^k (-1) \frac{(\ln u_{m-1})^{k+1}}{k+1} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \sum_{k=0}^{m-2} \left[\binom{m-2}{k} (\ln u_m)^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} \sum_{k=0}^{m-2} \left[\binom{m-2}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right] (\ln u_m)^{m-1} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} (\ln u_m)^{m-1},$$

yani

$$\int_{u_m}^{1} \frac{(-1)^{m-2}}{(m-2)!} [\ln u_m - \ln u_{m-1}]^{m-2} \frac{du_{m-1}}{u_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} (\ln u_m)^{m-1} \tag{4-25}$$

hesaplanır. O halde

$$\int_0^x \int_{u_m}^1 \int_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^1 \int_{\frac{u_m}{u_{m-2}u_{m-1}}}^1 \cdots \int_{\frac{u_m}{u_2 \ldots u_{m-1}}}^1 \frac{du_1 \ldots du_{m-1} du_m}{u_1 \ldots u_{m-1} u_m}$$

$$= \int_0^x \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} (\ln u_m)^{m-1} du_m \tag{4-26}$$

ve

$$P\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \leq x\} = \int_0^x \frac{(-\ln u_m)^{m-1}}{(m-1)!} du_m. \tag{4-27}$$

Bu ise $0 < x < 1$ için $P\{X_{L(m)} \leq x\}$ ile aynıdır. Yani standart düzgün dağılım için

$$X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \tag{4-28}$$

bağıntısı sağlanır.

Şimdi (4-28) özelliğinin düzgün dağılımın karakteristik bir özelliği olduğu ispatlanacaktır.

Teorem 4.1. *$X_1, X_2, ...$ birbirinden bağımsız ve aynı mutlak sürekli $F(x)$ dağılımına sahip negatif olmayan rasgele değişkenler ve $X_{L(i)}$, $i \geq 1$ ler de karşı gelen alt rekor değerleri olsun. Eğer ε_i $(i = 1, ..., m)$ ler $(0, 1)$ aralığında düzgün dağılmış rasgele değişkenler iken*

$$X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \ , \ m \geq 1 \tag{4-29}$$

geçerli ise $F \sim U(0,1)$.

İspat:

Düzgün dağılımın (4-29) bağıntısını sağladığı az önce gösterilmişti. O halde teoremin koşulları altında (4-29) nin standart düzgün dağılımı belirlediğini göstermek yeterlidir.

a)

$$P\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \leq x\} = \int\limits_{\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m) : \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \leq x\}} f(\varepsilon_1) ... f(\varepsilon_m) d\varepsilon_1 ... d\varepsilon_m \tag{4-30}$$

integralinde (4-4) dönüşümü uygulanırsa

$$g(u_1 ... u_m) = \frac{f(u_1) ... f(u_{m-2}) f(\frac{u_m}{u_1 ... u_{m-1}})}{u_1 ... u_{m-2} u_{m-1}} \tag{4-31}$$

olmak üzere

$$P\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \leq x\} = \int\limits_0^x \int\limits_{u_m}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^1 \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_3 ... u_{m-1}}}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_2 ... u_{m-1}}}^1 g(u_1 ... u_m) du_1 ... du_m \tag{4-32}$$

$$= \int\limits_0^x \int\limits_{u_m}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_{m-1}}}^1 \cdots \int\limits_{\frac{u_m}{u_3 ... u_{m-1}}}^1 \int\limits_{\frac{u_m}{u_2 ... u_{m-1}}}^1 \frac{1}{u_1 u_2 ... u_{m-1}} du_1 ... du_m \tag{4-33}$$

Daha önce bu integral hesaplanarak

$$P\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m \leq x\} = \int\limits_0^x \frac{(-\ln u_m)^{m-1}}{(m-1)!} du_m. \tag{4-34}$$

olduğu gösterilmişti.

b) Diğer taraftan

$$P\left\{X_{L(m)} \leq x\right\} = \int\limits_{-\infty}^x \frac{[-\ln F(u)]^{m-1}}{(m-1)!} dF(u)$$

$$= \int_{0}^{F(x)} \frac{[-\ln v]^{m-1}}{(m-1)!} dv. \tag{4-35}$$

c) $X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_m$ olduğu için

$$\int_{0}^{x} \frac{(-1)(\ln u_m)^{m-1}}{(m-1)!} du_m = \int_{0}^{F(x)} \frac{(-1)^{m-1}(\ln v)^{m-1}}{(m-1)!} dv \tag{4-36}$$

veya

$$\int_{0}^{x} (\ln u_m)^{m-1} du_m = \int_{0}^{F(x)} (\ln v)^{m-1} dv . \tag{4-37}$$

$0 < x < 1$ olsun. Eğer $x \leq F(x)$ ise

$$\int_{0}^{x} (\ln t)^{m-1} dt = \int_{0}^{x} (\ln t)^{m-1} dt + \int_{x}^{F(x)} (\ln t)^{m-1} dt , \tag{4-38}$$

veya

$$\int_{x}^{F(x)} (\ln t)^{m-1} dt = 0 . \tag{4-39}$$

Buradan da $0 < x < 1$ için $F(x) = x$ elde edilir. $0 < x < 1$ olmak üzere $x > F(x)$ için benzer şekilde yine $F(x) = x$ elde edilir. Bu çelişkiden $x > F(x)$ olamayacağı görülür. O halde $0 < x < 1$ için $F(x) = x$ olmalıdır. ■

4.2. Rekorlar ile Düzgün Dağılıma ait bir Karakterizasyon

Buradaki sonuçta hem alt rekor değerleri hem de üst rekor değerleri kullanılacaktır. Üst rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonksiyonuna gerek duyulduğundan önce bu konudaki bilgiler hatırlatılacaktır.

Biribirinden bağımsız ve mutlak sürekli rasgele değişkenler için $X_{U(1)}$, $X_{U(2)}$, ..., $X_{U(n)}$ rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= r(x_1) r(x_2) ... r(x_{n-1}) f(x_n), \\ -\infty &< x_1 < x_2 < ... < x_n < \infty \end{aligned} \tag{4-40}$$

idi (bkz. 3.1.4). Bu formülden, $X_{U(i)}$ ile $X_{U(j)}$ $(1 \leq i < j)$ rekor değerlerinin ortak yoğunluk fonskiyonunu bulmak için integral almak yeterlidir. Buna göre

$$f(x_i, x_j) = \left(\int r(t_1) dt_1 ... \int r(t_{i-1}) dt_{i-1} \right) r(x_i)$$

$$\times \left(\int r(t_{i+1})dt_{i+1} ... \int r(t_{j-1})dt_{j-1} \right) f(x_j) \ , \tag{4-41}$$
$$-\infty < x_i < x_j < \infty$$

Parantez içindeki integralleri hesaplamak için

$$I_1 = \int r(t_1)dt_1 ... \int r(t_{i-1})dt_{i-1} \tag{4-42}$$

ve

$$I_2 = \int r(t_{i+1})dt_{i+1} ... \int r(t_{j-1})dt_{j-1} \tag{4-43}$$

olsun. Buna göre

$$I_1 = \int_{-\infty}^{t_2} r(t_1)dt_1 \int_{-\infty}^{t_3} r(t_1)dt_1 ... \int_{-\infty}^{t_{i-1}} r(t_{i-2})dt_{i-2} \int_{-\infty}^{x_i} r(t_{i-1})dt_{i-1}, \tag{4-44}$$
$$-\infty < t_1 < t_2 < ... < t_{i-1} \leq x_i \ .$$

Son inetgralde gerekli işlemler yapılırsa

$$I_1 = \frac{[R(x_i)]^{i-1}}{(i-1)!} \tag{4-45}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_{x_i}^{t_{i+2}} r(t_{i+1})dt_{i+1} \int_{x_i}^{t_{i+3}} r(t_{i+2})dt_{i+2} ... \int_{x_i}^{t_{j-1}} r(t_{j-2})dt_{j-2} \int_{x_i}^{x_j} r(t_{j-1})dt_{j-1}, \tag{4-46}$$
$$x_i < t_{i+1} < t_{i+2} < ... < t_{j-1} \leq x_j \ .$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$I_2 = \frac{[R(x_j) - R(x_i)]^{i-1}}{(j-i-1)!} \tag{4-47}$$

elde edilir. O halde

$$f_{U(i),U(j)}(x_i, x_j) = \frac{[R(x_i)]^{i-1}}{(i-1)!} r(x_i) \frac{[R(x_j) - R(x_i)]^{j-i-1}}{(j-i-1)!} f(x_j) \ , \tag{4-48}$$
$$-\infty < x_i < x_j < \infty.$$

Şimdi ikinci sonuç için kullanılacak özellik ifade edilebilir. Bairamov ve Eryılmaz (2001), $X_1, X_2, ...$ birbirinden bağımsız ve $X_i \sim U(0,1)$ ise

$$X_{U(k)} - X_{U(k-1)} \stackrel{d}{=} X_{L(k)} \ , \ k \geq 1 \tag{4-49}$$

olduğuna dikkat çekmişlerdir. Aslında $X_1, X_2, ...$ birbirinden bağımsız ve $X_i \sim U(0, \beta)$ ise $X_{U(0)} \equiv 0$ olmak üzere

$$X_{U(k)} - X_{U(k-1)} \stackrel{d}{=} X_{L(k)} \ , \ k \geq 1 \tag{4-50}$$

sağlanır. Bunu göstermek için önce $X_{U(k)} - X_{U(k-1)}$ rasgele değişkeninin dağılımı bulunacaktır.

(4-48) de $U = X_{U(j)} - X_{U(i)}$ ve $V = X_{U(i)}$ dönüşümü uygulanırsa

$$f_U(u) = \int_0^{\beta-u} f_{U(i),U(j)}(v, u+v)\,|J|\,dv$$

$$= \int_0^{\beta-u} \frac{[R(v)]^{i-1}}{(i-1)!} r(v) \frac{[R(u+v) - R(v)]^{j-i-1}}{(j-i-1)!} f(u+v)dv \tag{4-51}$$

olur. $i = k-1$ ve $j = k$ seçilirse

$$f_{U(k)-U(k-1)}(u) = \int_0^{\beta-u} \frac{[R(v)]^{k-2}}{(k-2)!} r(v) f(u+v)dv \tag{4-52}$$

olacaktır. O halde $X_i \sim U(0,\beta)$ için

$$f_{U(k)-U(k-1)}(u) = \int_0^{\beta-u} \frac{(-\ln[1-F(v)])^{k-2}}{(k-2)!} \frac{f(v)}{1-F(v)} f(u+v)dv$$

$$= \int_0^{\beta-u} \frac{[-\ln(1-v)]^{k-2}}{(k-2)!} \frac{1}{1-v} dv = \frac{1}{\beta} \frac{[-\ln(\frac{u}{\beta})]^{k-1}}{(k-1)!} \tag{4-53}$$

ve bu da $f_{L(k)}(u)$ değerine eşittir.

Bu noktada

$$X_{U(k)} - X_{U(k-1)} \stackrel{d}{=} X_{L(k)}\ ,\ k \geq 1 \tag{4-54}$$

özelliğinin düzgün dağılım için karakterisitk bir özellik olup olmadığı sorusu akla gelmektedir. Dağılım fonsliyonları belli bir aileye sınırlandırıldığında $k = 2$ için bu özelliğin gerçekten de düzgün dağılımın karakteristik bir özelliği olduğu gösterilmiştir. Bunun için aşağıda tanımlanan dağılımlar ailesi göz önüne alınmıştır.

X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x;\alpha,\beta,\gamma) = 1 - \beta^{-\gamma}(\alpha + \beta - x)^{\gamma}\ , \tag{4-55}$$

$$\alpha < x < \alpha + \beta,\ \alpha < \beta,\ 0 \leq \alpha,\ 0 < \gamma$$

şeklinde ise $F \in \mathfrak{F}_p$ yazılacaktır.

Teorem 4.2. *$X_1, X_2, \ldots$ birbirinden bağımsız ve aynı mutlak sürekli $F \in \mathfrak{F}_p$ dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. O zaman $F \sim U(0,\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$X_{U(2)} - X_{U(1)} \stackrel{d}{=} X_{L(2)} \tag{4-56}$$

olmasıdır.

İspat: $F \sim U(0,\beta)$ ise (4-56) bağıntısının sağlandığı zaten gösterilmişti. Bu durumda teoremin şartları altında (4-56) bağıntısı sağlanıyorsa $F \sim U(0,\beta)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için önce (4-56) bağıntısının her iki tarafındaki rasgele değişkenlerin dağılımları yazılacaktır. Buna göre

$$P(X_{U(2)} - X_{U(1)} \le x) = \int_{\alpha}^{x} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta-u} \frac{f(v)}{1-F(v)} f(u+v)dvdu$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta-u} \frac{\gamma\beta^{-\gamma}(\alpha+\beta-v)^{\gamma-1}}{\beta^{-\gamma}(\alpha+\beta-v)^{\gamma}} \gamma\beta^{-\gamma}\left[\alpha+\beta-(u+v)\right]^{\gamma-1} dvdu \tag{4-57}$$

$$= \int_{\alpha}^{x} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta-u} \frac{\gamma^2\beta^{-\gamma}\left[\alpha+\beta-(u+v)\right]^{\gamma-1}}{\alpha+\beta-v} dvdu$$

ve

$$P(X_{L(2)} \le x) = -\int_{\alpha}^{x} f(u)\ln F(u)du$$

$$= -\int_{\alpha}^{x} \gamma\beta^{-\gamma}(\alpha+\beta-u)^{\gamma-1} \ln\left[1-\beta^{-\gamma}(\alpha+\beta-v)^{\gamma}\right] du \tag{4-58}$$

olacaktır. Şimdi (4-57) ve (4-58) birbirine eşitlenir ve x değişkenine göre türev alınırsa

$$\gamma \int_{\alpha}^{\alpha+\beta-x} \frac{\beta^{-\gamma}\left[\alpha+\beta-(x+v)\right]^{\gamma-1}}{\alpha+\beta-v} dv = -(\alpha+\beta-x)^{\gamma-1}\ln\left[1-\beta^{-\gamma}(\alpha+\beta-x)^{\gamma}\right] \tag{4-59}$$

bulunur. Sol tarafta $t = \alpha+\beta-v$ dönüşümü uygulanırsa

$$\gamma \int_{x}^{\beta} \frac{(t-x)^{\gamma-1}}{t} dt = -(\alpha+\beta-x)^{\gamma-1}\ln\left[1-\beta^{-\gamma}(\alpha+\beta-x)^{\gamma}\right], \tag{4-60}$$

$$\alpha < x < \alpha+\beta,\ \alpha<\beta,\ 0 \le \alpha,\ 0<\gamma$$

elde edilir.

Son eşitlikte $x = \beta$ seçilirse

$$0 = -\alpha^{\gamma-1}\ln\left[1-\beta^{-\gamma}\alpha^{\gamma}\right] \tag{4-61}$$

ve buradan $\alpha = 0$ bulunur. Buna göre

$$\gamma \int_{x}^{\beta} \frac{(t-x)^{\gamma-1}}{t} dt = -(\beta-x)^{\gamma-1}\ln\left[1-\beta^{-\gamma}(\beta-x)^{\gamma}\right], \tag{4-62}$$

$$0 < x < \beta,\ 0<\beta,\ 0<\gamma.$$

Bundan sonra $\gamma = 1$ olduğu gösterilerek düzgün dağılım elde edilecektir.

Bu ise $\gamma \neq 1$ değerleri için çelişki elde edilecerek kanıtlanacaktır.

(4-62) eşitiliğinde $x = \frac{\beta}{2}$ seçilir ve uygun dönüşümde sonra

$$\gamma \int_0^{\beta/2} \frac{t^{\gamma-1}}{t+\frac{\beta}{2}} dt = -(\frac{\beta}{2})^{\gamma-1} \ln(1 - \frac{1}{2^\gamma}) \tag{4-63}$$

olur.

Şimdi $0 < \gamma < 1$ olduğu varsayılsın. O zaman $k = 1-\gamma > 0$ olmak üzere

$$\gamma \int_0^{\beta/2} \frac{dt}{t^k(t+\frac{\beta}{2})} = -(\frac{\beta}{2})^{\gamma-1} \ln(1 - \frac{1}{2^\gamma}) \tag{4-64}$$

ve

$$\gamma \int_0^{\beta/2} \frac{dt}{t^k(t+\frac{\beta}{2})} \geq \gamma \int_0^{\beta/2} \frac{dt}{t^{1+k}} = \gamma \left.\frac{t^{-k}}{-k}\right|_{t=0}^{\beta/2} \to \infty. \tag{4-65}$$

Bu ise

$$-(\frac{\beta}{2})^{\gamma-1} \ln(1 - \frac{1}{2^\gamma}) < \infty \tag{4-66}$$

olması ile çelişmektedir. Demekki $\gamma \geq 1$ olmak zorundadır.

Eğer $1 < \gamma$ ise $0 < \gamma - 1$ ve

$$\gamma \int_0^{\beta/2} \frac{t^{\gamma-1}}{t+\frac{\beta}{2}} dt \geq \gamma \int_0^{\beta/2} \frac{t^{\gamma-1}}{t} dt = \gamma \int_0^{\beta/2} t^{\gamma-2} dt = \frac{\gamma}{\gamma-1}(\frac{\beta}{2})^{\gamma-1}. \tag{4-67}$$

Buradan da

$$-(\frac{\beta}{2})^{\gamma-1} \ln(1 - \frac{1}{2^\gamma}) \geq \frac{\gamma}{\gamma-1}(\frac{\beta}{2})^{\gamma-1}, \tag{4-68}$$

veya

$$-\ln(1 - \frac{1}{2^\gamma}) \geq \frac{\gamma}{\gamma-1} > 1 \tag{4-69}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$1 > 1 - \frac{1}{2^\gamma} > \frac{1}{2} \quad => \quad 2 > \frac{1}{1-\frac{1}{2^\gamma}} > 1 \tag{4-70}$$

ve buradan

$$\ln 2 > \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^\gamma}}\right) \quad => \quad \ln 2 > -\ln\left(1 - \frac{1}{2^\gamma}\right), \tag{4-71}$$

veya

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{2^\gamma}\right) < \ln 2 < 1. \tag{4-72}$$

Bu ise (4-69) ile çelişmektedir. O halde ancak $\gamma = 1$ olabilir. Böylece

$$f(x;\beta) = \beta^{-1}, \; 0 < x < \beta \tag{4-73}$$

olmaktadır. ■

4.3. Sıra İstatistikleri ile Düzgün Dağılıma ait bir Karakterizasyon

$X \sim U(0,1)$ olmak üzere bu ana kütleye ait birbirinden bağımsız n adet gözlem değerine karşı gelen sıra istatistikleri de $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ olsun. Eğer

$$V_i = \frac{X_{i:n}}{X_{i+1:n}}, \; i = 1, 2, ..., n-1 \text{ ve } V_n = X_{n:n} \tag{4-74}$$

tanımlanırsa $V_1, V_2, ..., V_n$ birbirinden bağımsız olup $i = 1, 2, ..., n$ için $V_i^i \sim U(0,1)$.

a) Önce $V_1, V_2, ..., V_n$ lerin birbirinden bağımsız olduğu gösterilecektir.

$$f_{i,i+1:n}(x_i, x_{i+1}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}$$
$$\times \left[F(x_i)\right]^{i-1}\left[1 - F(x_{i+1})\right]^{n-i-1} f(x_i) f(x_{i+1}), \tag{4-75}$$
$$-\infty < x_i < x_{i+1} < \infty$$

idi. Şimdi $1 \leq i \leq n-1$ için

$$V_i = \frac{X_{i:n}}{X_{i+1:n}}, \; V = X_{i+1:n} \tag{4-76}$$

dönüşümü uygulanırsa $J = v$ olur. O halde

$$f(v_i, v) = f_{i,i+1:n}(v_i v, v)\,|J|$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}\left[F(v_i v)\right]^{i-1}\left[1 - F(v)\right]^{n-i-1} f(v_i v) f(v) v, \tag{4-77}$$
$$0 < v_i < 1, \; 0 < v < 1$$

olacaktır. $0 < x < 1$ için $F(x) = x$ olduğundan

$$f(v_i, v) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} v_i^{i-1} v^i (1-v)^{n-i-1} \tag{4-78}$$

elde edilir. O halde

$$f_{V_i}(x) = \int_0^1 f(x, v)\,dv$$

$$= \int_0^1 \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} x^{i-1} v^i (1-v)^{n-i-1}\,dv, \tag{4-79}$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$f_{V_i}(x) = i x^{i-1}, \; 0 < x < 1 \tag{4-80}$$

bulunur.

b) $Y = V_i^i$ dönüşümü uygulandığında $V_i^i \sim U(0,1)$ olduğu hemen görülmektedir.

Burada $V_1, V_2, ..., V_n$ rasgele değişkenlerinin çarpımı incelenirse

$$X_{1:n} = V_1 V_2 \cdots V_n \tag{4-81}$$

olduğu görülür. Demekki V_i lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu (4-80) deki gibi ve $X_k \sim U(0,1)$, $k = 1, 2, ..., n$ ise

$$X_{1:n} \stackrel{d}{=} V_1 V_2 \cdots V_n \tag{4-82}$$

olmaktadır. Tabi bu noktada ilk akla gelen soru bunun tersinin de doğru olup olmadığıdır. Yani V_i lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu (4-80) deki gibi ve X_k, $k = 1, 2, ..., n$ birbirinden bağımsız ve negatif olmayan rasgele değişkenler iken herhangi bir pozitif n için

$$X_{1:n} \stackrel{d}{=} V_1 V_2 \cdots V_n \tag{4-83}$$

geçerli ise $X_k \sim U(0,1)$?

Bu sorunun yanıtını araştırmak için önce $U_n = V_1 V_2 \cdots V_n$ nin dağılım fonksiyonu incelenecektir. Bunun için

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= v_{n-1} \\ u_n &= v_1 v_2 \cdots v_n \end{aligned} \tag{4-84}$$

dönüşümü uygulanırsa $J = (u_1 u_2 \cdots u_{n-1})^{-1}$ ve buradan da

$$P(U_n \le x) = \int_0^x \int_{u_n}^1 \int_{\frac{u_n}{u_{n-1}}}^1 \cdots \int_{\frac{u_n}{u_2 \cdots u_{n-1}}}^1 n! u_1^{-n} u_2^{1-n} u_3^{2-n} \cdots u_{n-1}^{-2} u_n^{n-1} du_1 ... du_n \tag{4-85}$$

elde edilir.

Gerçekten de buradaki özellik düzgün dağılımı karakterize eden bir özelliktir. Ancak bunu gösterebilmek için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyac olacaktır.

Yrd. Teorem 4.3. *$k \le n-2$ için*

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \ne j+1}}^{k+1} (l-n)}{j!(k-j)!} = 1. \tag{4-86}$$

İspat: Bu bağıntı tümevarım ile gösterilecektir.

a) Önerme $k = 2$ için doğrudur;

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j+1}}^{3} (l-n)}{j!(3-j)!} = 1.$$

b) $k \leq n-3$ olmak üzere önerme k için doğru iken $k+1$ için doğrudur.

k için doğru olduğuna göre

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j+1}}^{k+1} (l-n)}{j!(k-j)!} = 1$$

dir. Buradan

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j+1-n} \frac{1}{j!(k-j)!} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{k+1}(l-n)} \tag{4-87}$$

veya

$$\frac{1}{(k+2-n)} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j+1-n} \frac{1}{j!(k-j)!} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{k+2}(l-n)} \tag{4-88}$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{(k+2-n)(j+1-n)} = \frac{1}{k+1-j}\left(\frac{1}{j+1-n} - \frac{1}{k+2-n}\right)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j+1-n} \frac{1}{j!(k+1-j)!} - \frac{1}{(k+2-n)} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k+1-j)!} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{k+2}(l-n)}. \tag{4-89}$$

Son ifade düzenlenirse

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j+1}}^{k+2} (l-n)}{j!(k+1-j)!} = 1 + \prod_{l=1}^{k+1}(l-n) \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k+1-j)!} \tag{4-90}$$

olur.

Diğer yandan

$$\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j+1}}^{k+2} (l-n)}{j!(k+1-j)!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq j+1}}^{k+2} (l-n)}{j!(k+1-j)!} + (-1)^{k+1} \frac{\prod\limits_{l=1}^{k+1} (l-n)}{(k+1)!0!} \tag{4-91}$$

idi. O halde (4-90) ifadesi (4-91) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq j+1}}^{k+2} (l-n)}{j!(k+1-j)!} = 1 +$$

$$+ \prod_{l=1}^{k+1} (l-n) \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k+1-j)!} + (-1)^{k+1} \frac{\prod\limits_{l=1}^{k+1} (l-n)}{(k+1)!0!}$$

$$= 1 + \prod_{l=1}^{k+1} (l-n) \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k+1-j)!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!0!} \right]$$

$$= 1 + \prod_{l=1}^{k+1} (l-n) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j}{j!(k+1-j)!}$$

elde edilir. $\sum\limits_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j}{j!(k+1-j)!} = 0$ olduğundan

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \frac{\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq j+1}}^{k+2} (l-n)}{j!(k+1-j)!} = 1. \blacksquare$$

Teorem 4.3. *$X_1, ..., X_n$ birbirinden bağımsız negatif olmayan mutlak sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere $V_1, ..., V_n$ ler de biribirinden bağımsız ve*

$$F_{V_i}(x) = x^i, \; 0 < x < 1 \tag{4-92}$$

dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. Eğer herhangi pozitif bir n sayısı için

$$X_{1:n} \stackrel{d}{=} V_1 V_2 \cdots V_n \tag{4-93}$$

sağlanırsa $F \sim U(0,1)$ dir.

İspat : Gösterim ve hesap kolaylığı nedeniyle önce

$$k = 1, 2, ..., n-2 \text{ için } v_k \equiv v_k(u_{k+1}, ..., u_n) = \frac{u_n}{u_{k+1} u_{k+2} \cdots u_{n-1}}$$

ve

$$v_{n-1} = u_n$$

tanımlansın.

İspat üç temel adımda gösterilecektir.

1) İlk önce

$$\int_{v_{n-2}}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_{n-2}^{-3}du_1\cdots du_{n-2}$$

$$=\frac{1}{(n-3)!}\left[\frac{(n-3)!}{\prod_{l=1}^{n-2}(l-n)}+\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-3}{j-1}(-1)^j\frac{v_{n-2}^{j-n}}{j-n}\right] \tag{4-94}$$

olduğu kanıtlanacaktır. Bu bağıntı da tümevarım kullanılarak gösterilecektir.

(4-94) eşitliğininin sağlandığını göstermek için $1\le k\le n-2$ olmak üzere

$$\int_{v_k}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_k^{-n+(k-1)}du_1\cdots du_k$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)!}{\prod_{l=1}^{k}(l-n)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}(-1)^j\frac{v_k^{j-n}}{j-n}\right] \tag{4-95}$$

olduğu gösterilecektir.

(4-95) eşitliğinin $k=1$ için geçerli olduğu hemen görülür. Önerme $1\le k\le n-3$ için doğru kabul edilsin. Şimdi $k+1$ için doğru olduğu kanıtlanacaktır.

$$\int_{v_{k+1}}^{1}\left(\int_{v_k}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_k^{-n+(k-1)}du_1\cdots du_k\right)u_{k+1}^{-n+k}du_{k+1}$$

$$=\int_{v_{k+1}}^{1}\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)!}{\prod_{l=1}^{k}(l-n)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}(-1)^j\frac{v_k^{j-n}}{j-n}\right]u_{k+1}^{-n+k}du_{k+1}$$

$$=\int_{v_{k+1}}^{1}\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)!}{\prod_{l=1}^{k}(l-n)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{(-1)^j}{j-n}\left(\frac{v_{k+1}}{u_{k+1}}\right)^{j-n}\right]u_{k+1}^{k-n}du_{k+1}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)!}{\prod_{l=1}^{k}(l-n)}\frac{u_{k+1}^{k+1-n}}{k+1-n}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}(-1)^j\frac{v_{k+1}^{j-n}}{j-n}\frac{u_{k+1}^{k+1-j}}{k+1-j}\right]\Bigg|_{u_{k+1}=v_{k+1}}^{1}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)!}{\prod\limits_{l=1}^{k+1}(l-n)} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{k+1-j}\frac{(-1)^j}{j-n}v_{k+1}^{j-n}\right.$$

$$\left. - \frac{(k-1)!}{\prod\limits_{l=1}^{k+1}(l-n)}v_{k+1}^{k+1-n} - \sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{k+1-j}\frac{(-1)^j}{j-n}v_{k+1}^{k+1-n}\right]. \tag{4-96}$$

Yardımcı teoremden

$$-k\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}\frac{1}{k+1-j}\frac{(-1)^j}{j-n} = \frac{k!}{\prod\limits_{l=1}^{k+1}(l-n)} - \frac{(-1)^k}{k+1-n} \tag{4-97}$$

elde edilir. (4-96) denkleminde (4-97) kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\int_{v_{k+1}}^{1}\left(\int_{v_k}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_k^{-n+(k-1)}du_1\cdots du_k\right)u_k^{-n+k}du_{k+1}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{k!}{\prod\limits_{l=1}^{k+1}(l-n)} + \sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}(-1)^j\frac{v_{k+1}^{j-n}}{j-n}\right]$$

bulunur. Bu da zaten ispatlanması istenilen sonuç idi.

2) Şimdi

$$\int_{v_{n-1}}^{1}\left(\int_{v_{n-2}}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_{n-2}^{-3}du_1\cdots du_{n-2}\right) = \frac{(1-u_n)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olduğu gösterilecektir.

Birinci adımdan

$$\int_{v_{n-1}}^{1}\left(\int_{v_{n-2}}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_{n-2}^{-3}du_1\cdots du_{n-2}\right)u_{n-1}^{-2}du_{n-1}$$

$$= \int_{v_{n-1}}^{1}\frac{1}{(n-3)!}\left[\frac{(n-3)!}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}(l-n)} + \sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-3}{j-1}(-1)^j\frac{v_{n-2}^{j-n}}{j-n}\right]u_{n-1}^{-2}du_{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-3)!}\left[\frac{(n-3)!}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}(l-n)}\frac{u_{n-1}^{-1}}{-1} + \sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-3}{j-1}\frac{(-1)^j}{j-n}u_n^{j-n}\frac{u_{n-1}^{n-1-j}}{n-1-j}\right]\Bigg|_{u_{n-1}=u_n}^{1}$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\left[-\frac{(n-2)!}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}(l-n)} + (n-2)\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-3}{j-1}\frac{(-1)^j}{j-n}\frac{u_n^{j-n}}{n-1-j}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-2)!}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}(l-n)}u_n^{-1} - (n-2)\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-3}{j-1}\frac{(-1)^j}{j-n}\frac{u_n^{-1}}{n-1-j}\right]$$

elde edilir.

$$-(n-2)\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n-3}{j-1}\frac{1}{n-1-j}\frac{(-1)^j}{j-n} = \sum_{j=1}^{n-3}\binom{n-2}{j}\frac{(-1)^j}{j+1-n}$$

ve yardımcı teoremden de

$$\sum_{j=0}^{n-3}\binom{n-2}{j}\frac{(-1)^j}{j+1-n} = \frac{(n-2)!}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}(l-n)} - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)-n}$$

olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\int_{v_{n-1}}^{1}\left(\int_{v_{n-2}}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_{n-2}^{-3}du_1\cdots du_{n-2}\right)u_{n-1}^{-2}du_{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\left[-\frac{(n-2)!}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}(l-n)} + \sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1-n}u_n^{j+1-n}\right]$$

yazılabilir. O halde

$$u_n^{n-1}\int_{v_{n-1}}^{1}\left(\int_{v_{n-2}}^{1}\cdots\int_{v_1}^{1} u_1^{-n}u_2^{-n+1}u_3^{-n+2}\cdots u_{n-2}^{-3}du_1\cdots du_{n-2}\right)u_{n-1}^{-2}du_{n-1}$$

$$= \frac{(1-u_n)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{4-98}$$

3) Sonunda $X_{1:n} \stackrel{d}{=} V_1V_2\cdots V_n$ bağıntısından

$$n\int_0^x [1-F(t)]^{n-1}\,dF(t) = n\int_0^x (1-u_n)^{n-1}du_n$$

veya

$$n\int_0^{F(x)} (1-t)^{n-1}dt = n\int_0^x (1-t)^{n-1}dt$$

elde edilir. Buradan da $F(x) = x$. ■

4.4. Alt Rekorlar ile Frechét Dağılımına ait bir Karakterizasyon

$X_1, X_2, \ldots$ birbirinden bağımsız ve aşağıda verilen dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun;

$$F_{X_i}(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\delta}} \;,\; x > \mu \;,\; \sigma > 0 \;,\; \delta > 0. \tag{4-99}$$

Ayrıca $W_1, W_2, \ldots$ birbirinden bağımsız ve standart üstel dağılmış rsagele değişkenler olsun;

$$F_{W_j}(x) = 1 - e^{-x} \;,\; x > 0. \tag{4-100}$$

O zaman $n \geq 1$ için

$$\frac{X_{L(n)} - \mu}{\sigma} \stackrel{d}{=} (W_1 + \ldots + W_n)^{-\frac{1}{\delta}}. \tag{4-101}$$

(4-115) bağıntısının doğru olduğunu göstermek için ilk önce sol tarafın dağılımı bulunacaktır. $H(x) = -\ln F(x)$ olmak üzere $X_{L(n)}$ nin yoğunluk fonksiyonu

$$f_n(x) = \frac{[H(x)]^{n-1}}{(n-1)!} f(x) \tag{4-102}$$

dir. O halde (4-99) den $H(x) = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\delta}$ ve buradan da

$$f_n(x) = \frac{\delta \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-(n\delta+1)}}{\sigma \cdot (n-1)!} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\delta}} \tag{4-103}$$

elde edilir. Şimdi

$$Y_{L(n)}(x) = \frac{X_{L(n)} - \mu}{\sigma} \tag{4-104}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$f_{Y_{L(n)}}(x) = \frac{\delta x^{-(\delta n+1)}}{(n-1)!} e^{-x^{-\delta}} \;,\; x > 0 \tag{4-105}$$

olacaktır.

$(W_1 + \ldots + W_n)^{-\frac{1}{\delta}}$ nin dağılımını elde etmek için $Y_n = W_1 + \ldots + W_n$ rasgele değişkenin dağılımı elde edilecektir. Bunun için de

$$\begin{aligned} y_1 &= w_1 \\ y_2 &= w_1 + w_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= w_1 + \ldots + w_{n-1} \\ y_n &= w_1 + \ldots + w_{n-1} + w_n \end{aligned} \tag{4-106}$$

dönüşümü uygulanacaktır. $y_0 \equiv 0$ tanımlanırsa $w_i = y_i - y_{i-1} > 0$, $i = 1, \ldots, n$ ve buradan da

$$0 < y_1 < y_2 \ldots < y_{n-1} < y_n. \tag{4-107}$$

İstenen dağılım

$$P(Y_n \leq x) = \int_D f(w_1)...f(w_n)dw_1...w_n \tag{4-108}$$

olup burada

$$D = \{(w_1, ..., w_n) : w_1 + ... + w_n \leq x\}. \tag{4-109}$$

O halde

$$P(Y_n \leq x) = \int_{y_n=0}^{x} \int_{y_{n-1}=0}^{y_n} ... \int_{y_2=0}^{y_3} \int_{y_1=0}^{y_2} e^{-y_n} dy_1...dy_n. \tag{4-110}$$

Diğer yandan

$$\int_{y_{n-1}=0}^{y_n} ... \int_{y_2=0}^{y_3} \int_{y_1=0}^{y_2} e^{-y_n} dy_1...dy_{n-1} = \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \tag{4-111}$$

olduğundan

$$P(Y_n \leq x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{y_n=0}^{x} y_n^{n-1} e^{-y_n} dy_n, \tag{4-112}$$

ve

$$f_{Y_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \ , \ x > 0 \tag{4-113}$$

olarak hesaplanır. Şimdi $Y = Y_n^{-\frac{1}{\delta}}$ $\left(\text{yani } Y = (W_1 + ... + W_n)^{-\frac{1}{\delta}}\right)$ dönüşümü uygulanırsa $|J| = \delta y^{-\delta-1}$ olur. Böylece

$$f_Y(x) = \frac{\delta x^{-(\delta n+1)}}{(n-1)!} e^{-x^{-\delta}} \ , \ x > 0 \tag{4-114}$$

bulunur.

(4-105) ve (4-114) birbirne eşittir. Yani

$$\frac{X_{L(n)} - \mu}{\sigma} \stackrel{d}{=} (W_1 + ... + W_n)^{-\frac{1}{\delta}}. \tag{4-115}$$

Bu noktada şöyle bir soru akla gelmektedir. Acaba (4-115) özelliği Frechét dağılımını karakterize eden bir özellik midir? Bu sorunun yanıtı olumlu olarak cevaplanabilmiştir ve burada bir teorem olarak ifade edilecektir.

Teorem 4.4. *$X_1, X_2, ...$ birbirinden bağımsız negatif olmayan ve aynı mutlak sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler ve $W_1, W_2, ..., W_n$ birbirinden bağımsız ve standart üstel dağılmış rasgele değişkenler olsun;*

$$F_{W_j}(x) = 1 - e^{-x} \ , \ x > 0. \tag{4-116}$$

O zaman herhangi bir $n \geq 1$ için

$$X_{L(n)} \stackrel{d}{=} (W_1 + ... + W_n)^{-\frac{1}{\delta}} \tag{4-117}$$

geçerli ise

$$F(x) = e^{-x^{-\delta}},\ x > 0,\ \delta > 0. \tag{4-118}$$

İspat: İspatın bir yönü zaten gösterilmişti. O halde teoremin hipotezleri altında (4-117) bağıntısı geçerli ise F nin standart Frechét dağılımı olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Daha önce $(W_1 + ... + W_n)^{-\frac{1}{\delta}}$ nin dağılımının (bkz. (4-114))

$$f_Y(x) = \frac{\delta x^{-(\delta n+1)}}{(n-1)!} e^{-x^{-\delta}}\ ,\ x > 0 \tag{4-119}$$

olduğu gösterilmişti. Diğer yandan $H(x) = -\ln F(x)$ olmak üzere $X_{L(n)}$ nin yoğunluk fonksiyonu

$$f_n(x) = \frac{[H(x)]^{n-1}}{(n-1)!} f(x) \tag{4-120}$$

olduğundan (4-117) bağıntısına göre

$$\int_0^x \frac{[H(t)]^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt = \int_0^x \frac{\delta t^{-(\delta n+1)}}{(n-1)!} e^{-t^{-\delta}} dt\ ,\ x > 0. \tag{4-121}$$

Son eşitliğin sol tarafında $y = -\ln F(t)$ ve sağ tarafında ise $y = t^{-\delta}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_{-\ln F(x)}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-y} dy = \int_{x^{-\delta}}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-y} dy\ ,\ x > 0. \tag{4-122}$$

Burdan da $-\ln F(x) = x^{-\delta}$ veya

$$F(x) = e^{-x^{-\delta}}\ ,\ x > 0 \tag{4-123}$$

elde edilir. ■

4.5. Yukarı Rekorlar ile Pareto Dağılımına ait bir Karakterizasyon

Bir rasgele değişken aşağıdaki gibi bir dağılım fonksiyonuna sahip ise genelleştirilmiş Pareto dağılımıdır;

$$f_{Pa}(x;\mu,\sigma,\beta) = \frac{1}{\sigma}\left[1 + \beta\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-(1+\beta^{-1})},\quad \begin{array}{l} \beta > 0 \text{ için } x \geq \mu \\ \beta < 0 \text{ için } x \leq \mu - \frac{\sigma}{\beta} \end{array} \tag{4-124}$$

$$f_{Pa}(x;\mu,\sigma,\beta) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)},\ \beta = 0 \text{ için } x \geq \mu. \tag{4-125}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_m$ birbirinden bağımsız ve aşağıdaki dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun;

$$P(\epsilon_i \leq x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta^{-1}} & , \beta > 0 \text{ için } x \geq 1 \\ x^{-\beta^{-1}} & , \beta < 0 \text{ için } 0 < x < 1 \end{cases} . \tag{4-126}$$

O zaman $\beta \neq 0$ ve $X_1, X_2, ...$ rasgele değişkenleri genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahip iseler

$$X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \mu \frac{\sigma}{\beta} + \frac{\sigma}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i \tag{4-127}$$

olduğu bilinmektedir [3, s. 90] .

Eğer $\sigma = 1$ ve $\mu = 0$ ise

$$f_{Pa}(x; \mu, \sigma, \beta) = (1 + \beta x)^{-\left(1+\beta^{-1}\right)}, \begin{array}{l} \beta > 0 \text{ için } x \geq 0 \\ \beta < 0 \text{ için } x \leq -\frac{1}{\beta} \end{array} \tag{4-128}$$

olacaktır ve bu durumda (4-127)

$$X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i \tag{4-129}$$

şeklini alacaktır.

Bu şartlarda (4-129) bağıntısının gerçekten de sağlandığını göstermek için önce $\frac{1}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i$ rasgele değişkeninin dağılımı bulunacaktır. Bunun için

$$\begin{aligned} u_1 &= \epsilon_1 \\ u_2 &= \epsilon_2 \\ &\vdots \\ u_{m-1} &= \epsilon_{m-1} \\ u_m &= \tfrac{1}{\beta} \epsilon_1 ... \epsilon_{m-1} \epsilon_m \text{ , } \beta < 0 \end{aligned} \tag{4-130}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$J = \frac{\beta}{u_1 ... u_{m-1}} \tag{4-131}$$

olacaktır.

$\beta < 0$ için $\epsilon_m = \frac{\beta u_m}{u_1 ... u_{m-1}}$ ve $0 < \epsilon_m < 1$ olduğundan $\frac{1}{\beta} < u_m < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{\beta u_m}{u_2 ... u_{m-1}} < u_1 < 1, \\ &\frac{\beta u_m}{u_3 ... u_{m-1}} < u_2 < 1, \\ &\vdots \\ &\frac{\beta u_m}{u_{m-1}} < u_{m-2} < 1, \\ &\beta u_m < u_{m-1} < 1, \\ &\frac{1}{\beta} < u_m \leq x \text{ , } \frac{1}{\beta} \leq x < 0 \end{aligned}$$

olacaktır. O halde

$$g(u_1,...,u_m)=f_{Pa}(u_1)...f_{Pa}(u_{m-1})f_{Pa}\left(\frac{\beta u_m}{u_1...u_{m-1}}\right) \tag{4-132}$$

tanımlanırsa

$$P\left(\frac{\epsilon_1...\epsilon_m}{\beta}\leq x\right)=\int\limits_{1/\beta}^{x}\int\limits_{\beta u_m}^{1}...\int\limits_{\frac{\beta u_m}{u_3...u_{m-1}}}^{1}\int\limits_{\frac{\beta u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1} g(u_1,...,u_m)\left|J\right|du_1...du_m \tag{4-133}$$

dir. Burada

$$\int\limits_{\beta u_m}^{1}...\int\limits_{\frac{\beta u_m}{u_3...u_{m-1}}}^{1}\int\limits_{\frac{\beta u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1} g(u_1,...,u_m)\left|J\right|du_1...du_{m-1}=$$

$$=\int\limits_{\beta u_m}^{1}...\int\limits_{\frac{\beta u_m}{u_3...u_{m-1}}}^{1}\int\limits_{\frac{\beta u_m}{u_2...u_{m-1}}}^{1}\frac{(-\frac{1}{\beta})^m(\beta u_m)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}}{u_1...u_{m-1}}(-\beta)du_1...du_{m-1} \tag{4-134}$$

$$=\left(-\beta^{-1}\right)^{m-1}(\beta u_m)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\frac{\left[-\ln(\beta u_m)\right]^{m-1}}{(m-1)!}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$P\left(\frac{\epsilon_1...\epsilon_m}{\beta}\leq x\right) = \int\limits_{\frac{1}{\beta}}^{x}(\beta u)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\frac{\left[\beta^{-1}\ln(\beta u)\right]^{m-1}}{(m-1)!}du\ , \tag{4-135}$$

$$\frac{1}{\beta} \leq x<0$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$P\left(X_{U(m)}\leq x\right)=\int\limits_0^x\frac{\left[-\ln\bar{F}(u)\right]^{m-1}}{(m-1)!}dF(u)\ ,\ 0<x \tag{4-136}$$

olduğundan

$$P\left(X_{U(m)}\leq x\right)=\int\limits_0^x\frac{\left[-\ln(1+\beta t)^{-\beta^{-1}}\right]^{m-1}}{(m-1)!}(1+\beta t)^{-(1+\beta^{-1})}dt, \tag{4-137}$$

ve $\beta u=1+\beta t$ dönüşümü ile

$$P\left(X_{U(m)}\leq x\right) = \int\limits_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}+x}(\beta u)^{-\left(1+\beta^{-1}\right)}\frac{\left[\beta^{-1}\ln(\beta u)\right]^{m-1}}{(m-1)!}du, \tag{4-138}$$

$$0 < x\leq-\frac{1}{\beta}.$$

Bu da $\beta < 0$ için $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i$ olduğunu gösterir.

$\beta > 0$ için $\epsilon_m = \frac{\beta u_m}{u_1 ... u_{m-1}}$ ve $\epsilon_m \geq 1$ olduğundan $\frac{1}{\beta} \leq u_m$ olmak üzere

$$\frac{\beta u_m}{u_2 ... u_{m-1}} \geq u_1 \geq 1,$$
$$\frac{\beta u_m}{u_3 ... u_{m-1}} \geq u_2 \geq 1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\beta u_m}{u_{m-1}} \geq u_{m-2} \geq 1,$$
$$\beta u_m \geq u_{m-1} \geq 1,$$
$$\frac{1}{\beta} < u_m \leq x \ , \ \frac{1}{\beta} \leq x$$

olacaktır. O halde

$$P\left(\frac{\epsilon_1 ... \epsilon_m}{\beta} \leq x\right) = \int_{1/\beta}^{x} \int_{1}^{\beta u_m} \cdots \int_{1}^{\frac{\beta u_m}{u_3 \cdots u_{m-1}}} \int_{1}^{\frac{\beta u_m}{u_2 \cdots u_{m-1}}} g(u_1, ..., u_m) \, |J| \, du_1 ... du_m \tag{4-139}$$

dir. $\beta < 0$ durumuna benzer şekilde

$$\int_{1}^{\beta u_m} \cdots \int_{1}^{\frac{\beta u_m}{u_3 \cdots u_{m-1}}} \int_{1}^{\frac{\beta u_m}{u_2 \cdots u_{m-1}}} g(u_1, ..., u_m) \, |J| \, du_1 ... du_{m-1} =$$

$$= \int_{1}^{\beta u_m} \cdots \int_{1}^{\frac{\beta u_m}{u_3 \cdots u_{m-1}}} \int_{1}^{\frac{\beta u_m}{u_2 \cdots u_{m-1}}} \frac{\beta^{-m} (\beta u_m)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}}{u_1 ... u_{m-1}} (-\beta) du_1 ... du_{m-1} \tag{4-140}$$

$$= (\beta u_m)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \frac{\left[\beta^{-1} \ln (\beta u_m)\right]^{m-1}}{(m-1)!}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da

$$P\left(\frac{\epsilon_1 ... \epsilon_m}{\beta} \leq x\right) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{x} (\beta u)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \frac{\left[\beta^{-1} \ln (\beta u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} du \ , \tag{4-141}$$
$$x \geq \frac{1}{\beta}$$

elde edilir. Bu da $x \geq 0$ için $\frac{\epsilon_1 ... \epsilon_m}{\beta} \stackrel{d}{=} X_{U(m)}$, yani $\beta > 0$ için de $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i$ olduğunu gösterir.

Şimdi bu özelliğin $f_{Pa}(x; 0, 1, \beta), \beta \neq 0$ için karakteristik bir özellik olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.5. *$X_1, X_2, \ldots$ birbirinden bağımsız negatif olmayan rasgele değişkenler olmak üzere bunların ortak dağılım fonksiyonu $F(x)$, $x > 0$ olsun. ϵ_i ler (4-126) de tanımlandığı gibi olsun. $\beta < 0$ olmak üzere*

$$X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i \tag{4-142}$$

geçerli ise

$$F(x) = 1 - (1+\beta x)^{-\beta^{-1}} \ , 0 < x \leq -\frac{1}{\beta} . \tag{4-143}$$

İspat:

$$P\left(X_{U(m)} \leq x\right) = \int_0^x \frac{\left[-\ln \bar{F}\,(u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} dF(u) \ , 0 < x \tag{4-144}$$

a) $\beta < 0$ için $\frac{1}{\beta} \prod_{i=1}^{m} \epsilon_i$ rasgele değişkenlerinin dağılımı

$$P\left(\frac{\epsilon_1 \ldots \epsilon_m}{\beta} \leq x\right) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{x} (\beta u)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \frac{\left[\beta^{-1} \ln (\beta u)\right]^{m-1}}{\cdot\,(m-1)!} du \ , \tag{4-145}$$

$$\frac{1}{\beta} \leq x < 0$$

olarak bulunmuştu. O halde $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta}\epsilon_1 \ldots \epsilon_m$ bağıntısına göre

$$\int_0^x \frac{\left[-\ln \bar{F}\,(u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} dF(u) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}+x} (\beta u)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \frac{\left[\beta^{-1} \ln (\beta u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} du \ , \tag{4-146}$$

$$0 < x \leq -\frac{1}{\beta}$$

olmalıdır.

(4-146) eşitliğinde sol tarafta $t = -\ln \bar{F}\,(u)$ dönüşümü ve sağ tarafta da $t = \frac{\ln(\beta u)}{\beta}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_0^{-\ln \bar{F}(x)} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t} dt = \int_0^{\frac{\ln(1+\beta x)}{\beta}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t} dt \ , 0 < x \leq -\frac{1}{\beta} \tag{4-147}$$

olur. O halde

$$F(x) = 1 - (1+\beta x)^{-\beta^{-1}} \ , 0 < x \leq -\frac{1}{\beta} \tag{4-148}$$

bulunur.

b) $\beta < 0$ için $\frac{1}{\beta}\prod_{i=1}^{m}\epsilon_i$ rasgele değişkenlerinin dağılımı

$$P\left(\frac{\epsilon_1 ... \epsilon_m}{\beta} \le x\right) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{x} (\beta u)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \frac{\left[\beta^{-1}\ln(\beta u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} du\ , \quad x \ge \frac{1}{\beta} \tag{4-149}$$

idi. $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta}\epsilon_1 ... \epsilon_m$ bağıntısına göre

$$\int_0^x \frac{\left[-\ln\bar{F}(u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} dF(u) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\beta}+x} (\beta u)^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \frac{\left[\beta^{-1}\ln(\beta u)\right]^{m-1}}{(m-1)!} du, \quad x \ge 0 \tag{4-150}$$

olacaktır.

(a) kısmında uygulanan aynı dönüşümler ile

$$\int_0^{-\ln\bar{F}(x)} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t} dt = \int_0^{\frac{\ln(1+\beta x)}{\beta}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t} dt\ ,\ 0 \le x \tag{4-151}$$

elde edilir. O halde

$$F(x) = 1 - (1+\beta x)^{-\beta^{-1}}\ ,\ 0 \le x \tag{4-152}$$

olmalıdır. ■

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde özellikle rasgele değişkenlerin çarpımına ait karakterizasyon teoremleri dikkat çekiyor. Bunlar

1) $X_{L(m)} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m,\ \varepsilon_i \sim U(0,1)$ ise $F \sim U(0,1)$.
2) $X_{1:m} \stackrel{d}{=} V_1 V_2 \cdots V_m,\ F_{V_i}(x) = x^i,\ 0 < x < 1$ ise $F \sim U(0,1)$.
3) $X_{U(m)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta}\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m,\ P(\epsilon_i \leq x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta^{-1}} & ,\ \beta > 0 \text{ için } x \geq 1 \\ x^{-\beta^{-1}} & ,\ \beta < 0 \text{ için } 0 < x < 1 \end{cases}$
   ise $F(x) = 1 - (1+\beta x)^{-\beta^{-1}}\ ,\ \begin{matrix} \beta > 0 \text{ için } x \geq 0 \\ \beta < 0 \text{ için } 0 < x \leq -\frac{1}{\beta} \end{matrix}$.
4) $X_{L(n)} \stackrel{d}{=} (W_1 + \cdots W_n)^{-\frac{1}{\delta}}, \delta > 0,\ F_{W_i}(x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$ ise
   $F(x) = e^{-x^{-\delta}},\ x > 0,\ \delta > 0$.
5) $X_{U(2)} - X_{U(1)} \stackrel{d}{=} X_{L(2)}$ ve F belli bir sınıftan ise F düzgün dağılımdır.

şeklinde idi.

Hem alt rekorlar hem de üst rekorlar için çarpım içeren sonuçlar elde edilmiştir. Özel olarak (3) de $\beta = -1$ alınırsa

$$X_{U(m)} \stackrel{d}{=} -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m,\ F_{\varepsilon_i}(x) = x,\ 0 < x < 1 \text{ ise } F(x) = x$$

elde edilir. Buradaki ve (1) deki $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m$ çarpımı hem fizikte hem de Markov zincirleri için bir prototip olması bakımından önemlidir. Fizikte belirli çarpışma süreçlerine uygun kullanımına ait basit bir örnek (Feller 1971) kitabında bulunabilir.

(1) de elde edilen sonuç (4) sonucu ile birlikte 2-6 Mayıs 2001 tarihinde Antalya'da düzenlenen II. İstatistik Kongresi'nde sunulmuştur. Söz konusu bildiride (1) deki sonucun ispatı daha kısa bir şekilde yapılmıştır. Üstel dağılmış rasgele değişkenlerin toplamının Gamma dağıldığı bilinmektedir. Bu özellik kullanılarak daha çabuk sonuca varılmıştır. Daha ayrıntılı bilgi için (Bairamov ve Arslan 2001) incelenebilir. Ancak tezde gösterilen ispatın avantajı da başka sonuçlar için ipuçları sağlamasıdır. Bu nedenle uzun da olsa tezde gösterildiği gibi ispat yapılmıştır.

(2) de elde edilen sonuç incelendikten sonra benzer bir sonucun $X_{n:n}$ için de geçerli olup olmayacağı hemen akla gelmektedir. Ayrıca dikkat edilirse $F \sim U(0,1)$ ise $F_{X_{i:i}}(x) = [F(x)]^i = x^i = F_{V_i}(x)$ olmaktadır. Yani $X_1, X_2, ..., X_n$ birbirinden bağımsız ve $k = 1, ..., n$ için $X_k \sim U(0,1)$ ise

$X_{1:n} \stackrel{d}{=} X_{1:1}X_{2:2}\cdots X_{n:n}$ bağıntısı geçerlidir.

(5) sonucunun ispatında belli bir dağılımlar ailesi ele alınmasına karşı aynı sonucun daha geniş bir sınıfta geçerli olabileceği düşünülmektedir. Zira bu ispatta kullanılan bilgiler çok fazla değildir.

Bu sonuçlar 3.2.6 da anlatılan sonuçlar kapsamında ele alınabilir. Ancak hiç birisinde çarpımlar içeren bir teorem yoktur. En yakın teorem Kotz ve Steutel (1988) tarafından elde edilen sonuçtur.

6. KAYNAKLAR

AHSANULLAH, M., *A characterization property of the exponential distribution*, Ann. Statist., **5**, 580-582, 1977.

AHSANULLAH, M., *Record values, random record models and concomitants*, Journal of Statistical Research, **28**, Nos 1&2, 89-109, 1994.

AHSANULLAH, M., *Record Statistics*, Nova Science Pub., Inc., New York, 1995.

AHSANULLAH, M. ve BAIRAMOV, I., *A characterization of uniform distribution*, İstatistik, Journal of the Turkish Statistical Association, **2**, 145-151, 1999.

AHSANULLAH, M.ve HOLLAND, B., *Record values and the geometric distribution*, Statistische Hefte, **25**, 319-327, 1984.

ALAMATSAZ, M. H., *A note on an article by Artikis*, Acta Mathematica Hungarica, **45**, 159-162, 1985.

ALZAID, A. A. ve AL-OSH, M. A., *Characterization of probability distributions based on the relation* $X \overset{d}{=} U(X_1 + X_2)$, Sankhyā B, **53**, 188-190, 1991.

ARNOLD, B.C. ve HANG, J.S., *The Exponential Distribution, Theory, Methods and Applications*, Gordon and Breach Publishers 1995.

ARNOLD, B. ve MEEDEN, G., *Characterization of distributions by sets of moments of order statistics*, Ann. Statist., **3**, 754-758, 1975.

ARNOLD, B.C., BALAKRISHNAN, N. ve NAGARAJA, H.N., *A First Course in Order Statistics.* Wiley, New York, 1992.

BALAKRISHNAN, N. ve BASU, A. P., *The Exponential Distribution, Theory, Methods and Applications*, Gordon and Breach Publishers 1995.

BAIRAMOV, I.G. ve ARSLAN G., *Aşağı rekorlar ile iki dağılımın karakterizasyonu*, II. İstatistik Kongresi, 2-6 Mayıs 2001, Belek-Antalya.

BAIRAMOV, I.G., *On the characteristic properties of the exponential distribution*, Ann. Inst. Statist. Math.,**52**, 448-458, 2000.

BAIRAMOV, I.G. ve APAYDIN, A., *Characterization of continuous distributions by property of conditional expectation*, South African Statist. J., **34**, 39-50, 2000.

BAIRAMOV, I.G. ve ALIEV, F.A., *On the characterization of distributions through order statistics and record values*, Journal of Applied Statistical Science, **7**, 249-253, 1998.

BAIRAMOV, I.G. ve ERYILMAZ, S., *On properties of statistics connected with minimal spacing and record exceedances*, Applied Statistical Science V, 245-254, Nova Science Publishers, 2001.

BLAZQUEZ, F.L. ve REBOLLO, J.L.M., *A characterization of distributions based on linear regression of order statistics and record values*, Sankhya A, **59**, 311-323, 1997.

BURRILL, C. W., *Measure, Integration, and Probability*, McGraw-Hill, New York, 1972.

CHAN, L.K., *On a characterization of distributions by expexted values of order statistics*, Amer. Math. Monthly, **74**, 950-951, 1967.

CRAMÉR, H., *Über eine Eigenschaft der normalen Verteilung*, Math. Z., **41**, 405-414, 1936.

DEMBINSKA, A. ve WESOLOWSKI, J., *Linearity of regression for non-adjecent order statistics*, Metrika, **48**, 215-222, 1998.

DEMBINSKA, A. ve WESOLOWSKI, J., *Linearity of regression for non-adjecent record values*, J. Statist. Plann. Inference, **90**, 195-205, 2000.

DESU, M., *A characterization of the exponential distribution by order statistics*, Ann. Math. Statist., **42**, 837-838, 1971.

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.

2, second edition, New York: John Wiley & Sons, 1971.

FERGUSON, T. S., *On characterizing distributions by order statistics*, Sankhyā A, **29**, 265-278, 1967.

GATHER, U., *On a characterization of the exponential distribution by properties of order statistics*, Statistics & Probability Letters, **7**, 93-96, 1989.

GHITANY, M.E., EL-SAIDI, M.A. ve KHALIL, Z., *Characterization of a general class of life-testing models*, J. Appl. Prob., **32**, 548-553, 1995.

GOVINDARAJULU, Z., HUANG, J.S. ve SALEH, A.K.Md.E., *Expected value of the spacings between order statistics*, In *A Modern Course on Statistical Distributions in Scientific Work* (Eds., G.P. Patil, S. Kotz, and J.K. Ord), pp. 143-147, D. Reidel, Dordrecht, 1975.

HOEFFDING, W., *On the distribution of the expected values of the order statistics*, Ann. Math. Statist., **24**, 93-100, 1953.

HUANG, J.S., *Characterization of distributions by the expected values of the order statistics*, Ann. Inst. Statist. Math., **27**, 87-93, 1975.

HUANG, J.S., *On a "Lack of memory" property*, Ann. Inst. Statist. Math., **33**, 131-134, 1981.

KIRMANI, S.N.U.A. ve BEG, M.I., *On characterization of distributions by expected records*, Sankhya A, **46**, 463-465, 1984.

KNUTH, D.E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 1: Fundamental Algorithms, second edition, Addison-Wesley Pub. Comp., 1968.

KOTZ, S., ve STEUTEL, F. W., *Note on a characterization of exponential distributions*, Statistics and Probability Letters, **6**, 201-203, 1988.

KRISHNAJI, N., *Characterization of Pareto distribution through a model of under-reported incomes*, Econometrica, **38**, 251-255, 1970.

KRISHNAJI, N., *Note on a characterizing property of the exponential distribution,* Ann. Math. Statist., **42**, 361-362, 1971.

LIN, G. D., *Characterizations of uniform distributions and of exponential distributions*, Sankhyā A, **50**, 64-69, 1988a.

LIN, G.D., *Characterization of distributions via relationships between two moments of order statistics*, Journal of Statistical Planning and Inference, **19**, 73-80, 1988b.

LIN, G.D. ve TOO, Y.U., *A moment problem and its application to characterization of the distribution*, Southeast Asian Bull. Math, **18**, 85-88, 1994.

NAGARAJA, H., N. *On a characterization based on record values*, Austral. J. Statist., **19**, 70-73, 1977.

NAGARAJA, H., N. *Some characterizations of continuous distributions based on regressions of adjacent order statistics and record values*, Sankhyā A, **50**, 70-73, 1988.

OLSHEN, R. A. ve SAVAGE, L. J., *A generalized unimodality*, Journal of Applied Probability, **7**, 21-34, 1970.

POLLAK, M., *On equal distributions*, Ann. Statist., **1**, 180-182, 1974.

PURI, P.S. ve RUBIN, H., *A characterization based on the absolute difference of two i.i.d random variables*, Annals of Mathematical Statistics, **41**, 2113-2122, 1970.

RAMACHANDRAN, B., *On the strong memorylessness of the exponential and geometric probabality laws*, Sankhya A, **41**, 244-251, 1979.

ROSSBERG, H.J., *Characterization of the exponential and the Pareto distributions by means of some properties of the distributions which the differences and moments of order statistics are subject to*, Mathematische Operationsforschung und Technik, Series Statistics, **3**, 207-215, 1972.

SHIMIZU, R., *On a lack of memory property of of the exponential distribution*, Ann. Inst. Statist. Math., **31**, 309-313, 1979.

SUKAHATME, P.V., *Tests of significance for samples of the* χ^2 *population with two degrees of freedom*, Annals of Eugenics, **8**, 52-56, 1937.

WESOLOWSKI, J. ve AHSANULLAH, M., *On characterizing distributions via linearity of regression for order statistics* , Austral. J. Statist., **39**(1), 69-78, 1997.

XU, J. -L. ve YANG, G. L., *A note on a characterization of the exponential distribution based on a type II censored sample*, Ann. Statist., **23**(3), 769-773, 1995.