131290 _3

GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ VE BİR UYGULAMA

BAHAR DİREM

Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı
HAZİRAN-1998

Bahar...PİREM.....'in Yüksek..Lisans... tezi olarak hazırladığı Genelleştirilmiş..En..Küçük..Kareler...Yöntemi...ve..Bir..Uygulama... başlıklı tez 02/07/1998. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı) : Doç.Dr..Embiya..AĞAOĞLU..

Üye : Prof..Ersoy..CANKÜYER.....

Üye : Prof..Dr...Ali..Fuat..Yüzer

Anadolu Universitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10.07.1998.... tarihi ve ...12/9............ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ VE BİR UYGULAMA

BAHAR DİREM

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman Doç. Dr. Embiya AĞAOĞLU

1988, Sayfa: 75

Sıradan en küçük kareler yönteminin önemli iki varsayımı birbirini izleyen hata terimleri arasında ilişki (otokorelasyon) olmaması ile sabit varyans varsayımıdır. Birbirini izleyen hata terimleri arasında ilişki olmaması varsayımı ile sabit varyans varsayımı gerçekleşmediği zaman sıradan en küçük kareler yöntemi yerine diğer bir tahmin yöntemi olan genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi kullanılabilir. Bu çalışmanın amacı, genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemini kullanarak, en iyi doğrusal, sapmasız tahminleri göstermektir. Çalışmanın teorik bölümünde genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi açıklanacaktır. Kurulan ekonomik model elektrik enerjisi talebiyle, gayri safi milli hasıla arasındaki ilişkiyi ifade eder. Çalışmanın uygulama bölümü bu ekonomik olay üzerinde gerçekleşecektir.

Anahtar Kelimeler: Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi, Otokorelasyon, Sabit Varyans, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

ABSTRACT

Master of Science Thesis

GENERALIZED LEAST SQUARES METHOD AND ONE APPLICATION

BAHAR DİREM

Anadolu University
Graduate School Of Natural and Applied Sciences
Statistics Program

Supervisor: Assoc . Prof. Embiya AĞAOĞLU
1998, Page: 75

The two important hypothesies of the Ordinary Least Squares are lack of relationship with following residuals (autocorrelation) and homoscedasticity hypothesis. When the lack of relationship with following residuals and homoscedasticity hypothesis are not provided, Generalized Least Squares Method can be used instead of Ordinary Least Squares Method. The aim of this study, to show the best linear and unbiased estimates by using Generalized Least Squares Method. The theorical part of this study Generalized Least Squares Method will be explained. Economical model, which is established, expresses the relationship between the demand of electrical energy and gross national product Application part of this study will be set on this economical phenomena.

Keywords: Least Squares Method, Autocorrelation, homoscedasticity, Generalized Least Squares Method.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

b : Anakütle parametresi
$\hat{b}$: Parametre tahmincisi
$\tilde{b}$: Başka bir parametre tahmincisi
b^* : Başka bir parametre tahmincisi
β : Anakütle regresyon katsayıları
$\hat{\beta}$: Sıradan en küçük kareler tahmincisi ya da regresyon katsayıları tahmincisi
$\tilde{\beta}$: Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmincisi
d : Durbin Watson d istatistiği
δ : Çok küçük pozitif bir sayı
μ : Anakütle aritmetik ortalaması
N : Anakütle mevcudu
n : Örneklem mevcudu
ρ : Otokorelasyon katsayısı
$\hat{\rho}$: Otokorelasyon katsayı tahmincisi
σ^2 : Anakütle hata terimleri varyansı
S^2 : Örneklem artıklarının varyansı
u : Hata terimi
u_i : i. döneme ait hata terimi
u_j : j. döneme ait hata terimi
w_i : Tartı

EDST : En İyi Doğrusal Sapmasız Tahminci
GSMH : Gayri Safi Milli Hasıla
GDRM : Genelleştirilmiş Doğrusal Regresyon Modeli
GEKK : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
GEKKY : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi
OHK : Ortalama Hata Kare
SEK : Sıradan En Küçük Kareler
SEKY : Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi
TEKKY : Tartılı En Küçük Kareler Yöntemi

1.GİRİŞ

İstatistik biliminin amaçlarından biri de, değişkenler arası ilişkilerin katsayılarını tahmin etmektir ve bu amaçla oluşturulan istatistiksel model yardımıyla geleceğe yönelik kestirimler yapmaktır.

Değişkenler arasındaki ilişkiyi araştırmada kullanılan En Küçük Kareler Yöntemi ve bu yöntemin iki varsayımının gerçekleşmemesi durumunda kullanılan yöntemlerden biri Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemidir. Bu yöntem kullanılarak katsayıların tahmini "en iyi tahmin" özelliğini kazanır. Burada tahminin en iyi olmasından söz ederken bu kriterlerin neler olacağını da açıklamak gerekir. İşte bu noktada tahminin kriterlerine değinilir.

Sonuç olarak modelin katsayılarını en iyi şekilde tahmin edebilmek için otokorelasyon ve farklı varyans durumlarında Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemine (GEKKY) başvurmak gerekir.

2. EN KÜÇÜK KARELER TAHMİNCİLERİNİN ÖZELLİKLERİ

2.1. İyi Bir Tahmincide Aranan Özellikler

Bir tahminin iyi bir tahmin olduğunu ölçebilmek için bazı kriterlere ihtiyaç vardır. Genellikle bir tahminin anakütle parametresinin gerçek değerine yakın olması ve bu gerçek parametre yakınlarında dar bir aralıkta değişmesi istenir. Burada tahminlerin yakınlık derecesini örnekleme dağılımının ortalaması ve varyansı ile belirlemek mümkündür. İstatistik yöntemleriyle her örnekten $\hat{b}$ tahminleri hesaplanarak dağılımları oluşturulur ve bu dağılımların ortalamaları, varyansları karşılaştırılarak, alternatif tahminler arasından anakütle parametresine en yakın aralıkta toplanmış dağılıma sahip olan bir tahmin seçilir. Sözü edilen bu yakınlık aşağıda sıralanacak olan bazı kriterlere göre kararlaştırılır ve burada tahmin edici diye sözü edilen kavram, bir parametrenin değerini elde edebilmek için kullanılan yöntem, kural ya da cebirsel formüldür.

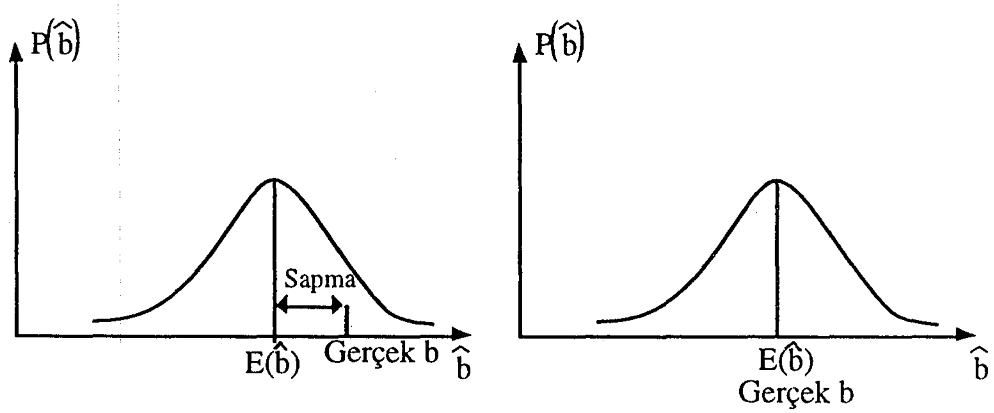
2.1.1. İyi bir tahmincinin küçük örnek özellikleri

Küçük bir örnekten iyi bir tahmin elde etmek amaçlandığında başvurulacak temel kriterler şunlar olmalıdır (1):

1. Sapmasızlık,
2. Minimum varyans,
3. Etkinlik,
4. Doğrusal olma,
5. Doğrusal, en küçük (minimum) varyanslı ve sapmasız olma,
6. En küçük hata kareli olma,
7. Yeterlilik.

2.1.1.1. Sapmasızlık

Eğer $E(\hat{b}) = b$ ise, $\hat{b}$, b'nin sapmasız bir tahmincisidir. Yani sapma $(\hat{b}) = E(\hat{b}) - b = 0$'dır (2). Başka bir deyişle, sapmasız bin tahminci, parametrenin tahminine eşit beklenen değerlere sahip bir istatistiktir (3). Aşağıda a ve b çizimlerinde gerçek b' nin sapmalı ve sapmasız tahmincileri gösterilmiştir (1):



a) $\hat{b}$' b'nin sapmalı bir tahmincisidir

b) $\hat{b}$, b'nin sapmasız bir tahmincisidir ki $E(\hat{b})=b$' dir.

Şekil 2.1. Sapmasızlık özelliğinin şekille gösterimi

Sapmasızlık tek başına pek önem taşımaz. Ama minimum varyans özelliği ile birlikte olursa önemli olur.

2.1.1.2. Minimum varyans

Bir $\hat{b}$ tahmincisinin varyansı diğer bir istatistiksel yöntemle bulunmuş $\tilde{b}$ tahmincisinin varyansından küçük ise, $\hat{b}$ tahmincisinin en küçük varyansa sahip olduğu ifade edilebilir. Bu durum simgelerle gösterilirse;

$$E\left[\hat{b} - E(\hat{b})\right]^2 < E\left[\tilde{b} - E(\tilde{b})\right]^2$$

buradan da kısaca:

$$\text{var}(\hat{b}) < \text{var}(\tilde{b})$$

yazılabilir. $\tilde{b}$, gercek parametre b'nin başka bir tahmincisidir.

2.1.1.3. Etkinlik

Bir tahminci hem sapmasızlık, hem de minimum varyans özelliğine sahipse bu tahmincinin etkin bir tahminci olduğu söylenir. $\hat{b}$ tahmincisinin etkinliği simgelerle aşağıdaki gibi gösterilir:

i) $E\left(\hat{b}\right) = b,$

ii) $E\left[\hat{b} - E\left(\hat{b}\right)\right]^2 < E\left[b^* - E\left(b^*\right)\right]^2$

(ii)'de yer alan b^*, gerçek parametre b'nin sapmasız tahmincisidir.

2.1.1.4. Doğrusal olma

Tahminci örnek gözlemlerinin doğrusal bir fonksiyonu oluyorsa, örnek verileriyle olan bileşimi doğrusal ise, bu tahminci doğrusal olan bir tahmincidir. n birimlik bir örneklem için gözlemler

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots, Y_n$$

olsun . Bu gözlemler eşit k_i ağırlıkları ile ağırlıklandırıldığında;

$$k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + k_3 Y_3 + \ldots\ldots + k_n Y_n$$

olur. Buradaki k_i sabit değerlerdir ki bu da;

$$k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = \frac{1}{n}$$

değerine eşit olduğundan $\overline{Y}$ örnek ortalaması doğrusal bir tahmincidir. Bu ifade

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{1}{n}\sum Y_i = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}Y_1 + \frac{1}{n}Y_2 + \ldots + \frac{1}{n}Y_n$$

şeklindedir.

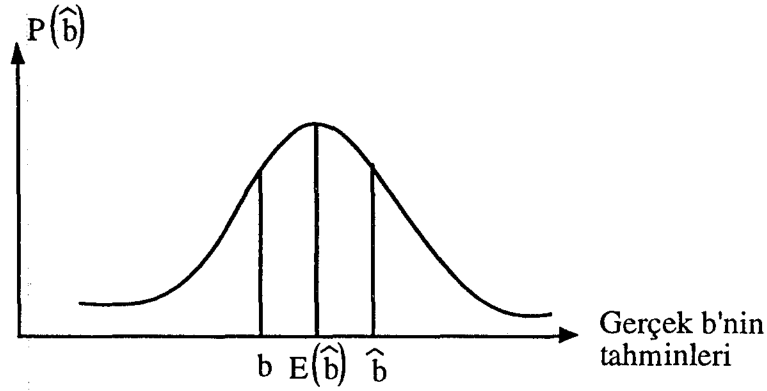
2.1.1.5. Doğrusal, en küçük varyanslı ve sapmasız olma

Bir tahminci, gerçek parametre b için doğrusal, minimum varyanslı ve sapmasız ise yani bu üç kriteri bünyesinde bulunduruyorsa o zaman bu tahminci gerçek parametre b'nin doğrusal, minimum varyanslı ve sapmasız tahmincisidir (1).

2.1.1.6. En küçük ortalama hata kareli olma

Örneğe ait $\hat{b}$ tahmincisi ile anakütle parametresi b arasındaki farka "toplam hata" denir. Bu oran küçüldükçe elde edilen tahmin o derece sağlıklı olur. Ayrıca toplam hata ölçülebilirse tahminin geçerliliği artar. Toplam hata "sistematik hata" ve "tesadüfi hata" olarak bu iki kavramdan oluşur.

Sistematik hata, örnek değerlerinin sahip olduğu teorik dağılımın beklenen değeri $E(\hat{b})$ ile tahmin edilmek istenen anakütle parametresi b arasındaki farktır. Bir grafik üzerinde sistematik ve tesadüfi hatalar şöyle gösterilebilir:



Şekil 2.2. En küçük hata kareli olma özelliğinin şekille gösterimi

Şekilde anakütle parametresi b, sistematik hata nedeniyle $E(\hat{b}) \neq b$ olmuş ve ayrıca tesadüfi hata nedeniyle örnek ortalaması $E(\hat{b}) \neq \hat{b}$ olmuştur. Buradan da toplam hata;

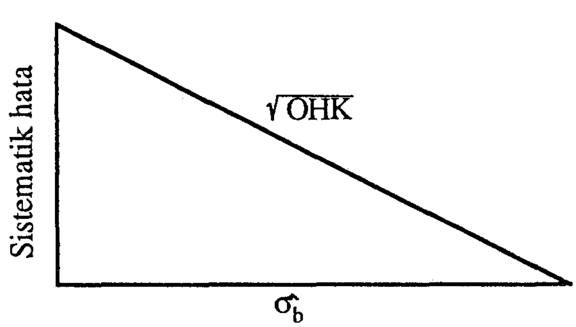
$$\hat{b} - b = \left(\hat{b} - E(\hat{b})\right) + \left(E(\hat{b}) - b\right)$$

olur. Toplam hatanın karesinin beklenen değeri ortalama hata kare adını alır. Bu,

$$\begin{aligned} OHK(\hat{b}) &= E[\hat{b} - b]^2 = E[\hat{b} - E(\hat{b})]^2 + [E(\hat{b}) - b]^2 \\ &= Var(\hat{b}) + Sapma^2(b) \end{aligned}$$

olarak gösterilir.

Ortalama hata kare, tahminin varyansına ve sistematik hataya bağlı olarak değişecektir (4). Bu ilişki dik bir üçgen üzerinde gösterilebilir:



Şekil 2.3. Ortalama hata karenin bileşenleri

Görüldüğü gibi ortalama hata karesi iki pozitif terimin toplamı olduğuna göre sapmasız ve varyansı küçük olan tahmincinin ortalama hata karesi de küçük olacaktır ki bu istatistikte istenilen bir durumdur. Tahmincinin ortalama hata karesi ne kadar küçük olursa bu tahminci o kadar en iyi tahmincidir (5).

En iyi tahminciyi belirleyebilmek için genellikle sapmalı, minimum varyansa sahip ve sapmasız büyük varyansa sahip iki tahminci arasında seçim yapmak sözkonusu olduğunda, öncelikle minimum varyansa sahip olan tahminciye bakılması, daha sonra da ortalama hata kareli tahminciye bakılması doğru olur (6). Bununla beraber yapılacak seçim konusunda bir kesinlik yoktur. İstatistikçi iki örneklemin özelliklerini kıyaslayarak sonuca bağlamakta ve kısmen de olsa "subjektif" bir durum yaratmaktadır(7).

2.1.1.7. Yeterlilik

Örnekte mevcut ve anakütle parametresi tahmini için gerekli tüm bilgilerden yararlanan tahminci yeterli bir tahmincidir (8). Öyleyse yeterli bir tahmin örnekteki tüm bilgiyi kullanan tahmindir (4). Yeterlilik kriteri, seçilen örneklemin anakütle hakkında gerekli tüm bilgiyi verebilecek bir büyüklüğe sahip olmasıdır (7).

Özet olarak iyi bir tahminciden sözedebilmek için aşağıdaki noktalar dikkate alınmalıdır (1):

i) Eğer bir tahmin, diğer tahminlere göre yukarıda sayılan kriterlerden daha fazlasına sahipse, o zaman bu tahminci diğerlerine göre daha üstün tutulmalıdır.

ii) Minimum varyans özelliği sapmasızlık özelliği ile birlikte olursa bir önem kazanır. Eğer bir tahminci minimum varyanslı olduğu halde büyük bir sapmaya sahipse, o zaman bu tahminci yanlış ortalama değeri ile dar bir aralıkta dağılıyor demektir.

iii) DES ve OHK kriterleri, birden fazla kriteri bünyesinde bulundurduğundan diğer tek başına bulunan kriterlere göre daha çok tercih edilirler.

2.1.2.İyi bir tahmincinin büyük örnek özellikleri (Asimtotik özellikler)

Genellikle, küçük örneklerle istenilen düzeyde tahmincileri elde etmek mümkün olmayabilir. Bu sebepten büyük örneklerle istenilen özelliklere sahip tahmincileri elde etmek gerekir. Bu özellikler asimtotik özellikler olarak tanımlanmaktadır (6).

Büyük örneğe ait kriterlerin kullanılması için, tahmincinin iyiliği açısından, örneğin sonsuz büyüklükte ($n \rightarrow \infty$) olması koşulunu öne sürülür. Bu nedenle kriterlere asimtotik özellikler denmektedir ve bu kriterler şunlardır:

1. Asimtotik sapmasızlık
2. Tutarlılık
3. Asimtotik etkinlik

Öncelikle asimtotik dağılım kavramını ele alalım.

Eğer bir $\widehat{b}$ tahmincisinin örnekleme dağılımı artan örnek büyüklüğü ile belli bir spesifik dağılıma yaklaşıyorsa o zaman böyle spesifik bir dağılım asimtotik dağılım olarak adlandırılır. Asimtotik dağılım, asimtotik ortalama ve asimtotik varyans tarafından karakterize edilir (2).

2.1.2.1. Asimtotik beklenti

Rassal değişkenler dizisinin asimtotik beklentisi, asimtotik dağılımın aritmetik ortalamasıdır.

$$\{X_{(n)}\} = X_{(n_1)}, X_{(n_2)}, \dots , X_{(n_T)}$$

rassal değişkenler dizisinin beklenen değerler dizisi,

$$\{E(X_{(n)})\} = E(X_{(n_1)}), E(X_{(n_2)}) , \dots , E(X_{(n_T)})$$

olacaktır. Örnek büyüklüğü sonsuza giderken, beklenen değer, μ sonlu sabitine yaklaşıyorsa, bu sabite rassal değişkenlerin asimtotik ortalaması denir ve şöyle gösterilir:

$$\lim_{n \to \infty} \{E(X_{(n)})\} = \mu$$

2.1.2.2. Asimtotik varyans

Dağılımlara ait varyanslar ,

$$\left\{E[X_{(n)} - E(X_{(n)})]^2\right\} = E[X_{(n_1)} - E(X_{(n_1)})]^2, E[X_{(n_2)} - E(X_{(n_2)})]^2, \dots$$

olarak gösterilir.

Rassal değişkenler dizisinin asimtotik varyansı, $n \to \infty$ yaklaşırken varyanslar dizisinin limit değeri değildir, çünkü genelde limit değer sıfırdır. Bunu ifade edersek;

$$\lim_{n \to \infty} (\text{var}X_{(n)}) \equiv \lim_{n \to \infty} E[X_{(n)} - E(X_{(n)})] = 0$$

olur ki, burada $X_{(n)}$ dağılımı tek bir noktaya iner ve bu durumda bu dağılım Yoz dağılım olarak adlandırılır. Çünkü artık ortada bir dağılım kalmamıştır.

Yoz dağılımlara ait tahminciler arasında seçim yapmak güçtür. Bu güçlükten kurtulmak için asimtotik varyans tanımlanmalıdır.

Her örnek dağılım için oluşturulan varyans dizisini ele almak yerine, terimleri, $[X_{(n)} - E(X_{(n)})]$ ile $\sqrt{n}$' in çarpımlarının beklenen değerlerinden oluşan yeni bir dizi geliştirilir. Bu yeni dizi v sonlu sabitine doğru yaklaşırsa,

$$\lim_{n \to \infty} E[\sqrt{n}(X_{(n)} - E(X_{(n)}))]^2 = v$$

Bu durumda $\{X_{(n)}\}$ rassal değişkenler dizisinin asimtotik varyansı:

$$\frac{1}{n}v = \frac{1}{n} \lim_{n \to \infty} E[\sqrt{n}(X_{(n)} - E(X_{(n)}))]^2 = v$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre asimtotik momentlerin (ortalama ve varyans) n terimi olan bir sonlu örneğin momentlerinin yaklaşığıdır. n büyüdükçe yaklaşıklık artar.

Şimdi tahmincilerin asimtotik özellikleri (kriterleri) bu gerekli açıklamalardan sonra tanımlanabilir.

2.1.2.3. Asimtotik sapmasızlık

Eğer $\hat{b}$ tahmincinin asimtotik beklenen değeri, gerçek b parametresine eşitse, o zaman bu tahminci, b parametresinin asimtotik sapmasız tahmincisidir. Bu,

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{b}_{(n)}) = b$$

olarak gösterilir.

Bir tahmincinin asimtotik sapması, asimtotik ortalamasıyla (beklenen değeriyle) gerçek b parametresi arasındaki farktır.

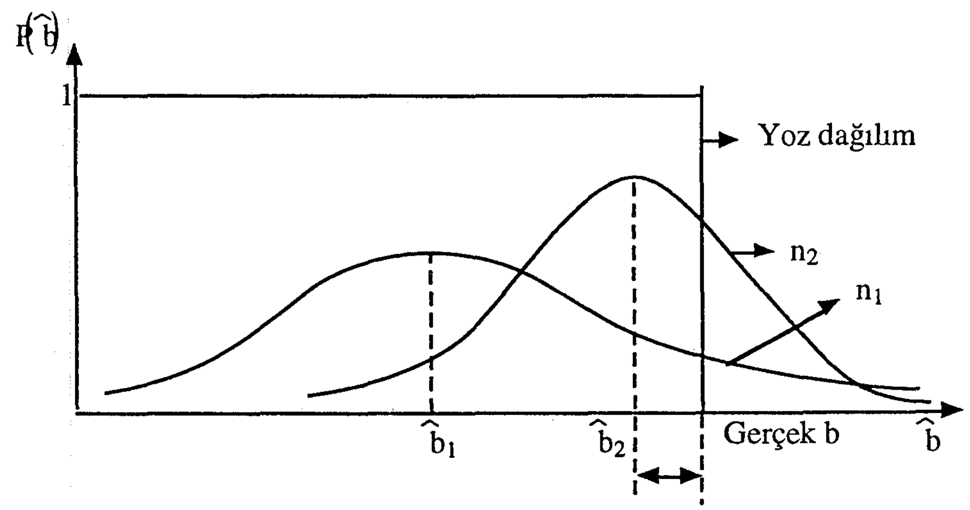
Asimtotik sapmasız bir tahminci, örnek büyüklüğü yeterli derecede artarken sapması kaybolan tahmincidir (1).

2.1.2.4. Tutarlılık

Örnek mevcudu n arttıkça tahminin değeri tahmin edilen gerçek değere yaklaşmaktadır. Limit halinde, n'in anakütlenin mevcudu olan N'ye eşit olması durumunda, tahmin $\hat{b}$ ile esas değer b çakışır ve bu durumda da varyans sıfır olur(9).

Eğer varyans sıfırsa, dağılım gerçek b parametre değerinde toplanır. Gerçek b parametresi üzerinde yoğunlaşan noktada ve varyansı da sıfıra eşit olduğunda dağılım yoz dağılım adını alır ki aslında bu tam anlamıyla bir dağılım olamaz, çünkü varyans sıfırdır. Çizimde ise yoğunlaşma noktasında yüksekliği 1'e eşit olan bir dik doğru çizilerek gösterilir (1). Bu durumda tahmini değer, örnek büyüklüğünün artmasıyla parametreye yakın bir değer almaktadır. Hatta $P(\hat{b})$ olasılığının 1'e yaklaşması durumunda bu tahminci gerçek b parametresinin tutarlı bir tahmincisidir (3).

Bütün bu anlatılanlar şekilde gösterilirse (2):



Şekil 2.4: Asimtotik sapma ve örnek hacminin etkisi

Yukarıdaki şekilde b,anakütle parametresidir. Örnek hacmi n_1'den n_2'ye arttığında, sapma $(\hat{b}_1 - b)$' den $(\hat{b}_2 - b)$'e doğru azalır ve ayrıca dağılımın varyansı da azalır(2).

Örnek büyüklüğü giderek arttırıldığında, daha çok bilgi edinilir ve böylece tahmincinin doğruluğu da giderek artar. Sonsuz büyük örnekler için, limit durumunda tutarlı bir tahminci gerçek b parametresinin tam değerini verir.

2.1.2.5. Asimtotik etkinlik

Eğer;

i) $\hat{b}$, sonlu varyans ve sonlu ortalama ile limit durumunda bir dağılıma sahipse,

ii) $\hat{b}$, tutarlı ise,

iii) $\hat{b}$, b'nin tahmincileri içinde en küçük asimtotik varyansa sahipse,

bu koşullar altında $\hat{b}$, b'nin asimtotik olarak etkin tahmincisidir denir (2). Bu ifade şöyle gösterilebilir;

$$\left[\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} E\left[\sqrt{n}\left(\hat{b}_n - b\right)\right]^2\right] < \left[\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{b}_n^* - b\right)^2\right]$$

Yukarıdaki ifadede $\hat{b}$ etkin tahmincidir ve b^*' da, anakütle gerçek b parametresinin başka bir tahmincisidir (1).

2.2. Sıradan En küçük Kareler Yönteminin Varsayımları

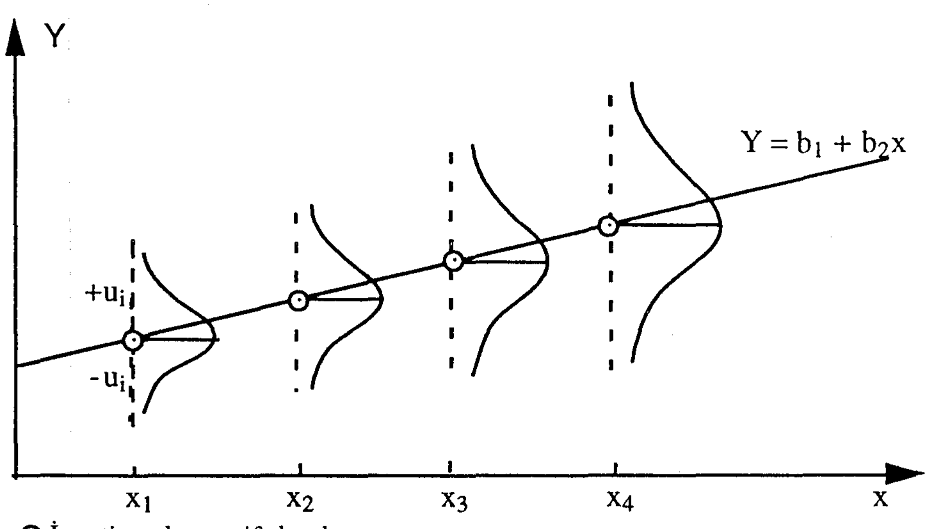
İki değişkenli doğrusal regresyon modelinde b katsayılarının SEKY ile tahmini ve tahminlerin gerçek anakütle parametrelerine yakınlığının test edilmesi durumlarında SEKY'nin varsayımlarını sağlayıp sağlamadığı gözönünde bulundurulmalıdır. Zira bu varsayımların sağlandığından emin olunmazsa SEKY'ne ait formüller kullanılamaz. Şimdi anakütle hata terimi (u_i) ile ilgili olarak SEKY'nin 7 varsayımı açıklanacaktır (10).

1.Hata terimi ortalaması sıfıra eşit stokastik bir değişkendir

Herhangi bir dönemde hata terimi u_i'nin sahip olabileceği değer şansa bağlı olarak artı, eksi veya sıfır olabilir u_i bu değeri belli bir olasılıkla almaktadır (1). Yani u_i stokastik bir değişkendir ve alabileceği değerler kesin olarak önceden bilinmemektedir. u_i'nin stokastik olması özelliğinden hareketle beklenen değerin yani ortalamasının sıfır olduğu varsayılır (10):

$$E(u_i) = 0 \quad i = 1,2, \dots, N \tag{2.1}$$

Bu şekil üzerinde şöyle gösterilir (11):



⊙ İşareti ortalamayı ifade eder

Şekil 2.5. u_i'lerin normal dağılımı

2. Bağımsız değişken X, hata terimi u_i ile ilişkili olmayıp, stokastik değildir, değerleri sabit hatasız gözlenmiştir:

Bağımsız değişken X, hata terimi u_i arasında ilişkinin bulunmaması kovaryanslarını sıfıra eşit olması anlamındadır.

$$Kov(u_i, X_i) = 0 \tag{2.2}$$

Bu X' in stokastik bir değişken olmaması koşulunu da beraberinde getirir. İstatistiksel olarak, anakütleden çekilmesi mümkün tüm örnekler için X değerlerinin sabit olduğunu gösterir

3. Hata terimi u normal dağılmıştır

SEK tahmincilerinin olasılık dağılımları, hata terimi u_i' nin olasılık dağılımı ile ilgili varsayıma bağlıdır. Bu yüzden katsayı b tahminleri için test uygulanması gerektiğinde, bu katsayılara ait dağılımların normal olması gerekir ki, bu durumda koşul olarak u_i' nin dağılımı da normal olsun.

4. Hata terimleri arasında ilişki (otokorelasyon) yoktur

u'nun herhangi bir döneme ait u_i değeri kendisinden önceki döneme ait u_j değeri ile bağımlı değildir. Bu varsayımla u_i ve u_j'nin kovaryansları sıfıra eşit olmalıdır:

$$Kov(u_i, u_j) = E\{[u_i - E(u_i)]\,[u_j - E(u_j)]\}$$

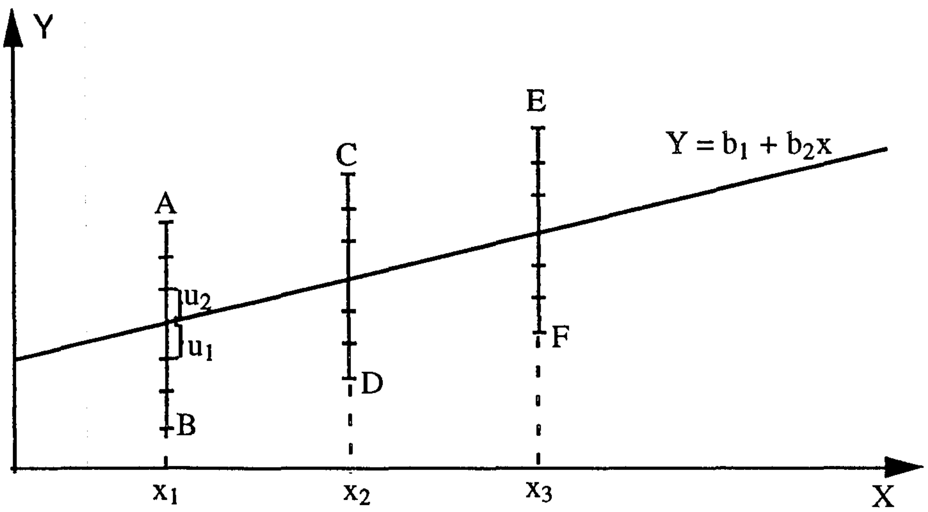
Varsayım 1'den $E(u_i) = E(u_j) = 0$' dır. Böylece,

$$Kov(u_i, u_j) = E(u_i\, u_j) = 0 \qquad (i \neq j) \tag{2-3}$$

olur (10).

5.Hata terimlerinin varyansı birbirine eşit ve sabittir.

Bağımsız değişken X'in tüm değerleri için, u_i'ler kendi ortalamaları etrafında aynı dağılımı göstermektedirler. Bu şekilde gösterilirse:



Şekil 2.6. Eşit varyans varsayımının şekille gösterimi

Görüldüğü gibi u_i'lerin alacağı değerler, X_i' lerin değerlerinden bağımsız olarak, aynı sınırlar arasında yayılır. Şekilde AB, CD ve EF aralıkları birbirine eşittir (1).

Bu eşit yayılmadan ya da ortalama etrafında dağılmadan bahsederken u_i' nin varyansının her X_i değeri için sabit olduğundan sözedilir. Bu,

$$Var(u_i \mid X_i) = E[u_i - E(u_i)]^2$$

$$E(u_i) = 0 \text{ (varsayım 1'den)}$$

$$Var(u_i \mid X_i) = E(u_i)^2$$

Buradan,

$$Var(u_i \mid X_i) = \sigma^2$$

veya

$$Var(u_i) = \sigma^2 \qquad (2.4)$$

olarak gösterilir ki bu eşit varyanslılık halidir. X_i' nin her değeri için u_i' nin varyansı belli bir sabit sayıdır ve σ^2' ye eşittir. Bu eşit varyans varsayımı homoskedastiklik varsayımı olarak da isimlendirilir.

6.Modelin spesifikasyonu doğrudur

Regresyon modeline bazı açıklayıcı değişkenlerin alınmaması, eğrisel bir fonksiyonun kullanılması gerekirken doğrusal bir fonksiyonun kullanılması, yani ilişkinin belirlenişinin yanlış olması, model değişkenlerine ait hatalı varsayımlar yapılması gibi durumlarda tahmin edilen fonksiyon güvenilir olmaz ve bu yüzden spesifikasyon hatalı olur.

7. Bağımsız değişkenler arasında ilişki yoktur

Birden fazla bağımsız değişkenin olduğu çoklu modellerde değişkenler arasında ilişkinin olmaması SEKY' nin diğer bir varsayımıdır ve bu çoklu doğrusal bağlantı bulunmaması anlamındadır.

Parametre ve katsayıların gerçeğe en yakın olarak tahmin edilmesinde kullanılan istatistiksel yöntemlerden biri de Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GEKKY)'dir Genellikle sıradan en küçük kareler yönteminin üçüncü ve dördüncü varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda GEKKY'ne başvurulur (10).

2.3. Hata Terimleri Arasındaki İlişki Varlığının Belirlenmesi

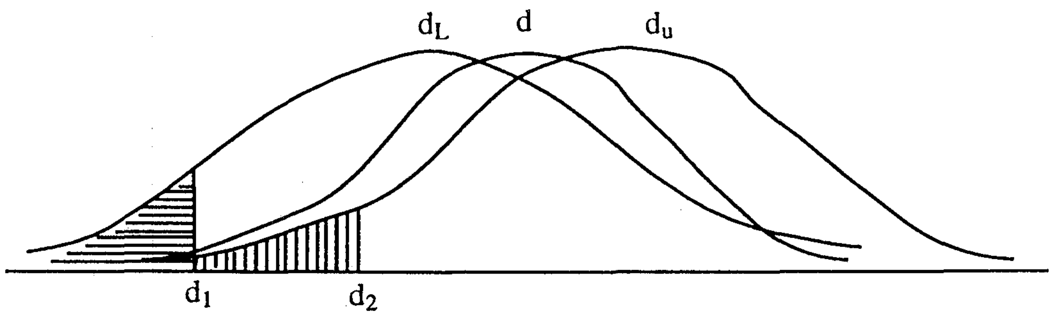
Hata teriminin otokorelasyonlu olup olmadığını belirlemek için çeşitli yöntemler vardır. Bazı testler sadece otokorelasyonun varlığını ya da varlığının yanısıra artan, azalan biçimde yönünü tespit etmeye yarar. Fakat GEKKY'ni uygulayabilmek için öncelikle otokorelasyon katsayısı $\hat{\rho}$ tahmin edilmelidir ve bunun sayesinde P dönüşüm matrisi oluşturulabilmelidir. Durbin-Watson testi sadece otokorelasyonun varlığını göstermez, otokorelasyon katsayısını tahmin etmede kullanılacak istatistiksel bir yoldur.

2.3.1. Durbin-Watson otokorelasyon testi

İstatistikte en çok kullanılan otokorelasyon testi budur. H_0: $\rho = 0$ test etmek için kullanılacak kritik oran Durbin-Watson d istatistiği şöyledir:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} \tag{2.5}$$

d istatistiği u'ya bağımlı bir tesadüfi değişkendir. Eğer u'nun normal dağıldığına ait bir hipotez yapılırsa, d'nin dağılımı d_L ve d_u olarak iki sınır dağılım ve hesaplanmış d_1 ve d_2 değerleri arasında kaldığı düşünülür. d_1 ve d_2 değerleri eleman sayısı ve bağımsız değişkenlerin sayısının fonksiyonu olarak α=0.05 ve α=0.01 anlam seviyeleri için d_L ve d_u'nun güven aralıklarını vermektedir. Bu grafikle şöyle gösterilir:



Şekil 2.7. Durbin -Watson d istatistiğinin alt ve üst sınırları

Karar adımında şu çizelge kullanılmalıdır.

Çizelge 2.1. Durbin-Watson d istatistiği karar çizelgesi

d	0	d_1	d_2 2	$4-d_2$	$4-d_1$ 4
	Pozitif otokorelasyon	Şüphe	Hataların bağımsızlığı	Şüphe	Negatif otokorelasyon

Eğer d çok küçükse bunun anlamı artık değerlerinin birbirine çok yakın olduğu ve bunun da pozitif otokorelasyona sebep olduğudur. Tersine d çok büyükse negatif otokorelasyon vardır denir (12).

Karar adımında kullanılan tabloya bakıldığında şu sonuçlar çıkar:

$0 < d < d_1$ ise pozitif otokorelasyon vardır (H_0 red).

$d_1 < d < d_2$ ise karar verilememektedir.

$d_2 < d < 4 - d_2$ ise otokorelasyon yoktur (H_0 kabul).

$4 - d_2 < d < 4 - d_1$ ise karar verilememektedir.

$4 - d_1 < d < 4$ ise negatif otokorelasyon vardır (H_0 red).

Otokorelasyon varlığı belirlendikten sonra otokorelasyon katsayısının tahmin edilmesinde d istatistiği şöyle bir rol oynar:

$$d = 2\left(1 - \hat{\rho}\right) \tag{2.6}$$

Formülden de görüldüğü gibi $\hat{\rho} = 0$ olduğunda d=2 olur ve bu otokorelasyonun bulunmaması demektir. $\hat{\rho} = 1$ ise tam pozitif otokorelasyon halini gösterir ki d=0 değerine karşı gelir. $\hat{\rho} = -1$ olduğunda d=4 olur, bu da negatif otokorelasyon halini gösterir. Bu açıklamalardan anlaşılacağı gibi otokorelasyon katsayısı tıpkı korelasyon katsayısı gibi $-1 < \hat{\rho} < 1$ olmalıdır (10)

Durbin-Watson d istatistiğinin uygulaması bazı koşullara bağlıdır;

1) Modelde regresyon sabiti olmalıdır. Çünkü d istatistiğinin paydasındaki $\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$ regresyon sabitine göredir.

2) Bu test sadece stokastik olmayan bağımsız değişkenler için geçerlidir.

3) Hata terimlerinin birinci dereceden otokorelasyona sahip olması durumunda

kullanılmalıdır.

4) $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ... + \beta_{t-1} Y_{t-1}$ şeklindeki otoregresif modeller için testin geçerliliği yoktur. Çünkü bu durumda d istatistiği sistematik hatalı sonuçlar verir (13).

2.4.Hata Terimlerinin Farklı Varyansa Sahip Olmasının Belirlenmesi

Farklı varyanslılığın varlığının ya da yokluğunun ortaya çıkarılmasında bazı testler vardır. Bunların içinde Glejser Farklı Varyanslık testinin bir üstünlüğü σ_i^2'nin X_i ile bağıntısının şekli konusunda bilgi vermektedir. Bu bilgi ise, farklı varyanslılığı ortadan kaldırmada yardımcı olur.

2.4.1. Glejser farklı varyanslık testi

Öncelikle Y ile X arasındaki ilişki belirlenir yani regresyon denklemi elde edilir. Buradan örnek hata terimleri $\hat{u}$ lar bulunur. $\hat{u}$ ların mutlak değerleri $|\hat{u}_i|$ ile σ_i^2 ilişkili olduğu düşünülen X_i değişkeni arasındaki regresyon şekli tahmin edilmeye çalışılır. Regresyonun şeklini tahmin edebilmek için aşağıdaki gibi fonksiyonel biçimler kullanılır.

$$|\hat{u}_i| = a_1 + a_2 X_i + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = a_1 + a_2 \sqrt{X_i} + v_i$$

$$|\hat{u}_i| = \sqrt{a_1 + a_2 X_i} + v_i$$

....

Bu modeller içinde en uygununu seçebilmek için korelasyon katsayılarına ve a' ların standart hata değerlerine bakmak gerekir. Buna göre en uygun model seçilir. H_0: $a_2 = 0$ hipotezi duruma göre t, z veya F testi uygulanarak test edilir. Eğer H_0 kabul edilirse eşit varyans vardır. Eğer H_0 reddedilirse farklı varyanslılık olduğuna karar verilir(10).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE İLGİLİ AÇIKLAMALAR

Genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi (GEKKY) daha önce açıklanan sıradan en küçük kareler yöntemine (SEKY) ait iki varsayımın bozulması durumunda kullanılan uygun bir yöntemdir. Bozulan bu iki varsayım otokorelasyonun ve farklı varyanslığın olmamasıdır. Bu yöntemin özü bu iki varsayımın sağlanmaması durumunda ilgili modele uygun dönüşümü yapmak ve daha sonra dönüşümlü verilere SEKY'ni uygulamaktadır. Bu iki varsayım doğrusal regresyon modelinin varsayımı olduğundan öncelikle buna değinilmesi gerekir. Daha sonra GEKKY matris notasyonu ile tanımlanır ve bu iki varsayım üzerinde bu yöntemin uygulanışı anlatılır.

3.1. Doğrusal Regresyon Modeli

Anakütle için doğrusal regresyon modeli:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+ \ldots. + \beta_kX_{ik}+u_i \tag{3.1}$$

şeklindedir. Ama bu ifade kısa bir şekilde gösterilmek istenirse;

$$Y=X\beta+u \tag{3.2}$$

yazılabilir (14).

Bu modelde Y bağımlı değişkeni, X 'ler ise bağımsız değişkenleri simgeler. Ayrıca u istatistiksel hataları, β'lar ise bilinmeyen parametreleri yani regresyon katsayılarını gösterir. Bu matrisler ile şöyle gösterilir.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{(nx1)} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \dots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \dots & X_{nk} \end{bmatrix}_{nx(k+1)} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{(k+1)x1} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{(nx1)}$$

Yukarıda da görüldüğü üzere bağımlı değişken Y ve istatistiksel hatalar u vektörleri (nx1) boyutludur. Diğer yandan β_0 sabitini de içeren bilinmeyen parametreler vektörü β, (k+1)x1 boyutludur. X matris ise nx(k+1) boyutludur (15).

Daha önce de ifade edildiği gibi SEKY'nin 4. ve 5. varsayımlarının bozulması durumunda GEKKY uygulanmaktadır. Şimdi GEKKY açıklanacaktır.

3.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi

Otokorelasyon olmaması ve eş varyansın olması varsayımlarının dikkate alınmadığı veya yapılmadığı ama diğer tüm varsayımların yapıldığı modele Genelleştirilmiş Doğrusal Regresyon Modeli (GDRM) denir ve bu modelin çözümünde uygulanan yönteme Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi (GEKKY) denir (16). Genelleştirilmiş Regresyon Modeli ve varsayımları şöyledir (17):

1. GDR Modeli: $Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+ .... + \beta_kX_{ik}+u_i$
2. $u_1, u_2, ... , u_n$' in bileşik dağılımı çok değişkenli normaldir.
3. $E(u_i) = 0 \quad (i=1, 2, ... , n)$
4. $E(u_i\, u_j) = \sigma_{ij} < \infty \quad (i,j= 1, 2, ... , n)$
5. Bağımsız değişkenlerin hiçbiri stokastik değildir ve her örnek büyüklüğü için,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_{ik} - \overline{X}_k)^2$$

değeri her k=1, 2, ... , K için sıfırdan farklı sonlu bir sayıdır.

6. Gözlemlerin sayısı, bağımsız değişkenlerin sayısından bir fazla olmalıdır, yani

$n>k$

$n=$ gözlem sayısı

$k=$ bağımsız değişken sayısı

olmalıdır.

7. Bağımsız değişkenler arasında tam doğrusal ilişki, yani çoklu doğrusal bağlantı olmamalıdır.

Böylece bu varsayımlar dışında GDRM'de dikkate alınmayan şu iki varsayım;

1. $E(u_i\, u_j) = 0$ $\quad i \neq j$ (otokorelasyon olmaması)
2. $E(u_i^2) = \sigma^2$ $\quad (i=1,2, \ldots, n)$ (eşit varyansa sahip olunması)

sözkonusudur.

Eş varyansa ait varsayım matrisler yardımıyla şu şekilde gösterilir;

$$E(uu') = \sigma I_n \tag{3.3}$$

burada $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ ve I_n ise (nxn) boyunda birim matristir.

GDRM'ne ait varsayımların 4. ise matrisler ile şöyle ifade edilir:

$$E(uu') = V \tag{3.4}$$

burada;

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}_{(nxn)}$$

hata terimi varyans kovaryans matrisidir. Bu matris Genel Matris ya da GEKKY matrisi olarak da isimlendirilir. σ_{ii} varyansları, σ_{ij} kovaryansları gösterir.

V matrisinin genel durumu ifade etmesi, genelleştirilmiş kelimesinin kullanılmasını sağlıyor. Zira bu matrisin özel durumlarına göre başka modeller sözkonusu olmaktadır. Örneğin; Basit Doğrusal Regresyon Modeline ilişkin SEKY bu GEKKY'nin özel bir halidir ve V matrisi, köşegen elemanları σ^2, diğer elemanları sıfır olan köşegen bir matristir.

GDRM'nin parametre tahmini GEKKY kullanılarak yapılır. GDRM'ne SEKY'nin formülleri uygulandığında sapmasız ve tutarlı tahminler elde edilir. Ama En İyi Doğrusal Sapmasız Tahminciler (EDST) elde edilemez (16). Yani küçük örneklerde minimum varyans ya da en iyi ölçütü özelliği kaybolur. Büyük örnek sözkonusu ise asimtotik etkinlik özelliği gerçekleşmez (18). Bu sebepten GDRM'ne SEKY yerine GEKKY uygulanması gerekir. GEKKY'nin SEKY' ne göre uygulanmadaki farklılığı şöyledir: GEKKY'nin kapsamadığı iki varsayıma göre modele dönüşüm uygulanır ve dönüşümlü modele SEKY'nin formülleri uygulandığında GEKKY'nin tahmincileri elde edilmiş olur(16).

Formül (3.2)'de gösterildiği üzere GDRM'ni tekrar yazacak olursak,

$$Y = X\beta + u$$

ve bu modele göre varsayımlar:

$$E(u) = 0$$

$$E(uu') = V$$

Burada V, hata terimlerinin varyans kovaryans matrisi olup, tekil olmayan, pozitif tanımlı bir matristir.

Modeldeki β parametresinin SEK tahmincisi ve bu tahminciye ilişkin varyans kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir (19):

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (3.5)$$

$$\text{Var-Kov}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2(X'X)^{-1} \quad (3.6)$$

Yukarıda (3-5)'deki $\hat{\beta}$'yı ifade eden formülde Y yerine $X\beta + u$ yazarsak

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X\left[X\beta + u\right] \quad (3.7)$$

Denklemi açarsak,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u$$

sonucu elde edilir.

$$(X'X)^{-1}X'X = I_n$$

olduğundan denklem

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u \quad (3.8)$$

biçimi alır. Bunun beklenen değeri alındığında ise,

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta) + (X'X)^{-1}X'E(u)$$

Varsayım gereği E(u)=0 olduğundan

$$E(\hat{\beta}) = \beta \tag{3.9}$$

olur. Dikkat edilirse SEK tahmincisi yansızlık özelliğini korumaktadır. Aynı zamanda Formül (3.7)'den şu sonuca ulaşılır:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u)$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u$$
$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

Buradan

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u \tag{3.10}$$

yazılabilir

$\hat{\beta}$ için varyans kovaryans matrisi (7):

$$E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)\left(\hat{\beta} - \beta\right)'\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}\right] = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \tag{3.11}$$

Bu son ifade de $V = \sigma^2 I$ olmazsa etkinlik ya da minimum varyans özelliği kaybolmaktadır. Sonuçta bu farklılık SEKY'nin böyle modele uygulanamamasına sebeptir (14). Böylece GDRM'nin çözümü için Aitken GEKKY'ni ortaya koymuştur. Aitken'in teoremi; "GEKK tahmincisi $\tilde{\beta}$, GDRM'de minimum varyanslı doğrusal, yansız tahmincidir" (20). Daha önce de ifade edildiği gibi böyle ekonometrik araştırmalarda

GEKKY'nin uygulanışı dönüşüm yapılmış değişkenler kümesine SEKY'nin uygulanmasından ibarettir. Bu dönüşümün yapılabilmesi için (nxn) boyutlu simetrik bir P dönüşüm matrisi ile $Y = X\beta + u$ modelinin her iki tarafı çarpılır:

$$PY = PX\beta + Pu \tag{3.12}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$P'P = PP' = V^{-1} \text{ ve } PVP' = I \tag{3.13}$$

olmalıdır.

Modeldeki P_u' nun varyansı:

$$Var(P_u) = E(P_u)(P_u)' = P'Var(u)P' = PVP' = I$$

şeklinde ifade edilir.

$$P'(PVP')P = P'P$$

olduğundan Formül (3.13)'deki gibi,

$$P'P = V^{-1}$$

olur.

Dönüşüm yapılmış regresyon denklemi artık değişen varyanslılık ve otokorelasyon olmaması gibi tüm klasik varsayımları içermektedir.

$$Y^* = PY,\ X^* = PX \text{ ve } u^* = Pu \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlandığında,

$$Y^* = X^*\beta + u^* \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir (17). GEKK tahmincisi $\tilde{\beta}$, SEK tahmincisi,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

formülüne paralel olarak, X yerine $X^* = PX$ ve Y yerine $Y^* = PY$ yazılarak şöyle bulunur:

$$\tilde{\beta} = \left[(PX)'(PX)\right]^{-1}(PX)'(PY) \tag{3.16}$$

$$\tilde{\beta} = (X'P'PX)^{-1}(X'P'PY)$$

$$\tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\left(X'V^{-1}Y\right) \tag{3.17}$$

Yukarıdaki son denklemde Y yerine $X\beta + u$ yazıldığında $\tilde{\beta}$ tahmincisi ile β arasında şöyle bir ilişki bulunur:

$$\tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}X'V^{-1}\left(X\beta + u\right)$$

$$\tilde{\beta} = \beta + \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}X'V^{-1}u \tag{3.18}$$

olarak bulunur. Böylece $\tilde{\beta}$' nın varyans-kovaryans matrisi:

$$E\left[\left(\tilde{\beta} - \beta\right)\left(\tilde{\beta} - \beta\right)'\right] = E\left[\left(X'V^{-1}X\right)^{-1}X'V^{-1}uu'V^{-1}X\left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\right]$$

$$E\left[\left(\tilde{\beta} - \beta\right)\left(\tilde{\beta} - \beta\right)'\right] = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} \tag{3.19}$$

bulunur.

Bu şekilde elde edilen GEKK tahmincisi $\tilde{\beta}$, EDST niteliğini taşımaktadır. Böyle bir çözümü yapabilmek için V^{-1}'den P dönüşüm matrisini elde etmek gerekir. GEKKY sayesinde P dönüşüm matrisi uygulanarak elde edilen modele SEKY uygulanması $\tilde{\beta}$ tahmincisini bulmamızı sağlar (21).

3.3. Otokorelasyon Hali

En küçük kareler yönteminin dördüncü varsayımı, (u_i) ana kütle hata terimleri arasında otokorelasyon (ilişki) olmamasıdır. İki değişkenli doğrusal bir modelde,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (t=1, \ldots\ldots, N) \tag{3.20}$$

görüldüğü gibi u_t, N tane gözlemin hata paylarını göstermektedir. Buradaki hata paylarına ait dördüncü varsayım ;

$$Kov(u_i u_j) = E(u_i u_j) = 0 \qquad (i \neq j)$$

şeklindedir. Bu varsayım sağlanmadığı zaman u'nun belli bir dönemdeki değeri kendisinden önceki dönem değeriyle ya da değerleriyle bağlantılıdır. Böyle bir bağımlılık bulunması, otokorelasyonun varolması demektir. Bu da ardışık olarak şöyle gösterilir(1);

$$E(u_i u_j) = 0 \qquad (i \neq j)$$

Otoregresif hata terimlerini içeren ve sadece zaman serilerinden tahmin edilmiş ilişkilerde, u teriminin (i) indisi yerine (t) indisi ile gösterilmesi daha uygun olur. u'nun t dönemindeki değeri u_t, (t-1) dönemdeki değeri u_{t-1} olarak gösterilir. u'nun bu iki değerine ait doğrusal ilişki;

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \tag{3.21}$$

ile gösterilir ve bu birinci dereceden otokorelasyon [AR(1)]'dir. Otokorelasyon, korelasyonun özel bir halidir. Buradaki ρ otokorelasyon katsayısıdır ve -1 ile +1 arasında değerler alabilmektedir, bunu gösterirsek:

$$Kov(u_t u_{t-1}) = \rho\sigma_u^2 \quad (|\rho| < 1) \tag{3.22}$$

olur.

Benzer biçimde;

$$Kov(u_t u_{t-2}) = \rho^2\sigma_u^2$$
$$Kov(u_t u_{t-3}) = \rho^3\sigma_u^2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Kov(u_t u_1) = \rho^{t-1}\sigma_u^2 \quad \text{yazılabilir.}$$

Genel olarak,

$$Kov(u_t u_{t-s}) = \rho^s\sigma_u^2 \qquad (s \neq t) \tag{3.23}$$

gösterilebilir.

ρ' nun değeri 0 ile 1 arasında ise; ρ^2, ρ'dan daha küçük bir değer olacaktır. Benzer biçimde ρ^3' ün değeri ρ^2'den küçük olacaktır. Buradan "eğer iki hata terimi arasındaki dönem artarsa, kovaryanslar da gitgide küçülür" sonucuna varılır. ρ'nun değeri -1 ile 0 arasında olursa, ρ'nun yönü bir artı, bir eksi olarak şekilde devamlı değişir ama ρ, ρ^2, ρ^3.... değerleri mutlak değerce azalacaktır. Aynı durum kovaryanslar içinde geçerli olur (17). ρ=0 olması demek otokorelasyonun olmadığını gösterir. Bunun anlamı kovaryansların ve beklenen değerlerin sıfıra eşit olması demektir (10).

Formül (3.21)'deki gibi, yine birinci dereceden otokorelasyon modelini yazarsak:

$u_t = \rho u_{t-1} + v_t$

ρ: birinci dereceden otokorelasyon katsayısı (AR(1) için)

v_t: EKK varsayımlarını sağladığı kabul edilen hata terimi (1)

$E(v_t) = 0 \qquad Var(v_t) = \sigma^2 \qquad Kov(v_t, v_{t-1}) = 0$

u_t, u_{t-1} arasındaki doğrusal ilişkiyi veren sabit terimsiz regresyon modelinde, okokorelasyon katsayısı tahmini:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}^2} \qquad (3\text{-}24)$$

formülü ile bulunur (1).

Hata payları arasındaki ilişkiler asıl (ρ) parametresinin değerine bağlıdır. Daha önce, Formül (3.22)'de

$Kov(u_t, u_{t-1}) = \rho \sigma_u^2$

olduğunu ifade edilmişti. Buradan,

$$\rho = \frac{Kov(u_t, u_{t-1})}{\sigma_u^2} \qquad (3.25)$$

bulunur.

$\sigma_u^2 = Var(u_t) = Var(u_{t-1})$, eşit varyans varsayımından,

$$\rho = \frac{Kov(u_t\, u_{t-1})}{\sqrt{Var(u_t)}\sqrt{Var(u_{t-1})}} \tag{3.26}$$

yazılabilir.

ρ parametresi iki değişkenin kovaryansının, bu değişkenlere ait standart sapmalara bölünmesiyle elde edildiği görülmektedir (17).

Modele ait matematiksel kalıbın yanlış kurulması, bağımlı değişkenin belirlenmesinde etkili olan bazı bağımsız değişkenlerin modele dahil edilmemesi, verilerin uygun şekilde işlenmemesi, u hata teriminin yanlış belirlenmesi otokorelasyonun ortaya çıkmasına sebep olur (10).

Hata terimleri otokorelasyonlu olsa bile SEK parametre tahminleri istatistiksel olarak sapmasızdır. Yani beklenen değerleri gerçek parametrelere eşittir. Fakat u'ların otokorelasyonlu olması parametrelerin SEK tahminlerinin varyanslarının yüksek çıkmasına sebep olur ki bu da minimum varyans özelliğinin yitirilmesi demektir. Bu varyanslar Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) yöntemi ile çözüldüğünde, SEKY'ne göre olandan daha küçük çıkacaktır (1). Otokorelasyonlu SEK tahmincileri minimum varyans özelliğini yitirdiğinden t ve F testlerinin sonuçları güvenilmez olacaktır. Bu sebepten otokorelasyonu giderme yolları aranmalıdır. Buradan kullanılacak yöntem GEKKY'dir(10).

3.3.1. Varyans-Kovaryans matrisi V'nin bilinmesi durumu

Hata terimleri otokorelasyonlu olduğu zaman V matrisinin elemanları otokorelasyon kalıbına göre değişir (10). Birinci dereceden otokorelasyonun olması durumunda varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir (19):

$$V = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots\ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots\ldots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \sigma_u^2 \Omega \tag{3.27}$$

V, pozitif tanımlı simetrik bir matristir ve tahmin edilmesi gereken parametreleri içerir (18).

Daha önce, (3.19) ve (3.20) formüllerinde,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \qquad (t=1, \ldots , N)$$

ve

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \qquad |\rho| < 1$$

şeklinde birinci dereceden otokorelasyon ilişkisine (AR(1)) değinilmiştir.

$$E(u)=0$$
$$E(uu') = \sigma_u^2 \Omega = V$$

ve ayrıca

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_v^2}{1 - \rho^2} \tag{3.28}$$

ise buradan

$$\sigma_v^2 = \sigma_u^2 \left(1 - \rho^2\right)$$

bu durumda varyans-kovaryans matrisi;

$$V = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olur (17).

$$V^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & \rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$V^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & \rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur P'P, V^{-1} ile orantılıdır ve $PVP' = \sigma^2(1-\rho^2)\,I$ Burada P dönüşüm matris:

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$P'P = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & \\ . & . & . & & . & \\ . & . & . & & . & \\ . & . & . & & . & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Dönüştürülmüş regresyon denklemi SEK tahmincisinin tüm varsayımlarını sağlar ve $\tilde{\beta}$, β' nın EDST'dir. $\tilde{\beta}$ Formül (3.16) ve (3.17)'ye bağlı kalarak şu formüller ile elde edilir:

$$\tilde{\beta} = \left[(PX)'(PX)\right]^{-1}(PX)'(PY) \tag{3.29}$$

$$\tilde{\beta} = (X'P'PX)^{-1}(X'P'PY)$$

$$\tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\left(X'V^{-1}Y\right) \tag{3.30}$$

Buradan, Formül (3.18) deki gibi

$$\tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}\left(X\beta + u\right)$$

$$\tilde{\beta} = \beta + \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}u \tag{3.31}$$

bulunur.

$\tilde{\beta}$'nın varyans-kovaryans matrisi ise; Formül (3.19) dan yola çıkarak şu şekilde olur:

$$E\left(\tilde{\beta}-\beta\right)\left(\tilde{\beta}-\beta\right)' = E\left(\left(X'V^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}uu'V^{-1}X\left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\right)$$

$$= \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} \qquad (3.32)$$

$$= \sigma^2\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} \qquad (3.33)$$

$\tilde{\beta}$'nın tahmincisi, GEKK veya Aitken tahmincisi olarak isimlendirilir (17).

Tekrar dönüşürtürülmüş model Formül (3.12);

$$PY = PX\beta + Pu$$

ele alındığında, bunun matrisler ile gösteriminde;

$$PY = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}Y_1 \\ Y_2-\rho Y_1 \\ Y_3-\rho Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n-\rho Y_{n-1} \end{bmatrix} \quad PX = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2}X_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \sqrt{1-\rho^2}X_1 \\ 1-\rho & X_{22}-\rho X_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_{2k}-\rho X_{1k} \\ 1-\rho & X_{32}-\rho X_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_{3k}-\rho X_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-\rho & X_{n2}-\rho X_{n-1,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_{nk}-\rho X_{n-1,k} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Burada $Pu = u^*$ vektörünün varsayımları:

$$E\left[u^*\right] = E\left[Pu\right] = P\,E\left[u\right] = 0 \qquad (3.34)$$

olur. $PP' = V^{-1}$ dönüştürülmüş modelde ilk gözlem:

$$\sqrt{1-\rho^2}\, Y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\, X_1'\beta + \sqrt{1-\rho^2}\, u_1 \qquad (3.35)$$

Kolon (n-1) ise;

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = (X_t - \rho X_{t-1})\beta + v_t \qquad (3.36)$$

ve $\quad v_t = u_t - \rho u_{t-1} \qquad t=2,3, \ldots , n \qquad (3.37)$

olur.

En küçük kareler yönteminde X' in ilk kolonu 1'lerin vektörü idi. Fakat GEKKY'de X^{*}' ın ilk kolonu artık sabit değildir. İlk elemanı $\sqrt{1 - \rho^2}$ ve diğer kolon elemanları $1 - \rho$ olacaktır (21).

Dönüştürme işleminde P matrisinden başka kullanılan bir dönüşüm matrisi de P_1' dir. P_1 matrisi, P matrisinin üstten bir satırın çıkarılması ile elde edilir. Bu durumda

$$P_1 = \begin{bmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & & -\rho & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}_{(n-1)xn}$$

matrisi elde edilir. Böylece n yerine (n-1) dönüştürülmüş gözlem kullanılmaktadır. Böyle bir P_1 matrisi ile gözlem değerleri çarpıldığında:

Dönüştürülmüş gözlem= Orjinal gözlem - ρxBir önceki gözlem sonuçları elde edilir. Bu (n-1) sayıdaki yeni gözlem değerlerine SEKY uygulandığında elde edilecek sonuçlar, GEKY ile elde edilecek sonuçlara çok yakın çıkar.

PY ve PX kullanıldığında genelleştirilmiş en küçük kareler tahmininin aynısı, P_1Y ve P_1X kullanıldığında ise yaklaşık değerleri elde edilir. Bu durumda,

$$P_1Y = \begin{bmatrix} Y_2-\rho Y_1 \\ Y_3-\rho Y_2 \\ Y_4-\rho Y_3 \\ \vdots \\ Y_n-\rho Y_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1)x1}$$

$$P_1X = \begin{bmatrix} 1-\rho & X_{22}-\rho X_{21} & \cdots\cdots & X_{2k}-\rho X_{1k} \\ 1-\rho & X_{23}-\rho X_{22} & \cdots\cdots & X_{2k}-\rho X_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-\rho & X_{n2}-\rho X_{n-1,2} & \cdots\cdots & X_{nk}-\rho X_{n-1,k} \end{bmatrix}_{(n-1)xk}$$

matrisleri ile işlem yapılır. (n-1) gözlemdeki modelde regresyon katsayılarının tahmin olan $\hat{\beta}$'ler şu formülle bulunur (22).

$$\hat{\beta} = \left[(P_1X)'(P_1X)\right]^{-1}(P_1X)'(P_1Y) \tag{3.38}$$

3.3.2. Varyans Kovaryans matrisi V'nin bilinmemesi durumu

ρ bilinmediğinde bunun tahminleri olan $\hat{\rho}$' lar kullanılır. Formül (3.35) ve (3.36)'daki gibi;

$$\sqrt{1-\rho^2}Y_1 = \sqrt{1-\rho^2}X_1\beta + \sqrt{1-\rho^2} + u_1$$

ve

$$Y_t-\rho Y_{t-1}=(X_t-\rho X_{t-1})\beta+v_t$$

formüllerinde ρ' ların yerine $\hat{\rho}$ konulabilmektedir. $\hat{\rho}$'nun kullanılmasında çeşitli yöntemler mevcuttur. Aşağıda Cochrane-Orcutt İterasyonu, Durbin-Watson ve Theil Nagar yöntemleri ele alınmıştır.

3.3.2.1. Cochrane-Orcutt iterasyon yöntemi

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki V^{-1} matrisi, otokorelasyon katsayısı $\rho_{(k)}$olduğunda V_k^{-1} olsun. Örneğin $\rho_{(k)}=0$ ise $V_0^{-1}=I$ olur. Bu durumda $\hat{\beta}_{(0)}$ tahmini katsayılar matrisi de:

$$\hat{\beta}_{(0)}=(X'V_0^{-1}X)^{-1}X'V_0^{-1}Y$$

elde edilir.

$\hat{u}^0 = Y - X\hat{\beta}_{(0)}$ formülü ile artıklar hesaplanır ve ρ'nun ilk tahmini;

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^{(0)} \hat{u}_{t-1}^{(0)}}{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_{t-1}^{(0)}\right)^2}$$

elde edilir. Bundan sonra V_1^{-1} matrisi için $\hat{\rho}_1$ kullanılır ve böylece

$$\hat{\beta}_{(1)} = \left(X'V_1^{-1}X\right)^{-1}X'V_1^{-1}Y$$

regresyon katsayı tahminleri yapılır. Buna ait artıklar vektörü,

$$\hat{u}^{(1)} = Y - X\hat{\beta}_{(1)}$$

olur ve ikinci iterasyon ile

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^{(1)} \hat{u}_{t-1}^{(1)}}{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_{t-1}^{(1)}\right)^2}$$

tahmini yapılır.

δ, çok küçük pozitif bir niceliği, bir sayıyı temsil etmek üzere,

$$\left|\hat{\rho}_{(k-1)} - \hat{\rho}_{(k)}\right| < \delta \tag{3.39}$$

formülü yardımıyla bu iterasyonlar δ'nin uygun olarak elde edilmesine dek sürer (23).

Bazı araştırmacılar iki iterasyon yaparak işleme son verirler. Bu durumda bu yöntemin adı iki aşamalı Cochrane-Orcutt yöntemi olur.

Birinci dereceden otokorelasyonun olduğu durumda almaşık bir yaklaşım olarak, her adımda artıkların otokorelasyona sahip olup olmadığını Durbin Watson d istatistiğini kullanarak sınanması ve otokorelasyonun olmaması durumunda iterasyonlara son verilmesi de önerilir (1).

3.3.2.2. Durbin-Watson d istatistiği yöntemi

Durbin ve Watson bağımsız değişkenlerin sayısına bağımlı ve bağımsız değişkenlerin değerine bağımlı olmayan yaklaşık bir test oluşturmuşlardır.

Durbin-Watson d istatistiğinin Formül (2.5)'deki formülü tekrar yazıldığında,

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

d istatistiği geliştirildiğinde,

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

olur. $\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t^2$, $\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1}^2$ ve $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2$ miktarı yaklaşık olarak birbirine eşittir. Bunun sonucunda :

$$d = 2 - 2\,\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

ve buradan da aşağıdaki formül elde edilir.

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

Böyle olunca (2.6)'daki formül $d \cong 2(1 - \hat{\rho})$ gerçekleşir. Bu ifade de $\hat{\rho}$ yanlız bırakıldığında

$$\hat{\rho} = 1 - (d/2) \tag{3.40}$$

elde edilir. Buradaki $\hat{\rho}$ değeri V^{-1} matrisinde yerine konarak ya da P dönüşüm matrisinde yerini alarak GEKKY uygulanabilir (12).

3.3.2.3. Theil-Nagar yöntemi

Theil-Nagar Yönteminde küçük örnekler için Durbin-Watson d istatistiğine dayanarak otokorelasyon katsayısı şöyle hesaplanır:

$$\hat{\rho} = \left[n^2(1 - d/2) + k^2\right] / \left(n^2 - k^2\right) \tag{3.41}$$

Burada

n: toplam gözlem sayısı (örnek hacmi)

d: Durbin-Watson d istatistik değeri

k: tahmin edilen $\hat{\beta}$ sayısı

olmaktadır. Bu formül yardımıyla $\hat{\rho}$'yu bulduktan sonra GEKKY uygulanır ve $\tilde{\beta}$ katsayı tahminleri elde edilerek otokorelasyonun varlığı giderilir (10).

3.4. Farklı Varyanslılık

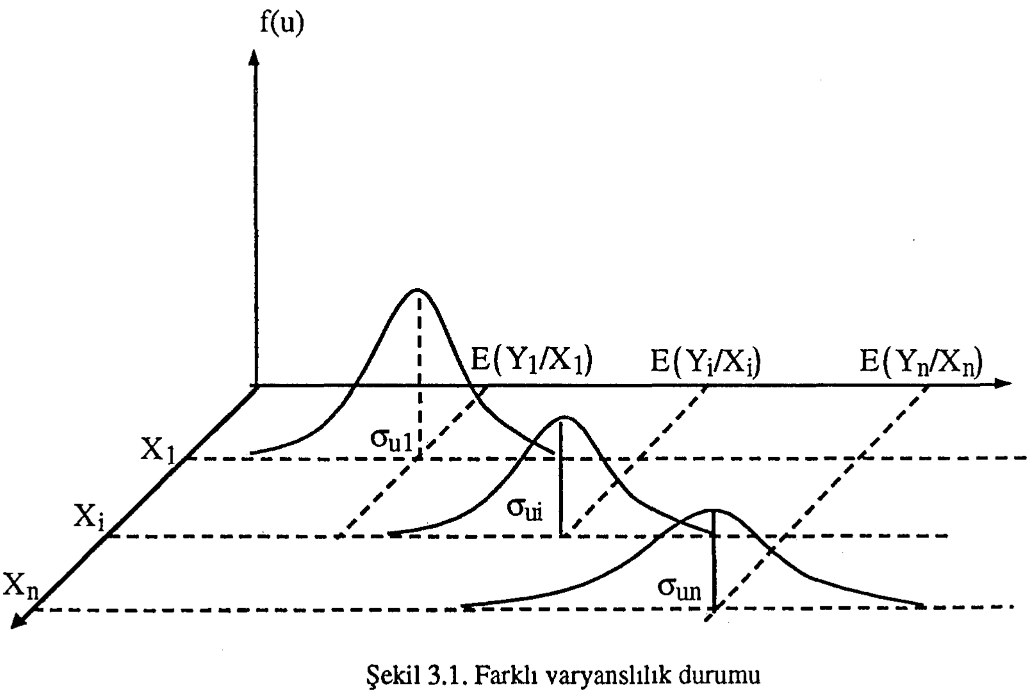
Basit doğrusal regresyon modelinin varsayımlarından birinin sabit varyans (eş varyanslılık) olduğuna daha önce değinildi. Bu varsayıma göre hata terimi u'nun dağılımı X'in bütün değerleri için aynı kalmaktadır. u_i' nin varyansları, açıklayıcı değişkenin bütün değerleri için aynıdır. Bunun simgesel olarak gösterimi:

$$Var(u) = E\{u_i - E(u)\}^2 = E(u_i)^2 = \sigma_u^2$$

şeklindedir ve bu sabit varyansı ifade eder (1). Bazı yerlerde sadece σ^2 olarak da ifade edilir ki bu hata terimi varyansıdır. Bu varsayımdan sapmalar değişen varyans diye adlandırılır. Özellikle yatay kesit çalışmalarında, değişkenlerin aldığı değerlerin çok yaygın olduğu durumlarda varsayımdan sapma gerçekleşir ve hata terimleri varyanslarının farklı büyüklüklere sahip olduğu gözlenir (24). Simgesel gösterimi:

$$Var(u_i) = \sigma_{u_i}^2$$

şeklindedir. Buradaki indis i, her bir varyansın farklı olduğunu gösterir (1)



Şekil 3.1. Farklı varyanslılık durumu

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi X_i' nin değerleri arttıkça Y_i'nin şartlı varyansının da arttığı görülmektedir. Dolayısıyla artan varyans vardır.

Farklı varyanslılık halinde modele doğrudan SEK uygulanırsa, katsayı tahminleri için F ve t testleri doğru tahminleri vermez. Çünkü standart hatalar büyük değerli olur. Ayrıca katsayı tahminleri doğrusallık ve sapmasızlık özelliğini yitirmezler ama minimum varyans özelliğini yitirirler. Standart hataların büyük değerli ve katsayı tahminlerinin EDST (en küçük varyanslı, doğrusal, sapmasız tahmin) olmamasından hesaplanacak güven aralıkları da güvenilir olmayacaktır. Bu gibi durumların ortaya çıkmaması için farklı varyanslığın olup olmadığını mutlaka tespit edilmelidir. Çeşitli testler yardımı ile bu durum tespit edildikten sonra giderilmelidir. Bunun için de modele dönüşüm uygulamak gerekir. Dağılması fazla olan gözlemlere az tartı veya ağırlık, dağılması az olan gözlemlere ise daha fazla tartı verilir. Bu şekilde dönüşüm uygulanırken kullanılan yöntem de Tartılı En Küçük Kareler Yöntemi (TEKKY)'dir. Bu yöntemi ile elde edilen tahminlere de TEKK tahminleri denir ve bu sayede hata terimleri sabit varyanslı hale gelir (10). Böylece değişkenlerin dönüştürülmüş değerlerine SEKY uygulanması ile anakütle parametre tahminlerinin EDST olması sağlanır (14).

TEKKY, Aitken'nin GEKKY'nin özel bir halidir. GEKKY daha genel bir tahmin yöntemidir (1).

3.4.1. Varyans Kovaryans matrisi V'nin bilinmesi durumu

Değişen varyans durumunda GDRM'nin varyans kovaryans matrisi şu biçimdedir:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}_{(nxn)}$$

GDRM'ne göre parametre vektörü, Formül (3-17)'deki gibi şöyle idi:

$$\tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

V matrisi diagonal bir matristir ve tersi (inversi) diagonal elementlerin tersidir:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}^2} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}^2} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \frac{1}{\sigma_{nn}^2} \end{bmatrix}$$

Ana model: Formül (3.2)'deki gibi

$$Y = X\beta + u$$

Modeldeki u'ların varyansları eşit olmadığından değişen varyans durumu vardır. ve GEKKY'nin özel bir durumu olan ağırlıklı ya da tartılı en küçük kareler yöntemi (TEKKY) uygulanmalıdır. V matrisinin tersinin alınmasıyla şu tartılar elde edilir:

$$\frac{1}{\sigma_{11}^2}, \frac{1}{\sigma_{22}^2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_{nn}^2}$$

Modeldeki değişkenler üzerinde dönüşümü gerçekleştirecek P matrisi ise şöyledir:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

Ayrıca,

$V^{-1} = P'P$

olmaktadır. Dönüşüm sonucu matrisler:

$$PX = \begin{bmatrix} \frac{X_{11}}{\sigma_1} & \frac{X_{12}}{\sigma_1} & \cdots\cdots & \frac{X_{1n}}{\sigma_1} \\ \frac{X_{21}}{\sigma_2} & \frac{X_{22}}{\sigma_2} & \cdots\cdots & \frac{X_{2n}}{\sigma_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{X_{n1}}{\sigma_n} & \frac{X_{n2}}{\sigma_n} & \cdots\cdots & \frac{X_{nn}}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

$$PY = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{\sigma_1} \\ \frac{Y_2}{\sigma_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{Y_n}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

olmaktadır (7).

3.4.2. Varyans Kovaryans matrisi V'nin bilinmemesi durumu

Genellikle ekonometrik çalışmalarda σ_i^2 önceden bilinmemektedir. Bu yüzden V matrisi de oluşturulamaz . Farklı varyanslılık bazı testler yardımıyla varlığı ispatlandıktan sonra orjinal verilere dönüşüm yapılarak EKKY uygulanır. bu dönüşümler;

$$E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$$
$$E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$$
$$E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 (a_0 + a_1 X_i)^2$$

gibi farklı fonksiyonel yapılarda olabilir. Hatta Glejser Farklı Varyanslılık Testi σ_i^2'nin X_i ile bağıntısının şekli konusunda bilgi veren bir testtir (10). Ayrıca σ^2'nin bilinmediği durumda, σ^2'nin tahmincisi olan S^2'de kullanılır ve formülü aşağıdaki gibidir.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}}\right)^2}{n - k} \tag{3.42}$$

Burada $\hat{u}_i$ artıkları, k ise model parametrelerinin sayısını gösterir. V^{-1} diagonal matrisinde köşegen elemanları σ^2' nin yerine S^2' ler olur. Bu şekilde regresyon katsayıları GEKKY'nin özel durumu TEKKY ile tahmin edilir (25).

Şimdi değişik dönüşümler TEKKY gösterilecektir.

3.4.2.1. $E\left(u_i^2\right) = \sigma^2 X_i^2$ varsayılması durumu

Hata terimlerinin varyansı herhangi bir X değişkeninin karesi ile orantılı olarak değiştiği farklı varyanslılığı giderme durumunda varsayımlar aşağıdaki gibidir:

$E(u)=0$

$E(u_i u_j) = 0 \qquad i \neq j$ için

ve yine

$$E\left(u_i^2\right) = \sigma^2 X_i^2$$

olmaktadır. Bu durumda V matrisi aşağıdaki gibidir:

$$V = \begin{bmatrix} X_1^2 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & X_2^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & X_3^2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & X_n^2 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin inversi:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/X_1^2 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1/X_2^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/X_3^2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1/X_n^2 \end{bmatrix}$$

Ayrıca $V^{-1} = P'P$ olduğuna göre P dönüşüm matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1/X_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1/X_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/X_3 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1/X_n \end{bmatrix}$$

olmaktadır.

$$Y = X\beta + u$$

Modelinde X ve Y değişkenlerine P matrisi ile dönüşüm yapıldığında dönüştürülmüş matrisler aşağıdaki gibidir:

$$PX = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_1} & 1 \\ \frac{1}{X_2} & 1 \\ \frac{1}{X_3} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{X_n} & 1 \end{bmatrix}_{(n\times 2)} \qquad PY = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{X_1} \\ \frac{Y_2}{X_2} \\ \frac{Y_3}{X_3} \\ \vdots \\ \frac{Y_n}{X_n} \end{bmatrix}_{(n\times 1)}$$

P matrisinin yanısıra orjinal gözlemler ile V^{-1} matrisini kullanarak GEKKY ile regresyon katsayıları:

$$\tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

formülü ile elde edilir (22).

3.4.2.2. σ^2'nin tahmincisi S^2' nin kullanılması durumu

Artıklara ait ayrı varyans tahminleri S^2'ler kullanıldığında w_i tartısı;

$$w_i = \frac{1}{S_i^2}$$

olacaktır. Bu durumda P dönüşüm matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1/S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/S_n \end{bmatrix}$$

ve $P'P = V^{-1}$'dir.

GEKKY'nin regresyon katsayı tahmincisi

$$\tilde{\beta} = \left[(PX)'(PX)\right]^{-1}(PX)'(PY)$$
$$\tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\left(X'V^{-1}Y\right)$$

kullanılarak EDST'ler elde edilir (26).

4. ELEKTRİK ENERJİSİ TALEBİ İLE GAYRİ SAFİ MİLLİ HASILA ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

4.1. Elektrik Enerjisinin Önemi

Dünya'da sanayi devrimi meydana geldikten sonra, ekonomik gelişme ile genel enerji ve özellikle elektrik enerjisi kullanımının artmasından dolayı, günümüzde elektrik enerjisi, ekonomik ve sosyal hayatın çok önemli bir unsuru haline gelmiştir. Bu yüzden öncelikle elektrik enerjisinin teknik açıdan daha sonra ekonomik açıdan önemi açıklanmalıdır (27).

4.1.1. Teknik açıdan elektrik enerjisinin önemi

Enerji, fiziksel olarak iş yapabilme yeteneğidir. Bunun yanısıra, her enerji türü, diğer bir enerji türüne dönüştürülebilir.

Enerji kaynakları, niteliğinin değiştirilebilmesi bakımından iki gruba ayrılır (28):

i) Birincil enerji kaynakları
ii) İkincil enerji kaynakları

Birincil enerji kaynağı, doğal olan ve hiçbir değişikliğe uğramayan enerji şeklidir. İkincil enerji kaynakları ise, birincil enerji kaynaklarının şekil değiştirilmesiyle oluşur. Elektrik enerjisi, çeşitli birincil enerji kaynaklarından üretilen ikincil enerji türüdür.

Elektrik enerjisinin en önemli üstünlüğü kolayca taşınabilmesi ve diğer enerji türlerine kolayca çevrilebilmesidir (29).

4.1.2. Ekonomik açıdan elektrik enerjisinin önemi

Çağımızın ülkeleri gelişmiş, gelişmekte olan ve az gelişmiş olacak biçimde ayrılmaktadır. Bu ayrımlarda çok sayıda ölçüt kullanılmaktadır. Son yıllarda ekonomik düzeyi belirleyen bu ayrımlarla ilgili olan ölçütler arasına, ülkelerde kişi başına kullanılan enerji miktarı da eklenmiştir. Çeşitli ülkeler için yapılan ekonomik gelişmişlik sıralamasında, bu ölçütün önemli çelişkilere neden olmadığı görülmüştür. Bunun yanısıra, ülkelerin gelişmişlik düzeylerinin saptanmasında, sadece kişi başına tüketilen enerji miktarı ile yetinilmemiş, bunun bileşimi ya da yapısı da gözönüne alınmıştır. Çünkü ülkelerin gelişmişlik düzeyleri yükseldikçe, kullanılan enerji türleri daha modern ve bir işlemden geçmiş ikincil enerji türleridir. Bu nedenle, kişi başına kullanılan enerji miktarı ve yapısı, gün geçtikçe daha fazla kabul gören bir ekonomik gelişme ölçütüdür.

Enerji kaynakları, kullanımlarının ekonomik olup olmaması açısından ikiye ayrılır. Kullanımı ekonomik olan kaynaklar ticari, diğerleri ticari olmayan kaynaklar biçiminde adlandırılmaktadır.

Günümüzdeki enerji kaynakları arasında en önemli yeri alan elektrik enerjisi ikincil enerji kaynağıdır ve ticari enerji olma özelliğini taşır.

Elektrik enerjisi sektörü, ekonominin diğer sektörlerine büyük miktarlarda girdi veren bir sektördür ve diğer sektörlerdeki gelişmelerden etkilenmenin yanısıra diğer sektörlerin gelişmesine yardımcı olur. Tarım ve sanayi sektörlerinin makineleşmesiyle alt yapının ve ulaşımın gelişmesi, elektrik enerjisi kullanan dayanıklı tüketim mallarının türü ve miktarının önemli ölçüde artması sonucu daha fazla elektrik enerjisi talep edilmekte ve böylece elektrik enerjisi sektörünün geliştirilmesi, yani elektrik üretiminin arttırılması zorunlu olmaktadır. Elektrik enerjisinin yetersizliği bir ülkede sadece bazı bölgelerin karanlıkta kalması demek değildir. Bunun yanısıra üretimin düşmesi, işsizliğin artması, tüm sanayi sektörünün felce uğraması yatırımların gerilemesi ve kısaca milli gelirin azalmasına neden olmaktadır (27).

Elektrik enerjisinin diğer endüstriler üzerindeki itici etkisi, kalkınma ile olan ilişkisini de ortaya koyar (30).

Elektrik enerjisinin üretmeye yönelik yatırımlar, alt yapı yatırımlarıdır. İktisadi mal olarak elektrik enerjisinin şu iki özelliği vardır:

i) Elektrik enerjisinin arzı, talebine bağlıdır. Bu sebeple talebi aşan bir üretim sözkonusu değildir. Depo edilememesi üretildiği an tüketilmesi gerekmektedir (28).

ii) Elektrik enerjisi saf bir enerji türü olmasından dolayı diğer türlere rahatlıkla dönüştürülebilmektedir. Aynı zamanda kolay, temiz,sessiz ve ucuz bir şekilde üretilmekte ve istenildiği kadar küçük parçalara bölünebilmekte ve birleştirilebilmektedir. Bu sebeple kullanım alanı çok geniştir (31).

Elektrik enerjisinin, kişiler için kolay, konforlu, temiz oluşu ve uzak mesafelere taşınabilmesi, diğer enerji türlerine çevrilebilmesi, her maksada göre kullanılabilmesi bu enerji türünü her yerde aranılır bir ekonomik mal haline getirmiştir (32).

Elektrik enerjisi hem genel üretim ve tüketim süreçleri üzerinde sosyo-ekonomik gelişmeyi etkiler, hem de ekonominin ulaştığı üretim ve tüketim düzeyini etkiler. Dolayısıyla gelişme düzeyinin elektrik enerjisi yatırım ve üretimini belirlediği görülmektedir. Bu etkileşim sistemi içinde elektrik enerjisinin arzı ve talebi birlikte belirlenmelidir. Ayrıca ulaşılmış gelişme düzeyinin korunması ve arttırılabilmesi yönünde temel bir girdi olan elektrik enerjisi talebinin karşılanamaması, üretim ve tüketimde ciddi gerilemelere yol açar (33).

4.1.2.1. Elektrik talebinin kapsamı

Elektrik enerjisinin iki önemli özelliği, stok edilememesi ve talebin devamlı olarak artmasıdır. Bu yüzden elektrik sektörünün planlamasında, talebin, zamanından önce yatırım israfına yol açacak biçimde olmamasına ve darboğazlara sebep olmadan karşılanmasına dikkat edilmelidir (34).

Teorik olarak bir ülkede ne kadar elektrik enerjisi üretiliyorsa o kadar tüketilmelidir. Üretilen elektrik enerjisinin hepsi tüketiciye ulaşamaz. Bunun bir kısmı üretildiği santralde kullanılır ve diğer bir kısmı da tüketicilere iletim hatları ile ulaştırılırken şebeke kaybı adı verilen kayba uğrar (30).

Elektrik enerjisini talep eden tüketiciler dört ana gruptan oluşur. Bunlar (35):

1) Sanayi,

2) Ev ve ticarethane,

3) Resmi daire ve sokak,

4) Ulaşım.

Sonuç olarak çeşitli amaçlarla talep edilen elektrik enerjisi arttıkça toplam elektrik enerjisi talebi de artar.

4.1.2.2. Elektrik enerjisi talebinin özellikleri

İktisadi bir mal olan elektrik enerjisinin talebinin iki önemli özelliği vardır:

i) Elektrik enerjisi stok edilemediğinden, ihtiyaç anında talebi karşılayacak şekilde ve miktarda üretimi yapılmalıdır.

Elektrik enerjisi sektöründe talep, üretimi belirleyen bir öneme sahip olmakla beraber, darboğazlar talep yetersizliğinden değil, üretim yetersizliğinden kaynaklanır. Özellikle gelişmekte olan ülkelerde oluşan darboğaz, üretim teçhizatı yetersizliğindendir.

ii) Elektrik enerjisinin talebi, zaman içinde çok değişken bir karaktere sahiptir. Örneğin, hava sıcaklığındaki bir düşme, talepte beklenmeyen bir artışa sebep olur. Elektrik enerjisi talebi, yılın bazı aylarında, haftanın bazı günlerinde, günün bazı saatlerinde farklı ihtiyaçlara sebebiyet verir. Bu yüzden her an yeni ayarlamalara gitmek gerekebilir (36).

4.2. Yıllık Elektrik Enerjisi Talebi ve Gayri Safi Milli Hasıla Verileri Üzerinde Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yönteminin Uygulanışı

Yapılan çalışmada 1968-1995 yıllarına ait elektrik enerjisi talebi ile gayri safi milli hasıla (GSMH) değişkenleri arasında ilişki aranmıştır.

Uygulamada asıl yapılmak istenilen, sözkonusu ekonometrik modelde otokorelasyonun belirlenmesi ve genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi kullanılarak ortadan kaldırılmasıdır.

Elektrik enerjisi bir altyapı unsurudur. Bir ülkede enerji yetersizliği, enerji girdisi olan ekonomik faaliyetlerin yerine getirilememesine sebeptir. Bu durum ekonomide, üretim ve tüketimin düşmesine yol açar. Elektrik enerjisi talebinin karşılanamaması sosyo-ekonomik gelişmeyi engeller. Bu yüzden elektrik üretiminde gerekli yatırımlarda bulunmak için öncelikle elektrik enerjisi talebini bilmek gerekir.

GSMH, elektrik enerjisi talebini etkileyen bir faktördür. Çünkü gelişmiş ve gelişmekte olan ülkelerin ekonomilerinde gelir yani GSMH ile enerji tüketiminin yıllık artışları uzun dönemde birbirine paralel bir seyir izler. Bu yüzden sözkonusu uygulamada yıllık elektrik enerjisi talebi bağımlı değişken, GSMH ise bağımsız değişken olarak alınacaktır. Bu iki değişken arasında sabit varyans varsayımının sağlandığı Glejser farklı varyanslılık testi ile test edilmiştir. Bu değişkenler arasında otokorelasyonun varlığı belirlendikten sonra GEKKY uygulanarak GEKK tahmincileri bulunmuştur.

Uygulamada kullanılan GSMH değerleri cari fiyatlarla değil, 1987 yılı sabit fiyatlarıyla ele alınmıştır. Yıllara göre elektrik enerjisi talebi ve GSMH değerleri şöyledir:

Çizelge 4.1. Yıllara göre elektrik enerjisi talebi ve GSMH değerleri

Yıllar	Elektrik Enerjisi (37) Talebi 10^6 kWh	GSMH (38) 000.000.000 TL
1968	5847.0	31635
1969	6615.8	33003
1970	7307.8	34469
1971	8289.3	36897
1972	9527.3	40279
1973	10530.1	42255
1974	11358.7	43633
1975	13491.7	46275
1976	16078.9	50438
1977	17968.8	51944
1978	18933.8	52582
1979	19663.1	52324
1980	20632.4	50870
1981	22030.0	53317
1982	23586.8	54963
1983	24465.1	57279
1984	27635.2	61350
1985	29708.6	63989
1986	32209.7	68315
1987	36697.3	75019
1988	39721.5	76108
1989	43120.0	77347
1990	46820.0	84592
1991	49282.9	84887
1992	53984.7	90323
1993	59237.0	97677
1994	61400.9	91733
1995	67393.9	99028

4.2.1. Yıllık elektrik enerjisi talebi ve gayri safi milli hasıla verilerinin otokorelasyon tespiti

Yıllara göre elektrik enerjisi talebi ve GSMH verilerine öncelikle SEKY uygulanmıştır. Bu yöntem sayesinde elde edilen regresyon denklemi ise şöyledir:

$\hat{Y}_t = -25908{,}934 + 0{,}886X_t$ $\qquad\qquad$ $R^2 = 0{,}982$

$\quad(1491{,}88) \quad (0{,}023)$

Bu denklemden elde edilen Durbin-Watson d istatistiği ise şöyledir:

$d=0{,}62$

Burada formül (2.6) uygulandığında,

$d = 2(1 - \hat{\rho})$

$\hat{\rho}=0{,}69$

olarak bulunur. n=28 ve k=1 olduğunda %5 ve %1 anlam seviyesinde modelin pozitif otokorelasyona sahip olduğu görülür. Bu durumda SEKY'nin dördüncü varsayımı gerçekleşmemiştir. Öyleyse GEKKY uygulanarak otokorelasyon giderilmelidir.

4.2.2.Genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile otokorelasyonun giderilmesi

Yıllara göre elektrik enerjisi talebi ve GSMH değerlerine GEKKY'ni uygulamak için öncelikle bir P_1 dönüşüm matrisi oluşturmak gerekir. Bu daha önce bulunan $\hat{\rho}=0{,}69$ otokorelasyon katsayısına dayalı bir matristir. Böylece uygulamada kullanılacak P_1 dönüşüm matrisi EK-2'deki M_1 matrisi olarak gösterilmiştir. Kısaca aşağıdaki gibidir;

$$P_1 = \begin{bmatrix} -0.69 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -0.69 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.69 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -0.69 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu dönüşüm matrisi daha önce Formül (3.2)'de ifade edilen GDRM'ye uygulanacaktır:

$$Y = X\beta + u$$

P_1 matrisi bu modele önden çarpım biçiminde uygulandığında,

$$P_1Y = P_1X\beta + P_1u$$

olacaktır. Böylece Y: elektrik enerjisi talebi ve X: GSMH değerleri dönüştürülmüş olacaktır. Modelin katsayılarının tahmin edilmesi için Formül (3.38) kullanılmalıdır:

$$\tilde{\beta} = \left[(P_1X)'(P_1X)\right]^{-1}(P_1X)'(P_1Y)$$

EK-2'de orjinal verilerle X matrisi M2 ve Y matrisi M3 olarak gösterilmiştir. P_1 matrisi ile çarpılarak dönüşüm yapılan marisler P_1X için M4 ve P_1Y için M8 matrisleri Ek-2'dedir. Şöyleki;

$$P_1X = \begin{bmatrix} 0.3 & 11174.9 \\ 0.3 & 11696.9 \\ 0.3 & 13113.4 \\ 0.3 & 14820.1 \\ \vdots & \vdots \\ 0.3 & 24335.9 \\ 0.3 & 35732.2 \end{bmatrix}_{(27x2)} \qquad P_1Y = \begin{bmatrix} 2581.4 \\ 2742.9 \\ 3246.9 \\ 3807.7 \\ \vdots \\ 20527.4 \\ 25027.3 \end{bmatrix}_{(27x1)}$$

Ayrıca $(P_1X)'(P_1X)$ matrisi M6 olarak ve inversi de M7 olarak EK-2'dedir. Formül (3.38)'deki işlemlerin Minitab paket programında gerçekleştirilmesi sonucu elde edilen katsayılar matrisi M10 olarak EK-2'de yer almıştır ve aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} -26713.6 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

Bu durumda $\hat{b}_0$ = -26713.6 ve $\hat{b}_1$ = 0.9 katayılarından oluşan denklem şöyledir:

$$\hat{Y}_t = \underset{(1136.889)}{-26713.6} + \underset{(0.052)}{0.9X_t} \qquad R^2 = 0.919$$

Bu denklemden bulunan Durbin-Watson d istatistiği ise şöyledir:

d=1.946

d istatistiği değeri 2'ye çok yakın bir değer çıkmıştır. Bu durumda otokorelasyonun olmadığı bölgede Durbin-Watson d istatistiği yer almaktadır. Artık GEKKY ile oluşturulan model SEKY'nin otokorelasyon olmaması varsayımını sağlamaktadır. Bunun yanısıra regresyon katsayıları da EDST olma niteliği kazanmıştır.

5. SONUÇLAR

Bilindiği gibi uygulama elektrik enerjisi talebi ile gayri safi milli hasıla arasındaki ilişki üzerine yapılmıştır. Gayri safi milli hasıla harcamalar yönüyle ele alındığında toplam tüketim ve toplam yatırımların toplamından dış kaynakların çıkarılmasıyla elde edilir.Gelişmekte olan ülkeler sanayileşme süreci içindedirler. Bu sebepten yatırımlarının büyük bir payını sanayileşmeye aktarırlar. Sanayinin her geçen yıl biraz daha gelişmesi, elektrik enerjisi talebinin de her yıl artmasına sebep olur. Gayri safi milli hasıla (GSMH) arttıkça yatırımlar artacak, yatırımların artmasıyla eletrik enerjisi talebi de artacaktır. Böyle bir ilişki gözönüne alınarak GSMH bağımsız değişken, elektrik enerjisi talebi bağımlı değişken alınarak SEKY uygulanmıştır. Bu şekilde oluşturulan modelde SEKY'nin sabit varyans varsayımı gerçekleşmiştir. Glejser farklı varyanslılık testi ile sabit varyansa sahip olduğu belirlenmiştir. Fakat otokorelasyon olmaması varsayımı gerçekleşmemiştir. Bu sebepten GEKKY uygulanmıştır. Bunun sonucunda elde edilen model;

$$\hat{Y}_t = -26713.6 + 0.9X_t \qquad R^2 = 0.919$$

$$(1136.889) \quad (0.052) \qquad d=1.946$$

Bu modeldeki regresyon katsayıları matris işlemleriyle elde edilmiştir. GEKKY uygulanırken kullanılan dönüşüm matrisi P_1 matrisidir. Fakat P matrisi kullanılarak da dönüşüm yapılabilir. P_1 matrisi kullanılarak regresyon katsayılarını tahmin etmek, genelleştirilmiş fark denklemlerini kullanarak regresyon katsayılarını tahmin etmekle eş değerdedir. Fakat bu tezde GEKKY'nin genelleştirilmiş fark denklemleri yardımıyla regresyon katsayı tahminlerinin elde edilmesine değinilmemiştir.

Matris işlemleriyle GEKKY uygulandığında elde edilen regresyon katsayıları, hiçbir işleme gerek duyulmayan ve EDST özelliğini taşıyan katsayılardır. Bu sebeple gelecek yıllara ait elektrik enerjisi talebi tahminleri yukarıdaki model yardımıyla yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] KOUTSOYIANNIS, A., *Ekonometri Kuramı,* Çevirenler: Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen, Verso Yayıncılık 1. Baskı, Ankara, 1989.

[2] FOGLER, H.R., GANAPATHY, S., *Financial Ecomoetrics For Researchers İn Finance and Accounting,* Prentice-Hall, USA, 1982.

[3] LAPİN,L., *Statistics Meaning and Method,* HARCOURT BRACE JOVANOVICH, INC., USA, 1975.

[4] İDİL, O.,*Örnekleme Teorisi ve İşletme Yönetiminde Uygulanması,*İstanbul Üniv. Yayın No:2708, İşletme Fakültesi Yayın No: 107, İstanbul, 1980.

[5] KORUM, U., *İstatistik,* Sevinç Matbaası, Ankara, 1972.

[6] MADDALA, G.S., *Econometrics,* Mc Graw-Hill Book Company, 1977.

[7] KILÇBAY, A., *Ekonometrinin Temelleri,* İstanbul,Üniv. Yayını, No:2701, 1980.

[8] İDİL, O., *İşletmeciler İçin Genel İstatistik,* İşletme Fakültesi Yayın No: 207, İşletme İktisadi Enstitüsü, Yayın No: 103, İstanbul, 1989.

[9] URAL, K., *İstatistik ve Karar Alma,* Sermet Matbaası İstanbul Üniv. Yayın No: 1880, İktisat Fakültesi Yayın No: 324, İstanbul, 1973.

[10] AKKAYA, Ş, PAZARLIOĞLU, V., *Ekonometri I,* Anadolu Matbaacılık 3. Baskı, İzmir, 1995.

[11] GUJARATI, D.N., *Basic Econometrics,* McGraw-Hill Book Company, 1988.

[12] FEYZİOĞLU, O., *Ekonometrik Yöntemler,* Ankara İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayını, 1977.

[13] NERLOVE, M. WALLIS, K.F., *Use of Durbin-Watson Statistics in Inapropriate Situations*, Econometrica 34, 1966.

[14] JOHNSON, A.C. JR., JOHNSON, M.B., BUSE, R.C., *Ecoometrics Basic and Applied,* Maxwell MacMillian International Editions, 1987.

[15] WEISBERG, S., *Applied Linear Regression,* Wiley Series, 1980.

[16] AKKAYA, Ş., PAZARLIOĞLU, V., *Ekonometri II,* Anadolu Matbaacılık , İzmir, 1991.

[17] KMENTA, J., *Elements of Econometrics,* Maxwell Macmillian International Editions, 1986.

[18] GENCELİ, M., *Ekonometride İstatistik İlkeler,* İstanbul, 1989.

[19] JOHNSON, J., *Econometric Methods,* McGraw-Hill Book Company, 1963.

[20] GREENE, W.H., *Econometric Analysis,* USA, 1993.

[21] JUDGE, G.G., HILL, R.C. GIFTTITTS, W.E. LUTKEPOHI, H., LEE TSOUNG-CHAO, *Introduction to the Teory and Practice of Econometrics,* Wiley Series, Second Edition, 1982.

[22] ÖZKAZANÇ, Ö, *Ekonometriye Giriş,* Anadolu Üniv. Basımevi, Eskişehir, 1997.

[23] DHRYMES, P.J., *Introductory Econometrics,* New York, Springer-Verlag, USA, 1978.

[24] ERTEK, T., *Ekonometriye Giriş,* Evrim Matbaacılık, İstanbul, 1982.

[25] RAYMOND, H.M., *Classical and Modern Regression with Applications,* Duxbury Press, Boston, Massachusetts, 1986.

[26] RAWLINGS, J.O., *Applied Regression Analysis,* North Caroline State University, USA, 1983.

[27] BERBEROĞLU, N., *Türkiye'nin Ekonomik Gelişmesinde Elektrik Enerjisi Sorunu,* Eskişehir İ.T.İ.A. Yayın No: 245/165, Eskişehir, 1982.

[28] ÜNVER, Ö., *Türkiye'de Elektrik Üretimi ve Tüketimi,* A.İ.T.İ.A., Yayın No:68, Ankara, 1973.

[29] YARMAN, T., *Enerji Kaynakları,* Anadolu Üniv. Yayın No:36.

[30] BODUROĞLU, T., *Elektrik Ekonomisi,* İstanbul Teknik Üniv. Matbaası, Sayı:633, 1965.

[31] ŞAHİN, V., Enerji Planlaması, Model ve Teknikleri, Türkiye Enerjisi Talebi Üzerine Bir Çalışma, *DPT,* Yayın No: 2034, s.1, Ankara, 1986,

[32] HASGÜR, İ., Türkiye'nin Elektrik tüketiminin İstatistiki Analizi, *Yayınlanmış Doktora tezi, Ege Üniv.,* s.Giriş, I.II. İzmir, 1979,

[33] ERKAN, H., Türkiye'de Elektrik Enerjisinin ve Elektrik Tüketimine Etki Eden Faktörlerin Bölgesel Farklılaşması, *Dokuz Eylül Üniv. İ.İ.B.F. Dergisi,* Sayı:1-2, s.221 İzmir, 1983.

[34] BAYSAL, K., *Uluslararası Petrol Sorunları,* Sermet Matbaası, İstanbul, 1982.

[35] *Türkiye İstatistik Cep Yıllığı,* 1984.

[36] HASGÜR, İ., Elektrik Endüstrisinde Talep Tahminleri ve Türkiye Uygulaması, *Akademik Araştırmalar Dergisi,* Sayı:1,s.90-91. İzmir, 1987.

[37] *İstatistik Göstergeler (1923-1995),* T.C. Başbakanlık DİE Yayını.

[38] *Gayri Safi Milli Hasıla (1990-1995),* T.C. Başbakanlık DİE Yayını.

EK-1: SPSS PAKET PROGRAMI İLE OTOKORELASYONUN TESPİTİ

	y	x	pre_1	res_1
1	5,847.00	31635,00	2129,82089	3717,17911
2	6,615.80	33003,00	3342,30761	3273,49239
3	7,307.80	34469,00	4641,65375	2666,14625
4	8,289.30	36897,00	6793,64040	1495,65960
5	9,527.30	40279,00	9791,17699	-263,87699
6	10530.10	42255,00	11542,54669	-1012,44669
7	11358.70	43633,00	12763,89661	-1405,19661
8	13491.70	46275,00	15105,55589	-1613,85589
9	16078.90	50438,00	18795,30895	-2716,40895
10	17968.80	51944,00	20130,10791	-2161,30791
11	18933.80	52582,00	20695,58052	-1761,78052
12	19663.10	52324,00	20466,90978	-803,80978
13	20632.40	50870,00	19178,19949	1454,20051
14	22030.00	53317,00	21347,02623	682,97377

	y	x	pre_1	res_1
15	23586.80	54963,00	22805,91010	780,88990
16	24465.10	57279,00	24858,62883	-393,52883
17	27635.20	61350,00	28466,84038	-831,64038
18	29708.60	63989,00	30805,84070	-1097,24070
19	32209.70	68315,00	34640,06403	-2430,36403
20	36697.30	75019,00	40581,95798	-3884,65798
21	39721.50	76108,00	41547,16122	-1825,66122
22	43120.00	77347,00	42645,31256	474,68744
23	46820.00	84592,00	49066,70600	-2246,70600
24	49282.90	84887,00	49328,17061	-45,27061
25	53984.70	90323,00	54146,20991	-161,50991
26	59237.00	97677,00	60664,21231	-1427,21231
27	61400.90	91733,00	55395,92210	6004,97790
28	67393.90	99028,00	61861,63158	5532,26842

gression

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
	27,983.5107	18,260.3979	28
	60804,6786	20419,8164	28

Correlations

		Y	X
earson Correlation	Y	1,000	,991
	X	,991	1,000
g. (1-tailed)	Y	,	,000
	X	,000	,
	Y	28	28
	X	28	28

Model Summary[a,b]

odel	Variables Entered	Variables Removed	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
	X[c,d]	.	,991	,982	,982	2,472.3695	,620

a. Dependent Variable: Y

b. Method: Enter

c. Independent Variables: (Constant), X

d. All requested variables entered.

ANOVA[a]

odel		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
	Regression	8844009672,813	1	8844009672,813	1446,846	,000[b]
	Residual	158927888,794	26	6112611,107		
	Total	9002937561,607	27			

a. Dependent Variable: Y

b. Independent Variables: (Constant), X

Coefficients[a]

lodel		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
	(Constant)	-25908,934	1491,880		-17,367	,000
	X	,886	,023	,991	38,037	,000

a. Dependent Variable: Y

Casewise Diagnostics[a]

a. No outliers were found for one or more split files.

Residuals Statistics[a]

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
redicted alue	2,129.8208	61,861.6328	27,983.5107	18,098.5058	28
esidual	-3,884.6580	6,004.9780	.0000	2,426.1529	28
td. redicted alue	-1,428	1,872	,000	1,000	28
td. esidual	-1,571	2,429	,000	,981	28

a. Dependent Variable: Y

EK-2: MİNİTAB PAKET PROGRAMI İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

Data Display

Matrix M1

-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.69
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
0.00	0.00
1.00	0.00
-0.69	1.00

```
MTB >
MTB >
MTB > Read "C:\c.txt" 28 1 m3.
Entering data from file: C:\c.txt
    28 rows read.
MTB > print m3

Data Display


 Matrix M3

   5847.0
   6615.8
   7307.8
   8289.3
   9527.3
  10530.1
  11358.7
  13491.7
  16078.9
  17968.8
  18933.8
  19663.1
  20632.4
  22030.0
  23586.8
  24465.1
  27635.2
  29708.6
  32209.7
  36697.3
  39721.5
  43120.0
  46820.0
  49282.9
  53984.7
  59237.0
  61400.9
  67393.9

MTB > Read "C:\h.txt" 28 2 m2.
Entering data from file: C:\h.txt
    28 rows read.
MTB > printm2
```

Data Display

Matrix M2

```
1  31635
1  33003
1  34469
1  36897
1  40279
1  42255
1  43633
1  46275
1  50438
1  51944
1  52582
1  52324
1  50870
1  53317
1  54963
1  57279
1  61350
1  63989
1  68315
1  75019
1  76108
1  77347
1  84592
1  84887
1  90323
1  97677
1  91733
1  99028
```

```
MTB > mult m1 m2 m4
MTB > print m4
```

Data Display

Matrix M4

```
    0.3  11174.9
    0.3  11696.9
    0.3  13113.4
    0.3  14820.1
    0.3  14462.5
    0.3  14477.1
    0.3  16168.2
    0.3  18508.3
    0.3  17141.8
    0.3  16740.6
    0.3  16042.4
    0.3  14766.4
    0.3  18216.7
    0.3  18174.3
    0.3  19354.5
    0.3  21827.5
    0.3  21657.5
    0.3  24162.6
    0.3  27881.7
    0.3  24344.9
    0.3  24832.5
    0.3  31222.6
    0.3  26518.5
    0.3  31751.0
    0.3  35354.1
    0.3  24335.9
    0.3  35732.2
```

MTB > tran m4 m5
MTB > print m5

Data Display

Matrix M5

```
   0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3
11174.9  11696.9  13113.4  14820.1  14462.5  14477.1  16168.2  18508.3

   0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3
17141.8  16740.6  16042.4  14766.4  18216.7  18174.3  19354.5  21827.5

   0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3      0.3
21657.5  24162.6  27881.7  24344.9  24832.5  31222.6  26518.5  31751.0

   0.3      0.3      0.3
35354.1  24335.9  35732.2
```

MTB > mult m5 m4 m6
MTB > print m6

Data Display

Matrix M6

```
       3      174988
  174988 13083428943
```

MTB > inver m6 m7
MTB > print m7

Data Display

Matrix M7

```
 3.9329626 -0.0000526
-0.0000526  0.0000000
```

MTB > mult m1 m3 m8
MTB > print m8

Data Display

Matrix M8

```
  2581.4
  2742.9
  3246.9
  3807.7
  3956.3
  4092.9
  5654.2
  6769.6
  6874.4
  6535.3
  6598.8
  7064.9
  7793.6
  8386.1
  8190.2
 10754.3
 10640.3
 11710.8
 14472.6
 14400.4
 15712.2
 17067.2
 16977.1
 19979.5
 21987.6
 20527.4
 25027.3
```

```
MTB > mult m5 m8 m9
MTB > print m9

Data Display


 Matrix M9

     87901
 7064504437

MTB > mult m7 m9 m10
MTB > print m10

Data Display


 Matrix M10

 -25900.3
     0.9

MTB >
```