

Değişik Yüklemeler Altında
Boşluksuz ve Boşluklu Levhalarda
Sonlu Elemanlar Metodu İle
Gerilme Dağılımının İncelenmesi

Ömer Faruk GELENGEÇ

İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

1992

Değişik Yüklemler Altında •
Boşluksuz ve Boşluklu Levhalarda
Sonlu Elemanlar Metodu İle
Gerilme Dağılışı'nın İncelenmesi

Ömer Faruk GELENGEÇ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalı
Yapı Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Eşref UNLUOĞLU

Şubat - 1992

Umer Faruk GELENGEÇ'in YUKSEK LISANS TEZİ olarak hazırladığı "Değişik Yuklemeler Altında Boşluksuz ve Boşluklu Levhalarda Sonlu Elemanlar Metodu ile Gerilme Dağılışının İncelenmesi" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Uye: Yrd. Doç. Dr. Eşref UNLUOĞLU

Uye: Prof. Ruhi AYDIN

Uye: Doç. Dr. Ahmet TOPÇU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04.04.1992.
gün ve 3.07-19...sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof.Dr.Rustem KAYA

ÖZET

Bu tezde değişik yüklemeler altında boşluksuz ve dikdörtgen ve boşluklu levhalarda sonlu elemanlar metodu ile gerilme dağılışı incelenmiştir. Bu incelemeler A ve B olarak adlandırılan iki model üzerinde yapılmıştır. Ancak bu iki model farklı boşluk ve mesnet tipleri için ayrı ayrı incelenmişlerdir.

Bu çözümler sonunda elde edilen gerilmelerin belli kesitlerde grafik değerleri verilmiştir. Gerilme değerlerinin verilmediği kesitlerde ise gerekli yorumlar yapılmıştır.

Altıncı bölümde ise çözümlerde elde edilen gerilmelerin boşluk ve boşluk bulunmayan bölgelerdeki değerlendirmeleri yapılarak sonuçlar sunulmuştur.

ABSTRACT

In this thesis the stress distribution on solid plates and plates with rectangular holes under different loading is investigated. These investigations has been made on two models named A and B. At the same time these two models categorized according to their support types, and hole types, investigated differently.

At the end of these solutions, obtained stress results are represented grafically for some cross-sections. Cross-sections where the stress results are not mode given grafically the necessary informations are given.

Finally in the chapter six, stresses obtained from the solition for the regions where the holes are and for the rest of the plate are estimated, and the results are presented.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam sırasında bana her türlü kaynak, doküman ve bilgi konusunda yardımcı olan ve yakın desteğini gördüğüm danışman hocam:

Sayın Yardımcı Doç. Dr. Eşref UNLUOĞLU 'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ömer Faruk Gelengeç

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TESEKKÜR	vi
SEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER DİZİNİ	xvi
I. BÖLÜM	
1. GİRİŞ	1
II. BÖLÜM	
2. DÜZLEMDE ELASTİSİTE TEORİSİ	3
2.1. Elastisite Teorisi	3
2.1.1. Konu	3
2.1.2. Levha ve levha problemlerinde yapılan kabuller ...	3
2.2. İki Boyutlu Gerilme Hali	4
2.2.1. Gerilme ve gerilme hali	4
2.2.2. Asal gerilmeler	9
2.2.3. Gerilme Halinin Transformasyonu	11
2.2.4. Gerilme Halinin Diferansiyel Denklemleri	12
2.2.5. Gerilme Halinin Sınır Şartları	14
2.2.6. Gerilme Halinin Hiperstatikliği	15

İÇİNDEKİLER (Devam)

	<u>Sayfa</u>
2.3. Şekil Değişirme Hali	15
2.3.1. Yer değistirme	15
2.3.2. Rijit yer değistirme	17
2.3.3. Affin yer değistirmesi	18
2.3.4. Sonsuz küçük affin yer değistirmeler	19
2.3.5. Sekil değistirmenin elemanları	20
2.3.6. Sekil değistirme hali	25
2.3.6. Yer değistirmeler-Sekil değistirme bağıntıları ..	27
2.3.7. Uygunluk şartları	28
2.4. Gerilme ve Sekil Değistirme Bağıntıları	30
2.4.1. Genel Hooke Kanunları	30
2.4.2. İzotropik levhada sabitler	30
2.4.3. Çesitli sabitler	32
2.5. Genel Denklemler	33
2.5.1. Levhanın genel denklemleri	33
2.5.2. Gerilme problemine ait denklemler	35
2.5.3. Yer değistirme problemi	37
2.6. Çözüm Metodları	37
III. BÖLÜM	
3. SONLU ELEMANLAR METODU	38
3.1. Giriş	38
3.1.1. Denge denklemleri	38
3.1.2. Cismin yüzeyinden alınmış bir elemanın dengesi ..	39
3.1.3. Uygunluk şartları	39
3.1.4. Malzeme kanunları	40

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

3.2. Enerji Metodları	42
3.2.1. Dış kuvvetlerin iş ifadesi	42
3.2.2. İç kuvvetlerin iş ifadesi	42
3.2.3. Toplam potansiyel enerji	43
3.2.4. Toplam potansiyel minimum olma prensibi	44
3.2.5. Ritz metodu	44
3.2.6. Sistem idealizasyonu	46
3.2.7. Elemanın toplam potansiyeli	47
3.2.8. Elemanın lokal ekseninden sistemin global eksenine dönüşüm	49
3.2.9. Sistem düğüm noktalarında uygunluk şartları	51
3.2.10. Sistemin düğüm dengesi	52
3.2.11. Elemanların tekrara birleştirilerek sistem toplam potansiyelinin bulunması	55
3.3. Uçgen Levha Elemanın Rijitlik Matrisi	57
3.3.1. Deplasman fonksiyonu	58

IV. BÖLÜM

4. KÖNU İLE İLGİLİ YAPILAN BAZI ÇALIŞMALAR	65
--	----

V. BÖLÜM

5. BOŞLUKSUZ VE BOŞLUKLU LEVHALARDA GERİLME DAĞILIMININ ARAŞTIRILMASI	67
5.1. A Modeline Ait Çözümler	72
5.1.1. İki ucu yatay ve dikey yönde tutulmuş, açıklık boyunca $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha	72
5.1.2. İki ucu ankastre ve açıklık boyunca $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha	76

İÇİNDEKİLER (Devam)

	<u>Sayfa</u>
5.1.3. Basit mesnetli ve açıklık boyunca $p=1$ t/m. yayıllı yük etkisinde levha	80
5.1.4. Basit mesnetli ve açıklığın yarısına kadar $p=1$ t/m. yayıllı yük etkisinde levha	84
5.1.5. İki ucu ankastre ve açıklığın yarısına kadar $p=1$ t/m. yayıllı yük etkisinde levha	88
5.1.6. Kayma gerilmelerinin (τ_{xy}) incelenmesi	92
5.1.6.1 <u>5.1.1 örneğinde τ_{xy} gerilmelerinin incelenmesi</u>	92
5.1.6.2 <u>5.1.2 örneğinde τ_{xy} gerilmelerinin incelenmesi</u>	96
5.2. B Modeline Ait Çözümler	99
5.2.1. Tabanı ankastre mesnetli levhanın sol taraftan etkiyen $p=1$ t/m yanal yük etkisi altında çözümü	99
5.2.2. Tabanı ankastre levhanın üstten $p=1$ t/m düşey yük etkisi altında çözümü	109
VI. BÖLÜM	
6. SONUÇLAR	113
Kaynaklar Dizini	116

EKLER

1. Sonlu elemanlar metoduna göre levha programı

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Levhaya etki eden kuvvetler	4
2.2. Levhadaki gerilme kesiti	5
2.3. A noktasındaki gerilmeler	6
2.4. Elemanter parçadaki gerilmeler	8
2.5. A noktasındaki gerilme bileşenleri	9
2.6. Levhadaki gerilmelerin transformasyonu	11
2.7. Levha parçasındaki kuvvetler ve x yönündeki gerilmeler	12
2.8. Sınırdaki elemanter parçanın dış kuvvet ve gerilmeleri ...	14
2.9. Yer ve şekil değiştirme vektörü	16
2.10. Dönme hareketi	17
2.11. A-A' şekil değişimi	20
2.12. $\xi\eta$ açısı değişimi	24
2.13. Yer değiştirme ve şekil değiştirme	27
3.1. Sistem idealizasyonu	46
3.2. Global eksen ile lokal eksen uyumu	49
3.3. Kafes sistemdeki deplasmanlar	51
3.4. Uç nolu düğümde uygunluk şartı	51
3.5. Uçgen levha elemanda deplasman vektörleri	58
4.1. Boşluklu bir model örneği	65
4.2. Fotoelastik yöntemlerle elde edilen boşluklu levhaya ait gerilme dağılımı	66
5.1. A modeli	69
5.2. Levhaya ait boşluk durumları	70
5.3. Basit mesnetli $p=1$ t/m uniform yayılı yük etkisinde levha ..	72
5.4. İki ucu yatay ve dikey yönde tutulmuş, açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait σ_x gerilme dağılımları	73

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.5. Ankastre mesnetli, $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha	76
5.6. İki ucu ankastre açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait a-a, b-b, c-c kesitlerinde σ_x gerilme dağılımları	77
5.7. Basit mesnetli-Açıklık boyunca $p=1$ t/m yayılı yük etkisindeki levha	80
5.8. Bir ucu basit mesnetli diğer ucu kayıcı mesnetli, açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait a-a, b-b, c-c kesitlerinde σ_x gerilme dağılımları	81
5.9. Basit mesnetli açıklığın yarısına kadar uniform yayılı yük etkisindeki levha	84
5.10. İki ucu basit mesnetli açıklığın yarısına kadar uniform yüklü levha	85
5.11. İki ucu ankastre ve açıklığının yarısına kadar yayılı yük etkisinde levha	88
5.12. İki ucu ankastre ve açıklığının yarısına kadar uniform yüklü levha	89
5.13. Kayma gerilmesine ait kesitler	92
5.14. İki ucu basit mesnetli-Açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait τ_{xy} gerilmeleri	93
5.15. İki ucu ankastre mesnetli-Açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait τ_{xy} gerilmeleri	96
5.16. B modeli	100
5.17. B modeline uygulanan 1 no'lu boşluk durumu	101
5.18. B modeline uygulanan 2 no'lu boşluk durumu	102
5.19. Boşluksuz hal için 2. kat A-A, B-B, C-C kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	103
5.20. Boşluksuz hal için 2. kat D-D, E-E, F-F kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	104
5.21. 1 no'lu boşluk durumu için 2. kat A-A, B-B, C-C kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	105
5.22. 1 no'lu boşluk durumu için 2. kat D-D, E-E, F-F kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	106

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.23.2 no'lu boşluk durumu için 2. kat A-A, B-B, C-C kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	107
5.24.2 no'lu boşluk durumu için 2. kat D-D, E-E, F-F kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	108
5.25. B modeline ait düşey yükleme	109
5.26.B modelinde boşluksuz durum için-düşey yük etkisinde B-B, C-C, D-D, E-E kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	110
5.27.B modelinde 1 no'lu boşluk durumu için-düşey yük etkisinde B-B, C-C, D-D, E-E kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	111
5.28.B modelinde 2 no'lu boşluk durumu için-düşey yük etkisinde B-B, C-C, D-D, E-E kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı	112

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Acıklama
h	Levha yüksekliği
l	Levha açıklığı
d	Levha kalınlığı
$\Delta \vec{F}$	İç kuvvet vektörü
\vec{F}	Elemana ait yüzey vektörü
\vec{n}	Düzlem normal vektörü
\vec{F}_n	Yüzey normal n olan yüzeyde gerilme
σ	Normal gerilme
τ	Kayma gerilmesi
P_x, P_y	A noktasındaki kuvvet bileşenleri
φ	Eksen döndürme açısı
Δx	Elemanın x eksenine paralel boyu
Δy	Elemanın y eksenine paralel boyu
X, Y	Elemana ait hacımsal kuvvetler
Δs	Üçgen elemanter parçanın dış yüzey boyu
u_x, u_y	Noktanın yer değiştirme bileşenleri
η^k	Herhangi bir eksen takımı
$\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\eta}, \gamma_{\xi\eta}$	Herhangi bir eksene göre şekil değiştirme bileşenleri
$\varepsilon_{max}, \varepsilon_{min}$	Asal şekil değiştirmeler
H_k	Hooke sabitleri
G	Kayma modülü
E	Elastisite modülü
ν	Poisson oranı
a_{ik}	Affin yer değiştirme katsayıları
q	Hacımsal kuvvet matrisi
n	Dış yüzey normal matrisi
D	Diferansiyel operatör matrisi
σ	Gerilme matrisi

SİMGELER DİZİNİ (Devam)

Simgeler

Açıklama

$\underline{\epsilon}$	Şekil değiştirme matrisi
γ	Kayma şekil değiştirmesi
\underline{G}	Düzlem gerilme kayma modülü matrisi
\underline{E}	Düzlem gerilme elastisite matrisi
A_o	Dış kuvvetlerin işi
\underline{u}	Deplasman matrisi
\underline{p}	Dışardan uygulanan yük
A_i	İç kuvvetlerin işi
\underline{S}	Sisteme ait yük matrisi
\underline{U}	Sisteme ait deplasman matrisi
\underline{s}_i	i inci elemana ait lokal kuvvet matrisi
\underline{u}_i	i inci elemana ait lokal deplasman matrisi
\underline{S}_i	i inci elemana ait global kuvvet matrisi
\underline{U}_i	i inci elemana ait global deplasman matrisi
\underline{T}	Dönüşüm matrisi
\underline{a}	Uygunluk şartı matrisi
\underline{k}_i	Elemana ait rijitlik matrisi
\underline{K}_i	Sisteme ait rijitlik matrisi
K_o	İndirgenmiş rijitlik matrisi
$\underline{\pi}_i$	Elemana ait toplam potansiyel
$\underline{\pi}$	Sisteme ait toplam potansiyel
c_1, c_2, c_3, c_4, c_5	Üçgen levha elemanın deplasman fonksiyon katsayıları
XY	Üçgen levha elemanın deplasman fonksiyonuna ait değişkenleri matrisi
A_{123}	Üçgen levha elemanının alan ifadesi
\underline{k}_n	Normal gerilmelerden meydana gelen rijitlik matrisi
\underline{k}_s	Kesme gerilmelerinden meydana gelen rijitlik matrisi

1. GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde kullanılan birçok yapı elemanı mevcuttur. Bu elemanların hepsinde uç boyut mevcut olmasına rağmen statik hesaplarında bunların bazı boyutları ihmal edilerek çözümleri yapılmaktadır. Çubuk sistem olarak çözüm yaptığımız, örnek olarak veya kafes kiriş elemanlarında iki boyutu üçüncü boyutunun yanında ihmal edilir ve sadece elemanların boyları dikkate alınarak çözümleri elde edilir.

Bir diğer yapı elemanı da plak ve levha gibi bir boyutu diğer iki boyutu yanında ihmal edilen elemanlardır. Plak ve levha arasındaki fark yüklerin etki şeklinden meydana gelmektedir. Yüklerin eleman düzlemine dik olarak etkimesi halinde plak gibi çalışması, yüklerin eleman düzlemi içinde veya buna paralel olması halinde levha çalışması olmaktadır. Elemanların aynı olmasına rağmen yüklerin farklı etkimesinden dolayı bu elemanlarda farklı şekil değiştirmeler oluşmaktadır. Pratikte bu tür elemanların çözümleri için yardımcı tablolar geliştirilmiş olup bunlarla hesap yapılmaktadır. Ayrıca günümüzde de bilgisayar imkanlarının artması sonucunda bazı nümerik çözüm metodları geliştirilmiştir.

Bu tezde , levhalar incelenmeye çalışılmıştır. Yapılan bu çalışmada boşluksuz ve boşluklu levhalarda gerilme dağılımları incelenmiştir. Boşluklar kare ve dikdörtgen olarak seçilmiş ve buna göre belirlenen modeller üzerinde gerekli incelemeler yapılmıştır. Burada boşlukların incelenmesindeki bir neden yapı elemanı olarak karşımıza sıkça çıkan perde ve yüksek kirişlerde genelde bırakılan kapı, pencere v.b.gibi boşluklardır. Levhada bu tür boşlukların bulunduğu bölgelerin etrafında ani gerilme değişimleri oluşmaktadır. Bu durumda bu bölgelerde gerekli tedbirler alınmalıdır.

Tezdeki bu incelemede *Sonlu Elemanlar Metodu*'na göre yapılan bilgisayar programı (A. Topçu, 1987) kullanılmış ve sonuçlar buna göre değerlendirilmiştir.

2. DÜZLEMDE ELASTİSİTE TEORİSİ

2.1 Elastisite Teorisi

2.1.1 Konu

Elastisite teorisi , elastik cisimlerin dış kuvvet etkisi altında şekil değişimini ve iç kuvvet dağılımını inceler (Inan,1969).

Bu teori malzemeyi Üçüncü boyutun önem derecesine göre uzayda veya düzlemde olmak üzere her iki durumda da inceleyebilir. Bu çalışmada incelenecek cisim iki boyutlu olarak düşünülmesi için üçüncü boyut olan levha kalınlığı birim olarak kabul edilmiştir.

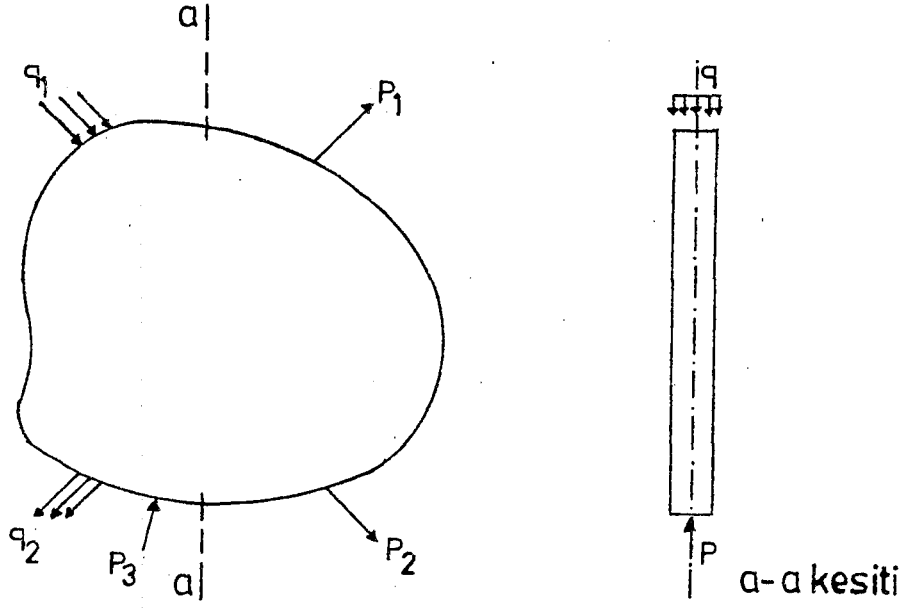
Düzlemde elastisite teorisi, konu olarak ince levha, uzun silindir ve ince plak cisimlerini içerir.

2.1.2 Levha ve levha problemlerinde yapılan kabuller

Düzlem cismin ihmal edilen kalınlığını cisim içinde her yerde ortalayan düzleme *orta düzlem* adı verilir. Sözü edilen cismin bütün dış kuvvetleri orta düzleme paralel geliyorsa böyle cisimlere levha denir.

Yapılan kabuller:

İncelenen levha, homojen, izotrop, sürekli bir ortamdır. Ayrıca da elastik bir Hooke cisimidir.



Şekil 2.1. Levhaya etki eden kuvvetler

Yer ve şekil değiştirmeler cismin boyutları yanında çok küçük olduğundan teori birinci mertebeden kurulacaktır.

Levhaya etki eden dış kuvvetler ve hacımsal kuvvetler, orta düzleme paralel olup bileşkeleri bu düzlemedir (Şekil 2.1).

Levha kalınlığı sabit ve birim ($d=1$) alınacaktır.

2.2 İki Boyutlu Gerilme Hali

2.2.1 Gerilme ve gerilme hali

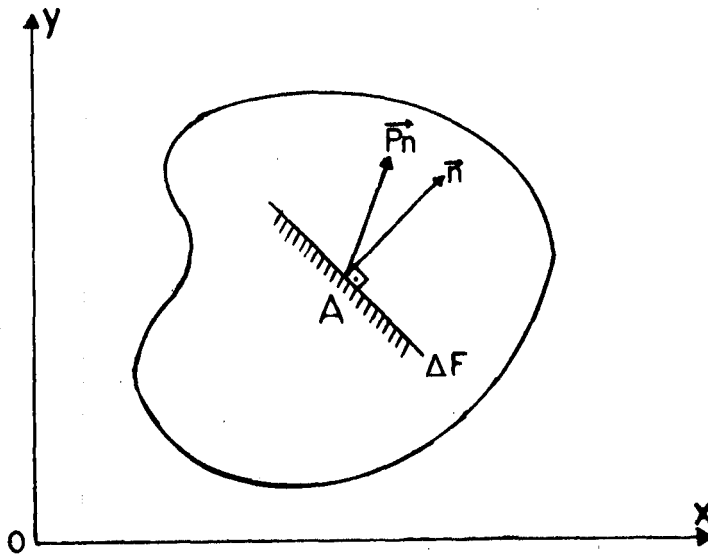
Şekil 2.2 deki A noktasından (x,y) orta düzlemine dik bir ΔF kesitine sahip olan bir elemanda cisme etki eden dış kuvvetlerden dolayı bir $\overline{\Delta P}$ iç kuvveti oluşur. Bu kuvvetin büyüklüğü birim alana düşen kuvvet olarak tanımlanır ve,

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta F} \right) \dots \dots \dots (2.1)$$

seklinde ifade edilir. Buradaki \vec{P}_n terimi gerilmeyi ifade eder.

Burada:

\vec{P}_n gerilme vektörünün düzlem normaline paralel olan bileşenine (σ) normal gerilmesi kesit düzlemine paralel olan bileşenine ise (τ) kayma gerilmesi denir.



Sekil 2.2 Levhadaki gerilme kesiti

Sekil 2.2 'deki cisme ait ΔF düzleminde A noktası sabit kalmak şartıyla \vec{n} normalinin değişmesi halinde buna karşılık gelen \vec{P}_n gerilmesi de değişecektir. O halde \vec{P}_n gerilmesi \vec{n} vektörüne bağlı lineer bir fonksiyondur (Cinemre, 1963).

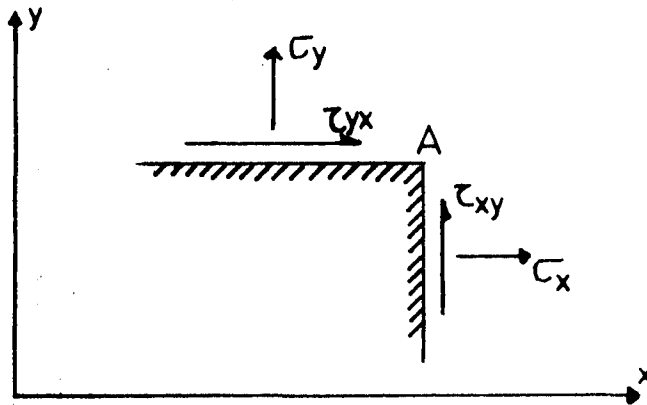
$$\vec{P} = f(\vec{n}) \dots \dots \dots (2.2)$$

Fonksiyon, bileşenleri cinsinden:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= a_{xx} \cdot n_x + a_{xy} \cdot n_y \\ P_y &= a_{yx} \cdot n_x + a_{yy} \cdot n_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki a_{ik} katsayıları bilinirse A noktasına bağlı bütün kesitlerdeki gerilmeler bilinir. Buradaki a_{ik} katsayılarına o noktanın düzlem gerilme hali denir. gerilme hali dört bileşenli olarak görülür.

A noktasından geçen ve normaleri sırasıyla x ve y düzlemlerine paralel olan gerilmeler Şekil (2.3) 'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. A noktasındaki gerilmeler

Bu gerilmelerin tablo halinde yazılması sonucu :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.4)$$

ortaya çıkar.

Gerilme halini gösteren bu dört değer için işaret kabulleri şöyledir:

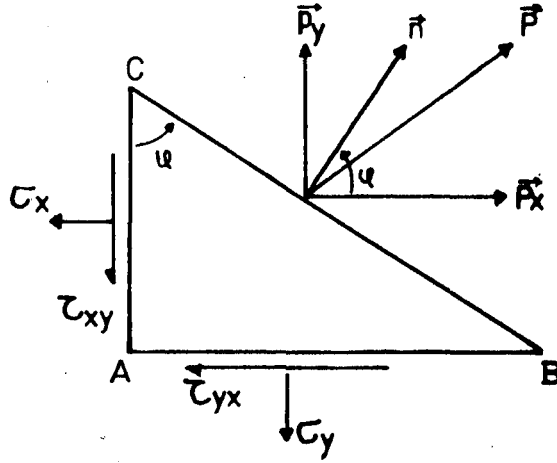
1. Normal gerilme düzlemin dış normal ile aynı yönde ise "+" değerlikli ve çekme gerilmesidir. Ters yönde ise "-" değerliklidir ve basınç gerilmesidir.
2. Kayma gerilmesi bulunduğu kesitin dış normal yönü ve kendi yönü koordinat eksenlerinin aynı veya zıt yönünde ise "+" işaretli farklı olması halinde ise "-" değerliklidir.

Normali \vec{n} olan herhangi bir kesitteki gerilmeler cisimden alınmış bir ABC prizması ile açıklanabilir (Şekil 2.4). Burada CB kesitinin A noktasına çok yakın olarak kabul edilmesi gereklidir.

ABC prizmasında denge denklemleri uygulanırsa :

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_x \cdot \cos \varphi + \tau_{yx} \cdot \sin \varphi \\ P_y &= \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_y \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

elde edilir.



Şekil 2.4. Elamanter parçadaki gerilmeler

Yukarıdaki denklemde $|\vec{n}| = 1$, $\cos \varphi = n_x$, $\sin \varphi = n_y$ olarak düşünülürse bu denklemin, (2.3) denklemi ile özdeş olduğu görülür.

ABC prizmasındaki moment dengesi esasına göre :

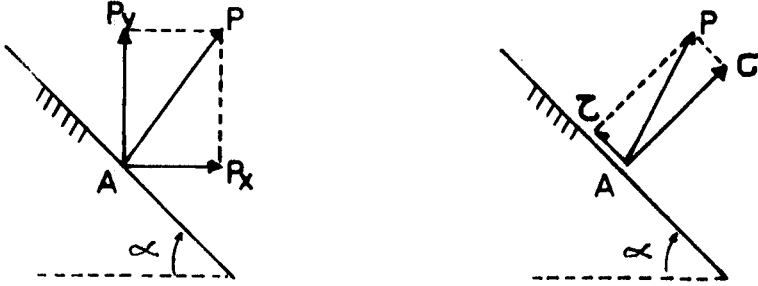
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \dots \dots \dots (2.6)$$

bulunur.

Şekil (2.5)'te gösterilen σ , τ gerilme bileşenleri de:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \vec{P} \cdot \vec{n} = P_x \cdot \cos \varphi + P_y \cdot \sin \varphi \\ &= \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ \tau &= \vec{P} \cdot \vec{s} = -P_x \cdot \sin \varphi + P_y \cdot \cos \varphi \\ &= \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots (2.7)$$

Herhangi bir kesitte gerilmeleri veren ifadeler (2.5) ve (2.7) denklemlerinden elde edilir.



Şekil 2.5. A noktasındaki gerilme bileşenleri

2.2.2. Asal gerilmeler

(2.7) denkleminde φ açısındaki değişme normal ve kayma gerilmelerini de değiştirir. Normal ve kayma gerilmelerinin ekstrem değerleri asal gerilmelerdir. Bu gerilmeleri bulmak için yukarıda sözü edilen denklemdeki ifadeler 2φ açısı ile yazılırsa;

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right] + \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\ \tau &= \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi - \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] \cdot \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots (2.8)$$

bulunur. Asal gerilmeler için;

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0$$

şartı uygulanacak olursa,

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \dots\dots\dots (2.9)$$

elde edilir. (2.9) ifadesini sağlayan φ_0 ve $\varphi_0 + \pi/2$ olmak üzere iki kesit vardır. İşte normal asal gerilmeler bu kesit üzerindeki değerlerdir. Asal kesitlerde kayma gerilmesi sıfırdır. Yukarıdaki φ_0 ve $\varphi_0 + \pi/2$ değerleri kullanılarak,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

bulunur. Yine aynı yolla kayma gerilmeleri,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0$$

$$\tan 2\varphi = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} \dots\dots\dots (2.11)$$

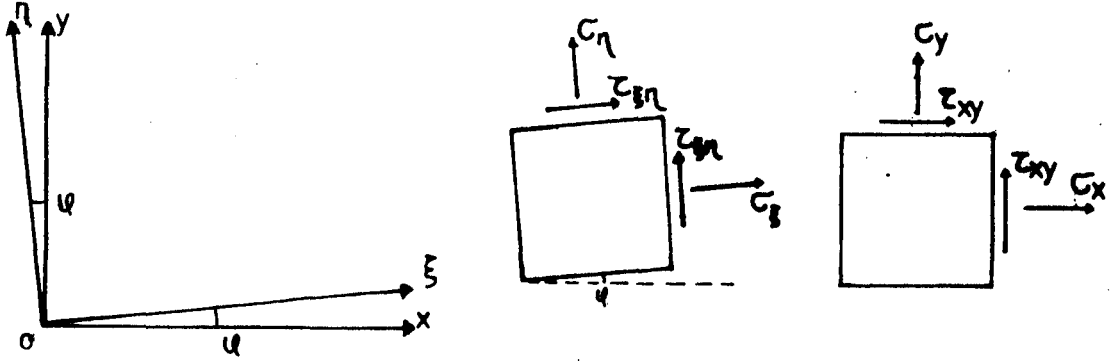
denklemini gerçekleyen φ_1 ve $\varphi_1 + \pi/2$ 'dan,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \pm \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau_{\min} &= \mp \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.12)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

şeklinde bulunur.

2.2.3. Gerilme Halinin Transformasyonu



Şekil 2.6 Levhadaki gerilmelerin transformasyonu

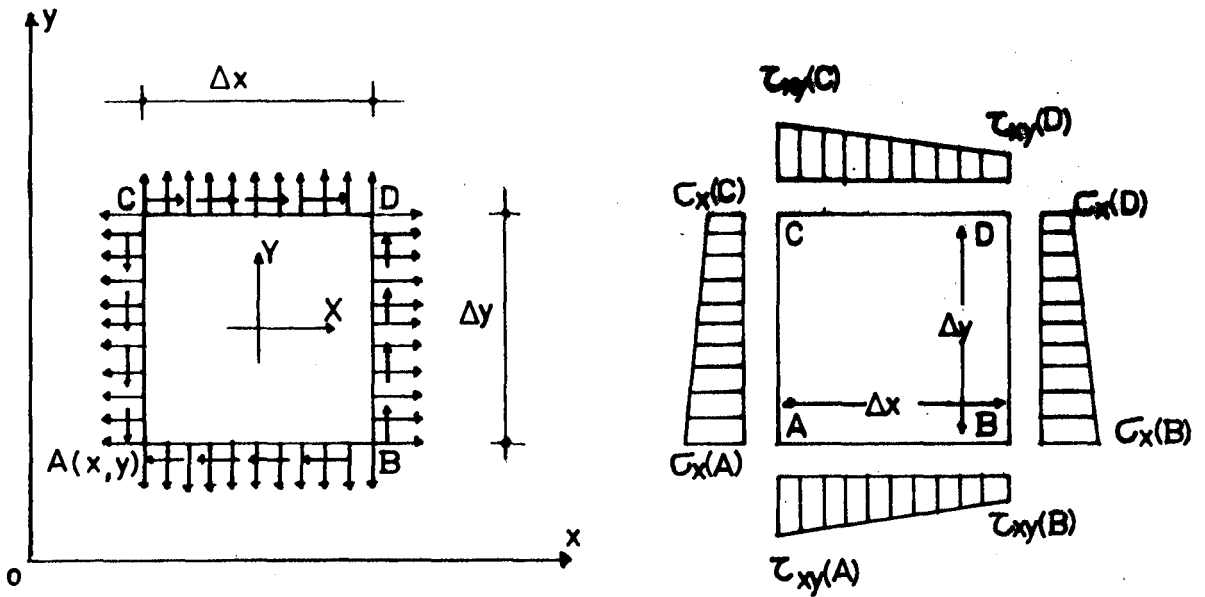
(x-y) eksen takımını φ kadar döndürülerek ($\xi-\eta$) konumuna getirildiğinde Şekil 2.6 da görülen gerilme dönüşümü;

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi} &= \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\
 \\
 \sigma_{\eta} &= \sigma_x \cdot \sin^2 \varphi + \sigma_y \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\
 \\
 \tau_{\xi\eta} &= \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\
 &= \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (2.13)$$

şeklinde olur. Bunlar gerilme halinin transformasyon denklemleridir.

2.2.4. Gerilme Halinin Diferansiyel Denklemleri

σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmeleri ait oldukları noktanın birer fonksiyonlarıdır (Şekil 2.7). Bu fonksiyonların sürekli ve türevlerinin bulunduğunu kabul edilirse, bu fonksiyonların aralarında, denge esasına bağlı olarak bir bağıntı olacaktır. Bu bağıntılara *diferansiyel denge denklemleri* denir.



Şekil 2.7. Levha parçasındaki kuvvetler ve x yönündeki gerilmeler

Şekil (2.7 b)'de levhadan alınan Δx ve Δy boyutundaki bir elemana ait x yönündeki gerilmeler gösterilmiştir. Bu kuvvetler altında levhanın denge şartından x yönündeki denge denklemini yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_x(D) + \sigma_x(B) \right] \cdot \Delta Y - \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_x(C) + \sigma_x(A) \right] \cdot \Delta Y \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left[\tau_{xy}(D) + \tau_{xy}(C) \right] \cdot \Delta X \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left[\tau_{xy}(B) + \tau_{xy}(A) \right] \cdot \Delta X + X \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \dots\dots\dots (2.14)$$

bulunur. Buradaki x değeri levha elemanındaki hacimsel iç kuvvetlerdir.

Diğer uç noktanın değerleri A noktasına göre,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(B) &= \sigma_x(A) + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial x} \cdot \Delta X \\ \sigma_x(C) &= \sigma_x(A) + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial y} \cdot \Delta Y \\ \sigma_x(D) &= \sigma_x(A) + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial x} \cdot \Delta X + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial y} \cdot \Delta Y \\ \tau_{xy}(B) &= \tau_{xy}(A) + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial x} \cdot \Delta X \\ \tau_{xy}(C) &= \tau_{xy}(A) + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial y} \cdot \Delta Y \\ \tau_{xy}(D) &= \tau_{xy}(A) + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial x} \cdot \Delta X + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial y} \cdot \Delta Y \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.15)$$

şeklindedir. Bu ifadeler (2.14)'de yerine konur ve kısaltmalar yapılırsa,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \dots\dots\dots (2.16)$$

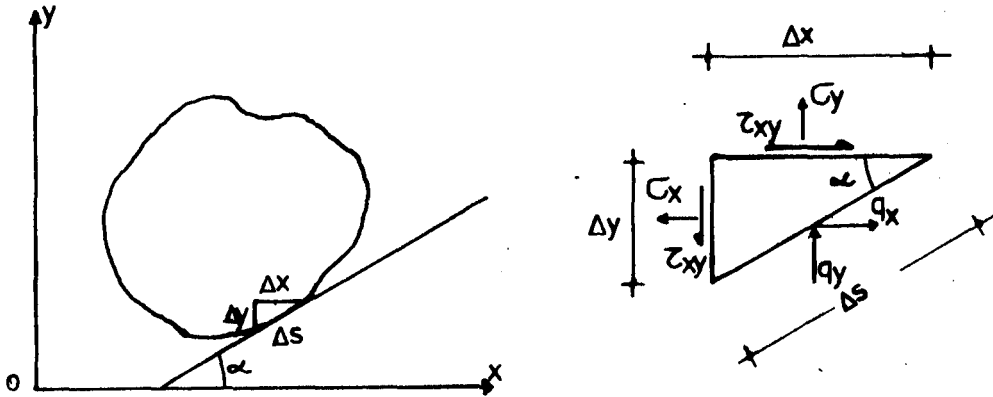
elde edilir. Y yönünde ise aynı yolla,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \dots\dots\dots (2.17)$$

bulunur. (2.16) ve (2.17) denklemleri elemanın diferansiyel denge denklemleri'dir (Timoshenko and Goodier, 1969).

2.2.5. Gerilme Halinin Sınır Şartları

Yukarıdaki 2.16 ve 2.17 denklemlerine ait σ_x , σ_y ve τ_{xy} fonksiyonları levhanın iç noktalarında geçerli olmakla birlikte bu fonksiyonun sınırdaki değerleri de sınır kuvvetleri ile denge sağlamalıdır.



Şekil 2.8. Sınırdaki elemanter parçanın dış kuvvet ve gerilmeleri

Sınır kuvvetleri q_x ve q_y ; boyutları Δx , Δy ve Δs olan - levha sınırından çıkarılmış - bir üçgen eleman için denge denklemi yazılırsa (Şekil 2.8) :

$$\left. \begin{aligned} q_x \cdot \Delta s &= \sigma_x \cdot \Delta y - \tau_{xy} \cdot \Delta x \\ q_y \cdot \Delta s &= \tau_{xy} \cdot \Delta y - \sigma_y \cdot \Delta x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.18)$$

bulunur. Burada q_x ve q_y , sınırın birim alanına düşen yük bileşenleridir. Bunlar α cinsinden yazılırsa:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \sigma_x \cdot \sin \alpha - \tau_{xy} \cdot \cos \alpha \\ q_y &= \tau_{xy} \cdot \sin \alpha - \sigma_y \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.19)$$

formunu alır.

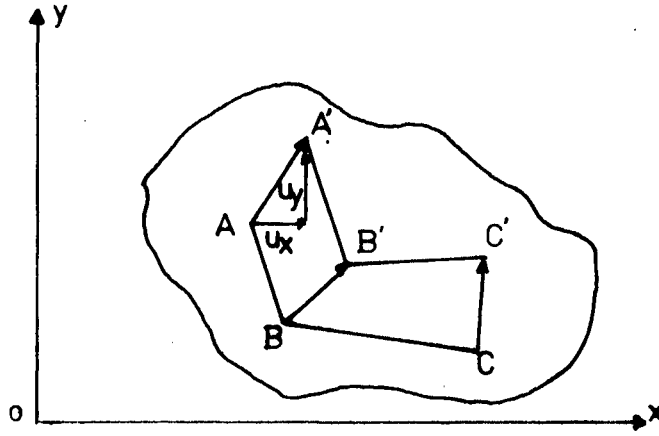
2.2.6. Gerilme Halinin Hiperstatikliği

Levhada aranan σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerini bulabilmek için (2.16) ve (2.17) olmak üzere sadece iki adet denklem vardır. Bu da gerilme halinin hiperstatik olduğunu gösterir. Çözüm için her hiperstatik problemde olduğu gibi şekil değiştirmenin incelenmesi gereklidir.

2.3. Şekil Değiştirme Hali

2.3.1. Yer değiştirme

Levhaya ait herhangi bir $A(x,y)$ noktası, dış etkiler levhaya uygulandıktan sonra yerini değiştirerek $A'(x',y')$ noktasına gelecektir. \vec{AA}' vektörüne yer değiştirme vektörü denir (Şekil 2.9).



Şekil 2.9 Yer ve şekil değiştirme vektörü

Vektörün bileşenleri olan u_x , u_y ile noktanın ilk ve son durumlarına ait koordinatlar arasında,

$$\left. \begin{aligned} u_x &= x' - x \\ u_y &= y' - y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.20)$$

bağıntıları vardır. Bu bağıntılardan ;

$$x' = x + u_x$$

$$y' = y + u_y$$

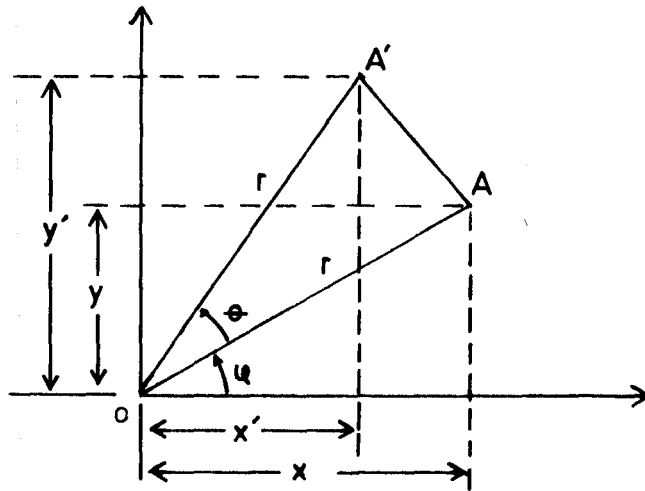
elde edilir. Bu değerler levhanın ilk durumu ile son durumu arasında transformasyonu gösterir. Genellikle yer değiştirme kavramı bir nokta için sözkonusu olduğu halde şekil değiştirmeden bahsedebilmek için en az iki noktaya ihtiyaç vardır. Şekil (2.9)'da AB doğru parçası şekil değiştirme bittikten sonra A'B' doğrusuna dönüştüğü zaman eğer bu uzunluklar arasında fark varsa şekil değiştirme vardır denir. Yine ABC ile A'B'C' arasında bir fark olursa açı değişimi yönünden şekil değiştirme vardır denebilir.

2.3.2. Rijit yer değiştirme

şekil değiştirme meydana getirmeyen yer değiştirmelere rijit denir. Bu hareketlerden biri ötelenme olup;

$$\left. \begin{array}{l} u_x = a = \text{sabit} \\ u_y = b = \text{sabit} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.21)$$

şeklinde açıklanır. Diğeri ise bir dönme hareketidir.



şekil 2.10 Dönme hareketi

Levha O merkezi etrafında θ açısı kadar dönerse koordinatlar,

$$x' = r \cdot \cos (\varphi + \theta)$$

$$y' = r \cdot \sin (\varphi + \theta)$$

ve,

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

buradan,

$$\left. \begin{aligned} u_x &= x' + x = x \cdot (\cos \theta - 1) - y \cdot \sin \theta \\ u_y &= y' - y = x \cdot \sin \theta + y \cdot (\cos \theta - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.22)$$

bulunur. Bu iki durum haricinde her yer değiştirme bir Şekil değiştirme yapar. θ açısı cok kuĉuk ise,

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -y \cdot \theta \\ u_y &= x \cdot \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

olur.

2.3.3. Affin yer değiştirmesi

u_x, u_y fonksiyonları arasında lineer olanları önemli bir yer tutar ve bunlara affin yer değiştirmesi denir.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ u_y &= a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

Şeklinde lineer ve homojen fonksiyonlar ele alındığında ve a_{ik} katsayıları sabit olarak düşünüldeğinde bu tip fonksiyonların meydana geleceği Şekil değiştirme incelenecektir. (2.24) denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + u_x = (1+a_{11}) \cdot x + a_{12} \cdot y \\ y' &= y + u_y = a_{21} \cdot x + (1+a_{22}) \cdot y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.25)$$

sekinde yazılırsa bu ifadelere affin dönüştürme denir. Yukarıdaki denklemler şu önemli özelliklere sahiptir;

doğrular doğrulara dönüşür,

paralel doğrular paralel doğrulara dönüşür.

Kısaca affin dönüştürme doğruyu ve paralelligi korur (INAN, 1969).

2.3.4. Sonsuz küçük affin yer değiştirmeler

Katsayıları sonsuz küçük olan yer değiştirme fonksiyonlarının doğurdıkları şekil değiştirmede, her şeyden önce, verilen affin yer değiştirmenin rijit bir yer değiştirmeyi kapsayıp kapsamadığının göz önüne alınması gerekir. İfadeler homojen olduğundan bu yer değiştirmeler rijit küçük dönmeleri içine almış olabilir. Bunu yokede bilmek için şu özdeşlikler yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = a_{11} \cdot x + \left[\frac{a_{12} + a_{21}}{2} \right] \cdot y - \left[\frac{a_{21} - a_{12}}{2} \right] \cdot y \\ u_y &= a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = \left[\frac{a_{12} + a_{21}}{2} \right] \cdot x + a_{22} \cdot y + \left[\frac{a_{21} - a_{12}}{2} \right] \cdot x \end{aligned} \right\} (2.26)$$

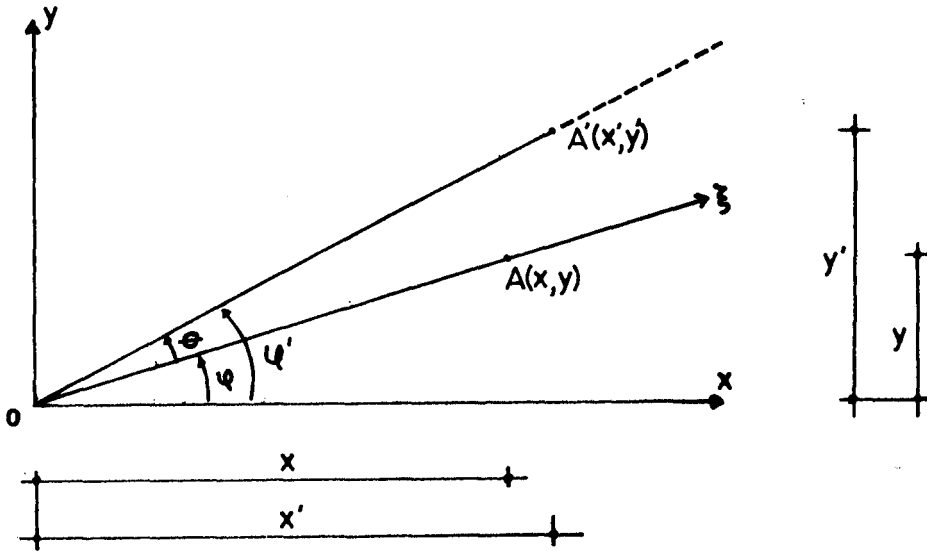
Son terimler (2.23) denklemleri ile karşılaştırılırsa bunlar sonsuz küçük dönmelere karşılık gelir ve atılabilir.

Sonuç olarak bu katsayılar matris şeklinde düzenlendiği zaman,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{21} - a_{12}}{2} \\ \frac{a_{21} - a_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad ..(2.27)$$

haline gelir. İlk ve simetrik olan terim sadece şekil değiştirmeyi, ikinci ve ters simetrik olan terim ise sonsuz küçük dönmeyi içerir. Buradan varılacak sonuç, sonsuz küçük afin yer değiştirme fonksiyonlarının katsayıları simetrik ($a_{ik} = a_{ki}$) ise bu sadece şekil değiştirmeyi gösterir; değilse içindeki dönme (2.26)'daki gibi simetrik hale getirilerek ortadan kaldırılır.

2.3.5. Şekil değiştirmenin elemanları



Şekil 2.11 :... A-A' şekil değişimi

$\overline{OA} = 1$ olsun. Şekil değiştirdikten sonra \overline{OA}' haline gelsin. \overline{OA} ile \overline{OA}' arasındaki uzunluk farkını ifade eden boyutsuz sayıya uzama oranı denir ve,

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\overline{OA}' - \overline{OA}}{\overline{OA}} \dots\dots\dots (2.28)$$

şeklinde gösterilir. $\overline{OA} = 1$ olduğundan :

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.29)$$

'dir. A' koordinatları da (2.25)'ten,

$$\left. \begin{array}{l} x' = (1+a_{11}) \cdot \cos \varphi + a_{12} \cdot \sin \varphi \\ y' = a_{21} \cdot \cos \varphi + (1+a_{22}) \cdot \sin \varphi \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.30)$$

dır. \overline{OA}' parçası için $a_{ik} = a_{ki}$ olması şartı ile,

$$\begin{aligned} \overline{OA}'^2 &= x'^2 + y'^2 = 1 + 2 \cdot (a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi) \\ &+ 4 \cdot a_{12} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + a_{11}^2 \cdot \cos^2 \varphi + a_{22}^2 \cdot \sin^2 \varphi \\ &+ 2 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} + a_{12}^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + a_{12}^2 \end{aligned}$$

olur. Yer değiştirme sonsuz küçük olduğu için ikinci kuvvet ihmal

edilirse,

$$\overline{OA'}^2 = 1 + 2 \cdot (a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi) + 4 \cdot a_{12} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

veya,

$$\overline{OA'}^2 = 1 + a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot a_{12} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

bulunur. (2.28) ifadesinden,

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\overline{OA'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} = a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot a_{12} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (2.31)$$

elde edilir. Örneğin $\varphi = 0$ ise,

$$\varepsilon_{\xi} = a_{11} \dots \dots \dots (2.32)$$

dır.

$\varphi = \pi/2$ ise,

$$\varepsilon_{\eta} = a_{22} \dots \dots \dots (2.33)$$

(2.31) ve (2.33) denklemleri a_{ik} katsayılarının mekanik anlamlarını göstermeleri bakımından önemlidir (Inan, 1969).

\overline{OA} ve $\overline{OA'}$ doğruları arasındaki açı,

$$\theta = \varphi' - \varphi \quad \text{ve} \quad \tan \theta = \frac{\tan \varphi' - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi' \cdot \tan \varphi}$$

dır. Şekil 2.11'e göre,

$$\tan \theta = \frac{xy' - x'y}{xx' + yy'}$$

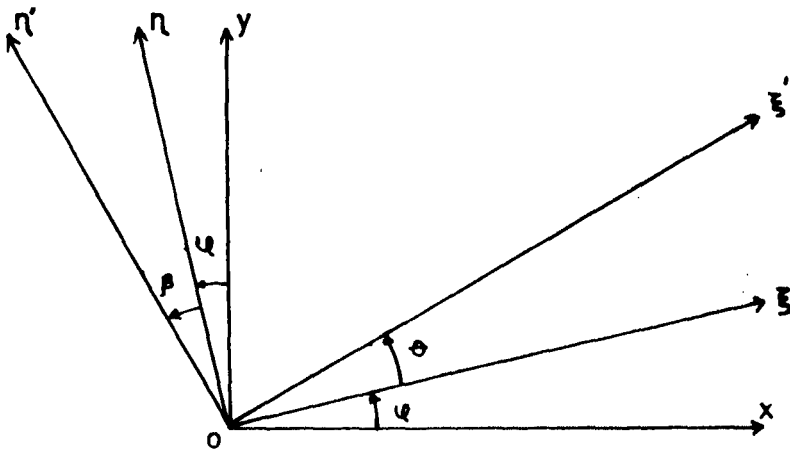
bulunur. (2.29) ve (2.30) 'dan a_{ik} lar cinsinden,

$$\tan \theta = \frac{a_{12} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (a_{11} - a_{22}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{1 + a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot a_{12} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}$$

elde edilir. a_{ik} 'ların sonsuz küçük olduğu hatırlatması ile bulunan,

$$\tan \theta \cong \theta = a_{12} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (a_{11} - a_{22}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad ..(2.34)$$

formulu yardımıyla istenilen doğrultular arasında şekil değiştirmeden doğan açı değişimi hesaplanır.



Şekil 2.12 $\xi\eta$ açı değişimi

Örneğin Şekil 2.12 'de verilen $\xi\eta$ doğrultuları arasındaki açı şekil değiştirmeden önce $\pi/2$ iken şekil değiştirdikten sonra $\gamma_{\xi\eta}$ kadar fark etmiş olsun. Açı değişimi tarifinden,

$$\gamma_{\xi\eta} = (\xi O\eta) \text{ Açısı} - (\xi' O'\eta') \text{ Açısı}$$

veya şekil 2.12'den,

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{2} - \theta + \beta \right] \dots\dots\dots (2.35)$$

dır. $\gamma_{\xi\eta}$ değerini a_{ik} lar cinsinden hesaplamak için (2.34)' den faydalanarak φ yerine bir defa $\varphi + \pi/2$ konularak φ ve β açıları bulunur. (2.35) 'den açı değişimi için,

$$\gamma_{\xi\eta} = 2 \cdot a_{12} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 2 \cdot (a_{11} - a_{12}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \dots (2.36)$$

formülü elde edilir. γ açı değişimine kısaca *kayma* denir. Her zaman 90° 'lik doğrultular arasındaki açının ne kadar değiştiğini ifade eder. $\gamma > 0$ ise doğrultular arasındaki açı $\pi/2$ 'den küçük, $\gamma < 0$ ise $\pi/2$ 'den daha büyük oluyor demektir.

(2.36) formülü $\varphi = 0$ için yazılırsa,

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot a_{12} \dots\dots\dots (2.37)$$

gibi basit bir ifade olur. (2.32), (2.33) ve (2.37) denklemleri göz önünde bulundurulmak şartı ile (2.26) 'da verilen affın yer değiştirme denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \varepsilon_x \cdot x + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot y - \omega \cdot y \\ u_y &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot x + \varepsilon_y \cdot y + \omega \cdot x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.38)$$

hâline getirilebilir. Burada ω , a_{ik} katsayılarının simetrik olmaması halinde,

$$\omega = \frac{a_{21} - a_{12}}{2} \dots\dots\dots (2.39)$$

dir.

2.3.6. Şekil değiştirme hali

ε_x , ε_y ve γ_{xy} ile gösterilen değerlere, şekil değiştirme halinin bileşenleri denir. Bu değerler bilinirse başka bir eksen takımına ait değerler de bulunabilir. (2.31) denkleminde (2.32), (2.33) ve (2.37) den de faydalanarak,

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_x \cdot \sin^2 \varphi + \varepsilon_y \cdot \cos^2 \varphi - \gamma_{xy} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \dots\dots\dots (2.41)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \gamma_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi) - 2 \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \dots\dots\dots (2.42)$$

bulunabilir. (2.40), (2.41) ve (2.42), şekil değiştirme halinin dönüşüm formleri adını alır. Bu ifadeler 2φ cinsinden yazılır, γ yerine $\gamma/2$ 'ler hesaba alınırsa dönüşüm formleri,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \left[\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right] + \left[\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right] \cdot \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi \\ \varepsilon_{\eta} &= \left[\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right] - \left[\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right] \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \cos 2\varphi - \left[\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right] \cdot \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} (2.43)$$

halini alır. Bu dönüşüm formleri, (2.13) ifadelerine benzemektedir. σ_{ξ} , σ_{η} , $\tau_{\xi\eta}$ hangi kanuna göre değişiyorsa ε_{ξ} , ε_{η} , $\frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta}$ 'de aynı kanuna göre değişiyor demektir. Bu sebeple gerilme hali için söylenen tüm özellikler şekil değiştirme hali için de geçerlidir.

Asal gerilmeler gibi asal uzama doğrultuları da $\gamma=0$ şartıyla tanımlanabilir. (2.43)'den $2\varphi_0$ için,

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \dots\dots\dots (2.44)$$

denklemini φ_0 ve $\varphi_0 + \pi/2$ gibi birbirine dik iki doğrultu tarif eder.

Asal uzama doğrultularına ait ε değerlerinden biri maksimum, diğeri minimum olur. Bu değerler (2.10) 'a benzetilerek,

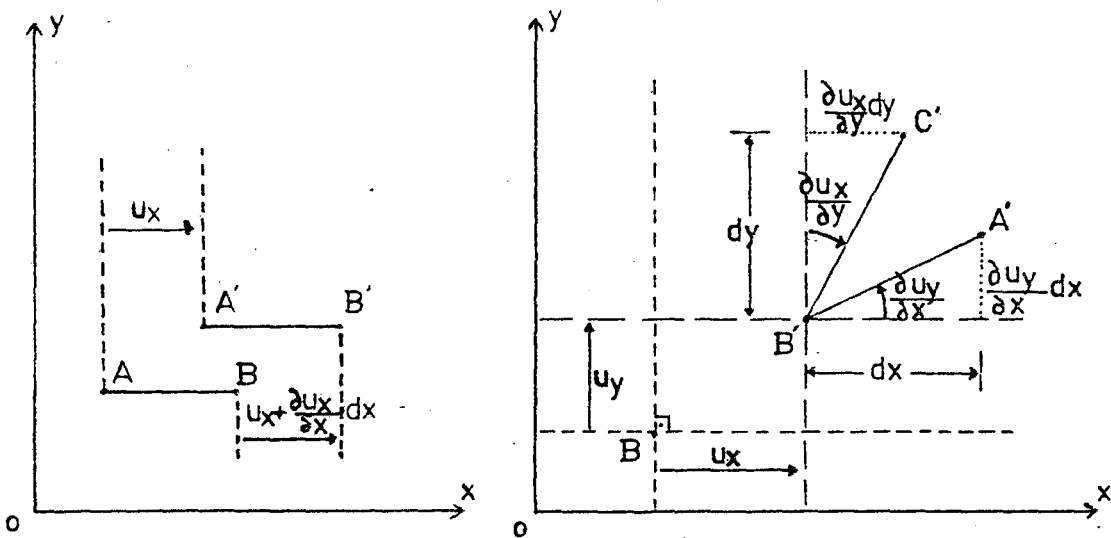
$$\frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\min}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \dots\dots\dots (2.45)$$

bulunur. γ_{\max} değeri ise (2.12) 'ye benzer şekilde,

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

elde edilir.

2.3.6. Yer değiştirme - Şekil değiştirme bağıntıları



Şekil 2.13 Yer değiştirme ve şekil değiştirme

Levhadaki A ve B noktaları, A' ve B' noktalarına gelmiş olsun. \overline{AB} doğrusundaki x yönünde birim boy uzaması,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \dots\dots\dots (2.46)$$

y yönündeki birim boy uzaması ise,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \dots\dots\dots (2.47)$$

şeklindedir (Şekil 2.13 a, Unluoğlu, E., 1989).

Açı değişiminden dolayı meydana gelen şekil değiştirme ise Şekil 2.13 b 'den;

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \dots\dots\dots (2.48)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (2.49)$$

2.3.7. Uygunluk şartları

Bir nokta etrafında şekil değiştirmeyi tarif eden ε_x , ε_y ve γ_{xy} büyüklükleri u_x ve u_y gibi iki fonksiyondan türetilmiş olduklarından aralarında bazı diferansiyel bağıntılar bulunması gerekir.

Daha önce 2.3.6 paragrafında bulunmuş olan,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

denklemlerinin ikinci mertebeden türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \implies \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \cdot \partial y^2} \dots (2.50)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \implies \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \cdot \partial x^2} \dots (2.51)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \dots (2.52)$$

bulunur. Burada (2.50) ve (2.51) denklemleri (2.52) denkleminde yerine konulacak olursa,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \cdot \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \dots (2.53)$$

uygunluk şartı elde edilmiş olur (Unluoğlu, 1989).

2.4. Gerilme ve Şekil Değişirme Bağınıtları

2.4.1. Genel Hooke Kanunları

Cismin Hooke kanununa uyması, şekil değiştirme ile bundan dolayı meydana gelen gerilme arasında lineer bir bağınıtı olması demektir. Bu bağınıtlar;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= H_{11} \cdot \sigma_x + H_{12} \cdot \sigma_y + H_{13} \cdot \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= H_{21} \cdot \sigma_x + H_{22} \cdot \sigma_y + H_{23} \cdot \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= H_{31} \cdot \sigma_x + H_{32} \cdot \sigma_y + H_{33} \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.54)$$

başlıca sınırlayıcı hiç bir şart koşulmamışsa dahi H_{ik} Hooke sabitleri arasında $H_{ik} = H_{ki}$ simetri özelliği vardır (Inan, 1969).

2.4.2. İzotropik levhada sabitler

Cismin izotropik olması halinde gerilme ve şekil değiştirme hallerine ait asal eksenler üst üste düşerler.

Bu şartlar altında (2.9) ve (2.44) 'den koaksiyalite şartı,

$$\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \dots\dots\dots (2.55)$$

yazılabilir. İfadenin sol tarafı genel Hooke kanunlarından faydalanarak,

$$\frac{H_{31} \cdot \sigma_x + H_{32} \cdot \sigma_y + H_{33} \cdot \tau_{xy}}{(H_{11} - H_{12}) \cdot \sigma_x + (H_{12} - H_{22}) \cdot \sigma_y + (H_{13} - H_{23}) \cdot \tau_{xy}} = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \dots (2.56)$$

haline getirilebilir. Buradan,

$$\lambda \cdot (H_{31} \cdot \sigma_x + H_{32} \cdot \sigma_y + H_{33} \cdot \tau_{xy}) = 2 \cdot \tau_{xy}$$

$$\lambda \cdot [(H_{11} - H_{12}) \cdot \sigma_x + (H_{12} - H_{22}) \cdot \sigma_y + (H_{13} - H_{23}) \cdot \tau_{xy}] = \sigma_x - \sigma_y$$

özdeşlikleri düşünülebilir. λ herhangi bir çarpandır. Bu iki özdeşlikten,

$$H_{31} = 0,$$

$$H_{32} = 0,$$

$$H_{33} = 0,$$

$$\lambda \cdot (H_{11} - H_{12}) = 1,$$

$$\lambda \cdot (H_{12} - H_{22}) = -1$$

sartları elde edilir. λ 'lar yok edilirse,

$$\left. \begin{aligned}
 H_{31} &= 0, \\
 H_{32} &= 0, \\
 H_{11} &= H_{22}, \\
 H_{33} &= 2 \cdot (H_{11} - H_{12})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.57)$$

gibi 4 denklem kalır ki; bu izotropik şartlarıdır. Sonuç olarak eldeki 9 adet H_{ik} katsayısı 2'ye düşürülmüş olur.

2.4.3. Çeşitli sabitler

İzotropik cismin elastik yönden şekil değiştirme özelliklerini içeren iki sabit vardır. H_{ik} ile bu teknik sabitler arasındaki bağıntılar,

$$\left. \begin{aligned}
 H_{11} = H_{22} &= \frac{1}{E} \\
 H_{12} &= -\frac{\nu}{E} \\
 H_{33} = \frac{1}{G} &= \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.58)$$

dır. Burada (E)'ye Young modülü veya elastisite modülü denir ve gerilme boyutundadır. (ν) Poisson oranıdır ve boyutsuzdur. (G) 'ye ise kayma modülü adı verilir. G kayma modülü E ve ν cinsinden yazılırsa,

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

elde edilir. H_{ik} katsayılarına göre (2.54) denkleminde,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.59)$$

bulunur. Gerilmeler şekil değiştirmeler cinsinden,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.60)$$

olarak bulunur.

2.5. Genel Denklemler

2.5.1. Levhanın genel denklemleri

Daha önceden bulunmuş olan; denge denklemleri (gerilmeler arasında);

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \dots\dots\dots (2.16)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \dots\dots\dots (2.17)$$

Uygunluk şartı (şekil değiştirme bileşenleri arasında):

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (2.53)$$

Hooke kanunları (Gerilme ve şekil değiştirmeler arasında):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.59)$$

Yer değiştirme ile şekil değiştirme arasındaki bağıntılar:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \dots\dots\dots (2.46)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \dots\dots\dots (2.47)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \dots\dots\dots (2.48)$$

olmak üzere 9 adet denklem vardır. Buna karşılık bilinmeyenler σ_x , σ_y , τ_{xy} , ε_x , ε_y , γ_{xy} , $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ gibi 8 tanedir. Yukarıdaki denklemlerden biri uygunluk şartı olduğu için 8 bilinmeyene karşı 8

denklemler olur ve çözüm vardır.

Levha problemlerinde bulunan 8 bilinmeyeni bu denklemler içinde yok ederek daha az bilinmeyen duruma getirmek mümkündür. Bunlar içerisinde en önemli olanları:

σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerini esas alan üç bilinmeyenli gerilme problemi ve u_x ile u_y bileşenlerini esas bilinmeyen olarak ele alınan iki bilinmeyenli yer değiştirme problemidir.

2.5.2. Gerilme problemine ait denklemler

Aranan fonksiyonların sınır şartları gerilme durumuna ait olduğunda problem, gerilme problemidir. Bilinmeyen olarak σ_x , σ_y ve τ_{xy} kabul edilir.

(2.53) ve (2.59) arasında şekil değiştirme bileşenleri yok edilirse,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = 2 \cdot (1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial x} \quad (2.61)$$

bulunur. Denklemin sağ tarafındaki τ_{xy} 'yi yok etmek için (2.16) ve ((2.17) denklemlerinin sıra ile x ve y'ye göre türevleri alınıp toplanırsa,

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} \right] \dots (2.62)$$

bulunur. (2.62) denklemi (2.61) 'de yerine konursa,

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = - (1+\nu) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

haline gelir. Laplace operatörü,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

olmak üzere (2.62) denklemi,

$$\Delta \cdot (\sigma_x - \sigma_y) = - (1+\nu) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (2.63)$$

şekline gelir. Gerilme probleminin esas denklemleri (2.16), (2.17) ile (2.63) denklemleridir.

Hacime ait x ve y kuvvetleri sabit veya sıfırsa (2.63) denklemi,

$$\Delta \cdot (\sigma_x - \sigma_y) = 0$$

formunu alır.

2.5.3. Yer değiştirme problemi

Bu problemde bilinmeyenler olarak u_x ve u_y yer değiştirme ifadeleri seçilir ve buna göre diğer büyüklükler yok edilerek u_x ve u_y 'ye bağlı ifadeler elde edilir. Bu çalışmada gerilme problemi ele alındığından yer değiştirme problemine ait ifadeler çıkarılmamıştır.

2.6. Çözüm Metodları

Şekli, sınır şartları ve yuku belli olan bir levha problemini çözmek için levha denkleminin sınır şartlarını sağlayan çözümünü belirlemek gerekir. Bu çözümü yaparken levha şekline uygun bir eksen takımı kullanmak kolaylık sağlar. Bununla beraber bu çözümü elde etmek her zaman kolay olmaz. Bundan dolayı analitik çözümlerin yanısıra nümerik çözümler de ortaya konmuştur.

Bu çalışmada ise nümerik çözüm metodlarından olan sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Söz konusu metotta levha sonlu sayıda elemana bölünür ve eleman kenarları üzerinde yayılı olan iç kuvvetler düğüm noktalarına etkiyen fiktif kuvvetler olarak kabul edilir. Süreklilik şartları da dikkate alınarak lineer denklem sistemi kurulur ve bunun çözümünden deformasyon ve iç kuvvetleri elde edilir.

Bu metod, bir sonraki bölümde geniş olarak anlatılmaya çalışılacaktır.

3. SONLU ELEMANLAR METODU

3.1. Giriş

Elastik cisme ait diferansiyel denklemler daha önceki bölümde çıkartılmıştı. Burada ise bu denklemlerin matris notasyonuna göre yazılımı ve sonlu elemanlar metodunda kullanılacak şekle getirilmesi sağlanacaktır. Çözümde düzlem gerilme hali kullanılacaktır.

3.1.1. Denge denklemleri

2. bölümde bulunmuş olan 2.16 ve 2.17 denklemleri matris formunda,

$$\underline{D}^T \cdot \underline{\sigma} + \underline{g} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada \underline{D}^T diferansiyel operatör matrisidir ve;

$$\underline{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\underline{\sigma}$ gerilme matrisi ve \underline{g} hacimsal kuvvet matrisi ise,

$$\underline{\sigma} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \right\} \quad \underline{g} = \left\{ g_x \quad g_y \right\}$$

olarak gösterilebilir.

3.1.2. Cismin yüzeyinden alınmış bir elemanın dengesi

Yine önceki bölümde levhaya ait bir yüzey elemanına ait iç kuvvet-dış kuvvet dengesi açıklanmıştı. Denklem (2.19) dan,

$$\underline{q} = \underline{n}^T \cdot \underline{\sigma} \dots\dots\dots (3.2)$$

yazılabilir. Burada,

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan \underline{n} ; cismin dış yüzeyinden alınmış elemanter parçanın, q yükünün uygulandığı yüzeyinin normalidir.

$$\underline{n}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_y \end{bmatrix}$$

3.1.3. Uygunluk şartları

(2.3.7) paragrafında bulunmuş olan (2.53) uygunluk şartı,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u} \dots\dots\dots (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde,

$$\underline{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \right\}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

sonucu çıkar. (3.3) denklemine süreklilik şartı denir.

3.1.4 Malzeme kanunları

Burada yine Hooke kanunlarından bulunmuş olan ve gerilme ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıyı ifade eden (2.60) ve (2.61) denklemlerinin matris notasyonunda yazılması söz konusudur. Bunlar sıra ile,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{G} \cdot \underline{\sigma} \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

(3.4) denklemi,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

olarak, (3.5) denklemi ise,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{1-\nu}{2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

gibi açıklanır.

3.2. Enerji Metodları

3.2.1. Dış kuvvetlerin iş ifadesi

Herhangi bir cismin yüzeyine uygulanan bir dış kuvvet cismin yüzeyinde bir şekil değiştirme meydana getireceği için bir iş yapmış olur. Bu iş ifadesi şu şekilde ifade edilebilir;

$$A_{\alpha} = \int_0^p \underline{p}^T \cdot \underline{u} \, d\omega + \int_v \underline{q}^T \cdot \underline{u} \, dv + \sum_{i=1}^n \underline{p}_i \cdot \underline{u}_i \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

Yukarıdaki denklemden 1. terim dışarıdan uygulanan yayılı yüke ait iş ifadesini belirtir, yüzey integralidir. 2. terim cismin kendi ağırlığından doğan ve hacme dağılmış bulunan yüke ait iş ifadesini belirtir, hacim integralidir. 3. terim ise cisme herhangi bir noktadan uygulanan tekil yüke ait iş ifadesini gösterir.

3.2.2. İç kuvvetlerin iş ifadesi

İç gerilmelerden ve deplasmandan meydana gelen iş denklemi,

$$A_i = \int_v \int_0^{\underline{\epsilon}} \underline{\sigma}^T \, d\underline{\epsilon} \, dv \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\epsilon}$ olduğu için (3.5);

$$A_i = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} dv \dots\dots\dots (3.8)$$

(3.8) denkleminde,

$$a_i = \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} dv \dots\dots\dots (3.9)$$

denirse ve işlem yapıldığı zaman a_i ifadesinin dolayısıyla da A_i ifadesinin de daima pozitif olacağı görülür.

$$A_i \geq 0$$

Ayrıca gerilmeler hacme dağılmış olduğu için A_i iç kuvvetlerin işi ifadesi hacim üzerinde integrale edilebilir.

3.2.3. Toplam potansiyel enerji

Sonlu elemanlar metodunda toplam potansiyel enerjiden yararlanırken "her elemana ait minimum potansiyel enerjinin toplamı, sisteme ait minimum potansiyel enerjiyi verir" düşüncesinden hareket edilir.

Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlere ve dış kuvvetlere ait potansiyel enerjilerin toplamına eşittir. Bu tanım şu denklemlerle ifade edilir;

$$\pi = \pi_i + \pi_a \dots\dots\dots (3.10)$$

$$\pi_i = A_i \dots\dots\dots (3.11)$$

$$\pi_a = -A_a \dots\dots\dots (3.12)$$

(3.10) denkleminde (3.11) ve (3.12) uygulanırsa;

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} \, dv - \int_{O_P} \underline{p}^T \cdot \underline{u} \, do - \int_V \underline{q}^T \cdot \underline{u} \, dv - \sum_{i=1}^n \underline{p}_i \cdot \underline{u}_i \dots (3.13)$$

elde edilir.

3.2.4. Toplam potansiyel minimum olma prensibi

Eleastik bir sistemde geometrik sınır şartlarını sağlayan bütün komşu denge konumları arasında gerçek denge konumu, toplam potansiyel enerjiyi minimum yapan denge konumudur.

$$\pi_{\text{denge}} < \pi_{\text{komşu}}$$

3.2.5. Ritz metodu

Bir cisme ait deplasman fonksiyonu:

$$\underline{u} = \underline{a} \underline{f}(x, y, z) \dots\dots\dots (3.14)$$

şeklindedir. \underline{u} deplasman matrisi cismin deplasman eğrisine ait olan denkleme bağlıdır.

Bu ifade ile verilen \underline{a} matrisi veya bu matrise ait a_i katsayıları potansiyel enerjinin minimum olma prensibine dayanan Ritz Metodu yardımıyla belirlenebilir. f fonksiyonlarının problemin sınır şartlarını tam olarak sağladığı kabul edilir. Burada \underline{a} matrisinin cisme ait denge denklemini sağlayacak şekilde tayin edilmesi gerekir.

$\underline{\epsilon}$ şekil değiştirmesi \underline{a} ya bağlı bir fonksiyondur. Bunun sebebi (3.3.) süreklilik denkleminde,

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u}$$

ifadesindeki \underline{u} 'nun a_i katsayılarına bağlı olmasındandır.

$$u \rightarrow \varphi(a)$$

0 halde (3.13) 'de,

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\epsilon}^T \cdot (\underline{a}) \cdot \underline{E} \cdot \underline{\epsilon} (\underline{a}) - \int_{O_P} \underline{p}^T \cdot \underline{u} (\underline{a}) - \int_V \underline{g}^T \cdot \underline{u} (\underline{a}) dV \dots (3.15)$$

yazılabilir. Bu durumda π fonksiyonu a 'ya bağlı bir fonksiyondur,

$$\pi = \pi (\underline{a})$$

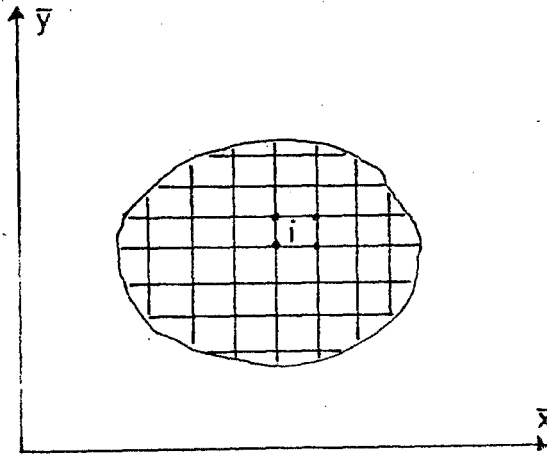
Sistemin dengede olması için potansiyel enerji minimum olmalı, yani,

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \pi}{\partial a_n} = 0 \quad \dots \quad (3.16)$$

olmalıdır. Burada n tane a_i parametresi için denklem bulunmaktadır. Bu denklemlerin çözümünden ise a parametreleri hesaplanır.

3.2.6. Sistem idealizasyonu

Sonlu elemanlar metodunda çözülmesi istenen sistem geometrisi düzgün küçük elemanlara bölünür. Her eleman birbiriyle sadece köşe ve uç noktalarıyla bağlantılıymış gibi düşünülür. Bu küçük elemanlara bölünmüş sistem *idealize edilmiş sistem* 'dir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Sistem idealizasyonu

Şekil 3.1 'deki sistemde i 'inci elemana ait dört adet düğüm noktası bulunmaktadır. Yine bu sistemde s tane eleman, t adet düğüm varsa,

Toplam potansiyel enerji,

$$\pi = \sum_{i=1}^n \pi_i \dots\dots\dots (3.17)$$

kadardır.

3.2.7. Elemanın toplam potansiyeli

i ' inci elemana ait toplam potansiyel (3.13) denkleminde,

$$\pi_i = \frac{1}{2} (\underline{u}_i)^T \int_V (\underline{\varepsilon}_i)^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{\varepsilon}_i \, dV - (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{s}_i \dots\dots\dots (3.18)$$

Yukarıdaki denklemde ikinci terimde \underline{s}_i dış yükleri sadece düğüm noktasına etkidiği için integral ifadesi kullanılmamıştır. (3.3) denklemi kullanılarak $\underline{\varepsilon}_i$ yok edilirse^{*1};

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_V (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{D}_i^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{D}_i \cdot \underline{u}_i \, dV - (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{s}_i$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

1* $\underline{\varepsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u}$

$(\underline{\varepsilon})^T = (\underline{D})^T \cdot (\underline{u})^T$ veya,

$(\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C} \cdot \dots \cdot \underline{N} \cdot \underline{M})^T = \underline{M}^T \cdot \underline{N}^T \cdot \dots \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$

$$\pi_i = \frac{1}{2} (\underline{u}_i)^T \int_v (\underline{D}_i)^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{D}_i \, dv \cdot \underline{u}_i - (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{s}_i$$

şeklini alır. Denklemdaki integrale ait ifade,

$$\underline{k}_i = \int_v (\underline{D}_i)^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{D}_i \, dv \dots\dots\dots (3.19)$$

"eleman rijitlik matrisi" dir ve yerine yazılırsa,

$$\pi_i = \frac{1}{2} \cdot (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{k}_i \cdot \underline{u}_i - (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{s}_i \dots\dots\dots (3.20)$$

olur. Toplam potansiyelin minimum olma şartından;

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial u_i} = 0$$

türevi alınır^{*2},

$$^2 \pi_i = \frac{1}{2} \cdot (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{k}_i \cdot \underline{u}_i - (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{s}_i \text{ denklemini}$$

$$\pi_i = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 - u \cdot s \text{ şekline çevrilir ve}$$

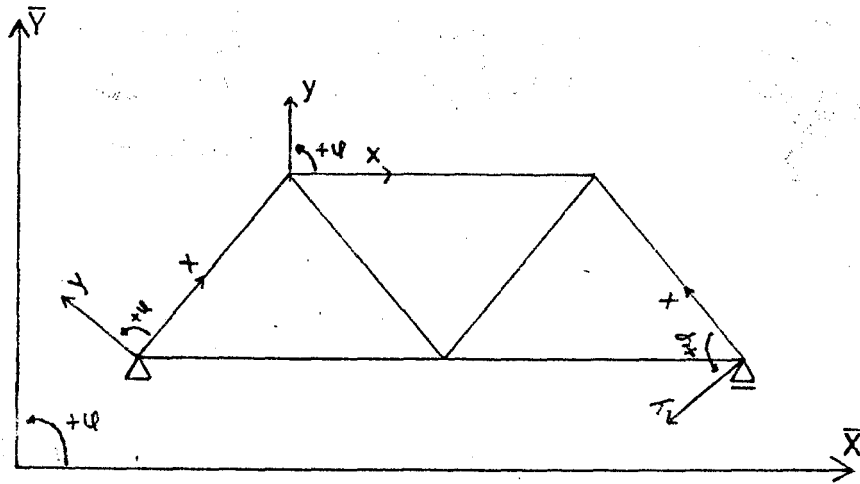
$$\frac{d\pi}{du} = k \cdot u - s \text{ olarak türevi alınır ve sıfıra eşitlenir.}$$

$$\underline{s}_i = \underline{k}_i \cdot \underline{u}_i \dots\dots\dots (3.21)$$

bulunur. \underline{s}_i , elemana \underline{u}_i deplasmanı doğrultusunda etki eden kuvvettir.

3.2.8. Elemanın lokal ekseninden sistemin global eksenine dönüşüm

Sistem içerisindeki herhangi bir elemana ait lokal eksen ile global eksen arasında uyum bulunması gerekir. Örneğin Şekil 3.2 'ye ait kafes sistemde eğer global eksen takımındaki x ekseninin pozitif yönünden y ekseninin pozitif yönüne uzanan φ açısı saatin tersi yönünde gidiyorsa, her elemana ait lokal ekseninde de saatin tersi yönde gitmelidir. Aynı durum saat yönü için de geçerlidir (Şekil 3.2b).



Şekil 3.2 Global eksen ile lokal eksen uyumu

φ açısının pozitif yönü x ekseninin pozitif yönünden y ekseninin pozitif yönüne doğru dönerken elde edilen yöndür (Aydın, 1985). Lokal eksenlerdeki y yönü x ' den itibaren global eksenle seçilen $+\varphi$ kadar döndürüldükten sonra bulunur.

Yukarıda açıklamalardan sonra lokal eksene göre olan deplasman ve kuvvetlerin global eksene göre çevrilmesi veya bunun tersinin yapılabilmesi için bir \underline{T} dönüşüm matrisi bulunabilir. Bu \underline{T} dönüşüm matrisi kafes sistem, çerçeve veya levha gibi her sistem için farklıdır.

\underline{u}_i , \underline{s}_i elemanın lokal \underline{U}_i , \underline{S}_i elemanın global deplasman ve kuvvet vektörü olmak üzere;

$$\underline{s}_i = \underline{T}_i \cdot \underline{S}_i \dots\dots\dots (3.22)$$

$$\underline{u}_i = \underline{T}_i \cdot \underline{U}_i \dots\dots\dots (3.23)$$

yazılabilir. Dönüşüm matrisine ait diğer bir özellik,

$$\underline{T}^T = \underline{T}^{-1} \dots\dots\dots (3.24)$$

olmasıdır. O halde,

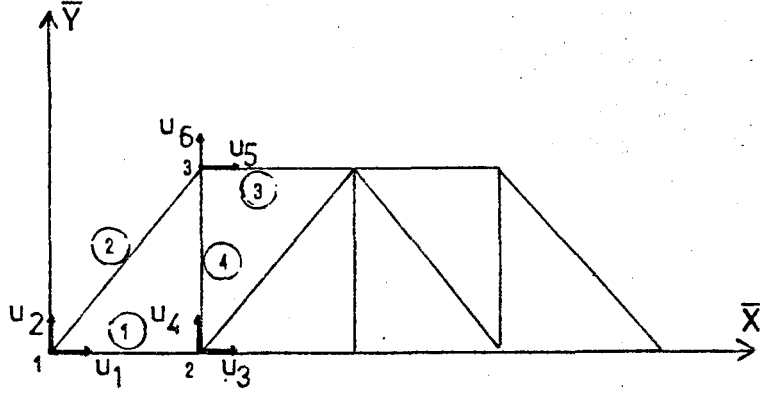
$$\underline{S}_i = (\underline{T}_i)^T \cdot \underline{s}_i \dots\dots\dots (3.25)$$

$$\underline{U}_i = (\underline{T}_i)^T \cdot \underline{u}_i \dots\dots\dots (3.26)$$

yazılabilir.

3.2.9. Sistem düğüm noktalarında uygunluk şartları

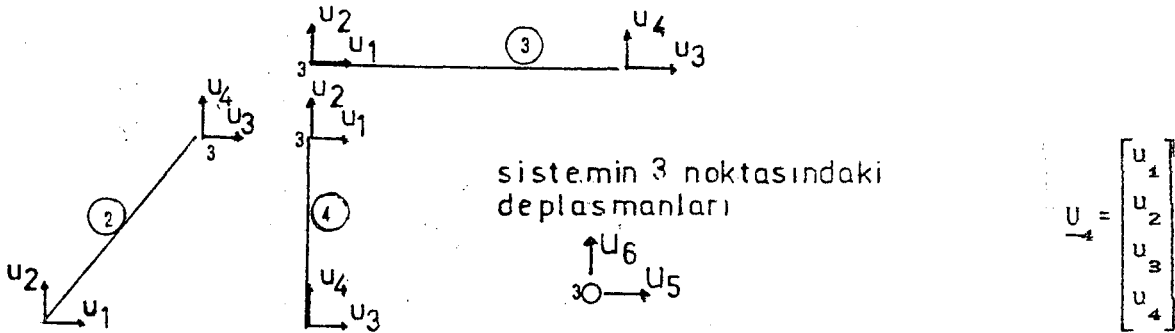
Şekil 3.3 'teki gibi herhangi bir kafes sistemden çıkarılmış 2, 3, 4 nolu elemanlara ait bağlı oldukları düğüm noktaları ve deplasmanlar da belirtilirse,



Şekil 3.3. Kafes sistemdeki deplasmanlar

1. 2 no'lu elemanın u_3 'unun sisteminin U_5 'ine
2. 2 no'lu elemanın u_4 'unun sisteminin U_6 'ine

karşılık geldiği görülür (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. (3) no'lu düğümde uygunluk şartı

Bir düğüm noktasında eğer bir elemana ait lokal eksen takımındaki deplasmanlar, aynı noktadaki sisteme ait deplasmanlara eşit ise o noktada, deplasmanlar arasında "uygunluk şartı vardır" denir. Yukarıda 3 no'lu noktadaki ilgi uygunluk şartını gerçekler. Uygunluk şartı bir \underline{a} matrisine ait terim "1", diğer noktalarda "0" 'dır. Yukarıdaki örneğe göre; \underline{U} sistemin deplasman, \underline{P} sistemin yük vektörü olduğuna göre;

$$\underline{u} = \underline{a} \cdot \underline{U} \dots\dots\dots (3.27)$$

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6											
el. no=1	U_1	U_2	U_3	U_4	U_1	U_2	=	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	\dots	\dots	\dots
el. no=2	U_1	U_2	U_3	U_4	U_1	U_2		U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	\dots	\dots	\dots
el. no=3	U_1	U_2	U_3	U_4	U_1	U_2		U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	\dots	\dots	\dots

şeklindedir. \underline{a} matrisi "0" ya da "1" rakamlarından meydana gelir.

3.2.10. Sistemin düğüm dengesi

Sistemin yükünü değiştirmeden deplasmanlara ∂U ilave edilirse, sistem,

$$\partial \underline{U}^T \cdot \underline{P} \dots\dots\dots (3.28)$$

kadar iş yapar. İç kuvvetlerin işi ise,

$$\partial \underline{u}^T \cdot \underline{s} \dots\dots\dots (3.29)$$

kadardır. Burada \underline{u} , bütün elemanların deplasman vektörü \underline{s} ise kuvvet vektörüdür. Bunlar birbirine eşitlendiği zaman,

$$\partial \underline{U}^T \cdot \underline{P} = \partial \underline{u}^T \cdot \underline{s}$$

elde edilir. (3.27) denklemini yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\partial \underline{U}^T \cdot \underline{P} = \partial \underline{U}^T \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{s}$$

bulunur. $\partial \underline{U}^T$ 'ler kısaldığında,

$$\underline{P} = \underline{a}^T \cdot \underline{s} \dots\dots\dots (3.30)$$

elde edilir. (3.22) ve (3.25) denklemine göre,

$$\underline{S}_i = (\underline{T}_i)^T \cdot \underline{s}_i \quad \text{veya} \quad \underline{s}_i = \underline{T}_i \cdot \underline{S}_i$$

ve (3.23) ve (3.26) denklemine göre ise,

$$\underline{U}_i = (\underline{T}_i)^T \cdot \underline{u}_i \quad \text{veya} \quad \underline{u}_i = \underline{T}_i \cdot \underline{U}_i$$

şeklindeki yük deplasman matrisleri (3.21)

$$\underline{s}_i = \underline{k}_i \cdot \underline{u}_i$$

elemanın lokal denge denklemine uygulanırsa,

$$\underline{T}_i \cdot \underline{S}_i = \underline{k}_i \cdot \underline{u}_i$$

denkleminde uygulanırsa,

$$\underline{T}_i \cdot \underline{S}_i = \underline{k}_i \cdot \underline{T}_i \cdot \underline{U}_i$$

durumuna gelir. Her iki taraf soldan $\underline{T}_i^{-1} = \underline{T}_i^T$ ile çarpıldığında,

$$\underline{S}_i = (\underline{T}_i)^T \cdot \underline{k}_i \cdot (\underline{T}_i) \cdot \underline{U}_i$$

bulunur ki bu denklemden

$$\underline{K}_i = (\underline{T}_i)^T \cdot \underline{k}_i \cdot \underline{T}_i \dots \dots \dots (3.31)$$

ifadesi "elemanın global rijitlik matrisini" verir.

Bu durumda sisteme ait,

$$\underline{S}_i = \underline{K}_i \cdot \underline{U}_i \dots\dots\dots (3.32)$$

yazılabilir. Sisteme ait \underline{K} rijitlik matrisi elemana ait \underline{K}_i matrislerinden meydana gelen diagonal ve simetrik bir matristir.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_1 & & \\ & T_2 & \\ & & T_3 \end{bmatrix}$$

3.2.11. Elemanların tekrar birleştirilerek sistem toplam potansiyelinin bulunması

Elemana ait toplam potansiyel ifadesi,

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U})^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{U} - (\underline{U})^T \cdot \underline{S} \dots\dots\dots (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. (3.18) denklemine göre,

$$\pi = \sum_{i=1}^s \pi_i$$

idi. Bu denklemin (3.33) denklemine eşitlenmesi halinde,

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \left\{ (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{k}_i \cdot \underline{u}_i - (\underline{u}_i)^T \cdot \underline{s}_i \right\}$$

buradan,

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot \underline{U}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{U} - \underline{U}^T \cdot \underline{s} \dots \dots \dots (3.34)$$

yazılabilir. (3.27) ve (3.30) denklemleri uygulanırsa,

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot \underline{U}^T \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{a} \cdot \underline{U} - \underline{U}^T \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{s}$$

ve,

$$\underline{K}_0 = \underline{a}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{a} \dots \dots \dots (3.35)$$

ile gösterilirse;

$$\pi = \frac{1}{2} \cdot \underline{U}^T \cdot \underline{K}_0 \cdot \underline{U} - \underline{U}^T \cdot \underline{P} \dots\dots\dots (3.36)$$

bulunur. Buradaki \underline{K}_0 , indirgenmemiş (sınır şartları işlenmemiş) rijitlik matrisidir (Przemieniecki, 1968). Bu nedenle tekildir.

Sisteme ait toplam potansiyelin minimum olması prensibine göre,

$$\frac{d\pi}{dU} = 0$$

sonuç olarak,

$$\underline{K}_0 \cdot \underline{U} = \underline{P} \dots\dots\dots (3.37)$$

ile sistemin denge denklemi kurulmuş olur.

3.3. Üçgen Levha Elemanın Rijitlik Matrisi

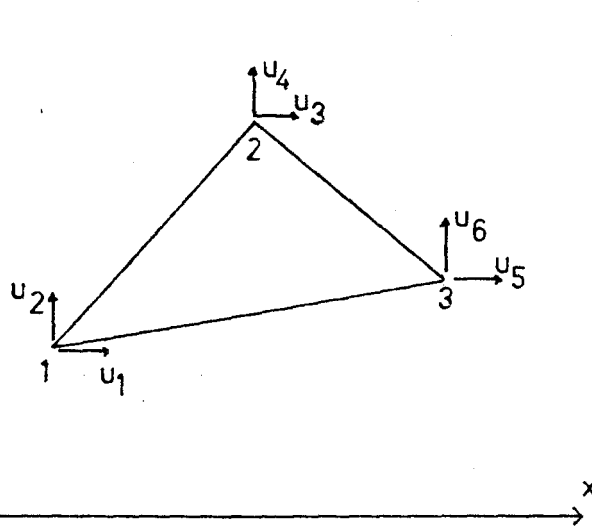
Bu tarzdaki örneklerin kullanılan bilgisayar programında levhaya ait idealize edilmiş sistemin üçgen elemanlara bölünmüş şekilde olması dolayısıyla bu bölümde üçgen levha elemana ait rijitlik matrisinin elde edilebilmesi kısaca anlatılacaktır.

3.3.1. Deplasman fonksiyonu

Üçgen levha elemanlarda deplasman fonksiyonları;

$$\left. \begin{aligned} u_x &= c_1 x + c_2 y + c_3 \\ u_y &= c_4 x + c_5 y + c_6 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.38)$$

şeklindedir (Şekil 3.5), (Prezemieniecki, 1968).



Şekil 3.5 Üçgen levha elemanlarda deplasman vektörleri

Uygunluk şartları;

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ noktasında} & \quad u_x = u_1 \quad u_y = u_2 \\ 2 \text{ noktasında} & \quad u_x = u_3 \quad u_y = u_4 \\ 3 \text{ noktasında} & \quad u_x = u_5 \quad u_y = u_6 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.39)$$

Uygunluk (sınır) şartları (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = c_{11}x + c_{21}y + c_3 \\ u_2 = c_{41}x + c_{51}y + c_6 \\ u_3 = c_{12}x + c_{22}y + c_3 \\ u_4 = c_{42}x + c_{52}y + c_6 \\ u_5 = c_{13}x + c_{23}y + c_3 \\ u_6 = c_{63}x + c_{53}y + c_6 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3.40)$$

(3.40) denkleminde u_1, u_3, u_5 'e ait denklemler matris haline getirildiği zaman,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{xy} \cdot \underline{c} \dots\dots\dots (3.41)$$

olduğu görülür. Her iki taraf \underline{xy}^{-1} ile soldan çarpılırsa,

$$\underline{c} = \underline{xy}^{-1} \cdot \underline{u} \dots\dots\dots (3.42)$$

elde edilir. \underline{xy} matrisinin tersi,

$$\underline{xy}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{xy}} \text{Adj } \underline{xy} \dots\dots\dots (3.43)$$

şeklinde hesaplanabilir. \underline{xy} matrisinin determinanı hesaplandığında

Üçgen elemanın alanının iki katına eşit olduğu görülür^{*3}.

$$\det \underline{xy} = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)$$

ve,

$$\det \underline{xy} = 2 \cdot A_{123} \dots \dots \dots (3.44)$$

(3.42) denklem sisteminin çözümünden,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & -(y_1 - y_3) & (y_1 - y_2) \\ -(x_2 - x_3) & (x_1 - x_3) & -(x_1 - x_2) \\ (x_2 y_3 - y_2 x_3) & -(x_1 y_3 - y_1 x_3) & (x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matriste terimler,

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

şeklinde kısaltılabilir. Bu kısaltmadan sonra c_1 , c_2 ve c_3 sabitleri (3.38) denklemine yerine yazıldığında,

$$u_x = \frac{1}{2A_{123}} \left\{ \left[y_{32} (x - x_2) - x_{32} (y - y_2) \right] \cdot u_1 \right.$$

^{3*} Koordinat eksenine göre alan hesabı

$$\begin{aligned}
& + \left[-y_{31}(x-x_3) + x_{31}(y-y_3) \right] \cdot u_3 \\
& + \left[y_{21}(x-x_1) - x_{21}(y-y_1) \right] \cdot u_5 \} \dots\dots\dots (3.45)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlem c_4, c_5, c_6 sabitleri için yapıldığı zaman

$$\begin{aligned}
u_y = \frac{1}{2A_{123}} \left\{ \left[y_{32}(x-x_2) - x_{32}(y-y_2) \right] \cdot u_2 \right. \\
+ \left[-y_{31}(x-x_3) + x_{31}(y-y_3) \right] \cdot u_4 \\
\left. + \left[y_{21}(x-x_1) - x_{21}(y-y_1) \right] \cdot u_6 \right\} \dots\dots\dots (3.46)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.45) ve (3.46) denklemlerinin sıra ile x 'e ve y 'e göre türevleri alındığı zaman,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & -y_{31} & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{32} & 0 & x_{31} & 0 & -x_{21} \\ -x_{32} & y_{32} & x_{31} & -y_{31} & -x_{21} & y_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

yukarıdaki matrislerin meydana getirdiği denklem,

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{D}_i \underline{u}_i$$

(3.3) süreklilik denklemdir. 0 halde,

$$\underline{D}_i = \frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & -y_{31} & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{32} & 0 & x_{31} & 0 & -x_{21} \\ -x_{32} & y_{32} & x_{31} & -y_{31} & -x_{21} & y_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \dots (3.47)$$

şeklinindedir. 3.1.4. bölümünde açıklanan \underline{E}_i matrisi ise,

$$\underline{E}_i = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots (3.48)$$

olmak üzere yukarıdaki \underline{D}_i ve \underline{E}_i matrisleri daha önceden bulunan (3.19) eleman rijitlik matrisi ifadesi olan,

$$\underline{k}_i = \int_V (\underline{D}_i)^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{D}_i \, dV \dots (3.49)$$

ifadesinde yerine yazılabilir. k_i rijitlik matrisi üç eksene göre entegre edilebilir;

$$\underline{k}_i = \int_x \int_y \int_z (\underline{D}_i)^T \cdot \underline{E}_i \cdot \underline{D}_i \, dz \, dy \, dx \dots\dots\dots (3.50)$$

Matris çarpımları yapıldığında elemana ait rijitlik matrisini verir. k_i eleman rijitlik matrisini,

$$\underline{k}_i = \underline{k}_n + \underline{k}_s \dots\dots\dots (3.51)$$

şeklinde iki grup altında toplamak mümkündür. k_n , normal ait rijitlik matrisi k_s ise kayma gerilmelerine ait rijitlik matrisidir (Przemieniecki, 1968).

$$\frac{k_n}{4A_{123}} = \frac{Ed}{(1-\nu^2)}$$

y_{32}^2	$-\nu y_{32} x_{32}$	x_{32}^2	$\nu x_{32} y_{31}$	y_{31}^2	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2	Simetrik
$-\nu y_{32} x_{31}$	$\nu x_{32} x_{31}$	$-\nu y_{31} x_{31}$	x_{31}^2	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2		
$\nu y_{32} x_{31}$	$-\nu x_{32} x_{31}$	$-\nu y_{31} x_{31}$	x_{31}^2	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2		
$-\nu y_{32} y_{21}$	$-\nu x_{32} y_{21}$	$-\nu y_{31} y_{21}$	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2	x_{21}^2		
$-\nu y_{32} x_{21}$	$x_{32} x_{21}$	$\nu x_{31} y_{21}$	$-\nu x_{31} x_{21}$	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2	x_{21}^2	x_{21}^2	x_{21}^2	

..... (3.54)

$$\frac{k_s}{4A_{123}} = \frac{Ed}{(1+\nu)}$$

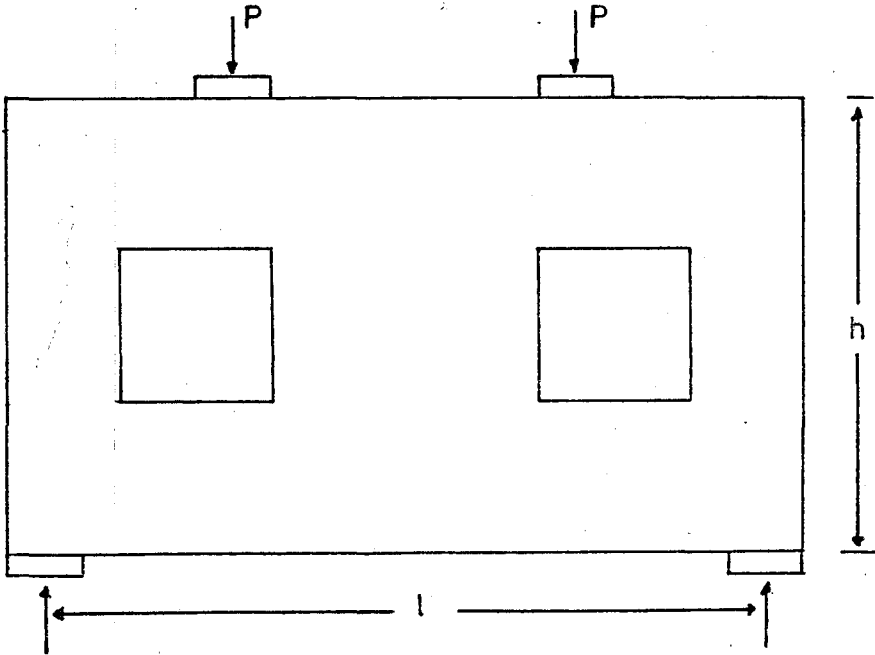
x_{32}^2	$-\nu y_{32} x_{32}$	y_{32}^2	$\nu x_{32} y_{31}$	x_{31}^2	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2	Simetrik
$-\nu x_{32} x_{31}$	$y_{32} x_{31}$	x_{31}^2	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2	x_{21}^2		
$x_{32} y_{31}$	$-\nu y_{32} y_{31}$	$-\nu x_{31} y_{31}$	y_{31}^2	$\nu x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2		
$x_{32} x_{31}$	$-\nu y_{32} x_{21}$	$-\nu x_{31} x_{21}$	$y_{31} x_{21}$	x_{21}^2	$-\nu y_{21} x_{21}$	x_{21}^2	x_{21}^2		
$-\nu x_{32} y_{21}$	$y_{32} y_{21}$	$x_{31} y_{21}$	$-\nu y_{31} y_{21}$	$-\nu x_{21} y_{21}$	y_{21}^2	y_{21}^2	y_{21}^2	y_{21}^2	

..... (3.55)

4. KONU İLE İLGİLİ YAPILAN BAZI ÇALIŞMALAR

Boşluklu ve boşluksuz levhalarla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda boşluklu ve boşluksuz levhalar değişik levha ve boşluk boyutlarına bağlı olarak incelenmiş ve gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Diktörtgen boşluklu levhalarda gerilme dağılımı Haque et. al. (1986) tarafından da incelenmiştir. Haque bu çalışmasında fotoelastik modeller üzerinde araştırmalar yapmış ve gerilme dağılımını elde ederek kritik bölgeleri tespit etmiştir. Ele alınan modellerde levha açıklığının (l), levha yüksekliğine (h) oranı 1.0, 1.46 ve 2.0 olarak alınmış ve bu her model için de bir boşluksuz ve uç de yeri ve boyutları açıklık boyunca değişen boşluklu örnekler çözülmüştür. Bunlara ait model tipi şekil 4.1 'de ve bu modelin yüklenmesi sonucu fotoelastik yöntemle, elde edilen gerilme dağılımına ait örnek bir fotoğrafta, şekil 4.2 'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Boşluklu bir model örneği



Sekil 4.2. Fotoelastik yöntemlerle elde edilen boşluklu levhaya ait gerilme dağılımı

Burada elde edilen sonuçlardan birtanesi, tarafsız eksenin yerinin tam ortada ($h/2$) olmayıp $l/h=2.0$ için $0.45 h$, $l/h=1.46$ için $0.33 h$ ve $l/h=1$ için $0.24 h$ olarak elde edilmesidir. Boşluklu modellerde ise tarafsız eksen bütün l/h oranları için daha aşağıdadır. Boşluklu modellerde meydana gelen gerilmeler, boşluksuz olan modellere göre % 34 'e varan gerilme artışlarına neden olmaktadır. Ayrıca boşluğun köselerinde de gerilme yığılmaları oluşmaktadır.

Bu konuda yapılan diğer çalışmalarda Kong and Sharp (1977), bu gerilme dağılısını kafes giriş analojisine benzetmeye çalışmış, ayrıca yine Kong et. al. (1978) yaptıkları bir başka çalışmada da deformasyon ve göçme mekanizması ile boşluklu levhadaki gerilmelere çözüm aramaya çalışmışlardır.

Christopher et. al. (1987) ve Yettram and Brown (1984) dikdörtgen boşluklu levhaların stabilitesini incelemişler, değişik yük ve sınır şartları için çözümler elde etmişlerdir.

5. BOŞLUKSUZ VE BOŞLUKLU LEVHALARDA GERİLME DAĞILIMININ ARAŞTIRILMASI

Bu çalışmada değişik mesnet ve yükleme durumları için boşluksuz ve değişik tiplerde boşluklu modeller ele alınmış ve bu modellere ait gerilme dağılımları incelenmiştir. Gerilme dağılımları *Sonlu Elemanlar Metodu* ile hazırlanan bir bilgisayar programı (Topçu, 1987) kullanılarak elde edilmiştir. Bu programın listesi ve kullanımıyla ilgili bilgiler Ek' te sunulmuştur.

İncelenen modeller genellikle $l=6,00$ m. açıklığında ve $h=3,00$ m. yüksekliğindedir. Levhaların kalınlıkları ise $0,20$ m. olarak alınmıştır. Modellerimiz yatayda ve düşeyde her $0,50$ m.'de bir bölünerek elde edilen üçgen elemanlardan oluşmaktadır. Örnek olarak A modelinde 91 düğüm noktası ve 144 eleman alınmıştır (Şekil 5.1). Her değişik model için elde edilen gerilmelere ait grafikler çizilmiştir. Bu grafikler, modeller arasında karşılaştırma yapılabilecek kesitlerde çizilmiş ve genellikle gerilme değişimlerinin daha çok olduğu σ_x değerlerine göre belirlenmiştir. Ayrıca A modelinin değişik iki örneğinde de τ_{xy} kayma gerilmelerinin dağılımları incelenmiş ve bunlara ait gerilme diyagramları çizilmiştir.

İncelenen levha modeli *Poisson Oranı* $\nu=0,30$ ve *Elastisite Modülü* $E=2.10^6$ t/m² olan $0,20$ m. kalınlıklı bir betonarme kesit olarak düşünülmüştür.

Gerilme dağılımları incelenen mesnet ve yük durumları aşağıdaki şekilde özetlenmiştir.

-iki ucu yatay ve düşey yönde tutulmuş, açıklık boyunca $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha,

-iki ucu ankastre ve açıklık boyunca $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha,

-Basit mesnetli (sol mesneti yatay ve dişey yönde tutulmuş, sağ mesneti sadece dişey yönde tutulmuş) ve açıklık boyunca $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha,

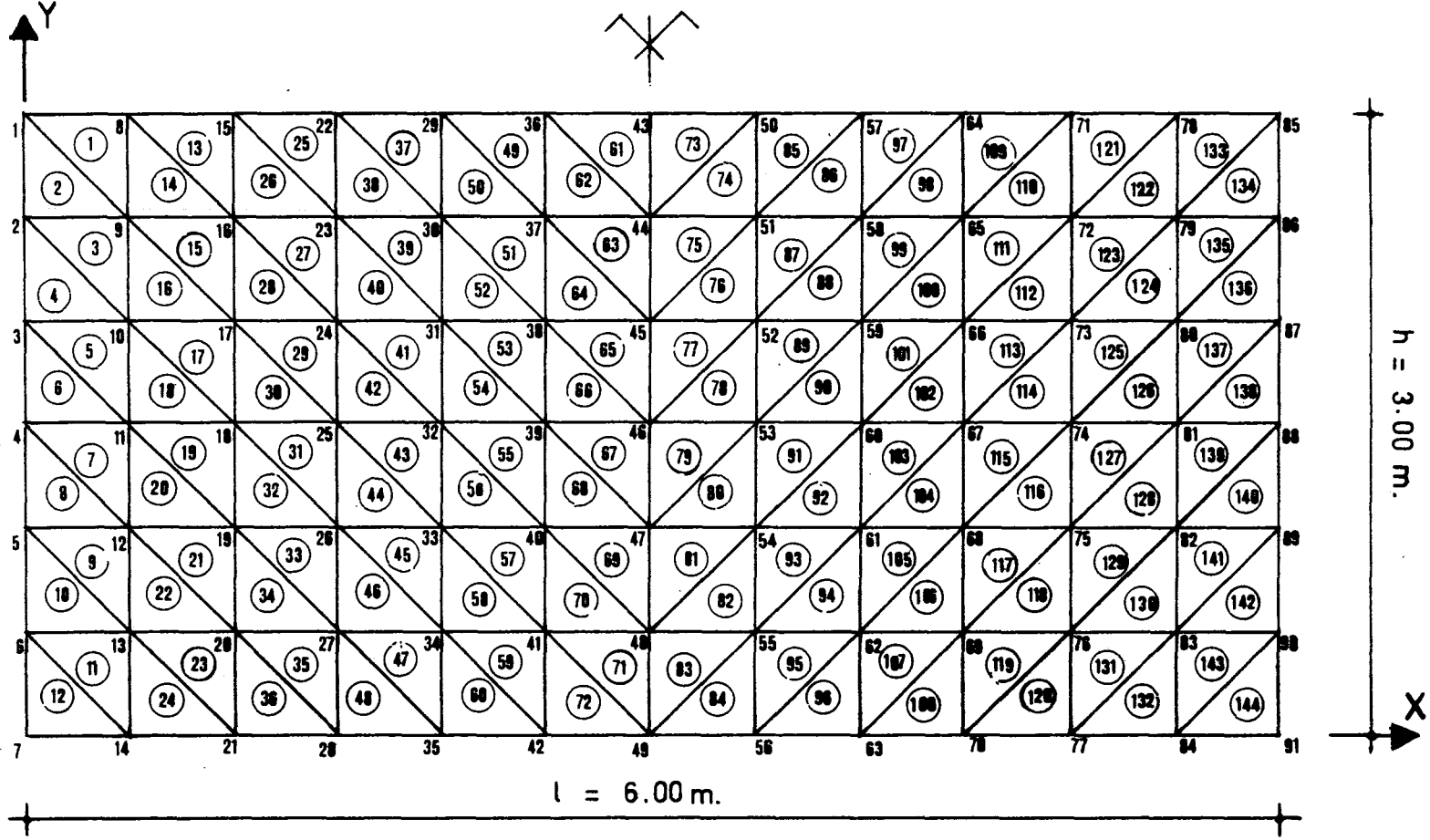
-Basit mesnetli ve açıklığın yarısına kadar $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha,

-iki ucu ankastre ve açıklığın yarısına kadar $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha,

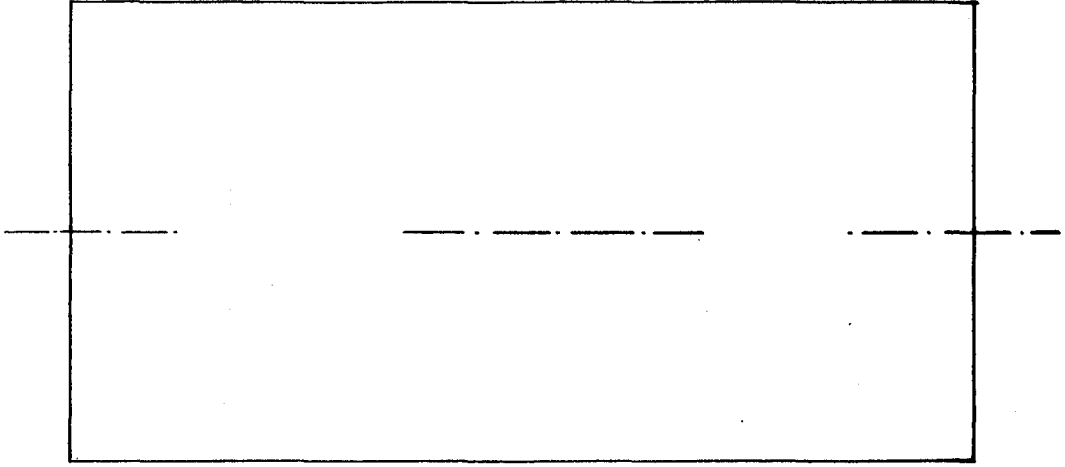
Bu mesnet ve yükleme durumları Şekil 5.1'de verilen A modeli için geçerlidir. Ayrıca yukarıda belirtilen her mesnet ve yükleme durumu için biri boşluksuz olmak üzere beş tip örnek çözülmüştür. Bu beş tip model Şekil 5.2 'de gösterilmiştir.

Şekil 5.13 'de belirtilen B modeli ise üç katlı yapıya uygun $l=4,00$ m. ve $h=9,00$ m. olan ve yine her 0,50 m.'de bölünerek elde edilen üçgenlerden oluşan ve tabanda ankastre olan levha incelenmiştir.

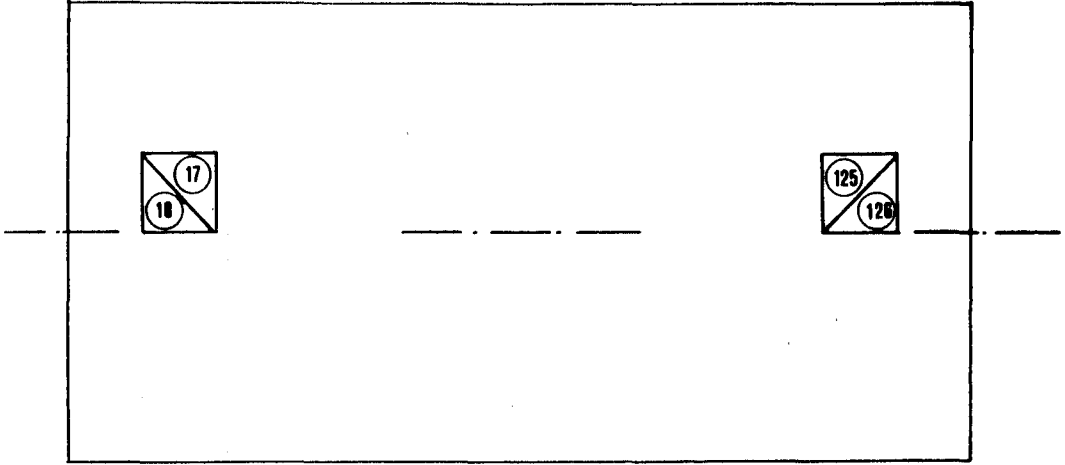
Burada da yine yatay ve dişey yük etkisi altında biri boşluksuz olmak üzere üç tip örnek incelenmiştir.



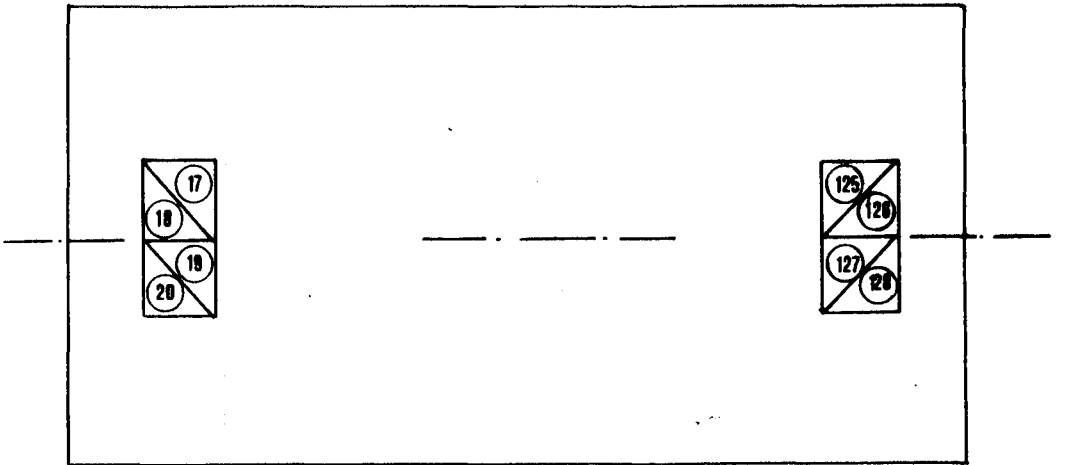
Şekil 5.1 A-Modeli



(a) Levhanın boşluksuz hali

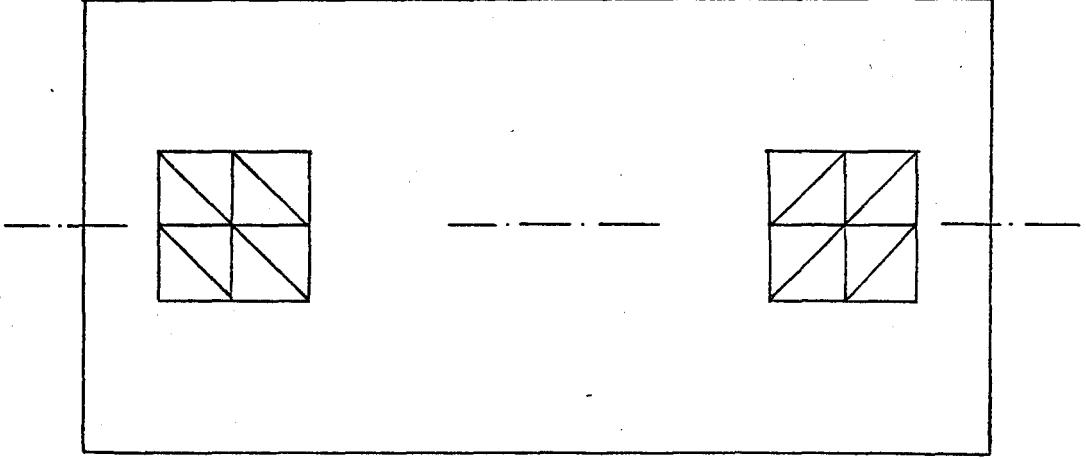


(b) 1 no'lu boşluk durumu

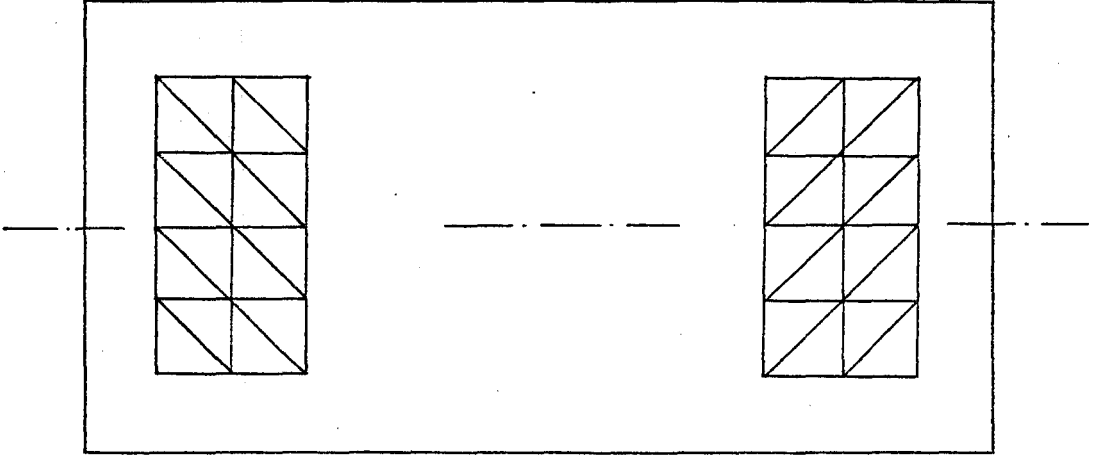


(c) 2 no'lu boşluk durumu

Şekil 5.2 Levhaya ait boşluk durumları



(d) 3 nolu boşluk durumu



(e) 4 nolu boşluk durumu

Şekil 5.2 Levhaya ait boşluk durumları (devam)

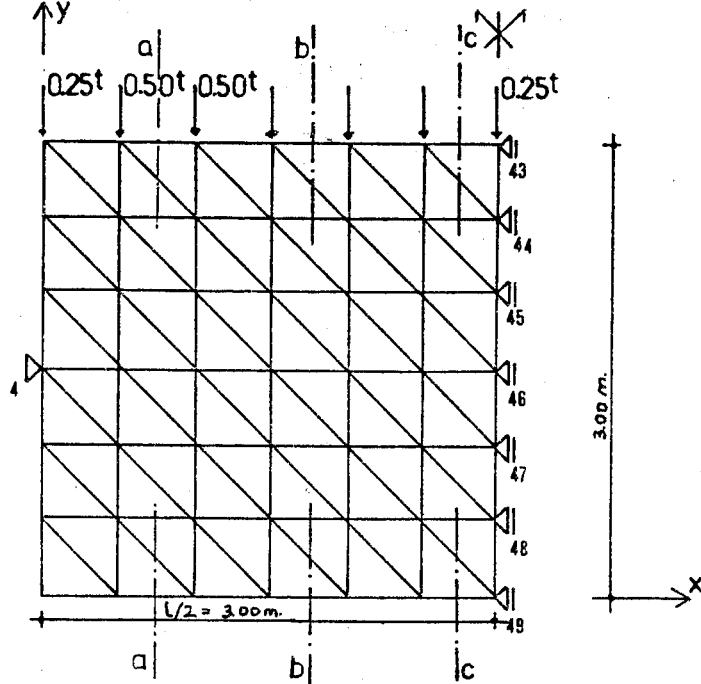
5.1. A Modeline Ait Çözümler

5.1.1. İki ucuyatay ve düşey yönde tutulmuş, açıklık boyunca $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha

A modelinde Şekil 5.2'de gösterilen boşluk durumları için levhanın üst yüzeyine $l=6,00$. boyunca $p=1$ t/m 'lik yayılı yük uygulandığı düşünülmüştür.

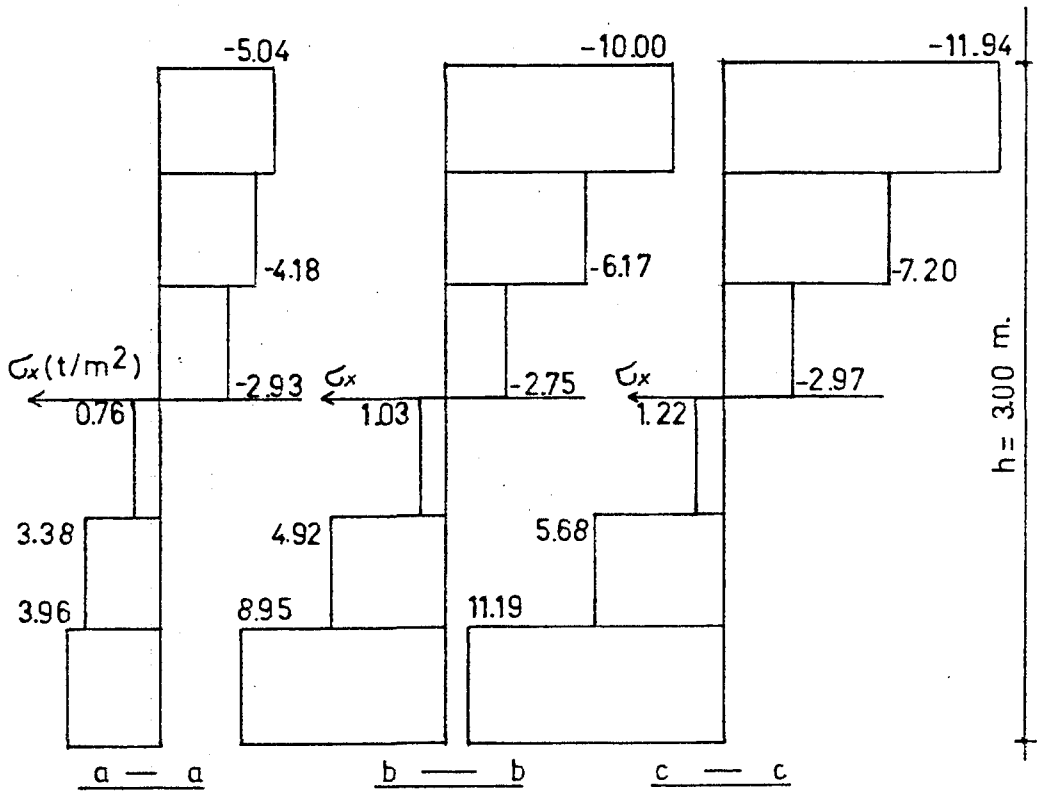
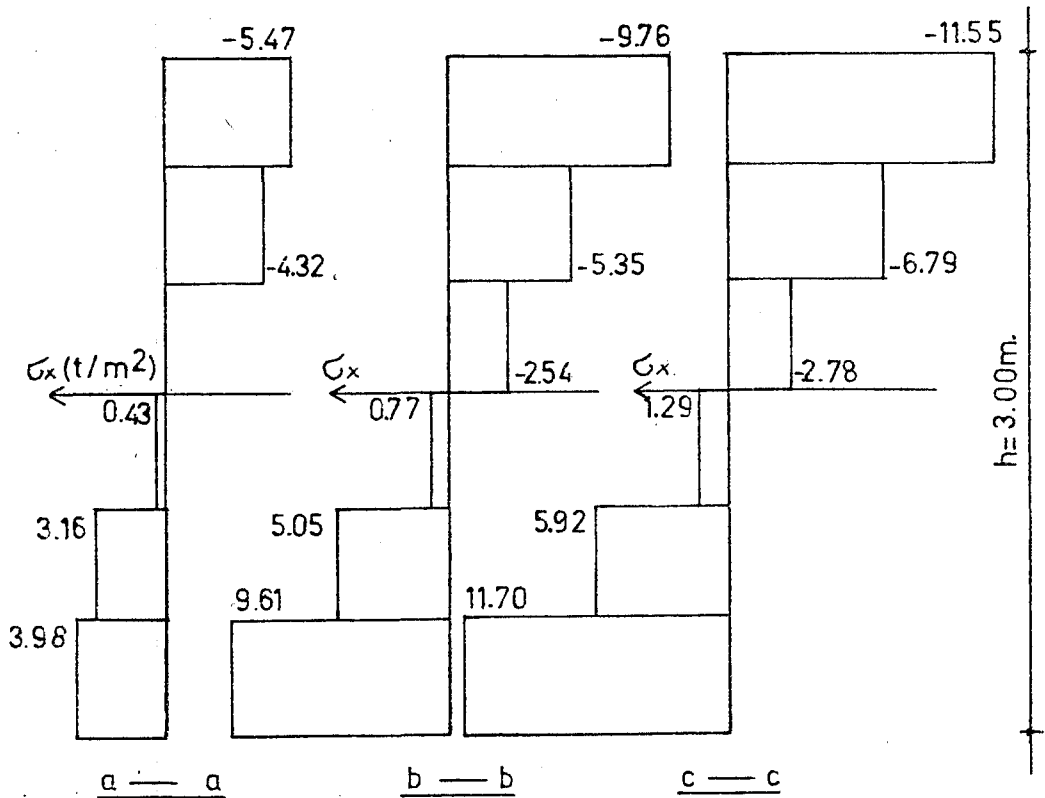
Mesnet durumu 4 noktasında ve simetrisinde karşılık gelen noktada yatay ve düşey yönde hareketin tutulması şeklindedir.

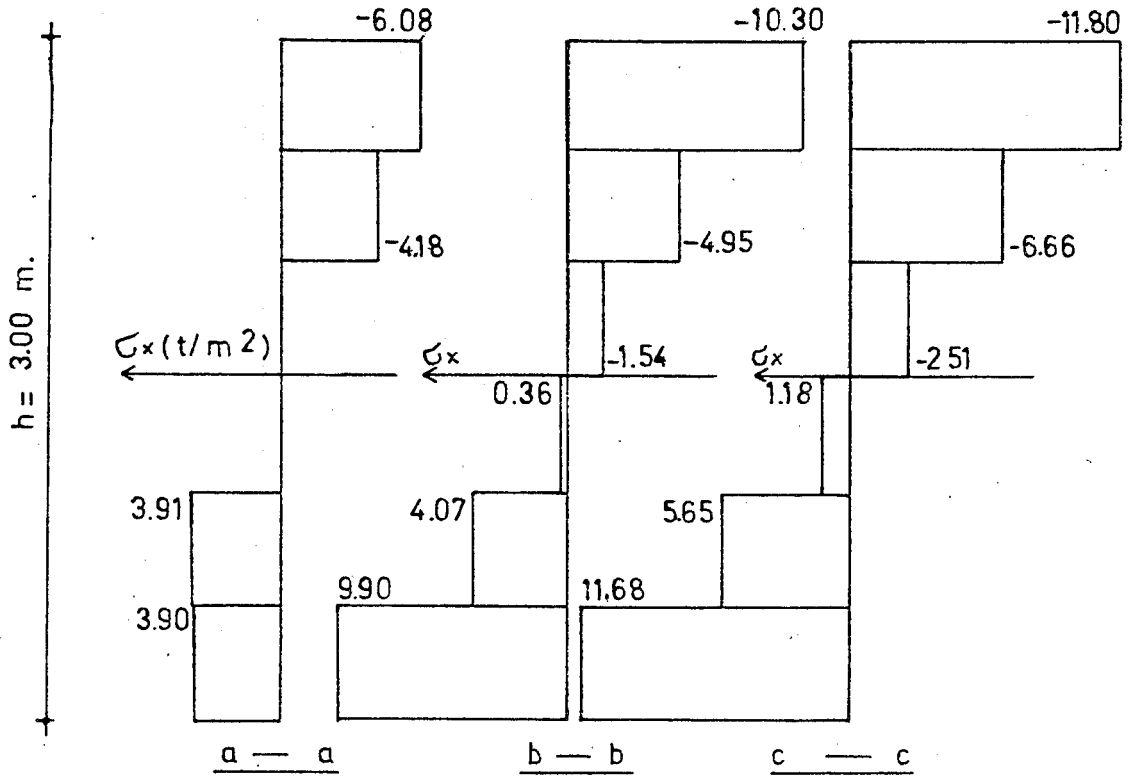
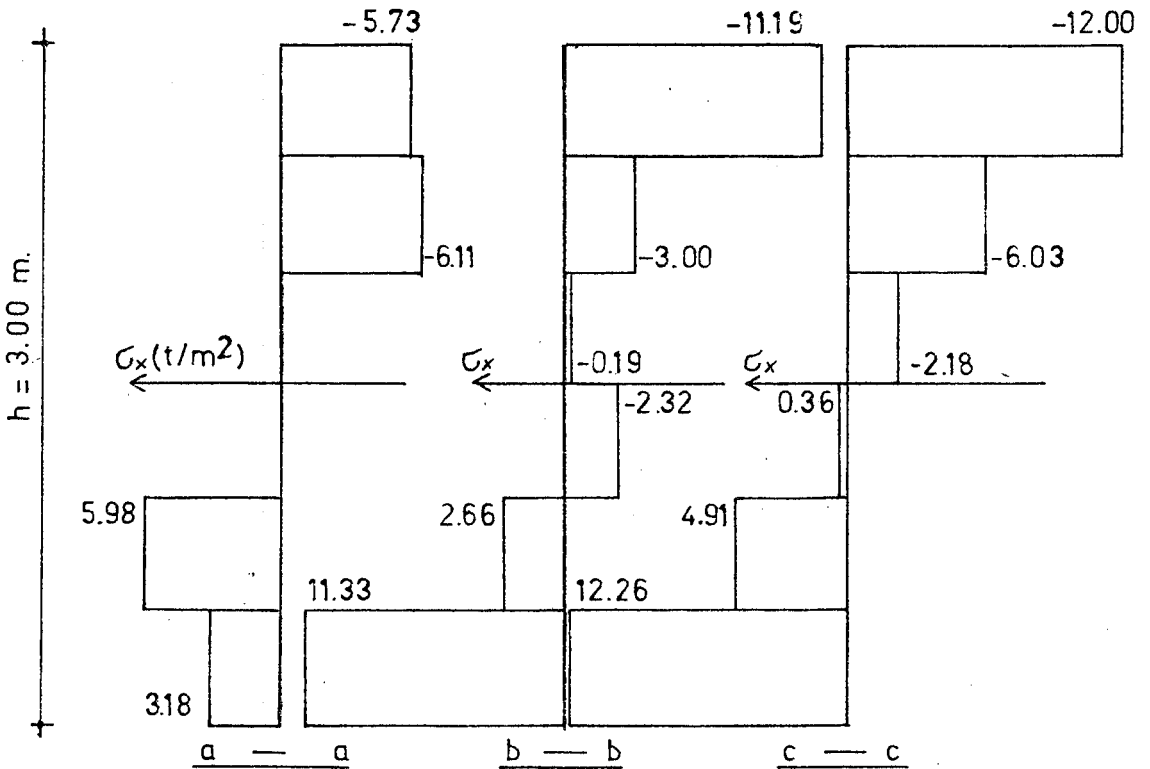
Sistem ve yükleme simetrik olduğundan levhanın sadece sol tarafı için çözüm yapılmıştır (Şekil 5.3).

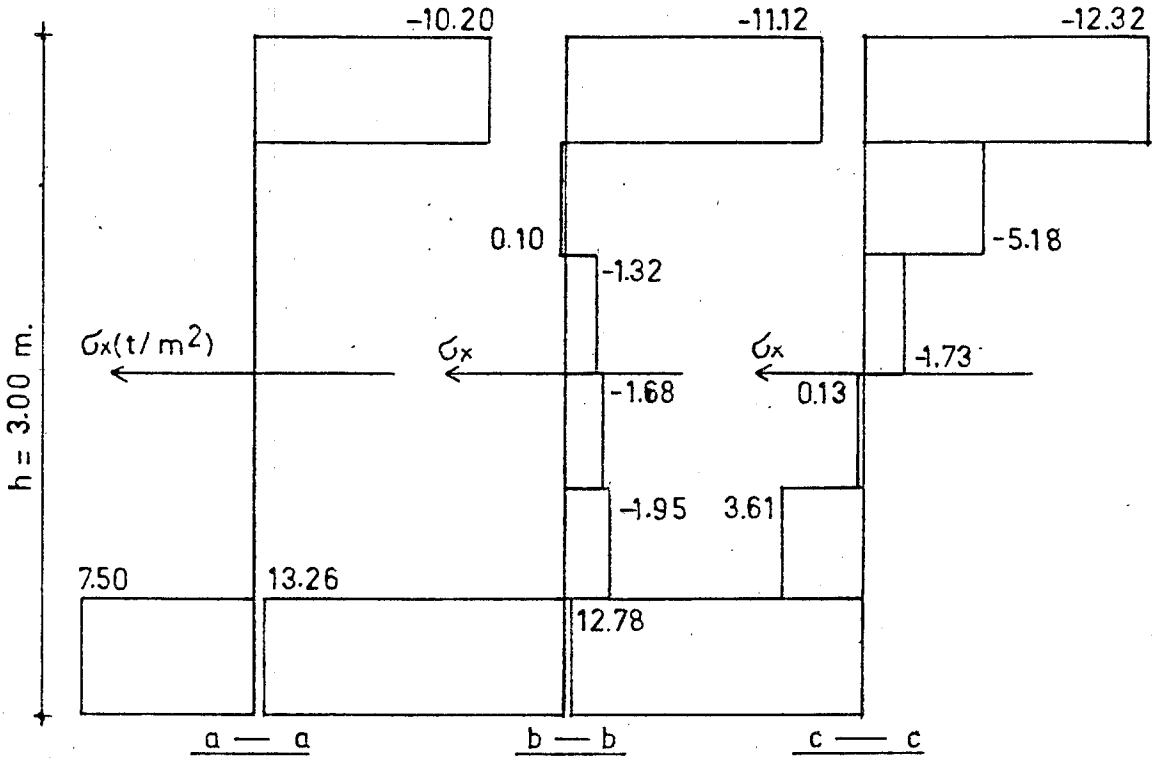


Şekil 5.3. Basit mesnetli $p=1$ t/m Uniform yayılı yük etkisinde levha

Şekil 5.3 'deki a-a, b-b ve c-c kesitlerinde hesaplanan bu gerilmeler, daha sonra şekil 5.2 'de gösterilen beş çeşit boşluk durumu için grafik olarak sunulmuştur (Şekil 5.4).

(A) Levhanın boşluksuz durumuna ait σ_x gerilme dağılımı(B) 1 no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

(C) 2 nolu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı(D) 3 nolu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı



(E) 4 no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

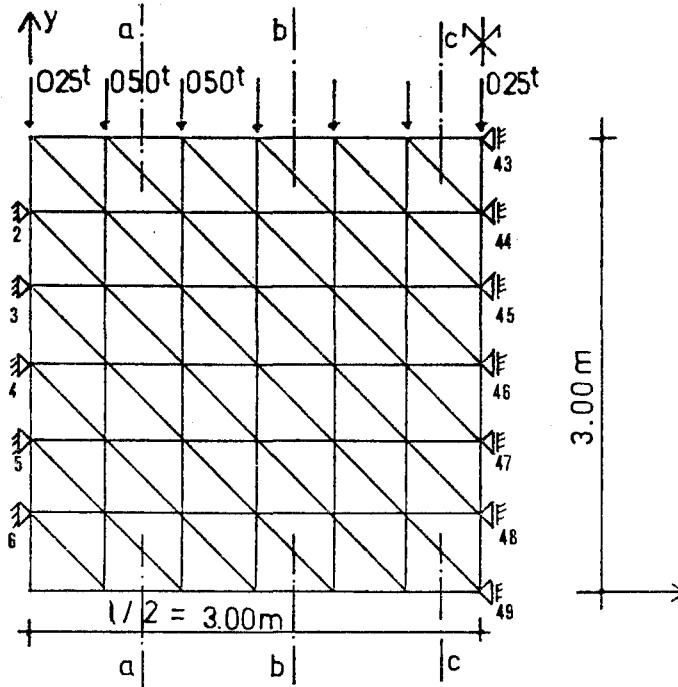
Şekil 5.4 İki ucu yatay ve düşey yönde tutulmuş, açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait σ_x gerilme dağılımları

5.1.2. İki ucu ankastre ve açıklık boyunca $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha

Bu örnekte de yine her boşluk durumu için A modeli boyunca $p=1$ t/m 'lik yayılı yük uygulanmıştır.

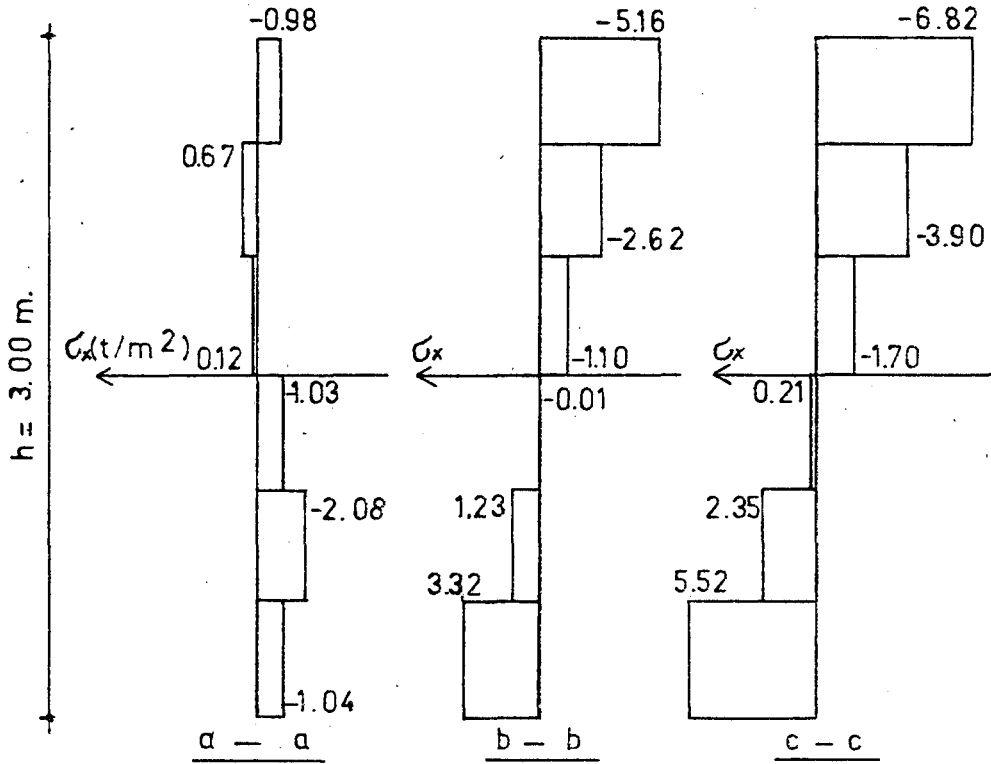
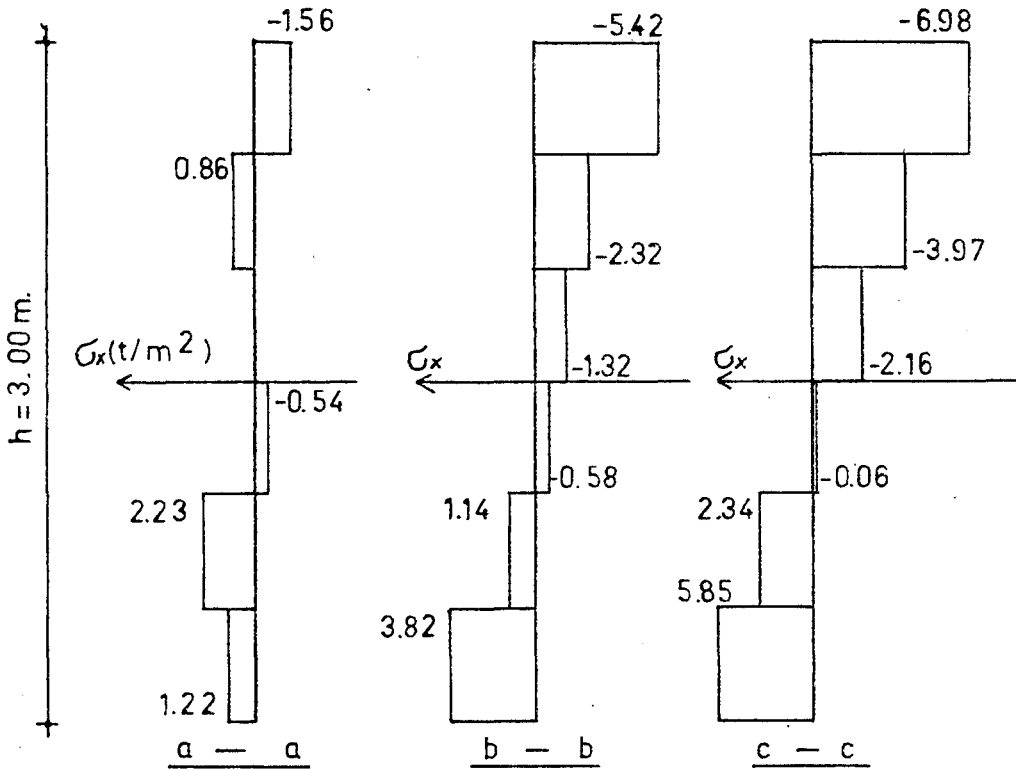
Sistem ve yükleme simetrik olduğundan modelin yarısı için çözüm yapılmıştır.

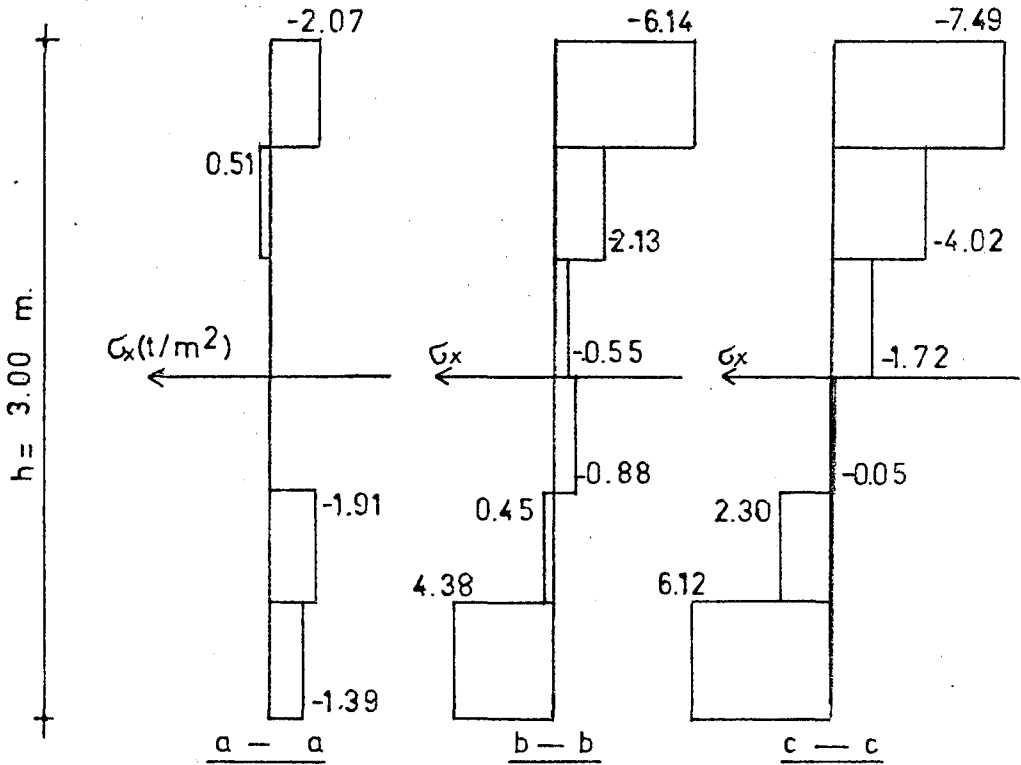
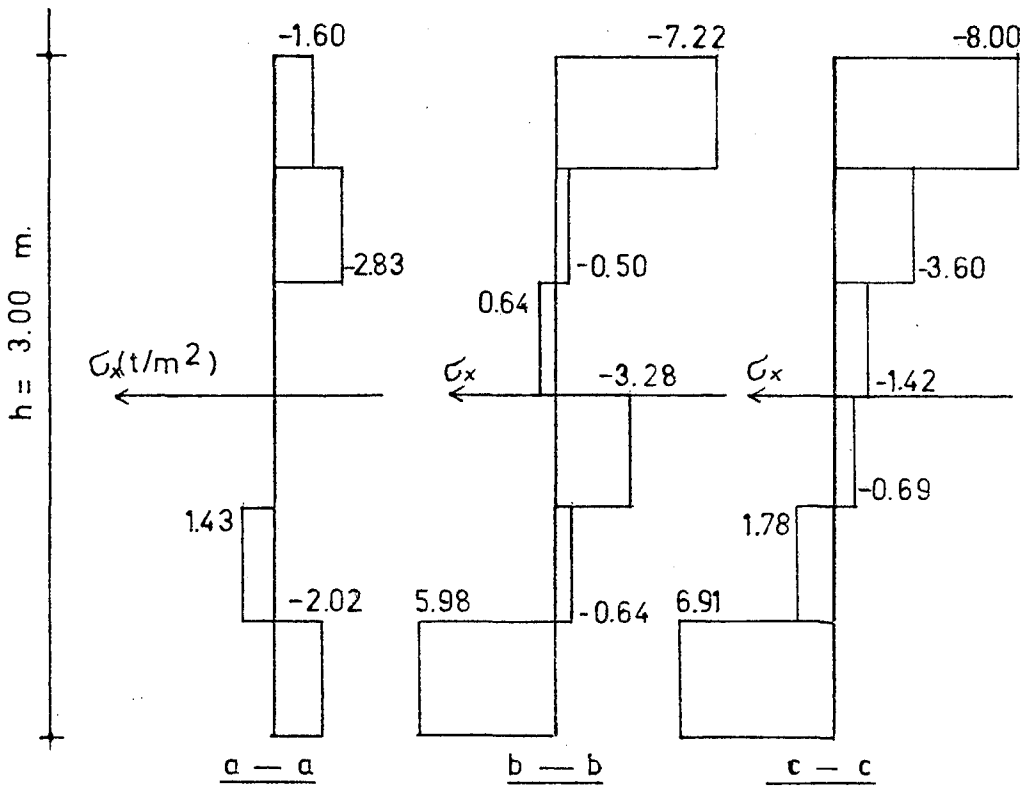
Mesnet durumu 2, 3, 4, 5, 6 noktalarının ve simetrisine karşılık gelen noktaların düşey ve yatay yönde tutulması şeklindedir (Şekil 5.5).

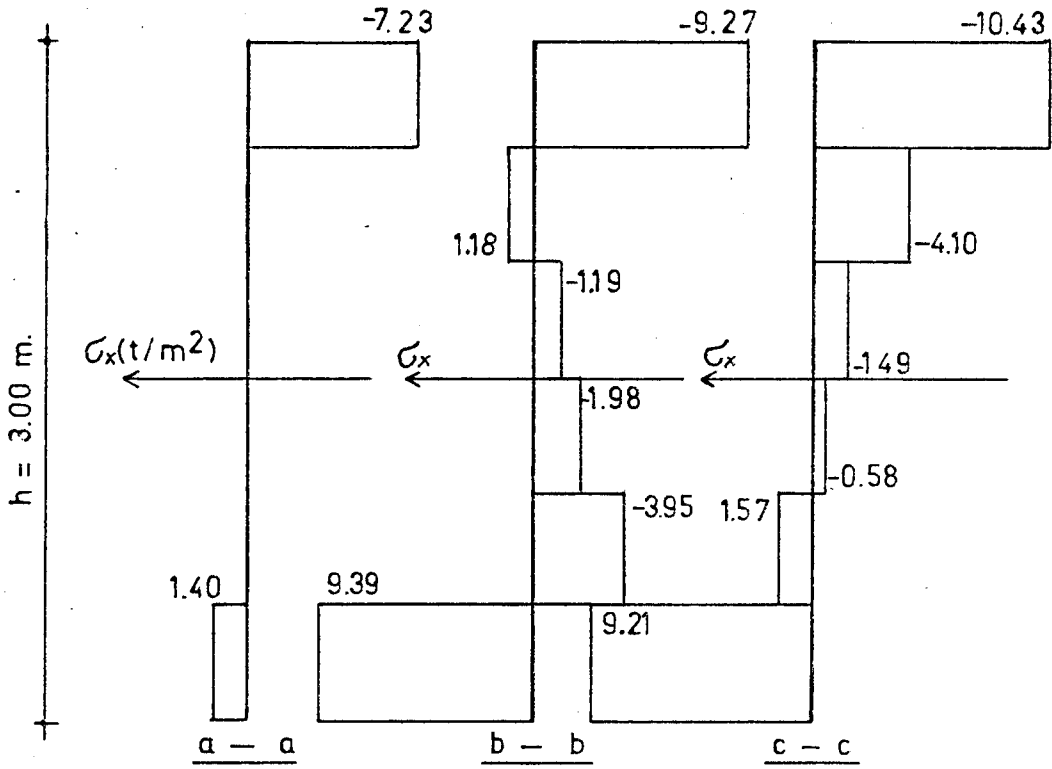


Şekil 5.5. Ankastre mesnetli, $p=1$ t/m yayılı yük etkisinde levha

Yukarıdaki şekilde sunulan yarım sistemin çözümünden elde edilen a-a, b-b, c-c kesitlerine ait σ_x gerilme dağılımı her boşluk durumu için Şekil 5.6 'da gösterilmiştir.

(A) Levhanın boşuksuz hali için σ_x gerilme dağılımı(B) 1 no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

(C) 2 no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı(D) 3 no lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

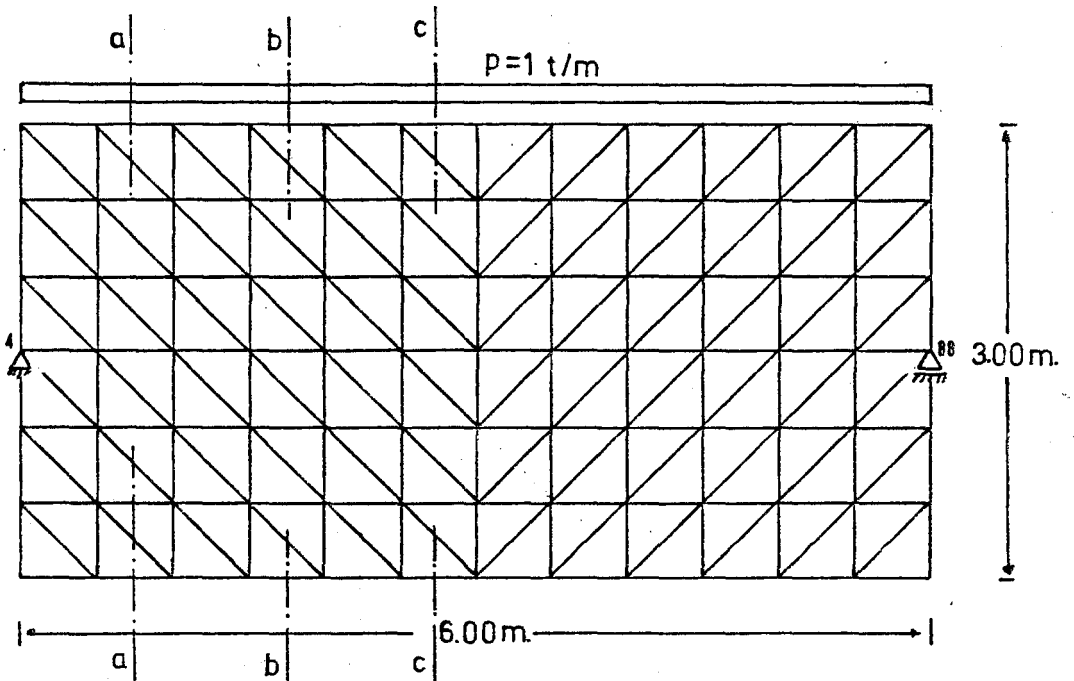


(E) 4 nolu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

Şekil 5.6 İki ucu ankastre, açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait a-a, b-b, c-c kesitlerinde σ_x gerilme dağılımları

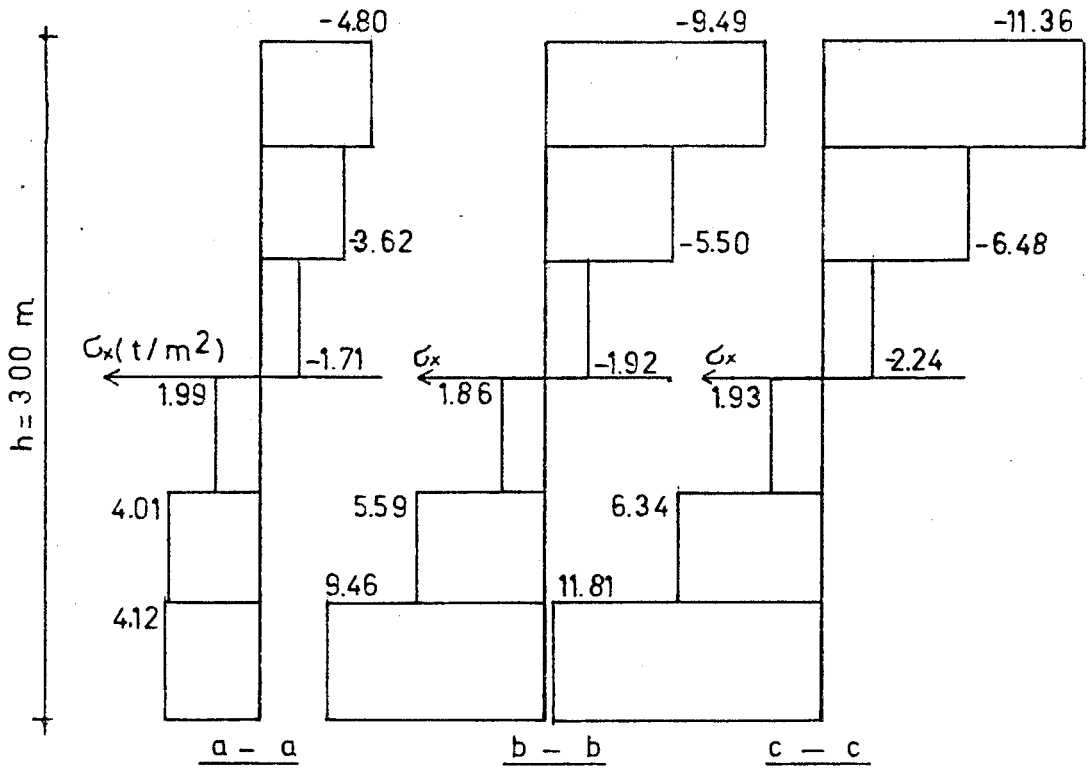
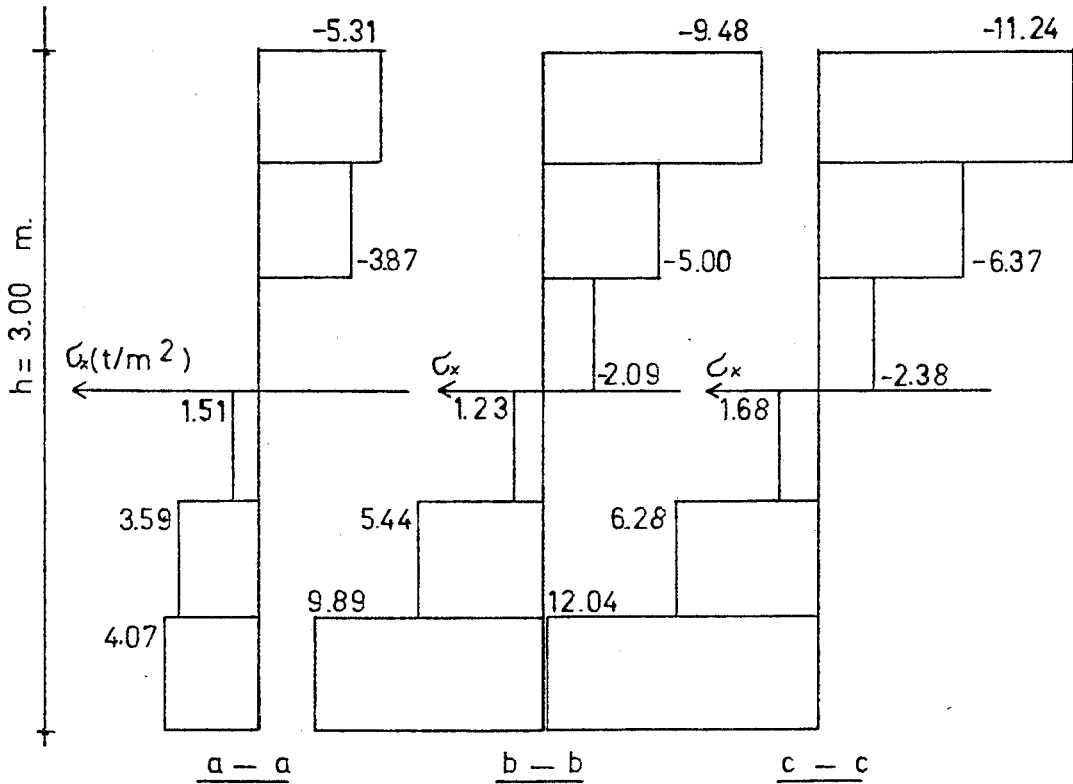
5.1.3. Basit mesnetli ve açıklık boyunca $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha

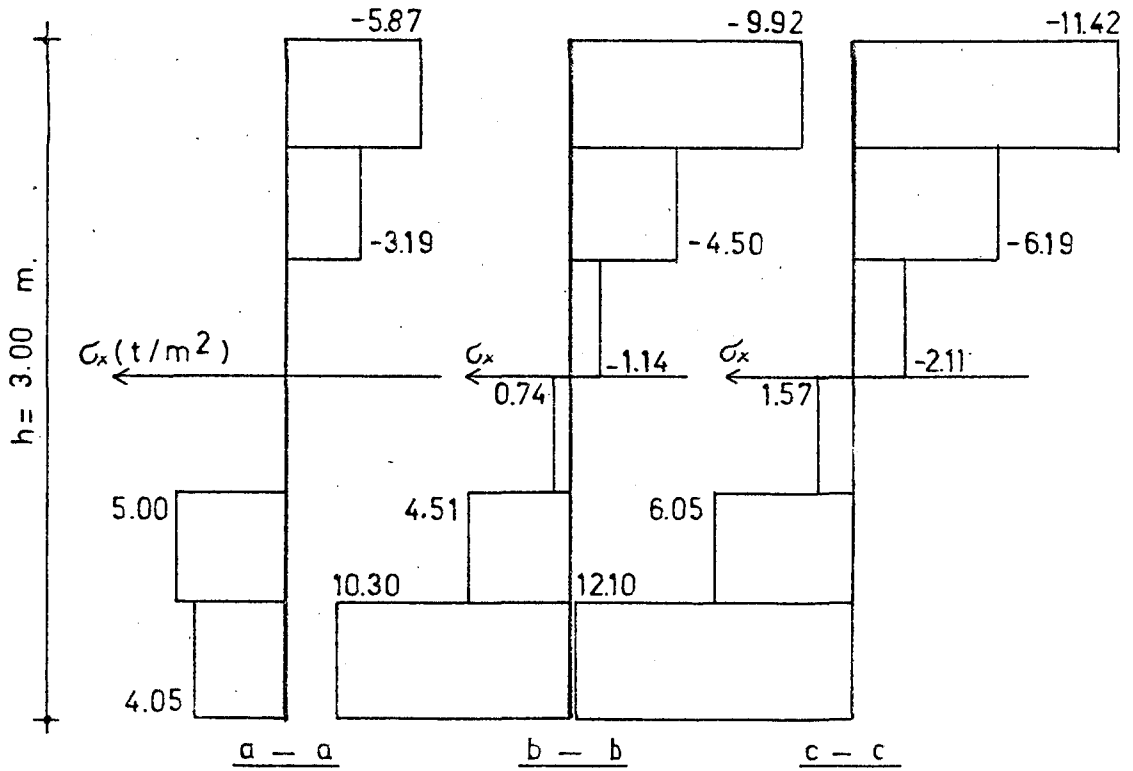
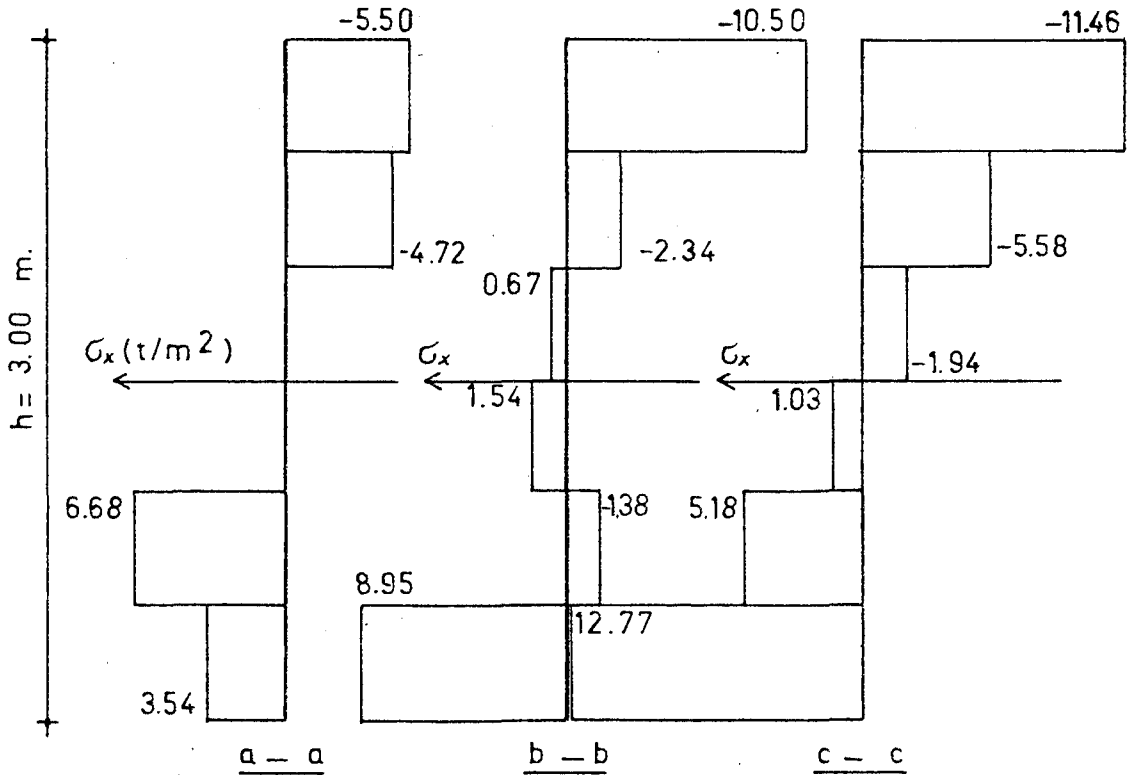
Bu örnekte bir kenarı yatay ve düşey yönde, diğer kenarı sadece düşey yönde tutulmuş basit mesnetli levha incelenmiştir. Yükleme açıklık boyunca $p=1$ t/m şeklindedir (Şekil 5.7).

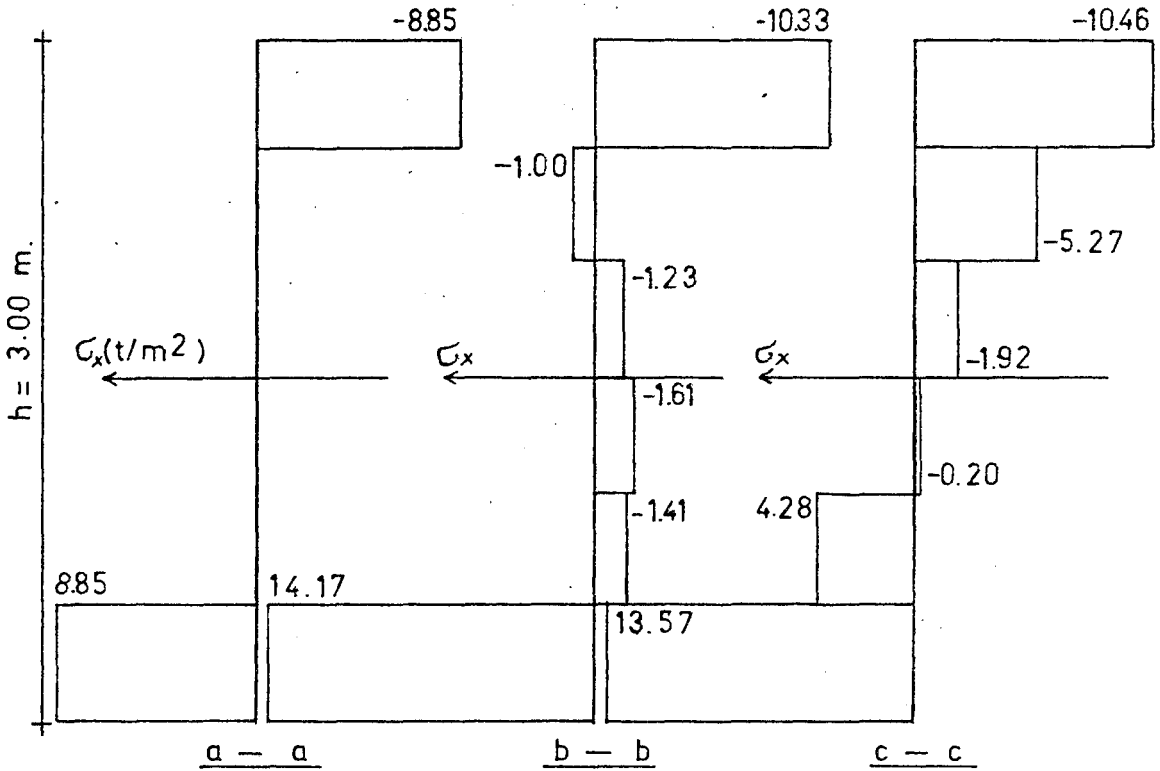


Şekil 5.7. Basit mesnetli-Açıklık boyunca $p=1$ t/m yayılı yük etkisindeki levha

Şekil 5.7 'de görülen sistem, mesnet şartları bakımından simetrik değildir. Ancak bunu simetriden yararlanarak çözmek mümkündür. Bunun için sistemin sağ yarısı alınır ve simetri eksenini üzerindeki düğüm noktalarının yatay deplasmanı tutularak düşey deplasmanı serbest bırakılırsa bu örnek simetriden yararlanarak çözülebilir. Bu şekilde yapılan çözüm sonunda elde edilen σ_x gerilmeleri a-a, b-b, c-c kesitlerinde grafikler halinde Şekil 5.8 'de sunulmuştur.

(A) Levhanın boşuksuz durumu için σ_x gerilme dağılımı(B) 1'no lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

(C) 2no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı(D) 3no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

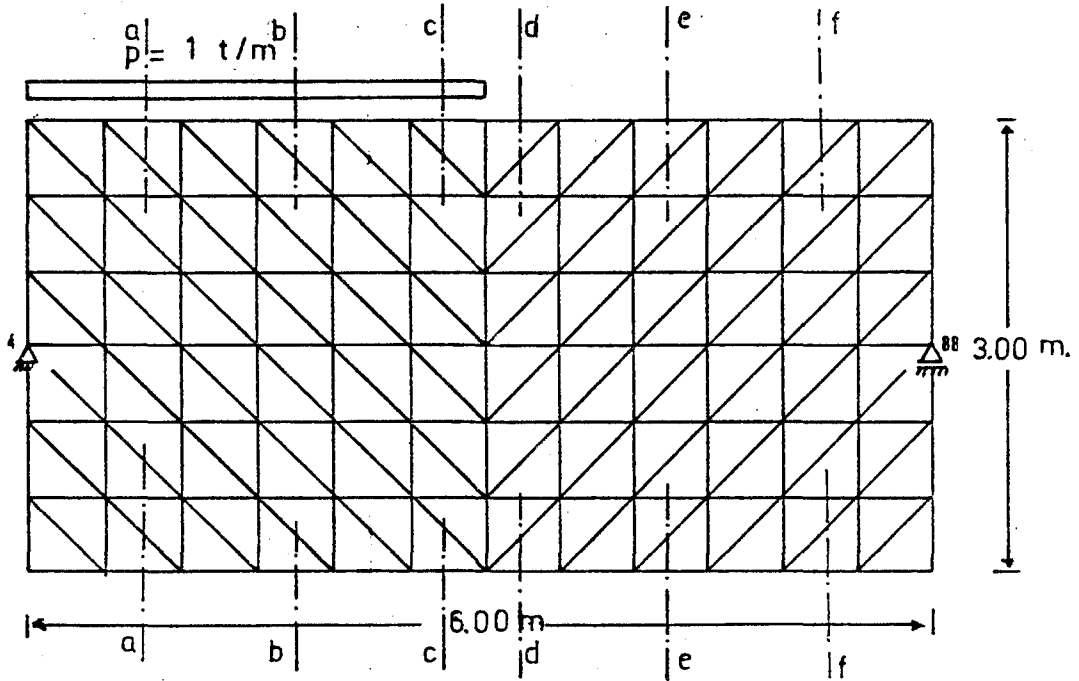


(E) 4 nolu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

Şekil 5.8 Bir ucu basit mesnetli ve diğer ucu da kayıcı mesnetli, açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait a-a b-b ve c-c kesitlerinde σ_x gerilme dağılımı.

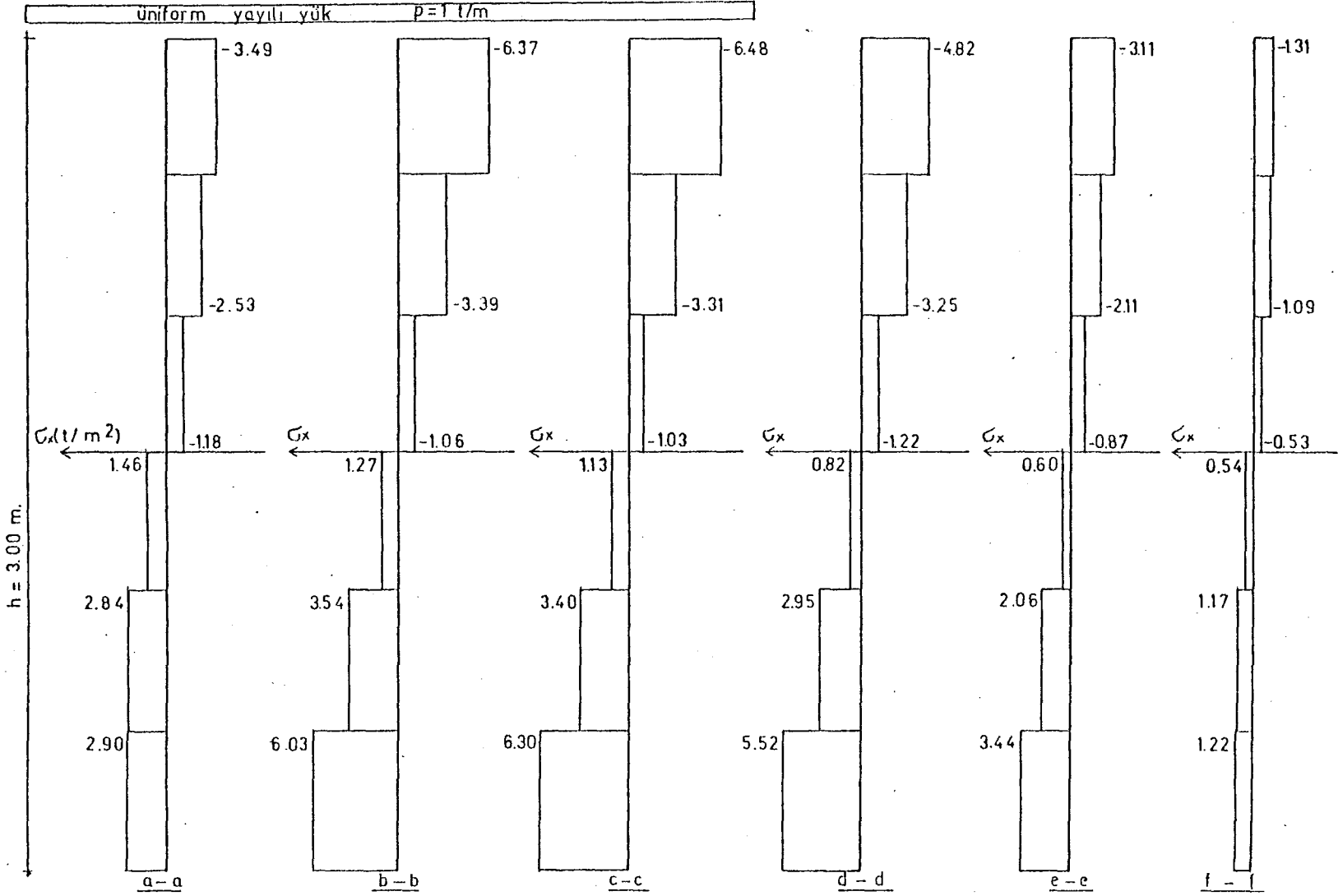
5.1.4. İki Ucu Basit mesnetli ve açıklığının yarısına kadar $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha

Açıklığın yarısına kadar $p=1$ t/m Uniform yükü yüklenmiş basit mesnetli levhada beş değişik boşluk durumunun σ_y gerilme dağılımına etkisini incelemek için yapılan bu örneğe ait model şekil 5.9 'da sunulmuştur.

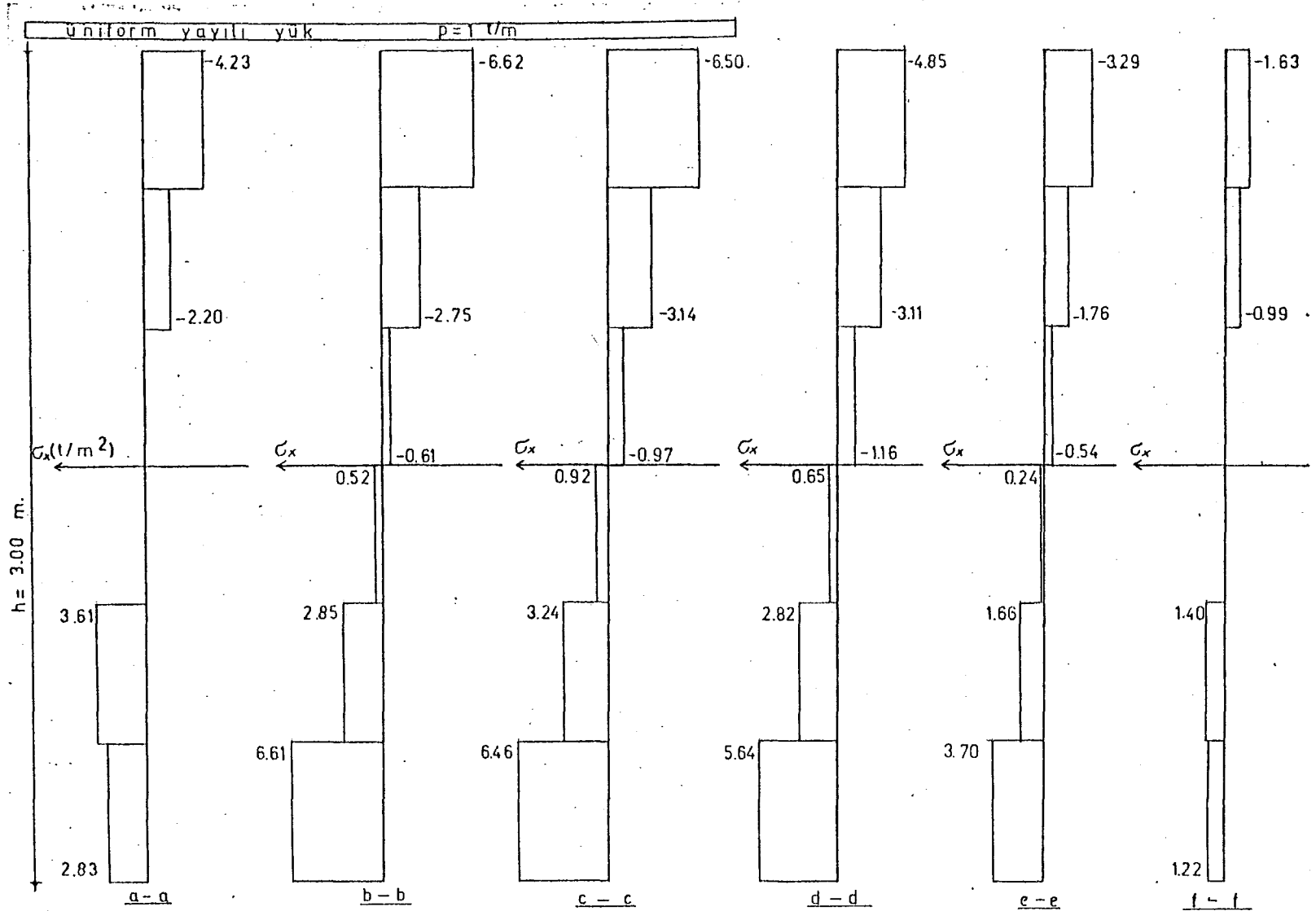


Şekil 5.9. Basit mesnetli açıklığının yarısına kadar Uniform yayılı yük etkisindeki levha

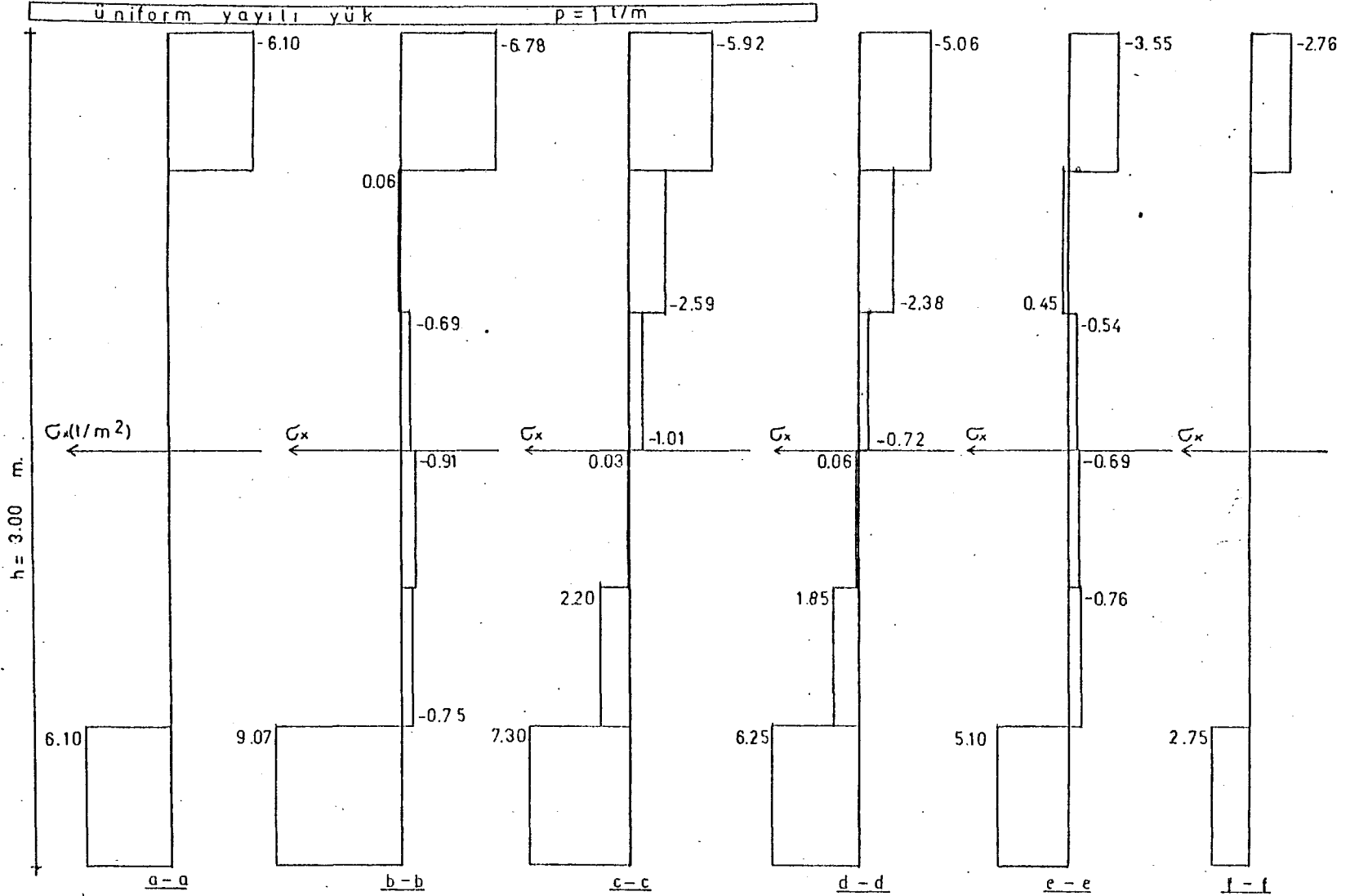
Yükleme simetrik olmadığından sistem bütün olarak çözülmüş ve kesitte σ dağılımına ait grafikler çizilmiştir. Yukarıdaki şekilde a-a, b-b, c-c, d-d, e-e, f-f kesitlerine ait σ_x gerilme dağılımları çizilmiştir (Şekil 5.10).



(A) Levhanın boşluksuz durumuna ait σ_x gerilme dağılımı
 Şekil 5.10. İki kenarı basit mesnetli, açıklığının yarısına kadar üniform yüklü levha



(B) 2 nolu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı
 Şekil 5.10 İki kenarı basit mesnetli açıklığının yarısına kadar üniform yüklü tevha (devam)

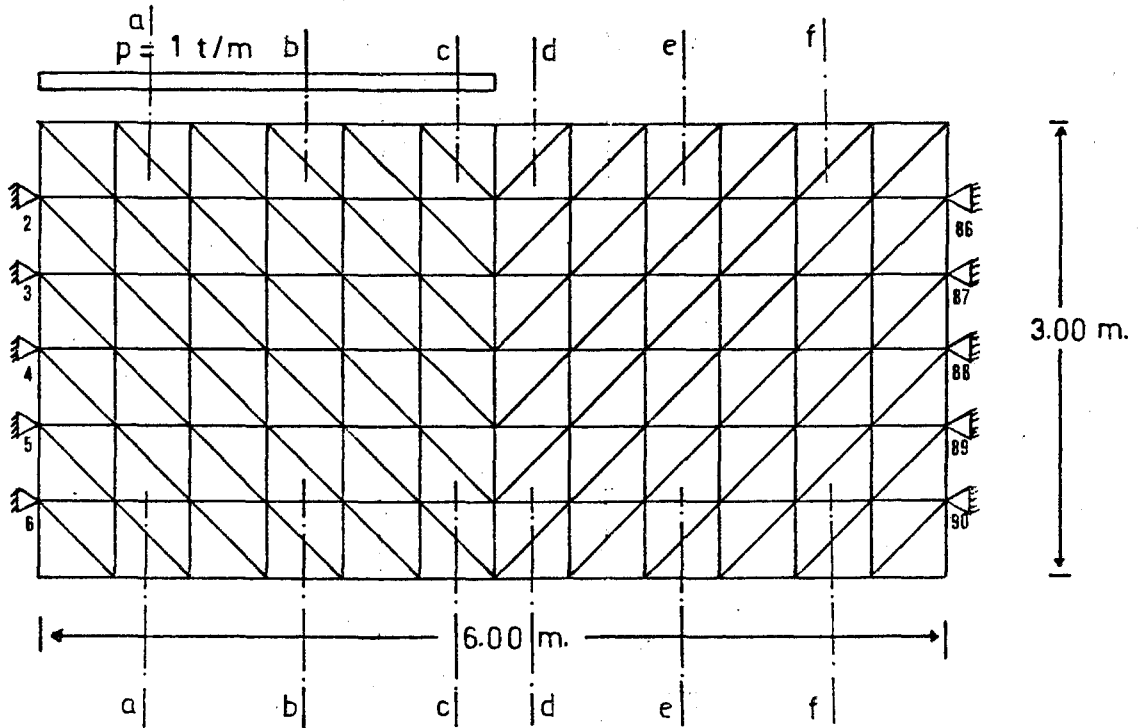


(C) 4 no lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı
 Şekil 5.10 İki kenarı basit mesnetli açıklığının yarısına kadar üniform yüklü levha (devam)

5.1.5. İki ucu ankastre ve açıklığının yarısına kadar $p=1$ t/m. yayılı yük etkisinde levha

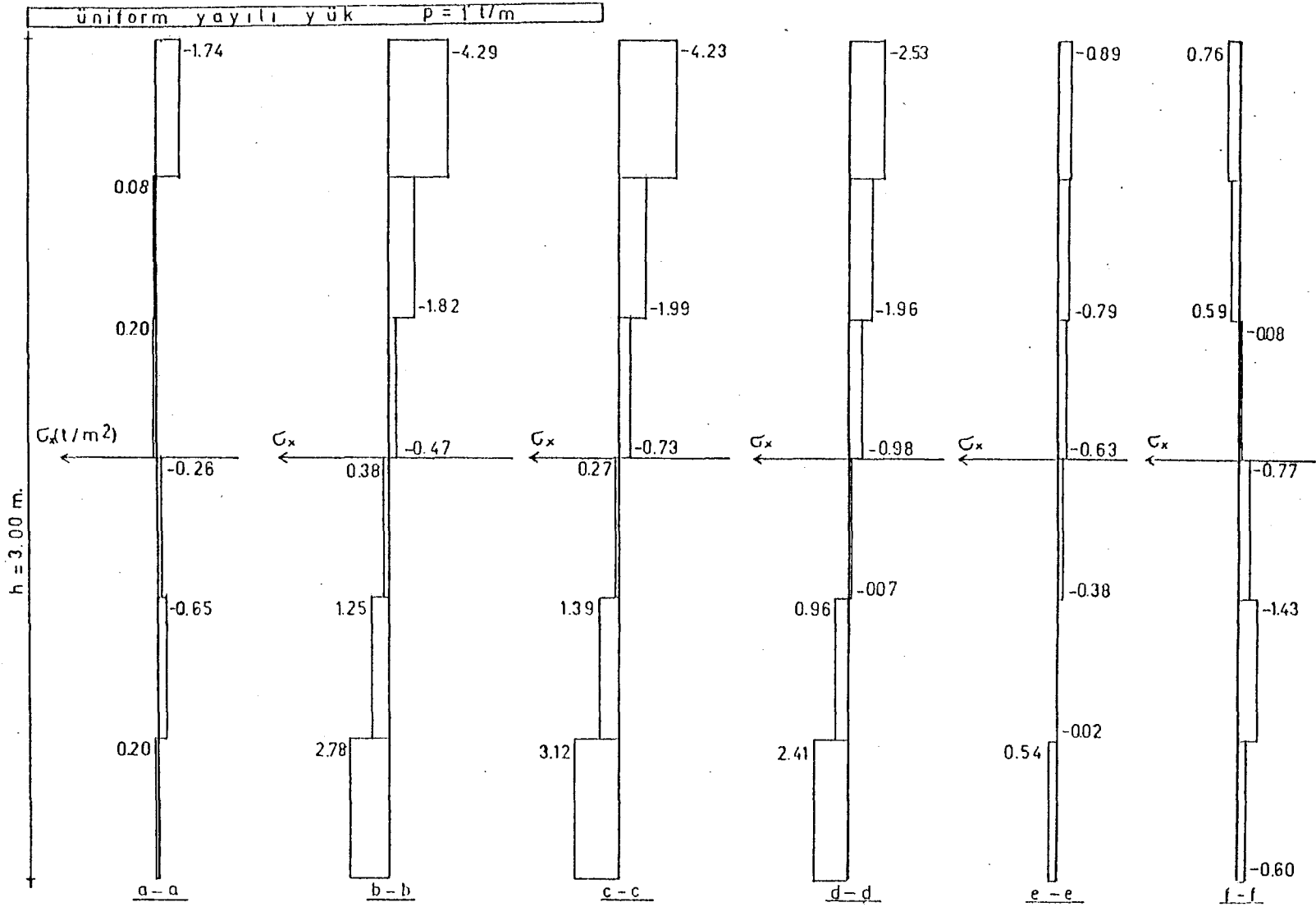
Bu örnekte de iki ucu ankastre ve açıklığının yarısına kadar yayılı yük etkisinde levha ele alınmıştır. Bu levhanın yarısının yüklenmesinde boşlukların α_x gerilmelerine etkisi incelenmeye çalışılmıştır.

Yükleme simetrik olmadığından sistem bütün sistem olarak çözülmüş ve altı kesitte gerilme dağılımına ait grafikler çizilmiştir. Modelin mesnet ve yükleme durumları Şekil 5.11 'de gösterilmiştir.



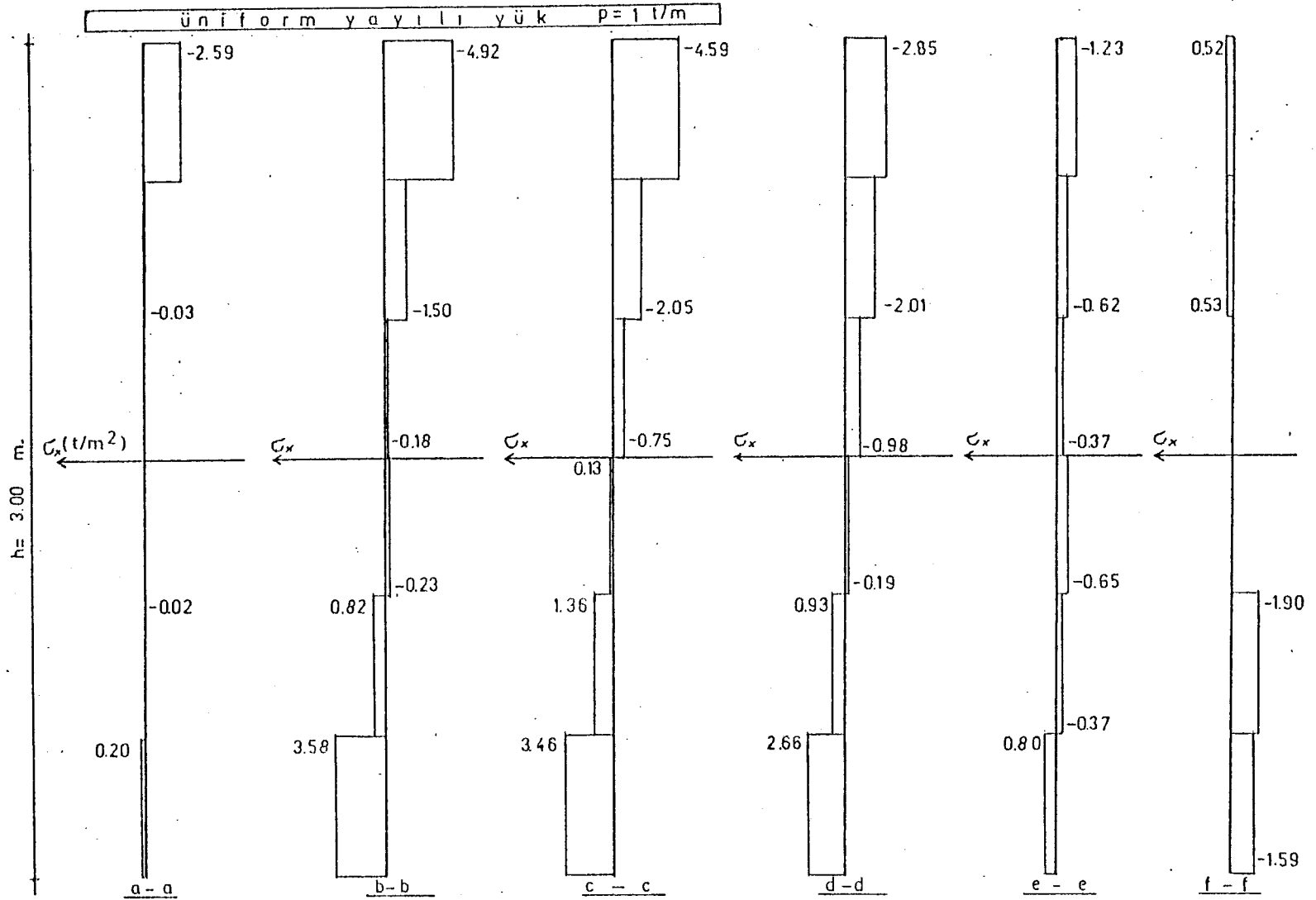
Şekil 5.11. İki ucu ankastre ve açıklığının yarısına kadar yayılı yük etkisinde levha

Yine Şekil 5.2 'de sunulmuş olan beş çeşit boşluk durumu için yukarıdaki a-a, b-b, c-c, d-d, e-e ve f-f kesitlerine ait α_x gerilme dağılımları Şekil 5.12 'de gösterilmiştir.



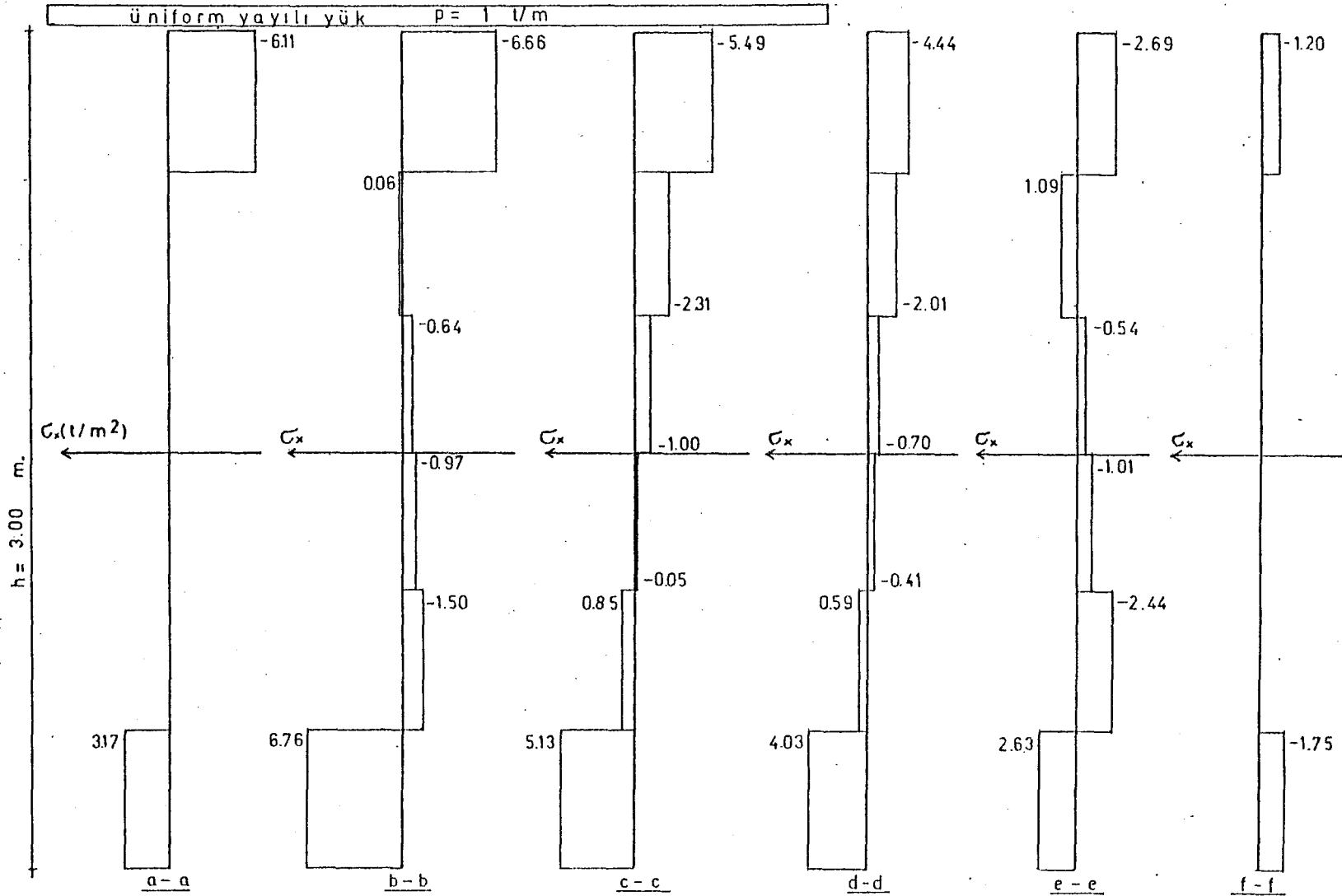
(A) Levhanın boşluksuz durumuna ait σ_x gerilme dağılımı

Şekil 5.12 İki kenarı ankastre, açıklığının yarısına kadar üniform yüklü levha



(B) 2 no lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı.

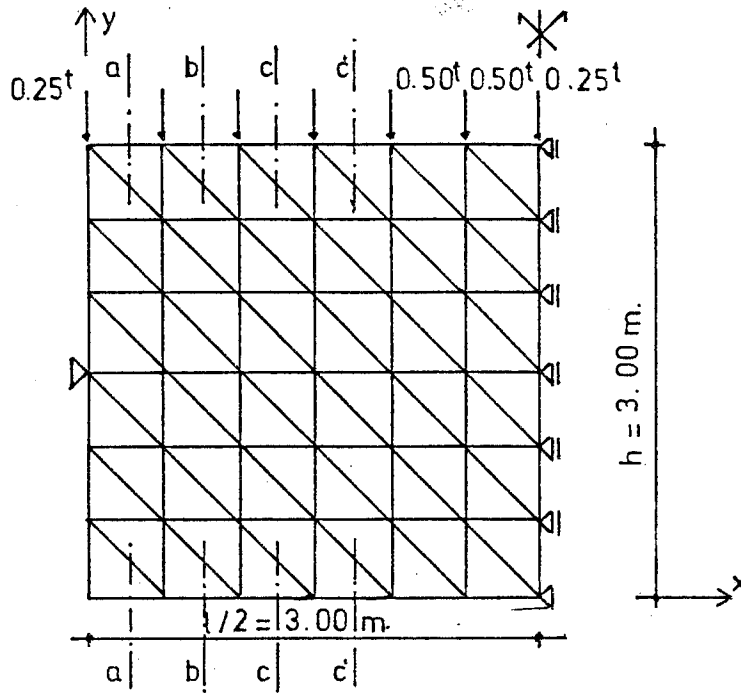
Şekil 5.12 İki kenarı ankastre, açıklığının yarısına kadar üniform yüklü levha (devam)



(C) 4 no'lu boşluk durumuna ait σ_x gerilme dağılımı
 Şekil 5.12 İki kenarı ankastre, açıklığının yarısına kadar üniform yüklü levha (devam)

5.1.6. Kayma Gerilmelerinin (τ_{xy}) İncelenmesi

Şu ana kadar yapılan A modeline ait örneklerde sadece σ_x gerilmeleri ile ilgili grafiklere yer verilmişti. Bu bölümde ise özellikle boşluk civarlarında önem kazanan τ_{xy} kayma gerilmeleri -daha önce bölüm 5.11 ve 5.12 'de σ_x gerilme dağılımlarının incelendiği- iki örnek için ele alınmıştır. Bu örneklerde yine aynı boşluk durumları uygulanmıştır.

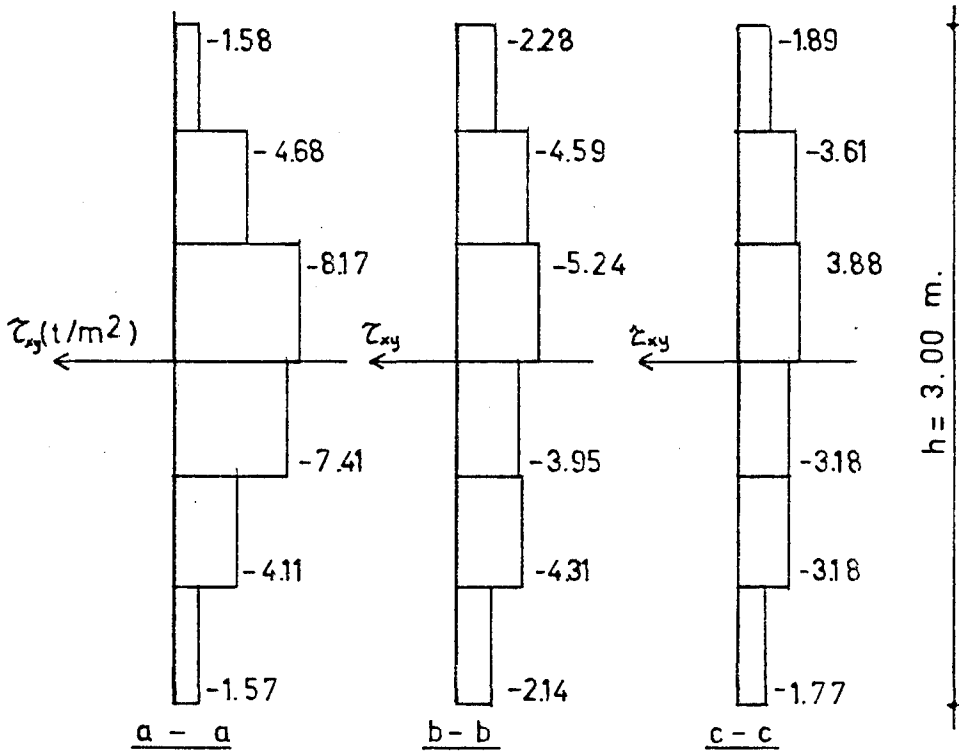
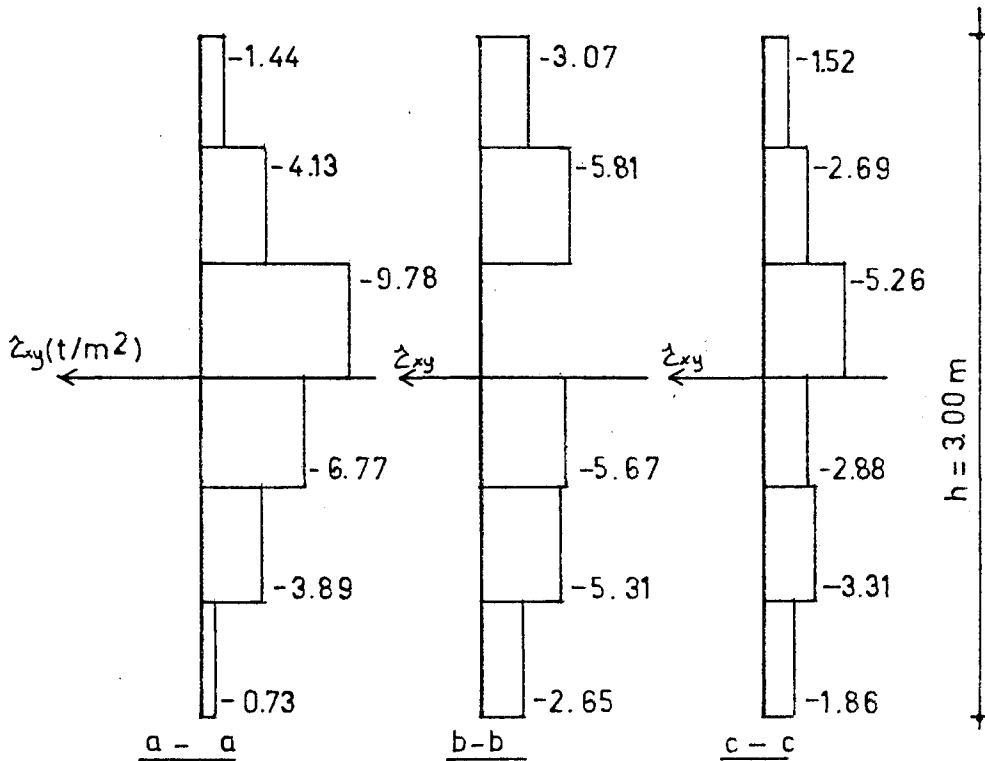


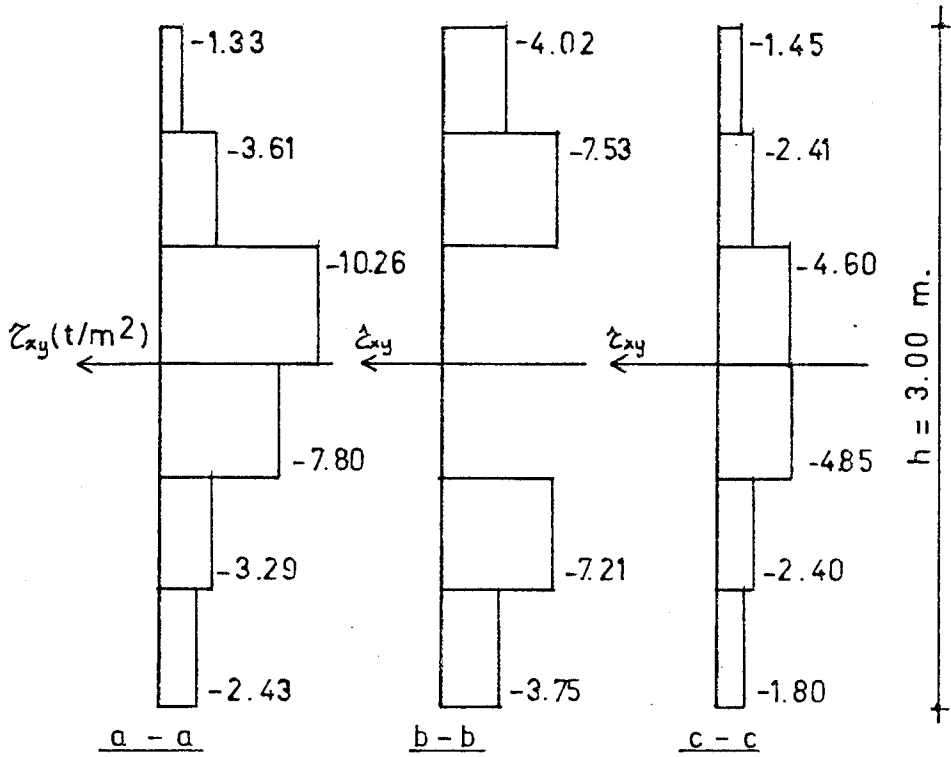
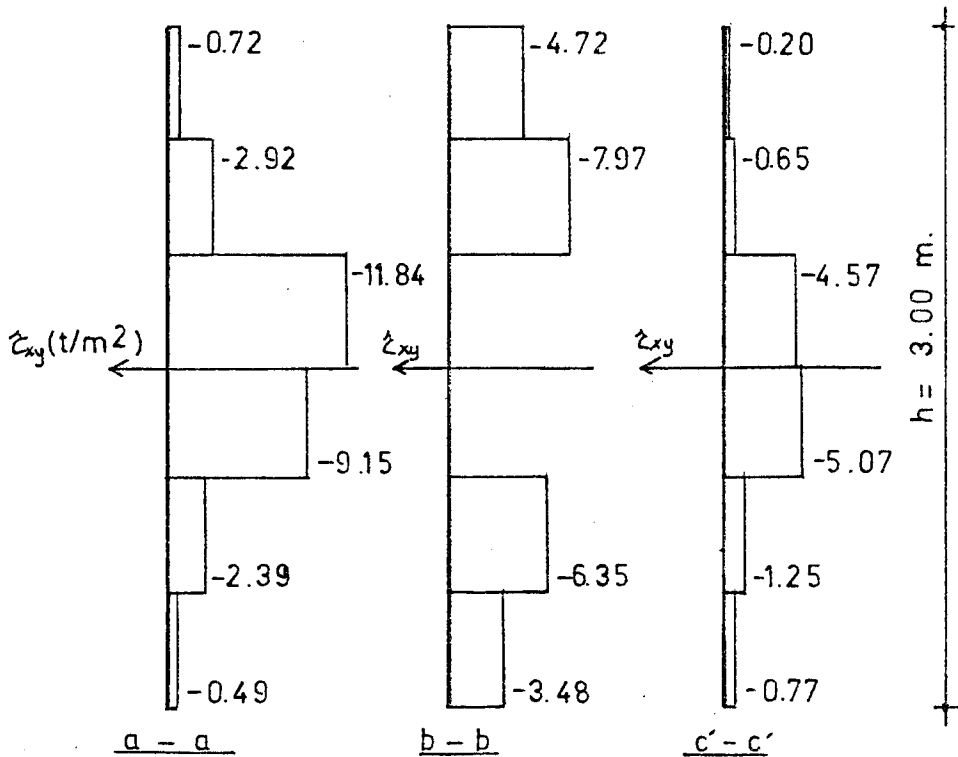
Şekil 5.13. Kayma gerilmesine ait kesitler

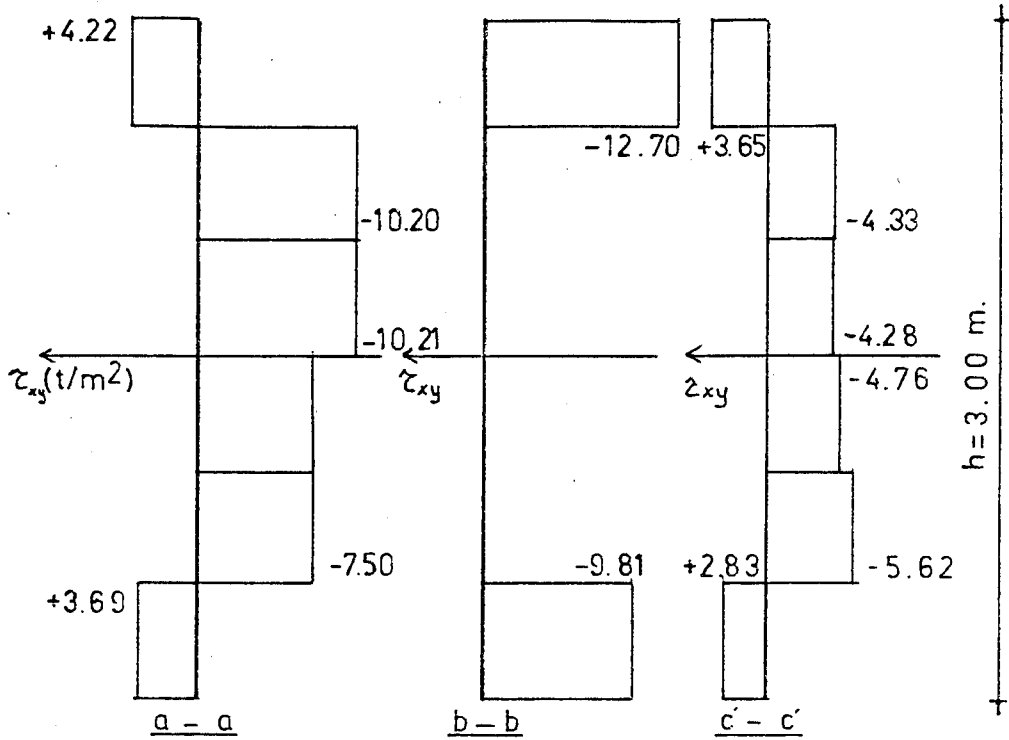
5.1.6.1. 5.1.1. örneğinde τ_{xy} kayma gerilmelerinin incelenmesi

İki ucu yatay ve düşey yönde tutulmuş açıklık boyunca $p=1$ t/m yayıllı yük etkisindeki levhaya ait τ_{xy} gerilme dağılımları incelenmiştir.

Bu örneğe ait τ_{xy} gerilme dağılımları Şekil 5.13 'de gösterilen ve boşluk civarında bulunan a-a, b-b ve c-c (c'-c') kesitlerinde çizilmiştir. Şekil 5.14 'de gösterilmiştir.

(A) Levhanın boşluksuz durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı(B) 1no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı

(C) 2 no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı(D) 3 no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı

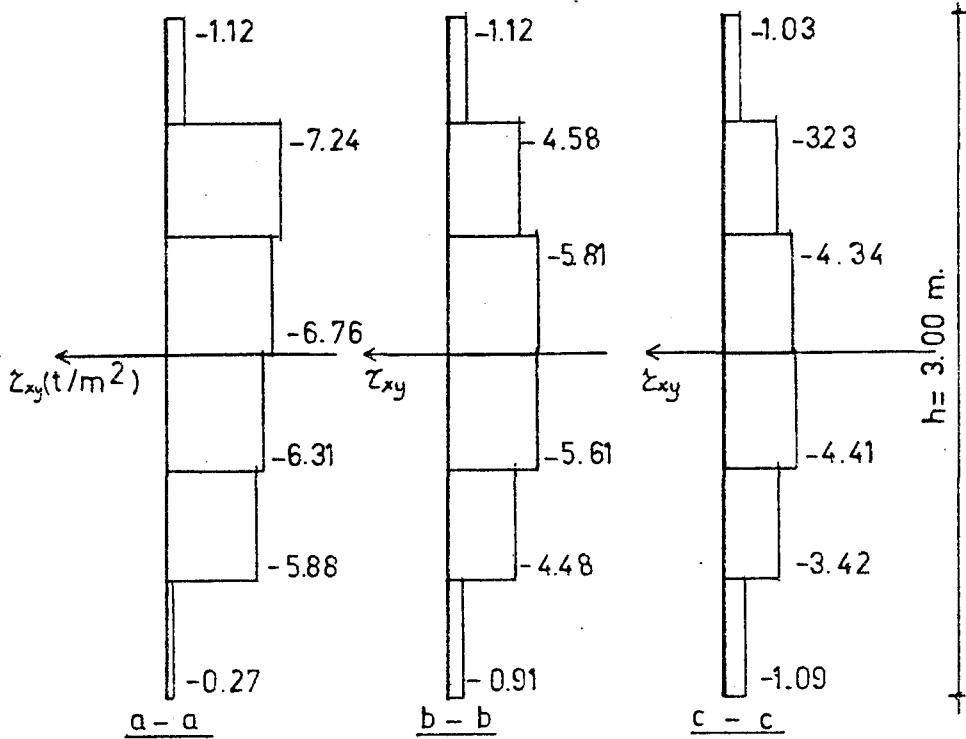


(E) 4 no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı
 Şekil 5.14 İki ucu basit mesnetli açıklık boyunca yayılı
 yük etkisindeki levhaya ait τ_{xy} dağılımları

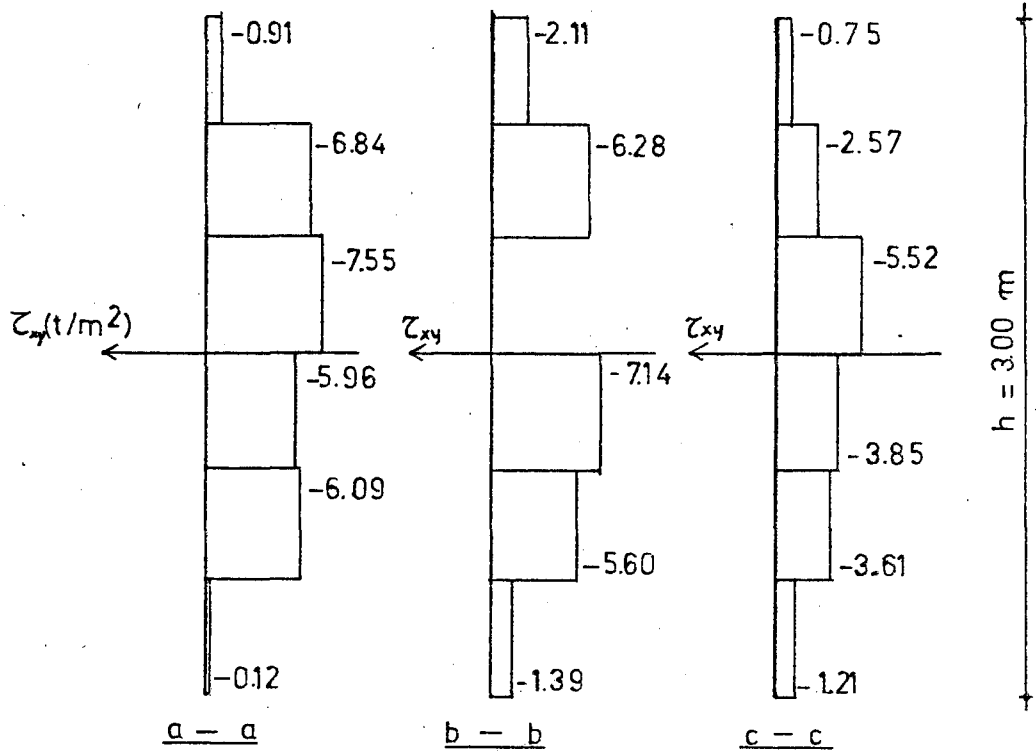
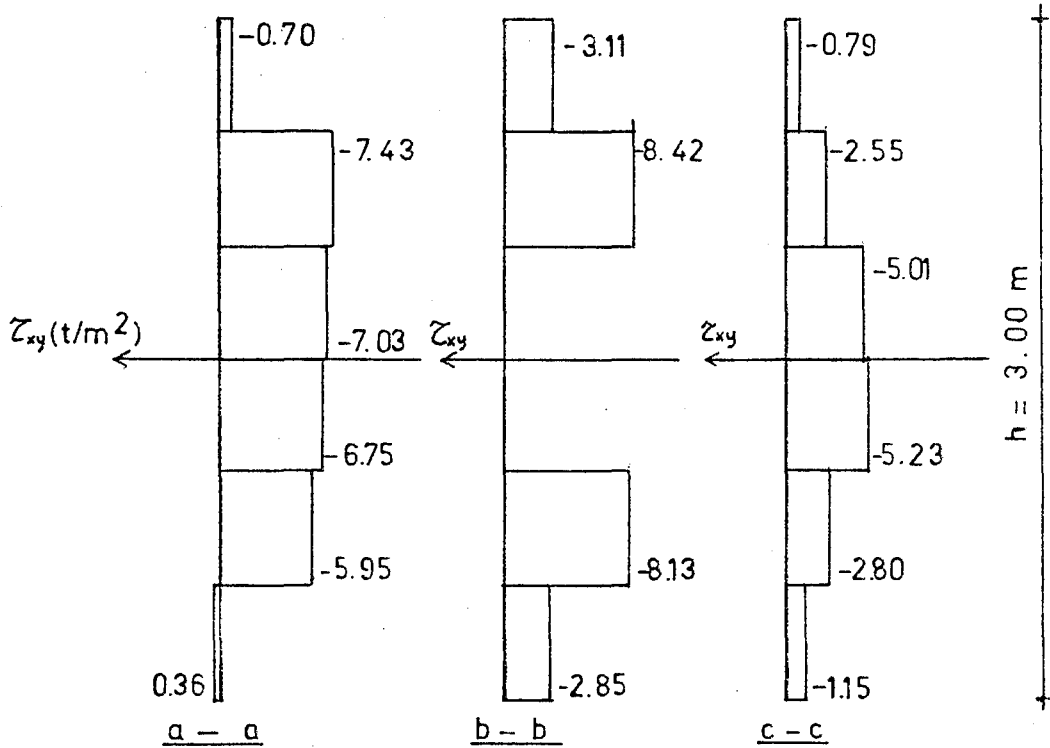
5.1.6.2. 5.1.2. örneğinde τ_{xy} kayma gerilmelerinin incelenmesi

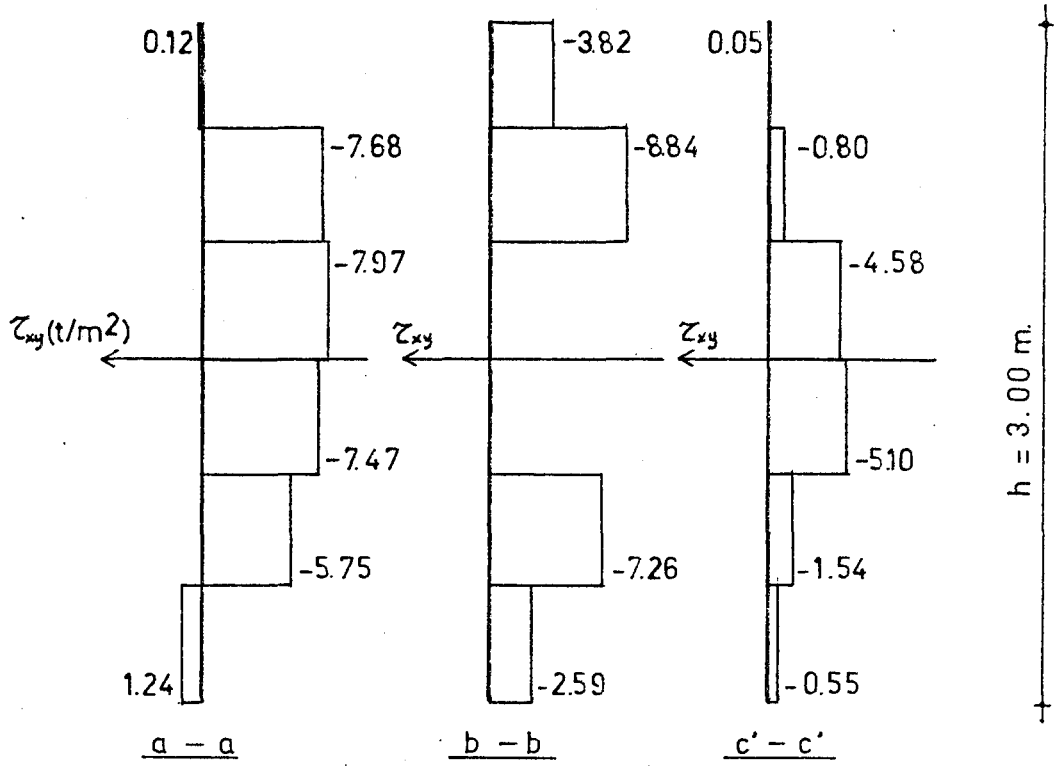
Bu örnekte de iki ucu ankastre açıklık boyunca $p=1$ t/m yayılı yük etkisindeki levhaya ait τ_{xy} gerilme dağılımları incelenmiştir.

Bu örneğe ait τ_{xy} gerilme dağılımları Şekil 5.13 'de gösterilen ve boşluk civarında bulunan a-a, b-b ve c-c (c'-c') kesitlerinde çizilmiştir. Şekil 5.15 'de gösterilmiştir.

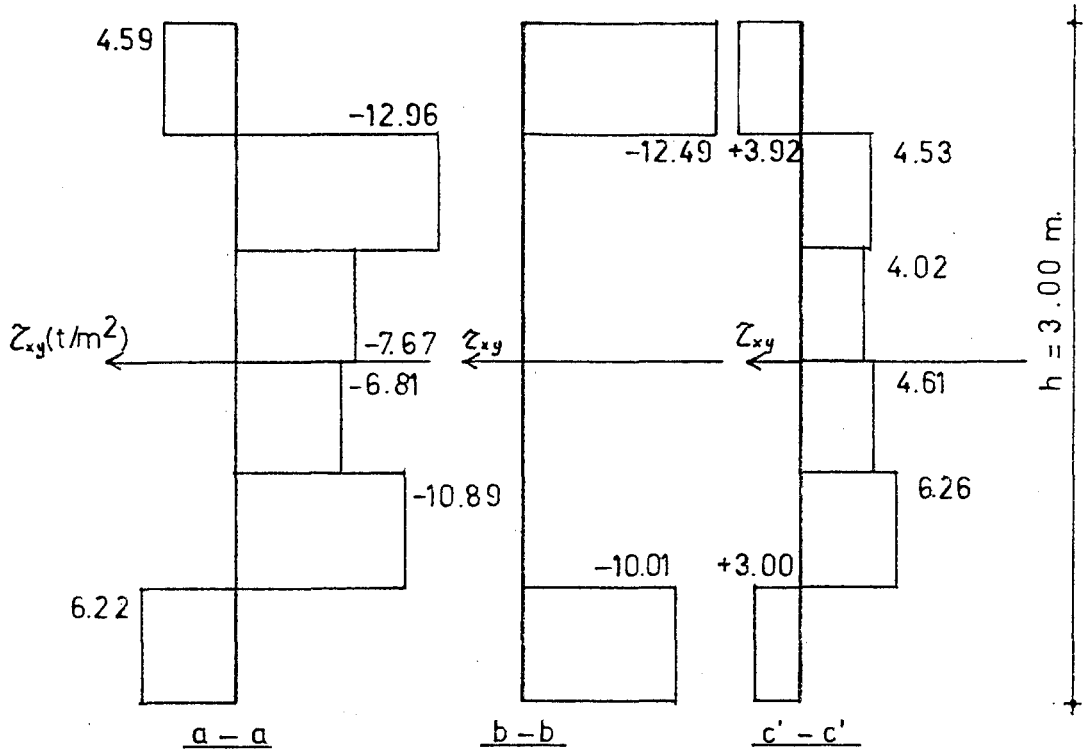


(A) Levhanın boşluksuz durumuna ait Z_{xy} gerilme dağılımı

(B) 1 no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı(C) 2 no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı



(D) 3 no'lu boşluk durumuna ait τ_{xy} gerilme dağılımı



(E) 4 no'lu boşluk durumuna ait ζ_{xy} gerilme dağılımı
Şekil 5.15 İki ucu ankastre, açıklık boyunca yayılı yük etkisindeki levhaya ait τ_{xy} gerilme dağılımları

5.2. B Modeline Ait Çözümler

Bu örneklerde $l=4,00$ m. , $h=9$ m. olan uç katlı ve tabanı ankastre bir levhanın yatay ve düşey yüklemeler altında biri boşluksuz olmak üzere uç değişik boşluk durumunda gerilmelerindeki değişimi ele alınacaktır.

Bu örneklere ait levha B modeli olarak isimlendirilmiş ve Şekil 5.16 'da verilmiştir.

B modelinde yapılan yükleme durumları kısaca şöyle özetlenebilir:

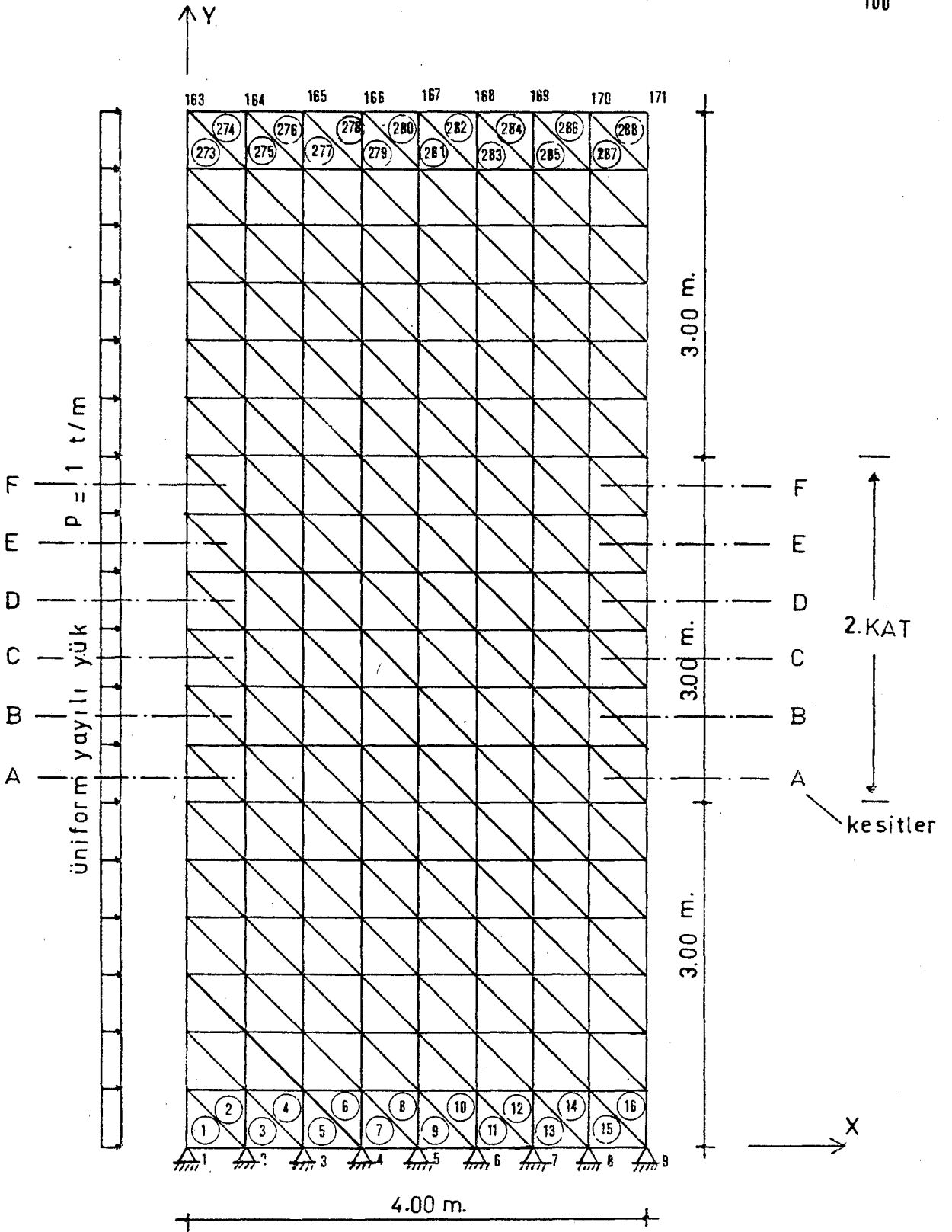
-Tabanı ankastre mesnetli levhanın sol taraftan etkiyen $p=1$ t/m yanal yük etkisi altında çözümü

-Tabanı ankastre levhanın üstten $p=1$ t/m düşey yük etkisi altında çözümü

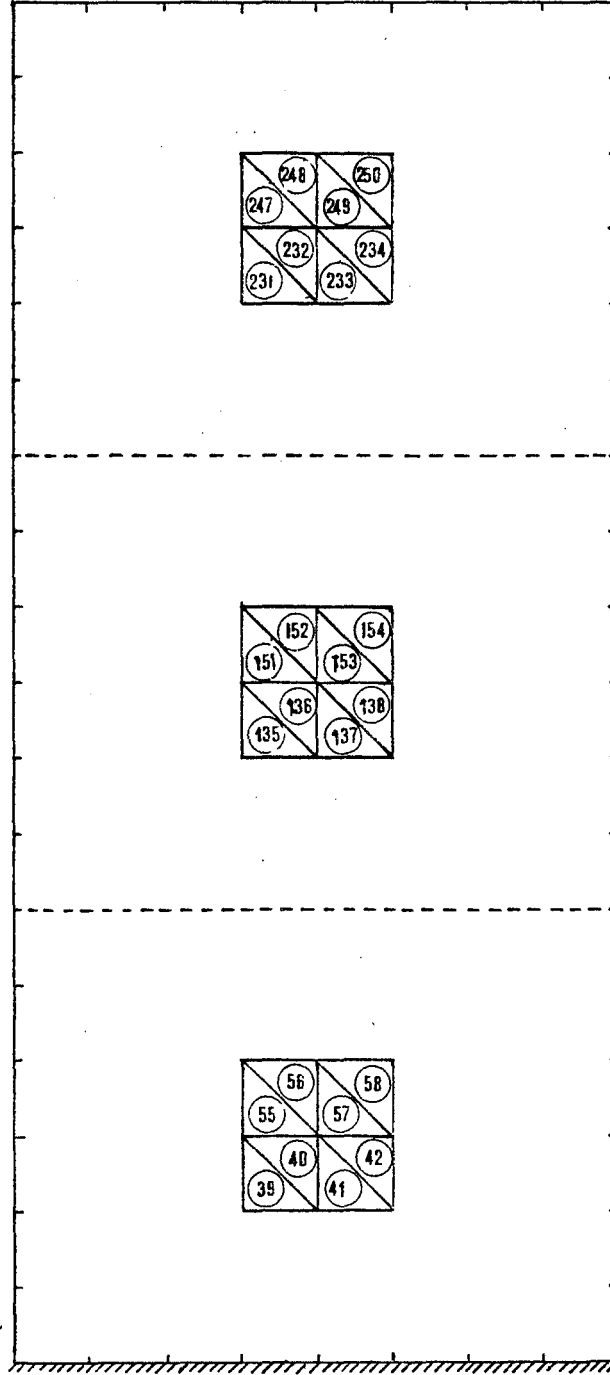
5.2.1. Tabanı ankastre mesnetli levhanın sol taraftan etkiyen $p=1$ t/m yanal yük etkisi altında çözümü

Bu örnekte biri boşluksuz diğer ikisi şekil 5.17 ve 5.18 'de verilmiş olan boşluk durumlarına ait uç adet çözüm yapılmıştır.

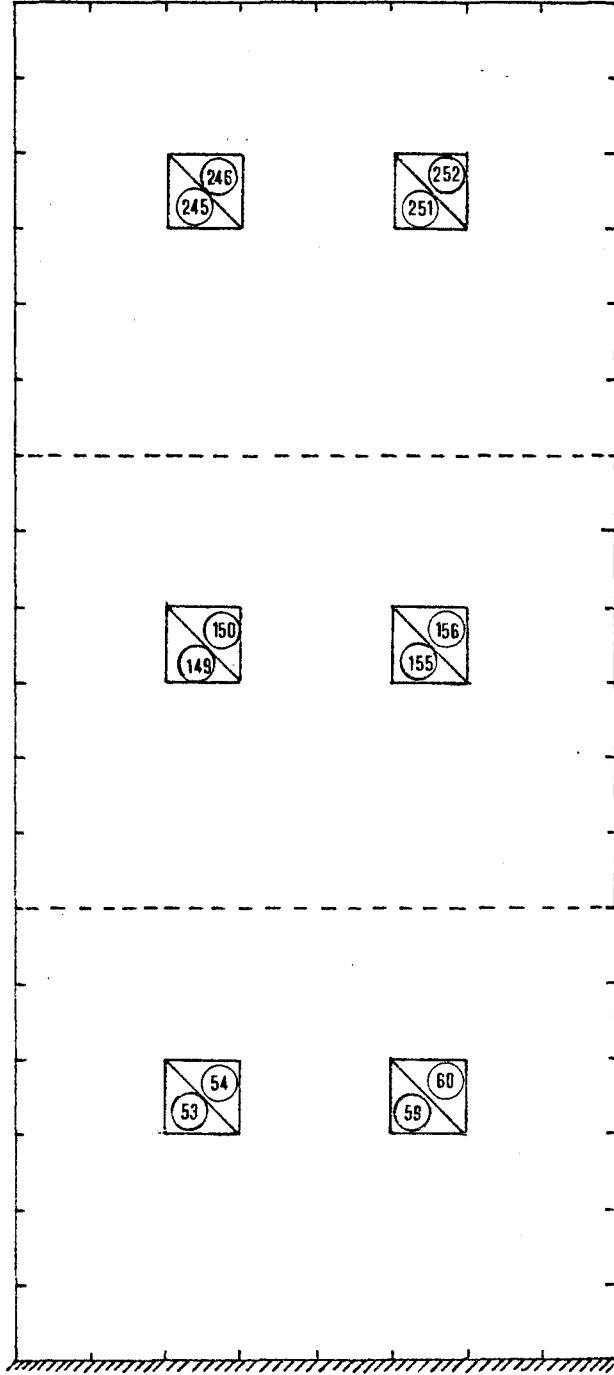
Bu çözümlerde B modeline ait 2 nci kat gerilmeleri grafik olarak gösterilmiştir. Grafikler sıra ile, boşluksuz duruma ait olanlar Şekil 5.19 ve 5.20 'de, 1 nolu boşluk durumuna ait olanlar Şekil 5.21 ve 5.22 'da 2 nolu boşluk durumuna ait olanlar Şekil 5.23 ve 5.24 'de gösterilmiştir.



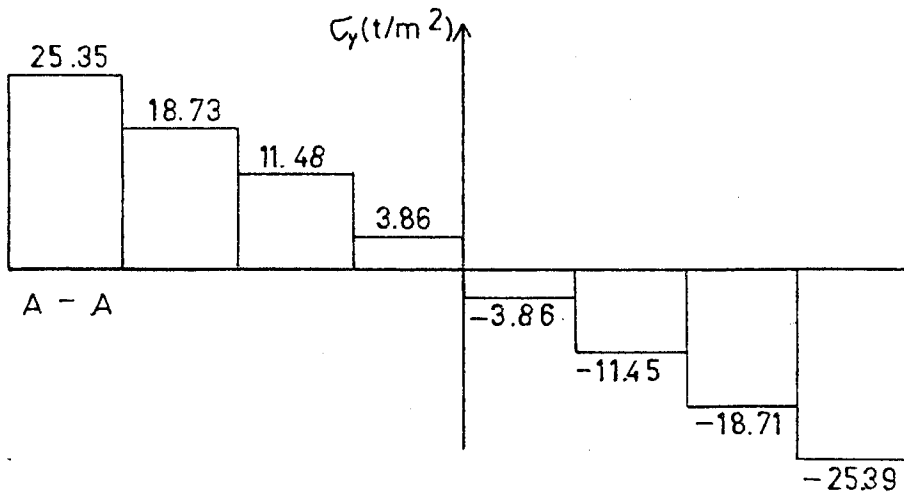
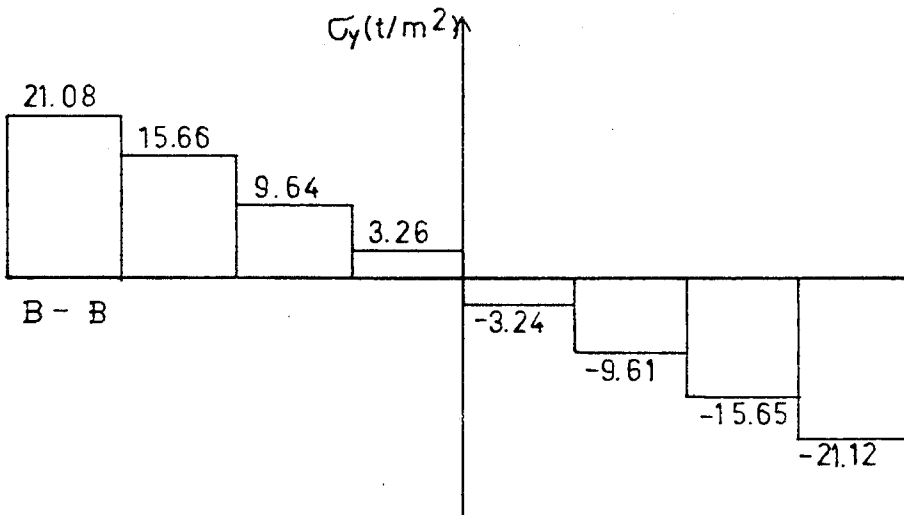
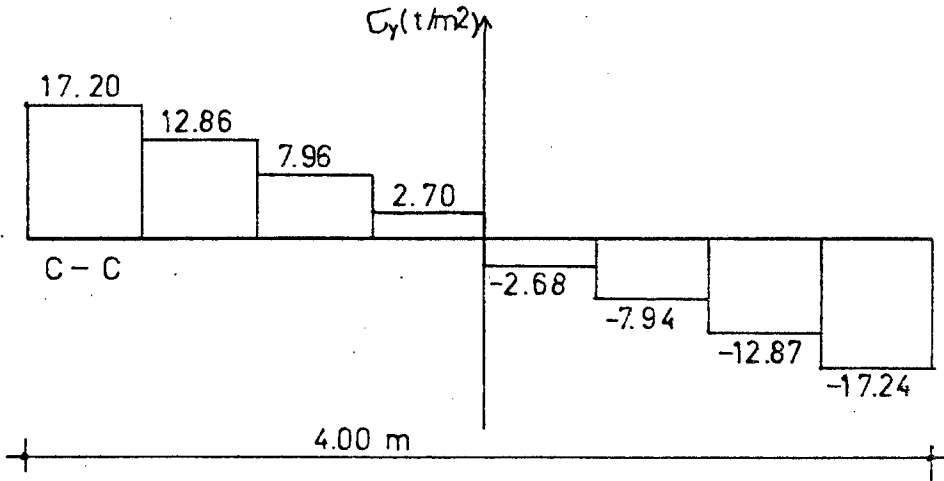
Şekil 5.16 B-Modeli



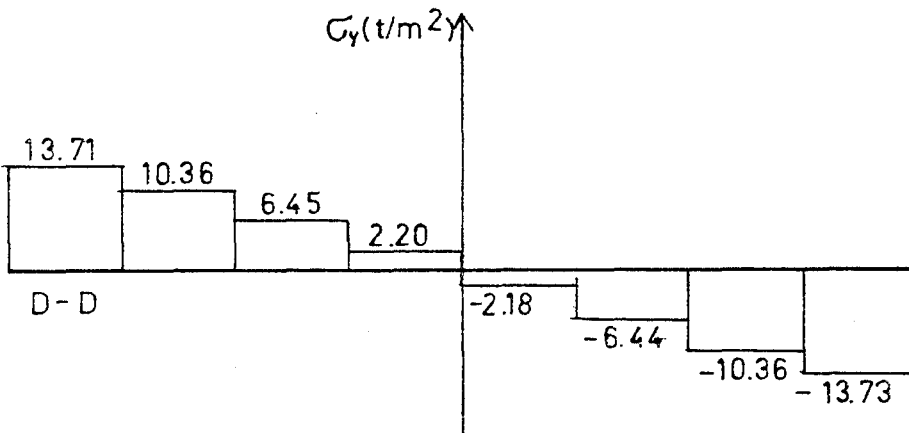
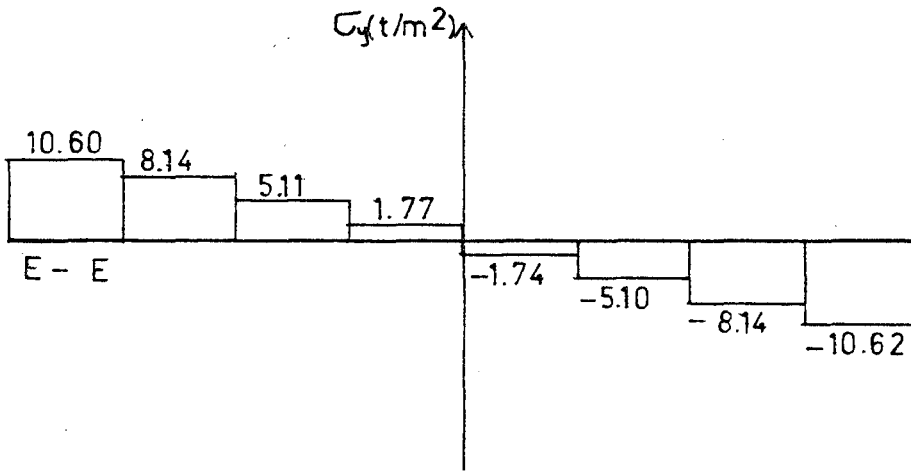
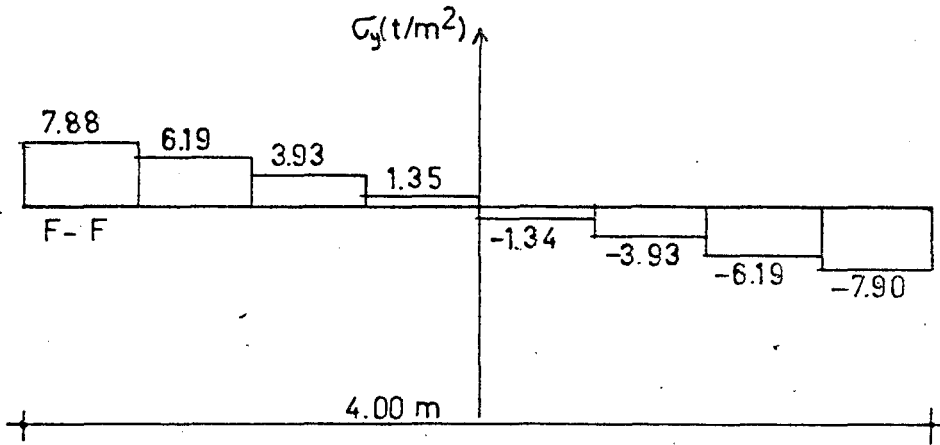
Şekil 5.17 B modeline uygulanan 1 no'lu boşluk durumu



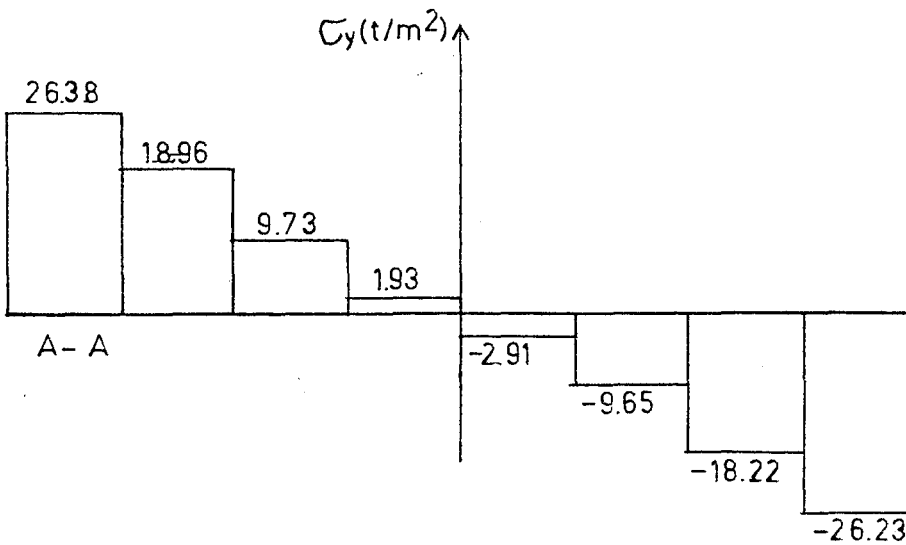
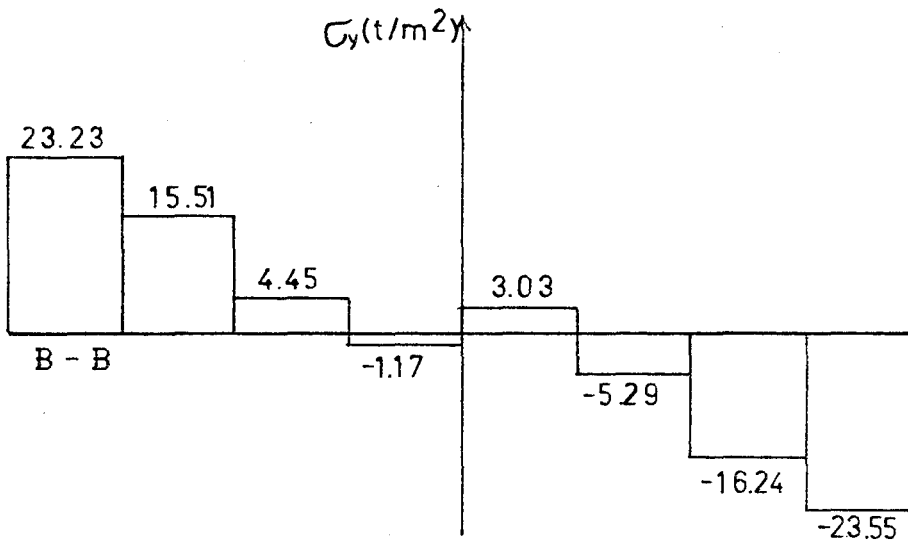
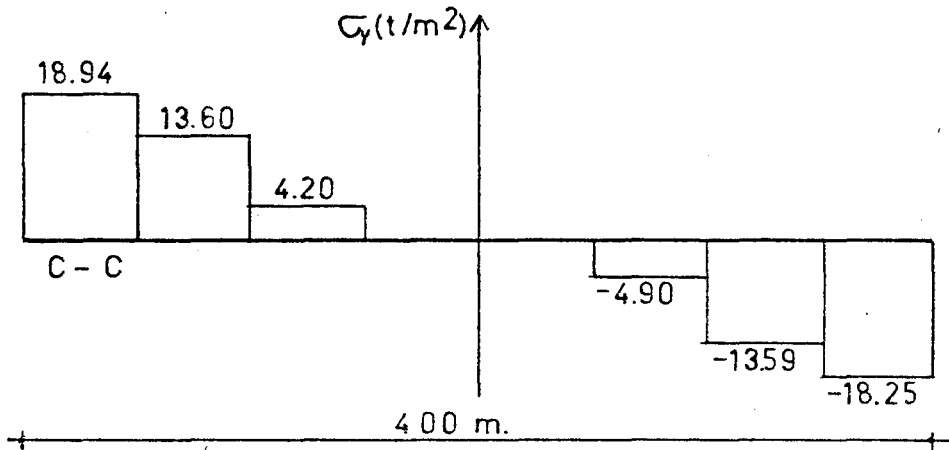
Şekil 5.18 B modeline uygulanan 2 no'lu boşluk durumu



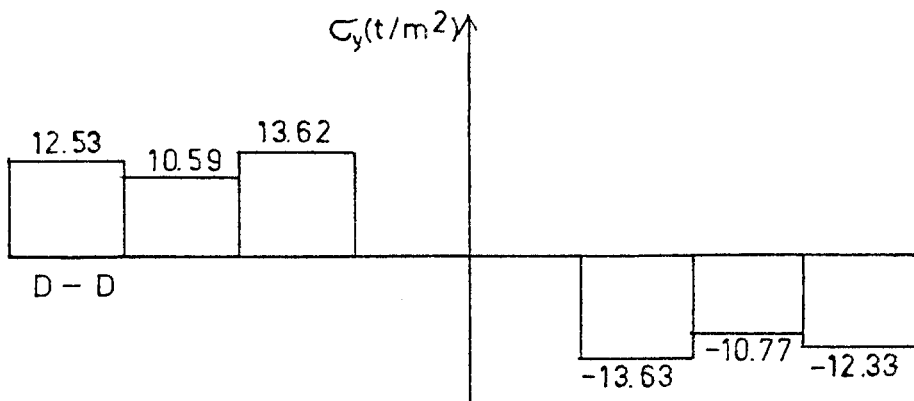
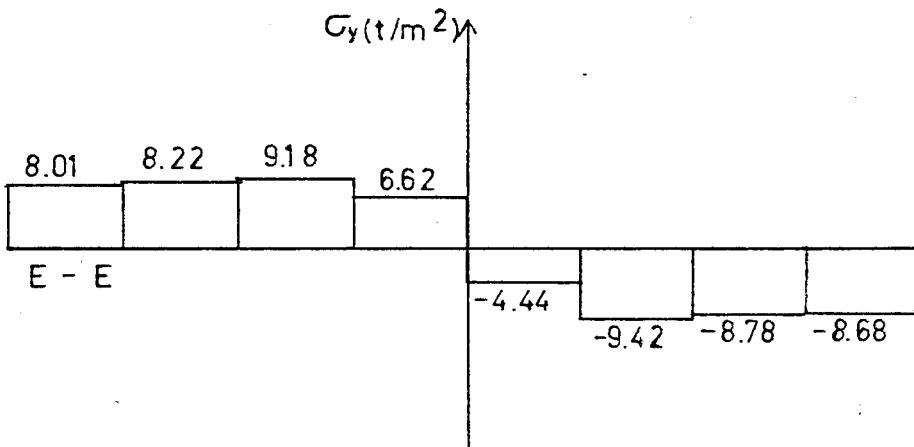
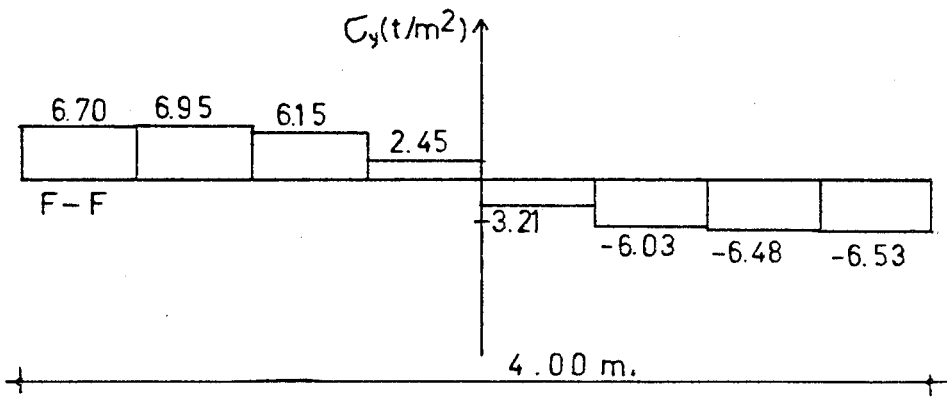
Şekil 5.19 Boşluksuz hal için 2.kat A-A, B-B, C-C kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı



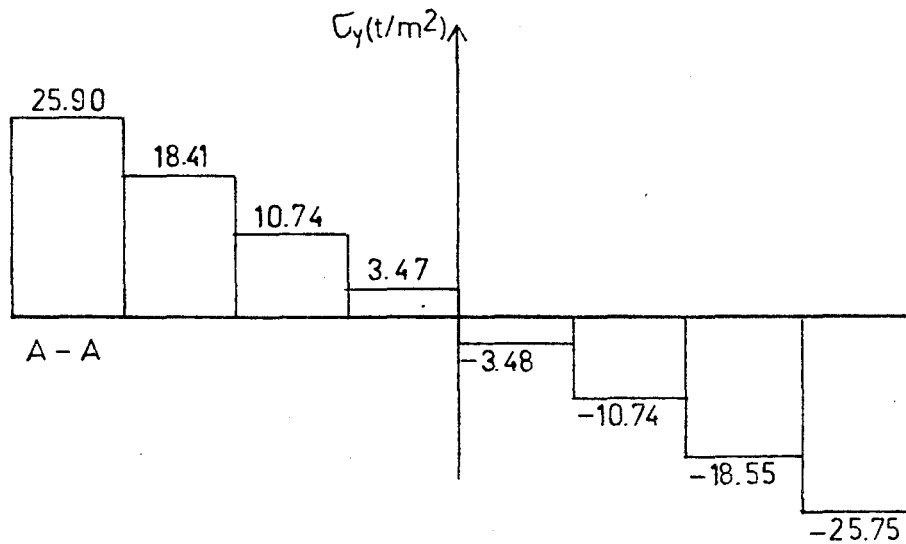
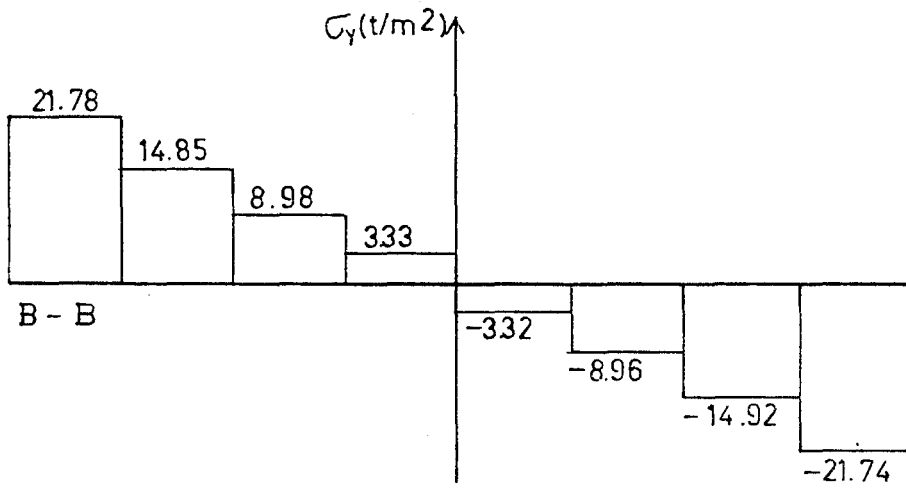
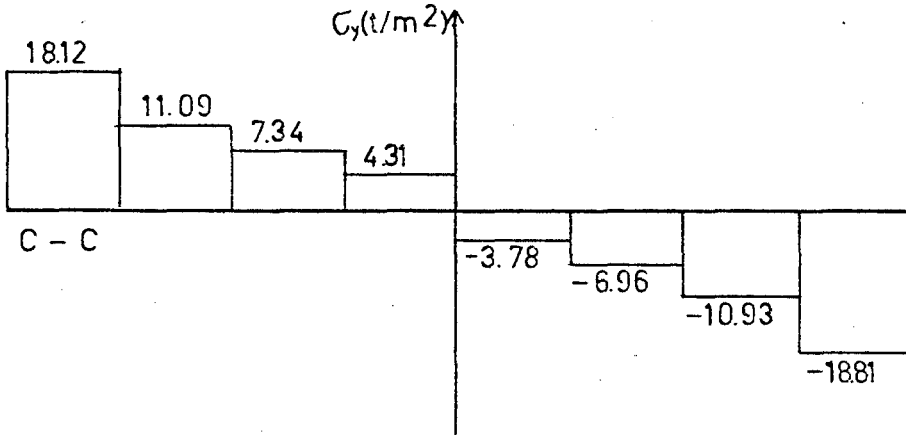
Şekil 5.20 Boşluksuz hal için 2.kat D-D E-E F-F kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı



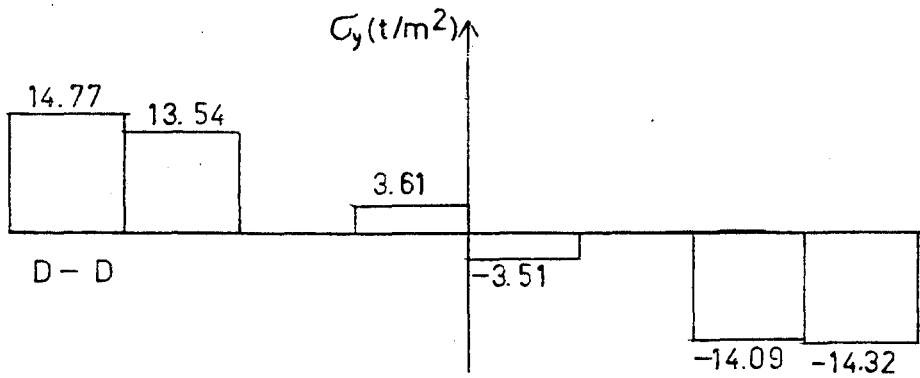
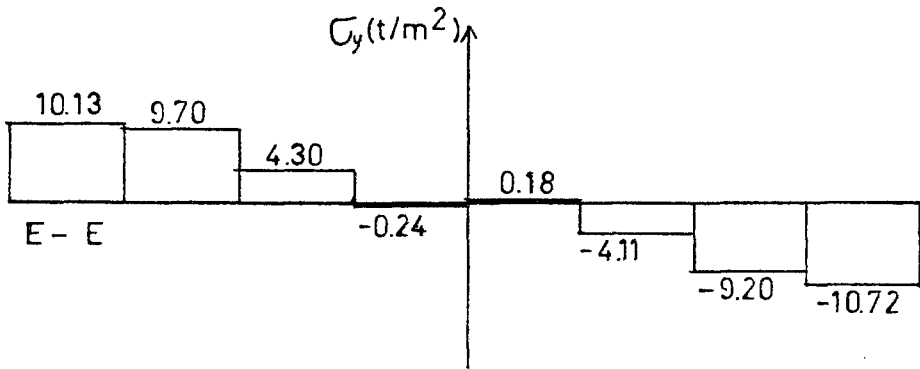
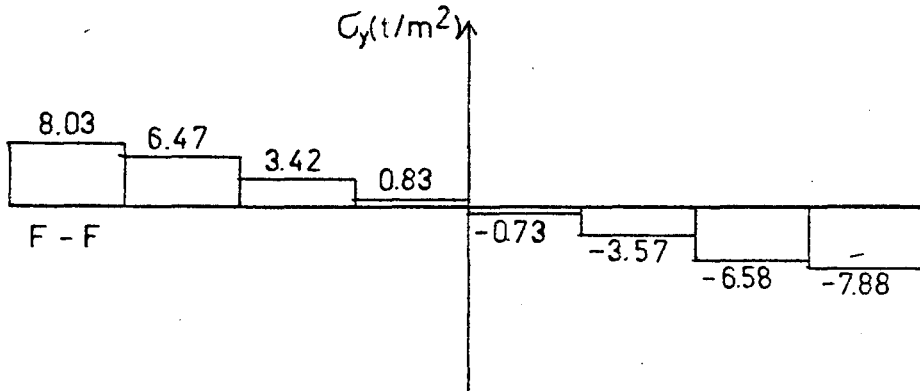
Şekil 5.211 nolu boşluk durumu için 2.kat A-A, B-B, C-C kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı



Şekil 5.22 1 no'lu boşluk durumu için 2. kat D-D, E-E, F-F kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı



Şekil 5.23 2 no'lu boşluk durumu için A-A, B-B, C-C kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı

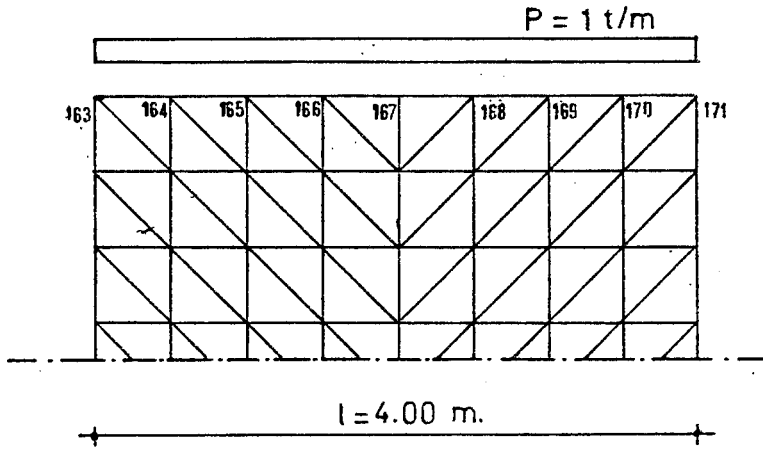


Şekil 5.24 2 nolu boşluk durumu için D-D, E-E, F-F kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı

5.2.2. Tabanı ankastre levhanın üstten $p=1$ t/m düşey yük etkisi altında çözümü

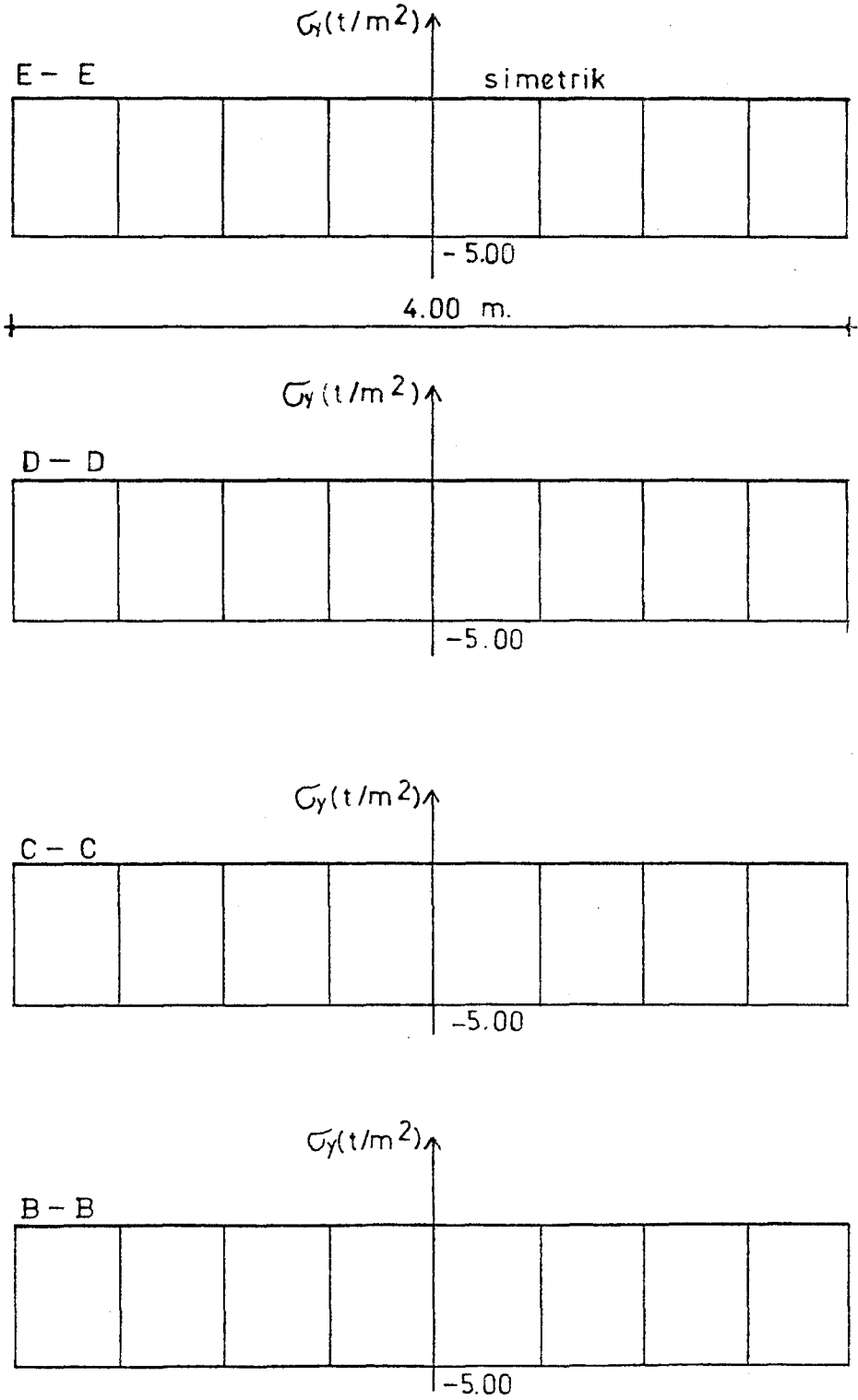
Şekil 5.16 'da verilen B modeli üstüne $p = 1$ t/m 'lik düşey yük uygulamasının değişik boşluk durumları için gerilmelerde meydana getireceği farklılık incelenmiştir.

B modeline ait düşey yükleme durumu Şekil 5.25 'de sunulmuştur.

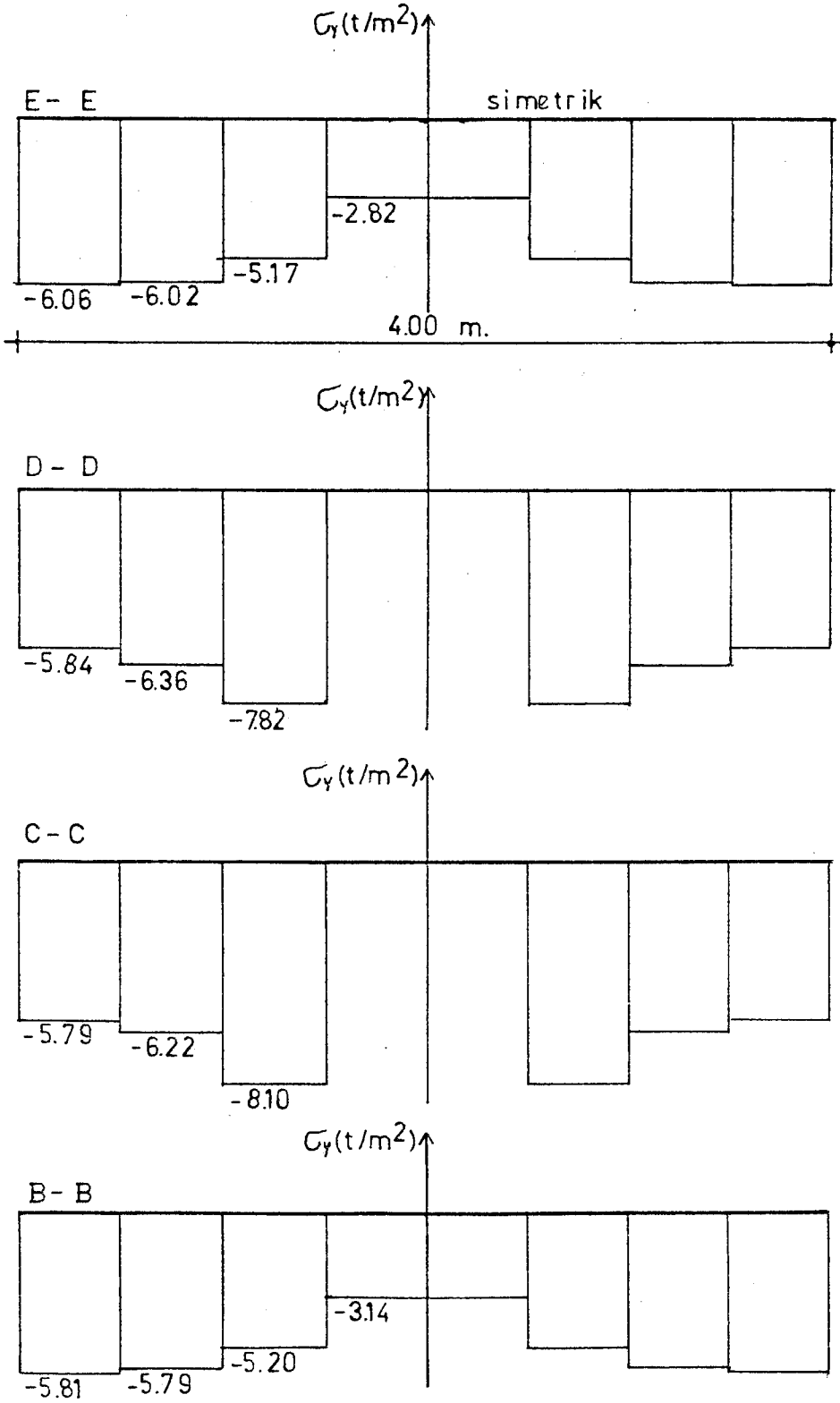


Şekil 5.25. B modeline ait düşey yükleme

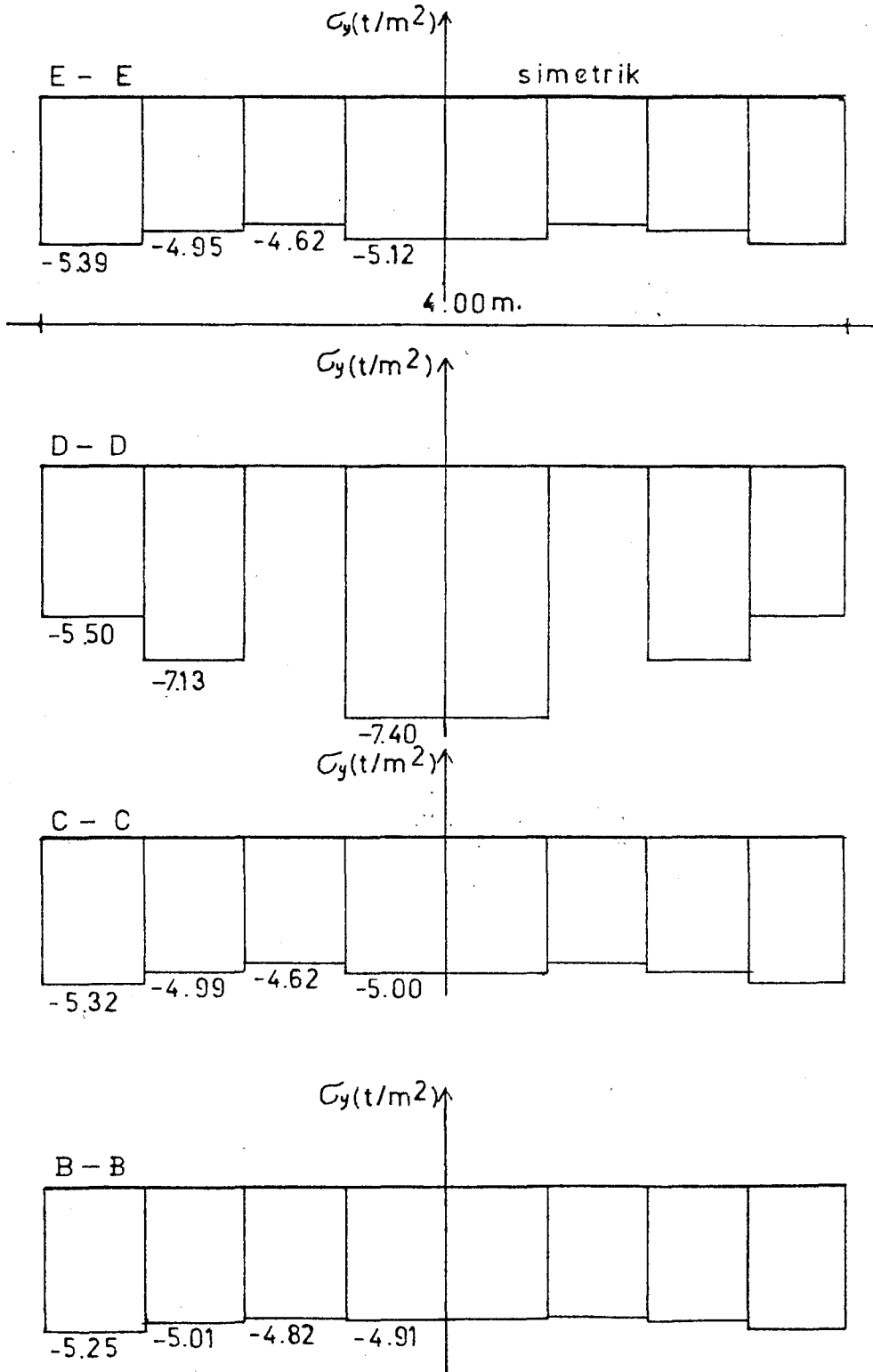
Yine Şekil 5.17 ve 5.18 'de gösterilen boşluk durumları için çözümler yapılmış, 2. kata ait gerilmeler şekil 5.26, 5.27 ve 5.28 'de verilmiştir.



Şekil 5.26 B modelinde boşluksuz durum için-düsey yük altında- B-B, C-C, D-D, E-E kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı



Şekil 5.27 B modelinde 1 no lu boşluk durumu için -düşey yük etkisinde- B-B, C-C, D-D, E-E kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı



Şekil 5.28 B modelinde 2 nolu boşluk durumu için -düşey yük etkisinde- B-B, C-C, D-D, E'E kesitlerine ait σ_y gerilme dağılımı

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir önceki bölümde A ve B modelleri için değişik mesnet, yükleme ve boşluk tiplerine göre örnekler çözülmüş ve bunlara ait çeşitli gerilme grafikleri çizilmişti. Sonlu elemanlar metodu ile çözülen bu örneklerde eleman sayısı daha fazla alınabilseydi belki biraz daha hassas sonuçlar elde edilebilirdi. Ancak mevcut bilgisayarların kapasitesinden dolayı elemanların sayısı daha fazla arttırılamadı.

A modeli için çözülen örneklere ait grafikler tam bir karşılaştırma yapmak amacıyla biri boşluktan geçen uç kesitte çizilmiştir.

B modeli için çözülen örneklere ait grafikler ise hem boşluklu hem de boşluksuz bölgelerde verilmeye çalışılmıştır.

Beşinci bölümde yapılan incelemelere dayanarak aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

A modeline ait bütün boşluksuz çözümlerden elde edilen σ_x gerilme diyagramlarından gerilmelerin lineere yakın bir dağılım gösterdiği ancak boşluklu modellerde bu şekilde düzenli bir gerilme dağılımı gözlenememiştir. Gerek boşluklu gerek boşluksuz modellerde tarafsız eksen $h/2$ 'nin altında kalmaktadır. Boşluklu modellerde tarafsız eksen daha aşağıya inmektedir .

Boşlukların bulunduğu bölgelerle aynı bölgelerin boşluksuz olarak çözümleri karşılaştırıldığında çok değişken değerler karşımıza çıkmaktadır. Ancak boşluğun bulunduğu kesitteki elemanlarda (boşluğun alt ve üstündeki elemanlarda) gerilmeler artmaktadır, özellikle bu artışlar boşluk köşelerine gelen elemanlarda daha fazla olmaktadır. Bu gerilmeler boşluk boyutlarına bağlı olarak 10 kata kadar artış göstermektedir. Boşluğun kenarından geçen kesitlerde boşluk hizasındaki elemanlarda gerilmeler azalırken, kesitin en üst ve en alt elemanlarında gerilmeler önemli miktarda artmaktadır.

Yine A modelinde boşluksuz bölgelerdeki kesitlerde gerilmeler karşılaştırıldığında boşluğa yakın kesitlerdeki gerilmelerde bir düzensizlik olmasına rağmen, daha sonraki kesitlerde bu dağılım düzelmekte ve normal boşluksuz hale ait gerilmelere yaklaşmaktadır. Ancak boşluk boyutlarının büyük olduğu 3 ve 4 nolu boşluk durumlarında bu yaklaşım görülmemektedir. Boşluğun etkisi büyük ölçüde diğer boşluksuz kesitlerde de devam etmektedir.

Kayma gerilmeleri ile ilgili örneklerden elde edilen sonuçlar şöyledir.

Boşluğun dört kenarında da her iki mesnet durumu için gerilme artışları olmaktadır.

a-a ve c-c kesitlerinde boşluk hizasındaki elemanlarda gerilme artışı hissedilir derecededir.

b-b kesitinde boşluğun üstündeki ve altındaki elemanlardaki gerilme artışı da büyüktür.

Kayma gerilmelerinin incelendiği iki örnekten elde edilen sonuçlara göre boşluğun dört kenarında da kayma gerilmeleri artmaktadır. Boşluksuz hale göre bu artış miktarları boşluğun bulunduğu kesitteki elemanlarda % olarak şöyledir.

	Basit M. tam yüklü %	Ankastre M. tam yüklü %
1 nolu boşluk durumu	27	37
2 nolu boşluk durumu	64	84
3 nolu boşluk durumu	74	93
4 nolu boşluk durumu	457	492

Boşluk civarında olmayan kesitlerde 4 nolu boşluk durumu haricinde kayma gerilmelerindeki artış önemini yitirmektedir.

B modelinin incelenmesinde de A modeli ile benzer sonuçlara varılmaktadır. Beşinci bölümde B modelinin tüm katlara ait çözümleri yapılmıştır. Ancak ikinci kata ait kesitlerde gerilme diyagramları sunulmuştur. Modele x eksenini doğrultusunda yatay kuvvet etkimesi halinde de boşluk bölgelerinde yine benzer gerilme artışları olmaktadır. B modeline ait 1 nolu boşluk durumunda meydana gelen gerilme artışları 2 nolu boşluk durumuna göre daha fazla olmaktadır. 2 nolu boşluk durumunda her katta iki boşluk olmasına rağmen burada gerilme artışı daha az olmaktadır. Bunun sebebi de buradaki 2 boşluğun alanının 1 nolu boşluk durumundaki 1 boşluğun alanından az olması olarak düşünülebilir.

B modelinde boşluklu ve boşluksuz durumlara ait gerilme diyagramlarında tarafsız eksenin yerinin fazla değişmediği görülmektedir.

B modelinin düşey yük etkisi altında boşluksuz ve yine her iki boşluk durumu için karşılaştırma yapılacak olursa boşluk kenarlarına ait gerilmelerde bir artış olduğu görülür. Boşluğun alt ve üst kesitlerinde boşluk hizasında gerilmelerde azalma olurken yan bölgelerde gerilme artışları olmaktadır.

Bu sebeplerden dolayı boşluk bulunan levhaların boşluk kenarlarında ve boşluğun bulunmadığı bölgelerinde de yukarıda belirtilen sonuçlar doğrultusunda gerekli tedbirlerin alınması gerekir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aydın, R., 1985, Yapı Statiği, Eskişehir.
- Bricas, M., İki Boyutlu Elastisite Teorisi, (Cinemre, V.), 1963, I.T.U. Kutuphanesi, 560.
- Christopher, J. B., Alan L. Yettram, and Mark Burnet., " The Elastic Stability of Square Perforated Plates" Computers Structures Vol.21 No 6, pp.1262-1272, 1985
- Haque, M., Rasheeduzzafar and Al-Tuyyib A.H.J., 1986, "Stress Distribution In Deep Beams With Web Openings" St. Divisions, Vol 112, No 5, May.1986, pp.1147-1165.
- Inan, M., 1969, Düzlemde Elastisite Teorisi, I.T.U. Kutuphanesi, 750
- Kong, F, K., and Sharp, G. R., " Structural Idealization for Deep Beams with Web Opening", Magazine of Concrete Research, Vol 29, No 99, June 1977, pp.89-95.
- Kong, F, K., et al., " Structural Idealization for Deep Beams with Web Opening", Proceedings of instation of civil engineering, Part 2 No 69, Dec 1980. pp.939-958.
- Przemieniecki, J. S., 1968. Theory Of Matrix Structural Analysis, Mc Graw-Hill Book Inc.
- Timoshenko, and Gaudier, I. N., (Çev. Kavan. I. ve Suhubi. E.) 1969, İTÜ Kutuphanesi, 757.
- Topçu, A., 1989, Ders Notları, Eskişehir.
- Topçu, A., 1987, Mikro Mühendis, Eskişehir.
- Unluoğlu, E., 1988, Ders Notları, Eskişehir.
- Yettram, A, L. and Brown, C, J., " The Elastic Stability of Square Perforated Plates Under Bi-Axial Loading" Computers Structures Vol.22 No 4, pp.589-594, 1986

Ek 1 Sonlu Elemanlar Levha Programı:

Programdaki datalar aşağıdaki şekilde verilir:

1. Problemin adı

2. Sistemin eleman sayısı, düğüm noktası sayısı, kuvvet sayısı, sınır şartı sayısı, varsa ısı etkisindeki eleman sayısı ve ısı uzama katsayısı

3. Sistemin elastisite modülü ve Poisson oranı

4. Levha kalınlığı

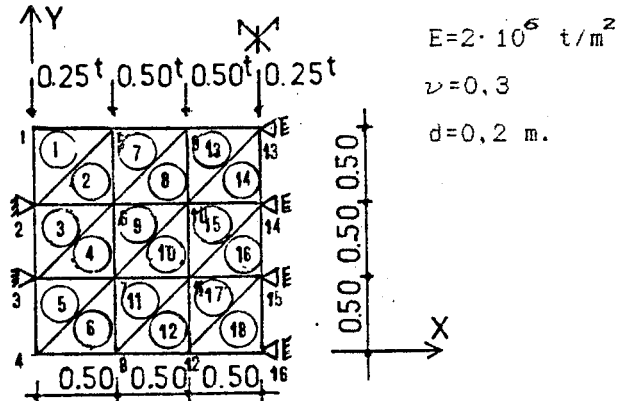
5. Elemanların düğüm noktaları

6. Düğüm noktalarının koordinatları

7. Düğüm noktalarına uygulanan kuvvetler ve yönleri

8. Düğüm noktalarında sınır şartları ve yönleri

Örnek olarak şekil A 'da, iki kenarı da basit mesnetli 18 elemanlı bir sistem alınmış ve buna ait datalar programın sonuna yazılmıştır.



Şekil A

```

10 'IBM+UYUMLULAR ICIN
20
100 CLS:INPUT "E-YAZICI   0-EKRAN=":KA#
101 KA%=VAL(KA%):IF KA%>8 AND KA%<>0 THEN BEEP:GOTO 100
102 IF KA%=8 THEN DIV#="LPRT1:" ELSE DIV#="SCRN:"
110 KA%=1:OPEN "0".#KA%.DIV#
111
120 PRINT #KA%." M I K R D M U H E N D I S"
130 PRINT #KA%."VERSION:01/ESKISEHIR 1986/Ahmet TOPCU"
140 PRINT #KA%.
150 PRINT #KA%.
160 PRINT #KA%."      LEVHALARIN STATIK HESABI "
170 PRINT #KA%."      SONLU ELEMANLAR METODU"
180 PRINT #KA%."      (deplasman metodu)"
190 PRINT #KA%.
200  hata listesi
210 HATA0#="----->verilerde hata var !"
220 HATA1#="----->eleman no hatali !"
230 HATA2#="----->nokta no hatali !"
240 HATA3#="----->verilerin sirasi yanlis !"
250 HATA4#="----->hatali yon tarifi !"
260 HATA5#="----->daha oncece verildi !"
270 HATA6#="----->sistem labil !"
280 D1#="ANA VERILER"
290 D2#="ELEMANLARIN TARIFI"
300 D3#="KORDINATLAR"
310 D4#="KUVVETLER"
320 D5#="ISI DEGERLERI"
330 D6#="SINIR SARTLARI"
340 D7#="SON"
350 ' onemli degiskenlerin tarifi
360 ' EG%=eleman sayisi
370 ' NS%=nokta sayisi
380 ' KS%=verilmis kuvvet sayisi
390 ' SS%=verilmis SINIR sarti sayisi
400 ' IEX%=isi etkisindeki eleman sayisi
410 ' SD%=sistemin serbestlik derecesi
420 ' E=elastisite modulu
430 ' NU=poisson oranı
440 ' D=levha kalinligi
450 ' ALFA%=isi uzama(kisalma) katsayisi
460 ' ED matrisi=eleman datalari
470 ' XY matrisi=noktaların koordinatları
480 ' LR matrisi=elemanın lokal rijitlik matrisi
490 ' GR matrisi=elemanın global rijitlik matrisi
500 ' BR matrisi=sistem rijitlik matrisi
510 ' P  matrisi=kuvvet vektörü
520 ' U  matrisi=elemanın deplasman vektörü
530 ' DEF=verilmiş deplasman
540 ' NSD%=bir noktanın serbestlik derecesi
550 ' ENS%=elemanın nokta sayisi
560 ' band%*1=yarı band genişliği
570 NSD%=2
580 ENS%=3
590 ' ana veriler
600 HATA#="YDK"

```

```

610 READ DO#
620 IF DO#<DB1# THEN PRINT #KAZ,HATA3#:GOTO 1010
630 READ PROBLEMADI#
640 PRINT #KAZ.
650 PRINT #KAZ,"TROBLEM:";PRINT #KAZ,PROBLEMADI#
660 PRINT #KAZ.
670 READ ES%,NS%,KS%,SS%,IE%
680 READ E,NU,D,ALFA
690 SD%=NS%*NSD%
700 PRINT #KAZ.
710 PRINT #KAZ,"eleman savisi.....=";ES%
720 PRINT #KAZ,"nokta savisi.....=";NS%
730 PRINT #KAZ,"kuvvet sayisi.....=";KS%
740 PRINT #KAZ,"sinir sarti savisi.....=";SS%
750 PRINT #KAZ,"elestisite modulu.....=";E
760 PRINT #KAZ,"poisson oranı.....=";NU
770 PRINT #KAZ,"levha kalınlıgi.....=";D
780 PRINT #KAZ,"isi etkisindeki eleman savisi..=";ABS(IE%)
790 PRINT #KAZ,"isi uzama (kısılma) katsayisi..=";ALFA
800 PRINT #KAZ,"sistemin serbestlik derecesi...=";SD%
810 IF ES%<1 OR NS%<3 THEN HATA#="VAR"
820 IF KS%<0 OR KS%>SD%-SS% THEN HATA#="VAR"
830 IF SS%<3 OR SS%>SD%-KS% THEN HATA#="VAR"
840 IF E:=0 OR NU<0 OR NU>5 THEN HATA#="VAR"
850 IF D:=0 THEN HATA#="VAR"
860 IF IE%=-EE% GOTO 890
870 IF IE%<0 OR IE%>ES% THEN HATA#="VAR"
880 IF IE%<0 AND ALFA=0 THEN HATA#="VAR"
890 IF ALFA<0 AND IE%<0 THEN HATA#="VAR"
900 IF HATA#="VAR" THEN PRINT #KAZ,HATA3#:GOTO 1010
910 DIM ED(ES%,4),Xy(NE%,2),BR(6,6),U(6)
920   eleman tarifi
930 READ DO#
940 IF DO#<DB2# THEN PRINT #KAZ,HATA3#:GOTO 1010
950 BANDA=0
960 PRINT #KAZ,"ELEMANLARIN TARIFI:"
970 PRINT #KAZ,"eleman","i-noktasi","a-noktasi","k-noktasi"
980 FOR J%=1 TO ES%
990 READ E1%,IN%,JN%,KN%
1000 PRINT #KAZ,E1%,IN%,JN%,KN%
1010 IF E1%<1 OR E1%>ES% THEN PRINT #KAZ,HATA1#:HATA#="VAR"
1020 IF IN%<1 OR IN%>NS% THEN PRINT #KAZ,HATA2#:HATA#="VAR"
1030 IF JN%<1 OR JN%>NS% THEN PRINT #KAZ,HATA2#:HATA#="VAR"
1040 IF KN%<1 OR KN%>NS% THEN PRINT #KAZ,HATA2#:HATA#="VAR"
1050 IF IN%=JN% OR IN%=KN% THEN PRINT #KAZ,HATA2#:HATA#="VAR"
1060 IF JN%=KN% THEN PRINT #KAZ,HATA2#:HATA#="VAR"
1070 IF ED(E1%,1)<0 THEN PRINT #KAZ,HATA5#:HATA#="VAR"
1080 IF HATA#="VAR" GOTO 1010
1090 ED(E1%,1)=IN%
1100 ED(E1%,2)=JN%
1110 ED(E1%,3)=KN%
1120 I1%=ABS(IN%-JN%)
1130 J1%=ABS(JN%-KN%)
1140 K1%=ABS(KN%-IN%)
1150 IF I1%>BANDA THEN BANDA=I1%

```

```

1160 IF J1X>BANDX THEN BANDX=J1X
1170 IF K1X>BANDX THEN BANDX=K1X
1180 NEXT JX
1190 BANDX=(BANDX+1)*NSDX-1
1200 PRINT #KAX,"DENKLEM SAYISI.....=":SDX-SSX
1210 PRINT #KAX,"REAKSIYON SAYISI...=":SSX
1220 PRINT #KAX,"YARI BAND GENISLIGI=":BANDX+1
1230 DIM SR(SDX,BANDX+1),F(SDX+BANDX+1,1),SS(SDX+BANDX+1,3)
1240 ' noktaların koordinatları
1250 READ D0#
1260 IF D0#<>D3# THEN PRINT #KAX,HATA3#:GOTO 1010
1270 PRINT #KAX,"NOKTALARIN KOORDINATLARI:"
1280 PRINT #KAX,"nokta","X","Y"
1290 FOR JX=1 TO NSX
1300 READ KX,X,Y
1310 PRINT #KAX,KX,X,Y
1320 IF KX<1 OR KX>NSX THEN PRINT #KAX,HATA2#:HATA#="VAR"
1330 IF XY(KX,1)<>0 THEN PRINT #KAX,HATA5#:HATA#="VAR"
1340 IF XY(KX,2)<>0 THEN PRINT #KAX,HATA5#:HATA#="VAR"
1350 IF HATA#="VAR" GOTO 1010
1360 XY(KX,1)=X
1370 XY(KX,2)=Y
1380 NEXT JX
1390 ' kuvvetler
1400 READ D0#
1410 IF D0#<>D4# THEN PRINT #KAX,HATA3#:GOTO 1010
1420 PRINT #KAX,"VERILMIS KUVVETLER:"
1430 IF KSX=0 THEN PRINT #KAX,"verilmis kuvvet yok":GOTO 100
1440 PRINT #KAX,"nokta","yon","kuvvet"
1450 FOR JX=1 TO KSX
1460 READ KX,YONX,KUV
1470 PRINT #KAX,KX,YONX,KUV
1480 IF KX<1 OR KX>NSX THEN PRINT #KAX,HATA2#:HATA#="VAR"
1490 IF YONX<1 OR YONX>2 THEN PRINT #KAX,HATA4#:HATA#="VAR"
1500 DZX=NSDX*KX-NSDX+YONX
1510 IF F(DZX,1)<>0 THEN PRINT #KAX,HATA5#:HATA#="VAR"
1520 IF HATA#="VAR" GOTO 2470
1530 F(DZX,1)=KUV
1540 NEXT JX
1550 ' elemanlardaki isi degerleri
1560 READ D0#
1570 IF D0#<>D5# THEN PRINT #KAX,HATA3#:GOTO 2470
1580 PRINT #KAX,"VERILMIS ISI DEGERLERI:"
1590 IF IEX=0 THEN PRINT #KAX,"isi etkisi yok" :GOTO 1760
1600 PRINT #KAX,"eleman","isi"
1610 FOR IX=1 TO ABS(IEX)
1620 READ E1X,T
1630 PRINT #KAX,E1X,T
1640 IF E1X<1 OR E1X>ESX THEN PRINT #KAX,HATA1#:HATA#="VAR"
1650 IF ED(E1X,4)<>0 THEN PRINT #KAX,HATA5#:HATA#="VAR"
1660 IF HATA#="VAR" GOTO 2470
1670 IF IEX=-ESX GOTO 1710
1680 GOSUB 3390
1690 NEXT IX
1700 GOTO 1760

```

```

1710 PRINT #KAZ,"butun diger elemanlarda da ayni isi etkisi var"
1720 FOR E1%=1 TO ES%
1730 GOSUB 3390
1740 NEXT E1%
1750 ' SINIR sartlari
1760 READ D0#
1770 IF D0#<>D6# THEN PRINT #KAZ,HATA3#:GOTO 2470
1780 PRINT #KAZ,"VERILMIS SINIR SARTLARI:"
1790 PRINT #KAZ,"nokta","yon","deplasman"
1800 FOR I%=1 TO SS%
1810 READ K%,YON%,DEP
1820 PRINT #KAZ,K%,YON%,DEP
1830 IF K%<1 OR K%>NS% THEN PRINT #KAZ,HATA2#:HATA#="VAR"
1840 IF YON%<1 OR YON%>2 THEN PRINT #KAZ,HATA4#:HATA#="VAR"
1850 J%=NSD%*K%-NSD%+YON%
1860 IF SS(J%.1)<>0 THEN PRINT #KAZ,HATA5#:HATA#="VAR"
1870 IF HATA#="VAR" GOTO 2470
1880 SS(J%.1)=YON%
1890 SS(J%.2)=DEP
1900 NEXT I%
1910 READ D0#
1920 IF D0#<>D7# THEN PRINT #KAZ,HATA3#:GOTO 2470
1930 ' sistemin rijitlik matrisi
1940 GOSUB 3140
1950 ' deplasman kuvvetleri
1960 FOR J%=1 TO SD%
1970 DEP=SS(J%.2)
1980 IF DEP<>0 THEN GOSUB 3600
1990 NEXT J%
2000 ' SINIR sartlarinin islenmesi
2010 FOR J%=1 TO SD%
2020 IF SS(J%.1)=0 GOTO 2050
2030 DEP=SS(J%.2)
2040 GOSUB 3700
2050 NEXT J%
2060 ' denklem sisteminin cozumu
2070 GOSUB 3780
2080 FOR I%=1 TO SD%
2090 F(I%.1)=F(I%.1)/E
2100 NEXT I%
2110 IF HATA#="TEKIL" THEN PRINT #KAZ,HATA6#: GOTO 2470
2120 PRINT #KAZ,"DEPLASMANLAR:"
2130 PRINT #KAZ,"nokta","1-yonu","2-yonu"
2140 FOR I%=1 TO NS%
2150 PRINT #KAZ,I%,F(2*I%-1.1),F(2*I%,1)
2160 NEXT I%
2170 ' gerilmeler
2180 PRINT #KAZ,"GERILMELER:"
2190 PRINT #KAZ,"eleman"."sigma-xx","sigma-yy","sigma-xy"
2200 FOR E1%=1 TO ES%
2210 GOSUB 2920
2220 PRINT #KAZ,E1%,X,Y,Z
2230 NEXT E1%
2240 ' reaksiyonlar
2250 PRINT #KAZ,"REAKSIYONLAR:"

```



```

2260 PRINT #KAZ,"nokta","yon","reaksiyon"
2270 FOR I%=1 TO SD%
2280 SR(I%,1)=0
2290 NEXT I%
2300 GOSUB 3140
2310 FOR J%=1 TO SD%
2320 YON%=SS(J%,1)
2330 IF YON%=0 GOTO 2450
2340 A=0
2350 FOR K%=2 TO BAND%+1
2360 J2%=J%-1+K%
2370 A=A+SR(J%,K%)*P(J2%,1)
2380 IF J%<K% GOTO 2410
2390 J1%=J%+1-K%
2400 A=A+SR(J1%,K%)*P(J1%,1)
2410 NEXT K%
2420 A=E*(A+SR(J%,1)*P(J%,1))+SS(J%,3)
2430 K%=(J%-YON%+2)/2
2440 PRINT #KAZ,K%,YON%,A
2450 NEXT J%
2460 PRINT #KAZ,"----- H E S A P S O N U -----"
2470 END
2480 ' elemanın geometrik özellikleri
2490 ' ucgen eleman
2500 IN%=ED(E1%,1)
2510 JN%=ED(E1%,2)
2520 KN%=ED(E1%,3)
2530 X1=XY(IN%,1);Y1=XY(IN%,2)
2540 X2=XY(JN%,1);Y2=XY(JN%,2)
2550 X3=XY(KN%,1);Y3=XY(KN%,2)
2560 X31=X3-X1;X32=X3-X2;X21=X2-X1
2570 Y31=Y3-Y1;Y32=Y3-Y2;Y21=Y2-Y1
2580 A=.5*(X32*Y21-X21*Y32)
2590 RETURN
2600 ' elemanın global rijitlik matrisi
2610 ' ucgen eleman
2620 S1=D/4/A/(1-NU*NU)
2630 S2=D/8/A/(1+NU)
2640 BR(1,1)=S1*Y32*Y32+S2*X32*X32
2650 BR(2,1)=-S1*NU*S2)*Y32*X32
2660 BR(2,2)=S1*X32*X32+S2*Y32*Y32
2670 BR(3,1)=-S1*Y32*Y31-S2*X32*X31
2680 BR(3,2)=S1*NU*X32*Y31+S2*Y32*X31
2690 BR(3,3)=S1*Y31*Y31+S2*X31*X31
2700 BR(4,1)=S1*NU*Y32*X31+S2*X32*Y31
2710 BR(4,2)=-S1*X32*X31-S2*Y32*Y31
2720 BR(4,3)=-S1*NU*S2)*Y31*X31
2730 BR(4,4)=S1*X31*X31+S2*Y31*Y31
2740 BR(5,1)=S1*Y32*Y21+S2*X32*X21
2750 BR(5,2)=-S1*NU*X32*Y21-S2*Y32*X21
2760 BR(5,3)=-S1*Y31*Y21-S2*X31*X21
2770 BR(5,4)=S1*NU*X31*Y21+S2*Y31*X21
2780 BR(5,5)=S1*Y21*Y21+S2*X21*X21
2790 BR(6,1)=-S1*NU*Y32*X21-S2*X32*Y21
2800 BR(6,2)=S1*X32*X21+S2*Y32*Y21

```

```

2810 BR(6,3)=S1*NU*Y31*X21+S2*X31*Y21
2820 BR(6,4)=-S1*X31*X21-S2*Y31*Y21
2830 BR(6,5)=- (S1*NU+S2)*Y21*X21
2840 BR(6,6)=S1*X21*X21+S2*Y21*Y21
2850 FOR IX=1 TO 6
2860 FOR JX=IX+1 TO 6
2870 BR(IX,JX)=BR(JX,IX)
2880 NEXT JX
2890 NEXT IX
2900 RETURN
2910 ' gerilme hesabı
2920 GOSUB 2500
2930 GOSUB 3060
2940 S1=E/2/A/(1-NU*NU)
2950 X=Y32*U(1)-NU*X32*U(2)-Y31*U(3)
2960 Y=X+NU*X31*U(4)+Y21*U(5)-NU*X21*U(6)
2970 A=S1*X+ED(E1X,4)
2980 Y=NU*Y32*U(1)-X32*U(2)-NU*Y31*U(3)
2990 Y=Y+X31*U(4)+NU*Y21*U(5)-X21*U(6)
3000 Y=S1*Y+ED(E1X,4)
3010 S1=S1*(1-NU)/2
3020 Z=-X32*U(1)+Y32*U(2)+X31*U(3)-Y31*U(4)-X21*U(5)+Y21*U(6)
3030 Z=Z*S1
3040 RETURN
3050 ' eleman deplasmanlari
3060 FOR IX=1 TO ENSX
3070 I1X=NSDX*ED(E1X,IX)-1
3080 J1X=NSDX*ED(E1X,IX)
3090 U(NSDX*I1X-1)=F(I1X,1)
3100 U(NSDX*I1X)=P(J1X,1)
3110 NEXT IX
3120 RETURN
3130 ' sistem rijitlik matrisi
3140 FOR E1X=1 TO ESX
3150 GOSUB 2500
3160 GOSUB 2620
3170 ' eleman rijitliginin sistem rijitligine eklenmesi
3180 I1X=NSDX*I1X-NSDX
3190 J1X=NSDX*J1X-NSDX
3200 K1X=NSDX*K1X-NSDX
3210 U(1)=I1X+1
3220 U(2)=I1X+2
3230 U(3)=J1X+1
3240 U(4)=J1X+2
3250 U(5)=K1X+1
3260 U(6)=K1X+2
3270 FOR I1X=1 TO 6
3280 IX=U(I1X)
3290 FOR J1X=1 TO 6
3300 JX=U(J1X)
3310 IF JX<IX GOTO 3340
3320 J2X=JX-IX+1
3330 BR(IX,J2X)=BR(IX,J2X)+BR(I1X,J1X)
3340 NEXT J1X
3350 NEXT I1X

```

```

3360 NEXT E1%
3370 RETURN
3380   isidan olusan kuvvetler
3390 GOSUB 2500
3400 A=E*ALFA*T/(1-MU)
3410 ED(E1%,4)=-A
3420 A=A/2*D
3430 D2%=NSD%*IN%-NSD%
3440 F(D2%+1,1)=P(D2%+1,1)+A*Y32
3450 P(D2%+2,1)=P(D2%+2,1)-A*X32
3460 SS(D2%+1,3)=SS(D2%+1,3)-A*Y32
3470 SS(D2%+2,3)=SS(D2%+2,3)+A*X32
3480 D2%=NSD%*JN%-NSD%
3490 F(D2%+1,1)=P(D2%+1,1)-A*Y31
3500 P(D2%+2,1)=P(D2%+2,1)+A*X31
3510 SS(D2%+1,3)=SS(D2%+1,3)+A*Y31
3520 SS(D2%+2,3)=SS(D2%+2,3)-A*X31
3530 D2%=NSD%*KN%-NSD%
3540 P(D2%+1,1)=P(D2%+1,1)+A*Y21
3550 P(D2%+2,1)=P(D2%+2,1)-A*X21
3560 SS(D2%+1,3)=SS(D2%+1,3)-A*Y21
3570 SS(D2%+2,3)=SS(D2%+2,3)+A*X21
3580 RETURN
3590   verilmiş deqlasmanlardan olusan kuvvetler
3600 I=E*DEF
3610 FOR K%=2 TO BAND%+1
3620   J2%=J%-1+K%
3630   P(J2%,1)=P(J2%,1)-SR(J%,K%)*T
3640   IF J%<K% GOTO 3670
3650   J1%=J%+1-K%
3660   P(J1%,1)=P(J1%,1)-SR(J1%,K%)*T
3670 NEXT K%
3680 RETURN
3690   SINIR sartlarinin islenmesi
3700 FOR K%=2 TO BAND%+1
3710   SR(J%,K%)=0
3720   IF J%>K% THEN SR(J%+1-K%,K%)=0
3730 NEXT K%
3740 SR(J%,1)=1:P(J%,1)=E*DEF
3750 RETURN
3760   denklemin sisteminin cozumu(CHOLESKY)
3770 G=0:A#="DUZENLI"
3780   NORM
3790 FOR IX=1 TO SD%
3800   IF SR(IX,1)>G THEN G=SR(IX,1)
3810 NEXT IX
3820 IF G<=0 GOTO 4270
3830 G=G*.000001
3840 LX=BAND%+1
3850   carpanlara ayirma
3860 FOR NX=1 TO SD%
3870   T=SR(NX,1)
3880   IF T<G GOTO 4270
3890   T=SDR(T)
3900 FOR J%=1 TO LX

```

```

3910 SR(NX,JX)=SR(NX,JX)/T
3920 NEXT JX
3930 FOR JX=1 TO BANDX
3940 IX=NX+JX
3950 IF IX>SDX GOTO 4020
3960 T=SR(NX,JX+1)
3970 FOR KX=JX TO BANDX
3980 IIX=1+KX-JX
3990 SR(IX,IIX)=SR(IX,IIX)-T*SR(NX,KX+1)
4000 NEXT KX
4010 NEXT JX
4020 NEXT NX
4030 ' ileri hesap
4040 FOR NX=1 TO SDX
4050 P(NX,1)=P(NX,1)/SR(NX,1)
4060 FOR JX=1 TO BANDX
4070 IX=NX+JX
4080 IF IX>SDX GOTO 4120
4090 T=SR(NX,JX+1)
4100 P(IX,1)=P(IX,1)-T*P(NX,1)
4110 NEXT JX
4120 NEXT NX
4130 ' geri hesap
4140 P(SDX,1)=P(SDX,1)/SR(SDX,1)
4150 FOR IX=1 TO SDX-1
4160 KX=SDX-IX
4170 T=0
4180 FOR JX=1 TO BANDX
4190 IIX=JX+KX
4200 IF SDX<IIX GOTO 4230
4210 T=T+SR(KX,JX+1)*P(IIX,1)
4220 NEXT JX
4230 P(KX,1)=(P(KX,1)-T)/SR(KX,1)
4240 NEXT IX
4250 RETURN
4260 ' matris tekil veya negatif tarifli
4270 A$="TEKIL"
4280 RETURN
5000 DATA ANA VERILER
5010 DATA 18 elemanli ve 16 noktali levha
5020 DATA 18,16
5030 DATA 4,4,0
5040 DATA 2E6,.3,.2,0
5050 DATA ELEMENLARIN TARIFI
5060 DATA 1,1,5,2,2,5,6,2,3,2,6,3,4,6,7,3,5,3,7,4,6,7,8,4
5065 DATA 7,5,9,6,8,9,10,6,9,6,10,7,10,10,11,7,11,7,11,8,12,11,12,8
5070 DATA 13,9,13,10,14,13,14,10,15,10,14,11,16,14,15,11,17,11,15,12,18,15,16,12
5075 DATA KOORDINATLAR
5080 DATA 1,0,1,5,2,0,1,3,0,0,5,4,0,0
5085 DATA 5,0,5,1,5,6,0,5,1,7,0,5,0,5,8,0,5,0
5090 DATA 9,1,1,5,10,1,1,11,1,0,5,12,1,0
5095 DATA 13,1,5,1,5,14,1,5,1,15,1,5,0,5,16,1,5,0
5100 DATA KUVVETLER
5110 DATA 1,2,-0.25,5,2,-0.50,9,2,-0.50,13,2,-0.25
5120 DATA ISI DEGERLERI
5130 DATA SINIR SARTLARI
5140 DATA 2,1,0,2,2,0,3,1,0,3,2,0
5150 DATA EGN

```