

LEVHALARIN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Burhanettin GENÇER

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Mekanik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Ömer Rıza AKGÜN

ŞUBAT-1989

Burhanettin GENÇER'in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "LEVHALARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

.24../.3../1989

ÜYE : Prof.Ömer Rıza AKGÜN

ÜYE : Prof.M.Ruhi AYDIN

ÜYE : Doç.Dr.Ahmet TOPÇU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10. NİSAN 1989
..... gün ve 209/9.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

ÖZET

Levha problemleri değişik yöntemler ile çözülebilir. Bu yöntemlerin çoğunda bazı özel yük durumları ve levha geometrisi için çözüm elde edilebilir. Uygulamada ise farklı özelliklere sahip levhalarla sıklıkla karşılaşılır. Bu nedenle levha problemlerinin çözümünde yaklaşık ve nümerik yöntemler kullanılır. Bu tez çalışmasında levhaların, sayısal analiz yöntemlerinden Sonlu Farklar Yöntemi ile analizi araştırma konusu olmuştur.

Birinci bölümde, tezin amacı izah edilmiş; ikinci bölümde levhalar ile ilgili düzlemde elastisite teorisi özetlenmiştir. Üçüncü bölümde, Sonlu Farklar Yöntemi açıklanmış; dördüncü bölümde ise Sonlu Farklar Yönteminin levhalara uygulanması anlatılmıştır. Son bölümde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Levha örnek problemleri ekte verilen bilgisayar programı ile çözülmüştür. Sözü edilen bilgisayar programı kullanılarak sınır noktalarından yüklü bir levhanın, seçilen düğüm noktalarındaki bütün yaklaşık gerilme değerleri elde edilmiştir.

SUMMARY

Plate problems can be solved by using various methods. Many of these solutions can be obtained for some special load cases and plate geometry. In application we meet plates with different properties, so approximate numerical methods are used to solve these kinds of plate problems. In this thesis the finite-differences method, which is one of the numerical analysis methods, is examined.

In the first part the aim of the thesis is explained; in the second part plane theory of elasticity of plate is summarized. In the third part the finite-differences method is explained, and in the fourth part the application of the finite-differences method to the plates is described. In the conclusion the results and recommendations are given.

In the appendix some examples of plate problems are solved by using a computer program. In the program, approximate stress values are calculated for all node points of a plate that is loaded on all boundary nodes.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. DÜZLEMDE ELASTİSİTE TEORİSİ	3
2.1. Elastisite Teorisi	3
2.1.1. Konu	3
2.1.2. Levha ve levha problemlerinde yapılan kabuller	3
2.2. Gerilme Hali	4
2.2.1. Gerilme, gerilme hali ve asal gerilmeler	4
2.2.2. Gerilme halinin transformasyonu	8
2.2.3. Gerilme halinin diferansiyel denge denklemleri	9
2.2.4. Gerilme halinin sınır şartları	11
2.2.5. Gerilme halinin hiperstatikliği	12
2.3. Şekil Değiştirme Hali	12
2.3.1. Yer değiştirme ve şekil değiştirme	12
2.3.2. Rijit yer değiştirme	13
2.3.3. Affin yer değiştirmeleri	15
2.3.4. Sonsuz küçük affin yer değiştirmeleri .	16
2.3.5. Şekil değiştirmenin elemanları	17
2.3.6. Şekil değiştirme hali	21
2.3.7. Homogen olmayan yer ve şekil değiştirme	22
2.3.8. Uygunluk şartları	24
2.4. Gerilme ve Şekil Değiştirme Bağlantıları	27
2.4.1. Genel Hooke kanunları	27
2.4.2. Çeşitli sabitler	28
2.5. Genel Denklemler	29
2.5.1. Levhanın genel denklemleri	29
2.5.2. Gerilme problemine ait denklemler	31
2.5.3. Yer değiştirme problemi	32
2.6. Gerilme Fonksiyonları	32
2.6.1. AIRY fonksiyonları	32

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)

	<u>Sayfa</u>
3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ	34
3.1. Konu	34
3.2. Sonlu Farklar Matematiği	34
3.3. Sonlu Farklar Yönteminin Analizi	35
3.3.1. Adi türevlerin sonlu farklarla açıklanması	35
3.3.2. Kısmi türevlerin sonlu farklarla açıklanması	39
3.3.3. Kısmi türevlerin sonlu farklarla molekül gösterimi	42
4. LEVHALARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	45
4.1. Levha Formülleri	45
4.2. Dubas Yöntemi	45
4.3. Programın Tanıtımı	46
4.3.1. Levhanın tanıtımı ve yükler	46
4.3.2. Sınır noktalarındaki fonksiyon değerleri	47
4.3.3. Katsayılar ve eşitlik matrisinin kurulması ve çözüm	48
4.3.4. Gerilmelerin bulunması	50
4.4. Programın İşletilmesi	50
4.5. Örnek Problem-1	53
4.6. Örnek Problem-2	58
4.7. Örnek Problem-3	66
4.8. Örnek Problem-4	82
5. SONUÇLAR	95
5.1. Sonlu Farklar Yöntemi İle İlgili Sonuçlar ...	95
5.2. Levhalar İle İlgili Sonuçlar	95
KAYNAKLAR DİZİNİ	100
EK-1 Bilgisayar Programı	101

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Levhaya etkiyen yükler	4
2.2. Levhadaki gerilme kesiti	5
2.3. A noktasındaki gerilmeler	6
2.4. Elemanter parçadaki gerilmeler	6
2.5. A noktasındaki P_x , P_y , σ , τ gerilmeleri	7
2.6. Levhadaki gerilmelerin transformasyonu	8
2.7. Levha parçasındaki yükler ve x yönündeki gerilmeler	10
2.8. Elemanter parçanın sınırındaki dış kuvvetler ..	12
2.9. Yer ve şekil değiştirme vektörü	13
2.10. Levhanın O merkezi etrafında dönmesi	14
2.11. A-A' dönüşümü	15
2.12. A-A' ve A-A ₂ dönüşümü	16
2.13. A-A' şekil değişimi	17
2.14. ξ açısı değişimi	19
2.15. O-A değişimi	23
2.16. O-A değişimi	25
3.1. $y=f(x)$ fonksiyon eğrisi	35
3.2. Plak ağının numaralanışı	39
4.1. Yükleme numaralanışı	47
4.2. Levha yüklerinin idealize edilmesi	51
4.3. Levha etkiyen yüklerin pozitif yönleri	51
4.4. Çıktı numaralanışı	52
4.5. Örnek problem-1	53
4.6. Örnek problem-1 σ_x gerilmeleri	55
4.7. Örnek problem-1 σ_y gerilmeleri	56
4.8. Örnek problem-1 τ_{xy} gerilmeleri	57
4.9. Örnek problem-2	58
4.10. Örnek problem-2 σ_x gerilmeleri	63
4.11. Örnek problem-2 σ_y gerilmeleri	64
4.12. Örnek problem-2 τ_{xy} gerilmeleri	65
4.13. Örnek problem-3	66

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.14. Örnek problem-3 σ_x ve σ_y gerilmeleri	69
4.15. Örnek problem-4	82
4.16. Örnek problem-4 c_x ve σ_y gerilmeleri	85
5.1. Örnek giriş	95
5.2. $x/D - L/D$ grafiği	96
5.3. $\sigma_{\max}/D-L/D$ grafiği (çekme)	97
5.4. $\sigma_{\max}/D-L/D$ grafiği (basınç)	98

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
3.1.	Adi türevlerin sonlu fark katsayıları	38
3.2.	Kısmi türevlerin sonlu fark katsayıları	43
4.1.	Levha diferansiyel denklemin sonlu fark katsayıları	49

1. GİRİŞ

Levha, bir boyutu diğer iki boyutuna göre çok küçük olan ve kalınlığını her yerde ortalayan orta düzlemine paralel yüke maruz kalan düzlemsel yapı elemanlarıdır.

Levhalar geometrilerin getirdiği atalet kuvvetleri sebebiyle rijit elemanlardır. Bu sebepten levhalardan oluşan sistemler diğer sistemlere göre daha dayanıklıdır. Çok katlı bir binanın, sınırlı bir deplasman yapması için perdeleri içeren bir dizayna sahip olması gerekir. Levha, perde dışında yatay taşıyıcı eleman olan yüksek kiriş olarak ta kullanılır. Yüksek kirişler, silo, depo gibi sanayi inşaat alanlarında kullanılırlar. Levhalar, İnşaat Mühendisliği alanı dışında gemi inşaatında da gemi dış cidarlarını birbirine bağlayan eleman olarak kullanılırlar. Makina Mühendisliği alanında ise levha davranışı gösteren çok sayıda eleman kullanıldığı bilinir.

Levha problemlerinin çözümlenmesinde çeşitli yöntemler kullanılır. Bu yöntemlerin çoğunda çözülmesi istenen levhanın geometrisine ve yük durumuna sınırlayıcı şartlar getirilir. Bununla beraber levha problemlerinin tümünde böyle kolaylık sağlayan özellikler olmayabilir. Bu sebeple karmaşık levha problemlerinde yaklaşık ve nümerik yöntemlerle analiz yapılması zorunludur. Bu yöntemlerden biri de Sonlu-Farklar Yöntemidir.

Sonlu -Farklar Yöntemi, davranışı diferansiyel denklem ile tanımlanabilen ve sınır şartları bilinen problemlerin çözümünde kullanılan yaklaşık nümerik bir yöntemdir. İncelenen nokta sayısı ile yaklaşıklık değeri doğru orantılıdır. İncelenen noktanın çokluğu, nümerik değerlerle çalışıldığı için zaman alıcıdır. Bu sebeple Sonlu-Farklar Yöntemi, bilgisayar aracılığı ile analiz edilerek zaman yönünden tasarruf yapılabilir. İncelenen nokta sayısının üst limiti kullanılan bilgisayar belleği ve işlem için gerekli süre ile de belirlenir.

Tez çalışmasında Sonlu-Farklar Yönteminin levha problemlerine uygulanabilirliği incelenecek ve bu yöntem ile elde edilmiş sonuçların kesin çözüm sonuçları ile kıyaslanması yapılacaktır. Böylece elde edilecek sonuçların yaklaşıklıklağı incelenecektir.

Kiriş çözümlerinde, giriş bir levha kabul edilerek hangi noktadan sonra yüksek giriş durumuna geldiği araştırılacaktır. Elemanter mukavemette düzlem kesit düzlem kalır kabulünün hangi noktadan sonra değiştiği araştırılacaktır.

2. DÜZLEMDE ELASTİSİTE TEORİSİ

2.1. Elastisite Teorisi

2.1.1. Konu

Elastisite, bir malzemenin, dış kuvvetler altında şekil değiştirip daha sonra bu kuvvetlerin kalkması halinde eski durumuna gelme özelliğidir. Burada dış kuvvetlerin belirli bir değeri aşmaması gerekmektedir. Aksi takdirde malzeme elastik özelliğini kaybeder plastik malzeme olur.

Elastisite teorisi, elastik cisimlerin dış kuvvetler altında şekil değişimini ve iç kuvvet dağılımını inceler (1).

Elastisite teorisi, üç boyut içerir. Fakat bu tezde incelenen cisimler düzlemde düşünülüp, üçüncü boyut birim kalınlıkla kabul edilmiştir. Düzlemde elastisite teorisine konu olan çok ince levha çok uzun silindirik cisimleri ve çok ince plak cisimler mevcuttur.

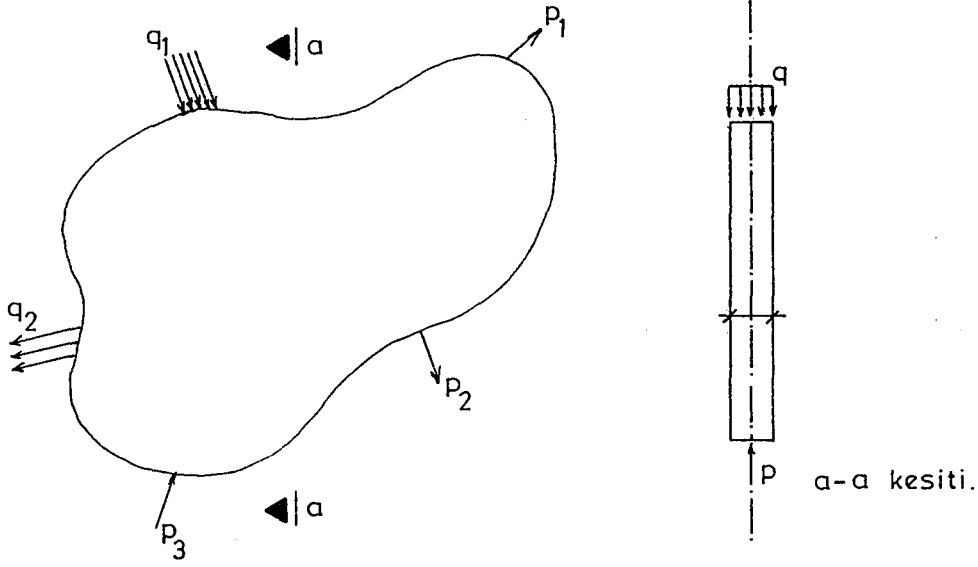
2.1.2. Levha ve levha problemlerinde yapılan kabuller

Düzlem cismin, ihmal ettiğimiz üçüncü boyuttaki kalınlığını cisim içinde her yerde ortalayan düzleme orta düzlem denir. Bir cismin bütün dış kuvvetleri, orta düzlemine paralel geliyorsa böyle cisimlere levha denir.

Yapılan kabuller;

İncelenen levha, homogen, izotrop, sürekli bir ortamı olan ve elastik bir Hooke cismidir.

Yer ve şekil değiştirmeler cismin boyutları yanında çok küçük kaldığı için birinci mertebeden değerler kontrol edilir.



ŞEKİL 2.1 Levhaya etkiyen yükler.

2.2. Gerilme Hali

2.2.1. Gerilme, gerilme hali ve asal gerilmeler

Şekil 2.2'de görülen cisim A noktasından (x,y) düzlemine dik bir ΔF kesite sahip olsun. Dış kuvvetler altında bu kesitte bir takım iç kuvvetler oluşur. Bu kuvvetlerin büyüklüğü genelde şiddetleri ile yani birim alana düşen kuvvetler ile tarif edilir. Bu kuvvetlere gerilme denir.

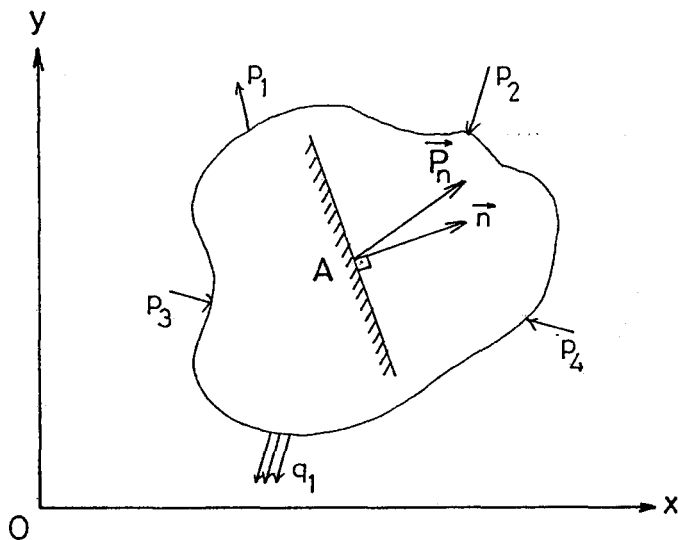
$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} \right) \quad (2.1)$$

Gerilme, kesit düzlemi ile üst üste düşmeye bilir. Bu yüzden iki bileşene ayrılır. Normali ile paralel olan gerilmeye normal gerilme, kesit düzlemine paralel olan gerilmeye kayma gerilmesi denir.

ΔF , (x,y) düzleminde değiştikçe gerilme P_n 'de değişecektir. Denge esaslarından bu iki vektör arasındaki lineer bağıntı

$$\begin{aligned} P_x &= a_{xx}n_x + a_{xy}n_y \\ P_y &= a_{yx}n_x + a_{yy}n_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki a_{ik} katsayıları ile düzlemdeki tüm gerilmeler bilinir. Bu katsayılara düzlem gerilme hali denir.



ŞEKİL 2.2 Levhadaki gerilme kesiti.

Şekil 2.3 deki A noktasından geçen normalleri sırasıyla x ve y olan gerilmeleri

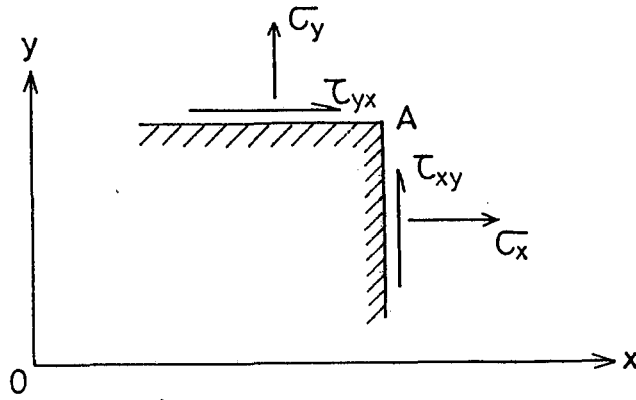
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

şeklinde yazabiliriz.

İşaret kabulleri ise şöyledir:

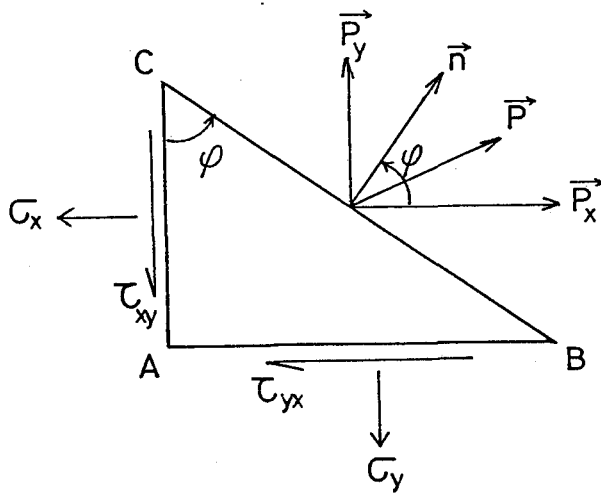
- Normal gerilme, normali ile aynı yönlü ise "+" değerlikli ve çekme gerilmesi, aksi taktirde "-" değerlikli ve basınç gerilmesidir.

- Kayma gerilmesi, normali ile kendi yönü ikisi birden koordinat eksenleri ile aynı yönlü veya zıt yönlü ise "+" farklı olması halinde "-" değerlidir.



ŞEKİL 2.3 A noktasındaki gerilmeler.

Normali \vec{n} olan herhangi bir kesitteki gerilmeler bir cisimden alınan bir ABC prizması ile açıklanabilir.



ŞEKİL 2.4 Elemanter parçadaki gerilmeler.

$$P_x = \sigma_x \cos\phi + \tau_{yx} \sin\phi$$

$$P_y = \tau_{xy} \cos\phi + \sigma_y \sin\phi$$

(2.4)

$|\vec{n}|=1$ olması halinde $\text{Cos}\varphi=\eta_x$, $\text{Sin}\varphi=\eta_y$ dir ve (2.4)'ün (2.3)'ye özdeş olduğu görülür.

Denge esasından $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ olur.



ŞEKİL 2.5 A noktasındaki P_x, P_y, τ, σ gerilmeleri.

Şekil 2.5'deki A noktasındaki mevcut gerilmeler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\sigma &= \vec{P} \cdot \vec{n} = P_x \cdot \text{Cos}\varphi + P_y \cdot \text{Sin}\varphi \\ &= \sigma_x \text{Cos}^2\varphi + \sigma_y \text{Sin}^2\varphi + 2 \tau_{xy} \text{Sin}\varphi \cdot \text{Cos}\varphi \\ \tau &= \vec{P} \cdot \vec{s} = -P_x \text{Sin}\varphi + P_y \cdot \text{Cos}\varphi \\ &= \tau_{xy} (\text{Cos}^2\varphi - \text{Sin}^2\varphi) - (\sigma_x - \sigma_y) \text{Sin}\varphi \cdot \text{Cos}\varphi\end{aligned}\quad (2.5)$$

Şekil 2.5 deki α açısı değiştikçe normal ve kayma gerilmeleri de değişir. Normal ve kayma gerilmelerinin ekstrem olduğu yerdeki gerilmelere asal gerilmeler denir. Bunları incelemek için (2.5) deki ifadeler 2φ cinsinden yazılırsa,

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \text{Cos} 2\varphi + \tau_{xy} \text{Sin} 2\varphi \quad (2.6)$$

$$\tau = \tau_{xy} \text{Cos} 2\varphi - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \text{Sin} 2\varphi$$

bulunur. Asal normal gerilmeler için,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = 0$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.7)$$

bulunur. (2.7) denklemini sağlayan φ ve $\varphi + \pi/2$ değerlerinden

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.8)$$

bulunur. Bu durumda $\tau = 0$ olur.

Yine aynı yolla asal kayma gerilmelerini incelersek,

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0$$

$$\tan 2\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (2.9)$$

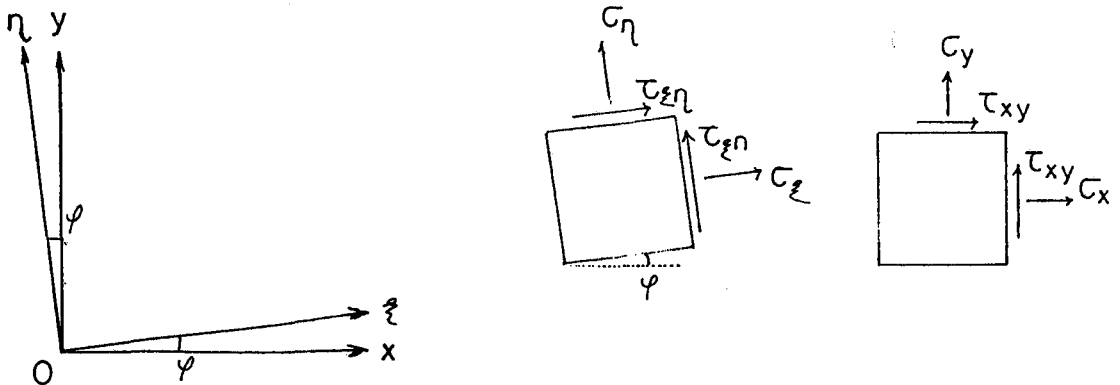
bulunur. (2.9) denklemini sağlayan φ ve $\varphi + \pi/2$ değerlerinden,

$$\begin{aligned} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{aligned} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.10)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

bulunur.

2.2.2. Gerilme halinin transformasyonu



ŞEKİL 2.6 Levhadaki gerilmelerin transformasyonu.

(x-y) koordinat takımını φ kadar döndürerek ($\xi-\eta$) konumuna getirelim. Şekil 2.6'da görülen dönüşüme göre

$$\sigma_{\xi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta} = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

(2.11)

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

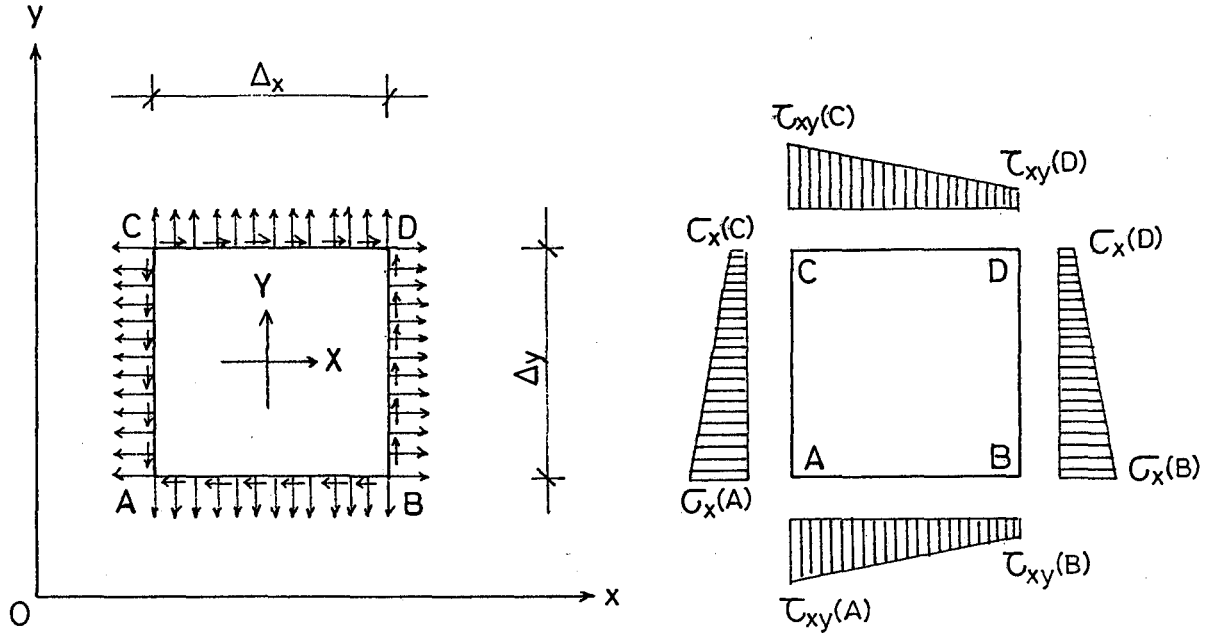
$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$= \tau_{xy} \cos 2\varphi - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\varphi$$

olur. Bunlara gerilme halinin transformasyon denklemleri denir.

2.2.3. Gerilme halinin diferansiyel denge denklemi

σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri ait oldukları noktanın birer fonksiyonlarıdır, yani bir nokta $A(x,y)$ ise $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ 'dir. Bu fonksiyonların sürekli ve türevleri olduklarını kabul edelim. Yine bu fonksiyonlar aynı noktaya ait oldukları için aralarında bir bağıntı vardır. İşte türevleri arasındaki bu bağıntılara "Diferansiyel denge denklemleri" denir.



ŞEKİL 2.7 Levha parçasındaki yükler ve x yönündeki gerilmeler.

Şekil 2.7'de levha parçasındaki X ve Y değerleri hacimsel iç kuvvetlerdir. Bu kuvvetler altında levha dengede olsun, x eksenine göre denge denklemi yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\sigma_x(D) + \sigma_x(B) \right] \Delta_y - \frac{1}{2} \left[\sigma_x(C) + \sigma_x(A) \right] \Delta_y \\
 & + \frac{1}{2} \left[\tau_{xy}(D) + \tau_{xy}(C) \right] \cdot \Delta_x - \frac{1}{2} \left[\tau_{xy}(B) + \tau_{xy}(A) \right] \Delta_x \\
 & + X \cdot \Delta_x \Delta_y = 0 \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

olur. Diğer üç noktanın değerleri A noktasına göre yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(B) &= \sigma_x(A) + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial x} \Delta_x \\
 \sigma_x(C) &= \sigma_x(A) + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial y} \Delta_y
 \end{aligned}$$

$$\sigma_x(D) = \sigma_x(A) + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \sigma_x(A)}{\partial y} \Delta y$$

$$\tau_x(B) = \tau_{xy}(A) + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial x} \Delta x$$

$$\tau_x(C) = \tau_{xy}(A) + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial y} \Delta y \quad (2.13)$$

$$\tau_x(D) = \tau_{xy}(A) + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \tau_{xy}(A)}{\partial y} \Delta y$$

bulunur. Bu ifadeler (2.12)da yerine konur kısaltmalar yapılsa,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (2.14)$$

bulunur. y yönünde aynı esaslarla

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (2.15)$$

bulunur. (2.14) ve (2.15)'e elemanın diferansiyel denge denklemleri denir.

2.2.4. Gerilme halinin sınır şartları

(2.14) ve (2.15) denklemleri levha içinde sağlanmaktadır. Ayrıca bu denklemler levha sınırında dış kuvvetler ile denge yapmalıdır.

Şekil 2.8'de verilen elemanın sınırına etkiyen kuvvetler q_x ve q_y olsun.

Sınırdaki incelenen parçanın çok küçük olmasından dolayı hacimsel iç kuvvetler ihmal edilirse elemanın dengesinden

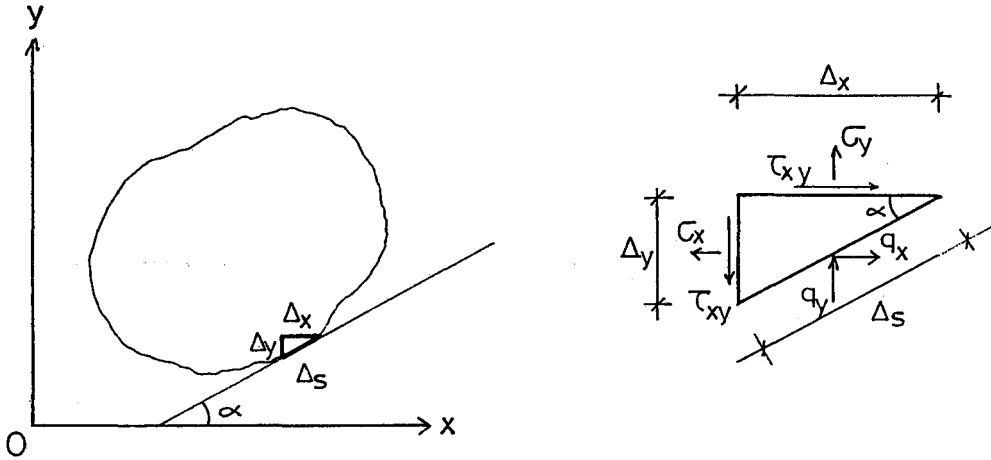
$$q_x \Delta s = \sigma_x \Delta y - \tau_{xy} \Delta x \quad (2.16)$$

$$q_y \Delta s = \tau_{xy} \Delta y - \sigma_y \Delta x$$

bulunur. α cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} q_x &= \sigma_x \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha \\ q_y &= \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma_y \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.17)$$

bulunur.



ŞEKİL 2.8 Elemanter parçanın sınırındaki dış kuvvetler.

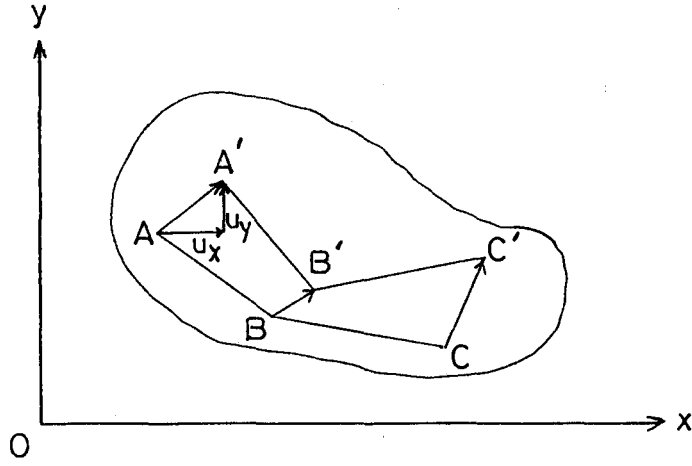
2.2.5. Gerilme halinin hiperstatikliği

Levhada aranan σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerini bulabilmek için mevcut denklemler sadece (2.14) ve (2.15) olur. Bu yüzden problem hiperstatiktir. Her hiperstatik problemde olduğu gibi çözüme ulaşmak için şekil değiştirme incelenmelidir.

2.3. Şekil Değiştirme Hali

2.3.1. Yer değiştirme ve şekil değiştirme

Dış tesirler etkidikten sonra A noktası A' noktasına gitsin, \vec{AA}' vektörüne yer değiştirme vektörü denir. Vektörün koordinatları olan U_x ve U_y ile noktanın ilk ve son durumlarına ait koordinatlar arasında,



ŞEKİL 2.9 Yer ve şekil değiştirme vektörü.

$$U_x = x' - x \quad (2.18)$$

$$U_y = y' - y$$

bağıntıları vardır. (2.18)'den

$$x' = x + U_x$$

$$y' = y + U_y$$

elde edilir. Bu değerler levhanın ilk durumu ile son durumu arasındaki transformasyonu gösterir. Yer değiştirme kavramı bir nokta için düşünüldüğü halde şekil değiştirmeden bahsedebilmek için en az iki noktaya ihtiyaç vardır. AB doğru parçası şekil değiştirdikten sonra A'B' doğru parçasına dönüşürse bu doğrular arasındaki uzunluk farkından şekil değiştirme vardır, $\angle ABC$ şekil değiştirdikten sonra $\angle A'B'C'$ olursa burada da açı değişmesi yönünden şekil değişikliği vardır diyebiliriz.

2.3.2. Rijit yer değiştirme

Şekil değiştirme hasıl etmeyen yer değiştirmelere rijit yer değiştirmeler denir. Bunlar esasta bir "öteleme"dir ve

$$U_x = a = \text{sabit} \quad (2.19)$$

$$U_y = b = \text{sabit}$$

şeklinde tarif edilebilir. Diğeri ise bir dönme hareketinden doğan yer değıştirmedir.

Levha O merkezi etrafında θ açısı kadar dönerse koordinatlar, (Şekil 2.20),

$$x' = r \cos (\varphi + \theta)$$

$$y' = r \sin (\varphi + \theta)$$

ve

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

buradan

$$U_x = x' - x = x (\cos \theta - 1) - y \sin \theta \quad (2.20)$$

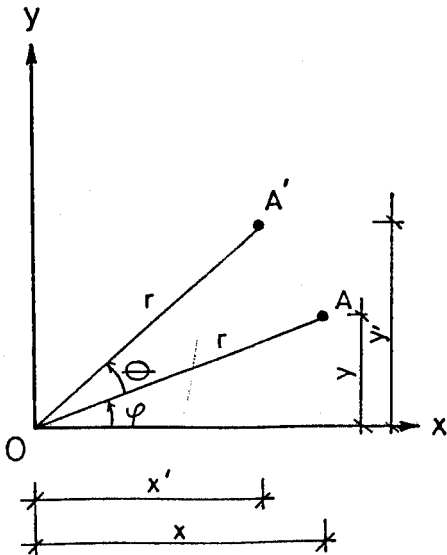
$$U_y = y' - y = x \sin \theta + y (\cos \theta - 1)$$

olur. Bu iki durum hariç her yer değıştirme bir şekil değıştirme yapar, θ çok küçük ise,

$$U_x = -y\theta \quad (2.21)$$

$$U_y = x\theta$$

olur.



ŞEKİL 2.10 Levhanın O merkezi etrafında dönmesi

2.3.3. Affin yer değiştirmeleri

U_x ve U_y fonksiyonları arasında lineer olanları önemli bir yer tutar. Bunlara affin yer değiştirme denir.

$$U_x = a_{11}x + a_{12}y \quad (2.22)$$

$$U_y = a_{21}x + a_{22}y$$

şeklinde lineer ve homogen fonksiyonları ele alalım. a_{ik} sabit olsun. Bu ifadelerden faydalanarak şekil değiştirmeleri incelersek önce (2.22) ifadelerini

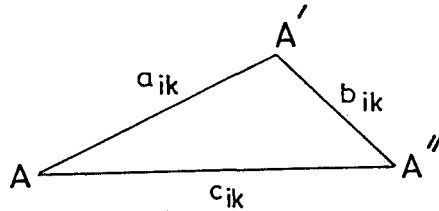
$$x' = x + U_x = (1 + a_{11})x + a_{12}y \quad (2.23)$$

$$y' = y + U_y = a_{21}x + (1 + a_{22})y$$

haline getirerek bunlara bir transformasyon şekli verilebilir. (2.23) ifadelerine affin dñüřtürme denir. Bu ifadelerin řu özellikleri vardır. Doğrular doğrulara, paralel doğrular paralel doğrulara dñüřürler.

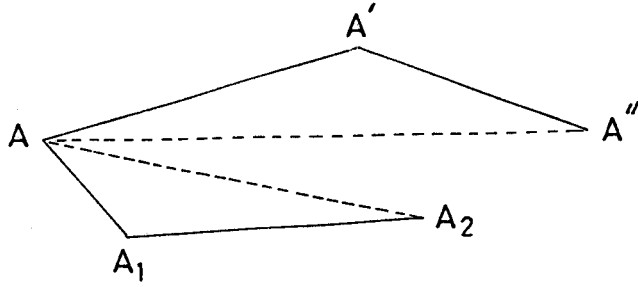
şekil 2.11'de A dan A'' ne dñüřüm iki yoldan gerçekteşir. Bunlar arasındaki ilişki

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} + \sum_{h=1}^{h=2} b_{ih}a_{hk} \quad (2.24)$$



şEKİL 2.11 A-A'' dñüřümü.

dir. Bu ifade bize iki affin dñüřtürmenin birleştirilmesi için bunları tarif eden katsayıların ne şekilde kombine edileceğini gösterir. (2.24) ifadesinden de hemen anlaşılacağı gibi dñüřtürmenin bir sıra takip ettiği açıktır. (2.24)'de takip sıraları değiştirilince dñüřtürme katsayısı aynı dahi olsa A'' ile A₂ üst üste dñüřmezler (şekil 2.12).



ŞEKİL 2.12 A-A'' ve A-A₂ dönüşümü

2.3.4. Sonsuz küçük affin yer değiştirmeleri

Daha önce tarif edilen affin yer değiştirmeleri sonsuz küçük olursa önemli bir özellik bulunur. (2.24) deki dönüşümlerin birleştirilmesindeki üçüncü terim merteye itibarı ile çok küçük kaldığından ihmal edilebilir. 0 zaman ifadesinde,

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (2.25)$$

haline gelir. Bu bize (2.3.3) bölümünde karşılaştırma yaptığımız iki yolun üst üste çakıştığını, takip edilen yolun hiç bir öneminin kalmadığını ve böylece süperpozisyon kanununun varlığını gösterir.

Katsayıları sonsuz küçük olan yer değiştirme fonksiyonlarının doğrudukları şekil değiştirmenin tayinini incelersek, verilen affin yer değiştirmenin rijit bir yer değiştirmeyi kapsayıp kapsamadığına bakmak gerekir. İfadeler homogen olduğundan yer değiştirmeler ancak rijit küçük dönmele-ri kapsayabilir. Bunu da yok edebilmek için,

$$U_x = a_{11}x + a_{12}y \equiv a_{11}x + \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)y - \left(\frac{a_{21} - a_{12}}{2}\right)y \quad (2.26)$$

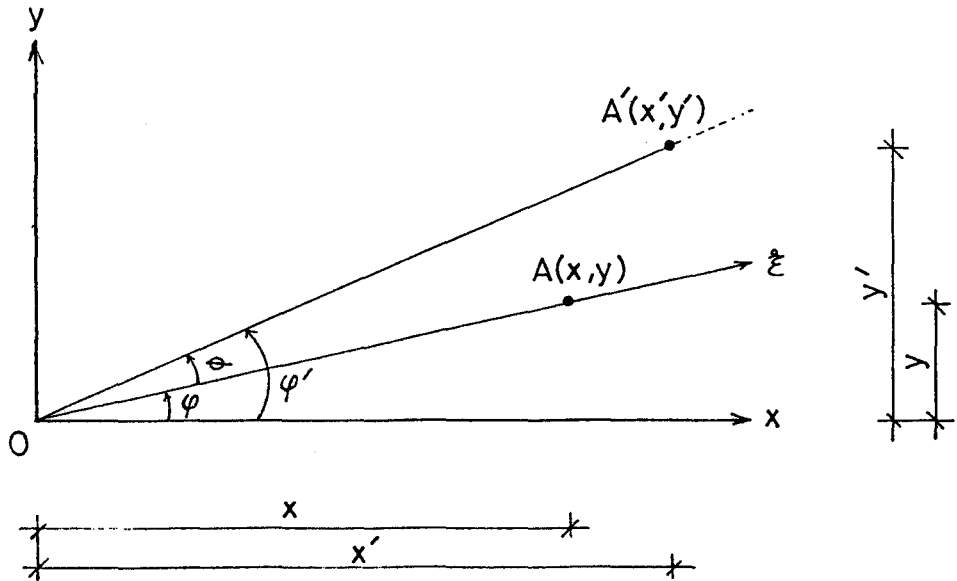
$$U_y = a_{21}x + a_{22}y \equiv \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)x + a_{22}y + \left(\frac{a_{21} - a_{12}}{2}\right)x$$

yazabiliriz. Son terimleri (2.21) ile karşılaştırırsak bunların sonsuz küçük dönmeleri gösterdiğini söyleyebiliriz. İlk iki terimi incelersek bunların çapraz katsayılarının simetrik olduğunu görürüz. Bunları düzenlersek,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{21}-a_{12}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

halini alır. İlk terim safi şekil değiştirmeyi ikinci terim ise sonsuz küçük dönmeyi içerir. Buradan varılacak sonuç, sonsuz küçük affin yer değiştirme fonksiyonlarının katsayılar tablosu simetrik ise ($a_{ik}=a_{ki}$) bu safi şekil değiştirmeyi gösterir.

2.3.5. Şekil değiştirmenin elemanları



ŞEKİL 2.13 A-A' şekil değişimi.

$\overline{OA}=1$ olsun. Şekil değiştikten sonra \overline{OA}' haline gelsin. \overline{OA} ile \overline{OA}' arasındaki uzunluk farkını ifade eden boyutsuz sayıya

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\overline{OA}' - \overline{OA}}{\overline{OA}} \quad (2.28)$$

uzama oranı denir. $\overline{OA}=1$ olduğundan,

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad (2.29)$$

dir. A' koordinatları ise (2.23)'den,

$$x' = (1 + a_{11}) \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi \quad (2.30)$$

$$y' = a_{21} \cos \varphi + (1 + a_{22}) \sin \varphi$$

dir. \overline{OA}' parçası için $a_{ik} = a_{ki}$ olmak şartı ile,

$$\begin{aligned} \overline{OA}'^2 = x'^2 + y'^2 = & 1 + 2(a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) + 4 a_{12} \sin \varphi \cos \varphi \\ & + x a_{11}^2 \cos^2 \varphi + a_{22}^2 \sin^2 \varphi + 2(a_{11} a_{22} + a_{12}^2) \sin \varphi \cos \varphi \\ & + a_{12}^2 \end{aligned}$$

olur. Yer değiştirme sonsuz küçük olduğu için ikinci kuvvetler ihmal edilirse,

$$\overline{OA}'^2 = 1 + 2(a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) + 4 a_{12} \sin \varphi \cos \varphi$$

veya

$$\overline{OA}' = 1 + a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + 2 a_{12} \sin \varphi \cos \varphi$$

bulunur (2.28) tarifinden,

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\overline{OA}' - \overline{OA}}{\overline{OA}} = a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + 2 a_{12} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.31)$$

bulunur. Bu ifade herhangi bir φ doğrusu için bize uzama oranını tarif eder. Örneğin $\varphi = 0$ ise (2.31)'den

$$\varepsilon_x = a_{11} \quad (2.32)$$

$\varphi = \pi/2$ ise

$$\varepsilon_y = a_{22} \quad (2.33)$$

bulunur. (2.32) ve (2.33) bize a_{ik} katsayılarının mekanik anlamlarını göstermeleri bakımından önemlidir.

Şimdi iki doğru arasındaki açıyı inceleyelim.

$\theta = \varphi' - \varphi$ dir.

$$\tan \theta = \frac{\tan \varphi' - \tan \varphi}{1 + \tan \varphi' \tan \varphi}$$

yazabiliriz. Şekil 2.13'den

$$\tan \theta = \frac{xy' - x'y}{xx' + yy'}$$

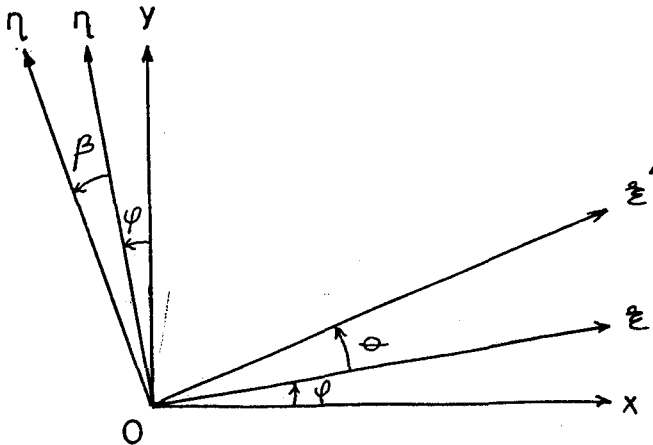
bulunur. (2.29) ve (2.30) den a_{ik} 'lar cinsinden

$$\tan \theta = \frac{a_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (a_{11} - a_{22}) \sin \varphi \cos \varphi}{1 + a_{11} \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi}$$

bulunur. a_{ik} 'ların sonsuz küçük olarak kabul edilebileceklerini hatırlarsak

$$\tan \theta \approx \theta = a_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (a_{11} - a_{22}) \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.34)$$

formülü elde edilir. Bu formül yardımı ile istenilen doğrultular arasında şekil değiştirmeden doğan açı değişimi hesaplanır.



ŞEKİL 2.14 $\xi\eta$ açı değişimi.

Örneğin Şekil 2.14'de verilen $\xi\eta$ doğrultuları arasındaki açı şekil değiştirmeden önce $\pi/2$ iken şekil değiştirdikten sonra $\gamma_{\xi\eta}$ kadar fark etmiş olsun. Açı değişiminin klasik tarifinden

$$\gamma_{\xi\eta} = \angle \xi o \eta - \angle \xi' o \eta'$$

veya Şekil 2.14'den

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{2} - \theta + \beta \right] = \theta - \beta \quad (2.35)$$

dır. $\gamma_{\xi\eta}$ değerini a_{ik} 'lar cinsinden hesaplamak için (2.34)'den faydalanarak φ yerine bir defa φ bir defa da $\varphi + \pi/2$ koyarak φ ve β açıları bulunur. (2.35) den açı değişimi için,

$$\gamma_{\xi\eta} = 2a_{12} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 2(a_{11} - a_{22}) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \quad (2.36)$$

formülü elde edilir. γ açı değişimine kısaca "KAYMA"denir. Her zaman 90° 'lik doğrultular arasındaki açının ne kadar değiştiğini ifade eder. $\gamma > 0$ ise doğrultular arasındaki açı $\pi/2$ 'den küçük, $\gamma < 0$ ise $\pi/2$ 'den daha büyük oluyor demektir.

(2.36) formülünü $\varphi=0$ için yazarsak γ_{xy} ile gösterilen değer

$$\gamma_{xy} = 2a_{12} \quad (2.37)$$

gibi basit bir ifade olur. (2.32), (2.33) ve (2.37) eşitliklerini göz önünde bulundurmak şartı ile (2.26)'de verilen affin yer değiştirme denklemlerini

$$U_x = \epsilon_x x + \frac{\gamma_{xy}}{2} y - \omega \cdot y \quad (2.38)$$

$$U_y = \frac{1}{2} \gamma_{xy} x + \epsilon_y \cdot y + \omega \cdot x$$

haline getirilebilir. Burada ω , a_{ik} katsayılarının simetrik olmaması halinde

$$\omega = \frac{a_{21} - a_{12}}{2} \quad (2.39)$$

dir.

2.3.6. Şekil değiştirme hali

ϵ_x , ϵ_y ve γ_{xy} ile gösterilen değerlere, şekil değiştirme halinin bileşenleri denir. Bu değerler bilinirse başka bir takıma ait değerlerde bulunabilir. (2.31) denkleminde (2.32), (2.33), (2.37)'den faydalanılarak,

$$\epsilon_{\xi} = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.40)$$

$$\epsilon_{\eta} = \epsilon_x \sin^2 \varphi + \epsilon_y \cos^2 \varphi - \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.41)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \gamma_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.42)$$

bulunabilir. (2.40), (2.41) ve (2.42) şekil değiştirme halinin dönüşüm formülleri adını alır. Bu ifadeler 2φ cinsinden yazılır, γ yerine $\gamma/2$ 'ler hesaba alınırsa dönüşüm formülleri

$$\epsilon_{\xi} = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \right) + \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi \quad (2.43)$$

$$\epsilon_{\eta} = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \right) - \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi - \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right) \sin 2\varphi$$

halini alır. Bu dönüşüm formülleri (2.11) ifadelerine benzemektedir. σ_{ξ} , σ_{η} , $\tau_{\xi\eta}$ hangi kanuna göre değişiyorsa ϵ_{ξ} , ϵ_{η} ve $\frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta}$ de aynı kanuna göre değişiyor demektir. Bu sebeple gerilme hali için söylenen tüm özellikler şekil değiştirme hali için de geçerlidir.

Asal gerilmeler gibi asal uzama doğrultuları da $\gamma=0$ şartıyla tarif edilebilir. (2.43)'den $2\varphi_0$ için,

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 \frac{\gamma_{xy}}{2}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (2.44)$$

bize φ_0 ve $\varphi_0 + \pi/2$ gibi birbirine dik iki doğrultu tarif eder.

Asal uzama doğrultularına ait ϵ_{\max} ve ϵ_{\min} 'ler (2.8)'e benzetilerek,

$$\begin{matrix} \epsilon_{\max} \\ \epsilon_{\min} \end{matrix} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2.45)$$

bulunur. γ_{\max} değeri ise,

$$\frac{1}{2} \gamma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2.46)$$

bulunur.

2.3.7. Homogen olmayan yer ve şekil değiştirme

(2.22)'da verilen lineer yer değiştirme fonksiyonlarında a_{ik} katsayıları sabit olarak alınırsa düzlem şekil değiştirmeleri tarif eden ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} değerleri de sabit olur. Böyle bir hale homogen şekil değiştirme hali denir. Homogen olmayan şekil değiştirme halini incelersek, U_x ve U_y 'lerin xy 'nin keyfi ve sürekli fonksiyonları olarak kabul edersek,

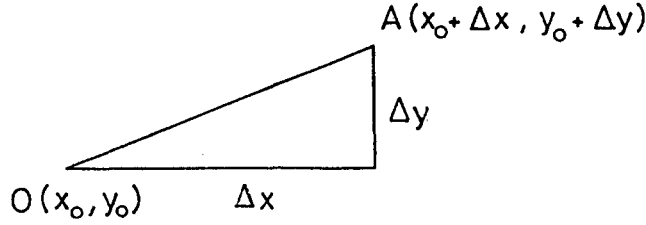
$$\begin{aligned} U_x &= U_x(x, y) \\ U_y &= U_y(x, y) \end{aligned} \quad (2.47)$$

olur. U_x ile U_y 'yi ve bunların parsiyel türevlerini sonsuz kabul edelim. Şekil 2.15'den

$$U_x(A) = U_x(0) + \left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y \quad (2.48)$$

$$U_y(A) = U_y(0) + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y$$

ifadelerini yazabiliriz:



ŞEKİL 2.15 O-A değişimi.

(2.48) ifadesini düzenlersek,

$$U_x(A) - U_x(O) = \left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y \quad (2.49)$$

$$U_y(A) - U_y(O) = \left(\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y$$

olur. Sol taraf relatif yer değiştirmeyi sağ taraf ise Δx ve Δy relatif koordinatlarının lineer ve homogen fonksiyonları olup a_{ik} katsayılarının rolünü burada parsiyel türevler oynamaktadır. Bunlar (2.22) ile karşılaştırılırsa,

$$a_{11} = \left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)_0 \quad a_{12} = \left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)_0 \quad (2.50)$$

$$a_{21} = \left(\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)_0 \quad a_{22} = \left(\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)_0$$

olur. Burada $a_{ik} \neq a_{ki}$ 'dir. Safi şekil değiştirmeyi bulmak için (2.49) ifadesini kullanarak

$$U_x(A) - U_x(O) = \left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right)_0 \Delta y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y \quad (2.51)$$

$$U_y(A) - U_y(O) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x - \left(\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)_0 \Delta x$$

elde ederiz. (2.32), (2.33) ve (2.37) yardımı ile (0) civarı için şekil değiştirme halinin bileşenleri

$$(\epsilon_x)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 \quad (2.52)$$

$$(\epsilon_y)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0$$

$$(\gamma_{xy})_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right)_0$$

elde ederiz. (0) civarındaki dönmeyi gösteren sonsuz küçük ω açısı ise,

$$(\omega)_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 \quad (2.53)$$

dir. Genel bir yer değiştirme fonksiyonu için (2.52) ifadeleri, şekil değiştirme bileşenleri ile yer değiştirme arasındaki türev tipinden bir bağıntı olduğunu gösterir.

2.3.8. Uygunluk şartları

Bir nokta civarındaki şekil değiştirmeyi gösteren ϵ_x , ϵ_y ve γ_{xy} ve dönmeyi ifade eden ω , U_x ve U_y 'den türemişlerdir. Bundan dolayı aralarında bir bağıntı olmaktadır. İşte bu bağıntıya uygunluk şartı denir. Bunlar,

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.55)$$

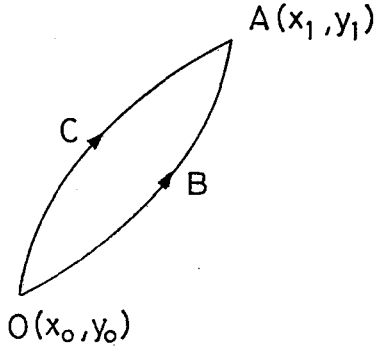
dir. Bunların geçerli olduğunu şöyle ispatlıyabiliriz.

(2.38) ifadeleri yardımı ile gösterebiliriz. Bu ifadelerin sağ taraflarına Δx , Δy relatif koordinatları koyarak,

$$dU_x = U_x(x+\Delta x, y+\Delta y) - U_x(x, y) = \epsilon_x \Delta x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \Delta y - \omega \Delta y \quad (2.56)$$

$$dU_y = U_y(x+\Delta x, y+\Delta y) - U_y(x, y) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \Delta x + \epsilon_y \Delta y + \omega \Delta x \quad (2.56)$$

elde edilir. $O(x_0, y_0)$ dan hareket ederek ve B yolunu izleyerek $A(x_1, y_1)$ noktasına gelelim. (2.51)'den yararlanarak $U_x(A)$ ve $U_y(A)$ hesaplayalım.



ŞEKİL 2.16 O - A değişimi.

$$U_x(A) = U_x(O) + \int_0^A (\epsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy - \omega dy) \quad (2.57)$$

$$U_y(A) = U_y(O) + \int_0^A (\frac{1}{2} \gamma_{xy} dx + \epsilon_y dy + \omega dx)$$

ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} ve ω sürekli ve türevleri olan birer fonksiyon kabul edersek kısmi integrasyonla,

$$U_x(A) = U_x(O) + \left[x\epsilon_x + y\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + \omega\right) \right]_0^A - \int_0^A (x d\epsilon_x + \frac{1}{2} y d\gamma_{xy} - y d\omega)$$

$$U_y(A) = U_y(O) + \left[y\epsilon_y + x\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy} + \omega\right) \right]_0^A - \int_0^A (y d\epsilon_y + \frac{1}{2} x d\gamma_{xy} + x d\omega)$$

bulunur. Yukarıdaki integrallerdeki $d_{\epsilon x}$, $d_{\epsilon y}$, $d_{\gamma xy}$ ve $d\omega$ ile gösterilen tam diferansiyeller hesaplanıp yerine konursa,

$$U_x(A) = U_x(O) + \left[x \epsilon_x + y \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega \right) \right] \Big|_0^A - \int_0^A \left(x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx$$

$$+ \left(x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dy$$

$$U_y(A) = U_y(O) + \left[y \epsilon_y + x \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + \omega \right) \right] \Big|_0^A - \int_0^A \left(y \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} + \frac{1}{2} x \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx$$

$$+ x \left(y \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{1}{2} x \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + x \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dy$$

olur. A'ya gitmek için B yerine C yolunu izlersek yine aynı noktaya varmak gerekir. U_x ve U_y tek değerliklidir. Bundan dolayı integralin yola bağlı olmaması için gerek ve yeter şart integral altındaki ifadenin tam diferansiyel olması gerekir. Kısaca,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{1}{2} x \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} + \frac{1}{2} x \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (2.59)$$

gereklidir. (2.58) ve (2.59)'dan gerekli kısaltmalar yapılsa,

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

elde edilir. Uygunluk şartının kısaca anlamı ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} ve ω 'nı kullanılarak yapılacak yer değiştirme hesabının tek değerli olabilmesi için gerek ve yeter şarttır.

Burada ω yok edilerek diğer üç şekil değiştirme bileşeni cinsinden uygunluk şartı

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.60)$$

dır. Şekil değiştirme halini yalnız başına bir problem olarak ele alırsak bilinmeyen ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} iken çözüm için mevcut denklem sayısı (2.60) no'lu ifadedir ve tektir. Bundan dolayı çözüm yoktur. Çözüm için gerilme ile şekil değiştirme arasında ilişki kurmak gerekmektedir.

2.4. Gerilme ve Şekil Değiştirme Bağlılıkları

2.4.1. Genel Hooke kanunları

Cismin hooke kanununa uyduğunu söylemek için, şekil değiştirme ile bundan dolayı meydana gelen gerilme arasında lineer bir bağlantı olması gerekir. Bu bağlantılar

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= H_{11} \sigma_x + H_{12} \sigma_y + H_{13} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= H_{21} \sigma_x + H_{22} \sigma_y + H_{23} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= H_{31} \sigma_x + H_{32} \sigma_y + H_{33} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.61)$$

olsun. Levha homogen olduğu için H_{ik} katsayıları koordinatlara bağlı olmadığı için bütün levhada aynı sabit değerleri alır. Cisim hakkında başlıca sınırlayıcı hiç bir şart koşulmamışsa bile H_{ik} Hooke sabitleri arasında $H_{ik} = H_{ki}$ özelliği vardır.

Cismin, izotropik cisim olması halinde eldeki 9 adet H_{ik} 'nin 2 adete düşürülmesini inceleyelim.

Gerilme ve şekil değiştirme hallerine ait asal eksenler her zaman üst üste düşmez, cisim yalnız izotropik olması halinde asal eksenler üst üste düşer.

Bu şartlar altında (2.7) ve (2.44)'den koaksiyalik şartı,

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (2.62)$$

yazılabilir. İfadenin sol tarafı genel hooke kanunlarından faydalanarak gerilmeler cinsinden yazarsak,

$$\frac{H_{31}\sigma_x + H_{32}\sigma_y + H_{33}\tau_{xy}}{(H_{11} - H_{12})\sigma_x + (H_{12} - H_{22})\sigma_y + (H_{13} - H_{23})\tau_{xy}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.63)$$

buradan,

$$\lambda(H_{31}\sigma_x + H_{32}\sigma_y + H_{33}\tau_{xy}) \equiv 2\tau_{xy}$$

$$\lambda((H_{11} - H_{12})\sigma_x + (H_{12} - H_{22})\sigma_y + (H_{13} - H_{23})\tau_{xy}) \equiv \sigma_x - \sigma_y$$

olur. Yalnız burada λ herhangi bir çarpandır.

$$H_{31}=0 \quad H_{32}=0 \quad H_{33}=2 \quad (2.64)$$

$$\lambda(H_{11} - H_{12})=1 \quad \lambda(H_{12} - H_{22})=-1$$

şartları elde edilir. Buradan λ 'lar yok edilirse,

$$H_{31}=0, H_{32}=0, H_{11}=H_{22}, H_{33}=2(H_{11} - H_{12})$$

gibi 4 denklem kalır ki; bu izotropluk şartlarıdır.

2.4.2. Çeşitli sabitler

İzotropik cismin elastik yönden şekil değiştirme özelliklerini içeren iki sabit vardır. H_{ik} ile bu teknik sabitler arasındaki bağıntılar,

$$H_{11}=H_{22}=\frac{1}{E} \quad (2.65)$$

$$H_{12}=-\frac{\nu}{E}$$

$$H_{33} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}$$

dır. Burada (E) ye Young modülü veya elastisite modülü denir ve gerilme boyutundadır. (ν) Poisson oranıdır ve boyutsuzdur. (G)'de kayma, bazen rijitlik modülü adı verilir. G'yi E ve ν cinsinden yazarsak,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.66)$$

bulunur. Bu değerler altında,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

bulunur. Gerilmeler şekil değiştirmeler cinsinden,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.68)$$

bulunur.

2.5. Genel Denklemler

2.5.1. Levhanın genel denklemleri

Denge denklemlerinden,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (2.15)$$

bulunur. Şekil değiştirme bileşenlerini arasındaki uygunluk şartından,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.60)$$

bulunur. Gerilme ve şekil değiştirmeler arasındaki bağintıyı ifade eden Hooke kanunları,

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (2.67)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

dır. Yer değiştirme ile şekil değiştirme arasındaki bağintıları yazarsak,

$$\epsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad (2.52)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}$$

olur. Levha çözümünde bilinmeyen σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_x , σ_y , τ_{xy} , $U_x(x,y)$, $U_y(x,y)$ gibi 8 tane iken, denklem sayısı 9 tanedir. Bunların biri uygunluk şartı olduğu için, 8 bilinmeyene karşı 8 denklem olur ve çözüm vardır.

Levha problemleri ikiye ayrılır.

- 1) Gerilme problemi
2. Yer değiştirme problemi

2.5.2. Gerilme problemine ait denklemler

Bilinmeyen olarak σ_x , σ_y ve τ_{xy} kabul edilen bu problemde (2.60) ile (2.67) arasında şekil değiştirme bileşenlerini yok edilirse

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.69)$$

olur. Denklem sağı tarafındaki τ_{xy} 'yi (2.14) ve (2.15) denklemlerinde yok edip bu denklemleri sıra ile x ve y'ye göre türevlerini aldıktan sonra toplarsak,

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.70)$$

olur. (2.69) ve (2.70)'de τ_{xy} yok edilirse,

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.71)$$

denklemini bulunur. Laplace operatörü Δ cinsinden gösterilirse

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.72)$$

gibi basit bir şekil alır. Gerilme probleminin ana denklemleri (2.14-15) ile (2.72)'dir. Ayrıca aranılan σ_x , σ_y ve τ_{xy} fonksiyonları sınırda (2.16)'daki şartları sağlamak zorundadır.

Hacim kuvvetleri 0 veya sabit ise (2.72) denklemini

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.73)$$

haline girer.

2.5.3. Yer değiştirme problemi

Bu kısım tez konusunu içermediği için üzerinde yeterli inceleme yapılmamıştır. Bu konu çeşitli mukavemet ve elastisite teorisi kitaplarından incelenebilir.

2.6. Gerilme Fonksiyonları

2.6.1. Airy fonksiyonu

Gerilme probleminin sınır Şartları, genelde gerilme tipinde verilir.

Gerilme problemini (AIRY) gerilme fonksiyonu adı verilen $F(x,y)$ ile tanımlarsak, bu fonksiyonun çözümü bize problemin sonucunu verir. $F(x,y)$ fonksiyonu sürekli ve türevlerinin mevcut olduğu kabulü ile ve kitle kuvvetlerinin "0" olması Şartından gerilme probleminin genel denklemleri,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

olur. Hesaplanacak olan $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ ve $\tau_{xy}(x,y)$ fonksiyonları $F(x,y)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden parsiyel türevleridir ve Őu Őekildedirler,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.75)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

dir. (2.75) ifadeleri (2.74)'ün üçüncü denkleminde yerine konursa,

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \Delta F \quad (2.76)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2.77)$$

olur. (2.77)'deki ifadeyi sağlayan $F(x,y)$ fonksiyonu problemin çözümüdür. Bundan faydalanarak (2.75) ifadeleri sayesinde gerilmeler bulunmuş olur.

3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

3.1. Konu

Sınır değer problemlerinin her zaman kesin ve kapalı çözümleri yoktur. Bunun için yaklaşık bir çözüm yapmak gerekir. Yaklaşık yöntemler ikiye ayrılır:

1. Sınır şartlarında yaklaşıklık kabul eder fakat diferansiyel denklemin tam olarak sağlanmasını ister.
2. Sınır şartlarında kesin kabul ister fakat diferansiyel denklemin yaklaşık olarak sağlanmasını kabul eder.

Sonlu farklar yöntemi, bu iki gruptan ikincisine giren basit bir yöntemdir.

Esası, bir diferansiyel denklemin çözülmesinden elde edilecek fonksiyon yerine, belirli noktadaki değerlerini ifade etmek için diferansiyeller yerine sonlu farkları almaktır.

3.2. Sonlu Farklar Matematiği

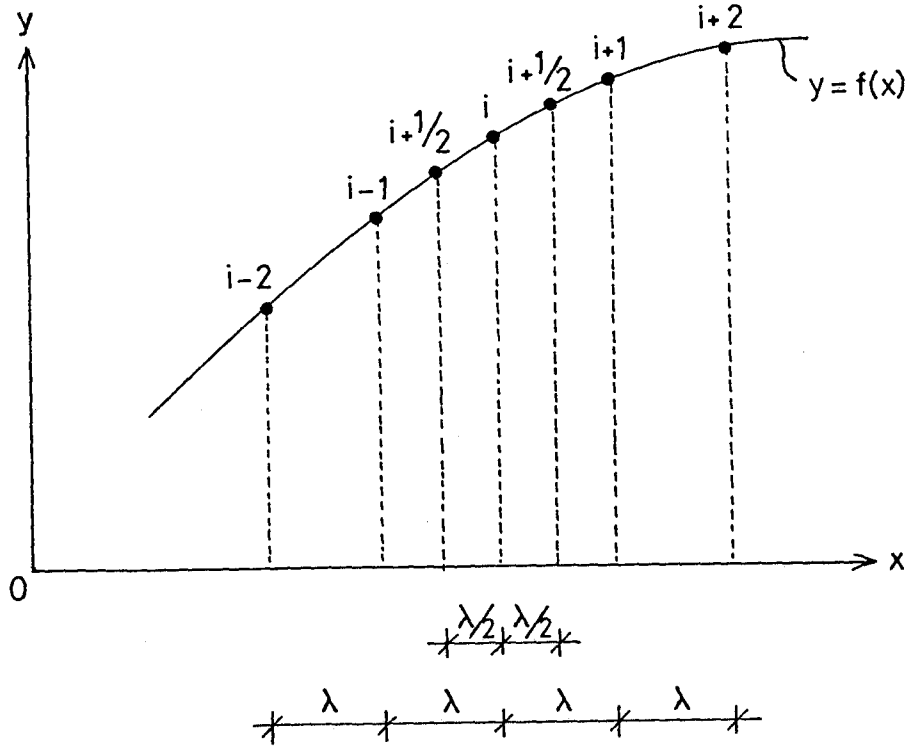
x bağımsız değişkenli $y=f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun y' , y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$ türevleri arasındaki bir bağıntıya diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler ikiye ayrılır. Eğer değişken sayısı bir ise böyle diferansiyel denklemlere "adi diferansiyel denklem" denir. Değişken sayısı birden fazla ve fonksiyonun belirli mert-

beye kadar kısmi türevleri ve bağımsız değişkenler arasındaki bağıntıya "kısmi diferansiyel denklem" ya da "kısmi türevli denklem" denir (3)

3.3. Sonlu Farklar Yönteminin Analizi

3.3.1. Adi türevlerin sonlu farklarla açıklanması

$y=f(x)$, tek değişkenli bir fonksiyondur. Bu fonksiyonu çizip, (Şekil 3.1) ekseninde λ uzunluklu eşit parçalara bölerek ayrı noktalar elde ederiz.



ŞEKİL 3.1 $y=f(x)$ fonksiyonu eğrisi.

Fonksiyonun birinci türevi herhangi bir i noktasındaki eğimi verir. i noktasındaki eğimi yazarsak,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (y_{i+1} - y_i) \quad (3.1)$$

bulunur. Bu bize i noktasındaki ileriye doğru fark denklemini verir. Geriye doğru fark denklemini yazarsak,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (y_i - y_{i-1}) \quad (3.2)$$

bulunur. Bir de merkezi farka göre i noktasının fark denklemini yazarsak

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (3.3)$$

bulunur.

İkinci türev için sonlu fark ifadesini yazarsak,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda} (y_{i+1}' - y_{i-1}') \\ &\approx \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{1}{2\lambda} (y_{i+2} - y_i) - \frac{1}{2\lambda} (y_i - y_{i-2}) \right] \\ &\approx \frac{1}{4\lambda} (y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

bulunur. λ yerine $\lambda/2$ yazarsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i &= \frac{1}{\lambda} (y_{i+1/2}' - y_{i-1/2}') \\ &\approx \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{\lambda} (y_i - y_{i-1}) \right] \\ &\approx \frac{1}{\lambda^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur.

Üçüncü türev sonlu fark ifadesini yazmak için $(i+1)$ deki ileriye fark ve $(i-1)$ deki geriye fark, ikinci türevlerini yazmalıyız. Bunlar

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{i+1} \approx \frac{1}{\lambda^2} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{i-1} \approx \frac{1}{\lambda^2} (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2})$$

dır. Bunlardan faydalanarak,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_i &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{i+1} - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{i-1} \right] \\ &\approx \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{1}{\lambda^2} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) - \frac{1}{\lambda^2} (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}) \right] \\ &\approx \frac{1}{2\lambda^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

bulunur.

Dördüncü türev sonlu fark ifadesini yazarak içinde ikinci türevlerin tekrar ikinci türevlerini alırsak,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_i &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{i+1} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{i-1} \right] \\ &\approx \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{\lambda^2} (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) - 2\frac{1}{\lambda^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda^2} (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}) \right] \\ &\approx \frac{1}{\lambda^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

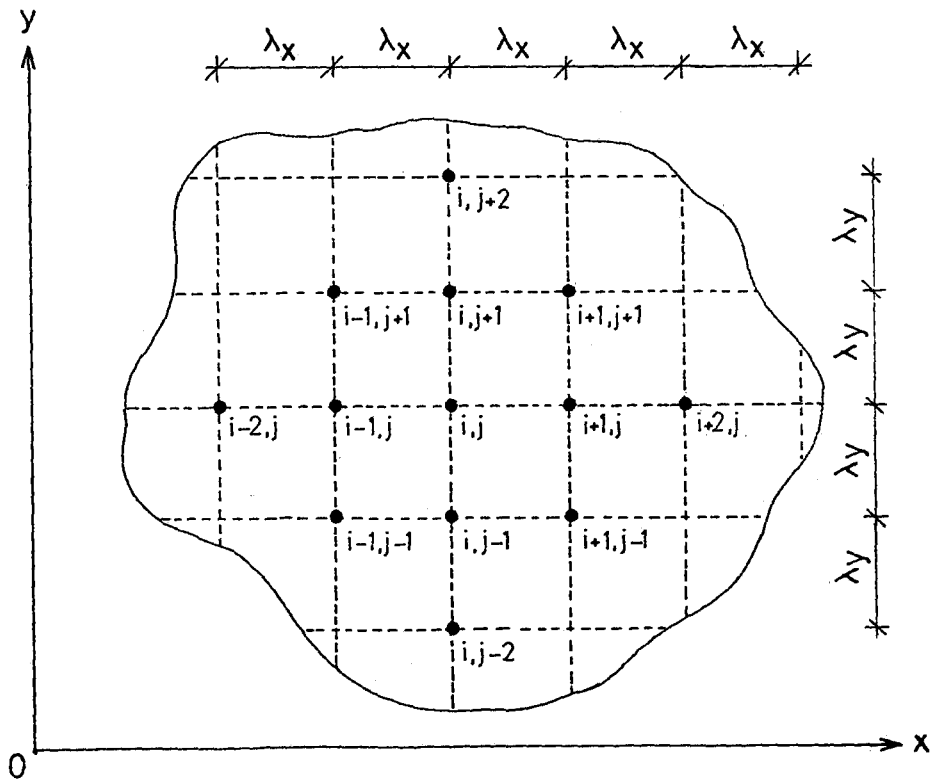
bulunur. Elde ettiğimiz bu dört türev ifadesini daha sade bir halde ifade etmek için tablolaştırabiliriz (Tablo 3.1).

NOKTA NO TÜREV	y_{i-2}	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	y_{i+2}	ÇARPAN
$\frac{dy}{dx}$		-1	+1			$\frac{1}{\lambda}$
$\frac{dy}{dx}$		-1		+1		$\frac{1}{2\lambda}$
$\frac{dy}{dx}$			-1	+1		$\frac{1}{\lambda}$
$\frac{d^2y}{dx^2}$		+1	-2	+1		$\frac{1}{\lambda^2}$
$\frac{d^3y}{dx^3}$	-1	+2		-2	+1	$\frac{1}{2\lambda^3}$
$\frac{d^4y}{dx^4}$	+1	-4	+6	-4	+1	$\frac{1}{\lambda^4}$

TABLO 3.1 ADİ TÜREVLERİN SONLU FARK KATSAYILARI.

3.3.2. Kısmi türevlerin sonlu farklarla açıklanması

$z=f(x,y)$ çift değişkenli bir fonksiyondur. Değişkenler aynı zamanda eşit aralıklı ayırık noktaların belirleneceği eksenlerdir. Fonksiyondan da anlaşılacağı gibi değişkenler bir düzlem belirler. x - y düzleminde birim aralıklar sırayla λ_x ve λ_y olsun. Bulunan ayırık noktalardan eksenlere çizilen dikler ile bir ağ oluşur. Ağır her bir düğümü sonlu fark denklemlerinin uygulanacağı noktaları belirler (Şekil 3.2):



ŞEKİL 3.2 Plak ağıнын numaralanışı.

(Şekil 3.2)'de belirlenen noktalardan yararlanılarak $z=f(x,y)$ fonksiyonunun çeşitli mertebeden kısmi türevlerini bulabiliriz.

Fonksiyonun i, j noktasının x ve y doğrultularındaki eğimleri sırası ile

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{i,J} &\cong \frac{1}{2\lambda_x} (z_{i+1,J} - z_{i-1,J}) \\
 &\cong \frac{1}{2\lambda_x} [1 \ -1] \begin{bmatrix} z_{i+1,J} \\ z_{i-1,J} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{i,J} &\cong \frac{1}{2\lambda_y} (z_{i,J+1} - z_{i,J-1}) \\
 &\cong \frac{1}{2\lambda_y} [1 \ -1] \begin{bmatrix} z_{i,J+1} \\ z_{i,J-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur.

Adi türevlerde olduğu gibi kısmi türevlerde de aynı özellikler kullanılmaktadır. Sırası ile x , y ve xy göre kısmi türevleri yazarsak,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{i,J} &\cong \frac{1}{\lambda_x^2} (z_{i-1,J} - 2z_{i,J} + z_{i+1,J}) \\
 &\cong \frac{1}{\lambda_x^2} [1 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} z_{i-1,J} \\ z_{i,J} \\ z_{i+1,J} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{i,J} &\cong \frac{1}{\lambda_y^2} (z_{i,J-1} - 2z_{i,J} + z_{i,J+1}) \\
 &\cong \frac{1}{\lambda_y^2} [1 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} z_{i,J-1} \\ z_{i,J} \\ z_{i,J+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{i,J} \cong \frac{1}{2\lambda_y} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{i,J-1} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{i,J+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \cong \frac{1}{2\lambda_y} \left[\left(\frac{1}{2\lambda_x} (z_{i-1,J-1} - z_{i+1,J-1}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2\lambda_x} (z_{i-1,J+1} - z_{i+1,J+1}) \right) \right] \\
& \cong \frac{1}{4\lambda_x \lambda_y} [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} z_{i-1,J-1} \\ z_{i+1,J-1} \\ z_{i-1,J+1} \\ z_{i+1,J+1} \end{bmatrix} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

bulunur.

Levha genel denkleminde kullanacağınız dördüncü mertebeden kısmi türevleri sırasıyla x , y ve xy için yazalım:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \right)_{i,J} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i,J} \cong \frac{1}{\lambda_x^2} \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1,J} - 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i,J} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1,J} \right] \\
&\cong \frac{1}{\lambda_x^2} \left[\frac{1}{\lambda_x^2} (z_{i-2,J} - 2z_{i-1,J} + z_{i,J}) \right. \\
&\quad - 2 \frac{1}{\lambda_x^2} (z_{i-1,J} - 2z_{i,J} + z_{i+1,J}) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda_x^2} (z_{i,J} - 2z_{i+1,J} + z_{i+2,J}) \right] \\
&\cong \frac{1}{\lambda_x^4} (z_{i-1,J} - 4z_{i-1,J} + 6z_{i,J} - 4z_{i+1,J} + z_{i+2,J}) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right)_{i,J} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{i,J} \cong \frac{1}{\lambda_y^2} \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{i,J-1} - 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{i,J} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{i,J+1} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda_y^2} \left[\frac{1}{\lambda_y^2} (z_{i,J-2} - 2z_{i,J-1} + z_{i,J}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{1}{\lambda y^2} (z_{i,J-1} - 2z_{i,J} + z_{i,J+1}) \\
& + \frac{1}{\lambda y^2} (z_{i,J} - 2z_{i,J+1} + z_{i,J+2}) \Big] \\
\approx & \frac{1}{\lambda y^4} (z_{i,J-2} - 4z_{i,J-1} + 6z_{i,J} - 4z_{i,J+1} + z_{i,J+2}) \quad (3.14) \\
\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{i,J} = & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i,J} = \left[\frac{1}{\lambda y^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i-1,J} - 2 \frac{1}{\lambda y^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i,J} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\lambda y^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{i+1,J} \right] \\
\approx & \frac{1}{\lambda y^2} \left[\frac{1}{\lambda x^2} (z_{i-1,J-1} - 2z_{i-1,J} + z_{i-1,J+1}) \right. \\
& - 2 \frac{1}{\lambda x^2} (z_{i,J-1} - 2z_{i,J} + z_{i,J+1}) \\
& \left. + \frac{1}{\lambda x^2} (z_{i+1,J-1} - 2z_{i+1,J} + z_{i+1,J+1}) \right] \\
\approx & \frac{1}{\lambda x^2 \lambda y^2} (z_{i-1,J-1} - 2z_{i-1,J} + z_{i-1,J+1} \\
& - 2z_{i,J-1} + 4z_{i,J} - 2z_{i,J+1} \\
& + z_{i+1,J-1} - 2z_{i+1,J} + z_{i+1,J+1}) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

3.3.3. Kısmi türevlerin sonlu farklarla molekül gösterimi

Molekül gösterimi (Tablo 3.2)'den alınabilir.

TÜREV	ÇARP.	MOLEKÜL GÖSTERİMİ
$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{1}{2\lambda_x}$	
$\frac{\partial z}{\partial y}$	$\frac{1}{2\lambda_y}$	
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	$\frac{1}{\lambda_x^2}$	
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$	$\frac{1}{\lambda_y^2}$	
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	$\frac{1}{4\lambda_x \lambda_y}$	
$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$	$\frac{1}{\lambda_x^4}$	

TABLO 3.2 KISMİ TÜREVLERİN SONLU FARK KATSAYILARI.

TÜREV	ÇARP.	MOLEKÜL GÖSTERİMİ
$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$	$\frac{1}{\lambda y^4}$	
$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$	$\frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2}$	

TABLO 3.2 KISMİ TÜREVLERİN SONLU FARK KATSAYILARI. (Devam)

4. LEVHALARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Levha Formülleri

Levha problemleri, 2. Bölümde belirtildiği gibi gerilme ve yer değiştirme problemleridir. Tez çalışmasında levha problemlerinin gerilme problemi tipinde çözümü incelenmiştir. Bu yüzden gerilme problemi ile ilgili formüller gereklidir. Bu formüller

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

$$\sigma_y = - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (4.4)$$

dır.

4.2. Dubas Yöntemi

Levha gerilme problemini (4.1)'deki difransiyel denklem ile çözmek mümkündür. (4.2), (4.3) ve (4.4) formülleri yar-

dımı ile de istenilen gerilmeler bulunur. (4.1)'deki denklem çözüp $F(x,y)$ fonksiyonunu bulmak yerine, $F(x,y)$ fonksiyonunun belli noktalarındaki değerlerini bularak, bu noktalardaki gerilme değerleri de bulunabilir.

Diferansiyel denklemi çözmek için bir benzetme yapabiliriz. Elemanlar mukavemette, yük-moment ve yük-kesme kuvveti ilişkisi bilinir. Bunlar,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -q \quad (4.6)$$

dır. (4.5) ifadesinin (4.3) ifadesine benzediği görülür. (4.5) ifadesi açıklığı x yönüne paralel olan ve kirişin $-q$ yükü ile moment ilişkisini ifade eder, (4.3) ifadesi de levhanın eksenine paralel kenarındaki σ_y gerilmesi ile $F(x,y)$ fonksiyonunun ilişkisini ifade etmektedir.

İkinci bir benzetme yapmak için (4.4) ifadesini şöyle yapabiliriz.

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (4.7)$$

Yine (4.6) ifadesinin (4.7) ifadesinin parantez içindeki ifadesine benzediği görülür. (4.6) ifadesi $-q$ yükü ile kesme kuvveti arasındaki ilişkiyi gösterir. (4.7) ifadesi de $(\partial F/\partial y)$ gerilme fonksiyonunu temsil eden yüzeyin eğimi, kenara dik, şiddeti τ_{xy} olan bu yük tarafından oluşturulan kesme kuvvetine eşittir.

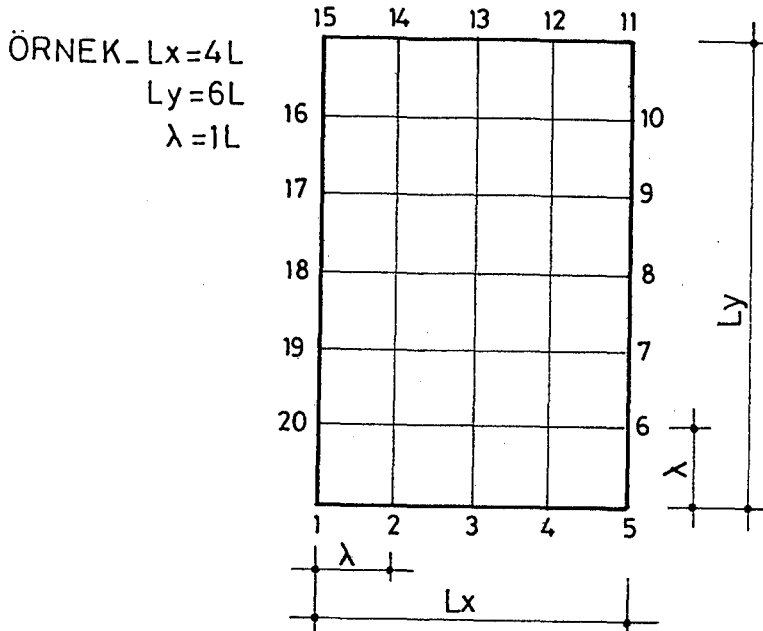
Bu yukarıda söylenen metod Dubas metodudur.

4.3. Programın Tanıtımı

4.3.1. Levhanın tanıtımı ve yükler

İlk önce levhanın x ve y yönlerindeki boyutları ve hesap aralığı olan λ saptanmaktadır. Daha sonra da Şekil 4.1

deki numara sırası ile her noktadaki x ve y yönündeki kuvvetler girilir. Bunlar birim alana gelen gerilmeleridir.



ŞEKİL 4.1 Yükleme numaralanışı

4.3.2. Sınır noktalarındaki fonksiyon değerleri

Dubas metodu esası altında, levhanın kenarına dik gelen birim gerilme değerleri sanki basit bir kiriş eğimi yapıyor kabulü ile her bir λ aralığındaki $F(x,y)$ fonksiyon değerini verir. Eğer levha kenarına dik bir kuvvet (gerilme) gelmiyor, yatay geliyorsa bu durumda her bir λ aralığındaki $F(x,y)$ fonksiyonunun değeri, bu noktadaki kesme gerilmesi ile, incelenen kenara dik olan kenara etkiyen gerilmelerden oluşan mesnet reaksiyonlarının toplamına eşittir.

Sınır noktalarındaki fonksiyon değerleri yanında katsayılar matrisinin oluşumunda levha dışındaki fiktif noktalarında değerlerinin bilinmesi gerekir. Bunun için birinci türev ifadesinden yararlanılır. Birinci türevde, bulunan kenara paralel kayma gerilmesi ifadesi, levha içindeki bir

nokta ile aynı doğrultudaki fiktif nokta arasındaki farka eşittir. Burada fiktif noktalarındaki fonksiyon değerleri bulunabilir.

4.3.3. Katsayılar ve eşitlik matrisinin kurulması ve çözüm

(4.1) ifadesini, 3. bölümde verilen sonlu fark ifadeleri şekline dönüştürüp herhangi bir i noktalarındaki diferansiyel denklemi $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ kabulü halinde şöyle yazabiliriz.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{1}{\lambda^4} (F_{i-2,J} - 4F_{i-1,J} + 6F_{i,J} - 4F_{i+1,J} + F_{i+2,J}) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{\lambda^4} (F_{i-1,J+1} - 2F_{i,J+1} + F_{i+1,J+1} - F_{i-1,J-1} + 4F_{i,J} - 2F_{i+1,J} + F_{i-1,J-1} - 2F_{i,J-1} + F_{i+1,J-1}) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{1}{\lambda^4} (F_{i,J+2} - 4F_{i,J+1} + 6F_{i,J} - 4F_{i,J-1} + F_{i,J-2}) \quad (4.10)$$

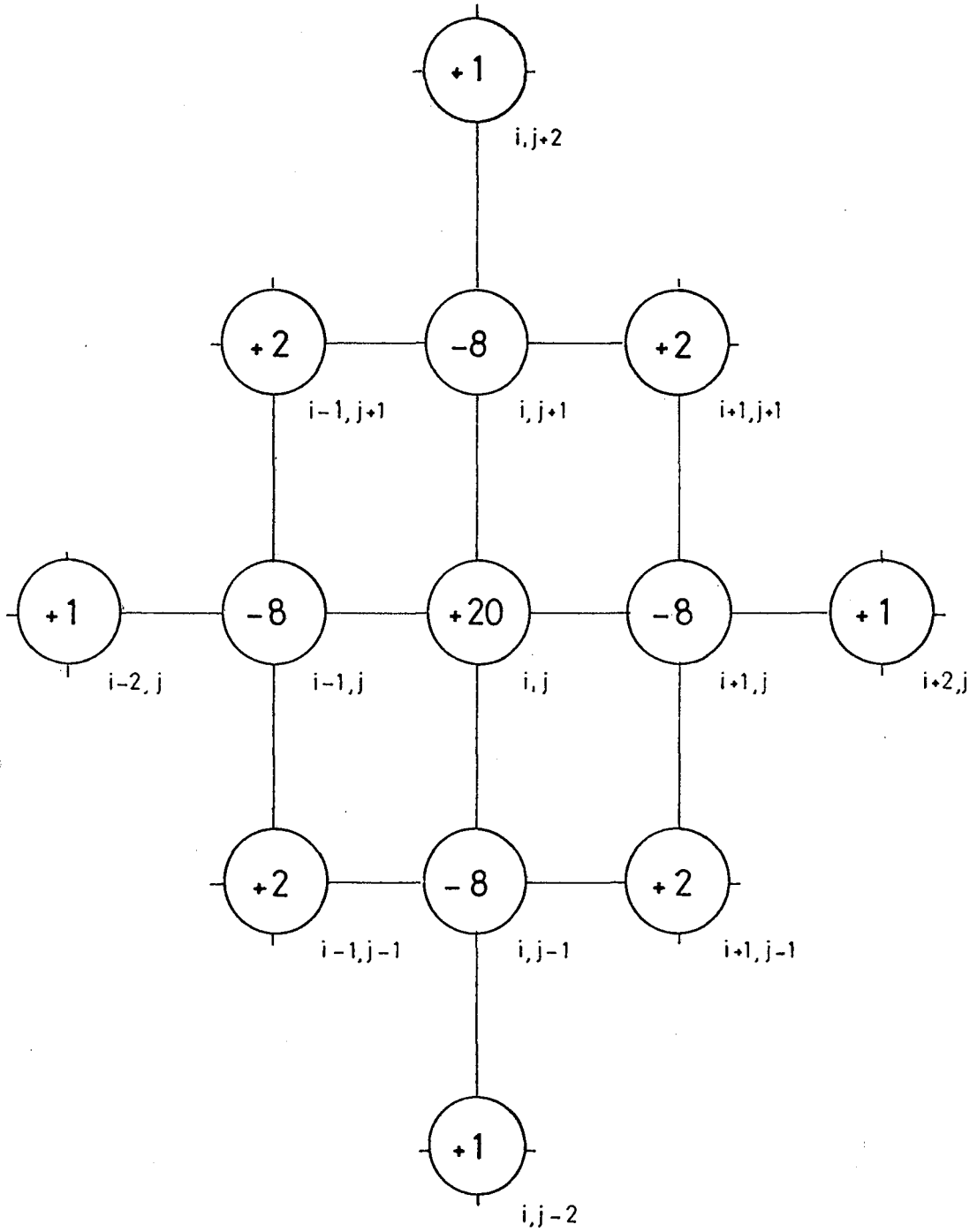
(4.8), (4.9) ve (4.10) ifadelerini (4.1) ifadesi halinde toplarsak,

$$\frac{1}{\lambda^4} (F_{i+2,J} + 2F_{i+1,J-1} - 8F_{i+1,J} + 2F_{i+1,J+1} + F_{i,J-2} - 8F_{i,J-1} + 20F_{i,J} - 8F_{i,J+1} + F_{i,J+2} + 2F_{i-1,J-1} - 8F_{i-1,J} + 2F_{i-1,J+1} + F_{i-2,J}) = 0 \quad (4.11)$$

bulunur. Bu ifade Tablo 4.1 de molekül şeklinde görülebilir.

Programda her bir noktadaki bu ifadeyi yazıp düzenlersek katsayılar matrisi oluşturulur. Eşitlik matrisi (4.1) deki ifadeden anlaşıldığı gibi a_{ik} 'leri sıfır olan bu matristir. Fakat sınır noktalarındaki ifadeleri yazarken bilinen değerler katsayılar matrisinden çıkarılarak eşitlik matrisine yazılır. Elde edilen katsayılar matrisinin simetrik bir bant matris olduğu görülür. Bundan faydalanılarak

ÇARPAN : $\frac{1}{\lambda^4}$



TABLO 4.1 LEVHA DİFRANSİYEL DENKLEMİN SONLU FARK KATSAYILARI.

katsayılar matrisi yarım bant matris halinde yazılır. Katsayılar ile eşitlik matrisi, yarım bant çözümü yapan Coleski (3) denklem sistemi ile çözülür.

4.3.4. Gerilmelerin bulunması

Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda her bir noktadaki $F(x,y)$ fonksiyonunun değeri bulunur. (4.2), (4.3) ve (4.4) ifadelerini kullanarak her bir noktadaki gerilme değerleri bulunur.

4.4. Programın İşletilmesi

Tarafımdan hazırlanan bu program boyutsuz çözüm yapmaktadır. Girilen değerler için;

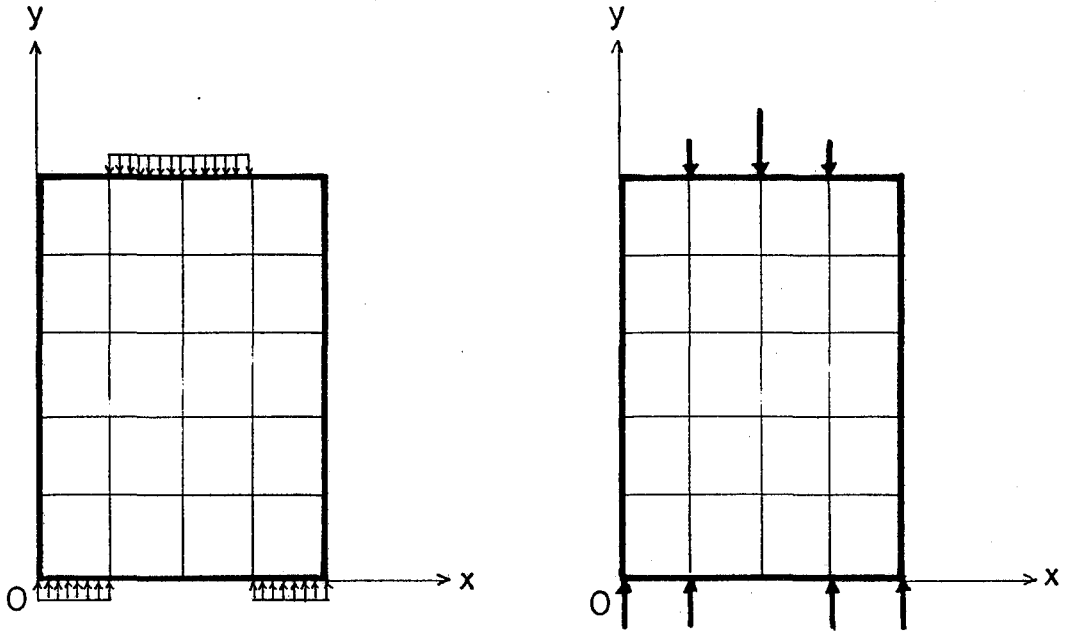
Kuvvet birimi	: K
Uzunluk birimi	: L
Gerilme birimi	: $\frac{K}{L^2}$

kabulü vardır. Örnek olarak $K=\text{ton}$, $L=\text{metre}$ ise, elde edilen gerilme birimi ton/m^2 'dir.

Dataların hazırlanışı:

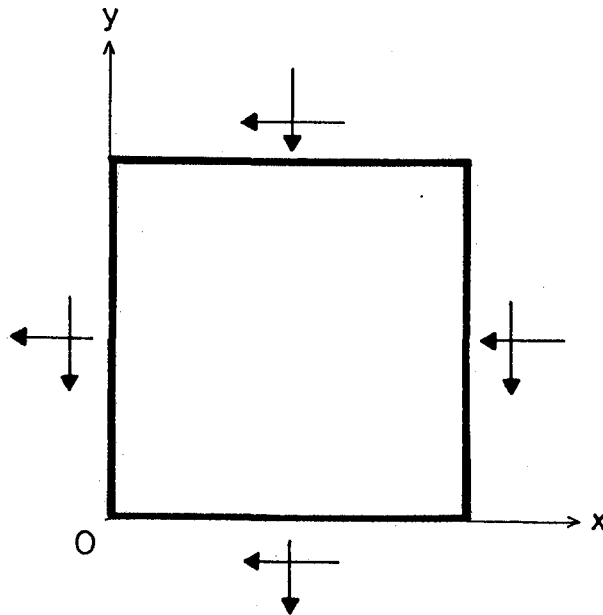
1. Yatay boy (L_x)
2. Düşey boy (L_y)
3. Hesap aralığı (λ)
4. Yük sayısı (n)
5. Yük sayısı kadar sırası ile
 - Yük uygulanan nokta no
 - x yönündeki yükler
 - y yönündeki yükler

Yük kabullerinde sisteme gelen yükler tekil yükler ise λ aralığına isabet eden kuvveti gösterir. Fakat yayılı yük var ise Şekil 4.2 deki gibi idealize edilebilir.



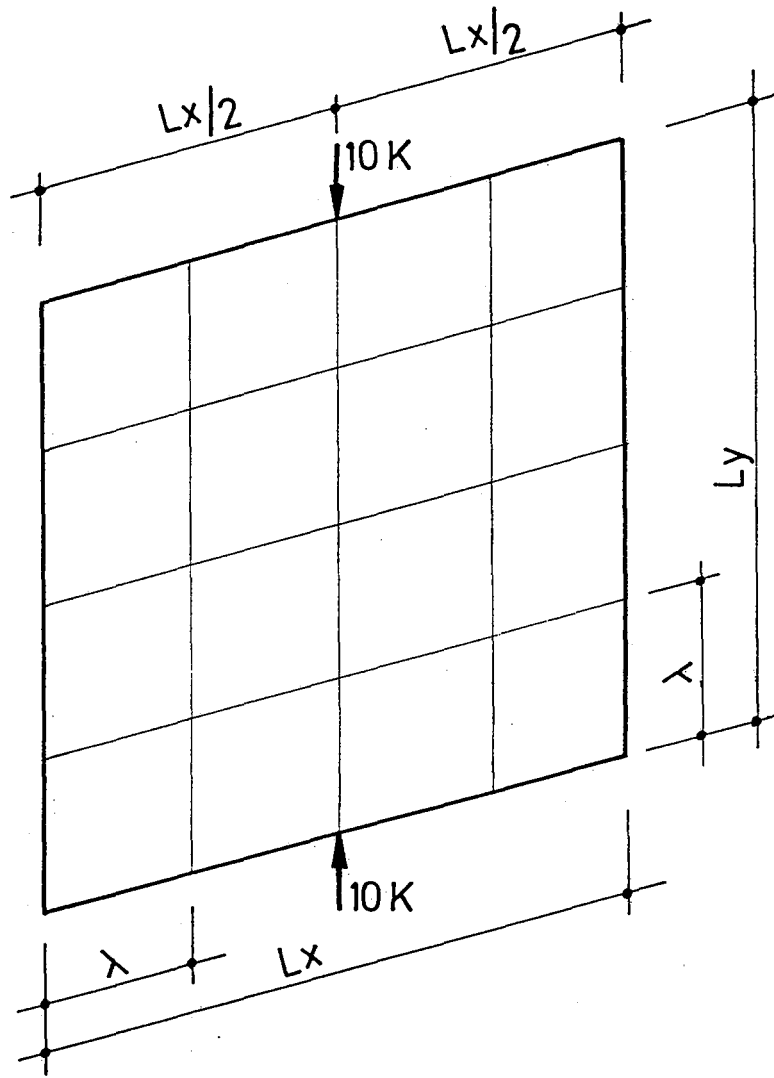
ŞEKİL 4.2 Levha yüklerinin idealize edilmesi

Yüklerin seçilen eksen takımına göre pozitif veya negatif olmaları durumu Şekil 4.3 de gösterilmiştir.



ŞEKİL 4.3 Levhaya etkiyen yüklerin pozitif yönleri.

4.5. ÖRNEK PROBLEM_1



$$L_x = 4L$$

$$L_y = 4L$$

$$\lambda = 1L$$

NOT : KUVVET BİRİMİ = K
 UZUNLUK BİRİMİ = L
 GERİLME BİRİMİ = K/L²

ŞEKİL 4.5 Örnek problem_1

 NOT : KUVVET Birimi : K
 UZUNLUK Birimi : L
 GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 4.000
 DUSEY BOYU (Ly) = 4.000
 HESAP ARALIGI (Lamda) = 1.000

Y U K L E R

 NOKTA NO x-YONU y-YONU

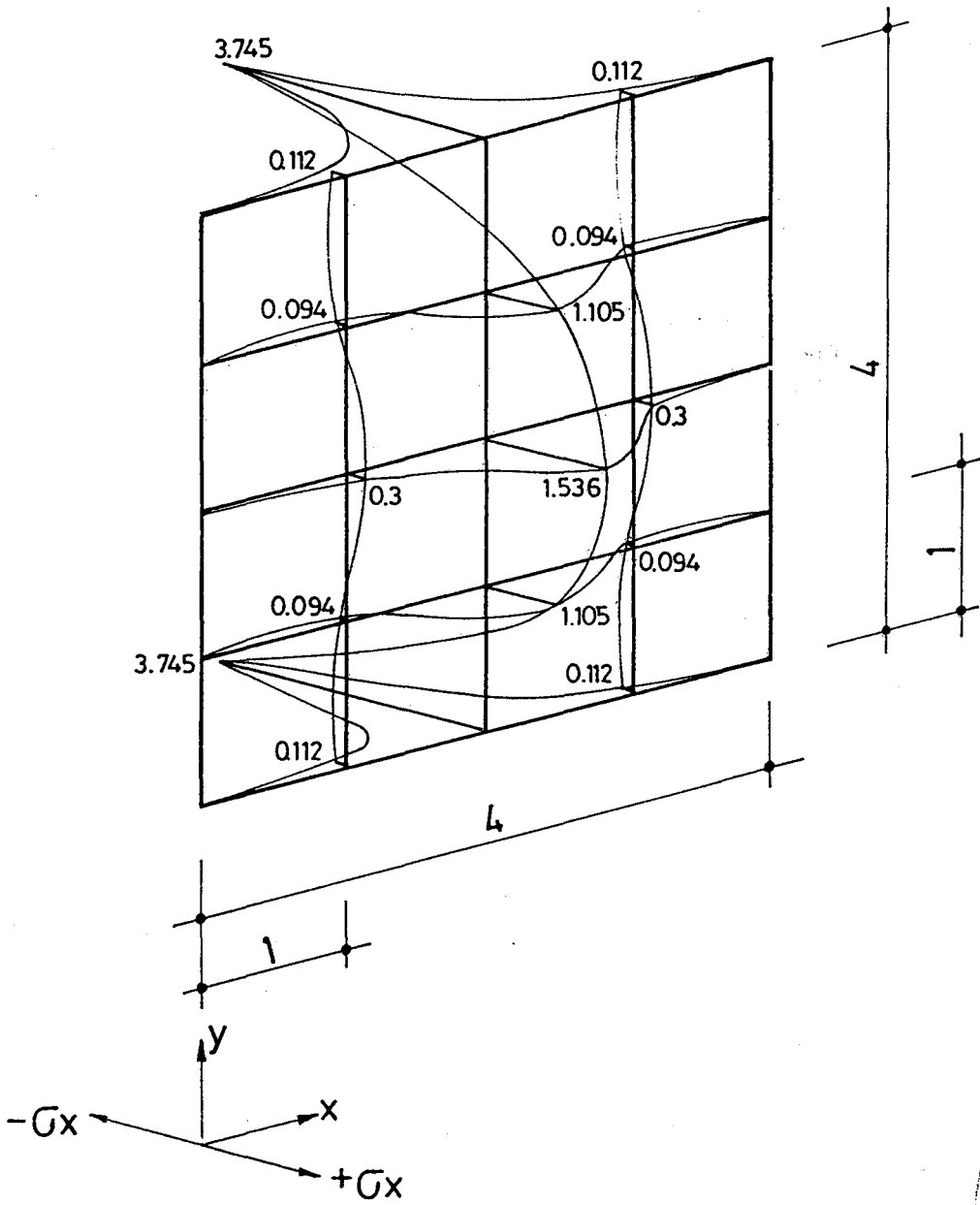
 3 +0.00 -10.00
 11 +0.00 +10.00

NOT: '+' ISARET CEKME, '-' ISARET BASINC'I GOSTERIR.

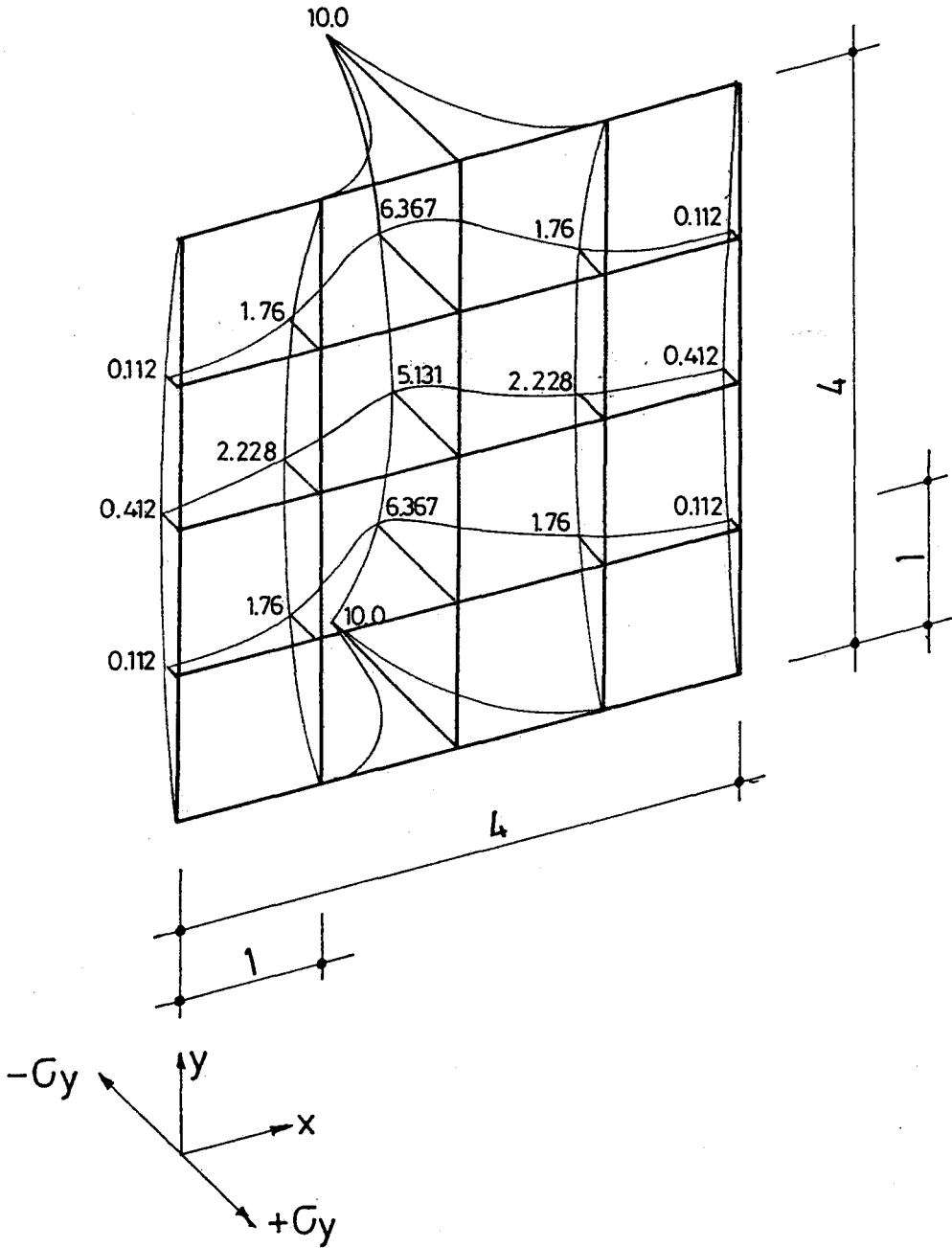
G E R İ L M E L E R

 NOKTA NO x YONU y YONU xy YONU

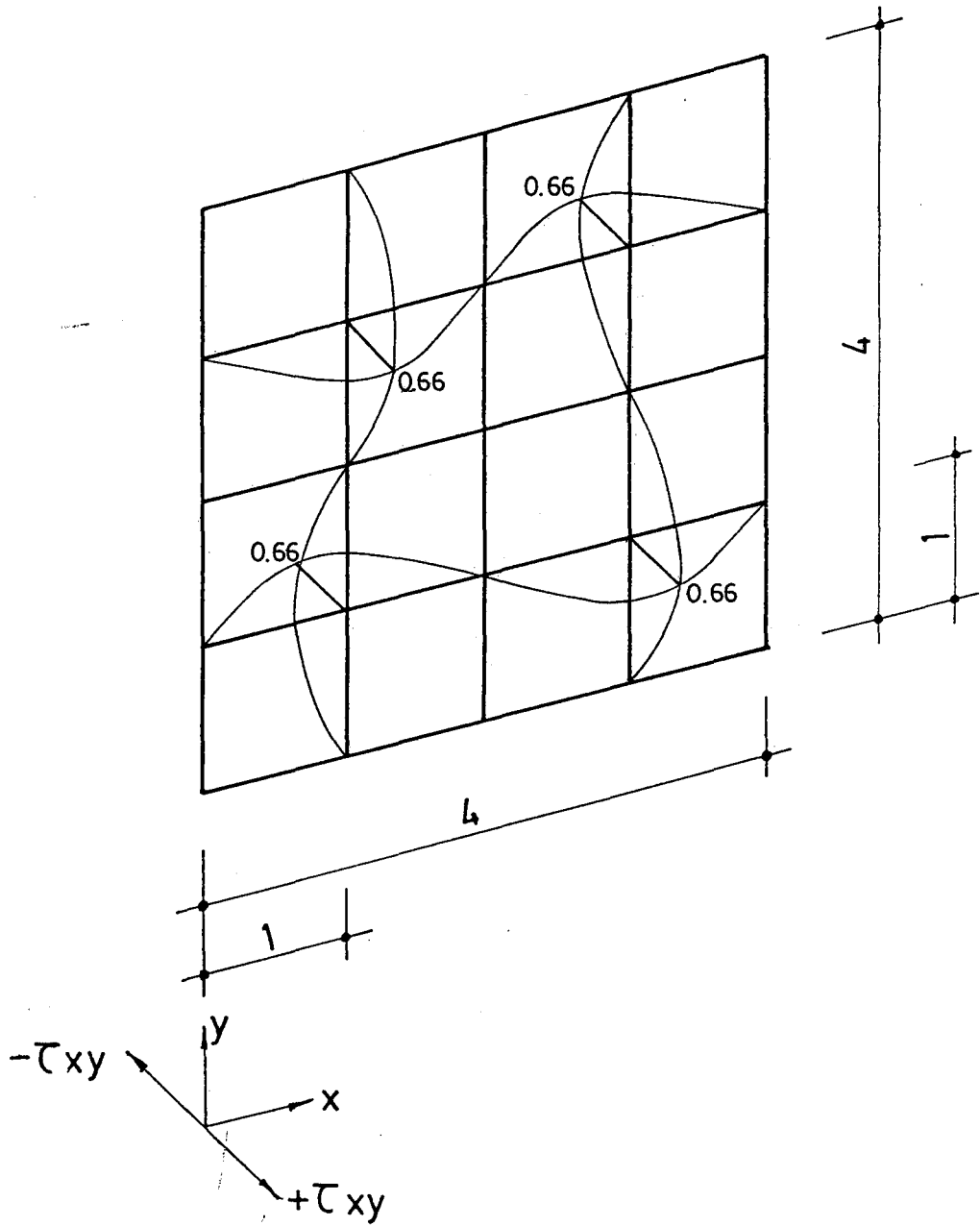
 1 +0.000 +0.000 +0.000
 2 +0.000 -0.112 +0.000
 3 +0.000 -0.412 +0.000
 4 +0.000 -0.112 +0.000
 5 +0.000 +0.000 +0.000
 6 -0.112 +0.000 +0.000
 7 -0.094 -1.760 +0.660
 8 +0.300 -2.228 +0.000
 9 -0.094 -1.760 -0.660
 10 -0.112 +0.000 +0.000
 11 -3.745 -10.000 +0.000
 12 +1.105 -6.367 +0.000
 13 +1.536 -5.131 +0.000
 14 +1.105 -6.367 +0.000
 15 -3.745 -10.000 +0.000
 16 -0.112 +0.000 +0.000
 17 -0.094 -1.760 -0.660
 18 +0.300 -2.228 +0.000
 19 -0.094 -1.760 +0.660
 20 -0.112 +0.000 +0.000
 21 +0.000 +0.000 +0.000
 22 +0.000 -0.112 +0.000
 23 +0.000 -0.412 +0.000
 24 +0.000 -0.112 +0.000
 25 +0.000 +0.000 +0.000



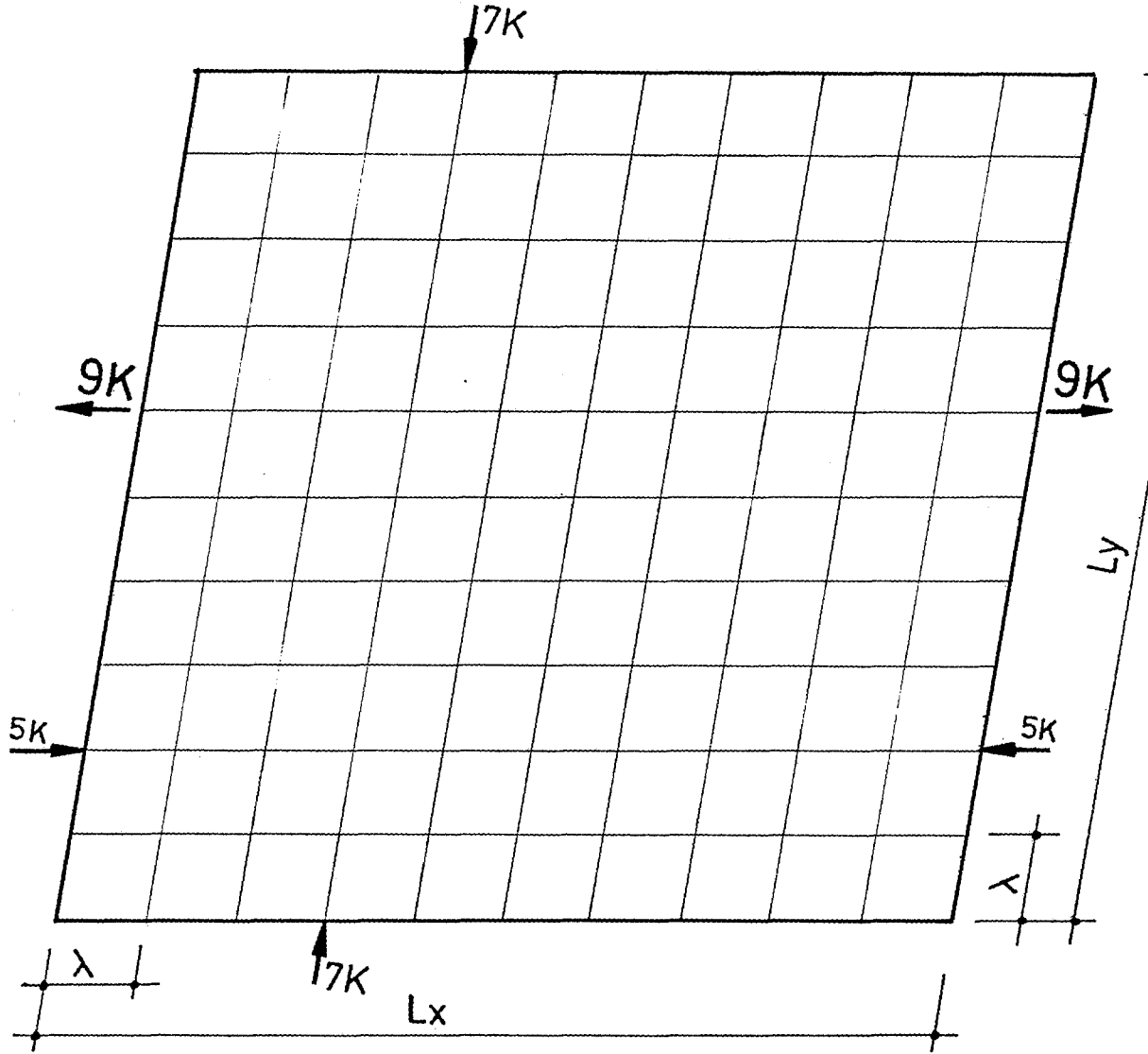
SEKİL 4.6 Örnek problem_1 σ_x gerilmeleri.



ŞEKİL 4.7 Örnek problem_1 G_y gerilmeleri.



ŞEKİL 4.8 Örnek problem_1 τ_{xy} gerilmeleri.



$$\begin{aligned} L_x &= 5L \\ L_y &= 5L \\ \lambda &= 0.5L \end{aligned}$$

NOT : KUVVET BİRİMİ = K
UZUNLUK BİRİMİ = L
GERİLME BİRİMİ = K/L²

ŞEKİL 4.9 Örnek problem _2

NOT : KUVVET Birimi : K
UZUNLUK Birimi : L
GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 5.000
DUSEY BOYU (Ly) = 5.000
HESAP ARALIGI (Lamda) = 0.500

Y U K L E R

NOKTA NO	x-YONU	y-YONU
4	+0.00	-7.00
13	+5.00	+0.00
17	-9.00	+0.00
28	+0.00	+7.00
35	+9.00	+0.00
39	-5.00	+0.00

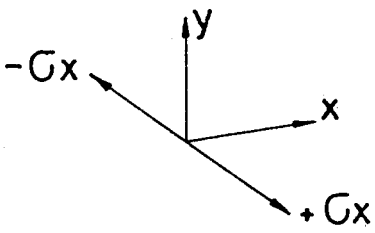
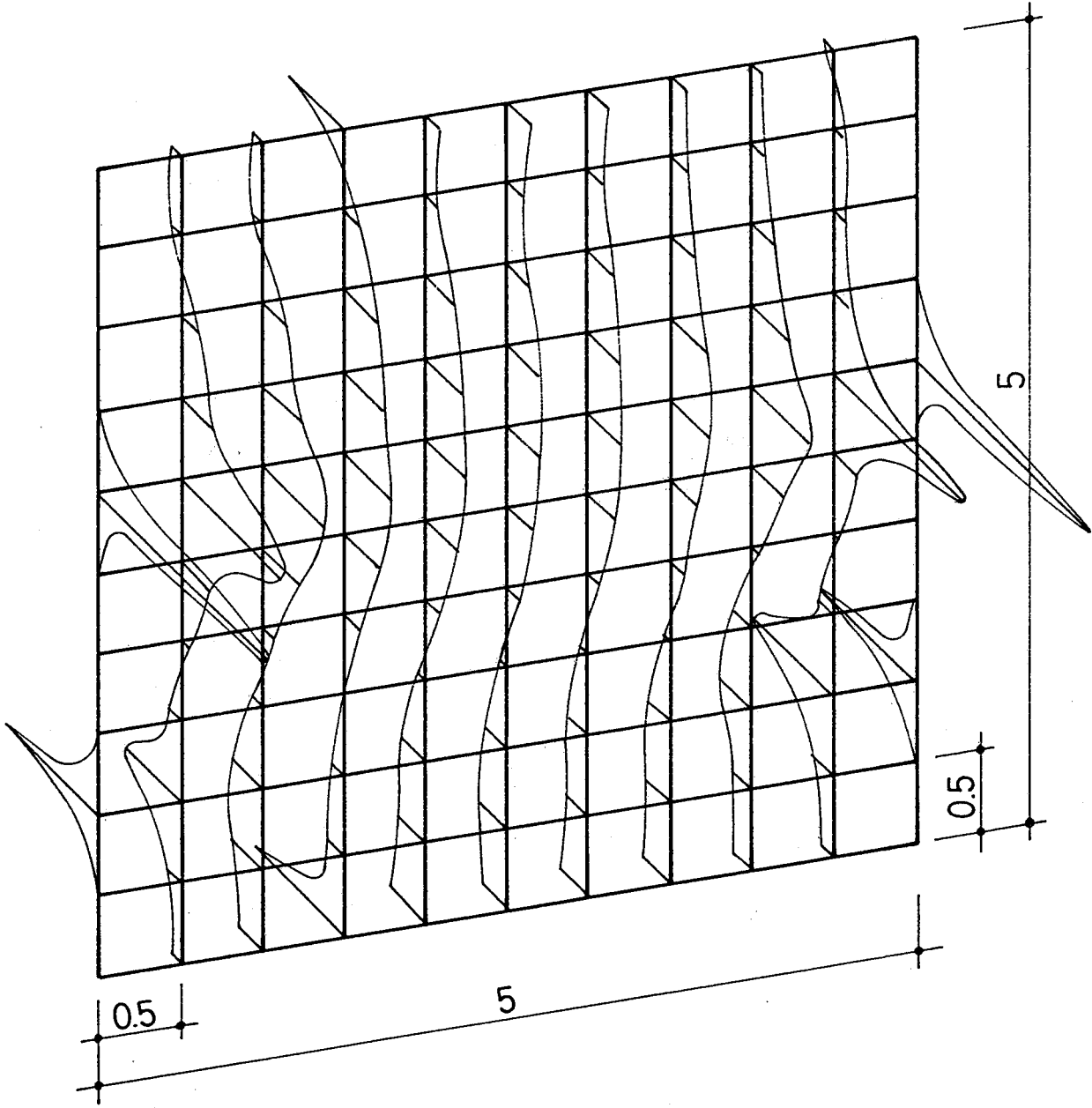
NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINC'I GÖSTERİR.

B E R İ L M E L E R

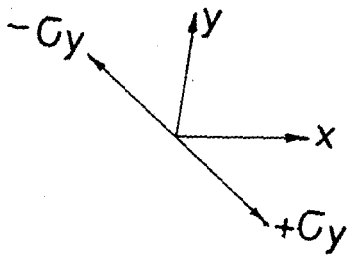
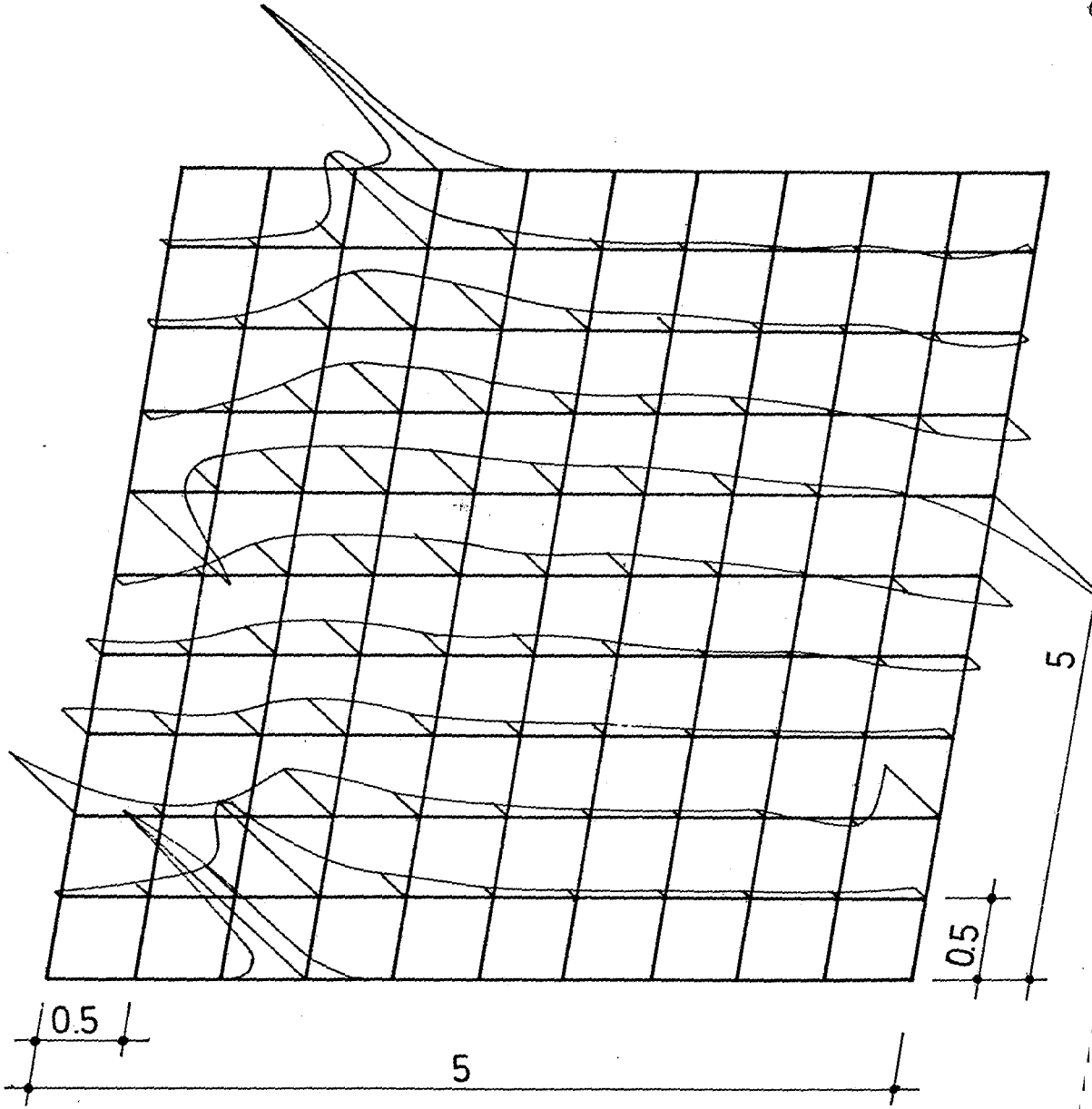
NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	+0.000	+0.000
2	+0.000	-0.096	+0.000
3	+0.000	-0.488	+0.000
4	+0.000	+0.663	+0.000
5	+18.000	+7.828	+0.000
6	+0.000	+0.265	+0.000
7	+0.000	-1.447	+0.000
8	+0.000	-2.097	+0.000
9	-10.000	-5.299	+0.000
10	+0.000	-0.423	+0.000
11	+0.000	+0.000	+0.000
12	-0.096	+0.000	+0.000
13	-0.149	-0.400	+0.265
14	+0.772	-0.570	-0.183
15	+3.007	-0.426	-1.645
16	+10.636	-2.306	+0.189
17	+2.926	-0.783	+2.109
18	+0.531	-1.469	+0.891
19	-1.276	-1.984	+0.795
20	-5.961	-0.799	-0.663
21	-2.226	-1.006	-1.524
22	-0.423	+0.000	+0.000
23	-0.990	+0.000	+0.000
24	-0.068	-2.135	+1.056
25	+1.859	-2.595	+0.006
26	+3.990	-2.862	-0.883
27	+6.675	-3.909	+0.244
28	+3.642	-2.727	+1.528
29	+1.233	-2.420	+1.107
30	-0.852	-2.392	+0.506
31	-3.315	-1.934	-0.984
32	-3.239	-2.086	-2.208
33	-2.859	+0.000	+0.000

34	-6.154	-14.000	+0.000
35	+1.686	-8.223	-0.492
36	+3.140	-5.214	-0.797
37	+4.192	-4.287	-0.794
38	+4.944	-4.256	+0.024
39	+3.483	-3.543	+0.876
40	+1.656	-3.138	+0.959
41	+0.003	-3.284	+0.697
42	-1.280	-4.388	+0.105
43	-2.013	-7.945	-0.288
44	-9.466	-14.000	+0.000
45	+0.236	+0.000	+0.000
46	+0.671	-2.389	-1.872
47	+2.339	-3.266	-1.473
48	+3.498	-3.620	-0.911
49	+3.895	-3.753	-0.222
50	+3.016	-3.379	+0.389
51	+1.528	-2.925	+0.706
52	-0.101	-2.628	+0.901
53	-1.697	-2.489	+1.136
54	-3.285	-2.089	+1.493
55	-3.965	+0.000	+0.000
56	+1.849	+0.000	+0.000
57	+1.169	-0.811	-0.591
58	+2.061	-1.858	-0.710
59	+3.024	-2.632	-0.507
60	+3.352	-2.987	-0.248
61	+2.630	-2.767	+0.000
62	+1.243	-2.258	+0.248
63	-0.363	-1.686	+0.507
64	-1.853	-1.119	+0.710
65	-2.866	-0.520	+0.591
66	-2.643	+0.000	+0.000
67	+1.841	+0.000	+0.000
68	+1.430	-0.332	+0.141
69	+2.057	-1.067	+0.124
70	+2.969	-1.845	+0.089
71	+3.385	-2.323	-0.158
72	+2.534	-2.070	-0.389
73	+1.019	-1.495	-0.327
74	-0.629	-0.853	-0.079
75	-1.979	-0.289	+0.213
76	-2.526	-0.032	+0.239
77	-2.361	+0.000	+0.000

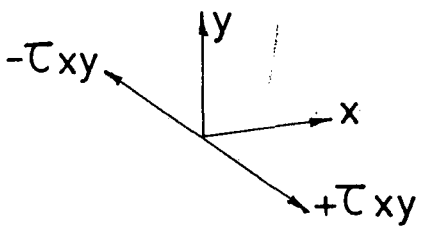
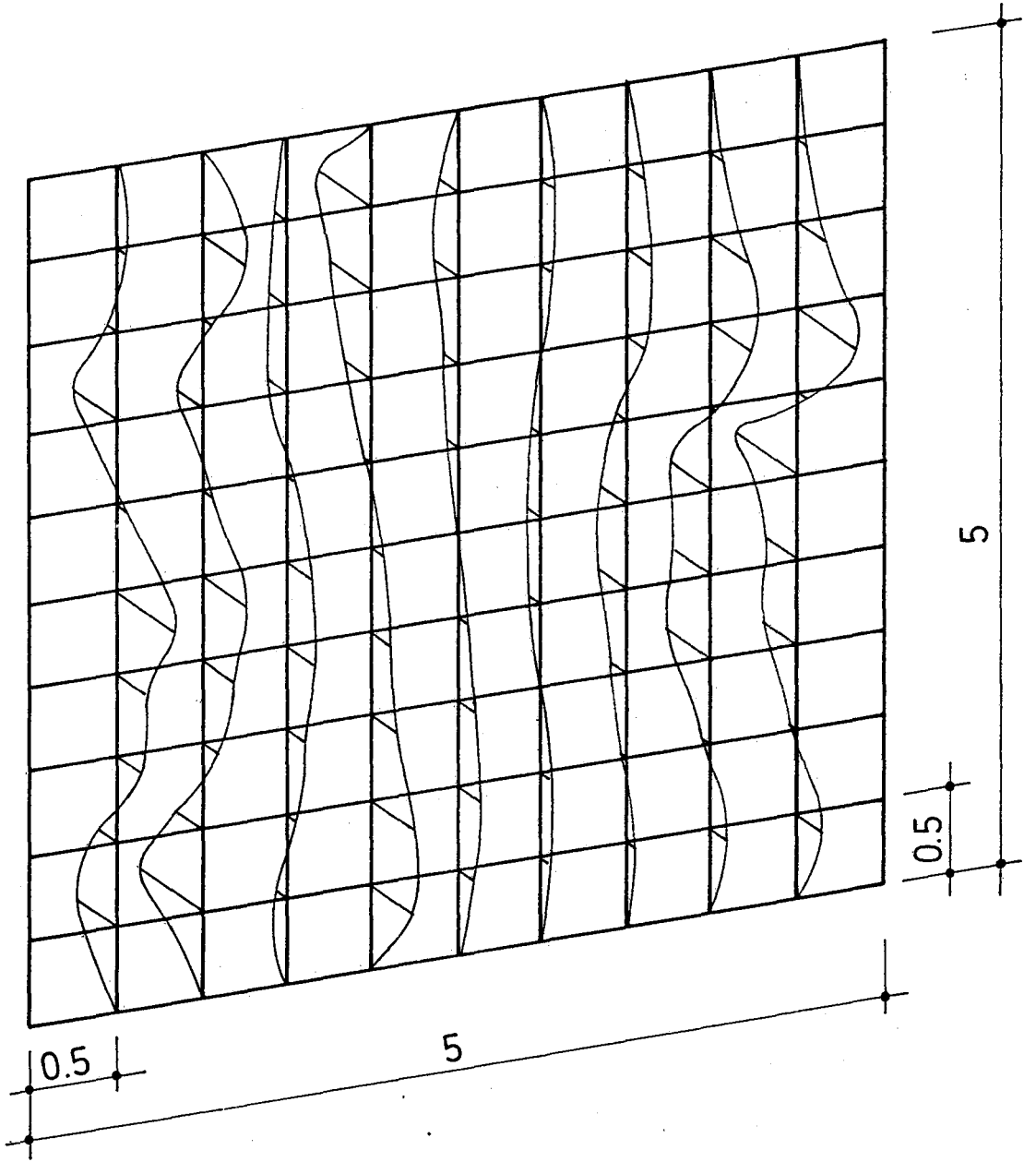
78	+1.169	+0.000	+0.000
79	+1.288	-0.084	+0.526
80	+2.010	-0.474	+0.771
81	+3.214	-1.161	+0.748
82	+4.150	-1.855	-0.054
83	+2.760	-1.352	-0.876
84	+0.863	-0.737	-0.930
85	-0.975	-0.158	-0.652
86	-2.410	+0.351	-0.080
87	-2.411	+0.193	+0.254
88	-2.144	+0.000	+0.000
89	+0.328	+0.000	+0.000
90	+0.839	+0.171	+0.587
91	+1.666	+0.231	+1.132
92	+3.451	-0.196	+1.515
93	+6.112	-1.454	+0.033
94	+3.697	-0.352	-1.528
95	+0.670	+0.035	-1.384
96	-1.391	+0.273	-1.138
97	-3.508	+0.892	-0.154
98	-2.331	+0.220	+0.565
99	-1.540	+0.000	+0.000
100	-0.170	+0.000	+0.000
101	+0.279	+0.334	+0.292
102	+0.837	+0.949	+0.918
103	+2.857	+1.557	+2.198
104	+10.433	-0.098	+0.088
105	+2.720	+1.492	-2.109
106	+0.329	+0.739	-1.168
107	-1.426	-0.001	-1.348
108	-5.897	+0.721	-0.072
109	-1.798	-0.272	+0.968
110	-0.498	+0.000	+0.000
111	+0.000	+0.000	+0.000
112	+0.000	-0.170	+0.000
113	+0.000	+0.218	+0.000
114	+0.000	+2.280	+0.000
115	+18.000	+10.056	+0.000
116	+0.000	+2.698	+0.000
117	+0.000	+0.781	+0.000
118	+0.000	-0.480	+0.000
119	-10.000	-4.592	+0.000
120	+0.000	-0.498	+0.000
121	+0.000	+0.000	+0.000



ŞEKİL 4.10 Örnek problem_2 σ_x gerilmeleri.



ŞEKİL 4.11 Örnek problem -2 G_y gerilmeleri.



ŞEKİL 4.12 Örnek problem_2 τ_{xy} gerilmeleri.

4.7. ÖRNEK PROBLEM_3

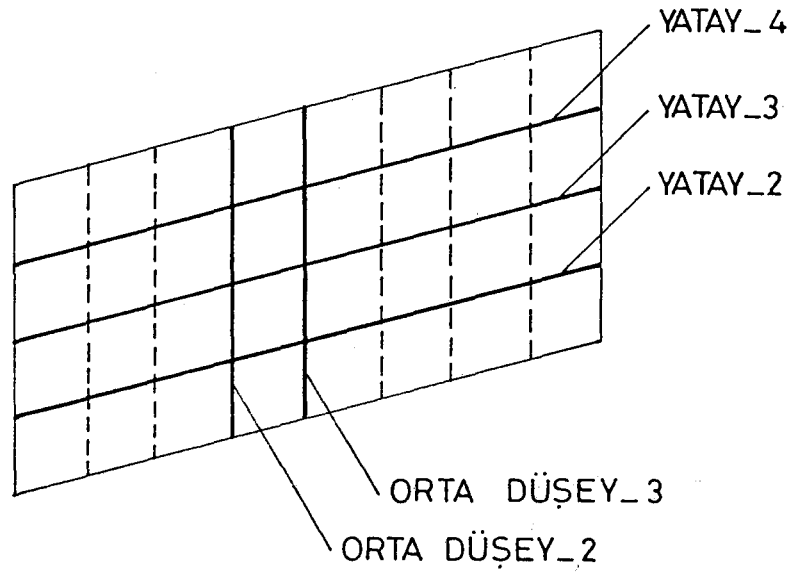
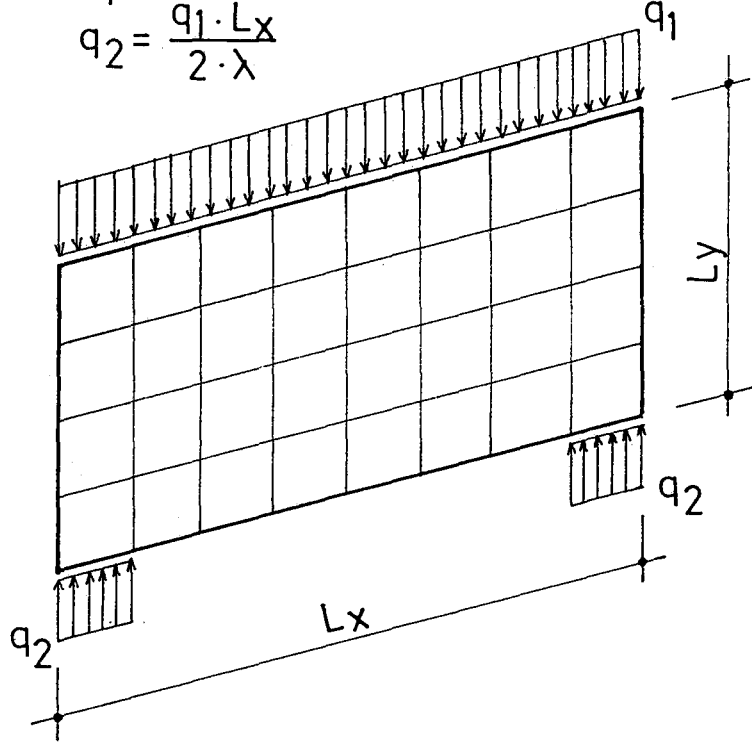
$L_x = \text{değişken}$

$L_y = 4L$

$\lambda = 1L$

yük = q_1 : değişken

$$q_2 = \frac{q_1 \cdot L_x}{2 \cdot \lambda}$$



NOT : KUVVET BİRİMİ = K
 UZUNLUK BİRİMİ = L
 GERİLME BİRİMİ = K/L^2

ŞEKİL 4.13 Örnek problem_3

NOT : KUVVET Birimi : K
UZUNLUK Birimi : L
GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 6.000
DUSEY BOYU (Ly) = 4.000
HESAP ARALIGI (Lada) = 1.000

Y U K L E R

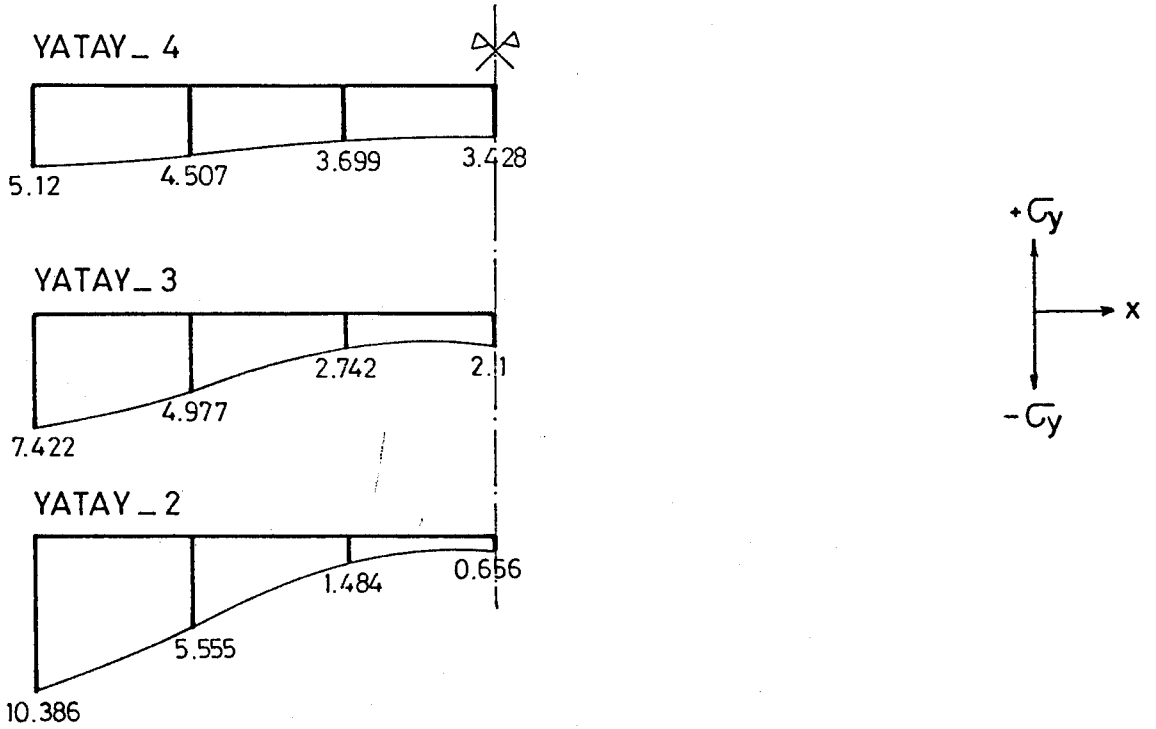
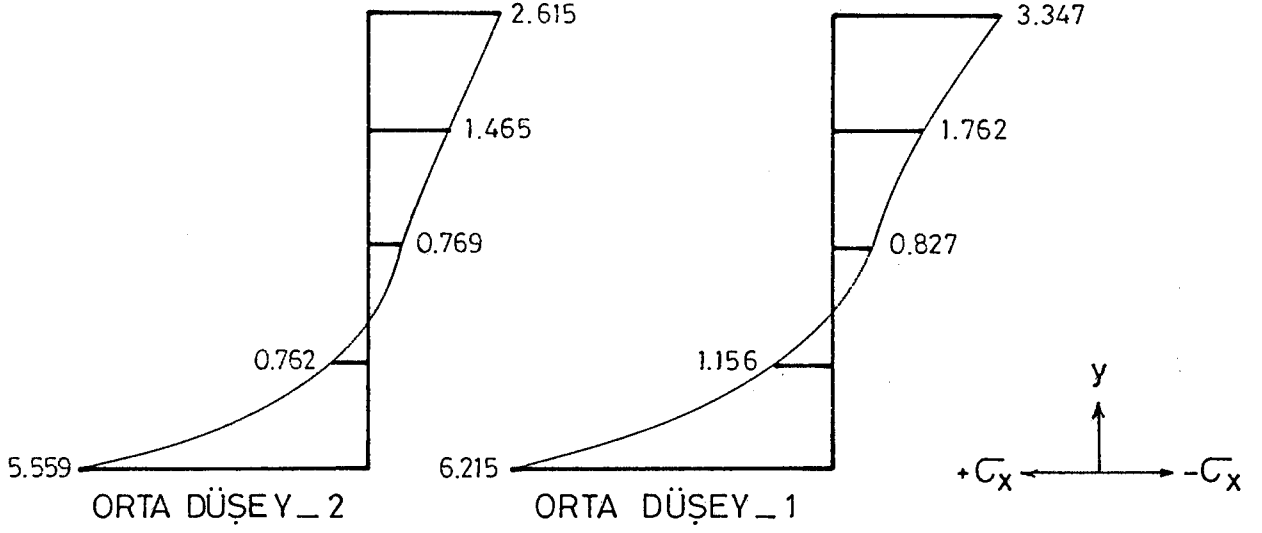
NOKTA NO x-YONU y-YONU

1 +0.00 -6.24
2 +0.00 -6.24
6 +0.00 -6.24
7 +0.00 -6.24
11 +0.00 +2.08
12 +0.00 +4.16
13 +0.00 +4.16
14 +0.00 +4.16
15 +0.00 +4.16
16 +0.00 +4.16
17 +0.00 +2.08

NOT: '+' ISARET CEKME, '-' ISARET BASINC'I GOSTERIR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-4.160	+0.000
2	+0.000	-5.120	+0.000
3	+0.000	-7.422	+0.000
4	+0.000	-10.386	+0.000
5	+0.000	-12.480	+0.000
6	-0.960	-4.160	+0.000
7	-0.671	-4.507	+1.020
8	-0.331	-4.977	+1.578
9	+0.434	-5.555	+1.580
10	+2.094	-6.240	+0.000
11	-2.615	-4.160	+0.000
12	-1.465	-3.699	+0.870
13	-0.769	-2.742	+1.267
14	+0.762	-1.404	+1.210
15	+5.559	+0.000	+0.000
16	-3.347	-4.160	+0.000
17	-1.762	-3.428	+0.000
18	-0.827	-2.100	+0.000
19	+1.156	-0.656	+0.000
20	+6.215	+0.000	+0.000
21	-2.615	-4.160	+0.000
22	-1.465	-3.699	-0.870
23	-0.769	-2.742	-1.267
24	+0.762	-1.404	-1.210
25	+5.559	+0.000	+0.000
26	-0.960	-4.160	+0.000
27	-0.671	-4.507	-1.020
28	-0.331	-4.977	-1.578
29	+0.434	-5.555	-1.580
30	+2.094	-6.240	+0.000
31	+0.000	-4.160	+0.000
32	+0.000	-5.120	+0.000
33	+0.000	-7.422	+0.000
34	+0.000	-10.386	+0.000
35	+0.000	-12.480	+0.000



ŞEKİL 4.14 Örnek problem_3 C_x ve C_y gerilmeleri.

 NOT : KUVVET BİRİMİ : K
 UZUNLUK BİRİMİ : L
 GERİLME BİRİMİ : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 7.000
 DÜŞEY BOYU (Ly) = 4.000
 HESAP ARALISI (Laada) = 1.000

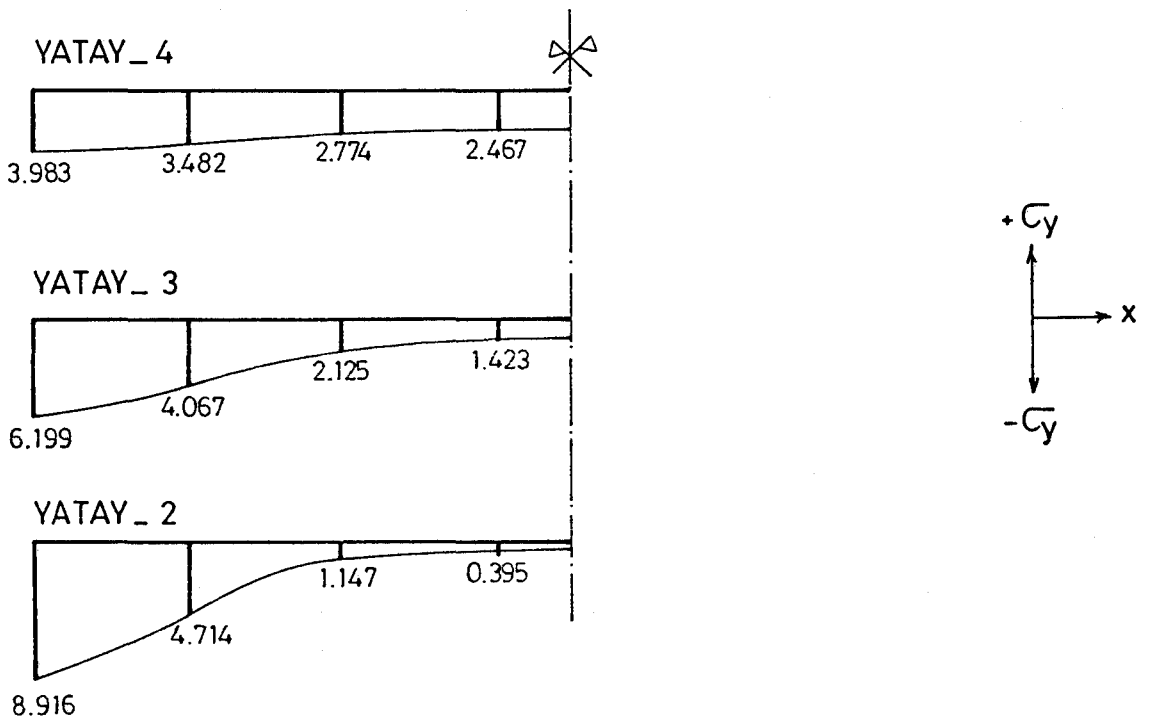
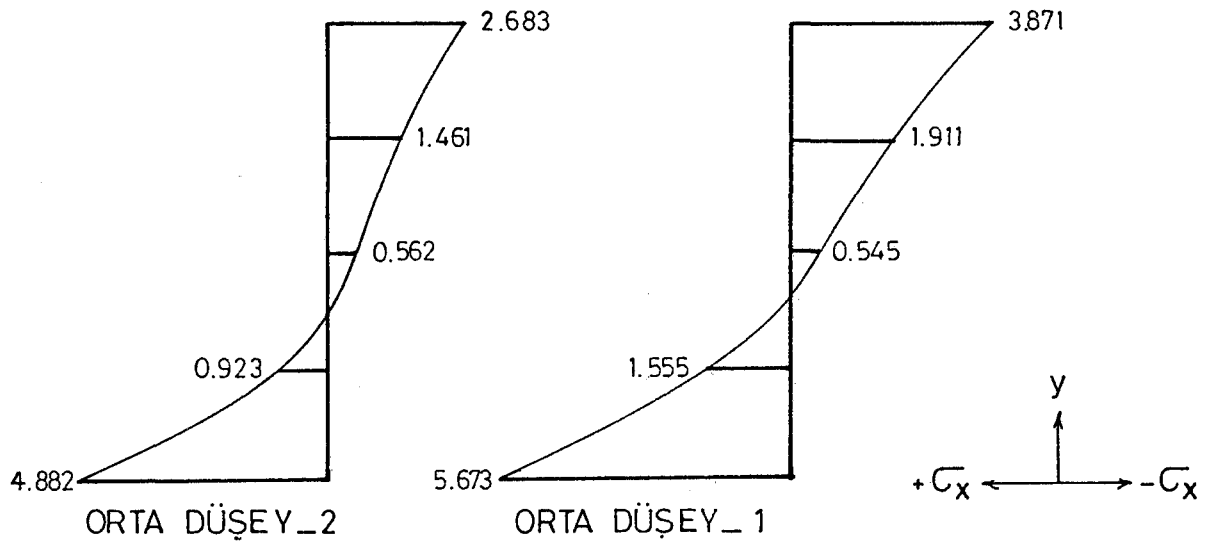
Y U K L E R

NOKTA NO	x-YÖNÜ	y-YÖNÜ
1	+0.00	-5.36
2	+0.00	-5.36
7	+0.00	-5.36
8	+0.00	-5.36
12	+0.00	+1.53
13	+0.00	+3.06
14	+0.00	+3.06
15	+0.00	+3.06
16	+0.00	+3.06
17	+0.00	+3.06
18	+0.00	+3.06
19	+0.00	+1.53

NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINCI GÖSTERİR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YÖNÜ	y YÖNÜ	xy YÖNÜ
1	+0.000	-3.061	+0.000
2	+0.000	-3.983	+0.000
3	+0.000	-6.199	+0.000
4	+0.000	-8.916	+0.000
5	+0.000	-10.714	+0.000
6	-0.921	-3.061	+0.000
7	-0.648	-3.482	+1.036
8	-0.250	-4.067	+1.542
9	+0.460	-4.714	+1.451
10	+1.798	-5.357	+0.000
11	-2.683	-3.061	+0.000
12	-1.461	-2.774	+1.053
13	-0.562	-2.125	+1.443
14	+0.923	-1.147	+1.243
15	+4.882	+0.000	+0.000
16	-3.871	-3.061	+0.000
17	-1.911	-2.467	+0.410
18	-0.545	-1.423	+0.518
19	+1.555	-0.395	+0.356
20	+5.673	+0.000	+0.000
21	-3.871	-3.061	+0.000
22	-1.911	-2.467	-0.410
23	-0.545	-1.423	-0.518
24	+1.555	-0.395	-0.356
25	+5.673	+0.000	+0.000
26	-2.683	-3.061	+0.000
27	-1.461	-2.774	-1.053
28	-0.562	-2.125	-1.443
29	+0.923	-1.147	-1.243
30	+4.882	+0.000	+0.000
31	-0.921	-3.061	+0.000
32	-0.648	-3.482	-1.036
33	-0.250	-4.067	-1.542
34	+0.460	-4.714	-1.451
35	+1.798	-5.357	+0.000
36	+0.000	-3.061	+0.000
37	+0.000	-3.983	+0.000
38	+0.000	-6.199	+0.000
39	+0.000	-8.916	+0.000
40	+0.000	-10.714	+0.000



ŞEKİL 4.14 (Devam)

 NOT : KUVVET BİRİMİ : K
 UZUNLUK BİRİMİ : L
 GERİLME BİRİMİ : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 8.000
 DÜŞEY BOYU (Ly) = 4.000
 HESAP ARALIĞI (Lambda) = 1.000

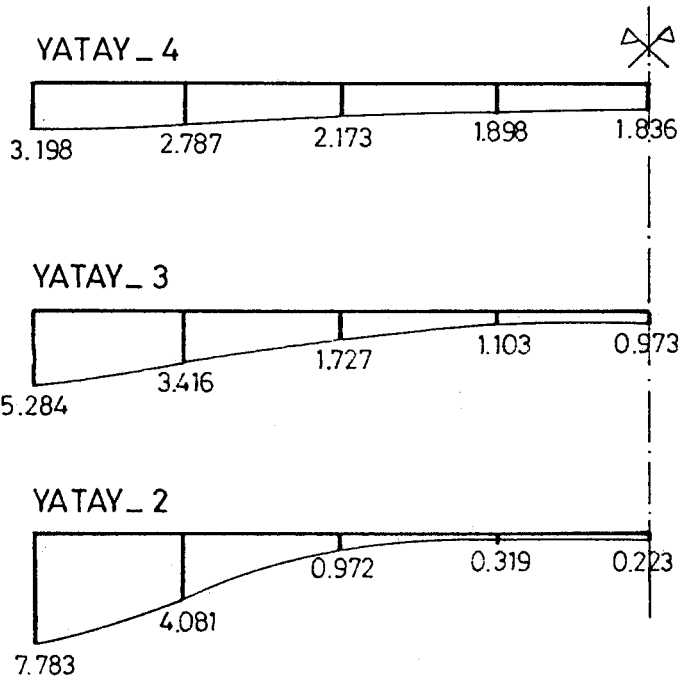
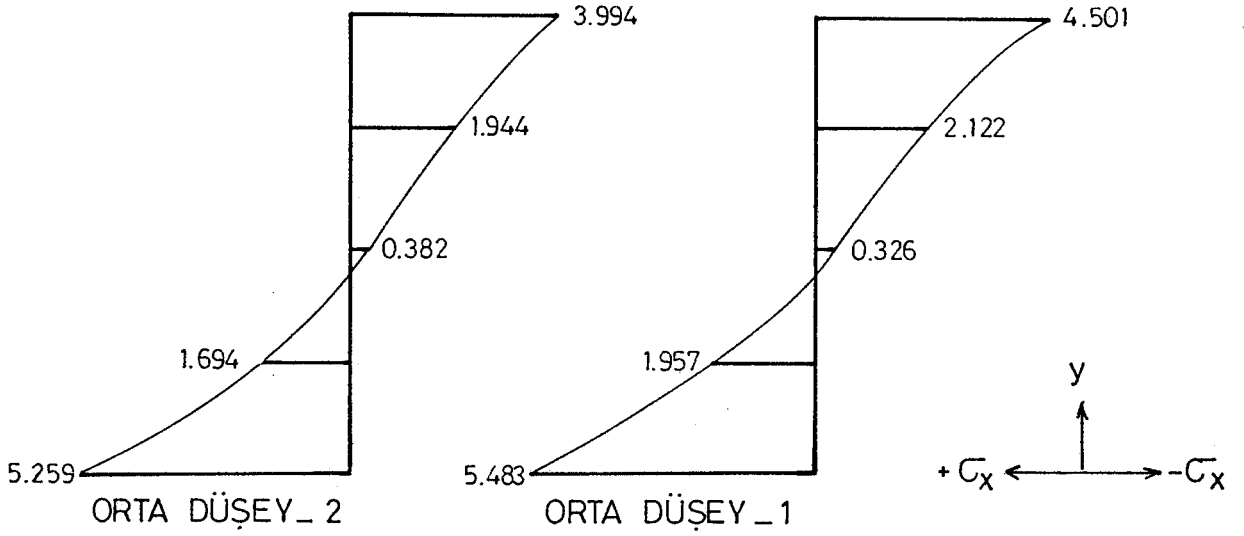
Y U K L E R

NOKTA NO	x-YONU	y-YONU
1	+0.00	-4.69
2	+0.00	-4.69
8	+0.00	-4.69
9	+0.00	-4.69
13	+0.00	+1.17
14	+0.00	+2.34
15	+0.00	+2.34
16	+0.00	+2.34
17	+0.00	+2.34
18	+0.00	+2.34
19	+0.00	+2.34
20	+0.00	+2.34
21	+0.00	+1.17

NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINC'I GOSTERIR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-2.344	+0.000
2	+0.000	-3.198	+0.000
3	+0.000	-5.284	+0.000
4	+0.000	-7.783	+0.000
5	+0.000	-9.375	+0.000
6	-0.855	-2.344	+0.000
7	-0.616	-2.787	+1.003
8	-0.207	-3.416	+1.470
9	+0.453	-4.081	+1.341
10	+1.592	-4.688	+0.000
11	-2.595	-2.344	+0.000
12	-1.417	-2.173	+1.117
13	-0.449	-1.727	+1.493
14	+0.965	-0.972	+1.227
15	+4.398	+0.000	+0.000
16	-3.994	-2.344	+0.000
17	-1.944	-1.898	+0.653
18	-0.382	-1.103	+0.798
19	+1.694	-0.319	+0.519
20	+5.259	+0.000	+0.000
21	-4.501	-2.344	+0.000
22	-2.122	-1.836	+0.000
23	-0.326	-0.973	+0.000
24	+1.957	-0.223	+0.000
25	+5.483	+0.000	+0.000
26	-3.994	-2.344	+0.000
27	-1.944	-1.898	-0.653
28	-0.382	-1.103	-0.798
29	+1.694	-0.319	-0.519
30	+5.259	+0.000	+0.000
31	-2.595	-2.344	+0.000
32	-1.417	-2.173	-1.117
33	-0.449	-1.727	-1.493
34	+0.965	-0.972	-1.227
35	+4.398	+0.000	+0.000
36	-0.855	-2.344	+0.000
37	-0.616	-2.787	-1.003
38	-0.207	-3.416	-1.470
39	+0.453	-4.081	-1.341
40	+1.592	-4.688	+0.000
41	+0.000	-2.344	+0.000
42	+0.000	-3.198	+0.000
43	+0.000	-5.284	+0.000
44	+0.000	-7.783	+0.000
45	+0.000	-9.375	+0.000



ŞEKİL 4.14 (Devam)

NOT : KUVVET Birimi : K
UZUNLUK Birimi : L
GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 9.000
DUSEY BOYU (Ly) = 4.000
HESAP ARALIGI (Lamda) = 1.000

Y U K L E R

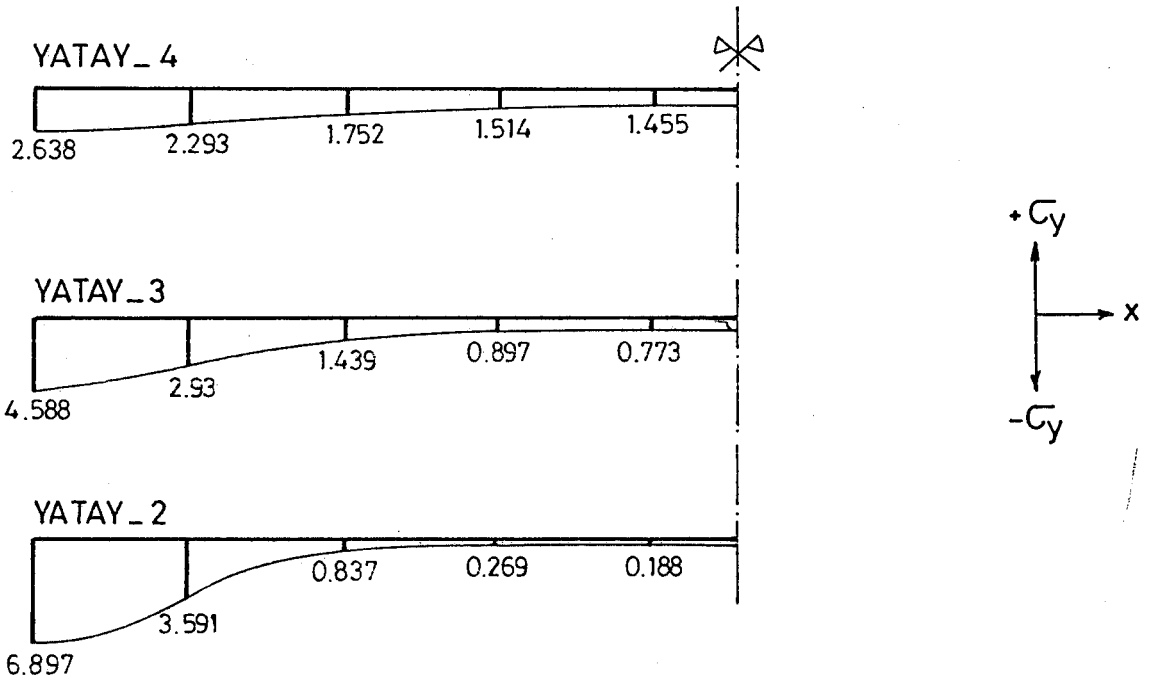
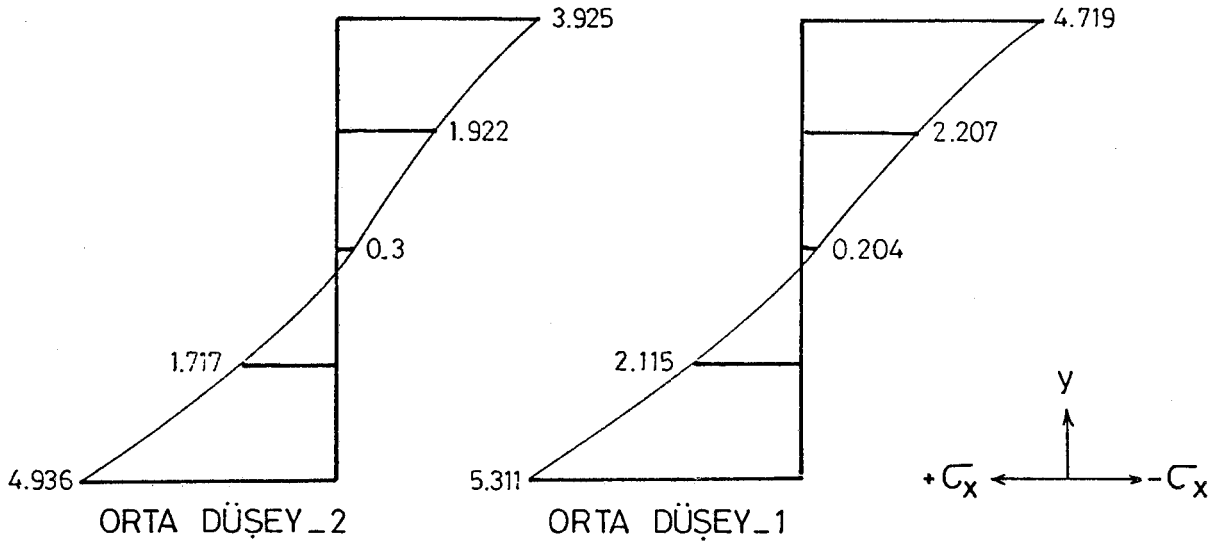
NOKTA NO x-YONU y-YONU

1 +0.00 -4.17
2 +0.00 -4.17
9 +0.00 -4.17
10 +0.00 -4.17
14 +0.00 +0.93
15 +0.00 +1.85
16 +0.00 +1.85
17 +0.00 +1.85
18 +0.00 +1.85
19 +0.00 +1.85
20 +0.00 +1.85
21 +0.00 +1.85
22 +0.00 +1.85
23 +0.00 +0.93

NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINC'I GÖSTERİR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-1.852	+0.000
2	+0.000	-2.638	+0.000
3	+0.000	-4.588	+0.000
4	+0.000	-6.897	+0.000
5	+0.000	-8.333	+0.000
6	-0.787	-1.852	+0.000
7	-0.581	-2.293	+0.953
8	-0.180	-2.930	+1.389
9	+0.437	-3.591	+1.246
10	+1.436	-4.167	+0.000
11	-2.455	-1.852	+0.000
12	-1.358	-1.752	+1.120
13	-0.385	-1.439	+1.485
14	+0.960	-0.837	+1.195
15	+4.023	+0.000	+0.000
16	-3.925	-1.852	+0.000
17	-1.922	-1.514	+0.778
18	-0.300	-0.897	+0.945
19	+1.717	-0.269	+0.611
20	+4.936	+0.000	+0.000
21	-4.719	-1.852	+0.000
22	-2.207	-1.455	+0.270
23	-0.204	-0.773	+0.317
24	+2.115	-0.188	+0.193
25	+5.311	+0.000	+0.000
26	-4.719	-1.852	+0.000
27	-2.207	-1.455	-0.270
28	-0.204	-0.773	-0.317
29	+2.115	-0.188	-0.193
30	+5.311	+0.000	+0.000
31	-3.925	-1.852	+0.000
32	-1.922	-1.514	-0.778
33	-0.300	-0.897	-0.945
34	+1.717	-0.269	-0.611
35	+4.936	+0.000	+0.000
36	-2.455	-1.852	+0.000
37	-1.358	-1.752	-1.120
38	-0.385	-1.439	-1.485
39	+0.960	-0.837	-1.195
40	+4.023	+0.000	+0.000
41	-0.787	-1.852	+0.000
42	-0.581	-2.293	-0.953
43	-0.180	-2.930	-1.389
44	+0.437	-3.591	-1.246
45	+1.436	-4.167	+0.000
46	+0.000	-1.852	+0.000
47	+0.000	-2.638	+0.000
48	+0.000	-4.588	+0.000
49	+0.000	-6.897	+0.000
50	+0.000	-8.333	+0.000



ŞEKİL 4.14 (Devam)

 NOT : KUVVET BİRİMİ : K
 UZUNLUK BİRİMİ : L
 GERİLME BİRİMİ : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 10.000
 DÜŞEY BOYU (Ly) = 4.000
 HESAP ARALIGI (Laada) = 1.000

Y U K L E R

NOKTA NO	x-YONU	y-YONU
1	+0.00	-3.75
2	+0.00	-3.75
10	+0.00	-3.75
11	+0.00	-3.75
15	+0.00	+0.75
16	+0.00	+1.50
17	+0.00	+1.50
18	+0.00	+1.50
19	+0.00	+1.50
20	+0.00	+1.50
21	+0.00	+1.50
22	+0.00	+1.50
23	+0.00	+1.50
24	+0.00	+1.50
25	+0.00	+0.75

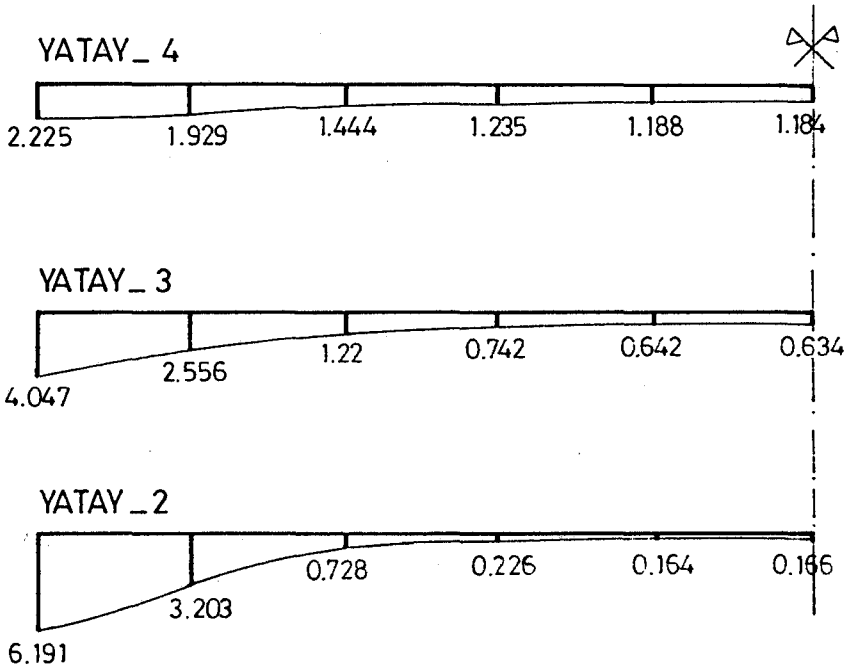
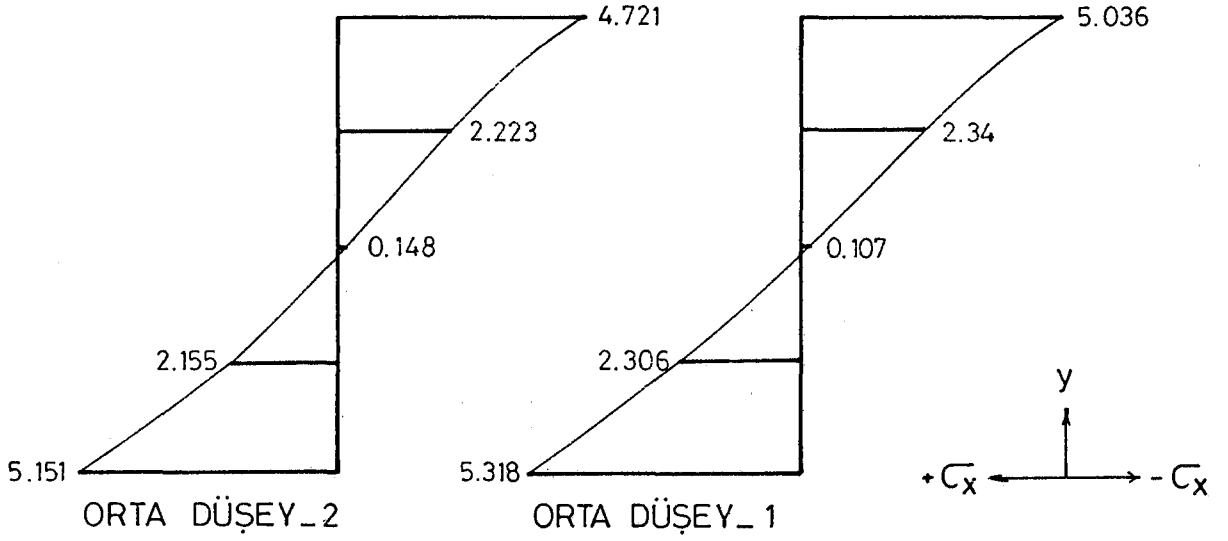
 NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINC'I GÖSTERİR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-1.500	+0.000
2	+0.000	-2.225	+0.000
3	+0.000	-4.047	+0.000
4	+0.000	-6.191	+0.000
5	+0.000	-7.500	+0.000
6	-0.725	-1.500	+0.000
7	-0.548	-1.929	+0.901
8	-0.161	-2.556	+1.310
9	+0.418	-3.203	+1.162
10	+1.309	-3.750	+0.000

11	-2.309	-1.500	+0.000
12	-1.294	-1.444	+1.095
13	-0.342	-1.220	+1.450
14	+0.935	-0.728	+1.155
15	+3.712	+0.000	+0.000
16	-3.780	-1.500	+0.000
17	-1.872	-1.235	+0.835
18	-0.257	-0.742	+1.019
19	+1.690	-0.226	+0.665
20	+4.657	+0.000	+0.000
21	-4.721	-1.500	+0.000
22	-2.223	-1.188	+0.431
23	-0.148	-0.642	+0.510
24	+2.155	-0.164	+0.319
25	+5.151	+0.000	+0.000
26	-5.036	-1.500	+0.000
27	-2.340	-1.184	+0.000
28	-0.107	-0.634	+0.000
29	+2.306	-0.166	+0.000
30	+5.318	+0.000	+0.000
31	-4.721	-1.500	+0.000
32	-2.223	-1.188	-0.431
33	-0.148	-0.642	-0.510
34	+2.155	-0.164	-0.319
35	+5.151	+0.000	+0.000
36	-3.780	-1.500	+0.000
37	-1.872	-1.235	-0.835
38	-0.257	-0.742	-1.019
39	+1.690	-0.226	-0.665
40	+4.657	+0.000	+0.000
41	-2.309	-1.500	+0.000
42	-1.294	-1.444	-1.095
43	-0.342	-1.220	-1.450
44	+0.935	-0.728	-1.155
45	+3.712	+0.000	+0.000
46	-0.725	-1.500	+0.000
47	-0.548	-1.929	-0.901
48	-0.161	-2.556	-1.310
49	+0.418	-3.203	-1.162
50	+1.309	-3.750	+0.000
51	+0.000	-1.500	+0.000
52	+0.000	-2.225	+0.000
53	+0.000	-4.047	+0.000
54	+0.000	-6.191	+0.000
55	+0.000	-7.500	+0.000

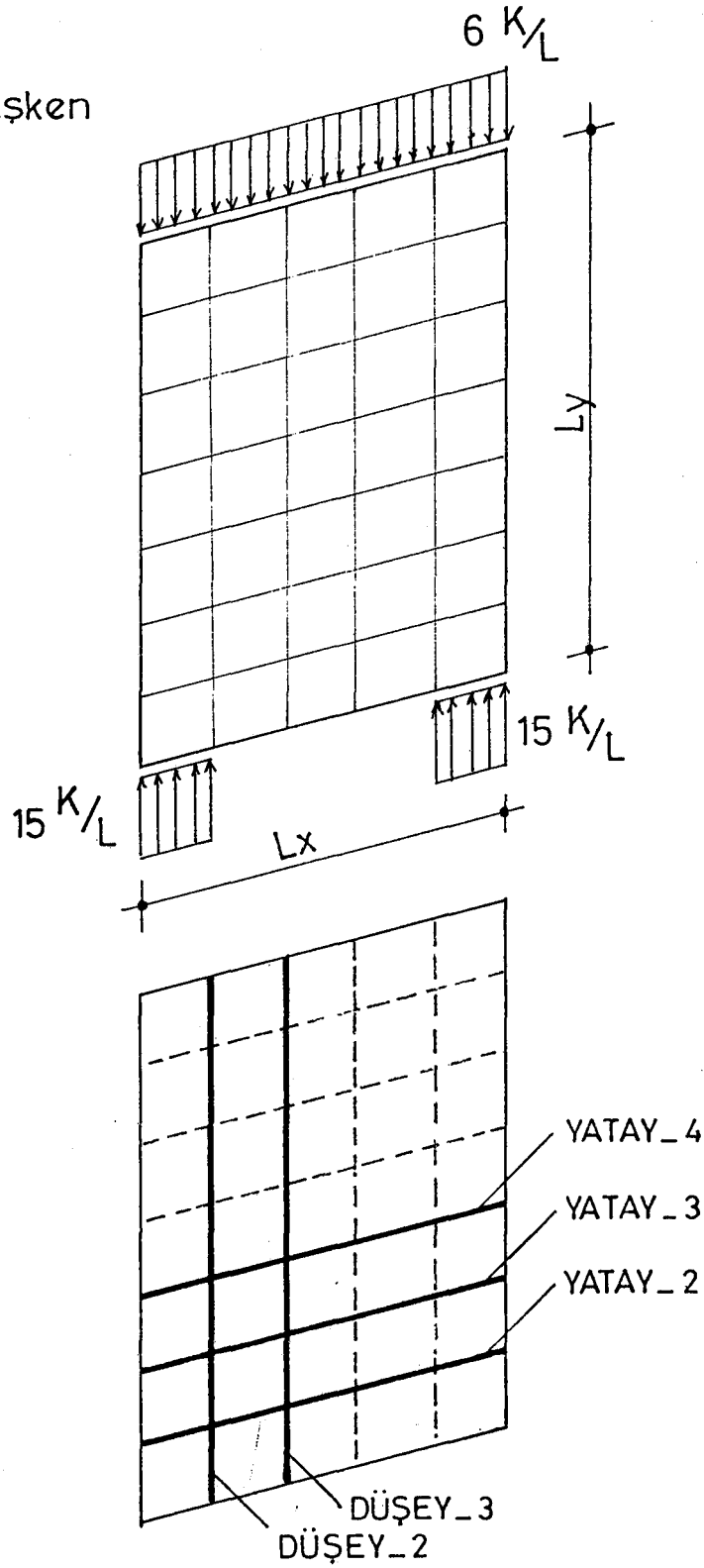
$L_x = 10 L$, $L_y = 4 L$ LEVHASI.



ŞEKİL 4.14 (Devam)

4.8. ÖRNEK PROBLEM_4

$L_x = 5 L$
 $L_y = \text{değişken}$
 $\lambda = 1 L$



NOT : KUVVET BİRİMİ = K
 UZUNLUK BİRİMİ = L
 GERİLME BİRİMİ = K/L^2

ŞEKİL 4.15 Örnek problem_4

 NOT : KUVVET Birimi : K
 UZUNLUK Birimi : L
 GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 5.000
 DUSEY BOYU (Ly) = 4.000
 HESAP ARALIGI (L_{ada}) = 1.000

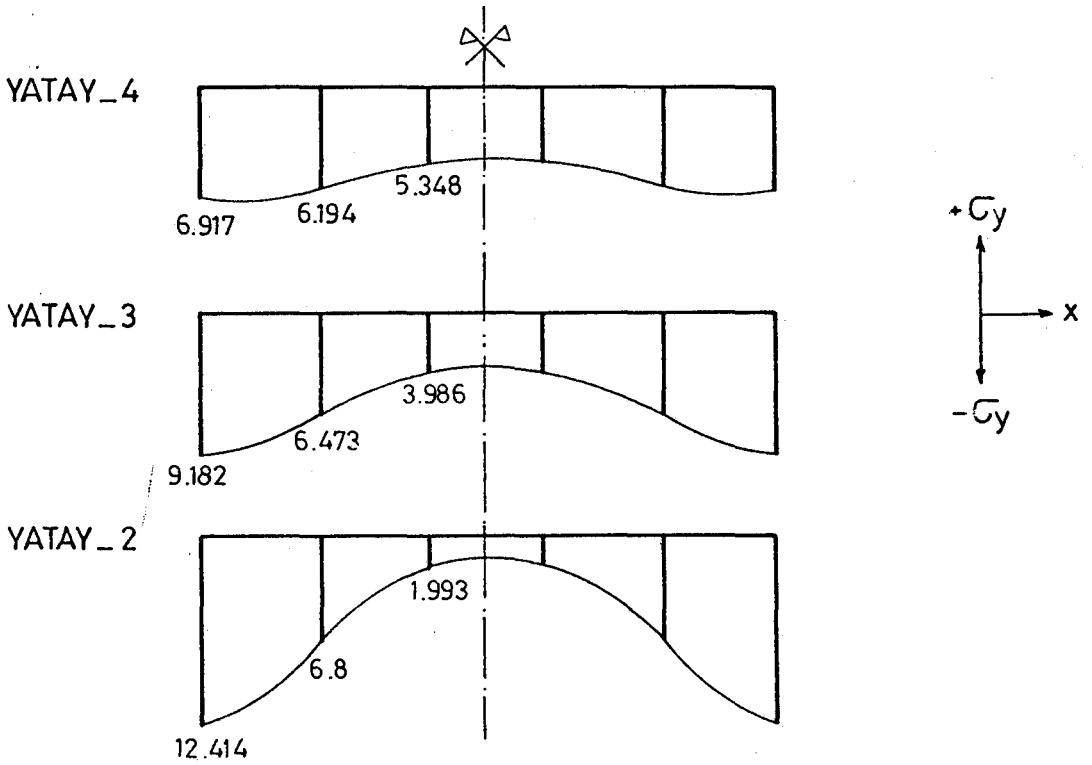
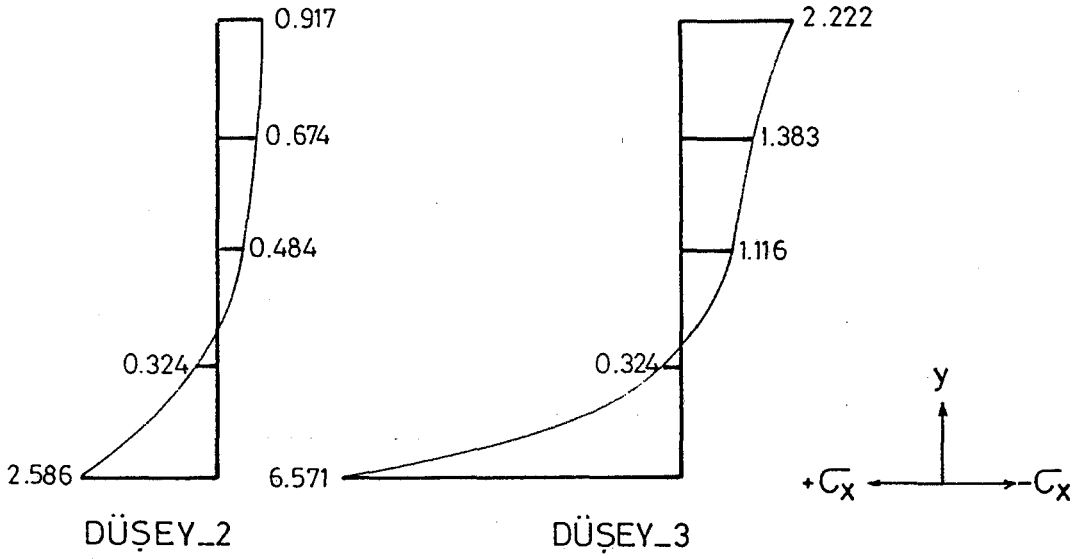
Y U K L E R

NOKTA NO	x-YONU	y-YONU
1	+0.00	-7.50
2	+0.00	-7.50
5	+0.00	-7.50
6	+0.00	-7.50
10	+0.00	+3.00
11	+0.00	+6.00
12	+0.00	+6.00
13	+0.00	+6.00
14	+0.00	+6.00
15	+0.00	+3.00

NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINCI GÖSTERİR.

G E R İ L M E L E R

HUKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-6.000	+0.000
2	+0.000	-6.917	+0.000
3	+0.000	-9.182	+0.000
4	+0.000	-12.414	+0.000
5	+0.000	-15.000	+0.000
6	-0.917	-6.000	+0.000
7	-0.674	-6.194	+0.901
8	-0.484	-6.423	+1.526
9	+0.324	-6.800	+1.724
10	+2.586	-7.500	+0.000
11	-2.222	-6.000	+0.000
12	-1.383	-5.348	+0.503
13	-1.116	-3.986	+0.839
14	+0.324	-1.993	+0.997
15	+6.571	+0.000	+0.000
16	-2.222	-6.000	+0.000
17	-1.383	-5.348	-0.503
18	-1.116	-3.986	-0.839
19	+0.324	-1.993	-0.997
20	+6.571	+0.000	+0.000
21	-0.917	-6.000	+0.000
22	-0.674	-6.194	-0.901
23	-0.484	-6.423	-1.526
24	+0.324	-6.800	-1.724
25	+2.586	-7.500	+0.000
26	+0.000	-6.000	+0.000
27	+0.000	-6.917	+0.000
28	+0.000	-9.182	+0.000
29	+0.000	-12.414	+0.000
30	+0.000	-15.000	+0.000



ŞEKİL 4.16 Örnek problem_4 C_x ve C_y gerilmeleri.

NOT : KUVVET Birimi : K
UZUNLUK Birimi : L
GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 5.000
DUSEY BOYU (Ly) = 5.000
HESAP ARALIGI (Lambda) = 1.000

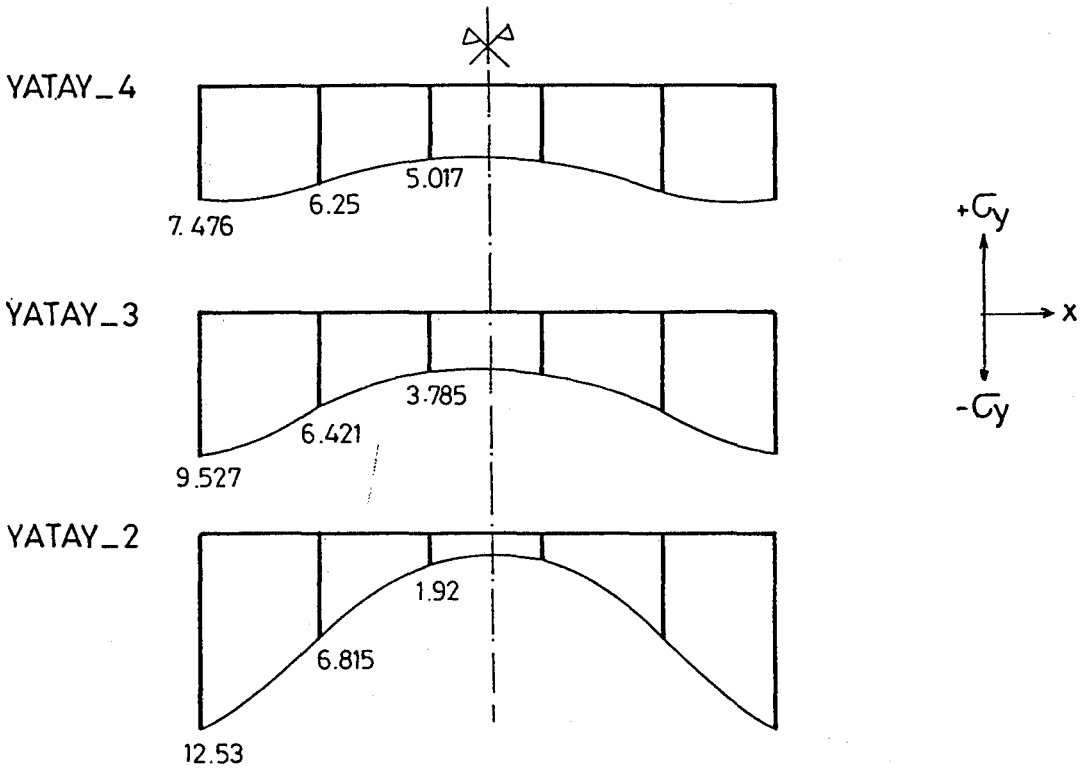
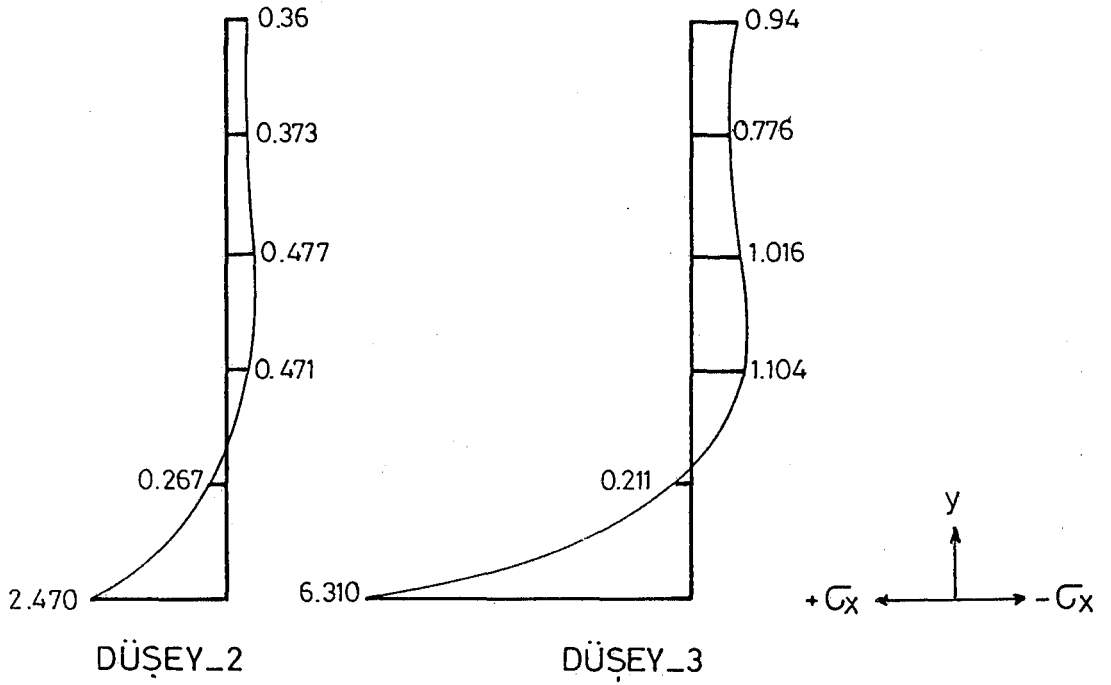
Y U K L E R

NOKTA NO	x-YONU	y-YONU
1	+0.00	-7.50
2	+0.00	-7.50
5	+0.00	-7.50
6	+0.00	-7.50
11	+0.00	+3.00
12	+0.00	+6.00
13	+0.00	+6.00
14	+0.00	+6.00
15	+0.00	+6.00
16	+0.00	+3.00

NOT: '+' ISARET ÇEKME, '-' ISARET BASINC'I GÖSTERİR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YÖNÜ	y YÖNÜ	xy YÖNÜ
1	+0.000	-6.000	+0.000
2	+0.000	-6.360	+0.000
3	+0.000	-7.467	+0.000
4	+0.000	-9.527	+0.000
5	+0.000	-12.530	+0.000
6	+0.000	-15.000	+0.000
7	-0.360	-6.000	+0.000
8	-0.373	-6.110	+0.429
9	-0.477	-6.250	+0.877
10	-0.471	-6.451	+1.407
11	+0.267	-6.815	+1.630
12	+2.470	-7.500	+0.000
13	-0.940	-6.000	+0.000
14	-0.776	-5.710	+0.246
15	-1.016	-5.017	+0.481
16	-1.104	-3.785	+0.774
17	+0.211	-1.920	+0.946
18	+6.310	+0.000	+0.000
19	-0.940	-6.000	+0.000
20	-0.776	-5.710	-0.246
21	-1.016	-5.017	-0.481
22	-1.104	-3.785	-0.774
23	+0.211	-1.920	-0.946
24	+6.310	+0.000	+0.000
25	-0.360	-6.000	+0.000
26	-0.373	-6.110	-0.429
27	-0.477	-6.250	-0.877
28	-0.471	-6.451	-1.407
29	+0.267	-6.815	-1.630
30	+2.470	-7.500	+0.000
31	+0.000	-6.000	+0.000
32	+0.000	-6.360	+0.000
33	+0.000	-7.467	+0.000
34	+0.000	-9.527	+0.000
35	+0.000	-12.530	+0.000
36	+0.000	-15.000	+0.000



ŞEKİL 4.16 (Devam)

NOT : KUVVET Birimi : K
UZUNLUK Birimi : L
GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 5.000
DUŞEY BOYU (Ly) = 6.000
HESAP ARALIĞI (Lamda) = 1.000

Y U K L E R

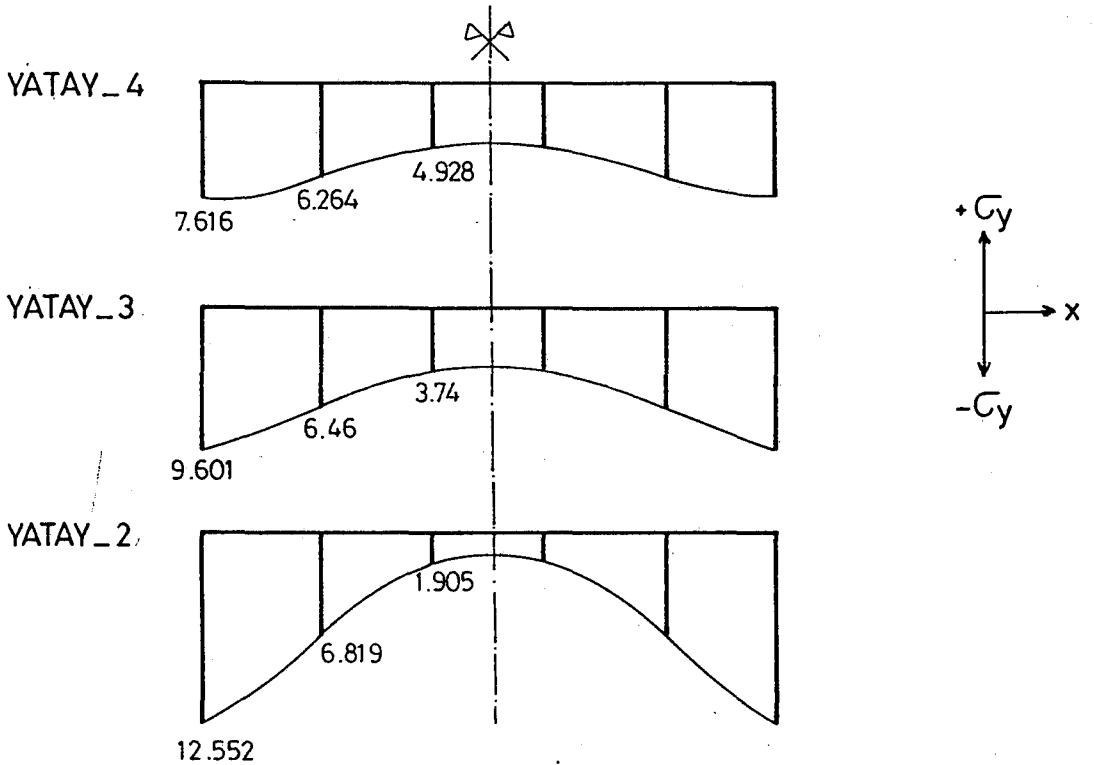
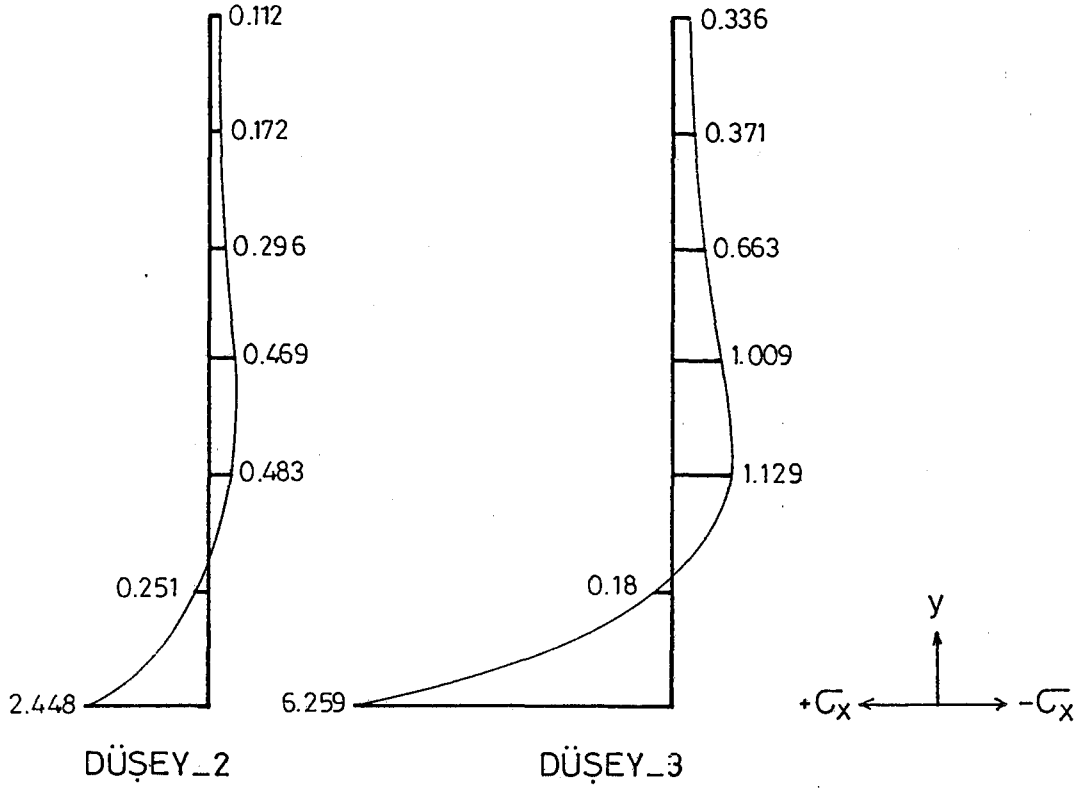
NOKTA NO x-YONU y-YONU

1 +0.00 -7.50
2 +0.00 -7.50
5 +0.00 -7.50
6 +0.00 -7.50
12 +0.00 +3.00
13 +0.00 +6.00
14 +0.00 +6.00
15 +0.00 +6.00
16 +0.00 +6.00
17 +0.00 +3.00

NOT: '+' ISARET ÇEKNE, '-' ISARET BASINC'I GOSTERIR.

G E R İ L M E L E R

NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-6.000	+0.000
2	+0.000	-6.112	+0.000
3	+0.000	-6.568	+0.000
4	+0.000	-7.616	+0.000
5	+0.000	-9.601	+0.000
6	+0.000	-12.552	+0.000
7	+0.000	-15.000	+0.000
8	-0.112	-6.000	+0.000
9	-0.172	-6.057	+0.177
10	-0.296	-6.139	+0.428
11	-0.469	-6.264	+0.838
12	-0.483	-6.460	+1.373
13	+0.251	-6.819	+1.610
14	+2.448	-7.500	+0.000
15	-0.336	-6.000	+0.000
16	-0.371	-5.888	+0.106
17	-0.633	-5.577	+0.240
18	-1.009	-4.928	+0.459
19	-1.129	-3.740	+0.756
20	+0.180	-1.905	+0.935
21	+6.259	+0.000	+0.000
22	-0.336	-6.000	+0.000
23	-0.371	-5.888	-0.106
24	-0.633	-5.577	-0.240
25	-1.009	-4.928	-0.459
26	-1.129	-3.740	-0.756
27	+0.180	-1.905	-0.935
28	+6.259	+0.000	+0.000
29	-0.112	-6.000	+0.000
30	-0.172	-6.057	-0.177
31	-0.296	-6.139	-0.428
32	-0.469	-6.264	-0.838
33	-0.483	-6.460	-1.373
34	+0.251	-6.819	-1.610
35	+2.448	-7.500	+0.000
36	+0.000	-6.000	+0.000
37	+0.000	-6.112	+0.000
38	+0.000	-6.568	+0.000
39	+0.000	-7.616	+0.000
40	+0.000	-9.601	+0.000
41	+0.000	-12.552	+0.000
42	+0.000	-15.000	+0.000



ŞEKİL 4.16 (Devam)

 NOT : KUVVET Birimi : K
 UZUNLUK Birimi : L
 GERİLME Birimi : K/L²

LEVHANIN YATAY BOYU (Lx) = 5.000
 DUSEY BOYU (Ly) = 7.000
 HESAP ARALIGI (Lambda) = 1.000

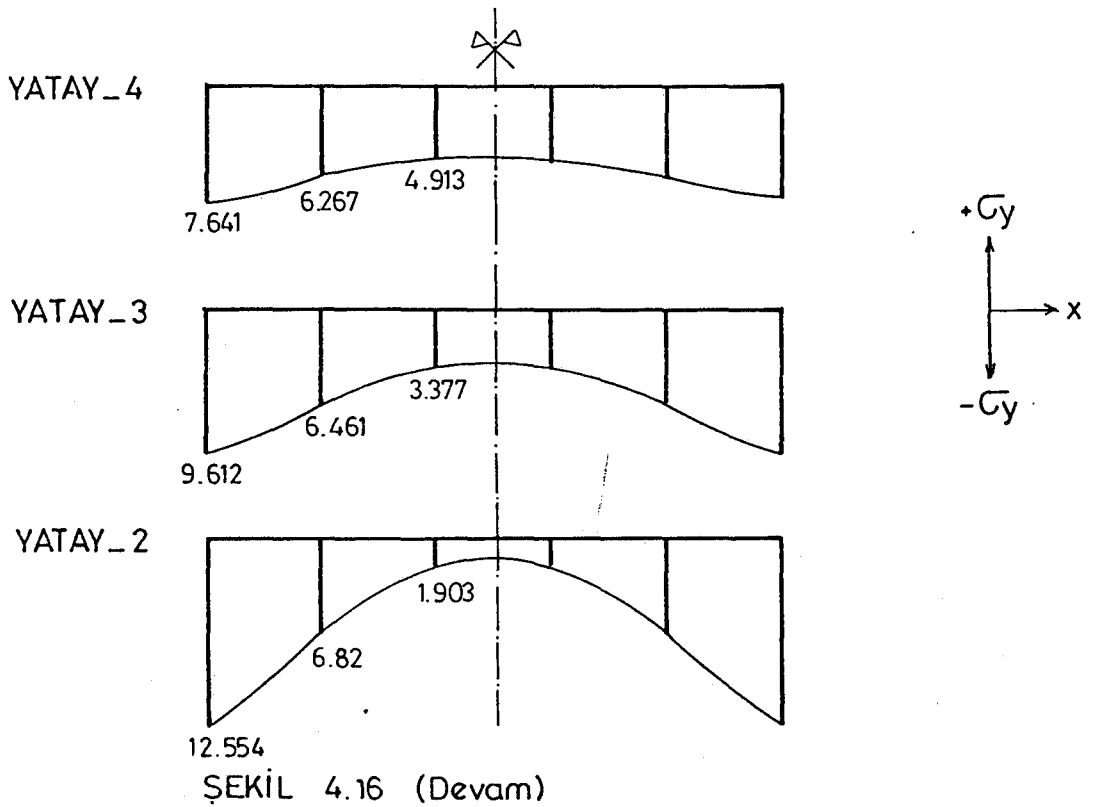
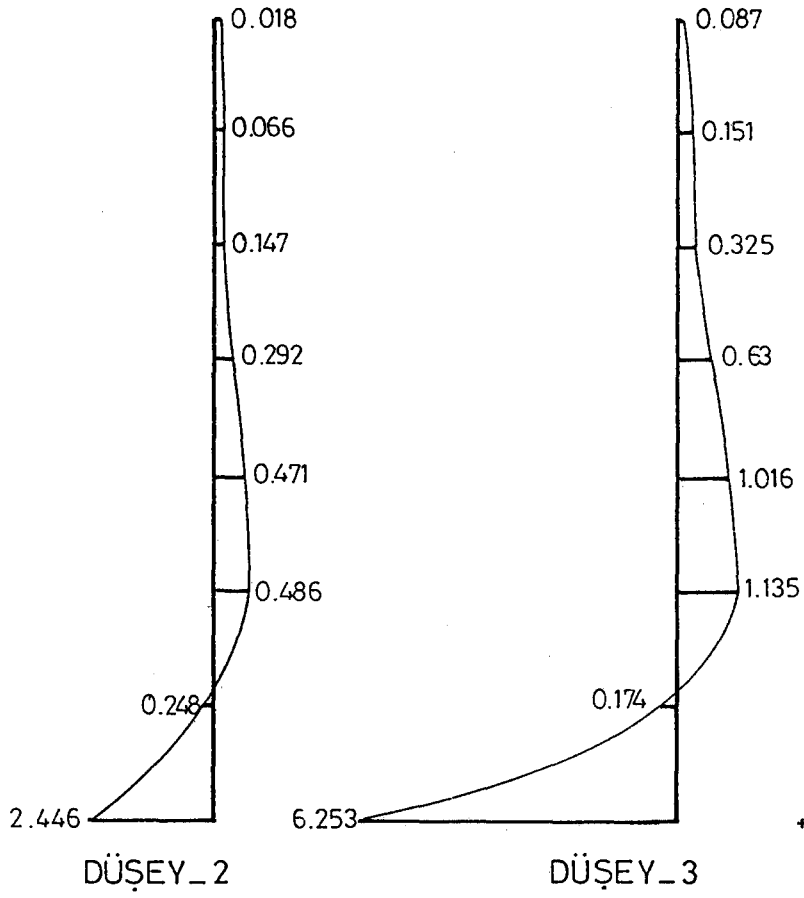
Y U K L E R

NOKTA NO	x-YONU	y-YONU
1	+0.00	-7.50
2	+0.00	-7.50
5	+0.00	-7.50
6	+0.00	-7.50
13	+0.00	+3.00
14	+0.00	+6.00
15	+0.00	+6.00
16	+0.00	+6.00
17	+0.00	+6.00
18	+0.00	+3.00

 NOT: '+' ISARET CEKME, '-' ISARET BASINC'I GOSTERIR.

G E R i L M E L E R

NOKTA NO	x YONU	y YONU	xy YONU
1	+0.000	-6.000	+0.000
2	+0.000	-6.018	+0.000
3	+0.000	-6.168	+0.000
4	+0.000	-6.613	+0.000
5	+0.000	-7.641	+0.000
6	+0.000	-9.612	+0.000
7	+0.000	-12.554	+0.000
8	+0.000	-15.000	+0.000
9	-0.018	-6.000	+0.000
10	-0.066	-6.026	+0.060
11	-0.147	-6.070	+0.179
12	-0.292	-6.145	+0.417
13	-0.471	-6.267	+0.829
14	-0.486	-6.461	+1.367
15	+0.248	-6.820	+1.607
16	+2.446	-7.500	+0.000
17	-0.087	-6.000	+0.000
18	-0.151	-5.965	+0.039
19	-0.325	-5.846	+0.104
20	-0.630	-5.549	+0.233
21	-1.016	-4.913	+0.454
22	-1.135	-3.733	+0.752
23	+0.174	-1.903	+0.933
24	+6.253	+0.000	+0.000
25	-0.087	-6.000	+0.000
26	-0.151	-5.965	-0.039
27	-0.325	-5.846	-0.104
28	-0.630	-5.549	-0.233
29	-1.016	-4.913	-0.454
30	-1.135	-3.733	-0.752
31	+0.174	-1.903	-0.933
32	+6.253	+0.000	+0.000
33	-0.018	-6.000	+0.000
34	-0.066	-6.026	-0.060
35	-0.147	-6.070	-0.179
36	-0.292	-6.145	-0.417
37	-0.471	-6.267	-0.829
38	-0.486	-6.461	-1.367
39	+0.248	-6.820	-1.607
40	+2.446	-7.500	+0.000
41	+0.000	-6.000	+0.000
42	+0.000	-6.018	+0.000
43	+0.000	-6.168	+0.000
44	+0.000	-6.613	+0.000
45	+0.000	-7.641	+0.000
46	+0.000	-9.612	+0.000
47	+0.000	-12.554	+0.000
48	+0.000	-15.000	+0.000



5. SONUÇLAR

5.1. Sonlu Farklar Yöntemi İle İlgili Sonuçlar

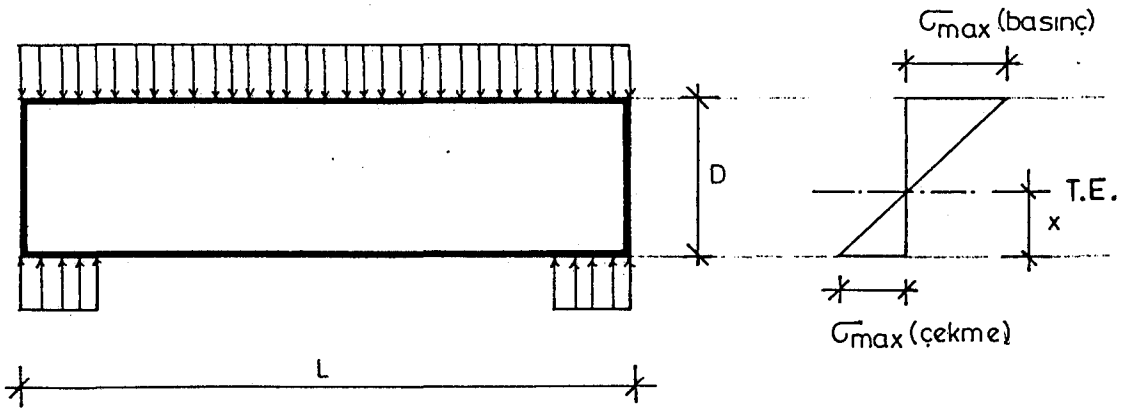
a) Levha problemlerinde, tekil veya yayılı yüklerin levhanın her hangi bir noktasından etkimesi durumunda da çözüm yapılır.

b) Sınırdaki değerleri sağlamak şartı ile tüm noktadaki sonlu fark ifadeleri aynı şekilde yazılabilir. Bu yüzden bilgisayarda denklem sistemlerinin oluşturulması çok kolaydır.

c) Katsayılar matrisi yarım bant matrisi olduğu için matrisin kurulması ve çözülmesi için bilgisayarda daha küçük bir hafızaya gereksinme doğar.

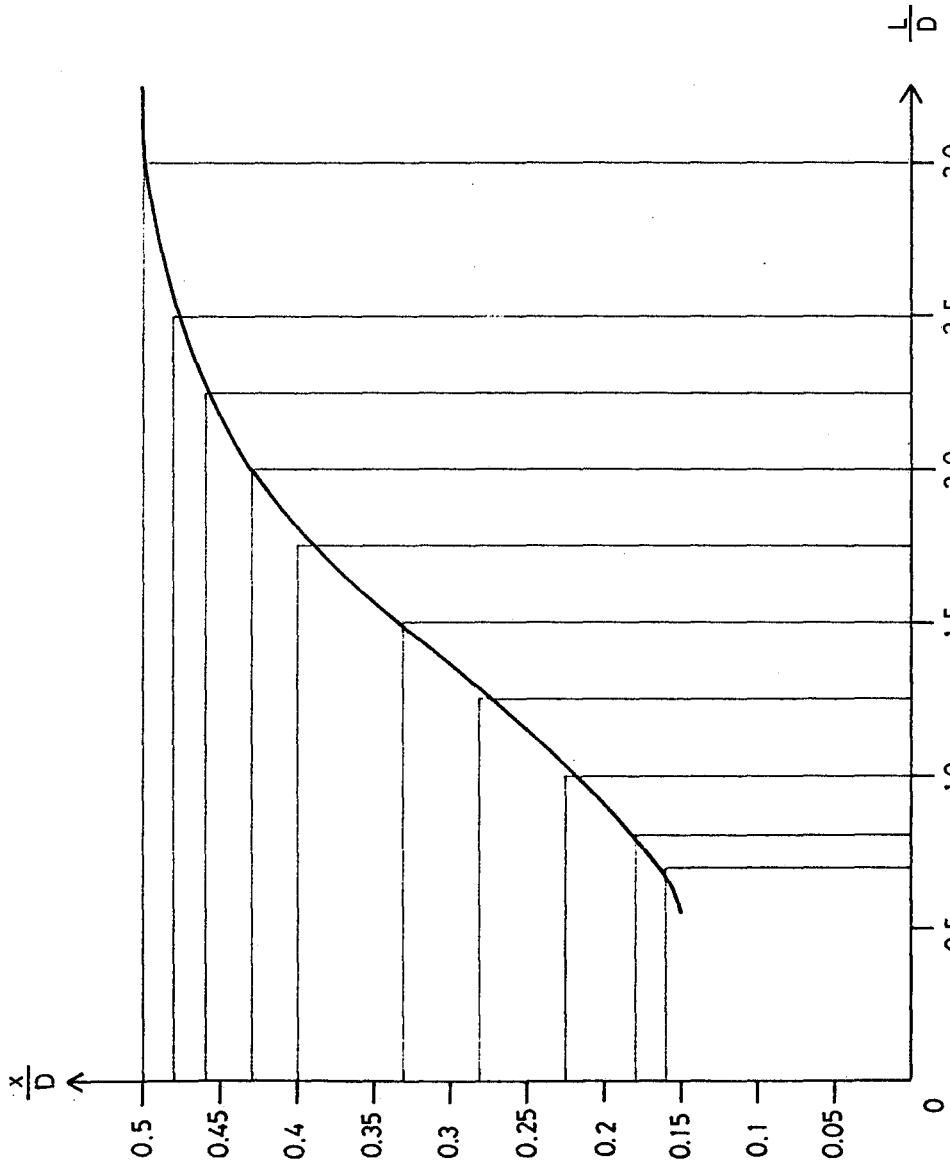
d) Sonlu farklar yönteminde nokta aralığı oranında yaklaşık çözüm yapılır.

5.2. Levhalar İle İlgili Sonuçlar

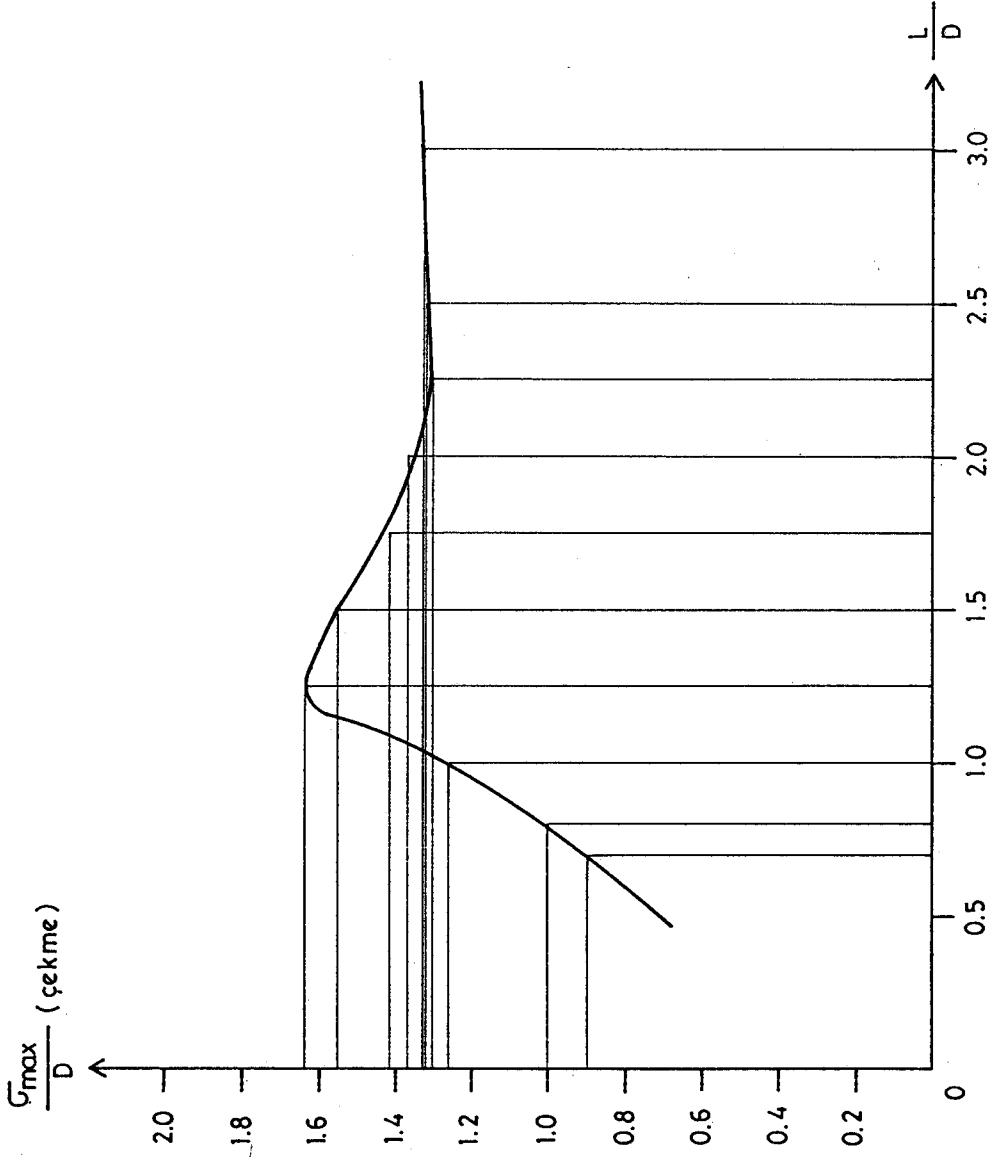


ŞEKİL 5.1 Örnek kiriş

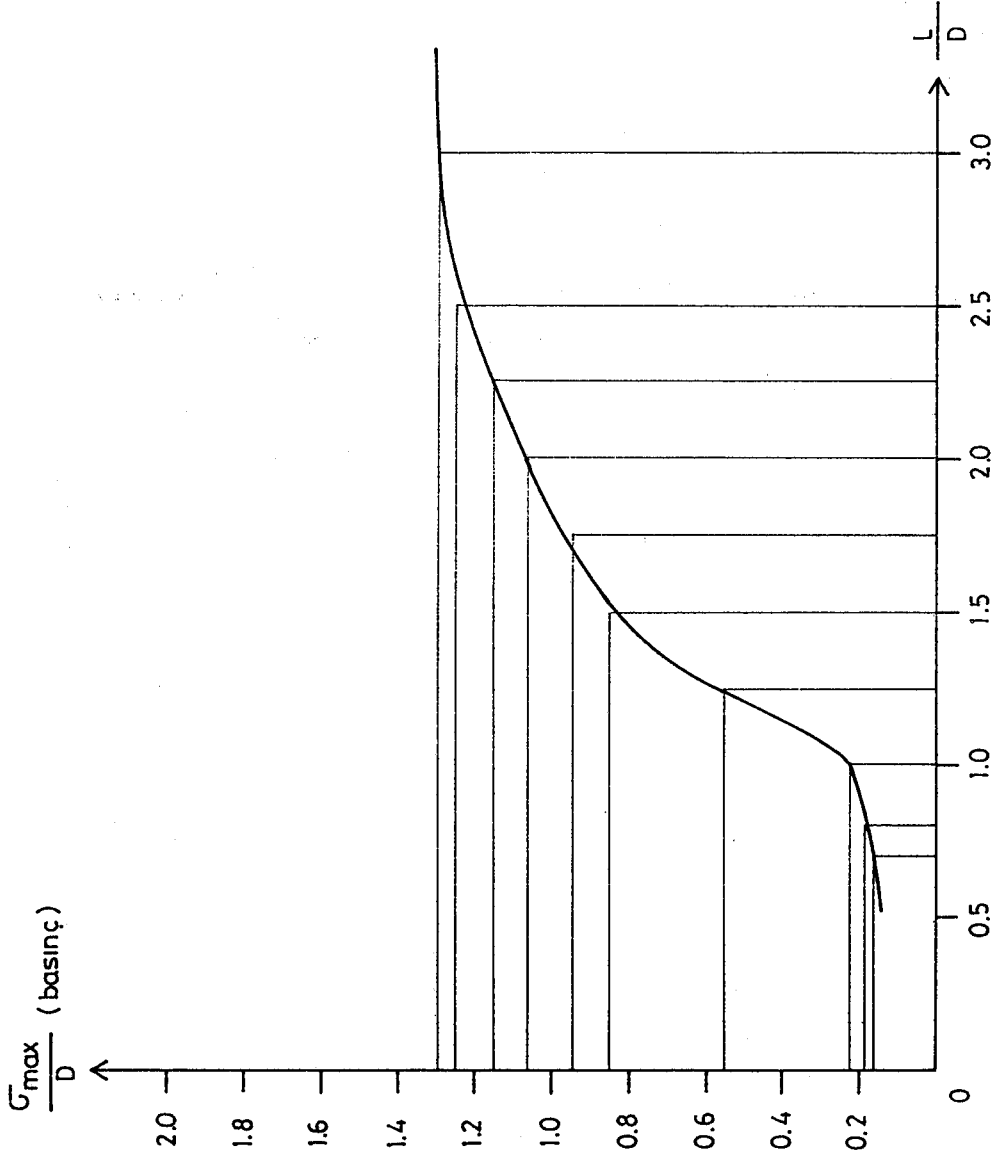
İncelenen örnek kirişten Şekil(5.1) elde edilen sonuçlara göre $x/D-L/D$ grafiği ile $\sigma_{\max}/D-L/D$ (çekme) ile $\sigma_{\max}/D-L/D$ (basınç) grafikleri çizilebilir.



ŞEKİL 5.2 $x/D - L/D$ grafiği.



ŞEKİL 5.3 $\sigma_{\max}/D - L/D$ grafiği (çekme)



ŞEKİL 5.4 $\frac{\sigma_{\max}}{D}$ – $\frac{L}{D}$ grafiği (basınç)

a) Çözüm sonucunda elde edilen Şekil (5.2), (5.3) ve (5.4) ile bir yüksek kirişin yaklaşık max. çekme, max. basınç değerleri ve tarafsız eksen yeri saptanabilir.

b) İncelenen yöntem, yaklaşık bir yöntem olduğu için sonuçlar, kesin çözümlerle (çözülen örneklerde % 28 ~ 30 gibi) bir yaklaşıklıkla elde edilmektedir. Bunun sebeplerinden biri hesap aralığının büyük bir değer olarak seçilmesidir.

c) Kiriş kabul edilen levhalarda tarafsız eksen kiriş enkesitinin ağırlık merkezi ile üst üste düşer. Şekil 5.2' den görülebileceği gibi kiriş boyunun kiriş yüksekliğine oranı 3'den küçük olursa artık bu kirişin yüksek kiriş davranışı gösterdiğini söyleyebiliriz.

d) Elemanter mukavemette düzlem kesit, düzlem kalır kabulünün belirli değerlerden sonra artık kabuller içinde kalmadığı gözlenmiştir.

ÖNERİLER

Levhaların geometrisi dikdörtgen kabul edilmeyip, herhangi bir fonksiyonla tarif edilmesi durumunda da Sonlu Farklar Yöntemi ile çözüm elde edilebilir. Tez çalışmasında ihmal edilen hacim kuvvetlerinin bazı levhalarda ihmal edilmemesi gerekebilir. Bu durumda levha genel denklemlerinde hacim kuvveti ifadelerine dikkat edilerek çözüm yapılabilir.

Levhalar düzlemleri içinde sürekli olmayabilir. Böyle levhalarda ise boşluklara dikkat edilerek denklem takımları oluşturulabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. İnan, M., 1969, Düzlemde elastisite teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi, Sayı: 750, 336 s.
2. Timoshenko, S. ve Goodier, J.N., 1969, Elastisite teorisi, (Çev.İ.Kayan ve E.Şuhubi), İ.T.Ü. Kütüphanesi, Sayı: 757, 512 s.
3. Tozluk, H., 1987, Elastik zemine oturan plakların sonlu farklar yöntemi ile çözümü, A.Ü. Fen Bilimler Enstitüsü Lisansüstü Tezi, 68 s.
4. Theimer, O.F., 1973, Yüksek kirişlerin hesabı, (Çev. M.Karakoç ve C.Karakoç), Kutulmuş Matbaası, İstanbul, 124 s.
5. Papov, E.P., 1976, Mukavemet, (Çev. H.Demiray), Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 662 s.
6. Karadeniz, A.A., 1983, Yüksek Matematik, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 450 s.
7. Ghali, A., Neville, A.M., Structural analysis, Bizim Büro Basımevi, 779 s.

EK_1 BİLGİSAYAR PROGRAMI.

```

10 PR=0
20 REM *****
30 REM *
40 REM *           BU PROGRAM
50 REM *           SONLU FARKLAR YONTEMI
60 REM *           ILE
70 REM *           -- LEVHA --
80 REM *           COZUMU YAPAR.
90 REM *
100 REM *****
110 MODE 2
120 PRINT #PR,
130 GOSUB 3410
140 REM LEVHA TANITIMI-----
150 READ LX,LY,L
160 PRINT #PR,TAB(36) "-----"
170 PRINT #PR,TAB(36) USING "LEVHANIN YATAY BOYU (Lx)      = ###.###";LX
180 PRINT #PR,TAB(36) USING "          DUSEY BOYU (Ly)      = ###.###";LY
190 PRINT #PR,TAB(36) USING "          HESAP ARALIGI (Lamda) = ###.###";L
200 PRINT #PR,TAB(36) "-----"
210 REM LEVHADA BELIRLI NOKTA NUMARALARI-----
220 DIM A(12)
230 A1=LX/L+3:A2=LY/L+3:A3=A1-2:A4=A2-2:A5=2*(A1+A2-2)+1:A6=2*(A3+A4-2)+1
240 A(1)=1:A(2)=A1:A(3)=A(2)+A2-1:A(4)=A(3)+A1-1:A(5)=A5
250 A(6)=1:A(7)=A3:A(8)=A(7)+A4-1:A(9)=A(8)+A3-1:A(10)=A6
260 A(11)=A1-4:A(12)=A2-4
270 IF A3<=4 OR A4<=4 THEN PRINT "LAMDA COK BUYUK.....!";STOP ELSE GOTO 280
280 DIM FX(A6),PY(A6),M(A6),T(A6+3)
290 DIM SX(A(11)*A(12)),SY(A(11)*A(12)),TT(A(11)*A(12))
300 DIM MSY(A(10)),MSX(A(10)),TTT(A(10))
310 REM YUKLER-----
320 PRINT #PR,
330 PRINT #PR,TAB(36) "          Y U K L E R"
340 PRINT #PR,TAB(36) "-----"
350 PRINT #PR,TAB(36) "NOKTA NO          x-YONU          y-YONU"
360 PRINT #PR,TAB(36) "-----"
370 READ YUKS
380 FOR I=1 TO YUKS
390 READ YUKNO
400 READ PX(YUKNO),PY(YUKNO)
410 PRINT #PR,TAB(36) USING "          ###          +###.##          +###.##";YUKNO,PX(YU
KNO),PY(YUKNO)
420 NEXT I
430 REM YUKLERIN STATIK KONTROLU-----
440 M=0:FX=0:FY=0
450 FOR I=1 TO A(10)-1
460 FX=FX+PX(I):FY=FY+PY(I)
470 IF I<=A(7) THEN M=M+PY(I)*(I-1)
480 IF I>A(7) AND I<A(8)+1 THEN M=M+PY(I)*(A(7)-A(6))-FX(I)*(I-A(7))
490 IF I>A(8) AND I<A(9)+1 THEN M=M+PY(I)*(A(9)-I)-FX(I)*(A(10)-A(9))
500 IF I>A(9) THEN M=M-PX(I)*(A(10)-I)
510 NEXT I
520 IF M<0.001 AND M>-0.001 THEN GOTO 530 ELSE GOTO 550
530 IF FX<0.001 AND FX>-0.001 THEN GOTO 540 ELSE GOTO 550
540 IF FY<0.001 AND FY>-0.001 THEN GOTO 560 ELSE GOTO 550
550 PRINT "YUKLER DENGEDE DEGIL...!";STOP
560 REM YUK ESITLIKLERI VE HESAP-----
570 FOR I=1 TO A(10)
580 PX(I)=PX(I)/L:PY(I)=PY(I)/L
590 NEXT I
600 B3=1

```

```

610 FOR I1=6 TO 9
620 B1=A(I1):B2=A(I1+1)
630 FOR I=B1 TO B2
640 IF B3=1 THEN PY(I)=-1*PY(I)
650 IF B3=4 THEN PX(I)=-1*PX(I)
660 NEXT I
670 B3=B3+1
680 NEXT I1
690 PRINT:PRINT
700 INPUT "LEVHA BOYUTLARINDA VEYA YUKLERDE HATA VAR MI ( E / H )":E$
710 IF E$="E" OR E$="e" THEN PRINT "DATA SATIRLARINA DIKKAT EDINIZ":STOP
720 CLS
730 FOR I=1 TO 11:PRINT:NEXT I
740 PRINT "
DUSUNUYORUM"
750 REM REAKSIYONLAR-----
760 B3=1
770 FOR I1=6 TO 9
780 B1=A(I1):B2=A(I1+1)
790 A=0:B=0
800 FOR I=B1 TO B2
810 IF B3=1 OR B3=3 THEN A=A+PY(I)*L*(I-B1) ELSE A=A+PX(I)*L*(I-B1)
820 IF B3=1 OR B3=3 THEN B=B+PY(I)*L*(B2-I) ELSE B=B+PX(I)*L*(B2-I)
830 NEXT I
840 Q(I1-5)=B/(L*(B2-B1))
850 Q(I1-1)=A/(L*(B2-B1))
860 REM MOMENTLER-----
870 FOR I=B1 TO B2
880 M(I)=Q(I1-5)*L*(I-B1)
890 FOR J=B1 TO I
900 IF B3=1 OR B3=3 THEN M(I)=M(I)-PY(J)*L*(I-J) ELSE M(I)=M(I)-PX(J)*L*(I-J)
910 NEXT J
920 NEXT I
930 B3=B3+1
940 NEXT I1
950 REM KAYMA KUVVETLERI-----
960 B3=1
970 FOR I1=6 TO 9
980 B1=A(I1)+1:B2=A(I1+1)-1
990 FOR I=B1 TO B2
1000 IF B3=1 THEN T(I)=PX(I)+Q(2)
1010 IF B3=2 THEN T(I)=PY(I)+(-1*Q(3))
1020 IF B3=3 THEN T(I)=PX(I)+(-1*Q(6))
1030 IF B3=4 THEN T(I)=PY(I)+Q(7)
1040 NEXT I
1050 B3=B3+1
1060 NEXT I1
1070 T(A(6))=Q(2):T(A(10))=Q(7):T(A(7))=Q(2):T(A(10)+1)=-Q(3)
1080 T(A(8))=-Q(6):T(A(10)+2)=-Q(3):T(A(9))=-Q(6):T(A(10)+3)=Q(7)
1090 REM KATSAYILAR MATRISININ II.K HALI-----
1100 C1=A(11)*A(12)
1110 C2=A(12)*2+1
1120 DIM KM(C1,C2)
1130 FOR I=1 TO C1
1140 FOR J=1 TO C2
1150 IF J=1 THEN KM(I,J)=20
1160 IF J=2 THEN KM(I,J)=-8
1170 IF J=3 THEN KM(I,J)=1
1180 IF J=A(12) THEN KM(I,J)=2
1190 IF J=A(12)+1 THEN KM(I,J)=-8
1200 IF J=A(12)+2 THEN KM(I,J)=2

```

```

1210 IF J=2*A(12)+1 THEN KM(I,J)=1
1220 NEXT J
1230 NEXT I
1240 REM KATSAYILAR MATRISININ SON HALI-----
1250 FOR K=1 TO A(11)
1260 D1=K*A(12)-A(12)+1:D2=K*A(12)
1270 FOR I=D1 TO D2
1280 IF A3<=5 OR A4<=5 THEN GOTO 1290 ELSE GOTO 1310
1290 IF I=D1 THEN KM(I,3)=1
1300 GOTO 1330
1310 IF I=D1 THEN KM(I,A(12))=0
1320 IF I=D2-1 THEN KM(I,3)=0
1330 IF A3<=5 OR A4<=5 THEN GOTO 1340 ELSE GOTO 1350
1340 IF I=D2 THEN KM(I,2)=0:KM(I,A(12)+2)=0:GOTO 1360
1350 IF I=D2 THEN KM(I,2)=0:KM(I,3)=0:KM(I,A(12)+2)=0
1360 IF K=1 OR K=A(11) THEN GOTO 1370 ELSE GOTO 1390
1370 IF I=D1 OR I=D2 THEN KM(I,1)=22 ELSE KM(I,1)=21
1380 GOTO 1400
1390 IF I=D1 OR I=D2 THEN KM(I,1)=21
1400 NEXT I
1410 NEXT K
1420 FOR I=1 TO C1
1430 FOR J=1 TO C2
1440 IF I+J>=A(11)*A(12)+2 THEN KM(I,J)=0
1450 NEXT J
1460 NEXT I
1470 REM ESITLIK MATRISININ ILK HALI-----
1480 DIM EM(A(11)*A(12))
1490 FOR K=1 TO A(11)
1500 E1=K*A(12)-A(12)+1:E2=K*A(12)
1510 FOR I=E1 TO E2
1520 IF I=E1 THEN EM(I)=2*M(K)-8*M(K+1)+2*M(K+2)-T(K+1)*2*L
1530 IF A3<=5 OR A4<=5 THEN GOTO 1540 ELSE 1550
1540 IF I>E1 AND I<E2 THEN EM(I)=M(K+1)+M(A(9)-K):GOTO 1570
1550 IF I=E1+1 THEN EM(I)=M(K+1)
1560 IF I=E2-1 THEN EM(I)=M(A(9)-K)
1570 IF I=E2 THEN EM(I)=2*M(A(9)-K+1)-8*M(A(9)-K)+2*M(A(9)-K-1)+T(A(9)-K)*2*L
1580 NEXT I
1590 NEXT K
1600 REM ESITLIK MATRISININ SON HALI-----
1610 FOR K=1 TO A(11)
1620 E1=K*A(12)-A(12)+1:E2=K*A(12)
1630 FOR I=E1 TO E2
1640 IF K=1 THEN GOTO 1650 ELSE GOTO 1680
1650 IF I=E1 THEN EM(I)=EM(I)-8*M(A(10)-I)+2*M(A(10)-I-1)-T(A(10)-I)*2*L
1660 IF I>E1 AND I<E2 THEN EM(I)=EM(I)+2*M(A(10)-I+1)-8*M(A(10)-I)+2*M(A(10)-I-1)-T(A(10)-I)*2*L
1670 IF I=E2 THEN EM(I)=EM(I)-8*M(A(10)-I)+2*M(A(10)-I+1)-T(A(10)-I)*2*L
1680 IF K=2 THEN GOTO 1690 ELSE GOTO 1710
1690 EM(I)=EM(I)+M(A(10)-I+A(12))*2*L
1700 IF A3<=5 OR A4<=5 THEN GOTO 1730
1710 IF K=A(11)-1 THEN GOTO 1720 ELSE GOTO 1730
1720 EM(I)=EM(I)+M(A(7)-(A(11)*A(12)-2*A(12))+I)*2*L
1730 IF K=A(11) THEN GOTO 1740 ELSE GOTO 1770
1740 IF I=E1 THEN EM(I)=EM(I)-8*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I)+2*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I+1)+T(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I)*2*L
1750 IF I>E1 AND I<E2 THEN EM(I)=EM(I)+2*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I-1)-8*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I)+2*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I+1)+T(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I)*2*L
1760 IF I=E2 THEN EM(I)=EM(I)-8*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I)+2*M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I-1)+T(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I)*2*L
1770 EM(I)=-1*EM(I)

```



```
1780 NEXT I
1790 NEXT K
1800 REM COLESKI-----
1810 K4=A(11)*A(12):J5=2*A(12)+1
1820 Q1=K4
1830 Q2=J5
1840 Q3=K4+1-J5
1850 FOR I=1 TO K4
1860 IF (I-Q3)<=0 THEN GOTO 1880
1870 Q2=Q2-1
1880 Q4=J5
1890 FOR J=1 TO Q2
1900 Q5=KM(I,J)
1910 IF (I-J5)>=0 THEN GOTO 1940
1920 IF ((J5-J)-(I-1))<0 THEN GOTO 1940
1930 Q4=I
1940 Q4=Q4-1
1950 IF Q4<=0 THEN GOTO 2020
1960 FOR K=1 TO Q4
1970 Q6=I-K
1980 Q7=K+1
1990 Q8=J+K
2000 Q5=Q5-KM(Q6,Q7)*KM(Q6,Q8)/KM(Q6,1)
2010 NEXT K
2020 IF (J-1)=0 THEN GOTO 2050
2030 KM(I,J)=Q5*Q9
2040 GOTO 2100
2050 IF ABS(Q5)>0.0000001 THEN GOTO 2080
2060 PRINT "YAPI STABILE DEGILDIR"
2070 STOP
2080 Q9=1/Q5
2090 KM(I,J)=Q9
2100 NEXT J
2110 NEXT I
2120 N=K4
2130 FOR I=1 TO K4
2140 Z1=EM(I)
2150 Z2=J5-1
2160 IF (I-J5)>=0 THEN GOTO 2190
2170 Z2=I-1
2180 IF Z2=0 THEN GOTO 2240
2190 FOR K=1 TO Z2
2200 Z3=I-K
2210 Z4=K+1
2220 Z1=Z1-KM(Z3,Z4)*EM(Z3)
2230 NEXT K
2240 EM(I)=Z1
2250 NEXT I
2260 FOR I=1 TO N
2270 EM(I)=EM(I)*KM(I,1)
2280 NEXT I
2290 FOR J=1 TO N
2300 I=N-J+1
2310 Z1=EM(I)
2320 Z5=J5
2330 IF (J-J5)>=0 THEN GOTO 2360
2340 Z5=J
2350 IF (Z5-1)=0 THEN GOTO 2400
```

```

2360 FOR K=2 TO 75
2370 Z4=I+K-1
2380 Z1=Z1-KM(I,K)*EM(Z4)
2390 NEXT K
2400 EM(I)=Z1
2410 NEXT J
2420 REM LEVHA KENARLARINDA GERILMELER-----
2430 FOR K=6 TO 9
2440 K1=A(K)+1:K2=A(K+1)-1
2450 FOR I=K1 TO K2
2460 IF K=6 THEN GOTO 2470 ELSE 2490
2470 MSY(I)=(M(I-1)-2*M(I)+M(I+1))/(L^2)
2480 MSX(I)=(2*EM((I-1)*A(12)+1-A(12))-2*M(I)-T(I)*2*L)/(L^2)
2490 IF K=7 THEN GOTO 2500 ELSE 2520
2500 MSX(I)=(M(I-1)-2*M(I)+M(I+1))/(L^2)
2510 MSY(I)=(2*EM((A(11)*A(12)-A(12))+I-A(7))-2*M(I)+T(I)*2*L)/(L^2)
2520 IF K=8 THEN GOTO 2530 ELSE 2550
2530 MSY(I)=(M(I-1)-2*M(I)+M(I+1))/(L^2)
2540 MSX(I)=(2*EM((A(9)-I)*A(12))-2*M(I)+T(I)*2*L)/(L^2)
2550 IF K=9 THEN GOTO 2560 ELSE 2580
2560 MSX(I)=(M(I-1)-2*M(I)+M(I+1))/(L^2)
2570 MSY(I)=(2*EM(A(10)-I)-2*M(I)-T(I)*2*L)/(L^2)
2580 TTT(I)=0
2590 NEXT I
2600 NEXT K
2610 REM LEVHA UC KENARLARINDA GERILMELER-----
2620 MSX(1)=(2*M(A(10)-1)-2*M(1)-T(1)*2*L)/(L^2)
2630 MSY(1)=(2*M(2)-2*M(1)-T(A(10))*2*L)/(L^2)
2640 MSX(A(7))=(2*M(A(7)+1)-2*M(A(7))-T(A(7))*2*L)/(L^2)
2650 MSY(A(7))=(2*M(A(7)-1)-2*M(A(7))+T(A(10)+1)*2*L)/(L^2)
2660 MSX(A(8))=(2*M(A(8)-1)-2*M(A(8))+T(A(8))*2*L)/(L^2)
2670 MSY(A(8))=(2*M(A(8)+1)-2*M(A(8))+T(A(10)+2)*2*L)/(L^2)
2680 MSX(A(9))=(2*M(A(9)+1)-2*M(A(9))+T(A(9))*2*L)/(L^2)
2690 MSY(A(9))=(2*M(A(9)-1)-2*M(A(9))-T(A(10)+3)*2*L)/(L^2)
2700 MSX(A(10))=MSX(1):MSY(A(10))=MSY(1)
2710 REM LEVHA IC NOKTALARINDA GERILMELER-----
2720 FOR K=1 TO A(11)
2730 F1=K*A(12)-A(12)+1:F2=K*A(12)
2740 FOR I=F1 TO F2
2750 IF I=F1 THEN SX(I)=(M(K+1)-2*EM(I)+EM(I+1))/(L^2)
2760 IF I>F1 AND I<F2 THEN SX(I)=(EM(I-1)-2*EM(I)+EM(I+1))/(L^2)
2770 IF I=F2 THEN SX(I)=(EM(I-1)-2*EM(I)+M(A(9)-K))/(L^2)
2780 NEXT I
2790 NEXT K
2800 FOR K=1 TO A(11)
2810 G1=K*A(12)-A(12)+1:G2=K*A(12)
2820 FOR I=G1 TO G2
2830 IF K=1 THEN SY(I)=(M(A(10)-I)-2*EM(I)+EM(I+A(12)))/(L^2)
2840 IF K>1 AND K<A(11) THEN SY(I)=(EM(I-A(12))-2*EM(I)+EM(I+A(12)))/(L^2)
2850 IF K=A(11) THEN SY(I)=(EM(I-A(12))-2*EM(I)+M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+1))/(L^2)
2860 NEXT I
2870 NEXT K
2880 FOR K=1 TO A(11)
2890 G1=K*A(12)-A(12)+1:G2=K*A(12)
2900 FOR I=G1 TO G2
2910 IF K=1 THEN GOTO 2920 ELSE 2950
2920 IF I=G1 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(M(A(10))-M(3)+EM(I+A(12)+1)-M(A(10)-2))
2930 IF I>G1 AND I<G2 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(M(A(10)-I+1)-EM(I+A(12)-1)+EM(I+A(12)+1)-M(A(10)-I-1))

```

```

2940 IF I=62 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(M(A(10)-I+1)-EM(I+A(12)-1)*M(A(9)-I-1)-M(A(9)
))
2950 IF K>1 AND K<A(11) THEN GOTO 2960 ELSE 2990
2960 IF I=61 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(M(K)-M(K+2)+EM(I+A(12)+1)-EM(I-A(12)+1))
2970 IF I>61 AND I<62 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(EM(I-A(12)-1)-EM(I+A(12)-1)+EM(I+A(1
2)+1)-EM(I-A(12)+1))
2980 IF I=62 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(EM(I-A(12)-1)-EM(I+A(12)-1)+M(A(9)-I-1)-M(A(9)
)-K+1))
2990 IF K=A(11) THEN GOTO 3000 ELSE GOTO 3030
3000 IF I=61 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(M(K)-M(K+2)+M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I+1)-E
M(I-A(12)+1))
3010 IF I>61 AND I<62 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(EM(I-A(12)-1)-M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(
12))+I-1)+M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I+1)-EM(I-A(12)
+1))
3020 IF I=62 THEN TT(I)=1/4/(L^2)*(EM(I-A(12)-1)-M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I-1)
+M(A(7)-(A(11)*A(12)-A(12))+I+1)-M(A(9)-I+1))
3030 NEXT I
3040 NEXT K
3050 REM CIKTILAR-----
3060 CLS
3070 FOR I=1 TO A(11)*A(12)
3080 SX(I)=SX(I)*L:SY(I)=SY(I)*L:TT(I)=TT(I)*L
3090 NEXT I
3100 FOR I=1 TO A(10)-1
3110 MSX(I)=MSX(I)*L:MSY(I)=MSY(I)*L:TTT(I)=TTT(I)*L
3120 NEXT I
3130 PRINT #PR,TAB(30) "-----"
3140 PRINT #PR,TAB(30) "NOT: '+' ISARET CEKME, '-' ISARET BASINCI GOSTERIR."
3150 PRINT #PR,TAB(30) "-----"
3160 PRINT #PR,TAB(30) "          G E R I L M E L E R"
3170 PRINT #PR,TAB(30) "-----"
3180 PRINT #PR,TAB(30) "NOKTA NO          x YONU          y YONU          xy YONU"
3190 PRINT #PR,TAB(30) "-----"
3200 KK=1
3210 FOR I=A(6) TO A(7)
3220 IF I=A(6) THEN GOTO 3230 ELSE 3260
3230 FOR J=A(9) TO A(10)
3240 PRINT #PR,TAB(30) USING "   ###          +###.###          +###.###          +###.###
";KK,MSX(J),MSY(J),TTT(J):KK=KK+1
3250 NEXT J
3260 IF I>A(6) AND I<A(7) THEN GOTO 3270 ELSE 3350
3270 FOR J=A4 TO 1 STEP -1
3280 IF J=1 THEN PRINT #PR,TAB(30) USING "   ###          +###.###          +###.###
+###.###";KK,MSX(J),MSY(J),TTT(J):KK=KK+1
3290 IF J>1 AND J<A4 THEN GOTO 3300 ELSE 3330
3300 IF J=A4-1 THEN JJ=(I-1)*A(12)
3310 PRINT #PR,TAB(30) USING "   ###          +###.###          +###.###          +###.###
";KK,SX(JJ),SY(JJ),TT(JJ):KK=KK+1
3320 JJ=JJ-1
3330 IF J=A4 THEN PRINT #PR,TAB(30) USING "   ###          +###.###          +###.###
+###.###";KK,MSX(A(9)+1-I),MSY(A(9)+1-I),TTT(A(
9)+1-I):KK=KK+1
3340 NEXT J
3350 IF I=A(7) THEN GOTO 3360 ELSE 3390
3360 FOR J=A(8) TO A(7) STEP -1
3370 PRINT #PR,TAB(30) USING "   ###          +###.###          +###.###          +###.###
";KK,MSX(J),MSY(J),TTT(J):KK=KK+1
3380 NEXT J
3390 NEXT I
3400 END
3410 REM ALT PRO.1
3420 PRINT #PR,TAB(36) "-----"
3430 PRINT #PR,TAB(36) "NOT : KUVVET BIRIMI : 1"
3440 PRINT #PR,TAB(36) "          UZUNLUK BIRIMI : 1"
3450 PRINT #PR,TAB(36) "          GERILME BIRIMI : K/L^2"
3460 RETURN

```