

SEÇİLEN BİR ÇERÇEVEDE
STATİK HESAP YÖNTEMLERİ
KARŞILAŞTIRILMASI
(DEPLASMAN YÖNTEMLERİ)

Gülây Kaya

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yapı Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç.Sacit OĞUZ



Şubat-1989

Gülay KAYA'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Seçilen Bir Çerçeve de Statik Hesap Yöntemleri Karşılaştırılması (Deplasman Yöntemleri)" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

27.3.1989

Üye : Doç. Dr. M. Bilgin

Üye : Prof. Ömer Rıza Akgün

Üye : Doç. Saif Ögür

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10 NİSAN 1989
gün ve 209/10..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
2.2.1. Açık yöntemi ile çözüm	27
2.2.2. Ankastrelik momentleri	27
2.2.3. Moment denge denklemi	27
2.2.4. Yatay denge denklemi	27
2.2.5. Lineer denklem sistemi	28
2.2.6. Açıklık momentlerinin hesabı	28
2.2.7. Düğüm noktasındaki momentler	29
3. ÇUBUK SİSTEMLERİN MATRİS YONTEMLERİ İLE HESABI ..	33
3.1. Çerçeve Çubuklarına Matris Yönteminin Uygulanması	34
3.1.1. Çerçeve çubuklarının eleman rijitleri hesabı	34
3.2. Çerçeve Çubukları Transformasyon Matrisi ...	37
3.3. Rijitlik Matrisi Uygulanması	40
3.3.1. Sınır şartlarının sistem rijitlik matrisine işlenmesi	40
3.3.2. Çubuk açıklıklarına kuvvet etki etmesi	41
3.3.3. Sistem rijitlik matrisinin kurulması	42
3.4. Düğüm Noktalarının Numaralandırılması ve Band Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi	43
3.5. Matris Deplasman Yöntemi İle Çözüm	46
3.5.1. Sistem düşey yüklere maruz	46
3.5.1.1. Ankastrelik momentleri	46
3.5.1.2. Çubuklara ait "K" matrisleri .	47
3.5.1.3. İncelenecek yapı sistemi ...	53
3.5.1.4. Ankastrelik momentleri	53
3.5.1.5. Denklem köklerinin bulunması	54
3.5.1.6. Düğüm noktasındaki momentler	57
3.5.1.7. Matris deplasman yöntemi ile çözüm	58
3.5.1.8. Açıklık momentleri	58
3.5.2. Sistem yatay ve düşey yüklere maruz .	60
3.5.2.1. Bulunan denklem köklerinin matrislere uygulanması	62
3.5.2.2. Açıklık momentlerinin hesabı	66
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	69
KAYNAKLAR DİZİNİ	71 /

ÖZET

Yapılan bu çalışmada birinci bölümde, Açık Yönteminde kullanılan uç kuvvetleri, ile uç deplasmanları arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

İkinci bölümde; bu bağıntılar kullanılarak sistemin açık yöntemi ile hesabına girilmiştir.

Üçüncü bölümde; Matris Deplasman Yöntemi için kullanılan bağıntılar özetlenmiş ve bu bağıntılarla sistem hesaplanmıştır.

Son bölümde ise, yöntemler arasında karşılaştırma yapılmış, sonuç ve önerilerde bulunulmuştur.

ABSTRACT

Purpose of the thesis;

- In the first part of this study, relations between end forces and end deflection of each member that are used in the slope deflection method are examined.

- In the second part; the system is solved with slope deflection method by using the above explained relations.

- In the third part; relations used for matrix displacement method are summarized, and by using this relations the system is solved.

- In the end of, the above explained methods are compared. Results and some offers are also presented in this part.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Uç kuvvetleri	1
1.2. Çubuk uçlarının dönmesi ve işaret kabulü	2
1.3. Çubuk ekseninin dönmesi (Ψ_{ij}) ve çubuk ucunun relatif deplasman (δ_{ji}) yapması hali	2
1.4. i ucunun φ_{ij} kadar dönmesi halinde M_{ij} ve M_{ji}	3
1.5. δ_{ij} den dolayı oluşan Ψ_{ij} ve $-\Psi_{ij}$ çubuk eksen dönmeleri	5
1.6. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklarda i ucunun φ_{ij} kadar dönmesi halinde M_{ij} ve M_{ji}	6
1.7. Çubuk uçlarının relatif deplasman yapması halinde M_{ij} ve M_{ji} momentleri	7
1.8. Ankastrelik momentleri gösterimi	8
1.8a. İki ucu ankastre çubukta fiktif yükten oluşan α_{ij} ve α_{ji} mesnet tepkileri	9
1.8b. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklarda ankastrelik momenti	10
1.8c. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubukta fiktif yükten oluşan α_{ij} ve α_{ji} mesnet tepkileri	11
2.1. Çerçveden alınan herhangi bir i düğüm noktası	14
2.2. Düşey kolonlu sistemlerdeki deplasmanlar	17
2.3. Moment diyagramı	24
2.4. Kesme kuvveti diyagramı	25
2.5. Normal kuvvet diyagramı	25
2.6. Yatay ve düşey yüklere maruz verilen sistem...	26
2.7. Düğüm noktasındaki momentler	30
2.8. Moment diyagramı	31
2.9. Kesme kuvvet diyagramı	31
2.10. Normal kuvvet diyagramı	32
3.1. Deplasmanlar ve uç kuvvetleri	34
3.2. \bar{x}, \bar{y} sistem eksen takımı ve x,y eleman eksen takımına göre pozitif yönleri	37
3.3. Düğüm noktalarına ait deplasman numaraları ...	42
3.4. Örnek çerçeve	45
3.5. Sistem düşey yüklere maruz	46
3.6. İncelenecek yapı sistemi	53

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.7. Düğüm noktasındaki momentler	57
3.8. Moment diyagramı	58
3.9. Kesme kuvvet diyagramı	59
3.10. Normal kuvvet diyagramı	59
3.11. Sistem yatay ve düşey yüklere maruz sistem	60
3.12. Düğüm noktasındaki momentler	65
3.13. Moment diyagramı	67
3.14. Kesme kuvvet diyagramı	67
3.15. Normal kuvvet diyagramı	68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
E	Elastisite modülü (t/m^2)
q	Yayıllı yük (t/m)
h	Kat yüksekliği (m)
I	Atalet momenti (m^4)
k	İki ucu ankastre çubuğun rijitliği
k'	Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı çubuğun rijitliği
ℓ	Açıklık (m)
M	Moment (tm)
\bar{M}	Ankastrelilik momenti (tm)
N	Normal kuvvet (t)
P	tekil yük (t)
Q	Kesme kuvveti (t)
\bar{Q}	Ankastre kesme kuvveti
x_{ij}	Denklem takımındaki bilinmeyen
x	Maksimum momentin sol mesnete olan uzaklığı (m)
α_{ij}, α_{ji}	Mohr metoduna göre hesaplanan fiktif yükün i, j uçlarında oluşturduğu mesnet tepkileri
δ_{ij}, δ_{ji}	Çubuğun bir ucunun diğerine göre çubuğa dik doğrultudaki relatif deplasmanı
$\varphi_{ij}, \varphi_{ji}$	Çubuk uçlarının dönmesi
ψ_{ij}, ψ_{ji}	Deplasman yapmış çubuk eksen doğrultusunun deplasman yapmamış çubuk eksen doğrultusu ile yaptığı açı

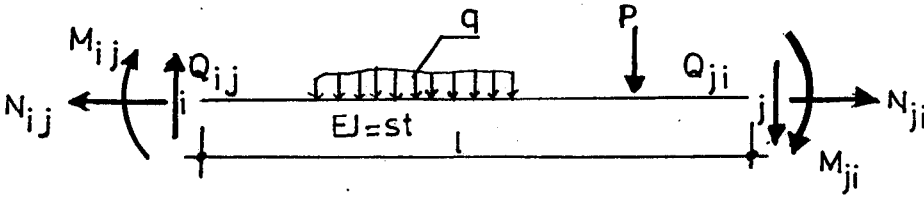
1. İŞARET KABULLERİ

1.1. Tanımlar

1.1.1. Uç kuvvetleri

Çubuğun iki ucuna etkiyen:

- Normal Kuvvet (N_{ij}, N_{ji})
- Kesme Kuvveti (Q_{ij}, Q_{ji})
- Eğilme Momenti (M_{ij}, M_{ji}) dir.



Şekil 1.1. Uç kuvvetleri

N_{ij}, N_{ji} : Çubuğun i ve j uçlarına etkiyen uç kuvvetlerinin ij doğrultusundaki bileşenleridir (Normal kuvvet). Çekme yönü pozitif (+), aksi yön negatif (-) kabul edilmiştir.

Q_{ij}, Q_{ji} : i ve j uçlarındaki uç kuvvetlerinin çubuk eksenine dik bileşenleridir (Kesme Kuvveti). Saat dönüş yönü pozitif (+) saat dönüş yönünün tersi negatif (-) kabul edilmiştir.

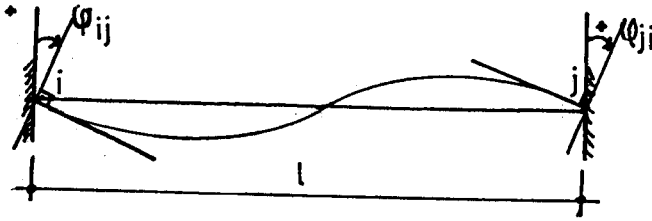
M_{ij}, M_{ji} : Çubuğun i ve j uçlarına etkiyen momentler olup saat dönüş yönü pozitif (+), saat dönüş yönünün tersi negatif (-) kabul edilmiştir (Şekil 1.1'de uç kuvvetleri pozitif yönleri ile gösterilmiştir).

1.1.2. Uç deplasmanları

Çubuğun iki ucunun yaptığı deplasmanlardır.

φ_{ij} , φ_{ji} : Çubuğun i ve j uçlarındaki dönmelerdir. Saat dönüş yönü pozitif (+), aksi yön negatif (-) kabul edilmiştir.

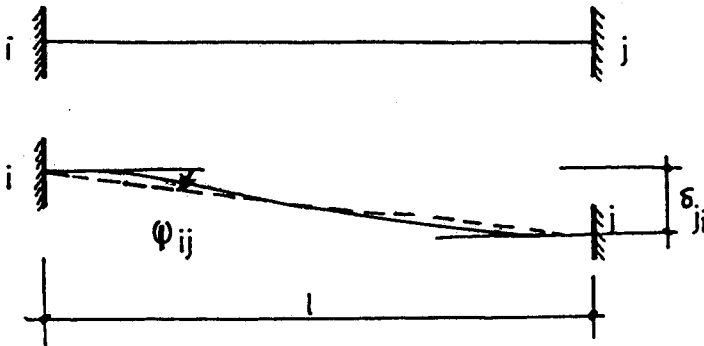
ψ_{ij} : Deplasman yapmış çubuk eksenini doğrultusunun, deplasman yapmamış çubuk eksenini doğrultusu ile yaptığı açıdır. ψ_{ij} için de saat dönüş yönü pozitif (+), aksi yön (-) kabul edilmiştir.



Şekil 1.2. Çubuk uçlarının dönmesi ve işaret kabulü

δ_{ij} : ij çubuğunun bir ucunun diğerine göre çubuğa dik doğrultudaki relatif yer değiştirmesidir. İşareti ψ_{ij} 'ye bağlıdır. ψ_{ij} pozitif (+) ise δ_{ij} de pozitif, ψ_{ij} negatif (-) ise δ_{ij} 'de negatiftir.

$\delta_{ij} = \psi_{ij} \cdot l$ bağıntısı ile bunu görmek mümkündür.

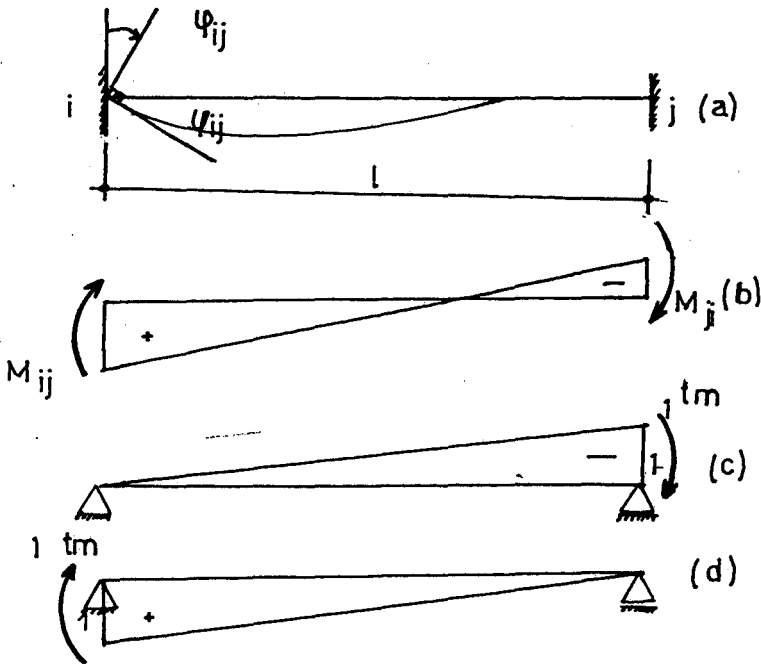


Şekil 1.3. Çubuk ekseninin dönmesi (ψ_{ij}) ve çubuk ucunun relatif deplasman (δ_{ji}) yapması hali

1.2. Uç Kuvvetler İle Deplasmanlar Arasındaki Bağlıntılar

1.2.1. İki Ucu Ankastre Çubuklar

İki ucu ankastre ij çubuğunun, i ucu φ_{ij} kadar döndüğünde oluşan moment alanı her iki uçta pozitif (+) olarak, Şekil 1.4b deki gibi kabul edilmiş olsun. Bu momentlerden çubuğun i ve j uçlarında oluşan dönmeler virtüel iş yöntemine kısaltma teoremi uygulanarak bulunabilir. i ucundaki dönmeyi bulmak için önce $\varphi_{ji}=0$ şartı kullanılarak Şekil 1.4b deki, moment alanı ile 1.4c deki moment alanı çarpılırsa:



Şekil 1.4. i ucunun φ_{ij} kadar dönmesi halinde M_{ij} ve M_{ji}

$$\varphi_{ji}=0=-\frac{1}{6EJ} M_{ij} \cdot l + \frac{1}{3EJ} M_{ji} \cdot l \text{ ve } M_{ji}=M_{ij}/2 \quad (1.1)$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla dönme olmayan düğüm noktasındaki moment, dönme olan düğüm noktasındaki momentin yarısı kadardır.

φ_{ij} dönüş açısının hesabı için Şekil 1.4b deki moment alanı 1.4d deki moment alanı ile çarpılır.

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{3EJ} \cdot \ell \cdot M_{ij} \cdot l - \frac{1}{6EJ} \ell \cdot M_{ji} \cdot l$$

$$M_{ji}=M_{ij}/2 \text{ yazılırsa}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{3EJ} \cdot \ell \cdot M_{ij} \cdot l - \frac{1}{6EJ} \cdot \ell \cdot \frac{M_{ij}}{2} \cdot l$$

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{4EJ} \ell \cdot M_{ij} \cdot l \text{ veya } M_{ij} = \frac{4EJ}{\ell} \cdot \varphi_{ij} \quad (1.2)$$

bulunur.

j ucunun birim dönme yapması halinde ($\varphi_{ji}=1$) yukarıdaki kine benzer şekilde;

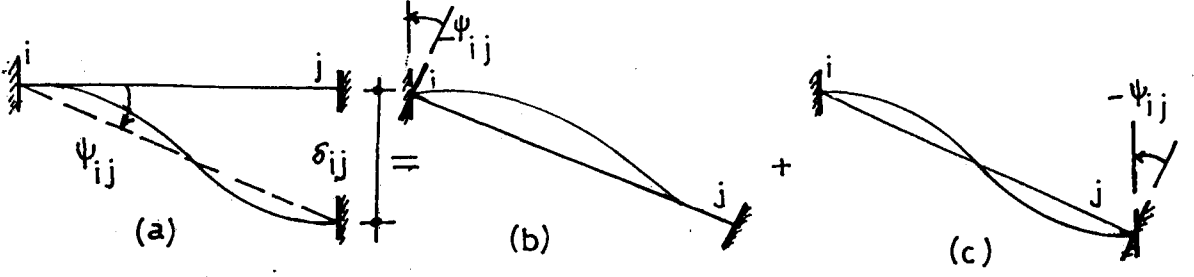
$$M_{ji} = \frac{4EJ}{\ell} \cdot \varphi_{ji}, \quad M_{ij} = \frac{M_{ji}}{2} = \frac{2EJ}{\ell} \varphi_{ji} \text{ olur.}$$

Kesme kuvvetleri ise,

$$Q_{ij}=Q_{ji} = -\frac{M_{ij}+M_{ji}}{\ell} = -\frac{1}{\ell} \frac{4EJ\varphi_{ji}+2EJ\varphi_{ji}}{\ell} = -\frac{6EJ}{\ell^2} \varphi_{ji} \text{ dir.}$$

1.2.1.1. Çubuk uçlarının relatif yer değiştirmesinin (δ) etkisi:

İki ucu ankastre ij çubuğunun j ucu δ_{ij} kadar deplasman yapsın (Şekil 1.5a). Bu durumda oluşan M_{ij} ve M_{ji} momentleri hesaplanmak istenirse, Şekil 1.5a daki sistem Şekil 1.5b ve 1.5c nin toplamı olarak düşünülebilir.



Şekil 1.5. δ_{ij} den dolayı oluşan ψ_{ij} ve $-\psi_{ij}$ çubuk eksen dönmeleri

1.1. ve 1.2. bağıntıları ile Şekil 1.5b, 1.5c den faydalanılarak M_{ij} ve M_{ji} yazılırsa,

$$M_{ij} = -\frac{4EJ}{l} \psi_{ij} - \frac{2EJ}{l} \psi_{ij} = -\frac{6EJ}{l} \psi_{ij}$$

$$M_{ji} = -\frac{2EJ}{l} \psi_{ij} - \frac{4EJ}{l} \psi_{ij} = -\frac{6EJ}{l} \psi_{ij}$$

bulunur.

Görüldüğü gibi $M_{ij} = M_{ji}$ dir. $M_{ij} = M_{ji} = -\frac{6EJ}{l} \psi_{ij}$, $\delta_{ij} = \psi_{ij} \cdot l$ idi $\psi_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{l}$ yazılırsa.

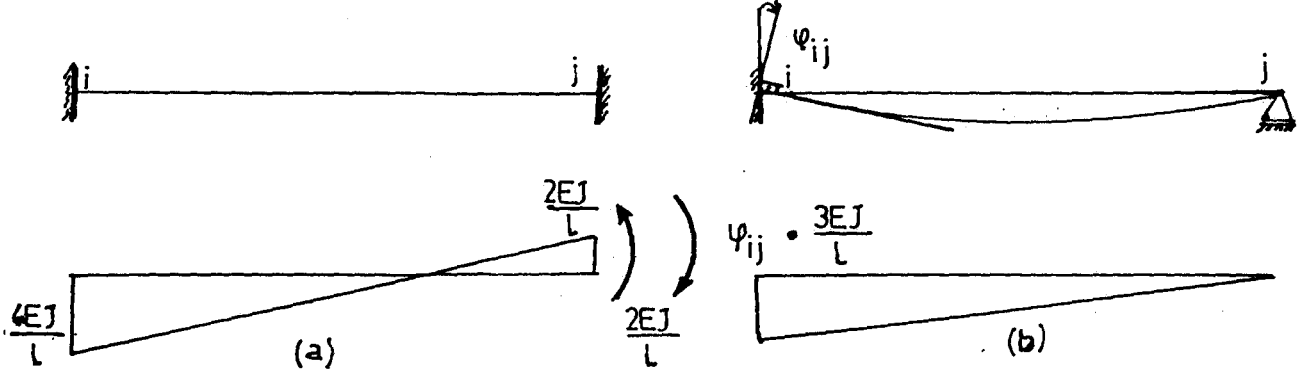
$$M_{ij} = M_{ji} = -\frac{6EJ}{l} \cdot \frac{\delta_{ij}}{l} = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot \delta_{ij} \quad \text{bulunur} \quad (1.3)$$

Kesme Kuvvetleri ise,

$$Q_{ij} = Q_{ji} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l} = -\frac{1}{l} \left(-\frac{6EJ}{l^2} \delta_{ij} - \frac{6EJ}{l^2} \delta_{ij} \right) = \frac{12EJ}{l^3} \delta_{ij} \text{ dir.}$$

1.2.2. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklarda

Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklar için benzer bağıntılar iki ucu ankastre çubuklar için çıkarılan bağıntılardan yararlanılarak çıkarılmıştır.



Şekil 1.6. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklarda i ucunun φ_{ij} kadar dönmesi halinde M_{ij} ve M_{ji}

Şekil 1.6b deki ij çubuğunun i ucu φ_{ij} kadar döndüğünde j ucu mafsallı olduğundan j ucundaki moment $M_{ji}=0$ dir. Şekil 1.6a daki iki ucu ankastre çubukta j ucundaki $M_{ji} = \frac{2EJ}{l}$ değerindeki momenti sıfır yapacak şekilde ters yönde bir $M_{ji} = -\frac{2EJ}{l}$ momenti uygulanırsa j ucundaki toplam moment sıfır olur ve sistem Şekil 1.6b ye eşdeğer olur.

Denklem 1.1.den;

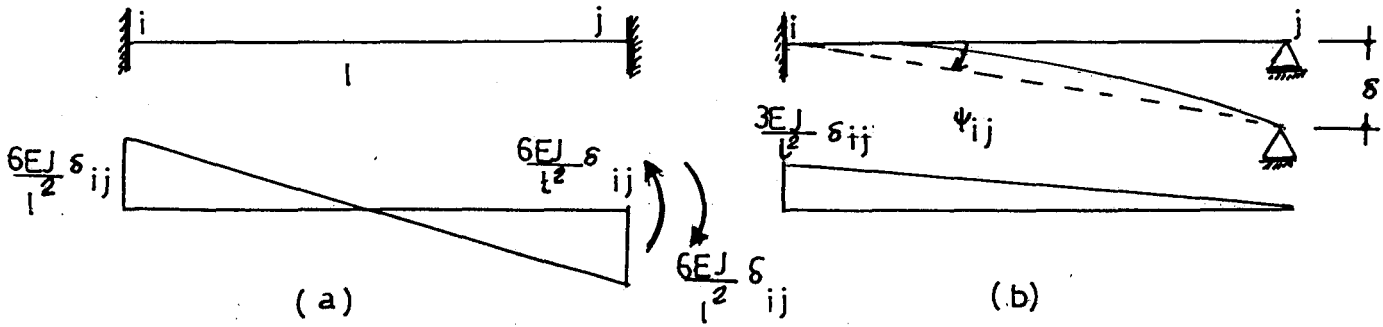
$M_{ji} = -\frac{2EJ}{l} \varphi_{ij}$ değerinin yarısı i ucuna geçeceğinden $\frac{1}{2} \cdot \frac{2EJ}{l} \varphi_{ij}$ ile i ucundaki $\frac{4EJ}{l} \varphi_{ij}$ momenti değeri toplandığında bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklar için moment değeri;

$$M_{ij} = \frac{4EJ}{l} \varphi_{ij} - \frac{1}{2} \frac{2EJ}{l} \varphi_{ij} = \frac{3EJ}{l} \varphi_{ij} \text{ olur} \quad (1.4)$$

Kesme Kuvveti ise,

$$Q_{ij} = -\frac{M_{ij}}{\ell} = -\frac{3EJ}{\ell^2} \varphi_{ij} \text{ dir.}$$

1.2.2.1. Çubuk uçlarının relatif yer değiştirmesinin (δ) etkisi



Şekil 1.7. Çubuk uçlarının relatif deplasman yapması halinde M_{ij} ve M_{ji} momentleri

Şekil 1.7a daki iki ucu ankastre çubuğun j ucunu 1.3. denklemden $M_{ij} = -\frac{6EJ}{\ell^2} \delta_{ij}$ momenti çubuğa ters yönde etki ettirilirse sistem Şekil 1.7b deki sisteme eşdeğer olur. j ucuna uygulanan ters yöndeki momentin yarısı i ucuna geçeceğinden bu uçtaki moment

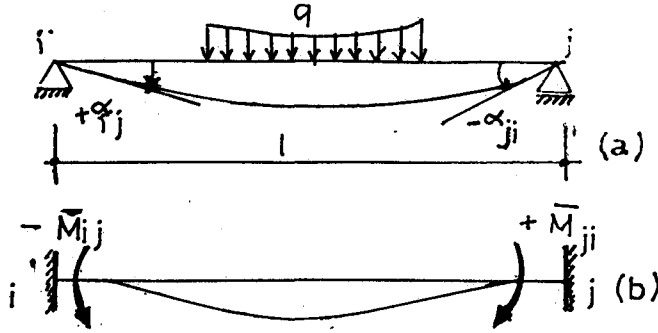
$$M_{ij} = -\frac{6EJ}{\ell^2} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6EJ}{\ell^2} \delta_{ij} = -\frac{3EJ}{\ell^2} \delta_{ij} \text{ olur.} \quad (1.5)$$

Kesme Kuvveti ise;

$$Q_{ij} = -\frac{M_{ij}}{\ell} = \frac{3EJ}{\ell^3} \delta_{ij} \text{ dir.}$$

1.3. Ankastrelik Momentleri

\bar{M}_{ij} , M_{ji} : İki ucu ankastre bir kirişte dış yüklerin etkisiyle oluşan uç momentleridir.



Şekil 1.8. Ankastrelik momentleri gösterimi

Şekil 1.8a daki gibi basit kiriş q yayılı yükü ile yüklü olsun. Tanım gereği basit kirişin i ve j mesnetlerindeki dönmeleri yok eden momentler ankastrelik momentleridir.

Saat dönüş yönünde oluşan ankastrelik momentleri pozitif (+) tersi yönde oluşanlar da negatif (-) olarak kabul edilmiştir (Şekil 1.8).

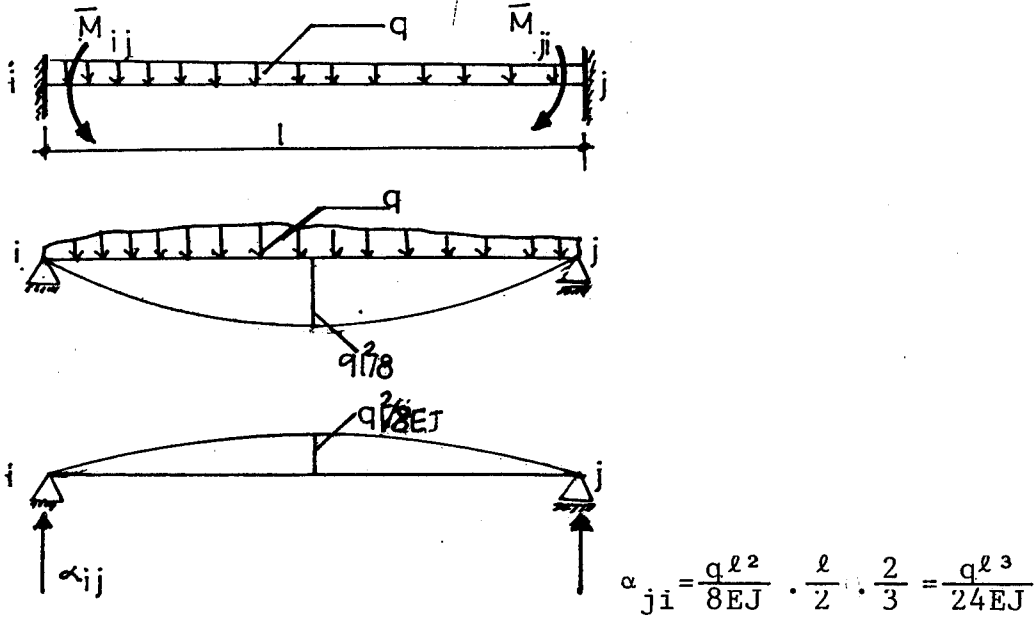
Bu durumda ankastrelik momentleri:

$$\bar{M}_{ij} = -\left(\frac{4EJ}{l} \alpha_{ij} - \frac{2EJ}{l} \alpha_{ji}\right) \quad (1.6)$$

$$\bar{M}_{ji} = \frac{4EJ}{l} \alpha_{ji} - 2\frac{EJ}{l} \alpha_{ij}$$

α_{ij} , α_{ji} : Mohr yöntemine göre hesaplanan fiktif yükün, i ve j uçlarında oluşturduğu mesnet tepkileridir.

Örneğin kiriş l boyunca üniform q yükü ile yüklü olsun. Bu durumda $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ hesaplanmak istenirse



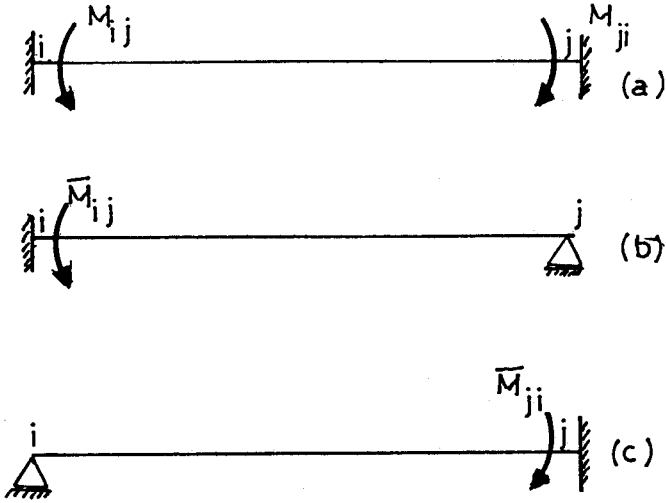
Şekil 1.8a. İki ucu ankastre çubukta fiktif yükten oluşan α_{ij} ve α_{ji} mesnet tepkileri

α_{ij} ve α_{ji} değerleri 1.6 denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$\bar{M}_{ij} = -\left(\frac{4EJ}{l} \cdot \frac{q l^3}{24EJ} - \frac{2EJ}{l} \cdot \frac{q l^3}{24EJ}\right) = -\left(\frac{2EJ}{l} \cdot \frac{q l^3}{24EJ}\right) = -\frac{q l^2}{12}$$

$$\bar{M}_{ji} = \frac{4EJ}{l} \cdot \frac{q l^3}{24EJ} - \frac{2EJ}{l} \cdot \frac{q l^3}{24EJ} = \frac{2EJ}{l} \cdot \frac{q l^3}{24EJ} = \frac{q l^2}{12}$$

elde edilir.



Şekil 1.8b. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklarda ankastrelik momenti

Eğer sistem Şekil 1.8b deki gibi bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre ise; i ucunda oluşan ankastrelik momenti Bölüm 1.2.1 den faydalanılarak $\bar{M}_{ij} = \bar{M}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{M}_{ji}$ şeklinde yazılabilir.

1.2.b denklemlerinden;

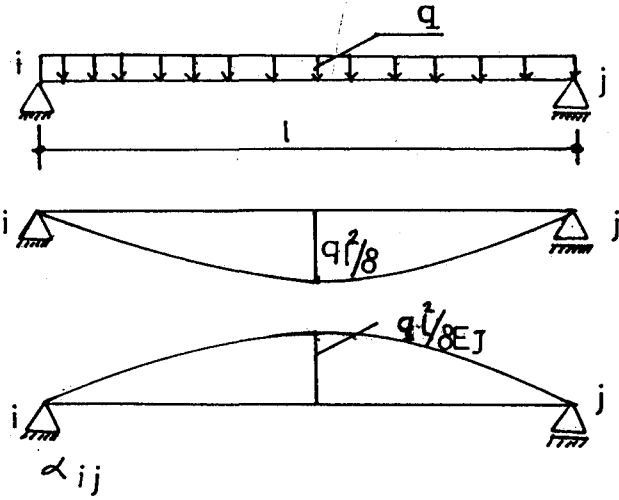
$$\bar{M}_{ij} = -\left(\frac{4EJ}{\ell} \alpha_{ij} - \frac{2EJ}{\ell} \alpha_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4EJ}{\ell} \alpha_{ji} - \frac{2EJ}{\ell} \alpha_{ij}\right) = -\frac{3EJ}{\ell} \alpha_{ij} \quad (1.7)$$

$$\bar{M}_{ij} = -\frac{3EJ}{\ell} \alpha_{ij}, \quad \bar{M}_{ji} = 0$$

α_{ji} değeri 1.7. denkleminde yerine yazılırsa;

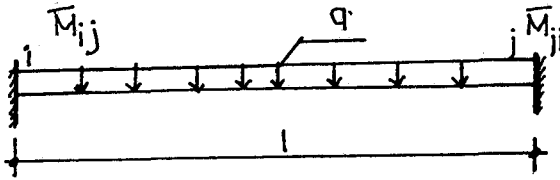
$$\bar{M}_{ij} = -\frac{3EJ}{\ell} \cdot \frac{q\ell^3}{24EJ} = -\frac{q\ell^2}{8} \text{ elde edilir.}$$

Yapılan işaret kabulüne göre söz konusu ij çubuğunun i ucundaki ankastrelik momentlerinin işareti negatif (-), j ucundaki ankastrelik momentlerinin işareti pozitif (+) dır.



$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{ql^2}{8EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{ql^3}{24EJ}$$

Şekil 1.8c. Bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubukta fiktif yükten oluşan α_{ij} ve α_{ji} mesnet tepkileri



$$\bar{M}_{ij} = \frac{ql^2}{12} ; \quad \bar{M}_{ji} = \frac{ql^2}{12}$$

q = Yayılı yük değeri (t/m)

l = Kiriş açıklığı (m)

\bar{M}_{ij} = Kirişin sol ucundaki ankastrelik momenti (tm)

\bar{M}_{ji} = Kirişin sağ ucundaki ankastrelik momenti (tm)

Bu bölümde çıkarılan bağıntılar daha sonraki bölümde açı yöntemi denklemlerinin elde edilmesinde kullanılacaktır. Bu nedenle çıkarılan tüm bağıntılar toplu halde matris formunda gösterilmiştir.

İki ucu ankastre çubuklarda;

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ Q_{ij} \\ M_{ji} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} \\ \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{ji} \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ij} \\ \bar{Q}_{ij} \\ M_{ji} \\ \bar{Q}_{ji} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Bir ucu mafsallı diğcr ucu ankastre çubuklarda

$$\begin{bmatrix} M_{ij} \\ Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{l} & -\frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^3} \\ -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ij} \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{M}_{ij} \\ \bar{Q}_{ij} \\ \bar{Q}_{ji} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

2. AÇI YÖNTEMİ DENKLEM TAKIMLARININ KURULMASI

Yapı statığında çerçeveler; eğilme momenti etkisine dayanıklı çubuklardan oluşur. Çubukların birleştikleri köşeler çerçeve düğüm noktalarıdır ve çubukların bu düğüm noktalarında aralarındaki açıyı bozmadan şekil değiştirdiği kabul edilir.

Belirli bir yükleme halinde bir çerçevede eğilme momenti dağılımını tespit edebilmek için çubuk uç momentlerinin bilinmesi gereklidir.

Bu uç momentlerini bulmak için dış yüklerin etkisi ile sistemde oluşan deplasmanları bulunur ve bu deplasmanların yardımı ile çubuk uç momentleri bulunur.

Açı yöntemi bu yolun sistematik hale getirilmesidir. Normal kuvvet deformasyonlarının ihmal ile düğüm noktalarının dönme açıları ve çubukların relatif deplasmanları bilinmeyen olarak seçilir.

Açı yönteminde çerçeve sistemleri;

a. Düğüm noktaları sabit sistemler,

b. Düğüm noktaları hareketli sistemler olarak iki grupta incelenir.

a. Düğüm noktaları sabit sistemlerde çubukların eksenel deformasyonları sıfırdır. Bu tip sistemlerde bilinmeyenler sadece düğüm noktalarının dönüş açılarıdır.

b. Düğüm noktaları hareketli sistemlerde ise çubukların eksenel deformasyonları sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla bu tip sistemlerde hem düğüm noktalarının dönüş açıları hem de çubuk uçlarındaki lineer deplasmanlar bilinmeyenler olarak alınır.

Açı yöntemi ile incelenen sistemlerde bilinmeyen sayısı (n) ;

$$n=2d_1+3d_2-a$$

dır.

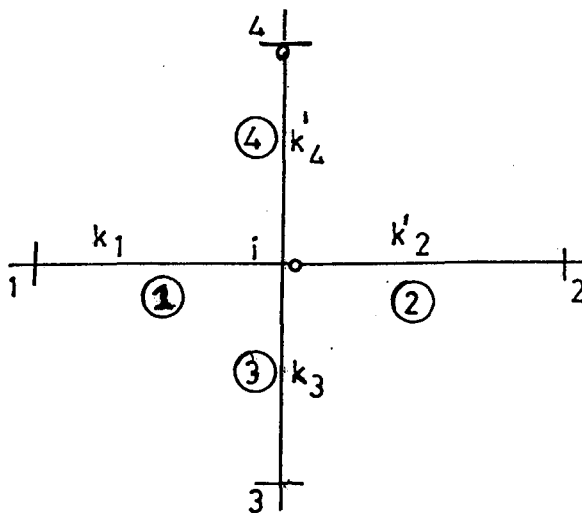
Burada;

d_1 : Mafsallı düğüm noktası (mesnetler dahil)

d_2 : Sistemdeki mesnetler dahil olmak üzere eğilmeye mukavemetli düğüm noktası sayısı (bir düğüm noktasına iki- den fazla çubuk birleşiyorsa ve bunlardan en az ikisi eğil- meye mukavemetli bileşim meydana getiriyorsa bu tip düğüm noktaları d_2 olarak göz önüne alınır).

a : Mesnet tepkisi sayısı

Düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler düşünülürse, d_1 düğümlerinde bağımsız 2 yer değiştirme büyüklüğü, d_2 dü- gümlerinde bağımsız 3 yer değiştirme büyüklüğü vardır. Mes- netlerde çubuk uçlarının yer değiştirmeleri (mesnet şartı olarak) bilindiğinden $2d_1+3d_2$ sayıda yer değiştirmeden a mesnet tepkisi sayısı çıkarıldığında sistemde $n=2d_1+3d_2-a$ kadar bilinmeyen yer değiştirme büyüklüğü vardır. Bir siste- min çözümü için bilinmeyen sayısı kadar denge denklemine gerek vardır.



Şekil 2.1. Çerçeveden alınan herhangi bir i düğüm noktası

2.2.8'de iki ucu ankastre çubuklar için;

$$M_{ij} = \frac{4EJ}{\ell} \varphi_{ij} + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_{ji} - \frac{6EJ}{\ell^2} \delta + \bar{M}_{ij} \text{ ve}$$

1.2.9 da bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre çubuklar için verilen bağıntılarda

$$M_{ij} = \frac{3EJ}{\ell} \varphi_{ij} - \frac{3EJ}{\ell^2} \delta + \bar{M}_{ij}$$

dır.

Bu bağıntılar i düğüm noktası (Şekil 2.1) için yazılırsa;

$$M_{i1} = \frac{4EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_1 + \bar{M}_{i1}$$

$M_{i2} = 0$ (Mafsal düğüm noktası tarafında olduğundan gözönüne alınmaz).

$$M_{i3} = \frac{4EJ}{\ell} \varphi_i + \frac{2EJ}{\ell} \varphi_3 - \frac{6EJ}{\ell^2} \delta + \bar{M}_{i3}$$

$$M_{i4} = \frac{3EJ}{\ell} \varphi_i - \frac{3EJ}{\ell^2} \delta - \bar{M}_{i4} \quad (2.1)$$

elde edilir.

İki ucu ankastre çubuklarda $k_i = \frac{EJ_i}{\ell_i}$ (kiriş rijitliği) ile bir ucu ankastre çubuklarda $k_i' = 0,75 k_i$ kabulü ile 2.1 denklemleri yeniden yazılırsa:

$$M_{i1} = k_{i1} (4 \varphi_j + 2 \varphi_1) + \bar{M}_{i1} \quad (2.2)$$

$$M_{i2} = 0$$

$$M_{i3} = k_{i3} (4 \varphi_i + 2 \varphi_3 - \frac{6}{\ell} \delta) + \bar{M}_{i3}$$

$$M_{i4} = k'_{i4} (3 \varphi_i - \frac{3}{\ell} \delta) - \bar{M}_{i4}$$

elde edilir.

(2.2) denklemleri ile yazılan momentler çubuk uç momentleridir. Bu uç momentlerinin ters işaretlileri düğüm noktalarında oluşur.

Sistem dengede olduğundan i noktasına etkiyen momentler toplamı sıfıra eşittir.

$$\sum_n M_{i,n} = 4(k_1 + k_3 + k_4)\varphi_i + 2(k_1\varphi_1 + k_3\varphi_3) - 6\frac{k_3}{\ell}\delta - 4\frac{k_4'}{\ell}\delta + \sum_n \bar{M}_{i,n} = 0$$

veya

$$d_i = 4(k_1 + k_2 + \dots + k_4') \text{ yazılarak:}$$

$$d_i\varphi_i + 2\sum_n k_n\varphi_n - 6\sum_n \frac{k_n}{\ell}\delta - 4\sum_n \frac{k'_n}{\ell}\delta + \sum_n \bar{M}_{i,n} = 0$$

$$(n=1,2,3,4) \text{ elde edilir(} \quad (2.3)$$

Burada

$d_i = 4(k_1 + k_2' + \dots + k_4)$: i. düğüm noktasında birleşen çubuklara ait k_i değerlerinin toplamının dört katıdır.

$2\sum_n k_n\varphi_n$: i. düğüm noktasında birleşen çubuklara ait k_n değerleri ile çubukların karşı uçlarındaki dönüş açılarının çarpımlarının toplamının iki katıdır.

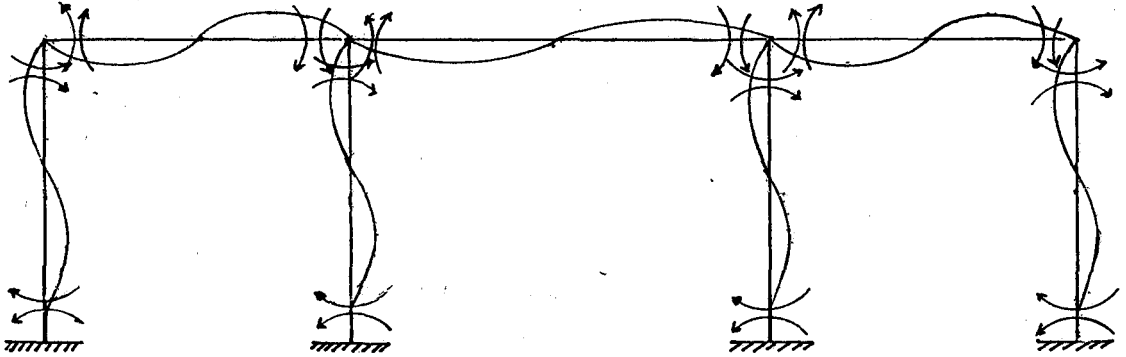
$6\sum_n \frac{k_n}{\ell}\delta_n$: İki ucu eğilmeye dayanıklı çubuk uçlarının çubuk ekseninin ilk konumuna dik doğrultudaki yer değişimlerinin (δ_{in}) çubuk rijitlikleri (k_n) ile çarpımlarının toplamının altı katıdır.

$4\sum_n \frac{k'_n}{\ell}\delta_n$: Bir ucu mafsallı çubuk uçlarının çubuk ekseninin ilk konumuna dik doğrultudaki yer değişimlerinin (δ_{in}) çubuk rijitlikleri olan k'_n değerleri ile çarpımlarının toplamının dört katıdır.

$\sum \bar{M}_{in} = i$: düğüm noktasında birleşen çubuklara ait ankastrelik momentlerinin toplamıdır.

Düğüm noktaları sabit sistemler için çözüm yapılıyorsa (2.3) deki moment denge denkleminde $-6 \sum \frac{k_n}{l_n} \delta_n$ ve $-4 \sum \frac{k'_n}{l'_n} \delta_n$ terimleri ortadan kalkar. Çünkü düğüm noktaları sabit sistemlerde yatay deplasman yoktur.

Düğüm noktaları hareketli sistemler için deplasmanlardan dolayı düğüm noktalarındaki moment denge denklemlerinden başka yatay ve düşey kuvvetlere ait denge denklemlerini de kurmak gerekir. Bu denklemlerin kurulmasında bazı hesap zorlukları ile karşılaşılır. Ancak düşü kolonlu ve normal kuvvet etkilerinin ihmal edildiği sistemlerde çözüm daha kolaydır.



Şekil 2.2. Düşey kolonlu sistemlerdeki deplasmanlar

Şekil 2.2'de ele alınan, düşey kolonlu sistemde kolonların boy değiştirmeleri sıfırdır. Çünkü normal kuvvet deformasyonları ihmal edilmiştir. Dolayısıyla her kat aynı δ yatay deplasmanını yapar. Böyle bir sistem için yazılacak düğüm noktasına ait moment denge denklemi (2.3) ile aynıdır. Yatay denge denklemini yazmak için Şekil 1.2b deki gibi her katın kolon başlarının hemen altından çerçeve sistemi yatay

olarak kesilirse sisteme etkiyen dış kuvvetlerle kesit kuvvetleri dengede olacağından;

$$\Sigma P + \Sigma q \cdot \ell + \Sigma Q \quad (2.4)$$

yatay denge denklemi yazılır.

Bu denklemde;

ΣP : (x-x) kesitinin üzerinde kalan çerçeve kısmına etkiyen bütün dış kuvvetlerinin (tekil kuvvet) yatay izdüşümlerinin toplamıdır.

$\Sigma q \cdot \ell$: (x-x) kesitinin üzerinde kalan yatay doğrultuda etkiyen yayılı yükler toplamıdır.

$\Sigma \bar{Q}$: (x-x) kesitine etkiyen kesme kuvvetleri toplamıdır.

(2.4) denklemdeki kuvvetler; soldan sağa ($\rightarrow +$) doğru etki ediyorsa işareti pozitif (+), sağdan sola ($\leftarrow -$) doğru etki ediyorsa işareti negatif alınır.

$k = \frac{EJ}{\ell}$ kabulü ile bir kolon için kesici kuvvet ifadesi yazılırsa (Denklem 1.8);

$$Q = -6 \frac{k}{\ell} (\varphi_a + \varphi_u) + 12 \frac{k}{\ell^2} \delta + \bar{Q} \quad (2.5)$$

bulunur.

Burada;

φ_a, φ_u : Sırasıyla kolonun alt ve üst uçlarındaki düğüm noktalarına ait dönüş açılarıdır.

δ : Kolonun bir ucunun diğerine göre yaptığı deplasmandır.

\bar{Q} : Kolonun üst ucundaki ankastre uç kesici kuvvetidir.

Yukarıda bir kolon için yazılan (2.5) denklemi tüm kat kolonları için toplanırsa;

$$-6 \Sigma \frac{k}{\ell} \varphi_a - 6 \Sigma \frac{k}{\ell} \varphi_u + 12 \Sigma \frac{k}{\ell^2} \delta = \Sigma P + \Sigma q \cdot \ell + \Sigma \bar{Q} \quad (2.6)$$

olur.

Eğer sisteme yatay doğrultuda etkiyen bir kuvvet yoksa (2.6) denkleminin sağ tarafı sıfırda eşit olur. Nitekim sadece düşey yüklere göre çözüm yapıldığından (2.6) denkleminin sağ tarafı sıfırdır. Ayrıca (2.6) denkleminde sadeleştirme yapılırsa yatay denge denkleminin yeni şekli;

$$-\sum \frac{k}{l} \varphi_a - \sum \frac{k}{l} \varphi_{ij} + 2 \sum \frac{k}{l^2} \delta = 0 \quad (2.7)$$

olur.

(2.3) ve (2.7) denklemlerinden sisteme ait bilinmeyenler olan φ ve δ değerleri bulunduktan sonra uç momentleri,

İki ucu eğilmeye dayanıklı çubuklar için;

$$M_{ij} = k_{ij} \left(4\varphi_{ij} + 2\varphi_{ji} - 6 \frac{\delta_{ij}}{l} \right) + \bar{M}_{ij} \quad (2.8)$$

Bir Ucu Mafsallı Çubuklar İçin;

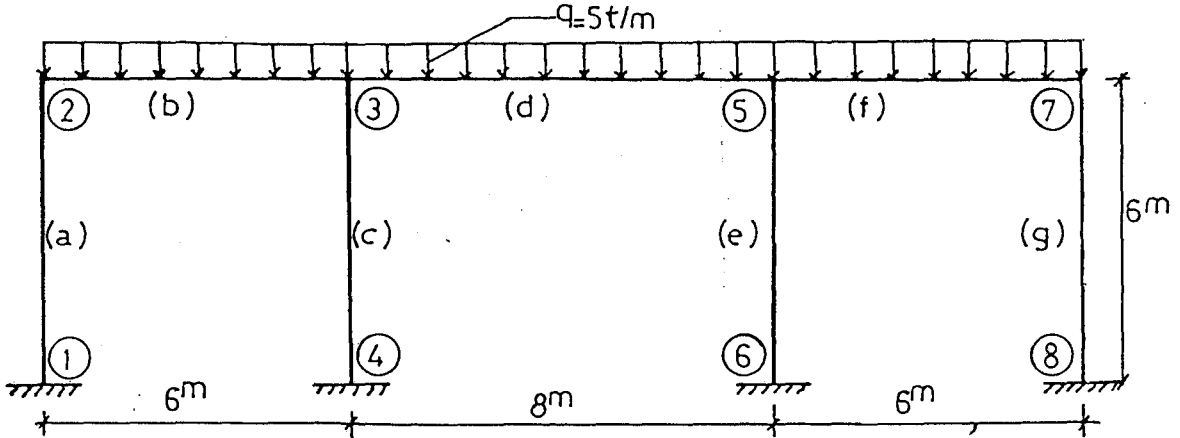
$$M_{ij} = k'_{ij} \left(4\varphi_{ij} - 3 \frac{\delta_{ij}}{l} \right) + \bar{M}_{ij} \quad (2.9)$$

denklemleri ile bulunur.

Sistemdeki bilinmeyen δ sayısı kat sayısı kadardır.

(2.7) denklemi her kat için yazıldığından sistemdeki bilinmeyen sayısı kurulan denklem sayısına eşittir (1).

2.1. Düşey Yüklere Maruz Verilen Sistemin Açı Yöntemi İle Çözümü



$E=2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ alınmıştır.

Çubuk No	$J(\text{m}^4)$	$F(\text{m}^2)$
a, c, e, g	0,0054	0,18
b, d, f	0,0128	0,24

$$k_{12}=k_{34}=k_{56}=k_{78}=\frac{2EJ}{\ell}=\frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0054}{6}=3780$$

$$k_{23}=k_{57}=\frac{2EJ}{\ell}=\frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0128}{6}=8960$$

$$k_{35}=\frac{2EJ}{\ell}=\frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,0128}{8}=6720$$

2.1.1. Ankastrelik momentleri

$$M_{23}=M_{32}=M_{57}=M_{75}=15 \text{ tm}$$

$$M_{35}=26,667 \text{ tm}$$

2.1.2. Moment denge denklemleri

2. Dügüm Noktası

$$2(3780+8960)\varphi_2+8960\varphi_3-3\cdot\frac{3780}{6}\delta-15=0$$

3. Dügüm Noktası

$$2(8960+6720+3780)\varphi_3+8960\varphi_2+6720\varphi_5-3\cdot\frac{3780}{6}\delta+15-26,667=0$$

5. Dügüm Noktası

$$2(6720+8960+3780)\varphi_5+6720\varphi_3+8960\varphi_7-3\cdot\frac{3780}{6}\delta+26,667-15=0$$

7. Dügüm Noktası

$$2(8960+3780)\varphi_7+8960\varphi_5-3\cdot\frac{3780}{6}\delta+15=0$$

2.1.3. Yatay denge denklemi

$$-3\cdot\frac{3780}{6}\varphi_2-3\cdot\frac{3780}{6}\varphi_3-3\cdot\frac{3780}{6}\varphi_5-3\cdot\frac{3780}{6}\varphi_7+6\cdot\left(\frac{3780}{6^2}\delta\right)\cdot 4=0$$

2.1.4. Lineer denklem sistemi

φ_2	φ_3	φ_5	φ_7	δ		φ_2	φ_3	φ_5	φ_7	δ
25480	8960	0	0	-1890	x	15				
8960	38920	6720	0	-1890		11,667				
0	6720	38920	8960	-1890		-11,667				
0	0	8960	25480	-1890		-15				
-1890	-1890	-1890	-1890	2520		0				

Lineer Denklem takımı bilgisayarda çözümlenerek bilinmeyenlerin değerleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\delta = -0,0000002$$

$$\varphi_7 = -0,0005$$

$$\varphi_5 = -0,00022$$

$$\varphi_3 = 0,00022$$

$$\varphi_2 = 0,0005$$

2.1.5. Dügüm noktasındaki momentler

$$M_{1,2} = 3780 \left[2.0 + 0,0005 - 3 \frac{(-0,0000002)}{6} \right] = 1,89 \approx 2 \text{ tm}$$

$$M_{2,1} = 3780 \left[2.0,0005 + 0 - 3 \frac{(-0,0000002)}{6} \right] = 3,78 \approx 4 \text{ tm}$$

$$M_{2,3} = 8960 [2.0,0005 + 0,00022] - 15 = -4,067 \text{ tm}$$

$$M_{3,2} = 8960 (2.0,00022 + 0,0005) + 15 = 23,42 \text{ tm}$$

$$M_{3,5} = 6720 (2.0,00022 - 0,00022) - 26,667 = -25,189 \text{ tm}$$

$$M_{3,4} = 3780 \left[2.0,00022 + 0 - 3 \left(\frac{-0,0000002}{6} \right) \right] = 1,664 \text{ tm}$$

$$M_{4,3} = 3780 (2.0 + 0,00022 - 3 \left(\frac{-0,0000002}{6} \right)) = 0,83 \text{ tm}$$

$$M_{5,3} = 6720 (2(-0,00022) + 0,00022) + 26,667 = 25,189 \text{ tm}$$

$$M_{6,5} = 3780 (2.0 + (-0,00022) + (-3) \frac{-0,0000002}{6}) = -0,83 \text{ tm}$$

$$M_{5,6} = 3780 (2(-0,00022) + 0 - 3 \frac{-0,0000002}{6}) = -1,663 \text{ tm}$$

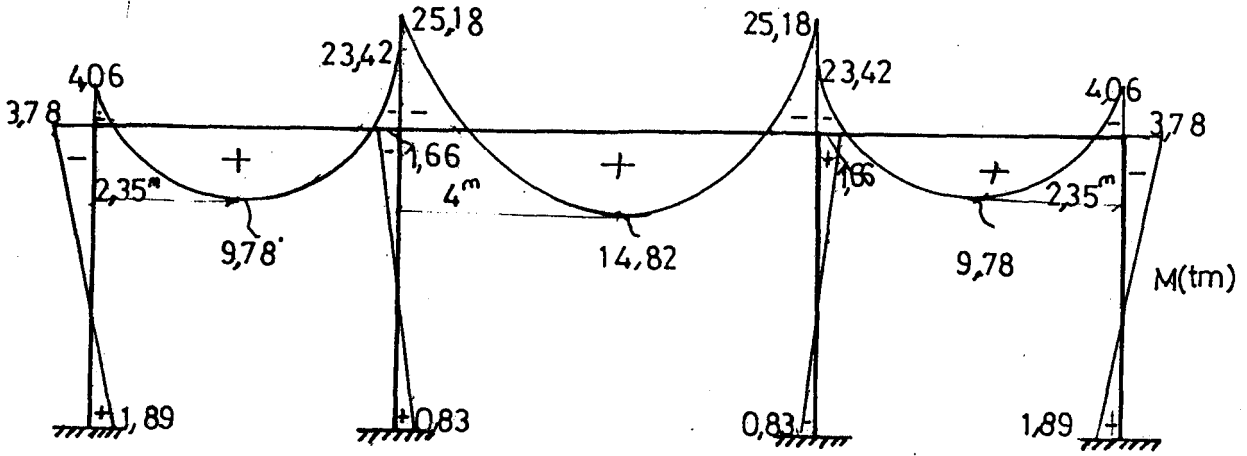
$$M_{5,7} = 8960 (2(-0,00022) - 0,0005) - 15 = -23,42 \text{ tm}$$

$$M_{7,5} = 8960 (2(-0,0005) - 0,00022) + 15 = 4,069 \text{ tm}$$

$$M_{7,8} = 3780 (2(-0,0005) + 0 + 3 \frac{-0,0000002}{6}) = -3,78 \text{ tm}$$

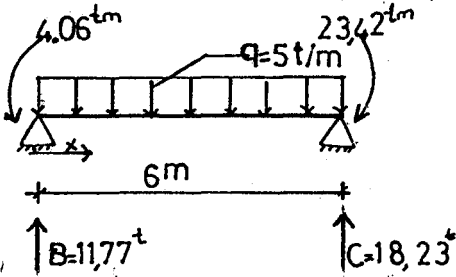
$$M_{8,7} = 3780 (2.0 - 0,0005 - 3 \frac{-0,0000002}{6}) = -1,89 \text{ tm}$$

2.1.6. Açı yöntemi ile çözüm



Şekil 2.3. Moment diyagramı

2.1.7. Açıklık momentlerinin hesabı



$$5 \times 6 \times 3 + 23,42 - 4,06 = 6C$$

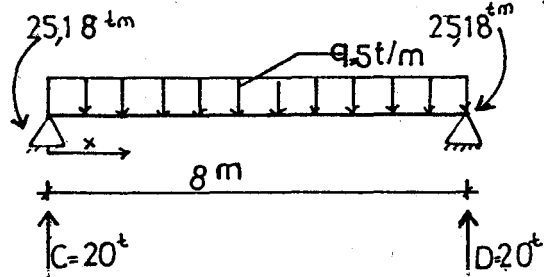
$$C = 18,23 \text{ ton}$$

$$5 \times 6 \times 3 - 23,42 + 4,06 = 6B$$

$$B = 11,77 \text{ ton}$$

$$x = \frac{QI}{q} = \frac{11,77}{5} = 2,35 \text{ m}$$

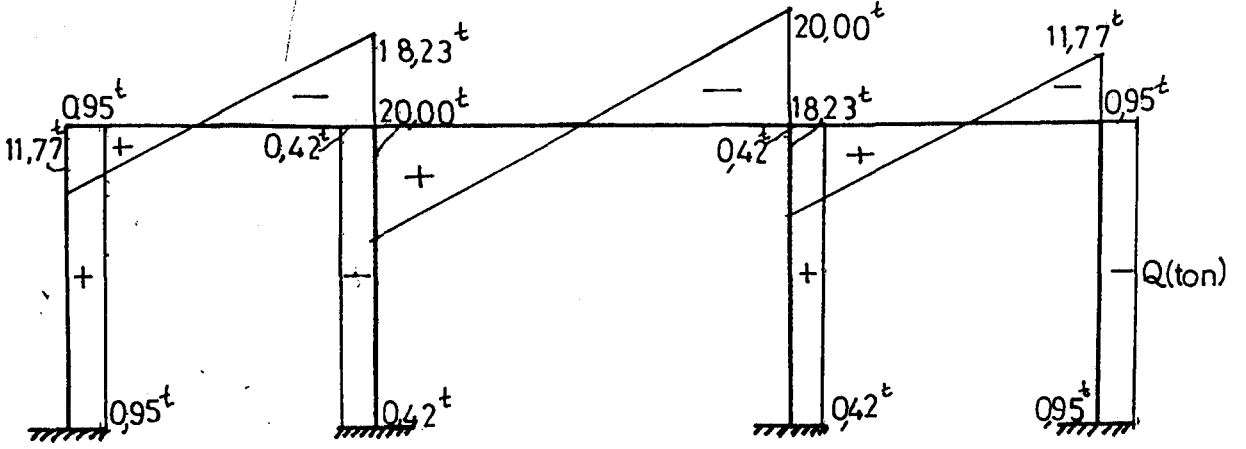
$$\text{Max } \bar{M} = -4,06 + \frac{(11,77)^2}{2 \times 5} = 9,79 \text{ tm}$$



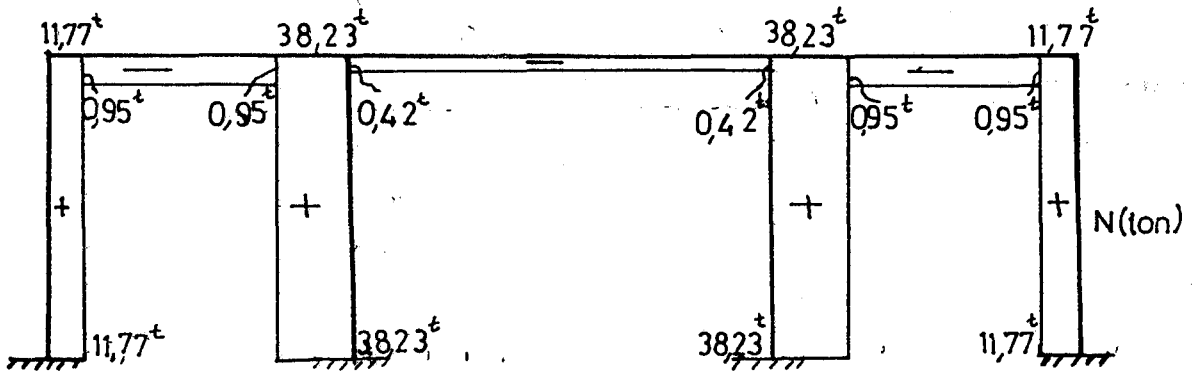
$$5 \times 8 \times 4 - D \times 8 + 25,18 - 25,18 = 0$$

$$x = \frac{20}{5} = 4 \text{ m}$$

$$\text{Max } M = -25,18 + \frac{20^2}{2 \times 5} = 14,82 \text{ tm}$$

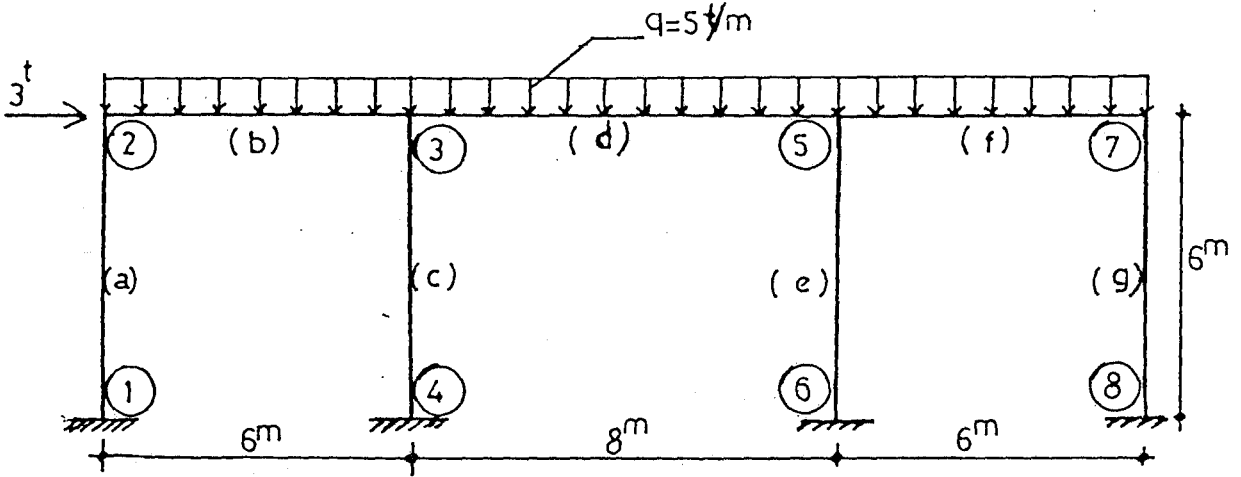


Şekil 2.4. Kesme kuvveti diyagramı



Şekil 2.5. Normal kuvvet diyagramı

2.2. Yatay ve Düşey Yüklere Maruz Verilen Sistemin Açık Yöntemi İle Çözümü



Şekil 2.6. Yatay ve düşey yüklere maruz verilen sistem

Çubuk No	$J(m^4)$	$F(m^2)$
a, c, e, g	0,0054	0,18
b, d, f	0,0128	0,24

$$E=2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

2.2.1. Açı yöntemi ile çözüm

$$k_{1,2}=k_{3,4}=k_{5,6}=k_{7,8}=\frac{2EJ}{\ell}=\frac{2 \times 2,1 \cdot 10^6 \times 0,0054}{6}=3780$$

$$k_{2,3}=k_{5,7}=\frac{2EJ}{\ell}+\frac{2 \times 2,1 \cdot 10^6 \times 0,0128}{6}=8960$$

$$k_{3,5}=\frac{2EJ}{\ell}=\frac{2 \times 2,1 \cdot 10^6 \times 0,0128}{8}=6720$$

2.2.2. Ankastrelik Momentleri

$$|M_{2,3}|=|M_{3,2}|=|M_{5,7}|=|M_{7,5}|=\frac{q \ell^2}{12}=\frac{5 \times 6^2}{12}=15 \text{ tm}$$

$$|M_{3,5}|=|M_{5,3}|=\frac{q \ell^2}{12}=\frac{5 \times 8^2}{12}=26,67 \text{ tm}$$

2.2.3. Moment denge denklemi

(2) Düğüm Noktası

$$2(3780+8960)\varphi_2+8960\varphi_3-3 \cdot \frac{3780}{6} \delta -15=0$$

(3) Düğüm Noktası

$$2(8960+6720+3780)\varphi_3+8960\varphi_2+6720\varphi_5-3 \cdot \frac{3780}{6} \delta +15-26,67=0$$

(5) Düğüm Noktası

$$2(6720+8960+3780)\varphi_5+6720\varphi_3+8960\varphi_7-3 \cdot \frac{3780}{6} \delta +26,67-15=0$$

(7) Düğüm Noktası

$$2(8960+3780)\varphi_7+8960\varphi_5-3 \cdot \frac{3780}{6} \delta +15=0$$

2.2.4. Yatay Denge Denklemi

$$-3 \cdot \frac{3780}{6} \varphi_2-3 \cdot \frac{3780}{6} \varphi_3-3 \cdot \frac{3780}{6} \varphi_5-3 \cdot \frac{3780}{6} \varphi_7+(6 \cdot \frac{3780}{6^2} \delta) \cdot 4=3$$

2.2.5. Linear denklem sistemi

φ_2	φ_3	φ_5	φ_7	δ		
25480	8960	0	0	-1890	φ_2	15
8960	38920	6720	0	-1890	φ_3	11,667
0	6720	38920	8960	-1890	$\times \varphi_5 =$	-11,667
0	0	8960	25480	-1890	φ_7	-15
-1890	-1890	-1890	-1890	2520	δ	-3

Linear denklem, takımı bilgisayarda çözümlenerek bilinmeyenlerin değerleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\delta = -0,00138$$

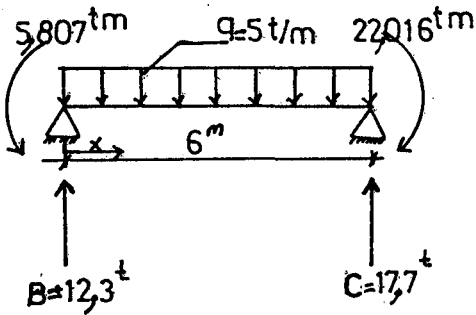
$$\varphi_7 = -0,00060$$

$$\varphi_5 = -0,00026$$

$$\varphi_3 = 0,00018$$

$$\varphi_2 = 0,000423$$

2.2.6. Açıklık Momentlerinin Hesabı



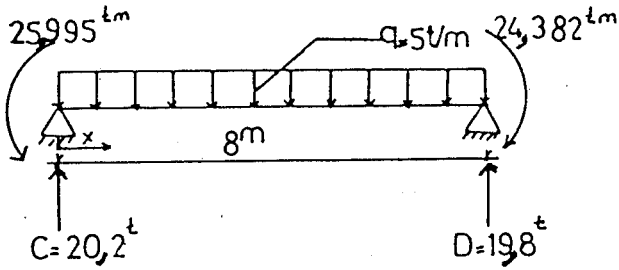
$$5 \times 6 \times 3 + 22,016 - 5,807 - 6c = 0$$

$$C = 17,7 \text{ ton}$$

$$B = 12,3 \text{ ton}$$

$$x = \frac{12,3}{5} = 2,46 \text{ m}$$

$$\text{Max } M = -5,807 + \frac{12,3^2}{2 \cdot 5} = 9,322 \text{ tm.}$$



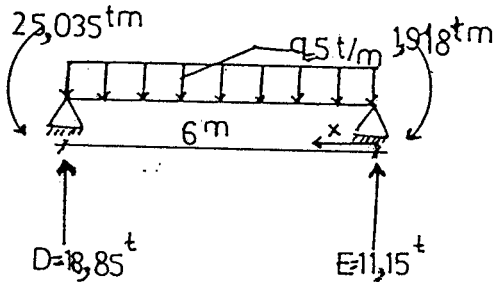
$$5 \times 8 \times 4 + 24,382 - 25,995 - D \cdot 8 = 0$$

$$D = 19,8 \text{ ton}$$

$$C = 20,2 \text{ ton}$$

$$x = \frac{20,2}{5} = 4,04 \text{ m}$$

$$M_{\max} = -25,995 + \frac{20,2^2}{2 \cdot 5} = 14,809 \text{ tm}$$



$$5 \times 6 \times 3 + 25,035 - 1,918 - D \cdot 6 = 0$$

$$D = 18,85 \text{ ton}$$

$$E = 11,15 \text{ ton}$$

$$x = \frac{11,15}{5} = 2,23 \text{ m}$$

$$\text{Max } M = -1,918 + \frac{11,115^2}{2 \times 5} = 10,51 \text{ ton}$$

2.2.7. Düğüm Noktasındaki Momentler

$$M_{1,2} = 3780(2,0 + 0,000423 - \frac{3(-0,00138)}{6}) = 4,207 \text{ tm}$$

$$M_{2,1} = 3780(2(+0,000423) + 0 - \frac{3(-0,00138)}{6}) = 5,806 \text{ tm}$$

$$M_{2,3} = 8960(2,0,000423 + 0,00018) - 15 = -5,807 \text{ tm}$$

$$M_{3,2} = 8960(2 \cdot (0,00018) + 0,000423) + 15 = 22,0157 \text{ tm}$$

$$M_{3,5} = 6720(2,0,00018) + (-0,00026) - 26,667 = -25,995 \text{ tm}$$

$$M_{3,4} = 3780(2,0,00018) + 0 - \frac{3(-0,00138)}{6} = 3,969 \text{ tm}$$

$$M_{4,3} = 3780(2.0 + 0,00018 - 3 \cdot \frac{(-0,00138)}{6}) = 3,289 \text{ tm}$$

$$M_{5,3} = 6720(2(-0,00026) + 0,00018) + 26,667 = 24,382 \text{ tm}$$

$$M_{5,6} = 3780(2 \cdot (-0,00026) + 0 - 3 \cdot \frac{(-0,00138)}{6}) = 0,6426 \text{ tm}$$

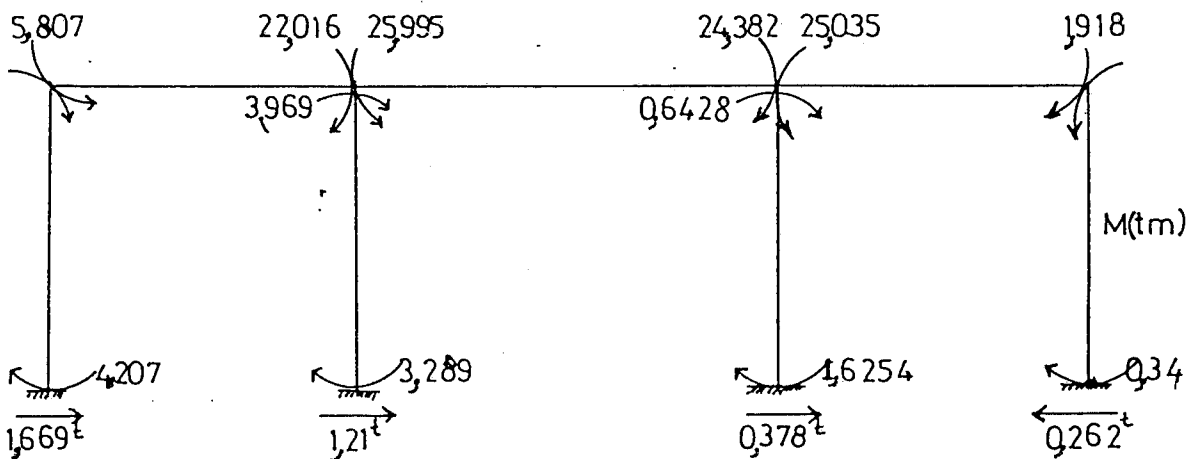
$$M_{6,5} = 3780(2.0 - 0,00026 - 3 \cdot \frac{(-0,00138)}{6}) = 1,6254 \text{ tm}$$

$$M_{5,7} = 8960(2 \cdot (-0,00026) - 0,00060) \cdot 15 = -25,035 \text{ tm}$$

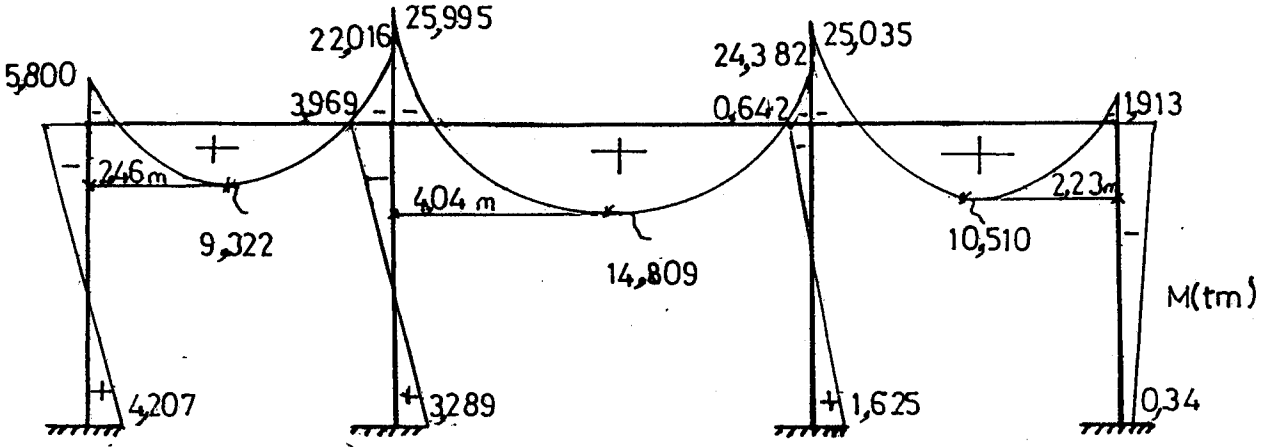
$$M_{7,5} = 8960(2 \cdot (-0,0006) - 0,00026) + 15 = 1,918 \text{ tm}$$

$$M_{7,8} = 3780(2 \cdot (-0,0006) + 0 - 3 \cdot \frac{-0,00138}{6}) = -1,928 \text{ tm}$$

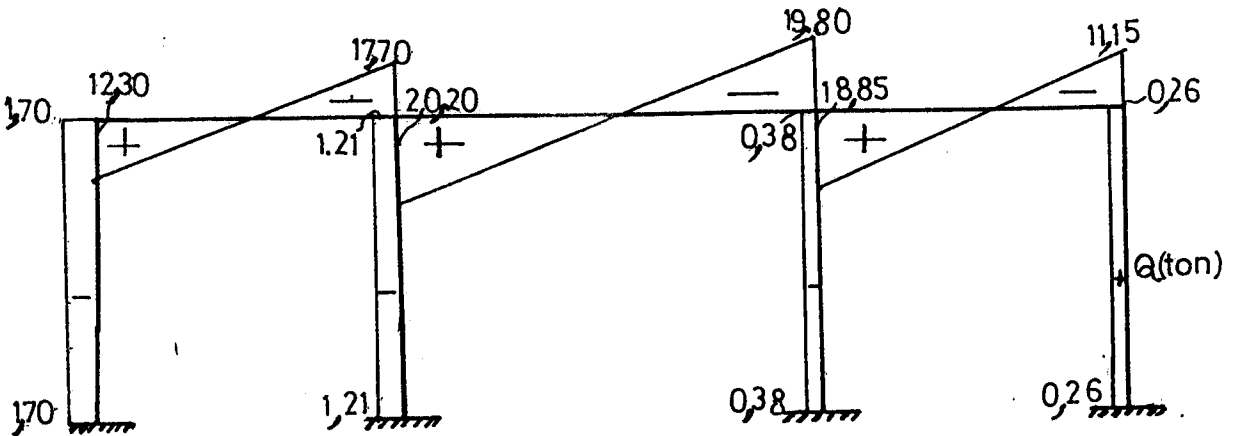
$$M_{8,7} = 3780(2.0 - 0,0006 - 3 \cdot \frac{0,00138}{6}) = 0,34 \text{ tm}$$



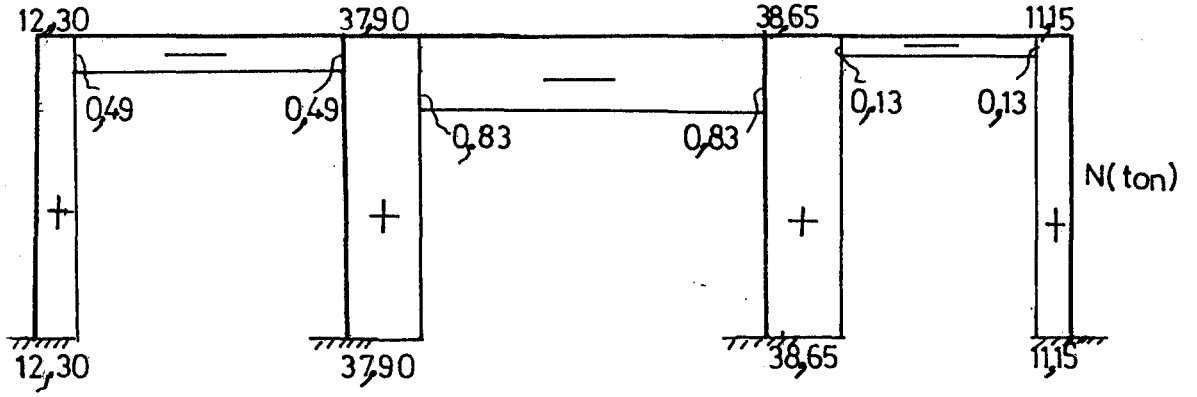
Şekil 2.7. Düğüm noktasındaki momentler



Şekil 2.8. Moment diyagramı



Şekil 2.9. Kesme kuvveti diyagramı



Şekil 2.10. Normal kuvvet diyagramı

3. ÇUBUK SİSTEMLERİN MATRİS YÖNTEMLERİ İLE HESABI

Günümüzde bilgisayar her alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Yapı statığı sistemlerinin bilgisayarla dikkatli hesaplanması sonucunda; kolay ve hesap hatalarından arınmış sonuçlar elde edilebilir.

Bu yöntem Sonlu Elemanlar Yöntemi olarak da bilinir.

Taşıyıcı sistemin sonlu sayıdaki elemanının düğüm noktası olarak adlandırılan noktalarda birbiriyle bağlantılı olduğu kabulüne dayanır.

Özellikleri bilinen bu elemanlara ait uygunluk ve denge şartlarından yararlanarak düğüm noktalarındaki deplasmanlar ve kuvvetler hesaplanabilir.

Hesabın hassasiyeti seçilen elemanın tipine ve büyüklüğüne bağlı olarak değişir. Ancak yöntem çubuk sistemlerde kesin sonuç verir. Çünkü çubuk sistemlerde hiperstatiklik derecesinde bir indirgeme yapılması söz konusu değildir.

Örneğin, bir levha sistemde hiperstatiklik derecesi süreklilikten dolayı sonsuz olmasına rağmen bu sistemin düğüm noktalarında idealize edilmesiyle hiperstatiklik derecesi belli sayıya indirgenmiş olur. Bu nedenle çubuk sistemler dışında sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık sonuç verir. Ancak bu yaklaşıklığın mühendislikte kabul edilebilir hat. sınırları içinde kalır.

K = Sistem rijitlik matrisi singülerdir. Yani tersi alınamaz, determinantı sıfırdır; dolayısıyla bilinmeyenler bu denklemden elde edilemez.

Ancak sistemde belli sınır şartları (mesnet şartları) belirlenirse çözülebilir.

U = deplasman (Şekil değiştirme)

F = U ç kuvvetleri

$$F = k \cdot u$$

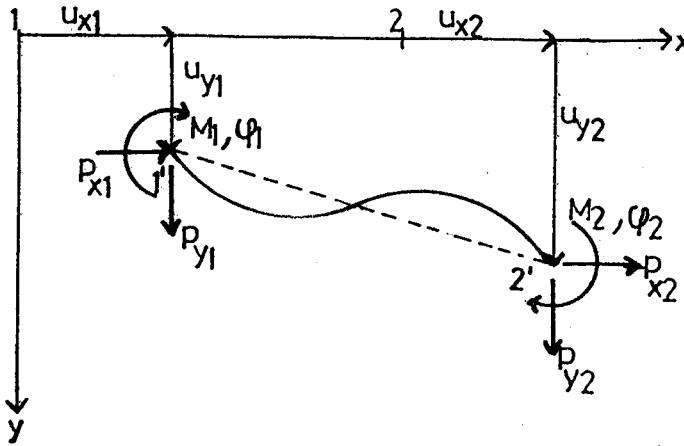
(3.1)

Matris yönteminin uygulanmasında izlenen yol şu şekildedir.

1. Eleman rijitlik matrislerinin hesabı
2. Sistem rijitlik matrislerinin hesabı
3. Sınır şartlarının sisteme katılması
4. Deplasmanların elde edilmesi
5. Eleman rijitlik matrislerinden eleman uç kuvvetlerinin hesabı
6. Mesnet tepkilerinin hesabı

3.1. Çerçeve Çubuklarına Matris Yönteminin Uygulanması

3.1.1. Çerçeve çubuklarının eleman rijitleri hesabı



Şekil 3.1. Deplasmanlar ve uç kuvvetleri

Şekilde; başlangıçta 1-2 çubuğu x eksenine bitişik durumdadır. Çubuk şekil değiştirerek 1'2' konumuna gelmiş olsun.

Dönüş açılarının pozitif (+) yönlerinin saat dönüşünde çıkması için y ekseninin pozitif (+) yönü aşağıya doğru seçilmiştir. Deplasmanlar ve uç kuvvetleri pozitif yönleri ile şekilde gösterilmiştir.

Çubuğa ait uç kuvvetleri ve uç deplasmanları her bir uçta üçer olmak üzere 6 adettir. F_1, F_2 ve u_1, u_2 . 1 ve 2 uçlarına ait uç kuvvet ve deplasmanlarını gösterdiğine göre;

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ M_1 \\ p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ M_2 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \varphi_1 \\ u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Uç kuvvetleri ile uç deplasmanları arasındaki K rijitlik matrisi uç kuvvetleri ile deplasmanlar arasındaki bağıntılardan yararlanılarak yazılır.

$$P_{x_1} = -P_{x_2} = \frac{EF}{l} (u_{x_1} - u_{x_2})$$

(Şekil değiştirmelerin küçük olduğu kabulü ile yatay denge şartı ve iç ve dış kuvvetlerin eşitliği şartlarından yararlanılarak yazıldı).

$$\mu_1 = \frac{6EJ}{l^2} u_{y_1} + \frac{4EJ}{l} \varphi_1 - \frac{6EJ}{l} u_{y_2} + \frac{2EJ}{l} \varphi_2$$

$$M_1 = \frac{6EJ}{l^2} u_{y_1} + \frac{2EJ}{l} \varphi_1 - \frac{6EJ}{l^2} u_{y_2} + \frac{4EJ}{l} \varphi_2$$

Düşey denge denklemi yazılırsa

$$\mu_1 = \frac{6EJ}{l^2} u_{y_1} + \frac{4EJ}{l} \varphi_1 - \frac{6EJ}{l^2} u_{y_2} + \frac{2EJ}{l} \varphi_2$$

$$\mu_2 = \frac{6EJ}{l^2} u_{y_1} + \frac{2EJ}{l} \varphi_1 - \frac{6EJ}{l^2} u_{y_2} + \frac{4EJ}{l} \varphi_2$$

$$P_{y_1} = -P_{y_2} = \frac{1}{l} (\mu_1 + \mu_2) = \frac{12EJ}{l^3} u_{y_1} + \frac{6EJ}{l^2} \varphi_1 - \frac{12EJ}{l^3} u_{y_2} + \frac{6EJ}{l^2} \varphi_2$$

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} P_{x_2} \\ P_{y_2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Çubuğun simetrik deformasyon yapması durumu simetrik şartından dolayı $\mu_1 = -\mu_2$, $P_{x_1} = -P_{x_2}$, $P_{y_1} = P_{y_2} = 0$, $\varphi_1 = -\varphi_2$, $u_{x_1} = -u_{x_2}$ ve $u_{y_1} = u_{y_2}$ olur.

Şayet çubuğun bir ucu mafsallı ise yukarıda uygulanan yolla uç kuvvetleri elde edilebilir.

Örneğin, çubuğun 1 No'lu ucu mafsallı 2 Nolu ucu eğilme mukavemetli olsun.

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} P_{x_2} \\ P_{y_2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Bağıntılar

$$\begin{aligned} \bar{F}_{11} &= \bar{K}_{11} \cdot \bar{u}_1 + \bar{K}_{12} \cdot \bar{u}_2 \\ \bar{F}_2 &= \bar{K}_{21} \cdot \bar{u}_1 + \bar{K}_{22} \cdot \bar{u}_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

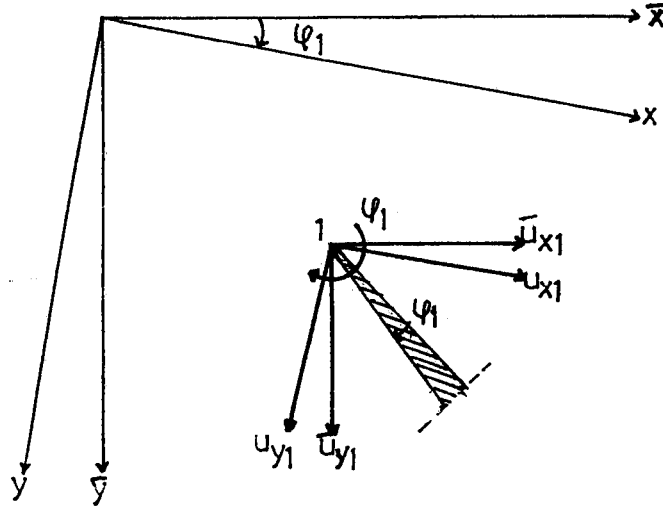
\bar{K}_{11} ve \bar{K}_{22} alt matrisleri simetriktir.

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21}^T$$

\bar{K}_{ij} matrislerinin meydana getirdiği \bar{K} matrisi şingülerdir.

3.2. Çerçeve Çubukları Transformasyon Matrisi

1 ucuna ait deplasmanlar \bar{x}, \bar{y} sistem eksen takımı ve x, y eleman eksen takımına göre pozitif yönleri şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.2. \bar{x}, \bar{y} sistem eksen takımı ve x, y eleman eksen takımına göre pozitif yönleri

Deplasmanlar arasında aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\bar{U}_{x1} = U_{x1} \cos \phi_1 - U_{y1} \sin \phi_1 \quad (3.8)$$

$$\bar{U}_{y1} = U_{x1} \sin \phi_1 + U_{y1} \cos \phi_1$$

$$\phi_1 = \phi_1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{x1} \\ \bar{U}_{y1} \\ \bar{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ \varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{U} = T \cdot u \quad \text{olur.} \quad (3.9)$$

T matrisine transformasyon matrisi denir.

$$T^t = T^{-1} \quad (3.9)$$

$$\bar{U} \cdot T^{-1} = T \cdot T^{-1} \cdot u \quad (3.10)$$

$$U = T^t \cdot \bar{u} \quad (3.11)$$

$$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{u} \quad (3.12)$$

$$\bar{K}_{ij} = T^t \cdot K_{ij} \cdot T \quad (3.13)$$

*Çubuklara ait \bar{K} matrislerinin elde edilmesi.

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} EF/\ell & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \frac{EF}{\ell} & \frac{12EJ}{\ell^3} \sin \varphi & \frac{6EJ}{\ell^2} \sin \varphi \\ -\sin \varphi \frac{EF}{\ell} & \frac{12EJ}{\ell^3} \cos \varphi & \frac{6EJ}{\ell^2} \cos \varphi \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left[\cos^2 \varphi \frac{EF}{\ell} + \frac{12EJ}{\ell^3} \sin^2 \varphi \right] \left[\sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{EF}{\ell} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{12EJ}{\ell^3} \right] - \frac{6EJ}{\ell^2} \sin \varphi \\ \left[\sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{EF}{\ell} - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{12EJ}{\ell^3} \right] \left[\sin^2 \varphi \frac{EF}{\ell} + \cos^2 \varphi \frac{12EJ}{\ell^3} \right] - \frac{6EJ}{\ell^2} \cos \varphi \\ - \frac{6EJ}{\ell^2} \sin \varphi & \frac{6EJ}{\ell^2} \cos \varphi & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$\cos \varphi = c$$

$$\sin \varphi = s$$

Çubuklara ait \bar{K} matrisi

$$\bar{K}_{11} = \begin{bmatrix} C^2EF/\ell + S^212EJ/\ell^3 & SC(EF/\ell - 12EJ/\ell^3) & -S 6EJ/\ell^2 \\ SC(EF/\ell - 12EJ/\ell^3) & S^2EF/\ell + C^212EJ/\ell^3 & C6EJ/\ell^2 \\ -S 6EJ/\ell^2 & C 6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{12} = \begin{bmatrix} -C^2EF/\ell - S^212EJ/\ell^3 & SC(-EF/\ell + 12EJ/\ell^3) & -S 6EJ/\ell^2 \\ SC(-EF/\ell + 12EJ/\ell^3) & -S^2EF/\ell - C^212EJ/\ell^3 & C6EJ/\ell^2 \\ S 6EJ/\ell^2 & -C 6EJ/\ell^2 & 2EJ/\ell \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{22} = \begin{bmatrix} C^2EF/\ell + S^212EJ/\ell^3 & C(EF/\ell - 12EJ/\ell^3) & S 6EJ/\ell^2 \\ SC(EF/\ell - 12EJ/\ell^3) & S^2EF/\ell + C^212EJ/\ell^3 & -C 6EJ/\ell^2 \\ S 6EJ/\ell^2 & -C 6EJ/\ell^2 & 4EJ/\ell \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{21} = \bar{K}_{12}^t$$

3.3. Rijitlik Matrisi Uygulanması

3.3.1. Sınır şartlarının sistem rijitlik matrisine işlenmesi

Mesnetlerden dolayı sıfır olan deplasmanlar alt matrislere ayırma veya sıfır olan deplasmanın bulunduğu satır ve sütunun kaldırılmasıyla çözülebilir. Ancak bilgisayar uygulamasında bu yol pratik değildir. Çünkü alt matrislere ayırma veya sıfır olan satır ve sütunların atılması halinde ilave bir işlem gerekmesinin yanında, bilgisayardan alınan denklem çözümündeki bilinmeyen numaraları da farklı olacaktır. Bunların düzeltilmesi de ayrı bir işlem gerektirir. Bunun yerine;

Örneğin; K matrisinde 3 üncü bilinmeyen sıfır olsun. Bu bilinmeyene ait diyagonal terimi büyük bir sayı ile çarpılır. Sabit terim ise sıfır yapılır.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \times 10^{20} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Bu durumda denklemin üçüncü satırını diyagonal elemanına bölünürse,

$$\frac{k_{31}}{k_{33}} \times 10^{-20} u_1 + \frac{k_{32}}{k_{33}} \times 10^{-20} u_2 + \frac{k_{33} \times 10^{20}}{k_{33} \times 10^{20}} u_3 + \dots + \frac{k_{3n}}{k_{33}} 10^{-20} u_n = 0$$

Görüldüğü gibi u_3 hariç diğer terimler sıfır olur. Bu durumda $u_3 = 0$ olur.

Şayet sistemde mesnet çökmeleri de varsa bunu da denkleme uygun şekilde işleyip çözüm sonucunda bu bilinmeyenlerin başlangıçta belirlenen değerler çıkması sağlanır.

Örneğin; K matrisinde üçüncü bilinmeyen \bar{u}_3 değerinde olsun bu durumda katsayılar matrisinde yapılacak işlem aynı olup sabitlerde F_3 yerine diyagonal teriminin \bar{u}_3 ile çarpılmış değeri yerleştirilir.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ k_{33}10^{20}\bar{u}_3 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \times 10^{20} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\frac{k_{31}}{k_{33}} 10^{-20} u_1 + \frac{k_{32}}{k_{33}} \times 10^{-20} \cdot u_2 + u_3 + \dots + \frac{k_{3n}}{k_{33}} \times 10^{-20} u_n = \bar{u}_3$$

Burada; sonuçta $u_3 = \bar{u}_3$

3.3.2. Çubuk açıklıklarına kuvvet etki etmesi :

Şimdiye kadar yazılan denklemler; çubuk açıklıklarına herhangi bir kuvvet etki etmediğini ya da; dış kuvvetlerin sadece düğüm noktalarına etki ettiği varsayılarak yapılmıştır.

Eğer sistemdeki çubukların açıklıklarına da kuvvetler etki ettiğinde, denklemlere ankastrelik terimler girer.

$$F_1 = K_{11} \cdot u_1 + K_{12} \cdot u_2 + P_{01}$$

$$F_2 = K_{21} \cdot u_1 + K_{22} \cdot u_2 + P_{02}$$

Burada p_0 matrisleri sistemdeki ankastre uç kuvvetlerini eleman koordinatlarında gösterir.

$$P_{01} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{Q}_1 \\ \bar{M}_1 \end{bmatrix} \quad P_{02} = \begin{bmatrix} \bar{N}_2 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

\bar{P}_{0_1} ve \bar{P}_{0_2} matrislerinin sistem eksen takımına transforme edilip, denge denklemlerine katılır.

$$\begin{aligned} \bar{P}_{0_1} &= T \cdot P_{0_1} \\ \bar{P}_{0_2} &= T \cdot P_{0_2} \end{aligned} \quad \text{işlemi yapılır.} \quad (3.16)$$

Burada $T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisidir.

$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{u}$ olan denge denklemi

$$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{u} + \bar{P}_0 \quad \text{haline gelir} \quad (3.17)$$

\bar{F} = Düğüm noktalarına etki eden dış kuvvet matrisi

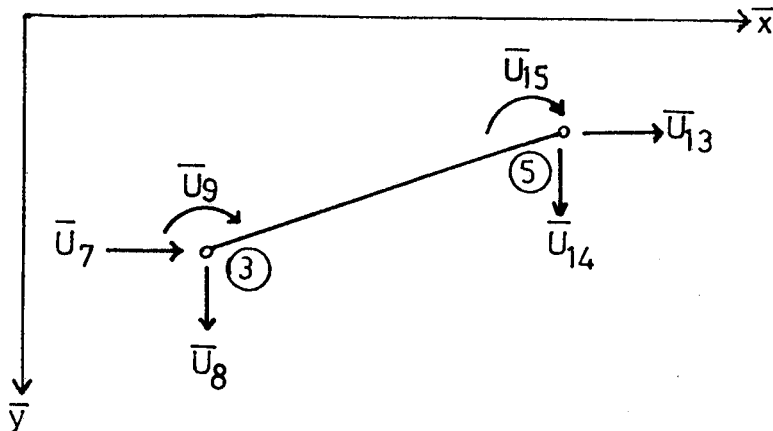
\bar{K} = Sistem rijitlik matrisidir.

\bar{u} = Düğüm noktaları deplasman matrisi

\bar{P}_0 = Ankastre uç kuvvetleri toplam matrisidir.

3.3.3. Sistem Rijitlik Matrisinin Kurulması

3 No'lu düğüm noktasına ait deplasman No'ları $\bar{U}_7, \bar{U}_8,$
 \bar{U}_9 ve 5 No'lu düğüm noktasına ait deplasman No'ları $\bar{U}_{13},$
 $\bar{U}_{14}, \bar{U}_{15}$ dir.



Şekil 3.3. Düğüm noktalarına ait deplasman numaraları

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_7 \\ \bar{F}_8 \\ \bar{F}_9 \\ \bar{F}_{1,3} \\ \bar{F}_{1,4} \\ \bar{F}_{1,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & \bar{U}_7 \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & \bar{U}_8 \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & \bar{U}_9 \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & \bar{U}_{1,3} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & \bar{U}_{1,4} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & \bar{U}_{1,5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{Q}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}$$

Denklemdaki elemanlar sistem rijitlik matrisine şu şekilde yerleştirilir.

- \bar{U} değerleri bir defada yatay olarak eleman rijitlik matrisinin üstüne yazılır.
- \bar{U} 'lerden çizilen yatay ve düşeylerin kesiştiği noktadaki eleman sistem rijitlik matrisinde \bar{U} 'lerin indislerine ait olan elemana yerleştirilir.

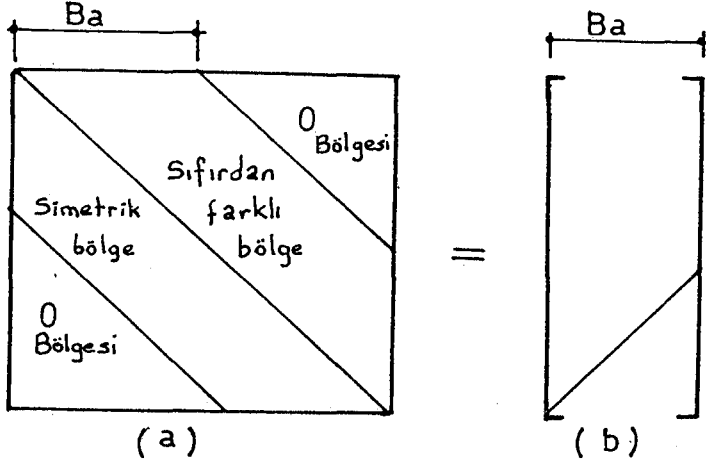
Örneğin $\bar{U}_{1,4}$ den geçen yatay ile \bar{U}_9 dan geçen düşeyin kesim noktasındaki $K_{5,3}$ elemanı sistem rijitlik matrisinin $\bar{K}_{14,9}$ nolu elemanına yerleştirilir.

Bu işlemler bilgisayarda otomatik olarak yapılır. Ankastre uç kuvvetleri ise benzer şekilde ilgili satıra yerleştirilir.

3.4. Düğüm Noktalarının Numaralandırılması ve Band Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

Çubuk uçlarının bağlı bulunduğu düğüm noktaları arasındaki fark ne kadar az olursa sistem rijitlik matrisinde yayılma da o kadar az olacaktır. Yayılmanın az olması sistem rijitlik matrisinin sadece diyagonal etrafında sıfırdan farklı bir bölgesinin diğer kısımlarında ise sıfır

bölgesinin oluşmasını sağlar.



Ayrıca sistem rijitlik matrisi de simetriktir. Yarım bant matris olarak tarif edilen matrisle sistem rijitlik matrisinin bütün elemanları ifade edilebilir.

Bu nedenle bilgisayar hafızasından tasarruf etmiş oluruz.

Ba= Yarım Bant Genişliğinin Hesabı

Birbirine bağlı düğüm noktaları arasındaki en büyük farkın bir fazlasının ve çerçeve sistemlerde 3 katına eşittir.

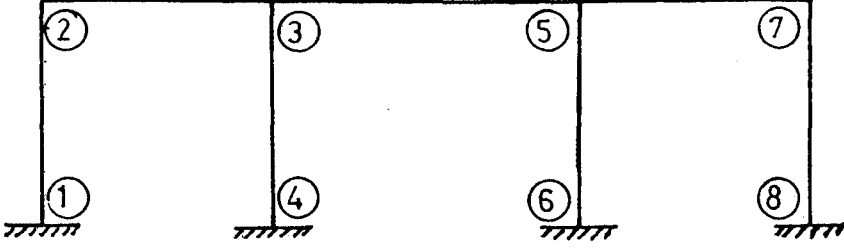
$$Ba = \lambda (\Delta + 1) \quad (3.18)$$

λ = Çerçeve sistemler için 3

Δ = Birbirine bağlı düğüm noktalarının numaraları arasındaki en büyük farkı gösterir.

Bu durumda;

Ba'nın küçük olması için Δ 'nın küçük olması gerekir.



Şekil 3.4. Örnek çerçeve

Çerçeve çözümünde:

3-5 ve 5-7 çubukları arasındaki fark 2 dir.

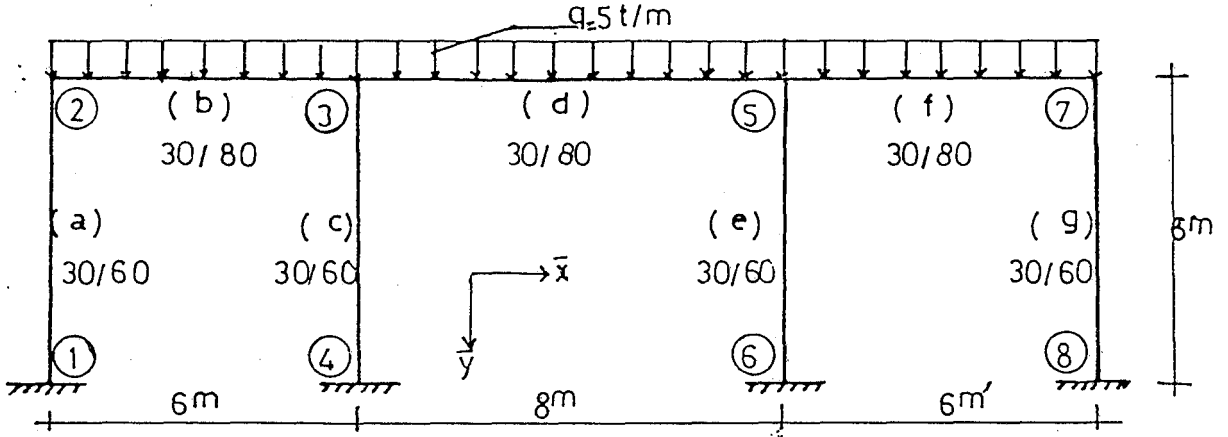
$$\Delta = 2$$

$$\lambda = 3 \text{ (Çerçeve)}$$

$$Ba = 3(2+1) = 9$$

3.5. Matris Deplasman Yöntemi İle Çözüm

3.5.1. Sistem düşey yüklere maruz



Şekil 3.5. Sistem düşey yüklere maruz

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$

Çubuk No	$J(\text{m}^4)$	$F(\text{m}^2)$
a, c, e, g	0,0054	0,18
b, d, f	0,0128	0,24

3.5.1.1. Ankastrelik momentleri

$$|\bar{M}_{23}| = |\bar{M}_{32}| = |\bar{M}_{18}| = |\bar{M}_{81}| = \frac{q\ell^2}{12} = \frac{5 \times 6^2}{12} = 15 \text{ tm}$$

$$|\bar{M}_{34}| = |\bar{M}_{43}| = \frac{5 \times 8^2}{12} = 26,667 \text{ tm}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a=0 & \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \\ -15 \\ +15 \end{bmatrix} & (c)=0 & \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -26,667 \\ 0 \\ -20 \\ 26,667 \end{bmatrix} & (e)=0 & \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \\ -15 \\ 15 \end{bmatrix} \\
 b= & & d= & & f= & g=0
 \end{array}$$

DIŞ YÜKLER (N,Q,M)

3.5.1.2. Çubuklara ait "K" matrisleri

(a) çubuğu $\varphi = -90^\circ$ $\sin(-90) = -1$ $\cos(-90) = 0$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
(600)	0	(1800)	(-600)	0	(1800)	(1)
0	(60000)	0	0	(-60000)	0	(2)
1800	0	7200	(-1800)	0	(3600)	(3)
(-600)	0	(-1800)	(600)	0	(-1800)	(4)
0	(-60000)	0	0	(60000)	0	(5)
(1800)	0	(3600)	(-1800)	0	(7200)	(6)

(b) çubuğu $\varphi = 0$ $\cos 0 = 1$ $\sin 0 = 0$

(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
(80000)	0	0	(-80000)	0	0	(4)
0	(1422,22)	(4266,67)	0	(-1422,22)	(4266,67)	(5)
0	(4266,67)	(17066,67)	0	(-4266,67)	(8533,33)	(6)
(-80000)	0	0	(80000)	0	0	(7)
0	(-1422,22)	(-4266,67)	0	(1422,22)	(-4266,67)	(8)
0	(4266,67)	(8533,33)	0	(-4266,67)	(17066,67)	(9)

(ç çubuğu)		$\varphi = +90$	$\text{Sin}90=1$	$\text{Cos}90=0$		
(7)	(8)	$x = 6 \text{ m}$	$F=0,18 \text{ m}^2$	$J=0,0054 \text{ m}^4$	(12)	
(600)	0	(-1800)	(-600)	0	(-1800)	(7)
0	(60000)	0	0	(-60000)	0	(8)
(-1800)	0	7200	(1800)	0	(3600)	(9)
(-600)	0	(1800)	(600)	0	(1800)	(10)
0	(-60000)	0	0	(60000)	0	(11)
(-1800)	0	(3600)	(1800)	0	(7200)	(12)

(d) çubuğu		$\varphi = 0$	$\text{Cos}0=1$	$\text{Sin}0=0$	$J=0,0128 \text{ m}^4$	$F=0,24 \text{ m}^2$
(7)	(8)	(9)	(13)	(14)	(15)	(7)
(60000)	0	0	(-60000)	0	0	(7)
0	(600)	(2400)	0	(-600)	(2400)	(8)
0	(2400)	(12800)	0	(-2400)	(6400)	(9)
(-60000)	0	0	(60000)	0	0	(13)
0	(-600)	(-2400)	0	(600)	(-2400)	(14)
0	(2400)	(6400)	0	(-2400)	(+12800)	(15)

e çubuğu $\varphi = +90$

(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	
(600)	0	(-1800)	(-600)	0	(-1800)	(13)
0	(60000)	0	0	(-60000)	0	(14)
(-1800)	0	(7200)	(1800)	0	(3600)	(15)
(-600)	0	(1800)	(600)	0	(1800)	(16)
0	(-60000)	0	0	(60000)	0	(17)
(-1800)	0	(3600)	(1800)	0	(7200)	(18)

f çubuğu $\varphi = 0$

(13)	(14)	(15)	(19)	(20)	(21)	
(80000)	0	0	(-80000)	0	0	(13)
0	(1422,22)	(4266,67)	0	(-1422,22)	(4266,67)	(14)
0	(4266,67)	(17066,67)	0	(-4266,67)	(8533,37)	(15)
(-80000)	0	0	(80000)	0	0	(19)
0	(-1422,22)	(-4266,67)	0	(1422,22)	(-4266,67)	(20)
0	(4266,67)	(8533,33)	0	(-4266,67)	(17066,67)	(21)

g çubuğu $\varphi = +90$

(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	
(600)	0	(-1800)	(-600)	0	(-1800)	(19)
0	(60000)	0	0	(-60000)	0	(20)
(-1800)	0	(7200)	(1800)	0	(3600)	(21)
(-600)	0	(1800)	(600)	0	(1800)	(22)
0	(60000)	0	0	(60000)	0	(23)
(-1800)	0	(3600)	(1800)	0	(7200)	(24)

DENKLEM SAYISI= 24
BAND GENİŞLİĞİ= 9

BAND MATRİS ELAMANLARI

% 6E+22	0.000	1800.000	-600.000	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	-60000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	-1800.000	0.000	3600.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80600.000	0.000	-1800.000	-80000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
61422.220	4266.670	0.000	-1422.220	4266.670	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
24266.670	0.000	-4266.670	8533.330	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
140600.000	0.000	-1800.000	-600.000	0.000	-1800.000	-60000.000	0.000	0.000	0.000
62022.220	-1866.670	0.000	-60000.000	0.000	0.000	-600.000	2400.000	0.000	0.000
37066.670	1800.000	0.000	3600.000	0.000	-2400.000	6400.000	0.000	0.000	0.000
% 6E+22	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
140600.000	0.000	-1800.000	-600.000	0.000	-1800.000	-80000.000	0.000	0.000	0.000
62022.220	1866.670	0.000	-60000.000	0.000	0.000	-1422.220	4266.670	0.000	0.000
37066.670	1800.000	0.000	3600.000	0.000	-4266.670	8533.330	0.000	0.000	0.000
% 6E+22	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80600.000	0.000	-1800.000	-600.000	0.000	-1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000
61422.220	-4266.670	0.000	-60000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
24266.670	1800.000	0.000	3600.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6E+22	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

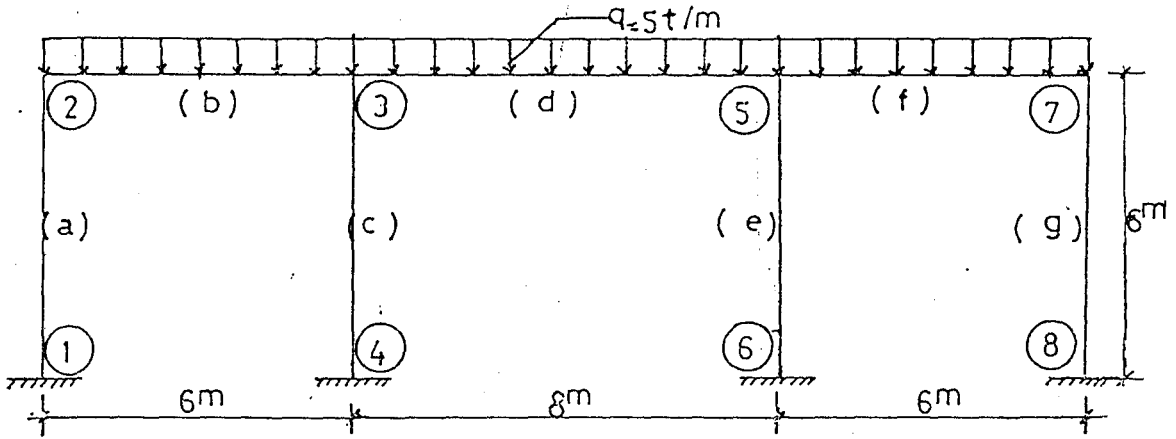
SABİT TERİMLER

0.000
0.000
0.000
0.000
15.000
15.000
0.000
35.000
11.667
0.000
0.000
0.000
0.000
35.000
-11.667
0.000
0.000
0.000
0.000
15.000
-15.000
0.000
0.000
0.000

DENKLEMİN KÖKLERİ

-0.00000
0.00000
-0.00000
0.00003
0.00020
0.00060
0.00001
0.00064
0.00027
-0.00000
0.00000
-0.00000
-0.00001
0.00064
-0.00027
0.00000
0.00000
0.00000
-0.00003
0.00020
-0.00060
0.00000
0.00000

3.5.1.3. İncelenecek yapı sistemi



Şekil 3.6. İncelenecek yapı sistemi

$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ alınmıştır.

Çubuk No	$J(\text{m}^4)$	$F(\text{m}^2)$
a, c, e, g	0,0054	0,18
b, d, f	0,0128	0,24

3.5.1.4. Ankastrelik momentleri

$$|\bar{M}_{23}| = |\bar{M}_{32}| = |\bar{M}_{78}| = |\bar{M}_{87}| = \frac{q \ell^2}{12} = \frac{5 \times 6^2}{12} = 15 \text{ tm}$$

$$|\bar{M}_{35}| = |\bar{M}_{53}| = \frac{q \ell^2}{12} = \frac{5 \times 8^2}{12} = 26,667 \text{ tm}$$

3.5.1.5. Denklem köklerinin kullanılması

a çubuğu $\varphi=-90$ $\sin-90=-1$ $\cos-90=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600 & 0 & 1800 & -600 & 0 & 1800 \\ 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ 1800 & 0 & 7200 & -1800 & 0 & 3600 \\ -600 & 0 & -1800 & 600 & 0 & -1800 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 1800 & 0 & -3600 & -1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 600 & 0 & 1800 & -600 & 0 & 1800 \\ 1800 & 0 & 7200 & -1800 & 0 & 3600 \\ 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -600 & 0 & -1800 & 600 & 0 & -1800 \\ 1800 & 0 & 3600 & -1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00003 \\ 0,00020 \\ 0,0006 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1,062 \\ 2,106 \\ -12 \\ -1,062 \\ 4,266 \end{bmatrix}$$

b çubuğu $\varphi=0$ $\cos 0=1$ $\sin 0=0$

$$\begin{bmatrix} 80000 & 0 & 0 & -80000 & 0 & 0 \\ 0 & 1422,22 & 4266,67 & 0 & -1422,22 & 4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 17066,67 & 0 & -4266,67 & 8533,33 \\ -80000 & 0 & 0 & 80000 & 0 & 0 \\ 0 & -1422,22 & -4266,67 & 0 & 1422,22 & -4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 8533,33 & 0 & -4266,67 & 17066,67 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,00003 \\ 0,0002 \\ 0,0006 \\ 0,00001 \\ 0,00064 \\ 0,00027 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \\ -15 \\ +15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ -11,91 \\ -4,3 \\ -1,6 \\ -18,086 \\ 22,85 \end{bmatrix}$$

c çubuğu $\sin 90=1$ $\cos 90=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -600 & 0 & 1800 & 600 & 0 & 1800 \\ -1800 & 0 & 7200 & 1800 & 0 & 3600 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 600 & 0 & -1800 & -600 & 0 & -1800 \\ -1800 & 0 & 3600 & 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,00001 \\ 0,00064 \\ 0,00027 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38,4 \\ 0,48 \\ 1,926 \\ -38,4 \\ -0,48 \\ 0,954 \end{bmatrix}$$

d çubuğu $\varphi=0$ $\cos 0=1$ $\sin=0$

$$\begin{bmatrix} 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 2400 & 0 & -600 & 2400 \\ 0 & 2400 & 12800 & 0 & -2400 & 6400 \\ -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -2400 & 0 & 600 & -2400 \\ 0 & 2400 & 6400 & 0 & -2400 & 12800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,00001 \\ 0,00064 \\ 0,00027 \\ -0,00001 \\ 0,00064 \\ -0,00027 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -26,67 \\ 0 \\ -20 \\ 26,67 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,2 \\ -20 \\ -24,939 \\ -1,2 \\ 20 \\ 24,939 \end{bmatrix}$$

d çubuğu $\varphi=0$ $\text{Cos}0=1$ $\text{Sin}0=0$

$$\begin{bmatrix} 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 2400 \\ 0 & 2400 & 12800 \\ -60000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -2400 \\ 0 & 2400 & 6400 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -60000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 2400 \\ 0 & -2400 & 6400 \\ 60000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & -2400 \\ 0 & -2400 & 12800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00001 & 0 \\ 0,00064 & -20 \\ 0,00027 & -26,67 \\ -0,00001 & 0 \\ 0,00064 & -20 \\ -0,00027 & 26,67 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,2 \\ -20 \\ -24,939 \\ -1,2 \\ 20 \\ 24,939 \end{bmatrix}$$

g çubuğu $\varphi=90$ $\text{Sin}90=1$ $\text{Cos}90=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 60000 & 0 \\ -600 & 0 & 1800 \\ -1800 & 0 & 7200 \\ 0 & -60000 & 0 \\ 600 & 0 & -1800 \\ -1800 & 0 & 3600 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -60000 & 0 \\ 600 & 0 & 1800 \\ 1800 & 0 & 3600 \\ 0 & 60000 & 0 \\ -600 & 0 & -1800 \\ 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,00003 & 12 \\ 0,00020 & -1,062 \\ -0,00006 & -4,266 \\ 0 & -12 \\ 0 & 1,062 \\ 0 & -2,106 \end{bmatrix}$$

e çubuğu $\varphi=90$ $\text{Sin}90=1$ $\text{Cos}90=0$

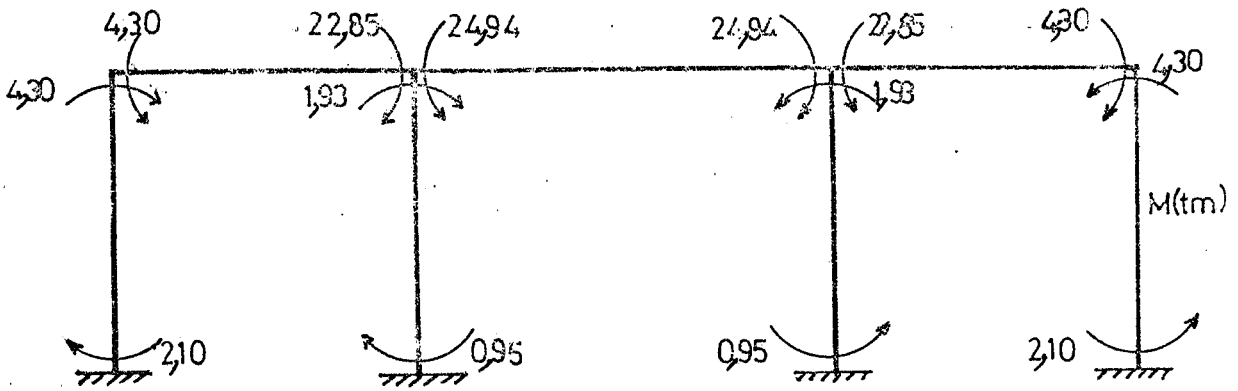
$$\begin{bmatrix} 0 & 60000 & 0 \\ -600 & 0 & 1800 \\ -1800 & 0 & 7200 \\ 0 & -60000 & 0 \\ 600 & 0 & -1800 \\ -1800 & 0 & 3600 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -60000 & 0 \\ 600 & 0 & 1800 \\ 1800 & 0 & 3600 \\ 0 & 60000 & 0 \\ -600 & 0 & -1800 \\ 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,00001 & 0 \\ 0,00064 & 0 \\ -0,00027 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 38,4 \\ 0 & -0,48 \\ 0 & -1,926 \\ 0 & -38,4 \\ 0 & 0,48 \\ 0 & -0,954 \end{bmatrix}$$

f çubuğu $\varphi=0$ $\sin 0=0$ $\cos 0=1$

80000	0	0	-80000	0	0	-0,00001
0	1422,22	4266,67	0	-1422,22	4266,67	-0,00064
0	4266,67	17066,67	0	-4266,67	8533,33	-0,00027
-80000	0	0	80000	0	0	-0,00003
0	-1422,22	-4266,67	0	1422,22	-4266,67	0,00020
0	4266,67	8533,33	0	-4266,67	17066,67	-0,00006

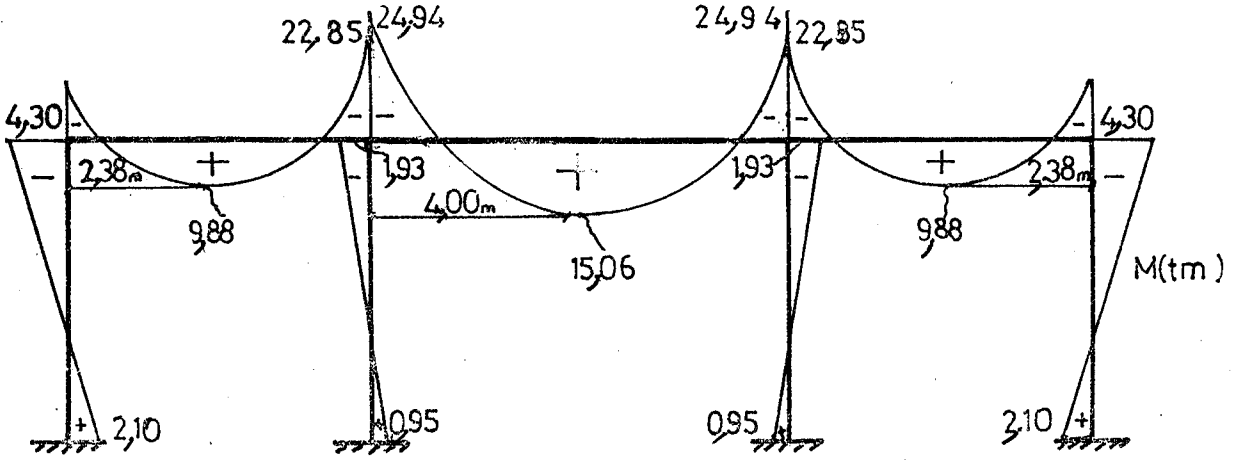
$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|} \hline -15 \\ \hline \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|} \hline -15 \\ \hline \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|} \hline -15 \\ \hline \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|} \hline +15 \\ \hline \end{array} \\
 = \\
 \begin{array}{|c|} \hline 1,6 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline -18,08 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline -22,85 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline -1,6 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline -18,08 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 4,3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

3.5.1.6. Düğüm noktasındaki momentler



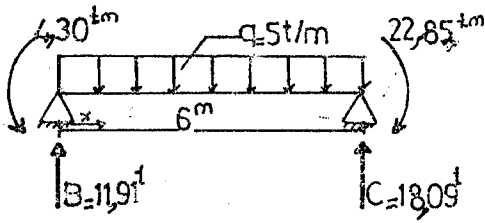
Şekil 3.7. Düğüm noktasındaki momentler

3.5.1.7. Matris deplasman yöntemi ile çözüm



Şekil 3.8. Moment diyagramı

3.5.1.8. Açıklık momentleri

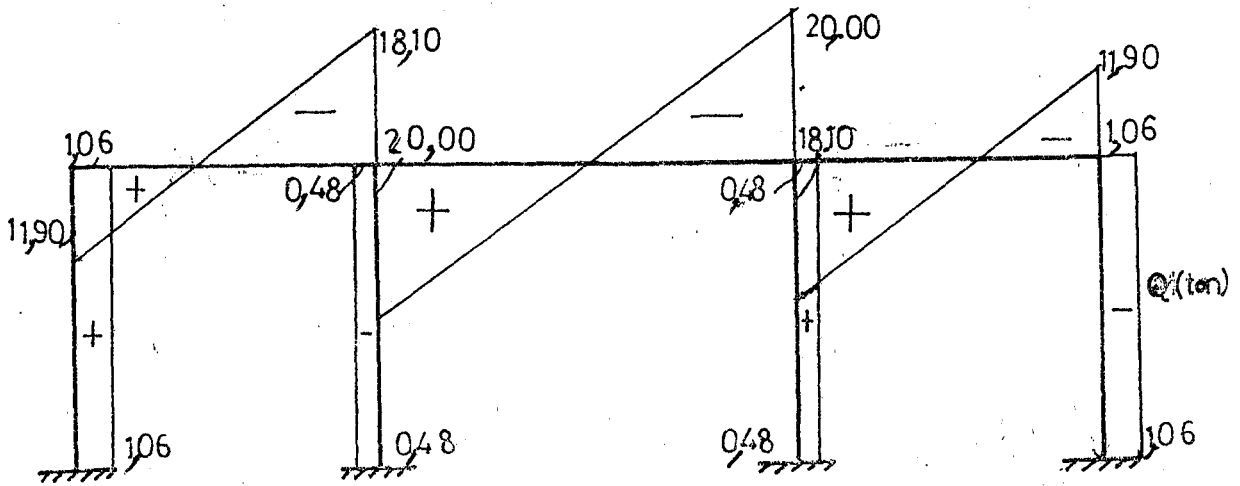
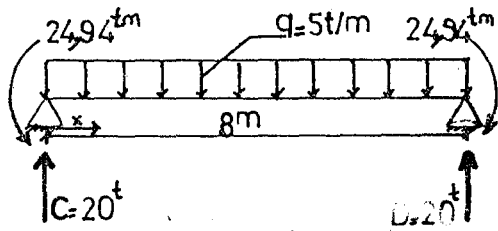


$$x = \frac{11,91}{5} = 2,38 \text{ m}$$

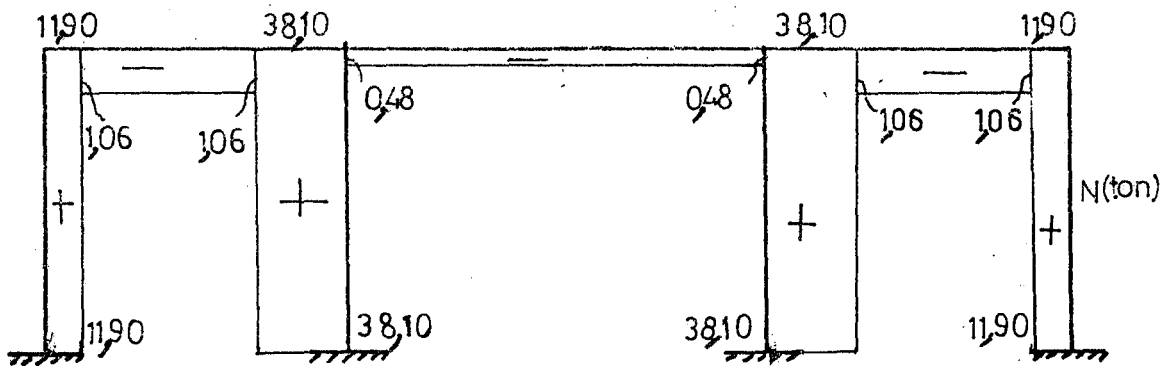
$$\text{Max}M = -4,3 + \frac{11,91^2}{2 \times 5} = 9,88 \text{ tm}$$

$$x = \frac{20}{5} = 4 \text{ m}$$

$$\text{Max}M = -24,94 + \frac{20^2}{2 \times 5} = 15,06 \text{ tm}$$

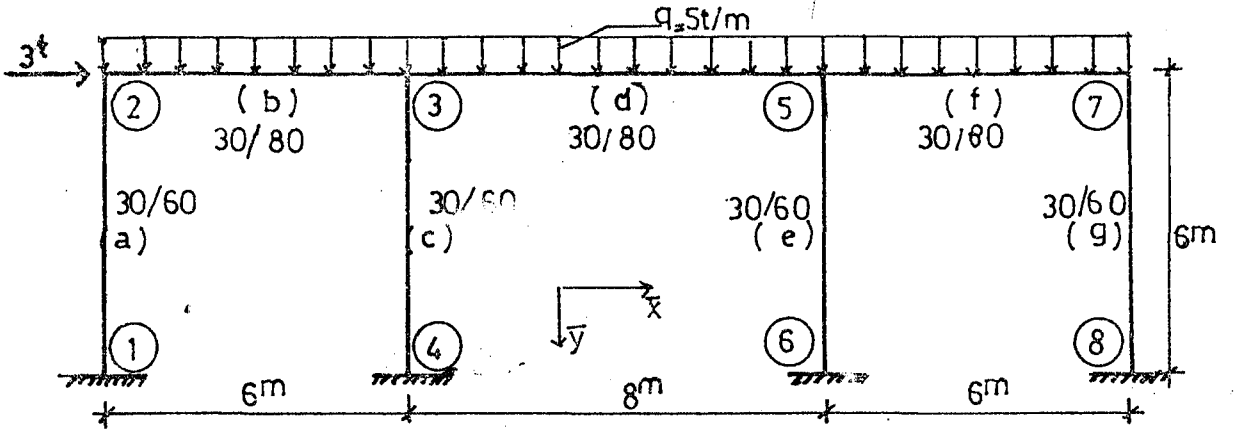


Şekil 3.9. Kesme kuvvet diyagramı



Şekil 3.10. Normal kuvvet diyagramı

3.5.2. Sistem yatay ve düşey yüklere maruz



Şekil 3.11. Sistem yatay ve düşey yüklere maruz

$$F = t^t [K] [\bar{U}] + \bar{P}_0$$

JENKLEM SAYISI= 24
BAND GENİSLİĞİ= 9

BAND MATRİS ELAMANLARI

% 6E+22	0.000	1800.000	-600.000	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	-60000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	-1800.000	0.000	3600.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80600.000	0.000	-1800.000	-80000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
61422.220	4266.670	0.000	-1422.220	4266.670	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
24266.670	0.000	-4266.670	8533.330	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
140600.000	0.000	-1800.000	-600.000	0.000	-1800.000	-60000.000	0.000	0.000	0.000
62022.220	-1866.670	0.000	-60000.000	0.000	0.000	-600.000	2400.000	0.000	0.000
37066.670	1800.000	0.000	3600.000	0.000	0.000	-2400.000	6400.000	0.000	0.000
% 6E+22	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
140600.000	0.000	-1800.000	-600.000	0.000	-1800.000	-80000.000	0.000	0.000	0.000
62022.220	1866.670	0.000	-60000.000	0.000	0.000	-1422.220	4266.670	0.000	0.000
37066.670	1800.000	0.000	3600.000	0.000	-4266.670	8533.330	0.000	0.000	0.000
% 6E+22	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80600.000	0.000	-1800.000	-600.000	0.000	-1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000
61422.220	-4266.670	0.000	-60000.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
24266.670	1800.000	0.000	3600.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6E+22	0.000	1800.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 6.000001E+24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
% 7.2E+23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

SABİT TERİMLER

0.000
0.000
0.000
-3.000
15.000
15.000
0.000
35.000
11.667
0.000
0.000
0.000
0.000
0.000
35.000
-11.667
0.000
0.000
0.000
0.000
15.000
-15.000
0.000
0.000
0.000

DENKLEMİN KÖKLERİ

-0.00000
0.00000
-0.00000
-0.00147
0.00021
0.00050
-0.00145
0.00063
0.00023
-0.00000
0.00000
-0.00000
-0.00145
0.00064
-0.00032
-0.00000
0.00000
-0.00000
-0.00146
0.00019
-0.00069
0.00000
0.00000

3.5.2.1. Bulunan denklem köklerinin matrislere uygulanması

a çubuğu $\varphi = -90^\circ$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600 & 0 & 1800 & -600 & 0 & 1800 \\ 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ 1800 & 0 & 7200 & -1800 & 0 & 3600 \\ \hline -600 & 0 & -1800 & 600 & 0 & -1800 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 1800 & 0 & 3600 & -1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 600 & 0 & 1800 & -600 & 0 & 1800 \\ 1800 & 0 & 7200 & -1800 & 0 & 3600 \\ \hline 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -600 & 0 & -1800 & 600 & 0 & -1800 \\ 1800 & 0 & 3600 & -1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,00147 \\ 0,00021 \\ 0,00050 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,6 \\ 1,782 \\ 4,446 \\ -12,6 \\ -1,782 \\ 6,246 \end{bmatrix}$$

b çubuğu $\varphi = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 80000 & 0 & 0 & -80000 & 0 & 0 \\ 0 & 1422,22 & 4266,67 & 0 & -1422,22 & 4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 17066,67 & 0 & -4266,67 & 8533,33 \\ \hline -80000 & 0 & 0 & 80000 & 0 & 0 \\ 0 & -1422,22 & -4266,67 & 0 & 1422,22 & -4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 8533,33 & 0 & -4266,67 & 17066,67 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 80000 & 0 & 0 & -80000 & 0 & 0 \\ 0 & 1422,22 & 4266,67 & 0 & -1422,22 & 4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 17066,67 & 0 & -4266,67 & 8533,33 \\ \hline -80000 & 0 & 0 & 80000 & 0 & 0 \\ 0 & -1422,22 & -4266,67 & 0 & 1422,22 & -4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 8533,33 & 0 & -4266,67 & 17066,67 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,00147 \\ 0,00021 \\ 0,00050 \\ -0,00145 \\ 0,00063 \\ 0,00023 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +3 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \\ -15 \\ +15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6 \\ -12,48 \\ 6,296 \\ 1,6 \\ -17,52 \\ 21,4 \end{bmatrix}$$

c çubuğu $\varphi = 90^\circ$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600 & 0 & -1800 & -600 & 0 & -1800 \\ 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -1800 & 0 & 7200 & 1800 & 0 & 3600 \\ -600 & 0 & 1800 & 600 & 0 & 1800 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ -1800 & 0 & 3600 & 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -600 & 0 & 1800 & 600 & 0 & 1800 \\ -1800 & 0 & 7200 & 1800 & 0 & 3600 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 600 & 0 & -1800 & -600 & 0 & -1800 \\ -1800 & 0 & 3600 & 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,00145 \\ 0,00063 \\ 0,00023 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37,8 \\ 1,28 \\ 4,266 \\ -37,8 \\ -1,28 \\ 3,438 \end{bmatrix}$$

d çubuğu $\varphi = 0^\circ$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 2400 & 0 & -600 & 2400 \\ 0 & 2400 & 12800 & 0 & -2400 & 6400 \\ -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -2400 & 0 & 600 & -2400 \\ 0 & 2400 & 6400 & 0 & -2400 & 12800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,00145 \\ 0,00063 \\ 0,00023 \\ -0,00145 \\ 0,00064 \\ -0,00032 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -26,667 \\ 0 \\ -20 \\ +26,667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20,22 \\ -25,795 \\ 0 \\ -19,78 \\ +24,019 \end{bmatrix} =$$

e çubuğu $\varphi = 90^\circ$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600 & 0 & -1800 & -600 & 0 & -1800 \\ 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -1800 & 0 & 7200 & 1800 & 0 & 3600 \\ \hline -600 & 0 & 1800 & 600 & 0 & 1800 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ -1800 & 0 & 3600 & 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -600 & 0 & 1800 & 600 & 0 & 1800 \\ -1800 & 0 & 7200 & 1800 & 0 & 3600 \\ \hline 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ 600 & 0 & -1800 & -600 & 0 & -1800 \\ -1800 & 0 & 3600 & 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,00145 \\ 0,00064 \\ -0,00032 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38,4 \\ 0,294 \\ 0,306 \\ -38,4 \\ -0,294 \\ 1,458 \end{bmatrix}$$

f çubuğu $\varphi = 0^\circ$

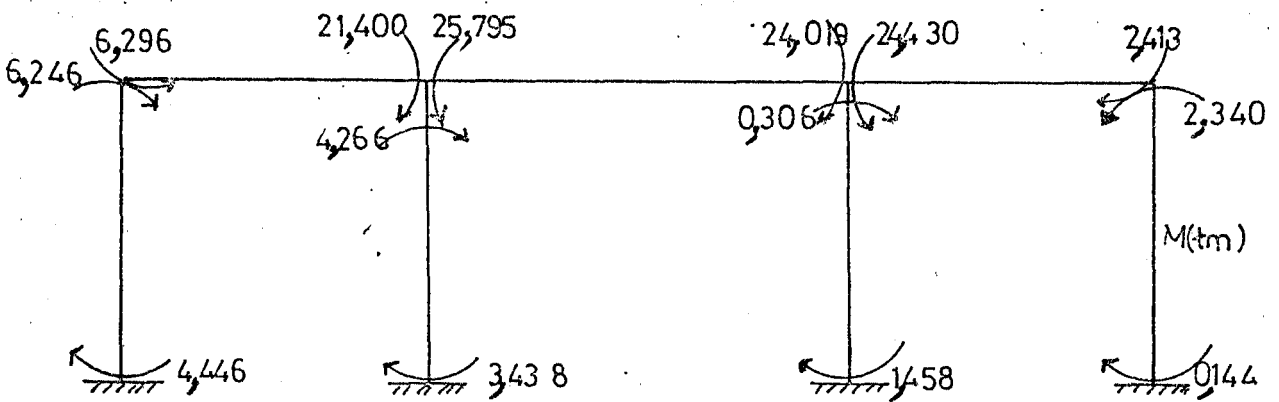
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 80000 & 0 & 0 & -80000 & 0 & 0 \\ 0 & 1422,22 & 4266,67 & 0 & -1422,22 & 4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 17066,67 & 0 & -4266,67 & 8533,33 \\ \hline -80000 & 0 & 0 & 80000 & 0 & 0 \\ 0 & -1422,22 & -4266,67 & 0 & 1422,22 & -4266,67 \\ 0 & 4266,67 & 8533,33 & 0 & -4266,67 & 17066,67 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -0,00145 \\ 0,00064 \\ -0,00032 \\ -0,00146 \\ 0,00019 \\ -0,00069 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \\ -15 \\ +15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -18,67 \\ -24,43 \\ -0,8 \\ -11,33 \\ 2,413 \end{bmatrix}$$

ğ - çubuğu $\varphi = 90^\circ$

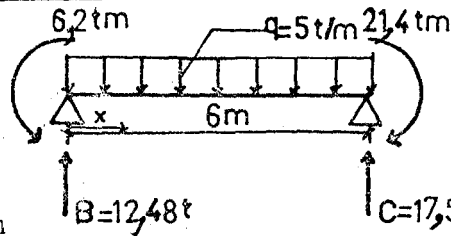
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 600 & 0 & -1800 & -600 & 0 & -1800 \\ 0 & 60000 & 0 & 0 & -60000 & 0 \\ -1800 & 0 & 7200 & 1800 & 0 & 3600 \\ \hline -600 & 0 & 1800 & 600 & 0 & 1800 \\ 0 & -60000 & 0 & 0 & 60000 & 0 \\ -1800 & 0 & 3600 & 1800 & 0 & 7200 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -0,00146 \\ 0,00019 \\ -0,00069 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,4 \\ -0,366 \\ -2,34 \\ -11,4 \\ 0,366 \\ 0,144 \end{bmatrix}$$



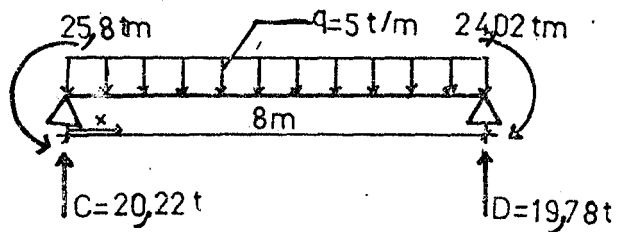
Şekil 3,12. Düğüm noktasındaki momentler

3.5.2.2. Açıklık momentlerinin hesabı



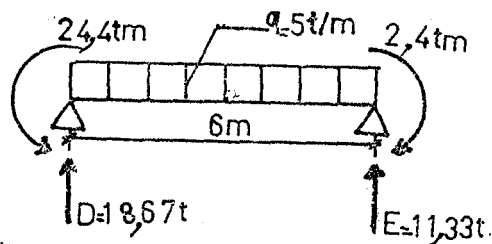
$$x = \frac{QI}{q} = \frac{12,48}{5} = 2,50 \text{ m}$$

$$\text{Max } M = -6,2 + \frac{12,48^2}{2 \cdot 5} = 9,375 \text{ tm}$$



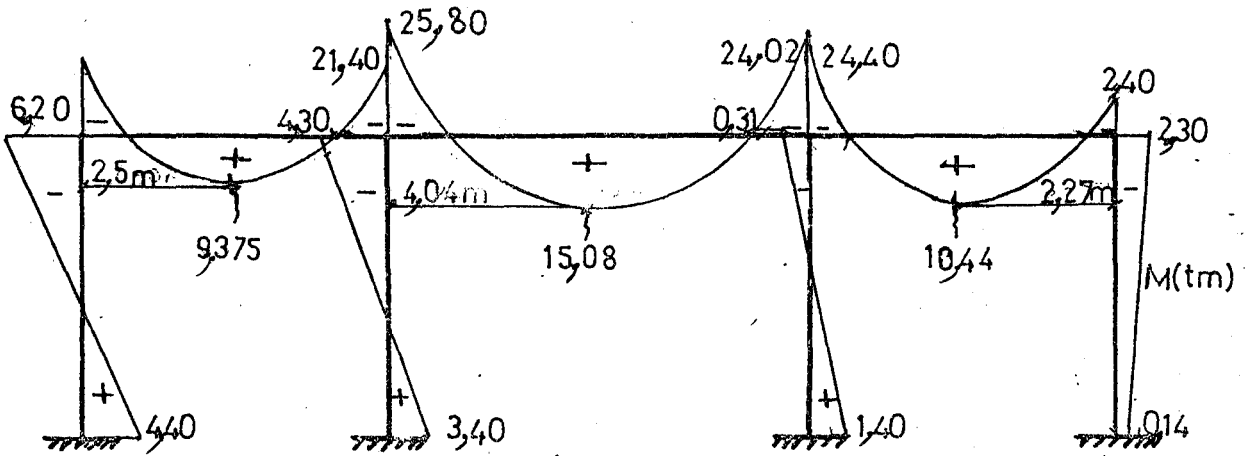
$$x = \frac{QI}{q} = \frac{20,22}{5} = 4,04 \text{ m}$$

$$\text{Max } M = -25,8 + \frac{20,22^2}{2 \cdot 5} = 15,08 \text{ tm}$$

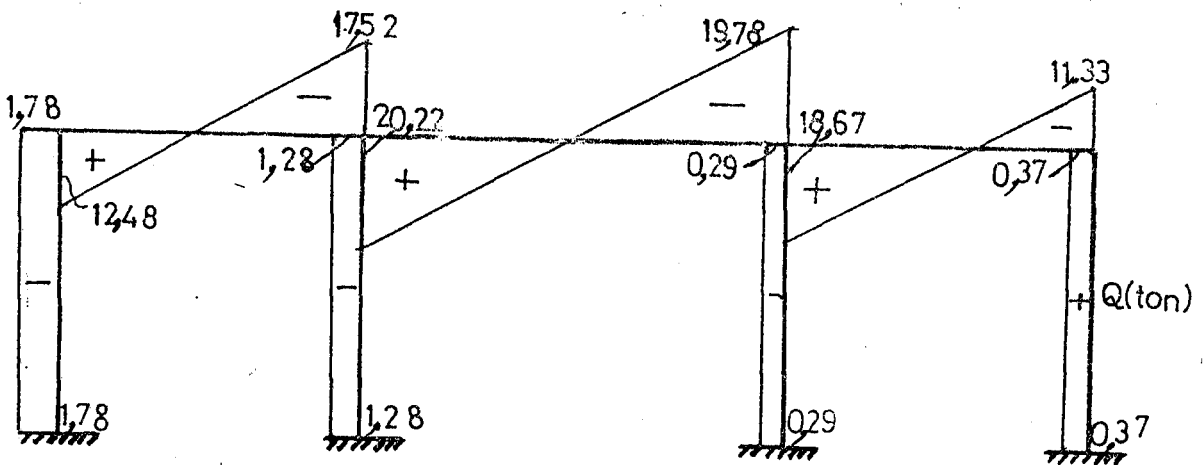


$$x = \frac{QI}{q} = \frac{11,33}{5} = 2,27 \text{ m}$$

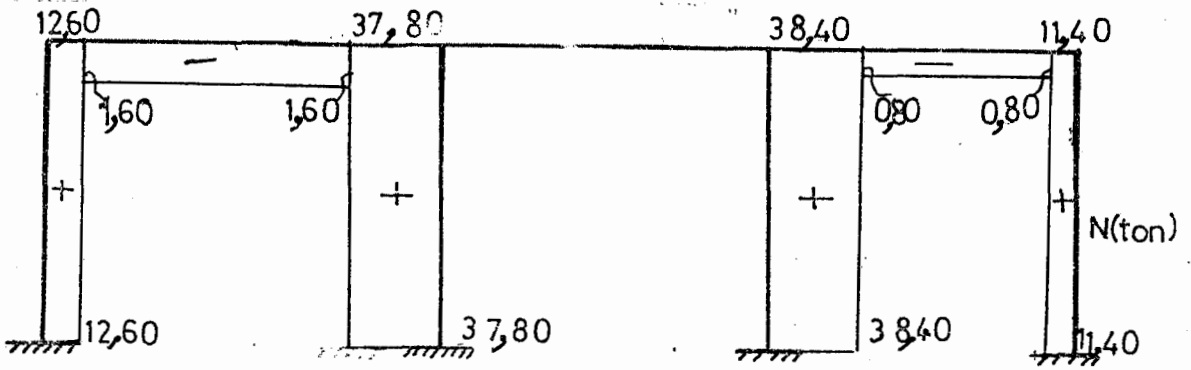
$$\text{Max } M = -2,4 + \frac{11,33^2}{2 \cdot 5} = 10,44 \text{ tm}$$



Şekil 3.13. Moment diyagramı



Şekil 3.14. Kesme kuvvet diyagramı



Şekil 3.15. Normal kuvvet diyagramı

SONUÇLAR

Matris Deplasman Yöntemi ile Açı Yönteminin karşılaştırılmasında, tek ölçü bilinmeyen sayısı değildir. Bilinmeyenlerin sayısının yanında, denklemlerin kolay kurulması, çözümlerinin kolay elde edilmesi ve nümerik hataların mümkün olduğu kadar aza indirilebilmesi önem kazanmaktadır.

a. Çok katlı ve düşey kolonlu sistemler için açı yöntemi daha elverişlidir. Çünkü kurulacak denklem sayısı daha azdır.

b. Matris Deplasman Yönteminde bulunan sonuçlar, Açı Yöntemi ile bulunan sonuçlardan yüzde dört oranında daha hassastır. Çünkü, Açı Yönteminde; Normal Kuvvetten dolayı meydana gelen deformasyonlar ihmal edilmektedir. Ancak, Matris Deplasman Yönteminde, normal kuvvetten dolayı meydana gelen deformasyonlar işleme katılmaktadır.

c. Yöntemlerin kullanılmasında Açı Yönteminin denklemlerinin daha kolay yazılabilmesi bir üstünlük olarak görülebilir. Ancak bilgisayar programları kullanılması halinde; her iki yöntemde de sonuçların kolay elde edilmesi bakımından eşdeğer kabul edilebilir.

d. Herhangi bir sistemi; Açı Yöntemini kullanarak bilgisayarda çözersek, Matris Deplasman Yöntemine göre daha az bilgisayar hafızasını kullanırız.

ÖNERİLER

a. Hesabı yapan kişinin, hesap yapımı sırasında yöntem seçimi eldeki mevcut araç ve gerece bağlı kalmakta olması nedeni ile seçim bu şartlara göre yapılmalıdır.

b. Kullanılacak programların elverişliliği ayrıca bir inceleme konusu olabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. Çakıroğlu, A., Çetmeli, E., "Yapı Statiği, Cilt I,II", İstanbul, 1983.
2. Çakıroğlu, A., İnan, M., "Hiperstatik Sistemlerin Hesap Metodları", İstanbul, 1974.
3. Çakıroğlu, A., Özden, E., Özmen, G., "Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinası Programları, Cilt I,II", İstanbul, 1970.
4. Oğuz, S., "Rijit Cisimler Statiği, Düzlem Sistemler", Eskişehir, 1983.
5. Oğuz, S., "Düzlemde Elastisite Teorisi Ders Notları", Eskişehir, 1981.
6. Oğuz, S., "Yapıların Plastik Analizi Çözümlü Problemler", Eskişehir, 1987.
7. Oğuz, S., "Açı Yöntemi Ders Notları", Eskişehir.
8. Oğuz, S., "Yapıların Plastik Analizine Giriş Kurs Notları", Eskişehir, 1983.
9. Akgün, Ö.R., "Mukavemete Giriş", Eskişehir, 1984.
10. Aydın, R., "Yapı Statiği Hiperstatik Sistemler", Eskişehir, 1983.
11. Aydın, R., "Hiperstatik Sistemler, Matris Metodları", Eskişehir, 1985.
12. Şenel, M., "Nümerik Analiz", Eskişehir, 1983.
13. Barkana, A., Akgün, Ö.R., "Basic Programlama ve Nümerik Hesap", Eskişehir, 1983.
14. Timoshenko, S., "Elastik Stabilite Teorisi", Çev.E.Suhubi ve H.Deren, İstanbul, 1963.
15. Özışık, G., "Betonarme, Ders Notları", Eskişehir.
16. İnan, M., "Cisimlerin Mukavemeti", İstanbul, 1970.