

**YARI-SİMETRİK  
MOLEKÜLLERİN SİMETRİ OPERASYONLARININ  
CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ**

Şadiye ÇAKMAK  
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı  
Aralık-2010

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Şadiye ÇAKMAK'ın Yarı Simetrik Moleküllerin Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi** başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki Yüksek Lisans Tezi 15.12.2010 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	<b>Yrd. Doç. Dr. Abidin KILIÇ</b>	.....
Üye	<b>Doç. Dr. Cem YÜCE</b>	.....
Üye	<b>Yrd. Doç. Dr. Fatih KARABACAK</b>	.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
.....tarih ve .....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

**Enstitü Müdürü**



## ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

### **YARI-SİMETRİK MOLEKÜLLERİN SİMETRİ OPERASYONLARININ CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ**

**ŞADIYE ÇAKMAK**

**Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman: Yrd. Doç. Abidin KILIÇ**

**2010, 164 sayfa**

Bu tezde vektör uzayı, lineer uzayı tanımları yapılmış ve bu uzaylarda yeni bir çarpım ifade edilmiştir. Clifford cebirinin genel bir tanımı yapıldıktan sonra, farklı boyutlardaki geometrik özellikleri incelenmiş ve cebirsel işlemlerinin araştırılmasının sonrasında da simetri operasyonlarına uygulanmıştır. Arşimet katılarına ait yansıma düzlemleri ve dönme eksenleri belirlenmiş, Clifford cebirinde tanımlanmış simetri operasyonları, Arşimet katılarına uygulanmıştır. Arşimet katıların simetri grupları oluşturulmuştur. Clifford cebiriyle gerçekleştirilen bu simetri operasyonlarının sağladığı avantajlar ve gösterim kolaylıkları ortaya konmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Clifford cebiri, Platonik katılar, Arşimet Katıları, Simetri operasyonları, Grup teori.

## ABSTRACT

Master Thesis

### SYMMETRY OPERATIONS OF SEMI- SYMMETRIC MOLECULES WITH CLIFFORD ALGEBRA

ŞADIYE ÇAKMAK

Anadolu University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Physics Program

Supervisor: Yrd. Doc. Dr. Abidin KILIÇ

2010, 164 pages

In this thesis, vector spaces and linear space definitions have been done and in these spaces a new multiplication has been expressed. After the general definition of the Clifford algebra, the geometrical properties of Clifford algebra in different dimensions are investigated, it is also applied to the symmetry operations, as well. The rotational axis and planes of reflection are defined belonging to the Archimedean solids. Symmetry groups of Archimedean solids are established. The symmetry operations defining the Clifford algebra are applied to the Archimedean solids. Advantageous and compact representations of symmetry operations with Clifford algebra are obtained.

**Keywords:** Clifford algebra, Platonic solids, Archimedean solids, Symmetry operations, Group theory.

## TEŞEKKÜR

**Bu tezin hazırlanmasında, bilgi ve birikiminden daima yararlandığım feyz aldığım değerli hocam,**

**Yrd. Doc. Dr. Abidin KILIÇ'a,**

**yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen,**

**Prf. Dr. Bernard JANCEWICZ'e,**

**değerli hocam,**

**Doç. Dr. Cevad SALAM'a**

**büyük özveri ile desteğini esirgemeyen**

**Anneme ve arkadaşım Selman'a**

*teşekkür ederim...*

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
TABLolar DİZİNİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. CLIFFORD CEBİRİ</b>	<b>5</b>
2.1 Vektör Uzayı ve Özellikleri.....	5
2.2 Skalar Çarpım.....	7
2.3 Kompleks Sayılar.....	10
2.4 Kartezyen (Cross) Çarpım.....	11
2.5 Dış Çarpım.....	12
2.5.1 İki Boyut.....	16
2.5.2 Üç Boyut.....	16
2.5.3 Genişletilmiş Dış Çarpım.....	18
2.6 Vektörler için Yeni Çarpım.....	18
2.7 Multivektörler ve Dereceleri.....	20
<b>3. CLIFFORD CEBİRİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER</b>	<b>22</b>
3.1 İki Boyutlu Uzayda Clifford Cebiri.....	22
3.1.1 İki Boyutlu Uzayda Bivektör ve Onun Çarpımları.....	23

3.1.2 Multivektörlerin Çarpılması.....	25
3.2 Üç Boyutlu Uzayda Clifford Cebiri.....	25
3.2.1 Üç Boyutlu Uzayda Bivektör ve Vektörlerin Çarpımı...	27
3.2.2 Üç Boyutlu Uzayda Bivektör Cebiri.....	31
3.2.3 Trivektörler.....	32
3.2.4 Pauli Cebiri.....	36
3.3 Yansıma Operasyonu.....	37
3.3.1 Bivektörlerin Yansıması.....	39
3.3.2 Trivektörlerin Yansıması.....	40
3.4 Dönme Operasyonu.....	40
3.4.1 Rotorlar.....	42
3.4.2 Rotorların Bulunması.....	44
3.4.3 Multivektörlerin Dönmesi.....	46
3.4.4 Rotor Bileşim Kuralları.....	47
3.4.5 Euler Açılımları.....	50
<b>4. SİMETRİK VE YARI SİMETRİK YAPILAR</b>	<b>52</b>
4.1 Platonik Katılar.....	52
4.2 Arşimet Katıları.....	53
4.3 Platonik Katıların ve Arşimet Katılarının Geometrik Özellikleri	55
4.4 Arşimet Katılarının İncelenmesi.....	59
4.4.1 Beş Kesik Çokyüzlü.....	60
4.4.1.1 Truncated Tetrahedron (Kesik Tetrahedron)...	60
4.4.1.2 Truncated Octahedron (Kesik Oktahedron).....	63
4.4.1.3 Truncated Cube (Kesik Küp).....	66
4.4.1.4 Truncated Icosahedron (Kesik İkosahedron)...	69

4.4.1.5 Truncated Dodecahedron (Kesik Dodekahedron).....	72
4.4.2 Cuboctahedron (Küpoktahedron).....	75
4.4.3 Icosidodecahedron (İkozidodekahedron).....	78
4.4.4 Dört Genişleme.....	81
4.4.4.1 Rhombicuboctahedron (Rombiküpoktahedron).....	82
4.4.4.2 Great Rhombicuboctahedron (Büyük Rombiküpoktahedron).....	84
4.4.4.3 Rhombicosidodecahedron.....	87
4.4.4.4 Great Rhombicosidodecahedron (Büyük Rombicosidodekahedron).....	90
4.4.5 Döndürme.....	95
4.4.5.1 Snub Cube (Snub Küp).....	96
4.4.5.2 Snub Dodecahedron.....	98

## **5. ARŞİMET KATILARININ SİMETRİ GRUBLARI 102**

5.1 Grup Kavramı.....	102
5.1.1 Çarpım Tablosu.....	103
5.1.2 Üretici Elemanlar.....	103
5.1.3 Değişmeli Grup.....	104
5.2 Düzenli Çokgenlerin Simetri Operasyonları.....	105
5.3 Permütasyon Grup Kavramı.....	111
5.4 İzomorfizm ve Homomorfizm.....	114
5.4.1 İzomorfizm.....	114
5.4.2 Homomorfizm.....	115
5.5 Alt Gruplar.....	117
5.6 Nokta Grupları.....	118



5.6.1	Nokta Gruplarında Simetri İşlemleri.....	118
5.6.2	Nokta Grupları ve Gösterimleri (Notasyonları).....	121
5.7	Arşimet Katılarının Simetri Grupları.....	125
5.7.1	Truncated Tetrahedron (Kesik Tetrahedron)'un Simetri Grupları.....	125
5.7.2	Truncated Octahedron (Kesik Oktahedron)'un Simetri Grupları.....	127
5.7.3	Truncated Cube (Kesik Küp)'ün Simetri Grupları.....	129
5.7.4	Truncated Icosahedron (Kesik İkosahedron)'un Simetri Grupları.....	131
5.7.5	Truncated Dodecahedron (Kesik Dodekahedron)'un Simetri Grupları.....	132
5.7.6	Cuboctahedron (Küpoctahedron)'un Simetri Grupları.....	134
5.7.7	Icosidodecahedron (İkozidodekahedron)'un Simetri Grupları.....	136
5.7.8	Rhombicuboctahedron (Rombiküpoktahedron)'un Simetri Grupları.....	138
5.7.9	Great Rhombicuboctahedron (Büyük Rombiküpoktahedron)'un Simetri Grupları.....	140
5.7.10	Rhombicosidodecahedron'un Simetri Grupları...	142
5.7.11	Great Rhombicosidodecahedron (Büyük Rombicosidodekahedron)'un Simetri Grupları...	143
5.7.12	Snub Cube (Snub Küp)'ün Simetri Grupları.....	145
5.7.13	Snub Dodecahedron'un Simetri Grupları.....	147

**6. YARI SİMETRİK YAPILAR İÇİN SİMETRİ  
OPERASYONLARININ CLİFFORD CEBİRİYLE  
İNCELENMESİ** **150**

6.1	Dönme Operasyonları.....	150
-----	--------------------------	-----

6.2 Yansıma Operasyonları.....	156
6.3 Dönme-Yansıma (Dönüşümlü Yansıma (Rotatery Reflection))	158
<b>TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER</b>	<b>160</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>162</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	Vektörlerin toplanmasının geometrik şekli.....	7
2.2	Dış çarpım.....	13
2.3	Bivektörlerin toplanmasının geometrik şekli.....	14
2.4	Üç-boyutlu uzayın bivektör bazları.....	17
3.1	Vektör ve bivektör.....	27
3.2	$\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c}$ trivektörü.....	33
3.3	Vektör ve trivektör.....	34
3.4	$\vec{a}$ 'nın $\hat{n}$ 'ye dik düzlemde yansıması.....	38
3.5	İki yansımadan bir dönme elde edilmesi.....	41
3.6	Üç boyutta dönme.....	43
3.7	$a$ 'dan $b$ 'ye dönme.....	45
4.1	Truncated tetrahedronun üstten görünümü.....	61
4.2	Truncated tetrahedron.....	62
4.3	Truncated octahedron.....	63
4.4	Truncated küp.....	66
4.5	Truncated küpün bir yüzünün önden görünümü.....	68
4.6	Truncated icosahedron.....	69
4.7	Truncated icosahedronun önden ve yandan görünümü...	70
4.8	Truncated dodecahedron.....	72
4.9	Truncated dodecahedrondaki ongn ve üçgenin birer yüzlerinin görünümü.....	73
4.10	Truncated dodecahedronun kenar uzunluğunun bulunması.....	74
4.11	Cuboctahedron.....	76
4.12	Cuboctahedronun kenar uzunluğunun bulunması.....	77
4.13	Icosidodecahedron.....	79

4.14	Icosidodecahedronun bir kesitinin görünümü.....	79
4.15	Kübün genişletilmesiyle rhombicuboctahedron elde edilmesi.....	81
4.16	Rhombicuboctahedron.....	82
4.17	Rhombicuboctahedronun önden görünümü.....	83
4.18	Great rhombicuboctahedron.....	85
4.19	Great rhombicuboctahedronun önden görünümü.....	85
4.20	Rhombicosidodecahedron.....	88
4.21	Rhombicosidodecahedronun önden görünümü.....	89
4.22	Great rhombicosidodecahedronun önden görünümü.....	91
4.23	Great rhombicosidodecahedron.....	92
4.24	Rhombicuboctahedrondan snub küp elde edilmesi.....	95
4.25	Snub kübün önden görünümü.....	96
4.26	Snub küp.....	97
4.27	Merkez açısı.....	99
4.28	Snub dodecahedron.....	100
5.1	$\alpha\beta\gamma$ üçgeni.....	106
5.2	$\alpha\beta\gamma$ üçgeninde (a) $C_3$ (b) $C_3^2$ (c) $C_3^3$ dönmelerinin etkileri...	106
5.3	$\alpha\beta\gamma$ üçgeninde (a) $\sigma_1$ (b) $\sigma_2$ ve (c) $\sigma_3$ yansımalarının etkileri.....	108
5.4	Karenin simetri operasyonları.....	110
5.5	P permütasyonu ve onu takip eden Q permütasyonunun etkileri.....	112
5.6	$D_{2d}$ nokta grubu.....	120
5.7	$IC_2$ dönüşümlü ters dönüşümü (rotatory inversion).....	120
5.8	(a) $S_4$ (b) $C_{3h}$ (c) $S_6$ ( $C_{3i}$ ) nokta grupları.....	120
5.9	O grubunun dönel (rotational) işlemleri.....	123
5.10	T grubunun dönel (rotational) işlemleri.....	123
5.11	Truncated tetrahedronun yansıma ve dönme eksenleri...	126

5.12	Truncated octahedronun yansıma ve dönme eksenleri....	128
5.13	Truncated kübün yansıma ve dönme eksenleri.....	129
5.14	Truncated icosahedronun yansıma ve dönme eksenleri...	131
5.15	Truncated dodecahedronun yansıma ve dönme eksenleri	133
5.16	Cuboctahedronun yansıma ve dönme eksenleri.....	135
5.17	Icosidodecahedronun yansıma ve dönme eksenleri.....	137
5.18	Rhombicuboctahedronun yansıma ve dönme eksenleri...	139
5.19	Great rhombicuboctahedronun yansıma ve dönme eksenleri.....	141
5.20	Rhombicosidodecahedronun yansıma ve dönme eksenleri.....	142
5.21	Great rhombicosidodecahedronun yansıma ve dönme eksenleri.....	144
5.22	Snub kübün dönme eksenleri.....	146
5.23	Snub dodecahedronun dönme eksenleri.....	148

## TABLolar DİZİNİ

3.1	İki-boyutlu uzaydaki Clifford Cebirinin Temel Grupları.....	22
3.2	$Cl_2$ ’ de dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları.....	23
3.3	Üç-boyutlu uzaydaki Clifford Cebirinin Temel Grupları	26
3.4	$Cl_3$ ’ te dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları.....	26
4.1	Plato’nun ilk kuramı.....	52
4.2	Arşimet katılarının benzerleri (dual).....	55
4.3	Platonik katılara ait büyüklükler.....	56
4.4	Arşimet katılarına ait .....	57
4.5	Genişletilmiş Schläfli sembolü.....	58
4.6	Platonik katıların Schläfli sembolü ile temsili.....	58
4.7	Arşimet katıların Schläfli sembolü ile temsili.....	59
4.8	Truncated tetrahedronun köşe koordinatları.....	62
4.9	Truncated octahedronun köşe koordinatları.....	64
4.10	Truncated kübün köşe koordinatları.....	67
4.11	Truncated icosahedronun köşe koordinatları.....	70
4.12	Truncated dodecahedronun köşe koordinatları.....	74
4.13	Cuboctahedronun köşe koordinatları.....	78
4.14	Icosidodecahedronun köşe koordinatları.....	80
4.15	Rhombicuboctahedronun köşe koordinatları.....	84
4.16	Great rhombicuboctahedronun köşe koordinatları.....	86
4.17	Rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları.....	89
4.18	Great rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları.....	92
4.19	Snub kübün köşe koordinatları.....	98
4.20	Snub dodecahedronun köşe koordinatları.....	100

5.1	Çarpım tablosunun gösterimi.....	103
5.2	Dört grup V'nin çarpım tablosu.....	104
5.3	$C_{3v}$ grubunun çarpım tablosunun gösterimi.....	107
5.4	$C_{4v}$ grubunun çarpım tablosunun gösterimi.....	111
5.5	$S_3$ grubunun çarpım tablosunun gösterimi.....	114
5.6	Truncated tetrahedronun yansıma operasyonları.....	125
5.7	Truncated tetrahedronun dönme operasyonları.....	127
5.8	Truncated octahedronun yansıma operasyonları.....	127
5.9	Truncated octahedronun dönme operasyonları.....	128
5.10	Truncated kübün yansıma operasyonları.....	130
5.11	Truncated kübün dönme operasyonları.....	130
5.12	Truncated icosahedronun yansıma operasyonları.....	131
5.13	Truncated icosahedronun dönme operasyonları.....	132
5.14	Truncated dodecahedronun yansıma operasyonları.....	133
5.15	Truncated dodecahedronun dönme operasyonları.....	134
5.16	Cuboctahedronun dönme operasyonları.....	135
5.17	Cuboctahedronun yansıma operasyonları.....	136
5.18	Icosidodecahedronun yansıma operasyonları.....	136
5.19	Icosidodecahedronun dönme operasyonları.....	137
5.20	Rhombicuboctahedronun yansıma operasyonları.....	138
5.21	Rhombicuboctahedronun dönme operasyonları.....	139
5.22	Great rhombicuboctahedronun dönme operasyonları.....	140
5.23	Great rhombicuboctahedronun yansıma operasyonları....	141
5.24	Rhombicosidodecahedronun yansıma operasyonları.....	142
5.25	Rhombicosidodecahedronun dönme operasyonları.....	143
5.26	Great rhombicosidodecahedronun yansıma operasyonları.....	144
5.27	Great rhombicosidodecahedronun dönme operasyonları	145

5.28	Snub kübün dönme operasyonları.....	147
5.29	Snub dodecahedronun dönme operasyonları.....	149



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$e_i$	birim bazlar
$\vec{a}$	vektör
$A$	çokluvektör
$Z$	karmaşık sayı
$\langle A \rangle_r$	bir çokluvektörün $r$ . dereceli kısmı
$\cdot$	nokta çarpım (skalar çarpım)
$\times$	vektörel çarpım
$\wedge$	dış çarpım
$\vec{a}^{-1}$	vektörün tersi
$\vec{a}^*$	vektörün duali
$A^{-1}$	çokluvektörün tersi
$A^*$	çokluvektörün duali
$I$	pseudoskaları (sanki skalar)
$M$	dönüşüm matrisi
$\vec{a}_{\perp B}$	$\vec{a}$ vektörünün $B$ bivektörüne dik bileşeni
$\vec{a}_{\parallel B}$	$\vec{a}$ vektörünün $B$ bivektörü üzerindeki bileşeni
$G$	grup
$A_n$	altgrup
$C_n$	$\frac{2\pi}{n}$ açısıyla dönme
$\sigma$	ayna yansıma
$I$	Uzayda ters dönüşüm (space inversion)
$D_x$	x-ekseni etrafındaki dönme matrisi
$D_y$	y-ekseni etrafındaki dönme matrisi
$D_z$	z-ekseni etrafındaki dönme matrisi

## 1. GİRİŞ

Fizikteki kavramların açıklanabilmesi ve ispatlanabilmesi için matematiksel sistemlere ihtiyaç vardır. Bu bir cebirde olabilir. Tarih içerisinde çeşitli cebirler fizikçiler ve matematikçiler tarafından ortaya konmuş, tartışılmıştır. Bu tezde bunlardan biri olan Clifford cebiri ya da başka bir deyişle geometrik cebir ele alınmış ve fizikteki bir uygulaması incelenmiştir.

Clifford cebiri 19. yy da İngiliz matematikçi William Kingdon Clifford tarafından ortaya konmuştur. Clifford, Grassman'ın çalışmalarından önemli derecede etkilenmiştir. Clifford, iç ve dış çarpımları birleştirerek kendi cebiri olan Clifford cebirini ortaya çıkardı. Bu cebir Grassman'ın cebiri gibi birleşimli bir cebirdir. Fakat bu Hamilton' un quaternion cebiri gibi tersinir olması gibi çok önemli bir özelliğe de sahiptir. Clifford çalışmalarında, Hamilton'un ve Grassmann'ın çalışmalarını tek yapıda birleştirdi. Birçok modern araştırmacı Clifford cebirini “Geometrik cebir” diye de adlandırmıştır. Bunun nedeni, geometrik çarpımın Grassman'ın ilk tanımına göre biliniyor olmasıdır. Ancak bu çarpımların mükemmel potansiyelini fark eden ve ilerleten Clifford'ur [1].

Grassmann'ın cebiri kuaternion cebirine oldukça benzerdir. Grassmann  $e_i$  hiper sayılarını yönlü birim doğrular olarak tanımladı. Herhangi bir vektörü

$$a_i e_i \quad (1.1)$$

biçiminde yazdı. Burada  $a_i$  skalar bir sayıdır. Grassmann bu hiper sayılar için iki çarpma tanımladı. Bunlar iç çarpım,

$$e_i e_j = e_j e_i = \delta_{ij} \quad (1.2)$$

ve dış çarpım

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i \quad (1.3)$$

dir. Bu ifadeler 2. Bölümde ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Grassmann dış çarpımın sonucunu yönlü bir alan olarak tanımladı ve 2 den fazla boyutlu

cisimler için bu cebiri uyguladı. Birçok matematik tarihçisine göre Grassmann ömrünün son yıllarında nokta ve dış çarpımı bir arada, merkezi (central) çarpım adıyla tanımladı:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{b} \quad (1.4)$$

Merkezi çarpım, Clifford'un vektör çarpımı ile aynı ifadededir. Grassmann bu ifadeye Clifford'dan tamamen bağımsız olarak ulaştı. Clifford ise Grassmann'dan esinlenerek bu çalışmayı gerçekleştirmiş ve merkezi çarpımı göstermiştir. Hamilton'un kuaternion cebiri de bu cebir içinde tanımlanabilir. Clifford 1878 yılındaki makalesinde bu çalışmasını yayınlamış ve cebire *geometrik cebir* adını vermiştir.

Matematikçilerin basit olarak birleştirilmiş geometrik cebiri bulmak için gösterdikleri çabaya karşın, fizikçiler hibrit sisteme adapte olmuşlardı bile. Ta ki Gibbs'e kadar...

Gibbs vektörler için iki çarpım tanımladı. Grassmann'dan esinlendiği için iç çarpım ve kuaternionlardan esinlendiği vektörel (cross) çarpım. İki vektörün, vektörel çarpımı bir üçüncü vektörü verir. Gibbs'in cebiri buna yakındı ve başka ek elemanlar gerektirmiyordu.

Gibbs'in cebiri elektromanyetizmadaki problemleri çözmeye çok uygundu ve bu nedenle kısa zamanda yaygınlaştı. Ancak vektör çarpımı değişimli olmadığından ve çok-boyutlu sistemlere genelleştirilemediğinden bazı problemlerin çözümünde başarılı olamadı.

Sonuçta, Clifford cebiri, bu zayıf cebirler tarafından kuşatılmış halde, 19 yy.ın sonunda ortaya çıktı [2]. Birkaç uygulamadan sonra, kuaternion cebiri ile birlikte gelecekte birçok problemin çözümü için araştırmacılara umut verdi.

Dirac elektron teorisi çalışmaları sırasında, Clifford cebirine, Clifford'dan 20 yıl sonra, çok farklı bir yolla ulaştı. Karesi Laplacian'ı veren  $\gamma^\mu \partial_\mu$  operatörünü buldu. Burada  $\gamma$  -matrisleri,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2I\eta^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

koşulunu sağlayan  $4 \times 4$  matrislerdir. Ancak ne yazık ki, bu noktada vektör geometrisiyle bağlantısını kaybetti.

Bu konu 30 yıl boyunca aynı kaldı. Fizikçiler aralıklı olarak koordinat geometrisi, matris cebiri, tensör cebiri, diferansiyel formu, spinör hesabı gibi yeni çok sayıda cebir ile çalıştılar. Atiyah ve Singer [3], meşhur index teoremi ile geometri ve topoloji konusunda yeni ufuklar açtılar. Atiyah ve Singer'ın çalışmalarında Clifford cebiri en temel rolü aldı ve bu iki bilim adamı son çalışmalarında Clifford cebiri için “geometri ve topoloji problemlerinin insanı şaşırtan çeşitliliğinin merkezinde karşımıza sürekli olarak çıkmaktadır” demişlerdir [4].

David Hestenes üniversitede felsefe eğitimi almış olmasına rağmen, fizikte oldukça başarılı çalışmalar yapmıştır. O, Clifford cebirinin anlaşılmasında çok farklı bir yaklaşım uyguladı. 60'lı yıllarda birçok teorik fizikçi gibi, alan teorileri ve parçacıklar üzerine çalıştı. Bu çalışma boyunca Dirac matrislerinin vektörler gibi yorumlanabileceğini ortaya koydu ve bu yorumuyla kuantum mekaniği ve Dirac eşitliğine yeni bakış açıları kazandırdı.

Bu düşüncenin başarısı, Hestenes'i, Clifford cebirinin yapabilecekleri konusunda yeniden düşünmeye sevk etti. Hestenes, Clifford cebirinin yönlü sayılar sisteminden ibaret olmadığı, doğal bir dil olduğu, teoremlerin sayılarla değil, cebir ve geometri sonuçlarından yararlanılarak ifade edilmesi gerektiği sonucuna vardı. Hestenes birçok yılını, Clifford cebirini fizik için yeterli bir dil haline getirmeye çalışmakla geçirdi ve adına da orjinaline bağlı kalarak *geometrik cebir* adını verdi.

Günümüzde ise Clifford cebiri birçok alanda kolaylıklar sağlamaktadır. Özellikle robotikler, kuantum mekaniği, kristalografi gibi uygulama alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır.

Bu tezin 2. ve 3. Bölümlerinde 1, 2, 3-boyutlu uzayda Clifford cebiri incelenecek, ayrıca 3. Bölümde bu cebirin yansıma ve dönme

operasyonlarına nasıl uygulandığı ele alınacaktır. 4. Bölümde Arşimet katıları ve Platonik katılar ele alınacaktır. Arşimet katılarının geometrik özellikleri araştırılacak ve koordinatları bulunacaktır. 5. Bölümde Arşimet katıların simetri grupları incelenecek ve 6. Bölümde ise Arşimet katılarının simetri operasyonları, Clifford cebiri ile tanımlanacaktır.

## 2. CLIFFORD CEBİRİ

Geometrik cebirin yapısı birçok yöntemle açıklanabilir. En basit ve pratik yaklaşım vektör uzayının bilinen kavramları ile benzerdir. Ancak bu yaklaşım çok derinliğine bilgiler içermez. Geometrik cebir, vektörlerin çarpımı için kullanılan özel bazı kurallarla basit tanımlamalar yapar. Bu bölümde bu kavramlar da ele alınacaktır.

Lineer uzay ve vektör uzayı kavramları genellikle eş anlamlı kullanılmakla birlikte, bu çalışmada farklılıklarının olduğu da ortaya konacaktır. Lineer uzayın tanımında, vektörün bir skalarla vektörel çarpımı ya da bir skalarla toplamı mümkün değildir [4]. Bu da bir vektörün geometrik kavramlarının tanımlanması ve cebirsel temsili için, lineer uzay kavramının, yeterli olmadığını ortaya koyar.

Vektörlerin matematiksel tanımı, “geometrik çarpım” olarak adlandırılan çarpım kuralı ile tamamlandı. Bu nedenle geometrik çarpımla tanımlanmış lineer uzay için, vektör uzayı terimi kullanılır. Vektör uzay kavramından hareketle, lineer uzayın diğer çeşitleri de elde edilebilir.

Geometrik cebirin önemli kısmı vektör uzayına dayanır. Vektör uzayının bazı özellikleri bu kısımda özetlenmiştir. Bu bölümde lineer uzayın alt uzayları ile 2-3 boyutlu vektör uzayı tanımlanacaktır. Bu tanımlar yardımı ile de geometrik cebir genişletilecektir.

### 2.1 Vektör Uzayı ve Özellikleri

Vektör uzayı bir cismi tanımlayan terimler yardımıyla tanımlanabilir. Bu terimler, uzayda yönlü olarak canlandırılabilen vektörler ve gerçel sayılar olan skalarlardır. Vektörlere ait bazı cebirsel özellikler vardır:

- 1) Değişme özelliği;

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

2) Birleşme özelliği;

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (2.2)$$

'dir. Bu özellik  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  gibi ifade yazılmasına olanak sağlar.

3) Etkisiz elemanı vardır. 0 ile gösterir:

$$\vec{a} + 0 = \vec{a} \quad (2.3)$$

4) Her eleman  $\vec{a}$ 'nın bir tersi elemanı  $-\vec{a}$  vardır:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0 \quad (2.4)$$

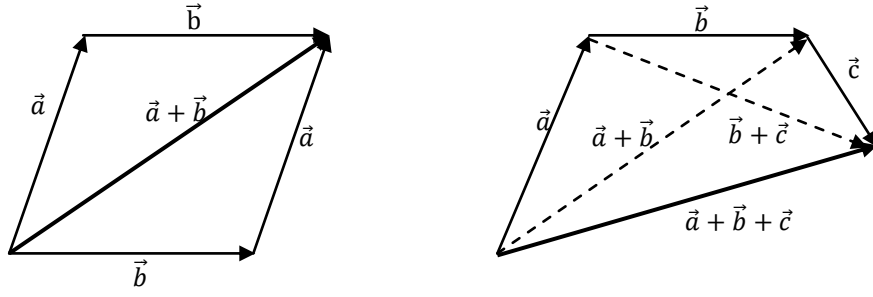
Bu özelliklerin geometrik gösterimleri de açıktır (Şekil 2.1). Vektör uzayları aynı zamanda skalar ve vektör arasında operasyonlar içerir. Bu operasyonlar herhangi bir  $\lambda$  skaları ve  $\vec{a}$  vektörü için bazı özelliklere sahiptir. Bunların çarpımlarının sonucu  $\lambda\vec{a}$  da vektör uzayının bir elemanıdır. Geometrik olarak bu çarpım, genişleme operasyonuna denk gelir. Skalar  $\lambda, \mu$ ;  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri için özellikler:

1)  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

2)  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

3)  $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$

4)  $1\vec{a} = \vec{a}$  bütün skalarlar için geçerli ise  $1\vec{a} = \vec{a}$  bütün  $\vec{a}$  vektörleri için geçerlidir.



Şekil 2.1 Vektörlerin toplanmasının geometrik şekli

Bu kuralların önde gelen özellikleri vektör uzayını tamamen tanımlamaya yöneliktir. Skalarlarla ilgili + operasyonu, vektörlerle ilgili + operasyonundan farklıdır. Ancak her ikisi için kullanılan sembollerde farklılık yoktur.

Vektörler 2 ve daha büyük boyutlarda incelenirken, 1-boyutlu alt uzaylar için ihmal edilir. 1-boyutlu alt uzaylar sadece bir görüş olarak ele alındığından, alt uzay kavramının temelini oluştururlar. Bu görüşler yardımıyla vektörler kullanılarak çok boyutlu alt uzay formları oluştururlar. Bu çok boyutlu alt uzay formları ve normal vektörler yardımıyla da düzlemler tanımlanır [5].

## 2.2 Skalar Çarpım

Öklidyen geometri; doğru, çember ve diklik gibi kavramlarla ilgilenir. Öklidyen geometriye ulaşmak için, vektör uzayına iki yeni kavram eklenmesi gerekir. Bu iki kavram, çemberi tanımlayan noktalar arasındaki uzaklık ve vektörler arasındaki açılardır. Skalar çarpımla bu iki kavram açıklanır.

Verilen iki  $\vec{a}, \vec{b}$  vektörleri ise;  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  skalar çarpımının belli özellikleri vardır:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;



- $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $\vec{a} = 0$  olmadıkça  $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ .

Skalar çarpımın tanımında  $|\vec{a}|$ ,  $\vec{a}$  vektörünün uzunluğunu tanımlar.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (2.5)$$

Uzunluk tanımı ve uzaklık anlamları metrik uzayda belirtilir. Metrik uzayın birçok farklı tipi vardır. Bunlardan en basiti öklidyen uzayıdır. Öklidyen uzayı için iç çarpım, Schwarz eşitsizliği [6] olan

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (2.6)$$

ile tanımlanır. İspatı şu şekildedir:

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \geq 0 \quad \forall \lambda$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \geq 0 \quad \forall \lambda$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a} \cdot \vec{a} \vec{b} \cdot \vec{b} \quad (2.7)$$

Buradaki son adım  $\lambda$  de ikinci dereceden diskriminantı alınarak yapılır. Çünkü bu eşitsizlikte sayıların hepsi pozitiftir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri arasındaki açı  $\theta$  ise, skalar çarpım;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta) \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Skalar çarpımı sıfır olan iki vektör birbirine diktir. Genellikle vektörlerin hepsi dik olduğu temel birimler ile çalışmak uygundur.  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$

vektörler kümesinin birim vektörler ise, birim vektörlerin diklik şartı;

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.9)$$

şeklinde özetlenebilir. Burada  $\delta_{ij}$ , Kronecker delta fonksiyonudur. Aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

Temelde herhangi bir  $\vec{a}$  vektörü;

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i, \quad (2.11)$$

olarak uzatılabilir.  $\{a_i\}$ ,  $\{\mathbf{e}_i\}$  temel vektöründe  $\vec{a}$  vektörünün bileşenleridir. Bunlar basitçe şu şekilde gösterilir:

$$\vec{a}_i = \mathbf{e}_i \cdot a \quad (2.12)$$

$\vec{a} = a_i \mathbf{e}_i$  ve  $\vec{b} = b_j \mathbf{e}_j$  skalar çarpımı aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \vec{a}_i \vec{b}_j \delta_{ij} = \vec{a}_i \vec{b}_i. \quad (2.13)$$

Minkowski uzayı gibi iç çarpımın pozitif tanımlı olmadığı uzayda, Schwarz eşitsizliğinin denkliği yoktur. Böyle durumlarda, cosh fonksiyonu ile kosinüs fonksiyonu yer değiştirilerek vektörler arasındaki açıyı tanımlamak mümkündür. Kronecker delta yerine  $i \neq j$  olduğunda sıfır olan  $\eta_{ij}$  yer alabilir. Bu durumda  $i=j$  durumunda değerler  $\pm 1$  olur [1].

## 2.3 Kompleks Sayılar

Skalar çarpım vektörler arasında tanımlanan basit bir çarpımdır. Bu çarpım, Öklid geometrisinin önemli kavramlarının çoğunu formülleştirebilir. Fakat bu kesinlikle vektörler arasında tanımlanan bir çarpımdır. 2 boyutta yeni bir çarpım kompleks aritmetiği yoluyla tanımlanabilir. 1917 yılında Wessel tarafından ortaya çıkan kompleks sayılar, kompleks düzlemde yönelme gösteren gerçek sayıların sıralı ikilisi olarak görülürler. Onların çarpımları dönme ve genişleme gibi geometrik operasyonları şekillendiren kompleks sayılara olanak sağlar. Bir kompleks sayısı olan  $z = x + iy$  ve onun karesi:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad (2.14)$$

şeklindedir.

Vektör aritmetiğinde kompleks bir sayının ne reel kısmı ne de sanal kısmı herhangi bir geometrik anlama sahip değildir. Bu yüzden geometrik olarak faydalı olan çarpım, vektörün uzunluğunun karesine dönüşen

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \quad (2.15)$$

ifadesidir. Düzlemde  $z$  ve  $w = u + iv$  olan iki vektörün çarpımı;

$$zw^* = (x + iy)(u - iv) = xu + vy + i(uy - vx) \quad (2.16)$$

olarak yapılabilir. Sağ taraftaki reel kısım skalar çarpıma dönüşür. Sanal kısmı anlamak için de polar gösterimler düşünülür.

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad w = |w|e^{i\theta} \quad (2.17)$$

ve bu yüzden:

$$zw^* = |z||w|e^{i(\theta-\phi)} \quad (1.18)$$

şeklinde yazılır.

Sanal terim  $|z||w|\sin(\theta - \phi)$  büyüklüğüne sahiptir. Buradaki  $(\theta - \phi)$ , iki vektör arasındaki açıdır. Bu terimin büyüklüğü  $z$  ve  $w$  tarafından tanımlanan bir paralelkenarın alanıdır.

## 2.4 Kartezyen (Cross) Çarpım

Kartezyen çarpım iki vektör arasında olmaktadır.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektör olsun:

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \quad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}. \quad (2.19)$$

Bunların Kartezyen çarpımı,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradaki  $\vec{c}$  yine bir vektördür.

$$\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} \quad (2.21)$$

Yazılan  $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$  bileşenleri,

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (2.22)$$

olarak yazılabilir. Buradaki değişen tensör  $\epsilon_{ijk}$ :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ijk; 123 permütasyonu yönünde dönüşümsel ise} \\ -1 & \text{ijki; 123 permütasyonunun ters yönünde dönüşümsel ise} \\ 0 & \text{diğer koşullarda} \end{cases} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektörünün Kartezyen çarpımı ( $\vec{a} \times \vec{b}$ ) tanımlandı. Kartezyen çarpım başlıca şu özelliklere sahiptir:

- $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $a$  ve  $b$  ile tanımlanan düzleme diktir.
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)$  büyüklüğüne sahiptir.
- $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin Kartezyen çarpımları ( $\vec{a} \times \vec{b}$ ) sağ el kuralıyla şekillenirler.

Bu özellikler Kartezyen çarpımın tanımı olarak da görülebilir ve bu tanımlardan cebirsel tanıma dönüşümlirler. Bu,  $\{e_i\}$ 'in sağ tarafındaki dik vektör çarpımıyla elde edilir. Bunlar için;

$$e_1 \times e_2 = e_3 \quad (2.24)$$

vb. şeklinde yazılabilir. Bu yüzden

$$e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k \quad (2.25)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Bu formül genişletilirse,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i e_i) \times (b_j e_j) = a_i b_j (e_i \times e_j) = (\epsilon_{ijk} a_i b_j) e_k \quad (2.26)$$

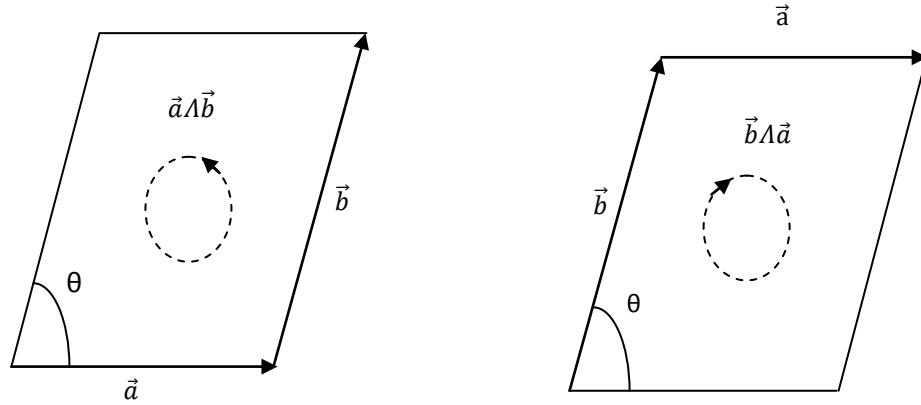
şeklinde olur. Kartezyen çarpım, elektromanyetizma ve dinamikteki eşitlikleri kullanan fizikçiler için çok değerlidir [1].

## 2.5 Dış Çarpım

Kartezyen çarpımın önemli eksikliklerden biri sadece üç boyutta var olmasıdır. İki ve dört boyutta Kartezyen çarpım olmaz. Bunu görebilmek için  $e_1, \dots, e_4$  dört dik vektörü göz önüne alınır.  $e_1$  ve  $e_2$  vektörleri düşünülürse ve bunların her ikisinin dik vektörü bulunmak

istenirse;  $e_3$  ve  $e_4$  kombinasyonuna bakılır.

Kartezyen çarpım iddialarının genelleştirilmesi, önemli Alman matematikçisi H.G. Grassmann tarafından yapıldı. O'nun çalışmaları Möbius'un Barycentrischer Calcul'da başladı. Yazar; A,B ve C tarafından tanımlanan üçgenler için ABC ve A,B noktalarını birleştiren doğrular için AB gibi ifadelerini göstermiştir. Möbius, herhangi iki noktanın yer değişimi olursa niceliklerin işaretinin değişeceğini gösterdi. (Bu yönelmiş segmentlere (doğrulara) tek yönlüler de denir.) Ayrıca AB gibi ifadeler vektörler arasındaki çarpım olarak Grassmann tarafından gösterilmiştir. Grassmann yeni bir çarpım olarak dış çarpımı göstermiştir. Bu çarpım modern simgelerde  $\vec{a}\wedge\vec{b}$  veya  $\vec{a}$  wedge  $\vec{b}$  şeklinde yazılır [7].



**Şekil 2.2** Dış çarpım.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$ 'nin dış çarpımı yada wedge çarpımı  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)$  alanının doğrultulmuş alanına döner. Paralelkenarın yönelimi;  $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{a}, -\vec{b}$  vektörleri ile sağ tarafa (saat yönü tersine) ya da sol tarafa (saat yönünde) olup olmamasıyla belirlenir. Eğer dış çarpımda  $\vec{a}\wedge\vec{b}$  deki vektörlerde yer değişimi olursa  $\vec{b}\wedge\vec{a}$  gibi dış çarpım sonucundaki paralelkenarın yöneliminin işareti de tersine döner.

Dış çarpım herhangi bir vektör uzayında da tanımlanabilir. Aslında Grassmann, vektör uzayının elemanları noktalar olarak yorumlanan yerdeki yansıtmalı(izdüşümsel) bakış açısını ortaya koydu ve iki noktanın dış çarpımı, noktalar boyunca oluşan doğru olduğunu tanımladı. Dış çarpım, dik vektör kavramına bağlı olmadan düzlemi oluşturmanın bir yolunu sağlar. Dış çarpımın sonucu ne skaldır ne de bir vektördür. Bu, yönlendirilmiş düzlemde yeni bir matematiksel birimdir ve bivektör diye adlandırılır. Bir vektörden diğer bir vektörü süpürerek elde edilen paralelkenar iki boyutlu bir alt uzaydır (Şekil 2.2). Vektörlerin yer değiştirmesi düzlemin yönelimini tersine çevirir.  $\vec{a}\wedge\vec{b}$  'nin büyüklüğü  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)$  'ye eşittir.

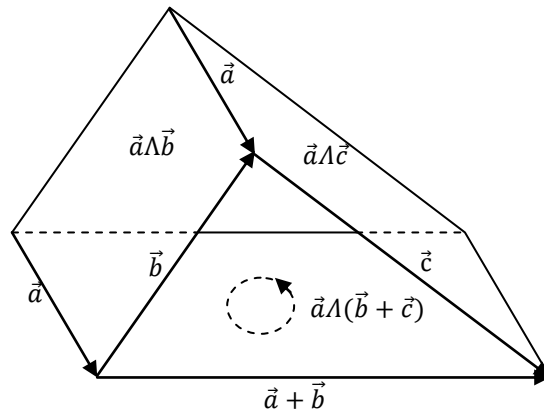
İki vektörün dış çarpımının cebirsel özellikleri ise:

- $\wedge$  Çarpım antisimetriktir [8]:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a} \quad (2.27)$$

$\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  tarafından tanımlanan yüzeyin yöneliminin tersine döndüğünü gösterir. Bütün  $\vec{a}$  vektörleri için;

$$\vec{a}\wedge\vec{a} = 0 \text{ 'dır} \quad (2.28)$$



Şekil 2.3 Bivektörlerin toplanmasının geometrik şekli.

- Bivektörler lineer uzayını şekillendirirler. Aynı yolla vektörlerde lineer uzayını şekillendirirler. İki ve üç boyutta bivektörlerin toplaması kolaylıkla canlandırılabilir. Yüksek boyutlarda bu toplamayı canlandırmak her zaman kolay olmaz. Çünkü iki düzlemin ortak doğruyu paylaşmasına gerek yoktur.
- Dış çarpımın toplama işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \quad (2.29)$$

Bu, ortak doğruyu paylaşan bivektörün eklenmesini canlandırmaya yardımcı olur (Şekil 2.3).

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektör ve  $\lambda$  bir skalar olmak üzere;

$$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad \text{“skalarla çarpımın birleşikliği”}$$

$$\lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \lambda \quad \text{“skalarla çarpımın değişimliliği”} \quad (2.30)$$

özelliği vardır [5].

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  üç vektör olmak üzere,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} \quad (2.31)$$

birleşme özelliği vardır.

Dış çarpımın sonucu bir paralelkenardır.



### 2.5.1 İki boyut

Herhangi bir iki vektörün dış çarpımı düzlemi tanımlar. Bu yüzden ilgili çarpımı şekillendirmek için en az iki boyutta düşünülmelidir.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , düzlem için dik birim vektörlerdir ve vektörler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\vec{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \quad \vec{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \quad (2.32)$$

$\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin dış çarpımı  $\vec{a}\wedge\vec{b}$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}\wedge\vec{b} &= a_1b_1\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + a_2b_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

olarak yazılır. Bu eşitlik, eşitlik 2.18' deki sanal kısma benzerdir. Bu terim,  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)$  büyüklüğüne sahiptir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$ ,  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  olarak aynı yönelmeye sahip ise;  $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$  nin katsayısı pozitiftir.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $-\vec{a}$ ,  $-\vec{b}$  vektörleri (Şekil 2.2) tarafından tanımlanan yönlendirilmiş paralelkenarın sınırları, bir yandan diğer yana taranarak tanımlanır. Eğer  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  sağ-el kuralıyla sağ taraftan taranırsa  $a_1b_2 - a_2b_1$  in katsayısı pozitif olur [1].

### 2.5.2 Üç Boyut

Bivektörlerin uzayı da üç boyutludur. Çünkü her bir bivektör kendisine dik bir vektörle aynı düzlemde bulunabilir. Üç boyutlu uzayın birim baz vektörleri  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  tür:

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{13}, \quad \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{23} \quad (2.34)$$

Üç boyutlu uzayın birim baz vektörleri ve bivektörleri Şekil 2.4' de gösterilmiştir.

$\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektörü  $\vec{a} = a_i \mathbf{e}_i$  ve  $\vec{b} = b_i \mathbf{e}_i$  olarak genişletilir.  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  bivektörü,

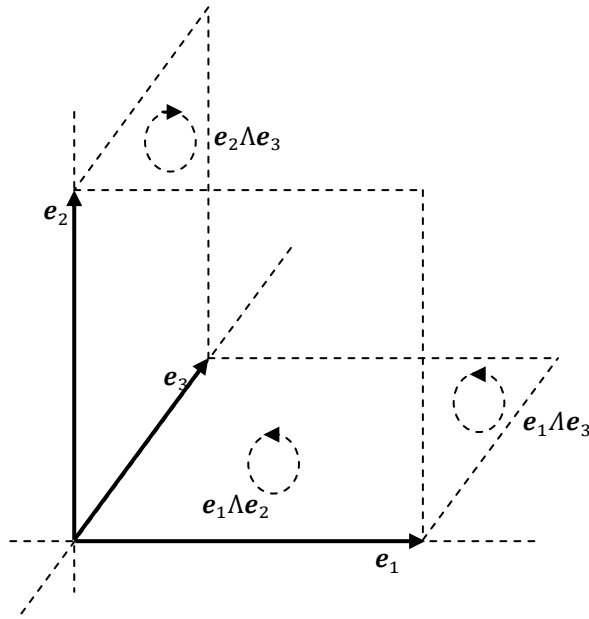
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \wedge (b_j \mathbf{e}_j)$$

$$= (a_2 b_3 - b_3 a_2) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

(2.35)

şeklinde bivektörlerin dik birim bazlarına ayrılabilir.

Bu yapıda birleşenler, kartezyen çarpımın bileşenleri ile aynıdır. Fakat  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  ye dik vektörün bileşenleri yerine  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  bivektörünün bileşenlerini yazmak daha uygundur. Bu, herhangi bir düzlemde tanımlanan dış çarpıma olanak sağlayan farklılıklardan birisidir.



Şekil 2.4 Üç boyutlu uzayın bivektör bazları

### 2.5.3 Genişletilmiş Dış Çarpım

Önceden gösterilen örnekler, keyfi boyutlarda  $\vec{a}\wedge\vec{b}$ 'nin bileşenleri;

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})_{ij} = a_i b_j \quad (2.36)$$

olarak verilir. Grassmann, birçok vektörün dış çarpım tanımını yapma fikrini ortaya çıkardı. Bu fikir önceki formüllerin basit bir uzantısıdır. n sayıda vektörün dış çarpımının bileşenleri, her bir vektörün bileşenlerinin anti simetrik çarpımıdır. Bu tanım dış çarpımın birleşme özelliğini ortaya çıkartır:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} \quad (2.37)$$

Üç boyutta;

$$\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c} = (a_i \mathbf{e}_i)\wedge(b_j \mathbf{e}_j)\wedge(c_k \mathbf{e}_k) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 \quad (2.38)$$

eşitliği elde edilir. Bu da yönelmiş hacmi gösterir (Bölüm 3.2).

Çarpımın anti simetrik başka bir özelliği, cebirsel bağımlı vektörlerin dış çarpımının yok olmasıdır ( $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 = 0$ ). Bu ifade, “bu vektör verilen düzlemde uzanır” veya “iki hiper yüzeyler ortak doğruyu paylaşırlar” gibi anlatımları cebirsel olarak açıklayacağı anlamına gelir.

### 2.6 Vektörler için Yeni Çarpım

Bu kısma kadar vektörler için çeşitli çarpımlar gösterildi. Simetrik skalar olan iç çarpım ve antisimetrik olan dış çarpım vektörleri incelendi. İki boyutta,  $zw^*$  complex çarpımın sonuçlarının nasıl yorumlanacağı gösterildi (Bölüm 2.3). Skalar terim, kompleks uzayda iki vektörün iç çarpımıdır ve sanal (imaginary) terim onların yönlendirilmiş alanını gösterir. Dahası skalar terim simetriktir ve sanal terim antisimetriktir. Clifford'un iddiası dış çarpımla sanal terimi yer değiştirerek keyfi

boyutlarda geometrik çarpımı genelleştirdi. Geometrik çarpım basitçe  $\vec{a}\vec{b}$  şeklinde yazılır. Sonuç skalar ve bivektörün birlikte gösterimidir:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{b} \quad (2.39)$$

İki farklı terimin (skalar ve bivektör) gösterimi ilk bakışta zor görünebilir. Bu, başlangıçta çok büyük zorluklara neden olan geometrik cebirin özelliğidir. Geometrik çarpımın sonucu ne sanal ne de reel bir sayıdır.  $\vec{a}\vec{b}$  geometrik çarpımı, skalar ve bivektörlerin ayrı yazılmasına olanak sağlar. Bu özellik kompleks aritmetiğinde de geçerlidir. Kompleks aritmetiğinde de sanal ve reel kısım ayrı yazılır.

Eşitlik 2.39'dan

$$\vec{b}\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}\wedge\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}\wedge\vec{b} \quad (2.40)$$

yazılabilir.

Bu yolla;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \quad (2.41)$$

ve

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \quad (2.42)$$

bulunur.

Böylece geometrik çarpımın terimlerinde iç ve dış çarpımlar tanımlıdır [9]. Bu, Clifford cebirinin aksiyomatik (axiomatic) olduğunu gösterir.

Eğer paralel vektör  $\vec{a}$  ve  $\lambda\vec{a}$  çarpılırsa;

$$\vec{a}(\lambda\vec{a}) = \lambda\vec{a} \cdot \vec{a} + \lambda\vec{a}\wedge\vec{a} = \lambda\vec{a} \cdot \vec{a} \quad (2.43)$$

denklemi elde edilir. Bu sonuç sadece skaldır. Benzer şekilde  $\vec{a}^2$  de skaldır. Böylece a vektörünün uzunluğunun karesi için  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$  ifadesi yazılabilir. Eğer  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  dik vektörler ise, geometrik çarpımları bivektördür:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{b} \quad (2.44)$$

ya da

$$\vec{b}\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}\wedge\vec{a} = -\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{a}\vec{b} \quad (2.45)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade, dik (ortagonal) vektörlerin değişme özelliğini gösterir. Vektörler arasındaki geometrik çarpım, farklı skalar ve bivektörün terimlerinde dik ve paralel bileşenlerin her ikisinin katkısını belirtir [10].

## 2.7 Multivektörler ve Dereceleri

Clifford, bivektörelere skalar terim ekleyerek çalıştı ve bunların eklenebilir veya çarpılabilir olduğu cebiri tanımladı. Bu cebir Clifford cebiri diye adlandırdı. Clifford cebirinin elemanları multivektörler diye adlandırılır ve bunlar lineer uzayda şekillenir. Clifford cebiri derecedir ve cebirin terimleri, farklı dereceli terimler olarak sınıflandırılabilir. Skalar terimler 0 dereceli, vektörler 1 dereceli, bivektörler 2 dereceli vb. şeklinde belirlenir. Terimlerin dereceleri hiper düzlemin boyutlarıdır. Derece terimi yerine boyut terimini de kullanılabilir.  $\langle \rangle_r$  olarak seçilen terimlerin dereceleri alt indisi olarak yazılan  $r$ ' dir. Bu yüzden  $\langle \vec{a}\vec{b} \rangle_2$  ye,  $\vec{a}\vec{b}$  geometrik çarpımının iki dereceli kısmı denir. Yani;

$$\langle ab \rangle_2 = \vec{a}\wedge\vec{b} \quad (2.46)$$

$\langle \rangle_0$ ' da 0 alt indisi olan terim skaldır. Bu da skalar çarpımla ifade edilebilir. Böylece,

$$\langle ab \rangle_0 = \langle ab \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{'dir.} \quad (2.47)$$

Keyfi multivektörler geometrik çarpım ile hepsi beraber de çarpılabilir. Bunun için ilk önce iki vektörün geometrik çarpımıyla herhangi bir vektörün çarpımı yapılır. Bu da geometrik çarpımın birleşme özelliğiyle elde edilir.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektörler ise;

$$\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} \quad (2.48)$$

yazılabilir.

Birleşme özelliği parantezi kaldırmaya ve  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  olarak çarpım yazmamıza olanak sağlar. Keyfi multivektörler, vektörlerin çarpımlarının özeti olarak da yazılabilir. Bu yüzden multivektörlerin geometrik çarpımları vektörlerin çarpımlarının iki ana özelliğine sahiptir. Birincisi birleşme özelliğidir:

$$\mathbf{A(BC)=(AB)C=ABC} \quad (2.49)$$

Ve ikincisi dağılma özelliğidir:

$$\mathbf{A(B+C)=AB+AC} \quad (2.50)$$

Buradaki  $\mathbf{A,B,....C}$  keyfi derecenin terimlerini içeren multivektörlerdir.

Birleşme özelliği vektörleri bölmeyi mümkün kılar. Böylece Hamilton' un amacı fark edilir. C; skalar ve bivektörün bileşimiye  $\vec{a}\vec{b} = C$  olur. Aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$C\vec{b} = (\vec{a}\vec{b})\vec{b} = \vec{a}(\vec{b}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}^2 \quad (2.51)$$

Böylece  $\vec{b}^{-1} = \vec{b}/\vec{b}^2$  ise,  $\vec{a}$ ' ne dönüştürülürse:

$$\vec{a} = C\vec{b}^{-1} \text{ 'dir.} \quad (2.52)$$

Vektörlerin birleşme özelliği cebirin yeterliliğini gösterir. Bu önermeler örneklenirse,  $\vec{a}\Lambda\vec{b}$  bivektörün karesinin formülü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} (\vec{a}\Lambda\vec{b})(\vec{a}\Lambda\vec{b}) &= (\vec{a}\vec{b} - \vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \\ &= -\vec{a}\vec{b}^2\vec{a} - (\vec{a}.\vec{b})^2 + \vec{a}.\vec{b}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) = (\vec{a}.\vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 \\ &= -\vec{a}^2\vec{b}^2 \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Burada  $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$  olduğu kabul edildi.  $\vec{a}\Lambda\vec{b}$  bivektörünün büyüklüğü,  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  yi tanımlayan kenarları paralelkenarın alanına eşittir.

### 3. CLIFFORD CEBİRİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

Clifford cebiriyle multivektörlerin cebiri oluşturulurken işlemciler ihtiyacı duyulur. Bu bölümde birçok uygulamada kullanılan kavramlar ve işlemciler tanımlanacaktır. Bu bölümde Clifford cebirinin temelleri 2 ve 3 boyutta incelendi. Cebirde tanımlanan çeşitli terimlerin geometride uygulamalarının olduğu görüldü. Clifford cebirinin en güçlü uygulamalarından biri olan dönme operasyonlarına bu bölümde geniş olarak yer verildi.

#### 3.1 İki Boyutlu Uzayda (Düzlemin) Clifford Cebiri

2-boyutlu uzayda  $e_1$  ve  $e_2$  iki baz vektör ise,

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, e_1 \cdot e_2 = 0 \quad (3.1)$$

olduğu bulunur.

$$e_1 e_2 = e_1 \cdot e_2 + e_1 \wedge e_2 \quad (3.2)$$

olduğundan bu cebirdeki kümenin son elemanı Tablo 3.1’ de gösterilen  $e_1 \wedge e_2$  bivektörüdür. Bu bivektör iki boyutu uzayın yüksek dereceli bir elemanıdır. Çünkü bağımlı vektörlerin dış çarpımı her zaman sıfırdır ( $e_1 \wedge e_1 = 0$ ). Verilen cebirde yüksek dereceli elemanlar her zaman pseudoscalar (sankiskalar) I olarak adlandırılır ve bunun derecesi bahsedilen vektör uzayının boyutuyla aynıdır.

**Tablo 3.1** İki boyutlu uzaydaki Clifford Cebirinin Temel Grupları

1	$\{e_1, e_2\}$	$e_1 \wedge e_2$
1 skalar	2 vektör	1 bivektör

**Tablo 3.2**  $Cl_2$  'de dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

$\Lambda$	<b>1</b>	$e_1$	$e_2$	$e_{12} = I$
<b>1</b>	1	$e_1$	$e_2$	<b>I</b>
$e_1$	$e_1$	1	<b>I</b>	$e_2$
$e_2$	$e_2$	<b>-I</b>	1	$-e_1$
$e_{12} = I$	<b>I</b>	$-e_2$	$e_1$	-1

İki boyutlu Clifford cebirine  $Cl_2$  cebiri denir.  $Cl_2$ 'deki herhangi bir multivektör temel bileşenlerine ayrılabilir. Toplam ve çarpımlar bu temellerin teriminde hesaplanabilir. Örneğin **A** ve **B** multivektörleri;

$$\mathbf{A} = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_1 \wedge e_2$$

$$\mathbf{B} = \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_1 \wedge e_2$$

şeklinde verilir. Bunların toplamı **S=A+B** ise

$$\mathbf{S} = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_1 \wedge e_2 \quad (3.3)$$

ifadesi bulunur.

İki boyutlu (düzlemde) Clifford uzayının geometrik çarpım kombinasyonları Tablo 3.2' de verilmiştir.

### 3.1.1 İki Boyutlu Uzayda Bivektör ve Onun Çarpımları

$e_1 \wedge e_2$  bivektörün özelliklerinden önce dik vektörler için geometrik çarpımın birim bivektör olduğu hatırlanmalıdır:



$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2 \quad (3.4)$$

ve dik vektörlerin yerlerini değiştirmesi:

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \quad (3.5)$$

şeklindedir. Bu birim vektörlerin çarpımları şekillendirildiğinde  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  çoklu vektörleri sağ ve soldan çarpılabilir. Soldan çarpılırsa:

$$(\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 = (-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \quad (3.6)$$

ve

$$(\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \quad (3.7)$$

Eğer  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  çifti sağdan çarpıldığı düşünülürse, bivektörlerin sol çarpımının 90 derece saat yönünde (negatif yönde) döndüğü görülür. Benzer şekilde sağdan çarpılırsa:

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \quad (3.8)$$

Böylece sağdan çarpım 90 derece saat yönünün tersine döner (pozitif yönde).

Sözü edilen boyuttaki cebirde son olarak yapılan çarpım  $\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2$  bivektörünün karesidir.

$$(\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1 \quad (3.9)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  vektörlerinin ardışık sağ ve sol çarpımları vektörü 180 derece boyunca döndürür ki bu da -1 olur.

### 3.1.2 Multivektörlerin Çarpılması

**A** ve **B** gibi iki multivektörün çarpımı yapılabilir. **A** ve **B** multivektörleri Eşitlik 3.3' de gösterildiği gibi çarpımı yapılabilir:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{M} = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \quad (3.10)$$

Burada  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3 \\ \mu_1 &= \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3 \\ \mu_2 &= \alpha_0 \beta_2 + \alpha_2 \beta_0 + \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 \\ \mu_3 &= \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0 + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır.

### 3.2 Üç Boyutlu Uzayda (Uzayın) Clifford Cebiri

Üç boyutlu uzayın Clifford cebiri, geometri ve klasik mekanikte problemlerin çözümü için çok güçlü bir araçtır. Clifford cebiri, benzer vektör operasyonlarının hepsini içeren cebirde hacimleri, düzlemleri ve vektörleri tanımlar.

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  kümesine yani iki boyutlu düzleme üçüncü bir  $\mathbf{e}_3$  vektörü eklenir. Bu üç vektörün hepsi birbirine dik vektörlerdir. Bu yüzden bunlar kendi aralarında yer değiştirebilirler. Birbirine dik üç birim baz vektörlerden üç bivektör türetilir:

$$\{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1\}.$$

Bu vektörler, uzayda bağımsız düzlemlerin sayısıdır. Üç vektörün çarpımına bakıldığında;

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. Bu trivektör olarak adlandırılan üç dereceli bir objedir. Üç boyutlu hacim,  $\mathbf{e}_3$  vektörü boyunca  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$  bivektörü süpürülerek elde edilir. Trivektör, üç boyutta hacim elemanını temsil eder ve bu boyutta en yüksek dereceli elemandır. Bu cebirde tekrardan pseudoskalar (sanki

skalar) 1 diye adlandırılır. Üç boyutta başka bir yönelme yoktur. Bu yüzden cebir, Tablo 3.3 deki gibidir.

**Tablo 3.3** Üç boyutlu uzaydaki Clifford Cebirinin Temel Grupları

1	$\{e_i\}$	$\{e_i \wedge e_j\}$	$e_1 e_2 e_3$
1 skalar	3 vektör	3 bivektör	1 trivektör

Bu temel birimler, toplam boyut  $2^3 = 8$  elemanlı lineer uzay olarak tanımlanır ve  $Cl_3$  şeklinde ifade edilir [10]. Alt uzayların her birinin boyutları, iki terimli alt katsayısı tarafından verilir. Üç boyutlu Clifford uzayının ( $Cl_3$ ) geometrik çarpım kombinasyonları Tablo (3.4)' de verilmiştir.

**Tablo 3.4**  $Cl_3$ ' te dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

$\wedge$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
$e_1$	$e_1$	1	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_2$	$e_3$	$e_{123}$	$e_{23}$
$e_2$	$e_2$	$-e_{12}$	1	$e_{23}$	$-e_1$	$-e_{123}$	$e_3$	$-e_{13}$
$e_3$	$e_3$	$-e_{13}$	$-e_{123}$	1	$e_{123}$	$-e_1$	$-e_2$	$e_{12}$
$e_{12}$	$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	$e_{123}$	-1	$-e_{23}$	$e_{13}$	$-e_3$
$e_{13}$	$e_{13}$	$-e_3$	$-e_{123}$	$e_1$	$e_{23}$	-1	$-e_{12}$	$e_2$
$e_{23}$	$e_{23}$	$e_{123}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_{13}$	$e_{12}$	-1	$-e_1$
$e_{123}$	$e_{123}$	$e_{23}$	$-e_{13}$	$e_{12}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1

### 3.2.1 Üç Boyutlu Uzayda Bivektörler ve Vektörlerin Çarpımı

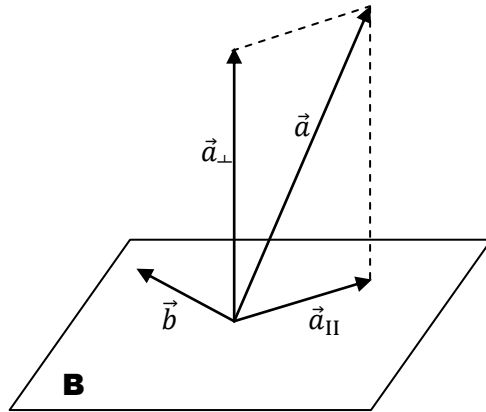
2- boyutlu uzayda bivektör ve vektörlerin çarpımından Bölüm 3.1.1' de söz edilmiştir. Bu çarpıma iki boyutta bakılığında, normalize edilmiş bivektör onun düzleminde 90 derece döndüğü gözlenir. Tablo 3.3'deki temel baz bivektörlerin her biri, iki boyutta çalışılmış bivektörlerin özelliğini paylaşır. Bu yüzden,

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)^2 = -1 \quad (3.13)$$

ve her bir bivektör onun kendi düzleminde 90 derece dönmesini gösterir.

Vektörler için geometrik çarpım, cebirde bütün objelere uzanır. Bu yüzden  $\vec{a}\mathbf{B}$  gibi ifadeler ortaya çıkar. Burada  $\vec{a}$  bir vektördür,  $\mathbf{B}$  ise bir bivektördür. Çıkan sonuç  $\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3)$  trivektörüdür. Burada  $\vec{a}\mathbf{B}$  çarpımının sonucu vektör ve bivektör terimlerinin her ikisini de kapsadığı görülmektedir.  $\vec{a}\mathbf{B}$  çarpımının özelliklerini anlamak için  $\vec{a}$ 'nü içeren terimleri düzlemin içinde (düzleme paralel) ve dışında (düzleme dik) olarak ayrıştırılır (şekil 3.1).

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \quad (3.14)$$



**Şekil 3.1** Vektör ve bivektör.  $\vec{a}$  vektörünün bileşenleri düzleme dik ve düzleme paralel olacak şekilde yazılabilir.  $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$  şeklinde yazılır.  $\mathbf{B}$  bivektörü  $\vec{a}_{\parallel}\wedge\vec{b}$  şeklinde yazılır. Buradaki  $\vec{b}$ ,  $\vec{a}_{\parallel}$ 'ya dik olan vektördür.

$\vec{a}\mathbf{B} = (\vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp})\mathbf{B}$  şeklinde yazılır. Aynı zamanda Şekil 3.1' de görüldüğü üzere,

$$\mathbf{B} = \vec{a}_{\parallel}\Lambda\vec{b} = \vec{a}_{\parallel}\vec{b} \quad (3.15)$$

olarak da yazılabilir. Burada  $\mathbf{B}$  düzleminde  $\vec{b}$ ,  $\vec{a}_{\parallel}$ 'ne diktir.  $\vec{b}$  vektörünü her zaman bulmak mümkündür.

$$\vec{a}_{\parallel}\mathbf{B} = \vec{a}_{\parallel}(\vec{a}_{\parallel}\vec{b}) = \vec{a}_{\parallel}^2\vec{b} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılır ve bu bir vektördür. Düzlemde, bir vektör ile düzlemi oluşturan bivektörün çarpımının sonucunun düzlemde kalması gerektiği açıktır. Diğer yandan üç dik vektörün çarpımı

$$\vec{a}_{\perp}\mathbf{B} = \vec{a}_{\perp}(\vec{a}_{\parallel}\Lambda\vec{b}) = \vec{a}_{\perp}\vec{a}_{\parallel}\vec{b} \quad (3.17)$$

eşitliğinde görülmektedir ve bu trivektördür. Beklenildiği gibi bivektör ve vektörün çarpımı genelde vektör ve trivektör terimlerini içerir. Dahası bunu araştırmak  $\vec{b}\Lambda\vec{c}$  bivektörü ile  $\vec{a}$  vektörünün çarpımının oluşmasına izin verir. Geometrik çarpımın dağılma ve birleşme özelliğinden,

$$\vec{a}(\vec{b}\Lambda\vec{c}) = \vec{a}\frac{1}{2}(\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c}\vec{b}) \quad (3.18)$$

ifadesi oluşur. Bu ifade tekrar düzenlendiğinde;

$$\vec{a}\vec{b} = 2\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\vec{a} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{b}\Lambda\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{a}\vec{c} - \vec{c}\vec{a}\vec{b}) = 2(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - 2(\vec{a}\cdot\vec{c}) + \\ &\quad \frac{1}{2}(\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b})\vec{a} \end{aligned} \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir ve böylece;

$$\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c}) - (\vec{b}\wedge\vec{c})\vec{a} = 2(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - 2(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} \quad (3.21)$$

sonucu elde edilir. Bu formülün sağ tarafı vektördür. Bu yüzden bivektör ile vektörün antisimetrik çarpımı başka bir vektördür. Bu operasyonların dereceleri azaldığı için tekrar nokta sembolü kullanılır ve

$$\vec{a}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\vec{a}\mathbf{B} - \mathbf{B}\vec{a}) \quad (3.22)$$

formülü yazılır. Burada  $\mathbf{B}$  sıradan bivektördür. Yeniden düzenlemeyle geometrik cebirde çok faydalı sonuçlardan biri ispatlanabilir:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c}\vec{b} \quad (3.23)$$

Eşitlik (3.16)' dan;

$$\vec{a}\cdot\mathbf{B} = \vec{a}_{II}\mathbf{B} = \vec{a}_{II}\cdot\mathbf{B} \quad (3.24)$$

dir. Böylece bivektör ile vektörün iç çarpımının etkisi düzlemde vektörün bileşenini yansıtmaktadır ve 90 derece boyunca döndüğü görülmektedir. Aynı zamanda,

$$\vec{a}\cdot\mathbf{B} = \vec{a}_{II}^2\vec{b} = -(\vec{a}_{II}\vec{b})\vec{a}_{II} = -\mathbf{B}\cdot\vec{a} \quad (3.25)$$

eşitliği kabul edilebilir. Bivektör ve vektör çarpımının kalan kısmı üç dereceli trivektördür. Bu çarpımın derecesi yükseldiği için wedge ile gösterilir. Böylece:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \frac{1}{2}[\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c}) + (\vec{b}\wedge\vec{c})\vec{a}] \quad (3.26)$$

ifadesi yazılır. Birleşme özelliğinden,

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \frac{1}{2}[\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c}) + (\vec{b}\wedge\vec{c})\vec{a}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(\vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}\vec{a} - \vec{c}\vec{b}\vec{a}) \\
&= \frac{1}{4}(2(\vec{a}\Lambda\vec{b})\vec{c} + \vec{b}\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}\vec{a} + 2\vec{c}(\vec{a}\Lambda\vec{b}) - \vec{c}\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c}\vec{b}) \\
&= \frac{1}{2}((\vec{a}\Lambda\vec{b})\vec{c} + \vec{c}(\vec{a}\Lambda\vec{b}) + \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}) \\
&= (\vec{a}\Lambda\vec{b})\Lambda\vec{c} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik 2.31' deki birleşme özelliğinden  $\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}$  sonucu yazılabilir.  $\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}$ 'nin çarpımı vektörlerin bütün çiftlerinde birleşmeli ve anti simetriktir. Buna Grassmann'ın dış çarpımı denir. Grassmann'ın dış çarpımı geometrik cebir ile denk olduğunu gösterir. Eşitlik 3.17' den;

$$\vec{a}\Lambda\mathbf{B} = \vec{a}_\perp\mathbf{B} = \vec{a}_\perp\Lambda\mathbf{B} \tag{3.28}$$

formülü elde edilir. Böylece bivektör ile dış çarpımın etkisi düzleme dik vektörün bileşenlerini yansıtır ve hacim elemanlarına (trivektör) geri döner. Bu çarpım onun vektör ve bivektör ispatında simetrik olduğunu doğrulayabilir:

$$\vec{a}\Lambda\mathbf{B} = \vec{a}_\perp\Lambda\vec{a}_\parallel\Lambda\vec{b} = -\vec{a}_\parallel\Lambda\vec{a}_\perp\Lambda\vec{b} = \vec{a}_\parallel\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{a}_\perp = \mathbf{B}\Lambda\vec{a} \tag{3.29}$$

Bir vektör ve bivektörün tüm çarpımları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\vec{a}\mathbf{B} = \vec{a} \cdot \mathbf{B} + \vec{a}\Lambda\mathbf{B} \tag{3.30}$$

Burada nokta, çarpımın en düşük dereceli kısmı, wedge ise en yüksek kısmı olarak genelleştirilebilir. Benzer şekilde vektörlerin geometrik çarpımı nokta ve wedge çarpımları, geometrik çarpım şeklinde yazılabilir:

$$\vec{a} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\vec{a}\mathbf{B} - \mathbf{B}\vec{a}),$$

$$\vec{a}\Lambda\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\vec{a}\mathbf{B} + \mathbf{B}\vec{a}) \quad (3.31)$$

Bivektör ve vektörün bütün çarpımları,  $\vec{a}\mathbf{B}$  çarpımlarında vektör ve trivektör terimlerini içerir. Bunun avantajı bütün çarpımların tersinir olmasıdır.

### 3.2.2 Üç Boyutlu Uzayda Bivektör Cebiri

Üç bağımsız bivektör bulmak için yeni bir çarpım kullanıldı. Bu çarpımla bivektörlerin karesinin skalar olduğu önceden belirtilmişti. Fakat temsil edilen dik düzlemde iki bivektörün birbiriyle çarpılmasından aşağıdaki ifade bulunur:

$$(\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \quad (3.32)$$

Sonuç üçüncü bir bivektördür. Aynı zamanda;

$$(\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \quad (3.33)$$

olduğu da bulunur. Böylece dik bivektörlerin çarpımı anti simetrik özeliğine sahip olduğu görülür. Temel baz bivektörler için sınıflandırma yapılırsa;

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \quad (3.34)$$

yazılabilir. Bu bivektörlerin çarpımları;

$$\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j = -\delta_{ij} - \epsilon_{ijk}\mathbf{B}_k \quad (3.35)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada simetrik kısım skalardır ve bu kısım yerine Kronecker delta fonksiyonu gelir. Ancak anti simetrik kısım bivektördür. Yüksek boyutlarda iki bivektörün symmetrised çarpımı ( $\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i$ )



sıfır dereceli ve dört dereceli terimlere sahiptir (burda dört dereceli terim nokta ve wedge çarpımlarıyla bulunur). Antisimetrised çarpım ( $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j$ ) her zaman bir bivektördür. Temel bivektörler aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{B}_1^2 = \mathbf{B}_2^2 = \mathbf{B}_3^2 = -1 \quad (3.36)$$

ve

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = -\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1, \quad \text{vb.} \quad (3.37)$$

Bu ifade aynı zamanda kuaternion cebirinin de özelliklerindedir. Hamilton, vektörler ile kuaternionları tanımlamaya çalışmıştır. Clifford cebirinde bunların bivektörler olduğu görülmektedir. Hamilton, birim kuaternionlarda  $ijk = -1$  koşulunu vurgulamasına rağmen;

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = +1 \quad (3.38)$$

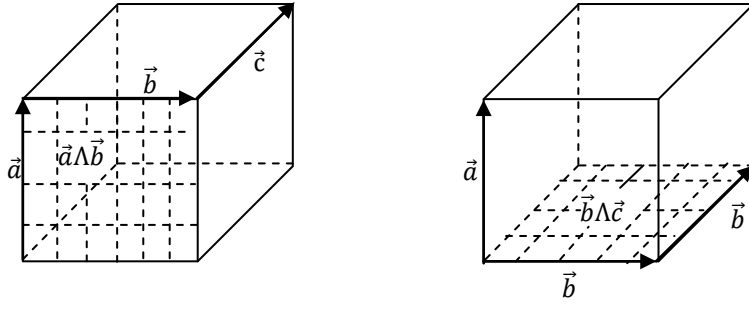
olduğu görülmektedir. Cebirleri eşdeğer kılmak için, işaret değiştirmek gerekir. Örneğin y bileşeninde olabilir:

$$\hat{i} \leftrightarrow \mathbf{B}_1, \quad \hat{j} \leftrightarrow -\mathbf{B}_2, \quad \hat{k} \leftrightarrow \mathbf{B}_3 \quad (3.39)$$

Hamilton ve diğerleri vektörlerin sağdan sola dönen takım olarak  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  ya bakışlarının aksine bu yaklaşım ile kuaternionlar bivektörlerin soldan sağa dönen takım olduğunu gösterir.

### 3.2.3 Trivektör

$\vec{a}, \vec{b}$  ve  $\vec{c}$  birer vektördür.  $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$  trivektörü  $\vec{c}$  vektörü boyunca  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  süpürerek şekillenirler (şekil 3.2) ve sonuç, yönelmiş paralel yüz olarak gösterilir.  $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$  trivektörü herhangi bir şekil bilgisi içermez, sadece hacmi ve yönelimini gösterir.



Şekil 3.2  $\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}$  trivektörü

Trivektörler için çeşitli cebirsel özelliklerin geometrik açıklamaları vardır.  $\vec{a}$  boyunca  $\vec{b}\Lambda\vec{c}$  ve  $\vec{c}$  boyunca  $\vec{a}\Lambda\vec{b}$  süpürülerek elde edilen hacim aynıdır. Bu da birleşme özelliğinin olduğunu göstermektedir:

$$\vec{a}\Lambda(\vec{b}\Lambda\vec{c}) = (\vec{a}\Lambda\vec{b})\Lambda\vec{c}$$

$\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}$  trivektörü arasındaki vektörlerden herhangi bir vektör çiftinin yer değiştirmesi, sonucun işaretini değiştirir. Herhangi bir çiftin yer değiştirmesi, geometrik şekilde hacmi süpüren yönelmeyi tersine dönüştürür. Vektör çiftlerinin ardışık iki yer değiştirmesi trivektörü tekrar kendisine dönüştürür (şekil 3.2):

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c} = \vec{c}\Lambda\vec{a}\Lambda\vec{b} = \vec{b}\Lambda\vec{c}\Lambda\vec{a} \quad (3.40)$$

Uzayda birim pseudoskalar standart I sembolü ile gösterilir:

$$I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad (3.41)$$

Buradaki  $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ , soldan sağa oluşturulmuş dik vektörler kümesidir. Eğer bu dik vektörler sağdan sola doğru çarpılırsa, sonuç  $-I$  olur. Üç vektörün keyfi kümesi;

$$\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c} = \alpha I \quad (3.42)$$

olur. Burada  $\alpha$  skaldardır.  $|\alpha|$ ;  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektörleri ile tanımlanan paralelkenarın hacmidir.  $\alpha$ 'nın işareti;  $\{a, b, c\}$  kümesinin soldan sağa ( $\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}$ ) ya da sağdan sola ( $\vec{c}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{a}$ ) yapıda oluşup oluşmadığı belirler. Üç boyutta bu, trivektörün özelliğini açıklar.

$\mathbf{e}_1$  vektörü ile pseudoskalar çarpımına bakılırsa;

$$\mathbf{e}_1 I = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad (3.43)$$

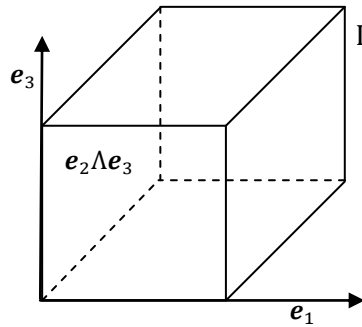
sonuç bivektöre dönüşür ve bu  $\mathbf{e}_1$  vektörüne dik düzlemdir (Şekil 3.3). Üç dereceli pseudoskalar ile bir dereceli vektörün çarpımı iki dereceli bivektördür. Bu çarpım sol taraftan yapılırsa;

$$I\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad (3.44)$$

elde edilir. Bu sonuçtan da görülüyor ki vektörün yer değiştirilerek pseudoskalarla çarpılması, sonucu değiştirmedi. Bu sonuç herhangi bir birim vektör içinde aynıdır.

$$I\vec{a} = \vec{a}I \quad (3.45)$$

Pseudoskalar ile çarpım her boyutta değişme özelliğine sahiptir.



Şekil 3.3 Vektör ve Trivektör.  $\mathbf{e}_1$  vektörü ile I trivektörü çarpımının sonucu  $\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  düzlemdir. Bu düzlem,  $\mathbf{e}_1$  vektörüne dik bir düzlemdir

Temel baz bivektörlerin her biri, pseudoskalarla dual vektörlerin çarpımıyla ifade edilebilirler:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = I\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = I\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = I\mathbf{e}_2 \quad (3.46)$$

Pseudoskalarla çarpılan bu vektörler Grassmann tarafından gösterilen dual (duality) dönüşüm olarak adlandırılır. Çarpımda düşük dereceli terimi göstermek için nokta çarpım kullanılır:

$$\vec{a}I = \vec{a} \cdot I \quad (3.47)$$

Bunun sonucu,  $\vec{a}$  ' ne dik  $I$  ' nın bileşenlerinin iz düşümü olduğu anlaşılabilir.

Pseudoskaların karesi,

$$I^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -1 \quad (3.48)$$

Pseudoskaların bütün elemanları yer değiştirir ve karesi de -1' dir. Bu yüzden birim sanal için adaydır.  $I$  ' nın özellikleri üç boyutta,  $i$  sembolü ile yerdeğiştirebilir. Bu, birçok literatürde yaygın bir örnektir. Ancak bu eğilim karışıklığa yol açabilir.

Son olarak bivektör ve pseudoskaların çarpımına bakılır;

$$I(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2) = I\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = I\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \quad (3.49)$$

$\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  'den oluşan bivektör ile  $I$  ' nın çarpımının sonucu  $-\mathbf{e}_3$  'tür. Yani  $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$  düzleminin eksi yöndeki dik vektörüdür. Bu kartezyen (cross) çarpımın tanımını sağlar:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -I(\vec{a}\wedge\vec{b}) \quad (3.50)$$

Burada dış çarpım ve duallik olduğu için Kartezyen çarpım gereksizdir. Örneğin; iki Kartezyen çarpım yapılırsa,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -I\vec{a}\Lambda(-I(\vec{b}\Lambda\vec{c})) = \frac{1}{2}I(\vec{a}I(\vec{b}\Lambda\vec{c}) - (\vec{b}\Lambda\vec{c})I\vec{a}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b}\Lambda\vec{c}) \quad (3.51)$$

olur.

### 3.2.4 Pauli Cebiri

Vektörler için geometrik çarpım şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \delta_{ij} + I \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (3.52)$$

Pauli matrisleri uzayın geometrik cebirinin matris gösterimlerini oluşturur. Pauli matrisleri;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

dır. Bu matrisler

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.54)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik 3.54' deki I, 2x2 olarak tanımlanan matristir. Bu matrisler spin kuantum teorisinin araştırmalarında Pauli tarafından bulunmuştur. Geometrik cebiri (kuantum teorisinde Clifford cebiri) ile bağlantısı sonradan yapılmıştır.

Her bir Pauli matrisinin kendisi ile çarpımı birim matrisi verir:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \quad (3.55)$$

Pauli matrisleri arasında,

$$\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1$$

$$\sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1 \sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2 \quad (3.56)$$

bağıntıları vardır. Pauli matrisleri ile  $Cl_3$ ' ün birim bazları arasında ise

$$\mathbf{e}_1 \cong \sigma_1, \quad \mathbf{e}_2 \cong \sigma_2, \quad \mathbf{e}_3 \cong \sigma_3 \quad (3.57)$$

İzomorfizmi vardır. Bu izomorfizmi

$I$	$1$
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3$	$\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	$\mathbf{e}_{123}$

şeklinde ifade edilir [11].

Pauli matrislerinden “isospace” de vektör bileşenleri olarak söz edilir.

Pauli matrislerinin  $Cl_3$  ' ün matris gösterimlerini oluşturması, multivektör uygulamalarının alternatif yöntemini oluşturur.

### 3.3 Yansıma Operasyonu

Dönme ve yansıma operasyonları ele alındığında Clifford cebirinin kullanılabilirliği ortaya çıkar. Keyfi  $\vec{a}$  vektörünün  $\hat{n}$  birim vektörüne ( $n^2 = 1$ ) dik ve paralel bileşenleri basit bir formülle gösterilir:

$$\vec{a} = n^2 \vec{a} = n(n \cdot \vec{a} + n \wedge \vec{a}) = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \quad (3.58)$$

Burada

$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{a} \cdot n, \quad \vec{a}_{\perp} = n \wedge \vec{a} \quad (3.59)$$

'dır.  $\vec{a}_{\parallel}$  için formül  $\hat{n}$  için  $\vec{a}$  üzerinde yansımasıdır ve kalan diğer terim ise dik bileşen olmalıdır.  $\vec{a}_{\perp}$ ,  $n$ ' ye dik olduğu gösterilebilir:

$$n \cdot \vec{a}_{\perp} = \langle n \wedge \vec{a} \rangle = \langle n \wedge \vec{a} \rangle = 0 \quad (3.60)$$

Bu, geometrik çarpımlarda yer alan iç ve dış çarpımların derece operasyonunda nasıl türetildiğinin basit bir örneğidir.

Düzlemde  $\hat{n}$ ' ye dik  $\vec{a}$  vektörünün yansımasının sonucu vektördür:

$\vec{a}' = \vec{a}_\perp - \vec{a}_{II}$  (Şekil 3.4). Bu;

$$\vec{a}' = \vec{a}_\perp - \vec{a}_{II} = n\Lambda\vec{a} - \vec{a} \cdot nn = -n \cdot \vec{a}n - n\Lambda\vec{a}n = -n\vec{a}n \quad (3.61)$$

olarak yazılır. Bu formülün, geometrik çarpım olmadan yazılması daha zordur. Sadece iç çarpımla yapılan yansıma formülü;

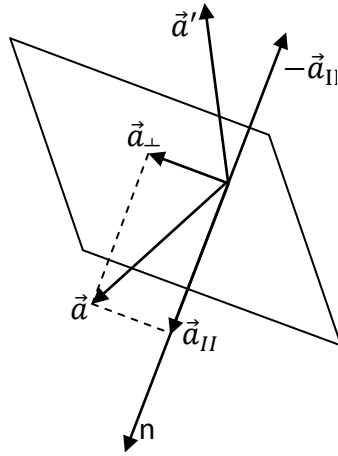
$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{a} \cdot nn \quad (3.62)$$

şeklinde bulunur.

Herhangi bir boyuttaki uzay için,

$$\vec{a}' = -n\vec{a}n, \quad (3.63)$$

ifadesi yazılabilir. Bu, yansıma operasyonları için oldukça geçerli bir formüldür.



Şekil 3.4  $\vec{a}$  vektörünün  $\hat{n}$ ' ye dik düzlemde yansıması

Yansıma operasyonları için Eşitlik 3.63'de ortaya çıkan uzunluklar ve açılar değişmez. Eğer vektörler yansıtılırsa, vektörler arasındaki skalar çarpım değişmez, aynı kalır. Bu yeniden düzenlendiğinde,

$$(-n\vec{a}) \cdot (-n\vec{b}) = \langle (-n\vec{a})(-n\vec{b}) \rangle = \langle n\vec{a}n\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}n\vec{b}n \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (3.64)$$

bulunur.

### 3.3.1 Bivektörlerin Yansıması

$\mathbf{B} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  bivektör olmak üzere,  $n$ ' ye dik düzlemde  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerin yansımasının sonucu

$$\mathbf{B}' = (-n\vec{a}) \wedge (-n\vec{b}) \quad (3.65)$$

dir. Bu ifade sadeleştirilirse;

$$(-n\vec{a}) \wedge (-n\vec{b}) = \frac{1}{2}(n\vec{a}n\vec{b}n - n\vec{b}n\vec{a}n) = \frac{1}{2}n(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})n = n\mathbf{B}n \quad (3.66)$$

bulunur.  $n\mathbf{B}n$ , vektörler arasındaki multivektörünün derecesi her zaman korunur.  $n\mathbf{B}n$  formülünün sonucu, bivektörlerin işaretinin değişmesi dışında, bivektörün aynı dönüşüm kurallarına maruz kaldığını gösterir. Bu, polar ve aksenal (axial) vektörler arasındaki geleneksel farkın başlangıcıdır. Aksenal (axial) vektörler genellikle Kartezyen çarpım tarafından türetilir. Kartezyen çarpımın bivektörleri ürettiği ve bivektörün duali ile geri vektör oluşturduğu Bölüm 3.2.3'de bahsedilmişti. Dual vektör  $\mathbf{IB}$  de aynı dönüşüm kurallarına maruz kalır:

$$I(n\mathbf{B}n) = n(\mathbf{IB})n \quad (3.67)$$

Bu yüzden (polar) vektör olarak dönüşmez.



### 3.3.2 Trivektörlerin Yansıması

Üç boyutlu uzayda yansıma operasyonunun uygulamasını yapmak için son bileşen  $\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}$  trivektörüne bakılır.

$$(-n\vec{a})\Lambda(-n\vec{b})\Lambda(-n\vec{c}) = \langle(-n\vec{a})(-n\vec{b})(-n\vec{c})\rangle_3 = -\langle n\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rangle_3 \quad (3.68)$$

Üç vektörün geometrik çarpımından trivektör şekillendirmenin yolu sadece üçünün birden dış çarpımının yapılmasıyla olur.  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  çarpımı sadece trivektör ve vektör terimlerini içerir. Bu, genel (toplam) trivektöre sebep olmaz. Bu yüzden Eşitlik 3.68' de sol taraftaki eşitlik ile ;

$$(-n\vec{a})\Lambda(-n\vec{b})\Lambda(-n\vec{c}) = -\langle n\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c}\rangle_3 \quad (3.69)$$

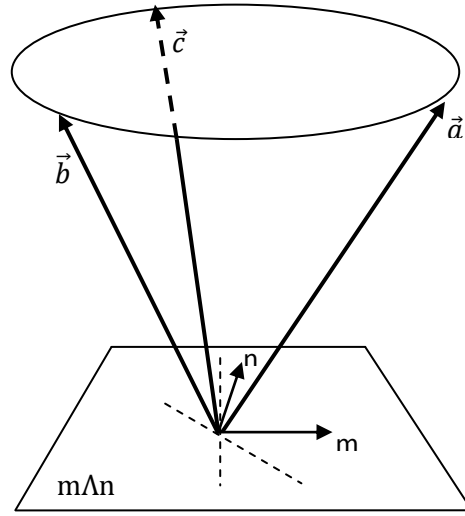
ifadesi bulunur. Ancak üç boyutlu herhangi bir trivektör, vektörlerin yer değiştirme özelliğine sahip olan pseudoskalar I' dır. Böylece,

$$(-n\vec{a})\Lambda(-n\vec{b})\Lambda(-n\vec{c}) = -\vec{a}\Lambda\vec{b}\Lambda\vec{c} \quad (3.70)$$

ifadesi bulunur. Bu, trivektör ifadesinin işaretini tersine döndürür. Bu; soldan sağa doğru oluşmuş üçlü takımındaki  $(abc)$  üç vektör düzlemde yansıtılırsa, yansıma sonucunda oluşan bu üçlü takım sağdan sola  $(cba)$  doğru olduğu anlamına gelir.

### 3.4 Dönme Operasyonu

$m$  ve  $n$  birim vektörlerinin  $m\Lambda n$  ile oluşturduğu düzlemdeki dönme operasyonu,  $m$  ve  $n$ ' ye dik düzlemdeki ardışık yansımalarla oluşur [13]. Bu dönme, Şekil 3.5' de gösterilmiştir.  $m\Lambda n$  düzlemine dik bir bileşen bu dönme operasyonundan etkilenmez ve basit trigonometri, başlangıç vektör  $\vec{a}$  ve son vektör  $\vec{c}$  arasındaki açı  $m$  ve  $n$  arasındaki açının iki katı olduğunu gösterir. Bu yüzden ardışık yansımaların sonucu  $m\Lambda n$  düzleminde  $2\theta$  açısı boyunca dönmesidir. Burada  $m.n = \cos(\theta)$ 'dir.



**Şekil 3.5** İki yansımadan bir dönme elde edilmesi.  $\vec{b}$  vektörü,  $m$ ' ye dik düzlemde  $\vec{a}$ ' nün yansımalarının sonucudur ve  $\vec{c}$  vektörü,  $n$  ye dik düzlemde  $\vec{b}$ ' nin yansımalarının sonucudur.

Geometrik cebirde

$$\vec{b} = -m\vec{a}m \quad (3.71)$$

dir ve ikinci yansımayı elde etmek için

$$\vec{c} = -n\vec{b}n = -n(-m\vec{a}m)n = nm\vec{a}mn \quad (3.72)$$

oluşturulur. Böylece,

$$R = nm \quad (3.73)$$

ifadesi tanımlanır. Bu yüzden dönmenin sonucu

$$\vec{c} = R\vec{a}R^\dagger \quad (3.74)$$

olarak yazılabilir.  $\vec{a} \mapsto R\vec{a}R^\dagger$  dönüşümü, ele alınan dönmelerin genel ifadesidir. Bu türetilen dönüşümlerde vektör uzayının boyutu belirtilmemiştir. Bu yüzden dönüşüm kuralları her ne boyutta olursa olsun

bütün uzayda çalışmalıdır. Bu kural aynı zamanda multivektörlerin herhangi bir derecesi için de uygundur.

### 3.4.1 Rotorlar

$R = nm$  niceliği “rotor” olarak adlandırılır ve Clifford cebirinin uygulamalarında çok önemli bir yere sahiptir. Eşitlik 3.73 ve Eşitlik 3.74’ de her ikisinin geometrik çarpımı yapılır ve bu da rotorların, geometrik cebirde eşsiz, olan dönmelerin kullanımın olanak sağladığını gösterir.  $R$  ile ilgili olarak;

$$R = nm = n \cdot m + n \wedge m = \cos(\theta) + n \wedge m \quad (3.75)$$

yazılabilir. Eşitlik 2.53’de  $m \wedge n$  bivektörünün büyüklüğü hesaplanmıştı.

Buradan

$$(n \wedge m)(n \wedge m) = -\sin^2(\theta) \quad (3.76)$$

dir. Birim  $\mathbf{B}$  bivektörü  $m \wedge n$  düzleminde

$$\mathbf{B} = \frac{m \wedge n}{\sin(\theta)}, \quad \mathbf{B}^2 = -1 \quad (3.77)$$

olarak tanımlanır.  $n \wedge m$  den ziyade  $m \wedge n$  yöneliminin seçilme sebebi; Şekil 3.5’ de gösterildiği gibi dönme operasyonlarının, üretilen bivektör tarafından belirlenmiş yönelimlerini kesinleştirmektir.  $\mathbf{B}$  bivektör terimiyle

$$R = \cos(\theta) - \mathbf{B} \sin(\theta) \quad (3.78)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlik, birim bivektör  $\mathbf{B}$  ile yer değiştirmiş birim imaginary (sanal) ile kompleks sayıların polar ayrışımını gösterir. Bu

yüzden  $R$ , normal koşullarda güçlü serilerle tanımlanan eksponansiyel ile aşağıdaki şekilde yazılır:

$$R = \exp(-\mathbf{B}\theta) \quad (3.79)$$

Yukarıdaki eşitlikler  $2\theta$  açılı dönme operasyonları için yapılmıştı. Eğer  $\theta$  kadar bir dönme yapılması istenirse, rotor

$$R = \exp(-\mathbf{B}\theta/2) \quad (3.80)$$

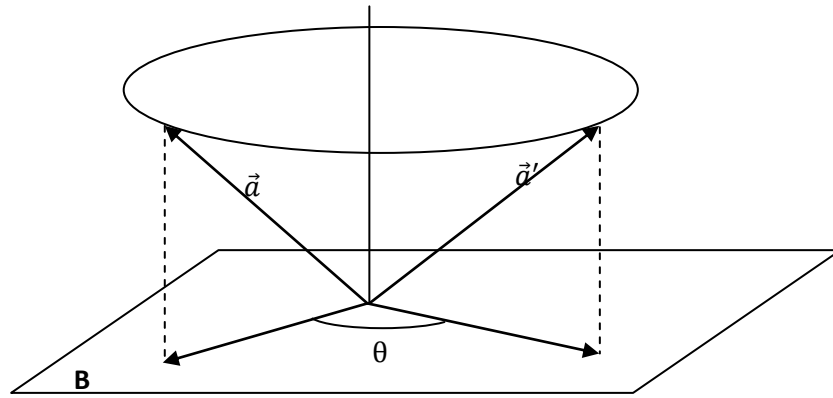
şeklinde elde edilir. Eşitlik 3.80 sayesinde  $B$  düzleminde  $\theta$  açısıyla dönme için

$$\vec{a} \mapsto \vec{a}' = e^{-\mathbf{B}\theta/2} a e^{\mathbf{B}\theta/2} \quad (3.81)$$

formülü yazılır (Şekil 3.6). Bu tanımdan, düzlemde dönme operasyonlarının yer alacağı çıkarımı yapılabilir ve herhangi bir boyutta denklemlerin geçerli olduğu görülebilir. Eşitlik 3.81'den rotor;

$$R = \cos(\theta/2) + \mathbf{B}\sin(\theta/2) \quad (3.82)$$

olduğu görülür [12]. Burada  $R^\dagger \vec{a} R$  yerine  $R \vec{a} R^\dagger$  dönmenin sadece yönünü değiştirir.



Şekil 3.6 Üç boyutta dönme.

R rotoru iki birim vektörün geometrik çarpımı olduğu için,

$$RR^\dagger = nm(nm)^\dagger = nmmn = 1 = R^\dagger R \quad (3.83)$$

eşitliği görülür. Bu eşitlik, açı ve uzunlukların korunduğu formüllerin ispatıdır.  $\vec{a}' = R\vec{a}R^\dagger$  ve  $\vec{b}' = R\vec{b}R^\dagger$  varsayılırsa bu ikisinin çarpımı

$$\begin{aligned} \vec{a}' \cdot \vec{b}' &= \frac{1}{2} (R\vec{a}R^\dagger R\vec{b}R^\dagger + R\vec{b}R^\dagger R\vec{a}R^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} R(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a})R^\dagger = \vec{a} \cdot \vec{b} RR^\dagger = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (3.84)$$

şeklinde bulunur. Bunların ters dönüşümünü yapmak da mümkündür:

$$\vec{a} = R^\dagger \vec{a}' R \quad (3.85)$$

Bunun ispatı;

$$R^\dagger \vec{a}' R = R^\dagger R \vec{a} R^\dagger R = \vec{a} \quad (3.86)$$

şeklinde bulunur.

### 3.4.2 Rotorun Bulunması

$\vec{a}$  vektörünün başka bir  $\vec{b}$  vektörüne döndüğü varsayılınsın. Bu  $\vec{a}$  ile  $\vec{b}$  nin ortasındaki  $\vec{n}$  birim vektörüne dik bir yansıma (reflection) ve bunu takiben  $\vec{b}$  ye dik düzlemdeki bir yansımayla yapılır (Şekil 3.7).  $\vec{n}$  vektörü,  $\vec{a}$  yı  $-\vec{b}$  ye yansıtan

$$\vec{n} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|} \quad (3.87)$$

eşitliği ile verilir. Bunu  $\vec{b}$  ye dik düzlemdeki yansımayla (reflection) birleştirdiğimizde düzlemde basit bir dönme (rotation) temsil eden rotor,

$$R = \vec{b}\vec{n} = \frac{1+\vec{b}\vec{a}}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{1+\vec{b}\vec{a}}{\sqrt{2(1+\vec{b}\cdot\vec{a})}} \quad (3.88)$$

şeklinde bulunur. Bu da  $\vec{a}\Lambda\vec{b}$  düzleminde basit bir yansımayı gösterir. Bu formülden,

$$R\vec{a} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{\sqrt{2(1+\vec{b}\cdot\vec{a})}} = \vec{a} \frac{1+\vec{a}\vec{b}}{\sqrt{2(1+\vec{b}\cdot\vec{a})}} = \vec{a}R^\dagger \quad (3.89)$$

eşitliği bulunur. Buradan,

$$R\vec{a}R^\dagger = R^2\vec{a} = \vec{a}R^{+2} \quad (3.90)$$

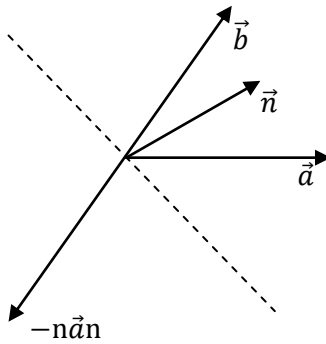
elde edilir. Bu, dönme düzleminde vektörler için her zaman mümkündür.

$R = \exp\left(-\frac{\mathbf{B}\theta}{2}\right)$  polar şekline geri bakıldığında,

$$R^2 = \exp(-\mathbf{B}\theta) \quad (3.91)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki Eşitlik 3.92 ile  $\vec{a}, \vec{b}$  üzerinde dönebilir:

$$\vec{b} = e^{-\mathbf{B}\theta}\vec{a} = \vec{a}e^{\mathbf{B}\theta} \quad (3.92)$$



**Şekil 3.7**  $\vec{a}$ ' dan  $\vec{b}$ ' ye dönme.  $\vec{a}$  vektörü,  $\vec{n}$ ' ye dik düzlemde ilk yansıma tarafından  $\vec{b}$ ' ye döndürülür.  $\vec{a}, \vec{b}$  ve  $\vec{n}$ ' in hepsi birim uzunluktadırlar.

Bu, kompleks sayıları kullanılarak elde edilen düzlemde bulunan şekildir ve dönmeler için quaternionların kullanımı üzerindeki düşüncelerin kaynağıdır [14]. Hamilton;  $\vec{a} \mapsto R\vec{a}$  şeklinin tek yönlü dönüşüm kuralının, exponansiyelde görünen tam açı ile dönme yapmanın en iyi yolu olması gerektiğini düşündü. O, bunun kompleks sayı gösteriminin doğal genelleştirmesi olduğunu da kabul etti. Fakat bu formülün sadece dönme düzleminde vektörler için çalıştığı görülüyor. Bütün vektörler için doğru formül çift yönlü yarım açı formülü  $\vec{a} \mapsto R\vec{a}R^\dagger$  'dür. Bu formül,  $\vec{a}\Lambda\vec{b}$  düzlemine dik c vektörünü gösterir:

$$\vec{c}R = \vec{c} \frac{1+\vec{b}\vec{a}}{\sqrt{2(1+\vec{b}\cdot\vec{a})}} = \frac{1+\vec{b}\vec{a}}{\sqrt{2(1+\vec{b}\cdot\vec{a})}} \vec{c} = \vec{c}R \quad (3.93)$$

Bu yüzden

$$R\vec{c}R^\dagger = \vec{c}RR^\dagger = \vec{c} \quad (3.94)$$

elde edilir ve vektör dönmemiştir (unrotated). Tek yön kuralı bu özelliğe sahip değildir. Tanımlanan çift yönlü dönüşüm kuralı,

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = e^{e_1e_2\pi/2} \quad (3.95)$$

gibi birim bivektörlerin  $\pi/2$  kadar değil  $\pi$  kadar dönmelerin üreticisi olduğu anlamına gelir. Birim bivektörlerin karesinin  $-1$ 'e eşit olması bununla uyumludur. Çünkü çift yönlü etki olduğunda rotor  $-1$ ' dir. Daha genelleştirilmek istenirse R ve  $-R$  aynı dönmeyi üretir.

### 3.4.3 Multivektörlerin Dönmeleri

İki vektörün oluşturduğu  $\mathbf{B} = \vec{a}\Lambda\vec{b}$  bivektörü döndürüldüğü varsayalım. Bunun sonucunda oluşan ifade için,

$$\mathbf{B}' = \vec{a}'\Lambda\vec{b}' = \frac{1}{2}(R\vec{a}R^\dagger R\vec{b}R^\dagger - R\vec{b}R^\dagger R\vec{a}R^\dagger)$$

$$= \frac{1}{2}R(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})R^\dagger = R\vec{a}\Lambda\vec{b}R^\dagger = R\mathbf{B}R^\dagger \quad (3.96)$$

bulunur. Burada  $R^\dagger R = 1$  rotor normalizasyon formülü kullanılır. Bivektörler, vektörler için kullanılan dönme formülleri kullanılarak döndürülür. Bu benzerlik bütün geometrik multivektörler için doğrudur. Bu geometrik cebirin çok etkili özelliklerinden biridir.  $\mathbf{A} \mapsto R\mathbf{A}R^\dagger$  dönüşümünün, rotorların etkilediği multivektörlerin derecelerini koruduğu ispatlandı. Üç boyuttaki uygulamalarda, vektörler ve bivektörler için gösterilen formüllerin trivektörde çıkan sonuçlarına bakılmalıdır. Üç boyutta pseudoskalar, I, cebirde diğer terimlerle yer değiştirir:

$$RIR^\dagger = IRR^\dagger = I \quad (3.97)$$

Yukarıdaki formülde derecenin kesinlikle korunduğu görülmektedir. Bu sonuç, multivektörler için dönmelerin determinanı +1 olduğunu gösterir.

#### 3.4.4 Rotor Birleşim Kuralları

Rotorların nasıl dönmeler gösterdiğini görmek için rotor birleşim kurallarına bakılmalıdır. Rotor  $R_1$  ile  $\vec{a}$  vektörünü döndürerek  $\vec{b}$  vektörüne dönüşün:

$$\vec{b} = R_1\vec{a}R_1^\dagger \quad (3.98)$$

Şimdi rotor  $R_2$  ile  $\vec{b}$  vektörünü döndürerek  $\vec{c}$  vektörü elde edilsin:

$$\vec{c} = R_2\vec{b}R_2^\dagger = R_2R_1\vec{a}R_1^\dagger R_2^\dagger = R_2R_1\vec{a}(R_1R_2)^\dagger \quad (3.99)$$

Böylece;

$$\vec{c} = R\vec{a}R^\dagger \quad (3.100)$$



formülü elde edilir. Birleşik rotor

$$R = R_2 R_1 \quad (3.101)$$

şeklinde verilir. Bu rotorlar için grup birleşim kuralıdır. İki rotorun çarpımı üçüncü bir rotor oluşturduğu için rotorlar grup oluşturur. Bu aşağıdaki gibi kontrol edilebilir:

$$R_2 R_1 (R_2 R_1)^\dagger = R_2 R_1 R_1^\dagger R_2^\dagger = R_2 R_2^\dagger = 1 \quad (3.102)$$

Üç boyutta multivektör  $R$  sadece sabit dereceli elemanları içermesi ve  $RR^\dagger$  yi belirtmesi,  $R$  rotorunun oluşumu için yeterlidir. Rotorlar, Lie grup diye adlandırılan sürekli grupları oluşturur. Rotorlar, bütün multivektörlerin çift yönlü dönüşüm kuralını sağlar. Rotorlar zaten karma dereceli objelerdir. Bu yüzden başka bir rotorla sağdan ya da soldan çarpılması, rotor uzayının dışına çıkmaz. Doğru ve düzlem gibi bütün geometrik birimler tek dereceli objelerdir ve onların dereceleri dönmelerle değişmez. Bu yüzden onlara çift yönlü dönüşüm kurulları uygulanır.

Eşitlik 3.101' deki birleşme kuralı şaşırtıcı sonuca sahiptir. Rotor  $R_1$  sabit tutulsun ve  $R_2 = \exp(-\mathbf{B}\theta/2)$  oluşturulsun. Vektör  $\vec{c}$ ,  $2\pi$  sapma yapmış oldu. Son rotor  $R$ ,

$$R = e^{-\mathbf{B}\pi} R_1 = -R_1 \quad (3.103)$$

olur.  $2\pi$  lik dönme altında rotorun işareti değişir. Bu, fermionların varlığı ile ilgilenen kuantum mekanik olaylar olarak görülür. Fakat sonuç, klasik ve dönmelerin rotor tanımının basit sonucu olduğu görülür.  $R$  ve  $-R$  arasındaki farkın geometrik yorumu, dönmenin şekillendiği yönelme ile sağlanır.  $\mathbf{e}_1$  birim baz vektörü  $\mathbf{e}_2$  birim baz vektörü üzerinde döndüğü düşünölsün. Bunun için rotor

$$R(\theta) = e^{-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \theta/2} \quad (3.104)$$

olur. Eğer  $\pi/2$  boyunca pozitif yönde dönerse, rotor

$$R(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \quad (3.105)$$

şeklinde yazılır. Eğer negatif yönde (saat yönünde) dönerse, rotor

$$R(-3\pi/2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -R(\pi/2) \quad (3.106)$$

olur. Bu yüzden  $R$  ve  $-R$  aynı dönmeyi ve aynı dönme matrisini tanımlar.

Rotor bileşim kuralı, iki dönmenin birleşik etkisi için basit bir formülü sağlar:

$$R_1 = e^{-\mathbf{B}_1\theta_1/2}, \quad R_2 = e^{-\mathbf{B}_2\theta_2/2} \quad (3.107)$$

Burada  $\mathbf{B}_1$  ve  $\mathbf{B}_2$  her ikisi birim bivektörlerdir. Rotor çarpımı

$$\begin{aligned} R &= (\cos(\theta_2/2) - \sin(\theta_2/2)\mathbf{B}_2)(\cos(\theta_1/2) - \sin(\theta_1/2)\mathbf{B}_1) \\ &= \cos(\theta_2/2)\cos(\theta_1/2) - (\cos(\theta_2/2)\sin(\theta_1/2)\mathbf{B}_1 + \cos(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)\mathbf{B}_2) \\ &\quad + \sin(\theta_2/2)\sin(\theta_1/2)\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \text{ dır.} \end{aligned} \quad (3.108)$$

$R = R_2R_1 = \exp(-\mathbf{B}\theta/2)$  (burada  $\mathbf{B}$  birim bivektördür) yazılırsa,

$$\cos(\theta/2) = \cos(\theta_2/2)\cos(\theta_1/2) + \sin(\theta_2/2)\sin(\theta_1/2)\langle\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\rangle \quad (3.109)$$

ve

$$\begin{aligned} \sin(\theta/2)\mathbf{B} &= \cos(\theta_2/2)\sin(\theta_1/2)\mathbf{B}_1 + \cos(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)\mathbf{B}_2 - \\ &\quad \sin(\theta_2/2)\sin(\theta_1/2)\langle\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\rangle_2 \end{aligned} \quad (3.110)$$

formülleri görülür. Dönmeler için yarım açı bağıntısı, kuaternionların bulunmasından 3 yıl önce matematikçi Rodriguez tarafından bulundu [1].

Bunlar, iki dönmenin birleşik etkisini hesaplamamanın iyi bilinen basit bir yoludur.

### 3.4.5 Euler Açılıarı

Dönme parametresinin standart yolu üç Euler açısı  $\{\emptyset, \theta, \varphi\}$  ile olur. Bunlar,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  eksen kümesinin yerine  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  yeni eksen kümesine dönüşmesiyle tanımlanır (x,y,z sırasıyla x',y',z'ye dönüşür). İlk önce  $\mathbf{e}_3$  eksenini etrafında saat yönü tersinde  $\emptyset$  açısı kadar dönsün ( $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  düzleminde). Bunun için rotor

$$R_\emptyset = e^{-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\emptyset/2} \quad (3.111)$$

şeklinde olur.  $\theta$  açısı kadar dönüştürülmüş  $\mathbf{e}_1$  eksenini tarafından şekillenen eksen etrafında dönsün. Bunun için düzlem

$$IR_\emptyset\mathbf{e}_1R_\emptyset^\dagger = R_\emptyset\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3R_\emptyset^\dagger \quad (3.112)$$

ifadesi bulunur. Rotor

$$R_\theta = \exp(-R_\emptyset\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3R_\emptyset^\dagger\theta/2) = R_\emptyset e^{-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\theta/2} R_\emptyset^\dagger \quad (3.113)$$

olur. Şimdi ortanca rotor

$$R' = R_\theta R_\emptyset = e^{-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\emptyset/2} e^{-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\theta/2} \quad (3.114)$$

dir. Son olarak  $\varphi$  açısı kadar  $\mathbf{e}_3$  'e dönüşmüş eksen etrafında dönsün. Uygun düzlem

$$IR'\mathbf{e}_3R'^\dagger = R'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2R'^\dagger \quad (3.115)$$

dir ve rotor

$$R_\varphi = \exp(-R'e_1e_2R'^\dagger\varphi/2) = R'e^{-e_1e_2\varphi/2}R'^\dagger \quad (3.116)$$

Bu yüzden sonuçta oluşan rotor,

$$R = R_\varphi R' = e^{-e_1e_2\theta/2}e^{-e_2e_3\theta/2}e^{-e_1e_2\varphi/2} \quad (3.117)$$

şeklinde bulunur. Bunlarla çalışmak uygun matrislerle çalışmaktan daha kolay bir yoldur ve şekilleri tasavvur etmek daha kolaydır [1].

## 4. SİMETRİK VE YARI SİMETRİK YAPILAR

Bu bölüme kadar Clifford Cebiri'nin özelliklerinden söz edildi. Bu bölümde ise simetrik yapı olan platonik katılar ve yarı simetrik yapı olan Arşimet katılarının özelliklerinden bahsedilecek. Daha sonraki bölümlerde ise yarı simetrik yapı olan Arşimet katıları için dönme ve yansıma operasyonlarının cebirsel işlemleri Clifford Cebiri'nde yapılacaktır.

### 4.1 Platonik Katılar

Plato, M.Ö 400 de doğada mükemmel simetriye sahip noktalar setine sadece beş katının sahip olduğunu ortaya koydu ve buna “her şeyin teorisi” adını verdi. Bu teorinin ortaya çıkışından yaklaşık 2000 yıl sonra Johannes Kepler, benzeri bir yaklaşımla, bu beş katının geometrik özelliklerini kendi kozmolojik çalışmalarına uyguladı.

Plato'nun “her şeyin teorisi” yaklaşımı atom altı parçacıklar için de önemli rol oynadı. Plato atom-altı parçacıkların simetri açılarına göre Tablo 4.1'de görüldüğü gibi bir gruplama yaptı.

**Tablo 4.1** Plato'nun ilk kuramı

	1. tip	2. tip
Tetrahedron=plazma (ateş)	24	0
Oktahedron=gaz (hava)	48	0
İkosahedron=sıvı (su)	120	0
Heksahedron=katı (yer)	0	24

Plato'nun teorisine göre, atom-altı parçacıklar farklı kombinasyonlar ile farklı atom yapılarını oluşturabilmektedir. Atom-altı parçacıklar aralarında üç açılı üç bağ oluşturarak temel parçacığı meydana getirmektedir. Bağlar arasındaki bu açılar Tablo 4.1'de görüldüğü gibi 2

tipten oluşmaktadır. 1.tipte bağ üçgeninin kenar uzunlukları oranı  $(1, 1, \sqrt{2})$ , 2.tipte ise  $(1, 2, \sqrt{3})$  ' dir. Günümüzde yapılan çalışmalar tetrahedronun 24, oktahedronun 48, ikosahedronun 120 adet 1.tip, heksahedron ise 24 adet 2.tip üçgenin bir araya gelmesinden oluştuğunu göstermektedir. Atom-altı parçacıklar farklı şekillerde bir araya geldiklerinde, Tablo 4.1' de görüldüğü gibi, farklı yapılar oluşturabilmektedir. Örneğin, sıvıyı oluşturan 120 adet 1.tip üçgen, 5 adet plazma yapı, ya da 2 adet gaz ve 1 adet plazma yapı içermektedir. Plato'nun kuramına göre, bir sıvı, gazların ya da gaz ve plazmanın farklı kombinasyonlarla bir araya gelmesiyle oluşmaktadır.

Ayrıca Plato doğru açılar kullanıldığında, dodekahedrondan diğer dört simetrik katının elde edilebileceğini öne sürmüştür. Bu görüş daha da geliştirilerek Abraham F. Jalbout [15] tarafından makalesinde ispatlanmıştır.

$\mathbb{R}^3$  ' deki dışbükey tam simetrik düzgün katılara Platonik katılar adı verilir.  $\mathbb{R}^3$  uzayının sonlu alt gruplarının bazıları Platonik katılarla gösterilebilir [5].

- i. Bu çokyüzlüler  $\mathbb{R}^3$  uzayında, 2-boyutlu düzlemlerin, 1-boyutlu kenarların, köşelerde birleşmesi ile oluşur.
- ii. Bir çok yüzlünün tüm yüzeyleri, kenarları ve köşeleri birbirinin aynı ise düzgündür. Tüm yüzeyler aynı açılarla kenarlarda buluşurlar ve tüm kenarlar aynı açılarla köşelerde buluşurlar.

#### 4.2 Arşimet Katıları

Geometride Arşimet katısı, aynı köşede çakışan düzenli çokgenlerin iki ya da daha fazla çeşitlerinin birleşiminden oluşan yarı düzenli konveks çok yüzlü cisimlerdir. Hepsi de kusursuz bir şekilde kuşatılırlar, ancak platonik katılardan farklıdırlar. Platonik katılar, aynı köşede çakışan çokgenin sadece bir tipinin birleşiminden oluşur ve aynı köşede çakışmayan çok yüzeyleri olan Johnson katılarından gelir.

Arşimet katıları; tetrahedral, octahedral ve icosahedral simetrileri ile düzgün çokgenleri oluşturmak için kullanılan metot olan Wythoff yoluyla platonik katılarından oluşur.

Arşimet katıları ismini Arşimet'ten alır. Rönesans dönemi boyunca sanatçılar ve matematikçiler bu şekillerin hepsini yeniden bulmuş ve saf halini değerlendirmişlerdir. Bu araştırma, antik dönem sonrasında cisimlerin on üçünü birden Harmonices Mundi adlı yapıtında betimleyen ilk kişi Kepler olmuştur. Kepler, ayrıca, yine özdeş köşe noktaları ve düzenli yüzleri bulunan düzenli prizmalar ve antiprizmalardan oluşmuş iki sonsuz diziyi göstermiştir.

Elli üç adet yarı düzgün dışbükey olmayan çok yüzlü vardır; bunlardan biride dodekadodekahedrondur. Platon'un ve Arşimet'in çok yüzlü cisimleriyle ve Kepler –Poinot çokyüzlüleriyle birlikte tam yetmiş beş tane tek biçimli çok yüzlüden meydana gelen diziyi oluştururlar.

Arşimet katılarının eşleri, bir bütün halinde ilk kez Eugène Catalan (1814-1894) tarafından betimlenmiştir. Arşimet katıları ve benzerleri, Tablo 4.2 de benzerlerine denk düşecek şekilde yerleştirilmiştir. Bir Arşimet çokyüzlüsünün benzerini üretmek için, kenarortaylarından, cisim ortasına yerleştirilebilecek bir küreye teğet olacak şekilde, dik açı yapan çizgiler çizmemez yeterli olacaktır. Bu çizgiler benzerin kenarlarını ve ilk kesiştikleri noktalar da köşe noktalarını oluşturur. Arşimet cisimlerinin tek tür köşe noktaları, ama farklı türden yüzleri vardır. Dolayısıyla da benzerlerinin tek tür yüzleri, ancak farklı türden köşe noktaları bulunur.

İki tane düzgünömsü Arşimet katısı olan cuboctahedron ile icosidodecahedronun her ikisinin de Kepler tarafından keşfedilmiş rhombic (eşkenar dört yüzlü) benzerleri vardır. Tablo 4.2' de verilen Platon'un benzerleri halindeki çiftleri, bu rhombic çokyüzlülerinin yüzlerindeki köşegenleri tanımlar. Bunlar, rhombic dodekahedron için  $\sqrt{2}$  ve rhombic triakontahedron için de  $\emptyset$  oranlarını verirler. Kepler, arıların,

altıgenlerden oluşan bal peteklerini, bu tür  $\sqrt{2}$  oranlı rhombic çokyüzlülerden üç tane inşa ederek tamamladıklarını fark etmiştir. Kepler ayrıca düzgünömsü cisimleri içeren üç tane “benzerli çifti” de betimlemiştir. Burada küp bir rhombic çokyüzlü ve oktahedron da düzgünömsü bir çokyüzlü olarak ortaya çıkar [16].

**Tablo 4.2** Arşimet katılarının benzerleri (duali)

Arşimet katıları	Arşimet katılarının benzerleri
Truncated tetrahedron	Triakis tetrahedron
Cuboctahedron	Rhombic dodecahedron
Truncated cube	Triakis octahedron
Truncated octahedron	Tetrakis hexahedron
Rhombicuboctahedron	Deltoidal icositetrahedron
Truncated cuboctahedron	Disdyakis dodecahedron
Snub cube	Pentagonal icositetrahedron
İcosidodecahedron	Rhombic triacontahedron
Truncated dodecahedron	Triakis icosahedron
Truncated icosahedron	Pentakis dodecahedron
Rhombicosidodecahedron	Deltoidal hexecontahedron
Truncated icosidodecahedron	Disdyakis triacontahedron
Snub dodecahedron	Pentagonal hexecontahedron

### 4.3 Platonik Katıların ve Arşimet Katılarının Geometrik Özellikleri

Bu çalışmada Platonik katıların ve Arşimet katıların geometrik büyüklükleri ile ilgili verilecek tüm büyüklükler, normalize edilmiş katılara ait olacaktır. Normalize Arşimet katısı ise, her bir kenarının orta noktasının, katı hacminin merkezinde olduğu varsayılan orijine olan uzaklığı 1 birim olan katıdır.

Bir Platonik ve Arşimet katının yüz sayısı  $f$ , köşe sayısı  $v$ , kenar



sayısı  $e$  ile temsil edilir ise, aralarında

$$f + v - e = 2 \quad (4.1)$$

bağıntısı vardır [17, 18]. Platonik katılara ait bazı büyüklükler Tablo 4.3 de verilmektedir.

**Tablo 4.3** Platonik katılara ait büyüklükler

	yüz sayısı (f)	kenar sayısı (e)	köşe sayısı (v)	bir yüzü oluşturan kenar sayısı (p)	çifti	simetri grubu
Tetrahedron	4	6	4	3	Tetrahedron	$T_d$
Küb	6	12	8	4	Oktahedron	$O_h$
Oktahedron	8	12	6	3	Küb	$O_h$
İkosahedron	20	30	12	3	Dodekahedron	$I_h$
Dodekahedron	12	30	20	5	İkosahedron	$I_h$

Arşimet katılarına ait bazı büyüklükler Tablo 4.4 de verilmektedir [19].

**Tablo 4.4** Arşimet katılarına ait büyüklükler

	Katı ismi	yüz sayısı (f)		kenar sayısı (e)	köşe sayısı (v)	Simetri grubu
1	truncated tetrahedron	8	4 üçgen 4 altıgen	18	12	T <sub>d</sub>
2	cuboctahedron	14	8 üçgen 6 kare	24	12	O <sub>h</sub>
3	truncated cube or truncated hexahedron	14	8 üçgen 6 sekizgen	36	24	O <sub>h</sub>
4	truncated octahedron	14	6 kare 8 altıgen	36	24	O <sub>h</sub>
5	rhombicuboctahedron or small rhombicuboctahedron	26	8 üçgen 18 kare	48	24	O <sub>h</sub>
6	truncated cuboctahedron or great rhombicuboctahedron	26	12 kare 8 altıgen 6 sekizgen	72	48	O <sub>h</sub>
7	snub cube or snub hexahedron or snub cuboctahedron	38	32 üçgen 6 kare	60	24	O
8	icosidodecahedron	32	20 üçgen 12 beşgen	60	30	I <sub>h</sub>
9	truncated dodecahedron	32	20 üçgen 12 ongen	90	60	I <sub>h</sub>
10	truncated icosahedron or buckyball or football/soccer ball	32	12 beşgen 20 altıgen	90	60	I <sub>h</sub>
11	rhombicosidodecahedron or small rhombicosidodecahedron	62	20 üçgen 30 kare 12 beşgen	120	60	I <sub>h</sub>
12	truncated icosidodecahedron or great rhombicosidodecahedron	62	30 kare 20 altıgen 12 ongen	180	120	I <sub>h</sub>
13	snub dodecahedron or snub icosidodecahedron	92	80 üçgen 12 beşgen	150	60	I

Platonik katıları ve Arşimet katılarını Schläfli sembolü ile de temsil edebiliriz.  $p$  her bir yüze ait kenar sayısı,  $q$  ise her bir köşede birleşen yüz sayısı olmak üzere, her bir Platonik katı  $\{p,q\}$  formunda Schläfli sembolü ile temsil edilebilir [20]. Bu temsile göre Platonik katıların gösterimi Tablo 4.6’ da ve Arşimet katıların gösterimi Tablo 4.7’ de verilmiştir [21]. Coxeter, düşey boyutu sembole ekleyerek quasiregular (sözde düzenli) çokyüzlüsünün Schläfli sembol kullanımını genişletti. Bu, genel Coxeter-Dynkin diyagramının başlangıç noktasıdır [22]. Bu Tablo 4.5 de gösterilmiştir.

**Tablo 4.5** Genişletilmiş Schläfli sembolü

Şekil (Form)	Genişletilmiş Schläfli sembolü	t-gösterimi	Coxeter-Dynkin diyagramı
Regular (Düzenli)	$\{p,q\}$	$t_0\{p,q\}$	
Quasiregular (Sözde düzenli)		$t_1\{p,q\}$	
Regular dual (Düzenli eşitliği)	$\{q,p\}$	$t_2\{p,q\}$	

**Tablo 4.6** Platonik katıların Schläfli sembolü ile temsili

Platonik katı	Schläfli sembolü
Tetrahedron	$\{3,3\}$
Küb	$\{4,3\}$
Oktahedron	$\{3,4\}$
İkosahedron	$\{3,5\}$
Dodekahedron	$\{5,3\}$

**Tablo 4.7** Arşimet katılarının Schläfli sembolü ile temsili

Arşimet katıları	Schläfli sembolü
Truncated tetrahedron	$t\{3,3\}$
Cuboctahedron	$t_1\{4,3\}$ $t_{0,2}\{3,3\}$
Truncated cube	$t\{4,3\}$
Truncated octahedron	$t_{0,1}\{3,4\}$ $t_{0,1,2}\{3,3\}$
Rhombicuboctahedron	$r\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$
Truncated cuboctahedron	$t\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$
Snub cube	$s\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$
İcosidodecahedron	$\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$
Truncated dodecahedron	$t\{5,3\}$
Truncated icosahedron	$t\{3,5\}$
Rhombicosidodecahedron	$r\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$
Truncated icosidodecahedron	$t\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$
Snub dodecahedron	$s\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$

#### 4.4 Arşimet Katılarının İncelenmesi

Bu bölümde Arşimet katılarının her birinin geometrik özellikleri ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Arşimet katıları kendi aralarında; “beş kesik çokyüzlü”, “cuboctahedron”, “icosidodecahedron”, “dört genişleme”, “döndürme” şeklinde 5 başlıkta ele alındı [16].

#### 4.4.1 Beş Kesik Çokyüzlü

Platon cisimlerinin tepeleri kesildiğinde, eşit kenarlı beş tane Arşimet çokyüzlüsü oluşur. Bu kesik cisimler Platon çokyüzlülerinin köşe noktası görüntülerini kusursuz bir şekilde göz önüne sererler: Tetrahedron, küp ve dodekahedron için üçgen biçimini; oktahedron için kare biçimini; ikosahedron için beşgen biçimini ifade ederler. Her bir Arşimet katısı için hem kuşatan bir küre hem de yuvarlanan bir küre söz konusudur. Yüzlerinin her biri için de birer iç küre vardır; küçük boydaki iç küreler büyük yüzlerin merkezlerine değerler. Bu durumda, her bir kesik cisim dörder tane eşmerkezli küreyi tanımlar.

Beş tane kesik çokyüzlünün her biri hem kökenlerini oluşturan hem de onlarla çiftlerini oluşturan Platon cisimlerinin içine rahatça yerleştirilebilirler. Örneğin; kesik küpün sekizgen yüzleri bir küpün içine ya da üçgen yüzleri bir oktahedronun içine yerleşebilir. Bununla ilgili şekiller ayrıntılı olarak bölüm içerisinde gösterilecektir.

Kesik oktahedron, uzamı hiçbir boşluk bırakmadan doldurulabilen tek Arşimet çokyüzlüsüdür. Bu cisim, kenarlarından birinin uçlarını merkezine kadar uzatıldığında, 3:4:5 Pisagor üçgenindeki dar açısıyla aynı olan bir merkez açısı oluşturur.

Beş kesik çokyüzlüler: “Truncated tetrahedron (Kesik tetrahedron)”, “Truncated octahedron (Kesik oktahedron)”, “Truncated cube (Kesik küp)”, “Truncated icosahedron (Kesik ikosahedron)”, “Truncated dodecahedron (Kesik dodekahedron)” .

##### 4.4.1.1 Truncated Tetrahedron (Kesik Tetrahedron)

Arşimet katılarının ilki truncated tetrahedrondur. Normalize edilmiş bir truncated tetrahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.8’ deki gibidir.

Şekil 4.2' den de görüleceği üzere tetrahedronun Schläfli sembolü  $t\{3,3\}$  dür.

Benzerlikten veya yamuk özelliğinden gidildiğinde;

$$\frac{2a + 4a}{2} = \sqrt{2}$$

$$6a = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (4.2)$$

İfadesi bulunur. Kenar uzunluğu  $2a$  olduğundan;  $2a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  br. olur.

pisagor bağıntısından (şekil 4.1);

$$2b^2 = \frac{2}{9}$$

$$b = \frac{1}{3} \quad (4.3)$$

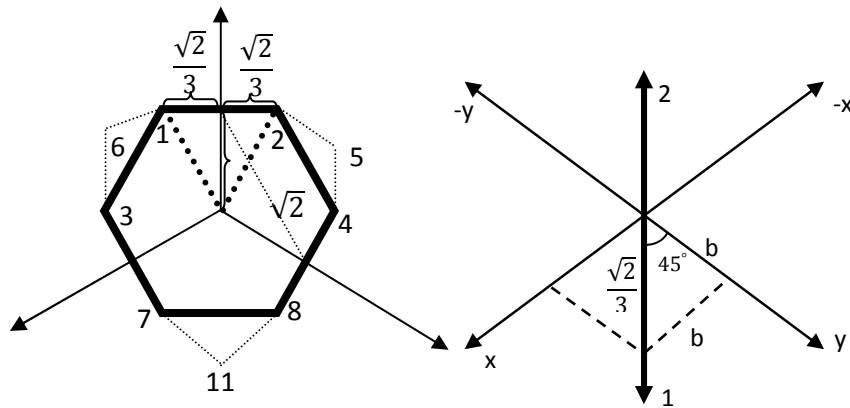
olur.

Normalize edilmiş tetrahedronun bir kenarının uzunluğu  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  birim olduğu bulundu. Buna göre truncated tetrahedronun yüzey alanı,

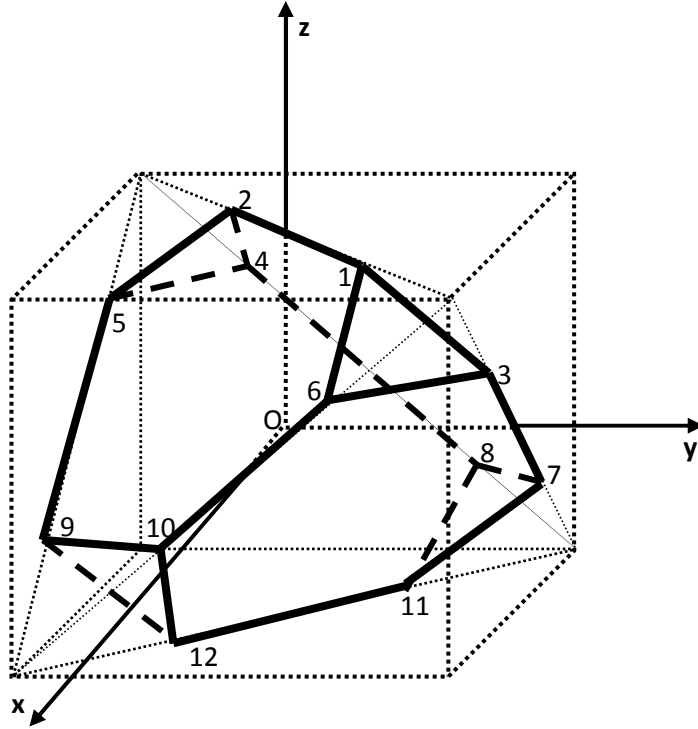
$$S = 7\sqrt{3}a^2 \cong 10,7772 \quad (4.4)$$

olarak bulunur. Truncated tetrahedronun hacmi,

$$V = \frac{23}{12}\sqrt{2}a^3 \cong 2,2716 \text{ 'dır.} \quad (4.5)$$



Şekil 4.1 Truncated tetrahedronun üstten görünümü



Şekil 4.2 Truncated Tetrahedron

Üçgen ve altıgen arasındaki açı (3-6);  $109^{\circ}28'16'' \cong 109,47^{\circ}$ ,

Altıgenle ve altıgen arasındaki açı (6-6);  $70^{\circ}31'44'' \cong 70,53^{\circ}$ ,

Çokyüzlünün merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $50^{\circ}28' \cong 50,4^{\circ}$ 'dir

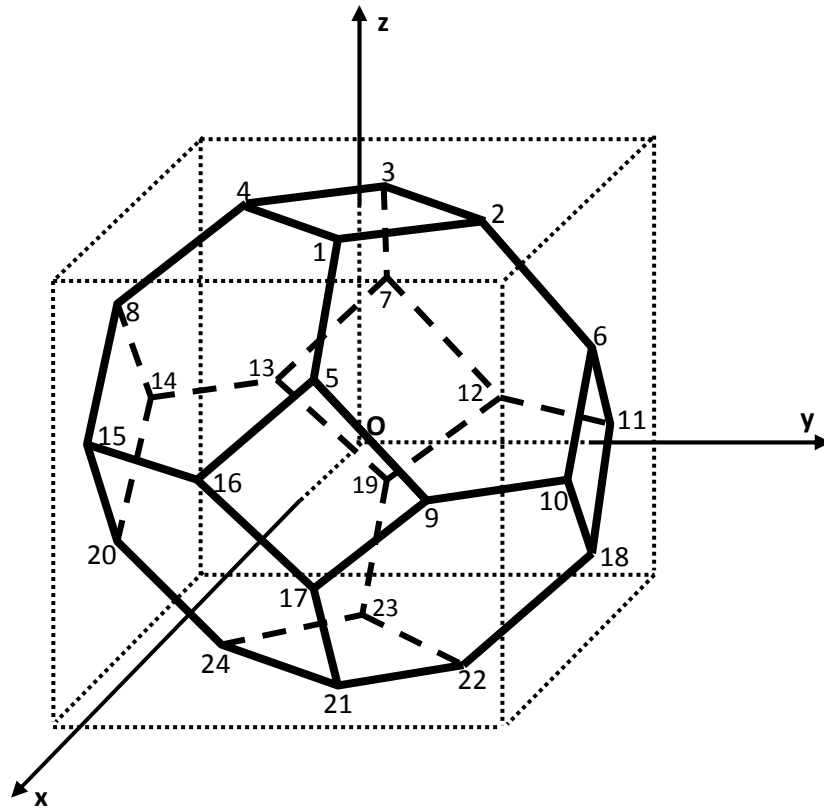
Tablo 4.8 Truncated Tetrahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
4	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
5	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

**Tablo 4.8 (Devam)** Truncated Tetrahedronun köşe koordinatları

6	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
7	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
8	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
9	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$
10	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
11	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1
12	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1

#### 4.4.1.2 Truncated Octahedron (Kesik Oktahedron)



**Şekil 4.3** Truncated Octahedron



Arşimet katlarından ikincisi truncated octahedrondur. Normalize edilmiş bir kübün Şekil 4.3' de görüldüğü gibi, numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.9'teki gibidir.

**Tablo 4.9** Truncated octahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
$z = \sqrt{2}b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ olduğunda			
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0	$\sqrt{2}b$
2	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\sqrt{2}b$
3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0	$\sqrt{2}b$
4	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\sqrt{2}b$
$z = -\sqrt{2}b = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ olduğunda			
21	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0	$-\sqrt{2}b$
22	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$-\sqrt{2}b$
23	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0	$-\sqrt{2}b$
24	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$-\sqrt{2}b$
$x = \sqrt{2}b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ olduğunda			
5	$\sqrt{2}b$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$
9	$\sqrt{2}b$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0
16	$\sqrt{2}b$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0
17	$\sqrt{2}b$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$
$x = -\sqrt{2}b = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ olduğunda			
7	$-\sqrt{2}b$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$

**Tablo 4.9 (Devam)** Truncated octahedronun köşe koordinatları

13	$-\sqrt{2}b$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0
12	$-\sqrt{2}b$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	0
19	$-\sqrt{2}b$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$
$y = \sqrt{2}b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ olduğunda			
10	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\sqrt{2}b$	0
6	0	$\sqrt{2}b$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$
11	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\sqrt{2}b$	0
18	0	$\sqrt{2}b$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$
$y = -\sqrt{2}b = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ olduğunda			
15	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$-\sqrt{2}b$	0
8	0	$-\sqrt{2}b$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$
14	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$-\sqrt{2}b$	0
20	0	$-\sqrt{2}b$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}b$

Şekil 4.3' ten de görüleceği üzere tetrahedronun Schläfli sembolü  $t_{0,1}\{3,4\}$  ve  $t_{0,1,2}\{3,3\}$ dür. Burada normalize edilmiş truncated octahedronun kenar uzunluğu  $b = \frac{2}{3} \cong 0,667$  dir. Buna göre truncated octahedron yüzey alanı,

$$S = (6 + 7\sqrt{3})b^2 \cong 8,055 br^2 \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Truncated octahedron hacmi,

$$V = 8\sqrt{2}a^3 \cong 3,352 br^3 \text{ 'dür.} \quad (4.7)$$

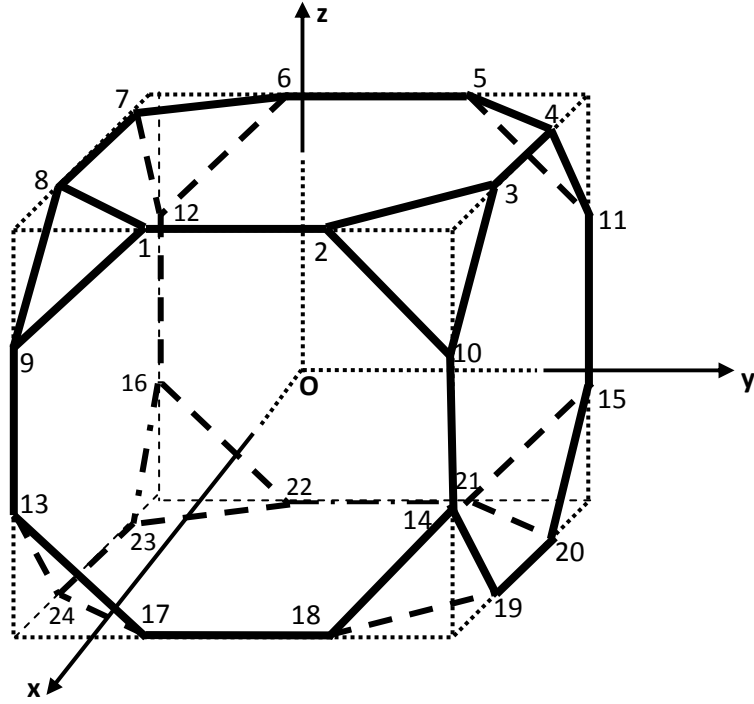
Dörtgen ve altıgen arasındaki açı (4-6);  $125^\circ 15' 51'' \cong 125,26^\circ$ ,

Altıgenle ve altıgen arasındaki açı (6-6);  $109^{\circ}28'16'' \cong 109,47^{\circ}$ ,

Çokyüzlünün merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $36^{\circ}52' \cong 36,87^{\circ}$ 'dir.

#### 4.4.1.3 Truncated Cube (Kesik Küp)

Arşimet katılardan üçüncüsü truncated cube'tür. Normalize edilmiş bir oktahedronun Şekil 4.4 da görüldüğü gibi, numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.10'daki gibidir.



Şekil 4.4 Truncated Küp

**Tablo 4.10** Truncated kübün köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	1	-a	1
2	1	a	1
3	a	1	1
4	-a	1	1
5	-1	a	1
6	-1	-a	1
7	-a	-1	1
8	a	-1	1
9	1	-1	a
10	1	1	a
11	-1	1	a
12	-1	-1	a
13	1	-1	-a
14	1	1	-a
15	-1	1	-a
16	-1	-1	-a
17	1	-a	-1
18	1	a	-1
19	a	1	-1
20	-a	1	-1
21	-1	a	-1
22	-1	-a	-1
23	-a	-1	-1
24	a	-1	-1

Şekil 4.4 'den de görüleceği üzere truncated kübün Schläfli sembolü  $t\{4,3\}$  dür. Normalize edilmiş truncated küp bir kenarının uzunluğu  $2a$  ise (Şekil 4.5);

$$(a\sqrt{2} + a)^2 = 1; a^2(\sqrt{2} + 1)^2 = 1; \sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}};$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}; a = \sqrt{2} - 1; 2a = 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \cong 0,828 \quad (4.8)$$

bulunur. Buradan cismin merkezine dik olan uzaklık,

$$a\sqrt{2} + a = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 1 \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Truncated kübün yüzey alanı,

$$S = 2(6 + 6\sqrt{2} + \sqrt{3})(2a)^2 \cong 22,237 \text{ br}^2 \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Truncated kübün hacmi,

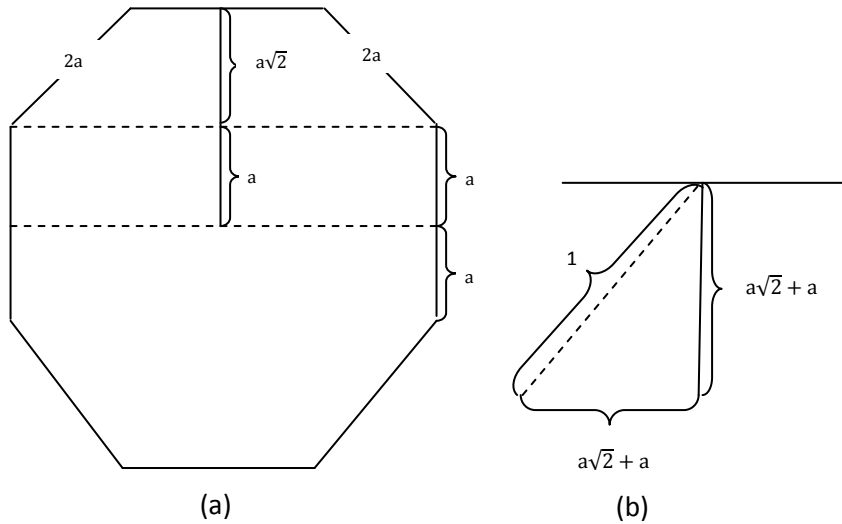
$$V = \frac{1}{3}(21 + 14\sqrt{2})(2a)^3 \cong 7,72 \text{ br}^3 \quad (4.11)$$

olarak bulunur.

Üçgen ve sekizgen arasındaki açı (3-8);  $125^\circ 15' 51'' \cong 125,26^\circ$ ,

Altıgenle ve altıgen arasındaki açı (6-6);  $90^\circ$ ,

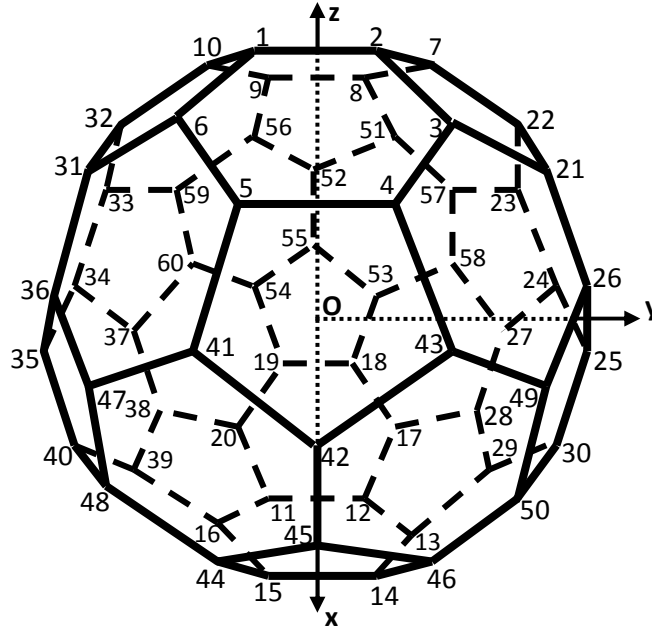
Çokyüzlünün merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $32^\circ 39' \cong 32,65^\circ$ 'dir.



Şekil 4.5 Truncated kübün bir yüzünün önden görünümü.

#### 4.4.1.4 Truncated Icosahedron (Kesik İkosahedron)

Arşimet katılarından dördüncüsü truncated icosahedrondur. Normalize edilmiş bir ikosahedronun Şekil 4.6’ da görüldüğü gibi numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.11 ’daki gibidir.



Şekil 4.6 Truncated icosahedron

Şekil 4.6 dan de görüleceği üzere truncated icosahedronun Schläfli sembolü  $\{5,3\}$  dür. Normalize edilmiş dodekahedronun bir kenarının uzunluğu  $a$ , şekil 3.7 den de görüldüğü gibi,

$$(0,62 + 1,31 + 0,5)a = 1, \quad a \cong 0,41 \text{ br.} \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Truncated icosahedronun yüzey alanı,

$$S = 3 \left( 10\sqrt{3} + \sqrt{5}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right) a^2 \cong 12,205 \text{ br}^2 \quad (4.13)$$

olarak bulunur. Truncated icosahedronun hacmi,

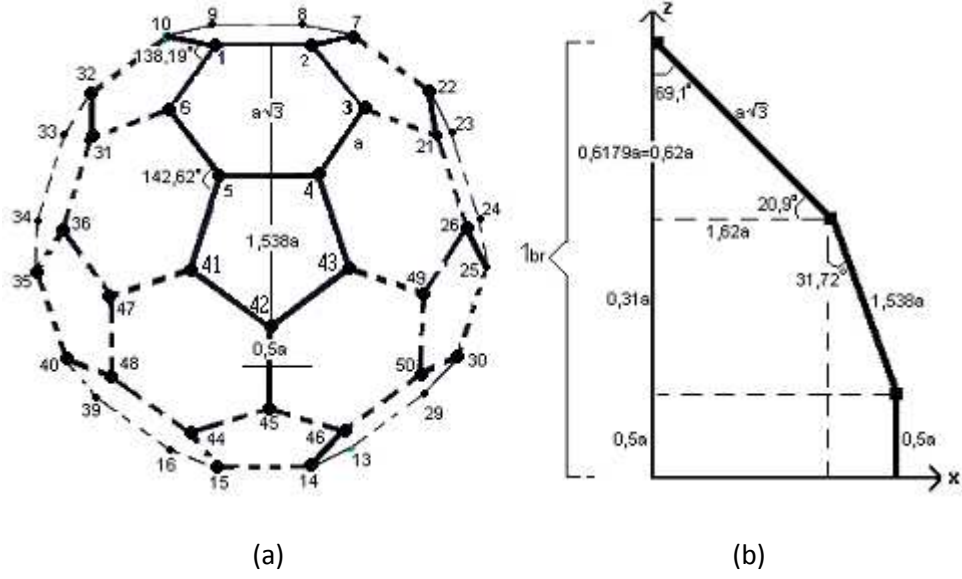
$$V = \frac{1}{4}(125 + 43\sqrt{5})a^3 \cong 3,81 \text{ br}^3 \quad (4.14)$$

olarak bulunur.

Beşgen ve altıgen arasındaki açı (5-6);  $142^\circ 37' 21'' \cong 142,62^\circ$ ,

Altıgenle ve altıgen arasındaki açı (6-6);  $138^\circ 11' 22'' \cong 138,19^\circ$ ,

Çokyüzlünün merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $23^\circ 17' \cong 23,28^\circ$  dir.



Şekil 4.7 Truncated icosahedronun önden ve yandan görünümü.

Tablo 4.11 Truncated icosahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	0	-0,5a	1
2	0	0,5a	1
3	0,81a	a	2,12a
4	1,62a	0,5a	1,81a
5	1,62a	-0,5a	1,81a
6	0,81a	-a	2,12a
7	-0,81a	a	2,12a
8	-1,62a	0,5a	1,81a
9	-1,62a	-0,5a	1,81a
10	-0,81a	-a	2,12a
11	0	-0,5a	-1
12	0	0,5a	-1
13	0,81a	a	-2,12a

**Tablo 4.11 (Devam)** Truncated icosahedronun köşe koordinatları

14	1,62a	0,5a	-1,81a
15	1,62a	-0,5a	-1,81a
16	0,81a	-a	-2,12a
17	-0,81a	a	-2,12a
18	-1,62a	0,5a	-1,81a
19	-1,62a	-0,5a	-1,81a
20	-0,81a	-a	-2,12a
21	0,5a	1,81a	1,62a
22	-0,5a	1,81a	1,62a
23	-a	2,12 a	0,81a
24	-0,5a	1	0
25	0,5a	1	0
26	a	2,12a	0,81a
27	-a	2,12a	-0,81a
28	-0,5a	1,81a	-1,62a
29	0,5a	1,81a	-1,62a
30	a	2,12a	-0,81a
31	0,5a	-1,81a	1,62a
32	-0,5a	-1,81a	1,62a
33	-a	-2,12 a	0,81a
34	-0,5a	-1	0
35	0,5a	-1	0
36	a	-2,12a	0,81a
37	-a	-2,12a	-0,81a
38	-0,5a	-1,81a	-1,62a
39	0,5a	-1,81a	-1,62a
40	a	-2,12a	-0,81a
41	2,12a	-0,81a	a
42	1	0	0,5a
43	2,12a	0,81a	a
44	2,12a	-0,81a	-a
45	1	0	-0,5a
46	2,12a	0,81a	-a
47	1,81a	-1,62a	0,5a
48	1,81a	-1,62a	-0,5a
49	1,81a	1,62a	0,5a
50	1,81a	1,62a	-0,5a
51	-2,12a	0,81a	a
52	-1	0	0,5a
53	-2,12a	-0,81a	a
54	-2,12a	0,81a	-a
55	-1	0	-0,5a
56	-2,12a	-0,81a	-a
57	-1,81a	1,62a	0,5a
58	-1,81a	1,62a	-0,5a
59	-1,81a	-1,62a	0,5a
60	-1,81a	-1,62a	-0,5a



#### 4.4.1.5 Truncated Dodecahedron (Kesik Dodekahedron)

Arşimet katılarından beşincisi truncated dodekahedrondur. Normalize edilmiş bir truncated dodekahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.12' daki gibidir.

Şekil 4.8 den de görüleceği üzere truncated dodekahedronun Schläfli sembolü  $t\{5,3\}$  dür. Normalize edilmiş dodekahedronun bir kenarının uzunluğu  $a$ , şekil 4.9 ve şekil 4.10 da görüldüğü gibi,

$$(1,62 + 0,81 + 0,5)a = 1 ; \quad a \cong 0,341 \text{ br.} \quad (4.15)$$

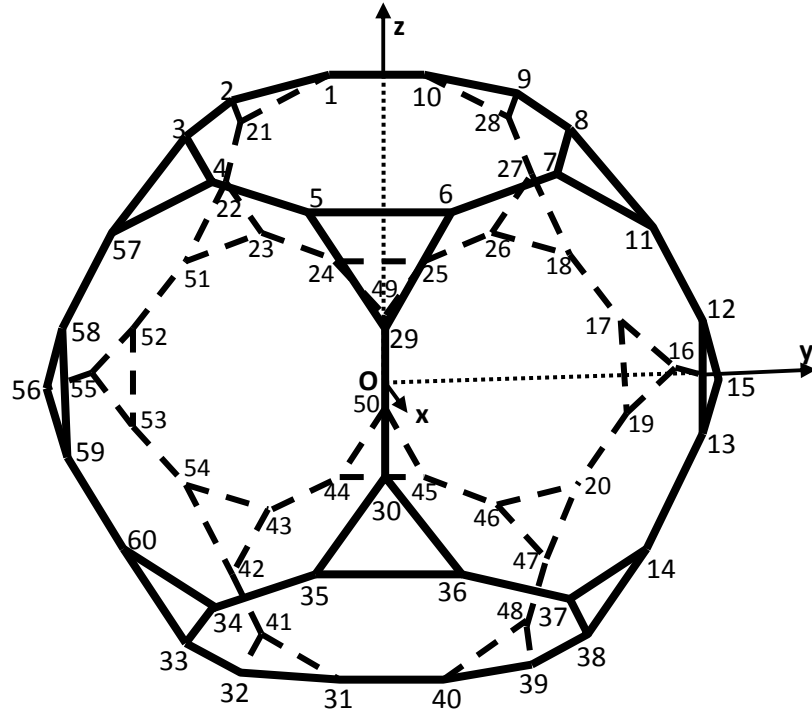
olarak bulunur. Truncated dodekahedronun yüzey alanı,

$$S = 5 \left( \sqrt{3} + 6\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right) a^2 \cong 11,743 \text{ br}^2 \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Truncated dodekahedronun hacmi,

$$V = \frac{5}{12} (99 + 47\sqrt{5}) a^3 \cong 3,372 \text{ br}^3 \quad (4.17)$$

olarak bulunur.

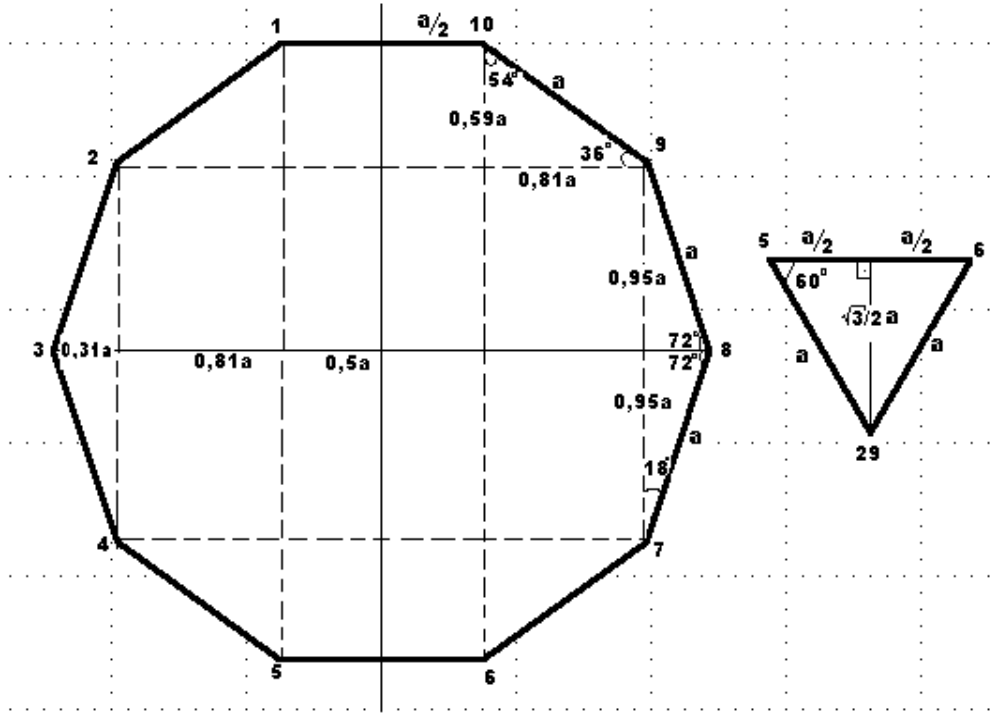


Şekil 4.8 Truncated Dodekahedron

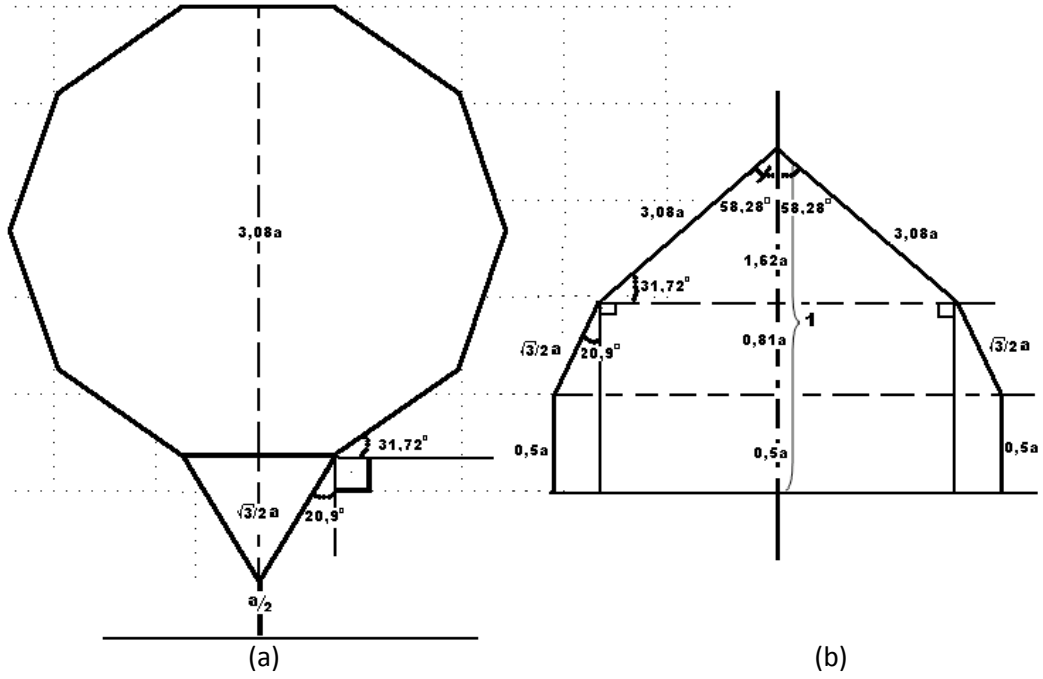
Üçgen ve ongen arasındaki açı (3-10);  $142^{\circ}37'21'' \cong 142,62^{\circ}$ ,

Ongen ve ongen arasındaki açı (10-10);  $116^{\circ}33'54'' \cong 116,56^{\circ}$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $19^{\circ}24' \cong 19,4^{\circ}$  'dir.



Şekil 4.9 Truncated dodecahedrondaki ongen ve üçgenin birer yüzlerinin görünümü.



**Şekil 4.10** Truncated dodecahedronun kenar uzunluğunun bulunması. (a) Truncated dodecahedronu oluşturan üçgen ve ongenin yüksekliklerinin gösterimi. Sağdaki (b) şekli normalize edilmiş truncated dodecahedronun kenarının orta noktasının merkeze uzunluğu 1 br.' dir. Bu özellikten a kenar uzunluğu bulunur.

**Tablo 4.12** Truncated dodecahedronun köşe koordinatları

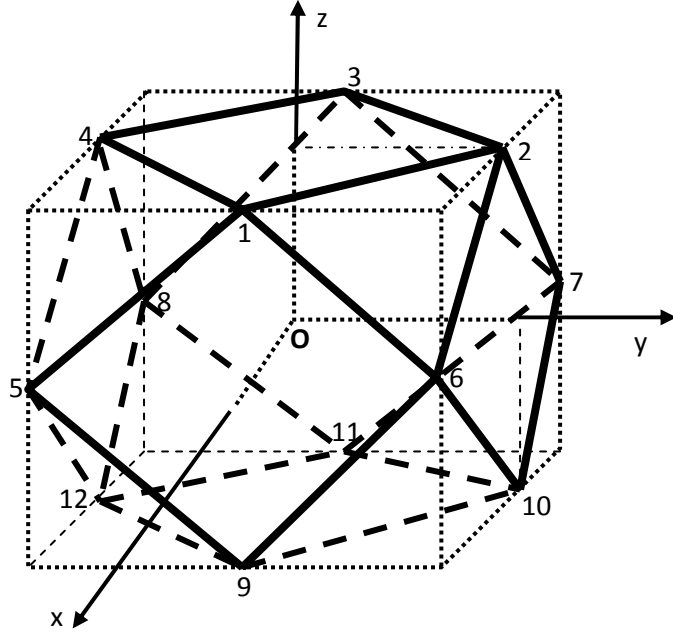
Köşe	x	y	z
1	0	-0,5a	1
2	0,5a	-1,31a	2,62a
3	1,31a	-1,62a	2,12a
4	2,12a	-1,31a	1,62a
5	2,62a	-0,5a	1,31ae <sub>3</sub>
6	2,62a	0,5a	1,31a
7	2,12a	1,31a	1,62a
8	1,31a	1,62a	2,12a
9	0,5a	1,31a	2,62a
10	0	0,5a	1
11	1,62a	2,12a	1,81a
12	1,31a	2,62a	0,5a
13	1,31a	2,62a	-0,5a
14	1,62a	2,12a	-1,81a
15	0,5a	1	0
16	-0,5a	1	0
17	-1,31a	2,62a	0,5a
18	-1,62a	2,12a	1,81a
19	-1,31a	2,62a	-0,5a
20	-1,62a	2,12a	-1,81a
21	-0,5a	-1,31a	2,62a
22	-1,31a	-1,62a	2,12a

**Tablo 4.12 (Devam)** Truncated dodecahedronun köşe koordinatları

23	-2,12a	-1,31a	1,62a
24	-2,62a	-0,5a	1,31a
25	-2,62a	0,5a	1,31a
26	-2,12a	1,31a	1,62a
27	-1,31a	1,62a	2,12a
28	-0,5a	1,31a	2,62a
29	1	0	0,5a
30	1	0	-0,5a
31	0	-0,5a	-1
32	0,5a	-1,31a	-2,62a
33	1,31a	-1,62a	-2,12a
34	2,12a	-1,31a	-1,62a
35	2,62a	-0,5a	-1,31a
36	2,62a	0,5a	-1,31a
37	2,12a	1,31a	-1,62a
38	1,31a	1,62a	-2,12a
39	0,5a	1,31a	-2,62a
40	0	0,5a	-1
41	-0,5a	-1,31a	-2,62a
42	-1,31a	-1,62a	-2,12a
43	-2,12a	-1,31a	-1,62a
44	-2,62a	-0,5a	-1,31a
45	-2,62a	0,5a	-1,31a
46	-2,12a	1,31a	-1,62a
47	-1,31a	1,62a	-2,12a
48	-0,5a	1,31a	-2,62a
49	-1	0	0,5a
50	-1	0	-0,5a
51	-1,62a	-2,12a	1,81a
52	-1,31a	-2,62a	0,5a
53	-1,31a	-2,62a	-0,5a
54	-1,62a	-2,12a	-1,81a
55	-0,5a	-1	0
56	0,5a	-1	0
57	1,62a	-2,12a	1,81a
58	1,31a	-2,62a	0,5a
59	1,31a	-2,62a	-0,5a
60	1,62a	-2,12a	-1,81a

#### 4.4.2 Cuboctahedron (Küpoktahedron)

Arşimet katılarından altıncısı cuboctahedrondur. Cuboctahedron, küpün kare şeklindeki altı yüzünü ve oktahedronun da üçgen şeklindeki sekiz yüzünü içerir. Küpün ya da oktahedronun kenarlarının orta noktaları birleştirildiğinde, ortaya bir cuboctahedron çıkar. İskenderiyeli Heran'a (İS 10-75) göre, Arşimet, cuboctahedronun keşfini Platon'a atfetmiştir



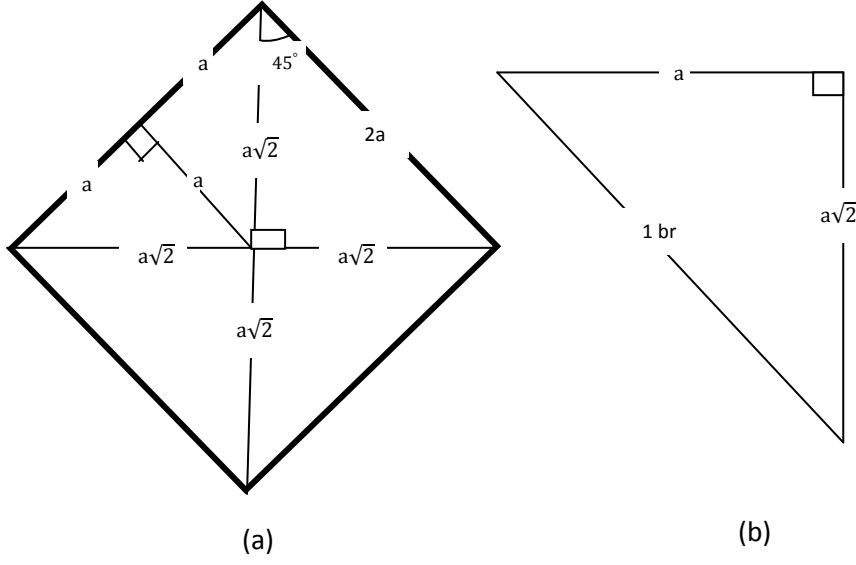
Şekil 4.11 Cuboctahedron (Küpoktahedron)

Cuboctahedron gibi düzgünömsü çokyüzlüler, her biri öteki tür çokgenle çevrili olan iki tür çokgenden oluşurlar. Özdeş kenarlar yüzleri ve ekvatorial çokgenleri tanımlarlar. Örneğin, cuboctahedronun kenarları dört tane düzgün altıgeni tanımlarlar. Düzgünömsü çokyüzlülerin yarıçapsal ya da radyal uzantıları ise bütünüyle büyük ve tam olan dairelerden oluşur.

Merkezde yer alan eşit büyüklükteki bir kürenin çevresine yerleştirilebilen maksimum özdeş küre sayısı on ikidir. Merkezleri bir cuboctahedronun köşe noktalarını tanımlayacak şekilde simetrik olarak düzenlendiklerinde her biri dört komşuya değer.

Normalize edilmiş bir cuboctahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.13' daki gibidir.

Şekil 4.11 den de görüleceği üzere cuboctahedronun Schläfli sembolü  $t_1\{4,3\}$ ,  $t_{0,2}\{3,3\}$  dür. Normalize edilmiş dodekahedronun bir kenarının uzunluğu  $2a$  olduğu varsayılınsın (Şekil 4.11).



**Şekil 4.12** Cuboctahedronun kenar uzunluğunun bulunması. (a) cuboctahedronu oluşturan dörtgenin gösterimi. Sağdaki (b) şekli normalize edilmiş cuboctahedronun kenarının orta noktasının merkeze uzunluğu 1 br.' dir. Bu özellikten 2a kenar uzunluğu bulunur.

Kenar uzunluğu 2a,

$$a^2 + 2a^2 = 1 \quad ; \quad a^2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad a = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad 2a = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 1,155 \quad (4.18)$$

olarak bulunur (şekil 3.12). Cuboctahedronun yüzey alanı,

$$S = (6 + 2\sqrt{3})(2a)^2 \cong 12,619 \text{ br}^2 \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Cuboctahedronun hacmi,

$$V = \frac{5}{3}\sqrt{2}(2a)^3 \cong 3,629 \text{ br}^3 \quad (4.20)$$

olarak bulunur.

Üçgen ve kare arasındaki açı (3-4);  $125^\circ 15' 51'' \cong 125,264^\circ$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $60^\circ$ ' dir.

**Tablo 4.13** Cuboctahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	$a\sqrt{2}$	0	$a\sqrt{2}$
2	0	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$
3	$-a\sqrt{2}$	0	$a\sqrt{2}$
4	0	$-a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-a\sqrt{2}$	0
6	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	0
7	$-a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	0
8	$-a\sqrt{2}$	$-a\sqrt{2}$	0
9	$a\sqrt{2}$	0	$-a\sqrt{2}$
10	0	$a\sqrt{2}$	$-a\sqrt{2}$
11	$-a\sqrt{2}$	0	$-a\sqrt{2}$
12	0	$-a\sqrt{2}$	$-a\sqrt{2}$

#### 4.4.3 İcosidodecahedron (İkozidodekahedron)

Arşimet katılarından yedincisi icosidodecahedrondur. İcosidodecahedron, dodecahedronun beşgen şeklindeki on iki yüzünü, icosahedronun üçgen şeklindeki yirmi yüzüyle birleştirir. Dodecahedronun yada ikosahedronun kenarlarının orta noktaları birleştirildiğinde, ortaya düzgünömsü bir çokyüzlü olan icosidodecahedron çıkar. İcosidodecahedronun kenarları altı tane ekvatorial ongen oluşturarak, altı büyük daireyi içeren bir radyal yansımayı meydana getirir.

İcosidodecahedron çizimi, Leonardo da Vinci'nin (1452-1519) elinden çıkmış olup, Fra Luca Pacioli'nin (1445-1517) De Divina Proportione (İlahi Oran) başlıklı yapıtında yer alır. İcosidodecahedronu otuz tane özdeş küreyle tanımlandığında, merkezde, diğerlerinin  $\sqrt{5}$  katı daha büyük olan bir kürenin yerleşeceği kadar bir boşluk kalır.

Normalize edilmiş bir icosidodecahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.14' deki gibidir.





Normalize edilmiş icosidodecahedronun bir kenarının uzunluğu Pisagor bağıntısından,

$$(0,81^2 + 1,31^2)a^2 = 1; \quad a = 0,64926 \cong 0,65 \text{ br.} \quad (4.21)$$

olarak bulunur (şekil 3.14). Icosidodecahedronun yüzey alanı,

$$S = \left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right)a^2 \cong 12,381 \text{ br}^2 \quad (4.22)$$

olarak bulunur. Icosidodecahedronun hacmi,

$$V = \frac{1}{6}(45 + 17\sqrt{5})a^3 \cong 3,799 \text{ br}^3 \quad (4.23)$$

olarak bulunur.

Üçgen ve beşgen arasındaki açı (3-5);  $142^\circ 37'21'' \cong 142,62^\circ$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $36^\circ$ 'dir.

**Tablo 4.14** Icosidodecahedronun köşe koordinatları

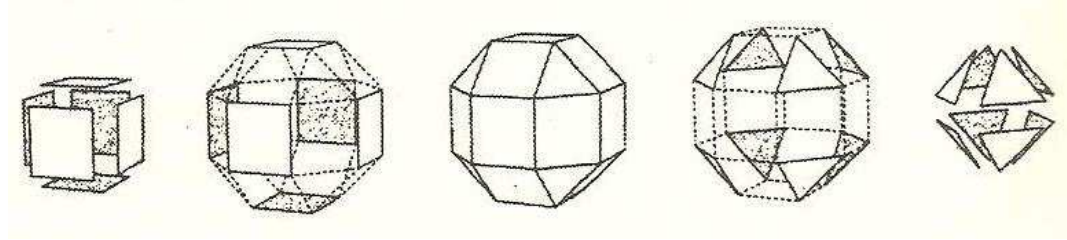
Köşe	x	y	z
1	0	0	1,62a
2	0,5a	0,81a	1,31a
3	1,31a	0,5a	0,81a
4	1,31a	-0,5a	0,81a
5	0,5a	-0,81a	1,31a
6	-0,5a	0,81a	1,31a
7	-1,31a	0,5a	0,81a
8	-1,31a	-0,5a	0,81a
9	-0,5a	-0,81a	1,31a
10	0	0	-1,62a
11	0,5a	0,81a	-1,31a
12	1,31a	0,5a	-0,81a
13	1,31a	-0,5a	-0,81a
14	0,5a	-0,81a	-1,31a
15	-0,5a	0,81a	-1,31a
16	-1,31a	0,5a	-0,81a
17	-1,31a	-0,5a	-0,81a
18	-0,5a	-0,81a	-1,31a
19	0,81a	1,31a	0,5a
20	-0,81a	1,31a	0,5a
21	0	1,62a	0
22	0,81a	1,31a	-0,5a
23	-0,81a	1,31a	-0,5a
24	-0,81a	-1,31a	0,5a
25	0,81a	-1,31a	0,5a
26	0	-1,62a	0
27	-0,81a	-1,31a	-0,5a

**Tablo 4.14 (Devam)** Icosidodecahedronun köşe koordinatları

28	0,81a	-1,31a	-0,5a
29	1,62a	0	0
30	-1,62a	0	0

#### 4.4.4 Dört Genişleme

Küpün ya da oktahedronun yüzlerini dışarıya doğru genişletir ve bu, yüzler birbirinden kenar uzunluğu kadar bir uzaklıkta yer alana kadar sürdürülürse, rhombicuboctahedron (rombiküpoktahedron) tanımlanmış olur (Şekil 4.15). Aynı işlemi dodecahedronda ya da icosahedronda uygulandığında rhombicosidodecahedron elde edilir. Kesik küpün sekizgen şeklindeki yüzleri yahut kesik oktahedronun altıgen şeklindeki yüzleri, genişleme yöntemiyle great rhombicuboctahedron (büyük rombiküboktahedron)' u verirler. Aynı şekilde truncated dodecahedronun ongen biçimindeki ya da truncated icosahedronun altıgen şeklindeki yüzleri genişletildiğinde de great rhombicosidodecahedron (büyük rhombicosidedokahedron) elde edilir.



**Şekil 4.15** Küpün genişletilmesiyle rhombicuboctahedron elde edilmesi.

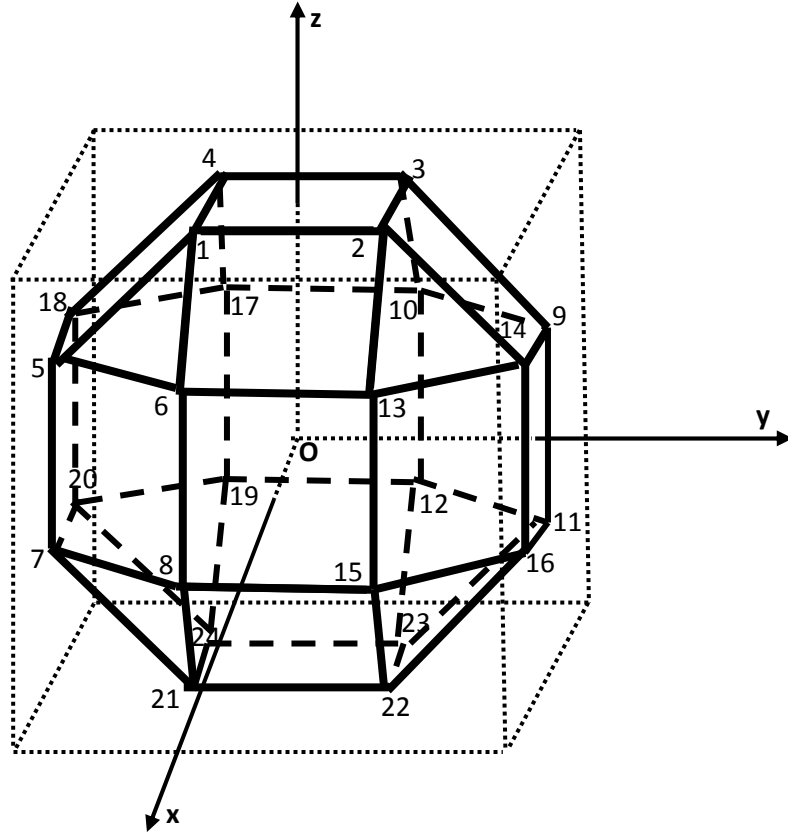
Kepler, great rhombicuboctahedrona “truncated cuboctahedron (kesik küboktahedron)” ve great rhombicosidodecahedrona da “truncated icosidodecahedron (kesik ikosidodekahedron)”adlarını vermiştir. Bu çokyüzlüler kesik hale getirildiğinde, kare şeklinde yüzler değil de,  $\sqrt{2}$  ve  $\emptyset$  dörtgenleri elde edilir [16].

Bu dört çokyüzlünün yüzleri, küble, oktahedronla ve rhombic ( eşkenar dörtgen yüzlü) dodecahedronla yahut icosahedronla, dodecahedronla ve rhombic (eşkenar dört yüzlü) triacontahedron (triakontahedron)' la ortak düzlemlere sahiptir. Dolayısıyla bunların adlarına “rhombi-” ön eki konulmuştur.

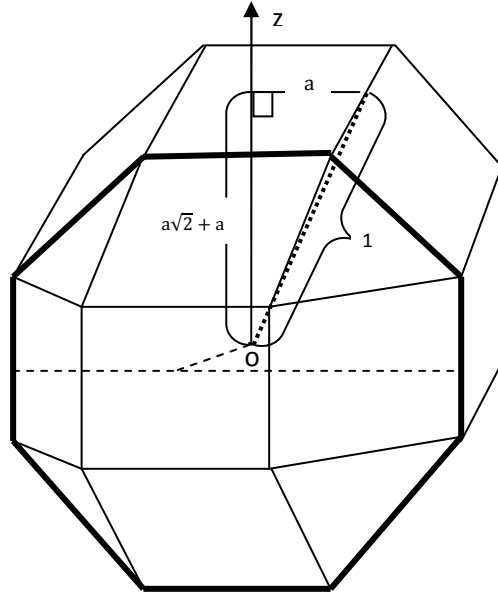
#### 4.4.4.1 Rhombicuboctahedron (Rombiküpoktahedron)

Arşimet katılarından sekizincisi rhombicuboctahedron (rombiküpoktahedron)'dur. Normalize edilmiş bir truncated dodecahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.15' daki gibidir.

Şekil 4.16 den de görüleceği üzere rhombicuboctahedronun Schläfli sembolü  $r\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$  tür.



Şekil 4.16 Rhombicuboctahedron



Şekil 4.17 Rhombicuboctahedronun önden görünümü.

Normalize edilmiş rhombicuboctahedron bir kenarının uzunluğu  $2a$ , Pisagor bağıntısından;

$$(a\sqrt{2} + a)^2 + a^2 = 1^2 ; \quad a = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} \quad 2a \cong 0,765 \text{ br.} \quad (4.24)$$

olarak bulunur (şekil 4.17). Rhombicuboctahedronun yüzey alanı,

$$S = (18 + 2\sqrt{3})(2a)^2 \cong 12,561 \text{ br}^2 \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Rhombicuboctahedronun hacmi,

$$V = \frac{1}{3}(12 + 10\sqrt{2})(2a)^3 \cong 3,901 \text{ br}^3 \quad (4.26)$$

olarak bulunur.

Üçgen ve kare arasındaki açı (3-4);  $144^\circ 44' 08'' \cong 144,74^\circ$ ,

Kare ve kare arasındaki açı (4-4);  $135^\circ$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $41^\circ 53' \cong 41,88^\circ$ 'dir.

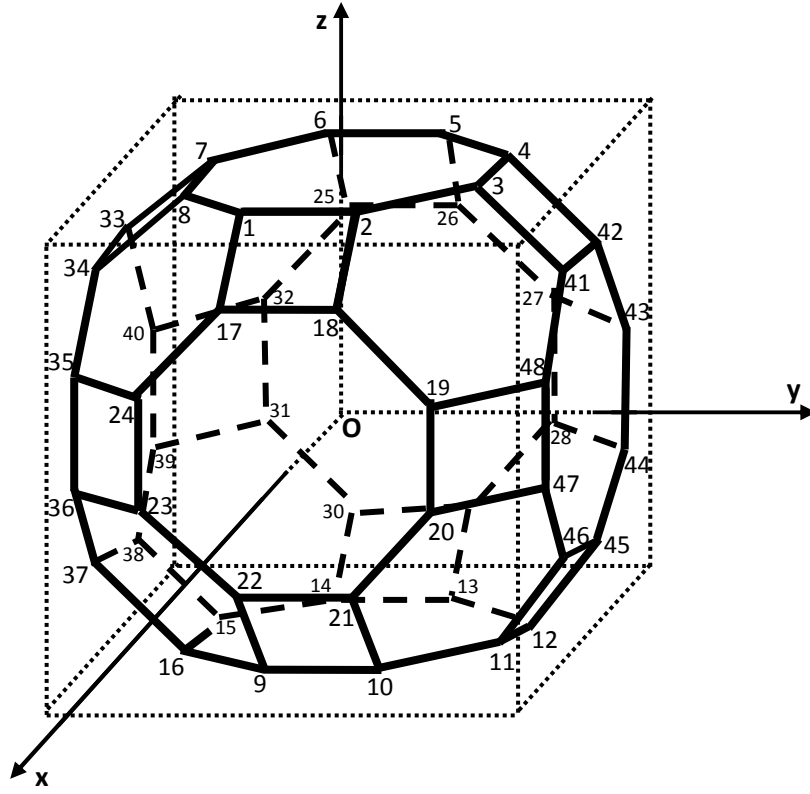
**Tablo 4.15** Rhombicuboctahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	a	-a	1,85
2	a	a	1,85
3	-a	a	1,85
4	-a	-a	1,85
5	a	-1,85	a
6	1,85	-a	a
7	a	-1,85	-a
8	1,85	-a	-a
9	-a	1,85	a
10	-1,85	a	a
11	-a	1,85	-a
12	-1,85	a	-a
13	1,85	a	a
14	a	1,85	a
15	1,85	a	-a
16	a	1,85	-a
17	-1,85	-a	a
18	-a	-1,85	a
19	-1,85	-a	-a
20	-a	-1,85	-a
21	a	-a	-1,85
22	a	a	-1,85
23	-a	a	-1,85
24	-a	-a	-1,85

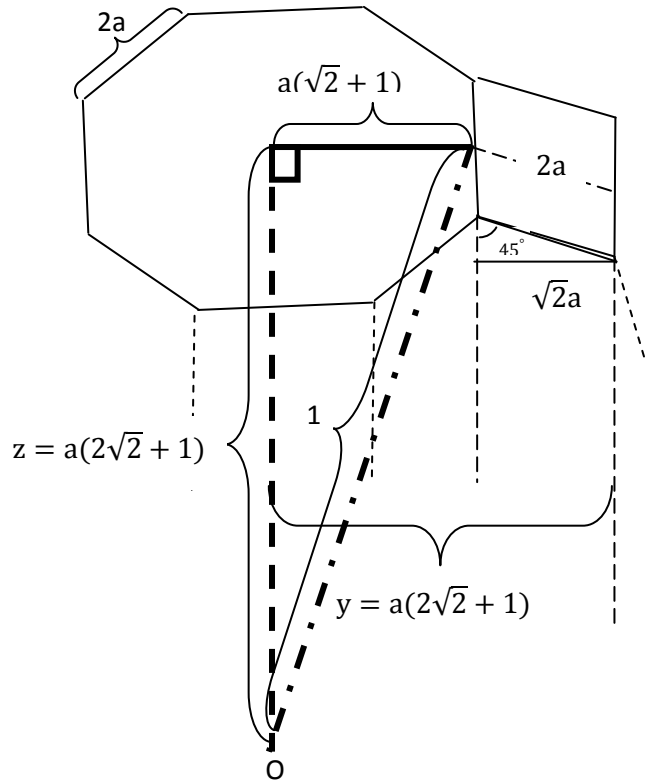
#### 4.4.4.2 Great Rhombicuboctahedron (Büyük Rombiküboktahedron)

Arşimet katılarından dokuncusu great rhombicuboctahedron (büyük rombuküboktahedron)'dur. Normalize edilmiş bir great rhombicuboctahedron numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.16' daki gibidir.

Şekil 4.18 den de görüleceği üzere great rhombicuboctahedron Schläfli sembolü  $t\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$  dür.



Şekil 4.18 Great Rhombicuboctahedron



Şekil 4.19 Great rhombicuboctahedron önden görünümü.

Normalize edilmiş great rhombicuboctahedron bir kenarının uzunluğu  $2a$ ; Pisagor bağıntısından,

$$(a(1 + 2\sqrt{2}))^2 + (a(1 + \sqrt{2}))^2 = 1^2; \quad a = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{6};$$

$$2a = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{3} \cong 0,442 \text{ br.} \quad (4.27)$$

olarak bulunur (Şekil 4.19). Great rhombicuboctahedronun yüzey alanı,

$$S = 12(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2a)^2 \cong 12,065 \text{ br}^2 \quad (4.28)$$

olarak bulunur. Great rhombicuboctahedronun hacmi,

$$V = (22 + 14\sqrt{2})(2a)^3 \cong 3,609 \text{ br}^3 \quad (4.29)$$

olarak bulunur.

Kare ve altıgen arasındaki açı (4-6);  $144^\circ 44' 08'' \cong 144,74^\circ$ ,

Kare ve sekizgen arasındaki açı (4-8);  $135^\circ$ ,

Altıgen ve sekizgen arasındaki açı (6-8);  $125^\circ 15' 51'' = 125,26^\circ$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $24^\circ 55' \cong 24,92^\circ$ 'dir

**Tablo 4.16** Great rhombicuboctahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	$a(1 + \sqrt{2})$	-a	$a(1 + 2\sqrt{2})$
2	$a(1 + \sqrt{2})$	a	$a(1 + 2\sqrt{2})$
3	a	$a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$
4	-a	$a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$
5	$-a(1 + \sqrt{2})$	a	$a(1 + 2\sqrt{2})$
6	$-a(1 + \sqrt{2})$	-a	$a(1 + 2\sqrt{2})$
7	-a	$-a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$
8	a	$-a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$
9	$a(1 + \sqrt{2})$	-a	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
10	$a(1 + \sqrt{2})$	a	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
11	a	$a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
12	-a	$a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
13	$-a(1 + \sqrt{2})$	a	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
14	$-a(1 + \sqrt{2})$	-a	$-a(1 + 2\sqrt{2})$

**Tablo 4.16 (Devam)** Great rhombicuboctahedronun köşe koordinatları

15	$-a$	$-a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
16	$a$	$-a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$
17	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$	$a(1 + \sqrt{2})$
18	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$	$a(1 + \sqrt{2})$
19	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$	$a$
20	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$	$-a$
21	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$	$-a(1 + \sqrt{2})$
22	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$	$-a(1 + \sqrt{2})$
23	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$	$-a$
24	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$	$a$
25	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$	$a(1 + \sqrt{2})$
26	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$	$a(1 + \sqrt{2})$
27	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$	$a$
28	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$	$-a$
29	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$	$-a(1 + \sqrt{2})$
30	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$	$-a(1 + \sqrt{2})$
31	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$	$-a$
32	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$	$a$
33	$-a$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$
34	$a$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$
35	$a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$
36	$a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$
37	$a$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$
38	$-a$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$
39	$-a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$
40	$-a(1 + \sqrt{2})$	$-a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$
41	$a$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$
42	$-a$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a(1 + \sqrt{2})$
43	$-a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$
44	$-a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$
45	$-a$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$
46	$a$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a(1 + \sqrt{2})$
47	$a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$-a$
48	$a(1 + \sqrt{2})$	$a(1 + 2\sqrt{2})$	$a$

#### 4.4.4.3 Rhombicosidodecahedron

Arşimet katılarından onuncusu rhombicosidodecahedron'dur. Normalize edilmiş bir great rhombicuboctahedron numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.17'



deki gibidir. Şekil 4.20 den de görüleceği üzere rhombicosidodecahedron Schläfli sembolü  $r\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$  tir.

Normalize edilmiş rhombicosidodecahedronun bir kenarının uzunluğu  $a$ ; Pisagor bağıntısından,

$$(0,5a)^2 + (2.12a)^2 = 1^2 ; \quad a \cong 0,46 \text{ br. ;} \quad (4.30)$$

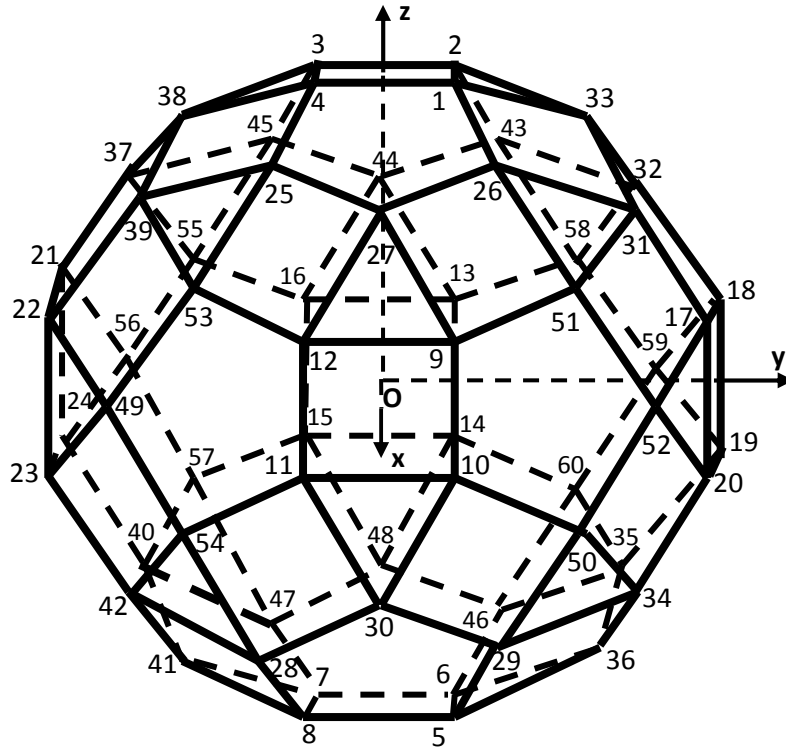
olarak bulunur (Şekil 4.21). Rhombicosidodecahedronun yüzey alanı,

$$S = 59,3002a^2 \cong 12,548 \text{ br}^2 \quad (4.31)$$

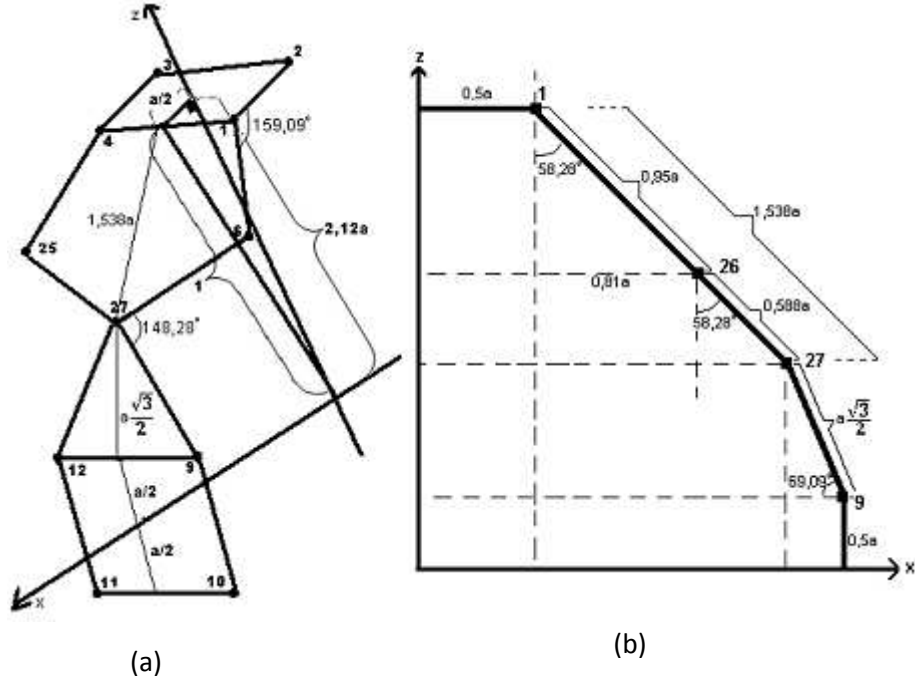
olarak bulunur. Rhombicosidodecahedronun hacmi,

$$V = 41,6144a^3 \cong 4,05 \text{ br}^3 \quad (4.32)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.20 Rhombicosidodecahedron



Şekil 4.21 Rhombicosidodecahedronun önden görünümü.

Üçgen ve kare arasındaki açı (3-4);  $159^{\circ}05'41'' \cong 159,02^{\circ}$ .

Kare ve beşgen arasındaki açı (4-5);  $148^{\circ}16'57'' \cong 148,28^{\circ}$ .

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $25^{\circ}52' \cong 25,87^{\circ}$  dir.

Tablo 4.17 Rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	0,5a	0,5a	2,12a
2	-0,5a	0,5a	2,12a
3	-0,5a	-0,5a	2,12a
4	0,5a	-0,5a	2,12a
5	0,5a	0,5a	-2,12a
6	-0,5a	0,5a	-2,12a
7	-0,5a	-0,5a	-2,12a
8	0,5a	-0,5a	-2,12a
9	2,12a	0,5a	0,5a
10	2,12a	0,5a	-0,5a
11	2,12a	-0,5a	-0,5a
12	2,12a	-0,5a	0,5a
13	-2,12a	0,5a	0,5a
14	-2,12a	0,5a	-0,5a
15	-2,12a	-0,5a	-0,5a
16	-2,12a	-0,5a	0,5a
17	0,5a	2,12a	0,5a
18	-0,5a	2,12a	0,5a

**Tablo 4.17 (Devam)** Rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları

19	-0,5a	2,12a	-0,5a
20	0,5a	2,12a	-0,5a
21	-0,5a	-2,12a	0,5a
22	0,5a	-2,12a	0,5a
23	0,5a	-2,12a	-0,5a
24	-0,5a	-2,12a	-0,5a
25	1,31a	-0,81a	1,62a
26	1,31a	0,81a	1,62a
27	1,81a	0	1,31a
28	1,31a	-0,81a	-1,62a
29	1,31a	0,81a	-1,62a
30	1,81a	0	-1,31a
31	0,81a	1,62a	1,31a
32	-0,81a	1,62a	1,31a
33	0	1,31a	1,81a
34	0,81a	1,62a	-1,31a
35	-0,81a	1,62a	-1,31a
36	0	1,31a	-1,81a
37	-0,81a	-1,62a	1,31a
38	0	-1,31a	1,81a
39	0,81a	-1,62a	1,31a
40	-0,81a	-1,62a	-1,31a
41	0	-1,31a	-1,81a
42	0,81a	-1,62a	-1,31a
43	-1,31a	0,81a	1,62a
44	-1,81a	0	1,31a
45	-1,31a	-0,81a	1,62a
46	-1,31a	0,81a	-1,62a
47	-1,81a	0	-1,31a
48	-1,31a	-0,81a	-1,62a
49	1,31a	-1,81a	0
50	1,62a	1,31a	-0,81a
51	1,62a	1,31a	0,81a
52	1,31a	1,81a	0
53	1,62a	-1,31a	0,81a
54	1,62a	-1,31a	-0,81a
55	-1,62a	-1,31a	0,81a
56	-1,31a	-1,81a	0
57	-1,62a	-1,31a	-0,81a
58	-1,62a	1,31a	0,81a
59	-1,31a	1,81a	0
60	-1,62a	1,31a	-0,81a

#### 4.4.4.4 Great Rhombicosidodecahedron (Büyük Rombikosidodekahedron)

Arşimet katılarından on birincisi great

rhombicosidodecahedron'dur. Normalize edilmiş bir great rhombicosidodecahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.18' deki gibidir. Şekil 4.22' den de görüleceği üzere great rhombicosidodecahedron Schläfli sembolü  $t\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$  tir.

Normalize edilmiş great rhombicosidodecahedronun bir kenarının uzunluğu  $a$ ; Pisagor bağıntısından,

$$(0,5a)^2 + (3,74a)^2 = 1^2 ; \quad a \cong 0,265 \text{ br. ;} \quad (4.33)$$

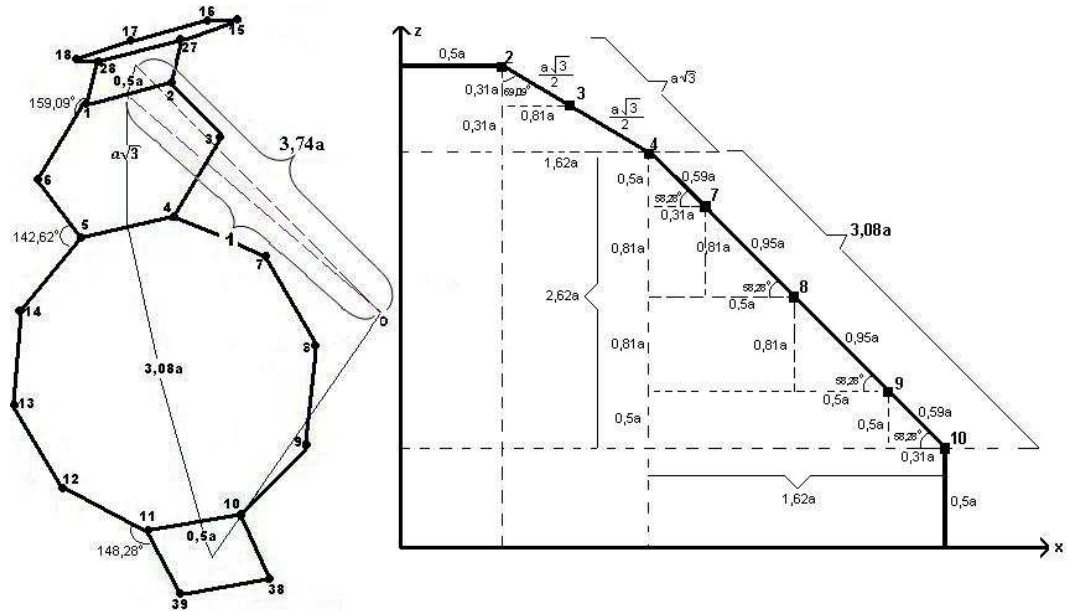
olarak bulunur (Şekil 4.23). Great rhombicosidodecahedronun yüzey alanı,

$$S = 30 \left( 1 + \sqrt{2(4 + \sqrt{5} + \sqrt{15 + 6\sqrt{6}})} \right) a^2 \cong 12,291 \text{ br}^2 \quad (4.34)$$

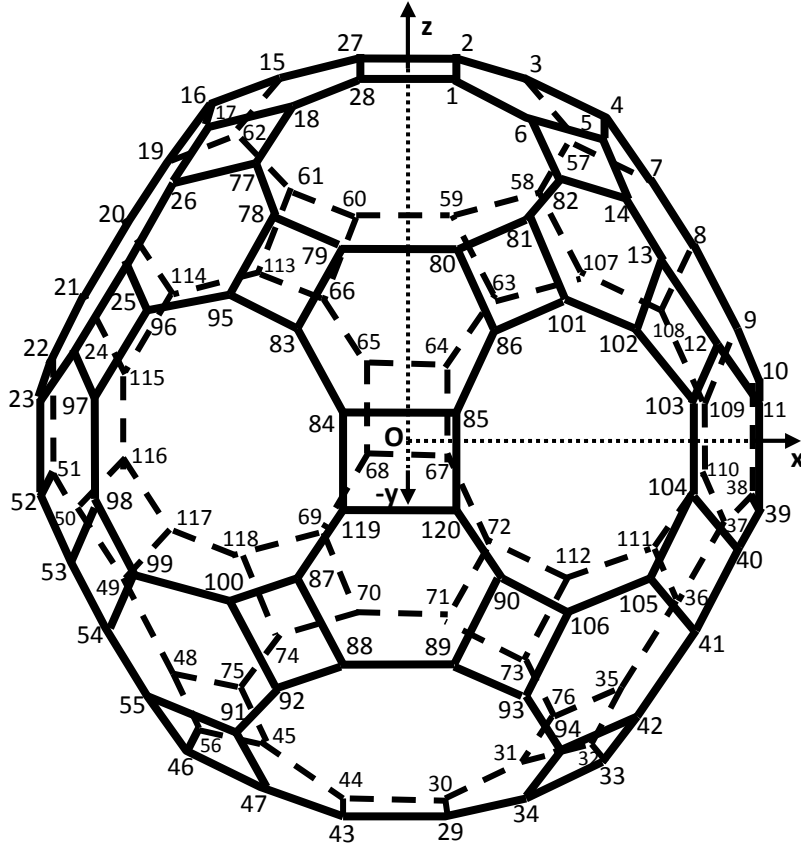
olarak bulunur. Great rhombicosidodecahedronun hacmi,

$$V = (95 + 50\sqrt{5})a^3 \cong 3,848 \text{ br}^3 \quad (4.35)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.22 Great rhombicosidodecahedron önden görünümü.



Şekil 4.23 Great Rhombicosidodecahedron

Kare ve altıgen arasındaki açı (4-6);  $159^{\circ}05'41'' \cong 159,02^{\circ}$ ,

Kare ve ongen arasındaki açı (4-10);  $148^{\circ}16'57'' \cong 148,28^{\circ}$ ,

Altıgen ve ongen arasındaki açı (6-10);  $142^{\circ}37'21'' \cong 142,62^{\circ}$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $15^{\circ}6' \cong 15,1^{\circ}$  dir.

Tablo 4.18 Great rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	0,5a	-0,5a	3,74a
2	0,5a	0,5a	3,74a
3	1,31a	a	3,43a
4	2,12a	0,5a	3,12a
5	2,12a	-0,5a	3,12a
6	1,31a	-a	3,43a
7	2,43a	1,31a	2,62a
8	2,93a	1,62a	1,81a
9	3,43a	1,31a	a
10	3,74a	0,5a	0,5a
11	3,74a	-0,5a	0,5a
12	3,43a	-1,31a	a

Tablo 4.18 (Devam) Great rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları

13	2,93a	-1,62ae <sub>2</sub>	1,81a
14	2,43a	-1,31a	2,62a
15	-1,31a	a	3,43a
16	-2,12a	0,5a	3,12a
17	-2,12a	-0,5a	3,12a
18	-1,31a	-a	3,43a
19	-2,43a	1,31a	2,62a
20	-2,93a	1,62a	1,81a
21	-3,43a	1,31a	a
22	-3,74a	0,5a	0,5a
23	-3,74a	-0,5a	0,5a
24	-3,43a	-1,31a	a
25	-2,93a	-1,62a	1,81a
26	-2,43a	-1,31a	2,62a
27	-0,5a	0,5a	3,74a
28	-0,5a	-0,5a	3,74a
29	0,5a	-0,5a	-3,74a
30	0,5a	0,5a	-3,74a
31	1,31a	a	-3,43a
32	2,12a	0,5a	-3,12a
33	2,12a	-0,5a	-3,12a
34	1,31a	-a	-3,43a
35	2,43a	1,31a	-2,62a
36	2,93a	1,62a	-1,81a
37	3,43a	1,31a	-a
38	3,74a	0,5a	-0,5a
39	3,74a	-0,5a	-0,5a
40	3,43a	-1,31a	-a
41	2,93a	-1,62a	-1,81a
42	2,43a	-1,31a	-2,62a
43	-0,5a	-0,5a	-3,74a
44	-0,5a	0,5a	-3,74a
45	-1,31a	a	-3,43a
46	-2,12a	-0,5a	-3,12a
47	-1,31a	-a	-3,43a
48	-2,43a	1,31a	-2,62a
49	-2,93a	1,62a	-1,81a
50	-3,43a	1,31a	-a
51	-3,74a	0,5a	-0,5a
52	-3,74a	-0,5a	-0,5a
53	-3,43a	-1,31a	-a
54	-2,93a	-1,62a	-1,81a
55	-2,43a	-1,31a	-2,62a
56	-2,12a	0,5a	-3,12a
57	1,62a	1,81a	2,93a
58	1,31a	2,62a	2,43a
59	0,5a	3,12a	2,12a
60	-0,5a	3,12a	2,12a
61	-1,31a	2,62a	2,43a
62	-1,62a	1,81a	2,93a
63	a	3,43a	1,31a
64	0,5a	3,74a	0,5a

Tablo 4.18 (Devam) Great rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları

65	-0,5a	3,74a	0,5a
66	-a	3,43a	1,31a
67	0,5a	3,74a	-0,5a
68	-0,5a	3,74a	-0,5a
69	-a	3,43a	-1,31a
70	-0,5a	3,12a	-2,12a
71	0,5a	3,12a	-2,12a
72	a	3,43a	-1,31a
73	1,31a	2,62a	-2,43a
74	-1,31a	2,62a	-2,43a
75	-1,62a	1,81a	-2,93a
76	1,62a	1,81a	-2,93a
77	-1,62a	-1,81a	2,93a
78	-1,31a	-2,62a	2,43a
79	-0,5a	-3,12a	2,12a
80	0,5a	-3,12a	2,12a
81	1,31a	-2,62a	2,43a
82	1,62a	-1,81a	2,93a
83	-a	-3,43a	1,31a
84	-0,5a	-3,74a	0,5a
85	0,5a	-3,74a	0,5a
86	a	-3,43a	1,31a
87	-a	-3,43a	-1,31a
88	-0,5a	-3,12a	-2,12a
89	0,5a	-3,12a	-2,12a
90	a	-3,43a	-1,31a <sub>e<sub>3</sub></sub>
91	-1,62a	-1,81a	-2,93a
92	-1,31a	-2,62a	-2,43a
93	1,31a	-2,62a	-2,43a
94	1,62a	-1,81a	-2,93a
95	-1,81a	-2,93a	1,62a
96	-2,62a	-2,43a	1,31a
97	-3,12a	-2,12a	0,5a
98	-3,12a	-2,12a	-0,5a
99	-2,62a	-2,43a	-1,31a
100	-1,81a	-2,93a	-1,62a
101	1,81a	-2,93a	1,62a
102	2,62a	-2,43a	1,31a
103	3,12a	-2,12a	0,5a
104	3,12a	-2,12a	-0,5a
105	2,62a	-2,43a	-1,31a
106	1,81a	-2,93a	-1,62a
107	1,81a	2,93a	1,62a
108	2,62a	2,43a	1,31a
109	3,12a	2,12a	0,5a
110	3,12a	2,12a	-0,5a
111	2,62a	2,43a	-1,31a
112	1,81a	2,93a	-1,62a
113	-1,81a	2,93a	1,62a
114	-2,62a	2,43a	1,31a
115	-3,12a	2,12a	0,5a
116	-3,12a	2,12a	-0,5a

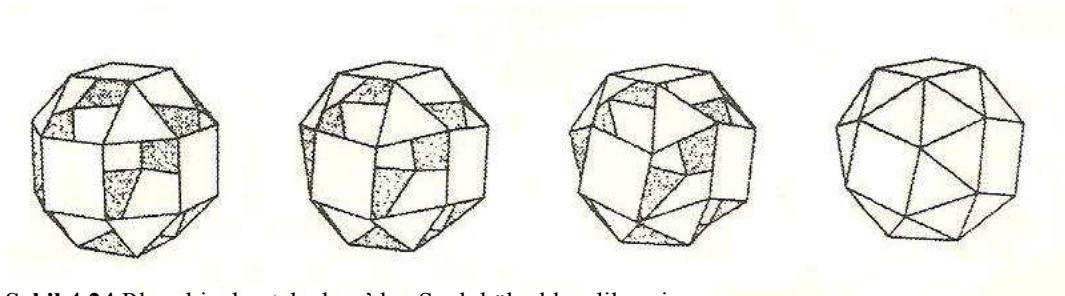
**Tablo 4.18 (Devam)** Great rhombicosidodecahedronun köşe koordinatları

117	-2,62a	2,43a	-1,31a
118	-1,81a	2,93a	1,62a
119	-0,5a	-3,74a	-0,5a
120	0,5a	-3,74a	-0,5a

#### 4.4.5 Döndürme

“Snub cube (snub küb)” adı, Keplerin koyduğu ve sözcük anlamı “ezilmiş küb” olan cubus simus adının gelişigüzel yapılmış bir çevirisinden kaynaklanmıştır. Hem snub cube hem de snub dodecahedronu, ‘sağa döndüren’ ve ‘sola döndüren’ çeşitlemeleriyle ‘her iki yöne de döndürme’ niteliğini gösterir. Her iki çeşitleme de, örneğin sağa döndüren çeşitlemeler sağda yer alacak şekilde gösterilmiştir. Snub küpün oktahedral simetrisi, snub dodecahedronun da ikosahedral simetrisi vardır. İkisinde de ayna düzlemleri yoktur. Platon’un ve Arşimet’in tüm çok yüzlü cisimleri arasında küreye yakın olanı, snub dodecahedrondur [16].

Rhombicuboctahedron, “jitterbug”ı andıran bir strüktür meydana getirmek için kullanılabilir. Bu yeni strüktür bükülerek çevrilirse, snub cupe elde edilir (Şekil 4.24) Sağa bükülürse, sağa döndüren çeşitleme, sola bükülürse de sola döndüren bir çeşitleme elde edilir. Rhombicosidodecahedron ile snub dodecahedron arasında da aynı ilişki vardır.



**Şekil 4.24** Rhombicuboctahedron’dan Snub küb elde edilmesi.



#### 4.4.5.1 Snub Cube (Snub K b)

Arşimet katılarından on ikincisi snub cupe'dür. Normalize edilmiş bir snub cube'ün numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.19' deki gibidir. Şekil 4.25' den de görüleceği üzere snub cube'ün Schläfli sembolü  $s\left\{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$  dür.

Normalize edilmiş snub kübün bir kenarının uzunluğu  $a$ ; Pisagor bağıntısından,

$$(0,5a)^2 + (1,17a)^2 = 1^2; \quad a \cong 0,786 \text{ br.}; \quad (4.36)$$

olarak bulunur (Şekil 4.26). Snub kübün yüzey alanı,

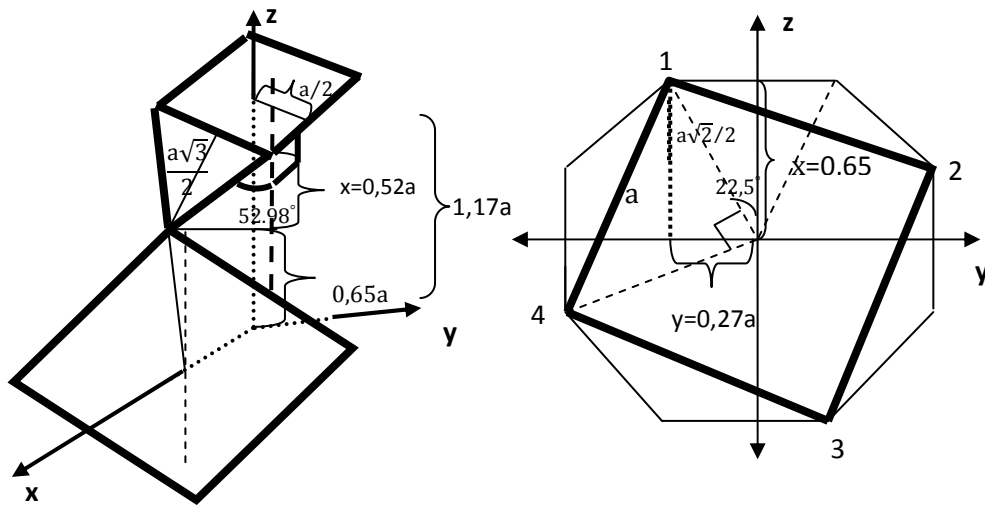
$$S = (6 + 8\sqrt{3})a^2 \cong 12,267 \text{ br}^2 \quad (4.37)$$

olarak bulunur. Snub kübün hacmi,

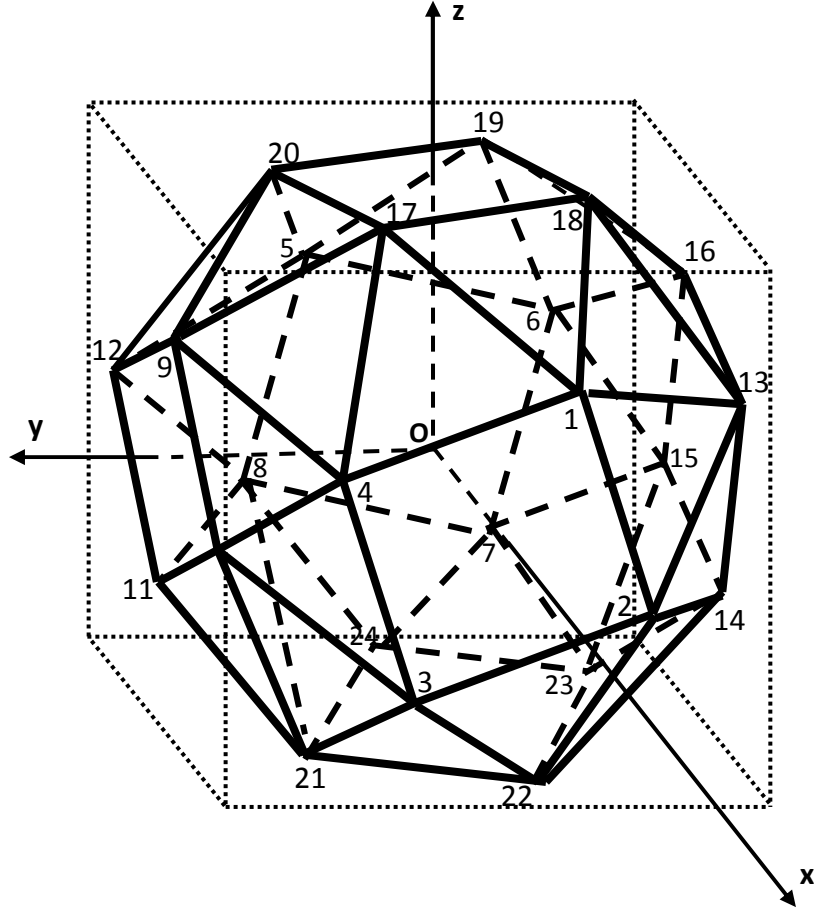
$$V = \sqrt{\frac{613t+203}{9(35t-62)}} a^3 \cong 7,8885a^3 \cong 3,83 \text{ br}^3 \quad (4.38)$$

olarak bulunur. Burada  $t$ ,

$$t = \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} \right) \cong 1,83929 \text{ br.'dir.} \quad (4.39)$$



Şekil 4.25 Snub kübün önden görünümü.



Şekil 4.25 Snub küp

Üçgen ve üçgen arasındaki açı (3-3);  $153^{\circ}14'04'' \cong 153,23^{\circ}$ ,

Üçgen ve kare arasındaki açı (3-4);  $142^{\circ}59' \cong 142,98^{\circ}$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $43^{\circ}41' \cong 43,68^{\circ}$ 'dir.

**Tablo 4.19** Snub kbn ke koordinatları

Ke	x	y	z
1	1,17a	-0,27a	0,65a
2	1,17a	-0,65a	-0,27a
3	1,17a	0,27a	-0,65a
4	1,17a	0,65a	0,27a
5	-1,17a	0,27a	0,65a
6	-1,17a	-0,65a	0,27a
7	-1,17a	-0,27a	-0,65a
8	-1,17a	0,65a	-0,27a
9	0,27a	1,17a	0,65a
10	0,65a	1,17a	-0,27a
11	-0,27a	1,17a	-0,65a
12	-0,65a	1,17a	0,27a
13	0,65a	-1,17a	0,27a
14	0,27a	-1,17a	-0,65a
15	-0,65a	-1,17a	-0,27a
16	-0,27a	-1,17a	0,65a
17	0,65a	0,27a	1,17a
18	0,27a	-0,65a	1,17a
19	-0,65a	-0,27a	1,17a
20	-0,27a	0,65a	1,17a
21	0,27a	0,65a	-1,17a
22	0,65a	-0,27a	-1,17a
23	-0,27a	-0,65a	-1,17a
24	-0,65	0,27a	-1,17a

#### 4.4.5.2 Snub Dodecahedron

Arimet katılarından on ncs snub dodecahedrondur. Normalize edilmi bir snub dodecahedronun numaralandırılmı kelerinin, seilmi koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 4.20' deki gibidir. Şekil 4.27' den de görüleceği üzere snub dodecahedronun Schläfli sembolü  $s\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}\right\}$  tir.

Normalize edilmiş snub dodecahedronun bir kenarının uzunluğu  $a$ ; polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen aının tanjantı alınarak bulunur ( Şekil 4.28):

$$\tan 13,41 = \frac{0,5a}{1} ; \quad a \cong 0,477 \text{ br. ;} \quad (4.40)$$

Snub dodecahedronun yüzey alanı,

$$S = 20\sqrt{3} + 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2 \cong 12,578 \text{ br}^2 \quad (4.41)$$

olarak bulunur. Snub dodecahedronun hacmi,

$$V = \frac{12\varepsilon^2(3\tau+1)-\varepsilon(36\tau+7)-(53\tau+6)}{6\sqrt{(3-\varepsilon^2)^3}} a^3 \cong 4,08 \text{ br}^3 \quad (4.42)$$

olarak bulunur. Burada  $\tau$  altın orana olup değeri,

$$\tau = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \text{ 'dir.} \quad (4.43)$$

$\varepsilon$ 'nin değeri ise

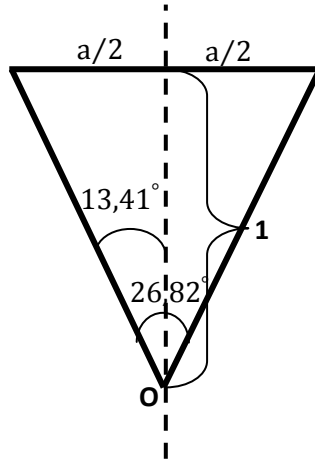
$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau - \frac{5}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\tau - \frac{5}{27}}} \cong 1,71556 \text{ br.} \quad (4.44)$$

olarak bulunur.

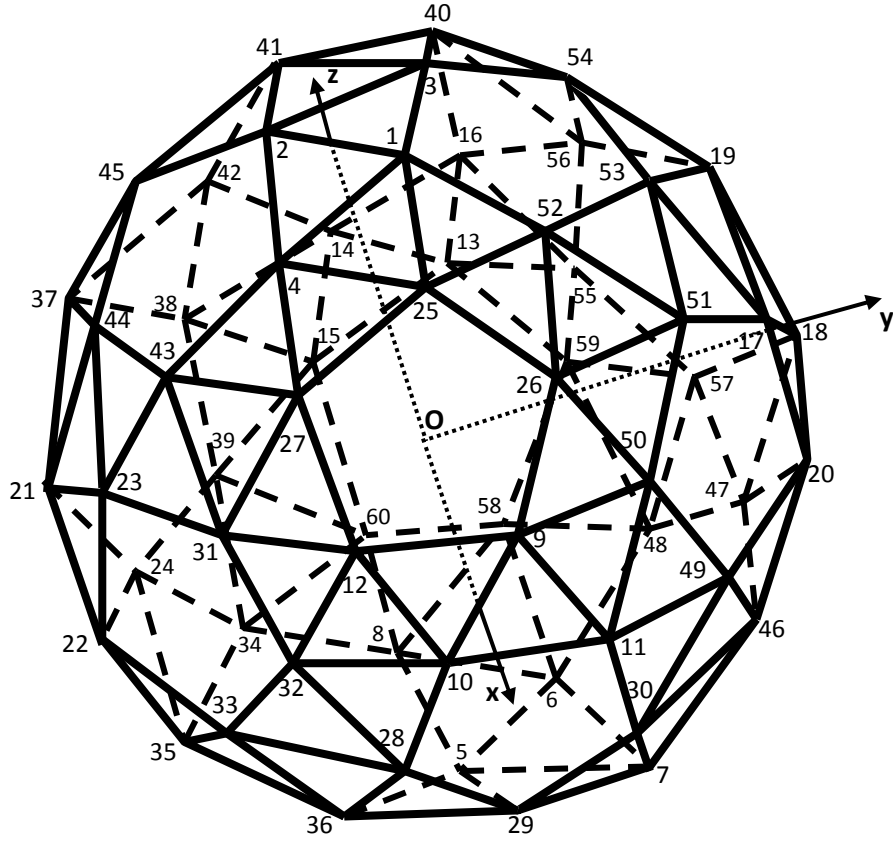
Üçgen ve üçgen arasındaki açı (3-3);  $164^\circ 10' 31'' \cong 164,75^\circ$ ,

Üçgen ve beşgen arasındaki açı (3-5);  $152^\circ 55' 53'' \cong 152,93^\circ$ ,

Polyhedronun merkezinde bir kenara karşılık gelen açı;  $26^\circ 49' \cong 26,82^\circ$ 'dir.



**Şekil 4.27** Merkez açısı. Snub dodecahedronun kenarının uçlarını merkeziyle birleştirildiğinde merkezinde oluşan açı.



Şekil 4.27 Snub dodecahedron

Tablo 4.20 Snub dodecahedronun köşe koordinatları

Köşe	x	y	z
1	0,158	0,179	1
2	-0,158	-0,179	1
3	-0,307	0,271	0,943
4	0,307	-0,271	0,943
5	0,158	0,179	-1
6	-0,158	0,179	-1
7	0,307	0,271	-0,943
8	-0,307	-0,271	-0,943
9	1	0,158	0,179
10	1	-0,158	-0,179
11	0,943	0,307	-0,271
12	0,943	-0,307	0,271
13	-1	0,158	-0,179
14	-1	-0,158	0,179
15	-0,943	-0,307	-0,271
16	-0,943	0,307	0,271
17	0,179	1	0,158
18	-0,179	1	-0,158
19	-0,271	0,943	0,307
20	0,271	0,943	-0,307

**Tablo 4.20 (Devam)** Snub dodecahedronun köşe koordinatları

21	-0,179	-1	0,158
22	0,179	-1	-0,158
23	0,271	-0,943	0,307
24	-0,271	-0,943	-0,307
25	0,596	0,092	0,833
26	0,404	0,526	0,785
27	0,347	-0,675	0,693
28	0,404	-0,526	-0,785
29	0,596	-0,092	-0,833
30	0,347	0,675	-0,693
31	0,693	-0,347	0,675
32	0,833	-0,596	-0,092
33	0,785	-0,404	-0,526
34	-0,675	-0,693	-0,347
35	0,092	-0,833	-0,596
36	0,526	-0,785	-0,404
37	0,347	-0,675	0,693
38	-0,833	-0,596	0,092
39	-0,693	-0,347	-0,675
40	-0,347	0,675	0,693
41	-0,596	-0,092	0,833
42	-0,404	-0,526	0,785
43	0,675	-0,693	0,347
44	-0,092	-0,833	0,596
45	-0,526	-0,785	0,404
46	0,675	0,693	-0,347
47	-0,092	0,833	-0,596
48	-0,526	0,785	-0,404
49	0,693	0,347	-0,675
50	0,833	0,596	0,092
51	0,785	0,404	0,526
52	0,526	0,785	0,404
53	0,092	0,833	0,596
54	-0,675	0,693	0,347
55	-0,833	0,596	-0,092
56	-0,693	0,347	0,675
57	-0,785	0,404	-0,526
58	-0,596	0,092	-0,833
59	-0,404	0,526	-0,785
60	-0,347	-0,675	-0,693

## 5. ARŞİMET KATILARININ SİMETRİ GRUBU

Arşimet katılarının simetri gruplarının incelenmesinden önce, grup kavramı ele alınacaktır. Bu tanımlamalardan sonra, her bir Arşimet katısının simetri gruplarının özellikleri incelenecektir.

### 5.1 Grup Kavramı

$\xi$  grubunun bir sonlu veya sonsuz kümesinin verilmiş olduğu varsayılırsa, bu  $\xi$  grubunun elemanları  $G_1, G_2, \dots, \dots, G_n$  kabul edilsin ve bu kümenin iki elemanı  $G_i$  ve  $G_j$  olsun. Grup çarpım ( $\circ$ ) olarak adlandırılan operasyon tanımlansın ve bu operasyonla  $G$  nin belirli bir üçüncü elemanı tanımlanmış olsun. Bu çarpma operasyonunun gerçekleşmesi için aşağıdaki şartları gerçekleştirmesi gerekir:

i.  $\xi$  kümesi çarpımda kapalıdır.  $\xi$  kümesinin herhangi bir  $G_i$  ve  $G_j$  iki elemanı için,  $G_j \circ G_i$  çarpımının sonucu da yine  $\xi$  kümesinin elemanıdır.

ii. birleşme özelliği vardır:

$$G_k \circ (G_j \circ G_i) = (G_k \circ G_j) \circ G_i \quad (5.1)$$

iii.  $G_1 \in \xi$  olsun

$$G_1 \circ G = G \circ G_1 = G \quad (5.2)$$

ifadesi gerçekleşiyorsa  $G_1$  elemanına birim eleman denir ve bu  $E$  şeklinde gösterilir:

$$E \circ G = G \circ E = E \quad (5.3)$$

iv.  $G \in \xi$  olsun,

$$G^- \circ G = G \circ G^- = E \quad (5.4)$$

oluyorsa  $G^-$ ,  $G$  elemanının tersidir. Aynı zamanda  $G^{-1}$  şeklinde de yazılabilir.

v.  $\xi$  grubunun herhangi bir iki elemanı  $G_i$  ve  $G_j$  'nin değişme özelliği vardır:

$$G_j \circ G_i = G_i \circ G_j \quad (5.5)$$

Bu koşul gerçekleşiyorsa  $\xi$  ye değişimli grup (Abelyen grup) adı verilir.

Sonlu sayıda elemandan oluşan gruba sonlu grup, aksi halde sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanları sayısına grubun mertebesi adı verilir [23].

### 5.1.1 Çarpım Tablosu

Çarpım tablosu (ya da grup tablosu) yapıldığında, grup yapısı daha belirgin olacaktır. Tabloyu oluşturmak için Tablo 5.1 de görüldüğü gibi  $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_g$  grup elemanlarını tablonun en üst satırına ve en sol sütununa yerleştirildi. Üst satırdaki  $G_j$  ve sol sütundaki  $G_i$  elemanlarının kesiştiği noktada  $G_j \circ G_i$  yazıldı [24].

**Tablo 5.1** Çarpım tablosunun gösterimi

$G_j \backslash G_i$	$G_1$	$G_2$	...	$G_i$	...	$G_g$
$G_1$	$G_1 \circ G_1$	$G_1 \circ G_2$	...	$G_1 \circ G_i$	...	$G_1 \circ G_g$
$G_2$	$G_2 \circ G_1$	$G_2 \circ G_2$	...	$G_2 \circ G_i$	...	$G_2 \circ G_g$
...	...	...	...	...	...	...
$G_j$	$G_j \circ G_1$	$G_j \circ G_2$	...	$G_j \circ G_i$	...	$G_j \circ G_g$
...	...	...	...	...	...	...
$G_g$	$G_g \circ G_1$	$G_g \circ G_2$	...	$G_g \circ G_i$	...	$G_g \circ G_g$

### 5.1.2 Üretici Elemanlar

Verilen  $\xi$  grubunun her bir elemanı, farklı elemanların çarpımı şeklinde ifade edilirse, bu elemanlara  $\xi$  grubunun üretici elemanları (üretici) olarak adlandırılır.

$X$  ve  $Y$ ,  $\xi$  grubunun iki elemanı olsun. Bu  $X$  ve  $Y$  elemanı için,  $X \circ Y = Y \circ X$ , değişme özelliği varsa;  $V = \{E, X, Y, X \circ Y\}$  kümesi bir grup oluşturur. Bu dört grup olarak adlandırılır. Bu grup  $X$  ve  $Y$  iki üretici



elemanına sahiptir. Dört grup için çarpım tablosu Tablo 5.2 de gösterilmiştir. Buradaki  $Z; X \circ Y$  yi ifade etmektedir.

**Tablo 5.2** Dört grup  $V'$  nin çarpım tablosu

$G_i \backslash G_j$	E	X	Y	Z
E	E	X	Y	Z
X	X	E	Z	Y
Y	Y	Z	E	X
Z	Z	Y	X	E

$C_{2x}, C_{2y}$  ve  $C_{2z}$  olarak gösterilen  $x, y$  ve  $z$  eksenleri etrafında 180 derece dönme tanımlanırsa,  $D_2 = \{E, C_{2x}, C_{2y}, C_{2z}\}$  kümesi bir gruptur ve bu grubun çarpım tablosu dört gruptaki ile aynıdır.

### 5.1.3 Değişmeli Grup

Değişmeli gruplarda,  $\circ$  çarpım sembolü kullanmak yerine  $+$  toplama sembolü kullanmak daha uygundur. Bunun için, önceden de bahsedilen 5 özellik yazılır:

1.  $\mathcal{A}$  kümesi  $+$  toplamada kapalıdır.  $\mathcal{A}$  kümesinin herhangi bir  $A_i$  ve  $A_j$  elemanlarının toplamı  $(A_i + A_j)$  da yine  $\mathcal{A}$  kümesindedir.
2. Birleşme özelliği vardır.

$$A_k + (A_j + A_i) = (A_k + A_j) + A_i \quad (5.6)$$

3. Herhangi bir eleman  $A \in \mathcal{A}$  için,

$$A + 0 = 0 + A = A \quad (5.7)$$

oluyorsa, 0 birim elemandır.

4.  $A \in \mathcal{A}$  ve  $(-A) \in \mathcal{A}$  için;

$$(-A) + A = A + (-A) = 0 \quad (5.8)$$

oluyorsa,  $(-A)$  elamanı,  $A$  elemanının tersidir.

5. Herhangi bir iki  $A_i, A_j \in \mathcal{A}$  için değişme özelliği vardır:

$$A_i + A_j = A_j + A_i \quad (5.9)$$

$\mathcal{A}$  kümesi bu 5 özelliği koruyorsa eklemeli grup olarak adlandırılır. Reel sayıların hepsi ve kompleks sayılar eklemeli grubu oluştururlar.

## 5. 2 Düzenli Çokgenlerin Simetri Operasyonları

Eşkenar üçgenin simetri operasyonlarını ele alalım. Şekil 5.1' de, 123 köşelerine karşılık gelen  $\alpha\beta\gamma$  açılarıyla uyumlu eşkenar üçgen gösterilmektedir.  $\alpha\beta\gamma$  üçgeni döndürülsün ve açıların nerede yer aldıklarına bakılsın. Dönme açısı  $\emptyset$  ise Şekil 5.2a' da görüldüğü gibi ilk dönme  $\emptyset = 2\pi/3$ ' dir. Bu ilgili dönme,  $R(2\pi/3)$  ile gösterilir. Şekil 5.2b de gösterildiği gibi ikinci bir dönme için açı  $\emptyset = 2 \times 2\pi/3$  kadar olur.  $R(2\pi/3)$  için  $C_3$  yazılırsa;  $R(4\pi/3)$  ,  $C_3$  'nin tekrarlanması olduğu için  $C_3^2 = R(4\pi/3)$  şeklinde yazılır. Dönme açısı  $\emptyset$ ,  $2\pi$ 'nin katları olduğundan, ikinci simetri durumu (Şekil 5.2b) ters yönde dönme  $\emptyset = -2\pi/3$  olarak da gösterilebilir. Bunun anlamı,  $C_3^2 = R(-2\pi/3) = C_3^{-1}$ 'dir. İkinci dönmeden sonra tekrardan eşkenarlı üçgen  $2\pi/3$  kadar döndürülürse,

$$C_3^3 = R(2\pi) = R(0) \quad (5.10)$$

elde edilir. Bu üçüncü simetri pozisyonu  $\emptyset = 0$  daki orijinal pozisyonuyla aynıdır:

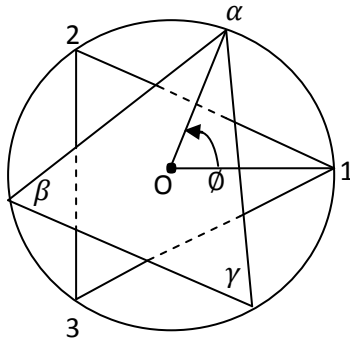
$$C_3 C_3^2 = C_3^3 = E. \quad (5.11)$$

Burada E birim (identity) operasyondur. Özdeşlik operasyonu  $\alpha\beta\gamma$  üçgeni aynı kalır (Şekil 5.2c).

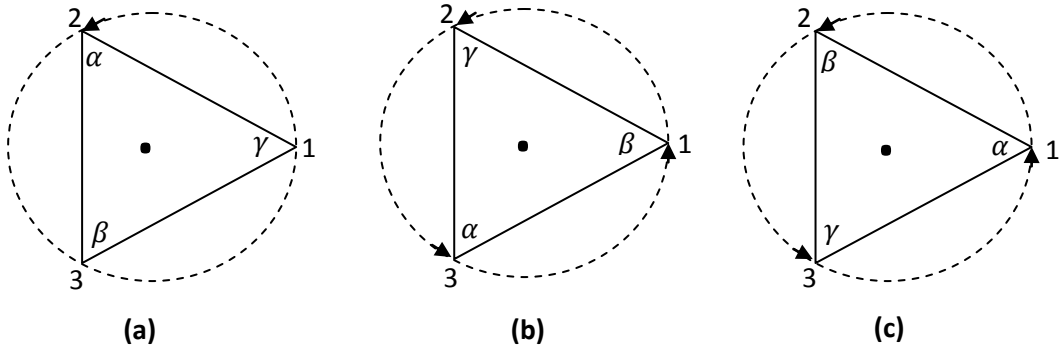
Simetri operasyonlarının bir elemanı olarak birim (identity) dönme  $E = R(0)$  'yi içeren  $E, C_3$ , ve  $C_3^2 = C_3^{-1}$  simetri operasyonları vardır. Bu operasyonların kümesi;

$$C_3 = \{E, C_3, C_3^{-1}\}, \quad (5.12)$$

kapalıdır.



Şekil 5.1  $\alpha\beta\gamma$  üçgeni, 123 tabanında saat yönü tersine döner.



Şekil 5.2  $\alpha\beta\gamma$  üçgeninde (a)  $C_3$  (b)  $C_3^2$  ve (c)  $C_3^3$  dönmelerinin etkileri.

Burada çarpmanın anlamı operasyonları sırayla uygulamaktır.  $C_3$  kümesi; E birim elemanına,  $C_3$  üretici elemanına ve onun ters elemanına  $C_3^{-1}$  sahiptir ve bunlarda grup özelliklerini göstermektedir.

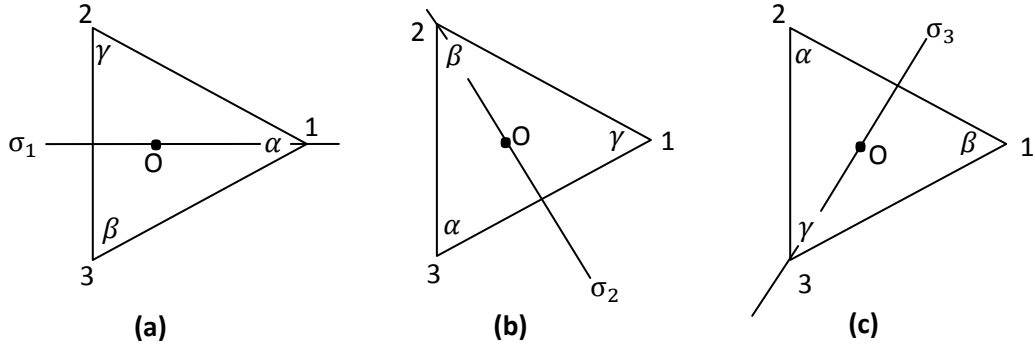
Benzer şekilde karenin merkezi etrafında karenin dönel simetrisi düşünülün. İlk dönme  $\emptyset = 2\pi/4$  kadar olur ve ilgili operasyon  $R(\pi/2) = C_4$  'dür. İkinci simetri pozisyonu,  $C_4^2 = C_2 = R(\pi)$  [25] tarafından verilir. Üçüncü simetri pozisyonu da  $C_4^3 = R(3\pi/2) = R(-\pi/2) = C_4^{-1}$  tarafından belirlenir. Dördüncü adımda, başlangıçtaki pozisyonunu alır.  $\emptyset = 2\pi$  kadar dönme olur ve  $C_4^4 = C_2^2 = R(2\pi) = R(0) = E$  ilişkisin gösterir. dört kat dönmenin varlığı, geometrik cismin simetri özelliklerini belirler. Karenin dönel simetrisi,

$$C_4 = \{E, C_4, C_2, C_4^{-1}\} \quad (5.13)$$

kümesi tarafından belirlenir.

**Tablo 5.3**  $C_{3v}$  grubunun çarpım tablosunun gösterimi

$G_i \backslash G_j$	E	$C_3$	$C_3^{-1}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
E	E	$C_3$	$C_3^{-1}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$C_3$	$C_3$	$C_3^{-1}$	E	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$C_3^{-1}$	$C_3^{-1}$	E	$C_3$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	E	$C_3$	$C_3^{-1}$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$C_3^{-1}$	E	$C_3$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$C_3$	$C_3^{-1}$	E



Şekil 5.3  $\alpha\beta\gamma$  üçgeninde (a)  $\sigma_1$  (b)  $\sigma_2$  ve (c)  $\sigma_3$  yansımalarının etkileri.

Şu ana kadar simetri operasyonları sınırlandırıldı, ama eşkenar bir üçgende farklı bir simetri elemanı daha vardır. O1 düz doğrusu boyunca bir  $\sigma_1$  dik ayna düzlemi düşünülün (Şekil 5.3). Bu ayna düzlemindeki yansıma,  $\alpha\beta\gamma$  üçgeniyle 123 üçgeninin tabanını kesiştirir. Bunun gibi 3 yansıma vardır,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ve  $\sigma_3$  Şekil 5.3' de gösterilmiştir. Eğer bu yansımaları simetri operasyonları olarak sayılacak olursa, altı operasyonun kümesi

$$C_{3v} = \{E, C_3, C_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad (5.14)$$

kapalıdır. Yani bu kümeye ait bu operasyonlardan ikisinin çarpımı yine bu kümeye aittir. Örneğin;  $\sigma_1$  yansıması 2 ve 3 köşelerinin yerlerini değiştirdiği için, ilk önce  $C_3$  ve sonradan  $\sigma_1$  operasyonları uygulanırsa, net sonuç Şekil 5.3b deki gibi olur. Böylece,

$$\sigma_1 C_3 = \sigma_2 \quad (5.15)$$

yazılır. Benzer şekilde,

$$\sigma_1 \sigma_2 = C_3 \quad (5.16)$$

yazılabilir. Bu yolla bütün çarpımlar yapılabilir. Bu çarpımların tablosu Tablo 5.3' de gösterilmektedir.

Simetri operasyonlarının özellikleri, geometrik şekil üzerinden tartışıldı. Sonuçlanan grupların yapılar analitik anlamlarıyla da bulunabilir.  $P(x,y)$  noktasını  $P'(x',y')$  noktasına taşıyan  $\sigma_1$  ayna yansıması ile  $x$  ve  $y$  koordinatlarının dönüşümü yapıldığında, burada

$$x' = x \quad y' = -y \quad (5.17)$$

veya vektör şeklinde,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

yazılabilir. Bunun anlamı,  $\sigma_1$  ayna yansımasının etkileri matris şeklinde gösterilebilmesidir:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$R(\emptyset)$  dönmesi için, polar koordinatları kullanmak uygundur ve  $x = r\cos\alpha$ ,  $y = r\sin\alpha$  ve  $x' = r\cos(\alpha + \emptyset)$ ,  $y' = r\sin(\alpha + \emptyset)$  yazılır. Buradan,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \hat{R}(\emptyset) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

ilişkisi elde edilir. Burada  $\hat{R}(\emptyset)$ ,

$$\hat{R}(\emptyset) = \begin{bmatrix} \cos\emptyset & -\sin\emptyset \\ \sin\emptyset & \cos\emptyset \end{bmatrix} \text{ ' dir.} \quad (5.21)$$

Böylece  $R(\emptyset)$  dönmesinin etkileri, matris dönüşümleri altında gösterilebilir. Altı elemanlı gruba ilişkin altı matris elde edilir:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_3^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$\hat{C}_3$  matrisi, Eşitlik 5.21 de  $\emptyset = 2\pi/3$  konularak elde edilir. Bu altı matrisin kümesi, grup  $C_{3v}$  için çarpım tablosuna aittir (Tablo 5.3). Bu tabloya örnek,

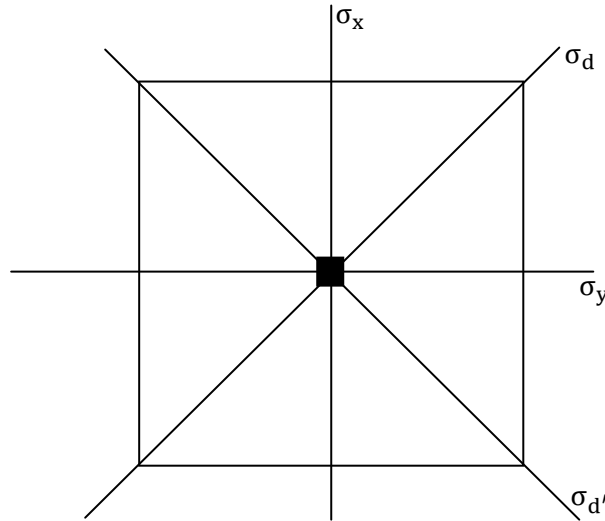
$$\hat{\sigma}_1 \hat{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_2 \quad (5.23)$$

şeklinde yapılır.

Eşitlik 5.13' de gösterilen dörtlü dönmenin yanı sıra, kare  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_d$  ve  $\sigma_{d'}$  olan dört ayna yansımaya sahiptir (Şekil 5.4) [26].

$$C_{4v} = \{E, C_4, C_2, C_4^{-1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma_{d'}\} \quad (5.24)$$

kümesi, Tablo 5.4 de verilen çarpımlar ile bir grup oluşturur.



**Şekil 5.4** Karenin simetri operasyonları. Karenin merkezinde karalanmış kare etrafında dört kat dönmeyi belirtir.  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$ , x ve y eksenlerine dik düzlemde yansımaları temsil eder.

**Tablo 5.4**  $C_{4v}$  grubunun çarpım tablosunun gösterimi

$G_i \backslash G_j$	E	$C_4$	$C_2$	$C_4^{-1}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_d$	$\sigma_{d'}$
E	E	$C_4$	$C_2$	$C_4^{-1}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_d$	$\sigma_{d'}$
$C_4$	$C_4$	$C_2$	$C_4^{-1}$	E	$\sigma_{d'}$	$\sigma_d$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
$C_2$	$C_2$	$C_4^{-1}$	E	$C_4$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_{d'}$	$\sigma_d$
$C_4^{-1}$	$C_4^{-1}$	E	$C_4$	$C_2$	$\sigma_d$	$\sigma_{d'}$	$\sigma_y$	$\sigma_x$
$\sigma_x$	$\sigma_x$	$\sigma_d$	$\sigma_y$	$\sigma_{d'}$	E	$C_2$	$C_4$	$C_4^{-1}$
$\sigma_y$	$\sigma_y$	$\sigma_{d'}$	$\sigma_x$	$\sigma_d$	$C_2$	E	$C_4^{-1}$	$C_4$
$\sigma_d$	$\sigma_d$	$\sigma_y$	$\sigma_{d'}$	$\sigma_x$	$C_4^{-1}$	$C_4$	E	$C_2$
$\sigma_{d'}$	$\sigma_{d'}$	$\sigma_x$	$\sigma_d$	$\sigma_y$	$C_4$	$C_4^{-1}$	$C_2$	E

### 5.3 Permütasyon Grup Kavramı

Bahsedilen eşkenar üçgende olduğu gibi simetri operasyonları,  $\alpha\beta\gamma$  döndürülebilir üçgeninin  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  kenarlarının yerlerini değiştirdi. Bu nedenle; simetri operasyonları  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  terimlerinin permütasyonu olarak yorumlanabilir.

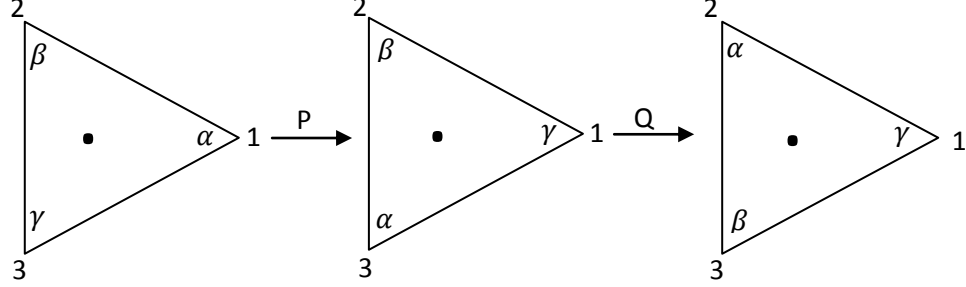
$n$  tane terim olduğunda,  $n$  tane köşeye yerleştirmek için  $n!$  permütasyon vardır.  $n!$  permütasyonunun oluşturduğu gruba “permütasyon grubu” ve ya “ $n$  dereceli simetri grubu” denir.  $S_n$  ile gösterilir.  $P$  permütasyonu  $p_i$  cismi  $i$ 'inci köşeye taşıyorsa, permütasyonlar için gösterim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

şeklinde tanımlanır. Burada sütunların düzeninin önemi yoktur:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & \dots & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_k & \dots & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (5.26)$$



Şekil 5.5 P permütasyonu ve onu takip eden Q permütasyonunun etkileri.

Permütasyon sembollerinin tanımıyla, Şekil 5.3b' de gösterilen  $\sigma_2$  ayna yansımaları 1 ve 3 köşelerindeki terimlerin yerlerini değiştirdiği için  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  permütasyonu olarak yorumlanabilir. Benzer şekilde, Şekil 2.3a'da gösterilen  $\sigma_1$  yansımaları 2 ve 3 köşelerindeki terimlerin yerlerini değiştirdiği için  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  permütasyonu yazılabilir. Eğer ilk önce P ve sonradan da Q operasyonları uygulanırsa, net sonuç  $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  olur. Çünkü  $\alpha\beta\gamma$ ,  $\gamma\alpha\beta$  olarak yer değiştirir (Şekil 5.5).

P,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  olarak yeniden yazılırsa iki permütasyonun QP çarpımı

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

olarak değerlendirilir. İki permütasyonun çarpımı genelleştirilirse,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \dots & p_{q_k} & \dots & p_{q_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \dots & p_{q_k} & \dots & p_{q_n} \end{pmatrix} \tag{5.28}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E, \text{ üç dereceli } \mathfrak{S}_3 \text{ grubunun birim elemanıdır.}$$

Permütasyonlar için kısaltılmış gösterimler de vardır [24, 27]:

$$\begin{aligned}
(1\ 3\ 2) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2\ 3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
(2\ 3) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1\ 3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1\ 2) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Bu altı permütasyonun kümesi kapalıdır ve  $\mathfrak{S}_3$  grubunu oluşturur. Bu permütasyonların çarpımı Eşitlik 5.28' i kullanarak yapılabilir. Örnek olarak;

$$\begin{aligned}
(1\ 3\ 2)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \tag{5.30}
\end{aligned}$$

yapılabilir. Benzer şekilde,

$$(1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2)$$

$$\begin{aligned}
(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}$$

$$(1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 2) = E \quad (5.31)$$

yapılır. Böylece  $\{E, (1 \ 3 \ 2), (1 \ 2 \ 3)\}$  alt kümesi, alt grupları oluşturur. Ek olarak, eşitlik 5.27'den

$$(2 \ 3)(1 \ 3) = (1 \ 3 \ 2) \quad (5.32)$$

yazılır. Benzer çarpımların sonuçları hesaplanabilir. Bu kısaltılmış permütasyonların çarpımı Tablo 5.5'de gösterilmektedir.

**Tablo 5.5**  $\mathfrak{S}_3$  grubunun çarpım tablosunun gösterimi

	E	(1 3 2)	(1 2 3)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
E	E	(1 3 2)	(1 2 3)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1 2 3)	E	(1 2)	(2 3)	(1 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	E	(1 3 2)	(1 3)	(1 2)	(2 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	E	(1 3 2)	(1 2 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 2 3)	E	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 3 2)	(1 2 3)	E

## 5.4 İzomorfizm ve Homomorfizm

### 5.4.1 İzomorfizm

Düzenli (kuralı) üçgenin  $C_{3v}$  grubuyla, üçüncü dereceli simetrik grup  $\mathfrak{S}_3$  arasında, aşağıdaki birebir benzeşme (one-to-one correspondence) bulunmaktadır:

$$E \leftrightarrow E, C_3 \leftrightarrow (1 \dots 3 \dots 2), C_3^{-1} \leftrightarrow (1 \dots 2 \dots 3)$$

$$\sigma_1 \leftrightarrow (2 \dots 3), \sigma_2 \leftrightarrow (1 \dots 3), \sigma_3 \leftrightarrow (1 \dots 2). \quad (5.33)$$

Eğer iki çarpım tablosu (Tablo 5.3 ve 5.5) karşılaştırılırsa, yukarıdaki benzeşme (correspondence) altında aynı yapıya sahip oldukları görülür. Böylece,  $C_{3v}$  ve  $S_3$  gruplarının izomorfik olduğu söylenir.

İzomorfizmin genel tanımı şu şekildedir: eğer bir  $\xi$  grubunun  $G$  elemanlarıyla, başka bir  $\xi'$  grubunun  $G'$  elemanları arasında birebir benzeşme mevcutsa, öyle ki  $\xi$  deki  $G_i G_j = G_k$  çarpımına karşılık,  $\xi'$  de  $G'_i G'_j = G'_k$  oluyorsa  $\xi$  ve  $\xi'$  izomorfiktir ve şöyle yazılır:

$$\xi \cong \xi' \quad (5.34)$$

Bu terimle ilgili olarak, yukarıdaki izomorfizm örneği şöyle ifade edilebilir:

$$C_{3v} \cong S_3 \quad (5.35)$$

Matematiksel olarak, izomorfik gruplar aynı yapıya sahip olduklarından özdeş (identical) olarak kabul edilirler. Eğer izomorfizmdeki birebir benzeşmeyi n'den bire (n to one) benzeşime genelleştirilirse homomorfizm kavramına ulaşılır.

#### 5.4.2 Homomorfizm

Verilen  $\xi$  ve  $\xi'$  grupları için,  $f$ ,  $\xi$  grubunun  $G$  elemanlarını,  $\xi'$  nin  $G'$  lerine eşleyen (map) bir eşleştirme (mapping) olsun; yani,  $G' = f(G)$ . Eğer,

$$f(G_i G_j) = f(G_i) f(G_j) \quad (5.36)$$

$\xi$  nin herhangi iki elemanı  $G_i$  ve  $G_j$  için sağlanıyorsa,  $f$  homomorfik eşleştirmedir (homomorphic mapping) denir. Homomorfik eşleştirme ile bağlanan  $\xi$  ve  $\xi'$  grupları homomorfiktir denir ve bağıntı şöyle yazılır:

$$\xi \sim \xi' \quad (5.37)$$

$C_{3v} \sim C_2$ , öyle ki,  $C_2 = \{E, C\}$ ,  $C^2 = E$ .  $C_{3v}$  grubunun elemanlarının  $C_2$ 'nin iki elemanına karşılık gelmesi (correspond) sağlanabilir:

$$E, C_3, C_3^{-1} \xrightarrow{f} E, \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \xrightarrow{f} C \quad (5.38)$$

Çarpım tablosundan (Tablo 5.3) kolayca görüleceği gibi, bu eşleştirme, (mapping) Eşitlik 5.36'yı tüm elemanlar için sağlamaktadır, böylece  $C_{3v}$  ve  $C_2$  homomorfiktir. Bu örnekte,  $C_{3v}$  grubundaki üç eleman,  $C_2$ 'deki tek bir elemana eşlenmiştir.

İki grup arasındaki homomorfizm iki grubun elemanları arasında n'den bire (n to one) benzeşme (correspondence) anlamına gelir. Özellikle,  $f$  eşleştirmesi birebir olduğunda ve (Eşitlik 5.36) homomorfizm koşulunu sağladığında, bu bir izomorfik eşleştirmedir.

A kümesini B kümesine eşleyen bir  $f: A \rightarrow B$  eşleşmesi, A'nın bir A elemanını B'nin bir B elemanı ile ilişkilendiren bir kuralla (ya da bir fonksiyonla, bir transformasyonla) tanımlanır. A, B'nin ters görüntüsü iken, B elemanı A'nın görüntüsüdür. B'nin her elemanının A'da karşılık gelen bir ters görüntüsü varsa, böyle bir eşleştirme *üstüne eşleştirmedir*. (onto mapping). Yukarıda tanımlanan homomorfik eşleştirme bir üstüne-eşleştirmedir [24].

## 5.5 Alt Gruplar

Bir  $\xi$  grubunun  $\mathcal{H}$  altgrubu  $\xi$ 'nin alt kümesidir, öyle ki kendisi, ana grup  $\xi$ 'de tanımlanan çarpma altında bir gruptur. Hem tekil eleman  $\{E\}$ , hem de grup  $\xi$ 'nin kendisi,  $\xi$ 'nin küçük altgruplarıdır. Diğer altgruplar, varlarsa eğer, tam altgruplardır (proper subgroup).

Bir  $\xi$  grubunun, boş olmayan  $\mathcal{H}$  altkümesi, yalnız ve yalnız aşağıdaki koşullar gerçekleşiyorsa bir altgruptur.

$$1) H_i, H_j \in \mathcal{H} \rightarrow H_i H_j \in \mathcal{H}$$

$$2) H \in \mathcal{H} \rightarrow H^{-1} \in \mathcal{H}$$

İspat: eğer  $\mathcal{H}$  bir grupsa 1 ve 2 geçerlidir (doğrudur). Diğer taraftan, 1 ve 2'nin geçerli olduğu farzedilsin, bundan sonra  $\mathcal{H}$ 'nin bir grup için gerekli tüm şartları sağladığı gösterilebilir. 1'e göre, Bölüm 5.1' deki birinci özelliği sağlanmaktadır. 2, Bölüm 5.1'deki dördüncü özelliği garantilerken;  $\mathcal{H}$ ,  $\xi$ 'nin altkümesi olduğu için birleşme kuralı (associative law) geçerlidir. 1 ve 2'den  $HH^{-1} = E$  unsuru  $\mathcal{H}$ 'ye dahil edilir. Böylece, dört grup aksiyomu  $\mathcal{H}$  ile sağlanmış olur.

$C_{3v}$  nin aşağıdaki dört tam (proper) altgrubu vardır.

$$\{E, \sigma_1\}, \{E, \sigma_2\}, \{E, \sigma_3\}, \{E, C_3, C_3^{-1}\}. \quad (5.39)$$

## 5.6 Nokta Grupları

Bölüm 5.2’de bir eşkenar üçgenin ve bir karenin simetri gruplarını bir grubun basit (temel) örnekleri olarak değerlendirildi. Dönmeler ve yansımalar içeren bu gruplar, nokta grupları olarak adlandırılırlar. Nokta grupları moleküllerin mikroskobik simetrisini ve kristallerin makroskobik simetrisini tanımlarlar (tarif ederler). Bu nedenle elektronik durumlar (haller) ve moleküllerin titreşimlerinin yanı sıra kristallerin makroskobik özelliklerini çalışırken de sıklıkla kullanılırlar. Bu bölümde, nokta gruplarını, onların gösterimleri (notasyonları) tanımlanacaktır.

### 5.6.1 Nokta Gruplarında Simetri İşlemleri

Nokta grubu, molekül gibi değişmez sonlu bir obje olarak bırakan simetri işlemlerinin grubuna denir. Simetri operasyonları, o objenin sabit bir noktası etrafındaki dönmelerine (ve uzaydaki ters dönüşümlerinin kombinasyonlarına) sınırlanmıştır.

Örnek olarak Şekil 5.6’ da ortaya konmuş konfigürasyonu ele alalım. Aşağıdaki sekiz işlem (operasyon) bu konfigürasyonu kendisiyle çakıştırır:

**E:** Bu konfigürasyonu olduğu gibi bırakan özdeşlik işlemidir (identity operation – birim operasyonu da denilebilir). Bir grup elemanı olarak bu işlemin kabul edilmesi grup özelliklerini sağlanması için gereklidir.

**$C_4^2$ :** Dikey eksen boyunca  $\pi$  kadar dönme

**$IC_4$ :** dikey eksen boyunca  $\pi/2$  kadar dönme, ardından bir ters dönüşüm (inversion)

**$IC_4^{-1}$ :** Dikey eksen boyunca  $3\pi/2$  kadar dönme, ardından bir ters dönüşüm (inversion)

**$2C_2'$ :** Yatay x ve y eksenleri boyunca  $\pi$  kadar dönme

**$2\sigma_d$ :** diyagonal düzlemlerdeki ayna yansımaları

İki tane dik  $C'_2$  ekseninin ve iki tane dik  $\sigma_d$  ayna düzlemin olduğuna dikkat edin. Eğer çarpımları, ardışık işlemler olduğu düşünülürse, bu sekiz işlem kapalıdır. Bu, Şekil 5.6' daki simetri işlemi altındaki çemberlerin hareketini izleyerek doğrulanabilir. Bu nedenle, sekiz işlem,  $D_{2d}$  ya da  $\bar{4}2m$  olarak tanımlanan bir grup teşkil eder.

Geometrik simetri işlemleri genelde şu sembollerle gösterilir:

**E:** Birim operasyonu

**$C_n$ :**  $2\pi/n$  kadarlık bir açıyla dönme. Dönme eksenine n-katlı (n-fold) eksen denir.

Ana dönme eksenine dik  $\pi$  kadar dönmeler  $C'_2$  ile gösterilir ve *Umklappung* olarak adlandırılır.

**I:** Uzayda ters dönüşüm (space inversion). “r” yi “-r” ye taşır

**$\sigma$ :** Ayna yansımaları (mirror reflection). Ayna düzlemin özelliğine bağlı olarak üç farklı çeşit alt indisi (suffix) taşır

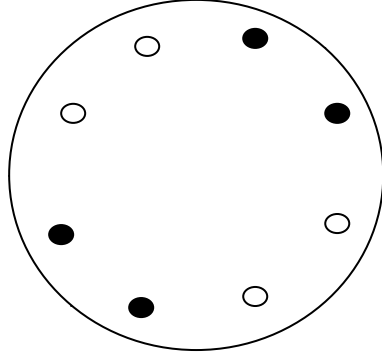
**$\sigma_h$ :** Yatay düzlemde ayna yansımaları

**$\sigma_v$ :** Dikey düzlemde ayna yansımaları

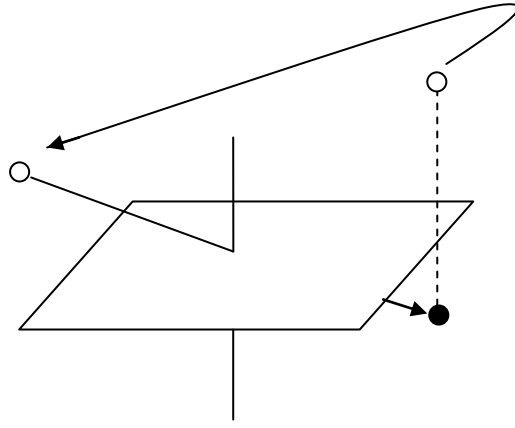
**$\sigma_d$ :** Dikey diyagonal düzlemde ayna yansımaları

**$IC_n$ :** Dönüşümlü ters dönüşüm (rotatory inversion).  $2\pi/n$  açısı boyunca dönme, ardından ters dönüşüm (inversion)

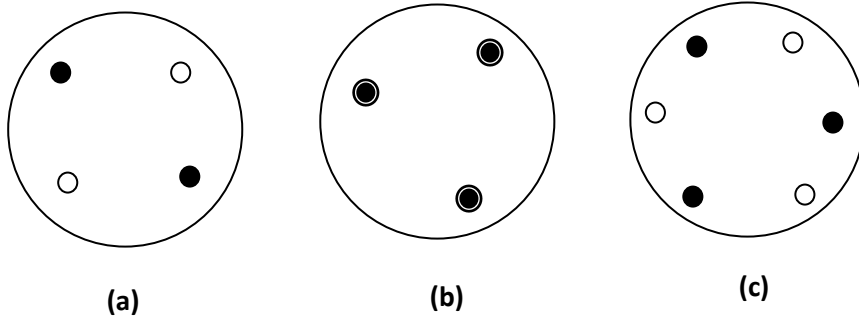




Şekil 5.6  $D_{2d}$  nokta grubu. Beyaz daireler kâğıdın üzerine ve siyah olanlar kâğıdın aynı uzaklıkta altına yerleştirilmiştir.



Şekil 5.7  $IC_2$  dönüşümlü ters dönüşümü (rotatory inversion),  $\sigma$  ayna yansımasına denktir.



Şekil 5.8 (a)  $S_4$ , (b)  $C_{3h}$ , (c)  $S_6$  ( $C_{3i}$ ) nokta grupları.

Şekil 5.7'den görülebileceği gibi,  $IC_n$  dönüşümlü ters dönüşümü (rotatory inversion), iki katlı eksene dik olan düzlemde  $\sigma$  ayna yansımadır. Genel olarak, bir dönüşümlü ters dönüşüm (rotatory inversion) bir dönüşümlü yansımaya (rotatory reflection) olarak da anlaşılabilir (dönme ve ardından yansımaya). Dönüşümlü yansımaya  $\sigma_h C_n$  'i  $S_n$  ile gösterilirse ve  $\sigma_h = IC_2$  kullanılırsa,

$$S_n = IC_2 C_n \quad (5.40)$$

bulunur. Özel olarak,  $n = 4$  ise,

$$S_4 = IC_4^3 \quad (= IC_4^{-1}) \quad (5.41)$$

elde edilir ve  $n = 3$  olduğunda

$$S_3 = IC_2 C_3 = IC_6^5 \quad (= IC_6^{-1}) \quad (5.42)$$

Ardışık  $S_3$  operasyonları,  $S_3$  eksenine  $C_3$  ve  $\sigma_h$  operasyonlarının eşlik ettiğini gösteren Şekil 5.8b'deki konfigürasyonu ortaya çıkarır.  $n = 6$  olduğunda,

$$S_6 = IC_2 C_6 = IC_3^2 \quad (= IC_3^{-1}) \quad (5.43)$$

elde edilir. Bu durumda, Şekil 5.8c,  $C_3$  ve  $I$  simetrilerini göstermektedir. 3 ve 6 alt indislerinin Eşitlik (5.42) ve Eşitlik (5.43) de karşılıklı yer değiştirdiğine dikkat edin.

Dönüşümlü ters dönüşümler (rotatory inversion) ve dönüşümlü yansımalar (rotatory reflection) bazen “uygun olmayan dönmeler (improper rotations)” olarak adlandırılır. Bu durumda basit dönmeler, “uygun dönmeler (proper rotations)” olarak adlandırılır.

### 5.6.2 Nokta Grupları ve Gösterimleri (Notasyonları)

Orijin etrafındaki  $C_n$  dönmeleri söz konusu oldukça,  $n$  tüm tamsayı değerlerini alabilir. Ancak, kristallerde, ötelemeyle ilgili simetriyi (translational symmetry) de hesaba katmalıdır. Öteleme simetrisi ile uyumlu olan dönüşümlü simetri (rotational symmetry)  $n$ 'in değerini 1,2,3,4 ve 6'ya kısıtlar/sınırlar. Bu

şekilde sınırlanmış türde dönmelerden ve ters dönüşümlerden (inversions) oluşan nokta gruplarına kristalografik (crystallographic) nokta grupları denir. Bu 32 nokta grubunu Schönflies sembolleriyle aşağıda sıralayalım.

**$C_n$**  Grubu: Bu grubun yalnızca n-katlı dönme eksenini vardır. n. nertebeden dönüşümlü (cyclic) bir grup olup, E,  $C_n, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ 'i içerir.

**$C_i$**  Grubu: Bu grup I ters dönüşümünden (inversion) ve E özdeşliğinden (identity) oluşur.

**$C_{nv}$**  Grubu: Bu grubun n tane dikey ayna düzlemi ve n-katlı eksenini vardır (n=2,3,4,6) .

**$C_{nh}$**  Grubu: Bu grubun yatay ayna düzlemi ve n-katlı eksenini vardır (n=1,2,3,4,6). n=2,4,6 için I ters dönüşümü içerir.

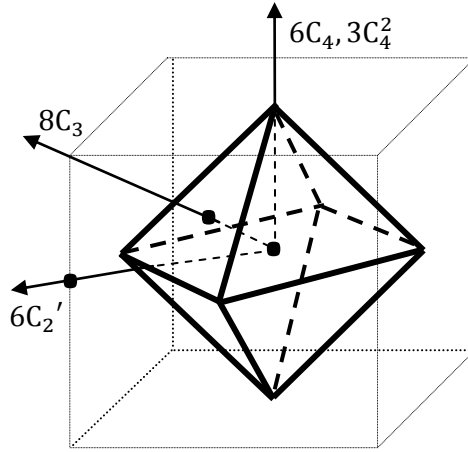
**$S_n$**  Grubu: Bu grubun yalnızca n-katlı dönüşümlü yansıma eksenini (rotatory reflection axis) vardır (n=4,6). n=2,3 için  $S_2$  ve  $S_3$  yerine sıklıkla  $C_i$  ve  $C_{3h}$  kullanılır.

**$D_n$**  Grubu: Bu grubun n-katlı dönme eksenine dik n tane iki katlı eksenini vardır. (n=2,3,4,6)

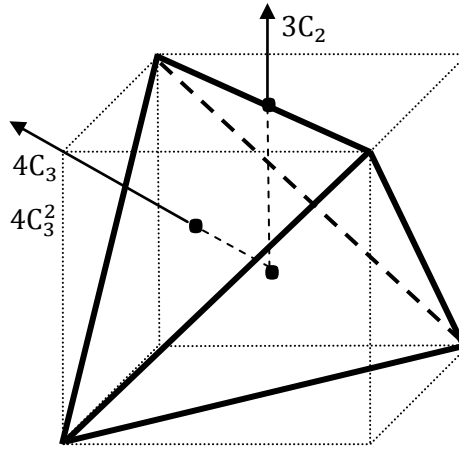
**$D_{nd}$**  Grubu: n diyagonal ayna düzlemin  $D_n$  grubuna eklenmesi sonucunda bu grup oluşur (n=2,3). Ayna düzlemleri iki katlı eksenlerin arasındaki açıyı ikiye böler.

**$D_{nh}$**  Grubu: yatay bir ayna düzlemin  $D_n$ 'e eklenmesi bu grubu oluşturur (n=2,3,4,6).  $D_{nh}$ , n=2,4 ve 6 için ters dönüşümü içerir.

$O_h, O, T_d, T_h$  ve T kübik (cubic) nokta grupları da vardır. Grup O, Şekil 5.9'te gösterildiği üzere, 24 tam dönme içeren bir küp ve bir düzgün octahedron simetri grubudur. Ters dönüşümün eklenmesiyle, bir kübün tam simetrisini tarif eden,  $O_h = O \times C_i$  octahedral grubuna ulaşılır.



Şekil 5.9 O grubunun dönel (rotational) işlemleri. Benzer operasyonların numaraları dönme sembollerinin önünde yazılıdır.



Şekil 5.10 T grubunun dönel (rotational) işlemleri.

T grubu, Şekil 5.10' da gösterildiği gibi, bir düzgün tetrahedronu değişmez (invariant) bırakan 12 tam dönmeden oluşmaktadır.  $C_i$  ile doğrudan çarpımının sonucu  $T_h = T \times C_i$ ' dir ( bir dörtyüzlünün ters dönüşüm altında değişmez olmadığına dikkat edin, bu yüzden  $T_h$  bir tetrahedronun simetri grubu değildir.) Bir tetrahedronu tam simetrisini tarif eden  $T_d$  tetrahedral grubudur.  $T_d$  grubu T'ye  $6C_4$  ve  $6\sigma_d$  operasyonlarının eklenmesiyle elde edilir. Bu beş kübik nokta grubundan,  $O_h$  ve  $T_d$  fiziksel uygulamalarda sıklıkla görülürler. Aralarındaki ilişki  $O_h = T_d \times C_i$  şeklindedir.

Prizmatik veya anti prizmatik simetrilerinin iki sonsuz serisi dışında, rotational icosahedral simetri veya chiral icosahedral simetrisi, simetri grupları ile farklı nokta simetrilerdir (descrete point symmetries). İcosahedral simetri, translational simetri ile uyumlu değildir. Bu yüzden, kristalografik (crystallographic) nokta grubu yada uzay gruplarıyla ilişkili değildir. Schönflies gösterimi  $I$  ve  $I_h$ ' dir [28]. Bunlar, üçgen grup (triangle group) yapan icosahedral gruplara karşılık gelir.

Kristalografik nokta grubuna ek olarak, aşağıdaki iki grup doğrusal moleküllerin simetrisini açıklar:

$C_{\infty v}$  Grubu: Bu grup moleküler eksen etrafında rastgele açılarda dönmeleri ve dikey ayna yansımalarını içerir.

$D_{\infty v}$  Grubu: Homonükleer (tek tür çekirdekli) diatomik moleküller bu simetriye sahiptir. Yatay ayna düzlemin  $C_{\infty v}$ ' ye eklenmesi bu gruba neden olur.

Buraya kadar Schönflies sembollerini nokta grupları adlandırmak için uyarlandı. *Uluslar arası gösterim (notasyon)* ya da Hermann-Mauguin gösterimi (notasyonu) denilen bir diğer sistem de yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Uluslar arası gösterim (notasyon) kristalografik sebeplerden dolayı öne sürülmüştür. Farklı simetri elemanları aşağıdaki semboller vasıtasıyla ifade edilir:

Dönme eksenini (rotation axis)	→	1,2,3,4,6
Dönüşümlü ters dönüşüm eksenini (rotatory inversion axis)	→	$\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}$
Ayna yansıması (mirror reflection)	→	m

Dönüşümlü yansımalara özel/belirli semboller verilmez. Ayna sembolü m tek başına  $\sigma_h, \sigma_v,$  ve  $\sigma_v'$ 'yi ayırt edemez. Onun yerine, n/m yazılarak bir yatay ayna belirtilir; buradan ayna düzlemin n-katlı eksene dik olduğu anlaşılır. Bunun ötesinde; nm, ayna düzlemin n-katlı eksenini içerdiği anlamına gelir. Nokta grupları için uluslar arası semboller yukarıdaki kurallardan kurulmuştur.

Mesela, Şekil 5.6' da gösterilen  $D_{2d}$  ya da  $\bar{4}2m$  grubunun dört katlı bir dönüşümlü ters dönüşüm eksenini (rotatory inversion axis) ve iki tane iki katlı eksenini vardır. Ayna düzlemler  $\bar{4}$  eksenini içerir.

## 5.7 Arşimet Katılarının Simetri Grupları

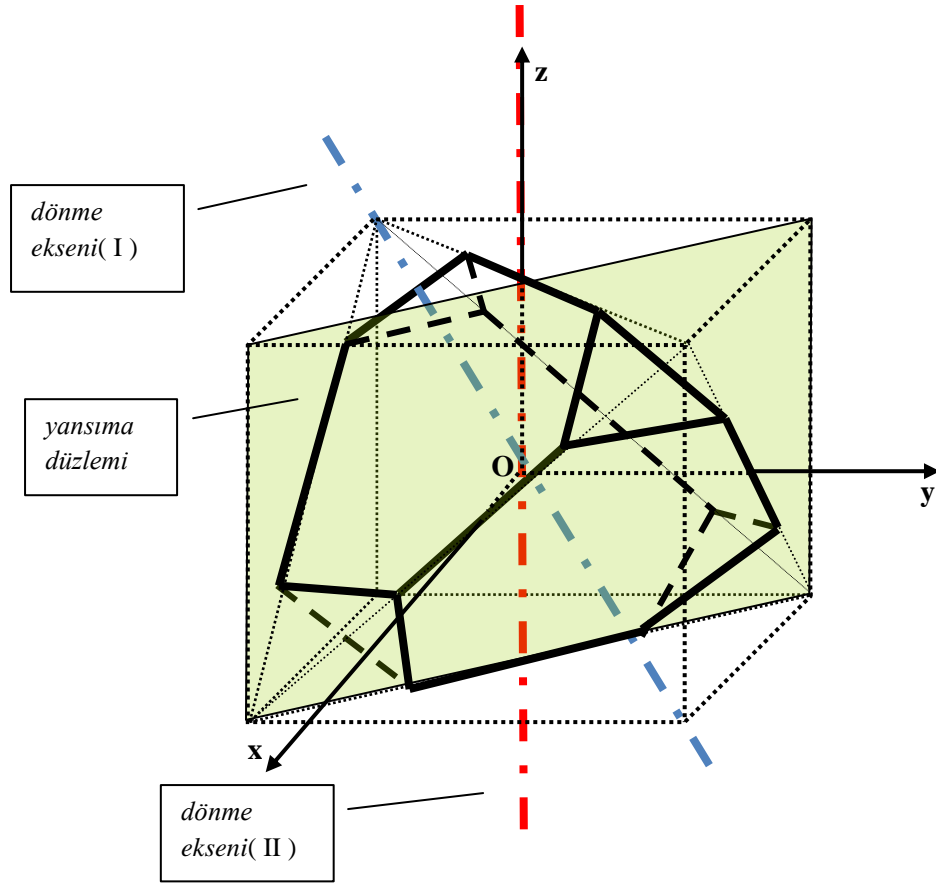
Bu bölümde Arşimet katıları için simetri grupları incelenecektir.

### 5.7.1 Truncated Tetrahedron (Kesik Tetrahedron)'un Simetri Grupları

Üçgen grubu (triangle group) olarak da bilinen tam (achiral) tetrahedron simetriye ( $T_d$  veya  $*332$  veya  $\bar{4}3m$ ) sahiptir. Bu grup bir yansıma, iki farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonlar nedeni ile,  $S_4$  simetri grubuna izomorftur.

**Tablo 5.6** Truncated tetrahedronun yansıma operasyonları

<b>Truncated Tetrahedron</b>	Tanımlama	Sayısı
yansıma	Karşılıklı yüzeyler arasındaki kenar boyunca	6



Şekil 5.11 Truncated tetrahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Truncated tetrahedronun bir tür yansıma düzlemi, iki tür de dönme eksenleri vardır. Şekil 5.11’de dönme eksenleri türlerine ve yansıma düzlemi türüne birer örnek çizilmiştir. Tüm yansıma düzlemleri ve dönme eksenleri çizildiğinde şekiller anlaşılabilir olacağından, böyle bir yöntem tercih edilmiştir. Tablo 5.6 ve 5.7’de ise tetrahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

**Tablo 5.7** Truncated tetrahedronun dönme operasyonları

<b>Tetrahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-i-I)	Her bir köşeyi, karşısındaki yüzeyin merkezine birleştiren eksen	4	3
dönme operasyonu (dönme eksen-i-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	3	2

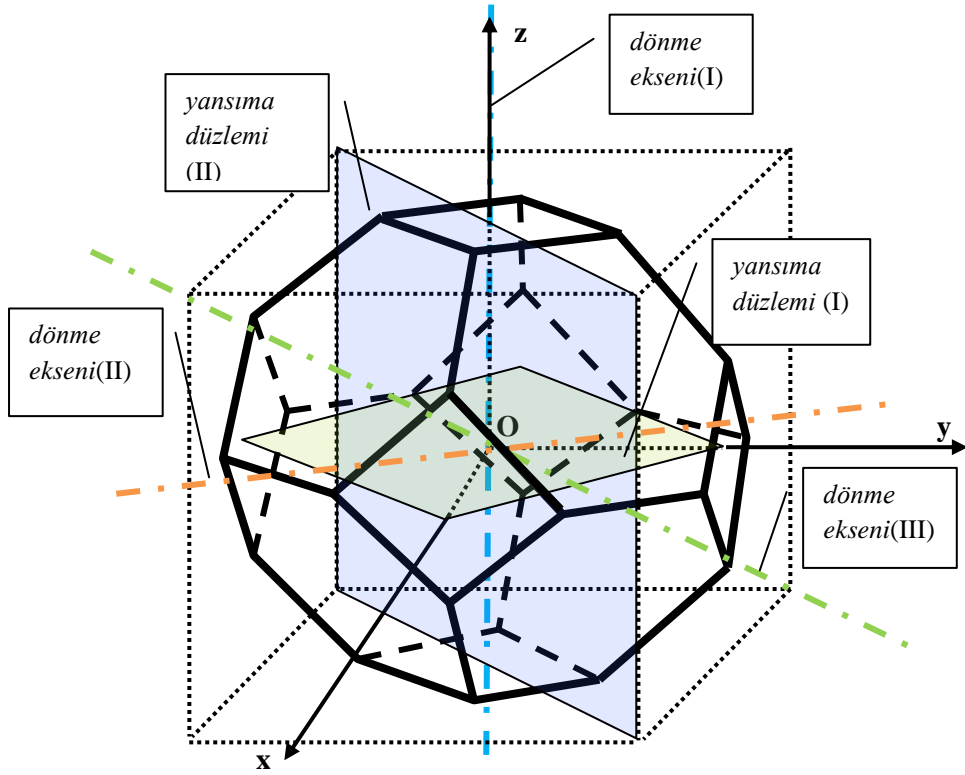
### 5.7.2 Truncated Octahedron (Kesik Oktahedron)'un Simetri Grupları

$O_h$  (\*432) tam (achiral) octahedral simetriye sahiptir. Bu grup O ile aynı dönme eksenine sahiptir. Fakat  $T_d$  ve  $T_h$  ' in ayna düzleminin her ikisini kapsayan ayna düzlemi vardır. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $S_4 \times C_2$  ' ye izomorftur.

**Tablo 5.8** Truncated octahedronun yansıma operasyonları

<b>Truncated Octahedron</b>	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Hacim merkezindeki dörtgenlerin oluşturduğu düzlem	3
Yansıma(II)	Karşılıklı dört yüzün alt ve üstteki buluştukları noktalar ile, ortadaki dörtgenin kenar orta noktalarının oluşturdukları düzlem	6





Şekil 5.12 Truncated octahedronun yansıma ve dönme eksenleri

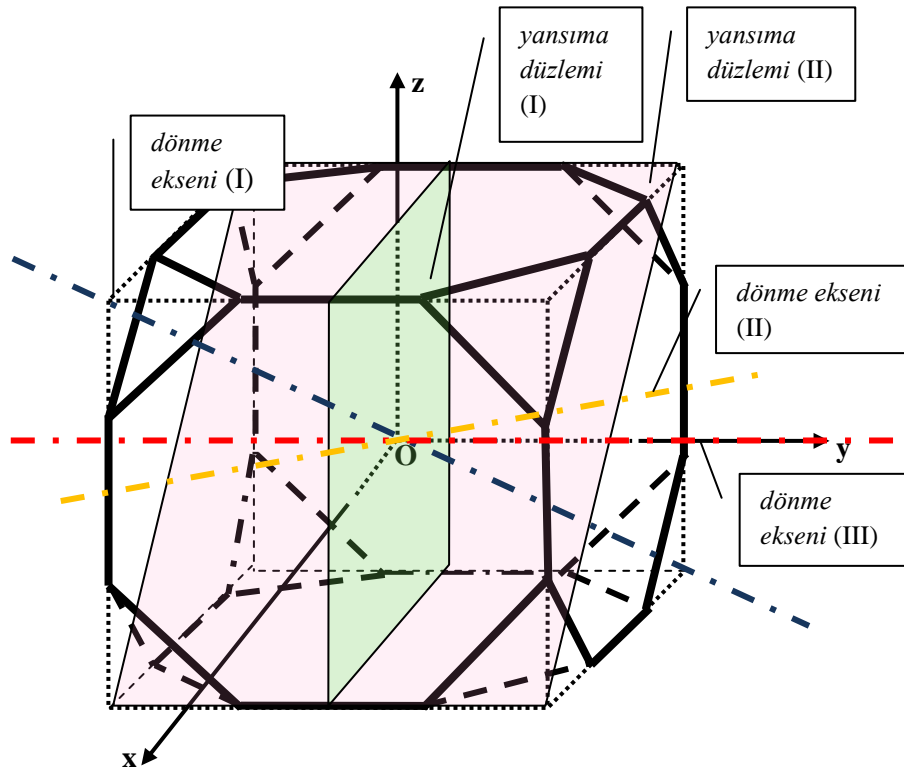
Tablo 5.9 Truncated octahedronun dönme operasyonları

Truncated Octahedron	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen(i)-I)	Karşılıklı köşeleri birleştiren eksen	3	4
dönme operasyonu (dönme eksen(i)-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	6	2
dönme operasyonu (dönme eksen(i)-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3

Truncated oktahedronun iki tür yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenleri vardır. Şekil 5.12’de dönme eksenleri türlerine ve yansıma düzlemi türüne birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.8 ve 5.9’da ise truncated oktahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

### 5.7.3 Truncated Cube (Kesik Küp)’ün Simetri Grupları

$O_h$  (\*432) tam (achiral) octahedral simetriye sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $S_4 \times C_2$ ’ye izomorftur.



Şekil 5.13 Truncated Kübün yansıma ve dönme eksenleri

Truncated kübün iki tür yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenidir. Şekil 5.13' de dönme eksenleri türlerine ve yansıma düzlemi türüne birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.10 ve 5.11'de ise truncated kübe ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

**Tablo 5.10** Truncated Kübün yansıma operasyonları

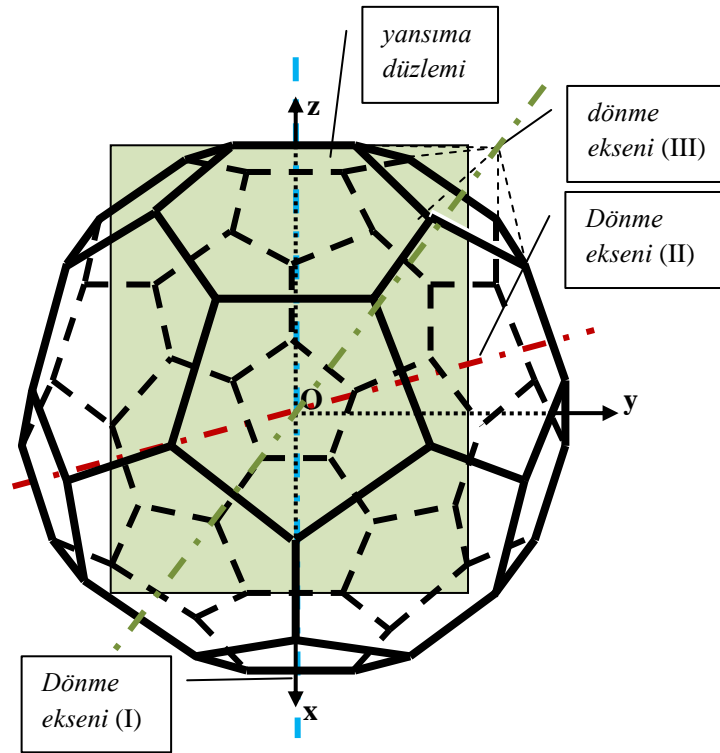
<b>Truncated Küb</b>	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Karşılıklı dört yüzeyin kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu yüzeyler	3
Yansıma(II)	Birbirine dik yüzeylerin, komşu olmayan kenarlarını birleştiren yüzeyler	6

**Tablo 5.11** Truncated Kübün dönme operasyonları

<b>Truncated Küb</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-I)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3
dönme operasyonu (dönme eksen-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	6	2
dönme operasyonu (dönme eksen-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	3	4

#### 5.7.4 Truncated Icosahedron (Kesik İkosahedron)'un Simetri Grupları

$I_h$  tam icosahedral simetriye sahiptir. Alt indisi iki olan normal alt gurup  $I$  ya sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $I \times C_2$  veya  $A_5 \times C_2$  'ye izomorftur.



Şekil 5.14 Truncated icosahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Tablo 5.12 Truncated icosahedronun yansıma operasyonları

Truncated İcosahedron	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Karşılıklı dört yüzden, komşu iki yüzün ortak kenarının, karşı komşu iki yüzün ortak kenarı arasındaki yüzey	15

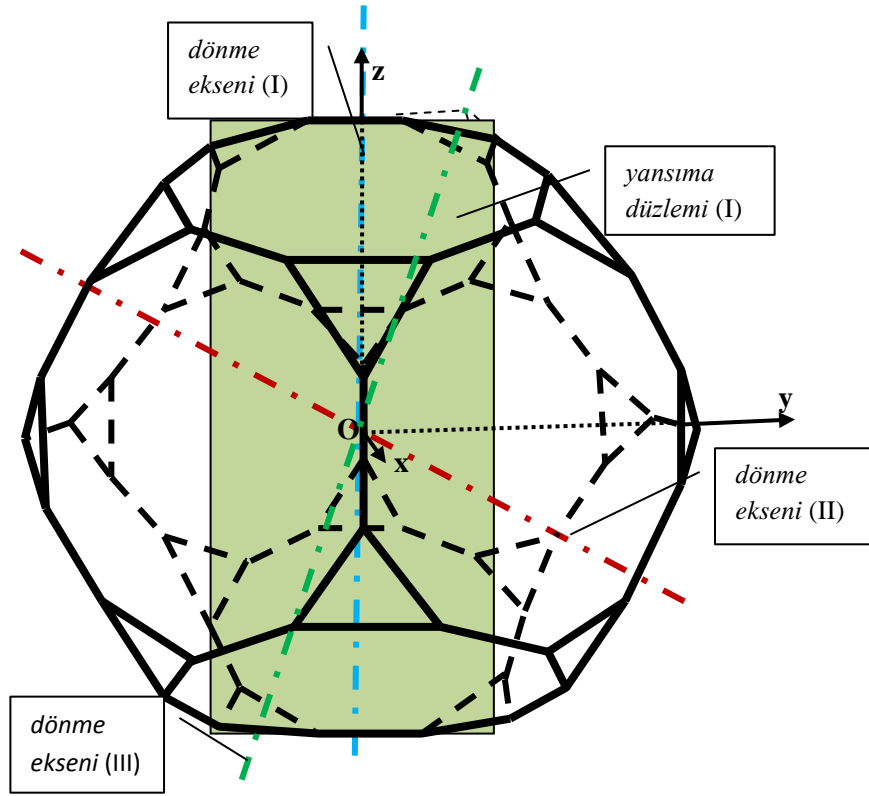
Truncated icosahedronun bir yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenini vardır. Şekil 5.14’de yansıma düzlemi ve dönme eksenini türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.12 ve 5.13’de ise truncated icosahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

**Tablo 5.13** Truncated İcosahedronun dönme operasyonları

<b>Truncated İcosahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksenini-I)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (dönme eksenini-II)	Bir altıgen yüzeyinin orta noktasını, karşı altıgen yüzeyinin orta noktasına birleştiren eksen	10	3
dönme operasyonu (dönme eksenini-III)	Bir beşgen yüzeyinin orta noktasını, karşı beşgen yüzeyinin orta noktasına birleştiren eksen	6	5

### 5.7.5 Truncated Dodecahedron (Kesik Dodekahedron)’un Simetri Grupları

$I_h$  (\*532) tam icosahedral simetriye sahiptir. Alt indisi iki olan normal alt grup  $I$ ya sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $I \times C_2$  veya  $A_5 \times C_2$ ’ye izomorftur.



Şekil 5.15 Truncated dodecahedron'un yansıma ve dönme eksenleri

Truncated dodecahedronun bir yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenine sahiptir. Şekil 5.15'de yansıma düzlemi ve dönme eksenine türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.14 ve 5.15'te ise Truncated dodecahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

Tablo 5.14 Truncated dodecahedronun yansıma operasyonları

Truncated Dodecahedron	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Karşılıklı dört yüzden, komşu iki yüzün ortak kenarının, karşı komşu iki yüzün ortak kenarı arasındaki yüzey	15

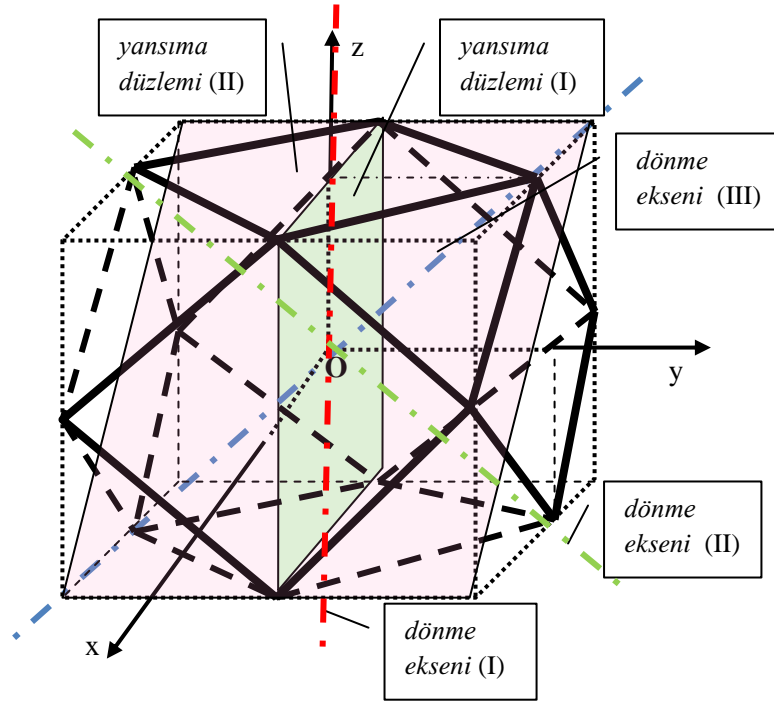
**Tablo 5.15** Truncated dodecahedronun dönme operasyonları

<b>Truncated Dodecahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksenii-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (dönme eksenii-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	5
dönme operasyonu (dönme eksenii-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	10	3

### 5.7.6 Cuboctahedron (Küpoktahedron)'un Simetri Grupları

$O_h$  (\*432) tam (achiral) octahedral simetriye sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $S_4 \times C_2$ ' ye izomorftur.

Cuboctahedron iki yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenii vardır. Şekil 5.16'da yansıma düzlemi ve dönme eksenii türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.16 ve 5.17'te ise cuboctahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.



Şekil 5.16 Cuboctahedronun yansima ve dönme eksenleri

Tablo 5.16 Cuboctahedronun dönme operasyonları

Cuboctahedron	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksenii-I)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	3	4
dönme operasyonu (dönme eksenii-II)	Karşılıklı köşeleri birleştiren eksen	4	2
dönme operasyonu (dönme eksenii-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3



**Tablo 5.17** Cuboctahedronun yansıma operasyonları

<b>Cuboctahedron</b>	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Karşılıklı köşelerin oluşturduğu yüzeyler	3
Yansıma(II)	Katıyı içine alan küpte birbirine dik yüzeylerin, komşu olmayan kenarlarını birleştiren yüzeyler	6

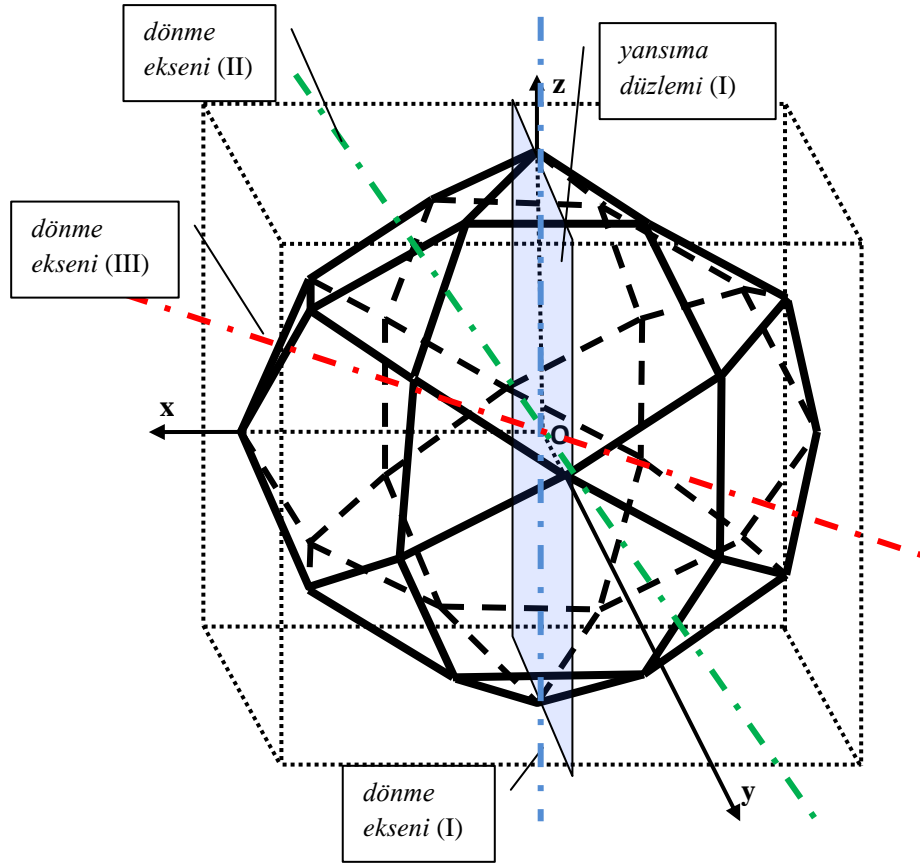
### 5.7.7 Icosidodecahedron (İkozidodekahedron)'un Simetri Grupları

$I_h$  (\*532) tam icosahedral simetriye sahiptir. Alt indisi iki olan normal alt grup  $I$  ya sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $I \times C_2$  veya  $A_5 \times C_2$ ' ye izomorftur.

icosidodekahedronun bir yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenidir. Şekil 5.17'de yansıma düzlemi ve dönme eksenine türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.18 ve 5.19'te ise icosidodecahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

**Tablo 5.18** İcosidodecahedronun yansıma operasyonları

<b>İcosidodecahedron</b>	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Üçgenlerin ve beşgenlerin kesiştiği noktadan, karşı Üçgenlerin ve beşgenlerin kesiştiği arasındaki yüzey	15



Şekil 5.17 İcosidodecahedronun yansım ve dönme eksenleri

Tablo 5.19 İcosidodecahedronun dönme operasyonları

Truncated Dodecahedron	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-I)	Üçgenlerin ve beşgenlerin kesiştiği noktadan, karşı Üçgenlerin ve beşgenlerin kesiştiği noktadan birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (dönme eksen-II)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	5

**Tablo 5.19 (Devam)** İcosidodecahedronun dönme operasyonları

dönme operasyonu (dönme eksen-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	10	3
---------------------------------------	--	----	---

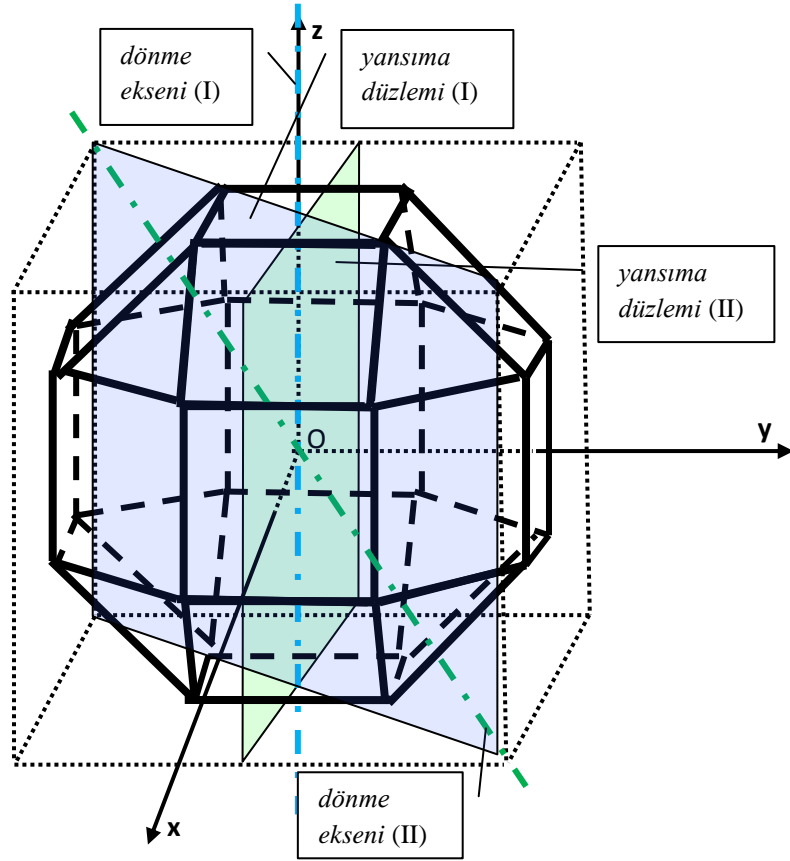
### 5.7.8 Rhombicuboctahedron (Rombiküpoktahedron)'un Simetri Grupları

$O_h$  (\*432) tam (achiral) octahedral simetriye sahiptir. Bu grup, iki farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $S_4 \times C_2$  'ye izomorftur.

Rhombicuboctahedronun iki yansıma düzlemi, iki tür de dönme eksenidir. Şekil 5.18'de yansıma düzlemi ve dönme eksenleri türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.20 ve 5.21'te ise rhombicuboctahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

**Tablo 5.20** Rhombicuboctahedronun yansıma operasyonları

<b>Rhombicuboctahedron</b>	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Köşe noktalarını birleştiren yüzeyler	6
Yansıma(II)	Karşılıklı dört yüzeyin kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu yüzeyler	3



Şekil 5.18 Rhombicuboctahedronun yansım ve dönme eksenleri

Tablo 5.21 Rhombicuboctahedronun dönme operasyonları

<b>Rhombicuboctahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-I)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	9	4
dönme operasyonu (dönme eksen-II)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3

### 5.7.9 Great Rhombicuboctahedron (Büyük Rombiküpoktahedron)'un Simetri Grupları

$O_h$  (\*432) tam (achiral) octahedral simetriye sahiptir. Bu grup, iki farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $S_4 \times C_2$ ' ye izomorftur.

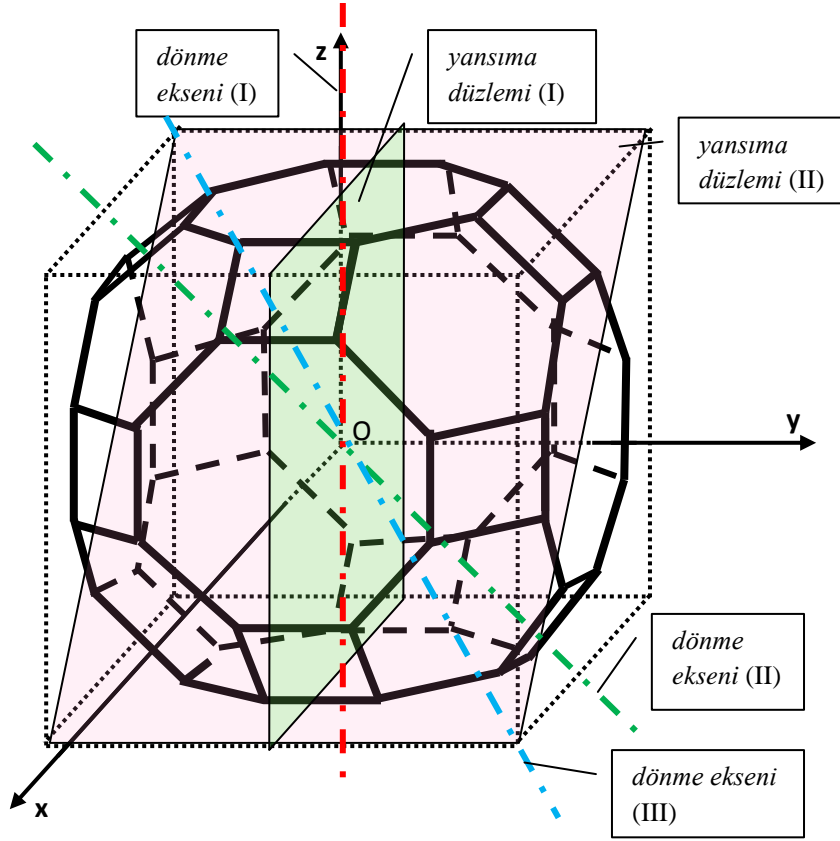
**Tablo 5.22** Great Rhombicuboctahedronun dönme operasyonları

<b>Great Rhombicuboctahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-I)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	3	4
dönme operasyonu (dönme eksen-II)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	2
dönme operasyonu (dönme eksen-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3

Great rhombicuboctahedronun iki yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenine sahiptir. Şekil 5.19'da yansıma düzlemi ve dönme eksenine türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.22 ve 5.23'te ise great rhombicuboctahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

**Tablo 5.23** Great Rhombicuboctahedronun yansıma operasyonları

<b>Great Rhombicuboctahedron</b>	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Karşılıklı dört yüzeyin kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu yüzeyler	5
Yansıma(II)	Karşılıklı dört yüzeyin kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu yüzeyler	4



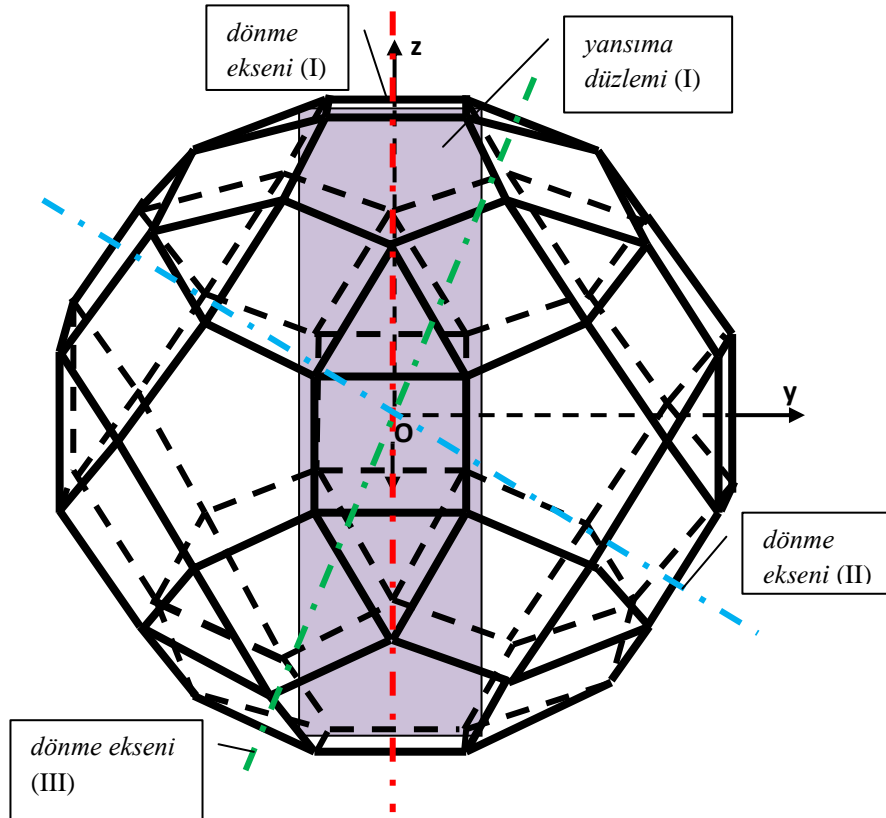
**Şekil 5.19** Great rhombicuboctahedronun yansıma ve dönme eksenleri

### 5.7.10 Rhombicosidodecahedronun Simetri Grupları

$I_h$  (\*532) tam icosahedral simetriye sahiptir. Alt indisi iki olan normal alt gurup I ya sahiptir. Bu grup, Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $I \times C_2$  veya  $A_5 \times C_2$ ' ye izomorftur.

**Tablo 5.24** Rhombicosidodecahedronun yansıma operasyonları

Rhombicosidodecahedron	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Bir karenin kenarının orta noktasının, karşı karenin kenarlarının orta noktalarını birleştiren yüzey	30



**Şekil 5.20** Rhombicosidodecahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Rhombicosidodecahedronun iki yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenini vardır. Şekil 5.20’de yansıma düzlemi ve dönme eksenini türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.24 ve 5.25’te ise rhombicosidodecahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

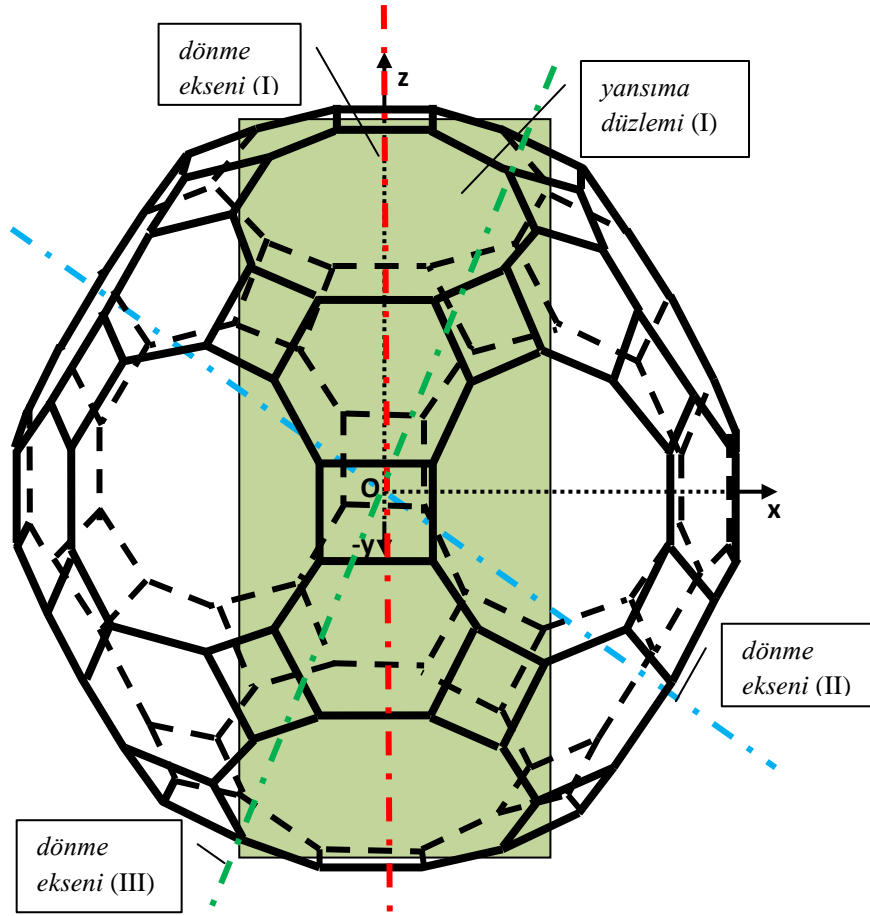
**Tablo 5.25** Rhombicosidodecahedronun dönme operasyonları

<b>Rhombicosidodecahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksenini-I)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (dönme eksenini-II)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	5
dönme operasyonu (dönme eksenini-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	10	3

### 5.7.11 Great Rhombicosidodecahedron (Büyük Rombicosidodecahedron)’un Simetri Grupları

$I_h$  (\*532) tam icosahedral simetriye sahiptir. Alt indisi iki olan normal alt grup  $I$  ya sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme, dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ve idantik operasyonları nedeni ile  $I \times C_2$  veya  $A_5 \times C_2$ ’ye izomorftur.





Şekil 5.21 Great rhombicosidodecahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Tablo 5.26 Great rhombicosidodecahedronun yansıma operasyonları

Great Rhombicosidodecahedron	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Bir karenin kenarının orta noktasının, karşı karenin kenarlarının orta noktalarını birleştiren yüzey	30

Great rhombicosidodecahedronun bir yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenini vardır. Şekil 5.21’de yansıma düzlemi ve dönme eksenine türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 5.26 ve 5.27’ de ise great rhombicosidodecahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

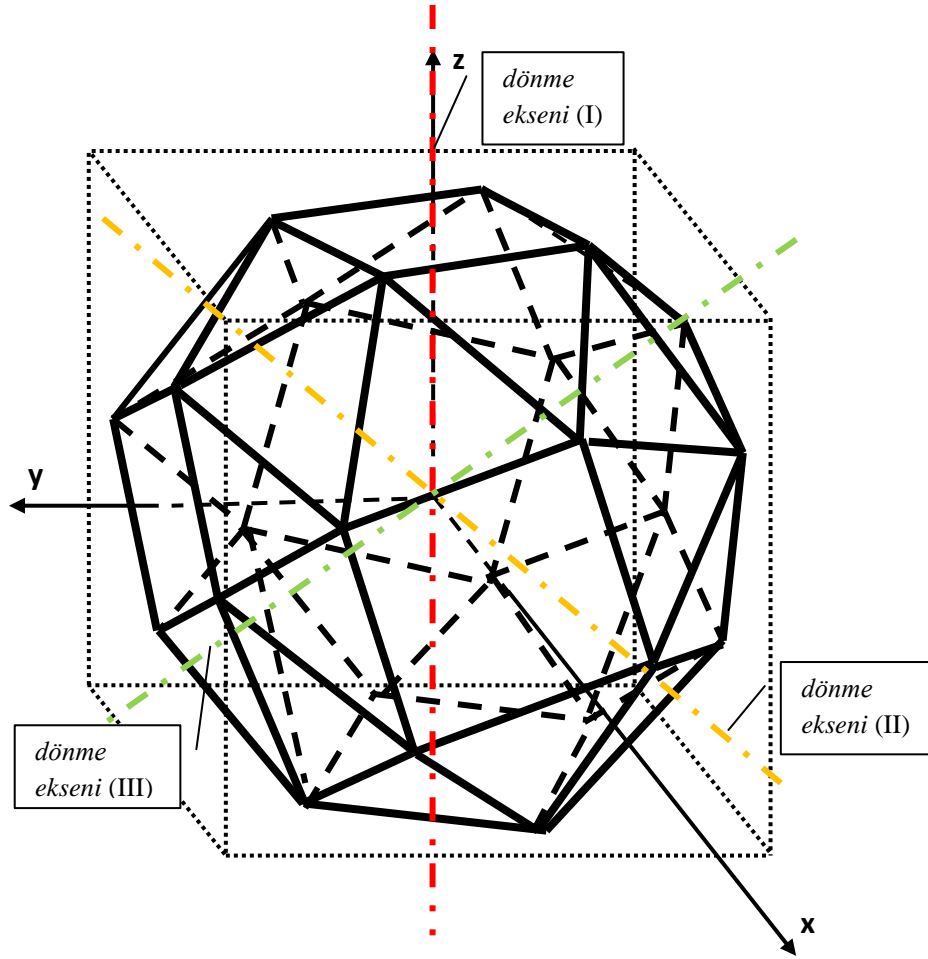
**Tablo 5.27** Great rhombicosidodecahedronun dönme operasyonları

<b>Great rhombicosidodecahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksenini-I)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (dönme eksenini-II)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	5
dönme operasyonu (dönme eksenini-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	10	3

### 5.7.12 Snub Cube (Snub Küp)’ün Simetri Grupları

O (\*432) dönüşsel (chiral) octahedral simetriye sahiptir. Bu grup, T (chiral tetrahedral) simetri gibidir. Fakat  $C_2$  eksenleri yerine burada  $C_4$  eksenleri vardır.  $T_d$  ve O izomorfiktir. Her ikisi de dört objeli simetri grubu  $S_4$  ile ilişkilidir.

Snub cube'un üç tür dönme eksenli vardır. Şekil 5.22'de dönme eksenli türlerine bir örnek çizilmiştir. Tablo 5.28 de ise snub cube'e ait dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır. Üçgen ve karelerin oluşması simetrik olmadığından Snub cube'e ait yansıma düzlemi yoktur.



Şekil 5.22 Snub kübün dönme eksenleri

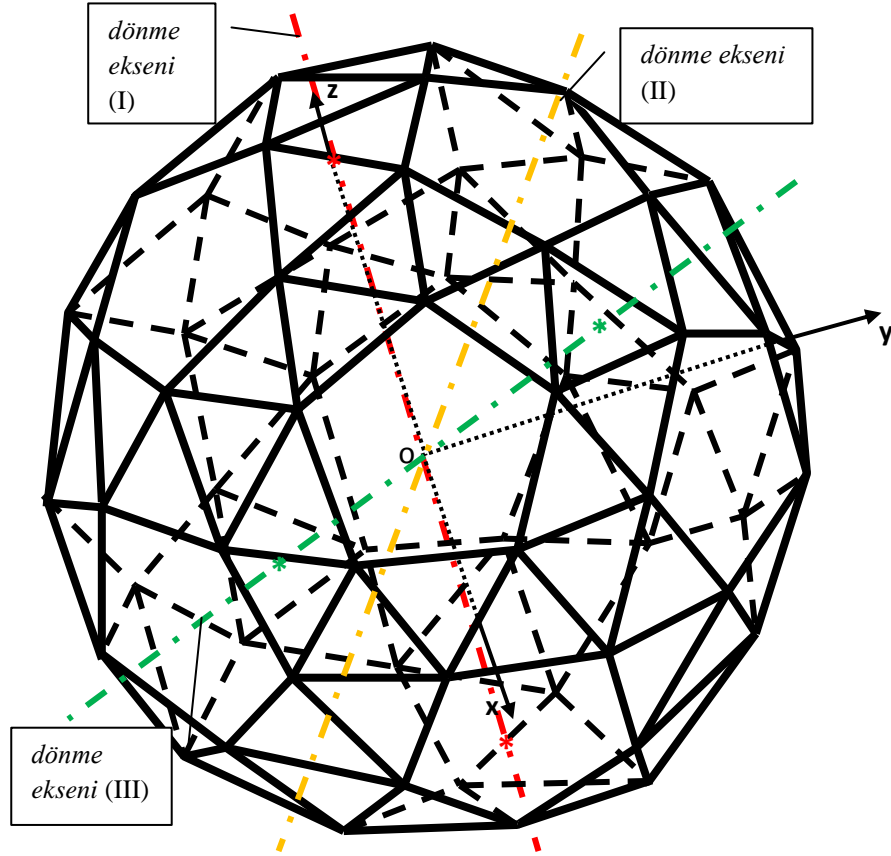
**Tablo 5.28** Snub kübün dönme operasyonları

<b>Snub küp</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-i)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	3	4
dönme operasyonu (dönme eksen-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	6	2
dönme operasyonu (dönme eksen-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3

### 5.7.13 Snub Dodecahedron'un Simetri Grupları

Icosahedral dönme simetrisine sahiptir. Bu grup, üç farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonları nedeni ile değişen (alternating) grup olan  $A_4$  ' e izomorftur.

Snub dodecahedronun, üç tür de dönme eksen-i vardır. Şekil 5.23'de dönme eksen-i türlerine bir örnek çizilmiştir. Tablo 5.29 de ise snub dodecahedrona ait dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır. Üçgen ve karelerin oluşması simetrik olmadığından Snub dodecahedrona ait yansıma düzlemi yoktur.



Şekil 5.23 Snub dodecahedronun dönme eksenleri

**Tablo 5.29** Snub dodecahedronun dönme operasyonları

<b>Snub dodecahedron</b>	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme eksen-i)	iki yüzeyi birleştiren kenarın orta noktasını, karşı iki yüzeyi birleştiren kenarın orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (dönme eksen-II)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	5
dönme operasyonu (dönme eksen-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	20	3

## 6. YARI SİMETRİK YAPILAR İÇİN SİMETRİ OPERASYONLARININ CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ

Yarı simetrik yapıların simetri operasyonlarının ifadesi, molekül fiziği, kristalografi ve katıhal fiziği için oldukça önemlidir. Molekül yapıların tanımlanması ve buradaki operasyonlar sonucundaki yapının yeni konumu ve bu ifadeler yardımıyla diğer fiziksel büyüklüklerin hesaplanması için operasyonların en kısa ve doğru metotla temsil edilmesi ve hesaplanabilmesi gerekir. Bu tezde, bu amacın Clifford cebiriyle de gerçekleştirildiği ortaya konulmuştur.

Bu tezde öne sürülen metot, bilinen matris metotlarından daha kısa ve daha işlevseldir. Bu bölümde yarı simetrik yapı olan Arşimet katıları için bu işlevsellik ortaya konacaktır. Dönme, yansıma ve dönme- yansıma (dönüşümlü yansıma (rotatory reflection)) operasyonları, Clifford cebirinde Arşimet katılarının bir kısmıyla örneklenecektir.

### 6.1 Dönme Operasyonları

Arşimet katılarının 5. bölümde gösterilen dönme operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Bu işlem farklı açılar için Arşimet katılarının bir kısmına uygulanacaktır. Tüm diğer dönme operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- Rhombicuboctahedronu, Şekil 5.18'deki I. dönme eksenini etrafında  $180^\circ$  lik bir dönme operasyonu ( $C_2$ ) yaptığı varsayalım. Bu durumda 13 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 13 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_{13} = 1,85\mathbf{e}_1 + \mathbf{ae}_2 + \mathbf{ae}_3 \quad (6.1)$$

dir. Eşitlik (3.82)'den R rotoru,

$$\mathbf{R}_I = \cos \frac{1}{2} \theta + \sin \frac{1}{2} \theta \vec{\mathbf{R}}_I \quad (6.2)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte  $\vec{\mathbf{R}}_I$  doğrultman kosinüsü olarak adlandırılır. Bu, doğrultman kosinüsünü temsil eden vektörle pseudoscaların çarpımıyla bulunur:

$$\vec{\mathbf{R}}_I = \vec{\mathbf{R}}_I I \quad (6.3)$$

Bu eşitlik I. dönme eksenini için

$$\vec{\mathbf{R}}_I = (0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_{12} \quad (6.4)$$

bulunur. Buradan da görüldüğü üzere katı  $\mathbf{e}_{12}$  düzlemini tarayarak bir dönme yapacaktır. Eşitlik (3.82), (6.1), (6.2) ve (6.4)'den;

$$\vec{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_I(\vec{\mathbf{R}}_{13})\mathbf{R}_I^* \quad (6.5)$$

$$= \left( \cos \frac{1}{2}(180^\circ) + \sin \frac{1}{2}(180^\circ) \vec{\mathbf{R}}_I \right) (1.85\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3)$$

$$\left( \cos \frac{1}{2}(180^\circ) + \sin \frac{1}{2}(180^\circ) \vec{\mathbf{R}}_I \right)^*$$

$$= \mathbf{e}_{12}(1.85\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_{12})$$

$$= (-1.85\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3)$$

bulunur. Bulunan sonuç da 17 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

Aynı hesaplama bilinen matris metodu ile yapılmış olsaydı, z-ekseni etrafında dönme matrisi

$$\mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$



olduğundan,  $\theta$  açısı kadar z-ekseni etrafındaki bir dönme operasyonu sonucu, bir noktanın yeni koordinatları,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

ifadesi ile bulunur.

Yukarıda yapılan Rhombicuboctahedronun 13 nolu köşesi için I. dönme eksenini etrafında  $180^\circ$  lik bir dönme operasyonu ( $C_2$ ) matris yöntemiyle de yapılsın:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,85 \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,85 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$$

Matris yöntemiyle bulunan sonuç da 17 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

Ancak dikkat edilmesi gereken bir ayrıntı da her dönme eksenini için farklı dönme matrisi kullanılması gerektiğidir.

$$\mathbf{D}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Ayrıca eksenler üzerinde değil de her hangi bir köşe etrafındaki dönmelerde matris metodu daha da zorlaşacak ve işlem sayısı artacaktır. Halbuki Clifford cebiri kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamada dönme eksenine bağlı olmaksızın, aynı işlem sırası uygulanmaktadır. Köşelerden geçen dönme eksenleri etrafındaki dönme operasyonları hesaplamaları ise, kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir.

- Truncated icosahedronu Şekil 5.14'deki III. dönme eksenini etrafında  $72^\circ$  lik bir dönme operasyonu ( $C_5$ ) yaptığı varsayalım. Bu durumda 2 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 2 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 0,5a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \equiv 0,205\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad (6.9)$$

dir. Eşitlik (6.2)'den R rotörü

$$R_I = \cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta\vec{R}_I \quad (6.10)$$

şeklinde ifade edilir.  $\vec{R}_I$  doğrultman kosinüsü, beşgenlerin merkezinden geçen vektör ile pseudoscaların çarpımıyla bulunur:

$$\vec{R}_I = \vec{R}_I I \quad (6.11)$$

Beşgenin merkezinden geçen vektör;

$$\vec{R}_I = 0\mathbf{e}_1 + 1,225a\mathbf{e}_2 + 1,98a\mathbf{e}_3 \equiv 0,50225\mathbf{e}_2 + 0,8118\mathbf{e}_3$$

Bu eşitlik III. dönme eksenini için

$$\vec{R}_I = (0,50225\mathbf{e}_2 + 0,8118\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_{123} = -0,50225\mathbf{e}_{13} + 0,8118\mathbf{e}_{12} \quad (6.12)$$

bulunur. Buradan da görüldüğü üzere katı  $-0,50225\mathbf{e}_{13} + 0,8118\mathbf{e}_{12}$  düzlemini tarayarak bir dönme yapacaktır. Eşitlik (3.82), (6.1), (6.2) ve (6.4)'den;

$$\begin{aligned} \vec{R} &= R_I(\vec{R}_{13})R_I^* \\ &= \left(\cos\frac{1}{2}(72^\circ) + \sin\frac{1}{2}(72^\circ)\vec{R}_I\right)(0,205\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\left(\cos\frac{1}{2}(72^\circ) + \sin\frac{1}{2}(72^\circ)\vec{R}_I\right)^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0,81 + 0,59(-0,50225\mathbf{e}_{13} + 0,8118\mathbf{e}_{12}))(0,205\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(0,81 - \\
&0,59(-0,50225\mathbf{e}_{13} + 0,8118\mathbf{e}_{12})) \\
&= (0,81 - 0,29\mathbf{e}_{13} + 0,48\mathbf{e}_{12})(0,205\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(0,81 + 0,29\mathbf{e}_{13} - 0,48\mathbf{e}_{12}) \\
&\cong -0,32\mathbf{e}_1 + 0,41\mathbf{e}_2 + 0,86\mathbf{e}_3 \approx -0,81a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + 2,12a\mathbf{e}_3 \quad (6.13)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan sonuç da 7 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür. Bu işlem 5 kez tekrarlandığında katı ilk baştaki haline döner.

- Truncated dodecahedronu Şekil 5.15'deki III. dönme eksenini etrafında  $120^\circ$  lik bir dönme operasyonu ( $C_3$ ) yaptığı varsayalım. Bu durumda 10 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 10 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_{10} = 0\mathbf{e}_1 + 0,5a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cong 1,7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad (6.14)$$

dir. Eşitlik (6.2)'den R rotoru

$$R_I = \cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta\vec{R}_I \quad (6.15)$$

şeklinde ifade edilir.  $\vec{R}_I$  doğrultman kosinüsü, üçgenlerin merkezinden geçen vektör ile pseudoscaların çarpımıyla bulunur:

$$\vec{R}_I = \vec{R}_I I \quad (6.16)$$

Üçgenin merkezinden geçen vektör;

$$\vec{R}_I = 0\mathbf{e}_1 + 0,905a\mathbf{e}_2 + 2,72a\mathbf{e}_3 \cong 0,355\mathbf{e}_2 + 0,927\mathbf{e}_3$$

Bu eşitlik III. dönme eksenini için

$$\vec{R}_I = (0,355\mathbf{e}_2 + 0,927\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_{123} = -0,355\mathbf{e}_{13} + 0,927\mathbf{e}_{12} \quad (6.17)$$

bulunur. Buradan da görüldüğü üzere katı  $-0,355\mathbf{e}_{13} + 0,927\mathbf{e}_{12}$  düzlemini tarayarak bir dönme yapacaktır. Eşitlik (3.82), (6.1), (6.2) ve (6.4)'den;

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \mathbf{R}_I(\vec{R}_{13})\mathbf{R}_I^* \\
&= \left(\cos\frac{1}{2}(120^\circ) + \sin\frac{1}{2}(120^\circ)\vec{R}_I\right)(1,7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\left(\cos\frac{1}{2}(120^\circ) + \sin\frac{1}{2}(120^\circ)\vec{R}_I\right)^* \\
&= (0,5 + 0,87(-0,355\mathbf{e}_{13} + 0,927\mathbf{e}_{12}))(1,7\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(0,5 - 0,87(-0,355\mathbf{e}_{13} + 0,927\mathbf{e}_{12})) \\
&\approx (0,5 - 0,31\mathbf{e}_{13} + 0,81\mathbf{e}_{12})(0,205\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(0,5 + 0,31\mathbf{e}_{13} - 0,81\mathbf{e}_{12}) \\
&\cong -0,17\mathbf{e}_1 + 0,44\mathbf{e}_2 + 0,89\mathbf{e}_3 \approx -0,5a\mathbf{e}_1 + 1,31a\mathbf{e}_2 + 2,62a\mathbf{e}_3 \quad (6.18)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan sonuç da 28 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür. Bu işlem 3 kez tekrarlandığında katı baştaki haline döner.

- Great rhombicosidodecahedron Şekil 5.21'deki I. dönme eksenini etrafında  $90^\circ$  lik bir dönme operasyonu ( $C_4$ ) yaptığı varsayalım. Bu durumda 1 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 1 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_1 = 0,5a\mathbf{e}_1 - 0,5a\mathbf{e}_2 + 3,74a\mathbf{e}_3 \quad (6.19)$$

dir. Eşitlik (6.2)'den R rotörü

$$\mathbf{R}_I = \cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta\vec{R}_I \quad (6.20)$$

şeklinde ifade edilir.  $\vec{R}_I$  doğrultman kosinüsü, z eksenini etrafında dönme olduğundan eksenini belirten vektör ile pseudoscaların çarpımıyla bulunur:

$$\vec{R}_I = \vec{R}_I I \quad (6.21)$$

Bu eşitlik I. dönme eksenini için

$$\vec{R}_I = (0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_{12} \quad (6.22)$$

bulunur. Buradan da görüldüğü üzere katı  $\mathbf{e}_{12}$  düzlemini tarayarak bir dönme yapacaktır. Eşitlik (3.82), (6.1), (6.2) ve (6.4)'den;

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \mathbf{R}_I(\vec{R}_{13})\mathbf{R}_I^* \\ &= \left(\cos\frac{1}{2}(90^\circ) + \sin\frac{1}{2}(90^\circ)\vec{R}_I\right)(0,5a\mathbf{e}_1 - 0,5a\mathbf{e}_2 + 3,74a\mathbf{e}_3)\left(\cos\frac{1}{2}(90^\circ) + \sin\frac{1}{2}(90^\circ)\vec{R}_I\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_{12})\right)(0,205\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_{12})\right) \\ &\cong -0,5a\mathbf{e}_1 - 0,5a\mathbf{e}_2 + 3,84a\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.23)$$

bulunur. Bulunan sonuç da 28 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür. Bu işlem 4 kez tekrarlandığında katı ilk baştaki haline döner.

## 6.2 Yansıma Operasyonları

Arşimet katılarının 4. bölümde gösterilen yansıma operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer yansıma operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- Şekil 5.20 ve Tablo 5.24'ten rhombicosidodecahedronun yansıma operasyonu için yansıma düzlemini y ve z eksenleri ( $\sigma_{yz}$ ) oluşturur. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $\mathbf{Y}_t$  çokluvektörü ile gösterilebilir. Yansıma düzlemi için:

$$\mathbf{Y}_t = \sigma_{yz} = \mathbf{e}_{23} \quad (6.24)$$

bulunur. Örneğin Tablo 5.24'ten 2 nolu köşenin  $Y_t$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (3.63)'den

$$\vec{R}' = Y_t(\vec{R}_9)Y_t^{-1} \quad (6.25)$$

bulunur. Tablo 4.17'ten 9 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_9 = 2,12ae_1 + 0,5ae_2 + 0,5ae_3 \quad (6.26)$$

şeklde yazılabilir.  $\vec{R}_9$ , Eşitlik (6.25)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= e_{23}(2,12ae_1 + 0,5ae_2 + 0,5ae_3)e_{23} \\ &= -2,12ae_1 + 0,5ae_2 + 0,5ae_3 \end{aligned} \quad (6.27)$$

bulunur. Sonuç vektör ise Tablo 4.17'den görüleceği üzere 13 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

- Şekil 5.11 ve Tablo 5.6'ten truncated tetrahedronun yansıma operasyonu için yansıma düzleminin, karşılıklı yüzeyler arasındaki kenar boyunca olduğu görülebilir. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $Y_t$  çokluvektörü ile gösterilebilir. Ancak burada ilginç bir durum söz konusudur. Yansıma düzlemi için:

$$Y_t = (e_2 - e_1)e_3 + (e_1 - e_2)e_3 = \underbrace{(e_2 - e_1 + e_1 - e_2)}_{\text{Bir noktaya karşılık gelir}}e_3 = e_3 \quad (6.28)$$

bulunur. Dolayısıyla yansıma düzlemi yerine  $e_3$  yazılır. Örneğin Tablo 4.8'ten 1 nolu köşenin  $Y_t$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (3.63)'den

$$\vec{R}' = Y_t(\vec{R}_9)Y_t^{-1} \quad (6.29)$$

bulunur. Tablo 4.8'ten 1 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \quad (6.30)$$

şeklde yazılabilir.  $\vec{R}_1$ , Eşitlik (6.29)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= \mathbf{e}_3 \left( \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \right) \mathbf{e}_3 \\ &= -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.31)$$

bulunur. Sonuç vektör ise Tablo 4.8'ten görüleceği üzere 2 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

### 6.3 Dönme- Yansıma (Dönüşümlü Yansıma (Rotatory Reflection)) Operasyonu

Arşimet katılarının 5. bölümde gösterilen yansıma ve dönme operasyonu birlikte Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer dönüşümlü yansıma operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- Cuboctahedron Şekil 5.16'daki I. dönme eksenini etrafında  $180^\circ$  lik bir dönme operasyonu ( $C_2$ ) yaptığı varsayalım ve bu dönme eksenine dik xy düzleminde yansıması  $\sigma_{xy}$  olduğu varsayalım. Böylece katı  $180^\circ$  dönme- yansıma (dönüşümlü yansıma (rotatory reflection) ( $S_2$ )) yapar. Bu durumda 2 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir.

Tablo 4.10'dan 2 nolu köşeyi temsil eden vektör;

$$\vec{R}_2 = 0\mathbf{e}_1 + a\sqrt{2}\mathbf{e}_2 + a\sqrt{2}\mathbf{e}_3 \quad (6.32)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, katı  $\mathbf{e}_{12}$  düzlemini tarayarak bir dönme yapacaktır. Bu yüzden Eşitlik (6.1), (6.2)'den rotor,

$$R_I = \cos \frac{1}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \vec{R}_I = \cos 90 + \mathbf{e}_{12} \sin 90 = \mathbf{e}_{12} \quad (6.33)$$

bulunur. Katı dönme yaptıktan sonra  $\sigma_{xy}$  ( $\mathbf{e}_{12}$ ) düzleminde yansıma yapacaktır. O halde yeni operasyonlar ,

$$\vec{R} = \mathbf{Y}_t \mathbf{R}_I (\vec{R}_{13}) \mathbf{R}_I^* \mathbf{Y}_t^{-1} \quad (6.34)$$

$$= (\mathbf{e}_{12})(\mathbf{e}_{12})(a\sqrt{2}\mathbf{e}_2 + a\sqrt{2}\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_{12})(\mathbf{e}_{12})$$

$$= \mathbf{e}_{12}(-a\sqrt{2}\mathbf{e}_2 + a\sqrt{2}\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_{12})$$

$$= (-a\sqrt{2}\mathbf{e}_2 - a\sqrt{2}\mathbf{e}_3)$$

bulunur. Bulunan sonuç da Tablo 4.10 da görüleceği üzere 12 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.



## TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Clifford Cebiri fiziğin birçok uygulamalarında kullanılan eşsiz bir araçtır. Grassman'ın çalışmalarından etkilenen William Kingdom Clifford, bu cebiri birçok bilim alanında kullanışlı kılmıştır.

Bu tezde, Arşimet katılarının simetri operasyonları incelenmiştir. Bu operasyonlar Clifford cebiri ile gerçekleştirilmiştir. Bu da, Arşimet katılardaki tüm yansıma ve dönme operasyonları için sağlam bir ifade elde edilmesine imkân vermiştir. Bilindiği üzere, matris metodu ile bu operasyonlar gerçekleştirilmek istendiğinde, her bir dönme eksenini için, ayrı bir matris kullanılmakta ve işlemler oldukça uzun sürmektedir. Ancak aynı işlemler Clifford cebiri ile gerçekleştirildiğinde, tüm bu zorluklar aşılmakta ve tek bir yöntemle tüm yansıma ve dönme operasyonları gerçekleştirilebilmektedir. Dolayısıyla, Arşimet katılar üzerinde ispatlanan bu yöntem, moleküller, kristal yapılar üzerinde de bir çok kolaylıklar sağlayacaktır.

Bu tezin sonuçlarından yararlanılarak birçok alanda yeni açılımlar ve çözüm yöntemleri geliştirilebilir:

- i. Arşimet katıların birbirine dönüşümü mümkündür. Bu dönüşüm, özellikle molekül fiziği ve kuantum mekaniğinde uygulama alanları bulmaktadır[15]. Dönüşüme ait hesaplamalar, bu tezde kullanılan metotla gerçekleştirilebilir. Görüldüğü gibi, bu metot, hesaplamalarda kolaylıklar sağlamaktadır.
- ii. Bu tezde ortaya konan yöntem, Kepler-Poinsot polyhedronları için de geliştirilebilir. Kepler-Poinsot polyhedronları, doğada Platonik katılar gibi tam simetriye sahip olmayan yapılardır. Düzenli star polyhedronlardır. Bu yapılarda birçok molekül yapı bulunmaktadır. Bu, molekül yapıların simetri operasyonlarının tanımlanması ve uygulanmasında birçok kolaylıklar sağlayacaktır.

- iii.* Bu tezde ortaya konan hesaplama yöntemi, bir molekülün açısal momentumunun hesaplanmasında kolaylıkla uygulanabilir. Bu sonuçtan yararlanarak dönme enerji düzeyleri hesaplanabilir[30].
- iv.* Kristal yapılarının elektronik yapılarının incelenmesinde, bu tezde ortaya konan yöntem uygulanabilir [8].
- v.* Tıp'ta Clifford cebirinin bazı uygulamaları olmuştur ve bu çalışmalar biyomekanik alanı için de geliştirilebilir [31].
- vi.* Clifford cebiri çok boyutlu uzaylarda da geçerli olduğundan [32, 33], bu tezde ortaya konan yöntem, çok boyutlu uzaylarda da uygulanabilir.
- vii.* Arşimet katılarını temsil eden molekülere [34] operasyonlar uygulandığında ortaya çıkan yerleri Clifford Cebiri ile tespit edilebilir.

Sonuç olarak, özellikle moleküler yapıların yansıma ve simetri operasyonlarının tanımlanması ve gerekli hesaplamaların yapılması açısından bu tezde ortaya konan yöntem, işlem kolaylıkları sağlamakla birlikte, kompakt bir gösterime de olanak sağlamaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] DORAN, C. ve LASENBY, A. *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press, UK, (2003)
- [2] KINLE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, UK, (1972).
- [3] ATIYAH, M. ve F., SINGER, I. M., *The Index Of Elliptic Operators On Compact Manifolds*, Bull, A.M.S., **69**:422, (1963).
- [4] HESTENES, D., <http://modelingnts.la.asu.edu/pdf/NFMPchapt1.pdf>, (1998).
- [5] KILIÇ, A. , *Platonik Katıların ve Moleküler Simetrisinin Clifford Cebiriyle İncelenmesi*, Doktora tezi, (2004)
- [6] [http://en.wikipedia.org/wiki/Inner\\_product](http://en.wikipedia.org/wiki/Inner_product)
- [7] LOUNESTO, P., *Introduction to Clifford Algebras*, TTU Press, Cookeville, (2002).
- [8] JANCEWICZ, B., *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [9] WILLIAMS, R. , *The Geometrical Foundation of Natural Structure*, Dover Publications, New York, (1979)
- [10] POKORNY, A., HERZIG, P. ve ALTMANN, S.L., *On the Generation of Point Groups in Spaces of Various Dimensions*, *Spectrochimica Acta*, **A57**, 1931-1939, (2001).
- [11] LOUNESTO, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, UK, (1997).
- [12] CONWAY, J. H., HARDIN, R.H. ve SLOANE, N.J.A., *Packing Lines, etc.: Packing in Grassmannian Spaces*, *Experimental Mathematics*, Vol. 5, 139-159, (1996).
- [13] SNYGG, J. , *Clifford Algebra*, Oxford University Press, New York, (1997)
- [14] GIRARD, P. R. , *Quaternions, Clifford Algebra and Relativistic Physics*, Birkhäuser, Basel, c2007
- [15] JOLBOUT, A. F., *Metamorphosis of Polyhedrons 2. Oktahedron to Dodecahedron*, *Journal of Molecular Structure*, 197-205, (2002).

- [16] SUTTON, D. , *Platonic and Archimedean Solids*, Walker Publishing Company, New York, 2002
- [17] VAN DER VEGT, A. K. , *Order in Space*, VSSD, The Netherlands, (2001)
- [18] WILLIAMS, R. , *The Geometrical Foundation of Natural Structure*, Dover Publications, New York, (1979)
- [19] ALVAREZ, S. , *Polyhedra in (Inorganic) Chemistry*, Dalton Trans. , 2009-2233, (2005)
- [20] JOHNDALE, C.S., *Self-Assembling Micrite Based on the Platonic Solids*, Robotics and Autonomous Systems, 38, 62-92, (2002).
- [21] YUKİKO, M. ; KAORİ, S. ve HOSOYA, H. , *Tables of Cartesian Coordinates of Semiregular Polyhedra and Two Rhombic Polyhedra*, Bunkyo-ku, Tokyo,112-8610, (2000)
- [22] [http://en.wikipedia.org/wiki/Schläfli\\_symbol](http://en.wikipedia.org/wiki/Schläfli_symbol)
- [23] ALEXANDROFF, P.S., *Gruplar Teorisine Giriş*, Çev. Ali YAR, Türk Matematik Derneği, İstanbul, (1962).
- [24] INUI, T. , TABABE, Y. ve ONODERA, Y. , *Group Theory and Its Applications in Physics*, Springer, Berlin, c1996
- [25] CARTER, R. L., *Molecular Symmetry and Group Theory*, J. Wiley, New York, c1998
- [26] CRACKNELL, A. P. , *Applied Group Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1968
- [27] DAVIS, T. , *Permutation Groups*, <http://www.geometer.org/mathcircles>, 2003
- [28] STERNBERG, S. , *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, UK, (1994)
- [29] BRACX, F., DELANGLE, R. ve SERRAS, H., *Clifford Algebras and their Applications in Math. Phy.*, Deinze, (1993).
- [30] GURLEBECK, K. ve SPROSSİG, W., *Quaternionic and Clifford Calculuc for Physicists and Engineers*, John Willey&Sons, (1997).
- [31] BAYRO, E., *Modeling the 3D kinematics of the eye in the geometric algebra framework*, Pattern Recognition, **V36**, 2993-3012, (2003).

- [32] POKORNY, A., HERZIG, P. ve ALTMANN, S.L., *On the Generation of Point Groups in Spaces of Various Dimensions*, *Spectrochimica Acta*, **A57**, 1931-1939, (2001).
- [33] HECKENBERGER, I., *Spin geometry on Quantum Groups Via Covariant Differential Calculi*, *Advances in Mathematics*, **V175**, 197-242, (2003).
- [34] MACGILLIVRAY, L. R. , *Platonic and Archimedean Solids*, *Encyclopedia of Supramolecular Chemistry*, New York, 1100-1105, (2004)