

**BOSE-EINSTEIN YOĞUŞMASINDA
GİRDAP YAPILAR**

Seçil ORAL
Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı
Ocak-2009

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Seçil Oral'ın "**Bose-Einstein Yoğuşmasında Girdap Yapılar**" başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki Yüksek Lisans Tezi 26/12/2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

<u>Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı): Yard. Doç Dr. ABİDİN KILIÇ
Üye : Doç. Dr. CEM YÜCE
Üye : Yard. Doç. Dr. HAYRİYE SUNDU

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BOSE-EINSTEIN YOĞUŞMASINDA GİRDAP YAPILAR

Seçil ORAL

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Abidin KILIÇ

2008, 187 sayfa

Bu tezde Bose-Einstein Yoğuşması'nın genel bir tanımlaması yapıldıktan sonra, yoğuşmadaki atomlar arası etkileşimler incelenmiş ve Yoğuşmuş Durum Teorisi, Gross-Pitaevski denklemi, tuzaklanmış yoğuşmanın taban durumu, varyasyonel hesaplama, Thomas-Fermi yaklaşımı, bulut yüzeyinin yapısı ele alınmıştır. Yoğuşmuş Durum Teorisi'nden hareketle yoğuşmanın dinamiği incelenmiş ve temel dönüşüm eşitliklerinden yararlanarak Bose gazının makroskobik özellikleri uniform gazdaki uyarılmalar, tuzaktaki gaza ait uyarılmalar, sıfır olmayan sıcaklık limiti kapsamında araştırılmıştır. Tüm bu bilgiler kullanılarak da dönen yoğuşmada oluşan girdap yapılar, potansiyel akış ve kuantize döngü, tek girdap yapısı, dönen yoğuşmaların denge durumu, girdap hareketi, rotasyon altında zayıf etkileşen Bose Gazı'nın itici etkileşimleri ve çekici etkileşimleri farklı durumlar için incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bose Einstein Yoğuşması, Gross Pitaevski Eşitliği, Yoğuşma Dinamiği, Girdap.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

VORTEX STRUCTURES IN BOSE-EINSTEIN CONDENSATION

Seçil ORAL

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Physics Program

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Abidin KILIÇ

2008, 187 pages

In this thesis, after the general definition of Bose-Einstein Condensation, interactions between atoms are investigated and theory of condensed state, Gross-Pitaevski equation, ground state for trapped condensate, variational calculation, Thomas-Fermi approximation and surface structure of clouds are discussed. Making the use of theory of condensed state, dynamics of the condensate is investigated and microscopic properties of Bose gases, excitations in a uniform gas, excitations in a trapped gas, excitations in a trapped gas in the limit of non-zero temperature are determined. Vortex structures in a rotating condensate, potential flow and quantized circulation, structure of a single vortex, equilibrium of a rotating condensates, vortex motion, repulsive and attractive interactions of the weakly-interacting Bose gas under rotation are investigated with the help of the information which is given above.

Key Words: Bose-Einstein Condensation, Gross-Pitaevski Equation, Dynamics of the Condensate, Vortex.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL FORMALİZM	4
2.1. Bose Dağılımı.....	4
2.1.1. Durum Yoğunluğu.....	5
2.2. Geçiş Sıcaklığı ve Yoğuşma Oranı.....	8
2.2.1. Geçiş Sıcaklığı.....	8
2.2.2. Yoğuşma Oranı.....	10
2.3. Yoğunluk Profili ve Hız Dağılımı.....	13
2.4. Termodinamik Nicelikler.....	17
2.4.1. Yoğuşmuş Faz.....	17
2.4.2. Normal Faz.....	20
2.4.3. T_C Civarında Öz Isı.....	21
2.5. Sonlu Parçacık Sayısının Etkisi.....	24
3. ATOMLAR ARASI ETKİLEŞİMLER	26
3.1. Atomlar Arası Potansiyeller ve Van der Waals Etkileşimi.....	27
3.1.1. Van der Waals Etkileşiminin Değeri.....	30
3.2. Temel Saçılma Teorisi.....	33
3.2.1. Etkin Etkileşimler ve Saçılma Uzunluğu.....	37
3.3. Farklı Dahili Durumlar Arası Geçişler.....	40
3.3.1. Etkileşimin Merkez Bölgesi.....	42
3.3.2. Manyetik Dipol-Dipol Etkileşimi.....	43

3.3.3. Düşük Enerjili Çarpışmalar.....	44
3.3.4. Elastik Olmayan Süreçler.....	45
3.3.4.1. Spin Değişim Süreçleri.....	47
3.3.4.2. Dipolar Süreçler.....	48
3.3.4.3. Üç-Parçacık Süreci.....	51
3.3.5. Elastik Saçılma ve Feshbach Rezonansı.....	52
3.3.5.1. Temel Formalizm.....	54
3.4. Saçılma Uzunluğunun Belirlenmesi.....	56
3.4.1. Saçılma Dik Kesitinin Belirlenmesi.....	56
3.4.2. Moleküler Spektrum.....	56
3.4.3. Photoassociative Spektrum.....	56
3.4.4. Alkali Atomları ve Hidrojen İçin Saçılma Uzunlukları.....	57
4. YOĞUŞMUŞ DURUM TEORİSİ.....	59
4.1. Gross-Pitaevski Denklemi.....	59
4.2. Tuzaklanmış Yoğuşmanın Taban Durumu.....	63
4.2.1. Varyasyonel Hesaplama.....	66
4.2.2. Thomas-Fermi Yaklaşımı.....	70
4.2.3. Bulut Yüzeyinin Yapısı.....	75
5. YOĞUŞMA DİNAMİĞİ.....	80
5.1. Genel Formülasyon.....	80
5.1.1. Hidrodinamik Eşitlikler.....	82
5.2. Temel Uyarılmalar.....	87
5.2.1. Uniform Gaz.....	88
5.2.2. Bogoliubov Denklemleri.....	91
5.2.3. Çekici Etkileşimler.....	95
5.3. Tuzaktaki Seçici Modlar.....	96
5.3.1. Küresel Simetriye Sahip Tuzaklar.....	98
5.3.2. Anizotropik Tuzaklar.....	101
5.3.2.1. Düşük Seviyeli Modlar.....	103

5.3.2.2. Makas Modu.....	105
5.3.3. Ortak Koordinatlar ve Varyasyonel Yaklaşım.....	107
5.3.3.1. Ortak Koordinatlar.....	107
5.3.3.2. Varyasyonel Yaklaşım.....	113
5.4. Yüzey Modları.....	116
5.5. Yoğuşmanın Serbest Genişlemesi.....	119
5.6. Solitonlar.....	121
6. BOSE GAZININ MİKROSKOBİK TEORİSİ.....	126
6.1. Uniform Gazdaki Uyarılmalar.....	127
6.1.1. Bogoliubov Dönüşümü.....	130
6.1.2. Temel Uyarılmalar.....	133
6.2. Tuzaktaki Gaza Ait Uyarılmalar.....	134
6.2.1. Zayıf Çiftlenim.....	137
6.3. Sıfır Olmayan Sıcaklık Limiti.....	139
6.3.1. Hartree-Fock Yaklaşımı.....	140
6.3.1.1. Termal Denge.....	145
6.3.2. Popov Yaklaşımı.....	148
6.3.3. Uniform Olmayan Gazdaki Uyarılmalar.....	149
6.3.4. Yarı-Klasik Yaklaşım.....	151
7. DÖNEN YOĞUŞMALAR.....	154
7.1. Potansiyel Akış ve Kuantize Döngü.....	154
7.2. Tek Girdap Yapısı.....	156
7.2.1. Uniform Ortalamada Bulunan Girdap.....	157
7.2.1.1. Çoklu Kuantize Girdaplar.....	161
7.2.2. Tuzaklanmış Bulutta Bulunan Girdap.....	162
7.2.3. Eksenel Olmayan Girdap.....	166
7.3. Dönen Yoğuşmaların Denge Durumu.....	167
7.3.1. Simetri Eksenine Sahip Tuzaklar.....	168
7.3.2. Dönen Tuzaklar.....	170

7.4. Girdap Hareketi.....	174
7.4.1. Girdap Çizgisi Üzerindeki Kuvvet.....	175
7.5. Rotasyon Altında Zayıf Etkileşen Bose Gazı.....	178
7.5.1. İtici Etkileşimler.....	181
7.5.2. Çekici Etkileşimler.....	182
8. TARTIŞMA, SONUÇ, ÖNERİLER.....	184
KAYNAKLAR.....	185

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1.	T/T_C^0 'in fonksiyonu olarak yoğunlaşmanın doluluk oranı.....	12
2.2.	$T = 0,9T_C^0$ sıcaklığında, küresel tuzaktaki 5000 etkileşmeyen bozon için kolon yoğunluğu.....	16
2.3.	α parametresine göre tuzaklar.....	16
2.4.	αNk birimlerinde, farklı α değerleri için T/T_c indirgenmiş sıcaklık fonksiyonu olarak C öz ısısının değişimi.....	23
3.1.	Taban durumunda elektronları singlet ve triplet seviyelerde bulunan iki rubidyum atomu için r atomik dağılımının fonksiyonu olarak $U(r)$ etkileşim potansiyelleri.....	28
3.2.	Feshbach rezonansı oluşumunu sergileyen iki farklı kanal için şematik potansiyel enerji eğrisi.....	53
4.1.	b varyasyonel parametresinin fonksiyonu olarak izotropik Harmonik tuzakta bulunan parçacık başına enerjiye karşı boyutsuz parametre Na/a_{osc} 'un varyasyonel ifadesi.....	69
4.2.	Dalga fonksiyonları $N^{1/2}/(\beta a_{osc})^{3/2}$ ve $\beta = (Na/a_{osc})^{1/5}$ birimlerinde olmak üzere gaussian varyasyonel yaklaşım ile taban durumu dalga fonksiyonu ve izotropik harmonik osilatör potansiyeli için Thomas-Fermi yaklaşımı.....	72
4.3.	$T = 0$ 'da, itici etkileşime sahip, küresel tuzak için Gross-Pitaevski denkleminin nümerik olarak çözülmesiyle elde edilen yoğunlaşma fonksiyonu.....	74
4.4.	Eksenel koordinatın fonksiyonu olarak tuzaktaki 80 000 sodyum atomu için yoğunluk dağılımı.....	74
5.1.	5.1. Homojen Bose gazının uyarılma spektrumu.....	90
5.2.	Dalga sayısının fonksiyonu olarak u_q ve v_q sabitlerinin, $\hbar q/ms$ boyutsuz değişkenine bağlı grafiği.....	95
5.3.	İzotropik harmonik tuzakta bulunan yoğunlaşmanın uyarılma spektrumu.....	101

5.4.	λ 'nın fonksiyonu olarak mod frekansları.....	104
7.1.	Yarıçapın fonksiyonu olarak tek kuantize girdap için yoğunlaşma dalga Fonksiyonu.....	158
7.2.	Tuzaktaki Bose-Einstein yoğunlaşmasına açısal momentum eklemenin üç yolu.....	171
7.3.	Açısal momentumun sıfırdan farklı değerlerine sahip çok-atom öz durumları enerjilerinin atomlar arası zayıf çiftlenim için etkileşim kuvvetinin fonksiyonu olarak şematik gösterimi.....	183

ÇİZELGELER DİZİNİ

1.1.	α 'nın bazı değerleri için Γ gama ve ζ Riemann zeta fonksiyonlarına ait değerler.....	9
3.1.	Van der Waals sabitlerinin hesaplanmış değerleri.....	29

1. GİRİŞ

Bose-Einstein yoğuşması, 1925 yılında teorik olarak ilk kez Einstein tarafından, belirli bir sıcaklık altında birbiriyle etkileşmeyen parçacıklar için gazın makroskobik dağılımının yoğunlaşmasıyla birlikte bir faz geçişi olacağını ileri süren Bose'un makalesindeki temellere dayanarak öngörülmüş; deneysel olarak ise 1995 yılında da rubidyum, sodyum ve lityum alkali atomlarında gözlenmiştir. E. Cornell, C. Wiemann ve W. Ketterle, bu başarılarından dolayı 2001 yılında Nobel Fizik Ödülü'nü almışlardır. Bu tür sistemler sıradan katı, sıvı ve gazlardan pek çok yönüyle farklıdır. Düşük sıcaklıklarda oldukça seyreltik olan maddenin bu yeni halinde atomların makroskobik bir bölümü, aynı kuantum durumuna yerleşirler ve lazer tarafından oluşturulan tutarlı ışık dalgası gibi ortak bir madde dalgası oluştururlar. Gaz fazındaki bu kuantum akışkanının özellikleri hem deneysel hem de teorik açıdan oldukça fazla ilgi görmeye birlikte, makroskobik bir ölçekte kuantum fenomenlerinin incelenmesine de olanak sağlar. Çünkü bütün faz değişimleri atomlar ve moleküller arasındaki kuvvetlerle açıklanırken; Bose-Einstein yoğuşması kuantum mekaniği yasalarının bir sonucu olarak oluşur [1].

Bose-Einstein yoğuşması atomik bulutunun merkezinde parçacık yoğunluğu 10^{13} - 10^{15} cm^{-3} mertebesinde dir. Bu durum oda sıcaklığı ve atmosferik basınç altında havadaki moleküllerin yoğunluğu olan 10^{19} cm^{-3} ile kıyaslanacak olursa, Bose-Einstein yoğuşmasının ne kadar seyreltik olduğu daha net görülebilir. Bu türden düşük yoğunluğa sahip sistemlerde kuantum fenomeninin incelenmesi için sıcaklık 10^{-5} K mertebesinde olmalıdır.

Bose-Einstein yoğuşmasına geçiş sıcaklığı ile ilgili öngöründe bulunabilmek için boyutsal argümanlara ihtiyaç vardır. Serbest parçacıkların uniform gazı için T_c yoğuşma sıcaklığı

$$T_c = C \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk} \quad (1.1)$$

dır. Burada C değeri yaklaşık olarak 3,3 olan nümerik bir faktördür. Denklem (1.1), uygun kütle ve yoğunluk ile ^4He için doymuş buhar basıncında

çözüldüğünde geçiş sıcaklığı yaklaşık olarak 3,13K olarak elde edilir. Bu değer “lambda noktası” ($T_\lambda = 2,17$ K) olarak da adlandırılan süper akışkan fenomeninin incelendiği sıcaklığa oldukça yakındır. Geçiş sıcaklığı ile parçacık yoğunluğu arasında bağlantı kurmanın yolu, λ_T de Broglie dalga boyu ile $n^{-1/3}$ mertebesinde olan parçacıklar arası uzaklığı kıyaslamaktır. Termal de Broglie dalga boyu

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

ile tanımlanır. Yüksek sıcaklıklarda bu değer küçüktür ve gaz bilinen klasik yasalara uygun olarak davranır. Sonuç olarak ideal gazlardaki Bose-Einstein yoğuşması, λ_T ’nin $n^{-1/3}$ ile kıyaslanabileceği kadar düşük sıcaklıklarda oluşmaya başlar.

Yapılan deneylerde harmonik osilatör potansiyelinde tuzaklama işlemi yapıldığından, gazlar uniform değildir. Deneylerde kullanılan tuzakların frekansları genel olarak 10^2 mertebesinde ve parçacık sayısı ise 10^4 ile 10^7 arasında değişen değerler alır.

Bose-Einstein yoğuşmasının elde edildiği ilk deneyde, başlangıç noktası oda sıcaklığındaki rubidyum atomlarıydı. Bu atomlar altı doğrultudaki lazer ışınları tarafından $10\mu\text{K}$ mertebesindeki sıcaklıklara soğutulabildiler. Lazerlerin kapatılmasının ardından atomlar, homojen olmayan manyetik alanın elektron spinleri üzerinde oluşturduğu etki olarak da bilinen Zeeman etkileşimi tarafından manyetik olarak tuzaklandırılır. Nükleer spinden kaynaklanan komplikasyonlar ihmal edildiğinde, elektron spini manyetik alana paralel olan atom, manyetik alanın minimumu tarafından çekilirken; elektron spini manyetik alana antiparalel olan atom manyetik alanın minimumu tarafından itilir. Tuzak potansiyeli, tuzağın merkez bölgesinden parçacık kayıplarının önlenmesi için kuadropol manyetik alanını gerektirir. Manyetik alandaki atom bulutu buharlaştırarak soğutma yöntemi ile daha da fazla soğutulabilir. Buharlaştırarak soğutma yöntemi, enerjisi yüksek olan atomların tuzak tarafından dışarı itilmesi ile sağlanır ve böylece atomlar μK mertebesindeki sıcaklıklara soğutulmuş olurlar.

Bose-Einstein yoğuşması bu güne dek rubidyum, sodyum, lityum, hidrojen, metastabil helyum, sezyum ve kromiyum atomları için deneysel olarak elde edilmiştir. Bu atomların özellikleri ve ikili etkileşimleri arasındaki farklılıklar nedeniyle, yoğuşmalarla ilgili deneysel çalışmalardan büyüleyici pek çok sonuç elde edilmiştir. Sistemde nükleer ve elektronik spin serbestlik dereceleri de hesaba katıldığında, sistem içeriğinin çok daha zengin olduğu görülür [2].

2. TEMEL FORMALİZM

Tuzakta birbiri ile etkileşmeyen Bose-Einstein gazı özellikleri istatistik mekanik aracılığıyla belirlenebilir. Sistemin denge durumundaki özellikleri, enerji spektrumunun sürekli olduğu yarı-klasik yaklaşım ile hesaplanabilir. Bu yaklaşımın geçerli olabilmesi için sıcaklık, $\Delta \in$ birbirine komşu iki enerji seviyesi arasındaki fark olmak üzere $\Delta \in / k$ 'dan büyük olmalıdır.

Bu bölümde, termodinamik özelliklerin hesaplanmasında önemli bir role sahip olan istatistik dağılım fonksiyonundan başlayarak, geçiş sıcaklığı ve yoğunlaşma oranı, yarı-klasik dağılım fonksiyonu ile parçacıkların yoğunluk profili ve hız dağılımı ile sıcaklığın fonksiyonu olarak termodinamik nicelikleri incelenecektir.

2.1. Bose Dağılımı

Isıl dengedeki etkileşmeyen bozonlar için ν tek-parçacık durumunun ortalama yerleşim sayısı, ϵ_ν ele alınan belirli bir tuzak potansiyeli için tek-parçacık durum enerjisini göstermek üzere, Bose dağılım fonksiyonu ile verilir:

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/kT} - 1} \quad (2.1)$$

Sıvı ^4He 'daki temel uyarılma sayısından farklı olarak parçacık sayısı korunduğundan, μ kimyasal potansiyeli Denklem (2.1)'de olduğu gibi, dağılım fonksiyonunda yer alır. Kimyasal potansiyel, toplam parçacık sayısının, birbirinden bağımsız seviyelerin doluluk oranlarının toplamına eşit olduğu durumda N ve T 'nin fonksiyonu olarak incelenebilir.

Yüksek sıcaklıklarda, kuantum istatistiğinin etkileri ihmal edilebilir ve (2.1) eşitliğindeki dağılım fonksiyonu, Boltzman dağılımı ile yaklaşık olarak alınabilir:

$$f^0(\epsilon_\nu) \approx e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/kT} \quad (2.2)$$

Yüksek sıcaklıklardaki kimyasal potansiyel, herhangi bir durumun iş sayısı 1'den çok daha küçük olduğu için, en düşük tek-parçacık seviyesi enerjisini ifade eden ϵ_{\min} değerinden daha düşüktür ve bu nedenle $\exp[(\mu - kT)] \ll 1$ olur. Sıcaklık azaldıkça, kimyasal potansiyel ve dolayısıyla da ortalama yerleşim sayısı artar. Fakat kimyasal potansiyel, ϵ_{\min} değerini aşamaz. Eğer aşmış olsaydı Denklem (2.2)'deki Bose dağılım fonksiyonu en düşük tek-parçacık seviyesi için çözüldüğünde, negatif değer alırdı ve bu durum ise fiziksel olarak açıklanamazdı. Sonuçta, herhangi bir uyarılmış tek-parçacık seviyesine ait ortalama yerleşim sayısı, $1/\{\exp[(\epsilon_v - \epsilon_{\min})/kT] - 1\}$ değerini aşamaz. Uyarılmış durumdaki toplam parçacık sayısı, N değerinden daha düşük ise, kalan parçacıklar, yerleşim sayısı oldukça büyük olan tek parçacık taban durumuna yerleşmelidir: bu sistem Bose-Einstein yoğuşmasına sahiptir. Yoğuşmanın oluşabileceği en yüksek sıcaklık Bose-Einstein geçiş sıcaklığı olarak adlandırılır ve T_c ile gösterilir. Yoğuşma durumunda, yani sıcaklık T_c 'nin altında iken, kimyasal potansiyel kT/N mertebesindeki ϵ_{\min} değerine eşittir ve tek-parçacık taban durumu yerleşimi, bu seviyede bulunan parçacıkların sınırlı bir kısmı için makroskobiktir. Tek-parçacık taban durumunda bulunan N_0 parçacık sayısını elde etmek için, N toplam parçacık sayısından, N_{ex} uyarılmış durumlardaki parçacıkların sayısı çıkarılır [2].

2.1.1. Durum Yoğunluğu

3-boyutta belirli bir dâhili durumda bulunan serbest parçacık için faz uzayının her bir $(2\pi\hbar)^3$ lük hacminde ortalama bir durum söz konusudur. Momentum değerinin p den daha az olduğu momentum uzayı bölgesi, yarıçapı p olan bir kürenin hacmine $(4\pi p^3/3)$ sahiptir. \bar{p} momentumuna sahip parçacığın enerjisi $\epsilon_p = p^2/2m$ olduğundan, ϵ enerjisinden daha düşük enerjiye sahip durumlarının toplam sayısı $G(\epsilon)$, V sistemin hacmi olmak üzere,

$$G(\epsilon) = V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{2^{1/2}}{3\pi^2} \frac{(m\epsilon)^{3/2}}{\hbar^3} \quad (2.3)$$

ile ifade edilir. ϵ ile $\epsilon + d\epsilon$ enerjili seviyeler arasındaki durumların sayısı, genellikle $g(\epsilon)$ durum yoğunluğu ile verilir:

$$g(\epsilon) = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon} \quad (2.4)$$

Denklem (2.3) den yararlanarak

$$g(\epsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \epsilon^{1/2} \quad (2.5)$$

d -boyutlu serbest parçacığa karşı gelen sonuç $g(\epsilon) \propto \epsilon^{(d/2-1)}$, dir ve böylece durum yoğunluğu ifadesi, iki-boyutlu serbest parçacık için enerjiden bağımsızdır.

Harmonik osilatör potansiyeli ele alınırsa:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}(K_1x^2 + K_2y^2 + K_3z^2) \quad (2.6)$$

Bu potansiyel harmonik tuzak olarak da adlandırılır. Buradaki K_i , değerleri genel olarak birbirine eşit olan kuvvet sabitlerini göstermektedir. Bu duruma uyan klasik osilasyon frekansı $\omega_i = K_i / m$ ile verilir ve (2.6) eşitliği

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2) \quad (2.7)$$

olur. $n_i \geq 0$ olmak üzere enerji seviyeleri ise;

$$\epsilon(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega_3 \quad (2.8)$$

dir [3,4].

Verilen bir ϵ değerinden daha düşük enerjili seviyeler için $G(\epsilon)$ durum sayısını incelemek olursa, enerjisi $\hbar\omega_i$ ile kıyaslandığında, daha büyük olan durumlar için n_i sürekli bir değişken gibi davranır ve sıfır-nokta hareketi ihmal edilebilir. Bu nedenle, (2.8) eşitliği yüzeyin ($\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$) şeklindeki sabit enerjisini göstermek üzere, $\epsilon_i = \hbar\omega_i n_i$ tarafından üç değişkenli olarak tanımlanan bir koordinat sistemi ileri sürülebilir. Böylece $G(\epsilon)$, yüzey tarafından çevrilen hacmin ilk sekizde biri ile orantılı olur:

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \int_0^\epsilon d\epsilon_1 \int_0^{\epsilon - \epsilon_1} d\epsilon_2 \int_0^{\epsilon - \epsilon_1 - \epsilon_2} d\epsilon_3 = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (2.9)$$

Durum yoğunluğu $g(\epsilon) = dG/d\epsilon$ ile verildiğinden

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (2.10)$$

dir. d -boyutlu harmonik osilatör için benzer sonuç

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_{i=1}^d \hbar\omega_i} \quad (2.11)$$

olur. Pek çok durumda durum yoğunluğu enerjinin üssünün büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir ve bu nedenle C_α bir sabit olmak üzere durum yoğunluğu

$$g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1} \quad (2.12)$$

formunda olan sistemler için termodinamik özellikler hesaplanabilir. Üç-boyutlu sert duvarlar tarafından sınırlandırılmış gaz için $\alpha = 3/2$ dir.

Denklem (2.5)'ten bu sabitin

$$C_{3/2} = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \quad (2.13)$$

olduğu görülebilir. Üç-boyutlu harmonik osilatör potansiyeli ($\alpha = 3$) için bu sabit, (2.10)'dan yararlanılarak elde edilebilir:

$$C_3 = \frac{1}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \quad (2.14)$$

Kutudaki veya harmonik osilatör potansiyelindeki parçacıklar için α , parçacık başına düşen klasik serbestlik derecesinin yarısı olarak tanımlanır.

2.2. Geçiş Sıcaklığı ve Yoğuşma Oranı

Bose-Einstein yoğuşmasının gözlenebilmesi için gerekli sıcaklık, durum yoğunluğundan hareketle hesaplanabilir. Yoğuşma oranı ise, tuzaklanan parçacıkların içinden ne kadarlık bir bölümünün yoğuşmayı oluşturduğunun belirlenebilmesini sağlar.

2.2.1. Geçiş Sıcaklığı

T_c geçiş sıcaklığı, en-düşük enerjili durumda makroskobik yerleşimin meydana geldiği en yüksek sıcaklık olarak da tanımlanabilir. Parçacık sayısı N yeteri kadar büyük olduğunda, (2.8)'deki sıfır-nokta enerjisi ihmal edilebilir ve böylece en düşük enerji olan potansiyelin minimumu (ϵ_{\min}) sıfıra eşitlenir. Uyarılmış seviyelerdeki parçacıkların sayısı

$$N_{ex} = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) f^0(\epsilon) \quad (2.15)$$

ile verilir ve $\mu = 0$ iken en büyük değerini alır. T_c geçiş sıcaklığı, toplam parçacık sayısının uyarılmış seviyelerde bulunduğu durum için incelendiğinde

$$N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\epsilon/kT_c} - 1} \quad (2.16)$$

dir. Denklem (2.16)'nın, $x = \epsilon / kT_c$ boyutsuz değişkeni terimlerinde yazılmasıyla

$$N = C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT_c)^\alpha \quad (2.17)$$

olur. Burada $\Gamma(\alpha)$ gama fonksiyonu ve $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ ise Riemann-Zeta fonksiyonudur. Denklem (2.17)'deki integral

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \quad (2.18)$$

dir ve α 'nın seçilmiş bazı değerleri için $\Gamma(\alpha)$ ile $\zeta(\alpha)$ değerleri Çizelge 1.1'de verilmiştir.

Çizelge 1.1. α nın bazı değerleri için Γ gama ve ζ Riemann Zeta fonksiyonlarına ait değerler

α	$\Gamma(\alpha)$	$\zeta(\alpha)$
1	1	∞
1,5	$(\sqrt{\pi}/2) = 0,886$	2,612
2	1	$(\pi^2/6) = 1,645$
2,5	$(3\sqrt{\pi}/4) = 1,329$	1,341
3	2	1,202
3,5	$(15\sqrt{\pi}/8) = 3,323$	1,127
4	6	$(\pi^4/90) = 1,082$

Denklem (2.17)'den faydalanarak

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}} \quad (2.19)$$

sonucuna ulaşılır. Üç osilatörün geometrik ortalaması $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$ olmak üzere, üç-boyutlu harmonik osilatör potansiyeli için ($\alpha = 3$) (2.14)denkleminden C_3 değerinin kullanılmasıyla geçiş sıcaklığına ait ifade

$$kT_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0,94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.20), $\bar{f} = \bar{\omega} / 2\pi$ için

$$T_c \approx 4,5 \left(\frac{\bar{f}}{100\text{Hz}} \right) N^{1/3} \text{nK} \quad (2.21)$$

şeklinde daha kullanışlı bir biçimde de yazılabilir.

V hacimli üç-boyutlu kutudaki uniform Bose gazı için $\alpha = 3/2$ olduğu ve $C_{3/2}$ 'ye ait değer ise (2.13) numaralı denklemden hatırlanacak olursa, geçiş sıcaklığı, birim hacimdeki parçacık sayısı olarak tanımlanan sayı yoğunluğu ($n = N/V$) ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$kT_c = \frac{2\pi}{[\zeta(3/2)]^{2/3}} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \approx 3,31 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \quad (2.22)$$

İki-boyutlu uniform gazı için $\alpha = 1$ 'dir ve (2.17) eşitliğindeki integral iraksaktır. Bu sebeple iki-boyutlu kutudaki Bose-Einstein yoğunlaşması yalnızca sıfır-sıcaklıkta meydana gelebilir. Ayrıca, iki-boyutlu Bose gazı, parçacıklar harmonik osilatör potansiyelinde tuzaklandırıldığında, sıfır olmayan sıcaklıklar için de yoğunlaşabilir. Bu durum için $\alpha = 2$ dir ve (2.17)'deki integral de sonludur [5].

2.2.2. Yoğuşma Oranı

T_c geçiş sıcaklığının altında, uyarılmış seviyelerde bulunan parçacık sayısı N_{ex} , (2.15)'de olduğu gibi $\mu = 0$ için aşağıdaki gibidir:

$$N_{ex}(T) = C_\alpha \int_0^\infty d \epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (2.23)$$

$\alpha > 1$ için integralin yakınsak olduğu göz önünde bulundurularak (2.18) numaralı denklemdeki integralin de kullanılmasıyla

$$N_{ex} = C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT)^\alpha \quad (2.24)$$

olur. Bu sonuç, toplam parçacık sayısına bağlı değildir. Ayrıca T_c için (2.19) eşitliğindeki ifade kullanılarak

$$N_{ex} = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (2.25)$$

formunda da yazılması mümkündür. Buradan yoğuşmadaki parçacık sayısı

$$N_0(T) = N - N_{ex}(T) \quad (2.26)$$

veya

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \right] \quad (2.27)$$

ile gösterilebilir.

Üç-boyutlu kutudaki parçacıklar ($\alpha = 3/2$) için, birim hacimdeki uyarılmış parçacıkların sayısı n_{ex} (2.24) denkleminde

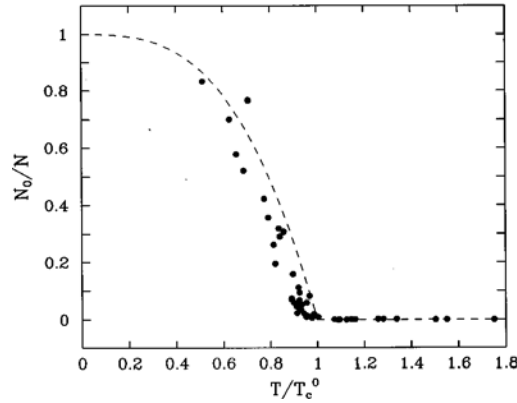
$$n_{ex} = \frac{N_{ex}}{V} = \zeta(3/2) \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (2.28)$$

bulunur. Yoğuşmanın doluluk oranı da bu sebeple $N_0 = N[1 - (T/T_c)^{3/2}]$ ile verilir.

Üç-boyutlu harmonik osilatör potansiyeli ($\alpha = 3$) için yoğuşmadaki parçacık sayısı aşağıdaki gibidir:

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right] \quad (2.29)$$

Her durumda, uygun α değerleri için T_c geçiş sıcaklığı, genel olarak (2.19)'daki gibidir. (Şekil 2.1)[6]



Şekil 2.1. T/T_c^0 'in fonksiyonu olarak yoğuşmanın doluluk oranı (Çizgiler, Denklem (2.29)'un analitik çözümünden; noktalar ise deneysel verilerden elde edilmiştir.) [7]

2.3. Yoğunluk Profili ve Hız Dağılımı

Mikro kelvin mertebesindeki sıcaklıklarda incelenen soğuk atom bulutları $\sim 10^4$ - 10^7 tane atom içermektedir. Genel düşük-sıcaklık fiziği tekniklerinin bu tür sistemlere uygulanamamasının bazı nedenleri vardır. Bunlardan ilki, sistemde az sayıda atom olması, diğeri sistemin yarı-kararlı olması nedeniyle başka bir cisimle dengeye ulaşmasına izin verilmemesi ve son olarak da bu sistemlerin saniyelerden dakikalara kadar süren bir ömrünün olmasıdır.

Burada ölçülebilen niceliklerden biri yoğunluk profilidir. Bunu yapabilmenin yolu ise “absorptive imaging” olarak bilinen soğurucu görüntülemedir. Atomun rezonans frekansındaki ışık, atomik bulut içinden geçerken absorbe edilir. Absorpsiyon profilinin incelenmesiyle, yoğunluk profili hakkında bilgi edinilebilir. Uzaysal çözünürlük, soğurulan görüntü ölçülmeden bulutun genişlemesine izin verilerek elde edilebilir. Bu metodun sakıncası, ışığın absorpsiyonu esnasında atomun dahili durumlarını değiştirmesi ve bulutu önemli ölçüde ısıtmasıdır. Alternatif olan teknik ise “phase-contrast imaging” olarak bilinen karşıt-faz görüntüsünün alınmasıdır. Bu teknikte yoğunluğa bağlı olan gazın kırıcı içeriği kullanılır ve böylece optik yol uzunluğu ortalama olarak değiştirilebilir. Faz kaymasına ait referans ışığı ile bulut içinden geçen ışık hızmasının girişim yapmasına izin verilerek de, optik yol uzunluğu, karşıt-faz görüntüsünde olduğu gibi yoğunluk değişimlerine dönüştürülebilir.

Bulutun genişlemesine izin verildikten sonra parçacıkların dağılımı yalnızca yoğunluk dağılımına değil, dâhili hız dağılımına da bağlıdır. Sonuç olarak, hem yoğunluk hem de hız dağılımının incelenmesi gerekmektedir.

Sistemin taban durumundaki tüm atomlar, en düşük tek-parçacık kuantum durumuna yoğunlaşmışlardır. Bu sebeple yoğunluk dağılımı $n(\mathbf{r})$, tuzakta bulunan parçacıklar için taban durumu dalga fonksiyonu $\phi_0(\mathbf{r})$ 'nin şeklini yansıtmaktadır. Birbiriyle etkileşmeyen parçacıklar için, N parçacık sayısı olmak üzere yoğunluk aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$n(\mathbf{r}) = N |\phi_0(\mathbf{r})|^2 \quad (2.30)$$

Anizotropik-harmonik osilatör potansiyeli için taban durumu dalga fonksiyonu ise;

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4} (a_1 a_2 a_3)^{1/2}} e^{-x^2/2a_1^2} e^{-y^2/2a_2^2} e^{-z^2/2a_3^2} \quad (2.31)$$

dir. Burada dalga fonksiyonuna ait üç-boyutlu a_i genişlikleri aşağıdaki gibi verilir:

$$a_i^2 = \frac{\hbar}{m\omega_i} \quad (2.32)$$

Böylece dağılım fonksiyonu ω_1 , ω_2 ve ω_3 frekansları birbirine eşit olmadığında anizotropiktir ve en düşük frekans için en büyük değerini alır. a_i genişlik, $f_i = \omega_i / 2\pi$ tuzak frekansı ve A kütle numarası terimleri ile benzer olarak

$$a_i \approx 10,1 \left(\frac{100\text{Hz}}{f_i} \frac{1}{A} \right)^{1/2} \mu\text{m} \quad (2.33)$$

yazılabilir.

$c_i = \hbar / a_i = \sqrt{m\hbar\omega_i}$ olmak üzere, momentum uzayında (2.31) eşitliğine karşı gelen dalga fonksiyonunu bulmak için Fourier dönüşümü uygulandığında

$$\phi_0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^{3/4} (c_1 c_2 c_3)^{1/2}} e^{-p_x^2/2c_1^2} e^{-p_y^2/2c_2^2} e^{-p_z^2/2c_3^2} \quad (2.34)$$

olur.

Momentum uzayında (2.30) eşitliğine karşı gelen yoğunluk ifadesi de aşağıdaki gibidir:

$$n(\mathbf{p}) = N |\phi_0(\mathbf{p})|^2 = \frac{N}{\pi^{3/2} c_1 c_2 c_3} e^{-p_x^2/c_1^2} e^{-p_y^2/c_2^2} e^{-p_z^2/c_3^2} \quad (2.35)$$

Uzaysal dağılım anizotropik olduğundan momentum dağılımı yöne de bağlıdır. Belirsizlik ilkesine göre dar bir uzaysal dağılım, geniş bir momentum dağılımına karşı geldiğinden, benzer durum (2.34)'te bulunan Fourier dönüşümünde olduğu gibi, c_i genişliğinin osilatör frekansının karekökü ile orantılı olmasıyla da görülebilir.

Yoğunluk ve momentum dağılımları, Bose-Einstein yoğuşma sıcaklığının üzerindeki sıcaklıklarda, gazın klasik istatistik kurallarına uyduğu ifadelerle de karşılaştırılabilir. Yoğunluk dağılımı böylece $\exp[-V(\mathbf{r})/kT]$ ile orantılıdır ve

$$n(\mathbf{r}) = \frac{N}{\pi^{3/2} R_1 R_2 R_3} e^{-x^2/R_1^2} e^{-y^2/R_2^2} e^{-z^2/R_3^2} \quad (2.36)$$

elde edilir. Burada R_i uzunlukları:

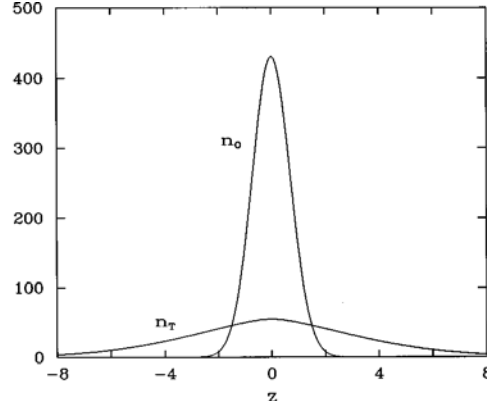
$$R_i^2 = \frac{2kT}{m\omega_i^2} \quad (2.37)$$

ile verilir.

T_c 'nin üzerindeki sıcaklıklarda momentum uzayındaki $n(\mathbf{p})$ yoğunluğu, yalnızca sıcaklık ve parçacık kütlesi ile belirlenebildiğinden, dengedeki durum için izotropiktir ve C momentumdan bağımsız bir sabit olmak üzere klasik limitte

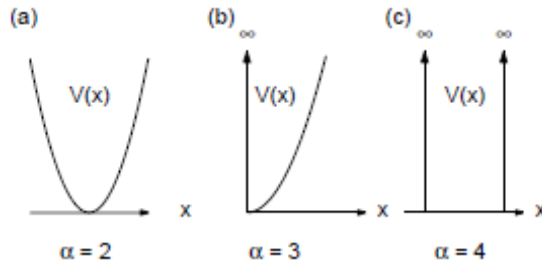
$$n(\mathbf{p}) = C e^{-p^2/2mkT} \quad (2.38)$$

biçiminde ifade edilebilir. Momentum dağılımının genişliği $\sim (mkT)^{1/2}$ 'dir ve bu genişlik, sıfır-sıcaklıktaki $(m\hbar\omega_i)^{1/2}$ genişliğinin $\sim (kT/\hbar\omega_i)^{1/2}$ katıdır. Geçiş sıcaklığı ile kıyaslanılabilen sıcaklıklarda $kT \sim N^{1/3}\hbar\omega_i$ alınabilir ve böylece $(kT/\hbar\omega_i)^{1/2}$ niceliğinin, $N^{1/6}$ mertebesinde olduğu görülür. Termal bulutun yoğunluk ve hız dağılımları, bu sebeple yoğuşmadan daha geniştir. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2. $T = 0,9T_c^0$ sıcaklığında, küresel tuzaktaki 5000 etkileşmeyen bozon için kolon yoğunluğu (n_0 ve n_T yoğuşmuş ve yoğuşmamış parçacıklara ait yoğunluk dağılımıdır.)

Termal bulutun orijinal halinden daha geniş bir boyuta gelinceye dek genişlemesine izin verilirse, elde edilen bulut, hız dağılımının izotropisi nedeniyle küresel simetrik olacaktır. Bu durum, genişleyen yoğuşma bulutunun anizotropik şeklinden oldukça farklıdır. Konuyla ilgili yapılan ilk deneylerde, genişleme sonrasında bulutun anizotropisi, Bose-Einstein yoğuşmasının oluşumu için kuvvetli ve destekleyici bir kanıt olarak ele alınmıştır [3-5].



Şekil 2.3. α parametresine göre tuzaklar [8]

2.4. Termodinamik Nicelikler

İdeal Bose gazının termodinamik özelliklerinden yararlanılarak enerji, entropi ve yoğuşmuş fazın diğer özellikleri belirlenebilir. Seviyelerin yoğunluğunu karakterize eden α parametresine (Şekil 2.3) bağlı olan T_c 'ye yakın sıcaklıklarda, öz ısının, sıcaklıkla ne şekilde değiştiği incelenebilir.

2.4.1. Yoğuşmuş Faz

Makroskobik olarak doldurulmuş seviyelerin enerjisi sıfır alınır ve böylece sistemin toplam enerjisine yalnızca uyarılmış seviyeler katkıda bulunmuş olur. Sonuçta, toplam parçacık sayısının hesaplanmasında olduğu gibi toplam ifadeleri integral ifadelerine dönüştürülürken, yoğuşma için kesin terimleri içermesi şart değildir. T_c 'nin altındaki sıcaklıklarda temel uyarılma sayısı ve parçacıklar arası etkileşim az olduğundan, kimyasal potansiyel ortadan kalkar ve iç enerji

$$E = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1) (kT)^{\alpha+1} \quad (2.39)$$

olur. $C = \partial E / \partial T$ ifadesiyle verilen öz ısı ise

$$C = (\alpha + 1) \frac{E}{T} \quad (2.40)$$

dir. Öz ısı, S entropi terimiyle $C = T \partial S / \partial T$ ifadesinden yararlanılarak da ifade edilebileceğinden

$$S = \frac{C}{\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{E}{T} \quad (2.41)$$

bulunur. Burada T_c sıcaklığının altında enerji, entropi ve öz ısının toplam parçacık sayısına bağlı olmadığına dikkat edilmelidir. Bunun sebebi, yalnızca

uyarılmış durumdaki parçacıkların katkıda bulunmasıdır ve sonuçta makroskobik olarak işgal edilmiş seviyelerdeki parçacıkların sayısının bu niceliklerle bir ilgisi bulunmamaktadır.

N toplam parçacık sayısı ile T_c geçiş sıcaklığı terimlerinde ifade edilen (2.19) eşitliğindeki enerji ise, gama fonksiyonunun $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ özelliğinden yararlanılarak

$$E = Nk\alpha \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} \frac{T^{\alpha+1}}{T_c^\alpha} \quad (2.42)$$

ile verilebilir. Sonuç olarak öz ısı için

$$C = \alpha(\alpha+1) \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} Nk \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (2.43)$$

ve entropi için ise

$$S = (\alpha+1) \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} Nk \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (2.44)$$

elde edilir. Bu sonuçlar klasik limite incelendiğinde, yüksek sıcaklıklarda Bose-Einstein dağılımının, Boltzman dağılımına dönüştüğü sonucuna ulaşılır. Toplam parçacık sayısı ve enerji bu durumda

$$N = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} e^{(\mu-\epsilon)/kT} \quad (2.45)$$

$$E = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^\alpha e^{(\mu-\epsilon)/kT} \quad (2.46)$$

olur.

(2.46) numaralı eşitliğin integre edilmesiyle

$$E = \alpha NkT \quad (2.47)$$

ile yüksek sıcaklıklar için öz ısıyı ifade eden

$$C = \alpha Nk \quad (2.48)$$

denklemlerine ulaşılır. Yoğuşmuş durumda elde edilen öz ısının klasik limitteki değerine oranı

$$\frac{C(T)}{\alpha Nk} = (\alpha + 1) \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (2.49)$$

dir. T_c sıcaklığında bu oran, üç-boyutlu uniform gaz ($\alpha = 3/2$) için yaklaşık olarak 1,28'dir ve üç-boyutlu harmonik osilatör potansiyeli için ($\alpha = 3$) ise 3,60 değerini alır.

Üç-boyutlu ideal gaz için basınç ifadesi, istatistiğine bakmaksızın $p = 2E/3V$ ile verilir. Yoğuşmuş Bose gazı için bu sonuç $p = -(\partial E / \partial V)_S$ eşitliğinden $\alpha = 3/2$ için (2.42) numaralı denklemden yararlanılarak türetilir. Denklem (2.22)'den T_c 'nin, $n^{2/3}$ ile orantılı olması sebebiyle

$$p = nk \frac{\zeta(5/2) T^{5/2}}{\zeta(3/2) T^{3/2}} = \zeta(5/2) \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \quad (2.50)$$

bulunur. Denklem (2.44)'den parçacık başına entropi ise

$$\frac{S}{N} = k \frac{5}{2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (2.51)$$

ile verilir.

2.4.2. Normal Faz

Denklem (2.48)'e ait klasik sonuçtaki öz ısı için temel düzeltmeyi elde etmek üzere, toplam parçacık sayısının ve toplam enerjinin genel ifadeleri incelenir:

$$N = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1} \quad (2.52)$$

$$E = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^\alpha \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1} \quad (2.53)$$

Yüksek sıcaklıklarda ortalama yerleşim sayısı küçüktür. Bu nedenle her iki denklemde de büyük x değerleri için geçerli olan $(e^x - 1)^{-1} \cong e^{-x} + e^{-2x}$ açılımının uygulanmasıyla

$$N \cong C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \left[e^{(\mu-\epsilon)/kT} + e^{2(\mu-\epsilon)/kT} \right] \quad (2.54)$$

ve

$$E \cong C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^\alpha \left[e^{(\mu-\epsilon)/kT} + e^{2(\mu-\epsilon)/kT} \right] \quad (2.55)$$

denklemlerine ulaşılır. Denklem (2.54), $\exp(\mu/kT)$ için çözüldüğünde μ kimyasal potansiyeli ihmal edilmiş olur. Burada elde edilen sonuç ise (2.55) eşitliğinde kullanıldığında

$$\frac{E}{\alpha N k T} \cong 1 - \frac{\zeta(\alpha)}{2^{\alpha+1}} \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (2.56)$$

bulunur.

Son olarak öz ısı için de

$$C \cong \alpha Nk \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\zeta(\alpha)}{2^{\alpha+1}} \left(\frac{T_c}{T} \right)^\alpha \right] \quad (2.57)$$

elde edilmiş olur. Bu yaklaşım, yalnızca T_c geçiş sıcaklığının biraz üzerindeki sıcaklıklar için kullanışlıdır.

2.4.3. T_c Civarında Öz Isı

Parçacık başına klasik serbestlik derecesinin yarısı olarak tanımlanan α 'nın ikiden büyük olması durumunda süreksizlik söz konusudur. Bu durumun tersine uniform Bose gazı ($\alpha = 3/2$) için sabit hacimdeki öz ısı, T_c sıcaklığında sürekli iken; sıcaklığa bağlı türevleri sürekli değildir.

N toplam parçacık sayısını göstermek üzere; E enerjisi, T ve μ 'ye bağlı fonksiyon olmak şartıyla enerjideki değişim $\delta E = (\partial E / \partial T)_\mu \delta T + (\partial E / \partial \mu)_T \delta \mu$ biçiminde yazılabilir. δT ile orantılı olan terim, geçişin hemen üzerinde ve altında aynıdır ve bu sebeple de T_c sıcaklığında sürekli bir yapıya sahip olan öz ısı katkılarını verir. Burada tekil karakterin kaynağı $\delta \mu$ ile orantılı olan terimdir, çünkü kimyasal potansiyel μ , T_c 'den daha düşük sıcaklıklarda sıfır iken; geçiş sıcaklığının üzerindeki sıcaklık değerlerinde sıfırdan farklıdır (aslında negatif değer almaktadır). Buradaki tekilliğin doğasını inceleyebilmek için T_c 'nin hemen üzerindeki sıcaklıkların ele alınması gerekir ve $\delta \mu$ kimyasal potansiyeli değerinde sıfırdan itibaren meydana gelen değişim, $T - T_c$ 'nin en düşük değeri için incelenmelidir. İç enerjiye $\delta \mu$ kimyasal potansiyelinin sıfır-olmayan katkısı da $\partial E / \partial \mu = \alpha N$ ile verilir. Böylece öz ısıdaki süreksizlik, parçacık sayısı sabit olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\Delta C = C(T_{c+}) - C(T_{c-}) = \alpha N \frac{\partial \mu}{\partial T} \Big|_{T=T_{c+}} \quad (2.58)$$

μ kimyasal potansiyelinin T_c 'nin hemen üzerinde T 'ye bağıllığı:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_N = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial N}\right)_T \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu = -\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu \left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_T^{-1} \quad (2.59)$$

dir ve parçacık sayısı sabit olduğunda ise

$$dN = \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu dT + \left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_T d\mu = 0 \quad (2.60)$$

olur. T_c ve üzerindeki sıcaklıklarda (2.54)'ten

$$\left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_T = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} \frac{N}{kT_c} \quad (2.61)$$

ve

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu = \alpha \frac{N}{T_c} \quad (2.62)$$

kullanılarak $\alpha > 2$ olmak koşuluyla

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_N = -\alpha \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha-1)} k \quad (2.63)$$

elde edilir. $T - T_c \ll T_c$ için bu durum

$$\mu \cong -\alpha \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha-1)} k(T - T_c) \quad (2.64)$$

biçimindedir.

Denklem (2.64)'ün, (2.56)'da yazılmasıyla öz ısıdaki süreksizlik;

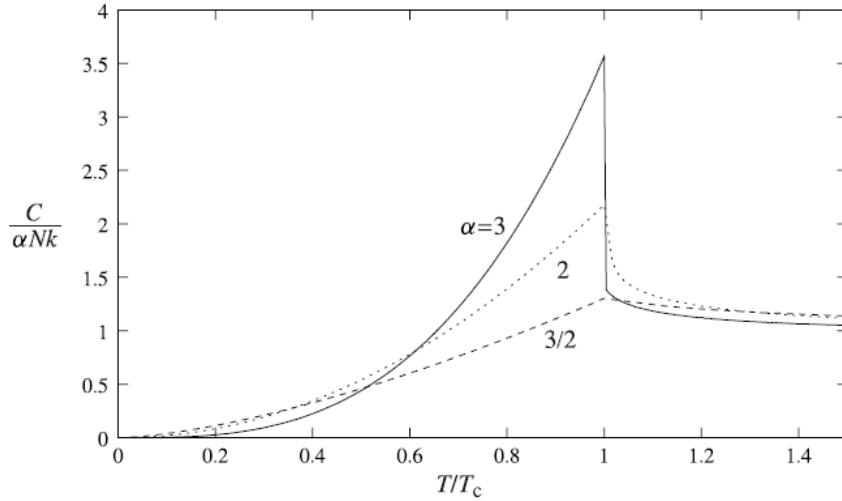
$$\Delta C = -\alpha^2 \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha-1)} Nk \quad (2.65)$$

olarak bulunur. Harmonik osilatör potansiyeli ($\alpha = 3$) için öz ısıdaki değişim

$$\Delta C = -9 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} Nk \approx -6,58 Nk \quad (2.66)$$

değerine eşittir.

$\alpha \leq 2$ için yukarıdaki açılım izinli değildir. α 'nın farklı değerleri için sıcaklığa bağlı öz ısı değerleri Şekil 2.3'de verilmiştir. Burada sabit basınç altında ideal, uniform Bose gazının öz ısısının, yüksek sıcaklıklardan T_c sıcaklığına yaklaşıldıkça ıraksadığına dikkat edilmelidir [5].



Şekil 2.4. αNk birimlerinde, farklı α değerleri için T/T_c indirgenmiş sıcaklık fonksiyonu olarak C öz ısısının değişimi

2.5. Sonlu Parçacık Sayısının Geçiş Sıcaklığına Etkisi

Üç-boyutlu harmonik tuzakta bulunan N tane bozonun oluşturduğu bulut için geçiş sıcaklığı, (2.20) eşitliğinde $N^{1/3}$ ile orantılı olarak verilir. Bu denklemden yapılacak ilk düzeltme, parçacık sayısının sınırlı olmasından kaynaklanır. 10^6 atom içeren bir bulut için geçiş sıcaklığı %1 oranında düşerken, 10^4 atom için bu etki %5 oranında, yani bir miktar daha fazladır.

T_C sıcaklığının üzerindeki düzeltmenin kaynağı, en küçük tek-cisim durumu enerjisinin, frekansların aritmetik ortalaması

$$\omega_m = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/3 \quad (2.67)$$

olmak üzere

$$\Delta \epsilon_{\min} = \frac{\hbar}{2} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \frac{3\hbar\omega_m}{2} \quad (2.68)$$

sıfır-nokta hareketidir. Böylece geçiş sıcaklığında, kimyasal potansiyelde meydana gelen kayma

$$\Delta\mu = \Delta \epsilon_{\min} \quad (2.69)$$

ile verilir.

Üç-boyutlu harmonik osilatör potansiyelinde tuzaklanan parçacıklara ait geçiş sıcaklığında oluşan ΔT_C kaymasının belirlenebilmesi için, (2.66)'daki sonucun tersi kullanılarak, geçiş sıcaklığındaki kayma ile kimyasal potansiyeldeki değişim bağdaştırılmıştır. Üç-boyutlu harmonik tuzak için $\alpha = 3$ olduğundan, geçiş sıcaklığındaki kayma aşağıdaki gibidir:

$$\Delta T_C = -\frac{\zeta(2)}{3\zeta(3)} \frac{\Delta\mu}{k} = -\frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)} \frac{\hbar\omega_m}{k} \quad (2.70)$$

Denklem (2.20)'den T_C 'nin eklenmesiyle $N^{-1/3}$ ile orantılı olarak çok az bir değişime karşı gelen

$$\frac{\Delta T_C}{T_C} = -\frac{\zeta(2)}{2[\zeta(3)]^{2/3}} \frac{\omega_m}{\omega} N^{-1/3} \approx -0,73 \frac{\omega_m}{\bar{\omega}} N^{-1/3} \quad (2.71)$$

sonucuna ulaşılır.

Eksenel simetriye sahip anizotropik tuzaklar için, yani $\omega_3 = \lambda\omega_1 = \lambda\omega_2$ iken, $\omega_m / \bar{\omega}$ oranı $(2 + \lambda)/3\lambda^{1/3}$ 'e eşittir. λ , 10^{-3} kadar küçük olabileceğinden anizotropi, sonlu sayıdaki parçacıktan kaynaklanan etkileri belirli bir biçimde değiştirebilir.[5,8,9]

3. ATOMLAR ARASI ETKİLEŞİMLER

Teorik olarak, alkali atom buharı bulutu özelliklerinden biri, 10^2 nm mertebesindeki parçacık dağılımlarıdır. a_0 , Bohr yarıçapı olmak üzere, alkali atomları için saçılma uzunluğunun $100a_0$ civarında olması ve etkileşimlerde baskın etkinin de iki-cisim çarpışmaları olduğu göz önünde bulundurulduğunda, alkali atom buharlarının seyreltik olduğu söylenilebilir. Bu nedenle, düşük enerjilerde elde edilmiş iki-cisim saçılmasına ilişkin verilerden yararlanılarak, bu türden bir gazın incelenmesi uygun olur.

Elektronik taban durumunda bulunan bir atom, çok sayıda farklı ince yapı seviyesine sahiptir. Atomlar arası etkileşimler sonucu, bu ince yapı seviyeleri arasında geçişler meydana gelebilir. Bu türden süreçler, tuzaklanmış atom kayıplarına neden olan temel mekanizmaları oluşturmaktadır. Saçılma sürecinde parçacıkların içinde bulunduğu durumlar, “kanal” olarak adlandırılan kuantum sayıları setleriyle tanımlanırlar. Bose-Einstein yoğunlaşmasının söz konusu olduğu sıcaklıklarda, atomlar elektronik taban durumundadırlar ve bu yüzden amaca uygun durumlar ince yapı seviyeleridir. Tek bir atom için pek çok ince yapı seviyesi söz konusu olduğundan, soğuk alkali atomlarına ait saçılma bir çoklu-kanal problemidir.

Tuzak kayıplarına neden olan inelastik sürecin yanı sıra, kanallar arasındaki çiftlenim de düşük enerjili kanalın bağlı durumunun, diğer kanaldaki saçılmayı kuvvetli bir biçimde modifiye etmesi anlamına gelen Feshbach rezonansını artırır. Feshbach rezonansı, atom-atom etkileşiminin hem değerini, hem de işaretini değiştirdiği için soğuk atomların incelenmesinde güçlü bir araçtır.

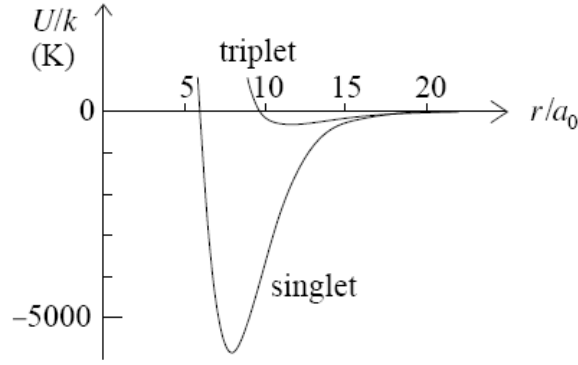
Çok hafif atomlar haricindeki tüm atomlar için atom-atom etkileşimine ait potansiyeller yeterli doğrulukta hesaplanamayacağından, soğuk atomların saçılma özelliklerinin belirlenmesi için teori tek başına yetersizdir. Ayrıca, soğuk-atom çalışmalarıyla ilgili özelliklerin pek çoğuna da deneysel olarak doğrudan ulaşamaz. Sonuçta, iki-cisim saçılmasıyla ilgili bilginin türetilmesinde, belirli bir sınıf ölçümden etkileşim hakkında bilginin elde edilmesi ve sonrasında ilgilenilen özellikler için teorinin kullanılması gerekmektedir. Lazerle soğutmanın gelişiminin ardından, düşük enerjili atomik çarpışmaların anlaşılmasında da

büyük artış meydana gelmiştir. Özellikle lazer alanının varlığında, mikro kelvin mertebesindeki sıcaklıklarda bulunan atomların çarpışarak moleküler bağlı durumlara uyarılmalarıyla elde edilen photoassociation spektroskopinin kullanılması ve Feshbach rezonansı çalışmaları, saçılma uzunlukları üzerine daha detaylı bilginin elde edilmesini sağlamıştır.

3.1. Atomlar Arası Potansiyeller ve Van der Waals Etkileşimi

Polarize alkali atomları arasındaki etkileşimler, polarize olmamış atomlar arasındaki etkileşimlerden farklıdır. Zıt spine sahip iki elektron aynı orbitale yerleşebildiğinden, kapalı kabuğun dışında elektronu olan atomlar arasındaki etkileşimler çekici katkıya sahiptirler. Bu durum, kovalent bağlanmadan sorumlu etkiyi oluşturur. Ancak, iki elektron da aynı spin durumunda ise, aynı uzaysal dalga fonksiyonuna sahip olamazlar ve bu nedenle de elektronların aynı orbitali paylaşmasından kaynaklanan bir enerji kaybı söz konusu değildir. Bu duruma bir örnek, Şekil 2’de iki valans elektronunun singlet ve triplet spin durumlarında bulunduğu iki rubidyum atomundaki etkileşimler için gösterilmektedir. Küçük dağılımlar için bu etkileşimler, elektron bulutlarının üst üste binmesi sebebiyle kuvvetli itici merkezin hakimiyeti altındadır; fakat daha geniş dağılımlarda singlet seviye için çekici kuyu, triplet seviye için daha derindir. Singlet potansiyel, sıcaklık birimlerinde yaklaşık 6000K derinliğinde ve atomlar arası uzaklık $8a_0$ olduğunda minimuma sahipken; triplet potansiyelin minimum derinliği yalnızca birkaç kelvinde ve $12a_0$ ’lık atomlar arası uzaklıkta oluşmaktadır. Geniş atomik dağılımlar için Van der Waals etkileşimi nedeniyle çekici etkileşim söz konusudur; fakat bu etki, kovalent bağlanmadan ileri gelen çekici etkileşimlerle kıyaslandığı zaman oldukça küçüktür.

Belirli bir ince yapı durumundaki atom çiftinin elektronik spin durumu, elektronik singlet ve triplet katkılarının bir süperpozisyonudur ve sonuç etkileşimi hem singlet hem de triplet etkileşimleri içerir.



Şekil 3.1. Taban durumunda elektronları singlet ve triplet seviyelerde bulunan iki rubidyum atomu için r atomik dağılımının fonksiyonu olarak $U(r)$ etkileşim potansiyelleri

Düşük enerjili iki-cisim etkileşimleri, saçılma uzunluklarıyla karakterize edilebilir ve polarize alkali atomları için bu uzunluklar, atom boyutu $\approx a_0$ 'ın iki katı kadardır. Van der Waals etkileşimleri bu geçişin saçılma uzunluğunu artırır. Atomlar arasındaki elektrik dipol-dipol etkileşimleri, Van der Waals etkileşimine sebep olur ve atomlar arasındaki uzaklık r iken $-\alpha/r^6$ formundadır. Enerjinin sıfır olması durumunda Schrödinger denkleminde bulunan r_0 uzunluğu, boyutsal argümanlar tarafından öngörülebilir. m atomik kütle olmak üzere, kinetik enerji \hbar^2/mr_0^2 ve Van der Waals etkileşimi de α/r_0^6 mertebesindedir. Bu iki enerjinin birbirine eşitlenmesiyle r_0 karakteristik uzunluğu için $(\alpha m/\hbar^2)^{1/4}$ elde edilir. C_6 atomik birimler cinsinden Van der Waals etkileşiminin büyüklüğü ifade etmek üzere uzunluk

$$r_0 \approx (C_6 m / m_e)^{1/4} a_0 \quad (3.1)$$

ile verilir. Denklem (3.1) saçılma uzunluğunun genel ifadesidir; ancak nümerik değeri ve işareti, etkileşimin kısa-menzilli kısmı tarafından belirlenir. Alkali atomlarının büyük saçılma uzunluklarına sahip olmasının iki sebebi vardır. İlki A kütle numarası olmak üzere, atomik kütlelerin elektron kütlelerinin $10^3 A$ katı

olmasıdır. İkincisi ise alkali atomları için C_6 Van der Waals sabitlerinin, Çizelge 3.1'den de görüleceği gibi 10^3 ile 10^4 arasında değer almasındandır.

Çizelge 3.1. Van der Waals sabitlerinin hesaplanmış değerleri

Element	C_6
H-H	6.5
Li-Li	1393
Na-Na	1556
K-K	3897
Rb-Rb	4691
Cs-Cs	6851

Potansiyele $1/r^6$ biçiminde olan katkı, $U(r)$ iki-cisim etkileşiminin uzun menzildeki açılımının temel teriminden gelir. Bu dağılım atomik birimlerde

$$U(r) = -\frac{C_6}{r^6} - \frac{C_8}{r^8} - \frac{C_{10}}{r^{10}} + \dots \quad (3.2)$$

ile verilir. Daha yüksek mertebeden olan C_8 ve C_{10} katkıları sırasıyla $10^2 C_6$ ve $10^4 C_6$ mertebesinde olduğundan, r_0 civarında yalnızca ilk $1/r^6$ olan teriminin alınması iyi bir yaklaşımdır [5].

3.1.1. Van der Waals Etkileşiminin Değeri

Ametallerin oluşturduğu bazı apolar moleküller oda koşullarında gaz halindedir (He, Ne, Ar, H₂, O₂, CO₂... gibi). Bu gazlar soğutulduklarında ve üzerlerine yüksek basınç uygulandığında moleküller birbirine yaklaşır ve sıvı hale geçerler. Moleküllerin birbirlerine yaklaşımlarıyla elektron dağılımlarındaki simetri de bozulabilir. Böylece molekülde bulunan elektronların yoğun olduğu taraf kısmen negatif, diğer taraf da kısmen pozitif yükle yüklenir. Bir molekülün pozitif, diğerinin de negatif yüklü kısımları arasında kısa süreli zayıf çekim kuvvetleri oluşur. Bu kuvvetlerin etkisiyle moleküller arasında oluşan bağlara “Van der Waals bağları” denir. Oldukça zayıf olan bu bağ çeşidinin kuvveti molekülün büyüklüğü arttıkça artar ve süper moleküler kimya, yapısal biyoloji, polimer bilimi, nanoteknoloji, yüzey bilimi ve yoğun madde fiziğinde önemli kullanım alanlarına sahiptir [10].

Alkali atomlarının optik spektrumlarında kuvvetli rezonans çizgileri vardır. Bu da alkali atomlarının bulunduğu ortamda büyük değerlere sahip polarizasyonlara ve güçlü Van der Waals bağlarının oluşumuna neden olur.

\mathbf{r} , $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ ile verilen atomlar arası uzaklık olmak üzere, C_6 için mikroskobik bir ifadenin türetilmesi amacıyla atomlar arasında elektrik dipol-dipol etkileşiminden kaynaklanan Van der Waals etkileşimi için

$$U_{ed} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} [\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (3.3)$$

yazılabilir. Burada \mathbf{d}_1 ve \mathbf{d}_2 vektör dipol momentleri ifade eder. Atomların taban enerji seviyesi, paritenin öz durumları için iyi bir yaklaşımdır ve sonuç olarak elektrik dipol operatörünün köşegen matris elemanları ortadan kalkar. Etkileşim enerjisine en büyük katkı da, ikinci mertebeden dipol-dipol etkileşimidir ve aşağıdaki gibi verilir:

$$U(r) = -\frac{6}{(4\pi \epsilon_0)^2 r^6} \sum_{n,n'} \frac{|\langle n|d_z|0\rangle|^2 |\langle n'|d_z|0\rangle|^2}{E_n + E_{n'} - 2E_0} \quad (3.4)$$

Denklem (3.4)'teki 6 faktörü, $L = 0$ olan taban enerji seviyesindeki atomlardan için seçilen dipol operatörünün kartezyen bileşenlerinden bağımsız olması gerçeğinden ileri gelir. Dipol momentin i 'inci bileşeni için k seviyesinden l seviyesine geçişe ait boyutsuz osilatör şiddeti

$$f_{kl}^i = \frac{2m_e(E_k - E_l)}{e^2\hbar^2} |\langle k | d_i | l \rangle|^2 \quad (3.5)$$

biçimindedir. Denklem (3.4)'teki sonucun osilatör kuvveti terimlerinde; ölçülen uyarılma enerjilerinin de atomik birimlerde ifade edilmesiyle aşağıdaki sonuç bulunur:

$$C_6 = \frac{3}{2} \sum_{n,n'} \frac{f_{n0}^z f_{n'0}^z}{(E_n - E_0)(E_{n'} - E_0)(E_n + E_{n'} - 2E_0)} \quad (3.6)$$

Atom, ϵ elektrik alanına maruz kaldığında, bir elektrik dipol momenti kazanır ve böylece enerji seviyelerinde bir kayma meydana gelir. Bu şekilde oluşan α polarizasyonu ile $\langle d \rangle$ elektrik dipol momentinin beklenen değeri arasındaki ilişki $\langle d \rangle = \alpha \epsilon$ ile tanımlanır. Polarizasyon aslında bir tensör olmasına rağmen; S seviyelerinde bulunan alkali atomları ve hidrojen için skaler bir sayıdır, çünkü uygulanan alanın yönüne bağlı değildir. Alkali atomlarında polarizasyona en büyük katkı valans elektronlarından gelir. Diğer seviyelerdeki elektronların katkısı, buldukları seviyelerin enerjileri yüksek olduğundan daha azdır. Ayrıca valans elektronu için osilatör şiddetinin hacmi, spektrumun optik kısmının rezonans çizgisidir. Bunlar, spin-orbital etkileşimi nedeniyle dublet olan $n P - n S$ geçişleridir. Rezonans çizgisi dışındaki geçişler ihmal edildiğinde, toplam osilatör şiddeti için rezonans çizgisi baz alınır ve polarizasyon;

$$\tilde{\alpha} \approx \frac{1}{(\Delta E_{res})^2} \quad (3.7)$$

dir.

Burada ΔE_{res} , atomik birimlerde ölçülen rezonans çizgisine ait enerji farkıdır. Polarizasyonda olduğu gibi toplama gelen en büyük katkının sebebi rezonans çizgisidir. Taban durumundan, diğer tüm seviyelerde bulunan rezonans çiftlerine geçişte toplam osilatör kuvveti baz alınıp farklı türden geçişler ihmal edildiğinde

$$C_6 \approx \frac{3}{4(\Delta E_{res})^3} \quad (3.8)$$

bulunur. Alkali atomları için bu değer 0,1'den daha küçüktür ve bu nedenle de C_6 değeri, deneylerle uyumlu olarak 10^3 'ten daha büyük bulunur. Daha ağır olan alkali atomları için ise valans elektronları haricindeki elektronların potansiyel enerjiye katkısı daha fazladır ve dolayısıyla da C_6 , öngörülen değerinden daha büyüktür. Denklem (3.8)'deki ifade elektrik alana maruz kalan atomlarda, elektrik dipol momentlerin elde edilmesiyle oluşan enerji seviyelerindeki kayma sonucu oluşan polarizasyonlarla benzerdir ve alkali atomları için C_6 değerinin anlaşılmasını sağlar.

Daha büyük atomlar arası dağılımlar için, atomlar arası potansiyel hesaplanırken, dipolar etkileşim statik gibi düşünülmemelidir; çünkü burada etkileşim sebebiyle geciktirici etkinin de hesaba katılması gerekmektedir. Böylece etkileşimin $1/r^6$ ile değil $1/r^7$ ile değiştiği bulunur. Bu etki, kullanılan lazer fotonunun enerjisi, rezonans geçişi enerjisine eşit olduğunda sahip olduğu dalga boyu ile atomlar arası uzaklık birbirine eşit veya yakın olduğu durumlarda önem kazanmaktadır. Sonuç olarak, buradaki gecikmenin potansiyele az da olsa payı olduğu söylenilebilir.

3.2. Temel Saçılma Teorisi

m_1 ve m_2 kütleli ayırt edilebilen iki parçacığın saçılması ele alındığında, kütle merkezi hareketine ait dalga fonksiyonu düzlem dalga olsun. Bu hareket için indirgenmiş kütle de $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ile verilerek Schrödinger denklemini sağlasın. Saçılmayı tanımlamak için yazılacak dalga fonksiyonu, gelen dalga ile saçılan dalganın toplamı biçiminde olmalıdır:

$$\psi = e^{ikz} + \psi_{sc}(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

Geniş atomlar arası dağılım için $f(\mathbf{k})$ saçılma genliği ve \mathbf{k} saçılan dalganın dalga vektörü olmak üzere, saçılan dalga $f(\mathbf{k}) \exp(ikr)/r$ şeklinde dışa doğru yayılan küresel bir dalga biçimindedir. [11] Burada atomlar arası etkileşim küresel simetrik olmak üzere saçılma genliği $f(\theta)$ ise, yalnızca ilgili atomların saçılmadan önceki ve sonraki momentum doğrultuları arasındaki açı olan θ saçılma açısına bağlı olur. Büyük r değerleri için dalga fonksiyonu

$$\psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.10)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumun enerjisi ise

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (3.11)$$

ile verilir. Çok düşük enerjiler için s -dalga saçılmasının ele alınması gerekir. Bu limitte $f(\theta)$ saçılma genliği, $-a$ sabit değerine yaklaşarak dalga fonksiyonu aşağıdaki hali alır:

$$\psi = 1 - \frac{a}{r} \quad (3.12)$$

Denklem (3.12)'deki a sabiti, “saçılma uzunluğu” olarak adlandırılır ve asimptotik dalga fonksiyonunun, r eksenine ile kesişimini ifade eder.

Saçılma uzunluğu ve faz kaymaları arasındaki ilişki, saçılma dik kesitinin incelenmesinde önemli bir yere sahiptir. Her bir katı açı başına dik kesit olarak tanımlanan diferansiyel dik kesit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (3.13)$$

ile verilir. θ ile $\theta + d\theta$ açıları arasındaki saçılma için katı açı elemanı $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ biçimindedir. Potansiyel, küresel olarak simetrik olduğu için Schrödinger denkleminin çözümü, gelen parçacığın doğrultusunda aksenal simetriye sahiptir.

Böylece ilgili hareketin dalga fonksiyonu, $P_l(\cos\theta)$ Legendre Polinomları cinsinden yazılabilir:

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r) \quad (3.14)$$

R_{kl} radyal dalga fonksiyonu

$$R_{kl}''(r) + \frac{2}{r} R_{kl}'(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m_r}{\hbar^2} U(r) \right] R_{kl}(r) = 0 \quad (3.15)$$

denklemini sağlar [12]. $r \rightarrow \infty$ için δ_1 faz kayması terimlerinde radyal dalga fonksiyonu

$$R_{kl}(r) \cong \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_1) \quad (3.16)$$

biçimindedir.

(3.14) ve (3.16) denklemleri (3.10) eşitliği ile karşılaştırıldığında ve $\exp(ikz)$ düzlem dalgası Legendre polinomlarıyla genişletildiğinde, $A_l = i^l (2l+1)e^{i\delta_l}$ ve

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta) \quad (3.17)$$

bulunur. Toplam saçılma dik kesiti, dik diferansiyel kesitin bütün katı açısı üzerinden integralinin hesaplanmasıyla elde edilir:

$$\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) |f(\theta)|^2 \quad (3.18)$$

Legendre polinomlarının ortogonal olduğu da hatırlanarak, (3.16) eşitliğinin de kullanılmasıyla, faz kayması terimlerinde toplam dik kesit

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (3.19)$$

ile verilir. Sonlu menzile sahip potansiyellerdeki faz kayması, küçük k değerleri için k^{2l+1} ile değişir. $1/r^6$ ve $1/r^7$ biçiminde davranan potansiyeller için tüm faz kaymaları, k sıfıra yaklaştıkça küçülür. Böylelikle saçılma dik kesiti, $l=0$ (s -dalga saçılması) tarafından bastırılır ve bu duruma uyan saçılma genliği $f = \delta_0/k$ biçiminde elde edilir.

Büyük mesafeler için c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere, (3.16)'daki asimptotik düşük-enerji çözümünün $l=0$ bileşeni yazıldığında

$$R_0 \cong c_1 \frac{\sin kr}{kr} + c_2 \frac{\cos kr}{r} \quad (3.20)$$

bulunur.

$k \rightarrow 0$ için faz kayması ise

$$\delta_0 = \frac{kc_2}{c_1} \quad (3.21)$$

ile verilir. $k \rightarrow 0$ için dalga fonksiyonu terimlerinde saçılma uzunluğu tanımından yararlanılarak

$$\delta_0 = -ka \quad (3.22)$$

elde edilir. Burada a , (3.20)'deki asimptotik çözüme ait sabitler tarafından aşağıda olduğu gibi belirlenir:

$$a = \left. \frac{c_2}{c_1} \right|_{k \rightarrow 0} \quad (3.23)$$

Yukarıdaki limitte toplam dik kesit, yalnızca a tarafından belirlenir [7]:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = 4\pi a^2 \quad (3.24)$$

Aynı dahili durumda bulunan özdeş parçacıkların saçılması incelendiğinde, parçacıklar bozon ise koordinatların karşılıklı değişimi altında dalga fonksiyonları simetriktir; fermiyon ise koordinatlarının karşılıklı değişimi altında dalga fonksiyonları antisimetriktir. İki parçacığın koordinatlarının değişimi $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ veya $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ve φ azimutal açı olmak üzere $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$ biçiminde gerçekleşen işaret değişimleri biçimindedir. Denklem (3.10)'a karşı gelen simetrik dalga fonksiyonu için

$$\psi = e^{ikz} \pm e^{-ikz} + [f(\theta) \pm f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.25)$$

bulunur. θ polar açısı tarafından belirlenen doğrultudaki parçacığın saçılması için

genlik $f(\theta) \pm f(\pi - \theta)$ biçimindedir ve pozitif işaret bozonlar için; negatif işaret ise fermiyonlar için olmak üzere diferansiyel dik kesit ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2 \quad (3.26)$$

Bu denklemin fiziksel anlamına bakılacak olursa, belirli bir doğrultuda saçılan parçacık için genlik, θ açısı boyunca saçılan parçacığın genliği ile $\pi - \theta$ açısı boyunca saçılan parçacığın genliğinin toplamı veya farkı şeklindedir. Toplam dik kesit, tüm farklı son durumlar üzerinden diferansiyel dik kesitin integre edilmesiyle elde edilir. Dalga fonksiyonunun simetrisinden dolayı θ ve φ açılarıyla belirlenen durum, $\pi - \theta$ ve $\varphi + \pi$ açıları için geçerli durum ile özdeştir ve bu sebeple iki kez hesaba katmayı önlemek amacıyla 4π katı açısının yarısı alınarak $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ arasında integrali hesaplanır. Böylece saçılma tamamen s -dalga kanalında ise toplam dik kesiti bozonlar için

$$\sigma = 8\pi a^2 \quad (3.27)$$

ile verilirken; fermiyonlar için ise sıfıra eşittir.

3.2.1. Etkin Etkileşimler ve Saçılma Uzunluğu

Atomlar arası etkileşimler, atomlar birbirine çok yakın olduğu zaman kuvvetlidir. Seyreltik gazlarda, atomlar arası etkileşim daha az olduğundan, bu durumun gerçekleşmesi olası değildir. Sistemin pek çok uzaysal konfigürasyonunda, çok-parçacık dalga fonksiyonu uzayda zamana bağlı olarak değişir; fakat atomlar birbirine yaklaştığında, hızlı uzaysal değişimler meydana gelebilir. Atomlar arası kısa menzile sahip karşılıklı etkileşimlerin detaylı bir biçimde hesaba katılmaması için “etkin etkileşim” içeriği öne sürülür. Etkin etkileşimle kısa dalga boyuna sahip etkileşimler yoluyla serbestlik dereceleri çiftlendiğinde, sistemin düşük frekanslı serbestlik derecesi hesaba katılır ve uzun

dalga boyları arasındaki etkileşim tanımlanır. Böylece kısa dalga boyuna sahip serbestlik derecelerinin birleştirildiği söylenebilir.

Bu düşünceyi daha somut bir hale getirebilmek için, momentum gösteriminde iki parçacığın saçılması ele alınır. Parçacıklar aynı m kütesine sahipse indirgenmiş kütle $m_r = m/2$ 'dir. Koordinat uzayında (3.9) ile verilen dalga fonksiyonuna Fourier dönüşümünün uygulanmasıyla momentum uzayındaki dalga fonksiyonu

$$\psi(\mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \psi_{sc}(\mathbf{k}') \quad (3.28)$$

biçiminde bulunur. Bu denklemde sağdaki son terim Fourier dönüşümünün uygulandığı saçılan dalgadır ve eşitlik Schrödinger denklemini sağlar:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} \right) \psi_{sc}(\mathbf{k}') = U(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}''} U(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \psi_{sc}(\mathbf{k}'') \quad (3.29)$$

Burada $U(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = U(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$ yalın atom-atom etkileşiminin Fourier dönüşümüdür ve $\hbar^2 k^2 / m (=E)$ ise enerji öz değerini ifade eder. δ , saçılan dalgada sadece giden dalganın olması koşulunu sağlayan sonsuz küçük sanal kısım olmak üzere, saçılan dalga

$$\psi_{sc}(\mathbf{k}') = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} + i\delta \right)^{-1} \left(U(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}''} U(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \psi_{sc}(\mathbf{k}'') \right) \quad (3.30)$$

ile verilir. Bu denklem aşağıdaki formda da yazılabilir:

$$\psi_{sc}(\mathbf{k}') = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{m} + i\delta \right)^{-1} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}; \hbar^2 k^2 / m) \quad (3.31)$$

Yukarıdaki eşitliğin son terimi “ T matrisini” ifade eder. T matrisi metodu, farklı boyuta sahip birbirinden bağımsız parçacıkların saçılmasını çok iyi ifade eder. Ayrıca bu matris ile yapılan hesaplamalar yüksek bir tutarlılığa sahiptir. Farklı yönelimlerdeki parçacıklarla ilgili hesaplamaların da yapılmasını sağlayan T matrisi yönteminin bir diğer özelliği de, saçılan parçacıkların simetrisini de hesaba katmasıdır. Burada saçılma matrisi T , aşağıdaki Lippmann-Schwinger denklemini de sağlar [13]:

$$T(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) = U(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}''} U(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \left(E - \frac{\hbar^2 k''^2}{m} + i\delta \right)^{-1} T(\mathbf{k}'', \mathbf{k}; E) \quad (3.32)$$

Geniş dağılım ve sıfır enerji ($E = k = 0$) için saçılan dalga, (3.31)'den hesaplanabilir. Fourier dönüşümü kullanılarak:

$$\int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}}{k'^2} = \frac{1}{4\pi r} \quad (3.33)$$

bulunur. Denklem (3.33)'ten

$$\psi_{sc}(r) = -\frac{mT(0,0;0)}{4\pi\hbar^2 r} \quad (3.34)$$

elde edilir. Fourier dönüşümünde k' , $1/r$ mertebesinde olduğundan, T matrisindeki değeri sıfırdır. Buradaki ifade, sıfır enerji durumunda saçılma matrisini ve saçılma uzunluğunu gösteren (3.12) numaralı denklemdeki $\psi = 1 - 1/a$ ifadesiyle de desteklenebilir. Bu durumda

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} T(0,0;0) \quad (3.35)$$

veya

$$T(0,0;0) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (3.36)$$

yazılabilir. Genel olarak saçılma genliği ve T matrisi

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E = \hbar^2 k^2 / m) \quad (3.37)$$

biçiminde ilişkilendirilebilir [5,13-16].

3.3. Farklı Dahili Durumlar Arası Geçişler

Bugüne dek atom-atom etkileşiminin incelendiği çalışmaların çoğunda, nükleer ve elektrik spinden kaynaklanan atomların kendilerine ait olan serbestlik dereceleri ihmal edilmiştir. Taban durumundaki bir alkali atomu için elektronik spin $1/2$ 'dir ve toplam nükleer spin durumları sayısı, I nükleer spin olmak üzere $2I + 1$ ile verilir. α ve β indisleri kullanılarak gösterilen taban durumundaki iki alkali atomun toplam ince yapı durumları sayısı $[2(2I + 1)]^2$ 'dir. $|\alpha\beta\rangle$ ince yapı durumunda bulunan iki atom, atom-atom etkileşimleri tarafından $|\alpha'\beta'\rangle$ ince yapı durumuna saçılmasıyla meydana gelen saçılma, bir çoklu-kanal problemidir.

Atomlar arasında etkileşim yokken iki atoma ait Hamiltonyen, kütle merkezi hareketinin kinetik enerjisi, ilgili hareketin kinetik enerjisi ile ince yapı ve Zeeman enerjilerinden meydana gelir. Momentum korunduğundan, tek-kanal probleminde olduğu gibi kütle-merkezi hareketi de basittir. H_0 kinetik enerji operatörünü, \hat{p}^2 momentumu, H_{spin} ise 1 ve 2 numaralı atomların Hamiltonyeni olmak üzere, ilgili hareketin Hamiltonyeni H_{rel} ,

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + H_{spin}(1) + H_{spin}(2) \quad (3.38)$$

den yararlanarak

$$H_{rel} = H_o + U \quad (3.39)$$

ile verilir. Burada U , atom-atom etkileşimine ait potansiyeldir. H_o 'ın öz durumları, $\hbar k$ ilgili momentum olmak üzere $|\alpha\beta, k\rangle$ ile gösterilebilir. Spin Hamiltonyeninin öz durumları

$$H_{spin}|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\alpha\rangle \quad (3.40)$$

tarafından verilebiliyorsa, H_o 'ın öz durumlarının enerjileri aşağıdaki gibidir:

$$E_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) = \frac{\hbar^2 k_{\alpha\beta}^2}{2m_r} + \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \quad (3.41)$$

Saçılma genliği (3.10)'un izinli olası seviyeler için genelleştirilmesiyle elde edilebilir. “Giriş kanalı” $\alpha\beta$ bileşenlerinde ve $\hbar \mathbf{k}_{\alpha\beta}$, gelen durumun ilgili momentumu olmak üzere, (3.10)'a karşı gelen dalga fonksiyonunun asimptotik formu

$$\psi = e^{i\mathbf{k}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}} |\alpha\beta\rangle + \sum_{\alpha'\beta'} f_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}) \frac{e^{i\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'} \cdot \mathbf{r}}}{r} |\alpha'\beta'\rangle \quad (3.42)$$

biçimindedir. Saçılan dalga, “çıkış kanalı” olarak adlandırılan $\alpha'\beta'$ şeklinde farklı olası durum bileşenlerine sahiptir.

Giriş ve çıkış kanalları farklı olduğunda, bunların ince yapı ve Zeeman enerjilerinin de genellikle farklı olacağına dikkat edilmelidir. Böylece $\alpha'\beta'$ çıkış kanalındaki $\hbar \mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}$ ilgili momentum değeri, giriş kanalındaki değerinden farklı olur. İlgili iki momentum değeri, $E = E_{\alpha\beta}(k_{\alpha\beta}) = E_{\alpha'\beta'}(k'_{\alpha'\beta'})$ toplam enerjisinin korunması şartıyla ilişkilendirilebilir ve böylece ilgili hareket için dalga sayısındaki koşul aşağıdaki ifade ile verilir:

$$\frac{\hbar^2 k_{\alpha'\beta'}^2}{2m_r} = \frac{\hbar^2 k_{\alpha\beta}^2}{2m_r} + \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\beta'} \quad (3.43)$$

$k_{\alpha'\beta'}^2 \leq 0$ ise kanalın kapalı olduğu söylenir, çünkü birbirinden çok uzakta ve hareketsiz olan atom çiftlerinin enerjileri yetersizdir. Böylece bu duruma karşı gelen terim toplam içinde yer almaz. Bu durumu ifade etmenin diğer bir yolu da (3.38)'de verilen ilgili hareketin Hamiltonyeninin, $E_{th}(\alpha'\beta') = \epsilon_{\alpha'} + \epsilon_{\beta'}$ ile verilen “eşik enerjisinden” daha küçük olmasıdır.

3.3.1. Etkileşimin Merkez Bölgesi

Süreçlerin oranlarını öngörebilmek için atomlar arası etkileşimlerin temel özelliklerine ihtiyaç vardır. Buradaki en büyük katkı, atomların dağılımına ve elektronik spin durumuna dayanan U^c merkez bölgesinden gelir. Alkali atomları ve hidrojen için elektronik spin 1/2'dir. Bu sebeple atom çiftinin elektronik spin durumu singlet veya triplettir. Böylelikle etkileşim $\vec{\mathbf{S}}_1$ ve $\vec{\mathbf{S}}_2$ elektron spin operatörleri ile ifade edilebilir. $\vec{\mathbf{S}}_1 \cdot \vec{\mathbf{S}}_2$ skaler çarpımının öz değeri triplet seviyeler için 1/4; singlet seviyeler için ise -3/4'tür. $\mathcal{P}_0 = 1/4 - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ ve $\mathcal{P}_1 = -3/4 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ iki-elektronun singlet ve triplet seviyeleri için izdüşüm operatörleridir ve burada etkileşim ifadesi:

$$U^c = U_s P_0 + U_t P_1 = \frac{U_s + 3U_t}{4} + (U_t - U_s) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \quad (3.44)$$

ile verilir. Burada geniş atomlar arası dağılımlarda, singlet ve triplet potansiyeller, Van der Waals etkileşimi tarafından bastırılır. Denklem (3.44), koordinat uzayındaki rotasyonlar altında sabit olduğundan, orbital açısal momentum korunur. Ancak örneğin, bu etkileşim ile aşağıdan yukarıya veya yukarıdan aşağıya doğru olmak üzere atom spinleri değişebilir, çünkü spin uzayında rotasyonlar sabittir ve elektronik spin açısal momentumu korunur.

3.3.2. Manyetik Dipol-Dipol Etkileşimi

Etkileşimin merkez bölgesi için bazı etkileşimler izinli değildir ve bu koşullarda elektron spinleri arasındaki manyetik dipol-dipol etkileşimleri önemli olabilir. Bu durum, elektrik dipol-dipol etkileşimleri formuna benzerdir:

$$U_{md} = \frac{\mu_0(2\mu_B)^2}{4\pi r^3} [\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - 3(\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] \quad (3.45)$$

Bu denklem nükleer spinlerden bağımsız olmakla birlikte, spin ve koordinat uzayındaki eş zamanlı rotasyonlar altında invaryanttır. Bu sebeple toplam açılal momentum korunur; fakat ayrı ayrı orbital açılal momentumları ve elektronik spin açılal momentumları korunmaz. Hem koordinat hem de spin uzayında etkileşim, $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ küresel harmonik olmak üzere, rankı 2 olan küresel tensörler şekline dönüştürülebilir:

$$U_{md} = -\left(\frac{24}{5\pi}\right)^{1/2} \frac{\mu_0\mu_B^2}{r^3} \sum_{\mu=-2}^2 Y_{2,\mu}^*(\hat{\mathbf{r}})\Sigma_{2,\mu} \quad (3.46)$$

Burada $\Sigma_{2,\mu}$ ise rankı 2 olan iki spin operatöründen oluşan küresel tensördür ve bileşenleri:

$$\Sigma_{2,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}(S_{1z}S_{2z} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 / 3), \quad (3.47)$$

$$\Sigma_{2,\pm 1} = \pm \frac{1}{2}(S_{1z}S_{2\pm} + S_{1\pm}S_{2z}), \quad (3.48)$$

$$\Sigma_{2,\pm 2} = -\frac{1}{2}S_{1\pm}S_{2\pm} \quad (3.49)$$

biçiminde verilir.

Bu etkileşim orbital açısal momentum kuantum sayısı l 'nin -2,0 veya +2 şeklinde değişmesine neden olabilir. s -dalga seviyesindeki gelen iki atom, açısal momentumu elektronik spinlerden alınmak üzere d -dalga seviyesine saçılabilir. Tipik bir dipol-dipol etkileşimi matrisine ait sıfırlanmayan matris elemanları, spin değişimleri için kabaca 1 veya 2 merteye daha azdır ve $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ terimlerini içerir [5,11].

3.3.3. Düşük Enerjili Çarpışmalar

Saçılma genliği, aslında tek kanal için yapılan çözüme benzer bir yöntemle Schrödinger dalga denkleminin çözülmesiyle bulunur. Ayrıca, $|lm\alpha\beta\rangle$ formundaki açısal momentum öz durumları temelinde de çalışmak uygundur. l kuantum sayısı, özellikle atomların ilgili hareketlerinden ileri gelen toplam orbital momentumu; m de eksenler üzerindeki izdüşümlerini belirler. $\alpha\beta$, iki atomun elektronik ve nükleer spin durumlarını gösteren kanal olmak üzere, tek-kanal problemindeki kısmi dalga açılımına karşı gelen temellere dayanarak, düşük enerjili çarpışmaların ifade edilebilmesi için, $\alpha\beta$ kanalının da ifadeye eklenmesi gerekir. Elde edilen sonuç l , m , α ve β kuantum sayıları tarafından belirlenen farklı kanallar için, çiftlenmiş ikinci mertebeden diferansiyel denklem setleridir. Bu türden bir hesaplamadan ortaya çıkan düşük enerjili çarpışmaların görüntüsü, köşegenleştirilmiş ince yapı ve Zeeman terimleriyle elde edilen ve gelen her iki atomun da başlangıçta tek-atom durumunda olması şeklindedir. Kısa bir an için dipol-dipol etkileşimini ihmal edilirse, geniş dağılımlardaki etkileşim, farklı ince yapı durumlarının karışmadığı Van der Waals terimi tarafından bastırılır; ancak küçük dağılımlar için etkileşimin merkez bölgesi, singlet ve triplet elektronik spin durumları için farklıdır.

Düşük enerjili saçılma verisini özetlemek için en uygun yol, ince yapı yarılmaları ve dipol-dipol etkileşimi ihmal edilerek merkez potansiyelinin singlet bölümü için a_s , triplet bölümü için a_t hayali saçılma uzunlukları kullanılmasıdır. Etkileşimin uzun menzilli kısmı iyi bir biçimde karakterize edildiği için, bu niceliklerden hareketle keyfi ince yapı kombinasyonları için saçılma uzunluğu ve inelastik saçılma oranlarının hesaplanması mümkündür.

Eğer her iki atomun nükleer ve elektronik spinleri manyetik alan doğrultusunda (çift polarize), $F = F_{\max} = I + 1/2$ ve $m_F = \pm F_{\max}$ biçimindeyse, elektron spinleri her ikisi için de yukarı veya aşağı doğrudur. Diğer ince yapı durumundaki atom çiftleri için elektronik spin durumu, singlet ve triplet seviyelerin süperpozisyonudur. Böylece etkileşimin hem singlet hem de triplet bölümleri, farklı kanalları kaynaştıracak biçimde önemli birer role sahiptir.

Kanal çiftlenimlerinin iki etkisi vardır: İlki, atomların farklı manyetik alt seviyeler arasında saçılabilmesidir, çünkü tuzak potansiyeli manyetik alt duruma bağlıdır ve bu da genellikle tuzakta atom kayıplarına neden olur. Diğeri ise, elastik saçılma genliği ve etkin etkileşimin, kanallar arasındaki çiftlenimden yararlanılarak ayarlanabilmesidir.

3.3.4. Elastik Olmayan Süreçler

Süreçlere ait oranlar, saçılma genliği terimlerinde hesaplanabilir. Diferansiyel dik kesit, final seviyesindeki katı açılı başına akımın başlangıç seviyesindeki akıya bölünmesidir. Denklem (3.42)'deki dalga fonksiyonuyla giriş kanalındaki akı $v_{\alpha\beta} = \hbar k_{\alpha\beta} / m_r$ 'dir ve birim katı açılı başına çıkış kanalındaki akım

$|f_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha'\beta'})|^2 v'_{\alpha'\beta'}$ biçimindedir. Diferansiyel dik kesit böylece

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}}{d\Omega} = |f_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha'\beta'})|^2 \frac{v'_{\alpha'\beta'}}{v_{\alpha\beta}} = |f_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\mathbf{k}_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha'\beta'})|^2 \frac{k'_{\alpha'\beta'}}{k_{\alpha\beta}} \quad (3.50)$$

olur. Burada V hacmi içinde α ve β seviyelerinde bulunan iki atom, $\kappa_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} / V$ tarafından α' ve β' seviyelerine saçılırlar.

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} &= v_{\alpha\beta} \int d\Omega \frac{d\sigma_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}}{d\Omega} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} N_{\alpha\beta}(E) \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\langle \alpha'\beta' | T(\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}, \mathbf{k}_{\alpha\beta}; E) | \alpha\beta \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Önceki denklemde

$$N_{\alpha'\beta'}(E) = \frac{m_r^2 v'_{\alpha'\beta'}}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (3.52)$$

birim hacim ve enerjideki, ilgili harekete ait son durum yoğunluğudur. Tek parçacık için (3.52) ile (2.5) denklemleri, atom kütlesi ile indirgenmiş kütle ve parçacık momentumu ile ilgili harekete ait momentum ifadesi olan $m_r v'_{\alpha'\beta'}$ 'nin yer değiştirmesi şartıyla birbirine eşittir. Son seviyedeki ilgili hız aşağıdaki gibidir:

$$v'_{\alpha'\beta'} = \frac{\hbar k'_{\alpha'\beta'}}{m_r} = \left[\frac{2(E - \epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\beta'})}{m_r} \right]^{1/2} \quad (3.53)$$

Kuantumsal dejenereliğin ihmal edilebileceği kadar yüksek olan sıcaklıklarda, sürecin toplam oranı, α ve β dahili durumlarındaki atomların dalga fonksiyonuyla, (3.51)'in çarpılmasıyla elde edilir ve ardından parçacıkların momentumları üzerinden integrali hesaplanır. Bu durum, atom yoğunluklarının değişim oranı için aşağıdaki denklemleri oluşturur:

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = \frac{dn_{\beta}}{dt} = -\frac{dn'_{\alpha}}{dt} = -\frac{dn'_{\beta}}{dt} = -K_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} n_{\alpha} n_{\beta} \quad (3.54)$$

Dejenereliğin etkileri önemli olduğunda istatistiksel faktörler, son seviyelerinde bozonlar için uyarmalı emisyonu ve fermiyonlar için Pauli engelini kapsamalıdır.

Oran sabiti K sıcaklığa bağlıdır ve

$$K_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \overline{\kappa_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}} = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|\langle \alpha'\beta' | T | \alpha\beta \rangle|^2} N_{\alpha'\beta'}(E) = \overline{\sigma_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(E) v_{\alpha\beta}} \quad (3.55)$$

ile ifade edilir. Buradaki sabitler, hacmin zamana bölünmesiyle oluşturulan boyutlara sahiptir ve bu süreç tarafından ortadan kaybolan α seviyesindeki atom için ömür $\tau_{\alpha} = 1 / K_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} n_{\beta}$ ile verilir.

3.3.4.1. Spin değişim süreçleri

Etkileşimin merkez bölgesi üzerinden süreçlerin oranını öngörmek için etkileşim, (3.44) formunda yazılabilir. Basitleştirilmiş çarpışma görüntüsü elde edilmek istenirse, saçılma süreci boyunca ince yapı ve manyetik dipol-dipol etkileşimleri ihmal edilerek spin serbestlik dereceleri için etkin etkileşim, genel değişim etkileşimi formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_{ex}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2(a_t - a_s)}{m} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \delta(\mathbf{r}) \quad (3.56)$$

Gelen atom için sıfır kinetik enerjili oran sabiti (3.55) numaralı denklemden

$$K_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = 4\pi(a_t - a_s)^2 v_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} |\langle \alpha'\beta' | \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | \alpha\beta \rangle|^2 \quad (3.57)$$

olur. Hidrojen için saçılma uzunlukları farkı a_0 mertebesindedir ve bu nedenle daha yukarıdaki ince yapı seviyesinde bulunan atomlar için oran sabiti, spin matris elemanının mertebesi birim olmak üzere $10^{-13} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ 'dir. Alkali atomları için karşı gelen değerler, geniş saçılma uzunluklarından dolayı $10^{-11} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ 'dir. Genel olarak deneylerde elde edilen yoğunluklar 10^{13}cm^3 veya daha fazla olduğundan, oran sabiti için tahminler, atomların saniyelik zaman dilimlerinde değişim çarpışmaları tarafından kaybedileceği biçimindedir. Düşük manyetik alan içinde, daha aşağıdaki ince yapıda bulunan çok katlı tayf çizgileri atomları için bu oran sabiti, çıkan atomlara uygun olan faz uzayının daralması nedeniyle genelde daha düşüktür.

Spin-değişim süreci oranının $(a_t - a_s)^2$ ile değişiyor olması gerçeği, tuzaktaki atomların ömürleriyle ilgili verilerden yararlanılarak, saçılma uzunluğu hakkında bilgi edinilebilmesini mümkün kılar.

3.3.4.2. Dipolar süreçler

Açısal momentum seçim kuralları gereği, bazı geçişler etkileşimin merkez bölgesinde gerçekleşemez. Örneğin, toplam açısal momentumla aynı yönelime sahip başka bir durum olmadığından, çift polarize $|F = I + 1/2, m_F = F\rangle$ durumunda olan iki atomun ikisi de başka bir kanala saçılmaz. Düşük manyetik alan içinde iki atomun da maksimum gerilmiş olan $|F = I - 1/2, m_F = -F\rangle$ seviyesinde olması durumunda, kısmi elektron spin tripleti ve singleti vardır. Çünkü etkileşimin merkez bölgesi, orijinal olanının haricinde bir matris elemanına sahiptir. Ancak bozonik alkali izotoplarında olduğu gibi nükleer manyetik moment pozitif ise, diğer seviyeler $F = I + 1/2$ 'ye sahiptir ve böylece ince yapı yarımla enerjisi kadar orijinal seviyenin üzerinde yer alırlar. Bu yüzden, ince yapı enerjisinden daha düşük değerdeki kT termal enerjisindeki sıcaklıklar için yukarı ince yapı seviyesine geçişler önlenir. Çift polarize seviyeleri veya maksimum gergin durumları içeren atom bulutları, manyetik dipol-dipol etkileşimleri ile bozunabilir, fakat dipolar süreçler için oran, genel olarak spin değişim süreçlerindeki kadar 10^{-2} - 10^{-4} kat daha fazladır.

Tüm atomların çift katlı polarize olduğu veya $F = I - 1/2$ olan maksimum gergin seviyedeki polarize gazlar, manyetik dipol-dipol etkileşimleri yoluyla bozunabilirler. Gelen atomların ilgili momentumları sıfır ise

$$K_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \frac{m^2}{4\pi\hbar^4} \overline{|\langle \alpha'\beta' | U_{md}(\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}, 0) | \alpha\beta \rangle|^2} \nu'_{\alpha'\beta'} \quad (3.58)$$

dir. Başlangıç seviyesi için sıfır momentuma sahip dalga fonksiyonu birdir ve final seviyesi için ise $\exp(i\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'} \cdot \mathbf{r})$ 'dir. Böylece manyetik dipol-dipol etkileşiminin matris elemanı

$$U_{md}(\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}, 0) = \int d\mathbf{r} U_{md}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.59)$$

ile verilir ve spin değişkenleri cinsinden operatördür.

j_l küresel Bessel fonksiyonu ve $\hat{\mathbf{k}}$, \mathbf{k} doğrultusundaki birim vektör olmak üzere, küresel dalga terimleriyle düzlem dalga aşağıdaki gibidir:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.60)$$

Manyetik dipol-dipol etkileşimi için (3.45)'teki ifade, sadece orbital açısal momentumu $l = 2$ olan katkılara karşı gelir ve matris elemanı

$$U_{md}(\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}, 0) = \left(\frac{24}{5\pi}\right)^{1/2} \mu_0 \mu_B^2 \left(\int d\mathbf{r} \frac{j_2(k'_{\alpha'\beta'} r)}{r^3} \right) \sum_{\mu} Y_{2\mu}^*(\hat{\mathbf{k}}'_{\alpha'\beta'}) \Sigma_{2,\mu} \quad (3.61)$$

ifadesine indirgenir. Küresel Bessel fonksiyonunu içeren integral

$$j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} \quad (3.62)$$

ifadesinin kullanılmasıyla kolaylıkla çözülebilir ve değeri $4\pi/3$ 'tür.[12,13,15]

$r_e = e_0^2 / m_e c^2 = \alpha_{fs}^2 a_0$ klasik elektron yarıçapı ve $\mu_0 \mu_B^2 = \pi \hbar^2 r_e / m_e$ olmak üzere matris elemanı

$$U_{md}(\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}, 0) = 4\pi^2 \left(\frac{8}{15\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2 r_e}{m_e} \sum_{\mu} Y_{2\mu}^*(\hat{\mathbf{k}}'_{\alpha'\beta'}) \Sigma_{2,\mu} \quad (3.63)$$

biçimindedir.

Burada elde edilen sonucun, final seviyesinin ilgili momentum değerinden bağımsız olması oldukça çarpıcıdır. Bunun sebebi, geniş aralıklardaki dipol-dipol etkileşiminin yavaş azalmasıdır. Ancak kısa menzilli etkileşimler için matris elemanı k' 'ne bağlı manyetik dipol-dipol etkileşimlerindekiyle aynı tensör yapısına sahiptir ve k'^2 ile orantılıdır. Dipol-dipol etkileşiminin matris elemanı, ilgili momentumun değeri küçük iken sabit kalır, çünkü integrale temel katkı,

Bessel fonksiyonunun ilk (ve en büyük) maksimumunun geldiği, $\lambda \sim 1/k'$ mertebesindeki dağılımlardan gelir. Spin değişim süreci için ise matris elemanı $4\pi\hbar^2(a_t - a_s)/m$ mertebesinde ve bu sebeple, spin operatörlerinin matris elemanları arasındaki farklar ihmal edildiğinde spin değişimi için dipol matris elemanı değerinin oranı;

$$\left| \frac{U_{md}}{U_{ex}} \right| \sim A \frac{m_p}{m_e} \alpha_{fs}^2 \frac{a_0}{|a_t - a_s|} \approx \frac{A}{10} \frac{a_0}{|a_t - a_s|} \quad (3.64)$$

dir. Hidrojen için bu oran 10^{-1} iken, alkali atomları için saçılma uzunluğu $100a_0$ olduğundan alkaliler için 10^{-1} ve 10^{-2} mertebesinde dir.

Dipolar geçişler için oran sabiti, küresel harmoniklerin ortogonalliği nedeniyle, (3.61) numaralı eşitliğin (3.51)'de yazılmasıyla elde edilir ve ilgili momentumu sıfır olan gelen parçacıklar için

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} &= \frac{m^2 v_{\alpha'\beta'}}{4\pi\hbar^4} \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\langle \alpha'\beta' | U_{md}(\mathbf{k}'_{\alpha'\beta'}, 0) | \alpha\beta \rangle|^2 \\ &= \frac{32\pi^2}{15} \left(\frac{mr_e}{m_e} \right)^2 v_{\alpha'\beta'} \sum_{\mu} |\langle \alpha'\beta' | \Sigma_{2,\mu} | \alpha\beta \rangle|^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

bulunur.

Deneysel olarak en fazla ilgi çeken durumlar; çift polarize seviyeler ve pozitif nükleer manyetik momente sahip atomlar ile maksimum gergin düşük ince yapı seviyeleridir, çünkü bu seviyeler hızlı spin değişim süreçleri boyunca bozunmazlar. Hidrojen için detaylı hesaplamalardan, dipolar oran sabiti değerinin $10^{-15} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ mertebesinde veya özel geçiş ve manyetik alan mukavemetinden dolayı daha az olabileceği görülmüştür. Alkali atomları için tahmin edilen değerler, çift polarize durumlarla mukayese edilebilir. Dipolar oranlar, genel oranlarından biraz daha fazla veya az olabilir, çünkü faz uzayı kısıtlamalarından ötürü kanallar arası rezonansları verirler. Burada bahsedilen ikinci durum, başlangıçta düşük ince yapı çok katlı tayf çizgilerinde bulunan atomlar ve

maksimum gergin seviye için önemlidir. Faz uzayı, (3.65)'teki $v'_{\alpha\beta}$ faktörü tarafından yansıtılır. Bu durumda, final seviyesindeki ilgili hız, iki çift polarize atom arasındaki çarpışmalar için ince yapı etkileşiminden dolayı değil; yalnızca Zeeman yarılmaları yüzündendir. Küçük alanlar için $v'_{\alpha\beta} \sim B^{1/2}$ olduğundan, dipol oranı düşük manyetik alan limitinde ortadan kalkar ve sonuç olarak bu seviyeler, deneysel çalışmalar için oldukça çekici bir hal alır. Alkali atomlarının kullanıldığı deneylerde dipolar süreçler, yapı ömrünü genellikle kısıtlamaz. Ancak hidrojen için elde edilen yoğunluklar o kadar yüksektir ki, dipolar süreçlere ait karakteristik zaman bir saniye mertebesindedir ve bu süreç baskın olan kayıp mekanizmasını oluşturmaktadır. Nükleer spini 1/2 olan hidrojen atomu için yalnızca $F = 0$ biçiminde yalnızca bir tane alçak ince yapı durumu vardır ve bu “yüksek alan güdümü (high-field seekers)” olarak adlandırılır. Sonuç olarak hidrojen atomu için manyetik tuzaklardaki dipolar kayıplar, daha düşük manyetik alan multiplerindeki seviyelerde çalışılarak engellenilemez.

Rb ve Cs gibi daha ağır alkalilerde relativistik etkiler önemlidir ve kayıplar için bir başka mekanizmayı daha gerektirir. Bu mekanizma, ikinci mertebeden olan ve manyetik dipol-dipol etkileşimi yoluyla gerçekleşen geçişleri arttıran spin-yörünge etkileşimidir. Etkileşimin işareti ise dipolar etkileşimin tersidir. [5]

3.3.4.3. Üç-parçacık süreci

Üç-parçacık rekombinasyonu, tuzaklarda elde edilen yoğunluklar üzerine sıkı kısıtlamalar getirir. Bu sürecin oranı, L oran sabiti ve n atomik türlerin yoğunluğu olmak üzere

$$\frac{dn}{dt} = -Ln^3 \quad (3.66)$$

ile verilir. Oran, yoğunluğun küpü ile orantılıdır, çünkü söz konusu süreç üç-parçacık içindir ve üç atomun birbirine yakın olma olasılığı da n^3 ile değişir. Atomun r_0^3 hacminde bulunma olasılığı nr_0^3 mertebesindedir ve bu sebeple iki-parçacık süreciyle kıyaslandığında üç-parçacık süreci oranı, iki süreç arasındaki

faz uzayları arasındaki farklar ihmal edildiğinde kabaca aynı faktör tarafından verilir. Böylece üç-parçacık süreci için oran sabiti r_0^3 mertebesindedir, yani etkileşimin merkez bölgesi boyunca tüm süreçlerin gerçekleşmesine izin verildiğinde $L \sim Kr_0^3$ şeklindedir. Alkaliler için $r_0 \sim 10^2 a$ ve $K \sim 10^{-11} \text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$ olduğundan üç-parçacık oran sabitinin kabaca $10^{-30} \text{cm}^6 \text{s}^{-1}$ mertebesinde olduğu öngörülebilir. Hidrojen için ise bu oran, zayıf atomlar arası potansiyel nedeniyle çok daha küçüktür, yani $10^{-38} \text{cm}^6 \text{s}^{-1}$ mertebesindedir. Sonuç olarak üç-parçacık süreci, alkali atomlarıyla ilgili deneylerde önemli olabilir; fakat hidrojen için önemli değildir. Üç-parçacık etkileşimi oranları, iki-parçacıkta olduğu gibi, süreçte yer alan atomların özelliklerinden etkilenir ve yoğunlaşma oluşmaya başladıkça, üç-parçacık sürecine ait oran azalır [17].

3.3.2. Elastik Saçılma ve Feshbach Rezonansı

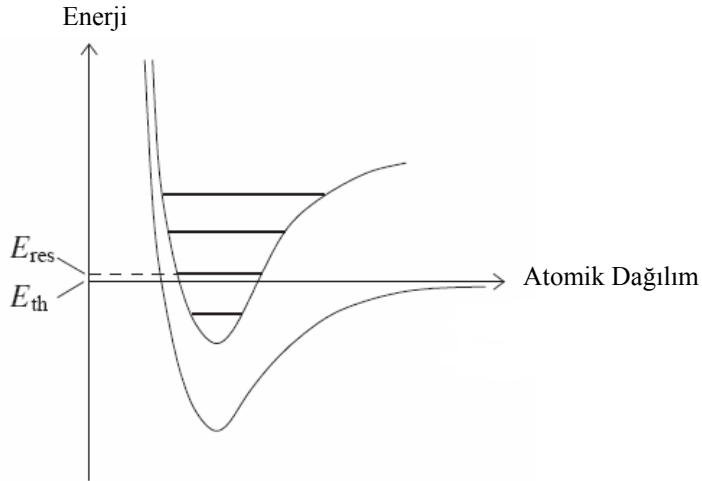
Başka açık kanallar varken, saçılma genliğinin $k = 0$ için genellikle reel olmaması, tek kanal problemi ile karşılaştırıldığında önemli bir farklılıktır. Ancak bu etki, düşük sıcaklıklardaki alkali atomları için genel koşullar altında oldukça küçüktür ve iyi bir yaklaşım olarak elastik saçılma, tek-kanal teorisinde olduğu gibi reel saçılma uzunluğu terimlerinde tanımlanabilir. Diğer bir etki ise, bir kanaldaki elastik saçılmanın, kapalı olan ikinci kanaldaki düşük-enerji bağlı durumu varlığında çarpıcı bir biçimde ayarlanabilmesidir. “Feshbach rezonansı” olarak bilinen bu fenomen, ilk kez nükleer fizikte incelenmiştir. Bu rezonanslar, soğuk atomlara ait temel atomik fizik araştırmalarında önemli bir araçtır, çünkü bu rezonanslar, manyetik alan gibi bir dış parametrenin uygulanması vasıtasıyla, saçılma uzunluğunun ve diğer parametrelerin ayarlanmasını sağlar. Ayrıca, tuzaklanmış gazlarla ilgili deneylerde de uygulama alanları vardır.

Feshbach rezonansı, açık kanaldaki toplam enerjinin kapalı kanaldaki bağlı durum enerjisi ile eşleşmesi durumunda ortaya çıkar (Şekil(3.2)). Açık ve kapalı kanallar arasındaki birinci mertebeden çiftlenim ayarlı değildir, çünkü tanım gereği kapalı kanallarda sürekli durumlar söz konusu değildir. Ancak, açık kanaldaki iki parçacık, daha sonradan iki parçacığı açık kanallardan birinde

vermek üzere kapalı bir kanaldaki ortalama bir seviyeye saçılabilir. Bu türden ikinci mertbe süreçlerde, pertürbasyon teorisinden saçılma uzunluğuna

$$a \sim \frac{C}{E - E_{res}} \quad (3.67)$$

gibi bir katkı beklenir. Burada E açık kanaldaki parçacıkların enerjisi ve E_{res} ise kapalı kanallardaki seviyelerin enerjisidir. Sonuç olarak, giriş kanalındaki iki parçacığın enerjisi, kapalı kanaldaki bağlı durum enerjisine yakın olduğunda büyük bir etki söz konusu olacaktır. Enerji değerindeki kaymalar için ikinci-mertbe pertürbasyon teorisinden beklenildiği üzere kanallar arasındaki çiftlenim, saçılan parçacıkların enerjisi, bağlı durum enerjisinden büyük olduğunda itici etkileşimi artırırken; saçılan parçacıkların enerjisi bağlı durum enerjisinden düşük olduğunda ise çekici etkileşim söz konusudur. Açık kanaldaki gelen parçacık enerjisi, bağlı durum enerjisine yaklaştıkça saçılma üzerindeki etkileri artar. Seviyelere ait enerjiler, manyetik alan gibi dış parametrelere bağlı olduğu için, bu rezonanslar etkin etkileşimin ayarlanabilmesini mümkün kılar [18].



Şekil 3.2. Feshbach rezonansı oluşumunu sergileyen iki farklı kanal için şematik potansiyel enerji eğrisi. E_{th} giriş kanalı için eşik enerjisi ve E_{res} kapalı kanal seviyesinin enerjisi

3.3.5.1. Temel formalizm

P açık kanalları; Q kapalı kanalları tanımlayan uzaysal ve spin serbestlik derecelerini içeren iki alt uzay olsun. Durum vektörü olan $|\psi\rangle$, iki alt uzaydaki yönelimlerin toplamı olarak

$$\psi = |\psi_P\rangle + |\psi_Q\rangle \quad (3.68)$$

yazılabilir. $|\psi_P\rangle = \mathcal{P} |\psi\rangle$ ve $|\psi_Q\rangle = \mathcal{Q} |\psi\rangle$ şeklindedir. Burada \mathcal{P} ve \mathcal{Q} , iki alt uzay için yönelim operatörleridir ve $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = 1$ ve $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$ koşullarını sağlar.

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ Schrödinger denkleminin soldan \mathcal{P} ve \mathcal{Q} ile çarpılmasıyla, $H_{PP} = \mathcal{P} H \mathcal{P}$, $H_{QQ} = \mathcal{Q} H \mathcal{Q}$, $H_{PQ} = \mathcal{P} H \mathcal{Q}$ ve $H_{QP} = \mathcal{Q} H \mathcal{P}$ olmak üzere, iki alt uzay üzerinde durum vektörlerinin yönelimi için

$$(E - H_{PP})|\psi_P\rangle = H_{PQ}|\psi_Q\rangle \quad (3.69)$$

$$(E - H_{QQ})|\psi_Q\rangle = H_{QP}|\psi_P\rangle \quad (3.70)$$

çiftlenmiş denklemleri elde edilir. H_{PP} operatörü, \mathcal{P} alt uzayındaki Hamiltonyen; H_{QQ} operatörü ise \mathcal{Q} alt uzayındaki Hamiltonyendir. H_{PQ} ve H_{QP} iki alt uzaydaki çiftlenimi ifade eder. Denklem (3.70)'in formal çözümü

$$|\psi_Q\rangle = (E - H_{QQ} + i\delta)^{-1} H_{QP}|\psi_P\rangle \quad (3.71)$$

dir. Burada paydadaki pozitif sonsuz küçük imajiner kısım δ , saçılan dalga sadece giden terimlerden oluşsun diye eklenmiştir.

Denklem (3.71)'in, (3.71) numaralı ifadede yerine yazılmasıyla $|\psi_P\rangle$ için

$$(E - H_{PP} - H'_{PP})|\psi_P\rangle = 0 \quad (3.72)$$

elde edilir. Buradaki

$$H'_{PP} = H_{PQ}(E - H_{QQ} + i\delta)^{-1}H_{QP} \quad (3.73)$$

terimi Feshbach rezonansını tanımlayan terimdir. Bu terim, \mathcal{P} alt uzayından \mathcal{Q} alt uzayı boyunca geçişleri ve daha sonra tekrar \mathcal{P} alt uzayına, bu uzaydaki etkin etkileşimi ifade eder. Bu terim, ikinci mertebeden pertürbasyon teorisindeki enerji kaymasına benzer ve açık kanalda yerleşmemiş potansiyele karşı gelir. Etkileşim enerjiye bağlı olduğu için, zamana göre bir gecikme de söz konusudur.

Hamiltonyenin $H_{PP} + H_{QQ}$ şeklindeki diyagonal kısımlarını, iki atomun dağılımından ve etkileşim katkısından bağımsız olan H_0 terimlerine bölmek uygundur. Burada H_0 , ilgili hareketin kinetik enerjisi ile ince yapı ve Zeeman terimlerinin toplamıdır. U_1 , \mathcal{P} alt uzayındaki etkileşim terimi olmak üzere

$$H_{PP} = H_0 + U_1 \quad (3.74)$$

yazılabilir. Denklem (3.72), $U_2 = H'_{PP}$ olmak üzere açık kanalın alt uzayındaki toplam etkin atom-atom etkileşimi

$$U = U_1 + U_2 \quad (3.75)$$

ile tekrar yazılacak olursa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(E - H_0 - U)|\psi_P\rangle = 0 \quad (3.76)$$

3.4. Saçılma Uzunluğunun Belirlenmesi

Bu bölümde alkali atomlarının saçılma uzunluklarını belirlemede kullanılan metodlardan bahsedilecektir. Yapılan deneylerin çoğu saçılma uzunluğunun tam değerini vermese de, saçılma uzunluğunun hesaplanabileceği atom-atom etkileşimi hakkında bilgi vermektedir.

3.4.1. Saçılma Dik Kesitinin Belirlenmesi

Özdeş bozonlar için düşük enerjili elastik saçılma dik kesiti $8\pi a^2$ ile verilir ve bu nedenle elastik dik kesitin ölçüsü, saçılma uzunluğunun değerini verirken işaretini vermez. Bu tekniğin zorluğu, parçacık yoğunluğuyla ilgili bilgi gerektirmesidir.

3.4.2. Moleküler Spektrum

İki polarize atomun moleküler bağlı durumları arasındaki geçiş frekansları ölçülerek etkileşim potansiyeli hakkında bilgi edinilebilir. Ancak bu method, saçılma uzunluğunun belirlenmesi için önemli olan etkileşimin uzun menzilli kısmı için duyarlı değildir.

3.4.3. Photoassociative Spektrum

Bu metotta lazerle mikrok Kelvin mertebesindeki sıcaklıklara soğutulan atomlar, lazer alanı içinde çarpışırlar. Çarpışma boyunca başlangıçta serbest olan atom çiftleri, optik olarak moleküler bağlı durumlara uyarılırlar. Yayılan serbest durum termal enerjisi ihmal edilebilecek kadar küçük olduğundan bu süreç, iyi çözümlenmiş serbest-bağlı absorpsiyon spektrumunu verir ve uzun menzilli atomik etkileşimlerin analizinde de oldukça kullanışlı bir methoddur [19].

3.4.4. Alkali Atomları ve Hidrojen İçin Saçılma Uzunlukları

Bu bölümde hidrojen ve bazı alkali atomlarına ait saçılma uzunlukları bulunmaktadır. a_t ile triplet saçılma uzunluğu, a_s ile singlet saçılma uzunluğu ve a_{ms} ile de maksimum gergin düşük ince yapı durumu ($F = I - 1/2$, $m_F = -(I - 1/2)$) için saçılma uzunluğu ifade edilmiştir. Tüm saçılma uzunlukları atomik birimlerde verilmiştir. (1 a.b. = $a_0 = 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2 \approx 0,0529$ nm)

Hidrojen

$a_t = 1,2$ ve $a_s = 0,41$ 'dir [20,21].

Lityum

Photoassociative spektroskopi kullanılarak

^6Li izotopu için $a_s = 45,5 \pm 2,5$ ve $a_t = -2160 \pm 250$,

^7Li izotopu için $a_s = 33 \pm 2$ ve $a_t = -27,6 \pm 0,5$

bulunmuştur. ^7Li izotopu için triplet saçılma uzunluğunun negatif olması, yoğunlaşmanın birkaç bin atomdan fazla sayıdaki atom için oluşmasını engeller.

Sodyum

Photoassociative spektroskopiden yararlanılarak

$a_s = 19,1 \pm 2,1$

$a_t = 65,3 \pm 0,9$

$a_{ms} = 55,4 \pm 1,2$

elde edilmiştir [22].

Potasyum

Photoassociative spektroskopiden

^{39}K için $a_t = -17 \pm 25$, $a_s = 140_{-6}^{+3}$ ve $a_{ms} = -20_{-64}^{+42}$,

^{40}K için $a_t = 194_{-35}^{+114}$ ve $a_s = 105_{-3}^{+2}$,

^{41}K için $a_t = 65_{-8}^{+13}$, $a_s = 85 \pm 2$ ve $a_{ms} = 69_{-9}^{+14}$

sonuçlarına ulaşılmıştır [23,24].

Rubidyum

Photoassociative spektroskopi ve Feshbach rezonansı kullanılarak

$$^{85}\text{Rb} \text{ için } a_t = -369 \pm 16, a_s = 2400_{-350}^{+600} \text{ ve } a_{ms} = -450 \pm 140$$

bulunmuştur.

^{87}Rb için tüm saçılma uzunlukları birbirine yakındır [25,26]:

$$a_t = 106 \pm 4, a_s = 90 \pm 1 \text{ ve } a_{ms} = 103 \pm 5$$

4. YOĞUŞMUŞ DURUM TEORİSİ

Bu bölümde etkileşimler sırasında Bose-Einstein yoğuşmasının yapısı incelenecektir ve başlangıç noktası Gross-Pitaevski eşitliği olacaktır. Bu denklem, a saçılma uzunluğunun parçacıklar arası uzaklıktan daha küçük olduğu, uniform olmayan Bose gazının 0° K civarındaki sıcaklıklar için özelliklerini içermektedir.

4.1. Gross-Pitaevski Denklemi

Momentum ifadesinde, düşük enerjili iki parçacık arasındaki etkileşim $U_0 = 4\pi\hbar^2 a / m$ biçimindedir. Koordinat uzayında bu durum \mathbf{r} ve \mathbf{r}' iki parçacığın konumlarını ifade etmek üzere, $U_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ etkin etkileşimine karşı gelmektedir. Çok-parçacıklı durumların enerjisini incelemek için, Hartree veya ortalama-alan yaklaşımı seçilir ve dalga fonksiyonunun, tek-parçacık dalga fonksiyonlarının simetrik çarpımları olduğu kabul edilir. Tam yoğuşmanın olduğu durumda, tüm bozonlar aynı $\phi(\mathbf{r})$ tek-parçacık seviyesindedir ve bu nedenle N parçacıktan oluşan sistem için dalga fonksiyonu

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \quad (4.1)$$

ile verilir. Tek-parçacık dalga fonksiyonu $\phi(\mathbf{r}_i)$, her zamanki gibi normalize edilir:

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (4.2)$$

Buradaki dalga fonksiyonu, atomların birbirine yakın olmasından kaynaklanan karşılıklı etkileşimi içermez. Bu etkileşim, kısa dalga boyu serbestlik derecesinin etkilerini içeren $U_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ etkin potansiyelinin kullanılmasıyla hesaba katılır. Ortalama alan yaklaşımında, parçacıklar arası mesafeden daha kısa mesafelere karşı gelen serbestlik dereceleri arasındaki etkileşimler ise, açık bir şekilde hesaba

katılmaz. Bu nedenle dalga sayısı k_c 'nin limit değeri için sıfır kullanılır. Etkin etkileşim böylece U_0 'a eşittir. $V(\mathbf{r})$ dış potansiyel olmak üzere etkin Hamiltonyen,

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (4.3)$$

dir. Denklem (4.1)'deki seviyenin enerjisi ise (4.4)'teki gibidir:

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{(N-1)}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (4.4)$$

Hartree yaklaşımında, tüm atomlar dalga fonksiyonu ϕ ile gösterilen durumdadırlar. Doğru dalga fonksiyonunda, kısa atomik yerleşimlerden kaynaklanan karşılıklı etkileşimler sebebiyle atomların bir kısmı, daha hızlı uzaysal varyasyonların bulunduğu seviyelerdedir ve bu sebeple ϕ seviyesindeki toplam atom sayısı, N 'den daha azdır. Ancak, mikroskobik teoriden uniform Bose gazında etkileşimlerden ötürü yoğuşmadaki parçacık sayısının azalması, n parçacık yoğunluğu olmak üzere, $(na^3)^{1/2}$ mertebesindedir. Parçacık dağılımlarının bir ölçüsü olarak, parçacık başına ortalama hacme eşit olan küre hacminin yarıçapı r_s ise yoğunluk aşağıdaki gibi verilebilir:

$$n = \frac{1}{(4\pi/3)r_s^3} \quad (4.5)$$

Yoğuşmadaki azalma ise $(a/r_s)^{3/2}$ mertebesindedir ve bugüne dek yapılan deneylerde %1 veya daha az etkiye sahip olduğu için, karşılıklı etkileşimler sebebiyle oluşan bu katkının etkisi, pek çok durumda ihmal edilmiştir.

Uniform Bose gazı ele alındığında, V hacimli uniform sistemin taban durumundaki parçacığa ait dalga fonksiyonu ise $1/V^{1/2}$ mertebesindedir ve

parçacık çiftinin etkileşim enerjisi böylece U_0/V olur. Hepsinin aynı seviyede bulunduğu N bozondan oluşan sistemin enerjisi, bu niceliğin, bozon çifti oluşturabilmesine ait muhtemel yollarının sayısı olan $N(N-1)/2$ ile çarpımıdır. Bu yaklaşımda $n = N/V$ ve $N \gg 1$ olmak şartıyla enerji ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{N(N-1)}{2} U_0 \approx \frac{1}{2} V n^2 U_0 \quad (4.6)$$

Yoğuşmuş durumun dalga fonksiyonu ifadesi;

$$\psi(\mathbf{r}) = N^{1/2} \phi(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

dir. Parçacıkların yoğunluğunda $1/N$ 'li terimin ihmal edilmesiyle

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad (4.8)$$

bulunur ve sistemin enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (4.9)$$

ψ 'nin optimum formunu bulmak için, $\psi(\mathbf{r})$ ve kompleks konjügesi $\psi^*(\mathbf{r})$ 'nin bağımsız varyasyonlarına göre, toplam parçacık sayısı

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 \quad (4.10)$$

sabit olmak üzere (4.8)'deki enerji minimize edilir. Buradaki sınırlandırma, Lagrange çarpanları metodu ile elverişli bir biçimde uygulanabilir. ψ ve ψ^* varyasyonları keyfidir ve parçacık sayısının korunmasını sağlayan μ kimyasal potansiyeli Lagrange çarpanı olarak $\delta E - \mu \delta N = 0$ yazılabilir. Bu prosedür, sabit

μ için $E - \mu N$ niceliğinin minimize edilmesi durumuna eşittir. ψ^{*} 'a göre $E - \mu N$ varyasyonunun sıfıra eşitlenmesiyle

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + U_0|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

biçiminde zamandan bağımsız Gross-Pitaevski denkleminde ulaşılır. Denklem (4.11), birbirlerinden bağımsız bir şekilde Gross ve Pitaevski tarafından 1961 yılında türetilmiştir ve düşük sıcaklıklardaki uniform olmayan seyreltik Bose gazlarının araştırılmasında temel araçtır. Bu denklem, parçacıklar üzerine etkiyen potansiyel, V dış potansiyellerinin toplamı ve $U_0|\psi(\mathbf{r})|^2$ diğer bozonlar tarafından oluşturulan ortalama alanın hesaba katılmasıyla oluşturulan doğrusal olmayan terim olmak üzere, lineer olmayan Schrödinger denklemi formundadır. Burada öz değerin, lineer Schrödinger denkleminde olduğu gibi parçacık başına düşen enerji olmadığına, kimyasal potansiyel olduğuna dikkat edilmelidir. Aynı seviyede bulunan tüm parçacıklar için kimyasal potansiyel, parçacık başına düşen enerjidir; ancak etkileşen parçacıklar için bu durum söz konusu değildir. [3,4,27]

Uniform Bose gazı için (4.11)'deki Gross-Pitaevski denklemi:

$$\mu = U_0|\psi(\mathbf{r})|^2 = U_0n \quad (4.12)$$

dir. Denklem (4.6)'daki uniform seviyenin enerjisinden kimyasal potansiyelin hesaplandığında, $\mu = \partial E / \partial N$ termodinamik bağıntısından elde edilen sonuçla uyumlu olduğu görülür [5].

$$\psi_0(r,t) = \psi_0(r)e^{-i\mu t} \quad (4.13)$$

olmak üzere zamana bağlı Gross-Pitaevski denklemi:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r},t) + g|\psi_0(\mathbf{r},t)|^2 \right)\psi_0(\mathbf{r},t) \quad (4.14)$$

Gross-Pitaevski denkleminde bulunan g , s -dalga saçılma uzunluğu a teriminde çiftlenim sabitidir:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (4.15)$$

Denklem (4.14)'ün uygulanabilmesi için toplam atom sayısının yeteri kadar fazla olması; seyreltik olma koşulunun sağlanabilmesi için de sıcaklığın yeteri kadar düşük olması gerekmektedir. Ancak bu şekilde yoğunlaşmanın hem kuantumsal hem de termal tükenmesinin ihmal edilmesine olanak sağlanır. Gross-Pitaevski denkleminin uygulanabilir olması için bir diğer şart ise, saçılma uzunluğundan daha büyük olan uzunlukların kullanılmasıdır [3].

4.2. Tuzaklanmış Yoğuşmanın Taban Durumu

Genel olarak daha fazla tuzakta uygulanabilir olmasına rağmen, basitlik açısından ve deneysel verilerle de tutarlılık oluşturması göz önünde bulundurulduğunda, tuzaklanmış bozonlar için Gross-Pitaevski denkleminin çözümleri harmonik potansiyelde incelenir. Detaylı hesaplamalara geçmeden önce, osilatör potansiyelinin anizotropisi ihmal edilerek çözüm irdelenecek olursa, potansiyel $V = m\omega_0^2 r^2 / 2$ formunda olmalıdır. Bulutun uzaysal genişliği $\sim R$ iken, Heisenberg belirsizlik ilkesi sebebiyle parçacık momentumu \hbar/R mertebesinde olduğundan, osilatör potansiyeline maruz kalan parçacık başına potansiyel enerji $\sim m\omega_0^2 R^2 / 2$ ve kinetik enerji ise $\hbar^2 / 2mR^2$ mertebesinde. Böylece etkileşimler söz konusu değilken kinetik enerji, küçük R değerleri için $1/R^2$ ile değişirken; büyük R değerleri için R^2 ile değişir ve kinetik enerji ile potansiyel enerji birbirine eşit olduğunda maksimum değerini alır. Bu duruma karşı gelen bulut yarıçapı;

$$a_{osc} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_0} \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

dir ve “harmonik osilatör uzunluğu” olarak adlandırılır.

Harmonik osilatör uzunluğu, sistemin ilk önemli uzunluk skalasıdır ve deneylerden elde edilen sonuçlara göre $a_{osc} \approx 1\mu m$ mertebesindedir. Belirli bir sıcaklıkta, atomların belirli bir bölümü en düşük enerjili seviyeye yerleşir ve diğerleri termal olarak daha yüksek enerjili seviyelere uyarılmıştır. $k_B T \gg \hbar \omega_0$ olsun ve klasik Boltzman dağılımıyla termal bulut yoğunluğu kabaca $n_{cl}(r) \propto \exp[-V(r)/k_B T]$ ile verilsin. $V = m\omega_0^2 r^2 / 2$ iken Gaussian dalga fonksiyonunun genişliği $R_T = a_{osc} (k_B T / \hbar \omega_0)^{1/2}$ 'dir. Dolayısıyla termal bulutun yarıçapı, a_{osc} değerinden daha büyüktür. Böylece, harmonik tuzakta bulunan Bose-Einstein yoğuşması, yoğunluk dağılımının merkez bölgesinde keskin bir pik görünümüne sahiptir [4].

Etkileşimlerin etkileri ele alındığında, parçacık yoğunluğu kabaca $n \sim N/R^3$ şeklindedir ve parçacığın etkileşim enerjisi böylece $nU_0 \sim U_0 N/R^3$ mertebesindedir. İtici etkileşimler için enerjiye ek katkının etkisi, toplam enerji minimumunu R 'nin daha büyük değerlerine kaydıracak şekilde R^{-3} ile değişir ve sonuçta Na 'nın artan değerleri için kinetik enerji terimi önemini yitirir. Kinetik enerjinin ihmal edilebileceği kuvvetli çiftlenim limitinin incelenmesi de oldukça öğretici olacaktır. Bulutun denge boyutu, etkileşim enerjisi ile potansiyelin toplamının minimize edilmesiyle bulunur ve her iki katkı değerinin mertebesinin aynı olduğu durumda oluşur. İki enerji değeri birbirine eşitlendiğinde denge durumundaki yarıçap;

$$R \sim a_{osc} \left(\frac{Na}{a_{osc}} \right)^{1/5} \quad (4.17)$$

ve parçacık başına enerji

$$\frac{E}{N} \sim \hbar \omega_0 \left(\frac{Na}{a_{osc}} \right)^{2/5} \quad (4.18)$$

dir. Na/a_{osc} , etkileşim kuvvetini ifade eden boyutsuz bir niceliktir ve bu güne dek yapılan deneylerde, itici etkileşime sahip atomlar için değeri 1'den daha

büyük olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla R yarıçapı, a_{osc} değerinden daha büyüktür. $|a| \sim 10\text{nm}$ ve $a_{osc} \sim 1\mu\text{m}$ için, N ; 10^4 ile 10^6 arasında değişen değerler alırken, R/a_{osc} oranı 2,5 ile 6 arasında değerler alır. Denge halinde, hem osilatör enerjisi ve hem de etkileşim enerjisi R^2 ile orantılıdır ve bu sebeple R^{-2} ile orantılı olan kinetik enerji ile potansiyel (etkileşim) enerjisi arasındaki oran $(a_{osc}/Na)^{4/5}$ 'e eşittir. Bu durum, yeteri kadar fazla atom içeren bulut için kinetik enerjinin aslında ihmal edilebileceğini göstermektedir.

Çekici etkileşimlerde, az sayıdaki parçacık için toplam enerji, R 'nin çok küçük değerleri için $-1/R^3$ ile $-\infty$ 'a iraksamanın dışında, etkileşime sahip olmayan parçacıklarda olduğu gibi R 'nin bir fonksiyonudur. Sonuç olarak, yeteri kadar az sayıdaki parçacık için enerji, daha küçük yarıçap değerlerinde olmak şartıyla, birbiriyle etkileşimde bulunmayan parçacıkların enerjisi civarında yerel minimuma sahiptir. Minimumdan küçük sapmalar için enerji arttığından bu seviye metastabildir; fakat küçük R için enerji en sonunda $-1/R^3$ ile değişir ve yerel minimumdakinden daha az bir değere denk gelir. Artan parçacık sayısıyla, yerel minimum daha sığ bir hal alır ve kritik atom sayısı N_C için ortadan kalkar. Daha fazla sayıdaki parçacık için metastabil seviye söz konusu değildir. Beklendiği üzere kritik sayı $N_C \sim a_{osc}/|a|$ biçiminde, boyutsuz çiftlenim parametresinin -1 mertebesinde olduğu durum ile belirlenir. Örneğin ${}^7\text{Li}$ için (triplet) saçılma uzunluğu $-27,6a_0 = -1,46\text{nm}$ 'dir ve bu nedenle 100Hz mertebesindeki frekanslara sahip olan tuzaklarda kritik sayı deneysel olarak 10^3 mertebesinde dir.

Alkali atomları için uygun manyetik tuzakları karakterize eden önemli bir özellik, deneysel tutarlılık içinde tuzak potansiyelinin ikinci mertebeden seçilebilmesidir. Böylece bu türden sistemlerin incelenmesi, harmonik potansiyelde bulunan özdeş parçacıklar için relativistik olmayan kuantum mekaniği uygulamaları şeklindedir.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) \quad (4.19)$$

Denklem (4.19)'daki gibi üç-boyutlu anizotropik harmonik osilatör potansiyeli ile V 'de hapsedilen gazın taban durumu enerjisi belirlenebilir. Burada ω_i ($i = 1,2,3$) osilatör frekanslarını temsil eder ve birbirlerinden farklı değerler alabilirler. Deneylede kullanılan tuzakların çoğu aksenal simetriye sahiptir ve bu yüzden buradaki iki frekans değeri birbirine eşittir. Denklem (4.11)'de verilen Gross-Pitaevski denklemi, nümerik integrasyon ile doğrudan çözülebilir; ancak bazı analitik çözümlerin türetilmesi de bu konuda oldukça öğretici olacaktır.

4.2.1. Varyasyonel Hesaplama

Gaussian deneme fonksiyonuna dayanan bu hesaplamada, parçacıklar arası etkileşim söz konusu değilken en düşük tek-parçacık seviyesi dalga fonksiyonu

$$\phi_0(r) = \frac{1}{\pi^{3/4} (a_1 a_2 a_3)^{1/2}} e^{-x^2/2a_1^2} e^{-y^2/2a_2^2} e^{-z^2/2a_3^2} \quad (4.20)$$

ile verilir. Burada a_i ($i = 1,2,3$) osilatör uzunluğu, $a_i^2 = \hbar / m\omega_i$ şeklinde (2.32) ile benzerdir. $n(r) = N\phi_0(r)^2$ ile verilen yoğunluk dağılımı ise bu yüzden Gaussian'dir. Atomlar arası etkileşimler, bulutun boyutunu değiştirir. Bu sebeple (4.20)'deki denklem ile uyumlu olarak, b_i uzunlukları varyasyonel parametreler olarak seçildiğinde ψ deneme fonksiyonu için

$$\psi(r) = \frac{1}{\pi^{3/4} (b_1 b_2 b_3)^{1/2}} e^{-x^2/2b_1^2} e^{-y^2/2b_2^2} e^{-z^2/2b_3^2} \quad (4.21)$$

yazılabilir. Bu deneme fonksiyonu (4.10) denklemindeki normalizasyon koşulunu sağlar. Denklem (4.21)'in, (4.9)'da yazılmasıyla enerji ifadesi

$$E(b_1, b_2, b_3) = N \sum_i \hbar \omega_i \left(\frac{a_i^2}{4b_i^2} + \frac{b_i^2}{4a_i^2} \right) + \frac{N^2 U_0}{2(2\pi)^{3/2} b_1 b_2 b_3} \quad (4.22)$$

olur.

Etkileşimler yok iken b_i 'nin a_i 'ye eşit alınmasıyla

$$\begin{aligned}
 E &\approx N \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} + \frac{N^2 U_0}{2(2\pi)^{3/2} a_1 a_2 a_3} \\
 &= N \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} + \frac{N^2}{2} \langle 00 | \nu | 00 \rangle
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. Burada

$$\langle 00 | \nu | 00 \rangle = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \int d\mathbf{r} |\phi_0(\mathbf{r})|^4 \tag{4.24}$$

biçimindedir. Denklem (4.23)'teki enerji, osilatörün taban durumundaki iki parçacık için etkileşim enerjisidir. Bu değer, pertürbasyon teorisinden elde edilen sonuca karşı gelir ve parçacık başına etkileşim enerjisi, herhangi bir sıfır-nokta enerjisi ile kıyaslandığında yeteri kadar küçük olduğu sürece iyi bir yaklaşımdır. Üç osilatörün frekans değerleri birbirleriyle kıyaslanabilir durumda ($\omega_i \sim \omega_0$) ise, etkileşim enerjisi ile osilatörün sıfır-nokta enerjisi oranı, Na/a_{osc} şeklinde etkileşim şiddetini ifade eden boyutsuz ölçeğin mertebesinde. Bu değer, dalga fonksiyonu osilatörün taban durumundaki parçacıklar için yazıldığında, etkileşim enerjisi ile osilatör enerjisi $\hbar\omega_0$ arasındaki oranı verir. $Na/a_{osc} \sim 1$ durumu, pertürbatif rejim ile, tuzaktan ileri gelen etkileşim enerjisi ve potansiyel enerji arasındaki rekabet sonucu oluşan denge durumu arasındaki geçişi gösterir.

Etkileşim kuvvetli olduğunda bulut genişler ve optimal dalga fonksiyonu, b_i 'nin daha büyük değerlerine karşı gelecek biçimde daha fazla yayılır. Boyutsuz uzunluk $x_i = b_i / a_i$ ile tanımlanabilir. Varyasyonel parametreler x_i ($i = 1,2,3$) ile ilgili olarak E enerjisinin minimize edilmesiyle aşağıdakine benzer üç denkleme ulaşılır:

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_i \left(x_i^2 - \frac{1}{x_i^2} \right) - \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{NU_0}{\bar{a}^3} \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = 0 \tag{4.25}$$

Burada \bar{a} karakteristik uzunluğu ifade eder:

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}} \quad (4.26)$$

$\bar{\omega}$ osilatör frekansı ise üç boyutlu osilatör frekanslarının geometrik ortalamasıdır:

$$\bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3} \quad (4.27)$$

Yukarıdaki çiftlenmiş denklem setleri çözülerek, deneme fonksiyonu için optimal parametreler elde edilebilir. En basit durum, parçacık başına etkileşim enerjisinin tüm ω_i değerleri için $\hbar\omega_i$ 'den fazla olacağı sayıdaki parçacık için oluşturulabilir.

Bu şekilde (4.25)'teki $1/x_i^2$ ile orantılı olan kinetik enerji terimi ihmal edilebilir.

Bu denklem x_i için çözüldüğünde

$$x_i^5 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{Na}{\bar{a}} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i}\right)^{5/2} \quad (4.28)$$

veya

$$b_i = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/10} \left(\frac{Na}{\bar{a}}\right)^{1/5} \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \bar{a} \quad (4.29)$$

bulunur ve parçacık başına enerjiye gelen temel katkı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}}\right)^{2/5} \hbar\bar{\omega} \quad (4.30)$$

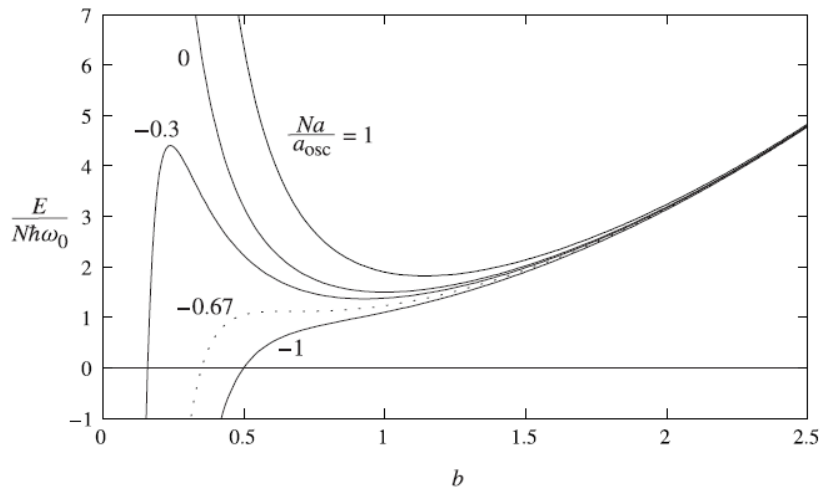
Denklem (4.30)'daki varyasyonel tahminlere göre parçacık başına enerji, kinetik enerjinin ihmal edildiği limit için $N^{2/5}$ ile orantılıdır ve etkileşimlerin olmadığı durumdaki enerjiden $(Na/\bar{a})^{2/5}$ kat daha fazladır. Bu durum Thomas-Fermi yaklaşımı için de doğrudur.

Şekil (4.1)'de izotropik osilatör için varyasyonel parametre b 'nin ($= b_1 = b_2 = b_3$) E/N 'e bağlılığı, boyutsuz parametre Na/a_{osc} 'un farklı

değerleri için gösterilmiştir. Ayrıca bu grafikte çekici etkileşim için, saçılma uzunluğunun negatif değerlerine karşı gelen örnekler de resmedilmiştir. Figürde gösterildiği gibi, N sayıdaki parçacığın negatif a saçılma uzunluğu için yerel minimumu kritik N_C sayısındaki parçacığı gerektirmektedir; ancak N 'nin daha büyük değerleri için ise bulut çöker. Kritik parçacık sayısı, b ile E/N 'nin birinci ve ikinci türevleri sıfıra eşitlenerek

$$\frac{N_C |a|}{a_{osc}} = \frac{2(2\pi)^{1/2}}{5^{5/4}} \approx 0,67 \quad (4.31)$$

biçiminde elde edilir. $\hbar\omega_0$ birimlerinde parçacık başına minimum enerji, $-0,67 \langle Na/a_{osc} \langle \infty$ aralığında, Şekil (4.1)'de Na/a_{osc} 'un fonksiyonu olarak çizilmiştir. Gross-Pitaevski denkleminin nümerik integrasyonu $N_C |a|/a_{osc} \approx 0,57$ sonucunu verir. Kinetik enerji pertürbasyon içeriyorsa, parçacık başına toplam enerji $(Na/a_{osc})^{-2/5}$ ile orantılı olan ek bir terim içerir[5].



Şekil 4.1. b varyasyonel parametresinin fonksiyonu olarak izotropik harmonik tuzakta bulunan parçacık başına enerjiye karşı boyutsuz parametre Na/a_{osc} 'un varyasyonel ifadesi (Burada noktalı eğri, değeri yaklaşık 0,67 olan kritik değere yani bulutun stabil olmadığı duruma karşı gelir.)

4.2.2. Thomas-Fermi Yaklaşımı

Yeteri kadar büyük boyuttaki bulut için, taban durumu enerjisinin kesin ifadesi, Gross-Pitaevski eşitliğinden kinetik enerji teriminin ihmal edilmesiyle elde edilir. Harmonik tuzaklarda olduğu gibi, atom sayısı fazla iken ve itici etkileşim söz konusu olduğunda, kinetik enerjinin potansiyel enerjiye (etkileşim enerjisine) oranı oldukça küçüktür. Gross-Pitaevski denkleminde kinetik enerji teriminin ihmal edildiği limit, Thomas-Fermi limiti olarak adlandırılır. Dolayısıyla fazla sayıda atom içeren yoğunlaşmaya ait dalga fonksiyonu için daha iyi bir yaklaşım, Gross-Pitaevski denkleminde kinetik enerji teriminin ihmal edilmesiyle başlar. Böylece μ kimyasal potansiyel olmak üzere (4.11)'den

$$\left[V(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}) \quad (4.32)$$

bulunur. Bu denklemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = [\mu - V(\mathbf{r})] / U_0 \quad (4.33)$$

Bulutun sınırı

$$V(\mathbf{r}) = \mu \quad (4.34)$$

olduğundan bu bölge dışında $\psi = 0$ 'dır. Bu yaklaşımın fiziksel içeriği, bulut içinde herhangi bir noktada parçacığa eklenen enerjinin her yerde aynı olmasına dayanır. Bu enerji, $V(\mathbf{r})$ dış potansiyeliyle yoğunluğu, yerel gaz yoğunluğu $n(\mathbf{r})$ 'ye eşit olan uniform gazın kimyasal potansiyelini veren $n(\mathbf{r})U_0$ enerji katkısının toplamıdır. Atomlar için, toplam elektrostatik potansiyel, tuzak potansiyelinin yerini; yerel Fermi enerjisi ise $U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 = U_0 n$ ortalama alan enerjisinin yerini alır.

Thomas-Fermi yaklaşımında üç boyutta bulutun genişliği, (4.19)'un (4.34)'te yazılmasıyla aşağıdaki gibi üç adet R_i kısmi-ekseni ile verilir:

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\bar{\omega}_i^2}, \quad (i = 1,2,3) \quad (4.35)$$

R_i uzunlukları, kimyasal potansiyelin belirlenmesinin ardından tuzak parametreleri terimlerinde de değerlendirilebilir. Denklem (4.10)'daki ψ 'nin normalizasyon koşulu, kimyasal potansiyel μ ile toplam parçacık sayısı N arasında ilişki kurar. Denklem (4.19) tarafından verilen potansiyele sahip harmonik tuzak için

$$N = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2} \right)^{3/2} \frac{\mu}{U_0} \quad (4.36)$$

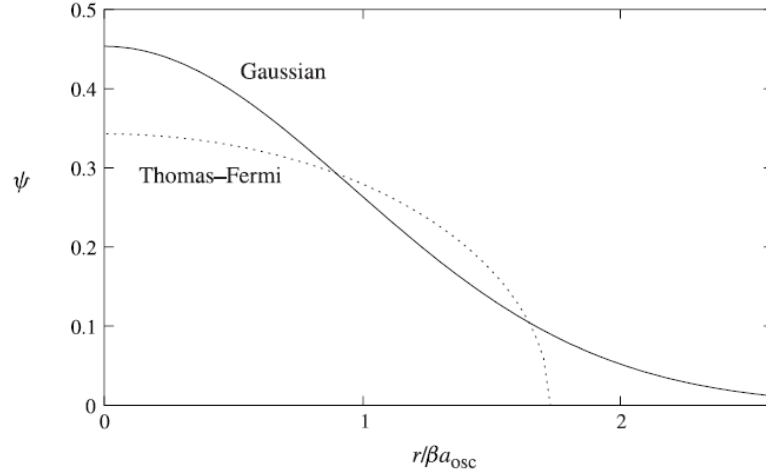
dir. Eşitliğin μ için çözülmesiyle μ ve $\hbar\bar{\omega}$ arasında aşağıdaki ilişki bulunur:

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega} \quad (4.37)$$

Bulutun uzaysal boyutunun ölçüsü olarak $\bar{R} = (R_1 R_2 R_3)^{1/3}$ niceliği uygundur. Bu nicelik kullanılarak (4.36) ve (4.37) numaralı denklemlerin birleştirilmesiyle

$$\bar{R} = 15^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \bar{a} \approx 1,719 \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \bar{a} \quad (4.38)$$

elde edilir. Buradan \bar{R} 'nin deneysel koşullar göz önünde bulundurulduğunda \bar{a} 'dan daha büyük olduğu görülür. Şekil (4.2)'de, varyasyonel hesaplamalardan elde edilen dalga fonksiyonu ile Thomas-Fermi yaklaşımından elde edilen dalga fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Dalga fonksiyonları $N^{1/2}/(\beta a_{osc})^{3/2}$ ve $\beta = (Na/a_{osc})^{1/5}$ birimlerinde olmak üzere Gaussian varyasyonel yaklaşım ile taban durumu dalga fonksiyonu (tam çizgi) ve izotropik harmonik osilatör potansiyeli için Thomas-Fermi yaklaşımı (noktalı çizgi)

$\mu = \partial E / \partial N$ ve $\mu \propto N^{2/5}$ olduğundan (4.37) denkleminde göre parçacık başına enerji

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7} \mu \quad (4.39)$$

olur. Bu değer, büyük N değerlerindeki enerjiye gelen temel katkıyı ifade eder ve (4.30)'daki varyasyonel tahminlerden $(3600\pi)^{1/5} / 7 \approx 0,92$ nümerik faktörü kadar daha küçüktür. Thomas-Fermi yaklaşımıyla bulutun merkez bölgesinin yoğunluğu $n(0) = \mu / U_0$ 'dır.

Toplam enerjinin potansiyel ile etkileşim enerjileri arasında nasıl dağıldığını görmek için, (4.33) ile verilen Thomas-Fermi çözümünün (4.9)'da yazılarak kinetik enerjinin ihmal edilmesiyle son iki terim için çözülür. Hesaplama, $V(\mathbf{r})$ potansiyeli ve Thomas-Fermi çözümünün her ikisi de küresel simetriktir. E_{int} etkileşim enerjisi ile E_{pot} potansiyel enerjisi arasındaki oran

$$\frac{E_{int}}{E_{pot}} = \frac{\int_0^1 dr r^2 (1-r^2)^2 / 2}{\int_0^1 dr r^4 (1-r^2)} = \frac{2}{3} \quad (4.40)$$

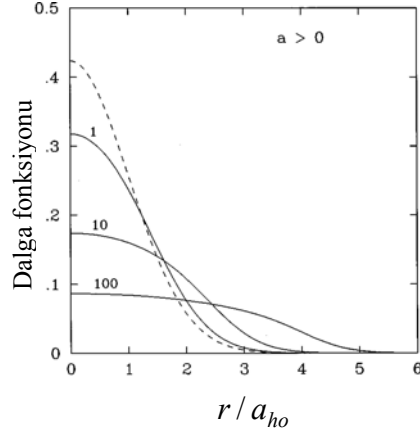
halini alır ve Virial Teoremi'ne ait ifadeyi verir. Thomas-Fermi yaklaşımındaki etkileşim enerjisi, toplam enerjinin $2/5$ katına eşittir. Parçacık başına toplam enerji $5\mu/7$ olduğundan, parçacık başına etkileşim enerjisi ile kimyasal potansiyel arasında

$$\frac{E_{\text{int}}}{N} = \frac{2}{7}\mu \quad (4.41)$$

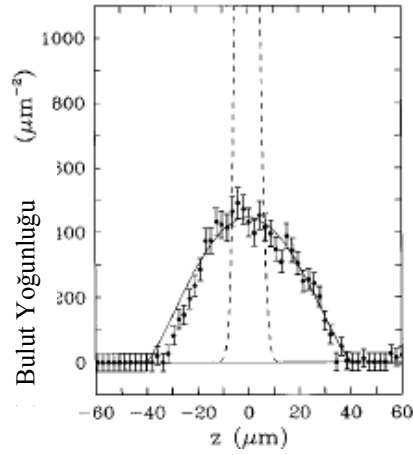
biçiminde bir ilişki söz konusudur[5].

Thomas-Fermi yaklaşımı, $Na/\bar{a} \gg 1$ olduğunda bulutun genel özellikleriyle ilgili oldukça iyi bir yaklaşımdır. Ayrıca Na/\bar{a} oranı ile atom-atom etkileşimleri tam anlamıyla ayarlanabilir ve bu oran aynı zamanda “Thomas-Fermi parametresi” olarak adlandırılır. Standart deneysel konfigürasyonlarda a/\bar{a} oranı 10^{-3} mertebesinde dir. Böylece 10^5 'ten daha fazla atom içeren örnekler için Thomas-Fermi parametresi oldukça büyüktür.

Etkileşimin olmadığı modelden Thomas-Fermi limitine geçişe örnek olarak Şekil (4.3) gösterilebilir. Burada dalga fonksiyonuna ait değerler (4.11)'deki Gross-Pitaevski denkleminin çözülmesiyle elde edilmiştir. Etkileşimin etkileri, etkileşimsiz model tarafından öngörülen Gaussian görüntüsünden sapmalar ile ortaya çıkar. Thomas-Fermi parametresinin büyük değerleri için denklemin çözümü, giderek artan bir şekilde düzleşir ve sonuçta yoğunluk azalır. Gross-Pitaevski denkleminin çözümü ile düşük sıcaklıklarda elde edilen yoğunluk görüntüleri karşılaştırıldığında mükemmel bir uyum söz konusudur. (Şekil 4.4) Buna göre, harmonik olarak tuzaklanmış Bose gazlarında taban durumunun yoğunluk profilinin şeklinin karakterize edilmesinde, iki-cisim etkileşiminin çok önemli bir rolü olduğu ortaya çıkmıştır [3].



Şekil 4.3. $T = 0$ 'da, itici etkileşime sahip küresel tuzak için Gross-Pitaevski denkleminin nümerik olarak çözülmesiyle elde edilen yoğunlaşma fonksiyonu. Burada üç düz çizgi için $Na/a_{osc} = 1, 10, 100$ 'dür. Kesikli çizgi ise ideal gazı temsil eder.



Şekil 4.4. Eksenel koordinatın fonksiyonu olarak tuzaktaki 80 000 sodyum atomu için yoğunluk dağılımı (Deneysel noktalar, optik yoğunluğa karşı gelir. Düz çizgi ortalama-alan yaklaşımından elde edilen sonuçları; kesikli çizgi ise etkileşimsiz gazı ifade eder. Buradan atom-atom etkileşiminin, merkez yoğunluğunu azalttığı sonucuna ulaşılır.)

4.2.3. Bulut Yüzeyinin Yapısı

Thomas-Fermi yaklaşımı, merteye parametresi uzayda yeteri kadar yavaş değişiyorken uygulanabilir; ancak Thomas-Fermi dalga fonksiyonuna enerji fonksiyonu katkısından dolayı bulut yüzeyinde uygulanması elverişli değildir. $n(\mathbf{r}) = [\mu - V(\mathbf{r})]/U_0$ yoğunluk profilini ifade eder ve yüzeyde \mathbf{r}_0 civarında $V(\mathbf{r}_0) = \mu$ olan dış potansiyel genişletilirse, yoğunluk profili $n(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/U_0$ halini alır. Burada

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}_0) \quad (4.42)$$

ile verilen, yüzeydeki parçacık üzerine etkiyen dış potansiyelden kaynaklanan kuvvettir. Yoğuşma dalga fonksiyonu

$$\psi(r) = \left[\frac{\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{U_0} \right]^{1/2} \quad (4.43)$$

ile verilir. Yüzeyden itibaren kinetik enerji teriminin önemli olmaya başladığı uzaklığı belirleyebilmek için, enerji fonksiyonuna kinetik enerji katkısı incelenmelidir. Bu katkı atom başına

$$\frac{\hbar^2 |d\psi/dx|^2}{2m|\psi|^2} \sim \frac{\hbar^2}{2m(x_0 - x)^2} \quad (4.44)$$

mertebedindedir. Burada x_0 yüzeyin yerini, x ise incelenen uzaklığı ifade eder. F , bulut yüzeyindeki parçacık üzerine etkiyen tuzak kuvvetinin değerini vermek üzere, kimyasal potansiyel ile dış potansiyel arasındaki fark

$$\mu - V(\mathbf{r}) \cong F(x_0 - x) \quad (4.45)$$

biçimindedir.

Lineer potansiyelde bulunan serbest parçacığın kuantum mekaniğinde sahip olduğu uzunluk skalası ile aynı mertebede olan uzunluk skalası

$$\delta = (\hbar^2 / 2mF)^{1/3} \quad (4.46)$$

ile verilir ve kinetik enerji terimi, $x_0 - x \ll \delta$ iken daha baskındır. İzotropik harmonik osilatör potansiyeli $V = m\omega_0^2 r^2 / 2$ ve R bulut yarıçapı olmak üzere $F = m\omega_0^2 R$ 'dir. $a_{osc} = (\hbar / m\omega_0)^{1/2}$ olmak üzere aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\delta = \left(\frac{a_{osc}^4}{2R} \right)^{1/3} = \left(\frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^{2/3} \frac{R}{2} \quad (4.47)$$

Yukarıdaki eşitliğin ikinci ifadesinde kimyasal potansiyel $\mu = m\omega_0^2 R^2 / 2$ 'dir.

Sonuçta, Thomas-Fermi yaklaşımı, $(a_{osc} / R)^{4/3}$ değeri yeteri kadar fazla sayıdaki parçacık için çok küçük bir değer aldığından, iyi bir yaklaşım olmaktan çıkar.

Yüzey bölgesi üzerindeki hesaplamalar Gross-Pitaevski denklemi ile başlar. Eğer dış potansiyel δ uzunluk skalası üzerinde yavaşça değiştirilirse, yüzey civarındaki bölgede potansiyel yukarıda anlatıldığı şekilde genişletilebilir ve problem bir boyutlu bir hal alır. x koordinatı terimlerinde ve orjin yüzey üzerinde seçildiğinde Gross-Pitaevski denklemi

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + Fx + U_0 |\psi(x)|^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (4.48)$$

dir. Uzunluk δ birimlerinde ölçülürse, Gross-Pitaevski denklemi daha basit bir hal alır. Ayrıca, yoğunlaşma dalga fonksiyonu, δ bulut yüzeyinden olan uzaklık olmak üzere Thomas-Fermi teorisinde $b = (F\delta / U_0)^{1/2}$ değeri için ölçülebilir. $y = x / \delta$ uzunluk değişkeni olsun; bu durumda dalga fonksiyonu $\Psi = \psi / b$ olur.

Denklem:

$$\Psi'' = y\Psi + \Psi^3 \quad (4.49)$$

halini alır. Burada türevler y üzerindedir. Thomas-Fermi yaklaşımıyla çözüm

$$y \leq 0 \text{ için } \Psi = \sqrt{-y} \text{ ve } y > 0 \text{ için } \Psi = 0 \quad (4.50)$$

biçimindedir.

$x \gg \delta$ olduğu durumda $y \gg 1$ 'dir. Yoğuşma dalga fonksiyonu küçük olduğundan, kübik terim ihmal edilebilir. Elde edilen denklem Airy fonksiyonudur ve asimptotik çözümü aşağıdaki gibi verilir:

$$\Psi \cong \frac{C}{y^{1/4}} e^{-2y^{3/2}/3} \quad (4.51)$$

Bulutun iç kısmı için $y \ll -1$ 'dir ve $\Psi \cong \sqrt{-y}$ şeklindeki Thomas-Fermi çözümü geçerlidir. Dalga fonksiyonuna en büyük katkıyı belirlemek için, $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ yazılıp (4.49) lineerleştirilerek

$$-\Psi_1'' + y\Psi_1 + 3\Psi_0^2\Psi_1 = \Psi_0'' \quad (4.52)$$

bulunur. $1/y$ 'nin daha yüksek mertebeden terimlerine katkıda bulunduğundan yukarıdaki denklemde Ψ_1'' ihmal edilerek, (4.50) ifadesinden $\Psi_0 = (-y)^{1/2}$ alınarak

$$\Psi_1 \cong \frac{1}{8y^2\sqrt{-y}} \quad (4.53)$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece asimptotik çözüm

$$\Psi = \sqrt{-y} \left(1 + \frac{1}{8y^3} \right) \quad (4.54)$$

olur. Denklem (4.49) nümerik olarak çözülebilir ve (4.51) eşitliğindeki değeri yaklaşık olarak 0,391 olan C sabitinin belirlenmesini sağlar.

x eksenine dik olan birim yüzeydeki kinetik enerji

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int dx |\nabla \psi|^2 \quad (4.55)$$

dir. $x \ll -\delta$ bölgesi için geçerli olması beklenen (4.50)'deki Thomas-Fermi dalga fonksiyonu incelendiğinde, $x \rightarrow 0$ iken dalga fonksiyonu ıraksak olduğundan integral $-l$ limit değerinden daha küçük x değerleri için hesaplanır. İntegralin alt limiti δ ile kıyaslandığında büyük olan L değeri için ise $-L$ olarak belirlenir. Buradaki limit uzaklık Thomas-Fermi yaklaşımın işe yaramadığı $\sim -\delta$ olarak seçilmediği sürece, kinetik enerjinin Thomas-Fermi sonucu ile verilebilir.

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^{-l} dx (\psi')^2 \cong \frac{\hbar^2}{8m} \frac{F}{U_0} \ln \frac{L}{l} \quad (4.56)$$

$\ln(L/l)$ 'nin büyük değerlerinde geçerli olan, dalga fonksiyonu kullanılarak nümerik olarak hesaplanan birim yüzeydeki kinetik enerji ise

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^{\infty} dx (\psi')^2 \approx \frac{\hbar^2}{8m} \frac{F}{U_0} \ln \frac{4,160L}{\delta} \quad (4.57)$$

biçimindedir. Böylece, Thomas-Fermi yaklaşımı, $l = 0,240\delta$ olmak üzere, integral $x = -l$ limit değeri için kullanılırsa kinetik enerjiye ait doğru asimptotik davranış elde edilebilir. Benzer etkin limit değeri kullanılarak daha genel durumlar için kinetik enerji hesaplanabilir.

Fiziksel olarak üç-boyutlu harmonik osilatör potansiyelinde hapsedilmiş N atomdan oluşan bulut için izotropik durum ele alındığında potansiyel $V(r) = m\omega_0^2 r^2 / 2$ 'dir. Taban durumu dalga fonksiyonu için Gross-Pitaevski denklemi:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\psi(r)|^2 \right] \psi(r) = \mu\psi(r) \quad (4.58)$$

$\mu = m\omega_0^2 R^2 / 2$ olmak üzere $\mathcal{X} = r\psi$ dönüşümü yapıldığında

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \mathcal{X}}{dr^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (r^2 - R^2) \mathcal{X}(r) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{mr^2} |\mathcal{X}(r)|^2 \mathcal{X}(r) = 0 \quad (4.59)$$

bulunur. Buradan Thomas-Fermi çözümü

$$\mathcal{X}_{TF} = r \left(\frac{R^2 - r^2}{8\pi a a_{osc}^4} \right)^{1/2} \quad (4.60)$$

olur. Denklem (4.59), $r = R$ etrafında genişletildiğinde δ 'nın (4.47)'deki ifadeyle verildiği, (4.49) formunda olan bir sonuca ulaşılır.

Kinetik enerjiyi hesaplamak için, Thomas-Fermi dalga fonksiyonu ve $l = 0,240\delta$ olmak üzere integral yarıçapı içinde $R - l$ integral limiti kullanılır.

Böylece sonuç

$$\frac{E_{kin}}{N} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\int_0^{R-l} dr r^2 (d\psi/dr)^2}{\int_0^R dr r^2 \psi^2} \cong \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{15}{4} \ln \frac{2R}{l} - \frac{5}{2} \right) \quad (4.61)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifade, fark %2,5'tan az olmak üzere $\ln(R/\delta)$ değerinin 3'ten büyük olduğu durumlar için nümerik sonuçla uyumludur [5].

5. YOĞUŞMA DİNAMIĞI

Ortak modlara veya tuzağın serbest bırakılmasının ardından yoğunlaşmanın genişlemesine benzer olarak Bose-Einstein yoğunlaşmış bulutunun zamana bağlı davranışı, yoğunlaşmanın fiziksel doğası ile ilgili önemli bir bilgi kaynağıdır. Ayrıca, yoğunlaşmanın temel uyarılma spektrumu, termodinamik özelliklerinin hesaplanmasında başlıca bileşendir.

5.1. Genel Formülasyon

Yoğunlaşmanın denge durumundaki yapısı, parçacıklar arasındaki etkileşimin de hesaba katıldığı lineer olmayan potansiyel katkısı ile birlikte zamandan bağımsız Schrödinger eşitliği ile tanımlanır. Dinamik problemleri ele almak için, aynı lineer olmayan etkileşim terimi ile birlikte zamana bağlı Schrödinger eşitliği kullanılır. Bu denklem, zamana bağlı Gross-Pitaevski eşitliğidir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t)+V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t)+U_0|\psi(\mathbf{r},t)|^2\psi(\mathbf{r},t)=i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad (5.1)$$

Bu denklem yoğunlaşma dinamiği kavramının temelini oluşturur.

Denklem (4.11)'deki zamandan bağımsız Gross-Pitaevski eşitliği, zamandan bağımsız Schrödinger denkleminde enerji öz değerinin yerine kimyasal potansiyelin yazılmasıyla elde edilir. Zamana bağlı Gross-Pitaevski eşitliği ile zamandan bağımsız Gross-Pitaevski eşitliği arasında tutarlılığı sağlamak için $\psi(r,t)$ sabit durumunun, $\exp(-i\mu t/\hbar)$ zamanında olması gerekir. $|N\rangle$ ve $|N-1\rangle$ durumları, $\exp(-iE_N t/\hbar)$ ile $\exp(-iE_{N-1} t/\hbar)$ zaman aralığında değiştiğinden faz faktörü, ψ 'nin makroskobik olarak N parçacık ile $N-1$ parçacık arasında, taban durumunda bulunan $\hat{\psi}$ yok etme operatörünün matris elemanına eşit olduğunu göstermektedir:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\langle N-1|\hat{\psi}(\mathbf{r})|N\rangle\propto\exp[-i(E_N-E_{N-1})t/\hbar] \quad (5.2)$$

Büyük N değerleri için, $E_N - E_{N-1}$ taban durumu enerjileri arasındaki fark $\partial E / \partial N$ 'e eşittir ve bu değer de kimyasal potansiyeli verir. Böylece bu sonuç, temel olarak yoğunlaşma dalga fonksiyonunun ϕ fazının gelişimi için Josephson bağıntısıdır:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu}{\hbar} \quad (5.3)$$

Denklem (5.1)'deki zamana bağlı Gross-Pitaevski eşitliği eylem prensibinden de türetilir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (5.4)$$

Burada Lagrangian L

$$\begin{aligned} L &= \int dr \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - E \\ &= \int dr \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

ile verilir ve E , daha önce (4.9)'da verilen enerjidir. Enerji yoğunluğu ise

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi|^4 \quad (5.6)$$

dir. Denklem (5.4)'teki varyasyon prensibine göre, $t = t_1$, $t = t_2$ tüm t değerlerindeki uzaysal sınırlar dışında yok olmasının gerekliliği dışında ψ (veya ψ^*) varyasyonları görecelidir. Fiziksel olarak uygulanabilir olan bir ψ deneme fonksiyonu seçildiğinde ise, dinamik problemlerin yaklaşık çözümleri için

varyasyon ilkesinden yararlanılır ve böylece hidrodinamik eşitliğin yeniden düzenlenmesiyle, Gross-Pitaevski eşitliğinin fiziksel içeriği yeniden elde edilir.

5.1.1. Hidrodinamik Eşitlikler

Genel olarak zamana bağlı durumlarda, yoğunluk için $|\psi|^2$ ile verilen ve (5.1) denkleminde eşit olan bir dizi denklem yerine yoğunlaşmanın yerel hızı ile orantılı olan faz gradyenti kullanılır.

Yoğuşma hızının doğasını anlamak için süreklilik denklemi türetilir. Denklem (5.1)'deki zamana bağlı Gross-Pitaevski eşitliği $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ ile çarpıldıktan sonra elde edilen eşitliğin kompleks konjügesi çıkarıldığında

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] = 0 \quad (5.7)$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklem, lineer Schrödinger eşitliğinden elde edilen ile aynıdır, çünkü Gross-Pitaevski eşitliğindeki lineer olmayan potansiyel reeldir. Denklem (5.7), parçacık yoğunluğu için $n = |\psi|^2$ biçiminde süreklilik denklemi formuna sahiptir:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (5.8)$$

Burada yoğunlaşmanın hızı

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}{|\psi|^2} \quad (5.9)$$

ile tanımlanır. Momentum yoğunluğu \mathbf{j} ise:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (5.10)$$

Bu denklem, momentum yoğunluğunun parçacık kütlesi ile parçacık akım yoğunluğunun çarpımı olarak

$$\mathbf{j} = mn\mathbf{v} \quad (5.11)$$

biçiminde ifade edilir.

Yoğunluk ve hız için basit formlar ψ dalga fonksiyonunun f genliği ve ϕ fazı formunda yazılmasıyla elde edilebilir:

$$\psi = fe^{i\phi} \quad (5.12)$$

Böylece yoğunluk

$$n = f^2 \quad (5.13)$$

ve hız

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \quad (5.14)$$

ile ifade edilebilir. Hız skaler bir niceliğin gradyenti olduğundan, (5.14) numaralı denklemden yoğunlaşma hareketinin potansiyel akışa karşı geldiği sonucuna ulaşılır. Yoğunlaşma için bu denklem, hız potansiyelinin $\hbar\phi/m$ olduğunu söyler. ϕ 'nin tekil olmaması şartıyla, yoğunlaşma hareketi kesinlikle irrotasyonel olmalıdır:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (5.15)$$

Yoğunlaşmanın olası hareketleri böylelikle klasik akışkandan çok daha sınırlıdır.

f ve ϕ için hareket denklemleri, (5.12) denkleminin (5.1)'de yazılıp, reel ve imajiner kısımlarının ayrılmasıyla bulunabilir. Böylece

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = i \frac{\partial f}{\partial t} e^{i\phi} - \frac{\partial \phi}{\partial t} f e^{i\phi} \quad (5.16)$$

ve

$$-\nabla^2\psi = \left[-\nabla^2 f + (\nabla\phi)^2 f - i\nabla^2\phi f - 2i\nabla\phi \cdot \nabla f\right]e^{i\phi} \quad (5.17)$$

olur. Buradan hareketle aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial(f)^2}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m}\nabla \cdot (f^2\nabla\phi) \quad (5.18)$$

$$-\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mf}\nabla^2 f + \frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r}) + U_0 f^2 \quad (5.19)$$

Denklem (5.18), yeni değişkenler cinsinden (5.8)'deki süreklilik denklemdir. Hız için hareket denklemini bulmak için, (5.19) numaralı denklemin gradyenti alındığında

$$m\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\tilde{\mu} + \frac{1}{2}mv^2\right) \quad (5.20)$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\tilde{\mu} = V + nU_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n} \quad (5.21)$$

dir. Denklem (5.19), $\delta E / \delta n$ biçiminde fonksiyonel türevler terimlerinde

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}\frac{\delta E}{\delta n(\mathbf{r})} \quad (5.22)$$

olarak ifade edilebilir. $\delta E / \delta n(\mathbf{r})$ niceliği, \mathbf{r} noktasında bulunan parçacığa eklenmesi gereken enerji miktarıdır ve nedenle burada elde edilen sonuç, (5.3) ile verilen taban durumunda bulunmayan parçacıklar için Josephson bağıntısıdır.

Sabit koşullar altında $\tilde{\mu} + \frac{1}{2}mv^2$ sabittir; hıza katkı sıfır olduğunda ϕ konumdan bağımsızdır ve $\tilde{\mu}$ sabittir. Bu durum kesinlikle zamandan bağımsız Gross-Pitaevski eşitliğidir.

Dış potansiyellerden kaynaklanan katkılar ihmal edildiğinde, (5.21)'deki nU_0 ifadesi, uniform Bose gazı için kimyasal potansiyeldir. Sıfır-sıcaklıkta, hacim sistemi için kimyasal potansiyeldeki değişim ile p basıncındaki değişim arasındaki ilişki, $dp = nd\mu$ Gibbs-Duhem bağıntısı ile verilir ve sonuç, seyreltik uniform Bose gazı için $\mu = nU_0$ ve $p = -\partial E / \partial V = n^2 U_0 / 2$ olduğundan kolaylıkla doğrulanabilir. Böylece (5.20) denklemi aşağıdaki formda tekrar yazılabilir:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{mn} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{m} \nabla \left(\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \right) - \frac{1}{m} \nabla V \quad (5.23)$$

Denklem (5.8) ve (5.23), mükemmel akışkan için hidrodinamik eşitliklerle oldukça benzerdir. Akışkanın hızı \mathbf{v} ile gösterilirse, (5.8)'deki süreklilik denklemi, mükemmel akışkanla tam olarak aynı formdadır. Denklem (5.23) ile benzer olarak Euler denklemi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{mn} \nabla p = -\frac{1}{m} \nabla V \quad (5.24)$$

veya

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{mn} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{1}{m} \nabla V \quad (5.25)$$

dir. Burada p , yoğuşma basıncından farklı olarak akışkanın basıncını ifade eder.

Denklem (5.23) ile (5.25) arasında iki fark vardır: Birincisi, Euler eşitliği $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ terimini içerir. Ancak süper akışkanın hız alanı, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ potansiyel akışına karşı gelir ve bu türden bir akış için $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ teriminin Euler eşitliğine katkısı olmaz. Bu sebeple potansiyel akış için iki denklem arasındaki tek farklılık,

“kuantum basınç terimi” olarak bilinen, (5.23)denkleminde bulunan sağdan ikinci terimdir. Bu terim, yoğunlaşmış durum için dalga fonksiyonunun uzaysal değişimlerinden kaynaklanan kuvvetleri ifade eder. $\nabla v^2 / 2$ gibi bu terimin de kökeni enerji yoğunluğundaki $\hbar^2 |\nabla \psi|^2 / 2m = mnv^2 / 2 + \hbar^2 (\nabla f)^2 / 2m$ kinetik enerji terimine dayanmaktadır; fakat iki katkı da farklı fiziksel etkilere karşı gelir: Bunlardan ilki, parçacık hareketinin kinetik enerjisine; diğeri ise parçacık akımını arttırmayan sıfır-nokta hareketine karşı gelir. Parçacık dalga fonksiyonunun uzaysal değişimi l ise, kuantum basıncı terimi $\hbar^2 / m^2 l^3$ mertebesindeyken (5.23)’teki basınç terimi nU_0 / ml mertebesindedir. Bu nedenle kuantum basıncı terimi, yoğunluğun uzaysal varyasyonları, l uzunluğundan daha kısa veya $\xi \sim \hbar / (mnU_0)^{1/2}$ tutarlı uzunluk skalası mertebesinde olduğunda genel basınç teriminden baskın iken; daha büyük olan uzunluk skalaları için önemini yitirir.

Yoğuşmanın hareketi yerel yoğunluk ve yerel hız terimlerinde özelleştirilebilir. Bunun sebebi, yerel yoğunluk ve yerel hızın, yoğunlaşma dalga fonksiyonunu ifade edebilecek değeri ve fazı olan yegâne serbestlik dereceleri olmalarıdır. Sıradan sıvılar ve gazları tanımlamak için daha fazla sayıda serbestlik derecesi gereklidir, bunun sonucu olarak da, parçacıklar için dağılım fonksiyonu gibi genel mikroskobik bir tanıma ihtiyaç vardır. Ancak, parçacıklar arası çarpışmalar termodinamik dengenin yerel olarak kurulabileceği sıklıkta olduğunda, sıradan gazlar ve sıvılar için hidrodinamik tanım kullanılabilir. Akışkanın durumu böylece yerel hız, yerel sıcaklık ve yerel parçacık yoğunluğu (eş olarak kütle yoğunluğu) terimlerinde bütünüyle özelleştirilebilir. Sıfır-sıcaklıkta, sıcaklık kullanılabilir bir değişken değildir ve akışkan hareketi, tıpkı yoğunlaşmada olduğu gibi yerel yoğunluk ve yerel akışkan hızı terimlerinde tanımlanabilir. Yoğuşma ve mükemmel akışkan için hareket denklemlerinin bu kadar benzer olmasının sebebi, parçacık sayısı ve toplam momentum için korunum yasaları ifadelerini sağlamalarıdır. Fakat her iki durum için de yerel yoğunluk ve yerel hız terimlerindeki tanımların fiziksel nedenleri oldukça farklıdır [5,28,29].

5.2. Temel Uyarılmalar

Temel uyarılma özellikleri, gazın denge durumundan küçük sapmaları ve zamana bağlı Gross-Pitaevski denkleminin periyodik çözümlerinin elde edilmesi ile belirlenebilir. Buna eş değer olan yaklaşım, yukarıda verilen hidrodinamik formülasyonun kullanılmasıdır. n_{eq} denge yoğunluğu ve δn yoğunluğun denge durumundan sapması olmak üzere yoğunluk $n = n_{eq} + \delta n$ olarak yazılabilir. \mathbf{v} hızı, δn ise küçük değerleri göstermek üzere (5.8), (5.20) ve (5.21) numaralı denklemlerin lineerleştirilmesiyle

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_{eq} \mathbf{v}) \quad (5.26)$$

ve

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta \tilde{\mu} \quad (5.27)$$

bulunur. Burada $\delta \tilde{\mu}$, (5.21) denkleminin lineerleştirilmesiyle elde edilir. Denklem (5.26)'nın zamana göre türevinin alınıp, (5.27)'nin de kullanılmasıyla

$$m \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = \nabla \cdot (n_{eq} \nabla \delta \tilde{\mu}) \quad (5.28)$$

olur. Bu denklem, keyfi bir potansiyelde bulunan Bose-Einstein uyarılmalarını ifade eder.

5.2.1. Uniform Gaz

Dış potansiyel V 'nin sabit olduğu homojen gazın spektrumu ele alındığında, uyarılmamış seviyenin yoğunluğu her yerde aynı olmak üzere n olsun. Burada \mathbf{q} dalga vektörü ve ω frekans olmak üzere $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ ile orantılı olan dalga fonksiyonu çözümleri araştırılır. Denklem (5.21)'den $\tilde{\mu}$ 'deki değişim

$$\delta\tilde{\mu} = \left(U_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{4mn} \right) \delta n \quad (5.29)$$

olur ve hareket denklemi ise

$$m\omega^2 \delta n = \left(nU_0 q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m} \right) \delta n \quad (5.30)$$

olarak elde edilir. Mikroskobik hesaplamalar ile bağlantılı olması için ϵ_q uyarılma enerjisi ile çalışmak, frekansla çalışmaktan daha uygundur. Denklem (5.30)'daki çözümlerin geçerli olması için

$$\epsilon_q = \sqrt{2nU_0 \epsilon_q^0 + (\epsilon_q^0)^2} \quad (5.31)$$

olmak üzere, frekans $\omega = \pm \epsilon_q / \hbar$ olmalıdır. Böylece serbest parçacık enerjisi

$$\epsilon_q^0 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \quad (5.32)$$

olur. Bu spektrum, ilk kez mikroskobik teoriden yararlanılarak Bogoliubov tarafından türetilmiştir.

Denklem (5.31)'deki uyarılma spektrumu, Şekil (5.1)'de gösterilmiştir.

Küçük q değerleri için ϵ_q , q 'nin lineer fonksiyonudur:

$$\epsilon_q \cong s\hbar q \quad (5.33)$$

ve ses benzeri bir spektruma sahiptir. s hızı

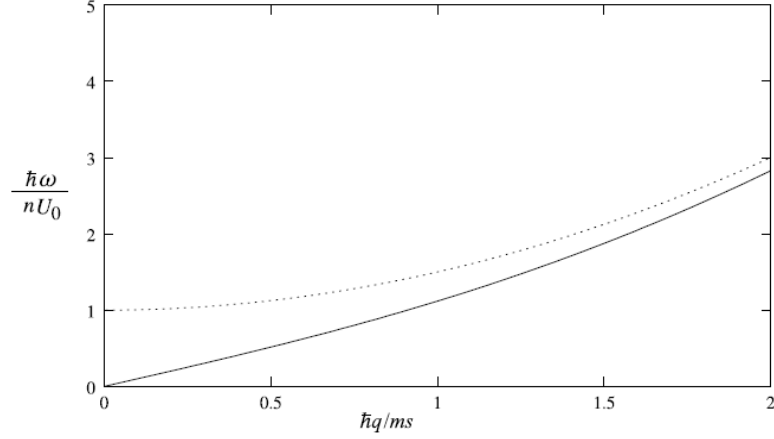
$$s = \sqrt{nU_0/m} \quad (5.34)$$

dir. Bu sonuç, kütle yoğunluğu $\rho = nm$ olmak üzere, $s^2 = dp/d\rho = (n/m)d\mu/dn$ hidrodinamik sonucundan hesaplanan ses hızı ifadesiyle örtüşür. Bu sebeple itici etkileşim, serbest parçacıklar için q 'da kuadratik olan uzun dalga boyundaki enerji spektrumunu deneysel olarak sıvı ${}^4\text{He}$ 'da olduğu gibi lineerleştirir. Uzun dalga boyundaki bu lineer spektrum, süper akışkan davranışı konusunda bir anahtar rolündedir ve Bogoliubov'un hesaplamasının parlak bir sonucudur. Hidrodinamik tanıma göre sonuç hemen hemen açıktır, çünkü ses dalgaları hidrodinamik sistemlerin iyi bir biçimde ortaya konulmuş uyarılmalarıdır. Burada sürpriz olan, kısa dalga boyunda spektruma asıl katkının

$$\epsilon_q \cong \epsilon_q^0 + nU_0 \quad (5.35)$$

biçiminde olmasıdır. Bu durum Şekil(5.1)'de serbest parçacık spektrumuna ortalama alan katkısı ile birlikte gösterilmiştir. Lineer spektrum ve kuadratik spektrum arasındaki geçiş $\hbar^2 q^2 / 2m$ ile verilen kinetik enerji, parçacığın $\sim nU_0$ potansiyel enerjisiyle kıyaslandığında büyük olduğu zaman; diğer bir deyişle kuantum basıncı terimi, genel basınç terimine baskın geldiği zaman meydana gelir. Bu durum $\sim (2mnU_0)^{1/2} / \hbar$ ile verilen dalga sayısında gerçekleşir. Parçacık başına kinetik enerji ile etkileşim enerjinin birbirine eşitlenmesiyle ($\xi^2 = \hbar^2 / 2mnU_0$) elde edilen ξ tutarlı uzunluğu ile ses hızı, birbirine (5.34)'e göre $\xi = \hbar / \sqrt{2ms}$ biçiminde bağlıdır. ξ 'den daha büyük uzunluk skalaları için atomlar toplu halde hareket ederken; daha kısa uzunluk skalaları için serbest

parçacıklar gibi davranırlar. Süper akışkan sıvı ${}^4\text{He}$ için temel uyarılma spektrumu, kuvvetli kısa menzilli karşılıklı etkileşimler nedeniyle seyreltik gazın uyarılma spektrumundan farklıdır ve spektrumun roton kısmı için tatmin edici ilk hesabı Feynman tarafından verilmiştir.



Şekil 5.1. Homojen Bose gazının uyarılma spektrumu (s , (5.34)'te tanımlanan ses hızı olmak üzere, $\hbar q / ms$ boyutsuz değişkeni ile ifade edilen dalga sayısının fonksiyonu olarak çizilmiştir (düz çizgi). Noktalı çizgi ile yüksek dalga sayısı için (5.35) gösterilmiştir.)

Yukarıdaki yaklaşım genelleştirilerek, yoğuşmanın uzay ve zamana bağlı $V(r,t) = V_q \exp(iq \cdot r - i\omega t)$ dış potansiyeline tepkisi hesaplanabilir. Burada $\delta\tilde{u}$ için denklemde ek V_q terimi vardır ve böylece

$$m \left(\omega^2 - \frac{\epsilon_q^2}{\hbar^2} \right) \delta n = nq^2 V_q \quad (5.36)$$

veya

$$\delta n = \chi(q, \omega) V_q \quad (5.37)$$

elde edilir. Burada

$$\chi(q, \omega) = \frac{nq^2}{m(\omega^2 - \epsilon_q^2 / \hbar^2)} \quad (5.38)$$

ile verilen, yoğuşma için yoğunluk-yoğunluk yanıtı fonksiyonudur. Bu yanıtın, dış potansiyel frekansı, yoğuşma temel uyarılma frekansına eşit olduğunda iraksak olduğu sonucuna varılır.

5.2.2. Bogoliubov Denklemleri

Uyarılma spektrumunu hesaplamanın alternatif yolu, hidrodinamik değişkenlerle uğraşmadan direkt olarak Gross-Pitaevski denkleminden başlamaktır. Bu yaklaşım, tek parçacık davranışını vurguladığından ve uzun dalga boyunda ortaya çıkan etkileri gösterdiğinden hidrodinamik yaklaşımı tamamlar. ψ dalga fonksiyonundaki değişim $\delta\psi$ olsun. Denklem (5.1)'in lineerleştirilmesiyle

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi(\mathbf{r},t)+V(\mathbf{r})\delta\psi(\mathbf{r},t)+U_0\left[2|\psi(\mathbf{r},t)|^2\delta\psi(\mathbf{r},t)+\psi(\mathbf{r},t)^2\delta\psi^*(\mathbf{r},t)\right] \\ =i\hbar\frac{\partial\delta\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\delta\psi^*(\mathbf{r},t)+V(\mathbf{r})\delta\psi^*(\mathbf{r},t)+U_0\left[2|\psi(\mathbf{r},t)|^2\delta\psi^*(\mathbf{r},t)+\psi^*(\mathbf{r},t)^2\delta\psi(\mathbf{r},t)\right] \\ =-i\hbar\frac{\partial\delta\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.40)$$

denklemleri bulunur. Burada $\psi(r,t)$, μ pertürbe olmamış sistemin kimyasal potansiyeli ve $n(r)$ parçacıkların denge durumundaki yoğunluğu olmak üzere $\psi(r,t)=\sqrt{n(r)}e^{-i\mu t/\hbar}$ biçiminde yazılan pertürbe olmamış durumdaki yoğuşma dalga fonksiyonudur. Tüm hesaplamalarda keyfi faz faktörüyle uğraşmamak için $t=0$ 'da yoğuşma dalga fonksiyonu fazı sıfır kabul edilir. Burada $e^{-i\mu t/\hbar}$ pertürbe olmamış durumun kapsamlı faz faktörü dışında, yukarıdaki denklemlerin zamanda periyodik olan çözümleri bulunmaya çalışılır.

Böylece çözümler aşağıdaki formda olmalıdır:

$$\delta\psi(r,t) = e^{-i\mu t/\hbar} \left[u(r)e^{-i\omega t} - v^*(r)e^{i\omega t} \right] \quad (5.41)$$

Burada $u(r)$ ve $v(r)$ incelenecek olan fonksiyonları ifade eder. Denklem (5.41)'deki $e^{-i\mu t/\hbar}$ kapsamlı faz faktörü, (5.39) ve (5.40)'ta bulunan $\psi(r,t)^2$ ve $\psi^*(r,t)^2$ 'nin faz etkilerini önlemek için gereklidir. v 'nin önündeki negatiflik, u ve v 'nin aynı işarete sahip olması için bir işaret anlaşmasıdır. $\delta\psi$ ve $\delta\psi^*$ denklemleri çiftleneceğinden, her ikisi de pozitif veya negatif olmadıkça denklemler sağlanmaz. Denklem (5.41)'deki deneme fonksiyonunun, (5.39) ve (5.40) denklemlerinde kullanılmasıyla aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu - \hbar\omega \right] u(\mathbf{r}) - n(\mathbf{r})U_0 v(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.42)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu + \hbar\omega \right] v(\mathbf{r}) - n(\mathbf{r})U_0 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.43)$$

Yukarıdaki denklemler “Bogoliubov eşitlikleri” olarak da adlandırılır. Bu formalizm $V(\mathbf{r}) = 0$ için Bose gazına uygulandığında, V sistemin hacmi ve $1/V^{1/2}$ konvansiyonel normalizasyon faktörü olmak üzere, dönüşümün invaryanthlığından ötürü çözümler

$$u(\mathbf{r}) = u_q \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad \text{ve} \quad v(\mathbf{r}) = v_q \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad (5.44)$$

biçimindedir.

Uniform sistemin kimyasal potansiyeli (4.12)'den nU_0 ile verilir ve böylece Bogoliubov eşitlikleri

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + nU_0 - \hbar\omega \right) u_q - nU_0 v_q = 0 \quad (5.45)$$

ve

$$\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + nU_0 + \hbar\omega \right) v_q - nU_0 u_q = 0 \quad (5.46)$$

halini alır. Bu iki denklem, katsayılar determinantı sıfıra eşit olduğu zaman tutarlıdır. Denklem (5.32)'deki tanımdan yararlanarak

$$\left(\epsilon_q^0 + nU_0 + \hbar\omega \right) \left(\epsilon_q^0 + nU_0 - \hbar\omega \right) - n^2 U_0^2 = 0 \quad (5.47)$$

veya

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\epsilon_q^0 + nU_0 \right)^2 - (nU_0)^2 = \epsilon_q^0 \left(\epsilon_q^0 + 2nU_0 \right) \quad (5.48)$$

bulunur. Bu denklemler, hidrodinamik yaklaşımdan elde edilen (5.31)'deki spektrum ile uyumludur.

Uyarılmaların doğası, u_q ve v_q katsayılarının davranışının incelenmesiyle açıklanabilir. Pozitif enerji çözümleri için

$$v_q = \frac{nU_0}{\epsilon_q + \xi_q} u_q \quad (5.49)$$

olur. Burada

$$\xi_q = \epsilon_q^0 + nU_0 \quad (5.50)$$

u_q ve v_q arasındaki çiftlenim ihmal edildiğinde uyarılma enerjisini ifade eder. u_q ve v_q 'nin normalizasyonu keyfidir, fakat kuantum mekaniksel düzeltme ile uygun seçim aşağıdaki gibidir:

$$\left| u_q \right|^2 - \left| v_q \right|^2 = 1 \quad (5.51)$$

Burada öne sürülen operatörler, Bose komütasyon bağıntılarını sağlar. Bogoliubov denklemleri u_q ve v_q sabitleri keyfi faz faktörleri ile çarpıldığında değişmez. Bu nedenle, genelleştirmeden uzaklaşmaksızın u_q ve v_q reel alınabilir. Bu seçimle birlikte

$$u_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{\epsilon_q} + 1 \right) \quad (5.52)$$

ve

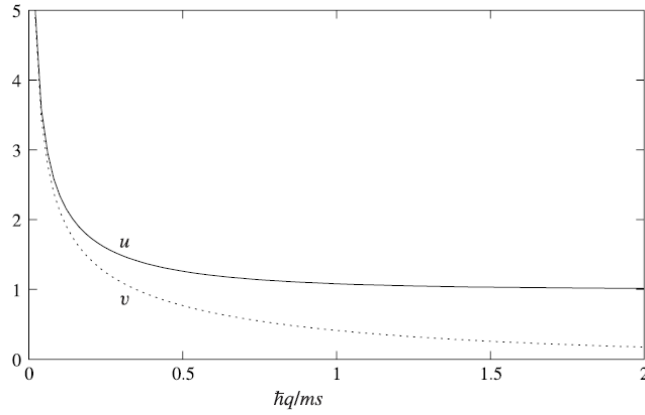
$$v_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{\epsilon_q} - 1 \right) \quad (5.53)$$

bulunur. ξ_q terimlerinde uyarılma enerjisi aşağıdaki gibi verilir:

$$\epsilon_q = \sqrt{\xi_q^2 - (nU_0)^2} \quad (5.54)$$

u_q ve v_q sabitleri, $\hbar q / ms$ boyutsuz değişkeninin fonksiyonu olarak Şekil(5.2)'de verilmiştir.

Pozitif enerji çözümleri için $1/q^2$ için q 'nun büyük değerlerinde v_q sıfır olur ve bu limitte $\omega_q = \epsilon_q / \hbar$ ile $\delta\psi = e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_q t)} / V^{1/2}$, dir. Bu durum, $\hbar q$ momentumuna sahip parçacığın eklenmesine ve sıfır-momentum durumundaki parçacığın çıkarılmasına karşı gelir. Daha küçük momentum değerleri için uyarılmalar, $\hbar q$ momentumuna sahip parçacığın eklenmesi (parçacığın yoğunlaşmadan çıkarılması) ile $-\hbar q$ momentumlu parçacığın çıkarılmasının (parçacığın yoğunlaşmaya eklenmesinin) lineer süperpozisyonudur. Uzun dalga boyu değerlerinde u_q ve v_q sabitleri, $1/q^{1/2}$ biçiminde ıraksaktır ve dalga fonksiyonunun iki bileşeni değer olarak birbirine eşittir.



Şekil 5.2. Dalga sayısının fonksiyonu olarak u_q ve v_q sabitlerinin, $\hbar q / ms$ boyutsuz değişkenine bağlı grafiği

5.2.3. Çekici Etkileşimler

Atomlar arası etkileşim çekici olduğunda ses hızı sanaldır. Bu durum, uzun dalga boyu modunun titreşim hareketi yapmak yerine zamanla eksponansiyel olarak artması veya azalması anlamına gelir. Çekici etkileşimden ötürü sistemdeki sinyallerin kararlı olmaması, atomları bir öbek halinde bir araya getirir. Ancak kısa dalga boyu modları, serbest parçacık kinetik enerji terimi dispersiyon bağıntısında baskın olduğundan karardır. Frekansın söz konusu olmadığı durum tarafından modun kararlı olduğu en küçük dalga sayısı q_c tanımlanır. Böylece (5.31) denklemden

$$\epsilon_{qc}^0 + 2nU_0 = 0 \quad (5.55)$$

veya

$$q_c^2 = -\frac{4mnU_0}{\hbar^2} = 16\pi n|a| \quad (5.56)$$

bulunur. Bu denklem göstermektedir ki, kararlı olmayan modların uzaysal skalası, saçılma uzunluğuna ait değerler de göz önünde bulundurulduğunda, tutarlı uzunluk skalası mertebesinde veya daha büyüktür.

Hacimsel bir madde ile ilgili bu düşüncelerin tuzaktaki bulut ile ilişkilendirilmesi oldukça öğreticidir. Basitlik açısından, R_0 yarıçapına sahip bir

tuzak ele alınsın. Burada en düşük mod $1/R_0$ mertebesinde dalga sayısına sahip iken yoğunluk ise $n \sim \tilde{N}/R_0^3$ biçimindedir. Denklem (5.56)'ya gören düşük mod, parçacık sayısı $1/R_0^2 \sim N_c|a|/R_0^3$ arasında verilen N_c ile verilen kritik atom sayısından veya

$$N_c \sim \frac{R_0}{|a|} \quad (5.57)$$

değerinden daha düşük olduğunda ve fazla sayıdaki parçacık için sabit değildir. Kısaca, yeteri kadar fazla sayıdaki parçacık için atomların sıfır-nokta enerjisi, aralarındaki çekim kuvvetinin üstesinden gelemeyecek kadar küçüktür.

5.3. Tuzaktaki Seçici Modlar

Homojen gazdaki modların özelliklerini hesaplamak nispeten daha açıktır, çünkü problemde tutarlı uzunluk ve uyarılma dalga boyu olmak üzere sadece iki uzunluk skalası mevcuttur. Tuzaklanmış gaz için ek bir uzunluk skalası daha vardır: bulutun uzaysal boyutu. Ayrıca tutarlı uzunluk da uzayda değişir. Önceki bölümden de hatırlanacağı üzere, $Na/\bar{a} \gg 1$ iken yani atom sayısı yeteri kadar büyük olduğunda bulutun statik özellikleri hesaplanabiliyordu, çünkü bu koşullar altında buluttaki atomların tuzaklandırılmasıyla ilişkilendirilen kinetik enerji (ki bu aynı zamanda kuantum basıncını verir) ihmal edilebiliyordu. Böylece hareket denklemindeki kuantum basıncı terimi ihmal edildiğinde, modların özellikleri belirlenebiliyordu. Bu türden bir yaklaşımın güvenilir olması için modun $\sim \delta$ kalınlığındaki bir sınırlayıcı tabaka içinde yoğunlaştırılmaması ve yerel tutarlı uzunluk ile kıyaslandığında uzayda daha geniş uzunluk skalalarına sahip olması gerekir. Bu yaklaşımla seçici modlar tanımlanabilir; ancak serbest parçacık benzeri olan uyarılmalar tanımlanamaz.

Lineer modlar için temel denklem, (5.28) ile verilir. Kuantum basıncı terimi ihmal edildiğinde $\tilde{\mu}$, $nU_0 + V$ değerine indirgenebilir.

Buradan

$$\delta\tilde{\mu} = U_0 \delta n \quad (5.58)$$

olur. Bu sonucun (5.28)'de kullanılmasıyla

$$m \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = U_0 \nabla \cdot (n \nabla \delta n) \quad (5.59)$$

denklemini sağlayan yoğunluk tedirgenmesi elde edilir. Osilasyonlar $\delta n \sim e^{-i\omega t}$ biçiminde zamana bağlı olarak ele alınırsa (5.59) denklemini basitleştirilir:

$$-\omega^2 \delta n = \frac{U_0}{m} (\nabla n \cdot \nabla \delta n + n \nabla^2 \delta n) \quad (5.60)$$

Denge yoğunluğu ise

$$n = \frac{\mu - V(r)}{U_0} \quad (5.61)$$

ile verilir ve (5.60) aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\omega^2 \delta n = \frac{1}{m} \{ \nabla V \cdot \nabla \delta n - [\mu - V(r)] \nabla^2 \delta n \} \quad (5.62)$$

5.3.1. Küresel Simetriye Sahip Tuzaklar

$\lambda = 1$ olan izotropik harmonik tuzak için potansiyel ifadesi

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad (5.63)$$

ile verilir. Thomas-Fermi yaklaşımında kimyasal potansiyel ile bulut yarıçapı $\mu = m \omega_0^2 R^2 / 2$ denklemiyle birbirine bağlıdır. r , θ ve ϕ küresel polar koordinatlarda (5.62) denklemi;

$$\omega^2 \delta n = \omega_0^2 r \frac{\partial}{\partial r} \delta n - \frac{\omega_0^2}{2} (R^2 - r^2) \nabla^2 \delta n \quad (5.64)$$

olur. Küresel simetriden dolayı, yoğunluk için genel çözümden sapma miktarı, aşağıdaki formdaki terimlerin toplamı biçimindedir:

$$\delta n = D(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.65)$$

Burada Y_{lm} küresel harmoniktir. Kuantum mekaniksel tanıma göre l , toplam açısal momentumun değeri için kuantum sayısıdır ve m ise toplam açısal momentumun polar eksenindeki yönelimini ifade eder.

C keyfi bir sabit olmak üzere (5.64)'ün basit çözümü

$$\delta n = C r^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.66)$$

dir. l 'nin artan değerleriyle modlar bulut yüzeyi yakınlarında yerleşirler ve yüzey dalgalarına karşı gelirler. Denklem (5.66)'daki fonksiyon Laplace denklemini sağlar ve (5.64) denklemindeki son terim yok olur. Böylece $\omega^2 = l \omega_0^2$ bulunur. Her yerde sabit olan yoğunluğa ait değişimi ifade ettiğinden $l = 0$ modu önemli değildir. Bunun sonucunda kimyasal potansiyeldeki değişim de bulutun

her noktasında aynıdır ve dolayısıyla hiçbir geri çağırıcı kuvvet söz konusu değildir ve modun frekansı sıfırdır. $l=1$ modu bulutun içyapısında herhangi bir değişiklik olmaksızın ötelenmesine karşı gelir. $l=1$ ve $m=0$ modu ele alındığında yoğunluktaki değişim $rY_{10} \propto z$ ile orantılıdır. Denge durumunda yoğunluk profili $n(r) \propto (1 - r^2/R^2)$ biçimindedir ve böylece bulutun merkezi z ekseninde ζ kadar yer değiştirirse yoğunluktaki değişim $\delta n = -\zeta \partial n / \partial z \propto z$ ile verilir. $l=1$ modunun fiziği, harmonik dış potansiyel için kütle merkezi ve ilgili hareketlerin, etkileşimler yalnızca parçacıkların koordinatlarına bağlı olduğu zaman ayırt edilebileceği şeklindedir. Kütle merkezi hareketi \mathbf{r}_{cm} , Nm kütlelerine sahip olan ve $Nm\omega_0^2 r_{cm}^2 / 2$ dış potansiyelinde hareket eden serbest parçacığa aittir ve bu durum serbest parçacık hareketiyle aynı formdadır. Bu modlar “Kohn modları” olarak da adlandırılır ve sıcaklığın etkili olmadığı etkileşimlerdekine benzer hareketlerin genel özelliklerini ortaya koyar. l 'nin daha büyük değerlerine sahip modlar, daha fazla sayıda düğüm içerir ve daha fazla yüksek frekansa sahiptir.

Daha genel modları incelemek için ‘merkezkaç bariyeri’nden ileri gelen radyal bağımlılığın ayrılması gerekir. Burada Laplasyen’deki $l(l+1)/r^2$ terimi $G(r) = D(r)/r^l$ olan yeni bir fonksiyon tarafından tanımlanarak

$$\epsilon = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (5.67)$$

boyutsuz değişkeni atanır. $G(r)$ radyal fonksiyonu için diferansiyel denklem:

$$\epsilon G(r) = lG(r) + rG'(r) - \frac{1}{2}(R^2 - r^2) \left[G''(r) + \frac{2(l+1)G'(r)}{r} \right] \quad (5.68)$$

Buradaki ortalama değer problemini çözmek için $u = r^2/R^2$ dönüşümü yapıldığında $G(u)$ aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar:

$$u(1-u)G''(u) + \left(\frac{2l+3}{2} - \frac{2l+5}{2}u \right) G'(u) + \frac{(\epsilon-l)}{2} G(u) = 0 \quad (5.69)$$

Elde edilen denklem standart $F(\alpha, \beta, \gamma, u)$ hipergeometrik fonksiyon formundadır:

$$u(1-u)F''(u) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)u]F'(u) - \alpha\beta F(u) = 0 \quad (5.70)$$

Fonksiyonun iyi huylu olabilmesi için α ve β 'nin her ikisinin de $-n$ biçiminde negatif tamsayı olması gerekir. Hipergeometrik fonksiyon, α ve β 'nin karşılıklı yer değişimi altında simetriktir. $\alpha = -n$ dönüşümü yapılarak, (5.69) ve (5.70) karşılaştırıldığında $\beta = l + n + 3/2$ ve $\gamma = l + 3/2$ olduğu görülür ve ortalama değer $\in -l = 2n(l + n + 3/2)$ veya

$$\omega^2 = \omega_0^2(l + 3n + 2nl + 2n^2) \quad (5.71)$$

olduğu bulunur. Burada n radyal düğüm sayısını ifade etmektedir.

C keyfi bir sabit olmak üzere bulutun normal modları

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = Cr^l F(-n, l + n + 3/2, l + 3/2, r^2 / R^2) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (5.72)$$

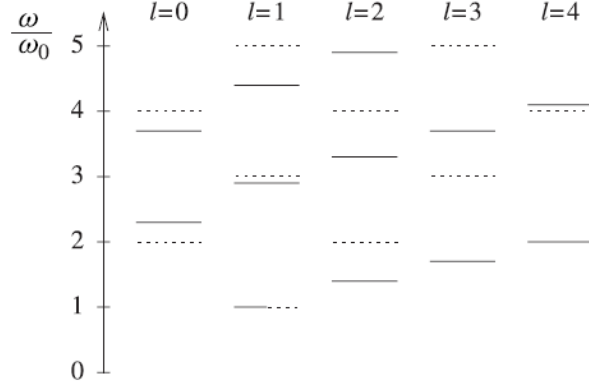
ile verilir. n ve l 'nin küçük değerlerine ait çözümler $u = r^2 / R^2$ kuvvetindeki standart seri açılımının kullanılmasıyla elde edilir [30]:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{u}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{u^2}{2!} + \dots \quad (5.73)$$

$n = 0$ için modlar radyal düğümlere sahip değildirler ve bu modlar, (5.66) tarafından verilen yüzey modlarıdır. Modla ilgili hız alanı, (5.27) ve (5.58)'den elde edilebilir. $l = 0$ ve $n = 1$ modu küresel simetriktir ve radyal hız her yerde aynı işarete sahiptir. İşte bu sebeple “breathing mod” olarak adlandırılır.

Denklem (5.71) ile verilen spektrumdaki alçak uyarılma frekansları, Şekil (5.3)'te verilmiştir. Harmonik tuzaktaki ideal gaz için mod frekansları, ortalama serbest yolun bulut boyutuyla kıyaslandığında büyük olması durumunda serbest

parçacığa ait mod frekanslarına karşı gelmektedir. Sonuçlar, yoğunlaşmanın mod frekanslarının ideal gaza ait mod frekanslarından nasıl daha farklı olduğunu göstermektedir.



Şekil 5.3. İzotropik harmonik tuzakta bulunan yoğunlaşmanın uyarılma spektrumu (düz çizgi)
(Noktalı çizgilerle etkileşimlerin olmadığı durum çizilmiştir. $l = 1$ için $\omega = \omega_0$ 'da meydana dejenerelik, kütle merkezi hareketi modlarına karşı gelir.)

5.3.2. Anizotropik Tuzaklar

Deneysel olarak kullanılan tuzakların çoğu, simetri eksenine z olmak üzere harmonik ve anizotropiktir. $\rho^2 = x^2 + y^2$ olmak üzere potansiyel

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_0^2\rho^2 + \frac{1}{2}m\omega_3^2z^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2(\rho^2 + \lambda^2z^2) \quad (5.74)$$

$\lambda = \omega_3 / \omega_0$ anizotropi parametresi küresel simetrik tuzak için baz alınır. Ioffe-Pritchard tipi tuzaklarda λ bobinlerden geçen değişken akımla sürekli olarak ayarlanabilir.

Bu türden bir tuzak için denge yoğunluğu Thomas-Fermi yaklaşımıyla

$$n = \frac{\mu}{U_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{\lambda^2 z^2}{R^2} \right) \quad (5.75)$$

dir.

xy düzlemindeki bulut yarıçapı R , $\mu - V(R,0,0) = 0$ ile veya

$$R^2 = \frac{2\mu}{m\omega_0^2} \quad (5.76)$$

ile verilir. Merkez yoğunluğunun $n(\mathbf{r}=0)$ için μ/U_0 olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece (5.62)'deki mod fonksiyonu

$$\omega^2 \delta n = \omega_0^2 \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \lambda^2 z \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta n - \frac{\omega_0^2}{2} (R^2 - \rho^2 - \lambda^2 z^2) \nabla^2 \delta n \quad (5.77)$$

biçimindedir. m tamsayı olmak üzere aksenal simetriden dolayı çözümler $e^{im\varphi}$ ile orantılıdır. Basit çözüm sınıflarından biri aşağıdaki gibidir:

$$\delta n \propto \rho^l \exp(\pm il\varphi) = (x \pm iy)^l \propto r^l Y_{l,\pm l}(\theta, \varphi) \quad (5.78)$$

Bu denklem, izotropik tuzağın yüzey modları için elde edilen ile benzerdir. $\nabla^2 \delta n = 0$ olduğundan frekanslar

$$\omega^2 = l\omega_0^2 \quad (5.79)$$

ile verilir ve çözümler

$$\delta n \propto z(x \pm iy)^{l-1} \propto r^l Y_{l,\pm(l-1)}(\theta, \varphi) \quad (5.80)$$

formundadır ve frekansları

$$\omega^2 = (l-1)\omega_0^2 + \omega_3^2 = (l-1 + \lambda^2)\omega_0^2 \quad (5.81)$$

eşitliği ile bulunur.

5.3.2.1. Düşük seviyeli modlar

Bu modlar deneysel olarak incelenebilen modlardır ve a , b ve c sabitler olmak üzere $\mathbf{v} = (ax, by, cz)$ basit formunda hız alanına sahiptirler. Buna bir örnek $\delta n \propto \rho^2 \exp(\pm i2\varphi) = (x \pm iy)^2$ 'dir ve $l = 2$ için (5.78) denkleminin karşı geliri. Modun frekansı

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \quad (5.82)$$

ile verilir. Diğer bir örnek de $\omega^2 = (1 + \lambda^2)\omega_0^2$ frekansıyla verilen $\rho z \exp(\pm i\varphi) = z(x \pm iy) \propto r^2 Y_{0,\pm 1}(\theta, \varphi)$ 'dir.. Her ikisi de $l = 2$ 'ye karşı gelen açısız simetriye sahip olduğundan, küresel simetriye sahip bu iki tip mod dejeneredir. Ancak m indeksi farklı ± 2 ve ± 1 dejenereliğe sahiptir. $l = 2$ ve $m = 0$ olan bir diğer mod da, tuzak küresel simetrik olduğunda diğerleriyle dejeneredir, fakat bu mod $l = 0$ ve $m = 0$ olan ve breathing mod olarak bilinen mod ile karıştırılmamalıdır. Bu durumun daha net görülebilmesi için φ 'den bağımsız çözüm

$$\delta n = a + b\rho^2 + cz^2 \quad (5.83)$$

formundadır ve burada a , b ve c incelenecek olan sabitlerdir. Denklem (5.83)'ün (5.77)'de yazılmasıyla a , b ve c sabitleri için matris denklemleri yazılabilir. Reel çözümlerin oluşturulabilmesi için, oluşturulan matrisin determinanı sıfır olmalıdır. Böylece $\delta n = \text{sabit}$ olduğu durumlar için $\omega^2 = 0$ ve

$$(\omega^2 - 4\omega_0^2)(\omega^2 - 3\lambda^2\omega_0^2) - 2\lambda^2\omega_0^4 = 0 \quad (5.84)$$

bulunur.

Yukarıdaki denklemin kökleri

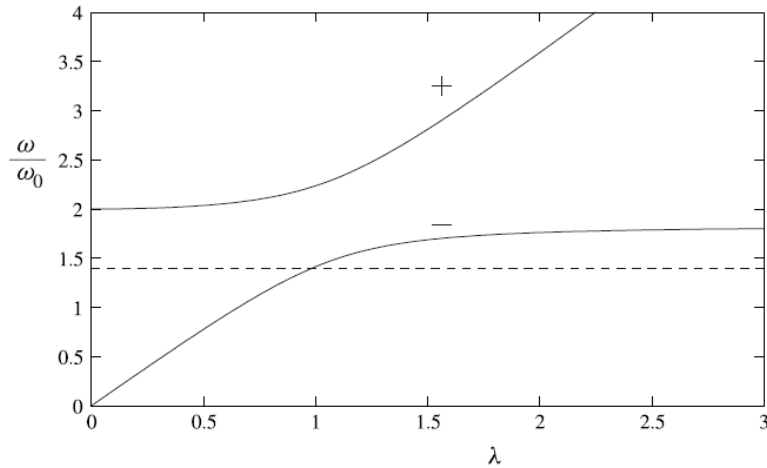
$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(2 + \frac{3}{2} \lambda^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{16 - 16\lambda^2 + 9\lambda^4} \right) \quad (5.85)$$

eşitliğinden $\lambda^2 = 8$ biçimindeki en küçük kökten ise

$$\omega = \omega_0 (14 - 2\sqrt{29})^{1/2} \approx 1,797\omega_0 \quad (5.86)$$

sonucuna ulaşılır. Hem $m = 0$ hem de $l = 2, m = 2$ modunun (5.82)'den $\sqrt{2}\omega_0$ frekansına sahip olduğu deneysel olarak bulunmuştur. Denklem (5.85)'den elde edilen mod frekansları λ anizotropi parametresinin bir fonksiyonu olarak Şekil (5.4)'te gösterilmiştir.

Yukarıda ele alınan tüm modlardaki yoğunluk değişimlerinden, kartezyen koordinatlara kuadratik bağlılığın olduğu ortaya çıkmıştır. İlgili hız alanları, (5.27)'deki ivmelenme eşitliğine göre x, y ve z 'de lineerdir. Bu sebeple bulutun hareketi, doğrultuya bağlı olan skala faktörü ile bulutun türdeş gerilmesine karşı gelir.



Şekil 5.4. λ 'nın fonksiyonu olarak mod frekansları

5.3.2.2. Makas modu

Thomas-Fermi yaklaşımında genel harmonik tuzak için de geçerli olan basit analitik forma sahip modlar vardır:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) \quad (5.87)$$

Burada ω_1 , ω_2 ve ω_3 birbirinden farklıdır. z eksenini etrafında rotasyonel simetriye sahip tuzaklar için yoğunluk değişimi xz veya yz ile orantılı olan modlar vardır ve ilgili frekansları $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \lambda^2)$ ile verilir. Bu modlar, $r^2 Y_{2,1}$ ve $r^2 Y_{2,-1}$ dejenere öz durumlarının lineer kombinasyonlarıdır. Buna ek olarak frekansı $\omega^2 = 2\omega_0^2$ ile verilen, yoğunluk değişimi xy ile orantılı olan ve $l = 2$, $m = \pm 2$ olan modların lineer kombinasyonu biçiminde bir mod vardır. Yoğunluk değişimi xy , yz veya zx ile orantılı olan modlar iki boyutludur ve ayrıca (5.87) ile verilen potansiyele sahip genel harmonik tuzak için geçerlidir. C , $e^{-i\omega t}$ ile değişen bir sabit olmak üzere yoğunluk değişimi

$$\delta n = Cxy \quad (5.88)$$

ile verilir. Bu modun hız alanını türetebilmek için işleme orijinal formdaki hidrodinamik eşitliklerden başlanır. Thomas-Fermi yaklaşımında $\delta \tilde{\mu} = U_0 \delta n$ idi ve bu nedenle (5.27)'den hız

$$-im\omega \mathbf{v} = -U_0 \nabla(Cxy) = -U_0 C(y, x, 0) \quad (5.89)$$

olarak bulunur. $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ olduğundan (5.26)'daki süreklilik denklemi:

$$-im\delta n = -(\nabla n) \cdot \mathbf{v} \quad (5.90)$$

Pertürbe olmamış bulutun hidrostatik denge durumu ele alındığında $\nabla n = -\nabla V / U_0$ idi ve (5.89) denklemindeki \mathbf{v} 'nin (5.90)'da yazılmasıyla $C(\omega_1^2 + \omega_2^2)xy / i\omega$ bulunur. Bu durum, hareket denkleminin

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad (5.91)$$

koşulunun sağlanması şartıyla geçerli olduğunu gösterir. Buradaki sonuçlar, (5.91)'deki tuzak frekansının dairesel permütasyonu tarafından verilen frekanslara sahip yz ve zx ile orantılı olan yoğunluk değişimleri için elde edilmiştir.

Denklem (5.88) ile verilen mod bazen “makas modu” olarak da adlandırılır. Bunun sebebi, tuzakta dengede bulunan bulutun döndüğü durumdaki yoğunluk değişiminin incelenmesiyle anlaşılabilir. R_i , (4.35) denklemi ile verilmek üzere, denge durumu yoğunluk profili $1 - x^2 / R_1^2 - y^2 / R_2^2 - z^2 / R_3^2$ ile orantılıdır. Bulutun z eksenini civarında χ açısı kadar dönmesi $x \rightarrow x \cos \chi - y \sin \chi$, $y \rightarrow x \sin \chi + y \cos \chi$ dönüşümüne karşı gelir. Bu şekilde oluşan yoğunluk değişimi küçük χ değerleri için xy ile orantılıdır. Moddaki yoğunluk değişimi bulutun rijid dönmesi ile oluşturulacak değişimle aynıdır. Ancak, hız alanı $(y, x, 0)$ ile değişir ve bu nedenle $(-y, x, 0)$ ile orantılı olan z eksenini etrafındaki rijid rotasyondan oldukça farklıdır. Yoğuşmanın hızı, ikinci formdaki hızın izinli olmaması için irrotasyonel olmalıdır. Makas modu, deneysel olarak Bose-Einstein yoğuşması için elde edilmiştir ve adını da nükleer fizikten almaktadır. Deforme olmuş bir çekirdekte, nötronların ve protonların yoğunluk dağılımı, açılıp kapanan makasa benzeyen faz osilasyonlarına benzemektedir. Ayrıca makas modları tamamen iki boyutludur ve bu sebeple şekli ve frekansları üçüncü boyutta kullanılan ve genel olarak $m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) / 2 + V(z)$ formunda verilen tuzak frekansının ne şekilde değiştiğine bağlı değildir [5].

5.3.3. Ortak Koordinatlar ve Varyasyonel Yaklaşım

Tuzaklanmış Bose gazı için hareket denklemlerinin analitik olarak çözülmesi genellikle mümkün değildir. Bu sebeple nümerik metodlara veya analitik yaklaşımlara başvurulmalıdır. Bu bölümde, düşük uyarılmalar ve birbirine yakın olan iki düzende bulunan modlara ait özelliklerin nasıl belirleneceği ele alınacaktır. Bu methodları açıklayabilmek için küresel simetrik tuzakta potansiyeli

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad (5.92)$$

ile verilen breathing modları kullanalım. Bu modlar için $l = 0$ ve $n = 1$ 'dir.

5.3.3.1. Ortak koordinatlar

Etkileşimlerin rolünün küçük olduğu durumlarda, çok-parçacık sisteminin modları tek parçacığın modlarına benzer. Ancak yukarıda incelenen Thomas-Fermi yaklaşımındaki modlarda parçacıklar arası etkileşim önemli bir role sahiptir ve hareket ortaktır. Ortak koordinatlar metodunun özü, ortak davranışın tanımlanmasında kullanılan ve çok sayıda parçacığı ilgilendiren değişkenlerin belirlenmesidir. Buna basit bir örnek, harmonik tuzakta bulunan ω_i frekansının modunun tanımlanmasında kullanılan kütle merkezi koordinatıdır. Önceki bölümde, bulutun genişlik parametresi R 'nin enerji için yaklaşık ifadenin bulunmasında nasıl kullanıldığı gösterilmiştir. Burada bu yaklaşım “breathing” modunun özelliklerinin hesaplanmasında kullanılacaktır.

Bulutun hareketi boyunca yoğunluk profilinin şeklini koruduğunu fakat uzaysal boyutunun zamana bağlı olduğu farz edilsin. Daha önce kullanılan Gaussian deneme dalga fonksiyonu yerine aşağıdaki gibi genel olanı alındığında

$$\psi(r) = \frac{AN^{1/2}}{R^{3/2}} f(r/R) e^{i\phi(r)} \quad (5.93)$$

bulunur. Burada f keyfi reel bir fonksiyon ve A normalizasyon sabitidir.

Bulutun toplam enerjisi, (4.9)'un çözülmesiyle

$$E = E_{flow} + U(R) \quad (5.94)$$

olarak elde edilir. Burada ilk terim parçacık akımıyla ilgili kinetik enerjidir ve

$$E_{flow} = \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 (\nabla \phi)^2 \quad (5.95)$$

ile verilir. İkinci terim etkin potansiyel enerjidir ve fazın uzayda değişmediği durumda bulutun enerjisine eşittir. Etkin potansiyel enerji

$$U(R) = E_{zp} + E_{osc} + E_{int} \quad (5.96)$$

biçimindeki terimlerin toplamı olarak verilir. E_{zp} sıfır-nokta enerjisine katkıyı ifade eder:

$$E_{zp} = \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{r} \left(\frac{d|\psi(r)|}{dr} \right)^2 = c_{zp} R^{-2} \quad (5.97)$$

Harmonik osilatör potansiyelinden ileri gelen katkı E_{osc} :

$$E_{osc} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \int d\mathbf{r} r^2 |\psi|^2 = c_{osc} R^2 \quad (5.98)$$

dir. Etkileşimlerden kaynaklanan katkı E_{int} :

$$E_{int} = \frac{1}{2} U_0 \int d\mathbf{r} |\psi|^4 = c_{int} R^{-3} \quad (5.99)$$

ile tanımlanır. Burada c sabitleri yukarıdaki denklemlerde tanımlandığı gibi f

fonksiyonunun seçimine bağlıdır ve kinetik enerjinin $E_{zp} + E_{flow}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bulutun kararlı durumdaki yarıçapı R_0 , toplam enerjinin minimize edilmesiyle elde edilir. Denklem (5.95)'teki kinetik enerji katkısı kuşkusuz pozitifdir ve ϕ 'nin sıfır olduğu durumlarda ise sıfırdır. Böylece denge durumu etkin potansiyelin minimum olmasıyla oluşturulabilir;

$$\left. \frac{dU}{dR} \right|_{R=R_0} = 0 \quad (5.100)$$

veya enerji katkıları R 'nin kuvvetleri biçiminde olduğundan

$$R \left. \frac{dU}{dR} \right|_{R=R_0} = -2E_{zp} + 2E_{osc} - 3E_{int} = 0 \quad (5.101)$$

yazılabilir.

R değeri, denge durumundaki değerinden farklı bir değer aldığı anda, R 'yi değiştirme eğiliminde bir kuvvet söz konusudur. Bulutun dinamiğini tanımlayan eşitliği türetmek için, R 'nin zamana bağlı olduğu kinetik enerji bulunmalıdır. R 'nin ilk değerinden \tilde{R} değerine değişmesi, bulutun aynı oranda genişlemesi demektir, çünkü oluşturulan yeni durumdaki yoğunluk dağılımı, eski yoğunluk dağılımındaki her bir atom için radyal koordinatın \tilde{R}/R kadar değiştirilmesiyle elde edilir. Böylece \dot{R} zamana göre türev olmak üzere parçacığın hızı

$$v(r) = r \frac{\dot{R}}{R} \quad (5.102)$$

dir. Gazın hacimsel hareketinin kinetik enerjisi

$$\begin{aligned} E_{flow} &= \frac{m}{2} \frac{\dot{R}^2}{R^2} \int dr n(r) r^2 \\ &= \frac{1}{2} m_{eff} \dot{R}^2 \end{aligned} \quad (5.103)$$

ve

$$m_{eff} = Nm \frac{\overline{r^2}}{R^2} \quad (5.104)$$

ile verilen etkin kütleler ve R 'den bağımsızdır. $\overline{r^2} = \int dr n(r) r^2 / \int dr n(r)$ ise bulut yarıçapının karesinin ortalamasıdır. Harmonik tuzak için buradaki integral, osilatör potansiyelinden ileri gelen katkı için (5.98)'deki yer aldığı haliyle özdeştir. Bu nedenle

$$E_{flow} = \frac{\dot{R}^2}{\omega_0^2 R^2} E_{osc} \quad (5.105)$$

veya

$$m_{eff} = \frac{2}{\omega_0^2 R^2} E_{osc} \quad (5.106)$$

bulunur. Bulutun toplam enerjisi böylece (5.96)'daki statik bulutun toplam enerjisi ile (5.103)'teki kinetik enerji teriminin toplamı biçiminde

$$E = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{R}^2 + U(R) \quad (5.107)$$

yazılabilir. Bu denklem, bir boyutlu $U(R)$ potansiyelinde hareket eden m_{eff} kütleli parçacık enerjisi ile özdeştir. Enerjinin korunumundan ($dE/dt = 0$)

$$m_{eff} \ddot{R} = -\frac{\partial U(R)}{\partial R} \quad (5.108)$$

biçimindeki hareket denkleminde ulaşılır. Bu denklem denge haline yakın durumlar için sınırlandırılmaz ve daha sonraki bölümlerde serbest bir biçimde genişleyen bulutun son hızının belirlenmesinde kullanılacaktır. Ancak ilk uygulaması olarak

denge durumu civarındaki küçük osilasyonlar incelenebilir. Etkin potansiyelin $R - R_0$ 'da ikinci mertebeden genişletilmesiyle

$$U(R) = U(R_0) + \frac{1}{2} K_{eff} (R - R_0)^2 \quad (5.109)$$

bulunur. Burada

$$K_{eff} = U''(R_0) \quad (5.110)$$

ile verilen etkin kuvvet sabitidir. Böylece osilasyonların frekansı

$$\omega^2 = \frac{K_{eff}}{m_{eff}} \quad (5.111)$$

olarak elde edilir. Bu sonuç aslında tuzak potansiyelinden bağımsızdır, fakat tartışma harmonik tuzak üzerine özelleştirildiğinde (5.97)-(5.99) numaralı denklemlerden

$$\begin{aligned} R^2 U'' &= 6E_{zp} + 2E_{osc} + 12E_{int} \\ &= 8E_{osc} + 3E_{int} \end{aligned} \quad (5.112)$$

bulunur. Burada ikinci denklem formuna, birinci denklemde (5.101)'deki virial durumunun kullanılıp, sıfır-nokta enerjisinin ihmal edilmesiyle ulaşılır. Böylece frekans aşağıdaki gibi verilir:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[4 + \frac{3 E_{int}(R_0)}{2 E_{osc}(R_0)} \right] \quad (5.113)$$

Bu ifadeyi sağlayan sınırların sayısını belirlemek için ilk limit, etkileşimlerin ihmal edildiği durumlar için kesin çözümle uyumlu olarak

$\omega = \pm 2\omega_0$ bulunur ve bu değer kuantum mekaniksel olarak iki osilatörün kuantumuna denk gelir. Aynı durum, Gross-Pitaevski eşitliğinden, etkileşimlerin olmadığı durum için Schrödinger eşitliğine dönüşmesinden de görülebilir ve enerji öz değerleri $3\hbar\omega_0/2$ olan kimyasal potansiyelden yararlanılarak hesaplanabilir. Küresel simetriye sahip en düşük uyarılmış durum, iki osilatör kuantumuna denk gelir, çünkü tek kuantuma sahip durumlar tek paritelidir ve bu nedenle de küresel simetriye sahip olamazlar.

Diğer bir limit ise kuvvetli etkileşimlerin söz konusu olduğu $Na/a_{osc} \gg 1$ durumudur. İlk yaklaşım olarak sıfır-nokta enerjisi ihmal edilebilir ve (5.101)'deki virial durumu $E_{int}(R_0) = 2E_{osc}(R_0)/3$ 'ü verir. Böylece

$$\omega^2 = 5\omega_0^2 \quad (5.114)$$

sonucuna ulaşılır. Bu durum, $n = 1, l = 0$ için (5.71) ile verilen kesin sonuçla oldukça uyumludur.

f fonksiyonunun formuna bakmaksızın yukarıdaki yaklaşım metodu ile hesaplanan mod frekansının, kuvvetli etkileşimler ve zayıf etkileşimler sınırında kesin çözümlerle uyumlu olduğu oldukça dikkat çekicidir. Bu durum harmonik osilatör potansiyeline ait özel bir niteliktir, çünkü burada etkin kütle basit bir biçimde tuzaktan kaynaklanan potansiyel ile ilişkilendirilebilir.

Bu method, $x, y, z \rightarrow \alpha x, \beta y, \gamma z$ formundaki dönüşümlere karşı gelen bulut pertürbasyonlarının da ele alınmasıyla anizotropik tuzaklar için de uygulanabilir (burada skala faktörleri farklı olabilir). Bu durum α, β ve γ için üç adet çiftlenmiş denklem verir. Eksenel simetriye sahip tuzak için (5.72) ve (5.85) denklemleri mod frekanslarını verir. Aynı şekilde makas modlarının özellikleri $x \rightarrow x + ay, y \rightarrow y + bx, z \rightarrow z$ ve bunların dairesel permütasyonlarındaki yer değiştirmelerin ele alınmasıyla türetilir.

5.3.3.2. Varyasyonel yaklaşım

Mod frekanslarının hesaplanması ortak koordinatların (7.4)'teki varyasyonel ilkedden başlayarak daha düzgün bir temel üzerine oturması düşüncesine dayanır. Temel düşünce, çok sayıda zamana bağlı parametreyi içeren deneme fonksiyonunun alınması ve bu parametreler için varyasyon prensibinin uygulanarak hareket denklemlerinin elde edilmesidir. Örnek olarak tekrar küresel tuzaktaki bulutun breathing modu alınsın. Dalga fonksiyonunun genliği yoğunluk dağılımını belirlerken, fazı da hız alanını belirler. Genlik için (5.93) formunda fonksiyon alınsın. Breathing mod için yapılan hesaplamalarda, hız radyal doğrultuda ve r ile orantılı olsun. Bu durum dalga fonksiyonu davranışına dönüştürüldüğünde, yoğunlaşmanın radyal hızı $(\hbar/m)\partial\phi/\partial r$ ile verildiğinden dalga fonksiyonu fazı r^2 ile değişir. Böylece β dalga fonksiyonundaki ikinci parametre olmak üzere dalga fonksiyonunun fazı $\beta mr^2/2\hbar$ olarak yazılır. Buradaki m/\hbar faktörü sonradan çıkan denklemleri basitleştirir. Deneme dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi olsun:

$$\psi(r,t) = \frac{AN^{1/2}}{R^{3/2}} f(r/R) e^{i\beta mr^2/2\hbar} \quad (5.115)$$

Denklem (5.5)'teki r üzerinden integrasyon ele alındığında Lagrangian β ve R bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu ve $\dot{\beta}$ zamana göre türevi göstermek üzere

$$L = \left[U(R) + \frac{m_{eff} R^2}{2} (\beta^2 + \dot{\beta}) \right] \quad (5.116)$$

olur. β için Lagrange denklemlerinden

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = \frac{\partial L}{\partial \beta} \quad (5.117)$$

$$\beta = \frac{\dot{R}}{R} \quad (5.118)$$

bulunur. Bu durum buradaki problem için süreklilik denklemine benzerdir, çünkü β ile orantılı olan hız alanıyla R ile ifade edilen yoğunluk profili arasındaki tutarlılığı sağlar. R için Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial R} \quad (5.119)$$

Lagrangian \dot{R} 'ne bağlı olmadığından $\partial L / \partial R = 0$ 'a indirgenebilir. Buradan

$$m_{eff} R(\dot{\beta} + \beta^2) = -\frac{\partial U(R)}{\partial R} \quad (5.120)$$

β için (5.118) dekleminin (5.120)'de yazılmasıyla daha önceden türetilen (5.108) numaralı hareket denkleminde ulaşılır. Bu yaklaşımın sonuçları daha önceden sezgisel olarak elde edilenlerle denktir. Ancak varyasyonel metod, çok sayıda parametreye sahip deneme fonksiyonunun kullanılmasıyla çözümün sistematik olarak geliştirilmesine olanak sağladığı için avantajlıdır.

Burada breathing mod için elde edilen sonuçlar, Bölüm (5.3.1)'de kuantum basınç teriminin ihmal edilerek hidrodinamik eşitliklerin çözülmesiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında; hidrodinamik eşitlikler $E_{zp} \ll E_{int}$ limitinde geçerlidir ve bu sebeple ortak koordinat ve varyasyonel yaklaşım sonuçlarında yine bu limit alınmalıdır. En düşük $l=0$ modu, her yerde aynı olan yoğunluk değişimine karşı geldiğinden ve frekansı sıfır olduğundan önemli değildir, çünkü yoğunluk değişimi hiçbir geri çağırıcı kuvvet oluşturmaz. Bu durum n 'in sıfır olmasına karşı gelir. $l=0$ için ilk uyarılmış durum $n=1$ 'dir ve yoğunluk pertürbasyonunda tek radyal düğüm noktası olduğunu ifade eder. Denklem (5.71)'e göre bu modun frekansı, ortak koordinat yaklaşımından elde edilen (5.114) denklemi ile uyumlu olarak $\omega^2 = 5\omega_0^2$ ile verilir. Bu modun doğası,

hipergeometrik fonksiyonları terimlerinde veya aşağıda gösterildiği gibi ifade edilebilir.

Denklem (5.64)'ün s -dalga çözümleri aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\omega^2 \delta n = \omega_0^2 r \frac{d}{dr} \delta n - \omega_0^2 \frac{(R^2 - r^2)}{2r} \frac{d^2}{dr^2} (r \delta n) \quad (5.121)$$

Daha önce anizotropik tuzaklar için kullanılan metodu takip ederek

$$\delta n = a + br^2 \quad (5.122)$$

formunda çözüp olup olmadığı incelenir. Burada a ve b incelenecek olan sabitlerdir. Bu fonksiyon, küresel simetriye ($b = c$) sahip mod için (5.83)'teki fonksiyona benzerdir. Buradaki ifadenin (5.121)'de yazılmasıyla r^2 ile orantılı olan terimlerden

$$\omega^2 = 5\omega_0^2 \quad (5.123)$$

bulunur. Böylece modun frekansı, diğer methodlarla hesaplanan değerlerle uyumludur. r 'den bağımsız terimlerin eşitlenmesiyle

$$b = -\frac{5}{3} \frac{a}{R^2} \quad (5.124)$$

olur ve δn yoğunluk değişimi

$$\delta n = a \left(1 - \frac{5r^2}{3R^2} \right) \quad (5.125)$$

ile verilir. Bu durum, kararlı bulut yoğunluğundaki R değişimiyle özdeştir. Bunu göstermek için Thomas-Fermi yaklaşımından, C bir sabit olmak üzere sıfır-nokta kinetik enerjisi ihmal edildiğinde denge yoğunluğu:

$$n = \frac{C}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (5.126)$$

Yukarıdaki denklemden bulut yarıçapı R 'deki küçük δR değişimiyle, denge yoğunluğunda oluşturulan değişim

$$\delta n = -\frac{C}{R^4} \left(3 - 5 \frac{r^2}{R^2} \right) \delta R \quad (5.127)$$

biçiminde, (5.125) denklemi ile aynı forma sahip olan denkleme ulaşılır. Bu duruma karşı gelen hız alanı (5.8)'deki süreklilik denkleminde \mathbf{r} ile orantılı bir biçimde $\mathbf{v} \propto \nabla \delta n$ olarak bulunur. Hız alanı, ortak koordinatlar terimlerinde tartışmanın başında olduğu gibi türdeştir [5,31,32].

5.4. Yüzey Modları

Bundan önceki bölümde, küresel simetrik tuzak içinde bulut yüzeyi yakınlarında yerleşmiş modlar olduğu gösterilmiştir. Bu modlar üzerine ışık tutabilmek için yüzey bölgesindeki potansiyele, Bölüm (4.3)'te koordinatların lineer fonksiyonu tarafından yaklaşımda bulunularak

$$V(\mathbf{r}) = Fx \quad (5.128)$$

yazılmıştı. Burada x koordinatı, ∇V doğrultusundaki uzunluğu gösterir. Bu yaklaşım bulutun lineer boyutuyla kıyaslandığında daha küçük dalga boyuna sahip olan modlar için iyidir. Lineer bir potansiyeldeki yoğunlaşma modları incelendiğinde y ve z doğrultularındaki dönüşümün invaryantlığından ötürü çözüm, bu koordinatlardaki düzlem dalgası formunda seçilir. q modun dalga sayısı ve z 'de yayılma doğrultusundaki eksen olarak seçilsin. Modun, (4.46) ile verilen δ kalınlığındaki yüzey bölgesinde yoğunlaşmaması şartıyla, Thomas-Fermi yaklaşımı ile dengedeki yoğunlaşma yoğunluğu $x < 0$ için $n(x) = -Fx/U_0$ ile verilir ve $x > 0$ olduğu bölgede yoğunluk sıfıra eşittir. C keyfi bir sabit olmak üzere moddaki osilasyon yoğunluğu için (5.62) denklemi

$$\delta n = C e^{qx+iqz} \quad (5.129)$$

biçiminde bir çözüme sahiptir. Bu çözüm, yüzey bölgesinde yayılan ve iç bölgede eksponansiyel olarak azalan dalgayı tanımlar. Thomas-Fermi yaklaşımının uygulanabilir olması için $1/q$ bozulma uzunluğunun δ 'dan daha büyük olması gerekir. Denklem (5.129) Laplace denklemini ($\nabla^2 \delta n = 0$) sağladığından, (5.129) denkleminin (5.62)'e yerleştirilmesiyle dispersiyon bağıntısı

$$\omega^2 = \frac{F}{m} q \quad (5.130)$$

olarak elde edilir. Bu denklem, $g = F/m$ gravitasyonel alanının söz konusu olduğu sıkıştırılmaz ideal bir akışkanın yüzeyinde yayılan gravitasyon dalgasıyla aynı formdadır.

Ancak (5.129)'da verilen çözüm, bulutun iç bölgesinde eksponansiyel olarak bozulan tek dalga çözümü değildir. Denklem (5.62)'nin daha genel çözümlerini incelemek için

$$\delta n = f(qx) e^{qx+iqz} \quad (5.131)$$

formundaki fonksiyon alındığında, $f(y)$ için aşağıdaki ikinci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir:

$$y \frac{d^2 f}{dy^2} + (2y+1) \frac{df}{dy} + (1-\epsilon) f = 0 \quad (5.132)$$

Burada $\epsilon = m\omega^2 / Fq$ 'dur. $z = -2y$ dönüşümü yapıldığında yukarıdaki diferansiyel denklem, $\epsilon - 1 = 2n$ olmak üzere $L_n(z)$ Laguerre polinomlarına dönüşür.

Böylece yüzey modları için genel dispersiyon bağıntısı elde edilmiş olur:

$$\omega^2 = \frac{F}{m} q(1+2n), \quad n = 0,1,2,\dots \quad (5.133)$$

C bir sabit olmak üzere, ilgili yoğunluk osilasyonları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\delta n(x, y, z) = CL_n(-2qx)e^{qx+iqz-i\omega t} \quad (5.134)$$

Bu modların frekansları (5.71) ile verilen izotropik harmonik tuzaktaki modların frekanslarıyla karşılaştırıldığında, n 'den daha büyük olan l değerleri için dispersiyon bağıntısı $\omega^2 = \omega_0^2 l(1+2n)$ halini alır. Bulut yüzeyindeki tuzak nedeniyle birim kütle başına kuvvet, $F = \omega_0^2 R$ olduğundan ve bulut yüzeyindeki modun dalga sayısı $q = l/R$ ile verildiğinden, $\omega_0^2 l = Fq/m$ olur ve dispersiyon bağıntısı yüzey düzlemi için (5.133) denklemi ile uyumlu olarak $\omega^2 = \omega_0^2 l(1+2n)$ biçiminde bulunur. l 'nin büyük değerleri harmonik osilatör potansiyelinin lineer yol ile yer değiştirmesi iyi bir yaklaşımdır. Yüzey modları, yüzeyden itibaren $(2n+1)R/l$ kadar bir mesafe içinde yoğunlaşır ve bu sebeple bu değer R 'den daha küçük olması şartıyla lineer yol ile harmonik osilatör potansiyeline yaklaşılması izinlidir. Lineer yol potansiyeli için $n=0$ modlarının frekanslarının, harmonik tuzaktaki tüm l değerlerindeki düğümü olmayan radyal modların ($n=0$ durumuna karşı gelir) frekanslarıyla uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir. Radyal düğümlere sahip modlar için ($n \neq 0$) her iki sonuç da yalnızca $l \gg n$ için uyumludur.

Thomas-Fermi yaklaşımıyla elde edilen yukarıdaki sonuçlar, sadece (4.46) ile verilen δ yüzey yapısı skalası, modun nüfuz edebileceği derinliklerden daha büyük olduğunda geçerlidir. Daha kısa dalga boylarında, (5.130)'daki yüzey bölgesindeki maddenin kinetik enerjisinden ötürü etkin yüzey gerilimi ile ilgili olan dispersiyon bağıntısında düzeltmeler söz konusudur. Sonuç olarak, hareketli lazer ışını tarafından uyarılarak yüzey uyarılmaları deneysel olarak incelenebilmiştir [5].

5.5.Yoğuşmanın Serbest Genişlemesi

Yukarıda tanımlanan metodlar, denge haline yakın durumlara sınırlandırılmaz. Deneysel olarak ilgilenilen problemlerden biri, tuzağın aniden kapatılması durumunda yoğuşma bulutunun gelişimidir. Genişlemenin ardından bulut konfigürasyonu, bulutun başlangıçtaki yapısının direkt olarak çözülmesi imkansız olduğunda buluta ait bir prob olarak kullanılır. Basitlik için, $V(r) = m\omega_0^2 r^2 / 2$ izotropik harmonik tuzak tarafından hapsedilmiş bulut ele alınsın ve bu potansiyel $t = 0$ anında kapatılsın. Burada $f(r/R) = \exp(-r^2 / 2R^2)$ olmak üzere (5.115)'teki deneme fonksiyonu kullanılır. Denklem (4.22)'den de görülebileceği gibi sıfır-nokta enerjisi

$$E_{zp} = \frac{3N\hbar^2}{4mR^2} \quad (5.135)$$

ve etkileşim enerjisi

$$E_{\text{int}} = \frac{N^2 U_0}{2(2\pi)^{3/2} R^3} \quad (5.136)$$

formundadır. Gaussian deneme fonksiyonu için etkin kütle (5.106) denklemi ile $m_{\text{eff}} = 3Nm/2$ biçiminde verilir. Enerjinin korunumu şartıyla

$$\frac{3m\dot{R}^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4mR^2} + \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{NU_0}{R^3} = \frac{3\hbar^2}{4mR(0)^2} + \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{NU_0}{R(0)^3} \quad (5.137)$$

bulunur. Burada $R(0)$, $t = 0$ anındaki yarıçaptır.

Etkileşimlerin söz konusu olmadığı durum ($U_0 = 0$) için yukarıdaki denklem:

$$R^2(t) = R^2(0) + v_0^2 t^2 \quad (5.138)$$

sonucundan yararlanılarak integre edilebilir.

Burada v_0

$$v_0 = \frac{\hbar}{mR(0)} \quad (5.139)$$

ile verilen parçacık hızının ortalama kareköküne eşittir. Böylece yayılma hızı, $\sim R(0)$ 'da hapsedilmiş parçacık için Heisenberg belirsizlik ilkesinin öngördüğü hıza ait belirsizliktir. Başlangıçtaki yarıçap $R(0)$, $a_{osc} = (\hbar / m\omega_0)^{1/2}$ osilatör uzunluğuna eşittir ve bu yüzden (5.138) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$R^2(t) = R^2(0)(1 + \omega_0^2 t^2) \quad (5.140)$$

Yukarıdaki sonuç, Gaussian dalga paketindeki değişimin hesaplanmasıyla da doğrulanabilecek olan kesin sonuçtur.

Etkileşimlerin söz konusu olduğu durum için zamanın bir fonksiyonu olan R 'nin değişimi, nümerik integrasyon ile bulunabilir. Ancak $t \rightarrow \infty$ için asimptotik davranış, (5.137)'deki enerjinin korunumu koşulundan yararlanılarak elde edilebilir ve bunun sonucunda son hız

$$v_\infty^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 R(0)^2} + \frac{U_0 N}{3(2\pi^3)^{1/2} m R(0)^3} \quad (5.141)$$

olur. Na / a_{osc} değeri büyük olduğunda, bulutun başlangıçtaki boyutu toplam osilatör enerjisinin ve etkileşim enerjisinin minimize edilip incelenmesiyle belirlenir. Denklem (4.29)'a göre izotropik tuzak için sonuç

$$R(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/10} \left(\frac{Na}{a_{osc}}\right)^{1/5} a_{osc} \quad (5.142)$$

dir.

Daha geniş zaman aralığında bulut, son hızı (5.141)'deki ikinci terim tarafından bastırıldığından aşağıdaki denkleme göre genişler:

$$\frac{R^2(t)}{R^2(0)} \cong \frac{U_0 N}{3(2\pi^3)^{1/2} m R(0)^5} t^2 = \frac{2}{3} \omega_0^2 t^2 \quad (5.143)$$

5.6. Solitonlar

Bu bölüme dek incelenen dinamik problemlerde, küçük genlikli hareketler için analitik sonuçlar elde edilmiştir, fakat lineer etkilerin önemli olduğu durumlarda ise yaklaşım methodları uygulanmıştır. Ancak zamana bağlı Gross-Pitaevski denklemi lineer olmayan rejimde kesin analitik sonuçları verir. Bunlar tek bir dalga formundadır (soliton), yani formunu değiştirmeksizin yayılan yerleşmiş tedirgenmelerdir. Solitonlar konusu uzun bir geçmişe sahiptir. Bu konu ile ilgili ilk çalışmalar 1834 ile 1844 yılları arasında İngiliz mühendis John Scott ve denizci mimar Russell tarafından sığ su dalgalarında yapılmıştır. Soliton çözümleri çok sayıda lineer olmayan denklem için geçerlidir ve bunlar; sığ su dalgalarının özelliklerini tanımlayan Korteweg-de Vries denklemi ve (5.1)'de verilen Gross-Pitaevski denkleminin özel bir hali olan lineer olmayan Schrödinger denklemdir.

Solitonların oluşmasını sağlayan fiziksel etkiler nonlineerlik ve dispersiyondur. Her ikisi de Gross-Pitaevski denkleminde bulunmaktadır. Bu durum, (5.30)'da verilen, yerel yoğunluk ve dalga sayısı üzerine uyarılma hızının bağıllığını gösteren Bogoliubov dispersiyon bağıntısından ($\omega^2 = (nU_0/m)q^2 + \hbar^2 q^4/4m^2$) da görülebilir. Solitonlar için lineer olmayan etkiler, dispersiyondan kaynaklanan etkiler tarafından karşılandığından kendi şekillerini korurlar. Detaylı hesaplamalara geçmeden önce bazı değerlere ait mertebeler incelenmelidir. Daha belirli olması açısından, itici etkileşime sahip uzaysal olarak uniform yoğunlaşmış Bose gazı alınsın. Yerleşmiş yoğunluk tedirgenmeleri Δn genliğine sahipken ve L mesafesi boyunca yayılıyorsa, dispersiyon bağıntısından tedirgenme içindeki ses hızının, ortalama hacimdeki ses hızından lineer olmayan etkilerden dolayı $\sim s(\Delta n)/n$ kadar farklı olduğu

görülebılır. Ayrıca $q \sim 1/L$ olduğundan dispersiyon, hızı $\sim s\xi^2 / L^2$ kadar arttırır (ξ tutarlı uzunluk). Lineer olmamaktan kaynaklanan etkilerin, dispersiyon tarafından karşılanabilmesi için bu iki katkının engellenmesi gerekir. Böylece tedirgenmenin genliği ile uzunluk birbirine

$$\frac{\Delta n}{n} \sim -\frac{\xi^2}{L^2} \quad (5.144)$$

biçiminde bağlıdır. Tedirgenme hızı u , dispersiyon ve non-lineerlik sebebiyle ses hızından

$$|u - s| \sim s \frac{\xi^2}{L^2} \quad (5.145)$$

mertesindeki hız kayması kadar farklıdır. Bu sistem için solitonlar, yoğunluk çöküntülerine karşı gelirken, sığ su dalgaları için su seviyesinde yükselmeye karşı gelir. Bu farklılığın sebebi, sığ su dalgaları için dispersiyonun zıt işarete sahip olmasıdır, yani g gravitasyondan kaynaklanan ivmelenme ve h suyun denge derinliği olmak üzere $\omega^2 \cong ghq^2 [1 - (qh)^2 / 3]$ biçimindedir. Yüzey dalgalarının hızı tıpkı yoğunmuş Bose gazındaki ses hızının yoğunlukla artması gibi derinlikle arttığından, non-lineerlik her iki durumda da aynı işarete sahiptir.

Parçacıklar arasındaki itici etkileşimler için en basit örnek, durağan çözümün tüm uzaya yayıldığı Gross-Pitaevski denkleminin tuzak duvarındaki çözümü olan solitondur:

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad (5.146)$$

Burada ξ , tuzak duvarından itibaren tutarlı uzunluktur ve aşağıdaki gibidir:

$$\xi = \frac{\hbar}{(2mn_0U_0)^{1/2}} \quad (5.147)$$

Denklem (5.8) ve (5.20)'deki hidrodinamik denklemler, uzaysal koordinat x ve zaman t 'ye bağılı olarak $x - ut$ kombinasyonu boyunca bir boyutlu soliton çözümlerini oluşturur. Burada $x \pm \infty$ için n yoğunluğuna ait sıfır olmayan n_0 değeri için çözümler aranır. $\partial n / \partial t = -u \partial n / \partial x$ olduğundan süreklilik denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x}(un - vn) = 0 \quad (5.148)$$

dır ve integrasyonun ardından $v = 0$ da sonsuzluğa götüren bağılı durumun da kullanılmasıyla

$$v = u \left(1 - \frac{n_0}{n} \right) \quad (5.149)$$

halini alır. $\partial v / \partial t = -u \partial v / \partial x$ olduğundan (5.20) denklemi yeniden yazıldığında

$$-mu \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(nU_0 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{n} \right) \quad (5.150)$$

olur. Denklemin integre edilmesiyle

$$n(x, t) = n_{\min} + (n_0 - n_{\min}) \tanh^2 \left[(x - ut) / \sqrt{2} \xi_u \right] \quad (5.151)$$

bulunur. Burada hıza bağılı olan genişlik

$$\xi_u = \frac{\xi}{(1 - (u/s)^2)^{1/2}} \quad (5.152)$$

dir. u hızı ile yoğunluk oranı n_{\min} / n_0 arasında

$$\frac{u^2}{s^2} = \frac{n_{\min}}{n_0} \quad \text{veya} \quad u^2 = \frac{n_{\min} U_0}{m} \quad (5.153)$$

biçiminde bir bağlantı vardır ve uniform gazın ses hızı da $s = (n_0 U_0 / m)^{1/2}$ ile verilir. Solitonun hızı böylece n_{\min} yoğunluğunda hesaplanan hacimsel ses hızına

eşittir. $u = 0$ iken solitondaki minimum yoğunluk sıfırdır ve (5.151)'deki yoğunluk profili (5.146)'daki ifadeye indirgenir. Tsuzuki tarafından otuz yıldan fazla bir süre önce hesaplanan bu analitik sonuçlar, (5.144) ve (5.145) denklemlerinde daha önceden elde edilmiş olan sayısal öngörülerini doğrulamaktadır.

Solitonlar için önemli olan bir diğer önemli nicelik ise aralarındaki faz değişimidir. $v(x) = (\hbar/m)\partial\phi/\partial x$ olduğundan, buradaki durum süperakışkan ifadesinin integre edilmesiyle bulunabilir. Bu sebeple (5.149) ve (5.151) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty) &= -\frac{mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{n_0 - n_{\min}}{n_0 \cosh^2(x/\sqrt{2}\xi_u) - (n_0 - n_{\min})} \\ &= -2 \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{n_{\min}}{n_0}} \right)\end{aligned}\tag{5.154}$$

bulunur. Pozitif x doğrultusunda ilerleyen soliton için faz değişimi negatiftir. Bunun sebebi fiziksel olarak dalganın yoğunluk girintisinde olmasıdır ve bunun sonucunda bu durumdaki akışkan hızı negatif x doğrultusundadır.

Bir uzaysal boyut içinde çekici etkileşimler ($U_0 < 0$) için de soliton çözümleri mevcuttur ve buna en basit örnek

$$\psi(x, t) = \psi(0) e^{-i\mu t/\hbar} \frac{1}{\cosh \left[\left(2m|\mu|/\hbar^2 \right)^{1/2} x \right]}\tag{5.155}$$

tir ve buradaki kimyasal potansiyel

$$\mu = \frac{1}{2} U_0 |\psi(0)|^2\tag{5.156}$$

ile verilir. Büyük $|x|$ için ψ söz konusu olamayacağından, bunlar x doğrultusunda uzayda yerleşmiş olan bağlı öz durumlarıdır.

Solitonlar non-lineer optikte de incelenmiştir ve burada ışığın yoğunluğu, atomik buluttaki yoğunlaşma yoğunluğuna benzer bir rol oynamaktadır. Benzer olarak, solitonları tanımlamak için kullanılan “dark” sözcüğü, yoğunluk girintisine karşı gelir. Solitonların bu kategorisi, yoğunluk minimumu sıfır olan “black” ve yoğunluk minimumu sıfırdan biraz daha büyük olan “grey” olmak üzere iki gruba ayrılır. Yoğunluğu maksimum olan solitonlar “bright” olarak adlandırılırlar.

6. BOSE GAZININ MİKROSKOBİK TEORİSİ

Önceki bölümde yoğuşmaya ait temel uyarılmalar, yoğuşma dalga fonksiyonunun klasik bir alan gibi davrandığı kabul edilen Gross-Pitaevski denklemi kullanılarak açıklanmıştı. Bu bölümde, uyarılmaların kuantum doğası da hesaba katılarak Bose gazının mikroskobik teorisi ele alınacaktır.

Burada yapılacak hesaplamaların başlangıç noktası (4.3)'teki Hamiltonyendir. Bozonlar için oluşturma ($\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$) ve yok etme ($\hat{\psi}(\mathbf{r})$) operatörleri terimlerinde ifade edilecek olursa bu Hamiltonyen

$$H = \int d\mathbf{r} \left[-\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{U_0}{2} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \right] \quad (6.1)$$

formundadır. Gross-Pitaevski denkleminde oluşturma ve yok etme operatörleri ile değil, klasik bir alan olan yoğuşmuş durum dalga fonksiyonu ile çalışılır. Bu sebeple Gross-Pitaevski yaklaşımı, fotonların oluşturma ve yok etme operatörleri yerine klasik elektrik ve manyetik alan tarafından karakterize edilen klasik elektrodinamik teoriye benzerdir.

Tüm atomların tek kuantum durumunda yoğunlaştığı seviye etrafındaki kuantum dalgalanmalarını hesaba katmak için

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (6.2)$$

yazılabilir. $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$ dalgalanma terimi ihmal edildiğinde, Gross-Pitaevski denklemindeki enerji ifadesine eşit olan Hamiltonyene ulaşılır.

6.1. Uniform Gazdaki Uyarılmalar

V hacimli kutuda hapsedilen birbiriyle etkileşen bozonların oluşturduğu uniform gaz ele alındığında (6.1)'deki Hamiltonyen

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^0 a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}} \quad (6.3)$$

olur. Burada $\epsilon_{\mathbf{p}}^0 = p^2 / 2m$ 'dir. $a_{\mathbf{p}}$ ve $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, \mathbf{p} momentum durumundaki bozonların oluşturma ve yok etme operatörleri olmak üzere

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}, \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = 0 \quad \text{ve} \quad [a_{\mathbf{p}}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = 0 \quad (6.4)$$

Bose komütasyon bağıntılarını sağlarlar.

Etkileşen sistemde, alçak olan tek parçacık seviyesinin makroskobik olarak işgal edildiği kabul edilir, yani N/V yoğunluğu sabit olmak üzere N ve V sonsuz olma eğiliminde iken termodinamik limitte, N_0/N sıfır olmayan bir değere sahiptir. Pertürbe olmamış sistemde

$$a_0^{\dagger} |N_0\rangle = \sqrt{N_0 + 1} |N_0 + 1\rangle \quad \text{ve} \quad a_0 |N_0\rangle = \sqrt{N_0} |N_0 - 1\rangle \quad (6.5)$$

olur ve Hamiltonyende böylece a_0 ve a_0^{\dagger} ile $\sqrt{N_0}$ yer değiştirir. Bu, ilk kez Bogoliubov tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu durum, (6.2)'de sıfır-momentum dalga fonksiyonu $\phi_0 = V^{-1/2}$ olmak üzere, yoğunlaşmış durum için $\psi = \sqrt{N_0} \phi_0$ dalga fonksiyonunun kullanılması durumuna eşittir.

Bogoliubov yaklaşımında $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$ 'nin küçük olduğu ve etkileşimde $\psi(\mathbf{r})$ ve $\psi^*(\mathbf{r})$ 'nin (en az) ikinci kuvvetindeki tüm terimlerin bulunduğu varsayılır. Bu durum $\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$ ve $\delta\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})$ 'de kuadratik olmayan, $\mathbf{p} \neq 0$ için $a_{\mathbf{p}}$ ve $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ durumuna

denktir. Böylece sıfır-momentum durumundaki parçacık yoğunluğu $n_0 = N_0 / V$ olmak üzere

$$H = \frac{N_0^2 U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} (\epsilon_p^0 + 2n_0 U_0) a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{n_0 U_0}{2} \sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}) \quad (6.6)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemdeki ilk terim sıfır-momentum durumundaki N_0 tane parçacığın enerjisidir ve ikinci terim ise diğer atomlarla etkileşimler tarafından oluşturulan Hartree-Fock ortalama alanında hareket eden $\epsilon_p^0 + 2n_0 U_0$ bağımsız enerjisine sahip uyarılma enerjisidir. Sıfır olmayan bir değere sahip $U(r)$ etkileşim potansiyeline Fourier dönüşümü uygulandığında

$$U(p) = \int d\mathbf{r} U(r) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / \hbar) \quad (6.7)$$

Hamiltonyendeki a_0 ve a_0^\dagger operatörleri c sabit sayılarıyla yer değiştirdiğinde N_0 ile orantılı olan etkileşim terimi:

$$\sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} n_0 [U(0) + U(p)] a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} n_0 U(p) (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}) \quad (6.8)$$

dir. $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ teriminin iki katkısı vardır. Birinci katkı, sıfır-momentum durumunda bulunan N_0 atom ile \mathbf{p} seviyesindeki parçacığın direkt etkileşiminden gelen Hartree enerjisidir. İkinci katkı, \mathbf{p} seviyesindeki atomun sıfır-momentum durumuna; ikinci bir atomun ise eş zamanlı olarak yoğunlaşmadan \mathbf{p} durumuna saçılmasına ait değişim veya Fock terimi olana bilinen enerjidir. Etkileşimin Fourier dönüşümü olan $U(p)$, p 'den bağımsız olduğu için Hartree ve Fock terimlerinin her ikisi de $n_0 U_0$ 'a eşittir. Denklem (6.6) ve (6.8)'deki son terim yoğunlaşmadaki $\pm \mathbf{p}$ momentumlu iki atomun karşılıklı $\pm \mathbf{p}$ momentumlu seviyelere saçılmasına karşı gelir.

Daha sonra burada yapılacak olan işlem (6.6)'daki Hamiltonyenin öz değerlerini bulmaktır. Orijinal Hamiltonyende toplam parçacık sayısı korunur ve bu yüzden sabit ortalama parçacık sayısı için yeni Hamiltonyen için öz değerler bulunabilir. Toplam parçacık sayısı için operatör

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} \quad (6.9)$$

ile verilir. Sıfır-momentum durumundaki operatörler c sayısı gibi düşünüldüğünde, toplam parçacık sayısı için

$$\hat{N} = N_0 + \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p} \neq 0)} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} \quad (6.10)$$

yazılabilir. Denklem (6.6)'daki Hamiltonyenin toplam parçacık sayısı terimlerinde ifade edilmesinden

$$H = \frac{N^2 U_0}{2V} + \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p} \neq 0)} \left[(\epsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 U_0) a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + \frac{n_0 U_0}{2} (a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{-\mathbf{p}}^{\dagger} + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}) \right] \quad (6.11)$$

elde edilir. Bu denklemdeki ilk terimde \hat{N} ile beklenen değeri yer değiştirmiştir. Parçacık sayısındaki dalgalanma az olduğundan bu durum izinlidir. Tüm parçacıkların yoğunlaşmış durumda olduğu seviyeden çok az farklı olduğu seviyeler ele alındığından, toplamda yer alan ifadeler için yoğunlaşma yoğunluğu veya toplam yoğunluk ifadesinin kullanılması herhangi bir farklılık yaratmaz. Toplam parçacık sayısının sabit olduğu durum nedeniyle, $a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}$ sabiti $\epsilon_{\mathbf{p}}^0 + 2n_0 U_0$ 'dan $\epsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 U_0$ 'a indirgenebilir. Uyarılmaların klasik düzeltmesi olarak önceki bölümde bu durum kimyasal potansiyelin çıkarılmasına karşı geliyordu, çünkü (4.12)'ye göre sıfır sıcaklıktaki uniform Bose gazı için kimyasal potansiyel $n_0 U_0$ 'dır.

$\epsilon_p^0 + n_0 U_0$ enerjisi \mathbf{p} 'nin yönüne bağlı değildir ve bu nedenle Denklem (6.11)'deki Hamiltonyen simetrik formda

$$H = \frac{N^2 U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} \left[(\epsilon_p^0 + n_0 U_0) (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}) + n_0 U_0 \sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}) \right] \quad (6.12)$$

\mathbf{p} ve $-\mathbf{p}$ 'ye karşı gelen terimlerin bir kez hesaba katılması için toplam üzerinde kullanılan kesme işareti, toplamın momentum uzayının yarısı üzerinden alınacağını göstermektedir.

6.1.1. Bogoliubov Dönüşümü

Hamiltonyenin yapısı

$$\epsilon_0 (a^\dagger a + b^\dagger b) + \epsilon_1 (a^\dagger b^\dagger + ba) \quad (6.13)$$

formundaki birbirinden bağımsız terimlerin toplamından oluştuğundan, basittir. Buradaki ϵ_1 ve ϵ_2 , c sayılarıdır. a^\dagger ve a , \mathbf{p} momentumlu durumdaki oluşturma ve yok etme operatörleri; b^\dagger ve b ise $-\mathbf{p}$ momentumlu durumdaki yok etme ve oluşturma operatörlerine karşı gelir.

Bu Hamiltonyenin öz değerleri ve öz seviyeleri, sıvı helyum içeriğinde Bogoliubov'un yaptığı gibi kanonik dönüşümlerin uygulanmasıyla elde edilebilir. Bu yöntem oldukça verimlidir ve yoğun olarak süper iletkenlik ve manyetizmada kullanılır. Bu yöntemde temel fikir, α ve β gibi yeni bir operatör seti öne sürülür ve böylece Hamiltonyende yalnızca $\alpha^\dagger \alpha$ ve $\beta^\dagger \beta$ ile orantılı terimler bulunur.

Bozonlar için oluşturma ve yok etme operatörleri komütasyon bağıntılarını sağlar:

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1 \quad \text{ve} \quad [a, b^\dagger] = [b, a^\dagger] = 0 \quad (6.14)$$

u ve v belirlenecek olan sabitler olmak üzere, dönüşüm tarafından yeni α ve β operatörleri

$$\alpha = ua + vb^\dagger \quad \text{ve} \quad \beta = ub + va^\dagger \quad (6.15)$$

dir. Bu yeni operatörler de Bose komütasyon bağıntılarını sağlamalıdır:

$$[\alpha, \alpha^\dagger] = [\beta, \beta^\dagger] = 1 \quad \text{ve} \quad [\alpha, \beta^\dagger] = [\beta, \alpha^\dagger] = 0 \quad (6.16)$$

u ve v fazları keyfi olduğundan, u ve v reel alınabilir. Denklem (6.15)'in (6.16)'da yerleştirilerek, (6.14) numaralı denklemde kullanılmasıyla u ve v 'nin

$$u^2 - v^2 = 1 \quad (6.17)$$

koşulunu sağlaması gerektiği görülür. Denklem (6.15)'e karşı gelen ters dönüşümün ardından

$$a = u\alpha - v\beta^\dagger \quad \text{ve} \quad b = u\beta - v\alpha^\dagger \quad (6.18)$$

olur. Yukarıda elde edilen denklemin (6.13)'te kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} H = 2v^2 \epsilon_0 - 2uv \epsilon_1 + [\epsilon_0 (u^2 + v^2) - 2uv \epsilon_1] (\alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta) \\ + [\epsilon_1 (u^2 + v^2) - 2uv \epsilon_0] (\alpha \beta + \beta^\dagger \alpha^\dagger) \end{aligned} \quad (6.19)$$

$(\alpha \beta + \beta^\dagger \alpha^\dagger)$ ile orantılı olan terim, u ve v sabitlerinin uygun seçimiyle yok edilebilir. Bunun için

$$\epsilon_1 (u^2 + v^2) - 2uv \epsilon_0 = 0 \quad (6.20)$$

alınmalıdır.

u 'nun işareti keyfidir ve pozitif olarak kabul edildiğinde Denklem (6.17)'deki normalizasyon şartının sağlanması koşulundan u ve v için

$$u = \cosh t \quad \text{ve} \quad v = \sinh t \quad (6.21)$$

bulunur. Denklem (6.20)'den

$$\epsilon_1 (\cosh^2 t + \sinh^2 t) - 2 \epsilon_0 \sinh t \cosh t = 0 \quad (6.22)$$

veya

$$\tanh 2t = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (6.23)$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemden

$$u^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} + 1 \right) \quad \text{ve} \quad v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \quad (6.24)$$

bulunur. Burada

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_0^2 - \epsilon_1^2} \quad (6.25)$$

u ve v 'nin negatif olmaması için başlangıçtaki seçimle de uygun olarak karekökün pozitif kökü seçilir. $u^2 + v^2$ ve $2uv$ için ϵ_1 / ϵ_0 oranı terimlerinde çözüp, (6.19)'da yerleştirildiğinde

$$H = \epsilon (\alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta) + \epsilon - \epsilon_0 \quad (6.26)$$

sonucuna ulaşılır. Taban durumu enerjisi negatif olan $\epsilon - \epsilon_0$ ile verilir ve ϵ enerjili birbirinden bağımsız iki bozonun eklenmesine karşı gelen uyarılmış

seviyeler α^\dagger ve β^\dagger operatörleri tarafından oluşturulur. ϵ 'nin reel olması için ϵ_0 'ın değeri, ϵ_1 'i aşmalıdır. $|\epsilon_1\rangle|\epsilon_0\rangle$ ise uyarılma enerjisi sanaldır ve durum sistemin stabil olmadığı anlamına gelir.

6.1.2. Temel Uyarılmalar

Denklem (6.12)'deki Hamiltonyenin köşegenleştirilmesi için yukarıdaki alt bölüme ait sonuçlar kullanılabilir. $a_{\mathbf{p}}$ basit modeldeki a 'ya, $a_{-\mathbf{p}}$ basit modeldeki b 'ye, $\alpha_{\mathbf{p}}$ basit modeldeki α 'ya ve $\alpha_{-\mathbf{p}}$ basit modeldeki β 'ya karşı gelmek üzere

$$a_{\mathbf{p}} = u_p \alpha_{\mathbf{p}} - v_p \alpha_{-\mathbf{p}}^\dagger \quad \text{ve} \quad a_{-\mathbf{p}} = u_p \alpha_{-\mathbf{p}} - v_p \alpha_{\mathbf{p}}^\dagger \quad (6.27)$$

dönüşümü yapılabilir. Böylece sonuç

$$H = \frac{N^2 U_0}{2V} + \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p} \neq 0)} \epsilon_p \alpha_{\mathbf{p}}^\dagger \alpha_{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p} \neq 0)} (\epsilon_p^0 + n_0 U_0 - \epsilon_p) \quad (6.28)$$

olur. Burada

$$\epsilon_p = \sqrt{(\epsilon_p^0 + n_0 U_0)^2 - (n_0 U_0)^2} = \sqrt{(\epsilon_p^0)^2 + 2 \epsilon_p^0 n_0 U_0} \quad (6.29)$$

ile verilir. Yukarıdaki denkleme ait enerji spektrumu, (5.48)'deki sonuç ile tam olarak uyumludur. Küçük p değerleri için enerji $\epsilon_p = sp$ dir. Burada

$$s^2 = \frac{n_0 U_0}{m} \quad (6.30)$$

dir. Temel uyarılmaların oluşturma ve yok etme operatörleri:

$$\alpha_{\mathbf{p}}^{\dagger} = u_p a_{\mathbf{p}}^{\dagger} + v_p a_{-\mathbf{p}} \quad (6.31)$$

Denklem (6.17)'ye karşı gelen sabitler normalizasyon koşulunu sağlar:

$$u_p^2 - v_p^2 = 1 \quad (6.32)$$

Parçacığın Hartree-Fock enerjisi ile kimyasal potansiyeli arasındaki fark olan $\xi_p = \epsilon_p^0 + n_0 U_0$ olmak üzere bu sabitler açık bir biçimde

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_p}{\epsilon_p} + 1 \right) \quad \text{ve} \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_p}{\epsilon_p} - 1 \right) \quad (6.33)$$

olur. Böylece sistem, Bogoliubov spektrumu tarafından verilen enerjiye sahip etkileşmeyen bozonlar topluluğu gibi davranır. Sistemin taban durumunda uyarılma söz konusu değildir ve böylece $\alpha_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ 'dır.

6.2. Tuzaktaki Gaza Ait Uyarılmalar

Önceki bölümde uyarılma özellikleri klasik yaklaşım kullanılarak hesaplanmıştı. Bu duruma paralel olan kuantum mekaniksel teori benzer çerçevede geliştirilebilir. Klasik durumda kullanılan enerji fonksiyonundan başlamak yerine, (6.1)'de verilen Hamiltonyen operatörü ve yoğunlaşmış durumun bölümlerine karşı gelen (6.2)'deki ifade dikkate alınır. Ayrıca ortalama olarak parçacık sayısının korunması istendiğinden, $K = H - \mu \hat{N}$ operatörü ile çalışmak Hamiltonyenin kendisi ile çalışmaktan daha uygundur. Dalgalanma operatörünü içermeyen terim Gross-Pitaevski denklemidir (Denklem (4.11)). Tek dalgalanma operatörüne sahip terim, ψ dalga fonksiyonunun zamandan bağımsız Gross-Pitaevski denklemini sağladığı durumda yok olur, çünkü n enerji varyasyonları, ψ 'nin birinci mertebeden varyasyonlarını yok etmelidir.

İkinci mertebeden dalgalanmalar için Hamiltonyen:

$$\begin{aligned}
K = H - \mu\hat{N} = E_0 - \mu N_0 + \int d\mathbf{r} & \left(-\delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) \right. \\
& + \left[V(\mathbf{r}) + 2U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 - \mu \right] \delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) \\
& \left. + \frac{U_0}{2} \left\{ \psi(\mathbf{r})^2 [\delta\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})]^2 + \psi^*(\mathbf{r})^2 [\delta\hat{\psi}(\mathbf{r})]^2 \right\} \right), \quad (6.34)
\end{aligned}$$

Bu denklem, (6.11)'deki sabit potansiyelde bulunan gazın enerji ifadesine benzerdir. Temel uyarılmaların enerjilerini bulmak için, zamandan bağımsız Gross-Pitaevski denkleminde yararlanılarak uyarılmaların özelliklerinin belirlendiği, Bölüm 5.2'dekine benzer bir yaklaşım kullanılır. Heisenberg çerçevesinde $\delta\hat{\psi}$ ve $\delta\hat{\psi}^\dagger$ operatörleri için hareket denklemi aşağıdaki gibidir:

$$i\hbar \frac{\partial \delta\hat{\psi}}{\partial t} = [\delta\hat{\psi}, K] \quad \text{ve} \quad i\hbar \frac{\partial \delta\hat{\psi}^\dagger}{\partial t} = [\delta\hat{\psi}^\dagger, K] \quad (6.35)$$

Denklem (6.34)'ten K 'nin kullanılmasıyla

$$i\hbar \frac{\partial \delta\hat{\psi}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n_0(\mathbf{r})U_0 - \mu \right] \delta\hat{\psi} + U_0 \psi(\mathbf{r})^2 \delta\hat{\psi}^\dagger \quad (6.36)$$

ve

$$-i\hbar \frac{\partial \delta\hat{\psi}^\dagger}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n_0(\mathbf{r})U_0 - \mu \right] \delta\hat{\psi}^\dagger + U_0 \psi^*(\mathbf{r})^2 \delta\hat{\psi} \quad (6.37)$$

Bu çiftlenmiş denklemleri çözmek için Denklem (5.41)'deki dönüşüme benzer bir

dönüşüm uygulanır:

$$\delta\hat{\psi}(\mathbf{r},t) = \sum_i \left[u_i(\mathbf{r})\alpha_i e^{-i\epsilon_i t/\hbar} - v_i^*(\mathbf{r})\alpha_i^\dagger e^{i\epsilon_i t/\hbar} \right] \quad (6.38)$$

Burada α_i^\dagger ve α_i operatörleri, i uyarılmış durumunda bozonları oluşturur ve yok eder. Böylece $\psi(\mathbf{r})^2 = \psi^*(\mathbf{r}) = n_0(\mathbf{r})$ yazılabilir. Bu değer yerine yerleştirildiğinde u_i ve v_i 'nin klasik düzeltmede olduğu gibi aşağıdaki Bogoliubov denklemlerini sağlaması gerektiği görülür:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n_0(\mathbf{r})U_0 - \mu - \epsilon_i \right] u_i(\mathbf{r}) + n_0(\mathbf{r})U_0 v_i(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.39)$$

ve

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n_0(\mathbf{r})U_0 - \mu + \epsilon_i \right] v_i(\mathbf{r}) + n_0(\mathbf{r})U_0 u_i(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.40)$$

Schrödinger denklemi için normal ifadenin genelleştirilmesiyle, farklı enerjili öz durumların ortogonal olduğu aşağıdaki denklem yoluyla da görülür:

$$\int d\mathbf{r} \left[u_i(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) - v_i^*(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (6.41)$$

u ve v terimleri arasındaki işaret farkı, iki Bogoliubov denklemindeki farklı işarete sahip ϵ_i enerjilerinin oluştuğu gerçeğini yansıtmaktadır. α_i^\dagger ve α_i operatörlerinin Bose komütasyon bağıntısını sağlaması gerektiğinden

$$\int d\mathbf{r} \left[|u_i(\mathbf{r})|^2 - |v_i(\mathbf{r})|^2 \right] = 1 \quad (6.42)$$

sonucuna ulaşılır. Normalizasyondaki bu seçim, (5.44) ve (5.51)'deki uniform

sistem için klasik teoridekiyle $u(\mathbf{r})$ ve $v(\mathbf{r})$ uyumludur.

Sistem sıradan bir sıfır-enerji moduna sahiptir. Yoğuşma dalga fonksiyonunun tüm fazı değiştiğinde, enerji değiştirilemez ve bu sebeple de geri çağırıcı kuvvet söz konusu değildir. Böylece bu modun frekansı sıfırdır. Bu durum, $\delta\phi$ fazdaki değişim olmak üzere, yoğuşma dalga fonksiyonundaki $\delta\psi = i\psi\delta\phi$ değişimine karşı gelir.

6.2.1. Zayıf Çiftlenme

Önceki bölümde sözü edilen hidrodinamik teori, statik yapı için Thomas-Fermi yaklaşımının geçerli olduğu güçlü etkileşimleri gerektirmektedir, yani $Na/\bar{a} > 1$ olmalıdır. Bu methoda ek olarak, modlar çoğunlukla bulutun iç bölgesinde olmalıdır, çünkü Thomas-Fermi methodu bulut yüzeyinden itibaren δ sınırlayıcı kalınlığında işe yaramaz. $Na/\bar{a} \ll 1$ olduğu limitte mod özellikleri pertürbasyon teorisi kullanılarak incelenebilir.

Basit olması için atomlar aksenal simetriye sahip olmayan bir harmonik tuzak içinde bulunsun ve atomlar arasındaki etkin etkileşim $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \propto \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ formunda olsun. Etkileşimlerin söz konusu değilken taban durumundaki tüm atomlar osilatörün en düşük seviyesinde bulunurlar. Sistemin temel uyarılmaları, bir veya daha fazla sayıdaki atomun harmonik osilatörün uyarılmış seviyelerine çıkarılmasına karşı gelir. Eğer osilatör frekansları orantılı değilse, etkileşimin zayıf olması durumunda üç koordinat doğrultusu boyunca hareketle ilgili uyarılmalar birbirinden bağımsızdır. Burada en basit uyarılma bir atomun osilatörünün taban durumundan, z doğrultusundaki hareket için osilatörün n . kuantum durumuna geçmesidir. x ve y 'deki serbestlik dereceleri ihmal edilecek olursa, taban durumu $|0^N\rangle$ ve uyarılmış durum ise $|0^N n^1\rangle$ biçiminde yazılabilir. Taban durumundaki enerjinin beklenen değeri, birinci mertebeden etkileşim tarafından aşağıdaki gibi verilir:

$$E_0 = \frac{N}{2}\hbar(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + \frac{N(N-1)}{2}\langle 00|U|00\rangle \quad (6.43)$$

Burada $\langle ij|U|kl\rangle$ osilatör seviyeleri arasındaki iki-cisim etkileşiminin matris elemanıdır. Uyarılmış durumdaki enerji direkt olarak

$$E_n = \frac{N}{2}\hbar(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + n\hbar\omega_3 + \frac{N(N-1)(N-2)}{2}\langle 00|U|00\rangle + 2(N-1)\langle 0n|U|0n\rangle \quad (6.44)$$

bulunur. Son terimde bulunan 2 sayısının sebebi Hartree ve Fock terimlerinin etkileşimlerde yakın nicelikler için katkısının olmasından ileri gelir. Böylece uyarılma enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$\epsilon_n = E_n - E_0 = n\hbar\omega_3 + (N-1)(2\langle 0n|U|0n\rangle - \langle 00|U|00\rangle) \quad (6.45)$$

Basit hesaplamalardan

$$\langle 01|U|01\rangle = \frac{1}{2}\langle 00|U|00\rangle \quad \text{ve} \quad \langle 02|U|02\rangle = \frac{3}{8}\langle 00|U|00\rangle \quad (6.46)$$

bulunur. Yani $n=1$ durumunun frekansı, etkileşimlerin olmadığı durumdaki frekans değerine eşittir. Bunun sebebi bu modun yalnızca kütle-merkezi hareketinin uyarılmasına karşı gelmesindedir. $N \gg 1$ için $n=2$ modundan

$$\epsilon_2 = 2\hbar\omega_3 - \frac{N}{4}\langle 00|U|00\rangle \quad (6.47)$$

elde edilir. Yukarıdaki sonuç, ortak koordinat yaklaşımından da elde edilebilir. Zayıf çiftlenim limitinde modun z doğrultusu boyunca genişlemesine karşı gelir.

Yukarıdaki düzeltmede, etkileşimlerin söz konusu olmadığı durumda düşük uyarılmaların dejenereliği hesaba katılmamıştır. Örneğin $|0^{N-1}2^1\rangle$ ile $|0^{N-2}1^2\rangle$ durumları dejeneredir. Etkileşimler bu dejenereliği bozar, fakat N 'den bağımsız olan terimler tarafından da uyarılma enerjisini kaydırırlar. Fazla sayıda etkileşim söz konusu olduğunda problem daha karmaşık bir hal alır.

6.3. Sıfır Olmayan Sıcaklık Limiti

Sıfır olmayan sıcaklıklarda temel uyarılmalar söz konusudur. Geçiş sıcaklığının oldukça altındaki sıcaklıklarda ise parçacıklar arası etkileşimler ihmal edilebilir. Denge halinde uyarılmalar için dalga fonksiyonu bu sebeple daha önceki bölümde Bogoliubov yaklaşımı tarafından hesaplanmış olan enerjilere sahip genel Bose-Einstein dalga fonksiyonudur. Burada yapılacak önemli bir ekleme, bu uyarılmaların toplam parçacık sayısını değiştirmedir ve bunun sonucunda ise Bose dağılımında kimyasal potansiyel teriminin bulunmadığıdır:

$$f_i = \frac{1}{\exp(\epsilon_i / kT) - 1} \quad (6.48)$$

Bu tür bir bakış açısı altında, buradaki uyarılmalar sıvı ${}^4\text{He}$ 'da lineer bölgedeki uyarılmalar olarak adlandırılan fononlara ve minimuma yakın bölgelerdeki uyarılmalar olarak adlandırılan rotonlara benzemektedir. Uyarılmalar için dağılım fonksiyonundan hareketle gazın termodinamik özellikleri hesaplanabilir. Örneğin uniform Bose gazı için enerjiye temel katkı

$$E(T) - E(T = 0) = V \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \epsilon_p f_p \quad (6.49)$$

dir. Yoğuşma yoğunluğunun termal bozulması

$$n_{ex}(T) - n_{ex}(T = 0) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\xi_p}{\epsilon_p} f_p \quad (6.50)$$

ile verilir. Bu denkleme göre, toplam parçacık sayısı sabit tutulduğunda uyarılmanın hesaba katılması, yoğuşmada bulunan parçacık sayısını ξ_p / ϵ_p oranında azaltır. Sıcaklık, T_* karakteristik sıcaklığından daha az olduğunda:

$$kT_* = ms^2 \cong nU_0 \quad (6.51)$$

Uniform gazın uyarılmaları, enerjisi $\epsilon = sp$ ile verilmek üzere fonon-benzeridir. Bu limitte enerjiye en büyük katkı (6.50) denklemi ile verilir ve $\alpha = 3/2$ için etkileşmeyen gazda bulunan $T^{5/2}$ 'nin aksine T^4 ile orantılıdır. Aynı denklemden entropi ve öz ısının her ikisi de T^3 ile orantılıdır ve bu durum etkileşmeyen gaz için $T^{3/2}$ 'ye karşı gelir. $p \ll ms$ için parçacık sayısı ξ_p / ϵ_p ile p ters orantılı olduğundan, (6.50)'den elde edilen yoğunlaşma yoğunluğunun termal bozulması, etkileşmeyen gaz için (2.28)'deki n_{ex} 'ten elde edilen $T^{3/2}$ 'nin tersine T^2 ile orantılıdır.

6.3.1. Hartree-Fock Yaklaşımı

Yukarıdaki hesaplamalarda sistemin taban durumuna yakın olduğu ve uyarılmaların birbirinden bağımsız olduğu kabul edilmişti. Daha yüksek sıcaklıklarda uyarılmalar arasındaki geçişler önemlidir ve yoğunlaşma dalga fonksiyonunun daha küçük kuvvetlerindeki Hamiltonyen terimlerinde tanımlanır. Keyfi sıcaklıklardaki Bose gazının özelliklerinin bulunması zordur, fakat yine de basit bir fiziksel çerçevede hesaplanılabilir bir limiti vardır. Taban durumundan çok uzakta olmayan seviyedeki homojen gazda yüksek momentuma sahip uyarılma enerjisi (5.50) ile verilmişti. Bu yaklaşım formu, v 'nin ihmal edilmesiyle genel teoriden elde edilir, yani $\pm \mathbf{p}$ momentumuna sahip parçacığın yoğunlaşmaya eklenmesi veya çıkarılmasına karşı gelir. Bu durumun dalga fonksiyonu, tek-parçacık durumlarının çarpımı şeklindedir ve Bose istatistiğinde hesaba katıldığı gibi parçacık koordinatlarının karşılıklı değişimi altında simetriktir. Bogoliubov Hamiltonyenindeki $a^\dagger a^\dagger$ ve aa terimleri ilgilenilen uyarılmalar için ihmal edilebilir olduğunda, v 'nin ihmalispatlanabilir. Bu durum $\epsilon_p^0 \gg n_0 U_0$ olmasını gerektirir. Sıcaklık terimlerinde ifade edildiğinde bu durum $T \gg T_*$ koşuluna karşı gelir (Denklem(6.51)).

Bu durumun fiziğini incelemek için Bose gazı konuma bağlı bir potansiyel içinde ele alınır.

Dalga fonksiyonunun da tek-parçacık seviyelerinin çarpımı ve parçacıklar arası geçişler için simetrik olması koşulundan hareketle

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = c_N \sum_{sym} \phi_1(\mathbf{r}_1) \phi_2(\mathbf{r}_2) \dots \phi_N(\mathbf{r}_N) \quad (6.52)$$

yazılabilir. İşgal edilmiş tek-parçacık sisteminin dalga fonksiyonu ϕ_i ile gösterilmiştir. Örneğin α seviyesinde N_α tane parçacık varsa, bu seviye N_α kez bu dalga fonksiyonunda ardışık olarak bulunacaktır. Yukarıdaki toplam, parçacık koordinatlarının karşılıklı değişimi boyunca simetrik ve normalizasyon sabiti aşağıdaki gibidir:

$$c_N = \left(\frac{\prod_i N_i!}{N!} \right)^{1/2} \quad (6.53)$$

Bu dalga fonksiyonu, parçacıkların aynı seviyede bulunduğu durum için (4.1)'deki dalga fonksiyonunun genelleştirilmiş halidir. Sistemin fiziğini bulabilmek için, \mathbf{r} ve \mathbf{r}' , iki parçacığın koordinatı olmak üzere, (6.7)'deki etkileşim yerine menzili sıfır olmayan $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ etkileşiminin de hesaba katılması oldukça yardımcı olacaktır. Dalga fonksiyonu için etkileşim enerjisi ifadesinde iki sıra terim vardır. İlki, dalga fonksiyonunun simetrik olmadığı durumda ortaya çıkar. Bu terim, direkt terim veya Hartree terimi olarak adlandırılır. Hartree terimi aşağıdaki formda olan katkıları içerir:

$$U_{ij}^{Hartree} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r})|^2 |\phi(\mathbf{r}')|^2 \quad (6.54)$$

Bu denklem $\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}')$ seviyesindeki parçacık çiftinin enerjisidir. İkinci sıra terim ise değişim veya Fock terimi olarak adlandırılır ve dalga fonksiyonunun simetrisinden dolayı ortaya çıkar:

$$U_{ij}^{Fock} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_i^*(\mathbf{r}) \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}') \quad (6.55)$$

Fermiyonlar için Fock terimi, dalga fonksiyonunun antisimetrisinden dolayı zıt işarete sahiptir. Bu terimlerdeki sabitlerin hesaplanmasında (6.52)'deki dalga fonksiyonunun kullanılması gerekir, fakat (6.52)'deki dalga fonksiyonu formları arasındaki operatörlerin matris elemanlarını hesaplamak için “second quantization” formalizmi daha uygundur. Bu notasyonda etkileşim enerjisi operatörünün genel ifadesi;

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|U|kl \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \quad (6.56)$$

dir. Burada

$$\langle ij|U|kl \rangle = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_i^*(\mathbf{r}) \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi_l(\mathbf{r}') \phi_k(\mathbf{r}') \quad (6.57)$$

iki-cisim etkileşiminin matris elemanıdır. Potansiyel enerjiyi belirlemek için $a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$ 'nin beklenen değerinin hesaplanması gerekir. İncelenen tek-parçacık seviyesi ortogonal olduğundan, bu operatörün beklenen değeri, yok olan ve oluşturulan parçacıklara ait iki orbital özdeş olmadıkça ortadan kalkmaz. Bu durumu sağlamanın iki yolu vardır: $i = k$ ile $j = l$ veya $i = l$ ile $j = k$ olmalıdır. δ_i Kronecker delta fonksiyonu olmak üzere, ilk olasılık için matris elemanı $N_i(N_j - \delta_{ij})$ 'dir, çünkü bozonlar için $a_i(a_i^\dagger)$ operatörü, i tek-parçacık seviyesindeki N_i sayıda parçacık üzerine etkideğinde, tek-parçacık seviyesindeki bir adet az (fazla) parçacıklı seviyenin $\sqrt{N_i}(\sqrt{1 - N_i})$ katına eşittir. Fermiyonlar için bu duruma karşı gelen faktörler $\sqrt{N_i}$ ve $\sqrt{1 - N_i}$ 'dir. Dört seviyenin de birbirinin aynı olması durumu hariç tutulursa, ikinci olasılık için matris elemanı $N_i N_j$ 'dir. Bozonlar için etkileşim enerjisinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle ij|U|ij \rangle N_i(N_j - \delta_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_{ij(i \neq j)} \langle ij|U|ji \rangle N_i N_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \langle ii|U|ii \rangle N_i(N_i - 1) + \sum_{i \neq j} (\langle ij|U|ij \rangle + \langle ij|U|ji \rangle) N_i N_j \quad (6.58) \end{aligned}$$

olur. $\langle ij|U|ij \rangle$ 'yi kapsayan katkılar direkt terimlerdir; $\langle ij|U|ji \rangle$ 'yi kapsayan terimler ise karşılıklı değişim terimleridir.

Etkileşim için $\langle ij|U|ij \rangle$ ve $\langle ij|U|ji \rangle$ matris elemanları özdeştir ve böylece etkileşim enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \langle ii|U|ii \rangle N_i(N_i - 1) + 2 \sum_{i \neq j} \langle ij|U|ij \rangle N_i N_j \quad (6.59)$$

dir. Fermiyonlar için aynı dahili durum söz konusu iken bozonlar için karşılıklı değişim etkisi, $N_i N_j$ ile orantılı olan terimin iki katıdır. Dalga fonksiyonunun antisimetrisi gereği etkileşim için toplam potansiyel enerji yok olur ve dalga fonksiyonunda gecikmeye sebep olur.

Homojen boz gazına bakıldığında dönüşüm invaryantlığından tek-parçacık dalga fonksiyonlarının, düzlem dalgalar olması gerektiği sonucuna varılır. Başlangıç ve son seviyelerinin toplam momentumlarının aynı olması şartıyla, etkileşimin matris elemanları U_0/V 'dir ve seviyelerin enerjisi aşağıdaki formdadır:

$$E = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^0 N_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} N_{\mathbf{p}} (N_{\mathbf{p}'} - \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}) + \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \neq \mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}'} \quad (6.60)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^0 N_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{2V} N(N-1) + \frac{U_0}{2V} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \neq \mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}'} \quad (6.61)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}^0 N_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{V} \left(N^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}^2 - \frac{N}{2} \right) \quad (6.62)$$

Sıfır-momentum seviyesi, makroskobik olarak yerleşilen tek seviyedir ve bu yüzden yalnızca N^2 ile orantılı olan terimler alındığında etkileşim enerjisi $(N^2 - N_0^2/2)U_0/V$ 'dir. Verilen sayıda parçacık içeren sistem için T_C 'nin

üzerindeki sıcaklıklarda, saf yoğuşmada bulunmayan değişim teriminin varlığı nedeniyle sıfır sıcaklıkta elde edilen yukarıdaki etkileşim enerjisinin iki katıdır.

\mathbf{p} momentumlu uyarılmanın enerjisi $\epsilon_{\mathbf{p}}$, $N_{\mathbf{p}}$ 'nin $N_{\mathbf{p}} + 1$ biçiminde değiştirilmesiyle sisteme parçacık eklenmesine karşı gelen durum (6.62)'den elde edilir:

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}}^0 + \frac{N}{V} U_0 + \frac{N - N_{\mathbf{p}}}{V} U_0 \quad (6.63)$$

İlk etkileşim terimi, N parçacık orijinal sistem ile eklenen parçacığın direkt etkileşimi ifade eden Hartree katkısıdır. İkinci etkileşim terimi yani Fock katkısı, değişimden ötürüdür ve eklenen parçacığınkinden farklı olan seviyedeki parçacıkların sayısı ile orantılıdır, çünkü aynı tek-parçacık seviyesinde bulunan atomlar arasında değişimin katkısı yoktur.

Yalnızca sıfır-momentum seviyesi makroskopik olarak işgal edilmiş olmak üzere, bu seviyeye ait uyarılma enerjisi hesaplanabilir. $1/N$ mertebesindeki terimlerle

$$\epsilon_{\mathbf{p}=0} = (2n - n_0)U_0 = (n_0 + 2n_{ex})U_0 \quad (6.64)$$

yazılabilir. Burada n parçacıkların toplam yoğunluğu, n_0 yoğuşmadaki parçacıkların yoğunluğu ve $n_{ex} = n - n_0$ ise yoğuşmamış parçacıkların sayısıdır. Diğer seviyeler için de

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}}^0 + 2nU_0 \quad (6.65)$$

yazılabilir.[3,5,11]

6.3.1.1. Termal denge

Hartree-Fock yaklaşımının termodinamiğini incelemek için izlenecek yol etkileşimin söz konusu olmadığı gazdaki durum ile aynıdır, fakat burada enerji için serbest parçacık yerine Hartree-Fock ifadesi kullanılır. Hartree-Fock yaklaşımında seviyelerin belirlenmesi, serbest parçacık için seviyelerin belirlenmesi ile benzerdir ve böylece bozonlar için S entropisi

$$S = k \sum_{\mathbf{p}} \left[(1 + f_{\mathbf{p}}) \ln(1 + f_{\mathbf{p}}) - f_{\mathbf{p}} \ln f_{\mathbf{p}} \right] \quad (6.66)$$

dir. Burada $f_{\mathbf{p}}$, momentumu \mathbf{p} 'ye yakın olan seviyeler için ortalama yerleşim sayısıdır. Denge dağılımı, toplam enerji ve toplam parçacık sayısının sabit olduğu duruma bağlı olarak entropinin maksimum tutulmasıyla elde edilmiştir. Buradaki uyarılmalar gaza tek parçacığın eklenmesine karşı gelir. Bu nedenle entropinin maksimum olması durumunda parçacık sayısını sabit bir değerde tutmak için kimyasal potansiyel terimi ileri sürülmelidir.

Denge dağılımı böylece

$$f_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\exp[(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)/kT] - 1} \quad (6.67)$$

dir ve uyarılma enerjileri Hartree-Fock ifadeleriyle (6.64) ve (6.65) denklemlerinde verilmiştir.

Makroskobik olarak işgal edilmiş sıfır-momentum seviyesi için parçacığa verilmesi gereken enerji $1/N$ mertebesindeki terimlerle kimyasal potansiyele eşittir. Buna göre (6.64) denklemi

$$\mu = (n_0 + 2n_{ex})U_0 \quad (6.68)$$

ve diğer seviyelerin ortalama yerleşimi için

$$f_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\exp[(\epsilon_p^0 + n_0 U_0)/kT] - 1} \quad (6.69)$$

yazılabilir. Yoğuşmamış parçacık sayısının sabit olması gerektiğinden

$$N - N_0 = \sum_{p(p \neq 0)} f_p \quad (6.70)$$

$$= \sum_{p(p \neq 0)} \frac{1}{\exp[(\epsilon_p^0 + n_0 U_0) / kT] - 1} \quad (6.71)$$

olur. $n_0 = N_0 / V$ dağılım fonksiyonunda olduğundan, yoğuşmada bulunan parçacıkların sayısının sabit olma koşulunu sağlar.

Geçiş sıcaklığının üzerinde tüm seviyelerin enerjileri aynı miktarda kayar ve sonuçta gazın termodinamik özellikleri basit bir biçimde etkileşimde bulunmayan parçacıkların özellikleriyle ilişkilendirebilir. Aslında mükemmel Bose gazı için enerji ve serbest enerji ifadeleri $N^2 U_0 / V$ ek terimi dışında aynıdır. Çünkü sıcaklığa bağlı değildir ve etkileşimlerin geçiş sıcaklığı üzerine hiçbir etkisi yoktur.

Oluşturma ve yok etme operatörleri terimlerinde teori yeniden formüle edildiğinde, sıfır-momentum seviyesi makroskopik olarak işgal edilmiş tek seviye ise, düzlem dalgaların simetriği olan dalga fonksiyonuna ait durum için enerjinin beklenen değere katkısı Hamiltonyen terimlerinde:

$$H = \frac{N_0^2 U_0}{2V} + \sum_{p(p \neq 0)} (\epsilon_p^0 + 2n_0 U_0) a_p^\dagger a_p + \frac{U_0}{V} \sum_{pp'(p, p' \neq 0)} a_p^\dagger a_p a_{p'}^\dagger a_{p'} \quad (6.72)$$

Burada $1/N$ ile orantılı olan terim ihmal edilmiştir.

Sistemin f_p ortalama yerleşim sayısına yakın bir durumda olduğunu ve çok sayıda uyarılmanın küçük değişimleri için Hamiltonyenin ne olduğu araştırıldığında

$$a_p^\dagger a_p = f_p + (a_p^\dagger a_p - f_p) \quad (6.73)$$

yazılır ve Hamiltonyen birinci mertebeden dalgalanma terimlerinde genişletilir.

Bogoliubov yaklaşımında yapıldığı gibi sıfır-momentum seviyesinin dalgalanmaları ihmal edilir. Böylece sonuç

$$H = \frac{N_0^2 U_0}{2V} - \frac{U_0}{V} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}' (\mathbf{p}, \mathbf{p}' \neq 0)} f_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}'} + \sum_{\mathbf{p} (\mathbf{p} \neq 0)} (\epsilon_p^0 + 2n_0 U_0) a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (6.74)$$

olur. Bu denklem göstermektedir ki sıfır-momentuma sahip olmayan seviyeye bir parçacık eklemek için gerekli olan enerji $\epsilon_p^0 + 2n_0 U_0$ 'dır ve bu enerji (6.66)'daki Hartree-Fock uyarılma enerjisidir.

Entropi sabit olmak üzere kimyasal potansiyel

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_S \quad (6.75)$$

dir. Sıfır-momentum seviyesiyle ilgili olan entropi sıfırdır ve bu yüzden yoğunlaşmaya parçacık eklendiğinde enerji değişiminin hesaplanması için en basit yol uyarılma dağılımını sabit tutmaktır:

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N_0} \right|_{f_{\mathbf{p}} (\mathbf{p} \neq 0)} = (n_0 + 2n_{ex}) U_0 \quad (6.76)$$

Bu ifade (6.68) denklemini ile uyumludur.

ϵ_p uyarılma enerjisi, $p \rightarrow 0$ için $2nU_0$ eğiliminde olduğundan, kimyasal potansiyelden yararlanılarak ölçülen uyarılma enerjisi bu yaklaşımda $n_0 U_0$ 'lık bir boşluğa sahiptir. Hartree-Fock yaklaşımındaki uzun dalgaboyuna sahip uyarılmaların, fiziksel olarak Bogoliubov teorisinde olduğu gibi spektrumunda hiçbir boşluk olmayan ses dalgaları olmaları beklenirken, diğer parçacıkların ortalama alanında hareket ederler.

6.3.2. Popov Yaklaşımı

Hartree-Fock yaklaşımının ötesinde etkileşimlerden kaynaklanan ayrıca u ve v 'nin çiftlenmesinden de etkilenen parçacık benzeri ve hole benzeri uyarılmaların karışımının da hesaba katılması gerekmektedir. Bu etki, ϵ_p^0 'ın $n_0 U_0$ 'dan küçük veya kıyaslanabilir olduğu momentumlar için önemlidir. Bunun basit bir yolu parçacık çiftlerinin oluşturma ve yok etme operatörleri terimlerinde Bogoliubov Hamiltonyeninin, Hartree-Fock Hamiltonyeni terimlerinde aşağıdaki gibi yazılmasıdır:

$$H = \frac{N_0^2 U_0}{2V} - \frac{U_0}{V} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'(\mathbf{p},\mathbf{p}'\neq 0)} f_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}'} + \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p}\neq 0)} (\epsilon_p^0 + 2n_0 U_0) a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + n_0 U_0 \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p}\neq 0)} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}) \quad (6.77)$$

Bu yaklaşım genellikle “Popov yaklaşımı” olarak adlandırılır.

Burada Hamiltonyenin kendisi yerine parçacık sayısının korunması şartıyla

$H - \mu \hat{N}$ niceliğiyle ilgilenilir. Böylece:

$$H - \mu \hat{N} = -\frac{N_0^2 U_0}{2V} - \frac{2N_0 N_{ex} U_0}{V} - \frac{N_{ex}^2 U_0}{V} + \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p}\neq 0)} [(\epsilon_p^0 + n_0 U_0)(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}) + n_0 U_0 (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}})] \quad (6.78)$$

Burada

$$N_{ex} = \sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p}\neq 0)} \langle a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \rangle \quad (6.79)$$

uyarılmış parçacık sayısının beklenen değeridir. Elde edilen Hamiltonyen dikkat çekici bir biçimde c sabitleri dışında (6.12)'de verilen sıfır-sıcaklıktaki Bogoliubov Hamiltonyeni ile benzerdir. Bu sebeple spektrum, sıfır-sıcaklık dışında ilgilenilen bir sıcaklık için de Bogoliubov ifadesi ile verilir. Burada da uzun dalga boyu uyarılmaları fononlardır ve s hızı

$$s(T)^2 = \frac{n_0(T)U_0}{m} \quad (6.80)$$

ile verilir. Serbest parçacık davranışına geçişi ifade eden tutarlı uzunluk

$$\xi(T) = \left[\frac{\hbar^2}{2mn_0(T)U_0} \right]^{1/2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2ms(T)}} \quad (6.81)$$

ile verilir. Bu denklem, uzun dalga boyundaki uyarılma enerjisinin kimyasal potansiyelden n_0U_0 kadar farklı olduğu Hartree-Fock spektrumuna zıttır.

6.3.3. Uniform Olmayan Gazdaki Uyarılmalar

Hartree-Fock ve Popov yaklaşımları, tuzaktaki gazların uyarılmalarında kullanılabilir. Hartree-Fock yaklaşımında uyarılmış durumlar için ϕ_i dalga fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 \right] \phi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (6.82)$$

Yoğuşmuş durum için ϕ_0 dalga fonksiyonuna karşı gelen ifade ise

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + [n_0(\mathbf{r}) + 2n_{ex}(\mathbf{r})]U_0 \right\} \phi_0(\mathbf{r}) = \mu \phi_0(\mathbf{r}) \quad (6.83)$$

dır.

Yoğuşma yoğunluğu teriminde 2 faktörünün olmaması, aynı durumda bulunan iki atom için değişim teriminin olmadığı gerçeğini yansıtmaktadır. Burada $n_0(\mathbf{r})N_0|\phi_0(\mathbf{r})|^2$ yoğuşmuş durumdaki atomların yoğunluğu; $n_{ex}(\mathbf{r}) = \sum_{i \neq 0} N_i |\phi_i(\mathbf{r})|^2$ ise yoğuşmamış parçacıkların yoğunluğudur. Dalga fonksiyonları ve yerleşim sayıları $i \neq 0$ olmak üzere $N_i = \{\exp[(\epsilon_i - \mu)/kT] - 1\}^{-1}$ ve $N = N_0 + \sum_{i \neq 0} N_i$ ile belirlenebilir.

Uyarılmalar için Popov yaklaşımına ait denklemler:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu - \epsilon_i \right] u_i(\mathbf{r}) - n_0(\mathbf{r})U_0 v_i(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.84)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})U_0 - \mu + \epsilon_i \right] v_i(\mathbf{r}) - n_0(\mathbf{r})U_0 u_i(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.85)$$

Yoğuşmuş durum için dalga fonksiyonu, genelleştirilmiş Gross-Pitaevski denklemini sağlar:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + [n_0(\mathbf{r}) + 2n(\mathbf{r})]U_0 - \mu \right\} \phi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.86)$$

Burada potansiyele ekstra katkı yoğuşma ile yoğuşmamış parçacıkların etkileşiminden dolayıdır. Yoğuşmamış parçacıkların yoğunluğu $n_{ex}(\mathbf{r}) = \sum_{i \neq 0} N_i (|u_i(\mathbf{r})|^2 + |v_i(\mathbf{r})|^2)$ ile verilir.

Hartree-Fock ve Popov yaklaşımlarında parçacıklar arası etkileşimin tek etkisi, parçacıkların yoğunluğu veya oluşturulan ve yok edilen parçacık çiftleri arasında statik ortalama alanın çiftlenmesini sağlamaktır. Bu yaklaşımın zorluğu, harmonik tuzaktaki gaz bulutunun incelenmesinde görülebilir. Bu durum bulutun kütle merkezi hareketiyle ilgili olan seçici modlara sahiptir ve osilatör

frekanslarının çok katlı toplamlarından oluşan frekanslara sahiptir. Hartree-Fock ve Popov yaklaşımlarında uygun modlar farklı frekanslara sahiptirler, çünkü uyarılmalarda rolü olan statik potansiyel parçacık etkileşiminden etkilenir. Bu zorlukları düzeltmek için termal uyarılmalar ile yoğunlaşma hareketi arasındaki çiftlenime izin verilmesi gerekir.

6.3.4. Yarı-Klasik Yaklaşım

Bu yaklaşım, parçacıkların de Broglie dalga boyu tuzak tarafından değiştirilen uzunluk skalaları ve parçacık yoğunluğu yeteri kadar yavaş değiştirildiğinde uygulanabilir. Bu koşulun ardından gazın yerel olarak uniform olduğu düşünülür. Yoğunlaşmamış parçacıkların özellikleri yarı-klasik dağılım fonksiyonu $f_p(\mathbf{r})$ ile aşağıdaki parçacık enerjisinin kullanılmasıyla hesaplanabilir:

$$\epsilon_p(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (6.87)$$

Parçacıkların etkileşimi söz konusuysa uyarılmanın özellikleri, uzaysal varyasyonlar uyarılma dalga boyu ile kıyaslandığında büyük olması koşuluyla yarı-klasik yaklaşım tarafından tanımlanabilir. Yoğunlaşmış durumun özellikleri genel olarak yoğunlaşma etkileşiminde termal uyarılmaların izinli olduğu genelleştirilmiş Gross-Pitaevski denklemi ile hesaplanabilir.

Hartree-Fock teorisinden yararlanılarak yarı-klasik enerjiler

$$\epsilon_p(\mathbf{r}) = p^2 / 2m + 2n(\mathbf{r})U_0 + V(\mathbf{r}) \quad (6.88)$$

ile verilir. Termodinamik özelliklerin incelenmesinde uyarılma enerjisi $\epsilon_i - \mu$ kombinasyonuna girer. Bunun için basit bir ifade Thomas-Fermi yaklaşımında bulunur ve yoğunlaşmanın yoğunluğuna ve potansiyeline ait varyasyonlar için uzunluk skalası tutarlı uzunluk ile kıyaslandığında büyük ise uygulanabilir.

Thomas-Fermi yaklaşımında kimyasal potansiyel, $V(\mathbf{r})$ katkısının (6.76)'ya eklenmesiyle

$$\mu = V(\mathbf{r}) + [n_0(\mathbf{r}) + 2n_{ex}(\mathbf{r})]U_0 \quad (6.89)$$

halini alır.

Bogoliubov yaklaşımının yarı-klasik limiti, çiftlenmiş (6.39) ve (6.40) numaralı diferansiyel denklemlerinde kinetik enerji operatörünün $p^2/2m$ ile değiştirilmesiyle elde edilir. $\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ enerjileri determinantının sıfıra eşitlenmesiyle

$$\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \left\{ \left[p^2/2m + 2n_0(\mathbf{r})U_0 + V(\mathbf{r}) - \mu \right]^2 - [n_0(\mathbf{r})U_0]^2 \right\}^{1/2} \quad (6.90)$$

bulunur. Burada μ , sıfır-sıcaklıkta Gross-Pitaevski denkleminde giren kimyasal potansiyeldir. Thomas-Fermi yaklaşımında kimyasal potansiyel, Gross-Pitaevski denkleminde kinetik enerjinin ihmal edilmesiyle $\mu = V(\mathbf{r}) + n_0(\mathbf{r})U_0$ olarak bulunmuştur. Böylece yarı-klasik Bogoliubov uyarılma enerjileri aşağıdaki gibidir:

$$\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \left[\left(p^2/2m \right)^2 + \left(p^2/m \right) n_0 U_0 \right]^{1/2} \quad (6.91)$$

Son olarak Popov yaklaşımının yarı-klasik limiti, yüksek sıcaklıklar için (6.39) ve (6.40)'ın genelleştirilmesiyle elde edilir. Bu denklemlerin her ikisinde de yer alan $2n_0(\mathbf{r})U_0$ teriminin $2n(\mathbf{r})U_0$ ile yer değiştirmesiyle, Popov yaklaşımındaki yarı-klasik enerjiler

$$\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \left(\left[p^2/2m + 2n(\mathbf{r})U_0 + V(\mathbf{r}) - \mu \right]^2 - [n_0(\mathbf{r})U_0]^2 \right)^{1/2} \quad (6.92)$$

dir. Denklem (6.89)'daki kimyasal potansiyel için Thomas-Fermi ifadesi geçerli ise uyarılma spektrumu, yoğunlaşma yoğunluğu n_0 'ın sıcaklığa bağlı olması dışında Bogoliubov teorisinden elde edilen sonuçla özdeştir (Denklem (6.91)). Hartree-Fock yaklaşımında uyarılmalar parçacık eklenmesine karşı gelirken, Bogoliubov ve Popov yaklaşımlarında uyarılma enerjileri toplam parçacık sayısında değişim

olmaksızın belirlenir. Denklem (6.90) ve (6.92)'de $[n_0(\mathbf{r})U_0]^2$ terimi ihmal edilecek olursa, uyarılma enerjisi $\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \mu$ için Hartree-Fock sonucuna eşit olur.

Bogoliubov yaklaşımıyla yoğuşmamış atomların yoğunluğu

$$n_{ex}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2 / 2m + 2n_0(\mathbf{r})U_0 + V(\mathbf{r}) - \mu}{\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})} \frac{1}{e^{\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) / kT} - 1} \quad (6.93)$$

Hartree-Fock yaklaşımıyla

$$n_{ex}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \mu) / kT} - 1} \quad (6.94)$$

ve Popov yaklaşımıyla

$$n_{ex}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2 / 2m + 2n(\mathbf{r})U_0 + V(\mathbf{r}) - \mu}{\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})} \frac{1}{e^{\epsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) / kT} - 1} \quad (6.95)$$

biçiminde verilir. Bogoliubov ve Popov yaklaşımlarındaki dağılım fonksiyonlarıyla çarpılan faktörler, uyarılmalarla ilgili yoğuşmamış parçacıkların sayısıdır. Hartree-Fock ve Popov yaklaşımlarında, yoğuşmamış atomların yoğunluğu ve yoğuşmadaki parçacıkların sayısı birbirinden bağımsız hesaplanır [5].

7. DÖNEN YOĞUŞMALAR

Süper akışkanları karakterize eden özelliklerinden biri de rotasyona verdikleri tepki veya yüklü süper akışkanlar için manyetik alana verdikleri tepkidir. Süper akışkanlara has önemli özellikler yoğunlaşma hızının, dalga fonksiyonu fazının gradyenti ile orantılı olması nedeniyle oluşturulan zorlanmış hareketlerinin bir sonucudur. Atomik gazlarda Bose-Einstein yoğunlaşmasının keşfinin ardından tuzaktaki dönen yoğunlaşmalar üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bu bölümde dönen yoğunlaşmanın özellikleri incelenecektir.

7.1. Potansiyel Akış ve Kuantize Döngü

Denklem (5.14)'e göre yoğunlaşmanın hızı, ϕ skalerinin gradyentidir:

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \quad (7.1)$$

Bu denklem yoğunlaşmanın muhtemel hareketleri için, yoğunlaşmanın pek çok özelliğini etkileyen sonuçlarından biridir. Yukarıdaki denklemden doğrudan doğruya aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (7.2)$$

Buradan mertebeye parametresinin fazı tekil olmadıkça hız alanının irrotasyonel olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Böylece yoğunlaşmanın muhtemel hareketleri oldukça sınırlandırılmış olur. Genel olarak yoğunlaşma dalga fonksiyonunun tek değerli olmasından, kapalı bir kontur etrafında dalga fonksiyonu fazındaki $\Delta\phi$ değişiminin 2π 'nin katları olması gerektiği veya l bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta\phi = \oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi l \quad (7.3)$$

şartını sağlaması gerektiği bulunur.

Böylece kapalı bir kontur etrafındaki Γ sirkülasyonu

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} 2\pi l = l \frac{h}{m} \quad (7.4)$$

ile verilir. Denklem (7.4) sirkülasyonun h/m ile kuantize olduğunu gösterir. Kuantum sirkülasyonunun değeri, A kütle numarası olmak üzere yaklaşık olarak $(4,0 \times 10^{-7} / A) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 'dir.

Bu türden bir akışa basit örnek z eksenini civarındaki rotasyon altında invariant olan tuzaktaki tümüyle azimutal akış ele alınabilir. Tek değerli olma şartının sağlanması için yoğunlaşma dalga fonksiyonunun φ azimutal açı olmak üzere $e^{il\varphi}$ ile değişmesi gerekir. ρ tuzak ekseninden olan uzaklık olarak alınacak olursa, (7.4)'ün ardından hız için

$$v_\varphi = l \frac{h}{2\pi m \rho} \quad (7.5)$$

sonucuna ulaşılır. Kontur tuzak eksenini kapsıyorsa sirkülasyon lh/m 'in katlarıdır ve bunun haricinde ise sıfırdır. $l \neq 0$ ise tuzak eksenini üzerinde yoğunlaşma dalga fonksiyonu sıfır olmalıdır, aksi takdirde azimutal hareketten ötürü kinetik enerji ıraksak olacaktır. Akış deseninin yapısı böylece girdap (vortex) çizgileri biçimindedir. Kuantize girdap çizgileri ilk kez Onsager tarafından süper akışkan sıvı ^4He için ileri sürülmüştür. Feynmann da bağımsız çalışmalarında sıvı ^4He 'daki kuantize sirkülasyonu ile akış deneylerinden elde ettiği sonuçları ortaya koymuştur.

Eksenel simetriye sahip dış potansiyel ve sadece eksen üzerinde tekilliğe sahip seviye için her bir parçacık eksen civarında $l\hbar$ 'lık açısal momentuma sahip olur ve eksen civarında L toplam açısal momentumu $Nl\hbar$ 'dır. Yoğunlaşma dalga fonksiyonunun tekilliği tuzak ekseninden uzaktaki bir bölgede ise, açısal momentum genellikle $Nl\hbar$ 'dan farklıdır. Eksenel simetrisi olan yoğunluk dağılımına sahip seviye için sirkülasyonun kuantizasyonu, simetri eksenini civarında her bir parçacık başına açısal momentumun kuantizasyonuna eşittir.

Ancak parçacık başına açılmal momentum kuantize olmasa da diğer seviyelerin sirkülasyonu hala kuantizedir. z eksenini boyunca uzanan girdaba sahip seviye için (7.2)'nin genelleştirilmiş hali

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{z} \frac{\hbar}{m} \delta^2(\boldsymbol{\rho}) \quad (7.6)$$

dur. Burada δ^2 , xy düzlemindeki iki boyutlu Dirac delta fonksiyonu, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ ve \hat{z} ise z doğrultusundaki birim vektördür. Çok sayıda girdap söz konusu olduğunda, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı girdap çizgisi doğrultusuna dik yüzeylerdeki iki boyutlu delta fonksiyonlarının toplamı biçimindedir. Delta fonksiyonunun şiddeti, girdap çizgisi boyunca yönelmiş olan bir vektördür ve değeri ise girdapla ilgili sirkülasyonun değerine eşittir [33].

7.2. Tek Girdap Yapısı

Eksenel simetriye sahip tuzak için dalga fonksiyonu $e^{il\phi}$ ise, yoğunlaşmanın dalga fonksiyonu, f reel olmak üzere küresel polar koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi(\mathbf{r}) = f(\rho, z)e^{il\phi} \quad (7.7)$$

Denklem (4.9)'dan da enerji

$$E = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\hbar^2}{2m} l^2 \frac{f^2}{\rho^2} + V(\rho, z)f^2 + \frac{U_0}{2} f^4 \right\} \quad (7.8)$$

olur. Buradan elde edilen enerji ile, fazın yoğunlaşmanın konumuna bağlı olmadığı durumda elde edilen enerji arasındaki fark $1/\rho^2$ 'li terimin eklenmesidir. Bu durum, kinetik enerji yoğunluğunda $mf^2v_\phi^2/2 = \hbar^2 l^2 f^2/2m\rho^2$ kadar artışa neden olur ve yoğunlaşmanın azimutal hareketinin bir sonucudur. Yoğuşma dalga

fonksiyonunun f genliğinin değeri (4.11)'deki Gross-Pitaevski denkleminden elde edilebilir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) + \frac{d^2 f}{dz^2} \right] + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} l^2 f + V(\rho, z) f + U_0 f^3 = \mu f \quad (7.9)$$

7.2.1. Uniform Ortalamada Bulunan Girdap

Uniform potansiyelin $V(\rho, z) = 0$ olduğu sonsuz ortalama ele alındığında, taban durumunda dalga fonksiyonu z 'ye bağlı değildir ve dolayısıyla z 'ye bağlı türevler ortadan kalkar. Bu bölümde tek bir kuantum sirkülasyonuna sahip girdap çizgisinin üzerinde durulacağından $l = 1$ alınacaktır. Eksenden daha uzaktaki mesafeler için radyal türev ve $\propto 1/\rho^2$ biçimindeki merkezkaç bariyeri terimi önemini yitirir ve bu yüzden yoğunlaşma dalga fonksiyonunun değeri $f = f_0 \equiv (\mu/U_0)^{1/2}$ olur. Eksene yakın bölgelerde türev ve merkezkaç terimi baskın gelir ve eksen üzerindeki uygun çözüm, iki-boyutta birim açısız momentumuna sahip serbest parçacıktakine benzer olarak ρ gibi davranır. Denklem (7.9)'daki Gross-Pitaevski denklemindeki terimler göstermektedir ki, eksenden belirli uzunluktaki bir mesafe kadar uzakta bulunan maddede, iki durum arasında geçiş meydana gelir. Bu sebeple uzunluklar, ξ belirli uzunluğundan yararlanarak ölçeklendirmek mümkündür:

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = nU_0 = \mu \quad (7.10)$$

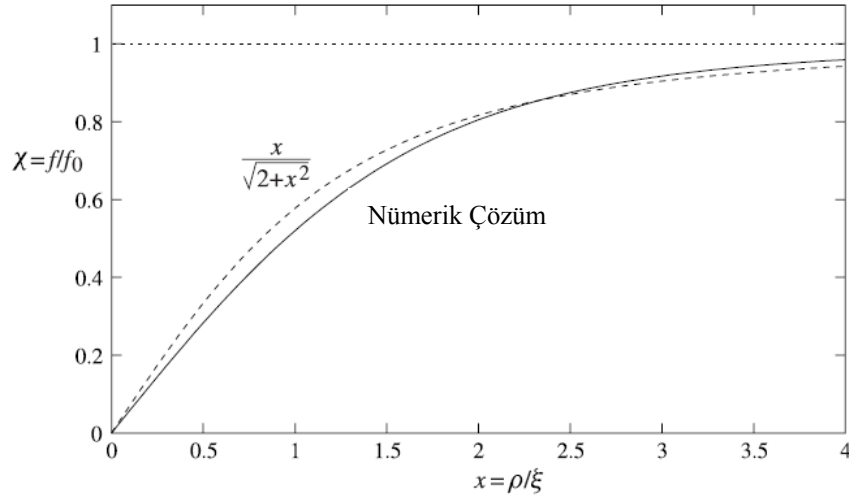
Burada $n = f_0^2$ ile girdaptan uzak bölgelerdeki yoğunluktur. f_0 girdaplardan uzak bölgelerdeki yoğunlaşma dalga fonksiyonuna ait genlik olmak üzere $x = \rho/\xi$ ve ardından $\chi = f/f_0$ dönüşümü yapılsın. Böylece ε enerji yoğunluğu,

$$\varepsilon = n^2 U_0 \left[\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{\chi^2}{x^2} + \frac{1}{2} \chi^4 \right] \quad (7.11)$$

Denklem (7.9)'daki Gross-Pitaevski eşitliği,

$$-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\chi}{dx} \right) + \frac{\chi}{x^2} + \chi^3 - \chi = 0 \quad (7.12)$$

olur. Bu denklem nümerik olarak çözülebilir ve çözüm Şekil (7.1)'deki gibidir.



Şekil 7.1. Yarıçapın fonksiyonu olarak tek kuantize girdap için yoğunlaşma dalga fonksiyonu (Burada nümerik çözüm düz çizgi ile ve yaklaşık çözüm ise $x/(2+x^2)^{1/2}$ kullanılarak noktalı çizgi ile gösterilmiştir.)

Girdabın enerjisini hesaplamak için göz önünde tutulması gereken bir diğer büyüklük de uniform seviyede aynı sayıdaki parçacığın enerjisi ile kıyaslandığında, girdabın varlığını gösteren ekstra enerjidir. Girdabın birim uzunluğuna düşen ϵ enerjisi

$$\epsilon = \int_0^b 2\pi\rho d\rho \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{f^2}{\rho^2} + \frac{U_0}{2} f^4 \right] \quad (7.13)$$

ile verilir. İntegralin içindeki ikinci terim azimutal harekete ait kinetik enerjidir ve f^2/ρ^2 ile değişir. Sonuç olarak integral büyük mesafeler için logaritmik olarak iraksaktır. Bu durum, yüklenmiş çubuğun elektrostatik enerjisinde bulunan

logaritmik terimle benzerdir. Burada iyi tanımlanmış çözümleri elde edebilmek için girdaptan ξ ile kıyaslandığında yeteri kadar büyük olan b uzaklığındaki sınırlı bölge içinde bulunan atomların enerjileri ele alınır.

Girdapla ilgili enerjiyi bulmak için toplam enerjiden b yarıçaplı silindir içinde hapsedilen ν birim uzunluğunda aynı sayıda parçacığa sahip uniform gazın enerjisi çıkarılır. $\tilde{n} = \nu / \pi b^2$ ortalama yoğunluk olmak üzere uniform gazın birim hacimdeki enerjisi $\tilde{n}^2 U_0 / 2$ 'dir. Referans sistemindeki ortalama yoğunluk, girdap seviyesindeki eksenden uzak bölgelerdeki yoğunluğa eşit değildir, çünkü girdap seviyesinin eksen yakınındaki yoğunluk dağılımında hole bulunur. Her iki durum için de parçacık sayısı aynı olduğundan, eksenden uzak bölgelerdeki girdap durumunun yoğunluğu, uniform sisteminkinden farklıdır. Birim uzunluğa düşen parçacık sayısı

$$\nu = \int_0^b 2\pi\rho d\rho f^2 = \pi b^2 f_0^2 - \int_0^b 2\pi\rho d\rho (f_0^2 - f^2) \quad (7.14)$$

dir. Böylece uniform sistemin birim uzunluktaki enerjisi aşağıdaki gibidir:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \pi b^2 f_0^4 U_0 - f_0^2 U_0 \int_0^b 2\pi\rho d\rho (f_0^2 - f^2) \quad (7.15)$$

Denklem (7.15)'te, son terimin karesi ile orantılı olan terim ihmal edilmiştir. Çünkü bunlar $f_0^4 U_0 \xi^4 / b^2$ ile orantılıdır ve $b \gg \xi$ varsayımından ötürü önemli değildir. Böylece girdapla ilgili olan birim uzunluktaki ϵ_ν enerjisi, (7.13) ve (7.15) arasındaki farktır:

$$\epsilon_\nu = \int_0^b 2\pi\rho d\rho \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{f^2}{\rho^2} + \frac{U_0}{2} (f_0^2 - f^2)^2 \right] \quad (7.16)$$

$$= \frac{\pi\hbar^2}{m} n \int_0^{b/\xi} x dx \left[\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{\chi^2}{x^2} + \frac{1}{2} (1 - \chi^2)^2 \right] \quad (7.17)$$

Yukarıdaki ifade Gross-Pitaevski denkleminin nümerik çözümünde kullanıldığında

$$\epsilon_v = \pi n \frac{\hbar^2}{m} \ln \left(1,464 \frac{b}{\xi} \right) \quad (7.18)$$

bulunur. Bu sonuç Ginzburg ve Pitaevski tarafından T_λ civarında sıvı ^4He 'un fenomenolojik teorisi içinde elde edilmiştir. Teorinin matematiksel formu sıfır sıcaklıktaki yoğunlaşma için Gross-Pitaevski teorisiyle özdeştir; ancak sabitlerin fiziksel görünümü farklıdır.

Denklem (7.17) yoğunlaşma dalga fonksiyonunun varyasyonel çözümü için temel olarak kullanılabilir. Genel olarak f için deneme formu kullanılarak deneme fonksiyondaki parametrelerde göz önünde bulundurularak enerji minimize edilir. [34] numaralı kaynaktaki deneme dalga fonksiyonu kullanıldığında

$$\chi = \frac{x}{(\alpha + x^2)^{1/2}} \quad (7.19)$$

sonucuna ulaşılır.

α 'nın optimum değeri 2 olmak üzere hem küçük hem de büyük uzunluk değerleri için doğru sonuçlara ulaşılır ve çözüm yine Şekil (7.1)'deki gibidir. μ kimyasal potansiyeli sabit tutulmak üzere (7.17)'de olduğu gibi girdap enerjisinin minimize edilmesi, $E - \mu N$ miktarının minimize edilmesine eşittir. Burada E toplam enerjiyi ifade eder. $\alpha = 2$ için varyasyonel çözümden $\epsilon_v = \pi \left(n \hbar^2 / m \right) \ln(1,497b / \xi)$ biçiminde asıl sonuca yakın olan bir değer bulunur.

Denklem (7.7)'deki yoğunlaşma dalga fonksiyonuna göre her bir parçacık bir birimlik açısal momentum taşır ve bu nedenle birim uzunluktaki toplam açısal momentum

$$\mathcal{L} = v \hbar \quad (7.20)$$

ile verilir.

Burada açışal momentum için elde edilen basit ifade rotasyonel simetrisinin bir sonucudur. Girdabı tuzak ekseni üzerinde bulunmayan bulut için açışal momentum girdabın konumuna bağlıdır. Ayrıca dönme ekseni etrafında rotasyonel olarak invaryant olmayan tuzak için açışal momentum korunmaz ve bu sebeple de belli bir değeri bulunmaz.

7.2.1.1. Çoklu kuantize girdaplar

$|l\rangle \geq 1$ için birden fazla sayıda kuantum sirkülasyonuna sahip girdaplar incelenebilir. Bu durumda Gross-Pitaevski denklemindeki tek değişim $\sim 1/x^2$ 'li merkezkaç potansiyeli teriminin l^2 ile çarpılması olacaktır. Girdap merkezinden uzak bölgelerdeki hız alanı $l\hbar/m\rho$ ile değişecek ve böylece azimutal hareketin kinetik enerjisi logaritmik hassasiyet doğrultusunda

$$\epsilon_v \approx l^2 \pi n \frac{\hbar^2}{m} \ln \frac{b}{\xi} \quad (7.21)$$

olacaktır. Logaritmadaki nümerik faktörün hesaplanması için (7.12)'de ikinci terimi l^2 ile çarpılmış olan Gross-Pitaevski denkleminin çözümlere girdap merkezi yapısının belirlenmesi gerekir. ρ 'nun küçük değerleri için yoğunlaşma dalga fonksiyonu, azimutal açışal momentumu $l\hbar$ olan iki-boyutlu serbest parçacık dalga fonksiyonunda olduğu gibi $\rho^{|l|}$ biçiminde davranır. Denklem (7.21)'de elde edilen sonuç, birden fazla sayıda sirkülasyona sahip girdap enerjisinin, aynı toplam sirkülasyona sahip tek-kuantize girdap topluluğu enerjisinden daha fazla olduğunu belirtmektedir. Bu da tek bir birimlik sirkülasyona sahip girdapların denge durumunda bulunamayacağı anlamına gelir. Açıklamanın daha ikna edici olması bakımından girdaplar arasındaki etkileşiminde etkileri ele alınmalıdır. Örneğin iki paralel girdap çizgisi için, aralarındaki uzaklık d olan l_1 ve l_2 sirkülasyon birimleri alınsın.

Böylece birim uzunluktaki etkileşim enerjisi logaritmik hassasiyet doğrultusunda

$$\epsilon_{\text{int}} = \frac{2\pi l_1 l_2 \hbar^2 n}{m} \ln \frac{R}{d} \quad (7.22)$$

ile verilir. Burada R kabın sınırından girdaplara kadar olan uzaklıktır. Bu ifade $R \gg d$ ve $d \gg \xi$ olmak koşuluyla oluşturulabilir. Girdaplar arası uzaklık kabın boyutuyla karşılaştırıldığında küçük olmak şartıyla elde edilen etkileşim enerjisi, izole iki girdap çizgisi enerjisinden azdır. Ayrıca rotasyonel olarak invaryant olan sistemler için aynı açısız momentuma sahip seviyelerin enerjileri belirlenebilecek en kararlı seviyelerdir. Ancak pratikte ikinci sınırlandırma sonucu değiştirmez.

Rotasyon eksenine dik olan gaz içeriği tutarlı uzunluktan daha az veya kıyaslanabilir ölçüde olduğunda veya rotasyon eksenine civarında uygulanan itici potansiyelden ötürü yoğunlaşma çoklu olarak bağlı olduğunda, çoklu-kuantize girdaplar enerji yönünden en uygun olanlardır.

7.2.2. Tuzaklanmış Bulutta Bulunan Girdap

Tuzakta bulunan Bose-Einstein yoğunlaşması bulutundaki girdap enerjisi, bulutta girdabın oluşabilmesi için, enerji açısından uygun olan en düşük açısız hız ile ilgili öngörülerde bulunabilmek için önemlidir. Bunun için z eksenine etrafında rotasyonel olarak invaryant olan harmonik tuzak potansiyeli ele alındığında ve atom sayısı da Thomas-Fermi yaklaşımının iyi bir sonuç vereceği kadar fazla olduğunda, tutarlı uzunluk tarafından belirlenen tuzakın z eksenine üzerindeki yerleşmiş girdap çekirdeği yarıçapı, bulut boyutuyla kıyaslandığında kısadır. Bu durum, (7.10)'da verilen bulut merkezindeki ξ_0 tutarlı uzunluğundan yararlanılarak

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi_0^2} = \mu \quad (7.23)$$

yazılabilir.

Burada $n(0)$ rotasyonun olmadığı durumda merkezdeki yoğunluk olmak üzere $\mu = n(0)U_0$ kimyasal potansiyeldir. Ayrıca xy düzlemindeki bulut yarıçapı R ile kimyasal potansiyel arasındaki (6.35) ile verilen bağıntının kullanılmasıyla Harmonik osilatör potansiyeli

$$\mu = m\omega_{\perp}^2 R^2 / 2 \quad (7.24)$$

olarak bulunur ve bu denklemde ω_{\perp} yüzeydeki hareketler için osilatör frekansıdır. Denklem (7.23) ve (7.24)'ten ise

$$\frac{\xi}{R} = \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2\mu} \quad (7.25)$$

sonucuna ulaşılır. Denklem (7.25), Thomas-Fermi yaklaşımının uygulanabilir olduğu durumlarda, kimyasal potansiyel osilatör kuantumundan büyük ise tutarlı uzunluk bulut yarıçapına oranla küçüktür. Girdap merkezinin dışındaki bölgede yoğunluk uzunluk skalası $\sim R$ ile değişir. Böylece ρ_1 yarıçapının dışında ve bulut yarıçapıyla çekirdeğin boyutu arasındaki ($\xi \ll \rho_1 \ll R$) girdap enerjisi, uniform ortalamadaki girdap enerjisi için (7.18)'deki sonucun kullanılmasıyla hesaplanabilir. Daha büyük yarıçap değerlerinde yoğunluk profili, girdaba sahip olmayan bulut ile kıyaslandığında değiştirilemez, fakat yoğunlaşma girdap sirkülasyonu tarafından belirlenen bir hızla hareket eder. Daha uzak bölgelerdeki ekstra enerji, hidrodinamikten hesaplanan yoğunlaşma kinetik enerjisidir.

z doğrultusundaki tuzak kuvveti ihmal edilerek iki-boyutlu problem ele alındığında, bulut ρ_2 yarıçapına sahip olacak biçimde silindirik ve birim uzunluktaki enerji

$$\epsilon_v = \pi n_0 \frac{\hbar^2}{m} \ln \left(1,464 \frac{\rho_1}{\xi_0} \right) + \frac{1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} mn(\rho)v^2(\rho)2\pi\rho d\rho \quad (7.26)$$

Burada n_0 , $\rho \rightarrow 0$ için girdap yok iken parçacık yoğunluğudur ve ξ_0 da bu yoğunluk değeri için belirlenen tutarlı uzunluktur. Hızın değeri $v = h/2\pi\rho m$ olduğundan Thomas-Fermi yaklaşımında harmonik tuzaktaki yoğunluk $1 - \rho^2/R^2$ ile değişir. Böylece

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \pi n_0 \frac{\hbar^2}{m} \left[\ln \left(1,464 \frac{\rho_1}{\xi_0} \right) + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\rho^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) \right] \\ &\cong \pi n_0 \frac{\hbar^2}{m} \left[\ln \left(1,464 \frac{\rho_2}{\xi_0} \right) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.27)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde integralde, ρ_1/ρ_2 'den yüksek mertebedeki terimler ihmal edilerek $\rho_1 \ll \rho_2$ için hesaplanmıştır. Logaritmik terim uniform yoğunluk ortalamasının sonucudur. $-1/2$ ise tuzak potansiyelinin sebep olduğu parçacık yoğunluğundaki azalmadan ötürü kinetik enerjide meydana gelen küçülmeyi yansıtır. Bu şekilde birim uzunluktaki kinetik enerji (7.18) denklemindekine benzer fakat $1,464/e^{1/2} \approx 0,888$ biçimindeki farklı bir nümerik sabit ile

$$\epsilon_v = \pi n_0 \frac{\hbar^2}{m} \ln \left(0,888 \frac{\rho_2}{\xi_0} \right) \quad (7.28)$$

olarak verilir.

Birim uzunluktaki \mathcal{L} açısal momentumu, birim uzunluktaki toplam parçacık sayısı ile \hbar çarpılarak elde edilir. $\rho \gg \xi$ için ikinci durum Thomas-Fermi yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathcal{L} = n_0 \hbar \int_0^{\rho_2} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} n_0 \pi \rho_2^2 \hbar \quad (7.29)$$

Üç boyutlu problem ele alındığında, z doğrultusunda bir Z sanki-ekseni oluşturulsun ve bulutun bu doğrultudaki boyutu tutarlı uzunluktan daha büyük olsun. Bu durumda bulutun enerjisi, yatay bulut dilimi enerjilerinin toplamı biçiminde öne sürülebilir ve bu şekilde yoğunlaşma dalga fonksiyonunun düşey gradyentinden ileri gelen kinetik enerji ise ihmal edilmiş olur. Toplam kinetik enerji (7.28) ile verilir ve bulutun dikey eksenini üzerinden integral alınarak

$$E = \frac{\pi \hbar^2}{m} \int_{-Z}^Z dz n_0(z) \ln \left[0,888 \frac{\rho_2(z)}{\xi_0(z)} \right] \quad (7.30)$$

bulunur. $\rho_2(z) = R(1 - z^2 / Z^2)^{1/2}$ ve $\xi(z) = \xi_0 [n(0) / n_0(z)]^{1/2}$ olmak üzere harmonik tuzak için z eksenindeki yoğunluk $n_0(z) = n(0)(1 - z^2 / Z^2)$ 'dir. Böylece enerji aşağıda olduğu gibi elde edilir:

$$E = \frac{\pi \hbar^2 n(0)}{m} \int_{-Z}^Z dz \left(1 - \frac{z^2}{Z^2} \right) \ln \left[0,888 \frac{R}{\xi_0} \left(1 - \frac{z^2}{Z^2} \right) \right] \quad (7.31)$$

$\int_0^1 dy (1 - y^2) \ln(1 - y^2) = (12 \ln 2 - 10) / 9$ ifadesinin kullanılmasıyla

$$E = \frac{4\pi n(0) \hbar^2}{3 m} Z \ln \left(0,671 \frac{R}{\xi_0} \right) \quad (7.32)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç büyük bulutlar için nümerik hesaplamalarla oldukça uyumludur.

Toplam açısal momentum ise,

$$\begin{aligned} L &= \hbar \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) = n(0) \hbar \int_{-Z}^Z dz \int_0^{\rho_2(z)} 2\pi \rho d\rho \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{z^2}{Z^2} \right) \\ &= \frac{8\pi}{15} n(0) R^2 Z \hbar \end{aligned} \quad (7.33)$$

ile verilir [35].

7.2.3. Eksenel Olmayan Girdap

Tuzak eksenine paralel olan girdap çizgisine ait açısıl momentum durumu (tesadüfi olmaksızın) genellikle parçacık başına kuantumun integral sayısı değildir. Bu durumun açık bir biçimde ifade edilebilmesi için yoğunlaşma içinde tek kuantum sirkülasyonuna sahip, dik kesiti R yarıçaplı çember olan silindirik bir kaptta sınırlandırılmış yoğunlaşmaya ait girdap çizgisi ele alınsın. Burada girdabın merkezindeki küçük bölge dışındaki her yerde yoğunluk sabit olsun. Silindir eksenini civarında birim uzunluktaki açısıl momentum

$$\mathcal{L} = nm \int \rho d\rho d\varphi v_\varphi \rho \quad (7.34)$$

ile verilir. Açısıl integral

$$\int d\varphi v_\varphi \rho = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.35)$$

dir ve sirkülasyonu verir. Bu denklem girdap çizgisi kontur içinde yer aldığı anda h/m iken; kontur dışında ise sıfırdır. Böylece girdap çizgisinin merkezi silindir ekseninden b kadar uzakta iken birim uzunluktaki açısıl momentum

$$\mathcal{L} = nh \int_b^R \rho d\rho = v\hbar \left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right) \quad (7.36)$$

dir. Burada $v = \pi R^2 n$ birim uzunluktaki parçacık sayısını ifade eder. Yoğunluk ρ 'ya bağlı olduğunda, tuzakta bulunan seyreltik gazda olduğu gibi \mathcal{L} 'nin b 'ye bağlılığı farklı olacaktır.

Durumun enerjisi belirlemek üzere hız için akış deseni hidrodinamik denklemlerden hesaplanabilir. Girdap merkezi dışında yoğunluk sabit ise süreklilik denklemi $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ olur ve sonuçta yoğunlaşma dalga fonksiyonununun fazı Laplace denklemlerine uyar. Silindirde hızın radyal bileşeni sıfır olmalıdır. Bu sebeple problem aslında iletken silindir içinde, silindire paralel olarak

yerleştirilmiş yüklü çubuğun elektrostatik potansiyelinin belirlenmesi durumuna benzerdir. Orijinal girdap ile aynı azimutal açıya sahip ve silindir ekseninden R^2/b kadar uzakta zıt yönlü sirkülasyona sahip ikinci bir girdabın ileri sürülmesiyle oluşturulan görüntüden faydalanılarak bu durum çözülebilir. Toplam hız alanı böylece b yarıçapında κ sirkülasyonuna sahip girdap ile R^2/b yarıçapında $-\kappa$ sirkülasyonuna sahip girdabın üst üste binmesi ile elde edilir. Birim uzunluktaki toplam kinetik enerji böylece

$$\epsilon_{kin} = \frac{1}{2} \int \rho d\rho d\varphi n m v^2 \quad (7.37)$$

ile verilir. Girdap merkezindeki yoğunluk azalmasını hesaba katmak için integral girdap merkezinden itibaren ξ uzunluğuna kadar alınmalıdır. Buradan hareketle integral çözüldüğünde

$$\epsilon_v = \frac{m n \kappa^2}{4\pi} [\ln(R/\xi) + \ln(1 - b^2/R^2)] \quad (7.38)$$

bulunur. Bulunan denklemde yalnızca R/ξ 'ye bağlı olan terim korunur. Girdap merkezi için daha detaylı bir model kullanıldığında ise yalnızca logaritmada bulunan R/ξ sabiti değiştirilebilir.

7.3. Dönen Yoğuşmaların Denge Durumu

Dönen yoğuşmaların denge durumu tuzağın simetrisine bağlıdır. Bu bölümde, simetri eksenini etrafında açısal momentum bileşeninin korunduğu aksenal simetriye sahip tuzaklar incelenecektir.

7.3.1. Simetri Eksenine Sahip Tuzaklar

Simetri eksenine sahip tuzaklarda bozonlara ait yoğunlaşmaya açılmal momentum eklemenin bir yolu, tüm atomları sıfır-momentum seviyesine (girdap seviyesine) yerleştirmektir. Buluta açılmal momentum eklemenin bir diğere yolu da Bölüm 5.3.1’de olduğu gibi yüzey dalgaları gibi basit uyarılmaların eklenmesidir. Daha karmaşık seviyeler genellikle iki sürecin birleştirilmesiyle oluşturulur. Örneğın girdap seviyesine basit uyarılmaların eklenmesi gibi.

Burada incelemeye başlamadan önce, atom başına düşen açılmal momentumun \hbar ’dan daha küçük olduğu bulut ele alınsın. Sezgisel olarak bu seviyenin dönmeyen taban durumuna yakın olması beklenir ve bu sebeple en düşük enerji seviyesinin, taban durumu enerjisi ile basit uyarılmaların toplamı şeklinde olacağı düşünülür. Öncelikle etkileşimin itici olduğu durum ele alınsın. Eğer parçacık sayısı Thomas-Fermi yaklaşımının uygulanabileceğı kadar fazlaysa, uyarılma enerjileri Bölüm 5.3.1’deki sonuçlardan yararlanılarak hesaplanabilir. Harmonik tuzak için, en düşük enerjiye sahip temel uyarılmalar yüzey dalgalarıdır. $\hbar\omega$ enerjileri, Bölüm 7’de incelenen modlar için elde edilebilir. $n = 0$ için (5.71)’den izotropik tuzaklar, (5.79)’dan ise anizotropik tuzaklara ait enerjiler bulunabilir. Böylece her iki durumdaki enerjiler de $\hbar\omega_0 l^{1/2}$ için eşittir. Buradan birim açılmal momentumdaki enerji ise $\omega_0 / l^{1/2}$ olur. Birim açılmal momentumda harcanan en düşük enerjiye, modların büyük l değerlerine uyarılmasıyla ulaşılır. Ancak l ’nin artan değerleriyle modlar bulut içine gitgide daha az sızar ve modlara ait basit hidrodinamik çerçevede yüzey dalgasının sızma derinliğı ($1/\rho \sim R/l$), yüzey kalınlığı (ξ) ile kıyaslanılabilir bir hal alır. l ’nin daha da büyük değerlerinde ise enerjileri yaklaşık $\hbar^2 q^2 / 2m \propto l^2$ olan modlar serbest parçacıklara benzer ve birim açılmal momentumdaki enerjileri artar. Sonuç olarak $1/\delta$ veya $l \sim R/\delta$ mertebesinde dalga sayısına sahip yüzey dalgaları için birim açılmal momentumda harcanan en düşük enerji

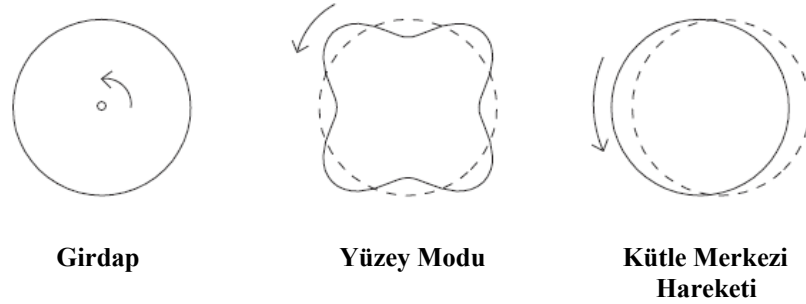
$$\frac{\epsilon l}{\hbar} \sim \omega_0 \left(\frac{\delta}{R} \right)^{1/2} \sim \omega_0 \left(\frac{a_{osc}}{R} \right)^{2/3} \quad (7.39)$$

değerine sahiptir. Burada $\delta \sim a_{osc}^{4/3} / R^{1/3}$ ve $a_{osc} = (\hbar / m\omega_0)^{1/2}$ dir.

$L \approx N\hbar$ için, tek kuantum sirkülasyonuna sahip girdap durumlarına benzer seviyeler enerji yönünden en uygun olanlarıdır. Açısal momentum artarken, girdap çiftleri veya girdap dizileri bulunduran durumlar en düşük enerjiye sahip olurlar.

Parçacıklar arası etkileşim çekici olduğunda ise görüntü tamamen farklıdır. Verilen bir açısal momentum değeri için en düşük enerjiye sahip seviyede tüm açısal momentum, bulutun kütle merkezi hareketi ile ilgilidir ve tüm dahili korelasyonlar, taban durumundakilerle özdeşdir. Bu durum $l=1$ olan yüzey modunun uyarılmasına karşı gelir. Buradaki özelliklerin etkileşimin işaretlerine bağlı olması, en düşük enerji seviyesinin sabit olmasından ve etkileşim sıfır iken değeri sıfırdan farklı olan açısal momentumun faz geçişine uğramasından kaynaklanır.

Özet olarak, itici etkileşimler için tuzaktaki Bose-Einstein yoğuşmasının en düşük enerji seviyesi genellikle girdapların ve basit uyarılmaların, özellikle de yüzey dalgalarının süperpozisyonudur. Etkileşim çekici olduğunda en düşük enerji, tüm açısal momentumun kütle merkezi hareketinde kullanılmasıyla elde edilir. Açısal momentumu buluta eklemenin üç yolu Şekil 7.2’de gösterilmiştir.



Şekil 7.2. Tuzaktaki Bose-Einstein yoğuşmasına açısal momentum eklemenin üç yolu

7.3.2. Döner Tuzaklar

Simetri eksenine sahip olan tuzakta, eksen etrafında açıl momentum korunur; ancak tuzak simetri eksenine sahip değil ise açıl momentum korunmaz. Buna duruma bir örnek, herhangi bir eksen etrafında döner anizotropik tuzaktır. Burada karşılaşılan sorun ise, bu koşullar altında denge durumunun nasıl tanımlanacağıdır.

Döner tuzaklarla ilgili zorluk, laboratuvar ortamında tuzak potansiyelinin zamana bağlı olmasından ileri gelir. Bu sebeple denge durumunun bulunması problemine, tuzak potansiyeliyle birlikte döner bir çerçeveden bakmak uygun olacaktır, çünkü bu çerçevede potansiyel zamana göre sabittir ve böylece denge durumunun bulunması için standart metodlar kullanılabilir. Mekaniğin iyi bilinen sonuçlarına göre, potansiyel ile döner bir çerçevede atom bulutunun E' enerjisi, dönmeyen çerçevedeki E enerjisi terimlerinde

$$E' = E - L \cdot \Omega \quad (7.40)$$

ile verilir. Burada L açıl momentum vektörü ve Ω ise potansiyel rotasyonunu tanımlayan açıl hız vektörüdür. Simetri eksenine sahip olmayan tuzakta, rotasyon eksenini etrafında açıl momentum korunmaz ve bu sebeple sistemin L açıl momentumu, açıl momentumun kuantum mekaniksel beklenen değeri ile tanımlanır. Buradan sonra problem, döner çerçevede en düşük E' değeriyle birlikte en düşük enerjiye sahip durumun bulunmasıdır.

Denklem (7.40)'tan çıkarılacak önemli bir sonuç daha vardır. L açıl momentum bileşenine sahip seviye rotasyon eksenini boyunca E_L enerjisine sahip ise, tuzakın açıl hızı kritik Ω_c değeri aşması durumunda bu seviye taban durumuyla kıyaslandığında enerji yönünden en uygun seviyedir.

$$\Omega_c = \frac{E_L - E_0}{L} \quad (7.41)$$

Ω_c değeri uyarılmış seviyenin karakterine bağlıdır. Thomas-Fermi yaklaşımının uygulanabileceği kadar fazla sayıda parçacık içeren buluttaki girdap seviyesi için, girdap seviyesinin enerjisi ile taban durumu arasındaki bağıntı (7.32) ile verilir ve buradaki toplam açısai momentum L ise (7.33)'ten hesaplanabilir. Denklem (7.41)'e göre bu değerlerin oranlarından kritik açısai hız için aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\Omega_c = \frac{5}{2} \frac{\hbar}{mR^2} \ln\left(0,671 \frac{R}{\xi_0}\right) = \frac{5}{2} \omega_0 \left(\frac{a_{osc}}{R}\right)^2 \ln\left(0,671 \frac{R}{\xi_0}\right) \quad (7.42)$$

Logaritmik terim ve nümerik faktör dışında bu denklemdaki açısai hız \hbar açısai momentumuna sahip bulut kenarındaki parçacığa aittir. Çünkü yüzey dalgaları için enerji ile açısai momentum oranının minimum değeri (7.39) ile verilir ve bu tür dalgalar için kritik açısai hız

$$\Omega_c \sim \omega_0 \left(\frac{a_{osc}}{R}\right)^{2/3} \quad (7.43)$$

ile verilir. Böylece Thomas-Fermi rejiminde girdap durumları, yüzey dalgalarının gerektirdiği açısai hızdan daha düşük bir açısai hızla dönen tuzakta dengede olabilir. Kritik açısai hızın en düşük değerinde izinli olan her tür muhtemel uyarılma için daha düşük kritik açısai hızlara başvurulmalıdır. Bu açısai hızın altında dönmeyen taban durumu, dönen çerçevede en düşük enerjiye sahiptir ve daha yüksek açısai hızlar için de diğer seviyeler daha uygundur. Bu durum II. tip süper iletkenlerdeki düşük kritik manyetik alan ile benzer olarak Ω_{c1} ile gösterilir. Daha yüksek manyetik alanlarda akı çizgileri meydana gelir. Açısai hız Ω_{c1} arttıkça denge durumundaki açısai momentum, parçacık başına 0'dan \hbar 'a kadar süreksiz olarak değişir.

Rotasyon oranı arttırıldığında denge durumunun doğası değişir: ilk olarak birbiri etrafında dönen iki girdap vardır, ardından üçgende üç girdap oluşur, sonra gitgide daha fazla girdap dizileri meydana gelir. Tüm girdaplar tek bir kuantum

sirkülasyonuna sahip olduğundan, çoklu kuantum sirkülasyonuna sahip girdaplar, tek kuantum girdaplarına bozunacağından stabil değildir.

Ω_{cl} minimum açısal hızıyla kıyaslandığında daha büyük açısal hızla dönen hacim süperakışkanı için enerji yönünden girdabının olması beklenir. Döner çerçevede en düşük enerjiye sahip durum, üçgensel tuzakta uniform girdap dizisinde organize olur. Akışkan yoğunluğunun girdaplar arasındaki uzunluk skalasını fark yaratacak kadar değişmemesi koşuluyla tuzaktaki Bose-Einstein yoğunlaşması için benzer sonuçlara ulaşılması beklenir.

Girdap dizisi için hız alanıyla sıradan akışkanın hız alanı karşılaştırıldığında; Ω açısal hızıyla döner çerçevede dengede bulunan akışkan için hız yerel olarak uniform rotasyona sahip akışkandaki gibidir ($\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$). Bu sebeple $\nabla \times \mathbf{v}$ uniformdur ve 2Ω 'ya eşittir. Yoğuşma için hız alanı bu duruma benzer olarak, yoğuşmada bulunan girdap dizisi açısal hız doğrultusunda sıralanırsa oluşturulabilir. Ω 'ya dik yüzeyde birim alandaki girdap sayısı

$$n_v = \frac{2m\Omega}{h} \quad (7.44)$$

ile verilir ve yoğuşmada birim alanda bulunan ortalama sirkülasyon 2Ω 'dır. Ancak kuantum sirkülasyonu sıfır olmadığından, $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ hız alanının girdap dizisinden itibaren her yerde oluşturulması imkansızdır, çünkü girdap civarında mevcut hız alanı ıraksaktır.

Bose-Einstein yoğunlaşmasının kuantum doğasının direkt belirtisi olarak kuantize girdapların önemi döner yoğunlaşmalarla ilgili pek çok deneysel araştırmaya sebep olmuştur. Bu tür deneylerdeki temel fikir, lazer ışınının kullanılarak yoğunlaşmayı harekete geçirmesidir. Atomların radyasyonla etkileşmesinden ötürü lazer ışını atomlar için döner bir potansiyel meydana getirir. Tuzaklanmış buluttaki girdap merkezinin uzaysal skalası $1 \mu\text{m}$ 'den daha küçük olduğundan, yapının optiksel çözümü imkânsızdır. Girdap yapısının uzaysal skalasını büyötmek için genellikle tuzak kapatılır ve optiksel incelemelerden önce bulutun balistik olarak genişlemesine izin verilir. Bu metod tek bileşenli yoğunlaşmalarla ilgili pek çok deneyde uygulanmıştır. Ancak seyreltik gazlarda

girdapların ilk kez incelenmesi, iki bileşenli yoğuşmanın kullanılmasıyla gerçekleştirilmiştir.

İki bileşenli yoğuşmaların kullanılması fikri, tek bileşenli yoğuşmalarda dengeye ulaşmak için gerekli süreyle ilgili merak ile birlikte Williams ve Holland tarafından öne sürülen özel tekniklerden ortaya çıkmıştır. Deney ^{87}Rb atomlarıyla gerçekleştirilmiştir ve iki bileşen $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ile $|F = 2, m_F = +1\rangle$ ince yapı durumlarındaki atomlara karşı gelir. Özetle lazer ışını uzaysal olarak uniform mikrodalga alanı ile iki foton geçişi tarafından ince yapı seviyelerinin çiftlenimini gerçekleştirir. İki pertürbasyon da çalıştırıldığında, $|F = 1, m_F = -1\rangle$ seviyesindeki yoğuşmanın dönmediği varsayılırsa, $|F = 2, m_F = +1\rangle$ seviyesinde dönen bir yoğuşma oluşturulur. Mikrodalga alanının frekansı ve rotasyon frekansı uygun bir biçimde seçilirse, dönmeyen yoğuşmadaki atomlar, ikinci ince yapı seviyesindeki atomların girdap seviyesine rezonans olarak transfer olur. İlk deneyde girdap merkezi, $|F = 1, m_F = -1\rangle$ seviyesindeki atomların dönmeyen yoğuşmasını içeriyordu. Çünkü ince yapı seviyelerindekinden farklı olarak atomlar arasındaki itici etkileşimden dolayı, girdap merkezi balistik genişleme olmaksızın direkt olarak gözlenecek kadar genişler. Daha sonraki deneylerde ise dönmeyen atomlardan oluşan yoğuşma uzaklaştırıldı ve böylece tek bileşenli sistemde dönen yoğuşmaya ulaşıldı.

Tek bileşenli yoğuşmalarda girdapları çekirdekletmekle ilgili zorluklar çok önemli değildir. Tek girdap ve girdap dizileri, ^{87}Rb atomları gazının lazer ışını kullanılarak hareketlendirilmesi esnasında oluşturulmuştur ve dönen Bose-Einstein yoğuşması durumunun açısal momentumu ölçülmüştür. Son deneylerde, ^{23}Na atomları yoğuşmasında 130 girdap içeren düzenli üçgensel diziler incelenmiştir. Buradan elde edilen sonuçlar yukarıda tanımlanan dönen süperakışkanların denge durumlarıyla ilgili temel görüntüyü desteklemektedir.

Tuzak içinde dönen Bose-Einstein yoğuşması çalışmaları, homojen olmayan sistemlerdeki girdap çizgilerinin davranışına yeni bir ışık tutmuştur. Burada, dönen süperakışkanların termal uyarılmalar gibi pertürbasyonlara verdiği yanıtta benzer henüz gerçekleştirilmemiş pek çok problem mevcuttur.

7.4. Girdap Hareketi

İdeal akışkana ait klasik hidrodinamik sonuçlarından biri de Kelvin teoremi veya sirkülasyonun korunumu yasasıdır. Bu yasa akışkanla birlikte hareket eden kontur etrafındaki sirkülasyonun zamanla sabit olduğunu ifade eder. Bu teorem girdap hareketin terimlerinde ifade edilecek olursa, girdap çizgilerinin yerel akışkan hızı ile birlikte hareket ettiğini belirtmektedir.

İlk örnek olarak silindirik bir kaptaki hapsedilmiş sıkıştırılmaz bir akışkandaki aksel olmayan bir girdap ele alınabilir. Girdap ile girdap görüntüsü arasındaki etkileşimin sonucu olarak, radyal koordinatları sabit kalmak üzere konumlarına ait azimutal açılar değişecektir. Açılal hız klasik mekanik tarafından belirlenebilir:

$$\dot{\phi} = \Omega = \frac{\partial E}{\partial L} \quad (7.45)$$

Denklem (7.38) ile verilen enerji ve (7.36) ile verilen momentumun her ikisi de parametrik olarak silindir ekseninden girdap çizgisine kadar olan uzaklık olan b 'ye bağılı olduğundan, frekans aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\partial E}{\partial L} = \frac{\partial E / \partial b}{\partial L / \partial b} = \frac{\hbar}{mR^2} \frac{1}{1 - b^2 / R^2} \\ &= \frac{1}{b} \frac{\hbar}{m(R^2 / b - b)} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Böylece eksenden b yarıçapı kadar uzaktaki girdabın hızı $\hbar / m(R^2 / b - b)$ 'dir. Orijinal girdap konumundaki akışkan hızının kaynağı girdap görüntüsüdür ve iki girdap arasındaki uzaklık $d = R^2 / b - b$ olmak üzere \hbar / md 'dir. Bu sebeple girdabın ilerlemesi esnasındaki hız, Kelvin teoremiyle uyumlu olarak açık bir biçimde akışkandaki girdap konumunun akış hızıdır.

7.4.1. Girdap Çizgisi Üzerindeki Kuvvet

Kelvin teoremindeki sonuçlar, girdap çizgisi üzerine etkiyen kuvvetin dikkate alınmasıyla elde edilebilir. Bunun için girdap çizgisi civarındaki bölge içinde akışa ait momentum hesaplanır. Girdap çizgisini çevreleyen yüzey bu girdapla birlikte hareket ediyor ise yüzey boyunca iç bölgedeki akış momentumu

$$F_i = -\int dS_j \Pi_{ij} \quad (7.47)$$

ile verilir. Burada Π_{ij} momentum akı yoğunluğu tensörü ve yüzeydeki alan elemanı dışarı doğru yönlenmiş normal vektörü biçiminde dS_j ile gösterilmiştir.

Burada yüzeyin girdap merkezinin yeteri kadar dışında olduğu düşünülür ve bu nedenle yoğunlaşma dalga fonksiyonu genliğinin gradyentini içeren momentum akı yoğunluğu tensörü ihmal edilebilir. Buna ek olarak dış potansiyellerin etkisi de ihmal edilebilir. Böylece p basınç olmak üzere momentum akı yoğunluğu tensörü

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + nmv_i v_j \quad (7.48)$$

dir ve kuvvet ise

$$F_i = -\int dS_j (p\delta_{ij} + nmv_i v_j) \quad (7.49)$$

olur. Böylece kuvvetin bir kısmı yüzeydeki basınç değişimlerinden, bir kısmı ise yüzeyi geçen akışkanın hacim hareketinin oluşturduğu momentum taşınmasından ileri gelir. Girdabın varlığından ötürü girdap çizgisine yakın bölgelerdeki hız alanı, girdap çizgisinden olan uzaklıkla ters orantılı bir biçimde değişen bileşene sahiptir. Buna ek olarak, girdap merkezinin dışında, konumla düzgün bir biçimde değişen hız alanı katkısı (\mathbf{u}) söz konusudur. Girdaptan ξ tutarlı uzunluğu mertebesindeki uzaklıklarda, merkez bölgesinde parçacık kaybının adeta bir engel gibi davranmasından ötürü hız alanına ‘ters akış’ katkıları mevcuttur, fakat girdap

merkezine ξ 'den daha uzak bölgelerde bu etkiler ihmal edilebilir. Böylece ele alınan yüzeyde \mathbf{u} sabit alınacaktır.

Girdapla hareket eden çerçevede, akış hareketsizdir ve bu nedenle akış hızı Bernoulli eşitliğini sağlar:

$$\mu + \frac{1}{2}m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 = \mu_0 + \frac{1}{2}mu^2 \quad (7.50)$$

Burada μ_0 girdap merkezinden uzak bölgelerdeki kimyasal potansiyeli ifade eder.

Kimyasal potansiyeldeki değişim:

$$\delta\mu = \mu - \mu_0 = \frac{1}{2}m[u^2 - (\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2)] = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.51)$$

dir. Basınçtaki değişim ile kimyasal potansiyeldeki değişim, sıfır-sıcaklıktaki $dp = n d\mu$ termodinamik bağıntısı ile ilişkilendirilebilir. Akışkanla birlikte hareket eden kontur etrafında momentum akısını hesaplamak için momentum akı yoğunluk tensörü girdabın sabit olduğu çerçeveye dönüştürülür. Burada akış hızı $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ ile verilir. Momentum akı yoğunluk tensöründeki değişim \mathbf{u} 'nun birinci mertebesinden

$$\delta\Pi_{ij} = nm(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} - u_i v_j - v_i u_j) \quad (7.52)$$

dir. Sınır üzerinden taşınan toplam momentum, momentum akı yoğunluk tensörü ile sınırın yüzey alanı elemanı ile skaler çarpımının integre edilmesiyle bulunur. Girdap üzerine etkiyen kuvvet bu niceliğin negatifidir. Daha açık olması için \mathbf{u} , x doğrultusunda $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$ olarak alınsın. Girdabın birim uzunluğunda kuvvet bileşenleri

$$F_x = u_x \oint nm(v_x e_x + v_y e_y) dl \quad (7.53)$$

ve

$$F_y = u_x \oint nm(v_y e_x + v_x e_y) dl \quad (7.54)$$

ile verilir. Burada dl , xy düzlemindeki yüzey elemanıdır ve \hat{e} dışarı doğru yönelmiş yüzey normali doğrultusundaki birim vektördür. Denklem (7.53)'te sağda bulunan ikinci integrant, kontur boyunca yok edilmesi gereken net kütle akısıdır. Böylece x doğrultusundaki kuvvet ortadan kalkar. Bu durum bir cismi geçen potansiyel akışta sürüklenme kuvvetinin olmamasını ifade eden d'Alambert paradoksuna bir örnektir. Kontur üzerindeki uzunluk elemanı $d\mathbf{l} = dl(-e_y, e_x)$ ile verilir ve (7.54)'teki integral kontur etrafındaki sirkülasyonu verir:

$$\kappa_z = \oint (v_y e_x - v_x e_y) dl = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.55)$$

z doğrultusundaki kuvvet simetriden dolayı ortadan kalkar, ve böylece sirkülasyon girdap çizgisi doğrultusunda vektör olarak bakılacak olursa, girdabın birim uzunluğundaki toplam kuvvet

$$\mathbf{F} = nm\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{u} \quad (7.56)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\boldsymbol{\kappa}$, doğrultusu girdap çizgisi olan girdap sirkülasyonudur. Bu kuvvet genellikle “Magnus kuvveti” olarak adlandırılır. Burada kuvvetin ele alınan yüzey içindeki durumlardan bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir. Özellikle, bu sonuç katı bir nesne (uçanın kanadı gibi) söz konusu olduğunda geçerlidir. (Bu kuvvet uçuş için gerekli kaldırmayı sağlayan kuvvettir.)

Denklem (7.56)'dan önemli bir sonuca ulaşılır. Sabit akışta bulunan girdap, üzerine etkiyen başka kuvvet yoksa yerel akışkan hızı ile hareket eder. Bu şekilde olmasaydı dengelenmemiş kuvvetler söz konusu olurdu. Girdap diğer kuvvetlere maruz kalırsa, bu kuvvetler kesin olarak Magnus kuvvetini engeller. Akışkandaki girdabın taşınması etkisi, Bölüm 5.1'de türetilen hareket denklemlerinde olmadığına dikkat edilmelidir. Bölüm 5.1'de $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ olduğu

kabul edildi ve böylece girdap oluşumu söz konusu değildi. Bu etkileri dahil edebilmek için girdap çizgisi yakınlarındaki bölgelerde dikkatli düzeltmeler yapılmalıdır ve bu durumda, akış irrotasyonel olarak kabul edilmeksizin, ideal akışkan için Euler denkleminden türetilen (5.25) numaralı denklemde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ benzeri terimlerde artma meydana gelir.

7.5. Rotasyon Altında Zayıf Etkileşen Bose Gazı

Zayıf etkileşen Bose gazı, rotasyon ile ilgili çalışmalar için bilgi verici bir modeldir. z eksenini etrafında ekstenel simetriye sahip Harmonik osilatör potansiyelinde bulunan N tane özdeş bozon göz önüne alınsın. Sistemin taban durumu, etkileşim enerjisinin osilatör kuantumu enerjisi ile kıyaslandığında küçük olduğu durum için daha önce ele alındı ve bu seviyenin enerjisi pertürbasyon teorisi tarafından (4.23)'te elde edildi. Titreşim hareketi yapan modların özellikleri ise Bölüm 6.2.1'de ele alındı. z eksenini etrafında açısal momentumu sıfır olmayan seviyelere bakıldığında, daha önce incelenen durum ile arasındaki fark, x ve y doğrultularındaki osilatör frekanslarının aynı olması ve bu sebeple bu iki doğrultudaki osilasyonlar için modların etkileşim tarafından karıştırılmasıdır. Bu problemin çözülebilmesi için x ve y doğrultularındaki hareketin belirli kuantum sayılarına sahip seviyeler yerine, z eksenini yakınlarında belirli açısal momentuma sahip seviyelerle ilgilenilir. Burada z doğrultusundaki hareket için dalga fonksiyonunun bir rolü olmadığından problem tamamen iki-boyutlu ele alınır. İzotropik iki-boyutlu osilatör için enerji seviyeleri

$$E = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega_{\perp} \quad (7.57)$$

ile verilir. Burada n_x ve n_y bu iki doğrultudaki kuantum sayıları ve ω_{\perp} ise xy düzlemindeki osilasyon frekansıdır. Tek kuantumdan fazla kuantuma sahip enerji seviyeleri dejeneredir ve z eksenini etrafındaki rotasyonlar altında basit özelliklere sahip aynı enerjili seviyelerin kombinasyonları kurulabilir. Spektrum, açısal

momentum kuantum sayısı m ve dalga fonksiyonunun fadyal düğüm noktaları sayısı n_p terimlerinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E = (|m| + n_p + 1)\lambda\omega_{\perp} \quad (7.58)$$

$m\hbar$ momentumuna sahip en düşük enerjili tek-parçacık seviyesi, taban durumuyla ilgili olarak $|m|\hbar\omega_{\perp}$ uyarılma enerjisine sahiptir. Bu durum klasik olarak xy yüzeyinde dairesel yörüngeye karşı gelir. Verilen L açısai momentumu için etkileşimlerin söz konusu olmadığı durumda, çok-parçacıklı seviyenin en düşük enerjiye sahip durumları radyal düğüm noktaları olmayan seviyelerin yerleştirilmesiyle ve parçacıkların aynı L açısai momentumuna sahip olmasıyla elde edilebilir. Daha belirli olması açısından L pozitif alınabilir. Radyal düğüm noktası bulunmayan ve $m\hbar$ açısai momentumuna sahip tek-parçacık seviyesindeki atomların sayısı N_m olmak üzere açısai momentum

$$L = \hbar \sum_{m \geq 0} m N_m \quad (7.59)$$

ve enerji

$$E_L - E_0 = L\omega_{\perp} \quad (7.60)$$

ifadesiyle verilir. $L = \hbar$ için $N-1$ tane parçacık osilatörün taban durumunda olduğundan seviye tektir ve bu seviyedeki tek parçacık, açısai momentumun bir birimine sahiptir. Bu seviye $|0^{N-1}1^1\rangle$ ile gösterilsin. Açısai momentumun daha büyük değerleri için en düşük enerjiye sahip seviye dejeneredir. Örneğin $L = 2\hbar$ için $N-1$ parçacığın taban durumunda ve bir parçacığın da $m = 2$ 'de olduğu seviye $|0^{N-1}2^1\rangle$ 'dir ve $N-2$ parçacığın taban durumunda ve iki parçacığın da $m = 1$ 'de olduğu seviye $|0^{N-2}1^2\rangle$ 'dir. Dejenerelik L ile hızlı bir biçimde artar.

Küçük açısıl momentuma sahip seviyelerin enerjileri üzerine etkileşimlerin etkisini incelemek için ele alınabilecek en basit örnek $N-1$ parçacığın taban durumunda olduğu ve bir parçacığın da $m\hbar$ açısıl momentumuna sahip olduğu durum göz önünde bulundurulur. Bu seviyenin enerjisinin beklenen değeri aşağıdaki gibidir:

$$E_m = E_0 + \hbar|m|\omega_{\perp} + (N-1)(\langle 00|U|00\rangle - 2\langle 0m|U|0m\rangle) \quad (7.61)$$

Etkileşimin $|0^{N-1}m^1\rangle$ ile $|0^{N-|m|}1^m\rangle$ seviyelerini karıştıracığı gerçeği N 'inci mertebeden enerjiye katkıyı etkilemez.

$m\hbar$ açısıl momentumuna sahip seviyenin dalga fonksiyonu $\rho^{|m|}e^{im\varphi}$ ile orantılı olduğundan, etkileşimin matris elemanları açıkça hesaplanabilir. Böylece

$$\langle 0m|U|0m\rangle = \frac{1}{2^{|m|}} \langle 00|U|00\rangle \quad (7.62)$$

olarak bulunur. Bu nedenle uyarılma enerjileri

$$E_m = E_0 + \hbar|m|\omega_{\perp} - N\langle 00|U|00\rangle(1 - 1/2^{|m|-1}) \quad (7.63)$$

dir. Burada etkileşim teriminde $N-1$ ile N yer değiştirmiştir. $|m|=1$ için etkileşim enerjisinin değişmediğine dikkat edilmelidir. Bunun sebebi uyarılmış seviyenin açısıl momentumunun tamamen kütle merkezi hareketiyle bağlantılı ele alınmasındandır ve sonuç olarak atomlar arasındaki karşılıklı etkileşimler kesinlikle taban durumundakiyle aynıdır. Bu etki Bölüm 5'te ele alındığı üzere koordinat eksenini boyunca titreşim hareketi için olan ile benzerdir.

7.5.1. İtici Etkileşimler

İtici etkileşimler için uyarılma enerjisi, etkileşime sahip olmayan parçacıklarla karşılaştırıldığında indirgenmiştir. Birim açısai momentum başına enerji gideri

$$\frac{E_m - E_0}{|m|\hbar} = \omega_{\perp} - N \langle 00 | U | 00 \rangle \frac{(1 - 1/2^{|m|-1})}{|m|\hbar} \quad (7.64)$$

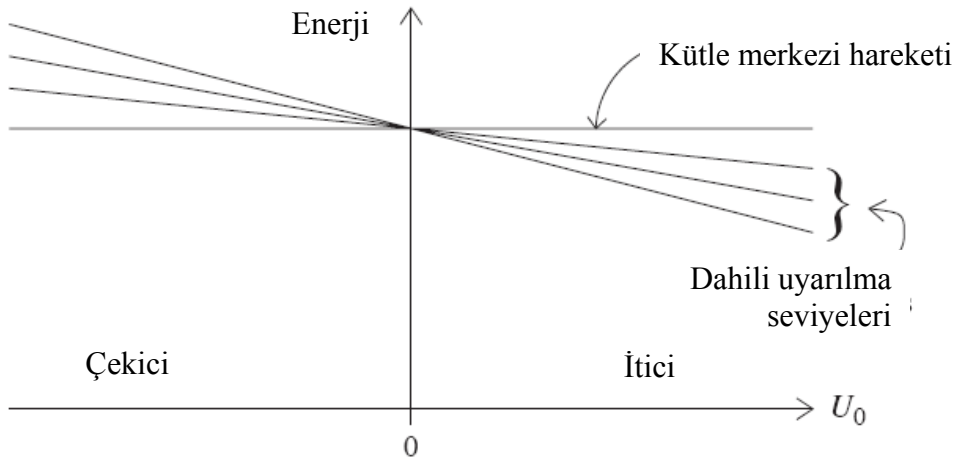
ile verilir. Bu nedenle kuadrupol ($|m| = 2$) ve oktupol ($|m| = 3$) için en düşük modlardır ve bu yaklaşımdaki değer her iki türden uyarılma için de aynıdır.

Parçacık başına açısai momentumun sıfır olmayan değerine sahip en son enerji seviyesini belirlemek için yukarıda ele alınan temel uyarılmalar arasındaki etkileşimler hesaba katılmalıdır. Bu durumda düşük açısai momentuma sahip en düşük enerjili seviye kuadrupol modlarının uyarılmasıyla elde edilir. Etkileşim enerjisindeki değişim negatiftir, çünkü uyarılmış durumdaki tek-parçacık taban durumu dalga fonksiyonu taban durumundakinden daha fazla genişler ve böylece etkileşim enerjisinin beklenen değeri azalır. Elde edilen sonuçlar, küçük toplam açısai momentum ($L \ll N\hbar$) için Thomas-Fermi rejimi için de incelenmiştir ve birim açısai momentum için en düşük enerjili uyarılmaların, açısai momentumu $(R/a_{osc})^{4/3} \hbar$ mertebesinde olan yüzey dalgaları olduğu bulunmuştur. Zayıf çiftlenim limitinde R ve a_{osc} 'a ait değerler karşılaştırılabilir ve bu sebeple uyarılmalara ait en uygun açısai momentumun bir mertebesinde olması gerektiği beklenir. Bu durumun beklendiği gibi olduğu açık hesaplamalarla da kanıtlanmıştır.

7.5.2. Çekici Etkileşimler

Çekici etkileşimler için durum daha farklıdır. Genel olarak atomu taban durumundan uyararak için gereken enerji, serbest parçacık değerinden daha büyüktür, çünkü çekici enerjinin bir kısmı parçacıklar birbirinden oldukça uzakta oldundan kaybedilir. Buradaki istisna, durum uyarılma enerjisinde etkileşim katkısının olmadığı kütle merkezi uyarılmasıdır. Bu nedenle buluta açılma momentum eklemenin enerji yönünden en ekonomik yolu, dahili taban durumu korelasyonlarını değiştirmeden kütle merkezi hareketini uyarılmasıdır. Bu durum, burada yalnızca zayıf etkileşimler ve küçük açılma momentum için gösterilmiş olsa da aslında oldukça geneldir. Açılma momentum, etkileşim enerjisini değişmez kılan kütle merkezi hareketine kısmen eklenebilir veya etkileşim enerjisini arttıran dahili uyarılmalar içine yerleştirilebilir. Böylece çekici etkileşime sahip atom bulutunun verilen açılma momentum enerji yönünden en uygun olan yolu kütle merkezi hareketinin uyarılmasıdır.

Yukarıdaki örnekten çekici etkileşime sahip atom bulutunun rotasyon altındaki davranışının, itici etkileşime sahip olanlardan daha farklı olduğu bulunur. Çünkü sistem çiftlenme sıfıra doğru gittikçe sistemde faz geçişi meydana gelir. Bu durum yukarıda ele alınan modeldeki durum için birden fazla birim açılma momentum ile incelenebilir. Taban durumu etkileşimler söz konusu olmadığında dejeneredir. Zayıf etkileşimler için beklenen değerler, dejenerasyon seviyelerinin alt uzaylarında etkileşim Hamiltonyeninin köşegenleştirilmesiyle elde edilir. Tüm matris elemanları potansiyel kuvvetiyle orantılıdır ve bu nedenle beklenen değerler kuvvetin lineer fonksiyonlarıdır. Beklenen değerlerin davranışı Şeki 7.3'te şematik olarak gösterilmiştir. Buradan en düşük enerjiye sahip seviyenin, etkileşim kuvveti sıfıra doğru giderken sistem karakterini değiştirildiği görülür. Yukarıdaki hesaplamalar göstermektedir ki, yalnızca kütle merkezinin uyarılmasına karşı gelen seviye, çekici etkileşimler için en düşük enerjiye sahip olan seviyedir ve ancak itici etkileşimler için ise, pek çok seviye içinden en yüksek enerjiye sahip olanıdır.



Şekil 7.3. Açısal momentumun sıfırdan farklı değerlerine sahip çok-atom öz durumları enerjilerinin, atomlar arası zayıf çiftlenim için etkileşim kuvvetinin fonksiyonu olarak şematik gösterimi

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Giriş bölümünde belirtildiği gibi klasik sistemlerden birçok yönüyle farklı olan Bose-Einstein yoğuşmasını oluşturan atomlar aynı kuantum durumuna yerleşerek, kuantum fenomenlerinin makroskobik bir ölçekte incelenbilmesine olanak sağlarlar. Kuantum mekaniği yasalarının sonucu olarak oluşan Bose-Einstein yoğuşmasından yararlanarak, fotonların bilgi taşıyıcısı olarak görev yaptığı kuantum bilgisayarları üretilebilir. Yani bozonik yapıya sahip olan fotonlar, kuantum bilgilerinin iletilmesinde kullanılabilir. Ayrıca nükleon çiftlerinin oluşturduğu Bose-Einstein yoğuşması, nötron yıldızlarının ve pulsarların yapılarının incelenmesinde de önemli bir yere sahiptir. Bose-Einstein yoğuşması, yüksek enerji ve parçacık fiziğinde kuark-antikuark yoğuşmasına sahip vakumun anlaşılmasında da oldukça önemlidir.

Bu tezde, Bose-Einstein yoğuşması ile süper akışkanlık arasındaki ilişkiyi belirtmede önemli bir role sahip olan, dönen yoğuşmalardaki girdap yapıları incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, yapının iyi bir biçimde anlaşılabilmesi için yoğuşmaya ait genel istatistiksel tanımların ardından, yoğuşmaya ait özellikler, lineer olmayan Schrödinger denklemi olarak da bilinen Gross-Pitaevski eşitliğinden başlamak suretiyle belirli yaklaşımlardan da yararlanarak açıklanmıştır. İlk kez Onsager tarafından süper akışkan sıvı ^4He içeriğinde ileri sürülen girdap yapısının Bose-Einstein yoğuşması içeriğindeki oluşumunun nasıl olduğu araştırılmıştır.

Bu tezden yararlanılarak,

- i.* Girdap için enerji seviyeleri farklı α lar için hesaplanabilir,
- ii.* Birden çok girdap için, enerji değerlerinin hesaplanmasında, enerji değerinin büyüklüğüne etki eden faktörler göz önüne alınabilir ve bu faktörleri farklı değerleri için enerji hesaplamaları yapılabilir,
- iii.* Uzunluk başına girdap enerjisinin logaritmik değiştiği görülebilir.

Bu noktalardan hareketle de Girdap dinamiği için yeni hesaplamalar ve açılımlar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Aftalion, A., “Vortices in Bose-Einstein Condensation”, Birkhauser, 2006.
- [2] Landau, L. D. ve Lifshitz, E. M.,”Statistical Physics,Third Edition”,Pergamon, Oxford, 1980.
- [3] Pitaevski, L. ve Stringari, S., “Bose-Einstein Condensation”, Oxford Science Publications, 2003.
- [4] Dalfovo, F. ve Giorgini, S., “Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gase ”,Reviews of Modern Physics, Vol. 71,No.3, 1999.
- [5] Pethick, C. J., Smith, H., “Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases”, Cambridge University Pres, 2002.
- [6] Mullin, W. J., “Bose-Einstein Condensation in a Harmonic Potential”, Journal of Low Temperature Physics, Vol:106, 56, 1997.
- [7] Ensher, J. R., Jin,D. S., Metthews, M. R., Wiemann, C. E., Cornell, E. A., “Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: Measurement of Energy and Ground-State Occupation”, Phys. Rev. Lett., **77**, 4984, 1996.
- [8] Kao, Y. M., Lin, D. H., Han, P., Luan, P. G., “Boundary and Particle Number Effects on the Thermodynamic Properties of Trapped Ideal Bose Gases”, Eur. Phys. J., B **34**, 55-61, 2003.
- [9] Ketterle, W and van Druten, N. J., “Bose-Einstein Condensation of a Finite Number of Particles Trapped in One or Three Dimensions”, Physical Review A **54**, 1, 1996.
- [10] http://tr.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_ba%C4%9Flar%C4%B1
- [11] Bransden, B. H., Joachain, C. J., “Physics of Atoms and Molecules”, Benjamin Cummings, 2003.
- [12] Bayın, S., “Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler”, Ders Kitapları A.Ş., 2004.
- [13] Fowler, M., “More Scattering: the Partial Wave Expansion”, Ders Notu, 17/01/2008.
- [14] Leggett, A. J., “Quantum Liquids: Bose Einstein and Cooper Pairing in Condensed-Matter Systems”, Oxford University Press, 2006.

- [15] Fowler, M., “Scattering Theory”, Ders Notu, 16/01/2008.
- [16] <http://jilawww.colorado.edu/pubs/thesis/roberts/ch2.pdf>
- [17] Roberts, J. L., Claussen, N. R., Cornish, S. L., Wiemann, C. E., “Magnetic Field Dependence of Ultracold Inelastic Collisions near a Feshbach Resonance”, *Physical Review Letters* **85**, 4, 2000.
- [18] Duine, R. A., Stoof, T. C., “Dynamics of Bose-Einstein Condensate Near a Feshbach Resonance”, *Physical Review A* **68**, 013602, 2003.
- [19] <http://www.ph.utexas.edu/~coldatom/cold.html>
- [20] Jamieson, M. J., Dalgarno, A., Yukich, J. N., “Elastic Scattering of Hydrogen Atoms At Low Temperatures”, *Physical Review A* **46**, 11, 1992.
- [21] Jamieson, M. J., Dalgarno, A., “Scattering Lengths and Effective Ranges for He-He and Spin-Polarized H-H and D-D Scattering”, *Physical Review A* **51**, 3, 1995.
- [22] Abeelen, F. A., Verhaar, B. J., “Determination of Collisional Properties of Cold Na Atoms From Analysis of Bound-State Photoassociation and Feshbach Resonance Field Data”, *Physical Review A* **59**, 1, 1999.
- [23] Cote, R., Dalgarno, A., “Potassium Scattering Lengths and Prospects for Bose-Einstein Condensation and Sympathetic Cooling”, *Physical Review A* **57**, 6, 1998.
- [24] Boesten, H. M. J. M., Vogels, J. M., Tempelaars, J. G. C., Verhaar, B. J., “Properties of Cold Collisions of ^{39}K atoms and of ^{41}K atoms in Relation to Bose-Einstein Condensation”, *Physical Review A* **54**, 5, 1996.
- [25] Cornish, S. L., Claussen, N. R., Roberts, J. L., Cornell, E. A., Wiemann, C. E., “Stable ^{85}Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions”, *Physical Review Letters*, **85**, 9, 2000.
- [26] Roberts, J. L., Claussen, N. R., Burke, James P., Green, Chris H., Cornell, E. A., Wiemann, C. E., “Resonant Magnetic Field Control of Elastic Scattering in Cold ^{85}Rb ”, *Physical Review Letters*, **81**, 23, 1998.
- [27] Leggett, A. J., “Bose-Einstein Condensation in The Alkali Gases: Some Fundamental Concepts”, *Reviews of Modern Physics*, Vol:73, 2001.

- [28] <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/ngb23/publications/review.pdf>
- [29] Srinivasan, R., “Vortices in Bose-Einstein Condensates: A Review of the Experimental Results”, Vol:66, 1, 2006.
- [30] Bateman, H., “Higher Transcendental Functions-Volume II”, McGraw-Hill Book Company, 1953.
- [31] http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/9908/9908147v1.pdf
- [32] Papadopoulos I., “Quantum Mechanical Calculations for Bose-Einstein Condensates with Electromagnetically Induced $1/r$ Interaction”, Doctorate Thesis, Stuttgart University, Theoretical Physics Institute, Stuttgart, Germany, 2007.
- [33] Fetter, A. L., Svidzinsky, A. A., “Vortices in a Trapped Bose-Einstein Condensate”, Journal of Physics: Condensed Matter **13**, 2001.
- [34] Fetter, A. L., “Lectures in Theoretical Physics”, Gordon and Breach, NY, 1969.
- [35] Lundh, E., Pethick, C. J. ve Smith, H., “Zero Temperature Properties Of a Trapped Bose-Condensed Gas: Beyond the Thomas Fermi Approximation” Phys. Rev. A, **55**, 2126, 1997.