

**CLIFFORD CEBİRLERİ VE  
FİZİKTEKİ BAZI ÖZEL PROBLEMLER**

Nuray CANDEMİR  
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı  
Aralık 2007

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nuray CANDEMİR'in “Clifford Cebirleri ve Fizikteki Bazı Özel Problemler” başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki Doktora Tezi 10.12.2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmenliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. KUDRET ÖZDAŞ	.....
Üye ( II.Tez Danışmanı)	: Doç Dr. MURAT TANIŞLI	.....
Üye	: Prof. Dr. MUSTAFA ŞENYEL	.....
Üye	: Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK	.....
Üye	: Prof. Dr. NACİ EKEM	.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun  
.....tarih ve .....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

## ÖZET

**Doktora Tezi**

### **CLIFFORD CEBİRLERİ VE FİZİKTEKİ BAZI ÖZEL PROBLEMLER**

**Nuray CANDEMİR**

**Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Bölümü**

**Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ  
II. Danışman: Doç. Dr. Murat TANIŞLI  
2007, 83 sayfa**

Bugün fizikteki kavramları ve yasaları anlatmak için farklı birçok cebir sistemi kullanılmaktadır. Bu cebir sistemlerinden biri de Clifford cebridir. Bu tezde, Clifford cebri tanımlandıktan sonra, farklı uzaylarda tanımlı Clifford cebirlerinin özellikleri verilmiştir.  $Cl_2$  Clifford cebrinin, kuaterniyon cebrine ayrıca  $Cl_3$  ve  $Cl_4$  Clifford cebirlerinin ise kompleks kuaterniyon cebrine benzerlikleri gösterilmiştir. Clifford cebrinin bazılarıyla benzer özelliğe sahip ancak birleşimli olmayan hiperbolik oktonyon cebri de tanıtılmıştır. Clifford cebirleri fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır. Ancak bu tezde Clifford cebirleri kullanılarak matematiksel fizik, analitik dinamik, özel relativite, elektromanyetik teori ve kuantum dinamiğindeki bazı özel uygulamalar gösterilmiştir. Son olarak, Proca alan ve Proca Maxwell denklemleri hiperbolik oktonyon cebri ile bir tek denkleme indirgenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Clifford cebri, Kuaterniyon Cebri, Hiperbolik Oktonyon Cebri, Elektrodinamik, Relativistik Mekanik

## ABSTRACT

Ph. D. Dissertation

### CLIFFORD ALGEBRAS AND SOME SPECIAL PROBLEMS IN PHYSICS

Nuray CANDEMİR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Physics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

Co-Supervisor: Doç. Dr. Murat TANIŞLI

2007, 83 pages

Today, the many different algebraic systems are used for expressing of the laws and concepts of physics. One of the them is Clifford algebras. In this thesis, after defining general of Clifford algebra, the general properties of Clifford algebras which are defined in different space are given.  $Cl_2$  Clifford algebras are the similar to the quaternion algebra.  $Cl_3$  and  $Cl_4$  Clifford algebras are the similar to the complexified quaternion algebra. These similarities are also shown. Hyperbolic octonion algebra which have the similar properties with basis of Clifford algebras but not associated is also defined. Clifford algebras are used in many field of physics. But in this thesis using by Clifford algebras, the some special applications in the mathematical physics, analytic dynamics, special relativity, electromagnetic theory and quantum mechanic have been indicated.

Finally, Proca field and Proca Maxwell equations are reduced to one equation by hyperbolic octonions.

**Keyword:** Clifford Algebras, Quaternion Algebra, Hyperbolic Octonion Algebra, Electrodynamics, Relativistic Mechanics

## **TEŐEKKÖR**

Bu tezin hazırlanması sırasında görüő ve önerileri ile beni yönlendiren değerli hocam

Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ'a  
yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen

Doç. Dr. Murat TANIŞLI'ya,  
en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Nuray CANDEMİR

Aralık-2007

## İÇİNDEKİLER

	<u>...Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>vii</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	<b>viii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	<b>ix</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. CLIFFORD CEBRİNE GİRİŞ</b>	<b>4</b>
2.1. Vektör (Lineer) Uzaylar .....	4
2.1.1. Skaler ve vektörler .....	4
2.1.2. Bazlar ve boyut .....	5
2.2. Skaler Çarpım.....	5
2.3. Vektörel Çarpım.....	6
2.4. Dış Çarpım .....	7
2.4.1. İki boyut .....	8
2.4.2. Üç boyut.....	10
2.5. Üç Vektör .....	11
2.6. Çokluvektörler.....	12
2.7. Geometrik Çarpım.....	13
2.7.1. İç Çarpım.....	14
2.8. Bir Çoklu Vektörün Derecesi.....	15
2.8.1 n-vektörün derecesi. ....	16
2.9. Vektör Türev .....	18
<b>3. CLIFFORD CEBİRLERİ</b>	<b>20</b>
3.1.Clifford cebri olarak Kompleks ve Hiperbolik Sayılar .....	21
3.2. Euclidean Uzayın Clifford Cebirleri .....	21

3.2.1 Euclidean düzlemin Clifford cebri .....	21
3.2.2. Dik izdüşüm .....	22
3.3. Kuaterniyonlar.....	23
3.3.1. Kuaterniyon çarpım.....	24
3.4. Kompleks Kuaterniyon .....	25
3.5. Euclidean Uzayın Clifford Cebri .....	25
3.5.1. $Cl_3^+$ : Kuaterniyon .....	27
3.5.2. Kompleks alt cebirler .....	28
3.5.3. $Cl_3$ : Kompleks kuaterniyonun Clifford cebri .....	28
3.6. 4- Boyutlu Uzayın Clifford Cebirleri .....	29
3.5.2. $Cl_{0,4}$ : Bikompleks kuaterniyonun Clifford cebri .....	29
3.7. Sanki Euclidean Uzayın Clifford Cebri .....	30
3.7.1. Reel Euclidean ve sanki Euclidean uzayların Dirac matrisleri ..	31
3.7.2. Metrik tensör ve vektörün skaler çarpımı .....	31
3.7.3. p-vektörlerin dış çarpım ve Clifford sayıların skaler çarpımı ....	33
3.7.4. $Cl_{1,3}$ uzay zaman cebri.....	33
3.8. Kompleks Clifford Cebri.....	35
3.8.1. Dirac cebri .....	35
3.9. Bölüntülü (Split) Cebirler .....	36
3.9.1. Hiperbolik oktonyonlar .....	36
<b>4. CLIFFORD FOURIER DÖNÜŞÜMÜ</b> .....	<b>38</b>
4.1. $R$ 'de Fourier Dönüşümü.....	38
4.2. $Cl_3$ 'de Clifford Fourier Dönüşümü .....	39
4.3. Clifford Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri .....	41
4.3.1. Lineerlik .....	41
4.3.2. Öteleme (Delay) özelliği .....	41
4.3.3. Ölçeklendirme (Scaling) özelliği .....	42
4.3.4. Yön özelliği.....	42
4.4. Türevlerin Clifford Fourier Dönüşümü.....	43
4.4.1. Vektör diferansiyel ve kısmi türev alma .....	43
4.4.2. Vektör türev ve Laplace işlemci .....	45

4.5. Konvolüsyon .....	46
4.6 Plancherel ve Parseval Teoremleri .....	47
<b>5. GEOMETRİK CEBİR KULLANILARAK HAMILTON MEKANİĞİNİN FORMÜLASYONU</b>	<b>50</b>
5.1. Faz Uzayında Hamilton Mekanîği .....	50
<b>6. CLIFFORD CEBRİ VE DÖRT BOYUTLU LORENTZ DÖNÜŞÜMÜ</b>	<b>55</b>
6.1. Dört Boyutlu Lorentz Dönüşümü.....	55
<b>7. CLIFFORD CEBRİNİN ELEKTROMANYETİK TEORİYE UYGULANMASI</b>	<b>60</b>
7.1. Clifford Sayıları ve Maxwell Denklemleri .....	60
7.2. $Cl_3$ Clifford Cebrinde Elektromanyetizma için Ayar Dönüşümü .....	63
7.3. Hiperbolik Oktonyonik Proca Maxwell Denklemleri .....	67
7.3.1. Proca Maxwell denklemleri .....	67
7.3.2. Hiperbolik oktonyonik Proca alan denklemleri ve Proca Maxwell denklemleri .....	68
<b>8. DIRAC DENKLEMİ</b>	<b>72</b>
8.1. Dirac Denkleminin Düzlem Dalga Çözümleri .....	73
<b>9. SONUÇLAR ve TARTIŞMALAR</b>	<b>76</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>78</b>



## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. $\vec{a}$ vektörü .....	4
2.2. Skaler çarpım .....	6
2.3. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörel çarpım.....	7
2.4. $\vec{a}$ vektörünün $\vec{b}$ vektörüne uzanımı.....	7
2.5. $\vec{b}$ vektörünün $\vec{a}$ vektörüne uzanımı.....	8
2.6. İki boyutlu uzayın bazları.....	9
2.7. Üç boyutlu uzayın bazları .....	10
2.8. Üç-vektör.....	12
2.9. $\vec{a}$ vektörü ile $\vec{B}$ iki-vektörün iç çarpımı.....	16

## TABLolar DİZİNİ

2.1. İki boyutlu uzayın dereceleri.....	17
2.2. Üç boyutlu uzayın dereceleri .....	17
2.3. $Cl_n$ 'deki birim bazlar .....	18
3.1. $Cl_2$ Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpımı.....	22
3.2. $Cl_3$ Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpımı.....	27
3.3. $Cl_3^+$ Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpımı .....	28
3.4. Hiperbolik oktonyonların baz çarpımları .....	37
3.5. Fourier dönüşümünün özellikleri .....	39
3.6. Clifford Fourier dönüşümünün özellikleri .....	49

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{R}$	: Reel sayılar cebri
$e_i$	: Birim baz eleman
$A$	: Çokluvektör
$\vec{\nabla}$	: Vektör türev
$\alpha, \beta$	: Skaler
$\vec{a}$	: Vektör
$\partial$	: Kısmi türev
$F$	: Çokluvektör fonksiyon
$\mathbb{R}^{l,m}$	: Sanki Euclidean uzayı
$Cl_{l,m}$	: Sanki Euclidean uzayın Clifford cebri
$Cl(n, \mathbb{C})$	: Kompleks Clifford cebri
$M^*$	: Çokluvektörün uzaysal (kompleks) eşlenik
$\bar{M}$	: Ters
$\tilde{M}$	: Çokluvektörün Clifford eşleniği
$\mathbf{q}$	: Kuaterniyon
$q$	: Kuaterniyonun reel kısmı
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	: Kuaterniyon imajiner baz elemanları
$Q$	: Kompleks kuaterniyon
$Q$	: Kompleks sayı
$S_Q$	: Kompleks kuaterniyonun skaler kısmı
$V_Q$	: Kompleks kuaterniyonun vektörel kısmı
$\eta_{jk}$	: İşaret matrisi
$\hat{\gamma}_j$	: Ortogonal Dirac matrisi

$\mathcal{G}_{\alpha\beta}$	: Metrik tensör
$D(4)$	: Dirac cebri
$\mathcal{O}$	: Hiperbolik oktonyon
$\varepsilon$	: Hiperbolik oktonyonik birim baz
$\overline{\mathcal{O}}$	: Hiperbolik oktonyonun eşleniği
$ \mathcal{O} $	: Hiperbolik oktonyonun normu
$\mathcal{O}^{-1}$	: Hiperbolik oktonyonun tersi
$\overline{\vec{p}}$	: Mekanik sistemin momentumu
$\mathcal{M}^{2n}$	: Faz uzayı
$J$	: Symplectik iki vektör
$E_r, E_s$	: Faz uzayın birim elemanları
$H$	: Hamiltonyen
$F(\theta)$	: Skaler değerli faz fonksiyonları
$f$	: Fonksiyon
$F$	: Fourier dönüşümü
$F^{-1}$	: Ters Fourier dönüşümü
$\mathbf{F}$	: Clifford Fourier dönüşümü
$\mathbf{F}^{-1}$	: Ters Clifford Fourier dönüşümü
$i_3$	: $Cl_3$ hacim elemanı
$X$	: Hiperbolik kuaterniyon
$j$	: Gerçel kompleks birim
$\hat{F}$	: Clifford sayısı ile elektromanyetik tensör
$\hat{i}$	: Clifford sayısı simetrik olmayan dördüncü mertebe tensör
$\hat{E}$	: Elektrik alan
$\hat{B}$	: Manyetik alan
$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$	: Simetrik olmayan dördüncü mertebe tensör

$\mathbf{F}$	: Elektromanyetik bivektör alan
$\square$	: $Cl_3$ 'de diferansiyel operatör
$w$	: Elektromanyetik enerji yoğunluğu
$\vec{S}$	: Pointing vektörü
$\blacksquare$	: Hiperbolik oktonyon diferansiyel işlemcisi
$\Delta$	: Laplacian
$\psi$	: Hiperbolik oktonyonik alan
$P$	: Hiperbolik oktonyonik potansiyel
$J$	: Hiperbolik oktonyon kaynağı
$A$	: Hiperbolik oktonyon dört potansiyel
$\rho$	: Elektriksek yük yoğunluğu
$\rho'$	: Manyetik yük yoğunluğu

## 1. GİRİŞ

Geometrik cebir, geometrik kavramların cebirsel temsilidir. Fizikçiler için önemi uzay zamanda cisimlerin özelliğini tanımlayabilen cebirler olmasıdır. Günümüze kadar birçok farklı geometrik cebir sistemleri, matematikçiler tarafından bulunmuş ve bu sistemlerin bazıları fizikçilerin ihtiyaçlarını karşılamak için geliştirilmiştir.

J. Willard Gibbs, Grassman'ın cebri ve Hamilton'nun kuaterniyonlarından esinlenerek üç boyutlu vektör cebirini oluşturdu. Bu cebir geniş ölçüde kullanılırken, Einstein'ın relativite teorisinin dört boyutlu uzay zamanı için yeni bir cebire ihtiyaç duyuldu. Başlangıçta bu gereksinim tensör cebri ile karşılandı. Ancak Pauli elektron spinini tanımlayabilmek için yeni geometrik bir cebir geliştirdi. Daha sonra Dirac hem relativite hem de spini birleştirdiği farklı bir cebir oluşturdu. Vektör, tensör, Pauli ve Dirac cebirlerinin herbiri geometrik cebirlerdir. Ancak tüm fiziksel olayları anlatmak için bu cebirlerden biri yeterli olmadığı gibi herhangi fiziksel olayı iki ya da daha fazla geometrik cebirle ifade etmek mümkün olmaz. Ancak bir temsilden diğerine geçiş ifadeleri kullanılır. Fiziksel olayların tümünü birden tanımlayabilen geometrik cebir Clifford cebridir [1-2].

Geometrik cebirlerin en eskilerinden biri Grassman cebridir. Grassman, yönlü doğru parçası olarak vektörleri tanımlamıştır ve bu yönlü doğrular için dış çarpımı tanımlayarak n-boyutlu geometrik nesnelere temsil etmiştir [3].

Hamilton aynı zamanlarda üç boyutlu dönme özelliğini temsil etmek için kuaterniyon cebirini keşfetti.

Clifford ise daha sonra Grassman ve Hamilton'nun tanımladığı sistemleri tek bir cebirle birleştirdi ve bu cebre geometrik cebri adını verdi [1-2].

Clifford cebri, kendine has geometrik yapısından dolayı katıların simetri işlemlerinde kullanılmıştır. Katılardaki tüm yansıma ve dönme işlemleri kapalı bir biçimde bu cebirle ifade edilebilmiştir [3-6].

Clifford cebri ile parçacık ve katı cisimlerin mekaniğinde akla gelebilecek her türlü konu geometrik temellere dayandırılarak incelenebilmiştir [7,8].

Kuantum mekaniğinde yer alan spinörler, sütun matrislerdir. Clifford cebrinin Dirac temsilerinden sonra, dört elemanlı Dirac spinörü Clifford cebrinin bir elemanı olarakta düşünülmüştür. Böylece spinörlerle tanımlanan pek çok çalışma Clifford cebri ile yeniden ifade edilmiştir [9,10].

Clifford cebri, kuaterniyon cebirlerinin direkt toplamları olarak ifade edilebileceği cebri oluşturulmasından bu yana bilinmektedir. Kuaterniyon cebirleri Clifford cebri özel hali olarak ele alınabilir. Bu cebirler değişimli olmamakla birlikte birleşimlidir. Yine birleşim özelliğine sahip olmasa bile, oktonyon cebirleri de Clifford cebri baz elemanları ve baz çarpımlarının benzerliği ile dikkat çekmişlerdir. Bilim adamları yaptıkları birçok çalışmada bu benzerlikleri vurgulamışlardır [11-20].

Einstein'in özel görelilik kuramının sonucu, Lorentz, uzay zaman olaylarının göreliliği tanımlayan Lorentz dönüşümleri ifade eder. Clifford cebri ise Lorentz dönüşümleri tanımlanmakla kalınılmamış, cebri n-boyutlu yapısı sayesinde Lorentz dönüşümleri genelleştirilmiştir [21-24].

Şüphesiz Clifford cebri en faydalı olduğu uygulama alanlarından biri elektromanyetik teoridir. Maxwell'in dört eşitliği daha kapalı ve şık formda bir eşitliğe indirgenmiştir. Lineer elektrodinamikte, düzlem dalga, silindirik ve küresel dalga çözümleri elde edilmiştir. Clifford çarpımının özelliğinden yararlanılarak lineer Maxwell denklemleri gibi lineer olmayan Maxwell denklemleri de tek bir denkleme indirgenebilmiştir. Maxwell denklemlerinin üç boyutlu uzayda Lorentz dönüşümleri sağlayamadığı, bu denklemlerin ancak dört boyutlu uzayda Lorentz invarianlığını sağladığı deneysel sonuçlara dayandırılarak bu cebirde ispatlanmıştır [24-30].

Clifford cebri her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Clifford cebri kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermiştir. Başlangıçta reel sayı alanı üzerinden tanımlanan Clifford cebri kompleks sayılar üzerine tanımlanan kompleks Clifford cebri ve hiperbolik sayılar üzerinde tanımlanan Clifford cebri tanımlarıyla çeşitlenmiştir. Daha sonra tanımlanan bu yapılar daha geniş bir spektrumda kullanım alanı bulmasına neden olmuştur. Bu tezde tanımlanan bu cebre ilişkin yapılan çalışmalardan örnekler verilmiştir [31-41].

Clifford cebriinin uygulama alanlarından birisi de şüphesiz kuantum mekaniğidir. Clifford cebriinin Dirac matris temsilleri, onu kuantum mekaniğini ifadesinin doğal bir aracı yapmıştır [42-53].

Görüleceği gibi Clifford cebri fiziğın tüm alanlarına uygulanabilmektedir. Matematiksel fizik, kuantum dolaşıklık, genel relativite, istatistik mekanik, string teorisi bunlardan temel olanlarıdır [54-63].

Ayrıca, fizikte saydığımız tüm konuların Clifford cebri ile anlatıldığı çok sayıda kitapta bulunmaktadır [63-69].

Bu tezin amacı Clifford cebriinin cebirsel özelliklerini tanımladıktan sonra bu yapının fizikteki olası uygulama alanlarını araştırmaktır. Bu amaçla klasik mekanik, kuantum mekaniği ve elektromanyetizmaya ait bazı özel konularda çalışılmıştır. Proca alan ve Proca-Maxwell denklemleri ilk defa hiperbolik oktonyonlarla ifade edilmiştir.



## 2. CLIFFORD CEBRİNE GİRİŞ

Geometrik cebir, yön kavramını da içeren reel sayı sisteminin bir doğal genişlemesidir. Bu nedenle de geometrik cebir vektör uzayının bilinen kavramlarına bazı özel kurallar ve tanımlamalar getirilerek oluşturulur.

Vektör elemanların skaler ve vektör çarpımları üç boyutlu geometriyi açıklayan çarpımlardır. Daha büyük boyutlarda yeni geometrik elemanları tanımlayabilmek için iç ve dış çarpım kullanılır. Bu çarpımlarla oluşturulan elemanlar tek başlarına matematiksel yeni bir geometri tanımladığı gibi farklı boyutlu elemanların lineer toplamları da çokluvektör denilen matematiksel nesnedir. Çokluvektörler, lineer uzay şekilleridir. Clifford ise çokluvektörleri geometrik çarpım denilen yeni bir çarpımla çarparak geometrik cebri tanımladı.

Bu bölümde geometrik cebri tanımlamadan önce, bu cebirin temel kavramları olan lineer uzay, iç ve dış çarpım kavramları verilmektedir. Daha sonra, geometrik çarpım tanımlanarak bu çarpımın özellikleri anlatılmaktadır.

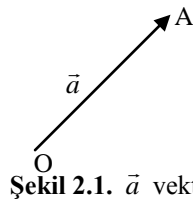
### 2.1. Vektör (Lineer) Uzaylar

#### 2.1.1. Skaler ve vektörler

Vektör uzaylar iki nesneye göre tanımlanır. Bunlar uzayda yönler olarak gösterilen vektörler ve genellikle reel sayılar olarak anılan skalerlerdir.

Vektör büyüklükle birlikte yön belirten niceliktir. Bir vektör yönlendirilmiş bir doğru parçası ile gösterilebilir. Vektör doğrusu; vektörün doğrultusunu, bu doğrunun uzunluğu ise vektörün büyüklüğünü gösterir.

Vektörler  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{r}$  ...ile temsil edilebilir ve grafik olarak Şekil 2.1'de gösterilebilirler:



### 2.1.2. Bazlar ve boyut

Boyut; herhangi bir niceliğin karakterini yani uzunluk, genişlik ve yüksekliğini ya da büyüklük ve şekil tanımlamak için gerekli olan parametre ya da ölçümdür. Bir vektör uzayın boyutunu tanımlamak için şu işlemler uygulanır:

(i)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  skaler ve  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektör olmak üzere,  $\vec{b}$  vektörü

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i \quad (2.1)$$

ile gösteriliyorsa,  $\vec{b}$  vektörü  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  vektörlerinin *lineer birleşimidir* denir.

(ii)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  skaleri sıfır olmadığı halde

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0 \quad (2.2)$$

oluyor ise,  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  vektörleri *lineer bağımlıdır*.

(iii) Vektör uzayındaki her eleman lineer bağımsız  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  vektörlerin lineer birleşimi olarak ifade ediliyor ise,  $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  vektörlerine *vektör uzayın bazları* denir.

Bu tanımlamalara düzlemde üç boyutlu uzayda vektörler düşünülerek daha da açıklık getirilebilir. Örneğin, düzlemde herhangi üç vektör lineer bağımlı iken düzlemde bağımsız iki vektör düzlemdeki tüm vektörler için bazları sağlar. Kısaca vektör (lineer) uzayın tüm bazları uzayda birbirlerinden bağımsız elemanların sayısı ile aynıdır. Bu sayıya *uzayın boyutu* denir.

### 2.2. Skaler Çarpım

Skaler çarpımı Euclidean geometride daireyi tanımlamaya yarayan noktalar arasındaki uzunluk (mesafe) ve vektörler arasındaki açıyı tanımlamamızı sağlar.

Herhangi bir vektörün uzunluğu

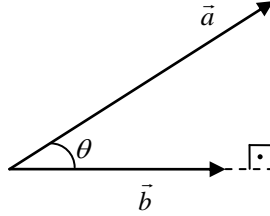
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} \quad (2.3)$$

ile gösterilir. Uzunlukların ve mesafelerin tanımı özel metrik uzaylar anlamına gelir. Farklı türde birçok metrik uzay tanımlanabilir.

$\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  arasındaki açı  $\theta$ ;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpım grafiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 2.2. Skaler çarpım

Şekil 2.2'de görüldüğü gibi, skaler çarpım  $\vec{a}$  vektörünün  $\vec{b}$  vektörü üzerine izdüşümünün,  $\vec{b}$  vektörünün büyüklüğü ile çarpımıdır.

İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise, vektörler birbirlerine diktir. Baz vektörlerin tümü birim uzunluğa sahip ise bu baz vektörlerine *ortonormal bazlar* denir. Genellikle, bazlar  $\{e_1, \dots, e_n\}$  vektörleri ile gösterilir. Bu bazlarla herhangi bir  $\vec{a}$  vektörü

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. Burada n uzayın boyutunu gösterir.

Buna göre, skalerler 0-boyutlu uzaylar gibi ele alınabilir. Vektörler 1-boyutlu, 2-boyutlu, ..., şeklinde ifade edilirler.

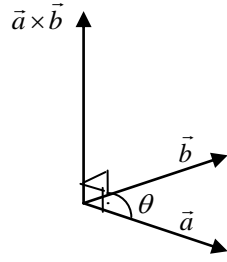
### 2.3. Vektörel Çarpım

$\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektörün vektörel çarpımı  $\vec{a} \times \vec{b}$  ile gösterilir ve

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad (2.6)$$

ile tanımlanır (Şekil 2.3). Bu çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

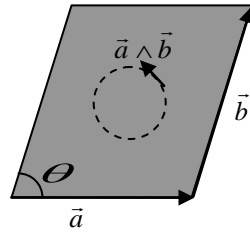
- (i)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  ile tanımlanan düzleme diktir.
- (ii)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$  büyüklüğüne sahiptir.
- (iii)  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ve  $\vec{a} \times \vec{b}$  sağ el kuralı ile şekillenir [67].



Şekil 2.3.  $\vec{a} \times \vec{b}$  vektörel çarpım

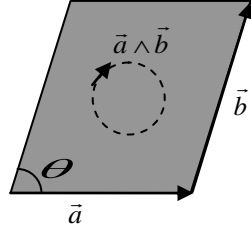
## 2.4. Dış Çarpım

Vektörel çarpım sadece üç boyutlu uzayda tanımlanmaktadır. Tüm uzayda tanımlanabilen vektörel çarpım fikri ile farklı bir çarpım tanımlanmıştır. Bu çarpıma ise *dış çarpım* adı verilir. Bu çarpım işlemi keş ( $\wedge$ ) ile gösterilir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektör olmak üzere, bunların dış çarpımı  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  şeklinde gösterilir ve vektör cebirinde olmayan yeni bir matematiksel nicelik tanımlar. Bu matematiksel niceliğe *iki-vektör* denir:



Şekil 2.4.  $\vec{a}$  vektörünün  $\vec{b}$  vektörüne uzanımı

İki-vektör Şekil 2.4'de gösterildiği gibi bir paralelkenardır ve yönlü bir büyüklüktür. Paralelkenarın sınırlarında uzanan  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin dönüşü saat ibrelerinin dönüşü yönünde olup paralelkenarın yönünü belirtir.  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ 'nin büyüklüğü  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 'dır. Bu büyüklük, vektörlerin oluşturduğu düzlem parçasının alanı ile de aynıdır. Buradan anlaşılacağı üzere iki-vektör bir yönlü alanı tanımlar.



Şekil 2.5.  $\vec{b}$  vektörünün  $\vec{a}$  vektörüne uzanımı

$\vec{b} \wedge \vec{a}$  iki-vektörü ise, Şekil 2.5'deki gibi aynı büyüklükteki alana karşılık gelir ancak ters yönlüdür. Matematiksel ifade ile dış çarpım değişimli değildir:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (2.7)$$

Ayrıca her  $\vec{a}$  vektörü için,

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \quad (2.8)$$

verir. Bunun anlamı, vektörün kendisi boyunca uzanarak bir alan oluşturmadığıdır.

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  vektörler ve  $\lambda$  skaler olmak üzere dış çarpım için aşağıdaki özellikler vardır:

Skalerle birleşimlidir.

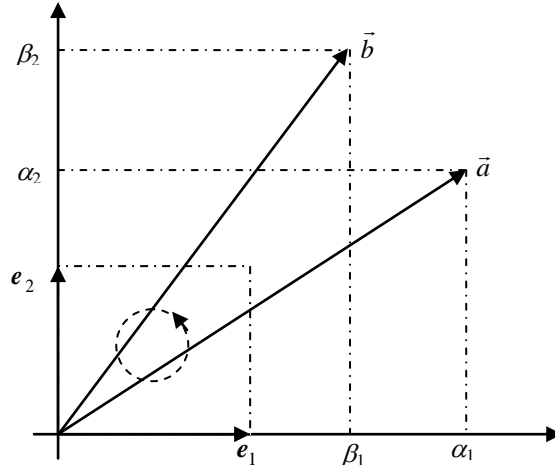
$$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) \quad (2.9)$$

Dış çarpım vektörlerin toplanması üzerine dağılımlıdır.

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c}) \quad (2.10)$$

### 2.4.1. İki boyut

n-boyutlu uzayda verilen bir vektör  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  birim baz vektörleri ile temsil edilsin. İki-vektörleri de lineer kombinasyon şeklinde ifade etmek mümkündür.



Şekil 2.6. İki boyutlu uzayın bazları

$\mathcal{R}^2$  Euclidean düzleminde  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerini ele alalım.  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  skalerler olmak üzere;  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri  $e_1$  ve  $e_2$  baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak;

$$\vec{a} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$\vec{b} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

şeklinde ifade edilsin.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin dış çarpımı;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \wedge (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \quad (2.11)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 e_1 \wedge \beta_1 e_1) + (\alpha_1 e_1 \wedge \beta_2 e_2) + (\alpha_2 e_2 \wedge \beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2 \wedge \beta_2 e_2)$$

olup dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanırsak,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_1 e_1 \wedge e_1) + (\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1) + (\alpha_2 \beta_2 e_2 \wedge e_2)$$

yazabilir. Eşitlik (2.8)'den yararlanılarak

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1)$$

ifadesi bulunur.  $e_1 \wedge e_2$  dış çarpımını  $I$  ile temsil edilirse

$$e_1 \wedge e_2 = I$$

$$e_2 \wedge e_1 = -I$$

yazılabilir. Bu durumda eşitlik (2.11);

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I$$

şeklinde yazılabilir.

### 2.4.2. Üç boyut

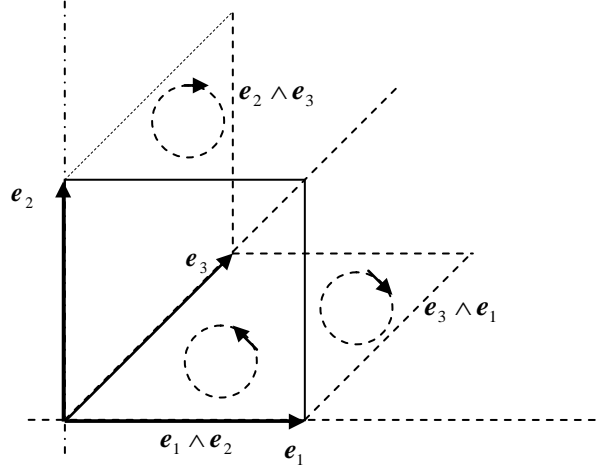
Vektörler gibi iki vektörler de n-boyutlu uzayda temsil edilebilirler. Üç-boyutlu uzayın birim baz vektörleri  $e_1, e_2, e_3$ 'tür. Bu durumda ise üç adet birim baz iki-vektör tanımlıdır:

$$e_1 \wedge e_2 = e_{12} \quad (2.12)$$

$$e_3 \wedge e_1 = e_{31} \quad (2.13)$$

$$e_2 \wedge e_3 = e_{23} \quad (2.14)$$

Üç-boyutlu uzayın birim baz vektörleri ve iki-vektörleri Şekil 2.7.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. Üç-boyutlu uzayın iki-vektör bazları

Birim baz iki-vektörler için genellikle  $\{e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$  dögüsel gösterimi kullanılır. Ancak dört-boyut ve daha büyük boyutlarda böyle dögüsel gösterim yoktur.

$\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri  $\mathcal{R}^3$  uzayında;

$$\vec{a} = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

$$\vec{b} = \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$

şeklinde ise bu vektörlerin dış çarpımı;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \wedge (\beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)$$

ile ifade edilebilir. Dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanılarak;

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1 \\ &+ \alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2 \\ &+ \alpha_3 \mathbf{e}_3 \wedge \beta_3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

yazılabilir. Skaler çarpanlar yeniden düzenlenecek olursa;

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \beta_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_2 \beta_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &+ \alpha_2 \beta_2 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_3 \beta_1 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &+ \alpha_3 \beta_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \beta_3 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (2.15)$$

elde edilir. Eşitlik (2.7) ve eşitlik (2.8) dikkate alındığında  $i = j$  ve  $i \neq j$  için aşağıdaki kurallar geçerlidir:

Birim baz vektörün kendisi ile dış çarpımı sıfırdır

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0. \quad (2.16)$$

Farklı baz vektörlerin dış çarpımı iki-baz vektöre eşittir

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}. \quad (2.17)$$

Baz vektörlerin dış çarpımının değişme özelliği yoktur

$$\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_{ij}. \quad (2.18)$$

Bundan dolayı, eşitlik (2.15);

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{e}_{12} + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \mathbf{e}_{13} + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{e}_{23} \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik üç-boyutlu Euclidean uzayında, iki vektörün dış çarpım ifadesidir.

## 2.5. Üç-Vektörler

Üç-boyutlu uzayda, üç adet bir-boyutlu alt uzayların dış çarpımı sonucu yönlü bir hacim elemanı elde edilir. Buna *üç-vektör* adı verilir. Buna göre  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  gibi üç vektörün dış çarpımlarının sonucu üç-boyutlu bir alt uzay oluşur.

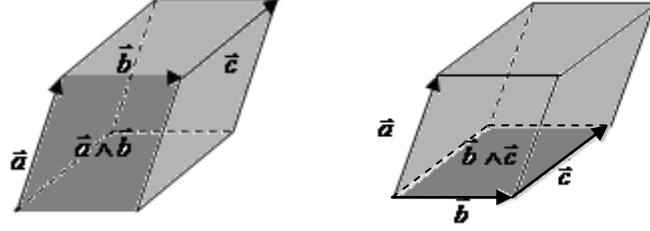
$\mathcal{R}^3$  uzayında baz vektörler;

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123} \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir. Şekil 2.8'de görüldüğü üzere bir iki-vektörün, üçüncü bir diğer vektöre uzanımı sonucu üç-vektör oluşmaktadır. Bu üç-vektör Euclidean



uzayında  $I$  ile gösterilir ve *sanki skaler* (*pseudo scalar*) adını alır. Bu gösterim ve ad, n-boyutlu uzayda uzayın boyutuna sahip her eleman için kullanılır.



Şekil 2.8. Üç-vektör:  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

## 2.6. Çokluvektörler

Bir çokluvektör, k-dereceli bazların farklı lineer birleşimidir. Örneğin 2-boyutlu  $\mathcal{R}^2$  uzayında tüm k-dereceli elemanlara sahip A çokluvektörü  $\alpha_\mu$  reel katsayılar olmak üzere;

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 I \quad (2.21)$$

ile verilir. Ancak, bir çokluvektör tanımladığı uzaydaki tüm k-dereceli elemanları içermek zorunda değildir.

İki-boyutlu uzayda tüm elemanları olan bir çokluvektörü göstermek için  $2^2=4$  reel katsayı gereklidir. Üç-boyutlu uzayda tüm elemanları olan bir çokluvektör  $2^3=8$  reel katsayı ile tanımlanabilir ve

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_{12} + \alpha_5 e_{13} + \alpha_6 e_{23} + \alpha_7 e_{123} \quad (2.22)$$

biçiminde ifade edilir.

Benzer olarak, 4-boyutlu uzayda  $2^4=16$  bileşene ihtiyaç duyulur. Çokluvektörler göz önünde canlandırmak kolay değildir. Vektörler, iki-vektörler, üç-vektörler 2- veya 3-boyutlu uzayda sezgisel olarak göz önünde canlandırılırlar. Bir alana bir skaler eklemenin hiçbir yolu olmadığından bu düşünce çokluvektörler için anlamsızdır. Ancak göz önünde canlandırmadan da bu gerçekleştirilebilir. Bir çokluvektör, alt lineer birleşimlere sahip olduğundan, bu çok da alışık olmadığımız çok farklı geometrik kavramlar oluşturur [3, 6, 67].

## 2.7.Geometrik çarpım

Farklı dereceli çokluvektörlerin geometrik çarpımı ile oluşturdukları cebire *Clifford cebri* ya da *geometrik cebir* denir. Bu nedenle Clifford cebrine örnek vermeden önce çokluvektörlerin geometrik çarpımı ve geometrik çarpımının özellikleri incelenecektir. Bu ve bundan sonraki bölümlerde çokluvektörlere aynı zamanda *Clifford elemanı* ya da *Clifford sayısı* da denilecektir.

Geometrik çarpım, iç ile dış çarpımın birleşimidir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri için aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (2.23)$$

Bu çarpım;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a})$$

şeklinde simetrik ve

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})$$

şeklinde simetrik olmayan (antisimetrik) iki kısımdan oluşur.

Bu ayrım  $\vec{a}$  vektörü ile k-dereceli  $A_k$  çokluvektörün geometrik çarpımı

$$\vec{a}A_k = \vec{a} \cdot A_k + \vec{a} \wedge A_k$$

olmak üzere;

$$\vec{a} \cdot A_k = \frac{1}{2}(\vec{a}A_k - (-1)^k A_k \vec{a}) \quad (2.24)$$

ve

$$\vec{a} \wedge A_k = \frac{1}{2}(\vec{a}A_k + (-1)^k A_k \vec{a}) \quad (2.25)$$

şeklinde geliştirilebilir. Bu denklemlerden iç çarpım

$$\vec{a} \cdot \langle \vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_r \rangle_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \vec{a} \cdot \vec{a}_k \langle \vec{a}_1 \dots \check{\vec{a}}_k \dots \vec{a}_r \rangle_{r-1}$$

ya da  $\langle \vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_r \rangle_r = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \dots \wedge \vec{a}_r$ ,

$$\vec{a} \cdot (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \dots \wedge \vec{a}_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \vec{a} \cdot \vec{a}_k \vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \check{\vec{a}}_k \wedge \dots \wedge \vec{a}_r.$$

şeklinde daha farklı bir formda da verilebilir. Burada  $\vec{a}$  başka bir yere taşındığı anlamına gelir  $\langle A \rangle_2$  özel durumunda, vektör cebirinde iyi bilinen özdeşliğe benzer

$$\vec{a} \cdot (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) = (\vec{a} \cdot \vec{a}_1) \vec{a}_2 - (\vec{a} \cdot \vec{a}_2) \vec{a}_1 \quad (2.26)$$

özdeşliği elde edilir. İç ve dış çarpım formülleri Gibbs'in vektör cebirindeki formüllerin genellemesini içerir.

Genel olarak A, B, C çokluvektörlerin geometrik toplam ve çarpımları için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

Toplam değişimlidir;

$$A + B = B + A. \quad (2.27)$$

Toplama ve çarpma birleşimlidir;

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (2.28)$$

$$(AB)C = A(BC). \quad (2.29)$$

Çarpma toplama üzerine dağılımlıdır;

$$A(B + C) = AB + AC \quad (2.30)$$

$$(B + C)A = BA + CA. \quad (2.31)$$

Her A çokluvektörü  $-A$  tersine sahiptir;

$$A + (-A) = 0 \quad (2.32)$$

### 2.7.1. İç çarpım

Geometrik cebirde iki vektörün iç çarpımı geometrik çarpımın simetrik kısmı olarak görülebilir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \quad (2.33)$$

İç çarpım  $\lrcorner$  sembolü ile gösterilir. İç çarpımın geometrik anlamı vardır.  $A \lrcorner B$  anlamı, A'nın B üzerindeki iz düşümü B'nin alt uzayında temsil edilen çokluvektördür.

$\alpha, \beta$  skaler,  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektör ve A, B, C çokluvektör olmak üzere bu elemanların iç çarpımları;

$$\text{skalerler} \quad \alpha \lrcorner \beta = \alpha\beta \quad (2.34)$$

$$\text{vektör ve skalerler} \quad \vec{a} \lrcorner \beta = 0 \quad (2.35)$$

$$\text{skaler ve vektörler} \quad \alpha \lrcorner \vec{b} = \alpha \vec{b} \quad (2.36)$$

$$\text{vektörler} \quad \vec{a} \lrcorner \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ (skaler çarpım)} \quad (2.37)$$

$$\text{vektör, çokluvektörler} \quad \vec{a} \lrcorner (\vec{b} \wedge \mathbf{C}) = (\vec{a} \lrcorner \vec{b}) \wedge \mathbf{C} - \vec{b} \wedge (\vec{a} \lrcorner \mathbf{C}) \quad (2.38)$$

$$\text{dağılıma} \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \lrcorner \mathbf{C} = \mathbf{A} \lrcorner (\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{C}) \quad (2.39)$$

kurallarıyla hesaplanır.

Yukarıdaki kurallara dikkat edilirse, iki çokluvektörün iç çarpım sonucu;

$$\text{derece}(\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{B}) = \text{derece}(\mathbf{B}) - \text{derece}(\mathbf{A})$$

dereceye sahip çokluvektördür. Başka bir ifadeyle iç çarpımda birinci çarpanın derecesi ikinci çarpanın derecesinden küçük ya da en fazla eşit olabilir. Birinci çarpanın derecesi büyük olduğunda sonuç sıfır olur. Çarpanların her ikisinin vektör olması durumunda iç çarpım skaler çarpım halini alır. Yani skaler çarpım iç çarpımın özel halidir [1, 2, 73].

## 2.8. Bir Çokluvektörün Derecesi

Bir alt uzayın boyutu derecesi ile temsil edilebilir. Bir çokluvektör farklı derecelerin lineer birleşimidir. Bir çokluvektörün  $s$  dereceli kısmını göstermek için  $\langle \mathbf{A} \rangle_s$  gösterimi kullanılacaktır. Örneğin  $\mathbf{A}$  çokluvektörü,

$$\mathbf{A} = (1,8,3,4,5,9,7,2) \in Cl_3 \text{ ise,}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_0 = 1 \quad \text{skaler}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_1 = 8,3,4 \quad \text{vektör}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_2 = 5,9,7 \quad \text{iki-vektör}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_3 = 2 \quad \text{üç-vektör}$$

kısımlarından oluşur. Clifford cebriinde  $\mathbf{A}$  çokluvektörü,

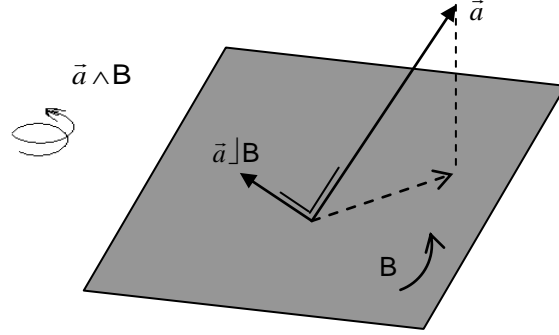
$$\sum_{s=0}^n \langle \mathbf{A} \rangle_s = \langle \mathbf{A} \rangle_0 + \langle \mathbf{A} \rangle_1 + \langle \mathbf{A} \rangle_2 + \dots + \langle \mathbf{A} \rangle_n \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu gösterimden yararlanılarak dereceler bakımından iç ve dış çarpımın tanımı yeniden yorumlanabilir.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  vektörlerinin  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  iç çarpımı, vektörün derecesi 1, skalerin derecesi sıfır olduğundan,

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \cdot \langle \vec{b} \rangle_1 = \langle \vec{a}\vec{b} \rangle_0 \quad (2.41)$$

dır. Şekil (2.9)'da görüldüğü üzere,  $\vec{a}$  vektörü  $\mathbf{B}$  iki-vektörü üzerine yansıdığında sonuç vektördür:

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_2 = \langle \vec{a}\mathbf{B} \rangle_{2-1}$$



Şekil 2.9.  $\vec{a}$  vektörü ile  $\mathbf{B}$  iki-vektörün iç çarpımı

Bu kural genişletilerek,

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_u \quad u = \begin{cases} s > t, & 0 \\ s \leq t, & t - s \end{cases} \quad (2.42)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadeden de anlaşılacağı üzere iç çarpım derece azaltan bir işlemdir.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  vektörlerinin dış çarpım sonucu

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \wedge \langle \vec{b} \rangle_1 = \langle \vec{a}\vec{b} \rangle_2 \quad (2.43)$$

elde edilir. Bu ifade genelleştirilirse;

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s \wedge \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_{s+t} \quad (2.44)$$

yazılır.

Derece kavramına göre, her  $\mathbf{A}$  çokluvektörü  $\langle \mathbf{A} \rangle_+$  çift kısım ve  $\langle \mathbf{A} \rangle_-$  tek kısımın toplamı olarak

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{A} \rangle_+ + \langle \mathbf{A} \rangle_- \quad (2.45)$$

şeklinde de yazılabilir. Örneğin  $\mathcal{R}^2$  uzayında eşitlik (2.21) ile verilen  $\mathbf{A}$  çokluvektörün sırasıyla tek ve çift kısımları aşağıdaki gibidir [2, 3, 73]

$$\langle \mathbf{A} \rangle_- = \alpha_0 + \alpha_3 \mathbf{I}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_+ = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2.$$

### 2.8.1. n-vektörün derecesi

Alt uzayın boyutu k-derece kavramı ile ifade edilir. Burada k, derecenin mertebesini gösterir. Skaler için derece 0, vektör için derece 1, iki-vektör için derece 2, üç-vektör için derece 3'tür. Çok boyutlu uzayda ise 4-derece, 5-derece,..., şeklinde devam eder. Yani n-boyutlu uzay için bu gösterim n-derecedir. Aşağıda tablo 2.1 ve tablo 2.2'de; 2- ve 3-boyutlu uzayın sahip olduğu dereceler görülmektedir.

**Tablo 2.1.** İki-boyutlu uzayın dereceleri

k	Baz elemanı	toplam
skaler	{1}	1
vektör	{ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ }	2
iki-vektör	{ $\mathbf{e}_{12}$ }	1

**Tablo 2.2.** Üç-boyutlu uzayın dereceleri

k	Baz eleman	toplam
skaler	{1}	1
vektör	{ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ }	3
iki-vektör	{ $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$ }	3
üç-vektör	{ $\mathbf{e}_{123}$ }	3

n-boyutlu uzayın sahip olduğu dereceler için genelleştirme yapılabilir. n-boyutlu uzayda k-dereceli eleman sayısı

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2.46)$$

binom çarpanı ile hesaplanır. Örneğin 3-boyutlu uzayda iki-vektör bazların sayısı için, n=3, k=2 olduğundan;

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

bulunur.

Clifford cebirinin birim bazlarının toplam sayısı, tüm derecelerin birim bazlarının toplanmasıyla hesaplanabilir.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2.47)$$

Birkaç geometrik cebir için bu formül aşağıdaki tabloda verilmiştir [3, 6, 50]:

**Tablo 2.3.**  $Cl_n$ 'deki birim bazlar

$Cl_n$	Baz eleman	toplam
$Cl_0$	{1}	$2^0=1$
$Cl_1$	{1, $e_1$ }	$2^1=2$
$Cl_2$	{1, $e_1, e_2, e_{12}$ }	$2^2=4$
$Cl_3$	{1, $e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}$ }	$2^3=8$
$Cl_4$	{1, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}$ }	$2^4=16$

## 2.9.Vektör Türev

Vektör türev  $\vec{\nabla}$  sembolü ile gösterilir. Cebirsel olarak bu geometrik cebirde vektörün tüm özelliklerine sahiptir.  $\vec{\nabla}$  ile bir  $\vec{a}$  vektörünün iç çarpımı  $\vec{a}$  yönündeki yönlü türev ile sonuçlanır. Matematiksel ifade olarak

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x - \varepsilon \vec{a}) - F(x)}{\varepsilon} \quad (2.48)$$

şeklinde yazılabilir. Bazlardan bağımsız vektör türev ise

$$\vec{\nabla} = e_k \partial_k \quad (2.49)$$

ile verilir. Burada;

$$\partial_k = e_k \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.50)$$

olup, k.'nci koordinata göre skaler kısmi türevdir. Burada  $x_k = \vec{x} \cdot e_k$ 'dir.

$F = F(\vec{x})$  ve  $G = G(\vec{x})$  çokluvektör fonksiyonları ve  $\alpha$  reel skaler sabit olmak üzere vektör diferansiyelin özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} (F + G) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} F + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} G \quad \text{Toplam kuralı,} \quad (2.51)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla}(F \cdot G) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}F)G + F(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}G) \quad \text{çarpım kuralı,} \quad (2.52)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla}(\alpha F) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}F) \quad \text{sabitlerle çarpım kuralı,} \quad (2.53)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla}F = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\lambda) \frac{\partial F}{\partial \lambda} \quad \text{zincir kuralı.} \quad (2.54)$$

Zincir kuralında  $\lambda = \lambda(\vec{x})$ ,  $\vec{x}$ 'in skaler fonksiyonudur ve  $F = F(\lambda(\vec{x}))$  olarak yeniden tanımlanmıştır.

Ancak  $F = \langle f \rangle_1 = \vec{f}$  ise,  $\vec{f}$ 'nin türevi:

$$\vec{\nabla}\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \quad (2.55)$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ 'ye  $\vec{f}$ 'nin *diverjansı* denir. Bu işlem sonucu skalerdir.  $\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ 'ye  $\vec{f}$ 'nin *rotasyoneli* denir.  $\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$  iki-vektördür.

Vektör diferansiyelden yararlanarak vektör türev için genel kurallar aşağıdaki gibi türetilir:

$F = F(\vec{x})$  ve  $G = G(\vec{x})$  çokluvektör fonksiyonlarının toplam ve çarpımlarının türevleri

$$\vec{\nabla}(F + G) = \vec{\nabla}F + \vec{\nabla}G \quad (2.56)$$

$$\vec{\nabla}(F \cdot G) = (\vec{\nabla}F)G + \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k F \partial_k G \quad (2.57)$$

özelliklerine uyar.

$\vec{\nabla}$  işlemcisinin Clifford karesi

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \quad (2.58)$$

dir. Bu ifadeye, *diferansiyel Laplace işlemcisi* denir. Ancak integrali alınabilen fonksiyonlar için;  $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\vec{\nabla}) = 0$ 'dır. Bu nedenle, diferansiyel

Laplace işlemcisi

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \quad (2.59)$$

olacaktır [2, 62, 65].



### 3. CLIFFORD CEBİRLERİ

Bir önceki bölümde lineer uzay, iç çarpım ve dış çarpım kavramlarından yararlanarak k-vektör ve çokluvektörleri tanımladık. Bu niceliklerin geometrik (Clifford) çarpımı denilen özel bir çarpımla oluşturdukları cebre Clifford cebri adı verildiğini öğrendik. Bu bölümde ise, lineer uzayların kuadratik formlarından yararlanarak farklı Clifford cebirleri tanımlayıp, birkaç Clifford cebri incelenecektir.

Clifford cebirleri lineer uzayda kuadratik (metrik) formla belirlenen geometrilerin cebridir.  $g(\vec{x})$  kuadratik formuna sahip n-boyutlu vektör uzayının Clifford cebri  $-g(\vec{x})$  karekökü ile temsil edilir. Vektör uzayı Clifford cebri'nin n-boyutlu alt uzayıdır. Clifford uzayında ( tüm k dereceli elemanların lineer toplamı içeren uzayda ) bir vektör  $x \rightarrow \vec{x} = \sum_{l=0}^{n-1} x_l e_l$  ile tanımlanır.  $x^2 = -g(\vec{x})$  yani

$$\left( \sum_{l=0}^{n-1} x_l e_l \right)^2 = \sum_{i,j=0}^{n-1} g_{ij} x_i x_j \text{ ile Clifford cebri'nin } e_l \text{ bazlarının temel özellikleri oluşur:}$$

$$\{e_i, e_j\} \equiv e_i e_j + e_j e_i = -2g_{ij}$$

$g_{ij}$  diagonal ve  $g_{ij} = \pm 1$  olsun. O zaman,

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad i \neq j$$

$$e_i^2 = \pm 1.$$

Bu özelliğe uyan Clifford cebri  $Cl(g)$  evrensel Clifford cebri denir. Evrensel Clifford cebri  $2^n$  boyuta sahiptir.

n-boyutlu  $\mathcal{R}^{l,m}$  sanki Euclidean uzayında l tane artı ve m tane eksi işarete sahip metriğin oluşturduğu Clifford cebri, sanki Euclidean uzayının Clifford cebri denir ve  $Cl(l,m)$  ya da  $Cl_{l,m}$  ile gösterilir. Euclidean uzayın Clifford cebirleri için de özel notasyonlar vardır:  $Cl(n) \equiv Cl(n,0)$  ve  $Cl_+(n) \equiv Cl(0,n)$ .

Sanki Euclidean uzayın Clifford cebri'nin kompleksleştirimi  $Cl(n,C)$  kompleks Clifford cebridir. Bu cebirde baz elemanlar i kompleks birimi ile çarpılarak oluşturulur. Matematiksel ifade ile  $e_k$  baz elemanları  $ie_k$  ile yer değiştirir [74].

### 3.1. Clifford Cebri olarak Kompleks ve Hiperbolik Sayılar

$\mathcal{R}^{0,1}$  ve  $\mathcal{R}^{1,0}$  bir boyutlu kuadratik uzayları için Clifford cebirleri düşünülebilir. Bu uzayların elemanı  $z = xe$  durumunda bir tek baz elemana göre ifade edilebilir. Kuadratik form o zaman

$$zz^* = -x^2 e^2$$

olarak hesaplanır. Kuadratik uzayın işareti (1,0) ise, yukarıdaki ifadeye göre baz elemanın karesi  $e^2 = 1$ 'dir. Bu baz eleman  $e = j$  hiperbolik birimi olarak da gösterilir. Kuadratik uzayın işareti (0,1) ise, baz elemanın karesi  $e^2 = -1$ 'dir. Bu baz eleman  $e = i$  kompleks birimi olarak gösterilir. Her iki durumda iki farklı cebir elemanı vardır. İki cebir de  $2^n=2$  boyuta sahiptir ve evrensel Clifford cebirleridir.  $\mathcal{R}^{0,1}$  uzayının Clifford cebri  $C$  kompleks sayıları ile temsil edilir.  $\mathcal{R}^{1,0}$  kuadratik uzayın Clifford uzay temsili reel sayı alanı üzerindeki  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$  hiperbolik sayılarla temsil edilir.  $\mathcal{R}$  reel sayılar,  $\mathcal{R}^{0,1}$  için  $2^{n-1}=1$  boyutlu evrensel olmayan Clifford cebridir.

$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$  hiperbolik sayılar ve  $C$  kompleks sayılar  $\mathcal{R}^{1,1}$  ve  $\mathcal{R}^{0,2}$  kuadratik uzaylarıyla  $2^{n-1}=1$  boyutlu evrensel olmayan Clifford cebirleri olarak da düşünülebilir. Hiperbolik sayılar kompleks sayılara benzer şekilde

$$z = x + jy \quad x, y \in \mathcal{R}$$

olarak temsil edilir [31].

### 3.2. Euclidean Uzayın Clifford Cebirleri

#### 3.2.1. Euclidean düzleminin Clifford cebri

$\mathcal{R}^2$  reel Euclidean vektör uzayının ortonormal vektör bazları  $\{e_1, e_2\}$  olarak düşünülün.  $\mathcal{R}^2$  reel Euclidean vektör uzayın Clifford cebri  $Cl_2$  ile gösterilsin.  $Cl_2$  Clifford cebri için birim bazlar;

$$\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$$

şeklindedir.

Baz vektörlerin geometrik çarpımı;

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad i \neq j \text{ için} \quad i, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{e}_i^2 = 1 \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

bağıntısına uyar. Burada baz elemanların birleşim ve değişimli olmama özelliğinden  $(\mathbf{e}_{12})^2 = -1$  'dir.

Geometrik cebirin genel elemanlarına çokluvektör denir.  $Cl_2$ 'de çokluvektör

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_A \alpha_A \mathbf{e}_A = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_{12} \\ &= \alpha_0 + \vec{\mathbf{M}} + \overset{\leq}{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada,  $\alpha_0$  skaler,  $\vec{\mathbf{M}} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$  vektör ve  $\overset{\leq}{\mathbf{M}} = \alpha_3 \mathbf{e}_{12}$  iki-vektörün lineer toplamıdır.

$Cl_2$  Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpım tablosu aşağıda verilmektedir:

**Tablo 3.1.**  $Cl_2$  Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpım tablosu(\*)

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	1

### 3.2.2. Dik izdüşüm

$\mathcal{R}^2$  reel Euclidean vektör uzayında  $\vec{\mathbf{a}}$  ve  $\vec{\mathbf{b}}$  iki vektörün geometrik çarpımı

(\*)İki baz elemanı çarparken birinci eleman ilk satırdan, ikinci eleman ilk sütundan alınacaktır.

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

ile verilmişti.  $\mathcal{R}^2$  nokta çarpımının sonucu bir skaler, dış çarpımının sonucu da bir iki-vektör içerir. Aynı şekilde  $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$  de skaler ve iki-vektör kısımlarını içerir.

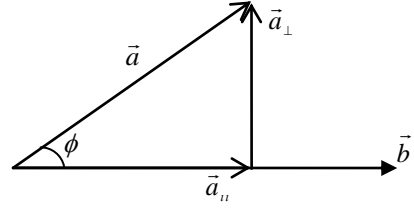
İki vektör  $0 < \phi < 180^\circ$  açısı ile birbirinden ayrı ise,  $\vec{a}$ 'nın  $\vec{b}$  yönündeki bileşenine *paralel bileşen* denir ve  $\vec{a}_u$  ile gösterilir ve  $\vec{a}_u$  paralel bileşen,  $\vec{a}$ 'nın

$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$  birim vektörüyle skaler çarpımı ile bulunur:

$$\vec{a}_u = |\vec{a}| \cos \phi \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} \vec{a}_u &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$



olduğu açıktır.

$\vec{a}$  düzlemde tanımlanan vektör olduğuna göre dik bileşeni de vardır.  $\vec{a}_\perp$  dik bileşeni;

$$\begin{aligned} \vec{a}_\perp &= \vec{a} - \vec{a}_u = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}^{-1} \\ &= (\vec{a}\vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}^{-1} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \vec{b}^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ifadesiyle bulunur [63, 68].

### 3.3. Kuaterniyonlar

Bir  $\mathbf{q}$  kuaterniyonu,

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $q_0, q_1, q_2, q_3$  reel sayılardır ve  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ise,

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (3.8)$$

kurallarına uyan birbirine dik kompleks birimlerdir. Böylece bir  $\mathbf{q}$  kuaterniyonu  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  imajiner baz elemanlarıyla 4-boyutlu reel vektör uzayını oluşturur.  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  birimleri 3-boyutlu vektör uzayının baz birim vektörleri olarak alınabilir. Böylelikle  $\mathbf{q}$  kuaterniyonu bir skaler ve bir vektörün lineer birleşimi olarak düşünülebilir. Eğer  $\mathbf{q}$  kuaterniyonunun  $q_0 \in \mathcal{R}$  skaler ve  $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{R}^4$  vektörel kısımlarını sırasıyla  $\langle \mathbf{q} \rangle_0$  ve  $\langle \mathbf{q} \rangle_1$  ile gösterirsek

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q} \rangle_0 &= q_0 \\ \langle \mathbf{q} \rangle_1 &= q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}\end{aligned}$$

Buna göre  $\mathbf{q}$  kuaterniyonu;

$$\mathbf{q} = \langle \mathbf{q} \rangle_0 + \langle \mathbf{q} \rangle_1 \quad (3.9)$$

ile ifade edilir.

### 3.3.1. Kuaterniyonun çarpımı

$p_0, q_0 \in \mathcal{R}$  ve  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathcal{R}^3$  olmak üzere  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaterniyonlarının çarpımı

$$\mathbf{pq} = (p_0 + \vec{p})(q_0 + \vec{q}) = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ‘.’ ve ‘ $\times$ ’ üç- boyutlu uzayda sırasıyla skaler ve vektörel çarpımı göstermektedir.  $\vec{p} = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}$  ve  $\vec{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$  şeklinde iki vektörün çarpımı;

$$\vec{p}\vec{q} = -\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{p} \times \vec{q} \quad (3.11)$$

şeklinde bir skaler ve bir vektörün toplamıdır.  $\vec{p}$  ve  $\vec{q} \in \mathcal{R}^3$  iki vektörün kuaterniyon çarpımlarının skaler ve vektörel kısımları

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = -\langle \vec{p}\vec{q} \rangle_0, \quad \vec{p} \times \vec{q} = \langle \vec{p}\vec{q} \rangle_1$$

tanımlanabilir. Aynı zamanda, bu çarpımın, skaler kısmı

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = -\frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p}) \quad (3.12)$$

ve vektörel kısmı

$$\vec{p} \times \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{q} - \vec{q}\vec{p}) \quad (3.13)$$

kuaterniyon çarpımıyla ilişkilendirilebilir [68, 80].

### 3.4. Kompleks kuaterniyon

$\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}' \in \mathcal{H}$  ve  $i$  kompleks birim olmak üzere kompleks kuaterniyon;

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{q} + i\mathbf{q}' \\ &= (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + i(q'_0 + q'_1\mathbf{i} + q'_2\mathbf{j} + q'_3\mathbf{k}) \\ &= (q_0 + iq'_0) + (q_1 + iq'_1)\mathbf{i} + (q_2 + iq'_2)\mathbf{j} + (q_3 + iq'_3)\mathbf{k} \\ &= (q_0 + iq'_0, \bar{q} + i\bar{q}') \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak tanımlanıp

$$\begin{aligned} Q &= [\mathbf{q}, \mathbf{q}'] \\ &= [Q_0, Q_1, Q_2, Q_3] \end{aligned}$$

ile temsil edilir.  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$  kompleks sayılardır. Burada  $i$  kompleks birimi

$$i^2 = (\mathbf{ijk})^2 = -1 \quad (3.15)$$

şeklinde de verilir. Kompleks kuaterniyonun skaler ve vektör kısmı;

$$\begin{aligned} S_Q &= Q_0 \\ V_Q &= Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

ile verilir. Böylece  $Q$  kompleks kuaterniyonu skaler ve vektör kısımların toplamı olarak

$$Q = S_Q + V_Q \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir [79].

### 3.5. Euclidean Uzayının Clifford Cebri

$\mathcal{R}^3$  Euclidean uzayı  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  üç ortonormal vektör bazlara sahiptir.  $\mathcal{R}^3$  üzerinden tanımlanan  $Cl_3$  Clifford cebri, 3-boyutlu bu uzayda  $2^3=8$  adet birim baza sahiptir:

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{123}\}$$

Burada 1(0-dereceli) reel skaler birim elemandır,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (1-dereceli)  $\mathcal{R}^3$  vektör bazlarıdır,  $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  iki-vektör bazlarıdır ve

$e_{123} = e_1 e_2 e_3 = i$   $Cl_3$ 'deki en büyük dereceli birim eleman yani sanki skaleri tanımlar.

$Cl_3$ 'de k-dereceli elemanların lineer toplamı olan herhangi bir  $M$  çokluvektörü

$$M = \sum_A \alpha_A e_A = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_{12} + \alpha_{12} e_{12} + \alpha_{31} e_{31} + \alpha_{23} e_{23} + \alpha_{123} e_{123} \quad (3.17)$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $\alpha_A$  reel sayılardır.  $e_{123} = i$   $Cl_3$ 'deki diğer tüm elemanlarla değişimlidir ve  $i^2 = -1$  değerine sahiptir.  $\langle M \rangle_k$ ,  $M$  çokluvektörün k-vektör kısmını tanımlasın. Buna göre eşitlik (3.14)

$$M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 \quad (3.18)$$

olarakta ifade edilebilir.  $Cl_3$ 'de kompleks eşleniğe benzer üç involüsyon (involution) tanımlanmaktadır.

$$M^* = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 \quad \text{uzaysal (kompleks) eşlenik} \quad (3.19)$$

$$\tilde{M} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 \quad \text{ters,} \quad (3.20)$$

$$\bar{M} = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 \quad \text{Clifford eşlenik.} \quad (3.21)$$

Ayrıca Clifford eşlenik işlemi;

$$\bar{M} = \tilde{M}^* \quad (3.22)$$

şeklinde diğer iki eşlenik işleminin birleşimi olarak yazılabilmektedir.

$M$  çokluvektörünün normunun karesi çokluvektör ile çokluvektörün tersinin iç çarpımı ile bulunur:

$$\|M\|^2 = \langle M \tilde{M} \rangle \quad (3.23)$$

Böylece çokluvektörün norm karesi

$$\|M\|^2 = \sum_A \alpha_A^2$$

olarak da ifade edilebilir.

Bir  $M$  k-vektörü ile  $i$  birim sanki skalerin  $iM$  çarpımına  $M$ 'nin duali denir.  $Cl_3$ 'de bir iki-vektörün duali vektördür ve vektörün duali iki-vektördür.  $Cl_3$ 'deki bu özellikle iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\vec{a} \times \vec{b} = i\vec{a} \wedge \vec{b} \quad (3.24)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bu ifade

$$\vec{a} \times \vec{b} = i\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{a} \cdot (i\vec{b}) = (i\vec{b}) \cdot \vec{a} \quad (3.25)$$

**Tablo 3.2.**  $Cl_3$  Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpım tablosu(\*)

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{31}$	$e_{23}$	$e_{123}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{31}$	$e_{23}$	$e_{123}$
$e_1$	$e_1$	1	$e_{12}$	$-e_{31}$	$e_2$	$-e_3$	$e_{123}$	$e_{23}$
$e_2$	$e_2$	$-e_{12}$	1	$e_{23}$	$-e_1$	$e_{123}$	$e_3$	$e_{31}$
$e_3$	$e_3$	$e_{31}$	$-e_{23}$	1	$e_{123}$	$e_1$	$-e_2$	$e_{12}$
$e_{12}$	$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	$e_{123}$	-1	$e_{23}$	$-e_{31}$	$-e_3$
$e_{31}$	$e_{31}$	$e_3$	$e_{123}$	$-e_1$	$-e_{23}$	-1	$e_{12}$	$-e_2$
$e_{23}$	$e_{23}$	$e_{123}$	$-e_3$	$e_2$	$e_{31}$	$-e_{12}$	-1	$-e_1$
$e_{123}$	$e_{123}$	$e_{23}$	$e_{31}$	$e_{12}$	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

şeklinde genişletilebilir.  $Cl_3$  Clifford cebirinin baz elemanlarının geometrik çarpımı Tablo 3.2’de verilmektedir [1, 62].

### 3.5.1. $Cl_3^+$ : Kuaterniyon

İki çift elemanın çarpımı bir çift eleman oluşturur ise, çift elemanların bir alt uzay meydana getirebilecekleri anlamına gelir. Bu durumda alt cebirin bazları 1 ve  $e_{ij}$ ’dir. Bu alt cebirin geometrik çarpım tablosu Tablo 3.3’te gösterilmektedir. Bu çarpım tablosundaki iki-vektörler kuaterniyon birimleriyle yer değiştirir, yani  $e_{23} \rightarrow \mathbf{i}$ ,  $e_{31} \rightarrow \mathbf{j}$ ,  $e_{12} \rightarrow \mathbf{k}$  alındığında tablo aynı özelliğini korur. Daha önce Euclidean düzlemin Clifford cebirinin ve şimdide farklı bir Clifford cebirinin kuaterniyon cebirine izomorf olduğunu görmekteyiz.



**Tablo 3.3.**  $Cl_3^+$  Clifford cebirinin geometrik çarpım tablosu(\*)

	1	$e_{12}$	$e_{31}$	$e_{23}$
1	1	$e_{12}$	$e_{31}$	$e_{23}$
$e_{12}$	$e_{12}$	-1	$e_{23}$	$e_{13}$
$e_{31}$	$e_{31}$	$-e_{23}$	-1	$e_{12}$
$e_{23}$	$e_{23}$	$e_{31}$	$-e_{12}$	-1

### 3.5.2. Kompleks alt cebirler

1,  $e_{123}$  baz elemanlarının oluşturduğu cebir, kompleks cebre izomorftur.

Clifford çarpımında 2-vektörün herbiri i kompleks birimi gibi davranır. 3-vektör diğer baz elemanların herbiri ile değişimlidir.

Böylelikle  $Cl_3$  Clifford cebri, kompleks cebir ve kuaterniyon cebirinin toplamıdır.

### 3.5.3. $Cl_3$ : Kompleks kuaterniyonun Clifford cebri

Bu cebirdeki bir eleman iki kuaterniyonun kompleks toplamı olarak oluşturulabilir. Şöyle ki cebirin bir elemanı;

$$M = a + be_1 + ce_2 + de_3 + ee_1 \wedge e_2 + fe_3 \wedge e_1 + ge_2 \wedge e_3 + he_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

olarak verilir. Toplamdaki terimler yeniden düzenlenirse;

$$M = (a + be_1 + ce_2 + ee_1 \wedge e_2) + (d + fe_1 + ge_2 + he_1 \wedge e_2) \wedge e_3$$

verir. Bu toplama, iki kuaterniyonun kompleks toplamı olarak bakılabilir [73]:

$$\mathbf{q}_1 \equiv a + be_1 + ce_2 + ee_1 \wedge e_2 \equiv (a + be_1) + (c + ee_1) \wedge e_2$$

$$\mathbf{q}_2 \equiv d + fe_1 + ge_2 + he_1 \wedge e_2 \equiv (d + fe_1) + (g + he_1) \wedge e_2$$

$$M = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \wedge e_3 \quad (3.26)$$

### 3.6. 4-Boyutlu Uzayın Clifford Cebirleri

4-boyutlu uzay

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}\}$$

olmak üzere 16 tane birim baz elemana sahiptir.

#### 3.6.2. $Cl_{0,4}$ :Bikompleks kuaterniyonun Clifford cebri

$Cl_{0,4}$  Clifford cebrinde orthogonal baz elemanların skaler çarpımları  $e_i \cdot e_i = -1$ 'dir. Bu durumda, bu cebirdeki vektör ve iki-vektör elemanlar Clifford çarpımı altında kompleks birimi özelliği gösterirler. Bu cebirin genel elemanını, kompleks ve kuaterniyon toplamı ya da kompleks kuaterniyon olarak yapılandırmayı mümkün kılar.

$$\begin{aligned} M = & a + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_1 \wedge e_2 \\ & + a_6 e_1 \wedge e_3 + a_7 e_1 \wedge e_4 + a_8 e_2 \wedge e_3 + a_9 e_2 \wedge e_4 \\ & + a_{10} e_3 \wedge e_4 + a_{11} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + a_{12} e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \\ & + a_{13} e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + a_{14} e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + a_{15} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

Bu ifade  $z_k = a_i + a_j e_1$  şeklindeki sayıların toplamı olarak ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} M = & (a + a_1 e_1) + (a_2 + a_3 e_1) \wedge e_2 + ((a_3 e_3 + a_6 e_1) \\ & + (a_8 + a_{11} e_1) \wedge e_2) \wedge e_3 + ((a_4 + a_7 e_1) + (a_9 + a_{12} e_1) \wedge e_2) \\ & + ((a_{10} + a_{13} e_1) + (a_{14} + a_{15} e_1) \wedge e_2) \wedge e_3 \end{aligned}$$

Bu sayı  $z_i$  sayısına göre;

$$\begin{aligned} M \equiv & z_1 + z_2 \wedge e_2 + (z_3 + z_4 \wedge e_2) \wedge e_3 \\ & + (z_5 + z_6 \wedge e_2 + (z_7 + z_8 \wedge e_2) \wedge e_3) \wedge e_4 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yine bu elemanların herbiri  $Q = z_i + z_j e_2$  kuaterniyon elemanları oluşturacağından Clifford elemanı kuaterniyon toplamı olarak ifade edilebilir:

$$M \equiv Q_1 + Q_2 \wedge e_3 + (Q_3 + Q_4 \wedge e_3) \wedge e_4$$

Sonuçta,  $Q = Q_i + Q_j \wedge e_3$  kompleks kuaterniyon olduğundan Clifford elemanı iki kompleks kuaterniyonun toplamı şeklinde ifade edilebilir [73].

$$M \equiv Q + Q \wedge e_4. \quad (3.27)$$

### 3.7. Sanki (Pseudo) Euclidean Uzayın Clifford Cebirleri

Sanki Euclidean uzay, vektörlerin kendileriyle skaler çarpımlarının pozitif olması gerekmeyeceği uzay olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle;

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle = \pm 1 \quad k=1,2,3,\dots,n \quad (3.28)$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = 0 \quad j \neq k \quad (3.29)$$

özelliğine sahip sanki uzay için  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  ortonormal bazlardan oluşur.

Sanki Euclidean uzaya örnek Minkowski uzayı verilebilir. Sanki uzayların en önemli özelliği  $\eta_{jk}$  işaret matrisidir, burada;

$$\eta_{jk} = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle \quad (3.30)$$

dır. Eşitlik (3.28) ve (3.29)'den anlaşılacağı gibi,  $\eta_{jk}$  köşegen elemanları  $\pm 1$  olan köşegen matristir. Örneğin Minkowski uzayı için seçilen ortonormal bazların düzeninde, işaret matrisinin köşegen elemanlarından biri +1 ve diğer üçü -1 olacak biçimde düzenlenir.

Sanki Euclidean uzay için Clifford cebri Euclidean uzayda da yapılabileceği gibi Dirac matrisleriyle de oluşturulabilir. Dirac matrisleriyle oluşturulan Clifford cebri elemanlar şu özelliklere sahiptir:

$$\hat{\gamma}_j \hat{\gamma}_k + \hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_j = 2\eta_{jk} I \quad (3.31)$$

n tane Dirac matrisinin olası çarpımları alınarak  $2^n$  sayıda lineer bağımsız matris oluşturulabilir.

Sanki Euclidean uzayın n-boyutlu ortonormal Dirac matrislerini yapılandırmak için, Euclidean uzayın n-boyutlu ortonormal Dirac matrislerinin alt uzayları seçilir ve bu alt uzayların elemanları birbirleri ile çarpılır.

Bu halde iki yorum yapılır. Bazı matematikçi ve fizikçiler;

$$\hat{\gamma}_j \hat{\gamma}_k + \hat{\gamma}_k \hat{\gamma}_j = -2\eta_{jk} I \quad (3.32)$$

uyumunu kullanırken, bazı fizikçiler Minkowski uzayı için ters metrik kullanırlar. Başka bir deyişle;  $(+,-,-,-)$  yerine  $(-,+,+,+)$  işareti kullanılır.

### 3.7.1. Reel Euclidean ve sanki Euclidean uzayların Dirac matrisleri

$n$ -boyutlu reel Euclidean ve sanki Euclidean uzaylarda, herhangi bir durum vektörü ortonormal Dirac matrislerinin lineer birleşimi olarak temsil edilebilir:

$$s = \hat{\gamma}_\alpha x^\alpha \quad (3.33)$$

Burada Einstein toplam anlaşması vardır. Yani yukarıdaki ifade daha açık halde;

$$s = \sum_{\alpha=1}^n \hat{\gamma}_\alpha x^\alpha$$

olarak ifade edilir.

$\{u^1, u^2, \dots, u^n\}$  verilen koordinat sistemi için,  $n$ -lineer bağımsız Dirac matris sistemi vardır. Buna Dirac matrislerinin koordinat sistemi denir. Burada herhangi bir koordinat;

$$\gamma_\alpha = \frac{\partial s}{\partial u^\alpha} = \hat{\gamma}_\beta \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial u^\alpha} \right) \quad (3.34)$$

şeklinde verilir. Koordinat sistemini göstermek için Yunan indisleri kullanılır ve kep işareti kaldırılır. Sistem koordinat sistemi gerektirmiyorsa, Latin indisleri kullanılır. Bu durumda, ortonormal Dirac matrisleri üzerine kep işareti konulur.

### 3.7.2. Metrik tensör ve vektörlerin skaler çarpımı

$\vec{a}$  vektörü Dirac matrisleriyle;

$$\vec{a} = A^j \gamma_j \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektörün skaler çarpımını  $\langle \vec{a} \vec{b} \rangle$  şeklinde tanımlayalım.  $\vec{a} \vec{b} + \vec{b} \vec{a}$  sıfır vektör olduğundan,  $\langle \vec{a} \vec{b} \rangle I$ 'nin katsayısı ile

$$\frac{1}{2} (\vec{a} \vec{b} + \vec{b} \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle I = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle I \quad (3.36)$$

olarak tanımlanır. İki simetrik matris, iki adet vektörün skaler çarpımı tanımında oluşturulur. Bölüm 3.7’de tanımlanan işaret matrisi ortonormal bazlarla aşağıdaki gibi ilişkilendirilir:

$$\eta_{jk} = \eta_{kj} = \langle \hat{\gamma}_j, \hat{\gamma}_k \rangle. \quad (3.37)$$

İkinci simetrik  $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$  matris metrik tensör olarak bilinir. Bu matris Dirac matrislerinin verilen koordinat sisteminin bazlarından oluşur:

$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta} = \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \langle \gamma_\alpha, \gamma_\beta \rangle. \quad (3.38)$$

Euclidean ve sanki Euclidean uzaylarda, işaret matrisinden koordinat sistemli Dirac matrisine dönüşüm kolaydır. Özellikle,

$$\gamma_\alpha = \hat{\gamma}_j \left( \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \right) \quad (3.39)$$

olduğundan, eşitlik (3.38),

$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta} = \langle \hat{\gamma}_j, \hat{\gamma}_k \rangle \left( \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \right) \left( \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \right) \quad (3.40)$$

ya da

$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta} = \eta_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \quad (3.41)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$  matrisin tersi  $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$  ile temsil edilir.  $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$  alt indislere göre simetrik olduğundan, ters matrisde üst indislere göre simetriktir. Matematiksel ifade ile  $\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \mathfrak{g}^{\beta\alpha}$  olarak yazabiliriz.

Ters matris verilen bir noktada teğet vektör uzaylar için biortogonal bazları oluşturmakta kullanılır. Bu bazlar alt indislerle gösterilir ve

$$\gamma^\alpha = \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \gamma_\beta \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (3.42)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Dikkat edilmelidir ki  $\langle \gamma^\alpha, \gamma_\beta \rangle = \mathfrak{g}^{\alpha\eta} \langle \gamma_\eta, \gamma_\beta \rangle \mathfrak{g}^{\eta\beta}$  ya da

$$\langle \gamma^\alpha, \gamma_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha \quad (3.43)$$

şeklinde verilmektedir.

Clifford cebriinde verilen koordinat sistemi için aynı vektörü temsil etmenin iki yolu vardır:

$$\vec{a} = A^\alpha \gamma_\alpha = A_\beta \gamma^\beta. \quad (3.44)$$

$\gamma^\beta = \mathfrak{G}^{\alpha\beta} \gamma_\alpha$  bağıntısından,  $A^\alpha = \mathfrak{G}^{\alpha\beta} A_\beta$  yazılır.

### 3.7.3. p-Vektörler için dış çarpım ve Clifford sayıları için skaler çarpım

Euclidean uzayda daha önce k-vektörlerin ortonormal bazlarla nasıl oluşturulduğunu Bölüm 2’de gösterilmişti. Şimdi benzer şekilde ortonormal Dirac matrisleri ile p-vektörlerin oluşturulduğu gösterilecektir.

p farklı ortonormal Dirac matrislerinin çarpımı ya da çarpımlarının lineer birleşimine *p-vektör* denir. Örneğin  $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3$  bazları ortonormal olsun.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri,

$$\vec{a} = A^1 \hat{\gamma}_1 + A^2 \hat{\gamma}_2 + A^3 \hat{\gamma}_3 \quad \text{ve} \quad \vec{b} = B^1 \hat{\gamma}_1 + B^2 \hat{\gamma}_2 + B^3 \hat{\gamma}_3 \quad (3.45)$$

şeklinde verilir ise;

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3) I + (A^2 B^3 + A^3 B^2) \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \\ &= (A^3 B^1 + A^1 B^3) \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1 + (A^1 B^2 + A^2 B^1) \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

sonucunu verir. Bu sonuç iki vektörün çarpımının 0-vektör yani skaler ve iki-vektörün lineer birleşimidir.

Farklı p-vektör uzayların direkt toplamları alınarak tüm Clifford sayısını(çokluvektör) vektör uzayına ulaşılır. Bu uzayın boyutu;

$$\sum_p \binom{n}{p} = \sum_p \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n \quad (3.47)$$

ile verilir[66].

### 3.7.4. $Cl_{1,3}$ Uzay zaman cebri

$Cl_{1,3}$  Clifford cebri Minkowski uzay zamanı tanımlar. Bu cebre Dirac cebri de denir. 4-boyutlu bu uzayda ortonormal bazları Dirac matrisleri oluşturur.  $\gamma_0$  ve  $\gamma_i$   $i=1,2,3$  seçilir.  $\gamma_\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) bilinen Dirac matrisleri ile aynı çarpım kuralına uyar.  $\gamma_i$ ’ler uzayımsı vektörlerdir.  $\gamma_0$  zamanımsı vektör olup pozitif kareye sahiptir.

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_i^2 = -1 \quad \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu \quad (3.48)$$

ya da kısaca;

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \mathfrak{G}_{\mu\nu} \quad (3.49)$$

ile verilir.  $Cl_{1,3}$  Clifford cebri  $2^4=16$  boyutlu bir cebirdir. Bu uzayın matris elemanlarında iki-vektörler;

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (3.50)$$

üç vektörler;

$$\gamma_{\mu\nu\sigma} = \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\sigma \quad (3.51)$$

dört vektörler yani sanki skaler;

$$i \equiv \frac{1}{4} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\sigma \wedge \gamma_\rho \quad (3.52)$$

olarak tanımlanabilir.

$Cl_{1,3}$ 'de herhangi bir eleman skaler, vektör, iki-vektör, üç-vektör, sanki skalerin toplamı olarak yazılabilir:

$$M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4 \quad (3.53)$$

Bu cebirde tanımlı üç involüsyon (involution) verilmektedir:

$$M^* = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4 \quad (3.54)$$

$$\tilde{M} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4 \quad (3.55)$$

$$\bar{M} = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4 \quad (3.56)$$

M ve N iki çoklu vektörün geometrik çarpımları için yukarıda tanımlanan involüsyon işlemleri;

$$(MN)^* = N^*M^* \quad (3.57)$$

$$\overline{MN} = \bar{N}\bar{M} \quad (3.58)$$

$$\tilde{MN} = \tilde{M}\tilde{N} \quad (3.59)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu cebirde geometrik hesaplamalar için gradyent işlemcisi;

$$\partial \equiv \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \gamma_\mu \partial_\mu \quad (3.60)$$

ifadesiyle tanımlanır [1, 25].

### 3.8. Kompleks Clifford Cebri

#### 3.8.1. Dirac cebri

Dirac cebri,  $\eta$  metrik seçimine bağlı olarak  $Cl(3,1)$  ya da  $Cl(1,3)$ 'ün kompleksleştirimi ile oluşturulur. Sırasıyla  $D(3,1)$  ve  $D(1,3)$  ile temsil edilir.  $Cl(3,1)$  ve  $Cl(1,3)$  Clifford cebirlerinin kompleksleştirimi  $e_\mu \mapsto ie_\mu$  dönüşümüne uyar. Tüm Dirac cebri;

$$e_0, ie_0, e_1, ie_1, e_2, ie_2, e_3, ie_3$$

vektörleri ile türetilen reel Clifford cebri olarak düşünülebilir.  $\eta$  seçimine bağlı olarak tüm Dirac cebri  $D(4)$  ile temsil edilir. Böylece vektör uzayların direkt toplamı benzer olarak;

$$D(4) \cong Cl(1,3) \oplus Cl(1,3)$$

şeklinde ifade edilir.  $\eta=1$  ise  $Cl(3,1)$ ;  $D(3,1)$ 'in reel kısmıdır ve  $Cl(1,3)$ ;  $D(1,3)$ 'ün imajiner kısmıdır.  $\eta=-1$  olduğunda ise  $Cl(3,1)$ ;  $D(3,1)$ 'in imajiner kısmı ve  $Cl(1,3)$ ;  $D(1,3)$ 'ün reel kısmını oluşturur.

$D(4)$  Dirac cebri aşağıda belirtilen bazıları içerir:

$$1, e_0, e_1, e_2, e_3, e_{01}, e_{02}, e_{03}, e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{123}, e_{023}, e_{031}, e_{012}, e_{0123}$$

$D(4)$ 'de herhangi bir eleman,

$$M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4$$

ile verilebilir.  $M$  elemanının tersi  $\tilde{M}$  ile gösterilir ve

$$\tilde{M} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4$$

şeklinde tanımlanır.

$D(4)$  Dirac cebri 16-boyutlu kompleks Clifford cebridir [42].



### 3.9. Bölüntülü(Split) Cebirler

Uzay zaman geometrisi çok farklı cebirlerle tanımlanabilir. Bu geometrinin tanımı, reel sayı alanı üzerinden birim elemana sahip normlanmış cebirlerle verilir. Normlanmış cebirlerin fiziksel uygulamalarında negatif kareye sahip elemanlar kullanılır. Bu durumda cebirin normu pozitif tanımlıdır. Pozitif kareye sahip elemanlarla negatif kareye sahip elemanların oluşturduğu cebire ise *bölüntülü cebirler* denir. Bölüntülü cebirler; birleşimli ve birleşimli olmayan olarak ikiye ayrılabilir. Birleşimli bölüntülü cebirlere sanki Euclidean uzayın Clifford cebirleri ve bu Clifford cebirlerin alt cebri olan bölüntülü kuaterniyonlar örnek verilebilir. Birleşimli olmayan bölüntülü cebre; kompleks oktonyonlar, kompleksleştirilmiş oktonyonlar, bölüntülü oktonyonlar, sedeniyonlar örnek oluşturur. Alt bölümde, sedeniyonların alt cebri olan hiperbolik oktonyon cebri ayrıca incelenecektir [11-15,19,20].

#### 3.9.1. Hiperbolik Oktonyonlar

Bir hiperbolik oktonyon, sekiz boyutlu ve hiperkompleks sayıdır. Bir  $\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyonu,

$$\mathcal{O} = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 \epsilon_4 + a_5 \epsilon_5 + a_6 \epsilon_6 + a_7 \epsilon_7 \quad (3.61)$$

şeklinde tanımlanır ( $\epsilon_5^2 = \epsilon_6^2 = \epsilon_7^2 = 1$ ). Hiperbolik oktonyonların bazıları arasındaki çarpım kuralı Tablo 3.4'te verilmiştir.

$\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyonun eşleneği ise;

$$\overline{\mathcal{O}} = a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 \epsilon_4 - a_5 \epsilon_5 - a_6 \epsilon_6 - a_7 \epsilon_7 \quad (3.62)$$

olarak tanımlanır. Böylece  $\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyonun normu için,

$$|\mathcal{O}| = \mathcal{O}\overline{\mathcal{O}} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2 \quad (3.63)$$

ifadesi elde edilir. Bu norm  $\mathcal{R}^{4,4}$  sanki Euclidean uzayda tanımlı normdur. Hiperbolik oktonyon normu izotropiktir.  $\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyonun normu sıfır olabilir, yani  $N(\mathcal{O}) = 0$ . Eğer  $\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyon sıfır olmayan norma sahip

ise  $N(\mathcal{O}) \neq 0$ ,  $\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyonun tersi vardır.  $\mathcal{O}$  hiperbolik oktonyonun tersi  $\mathcal{O}^{-1}$  ile gösterilir ve

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{N(\mathcal{O})} \quad (3.64)$$

şeklinde tanımlanır.

**Tablo 3.4.** Hiperbolik oktonyonların baz çarpımları(\*)

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$
$e_1$	-1	$e_3$	$-e_2$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_4$	$-\varepsilon_7$	$\varepsilon_6$
$e_2$	$-e_3$	-1	$e_1$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$
$e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1	$\varepsilon_7$	$-\varepsilon_6$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_4$
$\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_6$	$-\varepsilon_7$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$\varepsilon_5$	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_7$	$\varepsilon_6$	$-e_1$	1	$e_3$	$-e_2$
$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_5$	$-e_2$	$-e_3$	1	$e_1$
$\varepsilon_7$	$-\varepsilon_6$	$\varepsilon_5$	$-\varepsilon_4$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$	1

Yukarıdaki tablodan da, yer alan baz çarpımlarını göz önüne alırsak, hiperbolik oktonyonlar;

$$AB = -BA, \quad A, B = e_i, \varepsilon_{i+4}, \varepsilon_4 \quad i=1,2,3 \quad (3.65)$$

koşulunu sağlar yani değişimli değildir ve

$$(\varepsilon_m e_n) \varepsilon_p = -\varepsilon_m (e_n \varepsilon_p) \quad m \neq n \neq p \quad (3.66)$$

olduğu durumlarda birleşimli de değildir [13,14].

## 4. CLIFFORD FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Matematiksel fizikte karşılaşılan adi ya da kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde, bazı belirli integrallerin hesabında, serilerin toplamında oldukça önemli bir araç olan integral dönüşümleri kullanılır. Bu bölümde integral dönüşümlerinden biri olan Fourier dönüşümü sunulacaktır. Bunun sonrasında,  $Cl_3$  Clifford cebirinde bu dönüşümün özellikleri verilecektir.

### 4.1. $\mathcal{R}$ 'de Fourier Dönüşümü

$f \in L^2(\mathcal{R})$  integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,  $f$ 'nin *Fourier dönüşümü*;

$$F\{f\}(\omega) = \int_{\mathcal{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanan  $F\{f\}: \mathcal{R} \rightarrow C$  kompleks fonksiyonudur. Burada  $i^2 = -1$  kompleks birimdir.

$F\{f\}(\omega)$  kompleks fonksiyonu ise;

$$F\{f\}(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = C(\omega) e^{i\phi(\omega)} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede;  $C(\omega)$ 'ya,  $f(t)$ 'nin Fourier spektrumu,  $C^2(\omega)$ ;  $f(t)$ 'nin enerji spektrumu,  $\phi(\omega)$ 'ya ise  $f(t)$ 'nin faz açısı denir.

$F\{f\}(\omega) \in L^2(\mathcal{R})$  ve  $f \in L^2(\mathcal{R})$  ise,  $f$ 'nin *ters Fourier dönüşümü*;

$$F^{-1}[F\{f\}(\omega)] = f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} F\{f\}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (4.3)$$

ile verilir. Tablo 4.1'de Fourier dönüşümünün bazı özelliklerini verilmektedir.

**Tablo 4.1.** Fourier dönüşümlerinin özellikleri [62]

Özellik	Fonksiyon	Fourier Dönüşümü
Lineerlik	$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F\{f\}(\omega) + \beta F\{g\}(\omega)$
Öteleme	$f(x-a)$	$e^{-i\omega a} F\{f\}(\omega)$
Yön	$e^{i\omega_0 x} f(x)$	$F\{f\}(\omega - \omega_0)$
Ölçeklendirme	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\{f\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Konvolüsyon	$(f * g)(x)$	$F\{f\}(\omega) F\{g\}(\omega)$
Türev	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F\{f\}(\omega)$
Parseval Teoremi	$\int_{\mathcal{R}}  f(x) ^2 dx =$	$\int_{\mathcal{R}}  F\{f\}(\omega) ^2 d\omega$

#### 4.2. $Cl_3$ 'de Clifford Fourier Dönüşümü

$f(\vec{x})$ ;  $f: \mathcal{R}^3 \rightarrow Cl_3$  çokluvektör değerli fonksiyon olsun. Burada  $\vec{x}$  vektör değişkendir. Eşitlik (3.17)'den yararlanarak  $\mathbf{f}(\vec{x})$ ;

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\vec{x}) = \sum_A f_A(\vec{x}) \mathbf{e}_A = f_0(\vec{x}) + f_1(\vec{x}) \mathbf{e}_1 + f_2(\vec{x}) \mathbf{e}_2 + f_3(\vec{x}) \mathbf{e}_3 \\ + f_{12}(\vec{x}) \mathbf{e}_{12} + f_{31}(\vec{x}) \mathbf{e}_{31} + f_{23}(\vec{x}) \mathbf{e}_{23} + f_{123}(\vec{x}) \mathbf{e}_{123} \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde bileşenleriyle ifade edilebilir.  $f_A$  sekiz reel değerli fonksiyondur. Yine, eşitlik (4.4)'ü Bölüm 3.5 ve Tablo 3.2'den yararlanarak;

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\vec{x}) = [f_0(\vec{x}) + f_{123}(\vec{x}) i_3] + [f_1(\vec{x}) \mathbf{e}_1 + f_{23}(\vec{x}) i_3] \mathbf{e}_1 \\ + [f_2(\vec{x}) \mathbf{e}_2 + f_{31}(\vec{x}) i_3] \mathbf{e}_2 + [f_3(\vec{x}) \mathbf{e}_3 + f_{12}(\vec{x}) i_3] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu ifade, eşitlik (4.4)'e dört kompleks fonksiyon toplamı olarak da bakılabileceğini göstermektedir. Böylece,  $Cl_3$ 'teki  $f$  çokluvektör fonksiyonların Fourier dönüşümü olarak düşünülebilir. Bu dönüşümlere Clifford Fourier dönüşümü denilecektir.

$f(\vec{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümü;

$$F\{f\}(\vec{\omega}) = \int_{\mathcal{R}^3} f(\vec{x}) e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} d^3 x \quad (4.6)$$

ile verilen  $\mathbf{F}\{f\}: \mathcal{R}^3 \rightarrow Cl_3$  fonksiyondur. Burada  $\mathcal{R}^3$ 'ün  $e_1, e_2, e_3$  baz vektörlerine göre  $\bar{\omega} = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$  ve  $\bar{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$  şeklinde tanımlanmaktadır.  $d^3 x$  ifadesi ise açık şekilde;

$$d^3 x = \frac{d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2 \wedge d\bar{x}_3}{i_3} \quad (4.7)$$

ile verilir. Eşitlik (3.24) ve (3.25)'den yararlanarak;

$$\begin{aligned} d^3 x &= \frac{d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2 \wedge d\bar{x}_3}{i_3} = \frac{-i_3^2 [d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2 \wedge d\bar{x}_3]}{i_3} \\ &= \frac{-i_3 d\bar{x}_1 \cdot (i_3 d\bar{x}_2 \wedge d\bar{x}_3)}{i_3} = [d\bar{x}_1 \cdot (d\bar{x}_2 \times d\bar{x}_3)] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eşitlik (4.7), görüldüğü gibi skaler değerlidir ( $dx_k = dx_k e_k$ ,  $k=1,2,3$  toplam anlaşması yoktur).  $i_3$ ,  $Cl_3$ 'ün tüm elemanlarıyla değişimli olduğundan,  $e^{-i_3 \bar{\omega} \cdot \bar{x}}$  Clifford Fourier kernel  $Cl_3$ 'ün tüm elemanlarıyla değişimlidir.

$$f \in L^2(\mathcal{R}^3, Cl_3), \int_{\mathcal{R}^3} \|f\|^2 d^3 x < \infty \text{ olmak koşuluyla } \mathbf{F}\{f\} \text{ Clifford Fourier}$$

dönüşümünün tersi bulunabilir. *Clifford Fourier dönüşümünün tersi*;

$$\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega})] = f(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} \mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega}) e^{i_3 \bar{\omega} \cdot \bar{x}} d^3 \omega \quad (4.8)$$

ile hesaplanır.

Bu işlemimiz, eşitlik (4.8)'e, eşitlik (4.6) yerleştirerek kolayca aşağıdaki gibi ispatlanabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{F}\{f\}(\omega)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} \int_{\mathcal{R}^3} f(\bar{y}) e^{-i \bar{\omega} \cdot \bar{y}} d^3 y e^{i \omega \cdot \bar{x}} d^3 \omega \\ &= \int_{\mathcal{R}^3} f(\bar{y}) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} e^{i_3 (\bar{x} - \bar{y}) \cdot \bar{\omega}} d^3 \omega d^3 y \\ &= \int_{\mathcal{R}^3} f(\bar{y}) \delta(\bar{x} - \bar{y}) d^3 y \\ &= f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Eşitlik (4.8)'e, *Clifford Fourier integral teoremi* denir. Bu ifade orijinal  $f$  fonksiyonuna geri nasıl dönüleceğini tanımlamaktadır.

### 4.3. Clifford Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri

Bu bölümde Clifford Fourier dönüşümünün bazı önemli özellikleri özetlenecektir. Özelliklerin çoğu değişken değişimiyle sağlanabilir.

#### 4.3.1. Lineerlik

$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}) \in Cl_3$  ve  $\alpha$  ve  $\beta \in \mathcal{R}$  sabitleri için  $f(\vec{x}) = \alpha f_1(\vec{x}) + \beta f_2(\vec{x})$  ise,

$$\mathbf{F}\{f\}(\omega) = \alpha \mathbf{F}\{f_1\}(\omega) + \beta \mathbf{F}\{f_2\}(\omega)$$

(4.9)

Clifford Fourier dönüşümleri lineer dönüşümlerdir.

#### 4.3.2. Öteleme (Delay) özelliği

$f(\vec{x})$ 'in argümeni  $a$  sabit vektörüyle denkleşiyor yani  $f_d(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{a})$  ise,  $f(\vec{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümü;

$$\mathbf{F}\{f_d\}(\vec{\omega}) = e^{-i_s \vec{\omega} \cdot \vec{a}} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \quad (4.10)$$

ile verilecektir.

Bu ifadeye şu şekilde ulaşılır: Eşitlik (4.6)'da,  $f(\vec{x})$  yerine  $f_d(\vec{x})$  fonksiyonu yerleştirilince;

$$\mathbf{F}\{f_d\}(\vec{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x} - \vec{a}) e^{-i_s \vec{\omega} \cdot \vec{x}} d^3 x \quad (4.11)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede;

$$x - a = t$$

değişken dönüşümü göz önüne alınırsa,

$$d^3 x = d^3 t$$

olacaktır. Böylece;

$$\mathbf{F}\{f_d\}(\vec{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{t}) e^{-i_s \vec{\omega} \cdot \vec{a}} e^{-i_s \vec{\omega} \cdot \vec{t}} d^3 t \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. Burada, eşitlik (4.6)'dan;

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{t}) e^{-i_s \vec{\omega} \cdot \vec{t}} d^3 t = \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$$

olacağından, eşitlik (4.12);

$$\mathbf{F}\{f_a\}(\vec{\omega}) = e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{a}} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$$

olarak yazılır. Bu eşitlik (4.10) ifadesinin aynısıdır. Yani, Clifford Fourier dönüşümü öteleme özelliğine sahiptir [62].

### 4.3.3. Ölçeklendirme (Scaling) özelliği

$a \in \mathcal{R}$  olmak üzere,  $f_a(\vec{x}) = f_a(a\vec{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümü şu şekilde bulunur. Eşitlik (4.4)'te  $f(\vec{x})$  fonksiyonu yerine  $f_a(\vec{x})$  fonksiyonu yazılırsa;

$$\mathbf{F}\{f_a\}(\vec{\omega}) = \int_{\mathcal{R}^3} f(a\vec{x}) e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} d^3 x \quad (4.13)$$

olur. Burada

$$a\vec{x} = \vec{u}$$

değişimi gerçekleştirilirse,  $d^3 x = d^3 u$  olacağından eşitlik (4.13);

$$\mathbf{F}\{f_a\}(\vec{\omega}) = \frac{1}{a^3} \int_{\mathcal{R}^3} f(\vec{u}) e^{-i_3 \left(\frac{\vec{\omega}}{a}\right) \cdot \vec{u}} d^3 u$$

şeklini alır. Bu ifade Clifford Fourier dönüşümünün tanımı yardımıyla;

$$\mathbf{F}\{f_a\}(\vec{\omega}) = \frac{1}{a^3} \mathbf{F}\{f\}\left(\frac{\vec{\omega}}{a}\right) \quad (4.14)$$

biçiminde yazılır. Bu Clifford Fourier dönüşümünün de ölçeklendirme özelliğine sahip olduğu gösterir.

### 4.3.4. Yön (Shift) özelliği

$$\omega_0 \in \mathcal{R}^3 \text{ ve } f_0 = f(\vec{x}) e^{i_3 \vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}} \text{ ise;}$$

$$\mathbf{F}\{f_0\}(\vec{\omega}) = \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \quad (4.15)$$

olmaktadır.

Eşitlik (4.6) kullanınca ve onu basitleştirince,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\{f_0\}(\vec{\omega}) &= \int_{\mathcal{R}^3} f(\vec{x}) e^{-i_3 (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \cdot \vec{x}} d^3 x \\ &= \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yön özelliği  $e^{i_3 \omega_0 \cdot x}$  ile  $f(\vec{x})$  çokluvektör fonksiyonunun çarpımı Clifford Fourier dönüşümünün yönünü gösterir.

#### 4.4. Türevlerin Clifford Fourier Dönüşümü

Clifford Fourier dönüşümünün türev özellikleri Tablo 4.1'deki skaler Fourier dönüşümünün türev özelliklerine benzer şekildedir.

##### 4.4.1. Vektör diferansiyel ve kısmi türev alma

$f(\vec{x})$ 'in vektör diferansiyelinin Clifford Fourier dönüşümü;

$$\mathbf{F}\{\vec{a} \cdot \vec{\nabla} f\}(\vec{\omega}) = i_3 \vec{a} \cdot \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \quad (4.16)$$

dir.  $\vec{a}$  yönündeki vektör diferansiyel eşitlik (4.8) yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılır ve hesaplanır:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) &= \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) e^{i_3 \omega \cdot \vec{x}} d^3 x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) (\vec{a} \cdot \vec{\nabla} e^{i_3 \omega \cdot \vec{x}}) d^3 x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) (i_3 \vec{a} \cdot \vec{\omega}) e^{i_3 \omega \cdot \vec{x}} d^3 x \\ &= \mathbf{F}^{-1}[i_3 \vec{a} \cdot \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Bu ifade, eşitlik (4.16)'yı doğrular.  $\vec{a} = \mathbf{e}_k$  göz önüne alınınca  $f(\vec{x})$ 'in kısmi türevi;

$$\mathbf{F}\{\partial_k f\}(\vec{\omega}) = i_3 \omega_k \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}), \quad k=1,2,3.$$

olur. Benzer hesaplamalarla ikinci mertebe türevleri bulunabilir yani;

$$\mathbf{F}\{\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} \cdot \vec{\nabla} f\}(\vec{\omega}) = -\vec{a} \cdot \vec{\omega} \vec{b} \cdot \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}). \quad (4.18)$$

$\vec{a} = \mathbf{e}_k$  ve  $\vec{b} = \mathbf{e}_l$  için, yukarıdaki eşitlik;

$$\mathbf{F}\{\partial_k \partial_l\}(\vec{\omega}) = -\omega_k \omega_l \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \quad k,l=1,2,3.$$

olacaktır.



$\vec{x}$  bir vektör değişken ise,  $\vec{x}f(\vec{x})$ 'in vektör diferansiyelinin Clifford Fourier dönüşümü şu şekilde hesaplanır. Eşitlik (4.6)'dan  $\vec{x}f(\vec{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde yazılır ve hesaplanır:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\{\vec{x}f(\vec{x})\}(\vec{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{x}f(\vec{x})e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{x}e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}f(\vec{x})d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} i_3\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}f(\vec{x})d^3x \\ &= i_3\vec{\nabla}_{\vec{\omega}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x})e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \\ &= i_3\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})\end{aligned}$$

Burada

$$\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}} = -i_3\left[\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}(\vec{\omega}\cdot\vec{x})\right]e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}} = -i_3\vec{x}e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}} \quad (4.19)$$

olur.

Böylece,  $\vec{a}\cdot\vec{x}f(\vec{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümü;

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\{\vec{a}\cdot\vec{x}f(\vec{x})\}(\vec{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{a}\cdot\vec{x}f(\vec{x})e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x})\vec{a}\cdot\vec{x}e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x})i_3\vec{a}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \\ &= i_3\vec{a}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{\omega}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x})e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \\ &= i_3\vec{a}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})\end{aligned} \quad (4.20)$$

olarak verilir. Bu ifade  $\vec{a} = \mathbf{e}_k$  ( $k=1,2,3$ ) için;

$$\mathbf{F}\{x_k f(\vec{x})\}(\vec{\omega}) = i_3 \frac{\partial}{\partial \omega_k} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \quad (4.21)$$

şeklinde ya da daha genel olarak;

$$\mathbf{F}\{\vec{x}f(\vec{x})\}(\vec{\omega}) = i_3\vec{\nabla}_{\vec{\omega}}\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$$

olarak verilir.

#### 4.4.2. Vektör türev ve Laplace işlemcisi

Vektör türevin Clifford Fourier dönüşümü;

$$\mathbf{F}\{\vec{\nabla}f\}(\vec{\omega}) = i_3 \omega \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \quad (4.22)$$

ve vektör türevin Laplace işlemcisi

$$\mathbf{F}\{\vec{\nabla}^2 f\}(\vec{\omega}) = -\omega^2 \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \quad (4.23)$$

dir.

Bu ifadeleri kanıtlamak için Bölüm 2.9'dan yararlanılır.  $g(\vec{x}) = e^{i_3 \lambda(\vec{x})}$ ,  $\lambda(\vec{x}) = \vec{\omega} \cdot \vec{x}$  olmak üzere  $g(\vec{x})$ 'in vektör türevi eşitlik (2.54) ve  $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{\omega}$  yardımıyla;

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} g = \vec{a} \cdot \vec{\omega} i_3 \vec{x} e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} \quad (4.24)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (2.54) kullanılıncaya;

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g &= \vec{\nabla}_{\vec{a}} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla} g) \\ &= \vec{\nabla}_{\vec{a}} \{ \vec{a} \cdot \vec{\omega} i_3 e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} \} \\ &= \vec{\nabla}_{\vec{a}} \{ \vec{a} \cdot \vec{\omega} \} i_3 e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} \\ &= i_3 \vec{\omega} e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. Eşitlik (4.25)'den yararlanarak;

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} d^3 x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} \vec{\nabla} e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) d^3 x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} i_3 \vec{\omega} e^{i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{x}} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) d^3 x \\ &= \mathbf{F}^{-1} [i_3 \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})] \end{aligned} \quad (4.26)$$

bulunur. Böylece

$$\mathbf{F}\{\vec{\nabla}f\}(\omega) = i_3 \omega \mathbf{F}\{f\}(\omega) \quad (4.27)$$

olacaktır. Eşitlik (4.26)'ya bir kez daha  $\mathbf{F}\{\nabla f\}(\vec{\omega}) = i_3 \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$  vektör türevi uygulanmasıyla;

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\{\bar{\nabla}^2 f\} &= \mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega}) \\
&= i_3 \bar{\omega} \mathbf{F}\{\bar{\nabla} f\}(\bar{\omega}) \\
&= -\omega^2 \mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega})
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir.

Bu ifade genelleştirilerek,  $m$ . mertebeden çokluvektör fonksiyonunun türevinin Clifford Fourier dönüşümü için;

$$\mathbf{F}\{\bar{\nabla}^m f\}(\bar{\omega}) = (i_3 \bar{\omega})^m \mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega}) \quad m \in \mathcal{N} \tag{4.29}$$

yazılır.

#### 4.5. Konvolüsyon

Sinyal işlem uygulamalarında Clifford Fourier dönüşümlerinin en önemli özelliği konvolüsyon teoremidir. Abelian olmayan geometrik çarpım nedeniyle aşağıdaki tanımlar geçerli olacaktır.

Clifford Fourier dönüşümü tanımlanabilen  $f$  ve  $g$  çokluvektör değerli fonksiyonlar olmak üzere,  $f$  ve  $g$ 'nin konvolüsyonu  $f * g$  gösterilir ve

$$(f * g)(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\bar{y}) g(\bar{x} - \bar{y}) d^3 y \tag{4.30}$$

ile tanımlanır.

$f(\bar{x})$  ve  $g(\bar{x})$ 'in konvolüsyonunun Clifford Fourier dönüşümü  $f(\bar{x})$  ve  $g(\bar{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir, yani;

$$\mathbf{F}\{f * g\}(\bar{\omega}) = \mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega}) \mathbf{F}\{g\}(\bar{\omega}) \tag{4.31}$$

dir.

Bu, şu şekilde ispatlanabilir:  $\mathbf{F}\{f\}(\bar{\omega})$  ve  $\mathbf{F}\{g\}(\bar{\omega})$  sırasıyla  $f(\bar{x})$  ve  $g(\bar{x})$ 'in Clifford Fourier dönüşümü olmak üzere, eşitlik (4.6) Clifford Fourier dönüşümünü yardımıyla ifadedeki  $f(\bar{x})$  çokluvektör fonksiyonu yerine eşitlik (4.30) yerleştirildiğinde;

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\{f * g\}(\bar{\omega}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} f(\bar{y}) g(\bar{x} - \bar{y}) d^3 y \right] e^{-i_3 \bar{\omega} \cdot \bar{x}} d^3 x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(\bar{y}) \left[ \int_{\mathbb{R}^3} g(\bar{x} - \bar{y}) e^{-i_3 \bar{\omega} \cdot \bar{x}} d^3 x \right] d^3 y
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olur.  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$  vektörü şeklinde tanımlanarak, bu ifade;

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\{f * g\}(\vec{\omega}) &= \int_{\mathcal{R}^3} f(\vec{y}) \left[ \int_{\mathcal{R}^3} g(\vec{z}) e^{-i_3[\vec{\omega} \cdot (\vec{y} + \vec{z})]} d^3 z \right] d^3 y \\
&= \int_{\mathcal{R}^3} f(\vec{y}) \left[ \int_{\mathcal{R}^3} g(\vec{z}) e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{z}} d^3 z \right] e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{y}} d^3 y \\
&= \int_{\mathcal{R}^3} f(\vec{y}) e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{y}} d^3 y \mathbf{F}\{g\}(\vec{\omega}) \\
&= \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \mathbf{F}\{g\}(\vec{\omega})
\end{aligned} \tag{4.33}$$

olarak yeniden yazılabilir.

#### 4.6. Plancherel ve Parseval Teoremleri

$f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}) \in Cl_3$  'de çokluvektör fonksiyonlar,  $\mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega})$  ve  $\mathbf{F}\{f_2\}(\vec{\omega})$  fonksiyonları da bu fonksiyonların Clifford Fourier dönüşümleri olmak, tersleri de eşitlik (3.20)'deki gibi sırasıyla  $\tilde{f}_1(\vec{x}), \tilde{f}_2(\vec{x}), \mathbf{F}\{\tilde{f}_1\}(\vec{\omega})$   $\mathbf{F}\{\tilde{f}_2\}(\vec{\omega})$  şeklinde tanımlanmak üzere,  $f_1(\vec{x})$  ve  $f_2(\vec{x})$  çarpımlarının integrali;

$$\left\langle f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}) \right\rangle_v = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\langle \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega}) \mathbf{F}\{f_2\}(\vec{\omega}) \right\rangle_v \tag{4.34}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadeye *Plancherel teoremi* denir. Burada;

$$\left\langle f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}) \right\rangle_v = \int_{\mathcal{R}^3} f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}) d^3 x \tag{4.35}$$

hacim integralini ifade eder.

Teoremin doğruluğunu göstermek amacıyla eşitlik (4.35)'in sol tarafındaki ifade üsteki tanım ve eşitlik (4.6) yardımıyla hesaplanca;

$$\begin{aligned}
\left\langle f_1(\vec{x})f_2(\vec{x}) \right\rangle_v &= \int_{\mathbb{R}^3} f_1(\vec{x})f_2(\vec{x})d^3x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega})e^{i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3\omega \right] f_2(\vec{x})d^3x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega}) \left[ \int_{\mathbb{R}^3} f_2(\vec{x})e^{-i_3\vec{\omega}\cdot\vec{x}}d^3x \right] d^3\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega})\mathbf{F}\{f_2\}(\vec{\omega})d^3\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\langle \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega})\mathbf{F}\{f_2\}(\vec{\omega}) \right\rangle_v
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitlik (4.34) çokluvektör değere sahiptir.

$f_1(\vec{x})=f_2(\vec{x})=f(\vec{x})$  özel durumu için, (çokluvektör) *Parseval teoremi*

$$\left\langle f(\vec{x})f(\vec{x}) \right\rangle_v = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\langle \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \right\rangle_v \quad (4.36)$$

şeklinde yazılabilir. Bu teorem, eşitlik (4.34)'ün her iki tarafında k-dereceli çokluvektör için,

$$\left\langle \left\langle f_1(\vec{x})f_2(\vec{x}) \right\rangle_v \right\rangle_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\langle \left\langle \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega})\mathbf{F}\{f_2\}(\vec{\omega}) \right\rangle_v \right\rangle_k, k=0,1,2,3 \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilir.  $k=0$  için, eşitlik (4.35) ve (3.23)'e göre, (skaler) Parseval teoremi

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|f(\vec{x})\|^2 d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})\|^2 d^3\omega \quad (4.38)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadeye eşitlik (4.2)'e benzerlikten dolayı  $f_1(\vec{x})$ 'in enerjisi denir. Tablo 4.2'de, Clifford Fourier dönüşüm özelliklerinin tümü verilmektedir [62].

**Tablo 4. 2.** Clifford Fourier Dönüşümlerinin Özellikleri [62]

Özellik	Fonksiyon	Fourier Dönüşümü
Lineerlik	$\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})$	$\alpha \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) + \beta \mathbf{F}\{g\}(\vec{\omega})$
Öteleme	$f(\vec{x} - \vec{a})$	$e^{-i_3 \vec{\omega} \cdot \vec{a}} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$
Yön	$e^{i_3 \vec{\omega}_0 \cdot \vec{x}} f(\vec{x})$	$\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)$
Ölçeklendirme	$f(a\vec{x})$	$\frac{1}{a^3} \mathbf{F}\left\{f\right\}\left(\frac{\vec{\omega}}{a}\right)$
Convolution	$(f * g)(\vec{x})$	$\mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega}) \mathbf{F}\{g\}(\vec{\omega})$
Vektör Diferansiyel	$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x})$	$i_3 \vec{a} \cdot \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$
	$\vec{a} \cdot \vec{x} f(\vec{x})$	$i_3 \vec{a} \cdot \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$
Türev	$\vec{x} f(\vec{x})$	$i_3 \vec{\omega} \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$
	$\vec{\nabla}^m f(\vec{x})$	$(i_3 \vec{\omega})^m \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})$
Plancherel Teorem	$\langle f_1(\vec{x}) \overline{f_2(\vec{x})} \rangle_v =$	$\frac{1}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{F}\{f_1\}(\vec{\omega}) \overline{\mathbf{F}\{f_2\}(\vec{\omega})} \rangle_v$
Parseval Teoremi	$\int_{\mathbb{R}^3} \ f(\vec{x})\ ^2 d^3 x =$	$\int_{\mathbb{R}^3} \ \mathbf{F}\{f\}(\vec{\omega})\ ^2 d^3 \omega$

## 5. GEOMETRİK CEBİR KULLANILARAK HAMILTON MEKANİĞİNİN FORMÜLASYONU

Geometrik cebirin uygulama alanlarında biri de klasik mekaniktir. Bu bölümde, dinamik sistemleri çözerken skaler büyüklüklerin kullanıldığı ve kuvvet vektörünün doğrudan yer almadığı analitik dinamik yöntemlerden bir olan Hamilton mekaniğin formülasyonu geometrik cebir ile verilecektir.

### 5.1. Faz Uzayında Hamiltonyen Mekaniği

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  koordinatlarıyla tanımlanan mekanik sistemler için, n adet ortonormal bazlarla

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

oluşan n-boyutlu  $\mathcal{R}^n$  reel vektör uzayı olarak konfigürasyon uzayı tanımlanır. Sistemin durumu;

$$\bar{\mathbf{q}} = q^i \mathbf{e}_i \quad (5.2)$$

vektörleri ile temsil edilebilir. Konfigürasyon uzayında tanımlı vektörleri;

$$\bar{\mathbf{q}}' \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}' \cdot \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}' \wedge \bar{\mathbf{q}}$$

geometrik çarpımı ile çarpılarak  $\mathcal{R}^n$  reel geometrik cebri oluşturulur. Koordinatlarla ilişkilendirilen vektör türevi  $\partial_{\bar{\mathbf{q}}}$  eşitlik (2.49)'e göre aşağıdaki gibi verilir:

$$\partial_{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{e}^i, \quad (5.3)$$

Burada  $\mathbf{e}^i$ ,  $\mathcal{R}^n$  uzayına dik baz elemanlardır.

Benzer şekilde, eşitlik (5.1)'de olduğu gibi,

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{2} \{ \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j \} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{e}}_i \bar{\mathbf{e}}_j + \bar{\mathbf{e}}_j \bar{\mathbf{e}}_i) = \delta_{ij} \quad (5.4)$$

Bağıntısı ile verilen ortonormal  $\bar{\mathbf{e}}_i$  bazlarının oluşturduğu n-boyutlu  $\overline{\mathcal{R}}^n$  reel vektör uzayı ile momentum uzayı tanımlanabilir.

Böylece, mekanik sistemin momentumu;

$$\bar{p} = p^i \bar{e}_i \quad (5.5)$$

vektörü ile ifade edilebilir ve  $\bar{p}$  momentum vektörüne göre türev eşitlik (2.49)'dan;

$$\partial_{\bar{p}} = \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{e}^i \quad (5.6)$$

şeklinde olacaktır. Burada  $\bar{e}^i$ ,  $\bar{\mathcal{R}}^n$ 'e dik bazlardır.

Konfigürasyon ve momentum uzaylarının direkt toplamı olan  $\mathcal{M}^{2n}$  faz uzayı;

$$\mathcal{M}^{2n} = \mathcal{R}^n \oplus \bar{\mathcal{R}}^n \quad (5.7)$$

bağıntısı ile verilir. Faz uzayının geometri cebir oluşturabilmesi için, bazlar eşitlik (5.1) ve (5.4)'ün yanı sıra;

$$\mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j \} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \bar{\mathbf{e}}_j + \bar{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_i) = 0 \quad (5.8)$$

ile verilen koşula uymalıdır. Aynı zamanda, faz uzayında;

$$J_i = \mathbf{e}_i \bar{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i \bar{\mathbf{e}}_j \quad (5.9)$$

bileşenlerine sahip simplektik iki-vektör;

$$J = \sum_i J_i \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Eşitlik (2.18) ve (2.26)'de verilen kurallar gereği;

$$\mathbf{e}_i \cdot J_i = \bar{\mathbf{e}}_i, \quad (5.11)$$

ve

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot J_i = -\mathbf{e}_i \quad (5.12)$$

ifadeleri elde edilir.

Faz uzayında, sistemin  $\theta$  noktasının durumunu;

$$\bar{\theta} = \bar{q} + \bar{p} = q^i \mathbf{e}_i + p^i \bar{\mathbf{e}}_i \quad (5.13)$$

ifadesi ile verilir. Bu durumun bileşen ve bazları;

$$\theta^r = \begin{cases} q^r & 1 \leq r \leq n \\ p^{r-n} & n \leq r \leq 2n \end{cases} \quad (5.14)$$

ve



$$\mathbf{E}_r = \begin{cases} \mathbf{e}^r & 1 \leq r \leq n \\ \bar{\mathbf{e}}_{r-n} & n \leq r \leq 2n \end{cases} \quad (5.15)$$

şeklinde verilince, (5.13) ifadesi;

$$\bar{\theta} = \theta^r \mathbf{E}_r \quad (5.16)$$

olarak yazılabilir.

Eşitlik (5.12) kullanılarak  $\bar{\mathbf{E}}_r$ ;

$$\bar{\mathbf{E}}_r = \mathbf{E}_r \cdot \mathbf{J} = \begin{cases} \bar{\mathbf{e}}^r & 1 \leq r \leq n \\ -\mathbf{e}_{r-n} & n \leq r \leq 2n \end{cases} \quad (5.17)$$

olacaktır. Bu simplektik uzayda skaler çarpım;

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_r, \bar{\mathbf{E}}_s) &= \mathbf{E}_r \cdot \bar{\mathbf{E}}_s \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_r, \bar{\mathbf{E}}_s \} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ile ya da matris temsili ile;

$$(\mathbf{E}_r, \bar{\mathbf{E}}_s) = \gamma_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

olarak tanımlanır. Faz uzay noktasına göre türev;

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\theta}} &= \partial_{\bar{q}} + \partial_{\bar{p}} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i} \mathbf{e}_i + \frac{\partial}{\partial p^i} \bar{\mathbf{e}}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta^r} \mathbf{E}^r \end{aligned} \quad (5.20)$$

ile verilir.

Аyrıca,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\theta}} &= \partial_{\bar{\theta}} \cdot \mathbf{J} \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i} \bar{\mathbf{e}}_i - \frac{\partial}{\partial p^i} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (5.21)$$

olur. Sistemin Hamiltonyeni faz uzayı üzerinde skaler değerli bir fonksiyondur:

$$H = H(\theta, \bar{\theta}) = H(q, p) \quad (5.22)$$

Böylece, sistemin  $\theta = \theta(t)$  faz uzayın yörüngesinin Hamilton denklemi;

$$\dot{\theta} = -\partial_{\bar{\theta}} H \quad (5.23)$$

formunu alır. Bu Hamilton denklemi bilinen şekli ile;

$$\dot{q}^i \mathbf{e}_i + \dot{p}^i \bar{\mathbf{e}}_i = - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} \bar{\mathbf{e}}_i - \frac{\partial H}{\partial p^i} \mathbf{e}_i \right) \quad (5.24)$$

ya da

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = - \frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (5.25)$$

olarak yazılabilir.

Hamilton denklemleri Poisson parentezleri kullanılarak da yazılabilir. Bunun için, Poisson parentezi faz uzayında tanımlanmalıdır.  $F(\theta)$  ve  $G(\theta)$  skaler değerli faz fonksiyonları için bu tanım;

$$[F, G]_- = \partial_{\bar{\theta}} F \cdot \partial_{\theta} G \quad (5.26)$$

şeklinde verilir. Bu ifade, eşitlik (5.1), (5.4), (5.8), (5.20) ve (5.21) kullanılarak;

$$\begin{aligned} [F, G]_- &= \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \bar{\mathbf{e}}_i - \frac{\partial F}{\partial p^i} \mathbf{e}_i \right) \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial q^i} \mathbf{e}_i - \frac{\partial G}{\partial p^i} \bar{\mathbf{e}}_i \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_i + \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p^i} \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_i + \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial p^i} \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \end{aligned} \quad (5.27)$$

olarak bulunur. Bu Poisson parentezinin koordinatlar cinsinden bilinen tanımıdır.

Faz uzayında,  $F = F(\theta)$  çokluvektör fonksiyon için, hareketin denklemi eşitlik (5.23) ve (5.26)'ya göre;

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \partial_{\bar{\theta}} F \cdot \dot{\theta} \\ &= \partial_{\bar{\theta}} F \cdot \partial_{\bar{\theta}} H \\ &= [F, H]_- \end{aligned} \quad (5.28)$$

olacaktır. Böylece, eşitlik (5.23) ile tanımlanan faz eğrisi Poisson parentezi kullanılarak;

$$\dot{\theta} = [\theta, H]_- \quad (5.29)$$

ile tekrar tanımlanır. Eşitlik (5.29) ifadesi daha açık bir formda;

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i + \dot{p}^i &= [q + p, H] = [q, H] + [p, H] \\
&= \left[ \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial q^i}{\partial p^j} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] + \left[ \frac{\partial p^i}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial p^i}{\partial p^j} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] \\
&= \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

elde edilir [8].

## 6. CLIFFORD CEBRİ VE DÖRT BOYUTLU LORENTZ DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde hiperbolik kompleks uzayda Lorentz dönüşümünün genel formu tartışılacak ve sınırlandırılmış rölativite teorisinde invaryant mesafe incelenecektir.

Hiperbolik kompleks uzayların tanımladığı Clifford cebirinde  $j$  hiperbolik birimi;

$$j^2 = 1, \quad j \neq 1, \quad j^* = -j \quad (6.1)$$

koşulunu sağlar.  $H(ct, j\vec{r})$  hiperbolik kompleks uzay, Minkowski uzayını tanımlayabilir. Bu uzaya *hiperbolik Minkowski uzayı* denir. Hiperbolik Minkowski uzayında konum vektörü;

$$X = ct + j\vec{r} = \sum_{n=1}^4 x_n, \quad (6.2)$$

hiperbolik kuaterniyonu ile verilebilir. Burada  $ct = x_4$ ,  $t$  zamandır.

$$j\vec{r} = \sum_{n=1}^3 x_n = jx\vec{n}_1 + jy\vec{n}_2 + jz\vec{n}_3, \quad (6.3)$$

olup  $\vec{r}$  üç boyutlu uzayın durum vektörüdür ve  $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ 'dir.  $H(ct, j\vec{r})$  iki boyutlu uzay zaman kompleks düzlem olarak alınır. Burada  $\vec{r}$  kompleks sayının gerçel kısmı ve  $ct$  kompleks sayının reel kısmıdır.

### 6.1. Dört Boyutlu Lorentz Dönüşümü

$X$  hiperbolik kuaterniyonunu polar formda yazmak mümkündür.  $j$  gerçel birim vektöre karşı gelmek üzere  $X$  lineer kuaterniyonu;

$$X = \sqrt{N}(\cosh \vec{\phi} + j \sinh \vec{\phi}) \quad (6.4)$$

şeklinde ifade edilir.  $-\infty \leq \cosh \vec{\phi} \leq \infty$ ,  $-\infty \leq \sinh \vec{\phi} \leq \infty$  aralığında değişir ve  $\cosh \theta + \sinh \theta = 1$  koşulunu sağlar. Böylece  $X$  lineer kuaterniyon eksponensiyel formda;

$$X = \sqrt{N}e^{j\vec{\phi}} \quad (6.5)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\sqrt{N} = \sqrt{XX^*} = R = \sqrt{c^2t^2 - r^2} \quad (6.6)$$

hiperbolik kuaterniyonun modülüdür ve  $\vec{\phi}$ , ct eksenine karşılık gelen argümandır.

$$\vec{\phi} = \vec{r}_0\phi = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \arctan h \frac{r}{ct}, \quad e^{j\vec{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\vec{\phi})^n}{n!} = \mathbf{cosh} \vec{\phi} + j \mathbf{sinh} \vec{\phi}. \quad (6.7)$$

Sıfır bölen oluşturmamak şartıyla, lineer kuaterniyonun çarpımı;

$$\begin{aligned} X &= ct + j\vec{r} = X_1X_2 = \sum_{n,m=1}^4 x_n x_m \\ &= (ct_1 + j\vec{r}_1)(ct_2 + j\vec{r}_2) = (c^2t_1t_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) + j(ct_1\vec{r}_2 + ct_2\vec{r}_1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik (6.8)'de  $X_m = \mathbf{cosh} \vec{\phi} + j \mathbf{sinh} \vec{\phi}$  birim kuaterniyon alınır, dört boyutlu uzay;

$$X' = ct' + j\vec{r}' = X_m X = (\mathbf{cosh} \vec{\phi} + j \mathbf{sinh} \vec{\phi}) \cdot (ct + j\vec{r}) \quad (6.9)$$

şekline dönüşür. Eşitlik (6.9)'de  $X'$ 'nin bileşenleri,

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= ct \mathbf{sinh} \vec{\phi} + \vec{r} \mathbf{cosh} \vec{\phi} \\ ct' &= ct \mathbf{cosh} \vec{\phi} + \vec{r} \mathbf{sinh} \vec{\phi} \end{aligned} \quad (6.10)$$

olur.

$$\mathbf{tanh} \vec{\phi} = \frac{\mathbf{sinh} \vec{\phi}}{\mathbf{cosh} \vec{\phi}} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (6.11)$$

alınınca;

$$\mathbf{cosh} \vec{\phi} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\alpha} \quad (6.12)$$

olur. Eşitlik (6.12) eşitlik (6.10)'de yerleştirilince, Lorentz dönüşümü;

$$\begin{cases} \vec{r}' = \frac{1}{\alpha} (\vec{r} + \vec{v}t) \\ t' = \frac{1}{\alpha} \left( t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \end{cases} \quad (6.13)$$

sonucunu verir. Eşitlik (6.13) kuaterniyon formunda;

$$X' = \frac{1}{c} V \cdot X \quad (6.14)$$

yazılabilir. Burada  $V = \frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} (ct + j\vec{v})$  dört boyutlu genelleştirilmiş hız ve  $\tau$

doğal zamandır. Eşitlik (6.14)'deki dönüşüm;

$$\begin{bmatrix} j\vec{r}' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & j\frac{v}{\alpha c} \\ j\frac{v}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{r} \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \bar{\phi} & j\sinh \bar{\phi} \\ j\sinh \bar{\phi} & \cosh \bar{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jr \\ ct \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

ya da

$$X'_\mu = \mathcal{U}_{\mu\nu} X_\nu \quad (6.16)$$

matris formunda yazılabilir. Eşitlik (6.16) ile verilen matris ile bu matrisin hermityen eşleneğinin çarpımından;

$$X'_\mu{}^\dagger X'_\mu = X_\mu{}^\dagger X_\mu = R^2 \quad (6.17)$$

elde edilir. Bu sonuç eşitlik (6.6)'de elde edilen sonucun aynısıdır. Bu Minkowski uzayında uzunluk değişmezliği anlamına gelir.  $\mathcal{U}_{\mu\nu}$  dönüşüm matrisi;

$$\mathcal{U}_{\mu\nu}{}^\dagger \mathcal{U}_{\mu\nu} = \mathcal{U}_{\mu\nu} \mathcal{U}_{\mu\nu}{}^\dagger = I \quad (6.18)$$

özelliğine sahiptir. Burada  $I$  birim matristir,  $\mathcal{U}_{\mu\nu}{}^\dagger$  ve  $\mathcal{U}_{\mu\nu}$  birbirlerinin hermityen eşleniğidir.

Eşitlik (6.16) dört düzenli matris formunda;

$$\begin{bmatrix} jx' \\ jy' \\ jz' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & \frac{jv_x}{\alpha c} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{jv_y}{\alpha c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{jv_z}{\alpha c} \\ \frac{jv_x}{\alpha c} & \frac{jv_y}{\alpha c} & \frac{jv_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jx \\ jy \\ jz \\ ct \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

yazılabilir. Eşitlik (6.19), eşitlik (6.17) formunda yazılamaz, çünkü (6.19)'in  $\mathcal{U}_{\mu\nu}$  dönüşüm matrisi, eşitlik (6.18)'i vermez. Bu  $(j\vec{r}', ct')$  ve  $(j\vec{r}, ct)$  iki koordinat sisteminde sadece  $\vec{r}$ 'nin görelî hareket yaptığını ve hareketin  $\vec{v}$ 'e paralel olduğunu gösterir. Eşitlik (6.16) ve (6.19)'un her bileşeni Lorentz dönüşümünün değişmezliğini sağlamaz. Genelde  $\vec{r}$  ve  $\vec{v}$ 'nin yönleri farklıdır.

Clifford cebirinde eşitlik (6.8)'de verilen çarpım yerine, geometrik çarpım vardır. Bu çarpımda eşitlik (2.23)'den hatırlanacağı gibi;

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$$

ile verilir. İki vektör arasında  $0 < \varphi < \pi$  olmak koşuluyla bir  $\varphi$  açısı olduğunda  $\vec{a}$ 'nın  $\vec{b}$  yönündeki paralel bileşeni  $\vec{a}_\parallel$  eşitlik (3.4) den;

$$\vec{a}_n = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}^{-1}.$$

ve  $\vec{a}_\perp$  dik bileşen ise eşitlik (3.5)'ten

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_n = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}^{-1} = (\vec{a} \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b}^{-1} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \vec{b}^{-1}$$

olarak verilir.  $\vec{a} = \vec{r}$ ,  $\vec{b} = \vec{v}$ ,  $\vec{r}_n$  ve  $\vec{v}$  aynı yönde olursa, eşitlik (6.13);

$$\begin{cases} \vec{r}'_n = \frac{1}{\alpha} (\vec{r}_n + \vec{v} t) \\ t' = \frac{1}{\alpha} \left( t + \frac{\vec{r}_n \cdot \vec{v}}{c^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \left( t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \end{cases} \quad (6.20)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.4) ve (3.5) den yararlanarak;

$$\vec{r}_n = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad \vec{r}'_\perp = \vec{r}' - \vec{r}'_n = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad (6.21)$$

bulunur. Eşitlik (6.13)'e eşitlik (6.21) yerleştirilince, Lorentz dönüşümü;

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \frac{\vec{v}}{\alpha} t \\ t' = \frac{1}{\alpha} \left( t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \end{cases} \quad (6.22)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (6.22) matris formunda da  $X'_\mu = \mathcal{U}_{\mu\nu} X_\nu$  ya da

$$\begin{bmatrix} jx' \\ jy' \\ jz' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_x}{v^2} & \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_x \vec{v}_y}{v^2} & \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_x \vec{v}_z}{v^2} & \frac{jv_x}{\alpha c} \\ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_x \vec{v}_y}{v^2} & 1 + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_y^2}{v^2} & \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_x \vec{v}_z}{v^2} & \frac{jv_y}{\alpha c} \\ \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_x \vec{v}_z}{v^2} & \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\vec{v}_y \vec{v}_z}{v^2} & 1 + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{v_z^2}{v^2} & \frac{jv_z}{\alpha c} \\ \frac{jv_x}{\alpha c} & \frac{jv_y}{\alpha c} & \frac{jv_z}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jx \\ jy \\ jz \\ ct \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (6.23)'de Lorentz dönüşümü;

$$\begin{aligned}
x' &= \left(1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_x^2}{v^2}\right) x + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_x v_y}{v^2} y + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_x v_z}{v^2} z + \frac{v_x}{\alpha} t \\
y' &= \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_x v_y}{v^2} x + \left(1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_y^2}{v^2}\right) y + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_y v_z}{v^2} z + \frac{v_y}{\alpha} t \\
z' &= \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_x v_z}{v^2} x + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_y v_z}{v^2} y + \left(1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{v_z^2}{v^2}\right) z + \frac{v_z}{\alpha} t \\
t' &= \frac{v_x}{\alpha c^2} x + \frac{v_y}{\alpha c^2} y + \frac{v_z}{\alpha c^2} z + \frac{1}{\alpha} t
\end{aligned} \tag{6.24}$$

şeklinde bileşen formunda yazılabilir. Eşitlik (6.23) ve  $\mathcal{U}_{\mu\nu}$  dönüşüm matrisi ayrı ayrı eşitlik (6.17) ve eşitlik (6.18)'i verir. Eşitlik (6.23) ve eşitlik (6.24) dört boyutlu hiperbolik Minkowski uzayının genel Lorentz dönüşümüdür.  $v_x = v$  ve  $v_y = v_z = 0$  alındığında, eşitlik (6.24);

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{\alpha} (x + vt) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{1}{\alpha} \left( t + \frac{v}{c^2} x \right)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

şeklinde özel Lorentz dönüşümü verir [22].



## 7. CLIFFORD CEBRİNİN ELEKTROMANYETİK TEORİYE UYGULANMASI

### 7.1. Clifford Sayıları ve Maxwell Denklemleri

Uzay zamanda, Clifford sayıları ile elektromanyetik tensör alanı;

$$\hat{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu = E_i (\hat{\gamma}^i \wedge \hat{\gamma}^0) + \frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} B^k \hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^j \quad (7.1)$$

formülüyle verilebilir. Burada  $E_i$  ve  $B^k$  sırasıyla elektrik ve manyetik alan bileşenleri,  $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$  simetrik olmayan dördüncü mertebeye tensördür ve  $\varepsilon_{0ijk} = \sqrt{|g|}$  olarak ifade edilebilir.  $\hat{\gamma}^\mu$  vektörleri için  $\hat{\gamma}^\mu \cdot \hat{\gamma}^\nu = \hat{1} g^{\mu\nu}$  dir. Burada  $\hat{1}$  birim Clifford sayısı ( $4 \times 4$ ) birim matrisi ifade eder.

Eşitlik (3.60)'da ifade edildiği gibi diferansiyel operatör,

$$\hat{\partial} \equiv \hat{\gamma}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu \quad (7.2)$$

ile temsil edilir. Böylece koordinattan bağımsız Maxwell denklem sistemi;

$$\hat{\partial} \hat{F} = 0 \quad (7.3)$$

olarak verilir.

Clifford sayılarıyla ilgili bazı gösterimler aşağıdaki tanımlamalar doğrultusunda kullanılır:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^i &= \hat{\gamma}^i \wedge \hat{\gamma}^0 & \Rightarrow & \hat{\rho}^i \cdot \hat{\rho}^j = -g^{00} g^{ij} + g^{i0} g^{j0} \\ \hat{\rho}^i \cdot \hat{\rho}^j &= \delta_j^i & \Rightarrow & \rho = \hat{\gamma}_0 \wedge \hat{\gamma}_i \end{aligned} \quad (7.4)$$

burada  $\hat{\gamma}^\mu \cdot \hat{\gamma}_\nu = \hat{1} \delta_\nu^\mu$  ve

$$\hat{i} \equiv \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}^\sigma \hat{\gamma}^\rho \quad (7.5)$$

ve

$$(\hat{i}) = -\hat{1}, \quad \hat{\gamma}^j \hat{i} = -\hat{i} \hat{\gamma}^j, \quad \hat{\rho}^j \hat{i} = \hat{i} \hat{\rho}^j \quad (7.6)$$

ifade eder.  $(\hat{i})$  Clifford sayısı simetrik olmayan dördüncü mertebeye tensördür.

$\hat{i}^2 = -1$  olduğundan,  $\hat{i}$  'ye Clifford kompleks birimi denilebilir.

Kompleks sayılara benzeterek, dört boyutlu uzayda Clifford sayısı ( $4 \times 4$ ) reel matris ile;

$$\begin{aligned}\hat{C} &= a\hat{1} + b_\mu \gamma^\mu + c_i \hat{\rho}^i + d_i \hat{i} \hat{\rho}^i + e_\mu \hat{i} \gamma^\mu + f \hat{i} \\ &= (a + \hat{i} f) \hat{1} + (b_\mu + \hat{i} e_\mu) \gamma^\mu + (c_i + \hat{i} d_i) \hat{\rho}^i\end{aligned}\quad (7.7)$$

olarak temsil edilebilir. Burada  $a, b_\mu, c_i, d_i, e_\mu, f$  reel sayılardır. Clifford sayısının eşleneği  $\hat{C}^*$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}\hat{C}^* &= (a - \hat{i} f) \hat{1} + (b_\mu - \hat{i} e_\mu) \gamma^\mu + (c_i - \hat{i} d_i) \hat{\rho}^i \\ &= a\hat{1} + b_\mu \gamma^\mu + c_i \hat{\rho}^i - d_i \hat{i} \hat{\rho}^i - e_\mu \hat{i} \gamma^\mu - f \hat{i}\end{aligned}\quad (7.8)$$

ile tanımlanır.

Eşitlik (7.4), (7.5), (7.6), (7.7) ve (7.8) kullanarak, elektromanyetik alanı;

$$\hat{F} = \hat{E} - \hat{i} \hat{B}, \quad \hat{F}^* = \hat{E} + \hat{i} \hat{B} \quad (7.9)$$

yazabiliriz. Burada;

$$\hat{E} \equiv E_i \hat{\rho}^i, \quad \hat{B} \equiv B^i \hat{\rho}_i \quad (7.10)$$

ile verilmektedir.

Eşitlik (7.7)'de, ilk kısım  $a$  ve  $f$  skaler olduğundan skalerdir. İkinci kısım vektördür,  $b_\mu$  ve  $e_\mu$  katsayıları vektör bileşenleri gibi düşünülür. Üçüncü kısım iki-vektör olarak bilinir ve simetrik olmayan ikinci mertebe tensördür.

Eşitlik (7.7)'de  $a$ ; skalerin reel kısmı ve  $\hat{i} f$  ise skalerin kompleks kısmı olarak adlandırılır. Yine,  $b_\mu \gamma^\mu$  vektörün reel,  $\hat{i} e_\mu \gamma^\mu$  vektörün kompleks ve  $c_i \hat{\rho}^i$  iki-vektörün reel ve  $d_i \hat{i} \hat{\rho}^i$  ise iki-vektörün kompleks kısmıdır.

Eşitlik (7.3) aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\hat{\partial} \cdot \hat{F} + \hat{\partial} \wedge \hat{F} = 0 \quad (7.11)$$

Eşitlik (7.9) temsili kullanılarak, (7.11) eşitliği;

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}^0 \partial_0 \wedge \hat{E} + \hat{\gamma}^i \partial_i \cdot \hat{E} + \hat{\gamma}^i \partial_i \wedge \hat{E} - \hat{\gamma}^0 \partial_0 \cdot \hat{i} \hat{B} \\ - \hat{\gamma}^i \partial_i \cdot \hat{i} \hat{B} - \hat{\gamma}^i \partial_i \wedge \hat{i} \hat{B} = 0\end{aligned}\quad (7.12)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\hat{\gamma}^0 \cdot \hat{\rho}_i = 0$ ,  $\hat{\gamma}^0 \wedge \hat{i} \hat{\rho}_i = 0$  kullanılmıştır ve  $\gamma^\mu$  referans vektörleri koordinatlara bağlı değildir. Eşitlik (7.12)'nin sol tarafı bir vektördür. Bu vektör, reel ve kompleks bileşenlere ayrılınca;

$$\hat{\gamma}^i \partial_i \wedge \hat{E} = 0 \quad (7.13a)$$

$$\hat{\gamma}^i \partial_i \cdot \hat{B} = 0 \quad (7.13b)$$

$$\hat{\gamma}^0 \partial_0 \wedge \hat{E} - \hat{\gamma}^i \partial_i \wedge \hat{B} = 0 \quad (7.13c)$$

$$\hat{\gamma}^0 \partial_0 \cdot \hat{B} - \hat{\gamma}^i \partial_i \cdot \hat{E} = 0 \quad (7.13d)$$

dört adet Maxwell denklem sistemini verir. Yukarıda eşitlik (7.10) ve aşağıdaki ilişkiler kullanılmıştır:

$$\hat{\gamma}^i \wedge \hat{\rho}_j = -\delta_j^i \hat{\gamma}_0, \quad \hat{\gamma}^0 \wedge \hat{\rho}_i = \hat{\gamma}_i, \quad \hat{\gamma}^i \wedge \hat{\rho}^j = -\varepsilon^{0ijk} \hat{\gamma}_k \quad (7.14)$$

$$\hat{\gamma}^i \wedge \hat{\rho}_j = \delta_j^i \hat{\gamma}_0, \quad \hat{\gamma}^0 \wedge \hat{\rho}_i = \hat{\gamma}_i, \quad \hat{\gamma}^i \cdot \hat{\rho}^j = -\varepsilon^{0ijk} \hat{\gamma}_k \quad (7.15)$$

Burada  $\varepsilon^{0123} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}$  'dir.

Eşitlik (7.13); eşitlik (7.13a) ve (7.13b)'nin sol taraflarının elektromanyetik alan vektörünün diverjansları olan Maxwell denklemleridir [25].

## 7.2. $Cl_3$ Clifford Cebrinde Elektromanyetizma için Ayar Dönüşümü

Elektromanyetizmada, Maxwell denklemleri önemli rol oynar. Vektörel notasyonda kaynaktan bağımsız Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 && \text{Elektrik alan için Gauss yasası} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 && \text{Manyetik alan için Gauss yasası} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{Ampere-Maxwell yasası} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{Faraday yasası}\end{aligned}$$

Bu çalışmada alışılmış bir kabul olarak,  $c=1$  alınacaktır [70].

$Cl_3$  Clifford cebrinde elektromanyetik bivektör alan;

$$\mathbf{F} = \vec{E} + i\vec{B} \quad (7.16)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\vec{E}$ ; elektrik alan,  $\vec{B}$ ; manyetik alan,  $i$  ise  $i = e_{123} = -1$  şeklinde hacim elemanıdır.  $Cl_3$  Clifford cebrinde diferansiyel işlemci,

$$\square = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \quad (7.17)$$

olarak verilebilir. Burada,  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3$  'dir [64]. Böylece,  $\mathbf{F}$  elektromanyetik bivektör alanına diferansiyel işlemcisinin uygulanmasıyla;

$$\square \mathbf{F} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{E} + i \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{B} \right) = 0 \quad (7.18)$$

olur. Bu eşitlik; skaler, vektör, bivektör ve sanki (pseudo) skalere ayrılınca

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i\vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= 0 \\ i\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= 0 \\ i\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Vektörel çarpımın eşitlik (3.24) tanımı kullanılınc bu denklemler bilinen Maxwell denklemlerine dönüşür. Bu, eşitlik (7.18) ile kaynaksız dört Maxwell denkleminin bir denkleme indirgenliğini gösterir. Aynı sonuç, diferansiyel işlemcinin elektromanyetik bivektör alanın tersine uygulanmasıyla da

$$\square \tilde{\mathbf{F}} = 0 \quad (7.19)$$

elde edilir. Böylece, elektromanyetizma için Clifford Lagrange yoğunluğu, eşitlik (7.18) ve (7.19) yardımıyla,

$$L = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^* \cdot (\square \mathbf{F}) - (\square \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^*] \quad (7.20)$$

şeklinde tanımlanabilir. Lagrange yoğunluğunun 4-boyutlu hacimdeki sonsuz küçük değişimleri varyasyon prensibinde,

$$\delta A = \delta \int dt \int dx L = 0 \quad (7.21)$$

olacaktır. Eşitlik (7.20)'de '\*' uzaysal eşleniği '~' ters işlemi temsil etmektedir.  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^*$ , ve  $\tilde{\mathbf{F}}$  varyasyon hesabında bağımsız değişkenler olarak düşünülmüşlerdir. Korunum denklemi, elektromanyetik bivektör alanın ayar dönüşümünden türetilebilir:

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}' = \mathbf{F} e^{i\alpha} \approx (1 + i\alpha) \mathbf{F} \quad (7.22)$$

Burada  $\alpha$ ;  $x$  ve  $t$ 'nin keyfi sonsuz küçük fonksiyonudur. Eşitlik (7.22)'deki dönüşüm tipine birinci tür Clifford gauge dönüşümü denilebilir [71]. Eşitlik (7.20)'de eşitlik (7.22)'deki  $\mathbf{F}$  yerleştirildiğinde, Lagrange yoğunluğu aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$L'(\mathbf{F}') = L(\mathbf{F} + i\alpha \mathbf{F}) = L + \delta L \quad (7.23)$$

Burada  $\delta L$ ;

$$\delta L = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^* \cdot (\square i\alpha \mathbf{F}) - (\square i\alpha \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right] \quad (7.24)$$

dir. Eşitlik (7.24)'de türevler açıldığında  $\delta L$ ;

$$\delta L = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}^* \cdot [(\square i\alpha \mathbf{F}) + i\alpha (\square \mathbf{F})] - \left[ (\square i\alpha \tilde{\mathbf{F}}) - i\alpha (\square \tilde{\mathbf{F}}) \right] \cdot \mathbf{F}^* \right\} \quad (7.25)$$

olacaktır. Eşitlik (7.18) ve (7.19)'a göre,  $i\alpha (\square \mathbf{F}) = 0$  ve  $i\alpha (\square \tilde{\mathbf{F}}) = 0$ 'dır. Buna

göre,  $A$  hareketinde değişim;

$$\delta A = -\frac{1}{2} \int dt \int dx \left\{ \mathbf{F}^* \cdot (\square i \alpha \mathbf{F}) - (\square i \alpha \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right\} \quad (7.26)$$

olur. Uzay zamandaki kısımlarla integrasyondan sonra, harekette değişim sıfır olması gerektiğinden

$$\frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^* \cdot i(\square \mathbf{F}) + i(\square \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right] = 0 \quad (7.27)$$

olacaktır. Eşitlik (7.27) elektromanyetizma için yerel enerji korunum denklemdir. Şöyle ki;  $\mathbf{F}$ 'nin uzaysal eşleneği ve tersi eşitlik (3.19) ve (3.20)'den;

$$\mathbf{F}^* = -\vec{E} + i\vec{B} \quad (7.28)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\vec{E} - i\vec{B} \quad (7.29)$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (7.27)'de eşitlik (7.28) ve (7.29) yerleştirildiğinde ve eşitlik (7.27) ile tanımlanan işlem yapılırsa aşağıda açık olarak yazılmış ifadeye ulaşılır:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^* \cdot i(\square \mathbf{F}) + i(\square \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right] &= -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot (i\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \\ &+ \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Ayrıca dış çarpım ile vektörel çarpım arasındaki eşitlik (3.24) ile verilen bağıntısı gereğince;

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \text{ve} \quad i\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{B}$$

kullanıldığında eşitlik (7.30);

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^* \cdot i(\square \mathbf{F}) + i(\square \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right] &= -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot (i\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &+ i\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

olacaktır. Burada,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

vektör özdeşliğinden faydalanılarak eşitlik (7.31);

$$\frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^* \cdot i(\square \mathbf{F}) + i(\square \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right] = -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - [\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})] = 0$$

olarak ya da daha bildik şekli ile;

$$\frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^* \cdot i(\nabla \mathbf{F}) + i(\nabla \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{F}^* \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + B^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] = 0 \quad (7.32)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (7.27)'nin elektromanyetizma için yerel enerjinin korunumunun genel ifadesi olduğu işlemler sonucu doğrulanmıştır. Eşitlik (7.32)'de;

$$w = \frac{E^2 + B^2}{2}$$

elektromanyetik enerji yoğunluğu ve

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$$

ise Pointing vektörü olarak adlandırılan elektromanyetik enerji akısıdır.

### 7.3. Hiperbolik Oktonyonik Proca-Maxwell Denklemleri

Bugün fizikte alışılmış ve evrensel kabul gören vektör ve tensör cebirinin kullanımının yanı sıra birçok farklı cebir kullanılmaktadır. Bu cebirlerden en bilineni 4-, 8- ve 16- boyuta genelleştirilebilen, bazılarının değişimli ve birleşimli olmadığı kompleks sayı cebridir. Kompleks sayılar, on dokuzuncu yüzyılda hidrodinamik, elektrodinamik ve dalga teorisindeki faydalı uygulamalarından sonra, yirminci yüzyılda da kuantum teorisinin ifade edilmesinde vazgeçilmez cebirsel yapılar olmuşlardır. Bu süreçle birlikte, diğer kompleks sayılar da aynı zamanda Clifford cebirine ait 4- boyutlu kuaterniyonlar, 8- boyutlu oktonyonlar ve çok daha sonra 16-boyutlu sedeniyonlar fiziksel olayların ifade edilmesinde kullanılmışlardır. Bu cebirsel yapıların herbiri fiziğin ilerlemesi ve de var olan denklemlerin daha iyi anlaşılmasında, kompakt gösterimlerin elde edilmesinde önemli rol oynamaktadırlar [11-21, 75-77].

Bu bölümde Proca- Maxwell denklemleri anlatılmaktadır. Genelleştirilmiş Proca alan denklemi ve Proca-Maxwell denklemleri tek bir hiperbolik oktonyon denklemi ile verilmektedir.

#### 7.3.1 Proca-Maxwell denklemleri

Bilinen Maxwell denklemleri ve Maxwell Lagrangian'ı fotonun kütesiz olduğu varsayımına dayanır ve elektromanyetizmada önemli role sahiptir. Ancak yine biliyoruz ki kütle terimi ekleyerek Lagrangian modifiye edilebilir. Sonuç Lagrangian; Proca Lagrangian olarak bilinir. CGS birim sisteminde, Proca Lagrangian;

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{8\pi} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu - \frac{1}{c} J_\mu \mathcal{A}^\mu \quad (7.33)$$

ile verilir. Burada  $m_\gamma = \frac{\omega}{c}$  foton kütleleriyle birleştirilmiş Compton dalga uzunluğunun tersi,  $J_\mu$ ; dört akımı ( $J \equiv \rho, -\vec{j}$ ),  $\mathcal{A}^\mu$ ; dört potansiyeli ( $\mathcal{A} \equiv A_0, \vec{A}$ ),  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$  alan tensörünü ifade eder. İyi bilinen, Euler Lagrange denklemleri;



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\mu} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu)} \right) = 0 \quad (7.34)$$

şeklindedir. Proca denklemi ise,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\gamma^2 \mathcal{A}^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (7.35)$$

olarak elde edilir. Lorentz-ayar şartı olan

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0 \quad (7.36)$$

ifadesi kullanılarak, vektör potansiyellere göre eşitlik (7.35)

$$(\square + m_\gamma^2) \mathcal{A}_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad (7.37)$$

olarak yazılabilir. Böylece Proca- Maxwell denklemleri vektör cebirinde

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho - m_\gamma^2 A_0 \quad (7.38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.40)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - m_\gamma^2 \vec{A} \quad (7.41)$$

olarak elde edilmiş olacaktır [30, 70]. Bu denklemlerin, teorik ve deneysel fizikte araştırmalar için yeni yaklaşımlar oluşturacağı umulmaktadır.

### 7.3.2. Hiperbolik oktonyonik Proca alan denklemi ve Proca-Maxwell denklemleri

Proca alan denklemleri, hiperbolik oktonyon cebri ile verilmeden önce bu cebirde yer alacak olan  $\square$  hiperbolik oktonyon diferansiyel işlemcisi;

$$\square = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\epsilon}_5 + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\epsilon}_6 + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\epsilon}_7 \quad (7.42)$$

şeklinde tanımlansın. Bunun eşleneği ise;

$$\square^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\epsilon}_5 - \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\epsilon}_6 - \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\epsilon}_7 \quad (7.43)$$

olacaktır. Buna göre d'Alembert işlemcisi olarak bilinen ifadesi;

$$\square\square^* = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (7.44)$$

dir. Burada  $\Delta$ ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.45)$$

Laplacian'a karşı gelmektedir. Genel hiperbolik oktonyonik alan daha önce Dirac denklemi yazılırken tanımlandığı gibi;

$$\psi = (\psi_4 + \psi_1 \mathbf{e}_1 + \psi_2 \mathbf{e}_2 + \psi_3 \mathbf{e}_3 - \psi_4' \boldsymbol{\varepsilon}_4 - \psi_1' \boldsymbol{\varepsilon}_5 - \psi_2' \boldsymbol{\varepsilon}_6 - \psi_3' \boldsymbol{\varepsilon}_7) \quad (7.46)$$

alınabilir [21]. Genel hiperbolik oktonyon potansiyeli;

$$P = (\varphi_2 + A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3 + \varphi_1 \boldsymbol{\varepsilon}_4 - A_x' \boldsymbol{\varepsilon}_5 - A_y' \boldsymbol{\varepsilon}_6 - A_z' \boldsymbol{\varepsilon}_7) \quad (7.47)$$

ve genel hiperbolik oktonyonik kaynak;

$$J = \frac{4\pi}{c} \left( c\rho' + J_x \mathbf{e}_1 + J_y \mathbf{e}_2 + J_z \mathbf{e}_3 + c\rho \boldsymbol{\varepsilon}_4 - J_x' \boldsymbol{\varepsilon}_5 - J_y' \boldsymbol{\varepsilon}_6 - J_z' \boldsymbol{\varepsilon}_7 \right) \quad (7.48)$$

olarak tanımlanırsa, genel Proca alanı hiperbolik oktonyonlarla;

$$\square \psi + k_0^2 P = J \quad (7.49)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$P = \square \psi \quad (7.50)$$

tanımlamaktadır. Burada  $k_0$  seçilen potansiyele göre oluşan fiziksel bir sabittir.

Bileşenlerin açıkça yazılmasıyla eşitlik (7.49) ile verilen genel Proca alan denklemleri,

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_4}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1'}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2'}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3'}{\partial z} + k_0^2 \varphi_2 = 4\pi \rho' \quad (7.51.1)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3'}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2'}{\partial z} + k_0^2 A_x = \frac{4\pi}{c} J_x \quad (7.51.2)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4'}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1'}{\partial z} + k_0^2 A_y = \frac{4\pi}{c} J_y \quad (7.51.3)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4'}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2'}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y} + k_0^2 A_z = \frac{4\pi}{c} J_z \quad (7.51.4)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_4'}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + k_0 \varphi_1 = 4\pi \rho \quad (7.51.5)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - k_0 A_x' = -\frac{4\pi}{c} J_x' \quad (7.51.6)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2'}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - k_0 A_y' = -\frac{4\pi}{c} J_y' \quad (7.51.7)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - k_0 A_z' = -\frac{4\pi}{c} J_z' \quad (7.51.8)$$

olarak elde edilir.

Hiperbolik Proca-Maxwell denklemlerini tanımlayabilmek için, sırasıyla hiperbolik dört potansiyel;

$$A = A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3 + \phi \boldsymbol{\varepsilon}_4 \quad (7.52)$$

ve hiperbolik oktonyon dört akım;

$$J = \frac{4\pi}{c} (J_x \mathbf{e}_1 + J_y \mathbf{e}_2 + J_z \mathbf{e}_3 + c\rho) \quad (7.53)$$

olarak tanımlanırsa;

$$F = \square A \quad (7.54)$$

denklemini hiperbolik oktonyon elektromanyetik alanını belirtir. Eşitlik (7.54) açık ifadeyle

$$\begin{aligned} \square A = & \left( -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \mathbf{e}_1 + \left( -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \mathbf{e}_2 + \left( -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_3 \\ & + \left( -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \left( -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\ & + \left( -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_7 \end{aligned} \quad (7.55)$$

şeklindedir. Bu denklemde;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Lorentz şartı göz önüne alınırse hiperbolik oktonyonlarla elektromanyetik alan ifadesi;

$$F = E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3 - B_x \boldsymbol{\varepsilon}_5 - B_y \boldsymbol{\varepsilon}_6 - B_z \boldsymbol{\varepsilon}_7 \quad (7.56)$$

olarak elde edilir. Böylece Proca- Maxwell denklemleri tek bir hiperbolik oktonyon denklemiyle;

$$\blacksquare \mathbf{F} + m_\gamma^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (7.57)$$

Ya da bileşenler cinsinden

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (7.57.1)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + m_\gamma^2 A_x = \frac{4\pi}{c} J_x \quad (7.57.2)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} + m_\gamma^2 A_y = \frac{4\pi}{c} J_y \quad (7.57.3)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_\gamma^2 A_z = \frac{4\pi}{c} J_z \quad (7.57.4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + m_\gamma^2 \phi = 4\pi \rho \quad (7.57.5)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (7.57.6)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (7.57.7)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (7.57.8)$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki denklemlerde  $m_\gamma=0$  alındığında eşitlik (7.57) iyi bilinen Maxwell denklemlerini verecektir.

## 8. DIRAC DENKLEMİ

Relativistik kuantum mekaniğindeki Einstein'nın kütle enerjinin yasası Klein-Gordon denkleminde verilir. Clifford uzay zamanda Klein-Gordon operatörü

$$\mathbf{d}^2 - \eta m^2 \quad (8.1)$$

ile tanımlanır. Burada  $\mathbf{d}$  diferansiyel operatörü eşitlik (2.49)'daki gibi

$$\mathbf{d} = \partial_\mu \mathbf{e}_\mu \quad (8.2)$$

olarak tanımlanmaktadır. Böylece kütle-enerji korunumu;

$$(\mathbf{d}^2 - \eta m^2)\psi = 0 \quad (8.3)$$

ile ifade edilir. Bu eşitliğe *Klein-Gordon denklemi* denir. Dirac denklemi, kütle enerji işlemcisinin karekökünü relativistik dalganın momentum operatörü olarak kabul eder ve

$$\mathbf{D}\psi = m\psi \mathbf{k} \quad (8.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\mathbf{D}$ , Clifford lineer diferansiyel işlemcidir ve  $\mathbf{k}$  sabit Clifford elemandır. Bu denklem aşağıdaki varsayım listesine göre yapılandırılacaktır:

- a)  $\psi$  Klein-Gordon denkleminin uyar,
- b)  $\psi$  genelleştirilmiş bivektör alandır,
- c)  $\mathbf{e}_k$  uzay vektörüne göre tercihli yön yoktur,
- d)  $\mathbf{D}$  lineer operatör uzay zaman durumundan bağımsızdır.

Eşitlik (8.4)'e  $\mathbf{D}$  uygulanınca;

$$\mathbf{D}^2\psi = \mathbf{D}(m\psi \mathbf{k}) = m^2\psi \mathbf{k} \quad (8.5)$$

sonucunu verir. (a) ve (d) varsayımından  $\mathbf{D}^2 = \mathbf{d}^2$  ve  $\mathbf{k}^2 = \eta$  olduğu varsayılacaktır. Bundan dolayı  $\mathbf{D}$  lineer diferansiyeli;

$$\mathbf{D} = \sum_\mu \mathbf{e}_\mu \partial^\mu \quad (8.6)$$

ile ifade edilir. (c) varsayımını içeren  $\mathbf{k}$  seçimleri;

$$\eta = 1 \text{ için, } \pm 1, \pm i\mathbf{e}_{0123}, \pm i\mathbf{e}_0 \text{ ve } \pm i\mathbf{e}_{123},$$

$$\eta = -1 \text{ için } \pm i, \pm i\mathbf{e}_{0123}, \pm i\mathbf{e}_0 \text{ ve } \pm i\mathbf{e}_{123}$$

alınabilir.  $\mathbf{k}$  skaler ya da sanki skaler seçilirse;

$$\mathbf{d}\psi = m\psi \mathbf{k} \quad (8.7)$$

Dirac denklemi için  $\psi = 0$  olan tek çözüm vardır. Anlamli bir çözüm için  $\mathbf{k}$ 'nın  $\pm i\mathbf{e}_0$  ya da  $\pm i\mathbf{e}_{123}$  olması gerekir. Böylece dört olası seçim oluşur. Herhangi genelleştirilmiş dalga denklemi;

$$\Psi = e_0 \vec{\psi}_1 + e_{123} \vec{\psi}_2 \quad (8.8)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\vec{\psi}_1$  ve  $\vec{\psi}_2$  vektördür.  $k$  seçimi alternatiflik sağlar ancak  $\Psi$  temsili aynıdır.  $k = -ie_0$  alınırsa, Dirac denklemi;

$$i d\Psi = m\Psi e_0$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemin zaman yönlü seçildiği düşünülebilir. Bununla birlikte bu Einstein kütle-enerji eşitliğinin bir temsilidir, yani hem  $i\partial^0$  enerji operatörü hem de durgun enerji  $e_0$  zaman vektörüyle açıklanır [42].

### 8.1. Dirac Denkleminin Düzlem Dalga Çözümleri

Dirac denklemi için,  $\Psi = Ae^{i(\omega t - kx)}$  şeklindeki x-ekseni boyunca ilerleyen düzlem dalga çözümlerini araştıralım.  $\Psi$ , eşitlik (8.7)'deki Dirac denkleminde yerine yazılırsa;

$$-(\omega e_0 - k e_1) A e_0 = m A \quad (8.9)$$

elde edilir. Burada,

$$A = a + b e_{23} + c e_{0123} + d e_{01} \quad (8.10)$$

olduğu varsayılır ise eşitlik (8.9)

$$-(\omega e_0 - k e_1)(a + b e_{023} + \eta c e_{123} + \eta d e_1) - m A = 0$$

olur. Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{aligned} \eta \omega a + \eta \omega b e_{23} - \eta \omega c e_{0123} - \eta \omega d e_{01} - k a e_{01} - k b e_{0123} + k c e_{23} \\ + k d - m a - m b e_{23} - m c e_{0123} - m d e_{01} = 0 \end{aligned} \quad (8.11)$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (8.11)'in çözümü için farklı tür terimlerin katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşit olacağından;

$$\eta \omega a + k d - m a = 0 \quad (8.12)$$

$$-\eta \omega d - k a - m d = 0 \quad (8.13)$$

$$\eta \omega b + k c - m d = 0 \quad (8.14)$$

$$-\eta \omega b + k c - m b = 0 \quad (8.15)$$

yazılır. Bu denklem sisteminin çözümü aşağıda belirtilen matris eşitlikten bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} \eta\omega - m & k & 0 & 0 \\ -k & \eta\omega - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta\omega - m & k \\ 0 & 0 & -k & \eta\omega - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Determinant sıfır ise, bu sistem çözüme sahiptir. Yani;

$$(-\omega^2 + m^2 + k^2)^2 = 0$$

veya

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 + m^2} . \quad (8.17)$$

Eşitlik (8.12) ve eşitlik (8.13)'den  $a$  ve  $d$  katsayılarından biri bulunur ve diğer eşitliğe yazılınca öbür katsayı elde edilir.  $d$  katsayısı bilindiğine göre eşitlik (8.14) ve (8.15)'te yerine yazılır. Böylece iki denklem ve iki bilinmeyenli bir sistemde bir önceki işlemler tekrar edilerek  $b$  ve  $c$  katsayıları bulunur. Bu katsayılar,

$$\begin{bmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\eta\omega + m)a_1 \\ ka_1 \\ (\eta\omega + m)a_2 \\ -ka_2 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Böylece çokluvektör dalga genliği;

$$\begin{aligned} A &= a_1(-(\eta\omega + m) + ke_{01}) - a_2(ke_{0123} - (\eta\omega + m)e_{23}) \\ &= a_1e_0((\omega + \eta m)e_0 + ke_{01}) + a_2e_{123}(ke_0 - (\eta\omega + m)e_1) \end{aligned} \quad (8.18)$$

olarak bulunur.  $A$ 'nın diğer olasılığı için;

$$A = ae_{02} + be_{03} + ce_{31} + de_{12} \quad (8.19)$$

alınsın. Bu ifade eşitlik (8.7)'de yerleştirilince;

$$\begin{aligned} (\omega e_0 + ke_1)(a\eta e_2 + b\eta e_{031} + de_{012}) - mA &= 0 \\ -\eta\omega ae_{02} - \eta\omega be_{03} + \eta\omega ce_{31} + \eta\omega de_{12} + \eta k a e_{12} - \eta k b e_{31} \\ + \eta k c e_{03} - \eta k d e_{02} - m a e_{02} m b e_{03} - m c e_{31} - m d e_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

elde edilir. Farklı türde terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$-\eta\omega a - \eta k d - m a = 0 \quad (8.21)$$

$$\eta\omega d + \eta k a - m d = 0 \quad (8.22)$$

$$-\eta\omega b + \eta k c - m b = 0 \quad (8.23)$$

$$\eta\omega c - \eta k b - m c = 0 \quad (8.24)$$

denklem sistemi oluşur. Böylece lineer denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki matris eşitliğinden yararlanılır.

$$\begin{bmatrix} -\eta\omega - m & -\eta k & 0 & 0 \\ \eta k & \eta\omega - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta\omega - m & +\eta k \\ 0 & 0 & -\eta k & \eta\omega - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

Bu sistemde determinant sıfır yani;

$$(-\omega^2 + m^2 + k^2)^2 = 0$$

ise ya da daha anlamlı bir gösterimle;

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 + m^2} \quad (8.26)$$

ise, sistem çözüme sahiptir. Yukarıdaki işlemler tekrar edilerek eşitlik (8.19)'un katsayıları;

$$\begin{bmatrix} a \\ d \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_3 \\ -(\omega + \eta m)a_3 \\ ka_4 \\ (\omega + \eta m)a_4 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

olarak bulunur. Böylece Dirac dalga genliği,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_3(k\mathbf{e}_{02} - (\omega + \eta m)\mathbf{e}_{12}) + a_4(k\mathbf{e}_{03} + (\omega + \eta m)\mathbf{e}_{31}) \\ &= k\mathbf{e}_0(a_3\mathbf{e}_2 + a_4\mathbf{e}_3) + (\eta\omega + m)\mathbf{e}_{123}(a_4\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (8.28)$$

olacaktır.

$x$ -ekseni boyunca yayılan genel düzlem dalga eşitlik (8.18) ve eşitlik (8.28) ile ifade edilen dalgaların toplamı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \Psi &= \{ \mathbf{e}_0 [a_1((\omega + \eta m)\mathbf{e}_0 + k\mathbf{e}_1) + k(a_3\mathbf{e}_2 + a_4\mathbf{e}_3)] \\ &\quad + \mathbf{e}_{123} [a_2(k\mathbf{e}_0 - (\eta\omega + m)\mathbf{e}_1) \\ &\quad + (\eta\omega + m)(a_4\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3)] \} e^{i(\omega y - kx)} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Dalga denkleminde  $\omega$  pozitif ya da negatif olabileceğinden, burada sekiz bağımsız çözüm vardır. Eşitlik (8.29)'daki dalga denkleminin normu

$$|\Psi|^2 = 2\omega(\omega + \eta m)(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2) \quad (8.30)$$

sonucunu verir [42].

## 9. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR



Clifford cebri William K. Clifford tarafından geometrik cebirleri bir tek geometrik cebirde birleştirmek fikrinden ortaya çıktığında beklenen ilgiyi gormemiştir. Ancak 1930'larda Clifford cebrinin Dirac matrislerinin oluşturulmasıyla bu cebirin fizikte önemli uygulama alanı oluşturulmuştur. Fizikteki tüm konuları tek bir matematik diliyle anlatabilme fikriyle yola çıkan bilim adamları bu cebirin Clifford cebri olduğunu gormuşlerdir. Yüksek boyutlu yapısı sayesinde fizikteki birçok teori, Clifford cebri ile genelleştirilmiştir.

Bu tezde ilk olarak Clifford cebrinin yapısını oluşturan geometrik kavramlar tanıtılmıştır. Cebirde daha önceden vektörler arasında bilinen skaler çarpım yanı sıra i ve dış çarpım tanımlanarak, bu çarpımlarla oluşturulan geometrik anlamlar verilmiştir. Geometrik çarpımla da Clifford cebrinin oluştuğu anlatılmıştır. Daha sonra farklı uzaylarda ve temsillerde Clifford cebir tanımları verilmiştir. Bu cebirlerin izomorf olduğu cebirler gösterilmiştir.

Fizikte kullanılan matematiksel yöntemlerden biri de Fourier dönüşümleridir. Bu dönüşümler fizikte; ısı denklemi, dalga denklemleri gibi fiziksel denklemleri zmede oldukça başarılıdır. Çalışmamızda,  $Cl_3$  Clifford cebrinde Fourier dönüşümleri ve bu dönüşümlerin özellikleri anlatılmıştır. Elde edilen bu dönüşüm zellikleri Fourier dönüşümlerine oldukça benzemektedir. Aynı zamanda bu dönüşümler; çokluvektör alanları içeren problemlerin üzümlerinde kullanılabilir.

Mekanik, fiziğin en eski dalıdır ve Newton yasaları adını alan üç temel yasa üzerine kurulmuştur. 19.yüzyılda d'Alambert, Lagrange, Hamilton Jacobi olmak üzere pek çok araştırmacının katkılarıyla sistematik bir yapıya kavuşturulmuştur. 19. yüzyılda geliştirilen bu yapıya *analitik dinamik* ya da *analitik mekanik* denir. Analitik dinamik yöntemlerinden biri olan Hamilton yönteminden başlayarak, Hamilton denklemlerini zebilmek için geliştirilen Poisson parantezleri sanki Euclidean uzayda tanımlı Clifford cebri ile verilmiştir. okluvektr fonksiyonu olarak verilen yörüngelerin hareket denklemlerinin bu yöntem kullanılarak nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir.

Clifford cebirlerinin en önemli faydalarından biri de Maxwell denklemlerinin temsilinde ortaya çıkmaktadır. Bu yapı kullanılarak dört Maxwell eşitliğini tek bir Clifford denklemi ile vermek mümkündür. Farklı boyutlardaki ve

farklı Clifford cebirleri temsilleriyle Maxwell denklemlerini yazmanın mümkün olduğu gösterilmiştir. Elektromanyetizma için enerji korunum denklemi Lagrange yoğunluğu ve  $Cl_3$ 'de yazılan elektromanyetik bivektör alanın ayar dönüşümüyle elde edilmiştir. Elde edilen sonuç, diğer yöntemlerle elde edilen ya da önerilen sonuçların aynısıdır. Ancak son yıllarda Ivezic'in iddaa ettiği elektromanyetik teorinin Lorentz dönüşümüne uyması için dört boyutlu yani  $Cl_4$  Clifford cebri yazılmış olması ya da tensör cebri ile ifade edilmesi gerekliliğine uymamaktadır. Ancak bu yöntemin ayar tipi değiştirildiğinde ya da  $Cl_4$  Clifford cebri hacim elemanı zaten değişeceğinden aynı sonucu verebileceği düşünülmektedir. Bu yeniden çalışılabilir. Bu çalışmadan sonra, momentum ve açıl momentumun korunum denklemlerinin benzer şekilde elde edilip edilemeyeceği araştırılabilir.

Einstein'in görelilik kuramı sonucu ortaya çıkan Lorentz dönüşümleri Clifford cebri verilmiştir.

Tezde yer alan Dirac denklemi, daha önce Clifford cebri ile Dirac denklemini oluşturma koşulundan farklı koşullarda elde edilmiştir. Dalga fonksiyonunun çokluvektör olabileceği gösterilmiştir. Dalga normunun skaler oluşu, bu cebirde yapılan kabullenmelerin doğru olabileceğini gösterir.

Clifford cebri benzer yapıya sahip hiperbolik oktonyonlara da çalışılmıştır. Bu cebri matematiksel olarak klasik elektrodinamiğin ve Dirac denklemlerinin ifade edildiği oktonyonların sekiz parametresinin uzay-zaman koordinatı, momentum ve enerji olarak yorumlandığı bölüntülü oktonyonlar ile birleşimli olmayan kuantum mekaniğinin tartışıldığı oktonyon cebri benzediği görülmüştür. Kuantum alan teorisinde genelleştirilmiş Maxwell denklemleri hiperbolik oktonyon cebri kullanılarak formüle edilmiştir. Bu göstermektedir ki tek bir homojen olmayan multivektörel denklem, teoriyi tanımlamakta yeterlidir. Elde edilen sonuçlar bilinen Proca-Maxwell denklemleriyle aynıdır fakat kapalı gösterime sahiptir. Bu çalışmanın devamında; hiperbolik oktonyonların matris temsilleri araştırılabilir ve fizikte olası uygulama alanları incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Hestenes, D., *Space-Time Algebra*, Gordon and Breach Science Publisher, New York 1966.
- [2] Hestenes, D. ve Sobczyk G., *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland 1987.
- [3] Kılıç, A., *Platonik Katuların ve Moleküllerin Clifford Cebiriyle İncelenmesi*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir 2004.
- [4] Pokorny, A., et al, *On the generation of point groups in space of various dimensions*, Spectrochimica Acta Part A **57**,1931-1939 2001.
- [5] Kılıç, A., Özdaş, K., Tanışlı M., *An investigation of symmetry operations with Clifford algebra*, Acta Physica Slovaca, **54**(3), 221-232 2004.
- [6] <http://casa.colorado.edu/~ajsh/sr/hypercube.html>
- [7] Hestenes, D., *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer Academic Publisher 1990.
- [8] Abou El Dahab, E.T, *A formulation of Hamiltonian mechanics using geometric algebra*, Adv. appl. Clifford alg., **10**(2), 217-223 2000.
- [9] Ulrych, S., *Spinor in the hyperbolic algebra*, Phys. Lett., B **632** 417-421 2006. arxiv: math-ph/0602003 v1 2006.
- [10] Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [11] Muses, C., *Hypernumbers-II. Further concepts and computational applications*, Applied Mathematics and Computation **4**, 45-66 1978.
- [12] Muses, C., *Hypernumbers and quantum field theory with a summary of physically applicable hypernumber arithmetics and their geometries*, Applied Mathematics and Computation **6**, 63-94 1980.
- [13] Carmondy, K., *Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions*, Applied Mathematics and Computation **88**, 47 -72 1988.
- [14] Carmondy, K., *Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions-Further results*, Applied Mathematics and Computation **84**, 27 - 47 1997.
- [15] Gogberashvili, M., *Octonionic electrodynamics*, Journal of Physics A-Mathematical and General **39**(22), 7099-7104, 2006.

- [16] Schray, J., Manogue, C. A., *Octonionic representations of Clifford algebras and triality*, Found. Phys. **26**(1), 17-70 1996.
- [17] Dzhunushaliev, V., *A Non- associate quantum mechanics*, Found. Phys. Lett., **19**, 157-167 2006. arXiv:hep-th/0502216 2005.
- [18] Dzhunushaliev, V., *Hamilton Equation in a non-associative quantum theory*, arxiv: hep-th/060247 v1 2006.
- [19] Gogberashvili, M., *Observable algebra*, arxiv: hep-th/0212251 v3 2003.
- [20] Gogberashvili, M., *Octonionic version of Dirac equations*, Int. J. Mod. Phys. A, **21**, 3513-3524 2006. arXiv: hep-th/0505101 200?.
- [21] Köpflinger, J., *Dirac equation on hyperbolic octonions*, Appl. Math. and Comp., **188**(1), 443-446 2006.
- [22] Xueqian, Y., et.al., *Clifford algebra and four-dimensional Lorentz transformation*, Adv. appl. Clifford alg. **12**(1), 13-19 2002.
- [23] Li, W. ve Yang F., *N-dimensional space-time unit spheres and Lorentz transformation*, Adv. appl. Clifford alg. **13**(1), 57-64 2003.
- [24] Scheiber, R., *Generalized Lorentz transformation*, Adv. appl. Cliff. alg. **9**(2), 287-308 1999.
- [25] Chernitskii, A. A., *Born-Infeld electrodynamics: Clifford number and spinor representation*, Int. J. Math. Sci., **31**, 77-84, 2002. arxiv: hep-th/0009121v3 2002.
- [26] Chernitskii, A. A., *Source function and dyon's field in Clifford number representation for electrodynamics*, Adv. Appl. Clifford Alg. **13**(2), 219-230 2003.
- [27] Chernitskii, A. A., *Basic systems of orthogonal founctions for space-time multivectors*, Adv. appl. Clifford alg., **15**(1), 27-53, 2005. arxiv: hep-th/0501161v2 2005.
- [28] Ivezić, T., *Invariant relativistic electrodynamics. Clifford algebra approach*, arxiv: hep-th/0207250v2 2002.
- [29] Ivezić, T., *The proof that Maxwell equations with the 3D E and B are not covariant upon the Lorentz transformations but upon the standard*

- transformations. The new Lorentz invariant field equations*, Found. Phys. **35**, 1585-1615 2005.
- [30] Cafaro, C. ve Ali S. A., *The spacetime algebra approach to massive monopoles*, Adv. appl. Clifford alg. **17**, 23-36, 2007.
- [31] Ulrych, S., *Representations of Clifford algebras with hyperbolic numbers*, arxiv: math-ph/0707.3981v1 2007.
- [32] Ulrych, S., *Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers*, Phys. Lett. B **625**, 313-323 2005.
- [33] Varlamow, V.V., *Modulo 2 periodicity of complex Clifford algebras and electromagnetic field*, arxiv: hep-th/9709112v1 1997.
- [34] Wei, Z., ve Xuegang, Y., *Some physics questions in hyperbolic complex space*, Adv. appl. Clifford alg. **17**, 137-144, 2007.
- [35] Xuegang, Y. ve ark., *Clifford algebraic spinor and the Dirac wave equations*, Adv. appl. Clifford alg., **11**(1), 27-38, 2001.
- [36] Zheng, Z. and Xuegang, Y., *Hyperbolic Schrödinger equation*, Adv appl. Clifford alg., **14**(1), 207-213, 2004.
- [37] Ulrych, S., *Poincaré mass operator in terms of a hyperbolic algebra*, Phys. Lett B, **612**, 89-91, 2005.
- [38] Varlamov, V. V., *Physical fields and Clifford algebras*, arxiv: hep-th970905 v1 1997.
- [39] Xuegang, Y. ve ark., *The four-dimensional hyperbolic spherical harmonics*, Adv appl. Clifford alg., **10**(2), 163-171 2000.
- [40] Almeida, J. B., *The hidden geometric character of relativistic quantum mechanics*, J. Math. Phys. **49**(1), 012301, 2007. arxiv: quant-ph/0606123v3 2007.
- [41] Gsponer, A., ve Hurni, J. P., *Comment on formulating and generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's Equations with biquaternions or Clifford numbers*, arxiv: math-ph/ 020104v1 2002.
- [42] Joyce, W. P., *Dirac theory in spacetime algebra: I. The generalized bivector Dirac equation*, J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 1991-2005 2001.

- [43] Socolovsky, M., *On the geometry of spin  $\frac{1}{2}$* , Adv. appl. Clifford alg., **11**(1), 109-127 2001.
- [44] Hestenes, D., *Geometry of Dirac theory, a symposium on the mathematics of physical space-time*, Facultad de Quimica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico City, 67-96 1981.
- [45] Hestenes, D., *Spin and uncertainty in the interpretation of quantum mechanics*, Am. J. Phys. **47**(5), 399-415 1979.
- [46] Hestenes, D., *Observables, operators, and complex numbers in Dirac theory*, J. Math. Phys., **16**, 556-572 1975.
- [47] Bayro-Corrochano, E. ve ark., *Covariances of the Dirac and Maxwell equations*, Adv. appl. Clifford alg., **12**(2), 91-108 2002.
- [48] Vlasov, A.Y., *The Dirac equation and general linear transformations of coordinate systems*, arxiv: math-ph/040346v2 2004.
- [49] Piña, E., *Vector representation of interacting Dirac equation*, Int. J. Theo. Phys. **40**(1), 211-217 2001.
- [50] [http://en.wikipedia.org/wiki/Clifford\\_algebra](http://en.wikipedia.org/wiki/Clifford_algebra)
- [51] Xuegang, Y., Xueqian, Y., *Geometrical interpretation of uncertainty relation in Minkowski space*, Adv. appl. Clifford alg., **13**(1), 65-70 2003.
- [52] Baugh, J., ve ark., *Clifford Algebra as quantum language*, J. Math. Phys., **42**, 1489-1500 2001. arxiv: hep-th/70009086v1 2000.
- [53] Havel, T. F., ve ark., *Interaction and entanglement in the multiparticle spacetime algebra*, arxiv: quant-ph/0106063v1 2001.
- [54] Francis, M., Ve Kosolowsky, A., *Geometric algebra techniques for general relativity*, Annals of Physics, **311**, 459-502 2004.
- [55] Girard, P. R., *Einstein equations and Clifford algebra*, Adv. appl. Clifford alg. **9**(2), 225-230 1999.
- [56] Pezzagla, Jr, W. M., *Dimensionally democratic calculus and principles of polydimensional physics*, arxiv: gr-qc/9912025v1 1999.
- [57] Pavšič, M., *Clifford space as arena for physics*, Found. Phys., **33**, 1277-1306 2003. arxiv: gr-qc/0211085v2 2003.

- [58] Castro, C., *On modified Weyl- Heisenberg algebras, noncommutativity, matrix-value Planck constant and QM in Clifford algebras*, J. Phys. A: Math. Gen., **39**, 14205-14229 2006.
- [59] Pavšič, M., *Clifford space as generalization of spacetime: prospects for QFT of point particles and strings*, Found. Phys., **35**, 1617-1642 2005. arxiv: hep-th/0501222v1 2005.
- [60] Pavšič, M., *Clifford algebra, geometry and physics*, arxiv: gr-qc/0210060v1 2002.
- [61] Pavšič, M., *Clifford algebra based polydimensional relativity and relativistic dynamics*, Found. Phys., **31**, 1185-1209 2001. arxiv: hep-th/0011216v1 2000.
- [62] Mawardi, B., Ve Hitzer, E., *Clifford Fourier transformation and uncertainty principle for the Clifford geometric algebras  $Cl_{3,0}$* , Adv. appl. Clifford alg., **16**, 41-61 2006.
- [63] Baylis, W. E., *Clifford Algebras with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser Boston, USA 1996.
- [64] Baylis, W. E., *Electrodynamics a Modern Geometric Approach*, Birkhäuser Boston, USA 1999.
- [65] Jancewicz, B., *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, 1988.
- [66] Snygg, J., *Clifford Algebra a Computational Tool for Physicists*, Oxford University Press, Oxford 1997.
- [67] Doran, C., Lasenby, A., *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 2003.
- [68] Ablamowicz, R., *Lectures on Clifford Geometric Algebras*, 6th Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Tennessee 2002.
- [69] Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [70] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (second Edition), 1962.

- [71] Bogoliubov, N. N., Ve Shirkov, V., Introduction to the Theory of Quantized Fields, John Wiley&Sons, New York 1980.
- [72] [www.grassmannalgebra.info/grassmannalgebra/book/index.htm](http://www.grassmannalgebra.info/grassmannalgebra/book/index.htm)
- [73] Dorst, L., Mann, S., *Geometric algebra: a computational framework for geometrical applications (partI: algebra)* 2007.
- [74] Vlasov, A.Y., *Clifford algebras and universal set of quantum gates*, Physical Review A, **63**, 054302 2001.
- [75] Köplinger, J., *Gravity and electromagnetism on conic sedenions*, Appl. Math. and Comp., **188**(1), 948-953 2006.
- [76] Köplinger, J., *Hypernumber and relativity*, Appl. Math. and Comp., **188**(1), 954-969 2006.
- [77] Köplinger, J., *Signature of gravity in conic sedenions*, Appl. Math. and Comp., **188**(1), 942-947 2006.
- [78] Nagem, R. J., ve ark. *Gauge transformations and local conservation equation for linear acoustics and for Maxwell's equations*, Il Nuovo Cimento, **113B**(12), 1509-1517 1998.
- [79] Ward, J. P., *Quaternions and Cayley Numbers:Algebra and Applications*, Dordrecht: Kluwer Academic, 1997.
- [80] Özdaş, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Fen Fakültesi Yayınları, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir 1995.