(SPLIT) BÖLÜNTÜLÜ KUATENİYONLARLA KUANTUM MEKANİĞİ

HÜLYA ÖZÇELİK

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Ağustos–2007

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Hülya Özçelik'in **"(Split) Bölüntülü Kuaterniyonlarla Kuantum Mekaniği"** başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 20.07.2007 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Yard. Doç. Dr. MURAT TANIŞLI**	**…………**
Üye	**: Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ**	**…………**
Üye	**: Yard. Doç. Dr. ALİ ÇETİN**	**…………**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……………… tarih ve ………… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

(SPLIT) BÖLÜNTÜLÜ KUATENİYONLARLA KUANTUM MEKANİĞİ

Hülya ÖZÇELİK

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI

2007, 38 sayfa

Bu çalışmada kuaterniyonlar ve (split) bölüntülü kuaterniyonların genel bir tanımı yapıldıktan sonra, bunlara ait özellikleri ve 2×2 matris gösterimi tanımlanmıştır. Bölüntülü kuaterniyon bazları, 2×2 matris formu kullanılarak Pauli-spin matrislerine eşitlenmiştir. Daha sonra Pauli spinörlerinin elde edilmesi, bölüntülü kuaterniyonlara ait gösterimler kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Göreceli olmayan kuantum teorisi bölüntülü kuaterniyonlar aracılığıyla ele alınmıştır. Hatta sonuçta Pauli operatörleri ve Pauli gözlemlenebilirliği bölüntülü kuaterniyonlar yardımıyla ifade edilmiş ve spin vektörü bölüntülü kuaterniyonlar kullanılarak tanımlanmıştır. Dönmeler bölüntülü kuaterniyonlarla gerçekleştirilirken (spacelike) uzayımsı kuaterniyonlar kullanılabilmektedir. Sonuçta manyetik alandaki parçacığın hareketi Hamiltonyen operatörü ve bölüntülü kuaterniyonlar aracılığıyla elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyon, Bölüntülü (split) kuaterniyon, Göreceli olmayan kuantum teorisi, manyetik alandaki parçacık, spinör, Pauli-spin matrisleri.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

QUANTUM MECHANICS BY SPLIT QUATERNIONS

Hülya ÖZÇELİK

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Physics Program

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat TANIŞLI

2007, 38 pages

In this study, after defining of quaternion and split quaternion, their matrix representations and properties are defined. The basic of split quaternion are equalized to Pauli-spin matrices. Non relativist quantum theory is discussed by split quaternions. Also, Pauli operators and Pauli observable are defined by split quaternions and spin vector is represented by split quaetrnions.

Timelike quaternions can be used for defining of rotations. At the end of study, the action of particale in magnetic field is attained by Hamilton's operator and split quaternions.

Keywords: Quaternion, split quaternion, Non-relativistic quantum theory, particle in magnetic field, spinor, Pauli-spin matrices.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında, bilgi ve birikiminden daima yaralandığım,
yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam,
Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI'ya
teşekkür ederim.
Ayrıca hayatım boyunca beni devamlı destekleyen,
sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan
Aileme
sonsuz şükranlarımı sunarım.

Hülya ÖZÇELİK
Ağustos-2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

c	boşluktaki ışık hızı
$\mathbf{e}_{\mathrm{i}}$	kuaterniyon bazları
$\mathbf{q}$	kuaterniyonlar
q	reel sayılar
$\vec{\mathrm{a}}$	vektör
$\boldsymbol{e}_{\mathrm{i}}$	bölüntülü kuaterniyonun bazları
$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$	bölüntülü kuaterniyon bazlarının matris gösterimi
$\boldsymbol{q}$	bölüntülü kuaterniyonlar
$\mathbf{A}$	çoklu vektör
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{k}}$	pauli-spin matrisleri
I	birim matris
$\times$	vektörel çarpım
$\mathbf{q}^{-1}$	kuaterniyon tersi
$\overline{\mathbf{q}}$	kuaterniyon eşleniği
$N_{\mathbf{q}}$	kuaterniyon normu
$\overline{\boldsymbol{q}}$	bölüntülü kuaterniyon eşleniği
$N_{\boldsymbol{q}}$	bölüntülü kuaterniyon normu
$\boldsymbol{q}^{-1}$	bölüntülü kuaterniyon tersi
$\langle\ \rangle_{\boldsymbol{L}}$	iç çarpımı
$\times_{\boldsymbol{L}}$	lorentzian vektörel çarpımı
$\dagger$	hermitik eşlenik

~	kompleks eşlenik
STA	(spacetime) uzay-zaman cebri
i	$\sqrt{-1}$
$\vec{V}_s$	spin vektörü
μ	manyetik moment
γ	jiromanyetik oran
$\vec{B}$	manyetik alan vektörü

1. GİRİŞ

Burada kuaterniyon gösterimi için, kompleks sayıların tanımlanmasını ve gösterimini genişletmede William Rowan Hamilton tarafından yapılan çalışmanın bir kısmının sonucunu anlatacağız. Reel sayıları, bir boyutlu olan hiper-kompleks sayılar olarak düşünebiliriz. Bu reel sayılar, herhangi bir toplam ve çarpım altında cisim özelliklerini sağlarlar. Herhangi bir kompleks sayıyı ise 2 boyutlu olan hiper-kompleks sayı olarak düşünebiliriz ve reel sayıları imajiner kısmı sıfır olan kompleks sayıların bir alt kümesi olarak ele alabiliriz. Hatta kompleks sayılarda cisim özelliklerini de sağlarlar.

Boyutu 2'den büyük hiper–kompleks sayıların herhangi bir kümesi ise cisim özelliklerini sağlamaz. Bu gerçek; $\mathcal{R}^2$ de karmaşık sayıların dereceli olmasını ileri süren yüksek derece gelişimini araştıran matematikçileri rahatsız etmiştir.

Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerinde çalışmış ve nihayet 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan $(\mathbf{q} = a + \mathbf{e}_1 b + \mathbf{e}_2 c)$ üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaşmıştır. Vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. 1843'de bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özelliğinin gerçekleşmediğini anladı ve çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçerek $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımladı. Böylece Hamilton, Kuaterniyon ismini verdiği 4-boyutlu olan sözde hiper-kompleks sayıyı keşfetmiştir. Bölüntülü kuaterniyonlar ise 1849'da James Cockie tarafından ileri sürülmüştür. Hamilton ve James Cockie, çarpım operatörleri ile donatılmış 4 boyutlu gerçek vektör uzayı oluşturmuşlardır. Kuaterniyondan farklı olarak, bölüntülü kuaterniyonların böleni sıfır olabilmektedir [1, 5].

Kuaterniyonlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaterniyonlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaterniyonlar da iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılarda kuaterniyonların bir alt kümesi olmalıdır. Bu sonuç, kuaterniyonların hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir [2].

Fizikte ölçülebilen her şey reel olmak zorundadır. Bu nedenle reel sayılar bilimin doğuşundan itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur. Öte yandan kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özellikle devre analizlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Ne yazık ki bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki boyut getirir. 3-boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır. Fakat vektörlerin bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülmektedir. Kuaterniyonlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, bunlara ilaveten bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut katar. Kuaterniyonlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaterniyon cebri, bileşimli fakat değişimli olmayan $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ gibi dört elemandan oluşur ve bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır [1].

Kuaterniyon cebrinin keşfedildiği yıllarda A. Carley, K. Clifford ve J.J. Slyvester gibi İngiliz matematikçiler ve elektromanyetik teoriyi yeniden inşa eden J. C: Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler bu konuya önemli katkıda bulunmuşlardır. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebrini geliştiren fizikçiler, fizikte vektör cebrinin kullanımını benimsetmişlerdir. 1878 yıllarında Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa İngilizce olarak yazdığı lineer cebir adlı kitapta kompleks sayılarla ilgili teorisinde ileri sürdüğü çarpımın 3-boyutlu uzaya uygulamanın bir yolunu bulmuş ve özgün çalışma olarak kuaterniyonların çarpımının bizi üç boyutlu uzayda çalışmaya zorladığını vurgulamıştır; R. Kaya ve Ş. Koçak tarafından kuaterniyonlardan hareketle zayıf kuaterniyonların tanımı yapılarak $\mathcal{R}^3$'ün vektörleri zayıf kuaterniyon uzayına taşınmış ve bölme işleminin bu şekilde daha anlamlı olarak gerçekleştirilebileceği ispat edilmiştir [1–3].

Kuaterniyonların fizikte çok kullanılması ancak E. Schrödinger, W. Heisenberg, P. A. M: Dirac, M. Born ve daha pek çok ünlü fizikçi tarafından 1927 ile 1932 yılları arasında, neredeyse bugün kullandığımız kuantum mekaniğinin bulunuşundan sonra gerçekleşmiştir. 20. yüzyılın başlarında Yale Üniversitesi profesörlerinden Gibbs uygun kuaterniyon için kullanım şeklini Hamilton'un çalışmalarını ve Rodrigues'e ait çalışmalarını anahtar noktalarını buna ilave ederek keşfetti ve çalışmalarını vektör nokta çarpımı ve bugün bildiğimiz vektörel çarpımla tamamlandı. Hemen hemen aynı zamanlarda Alberd Einstein 4. boyut için bir kullanım keşfetti. Işık hızını tüm gözlemlerde sabitlemek için uzay ve zaman birimlendirilmeliydi. Burada sonuç, 4. boyut için şekillendirilmişti. Fakat Einstein bir matematik düşkünü olmadığı için sadece lokal olarak işe yarayan parçaları buldu. Einstein; Minkowski'nin uzay zamanını ve Lorentz'in dönüşümünü keşfetmiş ve problemlerin çözümünü gerektiren yardımcıların özel rölativite içinde olduğunu göstermiştir [1].

Türk fizikçilerimizden Prof. Dr. Feza Gürsey de kuaterniyonik ve oktoniyonik yapıların önemini 1950'li yıllarda sezip, bu yapıları ve ilgili istisnai grup ve geometrileri çalışmaları ile fiziğe yerleştirmiştir. Kendisini kuaterniyonlar üzerindeki çalışmaları komform grubu, genel rölativite de bazı çözüm, Yang Mills teorisinde instanton çözümleri, kuaterniyonik analitisite ve Öklidyen rölativitede Kahler yapısı ve bu uzayda diffeomorfizmlerin kuaterniyonlarla kovaryant gösterimi gibi geniş bir yelpaze oluşturur. Kuaterniyonların temel fizik kanunlarının incelenmesinde oynadığı rolün önemi, özel rölativite ve kuantum mekaniğinin keşfi ile daha iyi anlaşıldı. Feza Gürsey 1955 yılında özel rölativiteyi kuaterniyonlar ile ifade etmeye çalıştığı bir yayın yaptı. Simetrik yapıların fark etmesindeki olağan üstü kolaylığı ile kuaterniyonların temel fizik kanunlarında önemli bir rol oynayacağını sezmişti [1].

Kuaterniyonların fizikte kullanım bulduğu konulardan birisi ve belki de en önemlisi Einstein'ın özel ve genel rölativite teorileridir. Bu teorilerde zaman kavramı, 3-boyutlu uzaydan bağımsız olarak mutlak bir nitelik taşımaz. 4- boyutlu uzayzamanın her bir noktası, belli bir anda belli bir noktada yer alan bir olguya karşı gelir. Tipik uzay-zaman noktası; $\left(q_0 = \mathrm{c\,t}, \mathrm{q}_1 = \mathrm{x}, \mathrm{q}_2 = \mathrm{y}, \mathrm{q}_3 = \mathrm{z}\right)$ kartezyen koordinatları ile temsil edilebilir. Burada t zaman koordinatını, c ise boşlukta ışık hızını göstermektedir. Bu tanımlar yardımıyla uzay-zamanda hareket eden bir noktasal parçacığın konumu $\mathbf{q} = iq_0 + \mathbf{e} \cdot \vec{\mathrm{q}}$ ifadesi ile verilen bir kompleks kuaterniyon ile gösterilebilir. Bu ifade de kuaterniyon birimleri $\mathbf{e} = \left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right)$ üçlüsü ile uzay koordinatları ise $\vec{\mathrm{q}} = \left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right)$ vektörü ile verilmektedir. $i^2 = -1$ kompleks sanal birim sayıdır. **q** kuaterniyonun normu açık olarak yazılırsa;

$$N_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} = -\left(q^0\right)^2 + \vec{\mathrm{q}} \cdot \vec{\mathrm{q}} \tag{1.1}$$

bulunur. Kompleks kuaterniyon cebrinin norm koruyan izomorfizmleri $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{UqU}^{\dagger}$, **q** kuaterniyonun karşı geldiği uzay-zaman vektörünün Lorentz dönüşümleridir. Böylece Einstein’in rölativite teorisinin temelini oluşturan Lorentz dönüşümleri kompleks kuaterniyon cebrinin norm koruyan izomorfizmleri ile özleşmiş olmaktadır. İlk kez 1912’de A. W. Conway ve L. Silberstein tarafından özel rölativite teorisi için öne sürülen bu yaklaşım o sırada tensör cebrini yerleştirmeye çalışan fizikçiler arasında rağbet kazanmıştır [1].

Kuaterniyonlar, uzaysal dönmelerde ve fiziksel büyüklüklerin karakterlerinin belirlenmesinde çok işe yaramaktadır. Ayrıca kuaterniyonlar grup teorisinde ve elemanter parçacıkların sınıflandırılmasında kullanılmaktadır. Uzaysal dönmeler, grup teori uygulamaları, kontrol sistemleri ve robotik uygulamalarında birçok araştırmacı için ilginç bir araçtır. M. Tanışlı tarafından hazırlanan doktora tezinde endüstriyel robot kollarının hareketi kuaterniyonlar tarafından tanımlanmaktadır. Bu çalışmada ayrıca kuaterniyonlar arasındaki her türlü işlemi yapmak için bir algoritma geliştirilmiş ve bu amaçla bilgisayarda kullanılmak üzere Pascal 7.0’da bir paket program hazırlanmıştır. Sonlu dönmeleri ifade etmek için kuaterniyonlar kullanılabilmektedir. Ayrıca, kuaterniyonlar fiziksel büyüklükleri ifade etmek içinde kullanılabilmektedir. 1989’da K. Özdaş tarafından skaler ve vektörel büyüklüklerin kuaterniyon uzayını taşınarak birer kuaterniyon olarak nasıl ifade edileceği gösterilmiştir. Kuaterniyon çarpımından farklı olarak kuaterniyonlar için skaler (iç) ve vektörel (dış) çarpma işlemleri tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla “iş” ve “tork” gibi büyüklüklerin nasıl ifade edileceği gösterilmiştir. J. C. K. Chou; hız, ivme ve momentum gibi vektörel büyüklükleri kuaterniyonlarla temsil ederek bunlara ilişkin kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri yazmıştır. M. Tanışlı robot kinematik denklemlerini üretmek için genel kuaterniyon dönüşümlerini kullandı. Böylece dönme matrisine göre avantaj sağlayan Euler parametreleri ve dönme matrisleri arasında bir bağıntı geliştirdi. Kuaterniyonlar, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen dinamik sistemlerin ifade edilmesinde kullanılabilmektedir [2, 4, 5].

Kuaterniyonlar son yıllarda her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Kuaterniyon cebride kuaterniyonların kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermektedir. Kompleks sayı ve kuaterniyon bileşiminden oluşan kompleks kuaterniyonlar (Bikuaterniyonlar), fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Bunun yanı sıra kuaterniyonlar teorik fizik araştırmalarında kullanılmaktadır. Örneğin Gurlebeck ve Wolfgang kompleks kuaterniyonların yani bikuaterniyonları özel rölativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromanyetizmaya uygulayarak kompleks kuaterniyonların kendine oldukça geniş bir uygulama alanı bulduğunu göstermişlerdir. Bugüne kadar fizikteki birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaterniyonlarla yeniden ifade edilmiştir. Bunlardan bazıları şiöyledir. Ş. C. K. Chou kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler kuantum mekaniğini, D. C. Jolly matris ve kuaterniyonlar arasındaki izomorfizmi, Kugotownsend tarafından kuaterniyonların süper simetrik modellerle olan bağlantısı, K. Morita tarafından kuaterniyonların Dirac teorisindeki rolü, M. Tanışlı ve K. Özdaş robotik manipülatörlerin pozisyonunun kuaterniyon dönüşümünü, M. Tanışlı akustik enerji korunum denklemini, yine Tanışlı ve Özgür açısal momentum ve Dirac denklemlerini, Negi ve arkadaşları tek kutup dynonslar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır [6-8].

Kuantum mekaniğinde elektron spinini tarif ederken kuaterniyon cebri kullanılmaktadır. Bir spinör üzerinde işlem yapan kuantum operatörleri, örneğin, momentum operatörleri $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ gibi, 2×2 matrislerdir. Dolayısıyla kuantum operatörleri kuaterniyonlarla gösterilebilir. Bu yaklaşımla spinörlerin matematik formalizmi 1930'da B: L. Van der Waerden tarafından geliştirildi. Daha sonra bu kavram E. Cartan ve H. Weyl tarafından daha yüksek boyutlu vektör uzayları üzerine genelleştirildi. Bugün spinörler fizikte vektörlerden daha temel rol oynamaktadırlar [1].

Kompleks kuaterniyonların fizikteki uygulamaları daha çok genel ve özel rölativite ile kuantum mekaniği alanında olmuştur. Kompleks kuaterniyonlarla Dirac rölativistik denklemlerinin çeşitli formülasyonlarının ilk öncüsü A. W. Conway olarak görülmekle birlikte birçok bilim adamının yazılarında kompleks kuaterniyonlarla kuantum mekaniği K. Morita tarafından yeniden formüle edilmiştir. Leo'nun da kuaterniyon ve kompleks kuaterniyonlarla ilgili çalışmaları vardır [1, 9].

Fiziksel olarak 1927'de Pauli ve 1938'de Dirac elektron spininin tanımı için spinör eşitliklerini gösterdi. 1930'da Juvet ve Saunter, sütun spinörlerini sadece ilk sütunu sıfır olmayan kare matris spinörleri ile yer değiştirdi. 1947'de Marcel Riesz spinörleri Clifford cebirlerinin minimum küçük ideal elemanları olarak düşündü. 1958'de Riesz homojen ve izotropik ortamın özel durumundaki Maxwell eşitliklerini, $Cl_{1,3}$ Clifford cebrinde bivektörler ile basit bir eşitlikte özetlendi. 1956-58'de Gürsey H(2)'de 2×2 kuaterniyon matrisleri ile Dirac eşitliğini yeniden yazdı. 1964'te Kusraanheimoı, Kepler hareketinin spinör düzenini gösterdi. Bu KS-dönüşümü, spinörlerin operatör yönünün vurgular. 1983'te Y. Takahaski ve 1985'te J. Crawford bilineer eş dönüşümlerinden spinörleri tekrar elde etti [10].

1881'de Michelson farklı yönlerde ışığın hızını ölçtü. Michelson & Morley 1887'de deneyi tekrarladılar ve ışığın, ışık ortamına göre kaynağın hareketinden bağımsız aynı hızda hareket ettiği sonucuna vardılar. 1887'de Voight,

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ t' &= t - \frac{v\,x}{c^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Değişkenlerinin değişimine göre sabit kalan dalga denklemini $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ olarak tanımladı. Voight'ın formülleri, direkt ve ters dönüşümler için aynı değildir. Daha sonra simetri için $\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}$ oranı ile yeniden faktör tanımını yaptı. 1892'de FitzGerald ve Lorentz, bağımsız olarak hareket eden cisimlerin $\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}$ oranı ile hareket yönünde kısaldığını varsayarak Michelson & Morley deneyinin bir açıklamasını verdiler [11].

Uzay-zaman olaylarının Lorentz dönüşümleri, 1900'de Larmor tarafından sunuldu, ancak rölativistik Maxwell eşitliklerinin kovaryantları, 1903'te H. A. Lorentz tarafından kanıtlandı. 1905'te Einstein, ışık hızının bağımsızlığı ilkesi postülası ile rölavite ilkesini tamamladı. Bu iki ilke, Einstein'ın zaman notasyonunu tekrar gözden geçirmesine sebep oldu ve Lorentz'in kinetiksel dönüşüm yasaları sonucunu çıkarmasını sağladı. Daha sonra Einstein, özel rölativite ilkesini tekrar formüle etti. Böylece Einstein, sadece mekaniksel değil elektromanyetik olguyu da benimser:

"Fizik yasaları, bütün referans çerçevelerinde aynı biçime sahiptir."

Einstein'ın bu rölativite ilkesi, Maxwell eşitliklerine uygulandığında, ışık hızının bütün referans çerçevelerinde aynı olacağı sonucunun çıkarılacağı ikna edicidir. Rölativite ilkesi ve Maxwell eşitliklerinin bilinmesi, Lorentz'in dönüşüm yasalarının sonucunu çıkartmak için yeterlidir. Bugünlerde rölativistik ve rölativite terimleri hemen hemen Einstein ilkesi ile aynıdır [1, 11].

Matematikçiler açısından, dirac matrisleri aslında Clifford cebrinin generatörlerinin temsilinden başka bir şey değildirler. Kuaterniyon ve Dirac cebri Clifford cebirlerinin özel hali olarak görülmektedir. Nasıl iki elemanlı bir spinör kuaterniyon cebrinin elemanı olarak düşünüyorlarsa dört elemanlı bir Dirac spinörü de aynen öyle Clifford cebrinin bir elemanı olarak düşünülebilir. Soyut Clifford cebirleri günümüzde elektron, nötrino v.b. iki değerli spin taşıyan ve bu nedenle Pauli dışarlama ilkesine uyan fermiyon adını verdiğimiz parçacıkların incelenmesinde, kuantizasyonunda ve süpersimetri kavramlarının geliştirilmesi alanlarında önemli rol oynamaktadır [1].

Kula L. tarafından hazırlanan “Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları” doktora tezinde bölüntülü (split) kuaterniyonların Minkowski 3-uzayında dönme matrisleri tanımlanmıştır. Hamilton operatörleri ile Minkowski 3-uzayında vida hareketinin gösterimi yapılmıştır [12].

Matris mekaniğinde özfonksiyonlar birer sütun matrisleri ile gösterilirken operatörler ise matris elemanları o operatörün beklenen değerlerinden ibaret olan birer matrisle temsil edilirler. Matrisin elemanları, ilgili operatörün o uzaydaki spektrumunu oluşturur. Operatörün temsil eden matrisin mertebesi (boyutu) bağımsız öz fonksiyon uzayının boyutu ile belirlidir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde kuaterniyonlar ve bölüntülü (split) kuaterniyonlara ait cebir incelenecek, 3. bölümde Pauli-spin matrislerinin bölüntülü kuaterniyonların bazları cinsinden elde edilmesi yapıldıktan sonra, spin vektörü ele alınarak spinörler ve dönmeler tanımlanarak manyetik alandaki parçacıkların hareketi incelenecektir.

2. KUATERNİYON CEBİRİ

Kuaterniyonun vektör kısımlarında işlemler yapmak için en ünlü kuralı, kuaterniyon bazlarının çarpımları için tanımlanmış olan;

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_3 = -1$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\delta_{ij}\mathbf{e}_0 + \in_{ijk}\ \mathbf{e}_k ; \qquad \mathbf{e}_0 = 1 \tag{2.1}$$

ifadeleridir.

Toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte kuaterniyonlar kümesi bir cebir, daha doğru olarak değişme özelliği olmayan bölüm cebirleri adı verilen bir matematiksel sistemi oluşturur. Yer değiştirmeyen bölüm cebirleri adı, kümede sıfır olmayan her eleman için, genelde kuaterniyon çarpımının yer değiştirmediğini ve de genel olarak çarpımın tersinin var olduğunu vurgular. Özet olarak, çarpma ve toplama işlemleri altında kuaterniyonlar kümesi çarpma için, yer değiştirme özelliği dışında bir cismin tüm aksiyomlarını sağlar.

2.1 Kuaterniyonların Tanımlanması

$\mathcal{R}^3$ gibi üç boyutlu uzayda vektörleri göstermek için $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ ve $\mathbf{e_3}$ ortonormal bazları kullanabiliriz. Üç boyutlu uzaydaki vektörler reel sayıların katları şeklinde yani skalerlerle yazılabilirler, böylece ortonormal bazları,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak yazabiliriz.

Bir kuaterniyonu, $\mathcal{R}^4$' ün herhangi bir elemanı olarak da düşünebiliriz. Bu durumda ise bir **q** kuaterniyonunu,

$$\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{2.3}$$

olarak yazabiliriz. Burada q_0, q_1, q_2 ve q_3; reel sayılar veya skalerdirler [12, 13].

Bir kuaterniyonu temsil eden bileşenlerden skaler veya reel sayı olan bileşenine q_0 diyebiliriz. Daha sonra $\mathbf{q}$, $\mathcal{R}^3$'de;

$$\mathbf{q} = \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.4}$$

olan herhangi bir vektöre karşılık getirebiliriz. Burada $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$; $\mathcal{R}^3$'de standart ortonormal bazlardır. Bir kuaterniyonu ise;

$$\mathbf{q} = q_0 + \vec{\mathrm{q}} = q_0 + \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.5}$$

toplamı olarak tanımlarız. Bu toplamada $\vec{\mathrm{q}}$, kuaterniyonun vektör kısmı olarak adlandırılırken; q_0, kuaterniyonun skaler kısmı olarak adlandırılır. q_0, q_1, q_2 ve q_3 skalerleri, kuaterniyonun bileşenleri olarak adlandırılmaktadırlar [13, 14].

Eşitlik, *toplam ve çıkarma*: İki kuaterniyonun eşit olması; aynı bazlarla yalnızca, tam olarak, aynı bileşenlere sahipseler olur. Yani **p** ve **q** kuaterniyonları;

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p_0 + \mathbf{e}_1 p_1 + \mathbf{e}_2 p_2 + \mathbf{e}_3 p_3, \\ \mathbf{q} &= q_0 + \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

olursa ve yalnızca;

$$\begin{aligned} p_0 &= q_0 \\ p_1 &= q_1 \\ p_2 &= q_2 \\ p_3 &= q_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ise eşitlik tanımlı olmaktadır. Yukarıdaki iki **p** ve **q** kuaterniyonlarının toplamı ve çıkarması ise,

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = (p_0 \pm q_0) + \mathbf{e}_1(p_1 \pm q_1) + \mathbf{e}_2(p_2 \pm q_2) + \mathbf{e}_3(p_3 \pm q_3) \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır. Böyle tanımlanan kuaterniyonlar için toplama ve çıkarma tam olarak reel sayıların 4 derecelileri ile aynı toplama ve çıkarma özelliklerine sahiptir. İki kuaterniyonun toplamı veya çıkarmasının yine kuaterniyon olduğuna dikkat edelim, yani kuaterniyonlar toplama ve çıkarma işlemi altında kapalıdır. Daha da fazlası her **q** kuaterniyonu **-q** ile gösterilen bir negatif ya da toplamaya göre tersine sahiptir. **-q**'daki her bileşen **q**'nun benzer bileşeninin negatifidir. Ayrıca, kuaterniyonların toplamı; birleşme ve yerdeğiştirme özelliğinin her ikisine sahiptir, çünkü reel sayıların toplamı da, bu özelliklere sahiptir [13, 14].

Çarpımın tanımlanması: Öncelikle bir skaler ile bir kuaterniyonun çarpımı açık bir durumda; c bir skaler olmak üzere ve

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.9}$$

q kuaterniyonu ile çarpımı;

$$c\mathbf{q} = cq_0 + c\mathbf{e}_1 q_1 + c\mathbf{e}_2 q_2 + c\mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.10}$$

ile verilir. Bu nedenle kuaterniyonu bir skaler ile çarpmak, kuaterniyonun her bileşenini aynı skaler ile çarpmaktır. Sonucun yine bir kuaterniyon olduğuna ve kuaterniyonun c skaleri kadar büyüdüğüne dikkat edelim, yani kuaterniyonlar kümesi, bir skaler ile çarpma altında da kapalıdır [13, 15].

Daha sonra ise, iki kuaterniyonun çarpımı daha da karmaşıktır. Bu çarpımda, denklem (2.1) göz önüne alındığında aşağıdaki bazlar arasındaki temel özel çarpımlar sağlanmalıdırlar:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -1,\\
&\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1,\\
&\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2,\\
&\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Bu çarpımların yer değiştirmediğine dikkat edelim. Bu nedenle genelde iki kuaterniyonun çarpımı da yer değiştirmez. Yani değişme özelliğini taşımaz. Şimdi, yukarıdaki temel çarpımlar ile cebirsel çarpım için genel kuralların kullanılması ile kuaterniyonların çarpımı aşağıdakiler gibi olmak zorunda olduğunu kanıtlamak kolaydır. Eğer **p** ve **q** gibi iki kuaterniyon,

$$\mathbf{p} = p_0 + \mathbf{e}_1 p_1 + \mathbf{e}_2 p_2 + \mathbf{e}_3 p_3 \tag{2.12}$$

ve

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.13}$$

olursa bu iki kuaterniyonun çarpımı;

$$\begin{aligned}
\mathbf{pq} &= (p_0 + \mathbf{e}_1 p_1 + \mathbf{e}_2 p_2 + \mathbf{e}_3 p_3)(q_0 + \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3) \\
&= p_0 q_0 + \mathbf{e}_1 p_1 q_0 + \mathbf{e}_2 p_2 q_0 + \mathbf{e}_3 q_3 p_0 \\
&\quad + \mathbf{e}_1 p_0 q_1 + \mathbf{e}_1^{\,2} p_1 q_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 p_2 q_1 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 p_3 q_1 \\
&\quad + \mathbf{e}_2 p_0 q_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 p_1 q_2 + \mathbf{e}_2^{\,2} p_2 q_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 p_3 q_2 \\
&\quad + \mathbf{e}_3 p_0 q_3 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 p_1 q_3 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 p_2 q_3 + \mathbf{e}_3^{\,2} p_3 q_3
\end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklindedir. Eğer Hamilton'un bazlar için özel çarpımlarında düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{pq} = {} & p_0 q_0 + \mathbf{e}_1 p_1 q_0 + \mathbf{e}_2 p_2 q_0 + \mathbf{e}_3\, p_3 q_0 \\
& + \mathbf{e}_1 p_0 q_1 \text{-} p_1 q_1 - \mathbf{e}_3 p_2 q_1 + \mathbf{e}_2 p_3 q_1 \\
& + \mathbf{e}_2 p_0 q_2 + \mathbf{e}_3 p_1 q_2 \text{-} p_2 q_2 - \mathbf{e}_1 p_3 q_2 \\
& + \mathbf{e}_3 p_0 q_3 - \mathbf{e}_2 p_1 q_3 + \mathbf{e}_1 p_2 q_3 \text{-} p_3 q_3
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olacaktır. Şimdi terimlerin bazı cebirsel gruplanmasıyla, ifademiz,

$$\begin{aligned}
\mathbf{pq} = {} & p_0 q_0 \text{-} \left(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3\right) \\
& + p_0 \left(\mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3\right) + q_0 \left(\mathbf{e}_1 p_1 + \mathbf{e}_2 p_2 + \mathbf{e}_3 p_3\right) \\
& + \mathbf{e}_1 \left(p_2 q_3 \text{-} p_3 q_2\right) + \mathbf{e}_2 \left(p_3 q_1 \text{-} p_1 q_3\right) + \mathbf{e}_3 \left(p_1 q_2 \text{-} p_2 q_1\right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeyi daha özet bir şekilde tekrar yazmadan önce, üç boyutta vektörlerin cebirlerinden skaler çarpım ve vektörel çarpımı tekrar hatırlamamız yararlı olacaktır. Eğer;

$$\vec{\mathrm{a}} = \left(a_1, a_2, a_3\right) \quad \text{ve} \quad \vec{\mathrm{b}} = \left(b_1, b_2, b_3\right) \tag{2.17}$$

vektörlerini ele alırsak, o halde bu iki vektör için skaler çarpım;

$$\vec{\mathrm{a}}.\vec{\mathrm{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2.18}$$

ile verilir ve vektörel çarpım;

$$\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

$$= \mathbf{e}_1 \left(a_2 b_3 \text{-} a_3 b_2\right) \text{-} \mathbf{e}_2 \left(a_1 b_3 \text{-} a_3 b_1\right) + \mathbf{e}_3 \left(a_1 b_2 \text{-} a_2 b_1\right)$$

olduğu bilinmektedir. Bu sonuçları kullanırsak; $\mathbf{p} = p_0 + \vec{\mathrm{p}}$ ve $\mathbf{q} = q_0 + \vec{\mathrm{q}}$ şeklinde iki kuaterniyonun çarpımı daha özet bir şekilde;

$$\mathbf{pq} = p_0 q_0 \text{-} \vec{\mathrm{p}}.\vec{\mathrm{q}} + p_0 \vec{\mathrm{q}} + q_0 \vec{\mathrm{p}} + \vec{\mathrm{p}} \times \vec{\mathrm{q}} \tag{2.20}$$

olarak yazabiliriz. Diğer tanımlar kullanılabilir olmasına rağmen, denklem (2.20)'deki ifadeyi iki kuaterniyonun çarpımı tanımı olarak kullanacağız. Denklem (2.20)'de tanımlanan kuaterniyonların çarpımı, matris cebirlerinin kullanılmasıyla da yazılabilir. Eğer çarpımı;

$$\mathbf{pq} = \mathbf{r} = r_0 + \vec{\mathrm{r}} = r_0 + \mathbf{e}_1 r_1 + \mathbf{e}_2 r_2 + \mathbf{e}_3 r_3 \tag{2.21}$$

kuaterniyonu olarak düzenlersek ve denklem (2.15)'te yer alan ifadeleri ortak bazlar altında yazarak,

$$\begin{aligned} r_0 &= p_0 q_0 \text{-} p_1 q_1 \text{-} p_2 q_2 \text{-} p_3 q_3 \\ r_1 &= p_1 q_0 + p_0 q_1 + p_2 q_3 \text{-} p_3 q_2 \\ r_2 &= p_0 q_2 \text{-} p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1 \\ r_3 &= p_2 q_3 + p_1 q_2 \text{-} p_2 q_1 + p_3 q_0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

şeklinde düzenlemeyle, matris gösterimi yazılırsa ifademiz,

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

şeklinde olacaktır. Kuaterniyonlar kümesi, toplama ve çıkarma işlemine ek olarak çarpmada da kapalılık özelliğine sahiptir. Ayrıca kuaterniyon çarpımının gerçekten birleşme özelliğine sahip olduğunu da söyleyebiliriz [14, 15].

$\vec{p} \times \vec{q}$ vektörel çarpımı yerdeğiştirmediği için, kuaterniyon çarpımı yer değiştirmez ve bu kuaterniyon cebiri için, yalnızca cisim özelliklerinden bir ayrıcalıktır [15].

Fakat kuaterniyon çarpımı dışında, toplama için de bir tanıma sahip olmalıyız. Kuaterniyonlar kümesi, reel kısmı 1 ve vektör kısmı 0 olan bir kuaterniyon için;

$$\mathbf{q} = 1 + 0 \tag{2.24}$$

olarak yazılabilir. Kuaterniyonların çarpımı, toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir. Son olarak; sıfır olmayan her kuaterniyonun, çarpmaya göre tersi olduğunu söyleyebiliriz [13, 15].

Kuaterniyonun kompleks konjugesi: Kuaterniyonlara ve bunun dışında herhangi bir kompleks sayılara bağlı önemli cebirsel bir kavram olan bir kuaterniyonun kompleks konjugesini anlatmak yararlı olacaktır[14].

$$\mathbf{q} = q_0 + \vec{q} = q_0 + \mathbf{e}_1 q_1 + \mathbf{e}_2 q_2 + \mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.25}$$

şeklinde olan kuaterniyonun kuaterniyon eşleniği,

$$\bar{\mathbf{q}} = q_0 - \vec{q} = q_0 - \mathbf{e}_1 q_1 - \mathbf{e}_2 q_2 - \mathbf{e}_3 q_3 \tag{2.26}$$

ile verilir. Denklem (2.20)'de tanımlanan kuaterniyon çarpımının kullanımındaki bir örnek gibi, iki kuaterniyon için kuaterniyonların çarpımının kuaterniyon eşleniği her bir kuaterniyonun kuaterniyon eşleniklerinin ters olarak çarpımına eşit olur, yani verilen herhangi iki **p** ve **q** kuaterniyonları için,

$$\left(\overline{\mathbf{pq}}\right) = \overline{\mathbf{q}}\,\overline{\mathbf{p}} \tag{2.27}$$

olur. Ayrıca herhangi bir $\mathbf{q}$ kuaterniyonu için; $\mathbf{q}$ ve $\overline{\mathbf{q}}$ kuaterniyon eşleniğinin toplamının bir skaler olduğuna dikkat edelim, yani

$$\mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} = \left(q_0 + \vec{\mathrm{q}}\right) + \left(q_0 \text{-} \vec{\mathrm{q}}\right) = 2q_0 \tag{2.28}$$

olarak sonuç, $2q_0$ şeklinde bir skalerdir [13, 15].

Norm: Kuaterniyonlarla ilgili diğer önemli cebirsel kavram, bir kuaterniyonun normudur. Yani norm;

$$N_{\mathbf{q}} = \sqrt{\overline{\mathbf{q}}\mathbf{q}} \tag{2.29}$$

skaleri ile tanımlanır. Herhangi $\vec{\mathrm{q}}$ vektörü için $\vec{\mathrm{q}} \times \vec{\mathrm{q}} = 0$ kuralı ile kuaterniyon çarpım tanımını kullanarak normu,

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{q}}^2 &= \left(q_0 \text{-} \vec{\mathrm{q}}\right) \cdot \left(q_0 + \vec{\mathrm{q}}\right) \\ &= q_0 q_0 \text{-} \left(\text{-}\vec{\mathrm{q}}\right) \cdot \vec{\mathrm{q}} + q_0 \vec{\mathrm{q}} + \left(\text{-}\vec{\mathrm{q}}\right) q_0 + \left(\text{-}\vec{\mathrm{q}}\right) \times \vec{\mathrm{q}} \\ &= q_0{}^2 + \vec{\mathrm{q}} \cdot \vec{\mathrm{q}} \\ &= q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. Bu, tanım $\mathcal{R}^4$'deki bir vektörün uzunluğu için olan tanımla aynıdır. Ayrıca herhangi Öklid normuyla aynı anlama sahip olduğuna dikkat edelim [13, 15].

Eğer bir kuaterniyonun normu 1 ise, bileşenlerinin herbiri 1'den küçük veya 1'e eşit bir değerde olmalıdır. Böyle kuaterniyonlar birim veya normalize olmuş kuaterniyonlar olarak adlandırılırlar [15].

İki $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ kuaterniyonlarının çarpımının normu her bir kuaterniyonun normlarının çarpımına eşit olduğu;

$$
\begin{aligned}
N^2{}_{\mathbf{pq}} &= (\mathbf{pq})(\overline{\mathbf{pq}}) \\
&= \mathbf{pq}\overline{\mathbf{q}}\overline{\mathbf{p}} \\
&= \mathbf{p}N^2(\mathbf{q})\overline{\mathbf{p}} \\
&= \mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}N^2(\mathbf{q}) \\
&= N^2(\mathbf{p})N^2(\mathbf{q})
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

şeklinde gösterilebilir. Tabiiki iki birim kuaterniyonun çarpımı, yine birim kuaterniyondur [15].

Kuaterniyonun tersi: Kompleks eşleniği ve bir kuaterniyonun normu fikirlerini kullanarak, sıfır olmayan her kuaterniyon için, çarpmaya göre tersi vardır deriz. Eğer bir $\mathbf{q}$ kuaterniyonunun “$\mathbf{q}^{-1}$” ile tersini gösterirsek;

$$\mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = 1 \tag{2.32}$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi, $\overline{\mathbf{q}}$ kompleks konjugesi ile $\mathbf{q}$ kuaterniyonunu sağdan ve soldan çarparsak;

$$\mathbf{q}^{-1}\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}}\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \overline{\mathbf{q}} \tag{2.33}$$

yazabiliriz. $\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} = N^2{}_{\mathbf{q}}$ olduğundan;

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{q}}}{N_{\mathbf{q}}} = \frac{\overline{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}^2|} \tag{2.34}$$

olur. Burada $\mathbf{q}$, birim veya normalize olmuş kuaterniyon (yani $N_{\mathbf{q}} = 1$) ise, tersi sadece kompleks konjugesine eşittir yani,

$$\mathbf{q}^{-1} = \overline{\mathbf{q}} \tag{2.35}$$

şeklinde ifade edilir [14, 15].

2.2 Bölüntülü (Split) Kuaterniyonlar

Bölüntülü kuaterniyonlar E_2^4 ile gösterilen iki indisli yarı öklid 4 uzayı ile pure bölüntülü kuaterniyon yani bölüntülü kuaterniyonun alt uzayı ise Minkowski 3 uzayı ile özdeşleştirilebilirler. Böylece; Lorentzian iç ve vektör çarpımları kullanımıyla vektör analizinde yapılan işlemlerin çoğunu bölüntülü kuaterniyonlarla yapmak mümkün olmaktadır [15].

Bazlarının çarpımı;

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 = -1,\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = 1$$

ve (2.36)

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$$

denklemlerini sağlayan;

$$H' = \{\boldsymbol{q} = d + a\boldsymbol{e_1} + b\boldsymbol{e_2} + c\boldsymbol{e_3} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \tag{2.37}$$

kümesinin elemanlarına *bölüntülü kuaterniyon* denir. Bölüntülü kuaterniyonlar;

$$\boldsymbol{q} = (d, a, b, c) = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

veya (2.38)

$$S_{\boldsymbol{q}} = d \text{ ve } \vec{V}_{\boldsymbol{q}} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

olmak üzere $\boldsymbol{q} = S_{\boldsymbol{q}} + \vec{V}_{\boldsymbol{q}}$ şeklinde gösterilir. $S_{\boldsymbol{q}}$’ya skaler kısım, $\vec{V}_{\boldsymbol{q}}$’ya ise vektörel kısım denir. Skaler kısmı sıfır olan bölüntülü kuaterniyonlara *saf(pure) bölüntülü kuaterniyonlar* denir. Bölüntülü kuaterniyonun bazları için çarpım kuralı aşağıda tablo 2.1’de verilmiştir. $\overline{\boldsymbol{q}} = S_{\boldsymbol{q}} - \vec{V}_{\boldsymbol{q}}$ işlemi ise $\boldsymbol{q}$ *bölüntülü kuaterniyonun eşleniğini* göstermektedir [15].

Tablo 2.1: Bölüntülü kuaterniyon bazlarının çarpımı

.	**1**	e_1	e_2	e_3
1	**1**	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	**- 1**	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	**1**	$-e_1$
e_3	e_3	e_2	e_1	**1**

Matris gösteriminde, bölüntülü kuaterniyona ait bazların standart matris ifadeleri;

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

şeklindedir [17]. Burada $i^2 = -1$'dir.

$\boldsymbol{q} = [d, a, b, c] = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$ bölüntülü kuaterniyonunun 2×2 matris formunda gösterimi;

$$\boldsymbol{q} = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} d+ia & c-ib \\ c+ib & d-ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{s} & \bar{\mathrm{r}} \\ \mathrm{r} & \bar{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlanır. Bölüntülü kuaterniyonun bazları için denklem (2.39) ifadeleri kullanılmıştır. Burada $\mathrm{s} = d + ia$, $\bar{\mathrm{s}} = d - ia$, $\mathrm{r} = c + ib$, $\bar{\mathrm{r}} = c - ib$'dir.

Bölüntülü kuaterniyon için tanımlanmış 2×2'lik matristen yola çıkarak $\boldsymbol{q} = [d, a, b, c] = d + a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$ bölüntülü kuaterniyonunun matris ifadesinin determinantı ise;

$$\det(\boldsymbol{q}) = \mathrm{s}\bar{\mathrm{s}} - \mathrm{r}\bar{\mathrm{r}} \tag{2.41}$$

olarak elde edilir [18].

Bir $\boldsymbol{q}$ bölüntülü kuaterniyonu için, $\mathbf{I}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}$ olmak üzere: $\mathbf{I}(\boldsymbol{q}) < \mathbf{0}$, $\mathbf{I}(\boldsymbol{q}) > \mathbf{0}$ veya $\mathbf{I}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}$ durumlarında sırasıyla; $\boldsymbol{q}$ bölüntülü kuaterniyonuna, *uzayımsı, zamanımsı ve ışığımsı bölüntülü kuaterniyon* denilmektedir.

$\boldsymbol{q} = (d, a, b, c)$ bölüntülü kuaterniyonu için, $N_{\boldsymbol{q}} = \sqrt{\left|d^2 + a^2 - b^2 - c^2\right|}$ şeklinde tanımlanır. $N_{\boldsymbol{q}} = 1$ ise $\boldsymbol{q}$'ya *birim bölüntülü kuaterniyon* denir ve $\boldsymbol{q}_0 = \dfrac{\boldsymbol{q}}{N_{\boldsymbol{q}}}$ formülüyle tanımlanabilir. Ayrıca; sadece uzayımsı ve zamanımsı bölüntülü kuaterniyonların tersi $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q} = 1$ özelliğini sağlarlar ve $\boldsymbol{q}^{-1} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{q}}}{N_{\boldsymbol{q}}}$ olarak ifade edilir. Işığımsı bölüntülü kuaterniyonların tersi tanımlı değildir.

$\boldsymbol{q} = a_1\boldsymbol{e_1} + b_1\boldsymbol{e_2} + c_1\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{q}' = a_2\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + c_2\boldsymbol{e_3}$ şeklinde skaler kısımları sıfır olan iki bölüntülü kuaterniyonun çarpımı;

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}' = -a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \begin{vmatrix} -\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{2.42}$$

şeklinde bir tanımlamaya sahiptir. Bir düzenleme yaparsak aynı çarpım;

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}' = \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \rangle_{\boldsymbol{L}} + (\boldsymbol{q} \times_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{q}') \tag{2.43}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \rangle_{\boldsymbol{L}}$ Lorentzian iç ve $(\boldsymbol{q} \times_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{q}')$ Lorentzian vektörel çarpımlarıdır. $d^2 + a^2 - b^2 - c^2 < 0$ ve $0 < d^2 < -a^2 + b^2 + c^2 = \langle \vec{\mathrm{V}}_{\boldsymbol{q}}, \vec{\mathrm{V}}_{\boldsymbol{q}} \rangle_{\boldsymbol{L}}$ olduğundan herhangi bir uzayımsı bölüntülü kuaterniyonun vektörel kısmı uzayımsı vektörüdür. Fakat bir zamanımsı bölüntülü kuaterniyonun vektörel kısmı zamanımsı, uzayımsı veya ışığımsı olabilir [15].

$\boldsymbol{q}$ ve $\boldsymbol{q}'$ bölüntülü kuaterniyonlar olmak üzere için aşağıdaki kullanışlı özellikler geçerlidir [15]:

i. $\left(\overline{\vec{\mathrm{V}}_q \vec{\mathrm{V}}_{q'}}\right) = \vec{\mathrm{V}}_{q'}\vec{\mathrm{V}}_q$

ii. $\left(\overline{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'}\right) = \overline{\boldsymbol{q}'}\,\overline{\boldsymbol{q}}$

iii. $N(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') = N_{\boldsymbol{q}} N_{\boldsymbol{q}'}$

iv. $\vec{\mathrm{V}}_q, \vec{\mathrm{V}}_{q'}$ 'ye paralel olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q}'\boldsymbol{q}$ olmasıdır.

v. $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')\boldsymbol{r}$

vi. $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{q}\boldsymbol{r}$

vii. $\mathbf{I}_{qq'} = \mathbf{I}_q \mathbf{I}_{q'}$

viii. Zamanımsı kuaterniyonun vektör kısmı, zamanımsı veya uzayımsıdır.

a. Her uzayımsı kuaterniyon;

$$\boldsymbol{q} = N\boldsymbol{q}(\sinh\boldsymbol{\theta} + \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \cosh\boldsymbol{\theta})$$

formunda yazılabilir. Burada $\sinh\theta = \dfrac{\boldsymbol{q}_1}{N\boldsymbol{q}}$, $\cosh\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\sqrt{-\boldsymbol{q}_2^2 + \boldsymbol{q}_3^2 + \boldsymbol{q}_4^2}}{N\boldsymbol{q}}$ şeklinde ifade edilmektedir ve $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \dfrac{\boldsymbol{q}_2\hat{e}_1 + \boldsymbol{q}_3\hat{e}_2 + \boldsymbol{q}_4\hat{e}_3}{\sqrt{-\boldsymbol{q}_2^2 + \boldsymbol{q}_3^2 + \boldsymbol{q}_4^2}}$ E_1^3'deki uzayımsı birim vektördür.

b. Her uzayımsı vektör kısmı ile zamanımsı kuaterniyon;

$$\boldsymbol{q} = N\boldsymbol{q}(\cosh\boldsymbol{\theta} + \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \sinh\boldsymbol{\theta})$$

formunda yazılabilir. Burada $\cosh\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{q}_1}{N\boldsymbol{q}}$, $\sinh\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\sqrt{-\boldsymbol{q}_2^2 + \boldsymbol{q}_3^2 + \boldsymbol{q}_4^2}}{N\boldsymbol{q}}$ şeklinde ifade edilmektedir ve $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \dfrac{\boldsymbol{q}_2\hat{e}_1 + \boldsymbol{q}_3\hat{e}_2 + \boldsymbol{q}_4\hat{e}_3}{\sqrt{-\boldsymbol{q}_2^2 + \boldsymbol{q}_3^2 + \boldsymbol{q}_4^2}}$ E_1^3'deki uzayımsı birim vektördür. $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = 1$ dir.

c. Her zamanımsı vektör kısmı ile zamanımsı kuaterniyon;

$$\boldsymbol{q} = N\boldsymbol{q}(\cos\boldsymbol{\theta} + \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \sin\boldsymbol{\theta})$$

formunda yazılabilir. Burada $\cos\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{q}_1}{N\boldsymbol{q}}$, $\sin\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{q}_2^2 - \boldsymbol{q}_3^2 - \boldsymbol{q}_4^2}}{N\boldsymbol{q}}$ şeklinde ifade edilmektedir ve $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \dfrac{\boldsymbol{q}_2\hat{e}_1 + \boldsymbol{q}_3\hat{e}_2 + \boldsymbol{q}_4\hat{e}_3}{\sqrt{-\boldsymbol{q}_2^2 + \boldsymbol{q}_3^2 + \boldsymbol{q}_4^2}}$ E_1^3'deki zamanımsı birim vektördür. $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = -1$ dir.

ix. $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4)$ kuaterniyonu kullanılarak Öklid 3 uzayındaki verilen dönme;

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^2+\boldsymbol{q}_2^2-\boldsymbol{q}_3^2-\boldsymbol{q}_4^2 & -2\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_4+2\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3 & 2\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_3+2\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_4 \\ 2\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3+2\boldsymbol{q}_4\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_1^2-\boldsymbol{q}_2^2+\boldsymbol{q}_3^2-\boldsymbol{q}_4^2 & 2\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_4-2\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_1 \\ 2\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_4-2\boldsymbol{q}_3\boldsymbol{q}_1 & 2\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_1+2\boldsymbol{q}_3\boldsymbol{q}_4 & \boldsymbol{q}_1^2-\boldsymbol{q}_2^2-\boldsymbol{q}_3^2+\boldsymbol{q}_4^2 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

matrisine genelleştirilebilir.

x. $\boldsymbol{q}$ ve $\boldsymbol{r}$ zamanımsı kuaterniyonları olsun. $\boldsymbol{R}: H' \to H'$ dönüşümü;

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}\boldsymbol{q}^{-1} \tag{2.45}$$

normu ve skaleri $\boldsymbol{r}$ içinde aynı olan zamanımsı kuaterniyon ile tanımlanır.

xi. $\boldsymbol{q}=\cosh\boldsymbol{\theta}+\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\sinh\boldsymbol{\theta}$, vektör kısmı uzayımsı olan zamanımsı kuaterniyon ve $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ Lorentzian vektör olsun. $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{q}}(\vec{\boldsymbol{\varepsilon}})=\boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{q}^{-1}$ dönüşümü, $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ uzayımsı ekseni çevresinde 2θ’lık hiperbolik açıyla yapılan bir dönmedir.

xii. $\boldsymbol{q}=\cos\boldsymbol{\theta}+\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\sin\boldsymbol{\theta}$, vektör kısmı zamanımsı olan zamanımsı kuaterniyon ve $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ Lorentzian vektör olsun. $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{q}}(\vec{\boldsymbol{\varepsilon}})=\boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{q}^{-1}$ dönüşümü, $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ zamanımsı ekseni çevresinde 2θ’lık hiperbolik açıyla yapılan bir dönmedir.

xiii. θ açısı boyunca $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$ standart zamanımsı koordinat ekseni çevresinde dönme;

$$\mathbf{R}_{q_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

ortonormal matris ile tanımlanır.

xiv. θ hiperbolik açısı boyunca $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$ ve $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ standart uzayımsı koordinat ekseni çevresinde dönme;

$$\mathbf{R}_{q_2}=\begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{R}_{q_3}=\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

ortonormal matris ile tanımlanır.

Bölüntülü kuaterniyonlar tanımlanan dört baz elemanıyla birleşimli, değişimli olmayan ve bölüm cebrinin tanımlanmadığı bir cebir oluştururlar [15].

Bölüntülü kuaterniyonların çarpımı matris gösteriminde de aşağıda tanımladığı gibi gerçekleştirilebilmektedir. $\boldsymbol{p}=[p_1, p_2, p_3, p_4]$ ve $\boldsymbol{q}=[q_1, q_2, q_3, q_4]$ herhangi iki bölüntülü kuaterniyon olmak üzere;

$$\boldsymbol{pq}=\begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_1 & p_4 & -p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

şeklindedir [15].

3. GÖRECELİ (RÖLATİVİSTİK) OLMAYAN KUANTUM SPİNİ

Pauli ve Dirac cebirlerinin her ikisi, 4 boyutlu uzay-zaman ve 3 boyutlu uzayda geometrik cebrin doğal matris gösterimleri olarak meydana gelir. Geometrik cebir içinde de kuantum teorilerinin çoğu bir doğal ifade bulmaktadır. Bunu başarmanın yollarından biri, kuantum spin işlemcilerinin (operatör) standart gösterimini ele almaktır. Burada izlenecek yol, kuantum mekaniğinde daha derin yapılı soruları çözümlemenin basitleştirilmiş cebirsel yolu olarak ele alınabilir [19].

Göreceli olmayan kuantum mekaniğinin Pauli–spin matrisleri bilindiği gibi;

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Aslında bu matrisleri açık olarak geometrik cebrin de elemanlarından daha çok matris operatörler olarak göstermek için kullanırız. [19].

Kuaterniyon bazları; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ve Pauli-spin matrisleri $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3)$ yaklaşık olarak cebirsel izomorfiktirler. Bir kuaterniyon, 2×2 matris formunda denklem (3.1)'deki matrisler yardımıyla yazılabilir. Bir **p** kuaterniyonunu;

$$\mathbf{p} = p_0 - i\,p_k\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}} = p_0 - i\,p_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 - i\,p_2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 - i\,p_3\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 \tag{3.2}$$

olarak matris formunda ifade edebiliriz. Bu ifade;

$$\begin{gathered} p = p_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ip_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - ip_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - ip_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ p = \begin{pmatrix} p_0 - ip_3 & -ip_1 - p_2 \\ -ip_1 + p_2 & p_0 + ip_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{3.3}$$

şeklinde alınır. Burada $\alpha = p_0 - ip_3$ ve $\beta = -ip_1 - p_2$'dir. Bu 2×2'lik matristen, **p** kuaterniyonunun determinantının;

$$\det(\mathbf{p}) = (p_0)^2 + (\vec{\mathrm{p}})^2 = \mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} \tag{3.4}$$

olduğu ve Pauli–spin matrisleri ile kuaterniyon bazlarının;

$$\mathbf{e}_1 \equiv -i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1, \mathbf{e}_2 \equiv -i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2, \mathbf{e}_3 \equiv -i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 \tag{3.5}$$

ifadesiyle birbirine bağlantılı olduğu görülür [16, 19].

Şimdi, Pauli-spin matrisleri bölüntülü kuaterniyonların bazlarının matris ifadeleriyle tanımlanmak istenirse,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_3\hat{\boldsymbol{e}}_1\\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 &= -i\hat{\boldsymbol{e}}_1 = i\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3\end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde elde edilir.

3.1 Pauli Spinörleri

Spini $\frac{1}{2}$ olan parçacığın dalga fonksiyonu spinördür. $\boldsymbol{\psi}_1$ ve $\boldsymbol{\psi}_2$, $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{k}}\}$ operatörleri, 2 bileşenli kompleks spinörlere etki eder. Heisenberg gösterimindeki sütun vektörlerinin Dirac gösterimi;

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}_1\\ \boldsymbol{\psi}_2\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

ifadesinde görüldüğü gibi $\text{Ket} \equiv |\boldsymbol{\psi}\rangle$'e karşılık gelmektedir. Burada $\boldsymbol{\psi}_1$ ve $\boldsymbol{\psi}_2$ kompleks sayılardır. Kuantum durumları, çoklu vektörlerden ayırt edebilmek için bra ve ketler ile kullanılır [19, 20].

$|\boldsymbol{\psi}\rangle$'lerin bir kümesi, bir iki-boyutlu kompleks vektör uzayı şekillendirir. Biz ise multivektör olarak bunları göstermenin bir yolunu arıyoruz. Bunu başarmanın yol, $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ kompleks vektöre elemanları sıfır olan bir sütun eklemek ve

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}_1 & 0\\ \boldsymbol{\psi}_2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_3\\ \boldsymbol{\psi}_2 & \boldsymbol{\psi}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

matrisi elde etmektir. Burada $\boldsymbol{\psi}_3$ ve $\boldsymbol{\psi}_4$ iki -konuyla ilgisi olmayan- keyfi sabitlerdir. Her 2×2 matris, kompleks katsayılı Pauli matrislerle ve özdeşlikler yardımıyla ayrıştırılabilirler. *i* (imajiner) sanal sayısı ve I'nın yer değiştirmesiyle, multivektörlere doğrudan haritalandırılabilirler. Denklem (3.8)'deki eşitliğin sağdan ilk terimi bir genel 8-bileşenli (multi) çoklu vektörü haritalandırır. İkinci terim ise $\frac{1}{2}\left(1+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3\right)$ matrisidir [19].

Böylece denklem (3.8)'in çoklu vektör eşitliği;

$$\boldsymbol{\psi}\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}_3\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_3\\ \boldsymbol{\psi}_2 & \boldsymbol{\psi}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

denklemini sağlanacaktır. Fakat biz biliyoruz ki,

$$\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}_3\right)=\boldsymbol{\sigma}_3\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}_3\right) \tag{3.10}$$

denklemini sağlayan izdüşüm işlemcisidir (operatörüdür). Bu özelliği 3-boyutlu geometrik cebrin çift altcebri içinde yer alan $\boldsymbol{\psi}\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}_3\right)$ içinde $\boldsymbol{\psi}$ çoklu vektörünü elde etmek için kullanılabilir. Bu cebir 4 boyutludur. Buradan yola çıkarak bölüntülü kuaterniyonlarla;

$$\boldsymbol{\psi}\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}_3\right)\rightarrow\boldsymbol{\psi}\frac{1}{2}\left(1-i\boldsymbol{e}_1\right) \tag{3.11}$$

şeklindeki ifadeye ulaşırız. Ayrıca izdüşüm işlemcisi içinde bölüntülü kuaterniyon bazlarıyla;

$$\frac{1}{2}\left(1-i\boldsymbol{e}_1\right)=-i\boldsymbol{e}_1\frac{1}{2}\left(1-i\boldsymbol{e}_1\right) \tag{3.12}$$

denkleminin denk olduğunu göstermek artık açıkça bellidir [19].

2×2 Pauli-spin matrisleri, izleri sıfır Hermite-sel matrisler olup $\boldsymbol{\psi}$ matrisi ise birim matris ve $\boldsymbol{\sigma}_k$'ların bir serisi olarak [18],

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\psi}\rangle=\begin{pmatrix}a_0+ia_3\\ -a_2+ia_1\end{pmatrix}\leftrightarrow\boldsymbol{\psi}&=a_0+a_{\mathrm{k}}i\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{k}}=a_0+\left(a_1i\boldsymbol{\sigma}_1+a_2i\boldsymbol{\sigma}_2+a_3i\boldsymbol{\sigma}_3\right)\\ \boldsymbol{\psi}&=a_0+a_{\mathrm{k}}i\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}}=a_0+\left(a_1i\boldsymbol{e}_3+a_2i\boldsymbol{e}_2+a_3i\left(-i\boldsymbol{e}_1\right)\right)\end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilmektedir [19].

Spin kuantum sayısı $1/2$ olan parçacıkların spin uzayını geren iki baz vektörü vardır. Bunlara spin dalga fonksiyonu da denir. Özellikle (Spin-up) spin yukarı $|+\rangle$

ve (spin-down) spin aşağı $\left|-\right\rangle$ temel durumları şeklinde ifade edilen bu matrisleri [21, 22],

$$\begin{aligned} \left|+\right\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}_3\right) \\ \left|-\right\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}_1 - i\boldsymbol{\sigma}_2\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

gösterirsek ve bölüntülü kuaterniyonlar bazlarıyla bu tanımlamaları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \left|+\right\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1-i\,\boldsymbol{e}_1\right) \\ \left|-\right\rangle &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}_3 - i\boldsymbol{e}_2\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak tanımlamak mümkün olacaktır.

3.2 Pauli Operatörleri

$\left|\boldsymbol{\psi}\right\rangle$ durumları üzerinde $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{k}}\}$ kuantum operatörlerinin etkisi, bir $\boldsymbol{\psi}$ çoklu vektör üzerinde benzer bir işleme sahiptir [19]. Yani

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{k}}\left|\boldsymbol{\psi}\right\rangle \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\sigma}_3 \qquad (k=1,\,2,\,3) \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. Daha açık şekilde ifadeyi ele aldığımızda bölüntülü kuaterniyonlarla;

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\left|\boldsymbol{\psi}\right\rangle &\leftrightarrow \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{\psi}\left(-\,i\,\boldsymbol{e}_1\right) = i\,\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{e}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\left|\boldsymbol{\psi}\right\rangle &\leftrightarrow \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{\psi}\left(-\,i\,\boldsymbol{e}_1\right) = i\,\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{e}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3\left|\boldsymbol{\psi}\right\rangle &\leftrightarrow \left(-\,i\boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{\psi}\left(-\,i\boldsymbol{e}_1\right) = -\,\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{e}_1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklindeki tanımlamalara ulaşılır. Pauli-spin matrislerinin çarpımını ele aldığımızda sonuç,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i\,I \leftrightarrow \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\left(-\,i\,\boldsymbol{e}_1\right) = i\,I \tag{3.18}$$

şeklinde bölüntülü kuaterniyonun bazlarıyla ifade edilebilir. $|\boldsymbol{\psi}\rangle$'nin her iki bileşeninin çarpanı, üç matris işlemcisinin çarpılmasıyla meydana getirilebilir. Bu yüzden;

$$i|\boldsymbol{\psi}\rangle \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3\boldsymbol{\psi}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3\right)^3 = \boldsymbol{\psi}\, i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 \tag{3.19}$$

dönüşümüne ulaşılır. Burada, kuantum teorisinin birim imajeri, "$i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3$" bivektörü tarafından sağ çarpımla yer değiştirilir [19].

(3.19) denkleminin bölüntülü kuaterniyonlarda denk ifadesi;

$$i|\boldsymbol{\psi}\rangle \leftrightarrow \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\left(-i\boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{\psi}\left(-i\boldsymbol{e}_1\right)^3 = \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{e}_1 \tag{3.20}$$

şeklinde yazılır. Burada ise kuantum teorisinin birim imajeri "$\boldsymbol{e}_1$" bivektörü tarafından sağ çarpımıyla yer değiştirilir [19].

3.3 Pauli Gözlemlenebilirliği

Her $\boldsymbol{\sigma}_i$ Pauli spin matrisinin hermitik eşleniği $\boldsymbol{\sigma}_i^{\dagger} = \boldsymbol{\sigma}_i$'dir. Bölüntülü kuaterniyon bazları göz önüne alınacak olunursa;

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\dagger} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \Rightarrow \left(\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)^{\dagger} = \hat{\boldsymbol{e}}_3\\
\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\dagger} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \Rightarrow \left(\hat{\boldsymbol{e}}_2\right)^{\dagger} = \hat{\boldsymbol{e}}_2\\
\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3^{\dagger} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 \Rightarrow \left(-i\hat{\boldsymbol{e}}_1\right)^{\dagger} = \left(-i\hat{\boldsymbol{e}}_1\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde ifade edilir. "$i^{\dagger} = -i$" olduğundan, hançer operatörünün, üç boyutta ters yöne dönmeye eşit olduğu anlaşılır. Bu yüzden uzay zaman tersi için, tilde (hançer) sembolünü ters çevirir ve üç boyutta ters yöne dönmenin operatörü için hançer sembolü kullanılır. Eğer ilk olarak kuantum iç çarpımının reel kısmını dikkate alırsak [19];

$$\Re\langle\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\varphi}\rangle = \Re(\boldsymbol{\psi}_1^{\dagger}\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2^{\dagger}\boldsymbol{\varphi}_2) \tag{3.22}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifade kuantum operatörünün uzayını geren baz vektörlerinin iç çarpımının reel kısmıdır. Denklem (3.22) aşağıdaki gibi,

$$\Re\langle\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\varphi}\rangle \leftrightarrow \langle\boldsymbol{\psi}^{\dagger}\boldsymbol{\varphi}\rangle \tag{3.23}$$

olarak yeniden yazılmaktadır. Buradan;

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \Re\langle\psi|\varphi\rangle - i\Re\langle\psi|i\varphi\rangle \tag{3.24}$$

ifadesi elde edilip; bütün iç çarpım bölüntülü kuaterniyonların bazları cinsinden;

$$\langle\psi\,\varphi\rangle \leftrightarrow \langle\psi^{\dagger}\varphi\rangle - \langle\psi^{\dagger}\varphi\,\boldsymbol{e}_1\rangle\,\boldsymbol{e}_1 \tag{3.25}$$

olarak yazılabilir. Denklem (3.25)'de de "$\boldsymbol{e}_1$" bileşeni dışarı alınabilir. Bir **A** çoklu vektörü üzerindeki bu izdüşümün sonucu $\langle \mathbf{A}\rangle_{\mathbf{q}}$ olarak yazılmaktadır. Üç boyutlu bu izdüşümdeki her dereceden çoklu vektör için;

$$\langle\mathbf{A}\rangle_{q} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + (-i\boldsymbol{e}_1)\mathbf{A}\,(-i\boldsymbol{e}_1)) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \boldsymbol{e}_1\mathbf{A}\,\boldsymbol{e}_1) \tag{3.26}$$

şeklinde basit bir ifadeye sahiptir. Böylece birçok problemin analizini yapmak için basitleştirilmiş yeni yollar sağlanmış olur.

3.4 Spin Vektör

k yönündeki spinin beklenen değerini bölüntülü kuaterniyonlarla;

$$\langle\psi|\boldsymbol{e}_k|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi^{\dagger}\boldsymbol{e}_k\psi\,(-i\boldsymbol{e}_1)\rangle - \langle\psi^{\dagger}\boldsymbol{e}_k\psi\,i\rangle\,i\boldsymbol{e}_1 \tag{3.27}$$

olarak ele alalım. Çünkü $\psi^{\dagger}\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}}\psi$, kendi kendileri "-" yi vermek için ters çevirir. Skaler bölümü sıfırdır ve sağ taraftaki son terim yok olur. Kalan terim için, dikkat etmeliyiz ki 3 boyutta $\psi\,(-i\,\boldsymbol{e}_1)\psi^{\dagger}$; pure vektörüdür. Bununla birlikte spin vektörü;

$$\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{s}} = \psi(-i\boldsymbol{e}_1)\psi^{\dagger} = -i\,\psi\,\boldsymbol{e}_1\,\psi^{\dagger} \tag{3.28}$$

olarak tanımlanır. Kuantum bekleneni şimdi,

$$\begin{aligned}\langle\psi|\boldsymbol{e}_{\mathrm{k}}|\psi\rangle &= \boldsymbol{e}_{\mathrm{k}}\cdot\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{s}}\\ \langle\psi|(\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2-i\boldsymbol{e}_1)|\psi\rangle &= (\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_2-i\boldsymbol{e}_1)\cdot\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{s}}\end{aligned} \tag{3.29}$$

ifadesine indirgenir. Bu ifade kuantum operatörünün alışılmış beklenen değer formülünden daha farklı gösterimidir [19].

3.5 Spinörler ve Dönmeler

STA yaklaşımı, $\vec{V}_s$ vektörü üzerine dikkatle odaklanır. Oysa işlemci/matris teorisi sadece onun bireysel bileşenlerinden bahseder. Pauli spinörlerin;

$$\boldsymbol{\rho} \equiv \boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\psi}^{\dagger} \tag{3.30}$$

şeklinde skalerinin tanımlanmasıyla kazanılır, $\boldsymbol{\psi}$ spinörü sonra;

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\rho}^{1/2}\mathbf{R} \tag{3.31}$$

olarak ayrıştırılabilir. Burada $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}^{-1/2}\boldsymbol{\psi}$ 'dir. $\mathbf{R}$ çoklu vektörü, $\mathbf{R}\mathbf{R}^{\dagger} = 1$ koşulunu sağlar ve bu yüzden bir dönüşümdür. Bu yaklaşımda pauli spinörleri, kolayca normalize edilemeyen dönüşümdür.

$\vec{V}_s$, spin vektörü şimdi,

$$\vec{V}_s = \boldsymbol{\rho}\,\mathbf{R}\left(\text{-}\,i\boldsymbol{e}_1\right)\mathbf{R}^{\dagger} \tag{3.32}$$

olarak yazılabilir. (3.27) denkleminin beklenen değerinin çift taraflı yapılandırılması, spin yönünde sabit $\left(\text{-}\,i\boldsymbol{e}_1\right)$ ekseni etrafında döndürmek için bir bilgi içerir. $\vec{V}_s$ vektörü, $\mathbf{R}_0\vec{V}_s\mathbf{R}^{\dagger}$ ile yeni bir vektöre dönüşmektedir. Dönme, grup kombinasyonu yasası gereğince; $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_0\mathbf{R}$ 'e dönüşür. Bu,

$$\boldsymbol{\psi} \rightarrow \mathbf{R}_0\boldsymbol{\psi} \tag{3.33}$$

spinör dönüşüm yasasını indirgenir. Bu spinör dalga fonksiyonunun doğası "spin - 1/2" ile açıklanır. Spin vektörler $\vec{V}_s = \boldsymbol{\psi}\left(-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{\psi}^{\dagger}$ olarak yazıldığında uzayda yön seçilir. $\boldsymbol{\psi}$'nin sağındaki $\left(\text{-}\,i\boldsymbol{e}_1\right)$ referans çerçevesinde bir vektörü gösterir. Tüm fiziksel vektörler, $\vec{V}_s$ gibi, fiziksel yapı üzerindeki bu çerçevenin dönmesiyle elde edilmektedir. Burada $\left(\text{-}\,i\boldsymbol{e}_1\right)$ çevresi özel değildir, herhangi bir referans çerçevesi seçilebilir ve $\vec{V}_s$ üstünde uygun dönme kullanılabilirdi. Aynı yolla burada, katı cismin referans konfigürasyonunun yönelmesi de özel değildir. Bu bağımsızlık, katı cisim mekaniğinde genellikle cismin ilk durumuyla referans gruplaşmasını ortaya koymak için kullanılır. Kuantum teorisinde kural referans vektör olarak z ekseni ile çalışmaktır [19].

4. UYGULAMA

4.1 Manyetik Alanlar

Spini olmayan sıfır spinli parçacıklar da manyetik momente sahiptir. Bu,

$$\hat{\mu}_k = \gamma\, \hat{s}_k \tag{4.1}$$

şeklinde işlemcisiyle bağıntı olarak ifade edilebilmektedir. Burada $\hat{\mu}_k$, manyetik moment operatörü; $\hat{s}_k$, spin operatörü ve γ kuantum sistemini tanımlayan bir sabit olup jiromanyetik oran olarak adlandırılırlar. Jiromanyetik oran genellikle,

$$\gamma = g\frac{-q}{2m} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır. Burada m; parçacık kütlesi q; yük ve g; spin için g-faktörüdür [18].

g-faktörünün elektron, proton ve nötron için değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\text{Elektron} \quad g_e = 2, \\ &\text{Proton} \quad g_p = 5{,}587, \\ &\text{Nötron} \quad g_n = -3{,}826. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nötron için değer negatiftir. Çünkü onun spini ve manyetik momente anti paraleldir. Yukarıdakilerin hepsi, spini $1/2$ olan parçacıklardır.

Elektron, proton ve nötron gibi bazı temel parçacıkların, içyapılarındaki yük dağılımından kaynaklanan spin dipol momentleri ve ona bağlı olarak spin açısal momentumları vardır. Her açısal momentumunun bir kuantum sayısı olacağından elektron, proton ve nötron… gibi parçacıkların spin açısal momentum kuantum sayısı $s = 1/2$ olup bunlar Fermi-Dirac istatistiğine uyan parçacıklardır [20]. Pauli matrisleri ile spini $1/2$ olan parçacıkların açısal momentum vektörü arasındaki ilişki;

$$\hat{s}_k = \frac{1}{2}\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k \tag{4.4}$$

olarak tanımlanmaktadır. Böylece spin açısal momentum vektörü matrislerle ifade edilmiş olmaktadır[19, 22]. Bu ifade bölüntülü kuaterniyon bazlarıyla;

$$\begin{aligned}\hat{s}_1 &= \frac{1}{2}\hbar e_3 \\ \hat{s}_2 &= \frac{1}{2}\hbar e_2 \\ \hat{s}_3 &= -i\frac{1}{2}\hbar e_1\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.2 Manyetik Alandaki Parçacıklar

Manyetik alanda bulunan bir parçacık için Hamiltonyen operatörü;

$$\hat{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\,\hbar\, B_k \hat{\boldsymbol{\sigma}}_k = -\hat{\mu}\cdot\vec{B} \tag{4.6}$$

ifadesiyle verilir. İncelemeyi basitleştirmek için spin $1/2$ durumunda ele alalım. Yani spin operatörü kullanılmış olsun. Dalga fonksiyonu iki bileşenli bir spinör olarak,

$$|\boldsymbol{\psi}(t)\rangle = a_1(t)|+\rangle + a_2(t)|-\rangle \tag{4.7}$$

biçiminde yazılır. a_1 ve a_2 genel kompleks katsayılarıdır. Burada $|+\rangle$ büyüklüğü, sistemin $1/2$ durumunda bulunması olasılığıyla ve $|-\rangle$ ise sistemin $-1/2$ durumunda bulunma olasılılığıyla orantılıdır. Sistem, bu iki durumun birinde bulunması gerektiğinden dalga fonksiyonu bire normalleştirilmelidir [23].

Zamana bağlı dalga fonksiyonları $|\boldsymbol{\psi}(t)\rangle$ olan bir spin sistemini ele alalım. Böyle bir sistemi niteleyen zamana bağlı Schrödinger denklemi [24];

$$\hat{\boldsymbol{H}}|\boldsymbol{\psi}\rangle = i\,\hbar\frac{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{\psi}\rangle}{\boldsymbol{dt}} \tag{4.8}$$

ile verilir. Bunu klasik olarak analiz etmek zordur. İlk olarak;

$$\frac{d|\boldsymbol{\psi}\rangle}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{2}\gamma\, i\, B_{\boldsymbol{k}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{k}} |\boldsymbol{\psi}\rangle$$
$$\frac{d|\boldsymbol{\psi}\rangle}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{2}\gamma\, i \left(B_1\boldsymbol{\sigma}_1 + B_2\boldsymbol{\sigma}_2 + B_3\boldsymbol{\sigma}_3\right)|\boldsymbol{\psi}\rangle \tag{4.9}$$

biçimindeki denklemi yazalım. Bu denklemin bölüntülü kuaterniyonlarla ifadesi;

$$\frac{d|\boldsymbol{\psi}\rangle}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{2}\gamma\, i \left(B_1\boldsymbol{e}_3 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3(-\,i\boldsymbol{e}_1)\right)|\boldsymbol{\psi}\rangle \tag{4.10}$$

şeklinde olacaktır. $\boldsymbol{\psi}$ çoklu vektörü ile $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ değiştirilirse, sol taraftaki $\boldsymbol{\psi}$, çarpımı zamana göre türevini gösterir, sağ taraftaki $i\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}$ ile $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ spinörün çarpımına neden olur. Bunu

$$i\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{k}}|\boldsymbol{\psi}\rangle \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\sigma}_3(i\boldsymbol{\sigma}_3) = i\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\psi}$$
$$\leftrightarrow (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{\psi}\,\boldsymbol{\sigma}_3(i\boldsymbol{\sigma}_3) = i(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3)\boldsymbol{\psi} \tag{4.11}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bölüntülü kuaterniyonlarda bu ifade,

$$i\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{\psi}\rangle \leftrightarrow \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\psi}(-\,i\boldsymbol{e}_1)(i(-\,i\boldsymbol{e}_1)), \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\psi}\, i\,\boldsymbol{e}_1^2 = i\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\psi} \tag{4.12}$$

olacaktır. Böylece denklem (4.8)'deki Schrödinger denkleminin STA versiyonunu basitleşir ve

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{2}\gamma\, B_{\mathrm{k}}\; i\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{k}}\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2}\gamma\, i\left(B_1\boldsymbol{\sigma}_1 + B_2\boldsymbol{\sigma}_2 + B_3\boldsymbol{\sigma}_3\right)\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2}\gamma\, i\,\vec{\mathrm{B}}\boldsymbol{\psi} \tag{4.13}$$

veya bölüntülü kuaterniyonlarla;

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{2}\gamma\, i\left(B_1\boldsymbol{e}_3 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3(-\,i\,\boldsymbol{e}_1)\right)\boldsymbol{\psi} \tag{4.14}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1: $\mathbf{a}$ sabit bir bölüntülü kuaterniyon olmak üzere, üç boyutlu uzayda

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{r} = \mathbf{a} \times_L \mathbf{r}$$

dönüşümü göz önüne alınıyor. $\mathcal{A}$ nın lineer bir operatör olduğunu ve $\mathcal{A}$ operatörünü $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ sisteminde temsil eden $\mathbf{A}$ matrisinin $\mathsf{a} = \mathbf{aa}$ olmak üzere $\mathbf{A}^3 - \mathsf{a}^2\mathbf{A} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz [26].

Çözüm 1: c_1 ve c_2 iki keyfi reel sabit ve $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ de keyfi vektör olsun.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2) &= \mathbf{a} \times_L (c_1\mathbf{r}_1) + \mathbf{a} \times_L (c_2\mathbf{r}_2) \\ &= c_1\, \mathbf{a} \times_L \mathbf{r}_1 + c_2\, \mathbf{a} \times_L \mathbf{r}_2 \\ &= c_1 \mathcal{A}\mathbf{r}_1 + c_2\, \mathcal{A}\mathbf{r}_2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitliği sağlandığından $\mathcal{A}$ operatörü lineerdir.

$\mathcal{A}$ operatörünü $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ sisteminde temsil eden matrisin bulunuşu:

$\mathbf{r} = \mathbf{x}\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{y}\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{z}\boldsymbol{e}_3$, $\mathbf{r}' = \mathbf{x}'\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{y}'\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{z}'\boldsymbol{e}_3$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\boldsymbol{e}_1 + \mathbf{a}_2\boldsymbol{e}_2 + \mathbf{a}_3\boldsymbol{e}_3$

yazılırsa, basit hesapla,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}_2\mathbf{z} - \mathbf{a}_3\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{a}_1\mathbf{z} - \mathbf{a}_3\mathbf{x}, \quad \mathbf{z}' = -\mathbf{a}_1\mathbf{y} + \mathbf{a}_2\mathbf{x}$$

eşitliği, yani

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{a}_3\mathbf{y} + \mathbf{a}_2\mathbf{z} \\ -\mathbf{a}_3\mathbf{x} + \mathbf{a}_1\mathbf{z} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_3 & 0 & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_3 & 0 & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Matris çarpımı kuralı kullanılarak;

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_3(-\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2) & \mathbf{a}_2(-\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2) \\ -\mathbf{a}_3(-\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2) & 0 & \mathbf{a}_1(-\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2) \\ \mathbf{a}_2(-\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2) & -\mathbf{a}_1(-\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \mathbf{a}_3^2) & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{a}\mathbf{A}$$

Yani

$$\mathbf{A}^{3} - a^{2}\mathbf{A} = 0$$

bulunur.

Örnek 2: Bir $\mathbf{U}$ lineer operatörünün birimsel olması için gerek ve yeter şartın $\mathbf{U}$ operatörünün verilen bir Pauli gözlemlenebilir operatörünün özketlerinin oluşturduğu $\left\{\left|\boldsymbol{\sigma}_{k}\right\rangle\right\}$ tam sistemindeki $\left\langle\boldsymbol{\sigma}_{i}\middle|\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{\sigma}_{k}\right\rangle$ matris elemanlarının $\sum_{k=1}^{3}\left|\left\langle\boldsymbol{\sigma}_{i}\middle|\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{\sigma}_{k}\right\rangle\right|^{2} = 1$ şartını gerçekleştirdiğini bölüntülü kuaterniyonlar yardımıyla gösteriniz [26].

Çözüm 2: $\mathbf{U}$ birimsel $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = 1$ dir. Buna göre $\left\{\left|\boldsymbol{\sigma}_{k}\right\rangle\right\}$ tam sisteminde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{1}} = \hat{e}_{3}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{2}} = \hat{e}_{2}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{3}} = -i\hat{e}_{1}$ bölüntülü kuaterniyon bazlarını yerine yerleştirerek oluşturulan kapanış özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3}\left|\left\langle\boldsymbol{\sigma}_{i}\middle|\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{\sigma}_{k}\right\rangle\right|^{2} &= \sum\left\langle\boldsymbol{e}_{i}\middle|\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{e}_{k}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{e}_{k}\middle|\mathbf{U}^{\dagger}\middle|\boldsymbol{e}_{i}\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{3}\left\langle\boldsymbol{e}_{k}\middle|\mathbf{U}^{\dagger}\middle|\boldsymbol{e}_{i}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{e}_{i}\middle|\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{e}_{k}\right\rangle \\
&= \left\langle\boldsymbol{e}_{k}\middle|\mathbf{U}^{\dagger}\middle|\left(\sum_{k=1}^{3}\left|\boldsymbol{e}_{i}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{e}_{i}\right|\right)\middle|\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{e}_{k}\right\rangle \\
&= \left\langle\boldsymbol{e}_{k}\middle|\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}\middle|\boldsymbol{e}_{k}\right\rangle = \left\langle\boldsymbol{e}_{k}\middle|1\middle|\boldsymbol{e}_{k}\right\rangle = 1
\end{aligned}$$

bulunur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Kuaterniyonlar 1843'te Hamilton'un keşfinden bugüne kadar fizikte gerek fiziksel olayları ve denklemleri; daha anlaşılır şekilde ifade etmek, gerekse çözmek için kullanılmıştır. Fiziksel niceliklerin kuaterniyonlarda kullanılması, bu niceliklerin 3 boyuttan 4 boyuta taşınması ile mümkündür. 3 boyutlu uzayda bölme işlemi yokken kuaterniyonlarda bölme işlemi mevcuttur. Bilindiği gibi fiziksel büyüklükler kompleks değildir. Çünkü ölçülebilir hiçbir büyüklük kompleks olamaz. Fiziksel büyüklüklerin kompleks sayılarla gösterimi sadece temsilden ibarettir. Dolayısıyla kuaterniyonlar veya bölüntülü kuaterniyonlarla fiziksel niceliklerin gösterimi sadece temsil özelliği taşımaktadır. Kuaterniyon cebri bileşimli, ancak değişimli olmayan dört elemandan oluşur. Bölüntülü kuaterniyonlar da bileşimli, ancak değişimli olmayan dört elemandan oluşan bölme işlemi mevcut olmayan bir cebirdir.

Bu çalışmada; Pauli-spin matrislerini, bölüntülü kuaterniyonlarının bazlarını kullanılarak, elde ettikten sonra bu ifadeleri spin vektörlerinin spin-up ve spin-down gösterimlerini ifade etmek için kullandık. Pauli operatörlerini de bölüntülü kuaterniyonlarla gösterilmiştir. Bölüntülü kuaterniyonlar yardımıyla Pauli gözlemlenebilirliğini açıkladık. Spin vektörünü bölüntülü kuaterniyonlarla gösterdikten sonra uygulama olarak bir parçacığın manyetik alanda hareketini bölüntülü kuaterniyonlarla inceledik.

KAYNAKLAR

[1] Soydaş M., *Bikuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulaması*,Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.

[2] Özdaş K. ve Özdaş A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaterniyonlarla Temsili*, Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, **1-2**, 101-113, 1989.

[3] Akdeniz F., *Büyük Türk Matematikçisi Hüseyin Tevfik Paşa(1832-1901) Kimdir?*, 2007, http://turkoloji.cu.edu.tr/GENEL/akdeniz_tevfik_pasa.pdf

[4] Tanışlı M., *Uzaysal Dönmelerin ve Robot kollarının Pozisyonunun Kuaterniyon Dönüşümleri ile İncelenmesi*, Doktora tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1995.

[5] Tanışlı M., Özdaş K. ve Özdaş A., *An Application of General Quaternion Transformation for a Robotics Position*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, **3**, 55-68, 1997.

[6] Tanışlı M., *The Quaternionic Energy Conservation Equation for Acustic*, Acta Physiva Slovaca, **53**, 253-258, June 2003.

[7] Tanışlı M., Özgür G., Biquaternionic Represations of Angular Momentum and Dirac Equation, Acta Physiva Slovaca, **53**, 243-252, June 2003.

[8] Negi O. P. S. ve Bisht P. S., *Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism*, II Nuovo Cimento, **113(B)**, 1449-1467, 1998.

[9] De Leo S., *Quaternion and Special Relativity*, 1995, http://arxiv.org/abs/hep-th/9508011, **1**.

[10] Baylis W. E., *Clifford (Geometric) Algebra with Applications in Physics*, (Baylis, W. E.) Mathematics and Engineering, Birkhauser Boston, 60-70, 1996.

[11] Lounesto P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Pres, New York, 51-58, 1997.

[12] Kula L., *Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2003

[13] Şahin N., *Clifford Cebirleri ve Fiziksel Uygulamaları*, Dönem Projesi, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Eskişehir, 2003.

[14] Eberly D., *Quaternion Algebra and Calculus*, Created: March 2, 1999, Modified: September 27, 2002, http://www.geometrictools.com.

[15] Özdemir M., Ergin A. A., *Rotations With Unit Timelike Quaternions İn Minkowski 3-Space*, Journal of Geometry and Physics, **56** (**2**), 322-336, 2005.

[16] Majernik V., *Quaternion Formulation of The Galilean Space-Time Transformation*, Acta Physiva Slovaca Vol. **56 (1)**, 9–14, Feb. 2006.

[17] Fujioka A. and Inoguchi J., *Spacelike Surfaces with Harmonic Inverse Mean Curvature*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **7**, 657–698, 2000.

[18] From Wikipedia, the free encyclopedia, *Coquaternion*, 2006, http://en.wikipedia.org/wiki/Coquaternion.

[19] Anonim, *Physical Applications Of Geometric Algebra*.

[20] Landau L.D. ve Lifshitz E.M. (Çevirenler; Zengin M., Selamov C., Korcak S.), *Kuantum Mekaniği I*, Bilim Yayıncılık, Ankara, 75-79, 2000.

[21] Ablamowicz R., Sobczyk G., *Lectures on Clifford Geometric Algebras*, TTU press, Cookeville, Tennessee, 160-163, 2002.

[22] Aygün E. ve Zengin M.D., *Kuantum Fiziği*, Bilim Yayınevi, Ankara, 177-179, 2000.

[23] Bransden B. H., Joachain C. J. (Çevirenler; Köksal F., Gümüş H.), *Atom ve Molekül Fiziği*, Bilim Yayıncılık, Ankara, 250-253, 1999.

[24] Dereli T. ve Verçin A., *Kuantum Mekaniği 2*, Metu Press Yayınları, Ankara, 45-50, 2000.

[25] Bransden B. H., Joachain C. J. (Çevirenler; Köksal F., Gümüş H.), *Atom ve Molekül Fiziği*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun, 569-575, 1989.

[26] Rızaoğlu E., *Kuantum Mekaniği Çözümlü Problem Kitabı*, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 340-343, 1987.