

**ÇEKİRDEKTE YÜK DEĞİŞİMLİ KOLLEKTİF
TİTREŞİMLER**

Serdar ÜNLÜ
Doktora Tezi

Fizik Anabilim Dalı
Ekim-2006

**Bu tez çalışması Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu
(TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. Proje No: 104T152**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serdar Ünlü'nün "**Çekirdekte Yük Değişimli Kollektif Titreşimler**" başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 06.10.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. CEVAT SELAMOV
Üye	: Prof. Dr. ATALAY KÜÇÜKBURSA
Üye	: Prof. Dr. ÖNDER ORHUN
Üye	: Prof. Dr. GÜNEŞ TANIR
Üye	: Doç. Dr. HALUK HÜSEYİN

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

ÇEKİRDEKTE YÜK DEĞİŞİMLİ KOLLEKTİF TİTREŞİMLER

Serdar ÜNLÜ

**Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç.Dr.Cevat SELAMOV
2006, 74 sayfa**

Bu tezde Pyatov ve Salamov tarafından geliştirilen yöntemle dayanarak üç farklı β bozunumu için Gamow-Teller geçiş özellikleri incelenmiştir. Gamow-Teller etkin etkileşme sabiti nükleer Hamiltonyenin merkezci teriminin Gamow-Teller operatörü ile komütatif olması koşulundan bulunmuş ve dolayısıyla serbest bir parametre olmaktan çıkarılmıştır. Daha sonra ise Kuazi Rasgele Faz Yaklaşımı çerçevesinde komşu çekirdeklerde oluşan GT (Gamow-Teller) 1^+ uyarılmış durumların enerjileri ve dalga fonksiyonları hesaplanmıştır. Gamow-Teller Rezonansını karakterize eden büyüklüklerden GTR (Gamow-Teller Rezonans) enerjisi $112 \leq A \leq 124$ bölgesindeki, düşük enerjili β geçişleri için $\log(ft)$ değerleri $98 \leq A \leq 130$ bölgesindeki çekirdekler için hesaplanmıştır. Ayrıca iki nötrinolu çift beta bozunumunu karakterize eden çekirdek matris elemanları $^{128,130}\text{Te}$ çekirdeği için hesaplanmıştır. Tüm sayısal hesaplamalar Fortran 77 programlama dilinde yapılmıştır. Bu hesaplamalar neticesinde elde edilen sonuçlar şematik model ile elde edilen sonuçlar ve uygun deneysel veriler ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gamow-Teller Rezonansı, Kuazi Rasgele Faz Yaklaşımı,

Çift Beta Bozunumu, Hamiltonyen, Fortran 77

ABSTRACT

PhD Thesis

CHARGE EXCHANGE COLLECTIVE VIBRATIONS IN NUCLEI

Serdar ÜNLÜ

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Physics Program

Supervisor: Assoc.Prof. Dr.Cevat SELAMOV
2006, 74 pages

In this thesis, based on the method developed by Pyatov and Salamov, Gamow-Teller transition properties for three different β decay processes are investigated. Gamow-Teller effective interaction constant is found by using the commutativity of Gamow-Teller operator with the central term in nuclear hamiltonien and taken out to be a free parameter. The energies and wave functions of GT (Gamow-Teller) 1^+ excited states occurring in neighbour nuclei are calculated within the framework of Quasi Random Phase Approximation. GTR (Gamow-Teller Resonance) energy, which is one of the characteristic quantities for GT transitions, for the nuclei in the mass region of $112 \leq A \leq 124$ and the $\log(ft)$ values for the β transitions with low energy in the mass region of $98 \leq A \leq 130$ are calculated. Furthermore, two neutrino double beta decay nuclear matrix elements are calculated for $^{128,130}\text{Te}$ nuclei. All of the numerical calculations are based on Fortran 77 program language. The obtained results are compared with those of the schematic model and the corresponding experimental data.

Keywords: Gamow-Teller Resonance, Quasi Random Phase Approximation,
Double Beta Decay, Hamiltonian, Fortran 77

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasındaki önemli katkılarından dolayı danışmanım Doç. Dr. Cevat Selamov hocama teşekkürlerimi sunarım. Danışman hocamın beni çalışmaya maksimum düzeyde motive eden yaklaşımı bu tez çalışmasının başarılı bir düzeye gelmesinde çok önemlidir. Doktora tez çalışmasının teorik olması kişinin hocası ile etkileşmesini önemli kılar. Böyle bir çalışmayı tek başına yürütüp başarılı bir şekilde sonlandırmak hiç kolay değildir. Çalışmam süresince sayın hocam Cevat Selamov bana ihtiyacım olan desteği yeterince sağlamıştır.

Ayrıca, danışman hocamın yanı sıra tez çalışması süresince benden manevi desteklerini esirgemeyen aileme, sağladığı manevi destek ile birlikte doktora eğitimim süresince belli bir dönem danışmanlığımı yaparak değerli tavsiyeleri ile bana ışık tutan Prof. Dr. Önder Orhun hocama ve tez izleme komitesinde yer alarak değerli tavsiyelerini benden esirgemeyen Prof. Dr. Atalay Küçükburşa'ya teşekkür ederim.

Serdar ÜNLÜ

Ekim 2006

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. GAMOW-TELLER GEÇİŞ ÖZELLİKLERİ	3
2.1. Beta Bozunumunun Fermi Teorisi	3
2.2. Gamow-Teller Bozunumu	7
2.3. Çift Beta Bozunumu	9
3. BOZULMUŞ SİMETRİNİN RESTORE EDİLMESİ YÖNTEMİ	13
4. PARÇACIK UZAYINDA GAMOW-TELLER GEÇİŞLERİNİN ÖZUYUMLU OLARAK İNCELENMESİ	22
4.1. Gamow-Teller Operatörü	22
4.2. Etkin Etkileşmenin Öz Uyumlu Olarak Bulunması	23
4.3. GT 1 ⁺ Durumlarının RPA İle İncelenmesi	25
4.4. Gamow-Teller β Geçiş Matris Elemanlarının Hesaplanması.....	27
4.5. Hesaplama Sonuçları	28
5. KUAZİ PARÇACIK UZAYINDA GAMOW-TELLER GEÇİŞLERİNİN ÖZUYUMLU OLARAK İNCELENMESİ	36
5.1. Gamow-Teller Operatörü	36
5.2. Etkin Etkileşmenin Öz Uyumlu Olarak Bulunması	37
5.3. GT 1 ⁺ Durumlarının QRPA İle İncelenmesi	41

5.4. Gamow-Teller β Geçiş Matris Elemanlarının Hesaplanması.....	44
5.5. Hesaplama Sonuçları.....	45
6. SONUÇLAR VE YORUMLAR.....	54
6.1. GTR Özellikleri.....	54
6.2. Düşük Enerjili β^\pm Bozunumu İçin Log(ft) Değerleri	56
6.3. İki Nötrinolu Çift Beta Bozunumu İçin Çekirdek Matris Elemanları ..	57
KAYNAKLAR	61
Ek-1 Bozon Operatörlerinin Komutasyonu	67
Ek-2 Kuazi Bozon Operatörlerinin Komutasyonu	69
Ek-3 Ortalama Alan Hamiltoniyeni İle Bozon Operatörlerinin Komutasyonu.....	70
Ek-4 Kuazi Parçacık Tasvirinde Ortalama Alan Hamiltoniyeni İle Bozon Operatörlerinin Komutasyonu.....	72
Ek-5 Normalizasyon Koşulunun Elde Edilmesi	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

4.1.	^{112}Sb izotopunda β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı	34
4.2.	^{118}Sb izotopunda β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı	34
4.3.	^{124}Sb izotopunda β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı	35
5.1.	^{112}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı	52
5.2.	^{118}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı	52
5.3.	^{124}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı	53
6.1.	GTR enerjilerinin kütle numarası ile değişimi.....	54
6.2.	GTR ve IAR arasındaki enerji farklarının kütle numarası ile değişimi.....	55
6.3.	^{130}Xe izotopu için etkin etkileşme parametrelerinin çift etkileşme parametresine olan bağıllığı.....	59
6.4.	Pd izotopları için etkin etkileşme parametrelerinin kütle numarasına olan bağıllığı.....	59

ÇİZELGELER DİZİNİ

4.1.	^{112}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	29
4.2.	^{114}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	29
4.3.	^{116}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	30
4.4.	^{118}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	31
4.5.	^{120}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	32
4.6.	^{122}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	32
4.7.	^{124}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu	33
4.8.	I \rightarrow Te taban durumları arasındaki β^+ geçiş log(ft) değerleri	33
4.9.	Cs \rightarrow Xe taban durumları arasındaki β^+ geçiş log(ft) değerleri.....	33
5.1.	^{112}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	45
5.2.	^{114}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	46
5.3.	^{116}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	47
5.4.	^{118}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	48
5.5.	^{120}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	49
5.6.	^{122}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	50
5.7.	^{124}Sb İzotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu	51
6.1.	Farklı yöntemler ile hesaplanmış β^+ geçişleri için log(ft) değerleri	56
6.2.	Farklı yöntemler ile hesaplanmış β^- geçişleri için log(ft) değerleri	57
6.3.	Farklı modeller ile hesaplanmış iki nötrinolu çift beta bozunumu için çekirdek matris elemanları	58

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

A	: Nükleon sayısı
$B_{GT}^{(\pm)}$: Beta geçiş güç fonksiyonu
E_p	: Proton enerjisi (MeV)
$G_{1\mu}^{\pm}$: Gamow-Teller operatörü
GTR	: Gamow-Teller Rezonansı
g	: Zayıf etkileşme parametresi
\hbar	: Planck sabiti
$J_{\sigma\tau}$: Hacim integrali
k	: Kütle merkezi sisteminde dalga sayısı
λ	: Beta bozunma hızı
μ	: İndirgenmiş kütle
M_{GT}	: Gamow-Teller matris elemanı
M3Y	: Etkin etkileşme
$N_{\sigma\tau}$: Bozulma faktörü
n	: Durum sayısı
p	: Elektron momentumu
q	: Nötrino momentumu
RPA	: Rasgele Faz Yaklaşımı
QRPA	: Kuazi Rasgele Faz Yaklaşımı
Ψ_i	: Başlangıç dalga fonksiyonu
Ψ_s	: Son durum dalga fonksiyonu
φ	: Serbest parçacık dalga fonksiyonu
ρ	: Durum yoğunluğu
ω_i	: Gamow-Teller 1^+ durumlarının enerjisi
V_{si}	: Beta geçiş matris elemanı
σ	: Saçılma tesir kesiti
Ω	: Katı açısı
Q	: Bozunma enerjisi
T	: Kinetik enerji

f	: Fermi dağılım fonksiyonu
f_t	: Bozunma süresi
χ	: Etkin etkileşme parametresi
$\omega_{2\nu}$: İki nötrinolu çift beta geçiş olasılığı
$f_{2\nu}$: Faz integrali
ε_{-1}	: Çift beta geçiş matris elemanı
W	: Çift beta geçiş enerjisi
H	: Hamilton operatörü
H_{sp}	: Tek parçacık hamiltonyeni
H_{sqp}	: Tek kuazi parçacık hamiltonyeni
P	: Lineer momentum
V	: Potansiyel enerji
h	: Etkin etkileşme hamiltonyeni
$\hat{\sigma}$: Spin operatörü
$\hat{\tau}$: İzospin operatörü
ε	: Tek parçacık enerjisi
\hat{a}^+	: Parçacık üretme operatörü
\hat{a}	: Parçacık yok etme operatörü
$\hat{\alpha}^+$: Kuazi parçacık üretme operatörü
$\hat{\alpha}$: Kuazi parçacık yok etme operatörü
\hat{F}	: Tek parçacık operatörü
$f_{\nu\nu'}$: İndirgenmiş matris elemanı
\hat{t}_+	: İzospin yükseltgenme operatörü
\hat{t}_-	: İzospin indirgenme operatörü
j	: Toplam açısal momentum kuantum sayısı
m	: Manyetik kuantum sayısı
\hat{A}^+	: Bozon üretme operatörü
\hat{A}	: Bozon yok etme operatörü
\hat{C}^+	: Kuazi bozon üretme operatörü
\hat{C}	: Kuazi bozon yok etme operatörü

V_c	: Coulomb potansiyeli
$V_{\ell s}$: Spin yörünge potansiyeli
d_{np}	: İndirgenmiş matris elemanı
f_{np}	: İndirgenmiş matris elemanı
g_{np}	: İndirgenmiş matris elemanı
K_{np}	: İndirgenmiş matris elemanı
γ_ρ	: Öz uyumlu etkin etkileşme parametresi
\hat{Q}_i^+	: Fonon üretme operatörü
\hat{Q}_i	: Fonon yok etme operatörü
r_{np}^i	: Dalga fonksiyonunun genliği
s_{np}^i	: Dalga fonksiyonunun genliği
ψ_{np}^i	: Dalga fonksiyonunun genliği
φ_{np}^i	: Dalga fonksiyonunun genliği

Alt ve üst indisler

GT	: Gamow-Teller
GTR	: Gamow-Teller Rezonansı
n	: Nötron
p	: Proton
C	: Coulomb
ℓs	: Spin yörünge
i	: GT 1^+ durumlarının sayısı
si	: İlk durumdan son duruma geçiş
v	: Nötrino
sp	: Tek parçacık
sqp	: Tek kuazi parçacık

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Yük değişimli kollektif uyarmaların (Fermi ve Gamow-Teller rezonansları) incelenmesi çekirdek yapısının anlaşılmasında çok önemlidir. Söz konusu Fermi ve Gamow-Teller geçişlerinin incelenmesi otuz yılı aşkın bir süredir devam etmesine rağmen hala güncelliğini korumaktadır. Özellikle son yıllarda hızlandırıcı teknolojisinin gelişmesi ile birlikte bazı ekzotik çekirdeklerin (protonu veya nötronu bol) keşfedilmesi bu konuya olan ilginin artmasını sağlamıştır. Kapsamlı bir literatür taraması yapıldığı taktirde son yıllarda Fermi ve Gamow-Teller geçişlerine ilişkin yapılmış çok sayıda çalışmaya rastlamak mümkündür.

Gamow-Teller rezonansı ile ilgili yapılan çalışmaların tarihsel geçmişine baktığımızda 1963 yılına geri gitmek gerekir. Bu yıl içerisinde Japon bilim adamları Ikeda ve Fujita [1] süper izinli geçişler olarak adlandırılan Fermi geçişlerini bir tane serbest parametre içeren şematik etkin etkileşme yöntemi ile incelemişlerdir. Burada, söz konusu parametrenin sayısal değeri deneysel veriler ile fit edilerek hesaplanmıştır. Hesaplamanın neticesinde belli bir enerji değerinde Fermi geçiş olasılığının keskin bir artış gösterdiğini saptayarak (Fermi rezonansı) deneysel veriler ile birebir uyan bir sonuç elde edilmiştir. Aynı bilim adamları, Fermi rezonansını açıklamak için kullandıkları bu modelin bir yük değişimli spin-spin geçişi olan Gamow-Teller geçişlerini açıklamak için de kullanılabileceğini ifade ederek deneyçileri yönlendirmişlerdir. Gamow-Teller rezonansına ilişkin ilk deneysel gözlem 1975 yılında $E_p = 35$ MeV olan $^{90}\text{Zr}(p,n)^{90}\text{Nb}$ reaksiyonu ile yapılmıştır [2]. Gamow-Teller rezonansının (GTR) incelenmesinde (p,n) reaksiyonları önemli bir araç olmuştur ve yaygın olarak kullanılmaktadır [3,4]. İkinci bir alternatif, ($^3\text{He},t$) reaksiyonudur. Bu reaksiyonu kullanarak, ^{90}Nb izotopunda GT güç fonksiyonu çeşitli enerjilerde incelenmiştir [5-8]. Çoğu çalışmada (p,n) ve ($^3\text{He},t$) reaksiyonları kullanılmasına rağmen ($^6\text{Li},^6\text{He}$) reaksiyonu da spin-izospin modlarının incelenmesi için uygun ve alternatif bir araçtır. Gamow-Teller Rezonansının (GTR) deneysel olarak izah edilmesinin ardından serbest parametre içeren şematik etkin etkileşme yöntemi kullanılarak teorik olarak GTR açıklanmıştır. Tıpkı süper izinli geçişlerde olduğu gibi belli bir enerji değerinde Gamow-Teller geçişinin çok büyük bir olasılık ile gerçekleştiği görülmüştür.

Yukarıda bahsedilen şematik model her ne kadar deney ile uyumlu netice verse de, kollektif spin-izospin geçişlerinin (GT geçişleri) bu model ile kapsamlı bir şekilde incelenmesi mümkün değildir. Çünkü, kollektif spin-izospin geçişlerinin incelenmesi GTR' yi karakterize eden büyüklüklerin (GTR enerjisi, Ikeda toplam kuralına olan yüzde katkı, tesir kesiti...) hesaplanmasından ibaret değildir. Bunlarla birlikte, düşük enerjili β geçişleri için $\log(ft)$ değerlerinin veya yarı ömürlerin ve iki nötrinolu çift beta bozunumu için çekirdek matris elemanlarının hesaplanması incelenen çekirdeğin yapısının anlaşılması için son derece önemlidir. Şematik etkin etkileşme modeli, deneye bağımlı bir model olmasından dolayı yapılan hesaplamalarda her bir proses için etkin etkileşme parametresi farklı değerlere sahip olur. Bu durum, kullanılan etkin etkileşmenin belirsiz olmasına neden olur ki bu noktada şematik etkin etkileşme modeli geçerliliğini kaybeder. Bu yüzden, spin-izospin kollektif geçişlerinin sağlıklı bir şekilde incelenebilmesi için deneyden bağımsız olan öz uyumlu modellere ihtiyaç duyulur.

Bu çalışmadaki amaç Pyatov ve Salamov tarafından geliştirilen öz uyumlu etkin etkileşme yöntemini [9] daha da geliştirerek, şimdiye kadar sadece bozulmuş olan simetritelerin restore edilmesinde kullanılan bu yöntemin daha genel olarak bozulmuş komütatiflik koşullarının restorasyonunda da kullanılabileceğini göstermektir. Bu amaç doğrultusunda söz konusu yöntem; $112 \leq A \leq 124$ bölgesinde yer alan Sn izotopları için GTR'yi karakterize eden büyüklüklerden GTR enerjisi, $98 \leq A \leq 130$ bölgesinde yer alan çekirdekler için düşük enerjili beta geçiş $\log(ft)$ değerleri ve $^{128,130}\text{Te}$ çekirdekleri için iki nötrinolu çift beta bozunumu çekirdek matris elemanlarının hesaplanmasında kullanılmıştır. Bu yöntemle göre, Gamow-Teller etkin etkileşme sabiti matematiksel bir koşuldan faydalanarak öz uyumlu olarak bulunmuş ve dolayısıyla serbest parametre olmaktan çıkarılmıştır. Nükleonlar arasındaki çiftlenme etkilerinin de dikkate alınması ile problem Kuazi Rasgele Faz Yaklaşımı (QRPA) çerçevesinde çözülmüştür. Hesaplamalarımızda baz olarak tabakalı çekirdek modeli esas alınmıştır. Ortalama alan potansiyelinin radyal kısmı için Woods-Saxon potansiyeli kullanılmıştır.

Ele alınan bu üç bozunum süreci ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar hakkında bilgi bir sonraki bölümde uygun paragraflarda verilecektir.

2. GAMOW-TELLER GEÇİŞ ÖZELLİKLERİ

Gamow-Teller geçişlerinin incelenmesi sadece nükleer olayların değil, süpernova oluşumu gibi bazı temel astrofizik proseslerin anlaşılmasında da çok önemlidir [10]. Ayrıca, çift beta bozunum prosesine ilişkin geliştirilen teorilerin geçerliliğini kontrol etmek açısından GT rezonansları büyük öneme sahiptir. Şimdi Gamow-Teller geçişleri kullanılarak hesaplanan bazı büyüklükler hakkında temel bilgiler verip ardından bugüne kadar bunlarla ilgili yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedeceğiz.

2.1. Beta Bozunumunun Fermi Teorisi

Nükleer yapının ve zayıf etkileşme özelliklerinin doğru olarak anlaşılabilmesinde beta bozunumunun önemi büyüktür. Beta bozunumundaki karakteristik süreler doğal nükleer süreden (10^{-20} s) çok daha uzundur. Bozunmaya neden olan etkileşmenin zayıf bir pertürbasyon olarak ele alınması ile herhangi bir geçiş hızı Fermi altın kuralı olarak bilinen

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{si}|^2 \rho(E_s) \quad (2.1)$$

bağıntı ile hesaplanır. Bu eşitlikte λ , beta bozunum hızını; V_{si} , matris elemanını; $\rho(E_s)$, $\frac{dn}{dE_s}$ şeklinde yazılabilen son durum yoğunluğunu; dn , dE_s enerji aralığındaki son durum sayısını göstermektedir.

$$V_{is} = \int \Psi_s^* V \Psi_i d\mathbf{v} \quad (2.2)$$

Fermi, β bozunumu için V 'nin matematik ifadesini bilmiyordu. Bu nedenle yukarıdaki (2.1) ve (2.2) denklemlerini kullanmadı. Bunun yerine özel görelilik ile uyuşan tüm mümkün şekilleri kullanarak O_x ile gösterilen beş matematik işlemciden birinin V yerine kullanılabileceğini gösterdi. X alt indisi O işlemcisinin şeklini verir: $X=V$ (vektör), A (eksenel vektör), S (skaler), P (psödoskaler) veya T (tensör).Yapılan incelemelerin sonucunda β bozunumu için uygun şeklin $V-A$ olduğu çıkarılmıştır.

Son durum dalga fonksiyonu yalnız çekirdeği değil elektron ve nötrinoyu da içermelidir. Bu durumda etkileşme matris elemanı,

$$V_{is} = g \int [\Psi_s^* \varphi_e^* \varphi_\nu^*] O_x \Psi_i d\nu \quad (2.3)$$

şeklindedir. Burada Ψ_s , son durum nükleer dalga fonksiyonunu; O_x , matematiksel bir işlemciyi; φ_e ve φ_ν elektron ve nötrino dalga fonksiyonlarını; g ise zayıf etkileşme parametresini gösterir.

Köşeli parantez içindeki ifade bozunmadan sonraki tüm sistemi temsil eder.

Eğer elektron V hacimli bir kutu içinde bulunuyorsa momentumu p ile $p+dp$ aralığındaki momentumlara karşılık gelen dn_e son elektron durumları;

$$dn_e = \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} \quad (2.4)$$

olur. Benzer şekilde yayınlanan nötrino durumlarının sayısı

$$dn_\nu = \frac{4\pi q^2 dq V}{h^3} \quad (2.5)$$

olur. Burada, q nötrinonun momentumunu gösterir. Bir elektron ile bir nötrinonun bulunduğu son durum sayısı:

$$d^2n = dn_e dn_\nu = \frac{(4\pi)^2 V^2 p^2 dp q^2 dq}{h^6} \quad (2.6)$$

şeklinde olur. Elektron ve nötrino dalga fonksiyonları V hacmi için normalize edilirse;

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \quad (2.7a)$$

$$\varphi_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \quad (2.7b)$$

İzinli yaklaşımda elektron ve nötrinoların bozunma hızı

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{is}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 dp q^2}{h^6} \frac{dq}{dE_s} \quad (2.8)$$

şeklindedir.

Burada $M_{is} = \int \Psi_s^* O_x \Psi_i d\nu$ nükleer matris elemanını; $E_s = E_e + qc$, son durum enerjisini gösterir.

Elektron enerjisinin sabit olması halinde $\frac{dq}{dE_s} = \frac{1}{c}$ olur. Q bozunma enerjisi ise,

nükleer geri tepme enerjisi ihmal edilerek;

$$q = \frac{Q - T_e}{c} = \frac{Q - \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2}{c} \quad (2.9)$$

bulunur. Toplam bozunma hızını bulmak için denklem (2.8)'i p elektron momentumunun tüm değerleri üzerinden integre etmemiz gerekir. Bu integrali alırken nötrinin momentumu için denklem (2.9)'u kullanırız. Böylece izinli bozunmalar için

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{is}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{maks}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \quad (2.10)$$

yazılır. İntegral, Z' ve E₀ maksimum toplam elektron enerjisine kuvvetle bağlıdır (cp_{maks} = √(E₀² - m_e²c⁴)), dolayısıyla

$$f(Z', E_0) = \frac{1}{(m_e c)^3 (m_e c^2)^2} \int_0^{p_{maks}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (2.11)$$

yazarız.

Buradaki sabitler f'yi boyutsuz yapmak için kullanılmıştır ve

f(Z', E₀) fonksiyonu Fermi integrali olarak bilinir.

Burada, $\lambda = \frac{0.693}{t_{1/2}}$ bağıntısını kullanarak,

$$ft_{1/2} = 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4 |M_{is}|^2} = \frac{\text{sabit}}{|M_{is}|^2} \quad (2.12)$$

bulunur. Denklem (2.12)'nin sol tarafındaki niceliğe kıyaslanabilir yarı ömür veya ft değeri denir. Görüldüğü gibi β bozunumunda yarı ömür geçiş olasılığı ile ters orantılıdır. Yani, ft değerleri arasındaki farklar matris elemanı ve dolayısıyla nükleer dalga fonksiyonları arasındaki farktan kaynaklanır. β bozunumunda ft değerleri 10³ ile 10²⁰ s aralığında değişir. Bu nedenle ft yerine sık sık log(ft) değerleri kullanılır.

Gamow-Teller bozunumu için log(ft) 3-6 arasında değişen değerler alır. Literatürde GT tipi β geçişleri için düşük enerjilerdeki log(ft) değerleri veya yarı ömürlerin hesaplanmasına yönelik yapılmış çok sayıda çalışma vardır. Özellikle, etkin etkileşme olarak giriş kısmında bahsettiğimiz bir tane serbest parametre içeren ayrılabilir şematik spin-izospin etkin etkileşmesinin kullanıldığı çalışmalar çoğunluktadır. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır: Kuzmin ve Soloviev nötron

fazlalığı olan küresel çekirdeklerde GT β^+ geçişleri için $\log(ft)$ değerlerini hesaplamışlardır [11]. Hesaplamalarda etkin etkileşme olarak şematik rezidüel spin-izospin etkileşmesini kullanmışlardır. Parçacık-delik kanalındaki etkin etkileşme için parametre değerini $\chi_{GT}^{ph} = 23.0/A$ ve parçacık-parçacık kanalındaki etkin etkileşme için $\chi_{GT}^{pp} = -7.5/A$ olarak kabul etmişlerdir. Neticede elde ettikleri sonuçlar $A \cong 94-150$ bölgesindeki çekirdekler için deneysel veriler ile iyi uyum göstermiştir. H.Homma ve arkadaşları ise başka bir çalışmada aynı yöntemi $\chi_{GT}^{ph} = 5.2/A^{0.7}$ MeV ve $\chi_{GT}^{pp} = -0.58/A^{0.7}$ MeV şeklindeki parametre değerleri için kullanarak β bozunum yarı ömürlerini çok sayıda farklı çekirdek için hesaplamışlardır ve elde ettikleri sonuçlar deney ile iyi derecede uyum göstermiştir [12]. D.I.Salamov ve arkadaşları ise aynı parametre değerlerini kullanarak $125 \leq A \leq 131$ ve $159 \leq A \leq 181$ bölgesindeki bazı deforme çekirdekler için Woods-Saxon bazında $\log(ft)$ değerlerini hesaplamışlardır ve deneye yakın neticeler elde etmişlerdir [13]. P.Urkedal ve arkadaşları öz uyumlu Hartree Fock modeli bazında ve Tamm-Dancoff veya RPA çerçevesinde nötron bakımından zengin olan deforme çekirdekler için $\log(ft)$ değerlerini hesaplamışlardır [14]. Etkin etkileşme olarak şematik rezidüel etkileşme $\chi_{GT}^{ph} = 40/A$ MeV parametre değeri ile kullanılmıştır. A.Staudt ve arkadaşları β^- bozunumu için ayrılabilir GT etkin etkileşmesinin parçacık-delik kısmını dikkate alarak yarı ömürleri hesaplamışlardır [15]. Bu hesaplamalarda çift etkileşmenin de hesaba katılması ile pnQRPA yönteminin ileri versiyonları kullanılmıştır. M.Hirsch ve arkadaşları ise β^+ bozunumu ve elektron yakalama olayları için hem parçacık-delik hem de parçacık-parçacık etkin etkileşmelerini dikkate alarak yarı ömürleri hesaplamışlardır ve deneyle uyumlu sonuçlar bulmuşlardır [16].

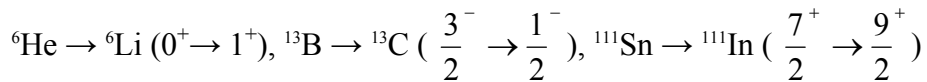
Yukarıda bahsedilen çalışmalarda da görüldüğü gibi farklı çalışmalarda farklı parametre değerleri kullanılmıştır. Buradan da anlaşılmaktadır ki şematik model ile yapılan çalışmalarda etkin etkileşme sabiti sürekli değiştiği için nükleonlar arasındaki etkin etkileşmeyi temsil eden hamiltonien belirsizdir. Bu güçlüğü aşmak için etkin etkileşme sabitinin öz uyumlu olarak belirlendiği deneyden bağımsız teorilere ihtiyaç vardır.

2.2. Gamow-Teller Bozunumu

Gamow-Teller geçişleri gibi tüm izinli β bozunumlarının teorisinde açıklanması gereken en önemli husus normalde çekirdeğin içinde bulunması mümkün olmayan elektron ve nötrino parçacıklarının nasıl oluştuğudur. Burada yapılabilecek en mantıklı açıklama, elektron ve nötrinonun bozunum esnasında bir miktar enerjinin maddeye dönüşmesi ile oluştuktan hemen sonra dışarıya atılmalarıdır. İzinli β geçişlerinin Fermi teorisine göre bozunum neticesinde yayımlanan elektron ve nötrino birer serbest parçacık olarak kabul edilir ve dolayısıyla dalga fonksiyonları serbest parçacığın dalga fonksiyonu ile aynı olmalıdır. Serbest parçacık dalga fonksiyonunun

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 + i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{(i\vec{k}\cdot\vec{r})^2}{2!} + \frac{(i\vec{k}\cdot\vec{r})^3}{3!} + \dots$$

seri açılımında ilk terimden sonra gelen terimler izinli β geçişleri için çok küçük olduğundan ihmal edilir. Yani, izinli geçişlerde elektron ve nötrinonun çekirdeğin tam merkezinde ($r=0$) oluştukları kabul edilir. Bu şartlarda, elektron ve nötrinonun yörünge açısız momentum değerleri sıfır olur ve bozunum neticesinde toplam açısız momentumdaki değişikliğin elektron ve nötrinonun spinlerinden kaynaklandığı anlaşılır. Elektron ve nötrinonun her ikisinin de spinlerinin $\frac{1}{2}$ olduğu bilinmektedir. Bu iki spin vektörel anlamda birbirlerine paralel ($S=1$) veya antiparalel ($S=0$) olabilir. Eğer spinler antiparalel ise bu bozunuma Fermi bozunumu denir ve bu bozunum neticesinde toplam spinde bir değişiklik olmaz, eğer spinler paralel ise bu bozunuma Gamow-Teller bozunumu denir. Bu durumda başlangıç açısız momentumu I_i ve son durum açısız momentumu I_s uzunluğu 1 olan bir vektör oluşturacak biçimde çiftlenmelidir : $I_i = I_s + 1$. Bu, yalnızca $\Delta I = 0$ veya 1 ise olanaklıdır. Saf Gamow-Teller geçişleri için aşağıdaki bozunumlar örnek olarak verilebilir :



Bunlara ilave olarak, GT tipi bozunumlar eksensel vektör ve-veya tensör tipi etkileşimleri kabul eder. GT bozunumu için seçim kurallarını özetleyecek olursak, açısız momentum $\Delta I = 0, \pm 1$; parite değişimi yoktur.

Beta bozunumlarının yarı ömürleri, çok geniş bir zaman spektrumu olan 10^{20} yıla kadar uzanır. Bunun önemli nedenlerinden biri, ilk ve son durum nükleer dalga fonksiyonlarını açık bir şekilde ifade etmenin zor olmasıdır. Bu durum, Gamow-Teller matris elemanı (M_{GT})'nin hesaplanmasını zorlaştırır. Sadece “ayna bozunumlar” olarak adlandırılan özel bir bozunma tipinde bu hesabı yapmak biraz daha kolaydır. Çünkü, bu bozunumların ilk ve son dalga fonksiyonlarında çok küçük farklılıklar dışında bir değişiklik olmaz.

İzinli Gamow-Teller geçişlerinin nükleer yapının anlaşılmasına katkıda bulunması için bu bozunumu karakterize eden büyüklüklerin doğru olarak hesaplanması gerekir. Bu büyüklüklerden biri GT matris elemanıdır. Genel olarak GT matris elemanı

$$M_{GT}^{is} = \sum_{\mu} \langle \Psi_s | G_{1\mu}^{\pm} | \Psi_i \rangle \quad \mu = 0, \pm 1 \quad (2.13)$$

olarak verilir. Burada Ψ_i , başlangıçtaki dalga fonksiyonunu; Ψ_s , son durum dalga fonksiyonunu; $\hat{G}_{1\mu}^{\pm} = \hat{\sigma}_{1\mu} \hat{t}_{\pm}$ ise GT geçiş operatörünü göstermektedir.

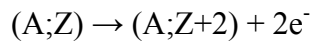
Kapsamlı bir literatür taraması yapıldığında Gamow-Teller rezonansı ile ilgili çok sayıda çalışmaya rastlamak mümkündür. Kuzmin ve Soloviev ağır çekirdeklerde GTR dağılımını kuasiparçacık fonon modeli çerçevesinde incelemişler ve sonuçta GTR'nin sadece 30 MeV civarındaki uyarılma enerjilerine kadar yayılabildiğini göstermişlerdir [17]. Colo ve arkadaşları sürekli Tamm Dancoff yaklaşımını farklı tipteki Skyrme etkileşmeleri ile birlikte Hartree Fock formalizmi ile birleştirerek GTR'nin yayılmasını incelemişler ve bu yayılımın parçacık bozunum genişliğini hesaplamışlardır [18]. Neticede, GTR enerjisinin 18–24 MeV aralığında olduğunu ve GTR enerjisi için elde edilen değerin deneysel değere göre 2-4 MeV daha büyük olduğunu bulmuşlardır. Ayrıca, GTR Ikeda toplamının %61-68'ne sahiptir ve parçacık bozunum genişliği için hesaplanmış olan değerin (3 MeV) deneysel değerden (3.8 MeV) küçük olduğunu görmüşlerdir. Ayrıca, ^{208}Bi çekirdeğinde GTR, Dang ve arkadaşları tarafından iki parçacık – iki delik (2p2h) konfigürasyonlarını kapsayacak şekilde ele alınmıştır [19]. Onlar bu çalışmalarında iki cisimli rezidüel etkileşmeyi bir M3Y etkin etkileşmesi formunda kullanmışlar ve problemi RPA ile çözmüşlerdir ve GTR enerjisini 16.6 MeV olarak bulmuşlardır. Bu değer deneysel değerden 2.6 MeV

aşağıdadır. 2p2h durumlarının dikkate alınması GTR'nin dağılımını yaklaşık 60 MeV'e kadar çıkarmış ve Ikeda toplamının %57'sine sahip olmasını sağlamıştır. Moukhai ve arkadaşları hesaplamalarında Landau-Migdal parametrelerini kullanarak RPA (Rasgele Faz Yaklaşımı) çerçevesi içerisinde ^{208}Bi çekirdeğinde GT güç dağılımını incelemişlerdir ve deneysel veriler ile yaptıkları karşılaştırmalar neticesinde parametrenin değerini 0.76 olarak elde etmişlerdir [20]. Suzuki ve Sagawa ^{208}Bi çekirdeğinde GT 1^+ durumlarını öz uyumlu Hartree Fock + Tamm Dancoff yaklaşımı ile incelemişlerdir [21]. Hesaplanan GTR değeri deneysel değer 0.4 MeV altındadır ve toplamın %63.6'sını içermektedir. Landau-Migdal parametresinin 0.78 olarak bulunduğu bir başka çalışmada ise RPA yöntemi ile $\omega_{\text{GTR}} = 16.2$ MeV olarak belirlenmiştir ve bu deneysel değerden 0.6 MeV fazladır. GTR, Ikeda toplamının %69'unu içermiştir [22]. GTR'ye ilişkin yakın zamanda yapılan çalışmalardan birinde ise ^{208}Bi çekirdeğindeki GT 1^+ durumlarının incelenmesi öz uyumlu bir yöntem olan Pyatov'un yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada GTR enerjisi 15.897 MeV olarak hesaplanmış ki bu değer (15.6 ± 0.2) MeV olan deneysel değere çok yakındır. Bu çalışmada GTR Ikeda toplamının %79.6'sını kapsamaktadır. Bu da $(\%60 \pm 15)$ olan deneysel değer 0.4 MeV altındadır ve toplamın %63.6'sını içermektedir. Landau-Migdal parametresinin 0.78 olarak bulunduğu bir başka çalışmada ise RPA yöntemi ile $\omega_{\text{GTR}} = 16.2$ MeV olarak belirlenmiştir ve bu deneysel değerden 0.6 MeV fazladır. GTR, Ikeda toplamının %69'unu içermiştir [22]. GTR'ye ilişkin yakın zamanda yapılan çalışmalardan birinde ise ^{208}Bi çekirdeğindeki GT 1^+ durumlarının incelenmesi öz uyumlu bir yöntem olan Pyatov'un yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada GTR enerjisi 15.897 MeV olarak hesaplanmış ki bu değer (15.6 ± 0.2) MeV olan deneysel değere çok yakındır. Bu çalışmada GTR Ikeda toplamının %79.6'sını kapsamaktadır. Bu da $(\%60 \pm 15)$ olan deneysel değer 0.4 MeV altındadır ve toplamın %63.6'sını içermektedir.

2.3.Çift Beta Bozunumu

Çift beta bozunumu doğada en nadir gerçekleşen nükleer olaylardan biridir. Öyle ki bu bozunum için yarı ömürler 10^{20} yıl mertebesinde veya daha uzun olabilir. Çift beta bozunumu ancak enerji açısından veya spin farkının büyük olmasından dolayı ara çekirdekler aracılığı ile ardışık tek β geçişleri mümkün olmadığında gerçekleşen bir olaydır. İkinci dereceden zayıf bir yarı-leptonik bozunum olmasından dolayı çift beta geçişleri için hesaplanan matris elemanları nükleonların elektron-nötrino alanı ile etkileşme sabitlerinin dördüncü kuvveti ile orantılıdır [24-28]. Bundan ötürü geçiş olasılığı oldukça küçüktür.

Çift beta geçişinin meydana gelmesi için birkaç tane farklı yol vardır. Bunlardan bir tanesi genel olarak



şeklinde ifade edilen nötrinösüz çift beta geçişidir. Bir diğer geçiş modu ise

$$(A; Z) \rightarrow (A; Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e.$$

ile tanımlanan iki nötrinolu çift beta geçiştir. Bu iki geçiş modu farklı fiziksel noktaları vurgular. Nötrinolu geçiş; lepton yükünün korunumu, nötrinonun etkin Majorana kütlesi, zayıf etkileşmeye yol açan sağ el akımları gibi bazı temel özellikler hakkında bilgi vermesine rağmen iki nötrinolu geçiş nötrinonun yapısına bağlı olmadığından, genel olarak nükleer yapı hakkında bilgi verir. İki nötrinolu çift beta bozunumu ($2\beta_{2\nu}$) farklı nükleer modelleri test etmek için kullanılır. Bu yüzden, bu çalışmada iki nötrinolu çift beta bozunumunu ele alacağız.

Bilindiği gibi $2\beta_{2\nu}$ bozunma olayı zayıf etkileşme açısından iki beta bozunumu arka arkaya gerçekleştiğinden ikinci kattan küçük bir olaydır. İki nötrinolu çift beta bozunumu olayında Fermi geçişleri ihmal edilirse $0^+ \rightarrow 0^+$ çift beta geçiş olasılığı için [24,25]

$$\begin{aligned} \omega_{2\nu} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{g_A^4 G^4}{96\pi^7} \int_{m_e}^{W-m_e} F(z, \varepsilon_1) |\vec{K}_1| \varepsilon_1 d\varepsilon_1 \cdot \\ \int_{m_e}^{W-\varepsilon_1} F(z, \varepsilon_2) |\vec{K}_2| \varepsilon_2 d\varepsilon_2 \cdot \int_0^{W-\varepsilon_1-\varepsilon_2} v^2 (W - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 dv \cdot \\ [K^2(\varepsilon_1, v) + K^2(\varepsilon_2, v) + K(\varepsilon_1, v) + K(\varepsilon_2, v)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

ifadesi yazılabilir. Burada;

$$K(\varepsilon, v) = \sum_n \frac{(W + 2w_n) M_{GT}(w_n)}{(W + w_n - \varepsilon - v)(w_n + \varepsilon + v)} \quad (2.15)$$

ve

$$M_{GT}(w_n) = \langle A, Z + 2 | \vec{\sigma} \tau_- | n \rangle \langle n | \vec{\sigma} \tau_- | A, Z \rangle \quad (2.16)$$

olarak gösterilmiştir. Bu ifadelerde, ε_1 , ε_2 , v ve w_n sırası ile elektronların, nötrinonun ve ara çekirdekteki 1^+ sanal durumlarının enerjilerini; $|n\rangle$ uyarılmış 1^+ durumlarının dalga fonksiyonlarını; $W = E_i - E_f$, $2\beta_{2\nu}$ geçiş enerjisini; $|\psi_i\rangle$ ve $|\psi_f\rangle$ sırası ile ana ve ürün çekirdeğin dalga fonksiyonlarını; m_e ise elektronun kütlesini gösterir.

$F(z, \varepsilon_i)$ elektronların Coulomb fonksiyonlarıdır ve rölativistik olmayan durumda [29]

$$F(z, \varepsilon_i) = \pm \frac{\varepsilon_i}{K_i} F(z) \quad (2.17)$$

formülü ile verilir. Bu formülde;

$$F(z) = \frac{2\pi\alpha z}{1 - e^{\mp 2\pi\alpha z}} \quad (2.18)$$

ile gösterilmiştir. Burada α ince yapı sabitini; Z ise ürün çekirdeğin yükünü gösterir.

Eğer her bir elektron-nötrino çiftinin aynı enerjiye sahip olduğunu varsayarsak, bir $0^+ \rightarrow 0^+$ iki nötrinolu çift beta bozunma olasılığı

$$\omega_{2\nu} = f_{2\nu} \varepsilon_{-1}^2 \ln 2 \quad (2.19)$$

şeklindeki basit bir formül ile verilir. Burada, $f_{2\nu}$ hesaplanması karmaşık matematiksel işlemler gerektiren bir faz integralini gösterir.

Burada bizim için önemli olan, ε_{-1} ile gösterilen ve genel formülü Gamow-Teller tipi geçişler için aşağıdaki gibi verilen iki nötrinolu çift beta geçiş çekirdek matris elemanıdır.

$$\varepsilon_{-1} = \sum_n \frac{\langle A, Z+2 | \bar{\sigma} \tau_- | n \rangle \langle n | \bar{\sigma} \tau_- | A, Z \rangle}{\omega_n + W/2} \quad (2.20)$$

Son zamanlarda çift beta bozunumuna yönelik gerek parçacık gerekse nükleer fizikçilerin gösterdiği ilgi, özellikle parçacık-parçacık kanalındaki etkin etkileşmenin hesaba katılmasından sonra iyice artmıştır. Bu etkileşmenin dikkate alınması ile birlikte ayrılabilir şematik model ile yapılan hesaplamalarda görülür ki etkin etkileşme sabitinin belli bir değerinde matris elemanı aniden sıfıra gitmektedir. Bu da QRPA ile elde edilen çözümün çökmesi anlamına gelir [30-35]. Standart QRPA yöntemi ile hesaplanan matris elemanının sıfıra gitmesini, parçacık-parçacık kanalındaki etkin etkileşmenin çekici olması + parçacık-delik kanalındaki etkileşme + nükleonlar arasındaki çift etkileşme ile birlikte etkileşme parametresinin belli bir değerinde bu üç etkileşmenin birbirlerini yok ettikleri düşüncesi ile açıklamak belki mümkün olabilir. Bu durumda, sistem tek parçacıklı bir sistemmiş gibi davranır. Dolayısıyla, tek parçacıklı sistem için matris elemanının değeri zaten sıfırdır. Bu yüzden bu açıklama tatmin edici olamaz. Matris elemanının aniden sıfır olması problemini ortadan kaldırmak için bazı

bilim adamları QRPA yönteminin daha gelişmiş versiyonlarını kullanmışlardır [36-47]. Bu amaca yönelik yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda belirtilmiştir.

A.A.Raduta ve J.Suhonen iki nötrinolu çift beta geçiş matris elemanlarını hesaplamak için ikinci kuazi rasgele faz yaklaşımını (second QRPA) kullanmışlardır. Bu yaklaşıma göre, pnQRPA fonon operatörü ve β^\pm geçiş operatörleri uygun çiftlenme operatörlerinin bir serisi olarak tanımlanmışlardır. Bu seride kuazi-bozon yaklaşımının da ötesinde daha yüksek dereceli terimler dikkate alınmıştır [48]. Bir başka alternatif yöntem QRPA denklemlerinin türetilmesinde rol oynayan nükleon operatörlerinin komütatöründeki ihmal edilen terimleri dikkate alarak Pauli dışarılama ilkesinin kısmen restore edilmesi fikrine dayanır. Bu komütatör RPA ile elde edilen ortalama değerinin yerini alır ve böylece ilgili operatörler ile birlikte QRPA genliklerinin renormalize edilmesi sağlanır. Buna renormalize kuazi rasgele faz yaklaşımı (RQRPA) denir. Bu yöntem ilk olarak D.J.Rowe ve K.Hara tarafından geliştirilmiştir [49,50]. Daha sonra, J.Toivanen and J.Suhonen tarafından yük değişimli etkileşmelere uygulanmıştır [40]. J.Schwieger ve diğerleri iki nötrinolu ve nötrinolu çift beta bozunumlarına bu yöntemi uygulamışlardır [41,51-54]. Sadece proton-proton ve nötron-nötron çift etkileşmelerini hesaba katan RQRPA yerine proton-nötron çift etkileşmesini de dikkate alan tam renormalize kuazi rasgele faz yaklaşımı (fullRQRPA) F.Simkovic ve arkadaşları tarafından geliştirilmiştir [52].

Buraya kadar bahsedilen çalışmalarda nükleon-nükleon etkin etkileşmesi olarak ayrılabilir şematik etkileşme kullanılmıştır. Bu etkileşmedeki sabitin serbest bir parametre olması ve bu parametrenin kritik bir değerinde çift beta geçiş matris elemanının aniden sıfıra gitmesi QRPA üzerinde bazı restorasyonlar (secondQRPA, RQRPA, fullRQRPA gibi) yapılmasını gerekli kılmıştır. Fakat, bu restorasyonlar sonucunda problem çözülememiş ve bu durumda aniden çökme etkin etkileşme sabitinin başka bir değerinde gerçekleşmiştir. Oysa bu çalışmada ortaya konan yöntemde GT etkin etkileşme sabiti matematiksel bir koşul kullanılarak yok edilmiş ve serbest bir parametre olmaktan çıkarılmıştır. Yani, matematiksel formalizm parametreden bağımsız hale getirildiği için, iki nötrinolu çift beta bozunum çekirdek matris elemanının aniden sıfıra gitmesi ile meydana gelen çökme doğrudan ortadan kalkmaktadır.

3. BOZULMUŞ SİMETRİNİN RESTORE EDİLMESİ YÖNTEMİ

Bütün çok parçacıklı sistemler gibi atom çekirdeği de lineer momentum (P), açısal momentum (J), parçacık sayısı (N) gibi korunan büyüklüklere sahiptir. Kesin olarak korunan bu fiziksel büyüklükler dışında çekirdek izospin gibi yaklaşık olarak korunan büyüklüklere de sahiptir. İzospin uzayında Oz eksenini etrafındaki bir dönme hareketi neticesinde toplam elektrik yükü kesin olarak korunurken, toplam izospin yaklaşık olarak korunur. İzospinin tam olarak korunmamasının nedeni çekirdek içerisinde yer alan protonlar arasındaki elektromanyetik etkileşme ve proton ile nötronun kütlelerinin birbirlerinden farklı olmasıdır.

Çok parçacıktan oluşan bir sistemle ilgili problemlerin kuantum mekaniksel olarak çözülmesi çok zordur. Böyle bir sistemi temsil eden hamiltonyen genel olarak

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{P_i^2}{2m_i} + \sum_{i,j} V(i,j) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda (3.1) denklemini ile verilen hamiltonyeni Schrödinger denkleminde yerine yazıp çözmek çok zordur. Buradaki zorluğun nedenlerinden biri nükleonlar arasındaki etkileşme kuvvetlerinin tam olarak bilinmemesidir. Bu ifadeye yer alan $V(i,j)$, ikili nükleon-nükleon etkileşmesini temsil etmektedir. Bu etkileşme genel olarak

$$V_{12} = \langle r'_1 s'_1 t'_1 r'_2 s'_2 t'_2 | V | r_1 s_1 t_1 r_2 s_2 t_2 \rangle \quad (3.2)$$

şeklindeki bir matris elemanı ile karakterize edilir. İki parçacıktan oluşan bir sistemin durumu koordinat dalga fonksiyonları $|r_1\rangle$ ve $|r_2\rangle$ ile spin ve izospin vektörlerinin ($|s_1\rangle, |s_2\rangle$ ve $|t_1\rangle, |t_2\rangle$) çarpımı şeklindedir. Bir parçacıklı herhangi bir operatör spin uzayında $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ spin matrisleri ve $\sigma_0 = 1$ birim matrislerinin bir lineer kombinasyonu olarak temsil edilebildiği için operatörün en genel formu

$$V = \sum_{i,j=0}^3 V_{ij} \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} \quad (3.3)$$

şeklindedir. Buradaki V_{ij} fonksiyonu, $\tau^{(1)}$ ve $\tau^{(2)}$ izospin operatörlerine de bağlıdır. Bu izospin bağımlılığının dışında V_{ij} genellikle koordinat uzayındaki integral operatörleridir.

$$V|r_1 r_2\rangle = \int V(r'_1, r'_2, r_1, r_2) |r'_1 r'_2\rangle d^3 r'_1 d^3 r'_2 \quad (3.4)$$

$V(r'_1, r'_2, r_1, r_2)$ potansiyelinin

$$V(r'_1, r'_2, r_1, r_2) = V(r_1, r_2) \delta(r_1 - r'_1) \delta(r_2 - r'_2) \quad (3.5)$$

şeklindeki bir özel durumu için V potansiyeline lokal potansiyel adı verilir ve

$$V|r_1 r_2\rangle = V(r_1, r_2) |r_1 r_2\rangle \quad (3.6)$$

şeklinde olur. Bu durumda iki parçacık arasındaki etkileşme sadece r_1 ve r_2 noktalarına bağlıdır. Yani etkileşme parçacıkların hızından bağımsızdır. Lokal olmayan potansiyellerin genellikle hız bağımlılığı gösterdiği bilinmektedir. Şimdi ikili nükleon-nükleon etkileşmesi ile ilgili bazı simetri özelliklerinden bahsedeceğiz:

- i) Hermitiklik: İkili nükleon-nükleon etkileşmesini temsil eden potansiyel enerji operatörü hermitik ($V^+ = V$) olmalıdır.
- ii) Değiş-Tokuş Simetrisi: İki parçacığın koordinatları birbirleri ile yer değiştirdiğinde aralarındaki etkileşme potansiyelinin değişmemesi [$V(1,2) = V(2,1)$] anlamına gelir. Bu özellik iki parçacıklı sistemin dalga fonksiyonunun simetrisi ile yakından ilişkilidir. Nükleonlar fermiyon olduklarından dolayı dalga fonksiyonları antisimetrik olmak zorundadır. Bu dalga fonksiyonu koordinat, spin ve izospin kısımlarının bir çarpımı olarak alındığında, koordinat ve spin kısımlarının simetrisi ile karakterize edilen Pauli prensibi ile uyumlu dört farklı kombinasyon elde edilir. Dalga fonksiyonunun izospin bileşeni ise tüm dalga fonksiyonunun antisimetriklik ihtiyacına göre belirlenir.
- iii) Translasyonel İnvaryantlık: Bunun diğer bir adı öteleme simetrisidir. Bu simetri lineer momentumun korunumuna karşı gelir. Bu durumda etkileşme sadece iki parçacığın rölatif koordinatına ($r = r_1 - r_2$) bağlıdır.

$$V(1,2) = V(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \quad (3.7)$$

- iv) Galilean Değişmezliği: Herhangi bir referans sisteminde tanımlanan iki parçacık arasındaki etkileşme potansiyeli sabit hızla hareket eden başka bir referans sisteminde değişime uğramaz. Bu durumda etkileşme sadece parçacıkların rölatif momentumlarına $[p = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) / 2]$ bağlıdır.

$$V(1,2) = V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \quad (3.8)$$

- v) Ayna Simetrisi: Bu simetri paritenin korunumu anlamına gelir. Zayıf etkileşmenin aksine kuvvetli etkileşmeler altında parite simetrisi bozulmaz.

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}) = V(-\mathbf{r}, -\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \quad (3.9)$$

- vi) Zaman Tersinirliği: Etkileşme zamanın akış yönüne bağlı değildir.

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}) = V(\mathbf{r}, -\mathbf{p}, -\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, -\boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)}) \quad (3.10)$$

- vii) Koordinat Uzayındaki Rotasyonel İnvaryantlık: Üç boyutlu koordinat uzayındaki dönmeler sadece \mathbf{r} ve \mathbf{p} vektörlerini değil $\boldsymbol{\sigma} = 2 \cdot \mathbf{s}$ olan spin matrislerini de etkiler. Spine göre V operatörü (3.3) formuna sahiptir ve koordinat uzayındaki bir dönme altında skaler olmak zorundadır. Bu özellikle V_{00} matris elemanının skaler olmak zorunda olması anlamına gelir. Burada yer alan \mathbf{r} ve \mathbf{p} gibi iki vektörden r^2, p^2 ve $\vec{r} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{r}$ gibi bağımsız üç tane skaler elde etmek mümkündür. Fakat, zaman tersinirliğinden dolayı yukarıdaki skaler ifadelerden üçüncüsünün yerine $(\vec{r} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{r})^2$ 'yi kullanmak daha uygundur. Böylece V_{00}, r^2, p^2 ve L^2 'nin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Değiş tokuş ve ayna simetrilerinden dolayı

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) = V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}) \quad (3.11)$$

eşitliği yazılabilir. Bundan ötürü (3.3) eşitliğinde bulunan lineer terimler sadece

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \quad (3.12)$$

şeklindeki spin vektörüne bağlıdır. Bir skaler elde etmek için **S** vektörü ayna dönüşümü altında değişmez olan bir vektör ile çarpılmak zorundadır. Bu ihtiyacı sadece **L** vektörü karşılar.

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot (\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \quad (3.13)$$

- viii) İzospin Uzayında Rotasyonel İnvaryantlık: İzospin formalizmi içerisinde, proton ve nötronlar elemanter bir parçacığın $\frac{1}{2}$ izospinli farklı kuantum durumları olarak kabul edilir. Nükleer kuvvetin rotasyonel invaryantlığı yükten bağımsız olması ile aynı anlamı taşır. Bilindiği gibi nükleon-nükleon saçılma deneyleri proton-proton saçılması ile nötron-nötron saçılmalarının aynı şiddete sahip olduğunu onaylamaktadır. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse nükleon-nükleon etkileşme potansiyeli toplam izospin operatörü ile komütatif olmalıdır. Öz durumlar T^2 ve T_3 operatörlerinin $T = 0, T_3 = 0$ ve $T = 1, T_3 = -1, 0, +1$ (izospin singlet ve izospin triplet) öz değerleri ile oluşturulmuştur. Yük invaryantlığı T^2 operatörü ile nükleer kuvvet operatörünün komütatif olması anlamına gelir. Bundan dolayı $T = 1$ durumundaki etkileşmeler (proton-proton, nötron-nötron veya simetrik proton-nötron durumları) aynı olmak zorundadır, fakat $T = 0$ durumundaki etkileşmeler (antisimetrik proton-nötron durumu) farklı olabilir.

Yukarıda sözü edilen simetriler nükleon-nükleon etkileşmesinin sağlaması gereken simetridir. Çok parçacıklı sistem problemini kuantum mekaniksel olarak çözümenin zorluğu, çekirdeğin deneysel olarak gözlemlenen özelliklerini teorik olarak doğrulamak için bazı çekirdek modellerinin geliştirilmesini zorunlu kılmıştır. Söz konusu modellerden biri yukarıda bahsedilen simetrilerin bozulmasına neden olan tabakalı çekirdek modelidir. Bu modele göre her bir nükleonun diğer nükleonların oluşturduğu bir ortalama alanın içinde bulunduğu kabul edilir. Ortalama alan potansiyeli ise Hartree Fock yöntemi ile bulunur.

Bu yöntemde, ortalama alanın içinde hareket eden her bir nükleonun hamiltonyenlerinin toplamı çekirdek hamiltonyenine eşittir ve değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak Schrödinger denklemi çözülebilir. Tabakalı çekirdek modeli için ortalama alan potansiyeli genel olarak

$$V(r) = V_0(r) + V_1(r) + V_{\ell s}(r) + V_c(r) \quad (3.14)$$

şeklinde kabul edilir. Burada $V_0(r)$, Woods-Saxon potansiyelinin izoskaler kısmını; $V_1(r)$, Woods-Saxon potansiyelinin izovektör kısmını; $V_{\ell s}(r)$, Spin-yörünge etkileşme potansiyelini; $V_c(r)$, Coulomb etkileşme potansiyelini göstermektedir. Yukarıdaki (3.14) denklemindeki ilk iki terim ortalama alan potansiyelinin radyal kısmını teşkil etmektedir. Bu radyal kısım için en doğru potansiyel Woods-Saxon potansiyelidir ve izoskaler kısmı aşağıdaki gibi verilir:

$$V_0(r) = -V_0 \cdot f(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]} \quad (3.15)$$

Bu eşitlikte yer alan sabitler ; $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$, $a \approx 0.5 \text{ fm}$, $r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$, $R_0 = r_0 A^{1/3}$ şeklindedir. Woods-Saxon potansiyelinin izovektör terimi ise aşağıdaki gibidir:

$$V_1(r) = 2\eta V_0 f(r) \frac{N - Z}{A} t_z \quad (3.16)$$

Bu eşitlikteki η , izovektör parametresidir. Ortalama alan potansiyelinin spin yörünge terimi ise aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$V_{\ell s}(r) = -\zeta_{\ell s} \sum_{i=1}^A \frac{1}{r_i} \frac{dV(r_i)}{dr_i} (\vec{\ell}_i \cdot \vec{s}_i) \quad (3.17)$$

Burada $\zeta_{\ell s}$, spin-yörünge etkileşme parametresini; $V(r_i)$, izoskaler ve izovektör potansiyelinin toplamı olan Woods-Saxon potansiyelini göstermektedir.

Coulomb potansiyeli ise

$$V_c(r_i) = \sum_{i=1}^A f_c(r_i) \cdot \left(\frac{1}{2} - t_z^i\right) \quad (3.18)$$

biçimindedir. Çekirdeğin tabaka modeli çekirdeğe ilişkin bir çok özelliği açıklamıştır, fakat son zamanlarda deneysel olarak da gözlemlenen ve çekirdeklere kollektif etkileşmenin sonucu olan elektrik dipol rezonansı, izobar analog rezonans, GTR... gibi olayları bu model ile açıklamak mümkün değildir.

Söz konusu kollektif modları açıklamak için tek parçacık hamiltonyenine uygun etkin etkileşme teriminin eklenmesi gerekir. İlk iki bölümde de belirtildiği gibi bu etkin etkileşme genel olarak incelenen kollektif modu temsil eden ve bir tane serbest parametre içeren ayrılabilir şematik etkin etkileşme olarak kabul edilmiştir. Bu etkin etkileşme terimi GT geçişleri için

$$\hat{h} = \chi_{GT} (\hat{\sigma}\hat{\sigma})(\hat{\tau}\hat{\tau}) \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır ve χ_{GT} sabitinin sayısal değeri GTR'yi veren deneysel veriler ile karşılaştırılarak (fit edilerek) bulunur. Böylece ortalama alan potansiyelini karakterize eden parametrelere yeni bir parametre daha ilave edilmiş olur ki, bu durum ortaya konan modelin deneye olan bağımlılığını iyice artırır. Ayrıca, bu model ile elde edilen toplam hamilton operatörünün yukarıda sözü edilen korunan fiziksel büyüklüklere ilişkin simetri özellikleri bozulmaktadır.

Sunulan bu çalışmada kullanılan yöntem hem etkin etkileşme sabitini serbest bir parametre olmaktan çıkarır hem de tabakalı model hamilton operatöründen kaynaklanan simetri bozulmasını restore eder. Bu yöntemle göre tek parçacık hamilton operatörüne etkin etkileşme terimi öyle ilave edilir ki, neticede elde edilen toplam hamilton operatörü bozulan simetriye karşı gelen korunan fiziksel büyüklüğün operatör temsili ile komütatif olsun.

Sade bir örnekle bu yöntemi izah etmeye çalışalım. Farzedelim ki tek parçacık hamilton operatörü ikinci kuantumlanma temsiliinde

$$\hat{H}_\varepsilon = \sum_v \varepsilon_v \hat{a}_v^+ \hat{a}_v \quad (3.20)$$

gibi verilmiş olsun. Burada ε_v , v seviyesindeki nükleonun enerjisini; \hat{a}_v^+ (\hat{a}_v) ise v durumunda bir nükleon yaratma (yok etme) operatörünü; v ise parçacığı karakterize eden tüm kuantum sayılarını gösterir.

Simetrisi bozulan bir parçacıklı toplanabilir büyüklüğe karşı gelen operatör ise

$$\hat{F} = \sum_{v,v'} f_{vv'} \hat{a}_v^+ \hat{a}_{v'} \quad (3.21)$$

şeklinde olsun.

Tabii ki, F operatörü H_ε Hamilton operatörü ile komütatif olmayacaktır. Yani

$$[H_\varepsilon, F] = \sum (\varepsilon_v - \varepsilon_{v'}) f_{vv'} \hat{a}_v^+ \hat{a}_{v'} \quad (3.22)$$

ifadesi sıfırdan farklı olacaktır. Bu demektir ki, F operatörü enerji uzayında köşegen değildir. Başka bir deyişle (3.20) Hamilton operatörü

$$U(\varphi) = e^{i\varphi F} \quad (3.23)$$

şeklindeki bir birimsel dönüşüme göre değişmez olmayacaktır. Bu eşitlikte yer alan φ grup parametresidir.

Bundan sonra (3.20) Hamilton operatörüne aşağıdaki şekilde

$$h = -\frac{1}{2\gamma} [H_\varepsilon, F]^+ [H_\varepsilon, F] \quad (3.24)$$

bir efektif Hamiltonyeni ilave ederek ve $H = H_\varepsilon + h$ toplam Hamiltonyeninin F operatörü ile komütatif olmasını

$$[H_\varepsilon + h, F] = 0 \quad (3.25)$$

sağlayalım. (3.24) ifadesi (3.25)'de yerine koyulursa γ parametresinin hesaplanması için aşağıdaki gibi bir ifade bulunur:

$$[H_\varepsilon, F] - \frac{1}{2\gamma} \{ [H_\varepsilon, F], [F, [H_\varepsilon, F]] \}_+ = 0 \quad (3.26)$$

burada $\{ \}_+$ antikomütatör gösterimidir. (3.26) ifadesindeki iki kat $[F, [H_\varepsilon, F]]$ komütatörünü incelemeye çalışalım. Bu iki kat komütatör sabit bir değer aldığı anda, yani:

$$\gamma = [F, [H_\varepsilon, F]] = \text{sabit} \quad (3.27)$$

durumunda (3.25) ifadesinin kesinlikle sıfır olduğu görülür. Fakat öyle durumlar olabilir ki, (3.27) çift komütasyon ifadesi sabit bir değer değildir. Bu durumda γ parametresi bir tahmine dayanarak hesaplanır. Bu tahmin (3.27) eşitliğindeki çift komütatör yerine çekirdeğin taban durumu üzerinden alınan ortalama değerini kabul edilmesidir:

$$\gamma = \langle 0 | [F, [H_\varepsilon, F]] | 0 \rangle = \sum_{v, v'} (\varepsilon_v - \varepsilon_{v'}) (n_{v'} - n_v) |f_{vv'}|^2 \quad (3.28)$$

Burada n_v v seviyesindeki parçacık sayısıdır.

Eğer aynı zamanda bir değil, bir kaç potansiyelin simetrisi bozulursa, yani

$$V = \sum_{i=1}^n V_i, [V_i, F] \neq 0 \quad (3.29)$$

olursa, bu durumda sistemin toplam Hamilton operatörünün bozulmuş simetrisini restore edecek olan karşılıklı etkin etkileşme hamiltoniyeni

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{1}{\gamma_{ij}} [\mathbf{V}_i, \mathbf{F}]^\dagger [\mathbf{V}_j, \mathbf{F}] \quad (3.30)$$

şeklinde olacaktır. Burada $\{\gamma_{ij}\}$ simetrik bir matristir ve serbest parametreler çokluğunu temsil eder. Burada da iki kat komütatör yerine onun ortalama değeri

$$\gamma_i = \langle 0 | [\mathbf{F}, [\mathbf{V}_i, \mathbf{F}]] | 0 \rangle \quad (3.31)$$

kabul edilirse,

$$[\mathbf{V} + \mathbf{h}, \mathbf{F}] \approx 0 \quad (3.32)$$

şartından γ_{ij} parametreleri için aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \gamma_i / \gamma_{ij}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.33)$$

Burada, n^2 sayıda γ parametresinden $n(n-1)/2$ 'sinin tanımlanmadığı açıktır. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için ilave bir şart olarak

$$\gamma_{ij} = \gamma_i \delta_{ij} \quad (3.34)$$

kabul edilebilir. Yani, γ_{ij} matrisinin köşegen olduğu kabul edilir. Dikkat edilmelidir ki, bu şart \mathbf{V}_i potansiyellerinden her birinin farklı simetriye sahip oldukları durum için doğrulanmaktadır.

Bu çalışmada kullanılan yöntemle ilişkin önemli bir hususu vurgulamak gerekir. Pyatov'un ortaya koyduğu yöntem bozulmuş simetrilerin restore edilmesi yöntemidir. Yani, Pyatov bu yöntemi ortaya atarken Hamilton operatörünün belli bir simetriye sahip olması düşüncesinden yola çıkmıştır. Kuantum mekaniğinden de bilinir ki, Hamilton operatörünün herhangi bir simetrisine bir korunan büyüklük karşı gelir ki, bu büyüklüğün operatör temsili Hamilton operatörünün tamamı veya söz konusu simetriye karşı gelen kısmı ile komütatif olmalıdır. Örneğin, translasyon invariantlığının restore edilmesi durumunda toplam lineer momentum operatörü \mathbf{P} , sistemin toplam Hamilton operatörü ile komütatif olmalıdır. İzospin uzayındaki dönme simetrisinde ise izospin operatörü \mathbf{T} Hamilton operatörünün çekirdek kısmı ile komütatif olmalıdır.

$$[\hat{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{V}}_c, \hat{\mathbf{T}}] = 0 \quad (3.35)$$

Burada V_c , protonlar arasındaki Coulomb potansiyelidir.

Bununla birlikte, öyle operatörler vardır ki, sistemin Hamilton operatörünün tamamı ile veya belli bir kısmı ile komütatif olmasına rağmen bu komütatiflik belli bir simetriye karşı gelmez.

Bu çalışmada Pyatov yöntemi Gamow-Teller geçişlerine uygulanırken şu husus göz önüne alınmıştır: Başlangıçta GT operatörü, sistemin Hamilton operatörünün çekirdek kısmının merkezci terimi ile komütatiftir.

$$\left[\hat{H} - \hat{V}_C - \hat{V}_{\ell s}, \hat{G}_{1\mu}^{\pm} \right] = 0 \quad (3.36)$$

Bu eşitlikte yer alan $\hat{V}_{\ell s}$ spin-yörünge potansiyelidir. Ancak, bilinen nedenlerden dolayı kabuk modeline geçildiğinde söz konusu komütatiflik bozulur. Bozulan bu komütatiflik Pyatov yöntemini kullanarak restore edilebilir. Bu restorasyonun nasıl yapıldığı bir sonraki bölümde verilecektir.

4. PARÇACIK UZAYINDA GAMOW-TELLER GEÇİŞLERİNİN ÖZUYUMLU OLARAK İNCELENMESİ

4.1. Gamow-Teller Operatörü

İkinci kuantumlanma uzayında Gamow-Teller operatörü genel olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\hat{G}_{1\mu}^{(\pm)} = \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \langle j_1 m_1 | \sigma_{1\mu} t_{\pm} | j_2 m_2 \rangle \hat{a}_{j_1 m_1}^+ \hat{a}_{j_2 m_2} \quad (4.1)$$

Burada, $a_{j_1 m_1}^+$, j_1 ve m_1 kuantum sayıları ile karakterize edilen bir durum için bir parçacık üretme operatörünü; $a_{j_2 m_2}$ ise j_2 ve m_2 kuantum sayıları ile karakterize edilen durum için bir parçacık yok etme operatörünü; $\sigma_{1\mu}$ spin operatörünü; t_{\pm} ise izospin yükseltgenme ve indirgenme operatörlerini simgeler.

Gamow-Teller operatörü β^+ geçişleri için

$$\hat{G}_{1\mu}^{(+)} = \sum_{\substack{j_n m_n \\ j_p m_p}} \langle j_n m_n | \sigma_{1\mu} | j_p m_p \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır.

$$G_{1\mu}^{(+)} = \sum_{j_n j_p} \frac{\langle j_n || \sigma || j_p \rangle}{\sqrt{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle a_{j_n m_n}^+ a_{j_p m_p}$$

$$G_{1\mu}^{(+)} = \sum_{j_n j_p} \frac{\langle j_n || \sigma || j_p \rangle}{\sqrt{3}} A_{j_n j_p}^+(\mu) \quad (4.3)$$

Bu denklemden

$$A_{j_n j_p}^+(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle a_{j_n m_n}^+ a_{j_p m_p} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanan bozon üretme operatörüdür. $A_{j_n j_p}^+(\mu)$ ve $A_{j_n j_p}(\mu)$ operatörleri arasında $[\hat{A}_{n p}^+(\mu), \hat{A}_{n' p'}^+(\mu')] = (n_{j_n} - n_{j_p}) \delta_{n'n} \delta_{p'p} \delta_{\mu'\mu}$ şeklinde bir komutasyon bağıntısı vardır. Böylece GT operatörünü ikinci kuantumlanma tasvirinde bir bozon operatörü cinsinden tanımlamış olduk.

4.2. Etkin Etkileşmenin Özuyumlu Olarak Bulunması

A tane nükleondan oluşan bir sistem için küresel simetrik bir ortalama alanda hareket eden parçacığın hamiltonyen ifadesi ikinci kuantumlanma uzayında

$$H_{sp} = \sum_{jm} \varepsilon_j a_{jm}^+ a_{jm} \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır. Ortalama alanda hareket eden proton ve nötronlar için bu toplamı açarsak

$$H_{sp} = \sum_{j_n m_n} \varepsilon_{j_n} a_{j_n m_n}^+ a_{j_n m_n} + \sum_{j_p m_p} \varepsilon_{j_p} a_{j_p m_p}^+ a_{j_p m_p} \quad (4.6)$$

olur. Şimdi bu operatörün (4.3) denklemi ile verilen GT operatörü ile komutasyonunu bulalım:

$$[\hat{H}_{sp}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = \sum_{j_n j_p} \frac{\langle j_n \| \sigma \| j_p \rangle}{\sqrt{3}} [\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)]$$

$[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] = (\varepsilon_{j_n} - \varepsilon_{j_p}) \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)$ olduğuna göre yukarıdaki komutasyon için

$$[\hat{H}_{sp}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = \sum_{j_n j_p} (\varepsilon_{j_n} - \varepsilon_{j_p}) b_{j_n j_p} \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) \quad (4.7)$$

ifadesi bulunur.

Burada $b_{j_n j_p} = \frac{\langle j_n \| \sigma \| j_p \rangle}{\sqrt{3}}$ ile verilen indirgenmiş matris elemanıdır.

Shell modeli hamiltonyeni GT operatörü ile komutatif olmayan Coulomb ve Spin-Yörünge terimlerini içerir. Bu terimlerin GT operatörü ile komutasyonları aşağıdaki gibidir:

$$[\hat{V}_c, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = -\sum_{j_n j_p} d_{j_n j_p} \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) \quad (4.8)$$

$$[\hat{V}_{\ell s}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = \sum_{j_n j_p} (g_{j_n j_p} - f_{j_n j_p}) \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) \quad (4.9)$$

Bu eşitliklerde kullanılan indirgenmiş matris elemanları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$d_{j_n j_p} = \frac{\langle j_n \| f_c(r) \sigma \| j_p \rangle}{\sqrt{3}}$$

$$g_{j_n j_p} = \frac{\left\langle j_n \left\| \left(u_0^{\ell_s} - \frac{1}{2} u_1^{\ell_s}(r) \right) (-i[\ell \times \sigma]) \right\| j_p \right\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$f_{j_n j_p} = -\frac{1}{2} \frac{j_p(j_p + 1) - \ell_p(\ell_p + 1) - 3/4}{\sqrt{3}}$$

$$u_0^{\ell_s}(r) = \xi_{\ell_s} V_0 \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr}$$

$$u_1^{\ell_s}(r) = 1.26 \frac{N-Z}{A} u_0^{\ell_s}(r)$$

Coulomb ve spin yörünge terimleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V_c = \sum_{i=1}^A v_c(r_i) \left(\frac{1}{2} - t_z^i \right)$$

Bu ifadeye yer alan radyal kısım

$$v_c(r) = \frac{e^2(Z-1)}{Z} \int \frac{\rho_p(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

şeklinde özuyumlu bir biçimde hesaplanır. Burada, $\rho_p(r)$ taban durumundaki proton yoğunluğunu veren dağılımdır. Spin yörünge potansiyeli

$$V_{\ell_s} = -\xi_{\ell_s} \sum_{i=1}^A \frac{1}{r_i} \frac{dV(r_i)}{dr_i} (\vec{\ell}_i \cdot \vec{s}_i)$$

$$V(r) = -f(r) V_0 \left(1 - 2\eta \frac{N-Z}{A} t_z \right)$$

$$f(r) = \left(1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}} \right)^{-1}$$

şeklindedir. Burada, V_0 , R_0 , ξ_{ℓ_s} , η ve a ortalama alan potansiyelinin parametreleridir.

Yukarıdaki eşitliklerden yola çıkarak

$$\left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell_s}), \hat{G}_{1\mu}^{(+)} \right] = \sum_{j_n j_p} K_{j_n j_p} \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) \quad (4.10)$$

bulunur. Burada, $K_{j_n j_p} = (\varepsilon_{j_n} - \varepsilon_{j_p}) \cdot b_{j_n j_p} + d_{j_n j_p} + f_{j_n j_p} - g_{j_n j_p}$ şeklindedir. Yukarıda görüldüğü gibi shell modeli hamiltonyeninin çekirdek kısmının merkezci terimi GT operatörü ile komutatatif değildir. Çünkü, bu modelde nükleon-nükleon etkin

etkileşmeleri ihmal edilmektedir. Bu ihmal edilen etkin etkileşmeler Pyatov'un yönteminde bu komutatifliği sağlayacak biçimde aşağıdaki gibi ele alınır:

$$\hat{h} = \frac{1}{2\gamma} \sum_{\mu} \left\{ \begin{aligned} & \left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{G}_{1\mu}^{(+)} \right]^{\dagger} \cdot \left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{G}_{1\mu}^{(+)} \right] \\ & + \left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{G}_{1\mu}^{(-)} \right]^{\dagger} \cdot \left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{G}_{1\mu}^{(-)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Yukarıda sözü edilen komutatiflik koşulu

$$\left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}) + \hat{h}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)} \right] = 0 \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. Bu koşulu kullanarak

$$\gamma = \left[\left[\hat{H}_{sp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{G}_{1\mu}^{(-)} \right], \hat{G}_{1\mu}^{(+)} \right] \quad (4.13)$$

ve bu çift komutasyon çözümlenerek etkin etkileşme parametresi için aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\gamma = - \sum_{j_n j_p} K_{np} b_{np} (n_n - n_p) \quad (4.14)$$

Görüldüğü gibi nükleonlar arasındaki etkin etkileşmeyi karakterize eden sabit deneyden tamamen bağımsız olarak teoremin kendi içinden öz uyumlu olarak bulunmuş ve serbest bir parametre olmaktan kurtarılmıştır. Artık, çekirdeğin toplam hamilton ifadesini

$$H = H_{sp} + h \quad (4.15)$$

şeklinde kabul edebiliriz.

4.3. GT 1⁺ Durumlarının RPA İle İncelenmesi

Yukarıda öz uyumlu olarak bulunan etkin etkileşme yük değişimli olduğundan GT 1⁺ uyarılmış durumları komşu çekirdekte meydana gelir. Söz konusu uyarılmış durumların dalga fonksiyonları ve enerjileri Rasgele Faz Yaklaşımı (RPA) ile bulunabilir. Bu yaklaşımda komşu çekirdeklere oluşan uyarılmış 1⁺ durumlarına nötron-proton bozon çiftlerinin süperpozisyonu olarak kabul edilen bir fonon olarak bakılacaktır. Bir hermitik operatör seti bozon operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{P}_k(\mu) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{j_n j_p} \psi_{j_n j_p}^k \left[\hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) - \hat{A}_{j_n j_p}(\mu) \right] \quad (4.16a)$$

$$\hat{L}_k(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j_n j_p} \varphi_{j_n j_p}^k [\hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) + \hat{A}_{j_n j_p}(\mu)] \quad (4.16b)$$

Burada ψ_{np}^i ve φ_{np}^i dalga fonksiyonu genliklerini göstermektedir. RPA yöntemindeki hareket denklemlerini kullanarak

$$[\hat{H}_{sp} + \hat{h}, \hat{P}_k(\mu)] = i\omega_k^2 \hat{L}_k(\mu) \quad (4.17a)$$

$$[\hat{H}_{sp} + \hat{h}, \hat{L}_k(\mu)] = -i\hat{P}_k(\mu) \quad (4.17b)$$

komşu tek-tek çekirdekteki GT 1^+ uyarılmış durumlarının enerjileri için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$(\varepsilon_{j_p} - \varepsilon_{j_n}) \psi_{j_n j_p}^k - \frac{1}{2\gamma} K_{j_n j_p} X_k = \omega_k^2 \varphi_{j_n j_p}^k \quad (4.18a)$$

$$(\varepsilon_{j_p} - \varepsilon_{j_n}) \varphi_{j_n j_p}^k - \frac{1}{2\gamma} K_{j_n j_p} Y_k = \omega_k^2 \psi_{j_n j_p}^k \quad (4.18b)$$

Bu eşitliklerde yer alan X_k ve Y_k ifadeleri

$$X_k = \sum_{j_n j_p} K_{j_n j_p} (n_{j_n} - n_{j_p}) \psi_{j_n j_p}^i \quad (4.19a)$$

$$Y_k = \sum_{j_n j_p} K_{j_n j_p} (n_{j_n} - n_{j_p}) \varphi_{j_n j_p}^i \quad (4.19b)$$

şeklindedir. Denklem (4.19)'u kullanarak

$$F(\omega_k) \cdot \Phi(\omega_k) = 0 \quad (4.20)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$F(\omega_k) = \sum_{j_n j_p} (\omega_k b_{j_n j_p} - d_{j_n j_p} - f_{j_n j_p} + g_{j_n j_p}) \frac{K_{j_n j_p} (n_{j_n} - n_{j_p})}{\varepsilon_{j_p} - \varepsilon_{j_n} - \omega_k}$$

$$\Phi(\omega_k) = F(-\omega_k)$$

şeklindedir. Denklem (4.20)'den iki farklı çözüm elde edilebilir:

$$F(\omega_k) = 0 \quad (4.21a)$$

$$\Phi(\omega_k) = 0 \quad (4.21b)$$

Dalga fonksiyonunun genlikleri için analitik ifadeler

$$\sum_{j_n j_p} [(\psi_{j_n j_p}^i)^2 - (\varphi_{j_n j_p}^i)^2] = 1 \quad (4.22)$$

şeklindeki normalizasyon koşulunu da kullanarak

$$\begin{aligned}\Psi_{j_n j_p}^k &= \frac{X^k}{2\gamma} \frac{K_{j_n j_p}}{\varepsilon_{j_n} - \varepsilon_{j_p} \pm \omega_k}, \\ -\phi_{j_n j_p}^k &= \mp \frac{1}{\omega_k} \Psi_{j_n j_p}^k,\end{aligned}\quad (4.23)$$

olarak elde edilir. Buradaki artı ve eksi işaretler sırası ile (4.21a) ve (4.21b) denklemlerinin çözümlerine karşı gelmektedirler. Denklem (4.15) ile verilen toplam Hamiltonyenin ω_k enerjili öz durumları ana çekirdekte bulunan $|0\rangle$ fonon vakumunun $(Q_k|0\rangle = 0)$ bir fonon uyarılmasıdır. Nitekim dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}Q_k^+(\mu)|0\rangle &= \left\{ -\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} P_k(\mu) + \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} L_k(\mu) \right\} |0\rangle \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \sum_{j_n j_p} A_{j_n j_p}^+(\mu), \omega_k \in F(\omega_k) = 0; \\ &\frac{-1}{\sqrt{\omega_k}} \sum_{j_n j_p} A_{j_n j_p}(\mu), \omega_k \in \phi(\omega_k) = 0. \end{aligned} \right\}\end{aligned}\quad (4.24)$$

şeklinde tanımlanan bir fonon üretme operatörüdür.

4.4. Gamow-Teller β Geçiş Matris Elemanlarının Hesaplanması

Komşu çekirdeklerdeki uyarılmış 1^+ durumlarını karakterize eden büyüklüklerden biri de çift-çift çekirdeğin 0^+ taban durumundan komşu tek-tek çekirdekte oluşan 1^+ durumuna geçiş matris elemanlarıdır. Buna göre (N,Z) çekirdeğinin 0^+ taban durumundan $(N-1,Z+1)$ çekirdeğinin 1^+ durumlarına geçiş matris elemanı

$$\begin{aligned}M_{\beta^-}(0^+ \rightarrow 1^+, \mu) &= \langle 0^+ | [\hat{Q}_k^+, \hat{G}_{1\mu}^{(-)}] | 0^+ \rangle \\ M_{\beta^-}(0^+ \rightarrow 1^+, \mu) &= \sum_{np} \Psi_{np}^i b_{np} (n_n - n_p)\end{aligned}\quad (4.25)$$

formülü ile hesaplanır. İndirgenmiş matris elemanı ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
B^-(GT) &= \frac{1}{2I_i + 1} \left| \left\langle I_f \left| M_{\beta^-} (0^+ \rightarrow 1^+, \mu) \right| I_i \right\rangle \right|^2 \\
&= \left| \left\langle 1^+ \left| M_{\beta^-} (0^+ \rightarrow 1^+) \right| 0^+ \right\rangle \right|^2 \\
&= 3 \sum_{np} \psi_{np}^i b_{np} (n_{j_n} - n_{j_p})
\end{aligned}$$

(N,Z) çekirdeğinin 0^+ taban durumundan (N+1,Z-1) çekirdeğinin 1^+ durumlarına geçiş matris elemanını veren formül ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
M_{\beta^+} (0^+ \rightarrow 1^+, \mu) &= \left\langle 0^+ \left| \left[\hat{Q}_k^+, \hat{G}_{1\mu}^{(+)} \right] \right| 0^+ \right\rangle \\
M_{\beta^+} (0^+ \rightarrow 1^+, \mu) &= - \sum_{np} \varphi_{np}^i b_{np} (n_n - n_p) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Buna göre indirgenmiş matris elemanını veren formül

$$\begin{aligned}
B^+(GT) &= \frac{1}{2I_i + 1} \left| \left\langle I_f \left| M_{\beta^+} (0^+ \rightarrow 1^+, \mu) \right| I_i \right\rangle \right|^2 \\
&= \left| \left\langle 1^+ \left| M_{\beta^+} (0^+ \rightarrow 1^+) \right| 0^+ \right\rangle \right|^2 \\
&= 3 \sum_{np} \varphi_{np}^i b_{np} (n_{j_n} - n_{j_p})
\end{aligned}$$

biçiminde olur.

4.5. Hesaplama Sonuçları

Yapılan hesaplamalarda kullanılan tek parçacık enerji ve dalga fonksiyonları olarak Woods-Saxon potansiyeli için çözülmüş Schrödinger denkleminin öz değer ve öz fonksiyonları alınmıştır. Ortalama alan potansiyel parametreleri Ref [55]'den alınmıştır. Söz konusu durumlar radyal kuantum sayısının $\Delta n=0,1,2,3$ geçişlerini kapsar ve bu seviyeler potansiyel kuyusunun dibinden başlayarak 6 MeV'e kadar olan bütün seviyeleri içerir.

Bu çalışmada, özuyumlu olarak bulunmuş olan nükleonlar arasındaki spin-izospin etkin etkileşmesi göz önüne alınarak RPA yaklaşımında yapılan hesaplamalar $^{112-124}\text{Sb}$ çekirdeğindeki 1^+ durumlarının incelenmesi için uygulanmıştır.

Çizelge 4.1 ^{112}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{112}\text{Sn} \rightarrow ^{112}\text{Sb}$			$^{112}\text{Sn} \rightarrow ^{112}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$
0,571	0,097	4,33	0,119	0,304	3,84
1,954	0,363	3,76	8,675	0,018	5,06
4,305	1,25	3,21	10,085	0,016	5,12
8,116	33,25	1,79	10,251	0,027	4,89
12,79	0,152	4,13	10,75	0,032	4,82
18,071	0,329	3,801	10,818	0,028	4,87
18,998	0,114	4,26	11,673	0,016	5,11
19,100	0,229	3,95	13,603	0,047	4,64
20,234	0,108	4,28	14,95	0,037	4,75
20,949	0,1229	4,22	16,64	0,076	4,44
25,545	0,196	4,023			

Çizelge 4.2 ^{114}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{114}\text{Sn} \rightarrow ^{114}\text{Sb}$			$^{114}\text{Sn} \rightarrow ^{114}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$
0,845	0,106	4,29	9,43	0,018	5,05
2,407	0,4732	3,64	10,143	0,043	4,67
4,686	1,28	3,21	11,523	0,028	4,87
8,776	38,05	1,74	11,614	0,03	4,89
12,464	0,305	3,83	12,527	0,016	5,12
13,830	0,269	3,89	14,401	0,04	4,67
18,047	0,05	4,61	17,38	0,06	4,51
18,327	0,4158	3,70			
19,116	0,2384	3,94			
19,457	0,18	4,05			
20,417	0,14	4,16			
21,037	0,5	4,13			
21,797	0,165	4,10			
21,877	0,144	4,16			

Çizelge 4.3 ^{116}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{116}\text{Sn} \rightarrow ^{116}\text{Sb}$			$^{116}\text{Sn} \rightarrow ^{116}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(ft)$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(ft)$
1,202	0,117	4,24	10,171	0,016	5,09
3,102	0,5	3,60	11,7	0,42	4,69
5,132	1,14	3,25	12,39	0,023	4,94
9,722	43,89	1,67	13,36	0,01	5,16
13,551	0,33	3,79	15,182	0,04	4,68
14,856	0,42	3,68	16,51	0,035	4,76
18,623	0,45	3,65	18,15	0,05	4,55
19,257	0,3	3,82			
20,613	0,08	4,40			
21,186	0,2	3,99			
22,100	0,21	3,99			
22,263	0,10	4,30			

Çizelge 4.4 ^{118}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{118}\text{Sn} \rightarrow ^{118}\text{Sb}$			$^{118}\text{Sn} \rightarrow ^{118}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(ft)$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(ft)$
-0,505	0,1	4,29	10,9	0,015	5,13
1,425	0,1	4,29	12,44	0,03	4,74
3,485	0,52	3,59	13,14	0,021	4,99
5,435	1,07	3,28	14,18	0,01	5,19
10,269	45,16	1,66	15,93	0,039	4,71
11,915	0,5	3,61	17,26	0,016	5,09
12,115	3,26	2,80	18,91	0,05	4,60
14,505	0,31	3,81			
15,595	0,5	3,61			
18,748	0,4	3,71			
19,125	0,12	4,22			
19,305	0,5	3,61			
20,507	0,09	4,34			
20,749	0,05	4,60			
20,865	0,16	4,09			
25,065	0,196	4,02			
21,517	0,195	4,02			
22,288	0,4	3,70			

Çizelge 4.5 ^{120}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{120}\text{Sn} \rightarrow ^{120}\text{Sb}$			$^{120}\text{Sn} \rightarrow ^{120}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$
-0,079	0,16	4,09	11,614	0,013	5,17
3,801	0,47	3,64	13,172	0,033	4,79
5,671	0,91	3,35	13,88	0,019	5,03
10,990	49,50	1,62	14,97	0,012	5,21
12,687	0,73	3,45	16,67	0,037	4,74
12,961	0,95	3,33	19,65	0,046	4,65
13,101	2,98	2,84			
15,375	0,15	4,12			
15,558	0,39	3,72			
16,359	0,96	3,33			
18,889	0,61	3,52			
19,301	0,54	3,58			
21,183	0,18	4,04			
22,415	0,58	3,54			

Çizelge 4.6 ^{122}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{122}\text{Sn} \rightarrow ^{122}\text{Sb}$			$^{122}\text{Sn} \rightarrow ^{122}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$
0,852	0,26	3,88	12,31	0,12	5,22
4,102	0,48	3,63	13,88	0,03	4,83
5,952	0,782	3,42	14,60	0,017	5,07
9,157	0,71	3,46	15,74	0,012	5,23
11,912	53,59	1,58	17,39	0,036	4,75
13,632	0,29	3,85	20,37	0,042	4,68
13,859	2,64	2,89			
14,052	1,50	3,13			
17,039	1,256	3,21			
19,124	0,55	3,56			
19,396	0,58	3,54			
19,920	0,37	3,74			
21,381	0,56	3,56			
22,763	0,98	3,32			

Çizelge 4.7 ^{124}Sb izotopunda GT 1^+ durumlarının spektrumu

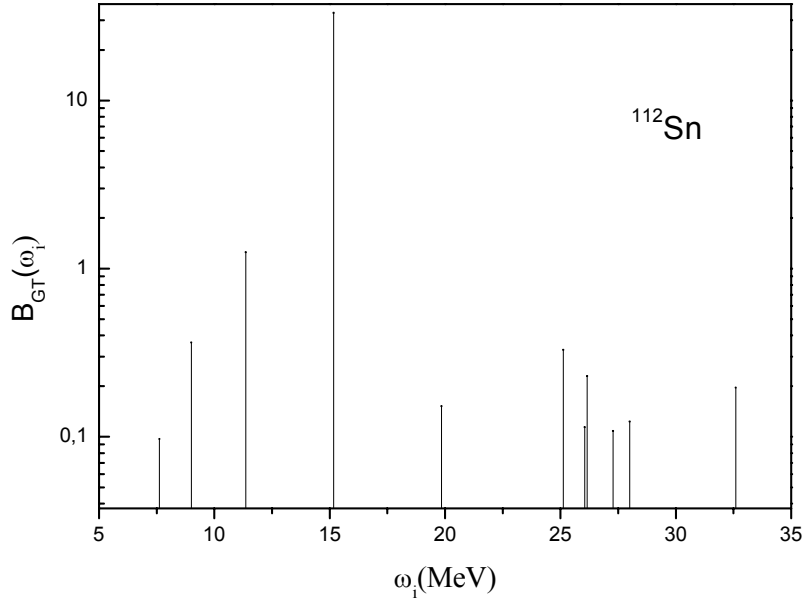
$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Sb}$			$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{In}$		
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\text{Log}(\text{ft})$
1,131	0,46	3,64	12,996	0,011	5,26
4,361	0,48	3,62	14,58	0,027	4,86
6,181	0,66	3,49	15,309	0,016	5,10
9,271	0,83	3,39	16,50	0,011	5,24
12,789	58,07	1,55	18,087	0,035	4,76
14,761	2,97	2,84	21,077	0,039	4,72
14,971	1,28	3,2			
17,652	1,91	3,03			
19,271	0,53	3,58			
19,470	1,011	3,31			
21,614	0,56	3,56			
22,957	1,046	3,29			

Çizelge 4.8 $\text{I} \rightarrow \text{Te}$ taban durumları arasındaki β^+ geçiş $\text{log}(\text{ft})$ değerleri

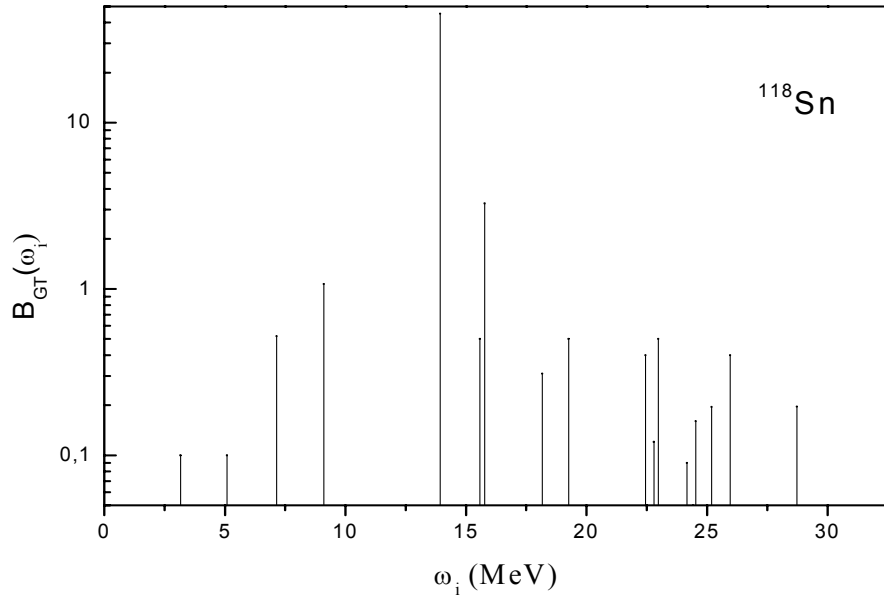
A	$\text{Log}(\text{ft})$	
	Teorik	Deneyisel [56]
116	4,327	4,5
122	4,837	4,95
128	4,437	5,05

Çizelge 4.9 $\text{Cs} \rightarrow \text{Xe}$ taban durumları arasındaki β^+ geçiş $\text{log}(\text{ft})$ değerleri

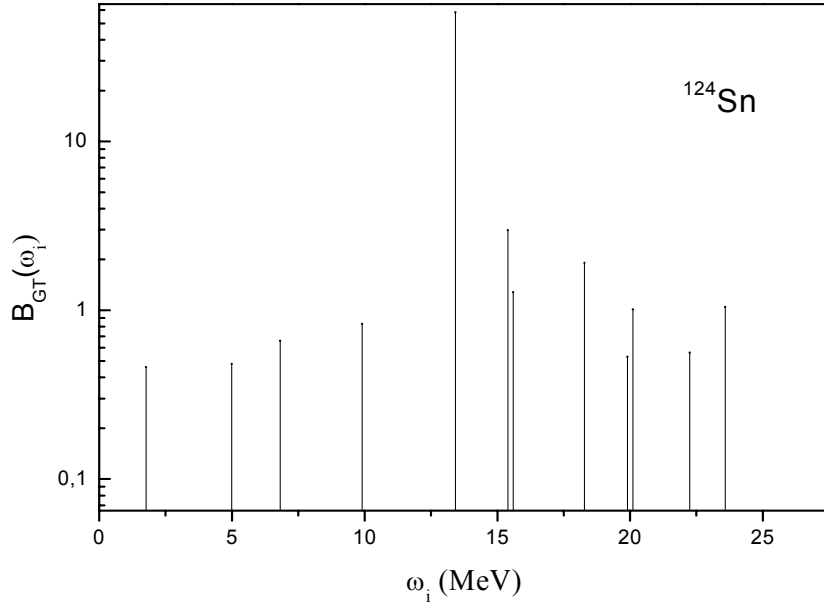
A	$\text{Log}(\text{ft})$	
	Teorik	Deneyisel [56]
122	5,037	5,33
124	4,827	5,02
126	5,347	5,07
128	4,437	4,84
130	4,317	5,1



Şekil 4.1: ^{112}Sb izotopunda β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı



Şekil 4.2: ^{118}Sb izotopunda β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı



Şekil 4.3: ^{124}Sb izotopunda β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı

Yukarıdaki grafiklerde elde edilen spektrumları üç enerji bölgesine ayırabiliriz. Bunlardan biri (5-10) MeV aralığında bulunan mikroskobik bölgedir. Bu bölgedeki durumlar Ikeda toplamının yaklaşık %5'ini kapsarlar. İkinci bölge ise Ikeda toplam kuralının yaklaşık %80-90'lık kısmını alan GTR (14-15) MeV bölgesidir. Üçüncü bölge GTR ötesi bölgedir ki bu bölge geriye kalan yaklaşık %5-15'lik kısmı içinde barındırır.

5. KUAZİ PARÇACIK UZAYINDA GAMOW-TELLER GEÇİŞLERİNİN ÖZUYUMLU OLARAK İNCELENMESİ

5.1. Gamow-Teller Operatörü

Parçacık uzayında Gamow-Teller operatörünü

$$\hat{G}_{1\mu}^{(+)} = \sum_{j_n j_p} \frac{\langle j_n \| \sigma \| j_p \rangle}{\sqrt{3}} \hat{A}_{j_n j_p}^{+}(\mu)$$

şeklinde yazmış ve bu ifadede yer alan bozon üretme operatörünü

$$\hat{A}_{j_n j_p}^{+}(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^{+} \hat{a}_{j_p m_p}$$

biçiminde tanımlamıştık. Parçacık uzayından kuazi parçacık uzayına geçiş yapabilmek için aşağıdaki Bogolyubov dönüşümleri kullanılır:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j_p m_p} &= u_{j_p} \hat{\alpha}_{j_p m_p} + (-1)^{j_p - m_p} \mathcal{G}_{j_p} \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^{+} \\ \hat{a}_{j_n m_n}^{+} &= u_{j_n} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^{+} + (-1)^{j_n - m_n} \mathcal{G}_{j_n} \hat{\alpha}_{j_n - m_n} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Bu ifadede yer alan α_{jm} , kuazi parçacık yok etme operatörünü; α_{jm}^{+} , bir kuaziparçacık üretme operatörünü; u_j , belli bir j durumundaki delik durumlarının olasılık genliğini; \mathcal{G}_j , belli bir j durumundaki parçacık durumlarının olasılık genliklerini gösterir. Buna göre $u^2 + \mathcal{G}^2 = 1$ olmalıdır. Şimdi (5.1) denklemi ile verilen dönüşümleri kullanarak Gamow-Teller operatörünü kuazi parçacık tasvirinde yazalım:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j_n m_n}^{+} \hat{a}_{j_p m_p} &= u_{j_n} \mathcal{G}_{j_p} (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^{+} \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^{+} + \mathcal{G}_{j_n} u_{j_p} (-1)^{j_n - m_n} \hat{\alpha}_{j_n - m_n} \hat{\alpha}_{j_p m_p} \\ \hat{A}_{j_n j_p}^{+}(\mu) &= \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \left[\begin{aligned} &u_{j_n} \mathcal{G}_{j_p} (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^{+} \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^{+} \\ &+ \mathcal{G}_{j_n} u_{j_p} (-1)^{j_n - m_n} \hat{\alpha}_{j_n - m_n} \hat{\alpha}_{j_p m_p} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\hat{A}_{j_n j_p}^{+}(\mu) = u_{j_n} \mathcal{G}_{j_p} \hat{C}_{np}^{+}(\mu) + \mathcal{G}_{j_n} u_{j_p} (-1)^{\mu+1} \hat{C}_{np}(-\mu)$$

$$\hat{C}_{np}^+(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n, m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+$$

$$\hat{C}_{np}(\mu) = [\hat{C}_{np}^+(\mu)]^+ = \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n, m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}$$

Bu operatörlere sırası ile kuazi bozon üretme, yok etme operatörleri denir ve bu operatörler arasındaki komutasyon ilişkileri aşağıda verilmektedir:

$$[\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu')] = \delta_{n'n} \delta_{p'p} \delta_{\mu'\mu}, \quad [\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}(\mu')] = 0$$

Böylece kuazi parçacık tasvirinde GT operatörü

$$\hat{G}_{1\mu}^{(+)} = \sum_{np} \left[\bar{b}_{np} \hat{C}_{np}^+(\mu) + (-1)^{\mu+1} b_{np} \hat{C}_{np}(-\mu) \right] \quad (5.2)$$

şeklinde yazılır. Yapılan bu çalışmada parçacık-parçacık kanalındaki etkin etkileşme dikkate alınmamıştır. Bu yüzden yukarıdaki Bogolyubov dönüşümleri yapılırken sadece parçacık – delik etkileşmesini temsil eden terimler yazılmıştır. Bu ifadeye yer alan indirgenmiş matris elemanları

$$\bar{b}_{np} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_{j_n} \mathfrak{g}_{j_p} \langle j_n \| \sigma \| j_p \rangle$$

$$b_{np} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_{j_p} \mathfrak{g}_{j_n} \langle j_n \| \sigma \| j_p \rangle$$

şeklindedir.

5.2. Etkin Etkileşmenin Özuyumlu Olarak Bulunması

Küresel simetrik bir ortalama alan içerisinde nükleonlar arasındaki çift etkileşmelerin de hesaba katılması ile birlikte Shell modeli hamiltonyeni ikinci kuantumlanma temsilinde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\hat{H}_{sqp} = \sum_{jm} \varepsilon_j \hat{\alpha}_{jm}^+ \hat{\alpha}_{jm} \quad (5.3)$$

Bu toplamı nötron ve proton için açarsak

$$\hat{H}_{sqp} = \sum_{j_n m_n} \varepsilon_{j_n} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n m_n} + \sum_{j_p m_p} \varepsilon_{j_p} \hat{\alpha}_{j_p m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p m_p} \quad (5.4)$$

olur. Kuazi parçacık tasvirinde işlemlerimizi

$$\hat{F}_{1\mu}^{\rho} = \frac{1}{2} [\hat{G}_{1\mu}^{(+)} + \rho(-1)^{\mu} \hat{G}_{1-\mu}^{(-)}] \quad (\rho = \pm) \quad (5.5)$$

operatörü ile yapacağız. Şimdi (5.2) eşitliğini (5.5)'de yerine koyarsak

$$\hat{F}_{1\mu}^{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{np} \left[(\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) (\hat{C}_{np}^{+}(\mu) + \rho(-1)^{\mu} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)) \right] \quad (5.6)$$

elde edilir. Burada, $F_{1\mu}^{\rho}$ operatörünün eşleniği alınırsa $(\hat{F}_{1\mu}^{\rho})^{+} = \rho(-1)^{\mu} \hat{F}_{1-\mu}^{\rho}$

bulunur. Şimdi \hat{H}_{sqp} ile $\hat{F}_{1\mu}^{\rho}$ 'nün komutasyonunu alalım:

$$[\hat{H}_{sqp}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho}] = \frac{1}{2} \sum_{np} \left[(\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) \{ [\hat{H}_{sqp}, \hat{C}_{np}^{+}(\mu)] + \rho(-1)^{\mu} [\hat{H}_{sqp}, \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)] \} \right]$$

Burada $[\hat{H}_{sqp}, \hat{C}_{np}^{+}(\mu)] = \varepsilon_{np} \hat{C}_{np}^{+}(\mu)$ ve $[\hat{H}_{sqp}, \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)] = -\varepsilon_{np} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)$

komutasyonlarını kullanırsak

$$[\hat{H}_{sqp}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho}] = \frac{1}{2} \sum_{np} \left[\varepsilon_{np} (\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) (\hat{C}_{np}^{+}(\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)) \right] \quad (5.7)$$

ifadesini buluruz. Şimdi coulomb ve spin yörünge terimlerinin $F_{1\mu}^{\rho}$ ile

komutasyonunu bulalım:

$$[\hat{V}_c, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = -\sum_{j_n j_p} d_{j_n j_p} \hat{A}_{j_n j_p}^{+}(\mu) = -\sum_{j_n j_p} d_{j_n j_p} [u_{j_n} \vartheta_{j_p} \hat{C}_{np}^{+}(\mu) + \vartheta_{j_n} u_{j_p} (-1)^{\mu+1} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)]$$

$$[\hat{V}_c, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = -\sum_{np} \bar{d}_{np} \hat{C}_{np}^{+}(\mu) + (-1)^{\mu+1} d_{np} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)$$

$$[\hat{V}_{\ell s}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = \sum_{np} (\bar{g}_{np} - \bar{f}_{np}) \hat{C}_{np}^{+}(\mu) + (-1)^{\mu+1} (g_{np} - f_{np}) \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)$$

Son iki eşitliği alt alta yazıp topladığımızda

$$[\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = \sum_{np} (-\bar{d}_{np} - \bar{f}_{np} + \bar{g}_{np}) \hat{C}_{np}^{+}(\mu) + (-1)^{\mu+1} (-d_{np} - f_{np} + g_{np}) \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)$$

$$[\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] = -\sum_{np} \bar{K}_{np} \hat{C}_{np}^{+}(\mu) - (-1)^{\mu+1} K_{np} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu)$$

$$[\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}, \hat{G}_{1-\mu}^{(-)}] = \sum_{np} \bar{K}_{np} \hat{C}_{np}^{-}(-\mu) + (-1)^{\mu+1} K_{np} \hat{C}_{np}^{+}(\mu)$$

olur. Böylece

$$[\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho}] = \frac{1}{2} \{ [\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] + \rho(-1)^{\mu} [\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}, \hat{G}_{1-\mu}^{(-)}] \}$$

$$\left[\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}, \hat{F}_{1\mu}^\rho \right] = \frac{1}{2} \sum_{np} \left[-(\bar{K}_{np} + \rho K_{np}) [\hat{C}_{np}^+(\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{np}(-\mu)] \right] \quad (5.8)$$

ifadesi elde edilir. Ortalama alan hamiltonyeninin merkezci teriminin $\hat{F}_{1\mu}^\rho$ ile komutasyonunu alırsak

$$\left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1\mu}^\rho \right] = \sum_{np} E_{np}^\rho [\hat{C}_{np}^+(\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{np}(-\mu)] \quad (5.9)$$

eşitliği bulunur.

Burada, $E_{np}^\rho = \frac{1}{2} [\epsilon_{np} (\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) + \bar{K}_{np} + \rho K_{np}]$ ile verilen indirgenmiş matris elemanıdır.

Ayrıca, yukarıdaki eşitliklerde kullanılan indirgenmiş matris elemanları

$$\begin{aligned} d_{np} &= \frac{\langle j_n \| f_c(r) \sigma \| j_p \rangle}{\sqrt{3}} \mathfrak{g}_{j_n} u_{j_p} \\ \bar{d}_{np} &= \frac{\langle j_n \| f_c(r) \sigma \| j_p \rangle}{\sqrt{3}} u_{j_n} \mathfrak{g}_{j_p} \\ g_{np} &= \frac{\langle j_n \| (u_0^{ls} - \frac{1}{2} u_1^{ls}(r)) (-i[\ell \times \sigma]) \| j_p \rangle}{\sqrt{3}} \mathfrak{g}_{j_n} u_{j_p} \\ \bar{g}_{np} &= \frac{\langle j_n \| (u_0^{ls} - \frac{1}{2} u_1^{ls}(r)) (-i[\ell \times \sigma]) \| j_p \rangle}{\sqrt{3}} u_{j_n} \mathfrak{g}_{j_p} \\ f_{np} &= -\frac{1}{2} \frac{j_p(j_p+1) - \ell_p(\ell_p+1) - 3/4}{\sqrt{3}} \mathfrak{g}_{j_n} u_{j_p} \\ \bar{f}_{np} &= -\frac{1}{2} \frac{j_p(j_p+1) - \ell_p(\ell_p+1) - 3/4}{\sqrt{3}} u_{j_n} \mathfrak{g}_{j_p} \end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi etkin etkileşme hamiltonyen ifadesini yazalım:

$$\hat{h} = \sum_{\mu, \rho} \frac{(-1)^\mu}{4\gamma_\rho} \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1-\mu}^\rho \right]^+ \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1\mu}^\rho \right] \quad (5.10)$$

Şimdi bu etkin etkileşme terimini $(\hat{F}_{1\mu}^\rho)^+ = \rho(-1)^\mu \hat{F}_{1-\mu}^\rho$ ifadesini de kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\hat{h} = \sum_{\mu, \rho} \frac{(-1)^\mu}{4\gamma_\rho} \left[(\hat{F}_{1-\mu}^\rho)^+, \hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}) \right] \cdot \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1\mu}^\rho \right]$$

$$\hat{h} = -\sum_{\mu, \rho} \frac{\rho}{4\gamma_{\rho}} \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] \cdot \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right]$$

Şimdi bu etkin etkileşme hamilton operatörünün $\hat{F}_{1\mu}^{\rho}$ ile komutasyonunu yazalım:

$$\left[\hat{h}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] = -\sum_{\mu', \rho'} \frac{\rho'}{4\gamma_{\rho'}} \left\{ \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \cdot \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] + \left[\left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] \cdot \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \right\} \quad (5.11)$$

Bu eşitlik içerisinde yer alan double komütatörler

$$\left[\left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] \equiv \text{sabit}$$

olduklarına göre, yani operatör olmadıklarından neticede (5.11) komutasyonu aşağıdaki hale gelir:

$$\begin{aligned} \left[\hat{h}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] &= -\sum_{\mu', \rho'} \frac{\rho'}{2\gamma_{\rho'}} \left\{ \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right\} \\ &\quad \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{sl}), \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] = -\left[\hat{h}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

koşulunu kullanarak etkin etkileşme parametresi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu', \rho'} \frac{\rho'}{2\gamma_{\rho'}} \left\{ \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right\} \cdot \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] &= \left[\hat{H}_{sqp} - \hat{V}_c - \hat{V}_{\ell s}, \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] \\ \frac{\rho'}{2\gamma_{\rho'}} \left[\left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu'}^{\rho'} \right] \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] &= \delta_{\mu'\mu} \delta_{\rho'\rho} \\ \gamma_{\rho} &= \frac{\rho}{2} \left\langle 0 \left| \left[\hat{H}_{sqp} - (\hat{V}_c + \hat{V}_{\ell s}), \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right] \hat{F}_{1\mu}^{\rho} \right| 0 \right\rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nitekim, (5.13) eşitliğindeki double komütatör çözüldüğünde etkin etkileşme parametresi için

$$\begin{aligned} \gamma_{\rho} &= \frac{\rho}{4} \sum_{\substack{n'p' \\ np}} E_{n'p'}^{\rho} (\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) \left\{ \rho (-1)^{\mu} \left[\hat{C}_{n'p'}^{+}(\mu), \hat{C}_{np}(-\mu) \right] + \rho (-1)^{\mu+1} \left[\hat{C}_{n'p'}(-\mu), \hat{C}_{np}^{+}(\mu) \right] \right\} \\ \gamma_{\rho} &= \frac{(-1)^{\mu+1}}{2} \delta_{-\mu\mu} \sum_{\substack{n'p' \\ np}} E_{n'p'}^{\rho} (\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) \delta_{n'n} \delta_{p'p} \quad (\mu = 0) \\ \gamma_{\rho} &= -\frac{1}{2} \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\bar{b}_{np} - \rho b_{np}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

eşitliği elde edilir. Böylece etkin etkileşme hamiltonyen ifadesini öz uyumlu olarak elde ettik. Artık toplam Hamiltonyen

$$H = H_{\text{sqp}} + h \quad (5.15)$$

biçiminde olacaktır.

5.3. GT 1^+ Durumlarının QRPA İle İncelenmesi

Bu bölümde GT 1^+ durumlarının enerjileri ve dalga fonksiyonları QRPA (Kuazi Rasgele Faz Yaklaşımı) çerçevesinde ele alınacak ve hesaplanacaktır. Bu yaklaşıma göre komşu çekirdekte oluşan GT 1^+ durumları

$$\hat{Q}_i^+ |0\rangle = \sum_{np} [\psi_{np}^i \hat{C}_{np}^+(\mu) - (-1)^{\mu+1} \phi_{np}^i \hat{C}_{np}(-\mu)] |0\rangle \quad (5.16)$$

şeklindeki fonon üretme operatörü ile temsil edilir. Fonon üretme ve yok etme operatörleri arasındaki komutasyon koşulundan bir önceki bölümde olduğu gibi dalga fonksiyonunun genlikleri arasında

$$\sum_{np} [(\psi_{np}^i)^2 - (\phi_{np}^i)^2] = 1 \quad (5.17)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe normalizasyon koşulu denir. QRPA yöntemine göre GT 1^+ durumlarının enerjileri ve dalga fonksiyonları yine aynı hareket denkleminde bulunur:

$$[\hat{H}, \hat{Q}_i^+ |0\rangle = \omega_i \hat{Q}_i^+ |0\rangle \quad (5.18)$$

Şimdi (5.18) denklemini çözmeye çalışalım:

$$\sum_{np} \left\{ \psi_{np}^i [\hat{H}, \hat{C}_{np}^+(\mu)] - (-1)^{\mu+1} \phi_{np}^i [\hat{H}, \hat{C}_{np}(-\mu)] \right\} = \omega_i \sum_{np} \left\{ \psi_{np}^i \hat{C}_{np}^+(\mu) - (-1)^{\mu+1} \phi_{np}^i \hat{C}_{np}(-\mu) \right\}$$

$$\sum_{np} \left\{ \psi_{np}^i [\hat{C}_{n'p'}(\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}^+(\mu)]] - (-1)^{\mu+1} \phi_{np}^i [\hat{C}_{n'p'}(\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}(-\mu)]] \right\} = \omega_i \psi_{n'p'}^i \quad (5.19)$$

$$\sum_{np} \left\{ (-1)^{\mu+1} \psi_{np}^i [\hat{C}_{n'p'}^+(-\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}^+(\mu)]] - \phi_{np}^i [\hat{C}_{n'p'}^+(-\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}(-\mu)]] \right\} = \omega_i \phi_{n'p'}^i \quad (5.20)$$

Yukarıda elde edilen çift komütatörleri

$$\rho_{n'p'np} = [\hat{C}_{n'p'}(\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}^+(\mu)]] = [\hat{C}_{n'p'}^+(-\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}(-\mu)]] \quad (5.21)$$

$$\eta_{n'p'np} = [\hat{C}_{n'p'}(\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}(-\mu)]] = [\hat{C}_{n'p'}^+(-\mu), [\hat{H}, \hat{C}_{np}^+(\mu)]] \quad (5.22)$$

şeklinde gösterelim. O halde (5.19) ve (5.20) denklemleri

$$\sum_{np} (\rho_{n'p'np} \psi_{np}^i - (-1)^{\mu+1} \eta_{n'p'np} \phi_{np}^i) = \omega_i \psi_{n'p'}^i \quad (5.23)$$

$$\sum_{np} ((-1)^{\mu+1} \eta_{n'p'np} \psi_{np}^i - \rho_{n'p'np} \phi_{np}^i) = \omega_i \phi_{n'p'}^i \quad (5.24)$$

halini alır. Çift komütatörler aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{C}_{np}^+(\mu)] &= \varepsilon_{np} \hat{C}_{np}^+(\mu) + [\hat{h}, \hat{C}_{np}^+(\mu)] \\ [H, \hat{C}_{np}^+(\mu)] &= \varepsilon_{np} \hat{C}_{np}^+(\mu) + \sum_{\rho} \frac{(-1)^{\mu}}{4\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} \left(\sum_{n_1 p_1} E_{n_1 p_1}^{\rho} (\hat{C}_{n_1 p_1}^+(-\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{n_1 p_1}(\mu)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n_2 p_2} E_{n_2 p_2}^{\rho} (\hat{C}_{n_2 p_2}^+(-\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{n_2 p_2}(\mu)) \right) \\ [H, \hat{C}_{np}^+(\mu)] &= \varepsilon_{np} \hat{C}_{np}^+(\mu) + \sum_{\rho} \frac{(-1)^{\mu}}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} \left(\sum_{n_1 p_1} E_{n_1 p_1}^{\rho} (\hat{C}_{n_1 p_1}^+(-\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{n_1 p_1}(\mu)) \right) \\ [H, \hat{C}_{np}(-\mu)] &= -\varepsilon_{np} \hat{C}_{np}(-\mu) + \sum_{\rho} \frac{(-1)^{\mu+1}}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} \left(\sum_{n_1 p_1} E_{n_1 p_1}^{\rho} (\hat{C}_{n_1 p_1}(\mu) + \rho(-1)^{\mu+1} \hat{C}_{n_1 p_1}^+(-\mu)) \right) \\ \rho_{n'p'np} &= \varepsilon_{np} \delta_{n'n} \delta_{p'p} + \sum_{\rho} \frac{(-1)^{\mu}}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} \sum_{n_1 p_1} E_{n_1 p_1}^{\rho} \delta_{n'n_1} \delta_{p'p_1} \delta_{\mu-\mu} \quad (\mu = 0) \\ \rho_{n'p'np} &= \varepsilon_{np} \delta_{n'n} \delta_{p'p} + \delta_{\mu-\mu} \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \eta_{n'p'np} &= \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} \sum_{n_1 p_1} E_{n_1 p_1}^{\rho} \delta_{n'n_1} \delta_{p'p_1} \delta_{\mu-\mu} \\ \eta_{n'p'np} &= \delta_{\mu-\mu} \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} E_{n'p'}^{\rho} \end{aligned} \quad (5.26)$$

(5.25) ve (5.26) eşitliklerini (5.23) ve (5.24) denklemlerinde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} \omega_i \psi_{n'p'}^i &= \sum_{np} \left\{ \left(\varepsilon_{np} \delta_{n'n} \delta_{p'p} + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} E_{np}^{\rho} \right) \psi_{np}^i + (-1)^{\mu} \left(\sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} E_{np}^{\rho} \right) \phi_{np}^i \right\} \delta_{\mu-\mu} \\ \omega_i \phi_{n'p'}^i &= \sum_{np} \left\{ (-1)^{\mu+1} \left(\sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} E_{np}^{\rho} \right) \psi_{np}^i - \left(\varepsilon_{np} \delta_{n'n} \delta_{p'p} + \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} E_{np}^{\rho} \right) \phi_{np}^i \right\} \delta_{\mu-\mu} \\ (\omega_i - \varepsilon_{n'p'}) \psi_{n'p'}^i &= \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\psi_{np}^i + \rho \phi_{np}^i) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$(\omega_i + \varepsilon_{n'p'}) \phi_{n'p'}^i = - \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{n'p'}^{\rho} \sum_{np} E_{np}^{\rho} (\psi_{np}^i + \rho \phi_{np}^i) \quad (5.28)$$

Son iki eşitlikte

$$\sum_{np} E_{np}^{\rho} (\psi_{np}^i + \rho \varphi_{np}^i) = X_i^{\rho} \quad (5.29)$$

olarak kabul edersek (5.27) ve (5.28) denkleminde ψ_{np}^i ve φ_{np}^i genlikleri için

$$\psi_{np}^i = \frac{1}{\omega_i - \varepsilon_{np}} \sum_{\rho} \frac{1}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} X_i^{\rho} \quad (5.30)$$

$$\varphi_{np}^i = -\frac{1}{\omega_i + \varepsilon_{np}} \sum_{\rho} \frac{\rho}{2\gamma_{\rho}} E_{np}^{\rho} X_i^{\rho} \quad (5.31)$$

ifadeleri elde edilir. (5.30) ve (5.31) eşitliklerinde yer alan toplamları açarsak

$$\psi_{np}^i = \frac{1}{\omega_i - \varepsilon_{np}} \left(\frac{1}{2\gamma_+} E_{np}^+ X_i^+ + \frac{1}{2\gamma_-} E_{np}^- X_i^- \right) \quad (5.32)$$

$$\varphi_{np}^i = -\frac{1}{\omega_i + \varepsilon_{np}} \left(\frac{1}{2\gamma_+} E_{np}^+ X_i^+ - \frac{1}{2\gamma_-} E_{np}^- X_i^- \right) \quad (5.33)$$

elde edilir. (5.32) ve (5.33) denklemlerini (5.29)'da yerine koyalım

$$X_i^+ = \sum_{np} E_{np}^+ \left[\frac{1}{2\gamma_+} E_{np}^+ \left(\frac{1}{\omega_i - \varepsilon_{np}} - \frac{1}{\omega_i + \varepsilon_{np}} \right) X_i^+ + \frac{1}{2\gamma_-} E_{np}^- \left(\frac{1}{\omega_i - \varepsilon_{np}} + \frac{1}{\omega_i + \varepsilon_{np}} \right) X_i^- \right]$$

$$X_i^- = \sum_{np} E_{np}^- \left[\frac{1}{2\gamma_+} E_{np}^+ \left(\frac{1}{\omega_i - \varepsilon_{np}} + \frac{1}{\omega_i + \varepsilon_{np}} \right) X_i^+ + \frac{1}{2\gamma_-} E_{np}^- \left(\frac{1}{\omega_i - \varepsilon_{np}} - \frac{1}{\omega_i + \varepsilon_{np}} \right) X_i^- \right]$$

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma_+} \sum_{np} (E_{np}^+)^2 \frac{\varepsilon_{np}}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2} \right) X_i^+ + \left(\frac{\omega_i}{\gamma_-} \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\varepsilon_{np}^2 - \omega_i^2} \right) X_i^- = 0 \quad (5.34)$$

$$\left(\frac{\omega_i}{\gamma_+} \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2} \right) X_i^+ + \left(\frac{1}{\gamma_-} \sum_{np} \frac{\varepsilon_{np} (E_{np}^-)^2}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2} - 1 \right) X_i^- = 0 \quad (5.35)$$

$$A_{11} = 1 - \frac{1}{\gamma_+} \sum_{np} \frac{(E_{np}^+)^2 \varepsilon_{np}}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2} \quad A_{12} = \frac{\omega_i}{\gamma_-} \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\varepsilon_{np}^2 - \omega_i^2}$$

$$A_{21} = \frac{\omega_i}{\gamma_+} \sum_{np} \frac{E_{np}^+ E_{np}^-}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2} \quad A_{22} = \frac{1}{\gamma_-} \sum_{np} \frac{(E_{np}^-)^2 \varepsilon_{np}}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2} - 1$$

Yukarıdaki (5.34) ve (5.35) denklemlerinin sıfırdan farklı çözümlerini elde etmek için

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 0$$

yani

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma_+} \sum_{np} \frac{(E_{np}^{(+)})^2 \varepsilon_{np}}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_-} \sum_{np} \frac{(E_{np}^{(-)})^2 \varepsilon_{np}}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2}\right) - \frac{1}{\gamma_- \gamma_+} \left(\sum_{np} \frac{E_{np}^{(+)} E_{np}^{(-)}}{\omega_i^2 - \varepsilon_{np}^2}\right)^2 \omega_i^2 = 0 \quad (5.36)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu eşitlik komşu çekirdekte oluşan uyarılmış GT 1^+ durumlarının enerjilerini veren seküler denklemdir. Denklem (5.16) ile verilen dalga fonksiyonunun genlikleri (5.17) normalizasyon koşulundan aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Psi_{np}^i = \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \frac{E_{np}^{(+)} + L(\omega_i) E_{np}^{(-)}}{\varepsilon_{np} - \omega_i} \quad (5.37)$$

$$\Phi_{np}^i = \frac{1}{\sqrt{Z(\omega_i)}} \frac{E_{np}^{(+)} - L(\omega_i) E_{np}^{(-)}}{\varepsilon_{np} + \omega_i} \quad (5.38)$$

Bu ifadede yer alan $L(\omega_i)$

$$L(\omega_i) = \frac{-\left[\gamma_+ + \sum_{np} \frac{\varepsilon_{np} (E_{np}^{(+)})^2}{\varepsilon_{np}^2 - \omega_i^2}\right]}{\left[\omega_i \sum_{np} \frac{E_{np}^{(+)} E_{np}^{(-)}}{\varepsilon_{np}^2 - \omega_i^2}\right]}$$

şekindedir ve $Z(\omega_i)$ ise (5.17) normalizasyon koşulundan bulunur.

5.4. Gamow-Teller β Geçiş Matris Elemanlarının Hesaplanması

$$M_{\beta^-}(0^+ \rightarrow 1^+, \mu) = \langle 0^+ | [\hat{Q}_i^+, \hat{G}_{1\mu}^{(-)}] | 0^+ \rangle$$

$$M_{\beta^-}(0^+ \rightarrow 1^+, \mu) = -\sum_{np} b_{np}^- \Psi_{np}^i + b_{np} \Phi_{np}^i \quad (5.39)$$

$$M_{\beta^+}(0^+ \rightarrow 1^+, \mu) = \langle 0^+ | [\hat{Q}_i^+, \hat{G}_{1\mu}^{(+)}] | 0^+ \rangle$$

$$M_{\beta^+}(0^+ \rightarrow 1^+, \mu) = \sum_{np} b_{np} \Psi_{np}^i + b_{np}^- \Phi_{np}^i \quad (5.40)$$

5.5. Hesaplama Sonuçları

Yapılan hesaplamalarda baz olarak Woods-Saxon potansiyeli Chepurnov parametreleri ile birlikte kullanılmıştır [55] ve çift etkileşme parametresi (açık tabakalı çekirdekler için $c = 12/\sqrt{A}$) Ref [57]'e göre seçilmiştir.

Şimdi nükleonlar arasındaki çift etkileşmelerin de dikkate alınması ile birlikte QRPA çerçevesi içerisinde yapılan hesaplamalar $^{112-124}\text{Sb}$ çekirdeğindeki 1^+ durumlarının incelenmesi için uygulanmıştır.

Çizelge 5.1 ^{112}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{112}\text{Sn} \rightarrow ^{112}\text{Sb}$		$^{112}\text{Sn} \rightarrow ^{112}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
0,411	0,444	0,002	0,030
1,638	0,097	3,684	0,012
2,678	0,715	4,347	0,002
3,109	0,345	4,844	0,001
8,022	0,002	5,152	0,027
8,173	0,002	5,482	0,001
8,232	30,748	5,875	0,025
10,208	0,464	6,310	0,019
10,306	0,018	6,756	0,008
10,995	0,002	7,148	0,007
12,972	0,003	7,693	0,007
14,628	0,093	7,830	0,002
14,742	0,009	8,173	0,005
14,871	0,009	8,839	0,035
15,006	0,001	10,051	0,005
15,853	0,028	10,434	0,045
15,964	0,003	11,411	0,003
16,169	0,114	11,666	0,068
16,377	0,430	12,244	0,007
17,188	0,568		
18,312	0,210		
19,036	0,166		
19,639	0,257		

Çizelge 5.2 ^{114}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{114}\text{Sn} \rightarrow ^{114}\text{Sb}$		$^{114}\text{Sn} \rightarrow ^{114}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
0,666	0,068	1,400	0,007
1,966	0,549	4,102	0,015
2,887	0,266	4,780	0,002
3,435	0,036	5,509	0,003
3,668	0,204	5,629	0,032
4,335	1,396	6,286	0,028
9,107	35,165	6,813	0,018
10,746	0,653	7,272	0,012
11,264	0,005	7,710	0,003
11,654	0,121	7,752	0,005
11,88	1,013	8,195	0,009
11,993	0,253	8,630	0,005
13,477	0,246	9,166	0,031
13,856	0,014	9,316	0,005
16,971	0,009	10,863	0,044
17,336	0,026	11,102	0,002
17,43	0,024	12,098	0,082
17,79	0,011	13,370	0,003
17,911	0,451		
18,301	0,028		
18,641	0,149		
18,796	0,301		
18,932	0,068		
19,228	0,147		
19,968	0,162		
20,611	0,152		
20,952	0,027		
21,316	0,161		
21,448	0,236		
23,366	0,042		
24,484	0,026		
25,045	0,072		

Çizelge 5.3 ^{116}Sn izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{116}\text{Sn} \rightarrow ^{116}\text{Sb}$		$^{116}\text{Sn} \rightarrow ^{116}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
1,767	0,141	2,943	0,005
3,511	0,401	5,3	0,002
4,226	0,135	6,033	0,006
4,425	0,668	6,158	0,009
6,084	2,129	6,252	0,017
10,093	38,692	6,842	0,028
11,374	1,166	7,696	0,013
12,163	0,005	7,942	0,011
12,374	0,002	8,386	0,008
12,754	1,594	8,736	0,01
13,657	0,1	9,388	0,004
14,596	0,167	9,777	0,037
14,736	0,026	10,317	0,001
16,008	0,234	10,689	0,001
16,262	0,021	11,628	0,04
17,656	0,001	12,522	0,002
18,358	0,007	12,673	0,083
18,742	0,003	14,77	0,001
19,564	0,09		
19,664	0,223		
19,768	0,142		
20,23	0,293		
20,296	0,078		
20,894	0,027		
21,579	0,041		
21,785	0,129		
22,178	0,262		
23,011	0,03		
23,086	0,107		
23,265	0,255		
25,013	0,037		
27,233	0,098		

Çizelge 5.4 ^{118}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

$^{118}\text{Sn} \rightarrow ^{118}\text{Sb}$		$^{118}\text{Sn} \rightarrow ^{118}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
2,797	0,226	4,347	0,004
3,898	0,003	5,184	0,012
4,712	0,075	6,593	0,007
5,044	0,256	6,856	0,022
5,478	0,3	7,428	0,012
5,853	1,92	7,453	0,017
5,859	0,001	5,859	0,002
7,569	3,061	8,545	0,009
11,11	39,276	8,702	0,011
11,921	0,045	9,021	0,006
11,944	3,205	9,079	0,002
12,922	0,008	9,305	0,012
13,077	0,003	10,222	0,002
13,566	2,793	10,334	0,018
14,861	0,166	10,493	0,025
16,265	0,172	11,609	0,001
17,471	0,229	11,921	0,001
20,991	0,39	12,488	0,034
21,329	0,012		
21,535	0,38		
21,861	0,021		
22,485	0,03		
22,92	0,085		
23,472	0,238		
24,5	0,293		

Çizelge 5.5 ^{120}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

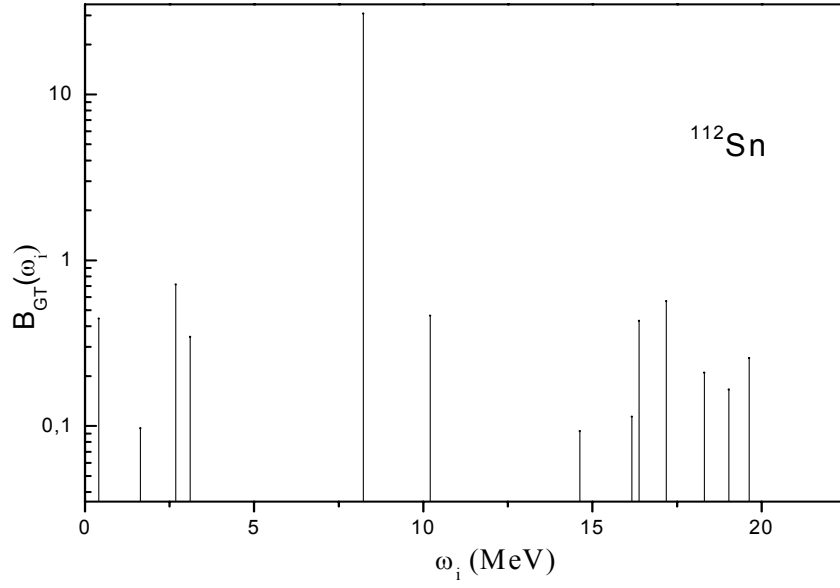
$^{120}\text{Sn} \rightarrow ^{120}\text{Sb}$		$^{120}\text{Sn} \rightarrow ^{120}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^-(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
3,892	0,311	0,931	0,078
5,197	0,007	5,553	0,01
5,618	0,087	5,732	0,006
6,099	0,451	6,383	0,002
6,587	0,107	7,12	0,008
7,12	0,001	7,434	0,019
7,161	3,085	7,997	0,031
8,901	4,214	9,175	0,01
11,979	36,224	9,63	0,004
12,533	8,137	9,671	0,008
14,378	5,165	9,801	0,01
21,732	0,02	9,904	0,004
22,263	0,24	10,97	0,028
22,605	0,047	11,04	0,015
22,783	0,445	11,513	0,002
23,057	0,012	13,304	0,027
24,034	0,01	13,827	0,087
24,229	0,119		
24,573	0,17		
25,097	0,081		
25,804	0,279		
26,291	0,141		

Çizelge 5.6 ^{122}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

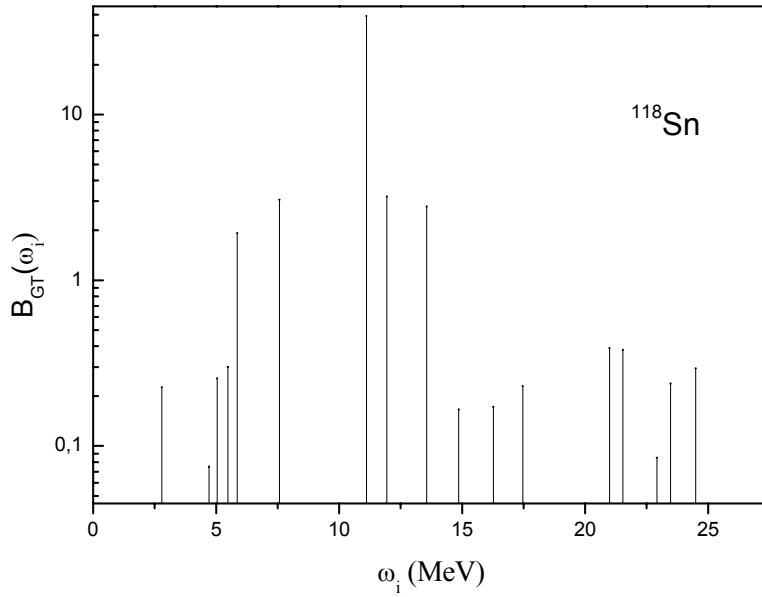
$^{122}\text{Sn} \rightarrow ^{122}\text{Sb}$		$^{122}\text{Sn} \rightarrow ^{122}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
5,1	0,378	2,085	0,067
6,457	0,146	6,345	0,014
6,584	0,191	6,828	0,002
7,36	0,566	7,036	0,002
7,798	0,058	7,77	0,009
8,48	4,545	8,09	0,017
10,202	5,446	8,653	0,031
12,837	28,44	9,918	0,01
13,24	14,798	10,423	0,003
14,529	0,003	10,496	0,012
14,63	0,005	10,601	0,009
15,255	8,337	11,631	0,041
18,17	0,109	11,921	0,004
18,671	0,109	14,18	0,021
18,799	0,053	14,478	0,091
20,505	0,029		
20,694	0,066		
21,174	0,062		
21,462	0,289		
21,688	0,012		
23,567	0,269		
23,849	0,325		
24,343	0,221		
25,392	0,033		
25,866	0,253		
26,546	0,074		
27,113	0,352		
27,773	0,106		
28,804	0,053		
29,585	0,017		
30,191	0,024		
31,66	0,061		

Çizelge 5.7 ^{124}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen GT 1^+ durumlarının spektrumu

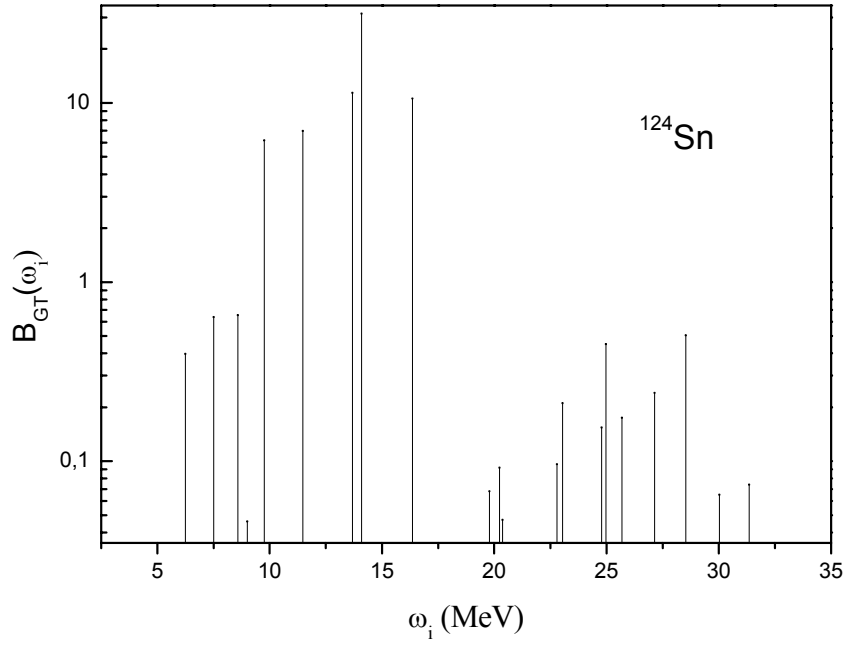
$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{Sb}$		$^{124}\text{Sn} \rightarrow ^{124}\text{In}$	
$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$	$\omega_i(\text{MeV})$	$B^+(\text{GT})$
6,254	0,397	3,205	0,06
7,506	0,637	7,015	0,012
7,803	0,015	7,694	0,002
8,59	0,654	7,978	0,003
8,999	0,046	8,443	0,012
9,76	6,173	9,372	0,03
11,484	6,97	10,677	0,007
13,581	0,001	11,223	0,017
13,683	11,392	12,231	0,01
14,095	31,501	12,459	0,034
15,356	0,005	12,904	0,003
15,379	0,004	13,581	0,001
16,357	10,593	15,195	0,055
19,784	0,068	15,201	0,056
20,229	0,092		
20,367	0,047		
22,183	0,013		
22,388	0,019		
22,68	0,027		
22,787	0,096		
23,05	0,211		
24,771	0,154		
24,978	0,45		
25,68	0,175		
26,555	0,034		
26,773	0,021		
27,143	0,241		
28,528	0,504		
28,924	0,02		
30,024	0,065		
30,646	0,035		
31,344	0,074		



Şekil 5.1: ^{112}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı



Şekil 5.2: ^{118}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı

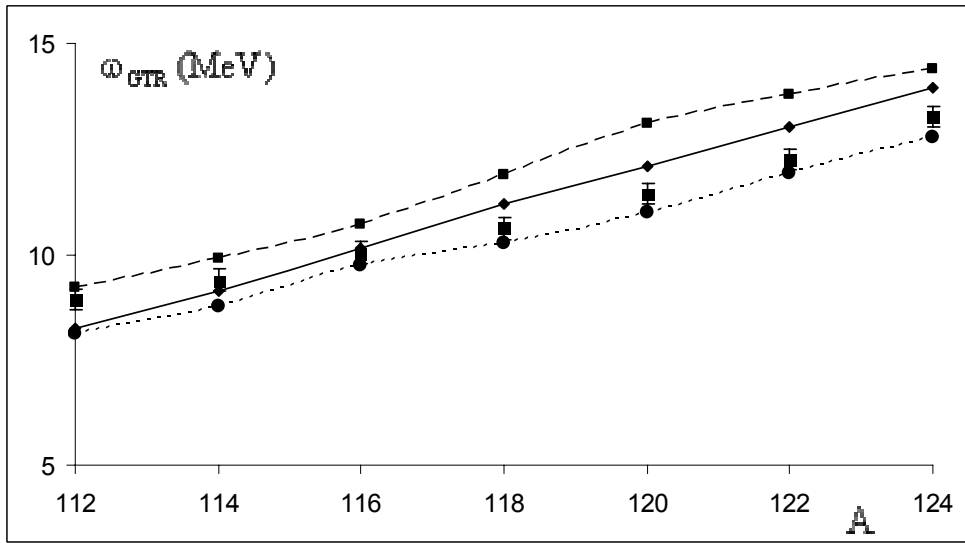


Şekil 5.3: ^{124}Sb izotopunda çift etkileşme dikkate alınarak elde edilen β^- geçiş güç fonksiyonunun enerji dağılımı

6. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu çalışmada Pyatov ve Salamov tarafından geliştirilen yöntemi test etmek amacı ile üç farklı β prosesini incelemek için söz konusu yöntem uygulanmıştır. Bu bağlamda, $^{112-124}\text{Sb}$ izotopları için GTR enerjileri ile GTR ve IAR (İzobar Analog Rezonans) enerjileri arasındaki fark, $98 \leq A \leq 130$ bölgesindeki çekirdekler için β^\pm geçiş $\log(ft)$ değerleri ve iki nötrinolu çift beta ($^{128,130}\text{Te} \rightarrow ^{128,130}\text{Xe}$) bozunumu için çekirdek matris elemanları hesaplanmıştır. Yapılan hesaplamalarda daha önce de belirtildiği gibi baz olarak Woods-Saxon potansiyeli Chepurnov parametreleri ile birlikte kullanılmıştır ve çift etkileşme parametresi açık tabakalı çekirdekler için $c = 12/\sqrt{A}$ olarak seçilmiştir. İkeda toplam kuralı yaklaşık %1-1,5'lük bir yanılğı ile sağlanmıştır.

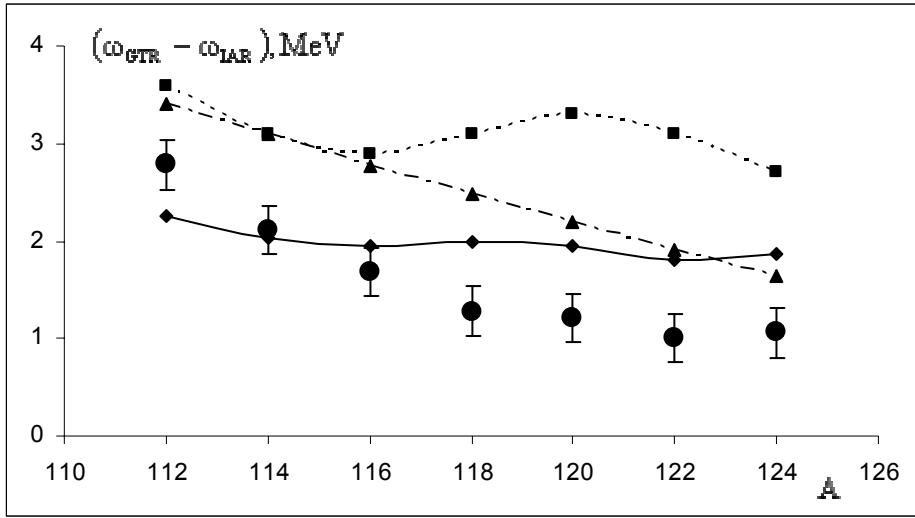
6.1. GTR Özellikleri



Şekil 6.1: GTR enerjilerinin kütle numarası ile değişimi.

Şekil 6.1'de farklı modellere dayanarak elde edilen GTR enerjileri sunulmuştur. Söz konusu enerji değerleri Sb izotopunun taban durumundan hesaplanmıştır. Sürekli eğri bu çalışmada elde edilen sonuçları, sürekli eğrinin üstünde yer alan kesikli eğri şematik etkin etkileşmenin kullanıldığı Ref [22]'nin sonuçlarını ve sürekli eğrinin altında yer alan noktalı eğri ise çift etkileşme

dikkate alınmaksızın özuyumlu yöntem ile elde edilen sonuçları göstermektedir [56]. Siyah kutular ile gösterilen deneysel veriler ise Ref [7,58,59]'dan alınmıştır. Kütle numarası (A) arttıkça deneysel verilerde var olan GTR enerjisindeki artış eğilimi her iki model ile elde edilen sonuçlarda da görülmektedir. Bununla birlikte, Pyatov'un yöntemi ile elde edilen sonuçların $A = 112$ çekirdeği dışında deneysel verilere daha yakın olduğu söylenebilir.



Şekil 6.2: GTR ve IAR arasındaki enerji farklarının kütle numarası ile değişimi.

GTR özellikleri ile ilgili bir başka hesaplama ise GTR ve IAR enerjileri arasındaki farktır. Yine aynı çekirdekler için yapılan bu hesaplamaların sonuçları şekil 6.2'de verilmiştir. Sürekli eğri bu çalışmada elde edilen sonuçları, noktalı eğri şematik model ile elde edilen sonuçları [22], kesik kesik eğri ise fenomenolojik bir formül kullanılarak elde edilen sonuçları [60] ve siyah yuvarlak kutular ise deneysel verileri göstermektedir [7,58,59]. Şekilden de görüldüğü gibi deneysel verilerdeki, A arttıkça enerji farkının küçük dalgalanmalar ile birlikte gösterdiği azalma eğilimi teorik hesaplamaların sonuçlarında da görülmektedir. Neticede, Pyatov'un yöntemi ile elde edilen sonuçların diğer modeller ile kıyaslandığında deneysel verilere daha yakın oldukları görülmektedir.

6.2. Düşük Enerjili β^\pm Bozunumu İçin Log(ft) Değerleri

Farklı büyüklüklerin hesaplanmasında yöntemimizin kullanılabilirliğini görmek açısından $98 \leq A \leq 130$ kütle bölgesindeki çekirdekler için GT tipi ($1^+ \rightarrow 0^+$) β^\pm geçiş log(ft) değerleri hesaplanmıştır. Hesaplama sonuçları çizelge 6.1 ve 6.2 'de verilmektedir.

Çizelge 6.1. Farklı yöntemler ile hesaplanmış β^+ geçişleri için log(ft) değerleri

Geçişler	$\chi_{GT} = 15/A$	$\chi_{GT} = 5.2/A^{0.7}$	P-S	Deney
$^{104}\text{Rh} \rightarrow ^{104}\text{Ru}$	3.70	3.76	4.30	4.32
$^{106}\text{Ag} \rightarrow ^{106}\text{Pd}$	3.77	3.82	4.57	4.92
$^{108}\text{Ag} \rightarrow ^{108}\text{Pd}$	3.74	3.81	4.36	4.70
$^{110}\text{Ag} \rightarrow ^{110}\text{Pd}$	3.74	3.83	4.22	4.08
$^{112}\text{In} \rightarrow ^{112}\text{Cd}$	4.02	4.11	4.57	4.70
$^{114}\text{In} \rightarrow ^{114}\text{Cd}$	4.05	4.16	4.48	4.90
$^{118}\text{Sb} \rightarrow ^{118}\text{Sn}$	4.38	4.60	4.69	4.53
$^{120}\text{Sb} \rightarrow ^{120}\text{Sn}$	4.23	4.45	4.69	4.53
$^{128}\text{Cs} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$	4.47	4.77	4.87	4.84
$^{130}\text{Cs} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$	4.31	4.56	4.37	4.10

Bu tablolarda iki farklı parametre değeri kullanılarak elde edilen şematik etkin etkileşme modelinin sonuçları 2. ve 3. sütunlarda, bizim yöntemimiz ile elde edilen sonuçlar ve deneysel veriler [61] ise sırası ile tabloların son iki sütunlarında verilmiştir. Tablolardan görüldüğü gibi β^+ geçişleri için şematik model kullanılarak yapılan hesaplamalarda parametre değeri arttıkça ($\chi_{GT} = 5.2/A^{0.7} > \chi_{GT} = 15/A$) log(ft) değerleri artar iken, β^- geçişleri için $^{114}\text{In} \rightarrow ^{114}\text{Sn}$ geçişi hariç bir azalma eğilimi vardır. Bununla birlikte, β^- geçişleri için hesaplanan log(ft) değerlerinde bizim sonuçlarımız ile şematik modelin sonuçları arasındaki fark daha belirgindir. Deneysel verilere baktığımızda ise kütle numarası arttıkça gerek β^- gerekse β^+ geçişleri için elde edilen log(ft) değerlerinde hem artma hem de azalma eğilimi söz konusudur. Bazı geçişler dışında, bizim yöntem ile elde edilen sonuçların deneysel verilerde gözlemlenen artış ve azalış miktarlarına daha iyi fit olduğu söylenebilir. Yani Pyatov'un yöntemi ile elde

edilen sonuçlar genel olarak hem β^- hem de β^+ geçişleri için deneysel verilere daha yakındır.

Çizelge 6.2. Farklı yöntemler ile hesaplanmış β^- geçişleri için $\log(ft)$ değerleri

Geçişler	$\chi_{GT} = 15/A$	$\chi_{GT} = 5.2/A^{0.7}$	Bizim yöntem	Deney
$^{98}\text{Nb} \rightarrow ^{98}\text{Mo}$	3.37	3.33	4.75	4.72
$^{100}\text{Nb} \rightarrow ^{100}\text{Mo}$	3.39	3.35	4.95	5.10
$^{100}\text{Tc} \rightarrow ^{100}\text{Ru}$	3.11	3.07	4.58	4.60
$^{102}\text{Tc} \rightarrow ^{102}\text{Ru}$	3.14	3.04	4.78	4.78
$^{104}\text{Rh} \rightarrow ^{104}\text{Pd}$	3.05	3.01	4.69	4.55
$^{106}\text{Rh} \rightarrow ^{106}\text{Pd}$	3.15	3.10	4.60	5.17
$^{108}\text{Rh} \rightarrow ^{108}\text{Pd}$	3.29	3.24	4.75	5.50
$^{110}\text{Rh} \rightarrow ^{110}\text{Pd}$	3.47	3.43	4.96	5.25
$^{112}\text{Rh} \rightarrow ^{112}\text{Pd}$	3.66	3.62	5.18	5.30
$^{108}\text{Ag} \rightarrow ^{108}\text{Cd}$	3.11	3.08	4.68	4.43
$^{110}\text{Ag} \rightarrow ^{110}\text{Cd}$	3.26	3.22	4.71	4.66
$^{114}\text{Ag} \rightarrow ^{114}\text{Cd}$	3.66	3.62	5.08	5.10
$^{112}\text{In} \rightarrow ^{112}\text{Sn}$	3.20	3.15	4.57	4.12
$^{114}\text{In} \rightarrow ^{114}\text{Sn}$	3.32	3.36	4.75	4.47
$^{116}\text{In} \rightarrow ^{116}\text{Sn}$	3.62	3.56	4.92	4.66
$^{118}\text{In} \rightarrow ^{118}\text{Sn}$	3.77	3.72	5.07	4.79
$^{120}\text{In} \rightarrow ^{120}\text{Sn}$	3.88	3.82	5.17	5.00
$^{122}\text{In} \rightarrow ^{122}\text{Sn}$	3.95	3.90	5.23	5.11
$^{128}\text{I} \rightarrow ^{128}\text{Xe}$	4.42	4.42	6.88	6.09

6.3. İki Nötrinolu Çift Beta Bozunumu İçin Çekirdek Matris Elemanları

Bu çalışmada son olarak $^{128,130}\text{Te}$ izotopları için iki nötrinolu çift beta geçiş çekirdek matris elemanlarını hesapladık. Bu hesaplamalarda Gamow-Teller tipi bozunumlar için (2.20) ifadesine uygun olarak

$$\mathcal{E}_{-1}^{GT} = \sum_{\mu,i} \frac{M_{\beta^-}^i(\mu, 0^+ \rightarrow 1^+) M_{\beta^+}^i(\mu, 0^+ \rightarrow 1^+)}{\omega_i + W/2}$$

formülü, Fermi tipi bozunumlar için ise

$$\varepsilon_{-1}^F = \sum_i \frac{M_{\beta^-}^i(0^+ \rightarrow 0^+)M_{\beta^+}^i(0^+ \rightarrow 0^+)}{\omega_i + W/2}$$

formülü kullanılır. Burada, $M_{\beta^\pm}^i(0^+ \rightarrow 0^+)$ büyüklükleri daha önceki çalışmalarda hesaplanmıştır [62,63]. $M_{\beta^\pm}^i(\mu, 0^+ \rightarrow 1^+)$ matris elemanları ise (5.39) ve (5.40) formülleri ile hesaplanmıştır. Hesaplama sonuçları çizelge 6.3’de verilmektedir.

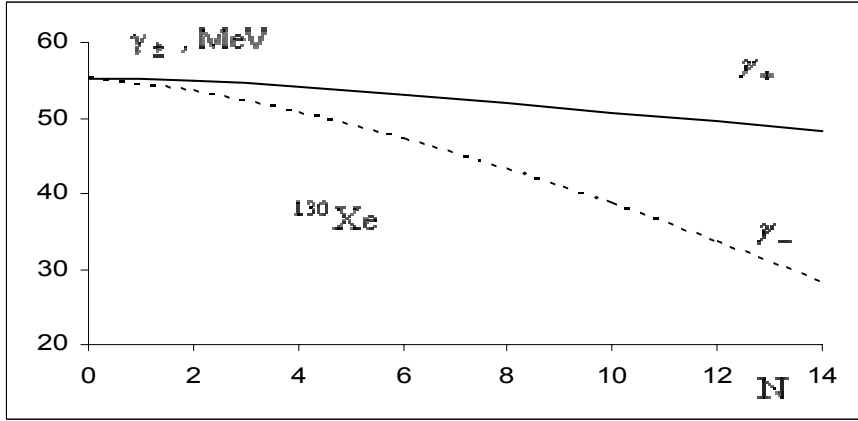
Çizelge 6.3. Farklı modeller ile hesaplanmış iki nötrinolu çift beta bozunumu için çekirdek matris elemanları

Geçişler	[64]			Bizim yöntem			Deney
	Fermi	GT	Toplam	Fermi	GT	Toplam	
$^{128}\text{Te}-^{128}\text{Xe}$	0.005	0.727	0.732	0.0017	0.0194	0.021	0.025 [65]
$^{130}\text{Te}-^{130}\text{Xe}$	0.0006	0.587	0.588	0.0016	0.0167	0.018	0.017 [65] 0.032 [66]

Şematik model ve özuyumlu olarak hesaplanan çift beta geçiş matris elemanlarına GT geçişlerinin katkısı sıra ile 3. ve 6. sütunlarda verilmektedir. Tablodan görüldüğü gibi Pyatov-Salamov yöntemi ile elde edilen sonuçlar şematik modelin sonuçlarından 35-40 defa daha küçüktür. Bunun nedeni, Pyatov’un yöntemi ile hesaplanan β^+ geçiş olasılığının şematik model ile bulunan değere nispeten daha küçük olmasıdır. (Şu da belirtilmelidir ki Ikeda toplam kuralı her iki modelde de aynı hassasiyetle sağlanmaktadır). Yukarıdaki tablonun 2. ve 5. sütununda çift beta geçiş matris elemanlarına Fermi geçişlerinin katkısı verilmektedir. Görüldüğü gibi öz uyumlu yöntem ile hesaplanan Fermi katkıları GT geçişlerinden gelen katkıların yaklaşık 1 merteye altında iken, şematik model ile hesaplanan Fermi katkıları ise GT geçişlerinden gelen katkıların yaklaşık 2-3 merteye altındadır. Yani, öz uyumlu yöntem ile hesaplanan Fermi katkılarının daha dikkate değer büyüklükte olduğu söylenebilir. Fermi geçişlerinden gelen katkılarda hesaba katılmasına rağmen elde edilen toplam matris elemanlarının değerlerinin deneysel değerlerden hala daha küçük olması ise yasaklı geçişlerden gelebilecek olası katkıların da dikkate alınmasını gerekli kılmaktadır.

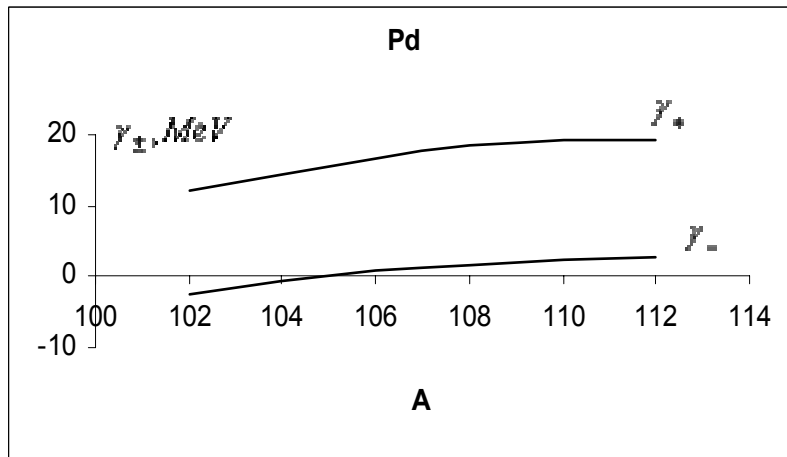
Daha önce de belirttiğimiz gibi β^- geçişleri için öz uyumlu yöntem ile hesaplanan $\log(ft)$ değerleri şematik model ile hesaplanan değerlerden yaklaşık 1,5 – 2,5 birim daha büyüktür ve hesapladığımız çift beta geçiş matris elemanları ise şematik model ile elde edilen değerlerden oldukça küçüktür. Bunun nedeni,

nükleonlar arasındaki çiftlenme etkilerinin dikkate alınması ile birlikte elde edilen etkin etkileşme parametreleri γ_+ ve γ_- 'nin birbirlerinden farklı olmalarıdır. Halbuki, çift etkileşme dikkate alınmadığı zaman 4. bölümden de hatırlanacağı gibi $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma$ şeklinde idi. Aşağıda verilen şekil 6.3 bunu doğrulamaktadır.



Şekil 6.3. ^{130}Xe izotopu için etkin etkileşme parametrelerinin çift etkileşme parametresine olan bağıllığı

Şekil 6.3 'de ^{130}Xe izotopu için etkin etkileşme parametreleri γ_+ ve γ_- 'nin çift etkileşme parametrelerine ($c_n = c_p = N/A^{0.5}$) olan bağıllıkları verilmiştir. Görüldüğü gibi çift etkileşme yok iken γ_+ ve γ_- birbirine eşittir. Nükleonlar arasındaki çiftlenme etkisi arttıkça γ_+ ve γ_- arasındaki farkın arttığı görülmektedir.



Şekil 6.4. Pd izotopları için etkin etkileşme parametrelerinin kütle numarasına olan bağıllığı

Şekil 6.4’de ise Pd çekirdeği için γ_+ ve γ_- parametrelerinin A kütle numarasına olan ($c_n = c_p = 12/A^{0.5}$) bağılılıkları verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi kütle numarası azaldıkça γ_+ ve γ_- azalmaktadır. Ayrıca, γ_+ ’nın değeri γ_- ’den daha büyüktür ve işaretleri bazı izotoplar için ($A = 102,104$) birbirlerinden farklı olabilir.

Bu tez çalışmasında Gamow-Teller geçiş özellikleri (GTR enerjisi, beta bozunum $\log(ft)$ değerleri ve iki nötrinolu çift beta bozunumu için çekirdek matris elemanları) öz uyumlu bir yöntem ile incelenmiştir. “Bozulmuş simetritelerin restore edilmesi yöntemi” olarak bilinen bu yöntem bozulmuş bir komutasyon koşulunu restore etmek için kullanılmıştır. Bu yöntemle göre elde edilen β^- ve β^+ etkileşme sabitlerinin birbirlerinden farklı oldukları (çift etkileşme dikkate alındığında $\gamma_+ \neq \gamma_-$) görülmüştür. Yukarıda sözü edilen üç farklı β prosesi için bu çalışmada önerilen yöntem ile elde edilen hesaplama sonuçları diğer yöntemlere nazaran deneysel verilere daha yakındır. Ayrıca, iki nötrinolu çift beta bozunumu için elde edilen çekirdek matris elemanları değerlerinin Fermi geçişlerinden gelen katkılar da dikkate alınmasına rağmen, şimdiye kadar elde edilen diğer teorik sonuçların aksine deneysel verilerden daha küçük olması, yasaklı geçişlerden gelebilecek olası katkılarının da dikkate alınması gerektiğini göstermektedir.

Sonuç itibarı ile bu çalışmada önerilen yöntemin bozulmuş bir komütatiflik koşulunun restore edilmesi amacı ile uygulanması başarılı olmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Ikeda, K., Fujii, S. ve Fujita, J.I., “*The (p,n) reactions and beta decays*”, Phys. Lett. **3**, 271-272 (1963).
- [2] Doering, R.R., “*Observation of giant gamow-teller strength in (p,n) reactions*”, Phys.Rev. Lett. **35**, 1691-1693 (1975).
- [3] Bainum D.E., Rapaport, J. ve Goodman,C.D., “*Observation of giant particle-hole resonances in $^{90}\text{Zr}(p,n)^{90}\text{Nb}$ reactions*”, Phys.Rev.Lett. **44**, 1751-1754 (1980).
- [4] Flanders, B.S., Madey, R. ve Anderson, B.D., “*Gamow-Teller strength in the $^{208}\text{Pb}(p,n)^{208}\text{Bi}$ reaction at 134.3 MeV*”, Phys.Rev. C **40**, 1985-1992 (1989).
- [5] Bergquist, I., Brockstedt, A. ve Carlen, L. “*The ($^3\text{He},t$) reaction at intermediate energies: Spin-isospin transitions to states in ^{12}N and ^{13}N* ”, Nucl. Phys.A **469**, 648-668, (1987).
- [6] Janecke, J., Becchetti, F.D. ve Van Den Berg, A.M., “*Non-spin-flip ($^3\text{He}, t$) charge-exchange and isobaric analog states of actinide nuclei studied at $\theta = 0^\circ$, $E(^3\text{He}) = 76 \text{ MeV}$ and 200 M* ”, Nucl. Phys. A **526**, 1-35 (1991).
- [7] Akimune, H., Daito, I., ve Fujita, Y., “*Direct proton decay from the Gamow-Teller resonance in ^{208}Bi* ”, Phys.Rev. C **52**, 604-615 (1995).
- [8] Zegers, R.G.T., Abend, H. ve Akimune, H., “*Excitation and decay of the isovector spin-flip giant monopole resonance via the $^{208}\text{Pb}(^3\text{He},tp)$ reaction at 410 MeV*”, Nucl. Phys. A **731**, 121-128 (2004).
- [9] Pyatov, N.I. ve Salamov, D.I., “*Conservation laws and collective excitations in nuclei*”, Nukleonika, **22**, 127-141 (1977).
- [10] Alford, W.P.ve Spicer, B.M., *Advances in nuclear physics*, Plenum, New York, USA, (1998).
- [11] Kuzmin, V.A. ve Soloviev, V.G., “*Description of the Gamow-Teller Beta+ decays and (n, p) transitions in spherical nuclei*”, Preprint JINR E4-91-169, Dubna (1991).
- [12] Homma, H., Bender, E. ve Hirsch, M., “*Systematic study of nuclear β decay*”, Phys.Rev. C **54**, 2972-2985 (1996).

- [13] Salamov, D.I., Küçükburşa, A. ve Maras, I., “*Calculation of the $\log(ft)$ values for the allowed Gamow-Teller transitions in deformed nuclei using the basis of Woods-Saxon wave function*”, Acta Physica Slovaca **53**, 307-319 (2003).
- [14] Urkedal, P., Zhang, X.Z. ve Hamamoto, I., “*Low-lying appreciable Gamow-Teller strength in deformed neutron-rich nuclei*”, Phys.Rev. C **64**, 054304-1 (2001).
- [15] Staudt, A., Bender, E. ve Muto, K., “*Second-generation microscopic predictions of beta-decay half-lives of neutron-rich nuclei*”, AT. Data and Nuc.Data Tables **44**, 79-132 (1990).
- [16] Hirsch, M., Staudt, A. ve Muto, K., “*Microscopic Predictions of β^+ /EC-Decay Half-Lives*”, At. Dat. and Nucl. Data Tables **53**, 165-193 (1993).
- [17] Kuzmin, V.A. ve Soloviev, V.G., “*Fragmentation of the gamow-teller resonance in spherical nuclei*”, J. Phys G :Nucl. Par. Phys.**10**, 1507-1522 (1984).
- [18] Colo, G. ve Van Giai, N., “*Escape and spreading properties of charge-exchange resonances in ^{208}Bi* ”, Phys.Rev. C **50**, 1496-1508 (1994).
- [19] Dang, N.D., Arima, A., Suzuki, T. ve Yamaji, S., “*Spreading of the Gamow-teller resonance in ^{90}Nb and ^{208}Bi* ”, Phys.Rev.Lett. **79**, 1638-1641 (1997) ; “*Study of the Gamow-Teller resonance in ^{90}Nb and ^{208}Bi* ”, Nucl. Phys. A **621**, 719-735 (1997).
- [20] Moukhai, E.A.,Rodin, V.A. ve Urin, M.H., “*Structure and decay properties of spin-dipole giant resonances within a semimicroscopical approach*” Phys.Lett. B **447**, 8-14 (1999).
- [21] Suzuki, T. ve Sagawa, H., “*Microscopic study of gamow-teller and spin-dipole states in ^{208}Bi* ”, Eur.Phys. J. A **9**, 49-53 (2000).
- [22] Rodin, V.A. ve Urin, M.H., “*Direct-decay properties of charge-exchange spin giant resonances*”,Nucl. Phys. A **687**, 276-281 (2001).
- [23] Babacan, T., Salamov, D.I. ve Küçükburşa, A., “*Gamow-Teller I^+ states in ^{208}Bi* ”, Phys. Rev. C **71**, 037303-1, (2005).
- [24] Haxton, W.C., Stephenson, G.S., “*Double beta decay*”, Prog. Part. Nucl. Phys.**12**, 409-479 (1984).

- [25] Doi, M., Kotani, T., ve Takasugi, E., “*Double Beta Decay and Majorana Neutrino*”, Prog. Theor. Phys. **83**, 1-175 (1985).
- [26] Vergados, J.D., “*The neutrino mass and family, lepton and baryon number non-conservation in gauge theories*”, Phys. Rep., **133**, 1-216 (1986).
- [27] Kuliev, A.A., Salamov, D.I., ve Balayev, S.K., “*Nuclear matrix elements of neutrinoless double beta decay*”, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz., **52**, 2225-2230 (1988).
- [28] Tomoda, T., “*Double beta decay*”, Rep. Prog. Phys., **54**, 53-126 (1991).
- [29] Primakoff, H., Rosen, S.P., “*Nuclear Double-Beta Decay and a New Limit on Lepton Nonconservation*”, Phys. Rev. **184**, 1925-1933 (1969).
- [30] Muto, K., Bender, E. ve Klapdor, H.V., “*Effects of ground-state correlations on $2\nu\beta\beta$ decay rates and limitations of the QRPA approach*”, Z.Phys., A **334**, 177-186 (1988).
- [31] Vogel, P. ve Fisher, P., “*Nuclear structure and double beta decay: Two neutrino mode*”, Phys. Rev., C **32**, 1362-1368 (1985).
- [32] Vogel, P. ve Zirnbauer, M.R., “*Nuclear structure effects in double-beta decay*”, Phys. Rev. Lett., **57**, 3148-3151 (1986) ; “*Nuclear structure effects in double-beta decay*”, Phys. Rev., C **37**, 731-746 (1988).
- [33] Civitarese, O., Faessler, A. ve Tomoda, T., “*Suppression of the two-neutrino double β decay*”, Phys. Lett., B **194**, 11-14 (1987).
- [34] Tomoda, T., Faessler, A. ve Schmid, K.W., “*Neutrinoless $\beta\beta$ decay and a new limit on the right-handed current*”, Nucl. Phys., A **452**, 591-620 (1986).
- [35] Balayev, S.K., Kuliev, A.A. ve Salamov, D.I., “*Calculation of 2-beta decay matrix elements by means of residue theorem*”, Izv. AN SSSR, Ser.Fiz.,**52**, 2140-2144 (1989)
- [36] Raduta, A.A., Faessler, A., Stoica, S. ve Kaminski, W.A., “*The $2\nu\beta\beta$ decay rate within a higher RPA approach*”, Phys. Lett.,B **254**, 7-12 (1991).
- [37] Civitarese, O., Faessler, A., Suhonen, J., ve Wu, X.R., “*Suppression of the two-neutrino $\beta\beta$ decay in a particle number projected quasiparticle random phase approximation*”, Nucl. Phys., A **524**, 404-424 (1991).

- [38] Krmpotic, F., Mariano, A., Kuo, T.T.S ve Nakayama, K., “*Projected linear response theory for charge-exchange excitations and double beta decay*”, Phys.Lett., B **319**, 393-400 (1993).
- [39] Cheoun, M.K., Bobyk, A., Faessler, A., Simkovic, F. ve Teneva, G., “*Neutron-proton pairing in light nuclei and two-neutrino double-beta decay*”, Nucl. Phys.A **561**, 74-94 (1993); Cheoun, M.K., Bobyk, A., Faessler, A., Simkovic, F. ve Teneva, G., “*Two-neutrino double-beta decay in coupled QRPA with neutron-proton pairing*”, Nucl. Phys. A **564**, 329-344 (1993); Cheoun, M.K., Bobyk, A., Faessler, A., Simkovic, F. ve Teneva, G., “*Total Gamow-Teller strength, ground-state correlations and sum rules in QRPA with neutron-proton pairing*”, Nucl. Phys. A **587**, 301-317 (1995).
- [40] Toivanen, J. ve Suhonen, J., “*Renormalized Proton-Neutron Quasiparticle Random-Phase Approximation and Its Application to Double Beta Decay*”, Phys.Rev.Lett., **75**, 410-413 (1995); Toivanen, J. ve Suhonen, J., Phys.Rev. C **55**, 2314-2323 (1997).
- [41] Schwieger, J., Simkovic, F. ve Faessler, A., “*The Pauli principle, QRPA and the two-neutrino double beta decay*”, Nucl.Phys. A **600**, 179-192 (1996).
- [42] Krmpotic, F., Mariano, A. ve Kuo, T.T.S., “*Non-collapsing quasiparticle random phase approximation for nuclear double-beta decay*”, Fizika, **B5**, 93-102 (1996).
- [43] Muto, K., “*Extended quasiparticle RPA and double-beta-decay nuclear matrix elements*”, Phys. Lett. B **391**, 243-248 (1997).
- [44] Hirsch, J.G., Hess, P.O., ve Civitarese, O., “*Renormalized quasiparticle random phase approximation and double beta decay: A critical analysis of double Fermi transitions*”, Phys.Rev. C **54**, 1976-1981 (1996).
- [45] Hirsch, M. ve Wui, X.R., “*Matrix elements for $0\nu\beta\beta$ decay calculated with the operator expansion method and QRPA wave functions*” Z.Phys. A **345**, 163-169 (1993).
- [46] Muto, K., “*Coulomb effect in operator expansion method for two-neutrino double beta decay*”, Phys. Rev. C **48**, 402-412 (1993).

- [47] Hirsch, M., Kadowaki, O. ve Klapdor-Kleingrothaus, H.V., “*Extended operator expansion method for neutrinoless double beta decay*”, Z.Phys. A **352**, 33-45 (1995).
- [48] Raduta, A.A. ve Suhonen, J., “*Description of β decay to excited quadrupole phonon states within a boson-expansion formalism*”, Phys. Rev. C **53**, 176-187 (1996); Raduta, A.A. ve Suhonen, J., “*Boson-expansion description of beta decay to excited final states*”, J. Phys.G **22** 123-129 (1996).
- [49] Hara, K., “*An extended boson approximation in the theory of nuclear structure*”, Prog. Theor. Phys. **32**, 88-105 (1964).
- [50] Rowe, D.J., “*Equations-of-motion method and the extended shell model*”, Rev. Mod. Phys. **40**, 153-166 (1968).
- [51] Schwieger, J., Simkovic, F., Faessler, A. ve Kaminski, W.A., “*Double β decay to excited states of several medium-heavy nuclei within the renormalized quasiparticle random phase approximation*”, Phys. Rev. C **57** 1738-1743 (1998).
- [52] Simkovic, F., Schwieger, J. ve Veselsky, M., “*Non-collapsing renormalized QRPA with proton-neutron pairing for neutrinoless double beta decay*”, Phys.Lett. B **393**, 267-273 (1997).
- [53] Bobyk, A., Kaminski, W.A. ve Zareba, P., “*Study of the double beta decay of $70 \leq A \leq 100$ nuclei within the RQRPA and the self-consistent BCS + RQRPA formalisms*”, Nucl. Phys. A **669**, 221-238 (2000).
- [54] Suhonen, J. ve Civitarese, O., “*Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay*”, Phys. Rep. **300** 123-214 (1998).
- [55] Soloviev, V.G., *Theory of Complex Nuclei*, Pergamon, New York, USA (1976).
- [56] Kimyonok, O., *Gamow-Teller etkileşmesinin özuyumlu biçimde incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya, Türkiye (2004).
- [57] Bohr, A.A., ve Mottelson, B.R., *Nuclear Structure, Vol.I* Benjamin, Reading, (1969)

- [58] Fujiwara, M., Akimune, H. ve Daito, I. “*Spin-isospin resonances in nuclei*”, Nucl. Phys. A **599**, 223-244 (1996)
- [59] Akimune, H., Daito, I. ve Fujita, Y., “*Microscopic structure of the Gamow-Teller resonance in ^{208}Bi* ”, Phys.Lett. B **323** 107-112 (1994).
- [60] Sakamoto, H. ve Kishimoto, T., “*Microscopic analysis of nuclear collective motions in terms of the boson expansion theory : (II). Numerical calculations*”, Nucl. Phys. A **528**, 73-143 (1991).
- [61] Singh, B., Rodriguez, J.L., Wong, S.S.M. ve Tuli, J.K., “*Review Of LogftValues In β Decay*”, Nucl. Data Sheets **84**, 487-563 (1998).
- [62] Küçük bursa, A., Salamov, D.I., Babacan, T. ve Aygör, H.A., “*An investigation of the influence of the pairing correlations on the properties of the isobar analog resonances in $A=208$ nuclei*”, Pramana **63**, 947-961 (2004)
- [63] Salamov, D.I., Babacan, T., Küçük bursa, A., Ünlü, S. ve Maraş, I., “*The isospin admixture of the ground state and the properties of the isobar analog resonance in medium and heavy mass nuclei*”, Pramana **66**, 1105-1110 (2006).
- [64] Selam, C., Küçük bursa, A. ve Bircan, H., “*Nuclear matrix elements of double beta decay in deformed nuclei*”, Turkish J. Phys **27**, 187-193 (2003).
- [65] Bernatowicz, T., Brannon, J., Brazzle, R., Cowsik, R., Hohenberg, C. ve Podosek, F., “*Neutrino mass limits from a precise determination of $\beta\beta$ -decay rates of ^{128}Te and ^{130}Te* ”, Phys.Rev.Lett. **69**, 2341-2344 (1992).
- [66] Takaoka, N., Motomure, Y. ve Nagao, K., “*Half-life of ^{130}Te double- β decay measured with geologically qualified samples*”, Phys.Rev. C **53**, 1557-1561 (1996).

Ek-1 Bozon Operatörlerinin Komutasyonu

$$\hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle a_{j_n m_n}^+ a_{j_p m_p}$$

$$\hat{A}_{j_n j_p}(\mu) = (\hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu))^+ = \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle a_{j_p m_p}^+ a_{j_n m_n}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \sqrt{\frac{9}{(2j_n' + 1)(2j_n + 1)}} \sum_{\substack{m_n' m_p' \\ m_n m_p}} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n' m_n' \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle [\hat{a}_{j_p' m_p'}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \hat{a}_{j_n' m_n'}^+ \hat{a}_{j_p' m_p'} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n' m_n'}^+ \hat{a}_{j_p' m_p'}]$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{\sqrt{(2j_n' + 1)(2j_n + 1)}} \sum_{\substack{m_n' m_p' \\ m_n m_p}} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n' m_n' \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \{ \hat{a}_{j_p' m_p'}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \hat{a}_{j_n' m_n'}^+ \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n' m_n'}^+ \hat{a}_{j_p' m_p'} \}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{\sqrt{(2j_n' + 1)(2j_n + 1)}} \sum_{\substack{m_n' m_p' \\ m_n m_p}} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n' m_n' \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_{j_p' m_p'}^+ (\delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}) \hat{a}_{j_p m_p} \\ - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n' m_n'}^+ \hat{a}_{j_p' m_p'} \end{array} \right\}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{\sqrt{(2j_n' + 1)(2j_n + 1)}} \sum_{\substack{m_n' m_p' \\ m_n m_p}} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n' m_n' \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_{j_p' m_p'}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ (\delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p m_p} - \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}) \hat{a}_{j_n m_n} \\ - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n' m_n'}^+ \hat{a}_{j_p' m_p'} \end{array} \right\}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{\sqrt{(2j_n' + 1)(2j_n + 1)}} \sum_{\substack{m_n' m_p' \\ m_n m_p}} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n' m_n' \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \{ \hat{a}_{j_p' m_p'}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p m_p} \}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{\sqrt{(2j_n' + 1)(2j_n + 1)}} \sum_{\substack{m_n' m_p' \\ m_n m_p}} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n' m_n' \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \{ \hat{a}_{j_p' m_p'}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p m_p} \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \delta_{j_n' j_n} \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p m_p} \}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{2j_n + 1} \sum_{m_n m_p} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \{ \hat{a}_{j_p' m_p'}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{j_p' j_p} \delta_{j_n' j_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \delta_{j_n' j_n} \delta_{j_p' j_p} \}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{2j_n + 1} \sum_{m_n m_p} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (N_{j_p} - N_{j_n}) \delta_{j_n' j_n} \delta_{j_p' j_p}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{2j_n + 1} (N_{j_p} - N_{j_n}) \delta_{j_n' j_n} \delta_{j_p' j_p} \sum_{m_n m_p} \langle j_p' m_p' 1\mu' | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle$$

$$\langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle = (-1)^{j_n + m_n + 1 + \mu} \sqrt{\frac{2j_n + 1}{3}} \langle j_p - m_p | j_n m_n | 1\mu \rangle$$

$$\langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle = (-1)^{j_n + m_n + 1 + \mu'} \sqrt{\frac{2j_n + 1}{3}} \langle j_p - m_p | j_n m_n | 1\mu' \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle \cdot \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle &= (-1)^{\mu'+\mu} \frac{2j_n+1}{3} \langle j_p -m_p | j_n m_n | 1\mu' \rangle \langle j_p -m_p | j_n m_n | 1\mu \rangle \\
\sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle &= (-1)^{\mu'+\mu} \frac{2j_n+1}{3} \sum_{m_n m_p} \langle j_p -m_p | j_n m_n | 1\mu' \rangle \langle j_p -m_p | j_n m_n | 1\mu \rangle \\
\sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle &= (-1)^{\mu'+\mu} \frac{2j_n+1}{3} \delta_{\mu'\mu}
\end{aligned}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = \frac{3}{2j_n+1} (N_{j_p} - N_{j_n}) \delta_{j_n' j_n} \delta_{j_p' j_p} (-1)^{\mu'+\mu} \frac{2j_n+1}{3} \delta_{\mu'\mu}$$

$$[\hat{A}_{j_n j_p}(\mu), \hat{A}_{j_n' j_p'}^+(\mu')] = (N_{j_p} - N_{j_n}) \delta_{j_n' j_n} \delta_{j_p' j_p} \delta_{\mu'\mu}$$

Ek-2 Kuazi Bozon Operatörlerinin Komutasyonu

$$\hat{C}_{np}^+(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2j_n+1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+$$

$$\hat{C}_{np}(\mu) = (\hat{C}_{np}^+(\mu))^+ = \sqrt{\frac{3}{2j_n+1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}$$

$$[\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu')] = \sqrt{\frac{9}{(2j_{n'}+1)(2j_n+1)}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p+m_p-m_p} [\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+]$$

$$[\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+] = \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}$$

$$[\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+] = \hat{\alpha}_{j_p-m_p} (\delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n m_n}) \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}$$

$$[\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+] = \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n m_n} \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}$$

$$[\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+] = (\delta_{j_p j_p} \delta_{m_p m_p} - \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}) \delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ (\delta_{j_p j_p} \delta_{m_p m_p} - \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}) \hat{\alpha}_{j_n m_n} - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}$$

$$[\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+] = (\delta_{j_p j_p} \delta_{m_p m_p} \delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n} - \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p} \delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n}) - \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n m_n} \delta_{j_p j_p} \delta_{m_p m_p}$$

Kuazi bozon yaklaşımında $\hat{\alpha}_{j_n m_n} |0\rangle = 0$, $\hat{\alpha}_{j_p m_p} |0\rangle = 0$ şeklindedir. O halde

$$[\hat{\alpha}_{j_p-m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+, \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p-m_p}^+] = \delta_{j_p j_p} \delta_{m_p m_p} \delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n} \text{ olur.}$$

$$[\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu')] = \sqrt{\frac{9}{(2j_{n'}+1)(2j_n+1)}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p+m_p-m_p} \delta_{j_p j_p} \delta_{m_p m_p} \delta_{j_n j_n} \delta_{m_n m_n}$$

$$[\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu')] = \frac{3}{2j_n+1} \delta_{j_p j_p} \delta_{j_n j_n} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \langle j_p m_p 1\mu' | j_n m_n \rangle$$

$$[\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu')] = \frac{3}{2j_n+1} (-1)^{\mu'+\mu} \frac{2j_n+1}{3} \delta_{\mu'\mu} \delta_{j_p j_p} \delta_{j_n j_n}$$

$$[\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu')] = \delta_{n'n} \delta_{p'p} \delta_{\mu'\mu}$$

Ek-3 Ortalama Alan Hamiltoniyeni İle Bozon Operatörlerinin Komutasyonu

$$[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] = \sum_{\substack{j_n m_n \\ m_n m_p}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_n} \langle j_p m_p 1 \mu | j_n m_n \rangle [\hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}, \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p}]$$

$$+ \sum_{\substack{j_p m_p \\ m_p m_n}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_p} \langle j_p m_p 1 \mu | j_n m_n \rangle [\hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}, \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p}]$$

$$[\hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}, \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p}] = \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ (\delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}) \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_n m_n} + \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_n m_n} + \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_n m_n}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_n m_n}$$

$$[\hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}, \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p}] = \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}$$

$$= \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}$$

$$= -\hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}$$

$$= -\hat{a}_{j_n m_n}^+ (\delta_{m_p m_p} - \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+) \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}$$

$$= -\hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_p m_p} + \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p} - \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \hat{a}_{j_p m_p}^+ \hat{a}_{j_p m_p}$$

$$= -\hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_p m_p}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] &= \sum_{\substack{j_n m_n \\ m_n m_p}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_n} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_n m_n} \\
&- \sum_{\substack{j_p m_p \\ m_p m_n}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \delta_{m_p m_p} \\
[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] &= \sum_{j_n m_n m_p} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_n} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \\
&- \sum_{j_p m_p m_n} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \\
[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] &= \sum_{j_n} \varepsilon_{j_n} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \\
&- \sum_{j_p} \varepsilon_{j_p} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \\
[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] &= \left(\sum_{j_n} \varepsilon_{j_n} - \sum_{j_p} \varepsilon_{j_p} \right) \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{a}_{j_n m_n}^+ \hat{a}_{j_p m_p} \\
[\hat{H}_{sp}, \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)] &= \left(\sum_{j_n} \varepsilon_{j_n} - \sum_{j_p} \varepsilon_{j_p} \right) \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu) = \varepsilon_{j_n j_p} \hat{A}_{j_n j_p}^+(\mu)
\end{aligned}$$

Ek-4 Kuazi-Parçacık Tasvirinde Ortalama Alan Hamiltonyeni İle Bozon Operatörlerinin Komutasyonu

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\text{sqp}}, \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)] &= \sum_{\substack{j_n, m_n \\ m_n, m_p}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_n'} (-1)^{j_p - m_p} \langle j_p, m_p, 1\mu | j_n, m_n \rangle [\hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+, \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+] \\ &+ \sum_{\substack{j_p, m_p' \\ m_p, m_n}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_p'} (-1)^{j_p - m_p} \langle j_p, m_p, 1\mu | j_n, m_n \rangle [\hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+, \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+] \end{aligned}$$

$$[\hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+, \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+] = \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ (\delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n', m_n} - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+) \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n', m_n} - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n', m_n} + \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n', m_n} - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n', m_n} + \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_n', m_n'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n', m_n}$$

$$[\hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+, \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+] = \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= -\hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ (\delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p', -m_p} - \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+) - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p', -m_p} - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p', -m_p} + \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+ - \hat{\alpha}_{j_n, m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \hat{\alpha}_{j_p, m_p'}^+ \hat{\alpha}_{j_p', m_p'}^+$$

$$= \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p m_p}^+ \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p' - m_p}$$

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\text{sqp}}, \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)] &= \sum_{\substack{j_n, m_n \\ m_n, m_p}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_n'} (-1)^{j_p - m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \delta_{j_n' j_n} \delta_{m_n' m_n} \\ &+ \sum_{\substack{j_p, m_p' \\ m_p, m_n}} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_p'} (-1)^{j_p - m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p m_p'}^+ \delta_{j_p' j_p} \delta_{m_p' - m_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\text{sqp}}, \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)] &= \sum_{m_n, m_p} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_n} (-1)^{j_p - m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \\ &+ \sum_{m_p, m_n} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \varepsilon_{j_p} (-1)^{j_p - m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\text{sqp}}, \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)] &= \varepsilon_{j_n} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n, m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \\ &+ \varepsilon_{j_p} \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_p, m_n} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+ \end{aligned}$$

$$[\hat{H}_{\text{sqp}}, \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)] = (\varepsilon_{j_n} + \varepsilon_{j_p}) \sqrt{\frac{3}{2j_n + 1}} \sum_{m_n, m_p} \langle j_p m_p 1\mu | j_n m_n \rangle (-1)^{j_p - m_p} \hat{\alpha}_{j_n m_n}^+ \hat{\alpha}_{j_p - m_p}^+$$

$$[\hat{H}_{\text{sqp}}, \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)] = (\varepsilon_{j_n} + \varepsilon_{j_p}) \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu) = \varepsilon_{\text{np}} \hat{C}_{\text{np}}^+(\mu)$$

Ek-5 Normalizasyon Koşulunun Elde Edilmesi

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^+] = \sum_{\substack{n'p' \\ np}} \left\{ \psi_{np}^i \psi_{n'p'}^j [\hat{C}_{np}(\mu), \hat{C}_{n'p'}^+(\mu)] + \varphi_{np}^i \varphi_{n'p'}^j [\hat{C}_{np}^+(-\mu), \hat{C}_{n'p'}(-\mu)] \right\}$$

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^+] = \sum_{\substack{n'p' \\ np}} \left\{ \psi_{np}^i \psi_{n'p'}^j \delta_{n'n} \delta_{p'p} - \varphi_{np}^i \varphi_{n'p'}^j \delta_{n'n} \delta_{p'p} \right\}$$

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^+] = \sum_{\substack{n'p' \\ np}} \left\{ \psi_{np}^i \psi_{n'p'}^i \delta_{ij} - \varphi_{np}^i \varphi_{n'p'}^i \delta_{ij} \right\} \delta_{n'n} \delta_{p'p}$$

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^+] = \left(\sum_{np} \left\{ |\psi_{np}^i|^2 - |\varphi_{np}^i|^2 \right\} \right) \delta_{ij}$$

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^+] = \delta_{ij} \text{ eşitliğinin sağlanması için}$$

$$\sum_{np} \left\{ |\psi_{np}^i|^2 - |\varphi_{np}^i|^2 \right\} = 1$$

olmalıdır.