

**ÖZEL RÖLATİVİTE TEORİSİNİN VE
LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİNİN CLIFFORD
CEBİRLERİYLE İNCELENMESİ**

Haluk Özenir
Yüksek Lisans Tezi
Fizik Anabilim Dalı
Eylül – 2006

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Haluk Özenir'in "Özel Rölativite Teorisinin ve Lorentz Dönüşümlerinin Clifford Cebirleriyle İncelenmesi" başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 31.08.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı – Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof.Dr.Kudret ÖZDAŞ
Üye	: Prof.Dr.Mahide KÜÇÜK
Üye	: Yard.Doç.Dr.Süleyman DEMİR

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖZEL RÖLATİVİTE TEORİSİNİN VE LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİNİN CLIFFORD CEBİRLERİYLE İNCELENMESİ

Haluk ÖZENİR

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2006, 57 sayfa

Bu çalışmada, Clifford cebirlerindeki temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca Clifford cebirlerinin genel özellikleri ve matris gösterimleri verilmiştir ve de bivektörler açıklanmıştır. Bivektörler; dönme ve yansıma operatörü olarak kullanılmıştır. Paravektörler tanıtılmıştır. Özel Rölativite Teorisi, Galilei ve Lorentz dönüşümleri, Uzay–Zaman diyagramları ve Minkowski uzayı hakkında genel bilgiler verilmiştir. Clifford cebirleri fiziğin birçok alanında başarıyla kullanılmaktadır. İlaveten, literatür taraması yapıldıktan sonra Clifford cebirlerinin Özel Rölativite teorisine, Lorentz dönüşümlerine ve Minkowski uzayına uygulanması gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Clifford cebirleri, Özel Rölativite, Lorentz dönüşümleri, Minkowski uzayı, Paravektörler

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INVESTIGATIONS OF SPECIAL THEORY OF RELATIVITY AND LORENTZ TRANSFORMATIONS WITH CLIFFORD ALGEBRAS

Haluk ÖZENİR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Physics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2006, 57 pages

In this study, basic concepts in Clifford algebras were introduced. Furthermore, the general properties and matrix representations of Clifford algebras were given, as well. Bivectors were explained. They were used as rotation and reflection operators. Paravectors were introduced. The general informations about Special Theory of Relativity, Galilei and Lorentz transformations, Space-Time diagrams and Minkowski space were given. Clifford algebras are successfully used in various fields of physics. In addition, after literature review was conducted, some practical applications of Clifford algebras to the Special Theory of Relativity, Lorentz transformations and Minkowski space were presented.

Keywords: Clifford algebra, Special Relativity, Lorentz transformations,
Minkowski space, Paravectors

TEŐEKKÖR

Bu alıőma yardım ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ' a çok teşekkür ederim.

Haluk ÖZENİR

Eylöl – 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii

1. GİRİŞ.....	1
---------------	---

2. CLIFFORD CEBİRLERİ.....	3
----------------------------	---

2.1. Giriş.....	3
2.2. Bivektörler.....	4
2.2.1. Volütörlerin Tanımı ve Özellikleri.....	4
2.2.2. Hodge Dönüşümü.....	6
2.2.3. Bivektörlerin Çarpımı.....	6
2.3. Clifford Cebirinin Bazları.....	8
2.4. Bivektörlerin Dönme ve Yansımalarda Kullanımı.....	9
2.4.1. Bivektörlerin Dönmelerde Kullanımı.....	9
2.4.2. Bivektörlerin Yansımalarda Kullanımı.....	10
2.5. Trivektörlerin Tanımı ve Özellikleri.....	13
2.6. Multivektörlerin Tanımı ve Özellikleri.....	15
2.7. Clifford Cebirlerinin Matris Temsili.....	16
2.7.1. IR^3 'ün Cl_3 Clifford Cebirinin Dirac Matrisleri ile Temsili.....	16
2.7.2. Uzak-Zaman $IR^{3,1}$	17
2.7.3. Uzak-Zaman $IR^{1,3}$	18
2.8. Hacim Elemanı ve Hodge Dualler.....	18
2.9. Paravektörler.....	19
2.10. Cl_3 'ün ve Cl_n 'in Involutionları.....	20

3. ÖZEL RÖLATİVİTE TEORİSİ ve LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ.....	23
3.1. Giriş.....	23
3.2. Galilei Dönüşümleri.....	23
3.3. Lorentz Dönüşümleri.....	24
3.3.1. Giriş.....	24
3.3.2. Lorentz Kısılması.....	26
3.3.3. Zaman Genleşmesi.....	26
3.3.4. Hızların Toplamı.....	27
3.3.5. Lorentz Dönüşüm Matrisinin Gösterimi.....	27
3.3.6. İntervaller.....	28
3.3.7. Uzay-Zaman Diyagramları.....	29
4. MİNKOWSKİ UZAYI.....	34
5. CLIFFORD CEBRİ ve ÖZEL RÖLATİVİTEYE UYGULAMALARI.....	40
5.1. Paravektör Uzayının Metriği.....	40
5.2. Öz Zaman ve Öz Hızın Paravektör Gösterimi.....	41
5.3. Lorentz Dönüşümlerinin Paravektörlerle İncelenmesi.....	43
6. MİNKOWSKİ UZAYINA CLIFFORD CEBRİNİN UYGULANMASI.....	45
6.1. Lorentz Dönüşümlerinin Cliffordların Çarpımı Olarak Gösterimi.....	52
7. SONUÇ.....	55

KAYNAKLAR

ŞEKİLLER DİZİNİ

- 2.1. Saat yönünün tersi ve saat yönüyle aynı yönelimli iki halka
- 2.2. \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin oluşturduğu $\hat{\mathbf{B}}$ volütörünün geometrik gösterimi
- 2.3. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ volütörünün antikomütatifliğinin, geometrik olarak gösterimi
- 2.4. Sağ el vida kuralının geometrik gösterimi
- 2.5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ çarpımının geometrik gösterimi
- 2.6. $\hat{\mathbf{B}}$ ve $\hat{\mathbf{C}}$ volütörlerinin iç (skaler) çarpımının geometrik gösterimi
- 2.7. \mathbf{a} vektörünün $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ Düzleminde 90° dönmesi
- 2.8. \mathbf{a} vektörünün paralel ve dik bileşenlerinin ile \mathbf{b} vektörünün gösterimi
- 2.9. \mathbf{r} vektörünün bileşenleri ve \mathbf{a} vektörüne göre yansımaları
- 2.10. Vektörlerle oluşturulan bir trivektörün geometrik gösterimi
- 3.1. Galilei dönüşümü
- 3.2. Kaynaktan yayılan ışık ışınlarının, S ve S' sistemindeki dalga cephesi
- 3.3. Uzay zaman diyagramında A parçacığının yer çizgisi
- 3.4. A olayının, S ve S' uzay zaman diyagramları üzerindeki bileşenleri
- 3.5. A ve B olaylarının eş zamanlılığı
- 3.6. Uzay zaman diyagramında kalibrasyon eğrileri
- 3.7. Uzay zaman diyagramında Lorentz kısalmasının gösterimi
- 3.8. Uzay zaman diyagramında intervallerin gösterimi
- 4.1. Üç boyutlu uzay zamanda Işık konisi
- 4.2. Üç boyutlu uzay zamanda tek yapraklı hiperboloit
- 4.3. Üç boyutlu uzay zamanda çift yapraklı hiperboloit

ÇİZELGELER DİZİNİ

- 2.1. **a** vektörünün multivektörlerle iç ve dış çarpımı
- 3.1. Galilei dönüşüm bağıntılarının gösterimi
- 3.2. Tek boyutta Öz Lorentz dönüşüm bağıntılarının gösterimi
- 4.1 Minkowski uzayındaki vektörlerin sınıflandırılması

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{R}^n	: n boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{R}^3	: Üç boyutlu Öklid uzayı
Cl_n	: \mathbb{R}^n Öklid uzayının Clifford cebri
Cl_3	: \mathbb{R}^3 Öklid uzayının Clifford cebri
\mathbf{a}	: Vektör
\perp	: Diklik işareti
\cdot	: Skaler çarpım
$\hat{\mathbf{B}}$: Bivektör
α, β, λ	: Skaler sayılar
$*$: Hodge dönüşüm
\times	: Vektörel çarpım
\mathbf{a}_\perp	: \mathbf{a} vektörünün dik bileşeni
\mathbf{a}_\parallel	: \mathbf{a} vektörünün paralel bileşeni
\wedge	: Mingled çarpım
\mathbf{e}_j	: Öklid uzayında birim baz vektör
$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$: Birim baz bivektörlerin gösterimi
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: Birim kuarternionların gösterimi
\mathbf{R}	: Dönme operatörü
\mathbf{R}^{-1}	: Dönme operatörünün tersi
\mathbf{b}^{-1}	: \mathbf{b} vektörünün tersi
$\hat{\mathbf{T}}$: Trivektör
$\hat{\mathbf{I}}, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$: Birim trivektör gösterimi
ε_{ijk}	: Levi Civita sembolü
\mathbf{X}	: Cliffor sembolü
$\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3$: Dirac-gamma matrisleri
\mathbf{I}	: Birim matris
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Pauli spin matrisleri

\mathbf{e}_T	: Hacim elemanı
p	: Paravektör
\bar{p}	: Paravektörün Clifford eşleniği
p^\dagger	: Paravektörün Hermityen eşleniği
c	: Işık hızı
Λ	: Lorentz dönüşüm matrisi
$\delta_{\mu\nu}, \delta_\mu^\nu, \delta_{ij}$: Kroneker deltası
τ	: Öz zaman
\mathbf{x}	: 4-vektör gösterimi
X	: 4-vektörün uzaysal kısmı
$g_{\mu\nu}$: Metrik tensör
Λ_ν^μ	: Lorentz metriği
∇	: Nabla operatörü
\square	: Dört gradyent diferansiyel operatörü
\square^2	: D' Alembert operatörü
ψ	: Skaler dalga fonksiyonu
$\eta_{\mu\nu}$: Paravektör metriği
L	: Lorentz operatörü
Q	: Kuadrivektör
$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}$: Dört boyutta Levi Civita sembolü
Δ	: Diskriminant sembolü
$\hat{\alpha}$: Volütöryel açısı
ϑ	: Hiperbolik açısı

1. GİRİŞ

Clifford cebirleri lineer bir uzayda kuadrik formda tanımlanmış geometrik cebirlerdir. Geometrik cebir, modern matematiksel fizikte, cisimlerin geniş bir bakış açısı ile ifade edilmesinde, matematiksel fiziğin birçok bağıntısının yeniden düzenlenmesinde, yeni birtakım olanaklar ortaya koyar. Bu matematiksel gelişmeler fiziğin ilerlemesinde önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda, fizikte Clifford cebirlerinin uygulamaları yaygın bir şekilde kullanılmaya başlandı. Özellikle Genel Rölativite teorisi alanında[1]. Clifford cebirlerinin başarıyla uygulandığı alanlardan bir diğeri de Özel Rölativite teorisidir.

1881'de Michelson farklı yönlerde ışığın hızını ölçtü. Michelson ve Morley 1887'de aynı deneyi tekrarladılar ve ışığın, ışık ortamına göre kaynağın hareketinden bağımsız aynı hızda hareket ettiği sonucuna vardılar. 1887'de Voight,

$$x' = x - vt$$

$$t' = t - \frac{vx}{c^2}$$

değişkenlerinin değişimine göre sabit kalan dalga denklemini $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

olarak tanımladı. Voight'ın formülleri, direkt ve ters dönüşümler için aynı değildir. Daha sonra simetri için $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ oranı ile yeniden faktör tanımını yaptı. 1892'de FitzGerald ve Lorentz, bağımsız olarak hareket eden cisimlerin $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ oranı ile hareket yönünde kısaldığını varsayarak Michelson ve Morley deneyinin bir açıklamasını verdiler[3].

Uzay-zaman olaylarının Lorentz dönüşümleri, 1900'de Larmor tarafından sunuldu, ancak rölativistik Maxwell eşitliklerinin kovaryantları, 1903'te H.A. Lorentz tarafından kanıtlandı. 1905'te Einstein, ışık hızının gözlemciden bağımsızlığı ilkesi postülası ile rölativite ilkesini tamamladı. Bu iki ilke, Einstein'ın zaman notasyonunu tekrar gözden geçirmesine sebep oldu ve Lorentz'in kinetiksel dönüşüm yasaları sonucunu çıkarmasını sağladı. Daha sonra Einstein, özel rölativite ilkesini tekrar formüle etti. Böylece Einstein, sadece mekaniksel değil elektromagnetik olguyu da benimser:

“Fizik yasaları, bütün referans çerçevelerinde aynı biçime sahiptir”

Einstein’ ın bu rölativite ilkesi, Maxwell eşitliklerine uygulandığında, ışık hızının bütün referans çerçevelerinde aynı olacağı sonucunun çıkarılacağı ikna edicidir. Rölativite ilkesi ve Maxwell eşitliklerinin bilinmesi, Lorentz’ in dönüşüm yasalarının sonucunu çıkartmak için yeterlidir. Dirac’ın rölativistik dalga denklemlerinde kullandığı 4×4 Gamma matrisleri birbirinden bağımsız iki takım kuaterniondan oluşan Clifford sayılarıdır.

Bu çalışmada; Clifford cebirleri, Özel Rölativite teorisi, Lorentz dönüşümleri ve Minkowski uzayı hakkında genel bilgiler verildikten sonra paravektörler yardımıyla Özel Rölativite teorisi ve Lorentz dönüşümleri, multivektörler yardımı ile de Minkowski uzayı incelenmektedir.

2. CLIFFORD CEBİRLERİ

2.1. Giriş

Clifford cebirleri; reel sayı sistemini, vektörleri ve onların geometrik çarpımlarını içerecek şekilde genişletilir. Clifford cebirleri geometrik modeller için, yüzeyleri ve yüksek boyutlu nesnelere temsil eden vektör çarpımları, dönmeler, yansımalar ve diğer geometrik dönüşümlerin tanımlarında çok kullanışlıdır. Clifford cebri ismi İngiliz matematikçi William Kingdon Clifford'un onuruna verilmiştir. Clifford, Alman yüksek-okul matematik öğretmeni Hermann Günther Grassmann tarafından ileri sürülen fikirlerin önemini farkına vardı. Clifford, Grassman'ın fikirlerini Clifford cebri olarak adlandırılan geometrik cebirler içinde geliştirdi[4]. Clifford cebri, geometrik bir uzayda tanımlanan cebirdir. Boyutuyla ve metriğinin işaretiyle tanımlanmış her geometrik uzay için o uzayla birleştirilmiş farklı bir cebir bulunur. Eğer metrik $(+,+,+, \dots, +, -, -, \dots, -)$ işaretlemesine sahipse, n tane $+$, m tane $-$, sıralamaya bakmaksızın, $Cl_{n,m}$ cebri bu uzayla birleştirilebilir.

Clifford cebirlerinin toplama ve çarpma işlemi altında kapalılık özelliği vardır. Üç veya daha fazla vektörün geometrik çarpımlarının birleşme özelliği vardır.

$$\mathbf{u}(\mathbf{vw}) = (\mathbf{uv})\mathbf{w}$$

Clifford cebirlerinin temel aksiyomu, herhangi bir vektörün kendisi ile çarpımının kendi uzunluğunun karesine eşit olmasıdır:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (2.1)$$

burada iki vektör arasındaki nokta işareti, iki vektörün iç çarpımını gösterir. Bu denklem Cl_n geometrik cebirinin yapısını oluşturur. (2.1) bağıntısında $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{b}$ konulursa;

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} + \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{c}^2 + \mathbf{cb} + \mathbf{bc} + \mathbf{b}^2 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.2)$$

bağıntısı elde edilir. (2.2)'in her iki tarafından $\mathbf{c}^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ ve $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ çıkarılırsa;

$$\mathbf{cb} + \mathbf{bc} = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \quad (2.3)$$

elde edilir.

Denklem (2.3)' de $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ olursa, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$ olur. Bununla birlikte $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$ olsa bile \mathbf{c} ve \mathbf{b} vektörlerinin \mathbf{cb} çarpımı sıfır olmayabilir.

$$\mathbf{cb} = \frac{1}{2}(\mathbf{cb} + \mathbf{bc}) + \frac{1}{2}(\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{cb} \equiv \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} \quad (2.5)$$

\mathbf{cb} çarpımının simetrik kısmı, Gibbs nokta çarpımıdır[5]. Bu çarpım bir skaler, antisimetrik kısmı $\mathbf{c} \wedge \mathbf{b}$ ise ne bir skaler nede bir vektördür. Bu yeni eleman bivektör olarak adlandırılır. (2.3) ve (2.5) kullanılarak;

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) \quad (2.6)$$

elde edilebilir.

2.2. Bivektörler

2.2.1. Volütörlerin Tanımı ve Özellikleri

Bir düzlem üzerinde olan ve kendisiyle kesişmeyen kapalı eğriye halka adı verilir. Halka üzerinde belirli bir yönelim varsa bu tür halkaya yönlendirilmiş halka denir. Yönlendirilmiş halkalar, halkanın üzerine konulan bir okla gösterilir. Bir halkanın üzerinde, Şekil 2.1' de gösterildiği gibi birbirine zıt, iki yönelim mümkün olabilir.



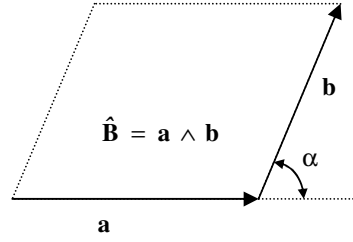
Şekil 2.1. Saat yönünün tersi ve saat yönüyle aynı yönelimli iki halka

Bir düzlem üzerinde yönlendirilmiş halka gösterilebilirse, o düzlem, üzerinde alınan halkayla aynı yönelimli olur. Bir düzlemin bir nokta etrafında döndürülmesiyle, düzlem üzerindeki tüm noktalar dönme eksenini merkezli daireler çizer ve bu daireler aynı yönelimli olurlar. Böyle bir eksen etrafında dönen bir düzlem yönlendirilmiş bir düzlem olur. Düzlemin yönelimini belirleyen halkalar, bir başka düzlemin de yönelimini belirliyorsa bu ancak bir öteleme hareketiyle mümkün olur.

Volütör, sınırları yönlendirilmiş halka olan bir düzlem parçasıdır. Bu sınırlar içinde kalan alan, volütörün büyüklüğüdür. $|\hat{\mathbf{B}}|$ ile gösterilir. $\hat{\mathbf{B}}'$, $\hat{\mathbf{B}}$ volütörünün tersidir. $-\hat{\mathbf{B}}' = \hat{\mathbf{B}}$ olarak yazılır. \mathbf{a} ve \mathbf{b} gibi iki vektörden, bir volütör elde edebilmek için öncelikle ilk vektör belirlenir. Sonra ilk vektörün bitiş noktasına, ikinci vektörün başlangıç noktası getirilir. Şekil 2.2' de gösterildiği gibi vektörlerin diğer uçlarından bu vektörlere paralel doğrular çizilir. Bir volütör, iki vektörün wedge çarpımı;

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir.

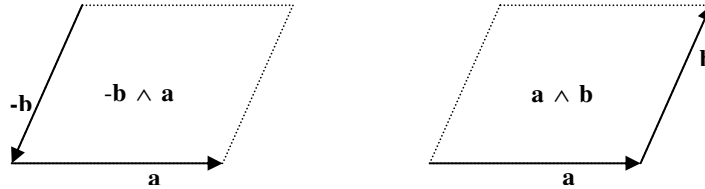


Şekil 2.2. \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin oluşturduğu $\hat{\mathbf{B}}$ volütörünün geometrik gösterimi

Şekil 2.2' deki paralel kenarın alanı, $\hat{\mathbf{B}}$ volütörünün büyüklüğüdür. $|\hat{\mathbf{B}}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$ ile verilir. Modern matematikte bivektör, sonlu sayıda dış çarpımın toplamıdır. Yani sonlu sayıda volütörün toplamıdır. Volütörler için basit bivektörler diyebiliriz[6].

Denklem (2.8)' de dış çarpımın antikomütatiflik özelliği verilir. Şekil 2.3' de iki volütörün antikomütatifliği gösterilmiştir.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (2.8)$$



Şekil 2.3. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ volütörünün antikomütatifliğinin, geometrik olarak gösterimi

\mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri paralel ise:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \quad (2.9)$$

olur. 0, özel bir tür volütördür. Dış çarpımın toplama altında dağılma özelliği;

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin λ skaleriyle dış çarpımı;

$$(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b}) \quad (2.11)$$

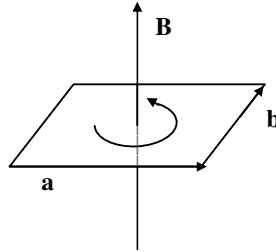
homojendir.

2.2.2. Hodge Dönüşümü

Üç boyutlu uzayda herhangi bir düzleme dik olan bütün doğrular birbirlerine paraleldirler. Bu doğrular birer vektör olarak alınırsa, bu vektörlerin her birine bir volütör karşılık getirilebilir. Volütörün yönelimi sağ el vida kuralıyla Şekil 2.4' de gösterildiği gibi bulunabilir. $\hat{\mathbf{B}}$ volütörü ile aynı büyüklükte ve buna dik bir \mathbf{B} vektörü arasında hodge dönüşümü adı verilen $\mathbf{B} \rightarrow \hat{\mathbf{B}}$, $*\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}$ şeklinde bir dönüşüm kurulabilir. Hodge dönüşümüyle, vektörel çarpım;

$$*(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.12)$$

dış çarpıma dönüşür.



Şekil 2.4. Sağ el vida kuralının geometrik gösterimi

2.2.3. Bivektörlerin Çarpımı

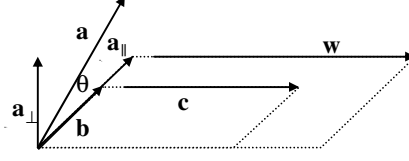
\mathbf{a} vektörünün $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ volütörü ile iç çarpımı:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = \mathbf{w} \quad (2.13)$$

ile verilir. \mathbf{w} , $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ volütörünün bulunduğu düzlemde bir vektördür. bu vektörün büyüklüğü;

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| \cos \theta \quad (2.14)$$

ile verilir. Burada θ açısı, \mathbf{a} ile $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ arasındaki açıdır. Şekil 2.5' de \mathbf{a} vektörüyle $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ volütörünün iç çarpımı gösterilmiştir.



Şekil 2.5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ çarpımının geometrik gösterimi. \mathbf{a}_\perp ve \mathbf{a}_\parallel , \mathbf{a} vektörünün bileşenleridir

$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$, volütörü ile \mathbf{a} vektörünün iç çarpımı;

$$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \quad (2.15)$$

şeklindedir. Bir vektörle, bir volütörün iç çarpımı arasında değişme özelliği yoktur. (2.13) ile (2.15) eşitlendiğinde;

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{a} \quad (2.16)$$

elde edilir.

$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ve $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ volütörlerinin iç çarpımı;

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{C}}) \quad (2.17)$$

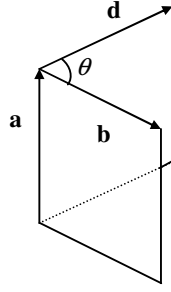
ile verilir.

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \quad (2.18)$$

bu çarpım bir skalerdir ve değişme özelliği vardır. Üç boyutlu uzayda herhangi iki volütör için ortak bir kenar bulunabilir. $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{d}$ ve $\mathbf{b} \perp \mathbf{a} \perp \mathbf{d}$ olduğunda $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}}$ çarpımının büyüklüğü:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{C}} &= -|\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \\ &= -|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}| |\mathbf{d}| \cos \theta \\ &= -|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| |\mathbf{d}| \cos \theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

olur. Burada θ açısı $\hat{\mathbf{B}}$ ve $\hat{\mathbf{C}}$ volütörleri arasındaki açıdır. Bu çarpım Şekil 2.6' da gösterilmiştir.



Şekil 2.6. \hat{B} ve \hat{C} volütörlerinin iç (skaler) çarpımının geometrik gösterimi

$\hat{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ ve $\hat{C} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ gibi iki volütör arasındaki Mingled çarpım[6];

$$\hat{B} \wedge \hat{C} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \wedge \mathbf{d} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \wedge \mathbf{d} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır. \hat{B} ve \hat{C} volütörlerinin Mingled çarpımı bir bivektör verir. $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}) \perp \mathbf{d}$ olduğunda $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = 0$ olur. (2.20)' de bu eşitlikler yerine konularak;

$$\hat{B} \wedge \hat{C} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \quad (2.21)$$

elde edilir. $\hat{B} \wedge \hat{C}$ ' in büyüklüğü;

$$|\hat{B} \wedge \hat{C}| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}| |\mathbf{b} \wedge \mathbf{d}| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}| |\mathbf{b}| |\mathbf{d}| \sin \theta \quad (2.22)$$

olur. Burada θ açısı, \mathbf{b} ve \mathbf{d} arasındaki açıdır.

Vektörel çarpımlar için üç farklı durum oluşabilir:

$$1- * (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

\mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri polar ise sonuç aksenal vektör,

$$2- (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{a} \cdot \hat{B}$$

\mathbf{a} polar ve \mathbf{B} aksenal vektör ise sonuç polar vektör,

$$3- * (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\hat{A} \wedge \hat{B}$$

\mathbf{A} ve \mathbf{B} aksenal vektör ise sonuç aksenal vektör olur.

2.3. Clifford Cebirinin Bazları

\mathbb{R}^n Öklid uzayındaki herhangi bir vektör $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ortogonal birim baz vektörlerinin, geometrik cebir içindeki herhangi bir bivektör ise $\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \dots\}$ birim baz bivektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \quad (2.23)$$

$$(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k)^2 = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_j^2 \mathbf{e}_k^2 = -1 \quad (2.24)$$

IR^3 Öklid uzayında, üç birim bivektör bazı vardır. (2.25)' de bu bazlar birim kuaternionlar gösterilebilir:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \mathbf{j} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \quad (2.25)$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \quad (2.26)$$

2.4. Bivektörlerin Dönme ve Yansılarda Kullanımı

2.4.1. Bivektörlerin Dönmelerde Kullanımı

Bivektörler, üç boyutlu uzayda vektörlerin, dönmelerinde ve yansımalarında bir operatör olarak kullanılabilir. (2.27)' de \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 baz vektörleri $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ düzleminde dik açı ile döndürülmüştür.

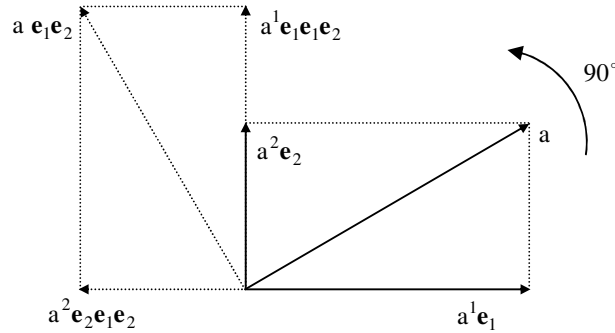
$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \quad (2.27)$$

Denklem (2.28) herhangi bir $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2$ vektörünün $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ düzleminde 90° açı ile döndürülmesini verir.

$$\mathbf{a}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) = a^1 \mathbf{e}_2 - a^2 \mathbf{e}_1 \quad (2.28)$$

Denklem (2.29) aynı düzlemdeki herhangi bir θ açısı ile dönmeyi verir.

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}(\cos \theta + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin \theta) \quad (2.29)$$



Şekil 2.7. \mathbf{a} vektörünün $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ Düzleminde 90° dönmesi

Clifford cebri, n boyutlu uzaydaki dönmeleri açıklamada etkili bir araçtır. (2.30)'da $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ düzlemi üzerindeki $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 - a^2\mathbf{e}_2$ vektörünün θ açısı ile dönmesi verilmiştir.

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a}\mathbf{R}^{-1} \quad (2.30)$$

Denklem (2.31)'de $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ bivektörüne dönmenin jeneratörü denir.

$$\mathbf{R} = \exp\left(\frac{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\theta}{2}\right) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \exp\left(\frac{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\theta}{2}\right) \quad (2.32)$$

\mathbf{b} vektörü $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ düzlemine dik ise o zaman bu vektör dönme işlemi sonucu değişmeden aynen kalır.

$$\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{b}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{b}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{b} \quad (2.33)$$

Örnek: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ düzlemi üzerindeki, $\mathbf{r} = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ vektörünün 90° dönmesi ile oluşan \mathbf{r}' vektörünü bulunuz.

Cözüm: (2.30)'da (2.31) ve (2.32)'yi yerine koyarsak:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}\mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{r}' &= \exp\left(\frac{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\theta}{2}\right)\mathbf{r}\exp\left(\frac{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

olur. Exponansiyel \mathbf{R} ve \mathbf{R}^{-1} ' in yerine (2.29)' da ki Euler formu yazıldığında:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= [\cos(\theta/2) + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \sin(\theta/2)][4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2][\cos(\theta/2) + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \sin(\theta/2)] \\ &= [\cos(45) + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \sin(45)][4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2][\cos(45) + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \sin(45)] \\ &= 4\mathbf{e}_1 \cos^2(45) + 4\mathbf{e}_2 \cos(45)\sin(45) - 3\mathbf{e}_2 \cos^2(45) + 3\mathbf{e}_1 \cos(45)\sin(45) \\ &\quad + 4\mathbf{e}_2 \sin(45)\cos(45) - 4\mathbf{e}_1 \sin^2(45) + 3\mathbf{e}_1 \sin(45)\cos(45) + 3\mathbf{e}_2 \sin^2(45) \\ &= 6\mathbf{e}_1 \cos(45)\sin(45) + 8\mathbf{e}_2 \sin(45)\cos(45) \\ &= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.4.2. Bivektörlerin Yansılarda Kullanımı

Şekil 2.8' de \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin arasındaki açı φ ($0 < \varphi < 180^\circ$) olmak üzere, \mathbf{a}' nın \mathbf{b} yönündeki \mathbf{a}_\parallel bileşeni:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = |\mathbf{a}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \quad (2.34)$$

ile verilir. Diğer bir deyişle \mathbf{a}_{\parallel} bileşeni, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$ skaler çarpımı ile

$\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2$ vektörünün çarpımıdır. Burada $|\mathbf{b}| = (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{1/2}$, \mathbf{b} ' nin modülüdür[7].

Bu nedenle;

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \quad (2.35)$$

olur. Bu son ifade, \mathbf{b} yönündeki gösterimlerde \mathbf{b} ' nin uzunluğundan bağımsız olduğunu gösterir. \mathbf{a}_{\perp} bileşeni, $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel}$ farkı ile verilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\perp} &= \mathbf{a}_{\parallel} - \mathbf{a} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \mathbf{e}_{12} \\ &= (\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

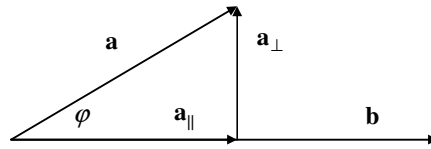
Burada \mathbf{e}_{12} bivektörünün, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ düzlemindeki bütün vektörlerle ters yer değiştirdiğine dikkat edelim:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} = -\mathbf{b}^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b}^{-1} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{b}^{-1} \quad (2.37)$$

dir. Bu nedenle \mathbf{a} ve \mathbf{b} kenarlı paralelkenarın alanı,

$$|\mathbf{a}_{\perp} \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi \quad (2.38)$$

olduğu görülür. Burada $0 < \varphi < 180^0$, dir.



Şekil 2.8. \mathbf{a} vektörünün paralel ve dik bileşenleri ile \mathbf{b} vektörünün gösterimi

\mathbf{r} vektörünün \mathbf{a} vektörü doğrultusundaki yansıması; $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ formülü ve $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}_{\perp}$ ile elde edilir. Şekil 2.9' da gösterilmiştir. Burada $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1}$, dir. \mathbf{r} vektörünün \mathbf{a} vektörü doğrultusundaki yansımasını \mathbf{r}' ile gösterirsek;

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\
&= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{r})\mathbf{a}^{-1} \\
&= \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

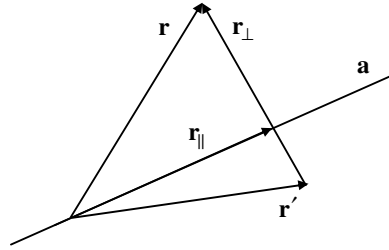
olur. İşlemi ilerletirsek,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= (2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r}\mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} \\
&= 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{a}^2} \mathbf{a} - \mathbf{r}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

olur. $\mathbf{r}' = \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1}$ bağıntısını Clifford cebirinin sadece yer değiştirme özelliklerini kullanarak direkt elde edebiliriz: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ 'dır. Burada; $\mathbf{a}\mathbf{r}_{\perp}\mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{r}_{\perp}\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{r}_{\perp}$ iken $\mathbf{a}\mathbf{r}_{\parallel}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r}_{\parallel}\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r}_{\parallel}$ dir. İlk önce \mathbf{a} vektörü doğrultusundaki ve sonra \mathbf{b} vektörü doğrultusundaki iki yansımanın bileşimi;

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = (\mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1}) \rightarrow \mathbf{r}'' = \mathbf{b}\mathbf{r}'\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{r}(\mathbf{b}\mathbf{a})^{-1} \tag{2.41}$$

ile verilir.



Şekil 2.9. \mathbf{r} vektörünün bileşenleri ve \mathbf{a} vektörüne göre yansıması

Örnek: $\mathbf{r} = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, vektörü önce $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ vektöründen yansıyor yansıma sonucunda oluşan yeni vektör, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ vektöründen yansıyor. Bu iki yansımanın sonucunda oluşan vektörü bulunuz.

Çözüm: Denklem (2.39)' u kullanarak \mathbf{r}' bulunur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1} \\
|\mathbf{a}| &= \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \\
\mathbf{a}^{-1} &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{(\sqrt{10})^2} = 0,1(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= 0,1(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)(4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\
&= 0,1(12\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - 9\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\
&= 0,1(15 + 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\
&= 0,1(45\mathbf{e}_1 - 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\
&= 0,1(45\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\
&= 0,1(45\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\
&= 0,1(50\mathbf{e}_1) \\
&= 5\mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

Benzer yolla \mathbf{r}' ' nün \mathbf{b} vektöründeki yansıması \mathbf{r}'' bulunur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'' &= \mathbf{b}\mathbf{r}'\mathbf{b}^{-1} \\
|\mathbf{b}| &= \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \\
\mathbf{b}^{-1} &= \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{(\sqrt{5})^2} = 0,2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\
\mathbf{r}'' &= 0,2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)(5\mathbf{e}_1)(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\
&= 0,2(10 + 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\
&= 0,2(20\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\
&= 0,2(20\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\
&= 0,2(15\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2) \\
&= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.5. Trivektörlerin Tanımı ve Özellikleri

Üç boyutlu yönelime, dönme ve öteleme hareketinin kombinasyonu olarak bakılır. Trivektörler üç boyutlu yönelime ve Şekil 2.10' da görüldüğü gibi hacim olarak yorumlanan büyüklüğe sahip geometrik nesnedir. $\hat{\mathbf{T}}$ ile gösterilir. $\hat{\mathbf{T}}$ ' in büyüklüğü $|\hat{\mathbf{T}}|$ ile tersi de $\hat{\mathbf{T}}'$ ile gösterilir. $\hat{\mathbf{T}} = -\hat{\mathbf{T}}'$ olur.

Bir trivektör; (2.42)' deki gibi bir vektörle, bir volütörün dış çarpımından;

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{c} \wedge \hat{\mathbf{B}} \quad (2.42)$$

ya da (2.43)' deki gibi üç tane vektörün dış çarpımından:

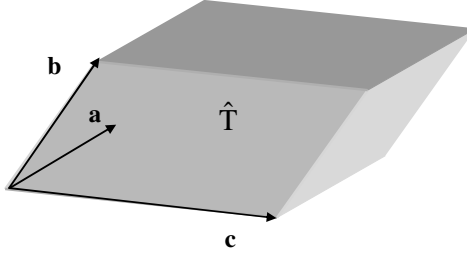
$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (2.43)$$

elde edilebilir.

Denklem (2.42)' nin sağ tarafı için $\hat{B} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{c} \wedge \hat{B}$ değişme özelliği, (2.43)' ün sağ tarafı için ise $\mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b}$ birleşme özelliği vardır.

$$\hat{T} = \mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

$$\hat{T} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}$$



Şekil 2.10. Vektörlerle oluşturulan bir trivektörün geometrik gösterimi

Trivektörün bir skalerle çarpımı $\lambda \hat{T}$ ile gösterilir. Eğer $\lambda > 0$ ise $\lambda \hat{T}$, \hat{T} ile aynı yönlü, $\lambda < 0$ ise $\lambda \hat{T}$, \hat{T} ile zıt yönlü olur. Birim trivektör $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bazlarının wedge çarpımı olarak;

$$\hat{I} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123} \quad (2.44)$$

yazılabilir. $\hat{T} = t \hat{I}$ eşitliğinde t reel sayı olursa, t ' ye, \hat{T} trivektörünün koordinatı denir. Verilen bir $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bazı için $t \rightarrow \hat{T}$ dönüşümü bire birdir.

$\hat{T} + \hat{T}'$ iki trivektörün toplamıdır. Bu toplam sonucunda oluşan trivektörün yönelimi trivektörlerden büyük olanın yönelimiyle aynı olur. Büyüklüğü: $|\hat{T}| + |\hat{T}'|$ olarak yazılır. Trivektörler, bir boyutlu lineer uzay oluşturduğu için bir baz trivektör seçmek yeterli olur. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektörleri uzayın bazlarını oluşturan ortogonal bazlar olursa, bu üç elemanın altı permütasyonu olduğundan dolayı onlardan altı dış çarpım;

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (2.45)$$

şeklinde yazılabilir. Bu altı trivektörden sadece biri baz olarak alınabilir. (2.44)' de $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ baz olarak alınmıştır.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{herhangi iki indis aynı ise} \\ 1 & (i,j,k), (1,2,3) \text{ sıralamasının çift permütasyonu ise} \\ -1 & (i,j,k), (1,2,3) \text{ sıralamasının tek permütasyonu ise} \end{cases}$$

$\mathbf{c} \wedge \hat{\mathbf{B}}$ trivektörünün koordinatlarını \mathbf{c} ve $\hat{\mathbf{B}}$ volütörünün koordinatlarıyla;

$$\mathbf{c} \wedge \hat{\mathbf{B}} = (c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3) \wedge (B_{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + B_{31}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + B_{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

yazılabilir. (2.44) ve (2.45) kullanılarak;

$$\mathbf{c} \wedge \hat{\mathbf{B}} = (c_1B_{23} + c_2B_{31} + c_3B_{12})\hat{\mathbf{I}} \quad (2.46)$$

elde edilir.

2.6. Multivektörlerin Tanımı ve Özellikleri

Skalerleri, vektörleri, bivektörleri ve trivektörleri Multivektörler adı altında genelleayebiliriz. Skalerler sıfıncı; Vektörler birinci; bivektörler ikinci; trivektörler üçüncü; k-vektörler ise k' ıncı dereceden multivektörlerdir. Bir vektörün bir trivektörle dış çarpımı üç boyutlu uzayda sıfırdır. Çünkü bu çarpımın büyüklüğü dört boyutlu bir hacim olur.

Skalerlerin, vektörlerin, bivektörlerin ve trivektörlerin lineer uzaylarının direkt toplamı olan yeni bir lineer uzay tanıtacağız. Eğer vektörlerin üç boyutlu uzayından başlarsak $1+3+3+1 = 8$ boyutludur. Bu uzayın genel elemanı bütün derecelerden multivektörlerin toplamı:

$$\mathbf{X} = \lambda + \mathbf{a} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{T}} \quad (2.47)$$

olarak yazılabilir. Buradaki \mathbf{X} , İngiliz matematikçi William Clifford onuruna Clifford olarak adlandırılır. Çizelge 2.1' de multivektörlerin derecesi bir artığında, bir \mathbf{a} vektörü ile iç ve dış çarpımlarının, komütatifliğinin ve antikomütatifliğinin değişimi gösterilmektedir.

Çizelge 2.1 \mathbf{a} vektörünün multivektörlerle iç ve dış çarpımı

\mathbf{a} vektörü ile çarpım	İç çarpım	Dış çarpım
Skaler	$\mathbf{a} \cdot \lambda = -\lambda \cdot \mathbf{a} = 0$	$\mathbf{a} \wedge \lambda = \lambda \wedge \mathbf{a}$
Vektör	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$
Bivektör	$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{a}$
Trivektör	$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{T}} = -\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{T}} = -\hat{\mathbf{T}} \wedge \mathbf{a} = 0$

Bir skalerle bir clifforun çarpımı;

$$\mu X = \mu\lambda + \mu\mathbf{a} + \mu\hat{\mathbf{B}} + \mu\hat{\mathbf{T}} \quad (2.48)$$

İki clifforun toplamı;

$$X_1 + X_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\hat{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2) + (\hat{\mathbf{T}}_1 + \hat{\mathbf{T}}_2) \quad (2.49)$$

Bir vektörle bir clifforun dış çarpımı;

$$\mathbf{b} \wedge X = \mathbf{b} \wedge \lambda + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \hat{\mathbf{B}} + \mathbf{b} \wedge \hat{\mathbf{T}} \quad (2.50)$$

olarak verilir.

Dış çarpımla bahsedilen clifforların lineer uzayı Grassman cebri olarak adlandırılmıştır. Eğer $X = \lambda + \mathbf{a} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{T}}$ in herhangi üç terimi sıfırsa cliffor X homojen olarak adlandırılır. Bir skaler ve bir bivektör kombinasyonu, $X = \lambda + \hat{\mathbf{B}}$ çift cliffor, bir vektörle ve bir trivektör kombinasyonu da $X = \mathbf{a} + \hat{\mathbf{T}}$ tek cliffor, olarak adlandırılır. $|X|$ ifadesi X clifforunun büyüklüğüdür. Özellikleri:

$$1- \quad |X| = 0 \text{ sadece } X = 0$$

$$2- \quad \mu \text{ skaleri için } |\mu X| = |\mu| |X|$$

$$3- \quad |X_1 + X_2| \leq |X_1| + |X_2|$$

$M_k \rightarrow M_k^\dagger$, ters alma işlemini gösterirse $M_k = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_k$ multivektörünün tersi;

$$M_k^\dagger = \mathbf{b}_k \wedge \mathbf{b}_{k-1} \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_1 \quad (2.51)$$

$$M_0^\dagger = M_0, \quad M_1^\dagger = M_1, \quad M_2^\dagger = -M_2, \quad M_3^\dagger = -M_3$$

olarak yazılabilir. X clifforunun tersi $X^\dagger = \lambda + \mathbf{a} - \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{T}}$ olur. İki clifforun dış çarpımlarının tersi;

$$(X \wedge Y)^\dagger = Y^\dagger \wedge X^\dagger \quad (2.52)$$

şeklinde yazılabilir.

2.7. Clifford Cebirlerinin Matris Temsili

2.7.1. IR^3 ' ün Cl_3 Clifford Cebirinin Dirac Matrisleri ile Temsili

Clifford cebirini anlayabilmenin en kolay yolu bu cebirin elemanlarına ait matrisleri göstermektir. Üç boyutlu IR^3 öklid uzayında herhangi bir \mathbf{a} vektörü baz elemanları Clifford cebirinin elemanları olan matrislerle;

$$\mathbf{a} = a^1 \hat{\gamma}_1 + a^2 \hat{\gamma}_2 + a^3 \hat{\gamma}_3 \quad (2.53)$$

$$\hat{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

şeklinde gösterilebilir. I birim matristir. $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3$ matrisleri Dirac matrisleridir.

Bu matrisler arasında;

$$(\hat{\gamma}_1)^2 = (\hat{\gamma}_2)^2 = (\hat{\gamma}_3)^2 = I \quad (2.55)$$

$$\hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 = 0 \quad (2.56)$$

$$\hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 = -\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_2, \quad \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3 = -\hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1, \quad \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 = -\hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 \quad (2.57)$$

özellikleri bulunmaktadır. Bu matrislerin mümkün olabilen bütün çarpımlarıyla

$\{I, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3\}$, sekiz boyutlu bir uzay gerilebilir. Bu uzayda daha yüksek sıralı çarpımlar bu sekiz baz elemanından birine dönüştürülebilir.

$$\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 (-\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3) = -\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3 = -(-\hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3) = \hat{\gamma}_2 (\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_1) \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_2 I \hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$$

Dirac matrislerinin her lineer kombinasyonlarına; I -vektör, $\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_3 \hat{\gamma}_1$ matrislerinin lineer kombinasyonlarına; 2 -vektör denir. I birim matrisinin katlarına 0 -vektör, $\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$ trivektörünün katlarına da 3 -vektör denir[8].

Denklem (2.53)'deki \mathbf{a} vektörü, σ_k Pauli spin matrisleri kullanılarak da:

$$\mathbf{a} = a^1 \sigma_1 + a^2 \sigma_2 + a^3 \sigma_3 \quad (2.58)$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. (2.55) ve (2.56)'daki cebirsel özellikler bu matrisler için de geçerli

olur. IR^3 uzayının Cl_3 Clifford cebirindeki bazları, Dirac matrisleri ile

gösterildiği gibi Pauli spin matrisleri ile de gösterilebilir:

$$\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3, \sigma_3 \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3\}.$$

2.7.2. Uzay-zaman $IR^{3,1}$

$IR^{3,1}$ 'in Clifford cebirinin $Cl_{3,1}$; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ orthonormal baz vektörleri vardır. Bunlar:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1 \quad (2.59)$$

$$\mathbf{e}_4^2 = -1 \quad (2.60)$$

$$\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = -\mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu, \quad \mu \neq \nu \quad (2.61)$$

özelliklerine sahiptirler. $Cl_{3,1}$ cebiri, elemanları reel sayı olan 4×4 ' lük matris cebirine izomorftur. Ayrıca $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Pauli spin matrisleri kullanılarak 2×2 ' lik matrisler olarak da yazılabilirler.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_4 &= \begin{bmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.7.3. Uzay–zaman $IR^{1,3}$

$IR^{1,3}$, ün Clifford cebiri $Cl_{1,3}$; elemanları kuaternion olan 2×2 ' lik matris cebirine izomorftur[9]. $Cl_{1,3}$ ' ün baz vektörleri olan $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ Dirac–gamma matrisleri,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & \gamma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}, & \gamma_3 &= \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olup,

$$(\gamma_0)^2 = I \quad (2.62)$$

$$(\gamma_0)^2 = (\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -I \quad (2.63)$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu, \quad \mu \neq \nu \quad (2.64)$$

bağıntılarını sağlarlar.

2.8. Hacim Elemanı ve Hodge Dualler

Geometrik cebirin üzerine yerleştiği IR^n Öklidyen vektör uzayındaki bütün orthonormal baz vektörlerin (2.65)' deki çarpımı kanonik eleman ya da hacim elemanı olarak adlandırılır[2].

$$\mathbf{e}_T \equiv \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n \quad (2.65)$$

Hacim elemanın tersi;

$$\mathbf{e}_T^{-1} \equiv \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \quad (2.66)$$

olarak yazılır.

Denklem (2.67)' deki $*V, V'$ nin Hodge dualidir.

$$*V \equiv V \mathbf{e}_T^{-1} \quad (2.67)$$

Cl_3 ' de bir bivektörün Hodge duali bir vektördür.

$$\begin{aligned} *(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

\mathbb{R}^3 uzayında yer alan Cl_3 geometrik cebirinin $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ kanoniksel elemanın karesi -1 dir.

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = i \quad (2.68)$$

2.9. Paravektörün Tanımı

Cl_3 'ün bazıları, reel olan skalerler ve kompleks olan trivektörlere ayrıştırılabilir. Bununla birlikte Cl_3 ' ün bivektör bazıları da sanal bir vektör olarak;

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_3} = \frac{i}{\mathbf{e}_3} = i \mathbf{e}_3 \quad (2.69)$$

yazılabilir. Daha genel olarak;

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = i \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.70)$$

şeklinde yazılabilir.

Cl_3 ' ün herhangi bir elemanı $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bazlarının kompleks lineer kombinasyonu olarak tanımlanabilir. \mathbb{R}^3 de oluşturulan geometrik cebir dört boyutlu kompleks bir vektör uzayında işlem görür. p paravektörü $p \in Cl_3, p_0$ skalerinin ve \mathbf{p} vektörünün toplamıdır. Her ikisi de kompleks olabilir. n boyutlu

öklidyen uzayın paravektörleri, $(n+1)$ boyutlu lineer vektör uzayının elemanlarıdır[10].

$$p = p_0 + \mathbf{p} \quad (2.71)$$

p ile \bar{p} 'nin çarpımı;

$$\begin{aligned} p\bar{p} &= (p_0 + \mathbf{p})(p_0 - \mathbf{p}) \\ &= p_0^2 - \mathbf{p}^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

saf skalerdir[11]. Bu özellik paravektörün büyüklüğünü;

$$|p| = \sqrt{p\bar{p}} \quad (2.73)$$

şeklinde tanımlamaya izin verir. Paravektörün tersi;

$$p^{-1} = \frac{\bar{p}}{p\bar{p}} \quad (2.74)$$

olarak yazılabilir.

2.10. Cl_3 'ün ve Cl_n 'in Involutionları

Herhangi bir M multivektörü;

$$M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \dots + \langle M \rangle_k \quad (2.75)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\langle \cdot \rangle_i$ operatörü, derece operatörüdür. i indisi dereceyi gösterir[12]. Eğer $M = \langle M \rangle_k$ ise M multivektörüne k-vektör veya derecesinin k olduğu söylenir. (2.75)' de $\langle M \rangle_0$, skalerleri gösterir. Derecesi 0' dır.

Cl_3 ' de, bir paravektör derece operatörleri kullanılarak;

$$p = \langle p \rangle_0 + \langle p \rangle_1 + \langle p \rangle_2 + \langle p \rangle_3 \quad (2.76)$$

yazılabilir. Burada $\langle p \rangle_0$ skalerleri, $\langle p \rangle_1$ vektörleri, $\langle p \rangle_2$ bivektörleri, $\langle p \rangle_3$ trivektörleri gösterir.

Cl_3 ' de bir paravektörün Clifford eşleniği;

$$\bar{p} = \langle p \rangle_0 - \langle p \rangle_1 - \langle p \rangle_2 + \langle p \rangle_3 \quad (2.77)$$

olarak, Hermityen eşleniği;

$$p^\dagger = \langle p \rangle_0 + \langle p \rangle_1 - \langle p \rangle_2 - \langle p \rangle_3 \quad (2.78)$$

olarak, Clifford ve Hermityen eşleniğin kombinasyonu;

$$\bar{p}^\dagger = \langle p \rangle_0 - \langle p \rangle_1 + \langle p \rangle_2 - \langle p \rangle_3 \quad (2.79)$$

olarak yazılabilir.

Kompleks sayılardaki, kompleks eşlenik Clifford cebirlerinde involution olarak adlandırılır[2]. Involutionlar, kompleks eşleniklerden daha zengin bir yapıya sahiptir. Cl_n ' in bir involutionu Cl_n içinde tersine çevrilebilir bir dönüşümdür. $p \rightarrow \bar{p} \in Cl_n$ paravektörün iki kere involutionu alındığında yine aynı paravektör elde edilir. $\bar{p} \rightarrow \bar{\bar{p}} = p$

Clifford eşleniğinin, involutionu;

$$p = p_0 + \mathbf{p} \rightarrow \bar{p} = p_0 - \mathbf{p} \quad (2.80)$$

paravektörünün vektör kısmının önündeki işareti değiştirir. Bir paravektör;

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(p + \bar{p}) + \frac{1}{2}(p - \bar{p}) \\ &\equiv \langle p \rangle_s + \langle p \rangle_v \end{aligned} \quad (2.81)$$

skaler ve vektör kısımlara ayrılabilir. Paravektörün skaler kısmı $\langle p \rangle_s$ ile vektör kısmı $\langle p \rangle_v$ ile gösterilir. Skaler kısım nokta çarpım, vektör kısım wedge çarpım;

$$\begin{aligned} \langle pq \rangle_s &\equiv \frac{1}{2}(pq + \overline{pq}) \\ \langle pq \rangle_v &\equiv \frac{1}{2}(pq - \overline{pq}) \end{aligned} \quad (2.82)$$

olarak alınabilir. Burada skaler kısımların dereceleri $g = 0, 3, 4, 7, 8, \dots$ olabilir. Bir başka deyişle $g \bmod 4 = 0, 3$ olan dereceler skaler kısımlardır. Dereceleri, $g = 1, 2, 5, 6, 9, \dots$ olanlar ise vektör kısımlardır. $g \bmod 4 = 1, 2$.

Hermityen eşleniğin involutionu $p \rightarrow p^\dagger$, ile gösterilen önemli bir diğer involutiondur. Öklidyen uzayın bazlarının hermityen matrislerle gösterildiği Cl_n ' in herhangi matris gösteriminde matrislerin hermityen eşleniğine benzer. Cl_3 ' de, çarpımların derecesini $(pq)^\dagger \rightarrow q^\dagger p^\dagger$ değiştirmenin dışında kompleks eşleniğine benzer. Her i ' yi $-i$ ' ye dönüştürür ve çarpımın derecesini değiştirir. Eğer bir

eleman $p \in Cl_3$ $\{\mathbf{e}_0 \equiv 1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bazlarında genişletilirse, bütün baz elemanlar hermityen olarak alınabilir ve her bir katsayının kompleks eşleniği alınarak hermityen eşlenik;

$$p = p\mathbf{e}_\mu \rightarrow p^\dagger = p^{\mu*}\mathbf{e}_\mu \quad (2.83)$$

toplamlar $\mu = 0,1,2,3$ hermityen eşleniğin elemanları gerçek ve sanal kısımlara ayırmak için kullanılır:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(p + p^\dagger) + \frac{1}{2}(p - p^\dagger) \\ &\equiv \langle p \rangle_{\Re} + \langle p \rangle_{\Im} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Denklem (2.81)' de paravektörün gerçek kısmı $\langle p \rangle_{\Re}$, sanal kısmı da $\langle p \rangle_{\Im}$ biçimde gösterilir. Cl_n ' de $\mathfrak{g} \bmod 4 = 0,1$ dereceli elemanlar gerçek, $\mathfrak{g} \bmod 4 = 2,3$ dereceli olanlar sanaldırlar.

Clifford eşleniğinin ve hermityen eşleniğin kombinasyonu çarpmanın derecesini değiştirmeksizin bütün vektör çarpanlarının işaretlerini değiştirir. Herhangi bir $p \in Cl_n$, (2.85)' deki gibi çift ve tek kısımlara ayrılabilir;

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(p + \bar{p}^\dagger) + \frac{1}{2}(p - \bar{p}^\dagger) \\ &\equiv \langle p \rangle_+ + \langle p \rangle_- \end{aligned} \quad (2.85)$$

ve $p \rightarrow \bar{p}^\dagger$ dönüşümü derece otomorfizmi olarak adlandırılır.

3. ÖZEL RÖLATİVİTE TEORİSİ ve LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

3.1. Giriş

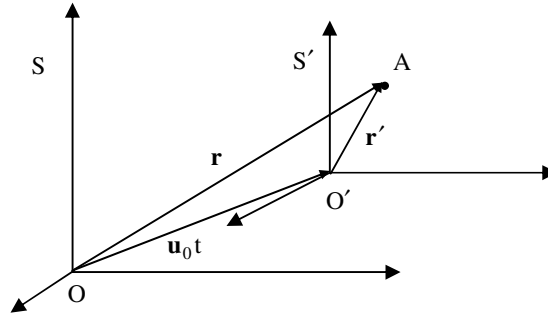
Klasik mekanikteki teorik hesaplamalarda ele alınan hızlar ışık hızına yaklaştığında bu hesaplamalar deneysel gerçekleri göstermez. Örnek 10^6 voltluk bir potansiyel fark altında hızlandırılan bir elektron 0,9988c hızına ulaşabilir. Bu durumda elektronun kazandığı enerji yaklaşık 10 Mev olmaktadır. Elektronun enerjisini 40 Mev' e çıkardığımızı varsaydıığımızda klasik mekaniğe göre hızı 1,9976c olmalıdır. Fakat deneysel olarak elektronun hızı 0,9999c olarak bulunur[13]. Işık hızına yakın hızlarda klasik fizik yasaları yerine Einstein' nın iki temel postülasından oluşan Özel Rölativite teorisi uygulanır.

İlk postüla (Einstein' nın eşdeğerlik postülası): Fizik yasaları bütün eylemsiz referans çerçevelerinde aynıdır. Birbirlerine göre duran ya da sabit hızla hareket eden gözlem çerçevelerine eylemsiz gözlem çerçeveleri denir.

İkinci postüla: Işığın boşluktaki hızı bütün eylemsiz gözlem çerçevelerinde sabittir, kaynaktan ve gözlemciden bağımsızdır. Bu postüla Özel Rölativite teorisinde önemli bir rol oynar[14].

3.2. Galilei Dönüşümleri

Galilei dönüşümleri, ilk postüla nedeniyle fizikte temel bir yasa olur. Fizik yasaları, zaman ve uzunluk Galilei dönüşümleri altında invarianttır. S' ye göre u_0 hızıyla hareket eden, S' eylemsiz gözlem çerçevesindeki bir A olayının Galilei dönüşümü, Şekil 3.1' de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Galilei dönüşümü

Çizelge 3.1 Galilei dönüşüm bağıntılarının gösterimi. S sistemi hareketsiz, S' sistemi \mathbf{u}_0 hızıyla hareket ederse Direkt dönüşüm bağıntıları kullanılır. Ters durumda bağıntıdaki hızın önündeki işaret değişir

Direkt Galilei dönüşüm	Ters Galilei dönüşüm
$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}_0 t$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}_0 t'$
$t' = t$	$t = t'$

Şekil 3.1' deki A noktasının S' sistemindeki yerdeğiştirme vektörü;

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}_0 t \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Denklem (3.1)' in zamana göre birinci türevi alınarak;

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u}_0 \frac{dt}{dt} \quad (3.2)$$

(3.3)' deki hız bağıntısı bulunur.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (3.3)$$

Denklem (3.3)' ün zamana göre birinci türevi alınarak;

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_0}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

(3.5)' deki ivme bağıntısı bulunur.

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (3.5)$$

Denklem (3.5), ivmenin her iki gözlem çerçevesinde de aynı olduğunu gösterir. Eğer (3.3)' de \mathbf{u}' yerine c ışık hızı konulursa S gözlem çerçevesinde ışık hızı $\mathbf{c} + \mathbf{u}_0$ olarak gözlenir. Bu durum Özel Rölativite teorisinin ikinci postülası ile çelişir. Sonuç olarak, Galilei dönüşüm bağıntıları ışık hızından çok daha küçük hızlarda doğru sonuçlar verebilir.

3.3. Lorentz Dönüşümleri

3.3.1. Giriş

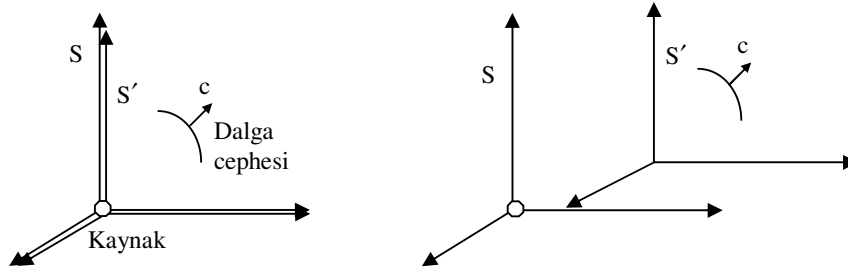
Klasik mekanikte bir eylemsiz gözlem çerçevesindeki zaman koordinatı diğer gözlem çerçevesindeki uzay ve zaman koordinatlarından bağımsızdır. Özel Rölativitede uzay ve zaman koordinatlarının birbirlerine bağımlı olduğu Lorentz

dönüşüm denklemlerinden görülebilir. Lorentz, bu dönüşüm denklemlerini Maxwell' in elektromanyetik alan denklemlerinden türetmiştir. Lorentz dönüşümlerinde, bütün sistemlerdeki ışık hızı aynıdır. Çizelge 3.2' de tek boyutta Öz Lorentz dönüşüm denklemleri verilir. Öz Lorentz dönüşümünde uzaysal dönmeler bulunmaz sadece aksel ötelemeler vardır[13].

Çizelge 3.2 Tek boyutta Öz Lorentz dönüşüm bağıntılarının gösterimi

Direkt dönüşüm	Ters dönüşüm
$x' = \gamma(x - u_0 t)$	$x = \gamma(x' + u_0 t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma\left(t - \frac{u_0}{c^2} x\right)$	$t = \gamma\left(t' + \frac{u_0}{c^2} x'\right)$
$\beta = \frac{u_0}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	

Başlangıçta çakışık olan iki gözlem çerçevesinden, S sisteminin orijinine konulan noktasal bir ışık kaynağından yayılan ışık ışınlarının, dalga cephesinin geometrisi aynı sistemdeki bir gözlemci tarafından küresel olarak gözlemlenir. Özel Rölativitenin ikinci postülası nedeniyle, hareketli S' sistemindeki bir gözlemcide bu dalga cephesini aynı geometride gözlemler.



Şekil 3.2. Kaynaktan yayılan ışık ışınlarının, S ve S' sistemindeki dalga cephesi S eylemsiz gözlem çerçevesinde herhangi bir t anında dalga cephesi;

$$(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 = (ct)^2 \quad (3.6)$$

ile S' çerçevesindeki dalga cephesi;

$$(r_1')^2 + (r_2')^2 + (r_3')^2 = (ct')^2 \quad (3.7)$$

küre denklemleriyle verilir. (3.6) ve (3.7) eşitlenerek;

$$(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 - (ct)^2 = (r'_1)^2 + (r'_2)^2 + (r'_3)^2 - (ct')^2 \quad (3.8)$$

elde edilir. Denklem (3.8)' de $i^2 = -1$ sanal sayısı konularak;

$$(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (i ct)^2 = (r'_1)^2 + (r'_2)^2 + (r'_3)^2 + (i ct')^2 \quad (3.9)$$

bulunur. Denklem (3.9) toplam sembolüyle;

$$\sum_{\mu=1}^4 r_{\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^4 (r'_{\mu})^2 \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir.

Denklem (3.10) dört boyutlu uzayda bir dönmeyi gösterir. Biri zamana ait sanal boyuttan, diğer üçü de konuma ait olan bu dört boyutlu uzaya Minkowski uzayı denir. Lorentz dönüşümleri Minkowski uzayının ortogonal dönüşümleridir.

3.3.2. Lorentz Kısalması

S eylemsiz gözlem çerçevesinde $L = x_2 - x_1$ uzunluğundaki bir çubuğun, hareketli S' gözlem çerçevesinde t' anında ölçülen uzunluğu $L' = x'_2 - x'_1$ olur. Çizelge 3.2' deki ters Lorentz dönüşüm denklemlerinde kullanılarak (3.11) yazılır.

$$\begin{aligned} L &= \frac{x'_2 + u_0 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x'_1 + u_0 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{L'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$L' = L \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.12)$$

Denklem (3.12) de $u_0 \ll c$ olduğundan $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$ olur. Hareketli çerçevede gözlemlenen uzunluk sabit çerçevedekine göre daha kısa ölçülür. Buna Lorentz kısalması denir.

3.3.3. Zaman Genleşmesi

S eylemsiz gözlem çerçevesinde x_1 noktasına konulan bir saatin ölçülen zaman aralığı $t_2 - t_1$, S' çerçevesinde aynı noktadaki bir gözlemcinin ölçtüğü zaman aralığı $t'_2 - t'_1$ olur. Hareketli sistemdeki gözlemci için zaman aralığı

duran sistemdeki zaman aralığından γ katsayısı kadar daha fazladır. Buna zamanın genişlemesi adı verilir.

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \gamma(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3.4. Hızların Toplamı

Lorentz dönüşümlerinin arka arkaya eklenmesi ile ışık hızından büyük bir hız elde etmenin mümkün olabileceği düşünülebilir. Bu halde bir sistemden kendisine göre $c/2$ ' den büyük bağıl \mathbf{u}_1 hızı ile hareket eden ikincisine dönüştürme yapılabilir. Sonra bu \mathbf{u}_1 ' e paralel olarak, ikinci sisteme göre $c/2$ ' den büyük bir \mathbf{u}_2 hızıyla hareket eden üçüncü bir sisteme dönüşüm yapılabilir. Üçüncü sistemin birinciye göre hızı $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ ile verilemez. Birinci sistemden üçüncü sisteme Lorentz dönüşümü doğrudan doğruya iki ayrı dönüşümün dönüşüm matrislerini çarparak bulunabilir. Bu halde toplam dönüşümün; hızlar için Einstein toplama kanunu denen bir \mathbf{u}_3 hızına karşı geldiği görülür:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{1 + \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{c^2}} \\ \beta_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{c}, \beta_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{c}, \beta_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{c} \text{ eşitlikleri kullanılarak;} \\ \beta_3 &= \frac{\beta_1 \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir. Burada daima $\beta_3 < 1$ olur.

3.3.5. Lorentz Dönüşüm Matrisinin Hiperbolik Fonksiyonlarla Gösterimi

Çizelge 3.2' deki bir boyutlu Lorentz dönüşümlerinde $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $ct = x_4$ eşitlikleri konularak, Lorentz dönüşümleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} x^0' \\ x^1' \\ x^2' \\ x^3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

yazılabilir. (3.16)'daki 4×4 matris, Lorentz dönüşüm matrisidir.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Denklem (3.16)'daki Lorentz dönüşüm matrisine (3.19) konularak (3.20)deki elemanları hiperbolik fonksiyonlardan oluşan Lorentz dönüşüm matrisi elde edilir.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh^2 \theta}}} = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta}} \quad (3.17)$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (3.18)$$

$$\gamma = \cosh \theta, \quad \beta = \tanh \theta \quad (3.19)$$

Denklem (3.16), üç boyutlu uzayda dönme matrisine benzer.

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

3.3.6. İntervaller

S referans çerçevesindeki $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ olayları arasındaki uzay zaman intervali (3.21) ile verilir[15].

$$s_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + c^2(t_2 - t_1)^2} \quad (3.21)$$

Denklem (3.22)'de uzay zaman intervalinin karesi alınmıştır.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2 dt^2 \quad (3.22)$$

Einstein toplama kuralı ve uzay zaman metriği $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ kullanılarak (3.22) daha genel tensörel formda;

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir. Kroneker deltası:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{için } \mu = \nu \\ 0 & \text{için } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (3.24)$$

S' referans çerçevesindeki bir gözlemci $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ olaylarını $P'_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$ ve $P'_2(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$ olarak ölçer. Uzay zaman intervali;

$$ds = ds' \quad (3.25)$$

her iki çerçevede de aynı kalır.

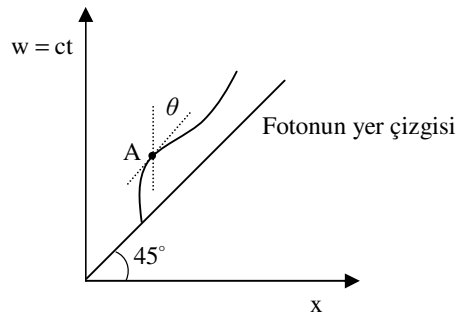
3.3.7. Uzay-Zaman Diyagramları

Fiziksel süreçler çok sayıda ardışık olaylardan oluşur. Olaylar, üç boyutlu uzayda noktaların dört boyutlu uzay zaman benzerleridir. Özel Rölativitenin Minkowski yorumları zaman uzaysal boyuttan farklı davranır. Minkowski 4-vektörleri zaman bileşeninin ters işaretli verildiği Minkowski dört vektörleriyle gösterilirler[21]. (3.26) ve (3.27)' de dört boyutlu uzayda aynı dört vektör iki farklı şekilde gösterilir. Uzay zaman diyagramlarında olaylar nokta ile bir cismin hareketi ise bu noktalardan oluşan sürekli bir doğru ile temsil edilir. Bu doğruya cismin yer çizgisi adı verilir. Uzay zaman diyagramlarında zaman boyutu c ile çarpılarak uzunluk boyutuna çevrilir ve düşey koordinat eksenini olarak seçilir.

Şekil 3.3' de bir parçacığın yer çizgisi üzerinde A noktasındaki teğeti:

$$\frac{dx}{dw} = \frac{1}{c} \left(\frac{dx}{dt} \right) \text{ Bu teğetin zaman eksenine arasındaki açı } \theta = \arctan \frac{dx}{dw} = \frac{u}{c} \text{ olur.}$$

u parçacığın hızı $u < c$ olduğu için bu açı her zaman 45° den küçüktür. Parçacık bir fotonsa yer çizgisi 45° eğimli bir doğru olur.



Şekil 3.3. Uzay zaman diyagramında A parçacığının yer çizgisi

Çizelge (3.2)' deki dönüşüm bağıntılarına $w = ct$, $\beta = \frac{u_0}{c}$ eşitlikleri

konularak, bir boyutta Lorentz dönüşümleri;

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.26)$$

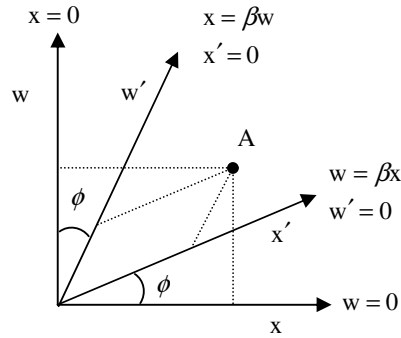
$$w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.27)$$

$$x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.28)$$

$$w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir[16].

Denklem (3.26)' da $x' = 0$ konularak $x = \beta w$ ve (3.27)'de $w' = 0$ konularak $w = \beta x$ bulunur. Bulunan bu denklemler, $x - w$ uzay zaman grafiğinde çizilir ise S' sisteminin uzay zaman grafiğinin eksenleri elde edilmiş olur. Lorentz dönüşümleri ortogonal olan S sistemini ortogonal olmayan S' sistemine dönüştürür. Şekil 3.4' de A olayının S ve S' uzay zaman diyagramları üzerindeki bileşenleri gösterilmiştir. Bu diyagramların eksenleri arasındaki açı $\phi = \arctan \beta$ ' dir.



Şekil 3.4. A olayının, S ve S' uzay zaman diyagramları üzerindeki bileşenleri

S çerçevesinde farklı konumlarda eşzamanlı oluşan A ve B olayları S' çerçevesindeki bir gözlemci tarafından farklı zamanlarda gözlemlenir. $x_B > x_A$ ise (3.27) kullanılarak A ve B olayları için;

$$x_A = \frac{-(ct'_A \sqrt{1 - \beta^2}) + ct}{\beta} \quad (3.30)$$

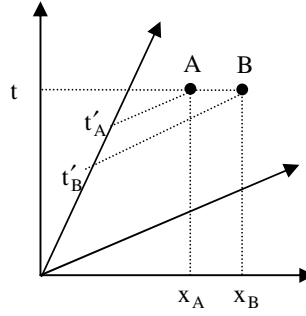
$$x_B = \frac{-(ct'_B \sqrt{1 - \beta^2}) + ct}{\beta} \quad (3.31)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$x_B > x_A \Rightarrow t'_A > t'_B \quad (3.32)$$

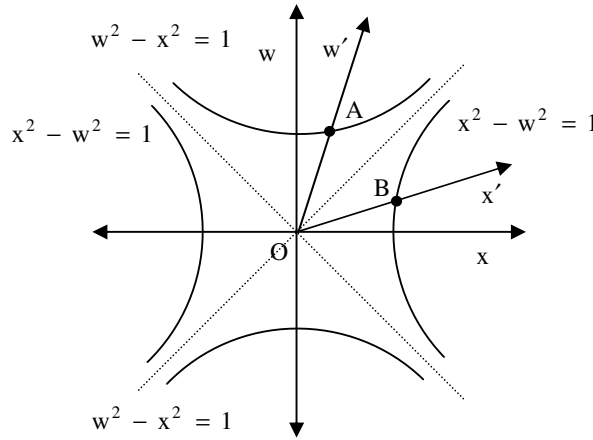
sonucu bulunur.

Denklem (3.32)' den bulunan sonuç Şekil 3.5' deki uzay zaman diyagramında gösterilmiştir. S' çerçevesindeki gözlemci B olayını A olayından önce görür.



Şekil 3.5. A ve B olaylarının eşzamanlılığı

İki boyutlu uzay zaman diyagramında $w^2 - x^2 = 1$ ve $x^2 - w^2 = 1$ hiperbolleri üzerindeki noktalar ile orijin arasındaki intervaller sabittir. Şekil 3.6' da OA ve OB intervalleri ve kalibrasyon eğrileri gösterilmiştir.



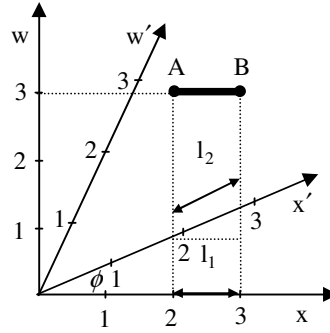
Şekil 3.6. Uzay zaman diyagramında kalibrasyon eğrileri

Denklem (3.28) ve (3.29)'da $OB = x' = 1$ ve $w' = 0$ konularak (3.33) ve (3.34) elde edilir.

$$w = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.33)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.34)$$

S sisteminde, uzunluğu $l_1 = 1$ metre olarak ölçülen bir sopanın S' sistemindeki gözlemci tarafından ölçülen uzunluğu, $\beta = 0,7$ alındığında (3.12)'den $l_2 \cong 0,714$ metre olarak bulunur. Bu sonuç Şekil 3.7' deki uzay zaman diyagramının geometrisinden görülebilir. S' diyagramındaki l_2 uzunluğu bu diyagramın uzay eksenindeki birimden küçüktür.



Şekil 3.7. Uzay zaman diyagramında Lorentz kısalmasının gösterimi

Uzay zaman diyagramında $x = 0$ ve $t = 0$ noktasındaki bir A olayından geçen ışık ışınlarının yer çizgisi diyagramı dört parçaya ayırır. Şekil 3.8 de gösterilmiştir.

I bölgesi $x = 0$ ve $t = 0$ noktasındaki A olayının geleceğini gösterir. Bu bölgede A olayının olabilecek bütün muhtemel yer çizgileri vardır.

II ve **IV** bölgeleri $x = 0$ ve $t = 0$ noktasındaki A olayının şimdiki zamanını gösterir. A olayı bu bölgedeki olayları etkileyemez. A olayının bu bölgelerdeki olayları etkileyebilmesi için ışık hızından daha hızlı sinyal gönderebilmesi gerekmektedir. Bu rölativitenin ikinci postülasıyla çelişir.

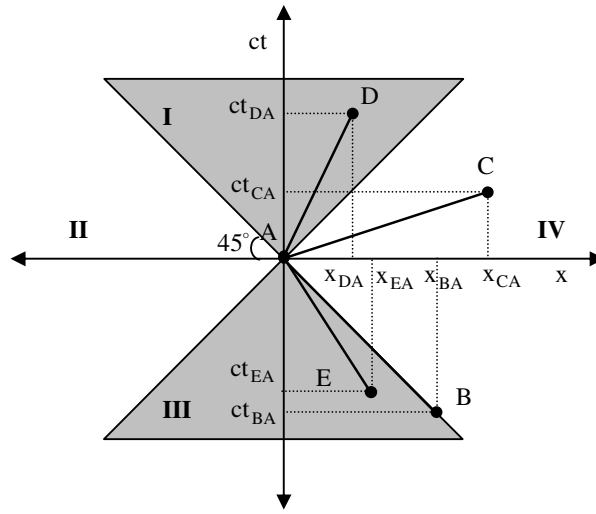
III bölgesi $x = 0$ ve $t = 0$ noktasındaki A olayının geçmişini gösterir. A olayının $x = 0$ ve $t = 0$ noktasına gelinceye kadar geçtiği veya geçebileceği

bütün muhtemel yer çizgilerini verir[17]. A olayı artık buradaki olayları etkileyemez.

A ve D, A ve E olayları arasındaki intervallerin eğimleri sırasıyla $ct_{DA} > x_{DA}$, $ct_{EA} > x_{EA}$ olduğundan dolayı bu intervaller zamansaldır.

A ve C, olayları arasındaki intervalin eğimi $ct_{CA} < x_{CA}$ olduğundan dolayı bu interval uzaysaldır.

A ve B olayları arasındaki intervalin eğimi $ct_{BA} = x_{BA}$ olduğundan dolayı bu interval ışıksaldır[18].



Şekil 3.8. Uzay zaman diyagramında intervallerin gösterimi

4. MINKOWSKI UZAYI

Minkowski uzayı, reel cisim üzerinde metriği $(+1, -1, -1, -1)$ işareti ile tanımlanmış dört boyutlu vektör uzayıdır[19]. Minkowski uzayında herhangi bir \mathbf{x} 4-vektörünün, zaman kısmı x^0 ve uzay kısmı $\mathbf{X} = (x^1, x^2, x^3)$ olur. $\mathbf{x} = (x^0, \mathbf{X}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ Minkowski uzayında \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin, Minkowski iç çarpımı[20];

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^0 y^0 - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (4.1)$$

olarak, öklidyen uzaydaki skaler çarpımı ise;

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \quad (4.2)$$

olarak verilir.

Minkowski uzayında \mathbf{x} vektörünün skaler karesi (4.1)' deki \mathbf{y} vektörü yerine \mathbf{x} vektörü konularak;

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x^0)^2 - (\mathbf{X})^2 \quad (4.3)$$

şeklinde bulunur. (4.2) Minkowski uzayına;

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{R} \mathbf{y}) \quad (4.4)$$

dönüşümü ile taşınabilir. \mathbf{R} dönüşüm matrisinin elemanları, metrik tensör $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$ olarak adlandırılır.

$$\mathbf{R} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Denklem (4.4) toplam sembolüyle;

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{\mu\nu=0}^3 x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \quad (4.6)$$

gibi yazılabilir.

Minkowski uzayı, dört boyutlu bir vektör uzayı olduğundan dolayı bu uzayda birbirinden lineer bağımsız dört tane baz eleman tanımlanabilir. (4.7) ve (4.8)' de baz vektörlerin özellikleri;

$$|\mathbf{e}_\mu^2| = 1, \quad \mu \in \{0,1,2,3\} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{e}_0^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1 \quad (4.8)$$

olarak verilir. İki baz vektörün skaler çarpımı farklı tensörel gösterimlerle;

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \mu, \nu \in \{0,1,2,3\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = g^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Minkowski uzayındaki \mathbf{x} vektörü x_ν kovaryant koordinatlarıyla;

$$\mathbf{x} = x_\nu \mathbf{e}^\nu \quad (4.11)$$

ve x^μ kontravaryant koordinatlarıyla;

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (4.12)$$

şeklinde verilebilir. x^μ kontravaryant tensör, (4.13) ile x_ν kovaryant tensöre çevrilir.

$$g_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu \quad (4.13)$$

\mathbf{x} vektörünün kontravaryant koordinatlarının Lorentz dönüşümü, Λ^μ_ν Lorentz metriği ile;

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (4.14)$$

$$x'_\mu = g_{\mu\lambda} x'^\lambda = g_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda_\kappa x^\kappa = g_{\mu\lambda} \Lambda^\lambda_\kappa g^{\kappa\nu} x_\nu \quad (4.15)$$

şeklinde verilebilir.

Kısmi türevlerin Lorentz dönüşümü, tensörler yardımıyla;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial f(\Lambda^{-1} \mathbf{x}')}{\partial x'^\mu} \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial f(\Lambda^{-1} \mathbf{x}')}{\partial x'^\mu} \end{aligned} \quad (4.16)$$

olarak bulunabilir. Minkowski uzayındaki gradyent vektörü;

$$\partial = \mathbf{e}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \mathbf{e}^\nu \partial_\nu \quad (4.17)$$

olarak verilir. ψ , skaler bir dalga fonksiyonu olursa, skaler dalga denklemi:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

Bu dalga denkleminde üç boyutlu gradyent diferansiyel operatörü yerine dört gradyent diferansiyel operatörü \square^2 konulabilir. \square^2 , dört gradyent diferansiyel operatörünün skaler çarpımıdır[13]. Bu skaler çarpım Minkowski uzayında boşluk için D' Alembert operatörüdür.

$$\square^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \quad (4.19)$$

Bu operatörün daha sade gösterimi;

$$\square^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_0^2 \quad (4.20)$$

$$\square^2 = -\partial \cdot \partial \quad (4.21)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (4.18)' deki dalga denklemi, D' Alembert operatörünü kullanarak;

$$\square^2 \psi = 0 \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir.

\mathbf{u}_0 hızıyla hareket eden bir parçacığın, (4.23)' deki uzay zaman vektörünün;

$$\mathbf{x} = (c\Delta t, \Delta \mathbf{X}) \quad (4.23)$$

skaler karesi alınıp, $(\Delta t)^2$, ye bölünürse;

$$\frac{\mathbf{x}^2}{(\Delta t)^2} = c^2 - \left(\frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta t} \right)^2 = c^2 - \mathbf{u}_0^2 \quad (4.24)$$

elde edilir.

$\mathbf{u}_0 < c$ olduğundan dolayı (4.24) negatif olamaz. Parçacığın durağan olduğu S' gözlem çerçevesinde uzay zaman vektörü; $\mathbf{x}' = (c\Delta \tau, 0)$ ile S gözlem çerçevesindeki uzay zaman vektörü; $\mathbf{x} = (c\Delta t, \Delta \mathbf{X})$ arasındaki interval kareleri eşitlenerek (4.25) bulunur.

$$c^2(\Delta \tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{X})^2 \quad (4.25)$$

Tek boyutlu hareket için (4.25)'de $\Delta \mathbf{X}$ yerine, Δx yazılıp her iki taraf $(\Delta t)^2$, ye bölünerek $\Delta \tau$ öz zaman aralığı bulunabilir.

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{u}_0}{c}\right)^2} \quad (4.26)$$

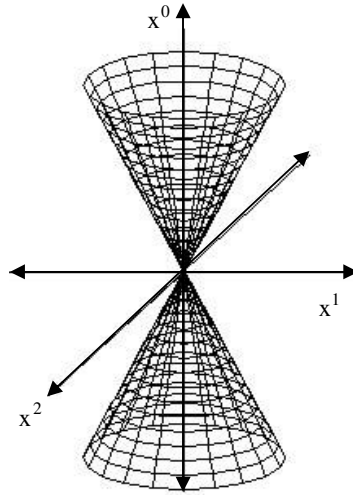
$$\Delta\tau = \gamma \Delta t \quad (4.27)$$

Denklem (4.26) ve (4.27) zaman genişmesinin 4-vektörler yoluyla gösterimidir.

Minkowski uzayında \mathbf{x} vektörünün, skaler karesinin alındığında \mathbf{x} vektörü için üç farklı durum Çizelge 4.1’ de gösterilmiştir. İki boyutlu uzay zaman diyagramlarına üçüncü uzay boyutunu ekleyip, intervali sabit tutarak üç boyutlu uzay zaman grafikleri çizilebilir. Zamansal vektörlerin içinde, uzaysal vektörlerin dışında ve ışıksal vektörlerin de yüzeyde kaldığı bir ışık konisi Şekil 4.1’ de gösterilmiştir.

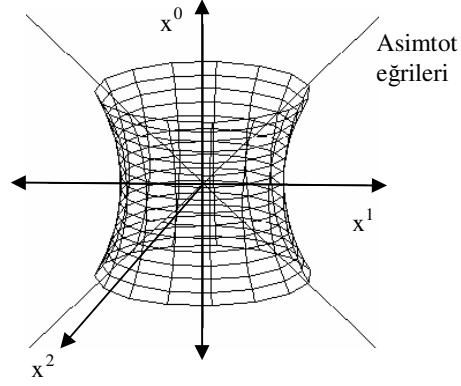
Çizelge 4.1 Minkowski uzayındaki vektörlerin sınıflandırılması

$\mathbf{x}^2 < 0$	$ \mathbf{x}^0 < \mathbf{X} $ ise \mathbf{x} vektörü uzaysal vektör olur.
$\mathbf{x}^2 > 0$	$ \mathbf{x}^0 > \mathbf{X} $ ise \mathbf{x} vektörü zamansal vektör olur
$\mathbf{x}^2 = 0$	$ \mathbf{x}^0 = \mathbf{X} $ ise \mathbf{x} vektörü ışıksal vektör olur.



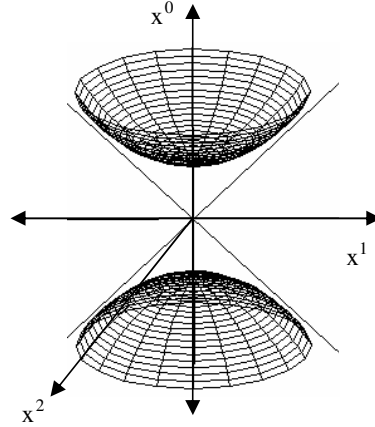
Şekil 4.1. Üç boyutlu uzay zamanda Işık konisi

Üç boyutlu uzay zaman diyagramında, $\mathbf{x}^2 < 0$ eşitsizliği çizildiğinde tek yapraklı hiperboloit elde edilir. Şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Üç boyutlu uzay zamanda tek yapraklı hiperboloit

Üç boyutlu uzay zaman diyagramında, $x^2 > 0$ eşitsizliği çizildiğinde çift yapraklı hiperboloit elde edilir. Şekil 4.3’ de gösterilmiştir. Üst yapraktaki olaylar alt yapraktakilerden önce olur. Olaylar arasındaki zaman sıralaması hiçbir zaman değişmez. Neden sonuç ilişkili olaylar arasındaki interval daima zamansaldır[17].



Şekil 4.3. Üç boyutlu uzay zamanda çift yapraklı hiperboloit

Minkowski uzayında x y vektörlerinin skaler çarpımının Lorentz dönüşümü;

$$\Lambda x \cdot \Lambda y = (\Lambda x, \Lambda R y) \quad (4.28)$$

kullanılarak bulunabilir. (4.28)' deki dönüşüm denkleminde matrisler konularak;

$$\begin{aligned}
 [\Lambda \mathbf{x}] &= \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 \\ -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \\
 [\Lambda \mathbf{R} \mathbf{y}] &= \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \gamma y^0 - \beta\gamma y^1 \\ \beta\gamma y^0 - \gamma y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$(\Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{R} \mathbf{y})$, skaler çarpımını yapabilmek için $[\Lambda \mathbf{x}]$ matrisinin transpozu $[\Lambda \mathbf{x}]^T$ alınır.

$$\begin{aligned}
 (\Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{R} \mathbf{y}) &= [\Lambda \mathbf{x}]^T [\Lambda \mathbf{R} \mathbf{y}] \\
 (\Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{R} \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 & -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma y^0 - \beta\gamma y^1 \\ \beta\gamma y^0 - \gamma y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \end{bmatrix} \quad (4.29) \\
 &= (\gamma x^0 - \beta\gamma x^1)(\gamma y^0 - \beta\gamma y^1) \\
 &\quad + (-\beta\gamma x^0 + \gamma x^1)(\beta\gamma y^0 - \gamma y^1) - x^2 y^2 - x^3 y^3 \\
 &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}
 \end{aligned}$$

(4.30) elde edilir.

$$\Lambda \mathbf{x} \cdot \Lambda \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (4.30)$$

Denklem (4.30)' dan Minkowski uzayındaki \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin skaler çarpımlarının Lorentz dönüşümleri altında invaryant kaldığı görülebilir.

5. CLIFFORD CEBRİ ve ÖZEL RÖLATİVİTEYE UYGULAMALARI

5.1. Paravektör Uzayının Metriği

$p \in Cl_n$ paravektörünün kendisiyle çarpımı genellikle bir skaler değildir, fakat Clifford eşleniğiyle çarpımı $p\bar{p}$ skalerdir. $p\bar{p} = \langle p\bar{p} \rangle_s$ Paravektörün kare uzunluğu ile bir metrik tanımlanabilir;

$$p\bar{p} = p_0^2 - \mathbf{p}^2 \quad (5.1)$$

$p\bar{p}$ metriği Minkowski uzay zaman metriğidir. $q, r \in Cl_n$ olmak koşuluyla, $p = q + r$ ve $\bar{p} = \bar{q} + \bar{r}$ eşitliklerini (5.1)' de yerine koyarak $p\bar{p}$ metriği kuadrik formda;

$$\begin{aligned} p\bar{p} &= (q+r)(\bar{q}+\bar{r}) \\ &= q\bar{q} + q\bar{r} + r\bar{q} + r\bar{r} \\ p\bar{p} - q\bar{q} - r\bar{r} &= q\bar{r} + r\bar{q} \\ \frac{1}{2}(p\bar{p} - q\bar{q} - r\bar{r}) &= \frac{1}{2}(q\bar{r} + r\bar{q}) \\ &= \frac{1}{2}(q\bar{r} + \overline{q\bar{r}}) \\ &= \langle q\bar{r} \rangle_s \end{aligned} \quad (5.2)$$

yazılabilir. Burada $\langle q\bar{r} \rangle_s$ skaleri, q ve r paravektörlerinin skaler çarpımı olarak alınabilir. $\langle q\bar{r} \rangle_s$ skaleri bileşenleri cinsinden;

$$\begin{aligned} \langle q\bar{r} \rangle_s &= q^\mu r^\nu \langle \mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu \rangle_s \\ &= q^\mu r^\nu \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.3)$$

tensörel notasyonda yazılabilir. $\langle \mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu \rangle_s = \eta_{\mu\nu}$ paravektör metriğidir.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu > 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (5.4)$$

İki vektörün skaler çarpımının sıfır olduğunda, birbirine dik olması gibi $\langle q\bar{r} \rangle_s = 0$ olursa q ve p paravektörleri ortogonal olur. Paravektör metriği ile öklidyen bir metrik olan kroneker deltası arasında;

$$\langle \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \rangle_s = \delta_{jk} \quad (5.5)$$

bağıntısı kurulabilir. Buradan kare uzunluğun pozitif olma zorunluluğunun olmadığı görülebilir.

5.2. Öz Zaman ve Öz Hızın Paravektör Gösterimi

Pauli cebri Cl_3 , üç boyutlu reel öklidyen uzayın geometrik cebridir, fakat bütün elemanları kompleks olan dört boyutlu uzaydaki paravektörler olarak görülebilirler. Uzay zaman da bir x noktasının \mathbf{e}_μ baz vektörleri, x noktasının koordinatlara göre kısmi türeviyle;

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\mu x^\mu &= x \\ \mathbf{e}_\mu &= \frac{\partial x}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu x\end{aligned}\quad (5.6)$$

verilir. Cl_3 ' ün paravektör uzayı, uzay zamanın metriğine sahiptir. Herhangi $p = p^\mu \mathbf{e}_\mu$, uzay zaman vektörü üç boyutlu fiziksel uzayda $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ' ün uzaysal birim vektörler olduğu bir paravektörle gösterilebilir ve \mathbf{e}_0 birim skalerdir. Bir parçacığın uzay zaman yerdeğiştirme paravektörü;

$$dx = cdte_0 + dX \quad (5.7)$$

olarak yazılabilir. Burada X, parçacığın uzaysal vektörünü gösterir. Parçacığın sabit duruyor olarak gözlemlendiği bir sistemdeki uzaysal pozisyonu: $X(0)$ olur parçacığın sadece zaman koordinatı değişir. Böyle bir parçacık için uzay zaman pozisyonu:

$$x(t) = ct\mathbf{e}_0 + X(0) \quad (5.8)$$

olur. Parçacık bu sistemde sabit \mathbf{u}_0 hızıyla hareket ettiğinde zaman ve uzay koordinatlarının her ikisi de değişir. Parçacığın uzay zaman pozisyonu:

$$x(t) = (c + \mathbf{u}_0)t + X(0) \quad (5.9)$$

şeklinde olur. Parçacığın öz zamanı, (5.7)' de t yerine τ yazılıp, $d\tau = c^{-1}dx$ olarak bulunur. Parçacığın τ parametresine göre yörünge fonksiyonu $x(\tau)$ olur. Bu parçacığın yörünge fonksiyonu üzerinde bir τ anındaki, teğet paravektör parçacığın öz hızıdır. (5.10)' da uc paravektörü parçacığın öz hızını vermektedir.

$$\begin{aligned}
uc &= \frac{dx}{d\tau} \\
&= (\partial_\mu x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \\
uc &= \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt} \equiv \gamma \frac{dx}{dt} \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Parçacık durağan olduğunda, $u = \mathbf{e}_0 = 1$ olur, ve u paravektörünün kare uzunluğu $u\bar{u} = 1$ olur. Hareket eden parçacık için durağan çerçeve değeri $u = 1$ olur. (5.11)' de γ ' nın değerini önce (5.9)' un her iki tarafının zamana göre türevini alıp;

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(c + \mathbf{u}_0)t + \frac{d}{dt}X(0) \tag{5.12}$$

$\frac{d}{dt}X(0) = 0$, (5.12)' de yerine konursa;

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(c + \mathbf{u}_0)t \tag{5.13}$$

bulunur. (5.13), (5.11)' de yerine konursa $uc = \gamma(c + v)$ elde edilir. (2.75)

kullanılarak $\bar{u}c = \gamma(c - v)$ bulunabilir. $u\bar{u} = 1$ olduğundan dolayı;

$$u\bar{u} = \gamma(c + v)\gamma(c - v) = 1 \tag{5.14}$$

yazılabilir. Buradan γ ;

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.15}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

m kütleli bir parçacığın uzay zaman momentumunu ve uc öz hızı;

$$\begin{aligned}
p &= m uc \\
&= \frac{\gamma mc^2}{c} + \mathbf{p} \tag{5.16}
\end{aligned}$$

paravektörü ile bulunur. (5.16)' da ki \mathbf{p} uzaysal momentumu gösterir. $p\bar{p}$ kare uzunluğu parçacığın kütlelerini verir.

$$p\bar{p} = \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \mathbf{p}^2 \quad (5.17)$$

Kütlesi sıfır olan parçacıklar ışık hızıyla hareket ettiklerinden dolayı (5.9)' da \mathbf{u}_0 yerine, $\mathbf{v} = c\hat{\mathbf{v}}$ konulup her iki tarafın diferansiyeli alınır;

$$dx = (1 + \hat{\mathbf{v}})cdt \quad (5.18)$$

elde edilir. Parçacığın enerjisi $E = \gamma mc^2$ olarak alınır. $m = 0$ için $p\bar{p} = 0$ ve uzay zaman momentumu ışık paravektörü olur.

$$\begin{aligned} p &= mcu \\ &= m\gamma \frac{dx}{dt} \\ &= m\gamma \frac{c^2}{c^2} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{E}{c^2} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{E}{c} (1 + \hat{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.3. Lorentz Dönüşümlerinin Paravektörlerle İncelenmesi

p , uzay zaman paravektörünü koruyan ve $p\bar{p}$ kare uzunluğunu invariant bırakan lineer dönüşümler Lorentz dönüşümleri olarak adlandırılır. \mathbf{p}^2 uzaysal kare uzunluğunu invariant bırakan uzaysal dönmeler gibi Lorentz dönüşümleri de uzay zaman dönmeleri olarak adlandırılır. Herhangi bir p uzay zaman paravektörü için $p\bar{p}$ invarianttır. Uzay zaman paravektörleri kare uzunluğuna göre;

$$\begin{cases} p\bar{p} > 0 & p \text{ zaman tipi} \\ p\bar{p} = 0 & p \text{ ışık tipi} \\ p\bar{p} < 0 & p \text{ uzay tipi} \end{cases}$$

sınıflandırılabilir. $p\bar{p}$ kare uzunluğunda, $p = q + r$ ve $\bar{p} = \bar{q} + \bar{r}$ konulursa;

$$\begin{aligned} p\bar{p} &= (q + r)(\bar{q} + \bar{r}) \\ &= q\bar{q} + r\bar{r} + q\bar{r} + r\bar{q} \\ &= q\bar{q} + r\bar{r} + 2\left(\frac{1}{2}(q\bar{r} + \bar{q}r)\right) \\ &= q\bar{q} + r\bar{r} + 2\langle q\bar{r} \rangle_s \end{aligned} \quad (5.20)$$

olarak bulunur. Buradan Lorentz invariantı;

$$\langle q\bar{r} \rangle_S = \langle r\bar{q} \rangle_S = q^\mu r^\nu \eta_{\mu\nu} = q^\mu r_\mu = \langle \bar{q}r \rangle_S \quad (5.21)$$

Rölativitede birçok soru Lorentz dönüşümleri olmadan Lorentz invariantları kullanılarak çözülebilir.

p , uzay zaman paravektörünün Lorentz dönüşümünün lineer formu;

$$p \rightarrow p' = LpL^\dagger \quad (5.22)$$

olarak yazılabilir. Burada p bir nesnenin durağan olduğundaki momentumu olarak alınabilir. Kare uzunluk Lorentz dönüşümü sonrasında da aynı kalır. $p\bar{p} = p'\bar{p}'$ ve $L\bar{L} = 1$ olur. (5.22)' ye sınırlandırılmış Lorentz dönüşümü denir. Bu tür dönüşümler; hız dönüşümlerini, dönmeleri ve onların çarpımlarını içine alır[2]. (5.22)' nin ters dönüşümü;

$$p' \rightarrow p = \bar{L}p'\bar{L}^\dagger \quad (5.23)$$

olarak yazılır. L ' yi eksponansiyel olarak;

$$L = \exp[\mathbf{W}/2], \quad \mathbf{W} = \mathbf{w} - i\boldsymbol{\theta} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} L &= \exp[\mathbf{w} - i\boldsymbol{\theta}/2] \\ &= \exp(\mathbf{w})\exp(-i\boldsymbol{\theta}/2) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $\mathbf{W} = \mathbf{w} - i\boldsymbol{\theta}$ biparavektör olarak adlandırılır. \mathbf{w} ve $\boldsymbol{\theta}$ reel vektörlerdir. Cl_3 ' deki her biparavektör, üç tane reel üç tane sanal vektör bileşeninin toplamı olarak yazılabilir. L operatörü $i\boldsymbol{\theta}$ düzleminde, gözlenen sistemin θ açısı kadar saf dönmeleriyle tanımlanır. Eğer $\theta = 0$ olursa, L operatörü \mathbf{w} hızıyla bir hız dönüşümü olarak tanımlanır. L operatörü reel ise $L = \bar{L}^\dagger$ olur ve Euler formülünü kullanılarak $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, (5.25)' deki hız dönüşümü elde edilir.

$$\begin{aligned} B &= \exp(\mathbf{w}/2) \\ &= \cosh(w/2) + \hat{\mathbf{w}} \sinh(w/2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

L , çift ise $L = \bar{L}^\dagger$ olur ve (5.26)' daki dönmeyi verir.

$$\begin{aligned} R &= \exp(-i\boldsymbol{\theta}/2) \\ &= \cos(\theta/2) - i\hat{\boldsymbol{\theta}} \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$L = BR \quad (5.27)$$

Her Lorentz dönüşümü (5.27)' deki gibi gösterilebilir.

6. MINKOWSKI UZAYINA CLIFFORD CEBRİNİN UYGULANMASI

Minkowski uzayında, multivektörler tanımlanıp bu uzayda Clifford cebri oluşturulabilir. Bütün bivektörlerin kümesi reel sayılar üzerinde lineer uzay oluşturur. $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, Minkowski uzayının bazları olarak alınır; $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ altı vektör, bivektörlerin lineer uzayında baz oluşturur. Bu lineer uzay içindeki her \hat{D} bivektörü kontravaryant $D^{\mu\nu}$ koordinatlarıyla;

$$\hat{D} = \frac{1}{2} D^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \quad (6.1)$$

olarak ve $D_{\mu\nu}$ kovaryant koordinatlarıyla;

$$\hat{D} = \frac{1}{2} D_{\mu\nu} \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \quad (6.2)$$

olarak yazılabilir. Bu koordinatlar antisimetriktir. $D^{\mu\nu} = -D^{\nu\mu}$ Kovaryant ve kontravaryant koordinatlar arasında $D_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} D^{\lambda\kappa}$ ve $D^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} D_{\lambda\kappa}$ bağıntıları vardır.

Denklem (6.1)' i $\{j, k = 1, 2, 3\}$ indislerini kullanarak toplama kuralıyla;

$$\hat{D} = \mathbf{e}_0 \wedge D^{0j} \mathbf{e}_j + \frac{1}{2} D^{jk} \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \quad (6.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan \hat{D} bivektörü, Minkowski uzayından $\hat{D}_1 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ $\hat{D}_2 = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ vektörlerinin toplamı olarak;

$$\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \quad (6.4)$$

şeklinde gösterilebilir. \hat{D} bivektörünün, kendisiyle iç çarpımı;

$$\begin{aligned} \hat{D} \cdot \hat{D} &= [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})] \cdot [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})] \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \\ &\quad + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

olarak yazılır. $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$, olursa (6.5)' deki $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})$ ve $(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ çarpımları sıfır olur. (6.5)' de (2.13) ve (2.17) kullanıldığında \hat{D} bivektörünün, kendisiyle iç çarpımı;

$$\begin{aligned}
\hat{D} \cdot \hat{D} &= \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] + \mathbf{c} \cdot [\mathbf{d} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})] \\
&= \mathbf{a} \cdot [-\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})] + \mathbf{c} \cdot [-\mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d})] \\
&= -\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2 \mathbf{d}^2
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olarak bulunur.

Aynı baz vektörlere sahip olan Minkowski uzayında, trivektörlerin lineer uzayının bazıları; $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ olur. Bu dört boyutlu lineer uzayda herhangi bir trivektör, kontravaryant $T^{\mu\nu\lambda}$ koordinatlarıyla;

$$\hat{T} = \frac{1}{6} T^{\mu\nu\lambda} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\lambda \tag{6.7}$$

olarak ve kovaryant $T_{\mu\nu\lambda}$ koordinatlarıyla;

$$\hat{T} = \frac{1}{6} T_{\mu\nu\lambda} \mathbf{e}^\mu \wedge \mathbf{e}^\nu \wedge \mathbf{e}^\lambda \tag{6.8}$$

olarak yazılabilir. Bu koordinatlar antisimetriktir. $T^{\mu\nu\lambda} = -T_{\mu\nu\lambda}$

Minkowski uzayında dördüncü dereceden multivektör olan kuadrivektör, büyüklüğü dört boyutlu hacim gibi, yönelimi ise dört boyutta öteleme ve sarmal hareketlerin bileşimi olarak düşünülebilen geometrik nesnedir. kuadrivektörlerin kümesi bir boyutlu lineer uzay oluşturur[6].

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad \alpha \in IR \tag{6.9}$$

Dört boyutta, Levi civita tensörü;

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\kappa} = \begin{cases} 0 & \text{herhangi iki indis aynı ise} \\ 1 & (\mu, \nu, \lambda, \kappa) \text{ sıralaması } (0,1,2,3) \text{ ' ün çift permütasyonu ise} \\ -1 & (\mu, \nu, \lambda, \kappa) \text{ sıralaması } (0,1,2,3) \text{ ' ün tek permütasyonu ise} \end{cases}$$

ile verilir. bazlar arasındaki antikomütatiflik;

$$\mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\kappa = \mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\kappa} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \tag{6.10}$$

ile verilir. Üç boyutlu vektör uzayında, bir uzaysal dönme altında hacmin invariant kaldığı gibi, Minkowski uzayında da Öz Lorentz dönüşümleri altında dört boyutlu hacim gibi düşünülebilen kuadrivektörler invariant kalır[6].

$\mathbf{e}^\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = \delta_\mu^\nu$, koşulunu sağlayan \mathbf{e}^ν ' ye \mathbf{e}_μ ' nün çifti denir. \mathbf{e}_μ ve \mathbf{e}_ν bazlarının skaler çarpımı (2.3)' ü kullanarak;

$$2\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (6.11)$$

şeklinde yazılabilir. (6.11)' in çifti;

$$2\mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \mathbf{e}^\mu \mathbf{e}^\nu + \mathbf{e}^\nu \mathbf{e}^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (6.12)$$

yazılabilir.

$\mathbf{b}^2 \neq 0$ ise olmak koşuluyla, $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ volütöründe $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$ yerine konulursa;

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_\parallel \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a}_\perp \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_\perp \wedge \mathbf{b} \quad (6.13)$$

\mathbf{a}_\parallel , \mathbf{b} ile paralel olduğundan $\mathbf{a}_\parallel \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ olur. Böylece $\hat{\mathbf{D}}$ volütörü ortogonal çarpıma ayrılmış olur. \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin her ikisi de sıfır kareye sahipse herhangi iki vektörü $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ olarak yazarsak. Bu iki vektör arasındaki wedge ve skaler çarpım;

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \wedge \mathbf{c} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

olarak bulunur. Bu yolla ortogonal çarpanlar içine $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{c}$ elde edilir. $\hat{\mathbf{B}}$ ve $\hat{\mathbf{D}}$ iki bivektörün Clifford çarpımı;

$$\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{B}} \wedge \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{B}} \wedge \hat{\mathbf{D}} \quad (6.16)$$

olur. $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{D}}$ ve $\hat{\mathbf{B}} \wedge \hat{\mathbf{D}}$ çarpımlarının değişme özelliği vardır. $\hat{\mathbf{B}} \wedge \hat{\mathbf{D}}$ çarpımının ise değişme özelliği yoktur. İki volütörün ortogonal olması için $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0$ ve $\hat{\mathbf{B}} \wedge \hat{\mathbf{D}} = 0$ olması gerekir. Bu eşitlikleri (6.16)' da yerine koyarsak $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{B}} \wedge \hat{\mathbf{D}}$ olur. Bir bivektörün Clifford karesi;

$$\hat{\mathbf{D}}^2 = \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}} \wedge \hat{\mathbf{D}} \quad (6.17)$$

şeklinde bir skalerle bir kuadriektörün toplamından oluşur. (6.17)' nin sağ tarafı Öz Lorentz dönüşümlerinin iki invariantını verir. (6.17)' nin sağ tarafı kontravaryant $D^{\mu\nu}$ koordinatlarıyla;

$$\begin{aligned}\hat{D} \cdot \hat{D} &= \left(\frac{1}{2} D^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \right) \cdot \left(\frac{1}{2} D^{\lambda\kappa} \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\kappa \right) \\ &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} \mathbf{e}_\mu \cdot (\mathbf{e}_\nu \cdot (\mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\kappa)) \\ &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} \mathbf{e}_\mu \cdot ((\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\lambda) \mathbf{e}_\kappa - (\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\kappa) \mathbf{e}_\lambda)\end{aligned}\quad (6.18)$$

(6.18)' de $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}$ kullanarak;

$$\begin{aligned}\hat{D} \cdot \hat{D} &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} \mathbf{e}_\mu \cdot (g_{\nu\lambda} \mathbf{e}_\kappa - g_{\nu\kappa} \mathbf{e}_\lambda) \\ &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} (g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}) \\ &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} (g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} D^{\lambda\kappa} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} D^{\lambda\kappa})\end{aligned}\quad (6.19)$$

bulunur. (6.19)' da $D_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} D^{\lambda\kappa}$ eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}\hat{D} \cdot \hat{D} &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} (D_{\nu\mu} - D_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} D^{\mu\nu} D_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (6.20)$$

ilk Lorentz invariantı bulunur. İkinci Lorentz invariantı;

$$\begin{aligned}\hat{D} \wedge \hat{D} &= \left(\frac{1}{2} D^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \right) \wedge \left(\frac{1}{2} D^{\lambda\kappa} \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\kappa \right) \\ &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} \mathbf{e}_\mu \wedge \mathbf{e}_\nu \wedge \mathbf{e}_\lambda \wedge \mathbf{e}_\kappa\end{aligned}\quad (6.21)$$

olarak yazılabilir. (6.10) kullanılıp;

$$\begin{aligned}\hat{D} \wedge \hat{D} &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{1}{4} D^{\mu\nu} D^{\lambda\kappa} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} Z\end{aligned}\quad (6.22)$$

$Z = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ eşitliğini koyarak, yazabiliriz.

$\hat{D}^2 = 0$, eşitliği göz önüne alınırsa (6.17)' den $\hat{D} \cdot \hat{D} = 0$ ve $\hat{D} \wedge \hat{D} = 0$ olur. $\hat{D} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ olduğunda, \hat{D}^2 ;

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})) \\
&= \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{b}^2\mathbf{a}) \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 = 0
\end{aligned} \tag{6.23}$$

olur. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ olarak seçildiğinde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ve $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 = 0$ olur. Burada $\mathbf{b}^2 = 0$ veya $\mathbf{a}^2 = 0$ olduğundan dolayı, bu vektörlerden biri ışık tipi vektör olur. $\hat{\mathbf{D}}^2 = 0$ özelliği olan bir $\hat{\mathbf{D}}$ bivektörü ışık konisine teğettir. Buna ışık tipi volütör denir.

$\hat{\mathbf{D}}^2 > 0$, olduğunda $\hat{\mathbf{D}} \wedge \hat{\mathbf{D}} = 0$ ve $\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{D}} > 0$ olur. Bu şartları sağlayan $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ bivektörü alındığında $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ için $-\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 > 0$ olur ve \mathbf{a}^2 ve \mathbf{b}^2 zıt işaretlidir. Vektörlerden biri zaman tipi vektördür ve $\hat{\mathbf{D}}$ ' ye zaman tipi volütör denir.

$\hat{\mathbf{D}}^2 < 0$, olduğunda $\hat{\mathbf{D}} \wedge \hat{\mathbf{D}} = 0$ ve $\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{D}} < 0$ olur. Bu şartları sağlayan $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ bivektörü alındığında $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ için $-\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 < 0$ olur ve \mathbf{a}^2 ve \mathbf{b}^2 aynı işaretlidir. Vektörlerin ikisi de uzay tipi vektördür ve $\hat{\mathbf{D}}$ ' ye uzay tipi volütör denir.

\mathbf{u} vektörünü $\hat{\mathbf{B}}^2 \neq 0$ olmak koşuluyla;

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{u}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^{-1} \\
&= (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}} + \mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} \\
&= (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} + (\mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

olarak yazabiliriz.

Denklem (6.24)' ün sağ tarafındaki ilk terim $\hat{\mathbf{B}}$ volütörü ile antikomütatif ikincisi ile ise komütatiftir.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} &= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u})\hat{\mathbf{B}}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^{-1} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}^2\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}}^{-1}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$\hat{\mathbf{B}}^2$, skaler olduğundan \mathbf{u} ile yer değiştirebilir. Böylece (6.25);

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} &= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}} \\
&= -((\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1})\mathbf{B} \\
&= -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{6.26}$$

şeklinde yazılabilir. (6.24)' ün sağ tarafının ikinci terimi;

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} &= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u})\hat{\mathbf{B}}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}^2\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\hat{\mathbf{B}} \\
&= \mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

olur. Buradan \mathbf{u} vektörünün $\hat{\mathbf{B}}$ volütörüne paralel bileşeni;

$$\mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} \tag{6.28}$$

olarak, dik bileşeni ise;

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} \wedge \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}^{-1} \tag{6.29}$$

olarak alınabilir.

Uzay zamanda bir $\hat{\mathbf{F}}$ bivektörünü, iki ortogonal volütörün toplamı olarak ayırıp ayıramayacağımızı bulalım (6.3)' ü kullanarak $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{e}_0\mathbf{E} + \hat{\mathbf{B}}$ yazabiliriz. \mathbf{e}_0 , zaman tipi birim baz vektördür. \mathbf{E} , uzay tipi vektör, $\hat{\mathbf{B}}$, uzay tipi volütördür.

$\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{E}$ ve $\mathbf{e}_0 \perp \hat{\mathbf{B}}$ bağıntılarını kullanarak, $\hat{\mathbf{F}}$ bivektörünün karesi;

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}^2 &= (\mathbf{e}_0\mathbf{E} + \hat{\mathbf{B}})(\mathbf{e}_0\mathbf{E} + \hat{\mathbf{B}}) \\
&= \mathbf{e}_0\mathbf{E}\mathbf{e}_0\mathbf{E} + \mathbf{e}_0\mathbf{E}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{e}_0\mathbf{E} + \hat{\mathbf{B}}^2 \\
&= -\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0\mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{e}_0\mathbf{E}\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{e}_0\hat{\mathbf{B}}\mathbf{E} + \hat{\mathbf{B}}^2 \\
&= -\mathbf{E}^2 + \mathbf{e}_0(\mathbf{E}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{E}) + \hat{\mathbf{B}}^2
\end{aligned} \tag{6.30}$$

olarak yazılabilir. \mathbf{E} ve $\hat{\mathbf{B}}$, uzay tipi olduğundan $\mathbf{E}^2 = -|\mathbf{E}|^2$, $\hat{\mathbf{B}}^2 = -|\hat{\mathbf{B}}|^2$ eşitliklerini (6.30)' da kullanarak;

$$\hat{\mathbf{F}}^2 = |\mathbf{E}|^2 - |\hat{\mathbf{B}}|^2 + 2\mathbf{e}_0(\mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{B}}) \tag{6.31}$$

yazabiliriz. $\alpha = |\mathbf{E}|^2 - |\hat{\mathbf{B}}|^2$, $\beta\mathbf{X} = \mathbf{e}_0(\mathbf{E} \wedge \hat{\mathbf{B}})$ eşitlikleri (6.31)' de yerine konularak;

$$\hat{\mathbf{F}}^2 = \alpha + 2\beta\mathbf{X} \tag{6.32}$$

yazılabilir. α ve β , skalerleri Öz Lorentz dönüşümleri altında invarianttır. $\hat{\mathbf{F}}$ volütörü, $\hat{\mathbf{F}}_1$ ve $\hat{\mathbf{F}}_2$ ortogonal volütörlerinin toplamı olarak $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}_1 + \hat{\mathbf{F}}_2$ yazıldığında $\hat{\mathbf{F}}^2$;

$$\begin{aligned}\hat{F}^2 &= (\hat{F}_1 + \hat{F}_2)(\hat{F}_1 + \hat{F}_2) \\ &= \hat{F}_1^2 + \hat{F}_1\hat{F}_2 + \hat{F}_2\hat{F}_1 + \hat{F}_2^2\end{aligned}\quad (6.33)$$

olur. $\hat{F}_1 \perp \hat{F}_2$ durumunda $\hat{F}_1\hat{F}_2 = \hat{F}_2\hat{F}_1 = \gamma X$ $\gamma \in IR$ olur. ve $\lambda_1, \lambda_2 \in IR$ olduğunda $\hat{F}_1^2 = \lambda_1$, $\hat{F}_2^2 = \lambda_2$ eşitlikleri (6.33)' de yazılarak, (6.34) elde edilir.

$$\hat{F}^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\gamma X \quad (6.34)$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$, $\gamma = \beta$, $\lambda_1\lambda_2 = \hat{F}_1^2\hat{F}_2^2 = (F_1F_2)^2 = (\gamma X)^2 = -\gamma^2$ eşitlikleri kullanılarak iki denklem sistemini elde edilir. $\lambda_2 = \alpha - \lambda_1$, eşitliğini $\lambda_1\lambda_2 = -\beta^2$ ' de yerine koyarak;

$$\begin{aligned}\lambda_1(\alpha - \lambda_1) &= -\beta^2 \\ \lambda_1^2 - \alpha\lambda_1 - \beta^2 &= 0\end{aligned}\quad (6.35)$$

elde edilir. Aynı işlem $\lambda_1 = \alpha - \lambda_2$ için de yapılır. Böylece λ_2 için de aynı şekilde bir denklem;

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta^2 = 0 \quad (6.36)$$

şeklinde bulunur. Burada λ_1 ve λ_2 ikinci dereceden bir denklemin kökleri olur. Bu denklemin kökleri;

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}\end{aligned}\quad (6.37)$$

olarak bulunur. $\Delta = \alpha^2 + 4\beta^2$; denklemin diskriminantıdır.

Böylece λ_1 ve λ_2 , Öz Lorentz invariantları α ve β , skalerlerinden oluşturulmuş olur.

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\lambda_1 - \beta X)\hat{F} \\ \hat{F}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\beta X - \lambda_2)\hat{F}\end{aligned}\quad (6.38)$$

$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2$, $\hat{F}_1^2 = \lambda_1$, $\hat{F}_2^2 = \lambda_2$ şartlarını sağlarlar \hat{F} ' in önündeki katsayılar invarianttır. Böylece \hat{F} ' in ortogonal volütörlere ayrılması, Öz Lorentz dönüşümleri altında invarianttır.

$\alpha = \beta = 0$ olduğunda $\Delta = 0$ olur ve kökler birbirine eşit olur. $\lambda_1 = \lambda_2$ $\beta = 0$ eşitliği $\hat{F} \wedge \hat{F} = 0$ olduğunu gösterir. $\hat{F}_1 = \hat{F}, \hat{F}_2 = 0$ olur. $\alpha > 0, \alpha = 0, \alpha < 0$ ve $\beta \neq 0$ olan bütün olasılıkları dikkatlice inceledikten sonra $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ olduğunu $\hat{F}_1^2 = \lambda_1, \hat{F}_2^2 = \lambda_2$ \hat{F}_1 ' in zaman tipi, \hat{F}_2 ' in ise uzay tipi olduğunu anlarız.

6.1. Lorentz Dönüşümlerinin Cliffordların Çarpımı Olarak Gösterimi

Lorentz dönüşümlerini clifforların çarpımı olarak veren bir formül bulalım. $\hat{\alpha}$ volütöryel açısı ve $e^{\hat{\alpha}/2}$ clifforu dönme için önemlidir. Lorentz dönüşümü, $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ düzleminde bir hiperbolik dönmedir. ϑ hiperbolik açısını kullanarak $\theta = \vartheta\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 = \vartheta\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ volütöryel süratini oluştururuz.

$\theta^2 = \vartheta^2 \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 = -\vartheta^2\mathbf{e}_0^2\mathbf{e}_1^2 = \vartheta^2$ eşitliğinde $\vartheta^2 > 0$ olduğu için $\theta^2 > 0$ olur. Bu nedenle θ , zaman tipi volütördür. θ ' nın bütün çift kuvvetleri $\theta^{2n} = \vartheta^{2n}$ skalerdir. Tek kuvvetleri ise $\theta^{2n+1} = \vartheta^{2n+1}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ volütördür.

$$e^\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} = \cosh \vartheta + \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 \sinh \vartheta \quad (6.39)$$

$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$, Minkowski uzayında 4-vektör olsun $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = U^{-1} \mathbf{x} U$ dönüşümü için

$$U = e^{\frac{\theta}{2}} = \cosh \frac{\vartheta}{2} - \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (6.40)$$

$$U^{-1} = U^\dagger = e^{\frac{\theta}{2}} = \cosh \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 \sinh \frac{\vartheta}{2} \quad (6.41)$$

$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ volütörü, \mathbf{e}_2 ve \mathbf{e}_3 vektörleriyle değişme özelliği vardır. \mathbf{e}_0 ve \mathbf{e}_1 ile değişme özelliği yoktur.

$$\begin{aligned} U^{-1}\mathbf{e}_0U &= \mathbf{e}_0U^2 \\ U^{-1}\mathbf{e}_2U &= \mathbf{e}_2 \\ U^{-1}\mathbf{e}_3U &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.42)$$

ve

$$U^{-1} \mathbf{x} U = (x^0 \mathbf{e}_0 + x^1 \mathbf{e}_1)U^2 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \quad (6.43)$$

$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ düzlemine ortogonal olan \mathbf{x} in bileşeni invaryanttır. Paralel bileşeni

$$\begin{aligned} & (x^0\mathbf{e}_0 + x^1\mathbf{e}_1)(\cosh\vartheta - \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 \sinh\vartheta) \\ &= (x^0 \cosh\vartheta - x^1 \sinh\vartheta)\mathbf{e}_0 + (-x^0 \sinh\vartheta + x^1 \cosh\vartheta)\mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (6.44)$$

olur. böylece koordinatlar;

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \cosh\vartheta - x^1 \sinh\vartheta \\ x'^1 = -x^0 \sinh\vartheta + x^1 \cosh\vartheta \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (6.45)$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = e^{\frac{\theta}{2}} \mathbf{x} e^{-\frac{\theta}{2}} \quad (6.46)$$

$\theta = \vartheta \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$, $\gamma = \cosh\vartheta$, $\beta\gamma = \sinh\vartheta$ eşitliklerini (6.39)' da kullanarak e^θ ;

$$e^\theta = \cosh\vartheta + \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 \sinh\vartheta = \gamma(1 + \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\beta) \quad (6.47)$$

yazılabilir. İki referans çerçevesi arasında göreceli hızın $\hat{W} = c\beta\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$ volütörünü tanımlarsak;

$$e^\theta = \gamma \left(1 + \frac{1}{c} \hat{W} \right) \quad (6.48)$$

Bu ifadeyi keyfi yönlerde dönüşümler içine genellemek kolaydır.

$\hat{W} = c\beta\mathbf{e}_0 n$ yerine konulursa n , \mathbf{e}_0 herhangi birim uzay vektörüdür.

$$e^{\frac{\theta}{2}} = \frac{c + \gamma c + \gamma W}{c\sqrt{2(1 + \gamma)}} \quad (6.49)$$

(6.48) şöyle yazılabilir.

$$e^\theta = \mathbf{e}'_0 \mathbf{e}_0 \quad (6.50)$$

\hat{W} , volütörünün \mathbf{e}_0 ' ile değişme özelliği yoktur. Bu yüzden $\mathbf{e}'_0 e^{-\frac{\theta}{2}} = e^{\frac{\theta}{2}} \mathbf{e}_0$ ve (6.46)' dan;

$$\mathbf{e}'_0 = e^{\frac{\theta}{2}} \mathbf{e}_0 e^{-\frac{\theta}{2}} = e^\theta \mathbf{e}_0 \quad (6.51)$$

her iki tarafı \mathbf{e}_0 ile sağdan çarptıktan sonra, (6.50)' yi elde ederiz. Bu yolla (6.50) cliffor (6.39)' u bulmamıza izin verir.

Uzay dönmeleri (6.46) ile gösterilebilir. Φ , uzay volütörünü θ ' nın yerine koymak yeterlidir. Bu yolla yeni bir çeşit Lorentz dönüşümü elde edilir bir ışık

volütörü $\Psi = \mathbf{k}\mathbf{n}$ (\mathbf{k} , \mathbf{n} vektördür, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{k}^2 = 0$, $\mathbf{n}^2 = 1$) yerine konur. $\Psi^2 = 0$ olduğundan dolayı, sadece iki terim seride bulunur;

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Psi}{2}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Psi}{2}\right)^m \\ &= 1 + \frac{\Psi}{2} \end{aligned} \quad (6.52)$$

bu durumda, $\mathbf{k}\Psi = -\Psi\mathbf{k} = 0$,

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Psi}{2}} \mathbf{k} e^{-\frac{\Psi}{2}} &= \left(1 + \frac{\Psi}{2}\right) \mathbf{k} \left(1 - \frac{\Psi}{2}\right) \\ &= \mathbf{k} + \frac{\Psi}{2} \mathbf{k} - \mathbf{k} \frac{\Psi}{2} - \frac{\Psi}{2} \mathbf{k} \frac{\Psi}{2} \\ &= \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.53)$$

bu özel Lorentz dönüşümü için invaryant olan bir ışık vektörü bulunur. Bir başka invaryant vektör, \mathbf{k} ve \mathbf{n} ' nin her ikisine ortogonal olan bir uzay vektörüdür.

θ , bir zaman vektörü, Φ ise bir uzay vektörüdür. $\hat{\mathbf{F}} = \theta + \Phi \theta \perp \Phi$

$$e^{\frac{\mathbf{F}}{2}} = e^{\frac{\theta + \Phi}{2}} = e^{\frac{\theta}{2}} e^{\frac{\Phi}{2}} \quad (6.54)$$

ve dönüşüm (6.46) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} x \rightarrow x' &= e^{\frac{\theta}{2}} \left(e^{\frac{\Phi}{2}} x e^{-\frac{\Phi}{2}} \right) e^{-\frac{\theta}{2}} \\ &= e^{\frac{\Phi}{2}} \left(e^{\frac{\theta}{2}} x e^{-\frac{\theta}{2}} \right) e^{-\frac{\Phi}{2}} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Uzay zaman dönmesi ve hız dönüşümünün bileşimi olarak yazılabilir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle, Clifford cebirlerinin üç boyutlu uzaydaki dönme ve yansıma operasyonlarında nasıl işlem kolaylıkları getirdiği gösterilmiştir. Bu cebirlerin baz elemanlarının matris temsilleri verilmiştir. Minkowski uzayı ve uzay zaman diyagramları incelenmiştir. Cl_3 ' ün paravektör uzayının metriği tanımlanmış, bu metriğin Minkowski uzayının metriğiyle aynı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Minkowski uzayında multivektörler tanımlanmış ve bu uzayda Clifford cebri oluşturulmuştur. \hat{F} volütörünün $\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2$ şeklinde ortogonal volütörlere ayrılmasının, öz Lorentz dönüşümleri altında invariant kaldığı gösterilmiştir. Minkowski uzayındaki ışık, uzay ve zaman tipi vektörlerin Clifford cebirindeki volütör karşılıkları oluşturulmuştur. Sonunda Lorentz dönüşümü farklı bir formda, uzay zaman dönmesi ve hız dönüşümünün bileşimi olarak yazılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Girard P., *Einstein's Equations and Clifford Algebra*, Advances in Applied Clifford Algebras, **9**(2), 225-230 (1999)
- [2] Baylis W.E., *Electrodynamics A Modern Geometric Approach*, Birkhäuser Boston, USA (1999).
- [3] Soydaş M., *Bikaternionların Modern Fiziğe Uygulanması*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (2003)
- [4] Baylis W.E., *Clifford Algebras with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser Boston, USA (1996).
- [5] William M. ve Pezzaglia JR., *Clifford Algebra Derivation of the Characteristic Hypersurfaces of Maxwell's Equations*, arXiv:hep-th/9211062 **1**(13), Nov (1992).
- [6] Jancewicz B., *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, (1988).
- [7] Coll B. ve San J.F., *Composition of Lorentz Transformations in Terms of Their Generators*, Gen. Relativ. Gravit., **34**, (2002)
- [8] Snygg J., *Clifford Algebra A Computational Tool for Physicsts*, Oxford University Press, Oxford (1997).
- [9] Balcıoğlu M., *Dinamiğin Clifford Cebirleriyle İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, (2004)
- [10] Baylis W.E. ve Yao Y., *Relativistic Dynamics of Charges in Electromagnetic Fields: An Eigenspinor Approach*, The American Physical Society, **60**(2), 786-787 (1999)
- [11] Cabrera R., *Special Relativity in the Three Dimensional Euclidean Clifford Algebra The Algebraic Physical Space*, <http://socr.uwindsor.ca/ucabrer7/srelativity> , (2005)
- [12] Nilsson M., *Geometric Algebra with Conzilla Building a Conceptual Web of Mathematics*, Master Thesis Report in Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, (2002)
- [13] Goldstein H., *Klasik Mekanik*, (Çev. V. Cinemre), Çağlayan Basımevi, İstanbul, Türkiye (1974)

- [14] Longair M.S., *Theoretical Concepts in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1984).
- [15] Rutherford D.E., *New Transformation Equations and the Electric Field Four-vector*, <http://www.softcom.net/users/der555/newtransform>. (2003)
- [16] Resnick R., *Introduction to Special Relativity*, John Wiley Inc, New York, USA, (1968)
- [17] Griffiths D.J., *Elektromagnetik Teori*, (Çev. B. Karaoğlu), Güven İstanbul (1996).
- [18] Sartori L., *Understanding Relativity A Simplified Approach to Einstein' s Theories*, University of California Press, (1996)
- [19] Agrawal M., *Linear Algebra, Group Theory, Lie Algebra, Clifford Algebra, Minkowski and Hilbert Spaces, Topology etc.*, <http://www.stanford.edu/~mukul/tutorials/math>. (2002)
- [20] Wieting T., *Lorentz Transformations*, <http://www.reed.edu/~wieting/essays/Lorentz>. (2000)