

**CLIFFORD CEBİRİNİN
FİZİKSEL UYGULAMALARI**

Neslihan ŞAHİN
Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı
Ağustos-2006

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Neslihan ŞAHİN'nin "**Clifford Cebirinin Fiziksel Uygulamaları**" başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 31.07.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. KUDRET ÖZDAŞ
Üye	: Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK
Üye	: Yard. Doç. Dr. MURAT TANIŞLI

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CLIFFORD CEBİRİNİN FİZİKSEL UYGULAMALARI

Neslihan ŞAHİN

**Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
2006, 67 sayfa**

Bu çalışmada ilk olarak teorik fizikte yaygın olarak kullanılan Clifford cebrinin tanımı ve özellikleri ele alınmıştır. Pozitif tanımlı, kuadratik forma sahip bir boyutlu vektör uzayın üzerinde Clifford cebri oluşturulan hiperbolik sayılar verilmiştir. Ardından, bikompleks sayıların özellikleri incelenmiştir. Daha sonra dört boyutlu, dört reel bileşene sahip kuaterniyon cebri ve kuaterniyonlardaki dört reel bileşenin kompleks sayılarla yer değiştirmesi sonucunda elde edilen bikuaterniyonlar ele alınmıştır. Hiperkompleks sayılarda sekiz baz elemanın bir lineer kombinasyonu biçiminde yazılabilen oktonyonlar ve bunların geometriksel gösterimleri verilmiştir. Bu sayı sistemleri kullanılarak Schrödinger, Dirac ve Lorentz eşitliklerinin tekrar yazıldığı bazı çalışmalar sunulmuştur. Ayrıca fizikte yaygın olarak kullanılan açısal momentum ve olasılık akımı ifadelerine de yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Clifford Cebri, Hiperbolik Cebir, Bikompleks Sayılar,
Kuaterniyon Cebri, Oktonyon Cebri

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE PHYSICAL APPLICATIONS OF CLIFFORD ALGEBRA

Neslihan ŞAHİN

**Anadolu University
Graduate School of Sciences
Physics Program**

**Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
2006, 67 pages**

In this study, the definition and characteristics of Clifford algebra that are widely used in the theoretical physics are firstly discussed. Hyperbolic numbers forming a clifford algebra on a one-dimensional vector space with a positive definite quadratic form are given. Next, the characteristics of the bicomplex numbers are examined. After, four dimensional quaternion algebra which has four real components and biquaternion which is attained by changing places of four real components of quaternion with complex numbers are discussed. Octonions which can be written in the form of a linear combination of eight basis elements in the hypercomplex numbers and these geometrical representation are presented. Using these number systems, some studies in which Shrödinger, Dirac and Lorentz equations are rewritten are presented. In addition, the expressions of angular momentum and probability current which are widely used in the physics are given.

Keywords: Clifford Algebras, Hyperbolic Algebra, Bicomplex Numbers, Quaternion Algebra, Octonion Algebra

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın gerçekleőmesinde bilimsel katkılarını gördüğüm ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ'a en içten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tez yazım aşamasında her bakımdan çok yardımda bulunan değerli hocam Tülay TOLAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca beni devamlı destekleyen, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan aileme sonsuz őükranlarımı sunarım.

Neslihan şAHİN

Ağustos,2006

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. CLIFFORD CEBRİ	3
2.1. \mathbb{R}^2 'nin Cl_2 Clifford Cebri.....	3
2.1.1. Vektörlerin Clifford Çarpımı.....	4
2.1.2. Dış Çarpım.....	5
2.1.3. Cl_2 'nin $R(2)$ Matris Cebri Olarak İfade Edilmesi.....	7
2.2. \mathbb{R}^3 Öklid Uzayının Clifford Cebri.....	8
2.2.1. \mathbb{R}^3 'de Cl_3 'ün Matris Gösterimi.....	9
3. HİPERBOLİK CEBİR VE KUANTUM	
MEKANİĞİNE UYGULAMALARI	10
3.1. Hiperbolik Vektör Uzayı.....	10
3.2. Clifford Cebirsel Geometri.....	10
3.2.1. Clifford Cebir Spinoru.....	11
3.2.2. Dirac Dalga Eşitlikleri.....	12
3.3. Dört Boyutlu Lorentz Dönüşümü.....	17
3.4. Hiperbolik Fourier Dönüşümü.....	20
3.4.1. Mekaniksel Nicelikler.....	22
3.4.2. Standart Schrödinger Eşitliği.....	23
3.4.3. Hiperbolik Schrödinger Eşitliği.....	24

4. BİKOMPLEKS SAYILAR VE KUANTUM MEKANİĞİNE UYGULAMALARI	26
4.1. Bikompleks Sayıların Eşleniği.....	27
4.1.1. Bikompleks Sayıların i 'ye Göre Eşleniği.....	27
4.1.2. Bikompleks Sayıların j 'ye Göre Eşleniği.....	28
4.1.3. Bikompleks Sayıların Üçüncü Çeşit Eşleniği.....	28
4.2. İdempotent Bazlar.....	29
4.3. Exponansiyel Fonksiyon.....	29
4.4. Bikompleks Schrödinger Eşitliği.....	30
4.5. Süreklilik Denklemleri.....	31
4.5.1. Bikompleks Süreklilik Denklemleri.. ..	32
4.5.2. Bikompleks Schrödinger Denklemlerinin Kesikli Simetrisi.....	34
5. KUATERNİYON CEBRİ.....	37
5.1. Kuaterniyonların Tanımlanması.....	37
5.1.1. Kuaterniyonlarda Toplama İşlemi.....	37
5.1.2. Çarpımın Tanımlanması.....	38
5.1.3. Kuaterniyonların Çarpımının Matris Cebriyle Gösterimi.....	38
5.1.4. Kuaterniyonlarda Eşlenik İşlemi.....	39
5.1.5. Kuaterniyonlarda Bölme İşlemi.....	40
5.2. Bikuaterniyonların Tanımı.....	41
5.2.1. Bikuaterniyonlarda Matematiksel İşlemler.....	42
5.2.2. Bikuaterniyonik Açısız Momentum.....	44
6. OKTONYON CEBRİ VE UYGULAMALARI.....	46
6.1. Oktonyonların Tanımlanması.....	46
6.1.1. Oktonyonların Koordinat Gösterimi.....	46
6.1.2. Oktonyonların Zorn Gösterimi.....	46
6.1.3. Oktonyonların Kuaterniyonik Gösterimi.....	47
6.2. Skaler Birim Eleman.....	48
6.3. Oktonyonlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi.....	48
6.4. Oktonyonlarda Çarpma İşlemi.....	49
6.4.1. Cayley-Dickson Yöntemi.....	49

6.4.2. Modül 7 Yöntemi.....	50
6.5. İki Vektör Oktonyonun Skaler Çarpımı.....	51
6.6. İki Vektör Oktonyonun Vektörel Çarpımı.....	51
6.7. Oktonyonların Eşleniği.....	52
6.8. Oktonyonların Normu.....	52
6.9. Bir Oktonyonun Tersini.....	52
6.10. Split Oktonyon Cebri.....	53
6.11. Oktonyonik Fiziksel Sinyaller.....	55
6.12. Oktonyonik Geometri.....	57
7. SONUÇ.....	63
KAYNAKLAR.....	65

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. e_{12} bivektörünün gösterimi.....	5
2.2. Paralelkenarın kenarlarının geometrik çarpımı.....	6
2.3. Bivektörlerin büyüklüğü, paralel kenarın alanına eşittir	6
6.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley-Dickson yöntemine göre çarpım diyagramı.....	49
6.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7 yöntemine göre çarpım diyagramı.....	51

ÇİZELGELER DİZİNİ

2.1. Cl_2 Clifford cebrinin çarpım tablosu.....	4
2.2. Cl_3 ve Pauli cebri arasındaki izomorfluk.....	9
4.1. Bikompleks sayılarda eşleniklerin birleşimi	29
6.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley-Dickson yöntemine göre çarpımı.....	50
6.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7 yöntemine göre çarpımı.....	50
6.3. Split oktonyonların baz elemanlarının çarpımı.....	54

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{R}^2	: 2-boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{R}^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
Cl_2	: 2-boyutlu Öklid uzayının Clifford cebri
Cl_3	: 3-boyutlu Öklid uzayının Clifford cebri
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar cebri
\mathbb{D}	: Hiperbolik sayılar cebri
\mathbb{H}	: Kuaterniyonlar cebri
$\mathbb{H}(\mathbb{C})$: Kuaterniyonlar cebri
\mathbb{O}	: Oktonyonlar cebri
\mathbb{T}	: Bikompleks sayılar cebri
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}, \vec{p}, \vec{u} \dots$: Vektör
\hat{u}	: Bivektör
Q_0, Q_1, \dots ve P_0, P_1, \dots	: Reel sayılar
x, y, \dots ve a, b, c, d, \dots	
a_1, a_2, \dots ve a_{11}, a_{12}, \dots	
$\alpha, \beta, \delta, \varphi$	
P, X	: Hiperbolik kompleks sayı
$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$: Kompleks sayı
$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$: Bikompleks sayı
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$: Kuaterniyon
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$: Bikuaterniyon
$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$: Oktonyon
$\psi, U_{\mu\nu}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \sigma_i, \phi$: Matris
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Pauli matrisleri
\mathbf{I}	: Birim matris
$\mathbf{P}_S, \mathbf{Q}_S, \mathbf{R}_S$: Kuaterniyonun skaler kısmı
$\mathbf{P}_V, \mathbf{Q}_V, \mathbf{R}_V$: Kuaterniyonun vektörel kısmı

$\mathbf{P}_S, \mathbf{Q}_S, \mathbf{R}_S$: Bikuaterniyonun skaler kısmı
$\mathbf{P}_V, \mathbf{Q}_V, \mathbf{R}_V$: Bikuaterniyonun vektörel kısmı
$\mathcal{P}_S, \mathcal{Q}_S, \mathcal{R}_S$: Oktonyonun skaler kısmı
$\mathcal{P}_V, \mathcal{Q}_V, \mathcal{R}_V$: Oktonyonun vektörel kısmı
\hat{p}	: Üç boyutlu momentum operatörü
\hat{P}	: Dört boyutlu momentum operatörü
\hat{E}	: Enerji operatörü
\mathbf{r}	: Bikuaterniyonik yer vektörü
\mathbf{p}	: Bikuaterniyonik momentum vektörü
\mathbf{L}	: Bikuaterniyonik açısal momentum vektörü
\mathbf{r}_S	: Bikuaterniyonik yer vektörünün skaler kısmı
\mathbf{r}_V	: Bikuaterniyonik yer vektörünün vektörel kısmı
\mathbf{r}_S	: Bikuaterniyonik momentumun skaler kısmı
\mathbf{r}_V	: Bikuaterniyonik momentumun vektörel kısmı
L_x, L_y, L_z	: Açısal momentumun bileşenleri
\mathbf{e}_i	: Baz eleman
\mathbf{u}_i	: Split oktonyonların baz elemanları
$\overline{\mathbf{u}}_i$: Split oktonyonda baz elemanını eşleniği
\mathbf{u}_i^*	: Split oktonyonda baz elemanın kompleks eşleniği
i	: İmajiner birim
j	: Hiperbolik imajiner birim
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: Bikompleks sayılarda baz elemanlar
$\mathbf{j}_n, \mathbf{J}_n, \mathbf{I}$: Split oktonyonların geometrik gösterimindeki baz elemanları
∇	: 3-boyutlu gradyent operatörü
\square	: 4-boyutlu gradyent operatörü
\square^*	: 4-boyutlu gradyent operatörünün eşleniği
\square^\dagger	: 4-boyutlu gradyent operatörünün hermityen eşleniği

$\bar{X}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{q}, \bar{Q}$: Eşlenik
\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*	: Kompleks eşlenik
$\sigma_i^\dagger, \phi^\dagger$: Hermityen eşlenik
$\dagger_1, \dagger_2, \dagger_3$: Bikomplek sayılarda sırasıyla 1., 2., ve 3. çeşit eşlenik
ψ	: Hiperbolik dalga fonksiyonu
Ψ	: Kompleks dalga fonksiyonu
Ψ	: Bikompleks dalga fonksiyonu
J	: Hiperbolik olasılık akısı
\mathcal{J}	: Bikompleks olasılık akısı
ρ	: Olasılık yoğunluğu
E	: Enerji
c	: Işık hızı
\hbar	: Planck sabiti/ 2π
m_0	: Parçacığın durgun kütlesi
δ_{ik}	: Kronecker delta
ϵ_{ijk}	: Levi-Civita semboli

1. GİRİŞ

William Hamilton 1843’de kuaterniyonları keşfetti. Kuaterniyonların keşfi Hamilton’nun kompleks sayılardaki çalışmalarıyla ilişkilidir. Sonuç olarak da kuaterniyonlar kompleks sayıların bir genelleştirilmesi olarak ortaya çıktı. Hamilton’nun kuaterniyonları keşfinden sonra J. T. Graves 1843’de oktonyon cebri bulmuştur. Ancak Graves tarafından makale yayınlanmamıştır. Oktonyonlar 1845’de Cayley tarafından tekrar keşfedildi ve oktonyonlar, Cayley sayıları olarak da bilinmektedir. Clifford cebri ilk olarak 1878’de İngiliz matematikçi W. K. Clifford tarafından bulundu ve “American Journal of Mathematics Pure and Applied” adlı dergide “Application of Grassmann’s Extensive Algebra” başlıklı makalesinde yayınlandı. Clifford; Geometrik cebirleri, Grassmann cebirlerinin, kompleks sayıların ve kuaterniyonların bir genelleştirmesi olarak tanımlamıştır. W. K. Clifford 1882’de spinlerin toplamını temsil etmek için hiperbolik sayıları kullanmıştır. Corrado Segre 1892’de bu cebirler ile yaptığı çalışmada bikompleks sayılar adı verilen cebirleri ele almıştır.

Clifford cebri kullanılarak yapılan başlıca çalışmalar şunlardır: Huck, dört bileşenli Dirac spinorunun, iki bileşenli hiperbolik spinor’a ve Lorentz grubunun hiperbolik birim grubuna eşdeğer olduğunu araştırmıştır [1]. Kocik, hiperbolik sayılar üzerinden relativistik olmayan kuantum mekaniğinin Born formülü ile olasılık yorumuna yer vermiştir [2]. Rochon ve Tremblay tarafından bikompleks dalga fonksiyonları için bikompleks Born formülünü incelenmiştir [3]. 20. yüzyılın ortalarına kadar kuaterniyonların pratik kullanımı diğer metotlar ile kıyaslandığında çok azdı. Ancak bu durum robotlar, animasyon ve bilgisayar teknolojisindeki ilerleme ile hızla değişti. Bugün kuaterniyonlar özellikle

bilgisayar tasarımı, bilgisayar grafiği, animasyon alanında kullanılır. Kuark modellerini ve renk gauge teoremini split oktonyonlar cinsinden formüle etmek için Günaydın ve Gürsey tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Buoncristiani, Yang-Mills alan eşitliğini basit formda yazmak için oktonyonları kullanmıştır [4].

\mathbb{C} kompleks cisim ve \mathbb{D} hiperbolik halkası, iki boyutlu Clifford cebridir:

$$\mathbb{C} = Cl_{0,1} \text{ ve } \mathbb{D} = Cl_{1,0}$$

Bikompleks sayılar ve hiperbolik sayılar kompleks sayıların bir genelleştirilmesi olarak tanımlanırsa bikompleks sayılar, hiperbolik sayılara izomorftur. Kuaterniyonlar, \mathbb{R} reel eksen ve üç boyutlu \mathbb{R}^3 reel lineer uzayı içeren 4-boyutlu \mathbb{H} reel lineer uzayı oluşturur ve reel sayılar üzerinden 4-boyutlu normalize edilmiş bölüm cebri oluşturur [5]. Oktonyonlar, kuaternionların birleşme özelliğine sahip olmayan bir genelleştirilmesidir ve reel sayılar üzerinden normalize edilmiş 8-boyutlu bölüm cebri oluşturur. Oktonyonların özelliklerine yer verildiğinde $Cl_{0,7}$ 'deki paravektörler olarak tanımlanır [6].

Bu tezde ilk olarak Clifford cebri özellikleri verildikten sonra, 3. Bölümde hiperbolik sayılar tanımlanmıştır. Hiperbolik kompleks uzayda Lorentz dönüşümü, Dirac dalga eşitliği ve Schrödinger eşitliği ele alınmıştır. 4. Bölümde bikompleks sayılar ve fiziksel uygulamaları incelenmiştir. 5. Bölümde kuaterniyonlar ve bikuaterniyonlar yardımıyla bikuaterniyonik açısal momentum ifadesi tanımlanarak ve 6. ve son bölümde ise oktonyon cebri ile split-oktonyon cebri özellikleri verilerek geometriksel yorumlarına yer verilmiştir.

2. CLIFFORD CEBRİ

Clifford (geometrik) cebirleri, $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \dots)$ vektörleri ve $(\vec{P}\vec{Q}, \vec{P}\vec{Q}\vec{R}, \dots)$ vektör çarpımlarını içerecek şekilde reel sayı sistemini genişletir. Clifford cebirleri geometrik modeller, yüzeyler ve yüksek boyutlu nesnelere temsil eden vektör çarpımları, dönüşümler, yansımalar ve diğer geometrik dönüşümlerin tanımları için yararlıdır. Clifford cebri matematiksel fiziğin en temel teorilerinden biri olarak yerini almıştır. Özellikle Clifford çarpımı olarak adlandırılan işlem oldukça önemlidir.

$\vec{P}\vec{Q}$ Clifford (geometrik) çarpımında, simetrik ve anti-simetrik kısımlarının bileşenlerine ayrılmasıyla iki çeşit çarpma işlemi tanımlanır:

$$\vec{P}\vec{Q} = \vec{P} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \wedge \vec{Q} \quad (2.1)$$

Burada $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ iç çarpımı,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \frac{1}{2}(\vec{P}\vec{Q} + \vec{Q}\vec{P}) \quad (2.2)$$

$\vec{P} \wedge \vec{Q}$ dış çarpımı ise,

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = \frac{1}{2}(\vec{P}\vec{Q} - \vec{Q}\vec{P}) \quad (2.3)$$

ile tanımlanır. $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ iç çarpımı skalerdir, fakat $\vec{P} \wedge \vec{Q}$ ne skaler, ne de vektördür; bivektör olarak adlandırılan yeni bir elemandır. Üç boyutlarda $\vec{P} \wedge \vec{Q}$, vektörlerin $\vec{P} \times \vec{Q}$ cross çarpımına karşılık gelir; fakat cross çarpımların aksine, dış çarpımların birleşme özelliği vardır ve bunun dışında yüksek boyutlu uzaylarda tanımlıdır [7].

2.1. \mathbb{R}^2 'nin Cl_2 Clifford Cebri

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, \mathbb{R}^2 Öklid düzleminin ortonormal bazları olsun.

1	skaler
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	vektörler
\mathbf{e}_{12}	bivektör

Yukarıdaki dört eleman \mathbb{R}^2 'nin Cl_2 Clifford cebri için $(1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12})$ baz elemanlarını oluşturur. Yani Cl_2 'deki herhangi bir eleman; u_0 skaleri, $\vec{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ vektörü ve $\hat{u} = u_{12}\mathbf{e}_{12}$ bivektörünün lineer kombinasyonu olan

$$u = u_0 + u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_{12}\mathbf{e}_{12} \quad (2.4)$$

dir.

Cl_2 Clifford cebri, Çizelge 2.1'de verilen çarpım tablosuna sahip, $(1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_{12})$ baz elemanları ile 4-boyutlu reel lineer bir uzaydır.

Çizelge 2.1. Cl_2 Clifford cebrinin çarpım tablosu

	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_1	1	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	-1

2.1.1. Vektörlerin Clifford çarpımı

\mathbb{R}^2 vektör düzleminde, \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 ortogonal birim vektörleri ele aldığımızda $\vec{Q} = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2$ vektörünün uzunluğu $|\vec{Q}| = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$ olur. Eğer \vec{Q} vektörü kendisi ile çarpılırsa, $\vec{Q}\vec{Q} = \vec{Q}^2$ olur. Doğal olarak bu çarpım \vec{Q} 'nin uzunluğunun karesine eşittir.

$$\vec{Q}^2 = |\vec{Q}|^2 \quad (2.5)$$

Koordinat sisteminde,

$$(Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2)^2 = Q_1^2 + Q_2^2 \quad (2.6)$$

olarak vektörler için bir çarpım tanımlanmaktadır. Bunu elde etmek için değişme özelliğini olmadan dağılma özelliği kullanıldığında,

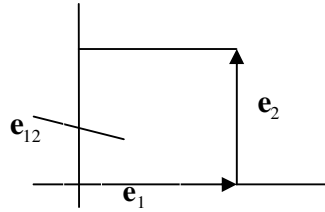
$$Q_1^2\mathbf{e}_1^2 + Q_2^2\mathbf{e}_2^2 + Q_1Q_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = Q_1^2 + Q_2^2 \quad (2.7)$$

elde edilir. Çizelge 2.1'den yararlanarak,

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \quad (2.8)$$

eşitlikleri yardımıyla (2.7)'den (2.5) sağlanmaktadır.

$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1$ eşitliğini elde etmek için birleşme özelliği kullanılır. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ çarpımının karesi negatif olduğu için $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ne skaler, ne de vektördür. Bu çarpım bivektör olarak adlandırılan yeni bazdır. \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 kenarlı karenin yönlendirilmiş düzlem alanını \mathbf{e}_{12} bivektörü temsil eder. $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ Şekil 2.1'deki gibi gösterilir.



Şekil 2.1. \mathbf{e}_{12} bivektörünün gösterimi

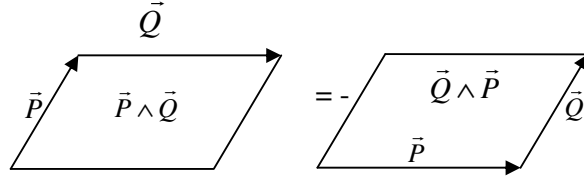
$\vec{P} = P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2$ ve $\vec{Q} = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2$ vektörlerinin Clifford çarpımı

$$\vec{P}\vec{Q} = P_1Q_1 + P_2Q_2 + (P_1Q_2 - P_2Q_1)\mathbf{e}_{12} \quad (2.9)$$

olarak ifade edilir.

2.1.2. Dış çarpım

Clifford çarpımının, skaler ve dış çarpımın toplamı olarak verildiği gösterilmiştir. Ancak iki vektörün dış çarpımı yeni bir yapı olan bivektördür. $\vec{P} \wedge \vec{Q}$ bivektörü, \vec{P} ve \vec{Q} 'yi içeren düzlemleri temsil eder. \vec{P} ve \vec{Q} kenarlı paralelkenarın yönlendirilmiş düzlem alanı bivektörlerle gösterilir. Fizikte bivektörler alanlar, düzlemler, yansımalar, dönme vb. işlemlerde kullanılır [8]. $\vec{P} \wedge \vec{Q}$ dış çarpımı Şekil 2.2'de gösterildiği gibi geometriksel biçimde yönlü düzlem parçası olarak yorumlanır.



Şekil 2.2. Paralelkenarın kenarlarının geometrik çarpımı [9]

$\vec{P} \wedge \vec{Q}$ ve $\vec{Q} \wedge \vec{P}$ bivektörleri, paralelkenar kuralı ile oluşturulan zıt yönlü düzlem parçalarını temsil eder.

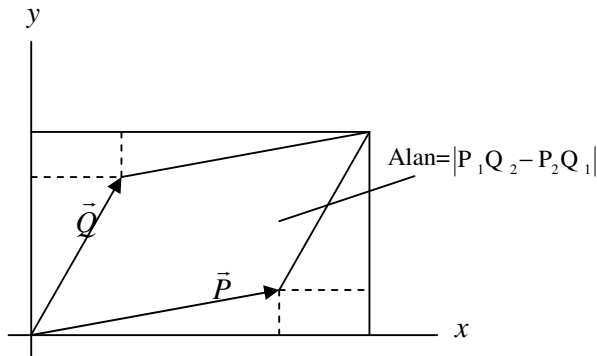
Gibbs ve Heaviside'nin bildiğimiz vektör analizinde, bivektörler düzleme dik vektörleri veren cross çarpımıyla yer değiştirir.

Clifford çarpımının skaler ve bivektör kısımlarını kullandığımız da, $\vec{P} = P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2$ ve $\vec{Q} = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2$ vektörlerinin çarpımlarının, skaler ve dış çarpımı sırasıyla,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_1Q_1 + P_2Q_2 \quad (2.10)$$

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = (P_1Q_2 - P_2Q_1)\mathbf{e}_{12} \quad (2.11)$$

olarak elde edilir. Bu paralel kenarın alanı $|P_1Q_2 - P_2Q_1|$ olur ve bivektörün büyüklüğü paralelkenarın alanı olarak alınır ve bunu Şekil 2.3.'deki gibi göstermek mümkündür.



Şekil 2.3. Bivektörlerin büyüklüğü, paralel kenarın alanına eşittir [10]

İç ve dış çarpımların geometriksel yorumundan özel durumları inceleyebiliriz. Ortogonal vektörler için (2.2)'den,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \vec{P}\vec{Q} = -\vec{Q}\vec{P} \quad (2.12)$$

elde edilir. Diğer bir deyişle colinear vektörler, alanı olmayan bir paralelkenarı tanımlar böylece (2.3)'den,

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \vec{P}\vec{Q} = \vec{Q}\vec{P} \quad (2.13)$$

elde edilir.

Bu nedenle $\vec{P}\vec{Q}$ geometrik çarpımı vektörlerin yönlü bir büyüklüğünü sağlar. Yer değiştirme özelliği vektörlerin colinear, ters yer değiştirme özelliği ortogonal oldukları anlamına gelir.

2.1.3. Cl_2 'nin $\mathbb{R}(2)$ matris cebri olarak ifade edilmesi

\mathbb{R}^2 uzayında birim baz vektörleri,

$$\mathbf{e}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

ve $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ bivektörleri

$$\mathbf{e}_{12} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

matrisleri ile temsil edilir. Bu benzerlikler cebirler için izomorfizmi oluşturur:

$$Cl_2 \cong \mathbb{R}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.16)$$

Cl_2 cebirindeki herhangi bir elemanın matris gösterimi;

$$Q_0 + Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_{12}\mathbf{e}_{12} \cong \begin{pmatrix} Q_0 + Q_1 & Q_2 + Q_{12} \\ Q_2 - Q_{12} & Q_0 - Q_1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

biçimindedir.

2.2. \mathbb{R}^3 Öklid Uzayının Clifford Cebri

Cl_3 Clifford cebrinin \mathbb{R}^3 uzayı üç boyutlu bir lineer uzaydır ve Cl_3 Clifford çarpımı altında $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bazları aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ \mathbf{e}_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad (2.18)$$

Cl_3 Clifford cebri, $2^3 = 8$ -boyutlu reel birleşme özelliğine sahip bir cebirdir ve $1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{123}$ bazlarına sahiptir. Burada $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ve $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ dir.

Cl_3 'deki herhangi bir eleman; skaler, vektör, bivektör ve hacim elemanının bir toplamıdır ve $\alpha + \vec{a} + \vec{b} \mathbf{e}_{123} + \beta \mathbf{e}_{123}$ olarak yazılır. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dür.

Üç boyutta,

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + (P_2 Q_3 - Q_2 P_3) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + (P_3 Q_1 - P_1 Q_3) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \quad (2.19)$$

olur.

\mathbf{e}_1 vektörü birim uzunluğun yönlü doğru parçasına karşılık gelirken, $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$ bivektörü, \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 'nin her ikisini içeren birim alanın yönlü düzlem parçasını temsil eder. Üç boyutta $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$ bivektörleri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tarafından gerilen orijinal vektör uzayından farklı lineer bir uzayı gerer. Baz bivektörlerin karesi -1 dir: $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = -1$

$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ çarpımı, yönlü bir birim hacmi temsil eden bir trivektördür. $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$ olduğu için \mathbb{R}^3 'de sadece bir tane lineer bağımsız trivektör vardır. Trivektörün karesi -1 dir. Trivektör, bütün temel vektörler ve cebirin bütün elemanlarıyla yer değiştirir ve birim imajiner gibi düşünülebilir.

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = i \quad (2.20)$$

özdeşliği, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = i \mathbf{e}_3$ gibi düzlemin normaline yönlü imajiner vektörleri ile bivektörleri birleştirir. \mathbf{e}_3 vektörü, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ bivektörüne dual vektör olarak

adlandırılır ve dönüşüm düzleminin eksenidir. Daha genel olarak $\vec{P} \times \vec{Q}$ vektör çarpımı, $\vec{P} \wedge \vec{Q}$ bivektörüne dual vektördür.

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = i\vec{P} \times \vec{Q} \quad (2.21)$$

cross çarpımında olduğu gibi, vektörler ve bivektörler arasındaki dual ilişkisi yalnızca üç boyutlularda anlamlıdır. Fakat herhangi bir $n \geq 2$ boyutlu uzaylardaki dönüşümler ve yansımalar için bivektörler kullanılır.

2.2.1. \mathbb{R}^3 'de Cl_3 'ün matris gösterimi

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Pauli matrislerini ele alalım.

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j, \quad \sigma_{123} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad \sigma_0 = I \quad (2.23)$$

olsun, o zaman,

$$A = \{a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 + a_{12} \sigma_{12} + a_{13} \sigma_{13} + a_{23} \sigma_{23} + a_{123} \sigma_{123} \mid a_i \in \mathbb{R}, i \in 0,1,2,3,12,13,23,123\} \quad (2.24)$$

8-boyutlu birleşme özelliğine sahip reel bir cebirdir ve Pauli cebri adı verilir. Cl_3 ve Pauli cebri birbirine izomorftur [11]. Bu izomorfizm Çizelge 2.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.2. Cl_3 ve Pauli cebri arasındaki izomorfluk

Pauli cebri	Cl_3 cebri
I	1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
$\sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 \sigma_3, \sigma_2 \sigma_3$	$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	\mathbf{e}_{123}

3. HİPERBOLİK CEBİR VE KUANTUM MEKANİĞİNE UYGULAMALARI

Kompleks sayılar, düzlemdeki dönmeler ve dilatasyonlarla ilgilidir, ancak sözü edilen hiperbolik sayılar, iki boyutlu Minkowski uzay-zamandaki Lorentz dönüşümleri ve dilatasyonları içerir. Hiperbolik sayılar perplex, duplex veya split-kompleks sayılar olarak bilinir [12].

3.1. Hiperbolik Vektör Uzayı

Vektör uzayları, $Q \in \mathbb{D}$ hiperbolik sayıların yerdeğıştirmeyen halkası üzerinden tanımlanır:

$$Q = Q_0 + iQ_1 + jQ_2 + ijQ_3, \quad Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Burada i kompleks birimi ve j hiperbolik birimi,

$$i^2 = -1, \quad j^2 = 1 \quad (3.2)$$

özelliklerine sahiptir. Hiperbolik sayılar, $Q^2 - 1 = 0$ polinom eşitliğinin yeni köklerini içeren yer değıştirme özelliğine sahip kompleks sayıların bir genişletilmesidir. Clifford cebirler terminolojisinde $Cl(1,0)$ ile temsil edilir.

Bir eşlenik, kompleks ve hiperbolik birimlerin işaretinin değıştirilmesiyle tanımlanabilir:

$$\bar{Q} = Q_0 - iQ_1 - jQ_2 + ijQ_3 \quad (3.3)$$

bu eşleniğe göre hiperbolik sayıların karesi,

$$Q\bar{Q} = Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 + 2ij(Q_0Q_3 - Q_1Q_2) \quad (3.4)$$

ile hesaplanır [13].

3.2. Clifford Cebirsel Geometri

Clifford cebirsel geometride j imajiner birim olarak tanımlanır. $j^2 = 1$ ve $\bar{j} = -j$ dir.

$$X = x + jct, \quad \bar{X} = x - jct \quad (3.5)$$

hiperbolik kompleks sayısı ile onun eşleniğini ele alalım. Kompleks sayının iç çarpımı

$$\langle \bar{X}, Y \rangle = \sum_{i, k=1}^n \bar{x}_i y_k \quad (3.6)$$

olur. Kompleks sayının normu,

$$R^2 = \left| \langle \bar{X}, X \rangle \right| = \left| x^2 - c^2 t^2 \right| \quad (3.7)$$

şeklinde uzay-zaman aralığına karşılık gelir.

Minkowski momentum uzayında hiperbolik kompleks sayılar

$$P = p + j \frac{E}{c}, \quad \bar{P} = p - j \frac{E}{c} \quad (3.8)$$

dır. Bunun iç çarpımı,

$$\langle \bar{P}, P \rangle = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 \quad (3.9)$$

momentum-enerji bağıntısına karşılık gelir [14].

3.2.1. Clifford cebir spinoru

Hiperbolik kompleks uzayın dört-boyutlu uzay-zaman yer vektörleri ve dört boyutlu momentum vektörleri, hiperbolik lineer kuaterniyonu tanımlar ($c = h = 1$ olarak seçelim).

$$X = e^\mu x_\mu = \vec{r} + jt, \quad e^\mu \bar{x}_\mu = \vec{r} - jt, \quad (3.10)$$

$$e^\mu P_\mu = \vec{p} + jE, \quad e^\mu \bar{P}_\mu = \vec{p} - jE, \quad (3.11)$$

$\mu=1,2,3,4$; $e^i e^j = -e^j e^i$ ($i, j = 1,2,3$) ve $e^4 = 1$ dir.

$g^{ik} = \text{diag}(1,1,1,1)$ diagonal matrisi kullanılarak hiperbolik kompleks uzayda iç çarpım algoritması ile

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,k=1}^n \bar{x}_i y_k g^{ik} \quad (3.12)$$

olur ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'den (3.10) ve (3.11) için iç çarpım işlemi yapıldığında,

$$r^2 - t^2 = R^2 \quad (3.14)$$

$$p^2 - E^2 = m_0^2 \quad (3.15)$$

elde edilir.

Denklem (3.14) ve (3.15) relativitede, dört boyutlu uzay-zaman aralığı ve kütle-enerji bağıntısıdır. \square dört boyutlu gradyent operatörü ve \square^\dagger dört-boyutlu gradyent operatörünün hermityen eşleniği kullanılarak

$$\mathbf{e}^\mu \hat{P}_\mu = j \square^\dagger = j \mathbf{e}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial X_\mu} \right)^\dagger = \hat{p} + j \hat{E} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{e}^\mu \hat{P}_\mu^\dagger = -j \square = -j \mathbf{e}^\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} \quad (3.17)$$

dört boyutlu momentum operatörleri elde edilir. Burada,

$$\hat{p} = j \vec{\nabla}, \quad \hat{E} = -j \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.18)$$

dır [15].

3.2.2. Dirac dalga eşitlikleri

Burada hiperbolik kompleks uzay için Xuegang ve ark. [15] tarafından incelenen Dirac dalga eşitliği gösterilmiştir.

Denklem (3.18), (3.10) ve (3.11)'de yerine yazıldığında ve (3.15) kütle enerji bağıntısı kullanıldığında,

$$\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2 = 0 \quad (3.19)$$

olur.

Hiperbolik kompleks uzayın uzay-zaman simetrisi dikkate alındığında, hiperbolik Dirac eşitliği,

$$\left(\alpha_1 \hat{p} + \alpha_2 \hat{E} - \alpha_3 m_0 \right) \phi = 0 \quad (3.20)$$

olsun.

Denklem (3.18), (3.20)'de yerine yazıldığında,

$$\left(\alpha_1 \vec{\nabla} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} - j \alpha_3 m_0 \right) \phi = 0 \quad (3.21)$$

elde ederiz.

Denklem (3.21)'in hermityen eşleniği alındığında,

$$\left(\alpha_1^\dagger \bar{\nabla} - \alpha_2^\dagger \frac{\partial}{\partial t} + j \alpha_3^\dagger m_0 \right) \phi^\dagger = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir.

(3.19)'u oluşturmak için,

$$\alpha_1^\dagger \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_1^\dagger = 1, \quad \alpha_2^\dagger \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_2^\dagger = -1, \quad \alpha_3^\dagger \alpha_3 = \alpha_3 \alpha_3^\dagger = -1 \quad (3.23)$$

$$\alpha_1^\dagger \alpha_2 + \alpha_2^\dagger \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2^\dagger \alpha_3 - \alpha_3^\dagger \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3^\dagger \alpha_1 - \alpha_1^\dagger \alpha_3 = 0 \quad (3.24)$$

denklemleri ile (3.21) ve (3.22)'ye uygulanan iç çarpım işlemi kullanılır. Denklem (3.23) ve (3.24) koşulları,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} & j \\ j & \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} & j \\ -j & \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

ile sağlanabilir.

Hiperbolik Dirac eşitliğini elde etmek için Denklem (3.21)'i $-j\alpha_3^\dagger$ ile soldan çarptığımızda,

$$\left(\beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_0 \right) \phi = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada,

$$\beta_\mu = \beta_\mu(\beta_1, \beta_2), \quad \beta_1 = -j\alpha_3^\dagger \alpha_1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \alpha_3^\dagger \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

dir. Denklem (3.26)'nın hermityen eşleniği alınırsa,

$$\left(\beta_\mu^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)^\dagger - m_0 \right) \phi^\dagger = 0 \quad (3.28)$$

olur. Denklem (3.26) ve (3.28) için iç-çarpım işlemi,

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2 \right) \psi = 0 \quad (3.29)$$

Klein-Gordon eşitliğini verir. Burada $\psi = \phi^\dagger \phi$ dir. Yani her bileşen Klein-Gordon eşitliğini sağlar.

Dirac eşitliklerinin bulunduğu (3.26) ve (3.28), ayrıştırılabilir:

$$\nabla \phi_2 - j \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 + m_0 \phi_1 = 0, \quad \nabla \phi_1 - j \frac{\partial}{\partial t} \phi_2 - m_0 \phi_2 = 0 \quad (3.30)$$

$$\nabla \phi_2^\dagger + j \frac{\partial}{\partial t} \phi_1^\dagger + m_0 \phi_1^\dagger = 0, \quad \nabla \phi_1^\dagger + j \frac{\partial}{\partial t} \phi_2^\dagger - m_0 \phi_2^\dagger = 0 \quad (3.31)$$

Clifford cebirindeki,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

spin operatörleri,

$$\sigma_i^\dagger \sigma_i = \sigma_i \sigma_i^\dagger = 1 \quad (3.33)$$

veya

$$[\sigma_i^\dagger, \sigma_k] = \sigma_i^\dagger \sigma_k + \sigma_k \sigma_i^\dagger = 2\delta_{ik} \quad (3.34)$$

eşitliklerini sağlar. Burada $i, k = 1, 2, 3$ dir.

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} & -\sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_z & \\ & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \\ & & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} & -\sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & & 1 \\ 1 & & \\ & -1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \\ & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

dördüncü dereceden matrisler ele alınırsa Dirac eşitliğine benzer. Burada γ_4 birim matristir. Bu matrisler aşağıdaki eşitlikleri sağlar (burada $i, j, k = 1, 2, 3$ ve $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ dir.):

$$\gamma_i^2 = -\mathbf{I}, \quad \gamma_4^2 = \mathbf{I} \quad (3.36)$$

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 0 \quad (3.37)$$

$$\gamma_i \gamma_j \gamma_k = \pm \mathbf{I}, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad k \neq i \quad (3.38)$$

$$\gamma_i \gamma_j = \pm \gamma_k, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad k \neq i \quad (3.39)$$

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \mathbf{I} \quad (3.40)$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mathbf{I}$ bazların çarpımını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\begin{array}{c|ccc}
& \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\
\hline
\gamma_1 & -\mathbf{I} & -\gamma_3 & \gamma_2 \\
\gamma_2 & \gamma_3 & -\mathbf{I} & \gamma_1 \\
\gamma_3 & -\gamma_2 & \gamma_1 & -\mathbf{I}
\end{array}$$

$$\gamma_i^\dagger = -\gamma_i, \gamma_4^\dagger = +\gamma_4 \quad (3.41)$$

$$\gamma_\mu^\dagger \gamma_\mu = \gamma_\mu \gamma_\mu^\dagger = 1 \quad (3.42)$$

$$\gamma_\mu^\dagger \gamma_\nu = \gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (3.43)$$

$$\det \gamma_\mu = 1 \quad (3.44)$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} \right)^\dagger = -\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} \quad (3.45)$$

Burada (3.26) ve (3.28) tekrar düzenlenebilir:

$$\left[\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} \right) - m_0 \right] \phi = 0 \quad (3.46)$$

$$\left[\gamma_\mu^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial X_\mu} \right)^\dagger - m_0 \right] \phi^\dagger = 0 \quad (3.47)$$

Denklem (3.46),

$$\begin{cases}
-\frac{\partial}{\partial x} \phi_4 - \frac{\partial}{\partial y} \phi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \phi_2 - \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_1 = 0 \\
-\frac{\partial}{\partial x} \phi_3 + \frac{\partial}{\partial y} \phi_4 + \frac{\partial}{\partial z} \phi_1 - \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_2 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \phi_2 + \frac{\partial}{\partial y} \phi_1 - \frac{\partial}{\partial z} \phi_4 - \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_3 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \phi_1 - \frac{\partial}{\partial y} \phi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \phi_3 - \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_4 = 0
\end{cases} \quad (3.48)$$

ve (3.47)'deki Dirac eşitliği,

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\phi_4^\dagger - \frac{\partial}{\partial y}\phi_3^\dagger - \frac{\partial}{\partial z}\phi_2^\dagger - \left(m_0 + j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_1^\dagger = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x}\phi_3^\dagger + \frac{\partial}{\partial y}\phi_4^\dagger + \frac{\partial}{\partial z}\phi_1^\dagger - \left(m_0 + j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_2^\dagger = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\phi_2^\dagger + \frac{\partial}{\partial y}\phi_1^\dagger - \frac{\partial}{\partial z}\phi_4^\dagger - \left(m_0 + j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_3^\dagger = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\phi_1^\dagger - \frac{\partial}{\partial y}\phi_2^\dagger + \frac{\partial}{\partial z}\phi_3^\dagger - \left(m_0 + j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_4^\dagger = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

olarak ayrıştırılır. Denklem (3.38) ve (3.39)'dan Clifford cebir spinorları, $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4$ ve $-\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Y}_2, -\mathcal{Y}_3, -\mathcal{Y}_4$ dır. Denklem (3.35)'den

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_\mu^1(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4), \mathcal{Y}_\mu^2(-\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4), \mathcal{Y}_\mu^3(\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4), \\ & \mathcal{Y}_\mu^4(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, -\mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4), \mathcal{Y}_\mu^5(-\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Y}_2, -\mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4), \mathcal{Y}_\mu^6(\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Y}_2, -\mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4) \\ & \mathcal{Y}_\mu^7(-\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, -\mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4), \mathcal{Y}_\mu^8(-\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4) \end{aligned} \quad (3.50)$$

kombinasyonu elde edilir.

Denklem (3.46) ve (3.47)'deki Dirac eşitlikleri,

$$\left[\mathcal{Y}_\mu^\lambda \frac{\partial}{\partial X_\mu} - m_0 \right] \phi = 0 \quad (3.51)$$

$$\left[\left(\mathcal{Y}_\mu^\lambda \frac{\partial}{\partial X_\mu} \right)^\dagger - m_0 \right] \phi^\dagger = 0 \quad (3.52)$$

olarak yazılabilir. Burada $\lambda=1,2,\dots,8$ dir. Denklem (3.51)'i (3.50)'den sekiz kombinasyon olarak elde ederiz. Denklem (3.51),

$$\begin{cases} \pm \frac{\partial}{\partial x}\phi_4 \pm \frac{\partial}{\partial y}\phi_3 \pm \frac{\partial}{\partial z}\phi_2 - \left(m_0 - j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_1 = 0 \\ \pm \frac{\partial}{\partial x}\phi_3 \pm \frac{\partial}{\partial y}\phi_4 \pm \frac{\partial}{\partial z}\phi_1 - \left(m_0 - j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_2 = 0 \\ \pm \frac{\partial}{\partial x}\phi_2 \pm \frac{\partial}{\partial y}\phi_1 \pm \frac{\partial}{\partial z}\phi_4 - \left(m_0 - j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_3 = 0 \\ \pm \frac{\partial}{\partial x}\phi_1 \pm \frac{\partial}{\partial y}\phi_2 \pm \frac{\partial}{\partial z}\phi_3 - \left(m_0 - j\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi_4 = 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

ve (3.52)'deki Dirac eşitliği

$$\begin{cases} \pm \frac{\partial}{\partial x} \phi_4^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial y} \phi_3^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial z} \phi_2^\dagger + \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_1^\dagger = 0 \\ \pm \frac{\partial}{\partial x} \phi_3^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial y} \phi_4^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial z} \phi_1^\dagger + \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_2^\dagger = 0 \\ \pm \frac{\partial}{\partial x} \phi_2^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial y} \phi_1^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial z} \phi_4^\dagger + \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_3^\dagger = 0 \\ \pm \frac{\partial}{\partial x} \phi_1^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial y} \phi_2^\dagger \pm \frac{\partial}{\partial z} \phi_3^\dagger + \left(m_0 - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi_4^\dagger = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

olarak yazılabilir. Denklem (3.53) ve (3.54), hiperbolik Dirac eşitlikleridir.

3.3. Dört Boyutlu Lorentz Dönüşümü

Başlangıçları $t = 0$ anında çakışan iki düzgün hareketli sistem göz önüne alınsın. $t = 0$ anında üs işareti olmayan sistemin başlangıcına tespit edilen bir ışık kaynağı ışık dalgası yaymaktadır. Bu sistemde tespit edilen bir deneyicinin c hızı ile hareket eden bir küresel dalganın yayıldığı görüleceği açıktır. Gözlenen dalga cephesinin denklemi,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (3.55)$$

olacaktır. Fakat ışık hızının değişmezliği deneysel gerçeği, kaynağa göre hareket eden sistemdeki bir gözleyicinin de ışığı kendi başlangıcında yayılan bir küresel dalga olarak göreceği ve dalga cephesinin,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (3.56)$$

şeklinde ortaya çıkacağına işaret eder. $\langle\langle t \rangle\rangle$ üzerine bir üs işareti koyarak zaman ölçüsünün de bir sistemden bir başkasına geçerken dönüşmesi imkanı açıkça tanınmıştır. Sözle daha tam olarak ifade edilirse yani, (3.55)'den (3.56)'yı veren dönüşüm iki olay arasındaki zaman aralığının gözleyicinin karşılaştırma sistemine bağlı olmasını gerektirebilir. Denklem (3.55) ve (3.56)'dan arzu edilen dönüşümün,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (3.57)$$

tarzında olması gerektiği ortaya çıkar. Bu şart, özellikle eğer xyz yerine $x_1 x_2 x_3$ yazılırsa (3.57),

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 t'^2 \quad (3.58)$$

olur ve ortogonal dönüşüm tanımını hatırlatır. Denklem (3.58)'in ortogonal dönüşümlerle karşılaştırılması formel olarak, uzaysal ortogonal dönüşümlere daha da yakın bir benzerlik elde etmek için dördüncü sanal bir $ict = x_4$ koordinatının ortaya konması fikrini verir:

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^{\prime 2} \quad (3.59)$$

Denklem (3.59), aranılan dönüşümün üç boyutlu adi uzay ve üzerine eklenen zamanla orantılı sanal bir dördüncü boyuttan meydana gelen dört boyutlu uzayda bir dönmeyle karşılık geldiğini gösteriyor. Bu uzay, Minkowski uzayı olarak bilinir. Bu nedenle Lorentz dönüşümleri basitçe Minkowski uzayının ortogonal dönüşümleridir [16].

Yukarıda tanımlanan Lorentz dönüşümünü buradan itibaren hiperbolik kompleks uzayda tartışılacak ve Xueqian ve ark. [17] tarafından verilen dört boyutlu Lorentz dönüşümü anlatılacaktır.

X lineer kuaterniyonu,

$$X = \text{Re}^{j\bar{\theta}} = R(\cosh\bar{\theta} + j\sinh\bar{\theta}) \quad (3.60)$$

olarak yazılabilir. Burada $R = \sqrt{(c^2 t^2 - r^2)}$, hiperbolik kuaterniyonun modülüdür.

$\bar{\theta}$, ct eksenine karşılık gelen açıdır böylece,

$$\bar{\theta} = \mathbf{r}_0 \theta = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{arctanh} \frac{r}{ct} \quad (3.61)$$

ve

$$e^{j\bar{\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\bar{\theta})^n}{n!} = \cosh\bar{\theta} + j\sinh\bar{\theta} \quad (3.62)$$

ifadesi yazılır. Lineer kuaterniyon çarpımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} X = ct + j\vec{r} &= X_1 \cdot X_2 = \sum_{n,m=1}^4 x_n \cdot x_m \\ &= (ct_1 + j\vec{r}_1)(ct_2 + j\vec{r}_2) = (c^2 t_1 t_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) + j(ct_1 \vec{r}_2 + ct_2 \vec{r}_1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

olur. Denklem (3.63)'in özel bir durumu olarak, $X_m = \cosh\bar{\theta} + j\sinh\bar{\theta}$ birim kuaterniyonu ve dört boyutlu uzay dönüşümü ele alınırsa,

$$X' = ct' + j\vec{r}' = X_m \cdot X = (\cosh\bar{\theta} + j\sinh\bar{\theta})(ct + j\vec{r}) \quad (3.64)$$

olur. Denklem (3.64) açıldığında,

$$\vec{r}' = ct \sinh \bar{\theta} + \vec{r} \cosh \bar{\theta} \quad (3.65)$$

ve

$$ct' = ct \cosh \bar{\theta} + \vec{r} \sinh \bar{\theta} \quad (3.66)$$

elde edilir.

$$\tanh \bar{\theta} = \frac{\sinh \bar{\theta}}{\cosh \bar{\theta}} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (3.67)$$

eşitliği kullanıldığında,

$$\cosh \bar{\theta} = \sqrt{1 - \tanh^2 \bar{\theta}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\alpha} \quad (3.68)$$

sonucuna varılır. Denklem (3.68), (3.65) ve (3.66)'da yerine yazıldığında,

$$\vec{r}' = \frac{1}{\alpha} (\vec{v}t + \vec{r}) \quad (3.69)$$

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left(t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \quad (3.70)$$

Lorentz dönüşümü elde edilir. Denklem (3.69) ve (3.70),

$$X' = \frac{1}{c} V \cdot X \quad (3.71)$$

kuaterniyonu biçiminde yazılabilir. Burada $V = \frac{1}{\alpha} (c + j\vec{v}) = \frac{dX}{d\tau}$, dört boyutlu

genelleştirilmiş hızdır. τ , doğal zamandır. Denklem (3.71),

$$\mathbf{X}'_{\mu} = \mathbf{U}_{\mu\nu} \mathbf{X}_{\nu} \quad (3.72)$$

veya

$$\begin{bmatrix} jr' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & j \frac{v}{\alpha c} \\ j \frac{v}{\alpha c} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jr \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & j \sinh \theta \\ j \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jr \\ ct \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

olarak matris biçiminde yazılabilir. Kuaterniyonun normu alındığında,

$$R^2 = X^* X = \sum_{n, m=1}^4 x_n \cdot x_m = c^2 t^2 - r^2 \quad (3.74)$$

elde edilir. Denklem (3.72),

$$\mathbf{X}'_{\mu} \dagger \mathbf{X}'_{\mu} = \mathbf{X}_{\mu} \dagger \mathbf{X}_{\mu} = R^2 \quad (3.75)$$

değişmez aralığını sağlar. $\mathbf{U}_{\mu\nu}$ dönüşüm matrisi,

$$\mathbf{U}_{\mu\nu}^\dagger \mathbf{U}_{\mu\nu} = \mathbf{U}_{\mu\nu} \mathbf{U}_{\mu\nu}^\dagger = \mathbf{I} \quad (3.76)$$

koşulunu sağlar. Burada \mathbf{I} , birim matristir. $\mathbf{U}_{\mu\nu}^\dagger, \mathbf{U}_{\mu\nu}$ 'nün hermityen eşleniğidir.

3.4. Hiperbolik Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü, kuantum mekaniğinde önemli mekaniksel araçtır. $[-\pi, \pi]$ {veya $[0, 2\pi]$ } aralığında tanımlı, 2π periyotlu, tek değerli ve Dirichlet koşullarını sağlayan bir $f(\theta)$ fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] \quad (3.77)$$

şeklinde Fourier serisine açılabilir. Serideki a_0, a_n, b_n Fourier sabitleri, trigonometrik fonksiyonların diklik özellikleri yardımıyla,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta \quad (3.78)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3..) \quad (3.79)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3..) \quad (3.80)$$

şeklinde ifade edilir. Fourier sabitlerinin tanımlandığı bağıntılar Euler formülleri olarak isimlendirilir. Ancak hiperbolik Minkowski uzayında ona uygun Fourier dönüşümü oluşturulmalıdır. Hiperbolik Minkowski uzayında hiperbolik kompleks sayı, hiperbolik fonksiyon ve üslü seri biçiminde yazılır [18].

$$X = x + jct = jR(\text{ch}\theta + j\text{sh}\theta) = jR e^{j\theta} = jR \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\theta)^2}{n} \quad (3.81)$$

genel hiperbolik kompleks fonksiyon için, geleneksel Fourier dönüşüm teorisi $[-l, +l]$ aralığında hiperbolik Fourier dönüşüm serilerine açılır.

$$\begin{aligned}
f(X) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi X}{l} + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi X}{l} \right) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{\frac{jn\pi X}{l}} + e^{-\frac{jn\pi X}{l}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2j} \left(e^{\frac{jn\pi X}{l}} - e^{-\frac{jn\pi X}{l}} \right)
\end{aligned} \tag{3.82}$$

veya

$$f(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{jn\pi X}{l}} \quad (-l \leq X \leq l) \tag{3.83}$$

dır. Burada,

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \tag{3.84}$$

dır.

$$C_{-n} C_n = C_n^* C_n = \frac{1}{4} |a_n^2 - b_n^2| \tag{3.85}$$

olur. $k_n = \frac{n\pi}{l}$ olmak üzere,

$$f(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jk_n X} \tag{3.86}$$

dir. Denklem (3.86), $e^{-jk_m X}$ ile çarpıldığında ve ardından bütün uzay üzerinden integrali alındığında,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_m X} f(X) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_m X} e^{jk_n X} dx \tag{3.87}$$

olur. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jk_n X}$ 'i bir ortogonal radix baz grubu olarak aldığımda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(k_n - k_m) X} dx = \delta(k_n - k_m) \tag{3.88}$$

elde edilir. Burada $\delta(k_n - k_m)$, Dirac- δ fonksiyonudur,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_m X} f(X) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(k) \delta_{nm} = C_m(k) \tag{3.89}$$

şeklini alır. $e^{jk_n X} = \psi_n(X)$ olmak üzere (3.86)'da yerine yazılırsa,

$$f(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(X') f(X') \psi_n(X) dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X') \delta(X - X') dx' \tag{3.90}$$

elde edilir. Denklem (3.90)'a hiperbolik Fourier serisi adı verilir. Burada,

$$\delta(X - X') = \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(X') \psi_n(X) \quad (3.91)$$

dır. $\Delta k = 1$ olsun. Denklem (3.86),

$$f(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(n) e^{jk_n X} \Delta k \quad (3.92)$$

veya

$$f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_n(k) e^{jkX} dk \quad (3.93)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) e^{-jkX} dx \quad (3.94)$$

dır. Denklem (3.93) ve (3.94)'e hiperbolik Fourier integrali adı verilir.

3.4.1. Mekaniksel nicelikler

4-boyutlu hiperbolik kuantum uzayında kuantum değerinin ortalaması alındığında,

$$\bar{P}_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\bar{P}_\mu) P_\mu \varphi(P_\mu) d^\mu p \quad (3.95)$$

olur. Denklem (3.94) ile,

$$\varphi(P_\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(X_\mu) e^{-\frac{jP_\mu X_\mu^*}{\hbar}} d^{(\mu)} X \quad (3.96)$$

eşitliğini ele alalım. Denklem (3.96), (3.95)'e yazıldığında,

$$\bar{P}_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(X'_\mu) e^{\frac{jP_\mu^* X'_\mu}{\hbar}} P_\mu \psi(X_\mu) e^{-\frac{jP_\mu X_\mu^*}{\hbar}} d^{(\mu)} p d^{(\mu)} X' d^{(\mu)} X \quad (3.97)$$

olur. $P_\mu^* X_\mu = P_\mu X_\mu^*$ olduğundan,

$$\bar{P}_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(X'_\mu) e^{\frac{jP_\mu^* X'_\mu}{\hbar}} d^{(\mu)} p d^{(\mu)} X' \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(X_\mu) (-j\hbar \square^*) e^{-\frac{jP_\mu X_\mu^*}{\hbar}} d^{(\mu)} X \quad (3.98)$$

olur. Burada $\psi(X_\mu)$ dalga fonksiyonu tek değerli ve sürekli olmalıdır, $(\pm \infty)$ sınırında sıfırdır. \square , 4-boyutlu gradyent operatörü ve \square^* , dört boyutlu gradyent operatörünün eşleniğidir:

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \nabla + j \frac{\partial}{\partial(ct)} \quad (3.99)$$

$$\square^* = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \nabla - j \frac{\partial}{\partial(ct)} \quad (3.100)$$

elde edilir. Denklem (3.98)'in son kısmına kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\bar{P}_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(X_\mu^*) e^{\frac{jP_\mu X_\mu^*}{\hbar}} d^{(\mu)} p d^{(\mu)} x' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{jP_\mu X_\mu^*}{\hbar}} (j\hbar \square^*) \psi(X_\mu) d^{(\mu)} x \quad (3.101)$$

olur.

$$f^*(X_\mu^*) = \int f^*(X_\mu^*) e^{\frac{jP_\mu (X_\mu^* - X_\mu)}{\hbar}} d^{(\mu)} p d^{(\mu)} x' \quad (3.102)$$

olmak üzere (3.102), (3.101)'de yerine yazıldığında,

$$\bar{P}_\mu = \int \psi^*(X_\mu^*) \hat{P}_\mu \psi(X_\mu) d^{(\mu)} x \quad (3.103)$$

olur. Burada,

$$\hat{P}_\mu = j\hbar \square^* \quad (3.104)$$

dır. \hat{P}_μ ,

$$\hat{P}_\mu = \hat{p} + \hat{H} = j\hbar \left(\nabla - j \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) \quad (3.105)$$

biçiminde yazılan 4-boyutlu hiperbolik kuantum operatörüdür [19].

3.4.2. Standart Schrödinger eşitliği

Kuantum mekaniğinin temel dalga denkleminin,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (3.106)$$

olduğu bilinmektedir. Bu denklemde dış alanda hareket eden bir parçacığın,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x, y, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z) \quad (3.107)$$

Hamilton operatörü yukarıdaki denklemde kullanılırsa, dış alanda hareket eden parçacık için dalga denklemi;

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi \quad (3.108)$$

şeklinde yazılır. Kararlı durumlarda,

$$\hat{H} \psi = E \psi \quad (3.109)$$

olduğu bilinmektedir. O zaman (3.107)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + [E - U(x, y, z)] \psi = 0 \quad (3.110)$$

biçiminde olur. Denklem (3.108) ve (3.110), 1926 yılında Schrödinger tarafından bulunmuş ve onun onuruna bunlara Schrödinger denklemleri adı verilmiştir [20].

3.4.3. Hiperbolik Schrödinger eşitliği

Hiperbolik bir Minkowski uzayı, Galilei dönüşümüne tekabül ettiği için, mikroskobik düşük hızlı yabancı cismin hareket kanunu ve Schrödinger eşitliğini tartışmak mümkündür. Böylece Zheng ve Xuegang [19] Schrödinger eşitliğini bu kısımda gösterileceği gibi hiperbolik formda yazmıştır.

$$\psi = e^{\frac{jX_\mu P_\mu}{\hbar}} = A e^{\frac{j(\vec{p}\vec{r} - Et)}{\hbar}} \quad (3.111)$$

hiperbolik dalga fonksiyonunu ele alalım.

$$\hat{P}_\mu \psi = j\hbar \square^* \psi = \hat{p} \psi + j \frac{\hat{H}}{c} \psi = \hat{p} \psi + j \frac{E}{c} \psi = P_\mu \psi \quad (3.112)$$

Ayrıca

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad \hat{p} \psi = \vec{p} \psi \quad (3.113)$$

biçiminde yazılır.

Klasik yaklaşım için $c = 1$ ve $m_0 = m$ alındığında, $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ eşitliği klasik yaklaşım sonucu

$$E = m + \frac{p^2}{2m} \quad (3.114)$$

elde edilir.

Denklem (3.114), (3.111)'de yerine konulduktan sonra ψ 'yi $e^{-\frac{jmt}{\hbar}}$ ile böldüğümüzde,

$$\phi = \psi e^{\frac{jmt}{\hbar}} = e^{\frac{j}{\hbar} \left(\vec{p} \cdot \vec{r} - \frac{p^2}{2m} t \right)} \quad (3.115)$$

elde edilir. Bunun zamana göre diferansiyeli alındığında,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -j \frac{p^2}{2\hbar m} \phi \quad (3.116)$$

olur. Denklem (3.116) ve (3.113) kullanılarak

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + j \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \phi = 0 \quad (3.117)$$

hiperbolik Schrödinger eşitliği elde edilir. Denklem (3.117)'in hermityen eşleniği alındığında,

$$\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} - j \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \phi^\dagger = 0 \quad (3.118)$$

olur.

Soldan ϕ^\dagger ile çarpılan (3.117), sağdan ϕ ile çarpılan (3.118)'e eklendiğinde,

$$\square J_\mu = \frac{\partial J_\mu}{\partial X_\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0 \quad (3.119)$$

elde edilir. Burada,

$$J_\mu = \vec{J} + j\rho \quad (3.120)$$

veya

$$\rho = \phi^\dagger \phi \quad (3.121)$$

$$\vec{J} = \frac{j\hbar}{2m} (\phi^\dagger \nabla \phi - \nabla \phi^\dagger \phi) \quad (3.122)$$

şeklindedir. Bunlar, sırasıyla hiperbolik eşitliğinin uygun olduğu olasılık yoğunluğu ve olasılık akım yoğunluğudur .

4. BİKOMPLEKS SAYILAR VE KUANTUM MEKANİĞİNE UYGULAMALARI

Bikompleks sayılar,

$$\mathcal{Q} = \{Q_0 + Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k} \mid Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}\} \quad (4.1)$$

biçiminde yazılan sayılardır. Burada \mathbf{i} ve \mathbf{j} 'ye imajiner birimler ve \mathbf{k} 'ya hiperbolik (imajiner) sayı adı verilir. İmajiner birimlerin çarpım kuralları kullanıldığında, $\mathbf{Q}_1 = Q_0 + Q_1\mathbf{i}$ ve $\mathbf{Q}_2 = Q_2 + Q_3\mathbf{i}$ olduğu zaman bikompleks sayı $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{j}$ yazılabilir. \mathbf{Q}_1 ve \mathbf{Q}_2 reel sayılar olduğu zaman bikompleks sayılar, kompleks sayılara indirgenir [21].

\mathbb{T} ile gösterilen bikompleks sayılar uzayı, Hamilton uzayı ile birçok ortak özelliklere sahiptir. Bir \mathcal{Q} bikompleks sayısı $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ kompleks çifti olarak gözlenebilir.

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \text{-temsili} & : \mathcal{Q} \\ \mathbb{C}^2 \text{-temsili, kompleks çifti} & : (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) \\ \mathbb{R}^4 \text{-temsili, kompleks çifti} & : (\mathbf{Q}_1 = Q_0 + Q_1\mathbf{i}, \mathbf{Q}_2 = Q_2 + Q_3\mathbf{i}) \\ \mathbb{R}^4 \text{-temsili, vektör biçimi} & : Q_0 + Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k} \\ \mathbb{R}^4 \text{-temsili, quadruple-biçimi} & : (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \end{aligned}$$

İki bikompleks sayının eşitliği,

$$(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \equiv (\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_1) \wedge (\mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_2) \quad (4.2)$$

ile verilir ve

$$(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) + (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \equiv (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_2) \quad (4.3)$$

eşitliğindeki gibi toplanır. Bikompleks sayıların çarpımı kuaterniyon işlemlerinden farklıdır. Eğer $Q_0 + Q_1\mathbf{i}$ kompleks sayısı (Q_0, Q_1) reel sayılar çifti olarak yazılırsa, $\mathbf{Q}_1 = (Q_0, Q_1)$ 'nin $\mathbf{Q}_2 = (Q_2, Q_3)$ ile bildiğimiz kompleks çarpımı,

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = (Q_0Q_2 - Q_1Q_3, Q_1Q_2 + Q_0Q_3) \quad (4.4)$$

biçiminde olur. Buradan $\mathcal{Q} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ ve $\mathcal{P} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ için,

$$\mathcal{Q} \circ \mathcal{P} = (\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2) \quad (4.5)$$

olduğu görülmektedir. $\mathcal{Q} = (Q_0 + Q_1\mathbf{i}, Q_2 + Q_3\mathbf{i})$ ve $\mathcal{P} = (P_0 + P_1\mathbf{i}, P_2 + P_3\mathbf{i})$ için (4.5) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \circ \mathcal{P} = & (Q_0P_0 - Q_1P_1 - Q_2P_2 + Q_3P_3 + i(Q_0P_1 + Q_1P_0 - Q_2P_3 - Q_3P_2), \\ & Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 - Q_3P_1 + i(Q_0P_3 + Q_1P_2 + Q_2P_1 + Q_3P_0)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitliğini elde ederiz. Bikompleks sayıların $\mathcal{Q} = Q_0 + Q_1\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + Q_3\mathbf{k}$ vektör biçimi, daha çok kullanılır. Birim vektörlerin gösterimi,

$$\mathbf{i} = (i, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1), \quad \mathbf{k} = (0, i) \quad (4.7)$$

kompleks çiftleri şeklindedir. Bunlar,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \circ \mathbf{i} &= -1 & \mathbf{j} \circ \mathbf{j} &= -1 & \mathbf{k} \circ \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \circ \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \circ \mathbf{k} &= -\mathbf{i} & \mathbf{k} \circ \mathbf{i} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \circ \mathbf{i} &= \mathbf{k} & \mathbf{k} \circ \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \circ \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.8)$$

kurallarına göre çarpılır. Buradan görüldüğü gibi bikompleks sayıların çarpma işlemi hem yer değiştirme hem de birleşme özelliğine sahiptir.

$\mathcal{Q} \in \mathbb{C}$ ise $(\mathcal{Q}, 0)$ bikompleks sayıları \mathbb{C} kompleks sayılarının bütün özelliklerine sahiptir [22].

4.1. Bikompleks Sayıların Eşlenikleri

Kompleks eşlenik, \mathbb{C} 'nin hem cebirsel hem de geometriksel özellikleri için standart kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynar. Bikompleks sayılar için mümkün olan üç eşlenik vardır.

4.1.1. Bikompleks sayıların \mathbf{i} 'ye göre eşleniği

Bütün $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \in \{Q_0 + Q_1\mathbf{i} \mid \mathbf{i}^2 = -1\}$ için \mathbf{i} 'ye göre bikompleks sayının eşleniği,

$$(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2\mathbf{j})^{\mathbf{i}} = \mathcal{Q}_1^* + \mathcal{Q}_2^*\mathbf{j} \quad (4.9)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\mathcal{Q}_1^*, \mathcal{Q}_2^*$; sırasıyla \mathcal{Q}_1 ve \mathcal{Q}_2 kompleks sayılarının kompleks eşleniğidir. Yukarıdaki eşleniğe bazen bikompleks sayıların birinci çeşit eşleniği adı da verilir. Bu eşleniğin özellikleri;

- a) $(\mathcal{Q} + \mathcal{P})^{\dagger_1} = \mathcal{Q}^{\dagger_1} + \mathcal{P}^{\dagger_1} \quad \forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$
- b) $(\mathcal{Q} - \mathcal{P})^{\dagger_1} = \mathcal{Q}^{\dagger_1} - \mathcal{P}^{\dagger_1} \quad \forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$
- c) $(\mathcal{Q}^{\dagger_1})^{\dagger_1} = \mathcal{Q} \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathbb{T}$
- d) $(\mathcal{Q} \circ \mathcal{P})^{\dagger_1} = \mathcal{Q}^{\dagger_1} \circ \mathcal{P}^{\dagger_1} \quad \forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$

olarak yazılır.

4.1.2. Bikompleks sayıların \mathbf{j} 'ye göre eşleniği

$\forall \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i})$ için ikinci çeşit eşlenik adını da verebildiğimiz \mathbf{j} 'ye göre eşleniği,

$$(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j})^{\dagger_2} = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{j} \quad (4.10)$$

formülü ile verilir. Bu eşleniğin özellikleri;

- a) $(\mathcal{Q} + \mathcal{P})^{\dagger_2} = \mathcal{Q}^{\dagger_2} + \mathcal{P}^{\dagger_2} \quad \forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$
- b) $(\mathcal{Q} - \mathcal{P})^{\dagger_2} = \mathcal{Q}^{\dagger_2} - \mathcal{P}^{\dagger_2} \quad \forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$
- c) $(\mathcal{Q}^{\dagger_2})^{\dagger_2} = \mathcal{Q} \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathbb{T}$
- d) $(\mathcal{Q} \circ \mathcal{P})^{\dagger_2} = \mathcal{Q}^{\dagger_2} \circ \mathcal{P}^{\dagger_2} \quad \forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$

olarak yazılır.

4.1.3. Bikompleks sayıların üçüncü çeşit eşleniği

Yukarıda anlatılan iki eşleniğin birleşimi olan üçüncü çeşit eşlenik,

$$(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j})^{\dagger_3} = \mathbf{Q}_1^* - \mathbf{Q}_2^* \mathbf{j} \quad (4.11)$$

formülü ile verilir. Bu eşleniğin özellikleri bütün $\forall \mathcal{Q}, \mathcal{P} \in \mathbb{T}$ içinde aşağıdaki gibi ifade edilir.

- a) $(\mathcal{Q} + \mathcal{P})^{\dagger_3} = \mathcal{Q}^{\dagger_3} + \mathcal{P}^{\dagger_3}$
- b) $(\mathcal{Q} - \mathcal{P})^{\dagger_3} = \mathcal{Q}^{\dagger_3} - \mathcal{P}^{\dagger_3}$
- c) $(\mathcal{Q}^{\dagger_3})^{\dagger_3} = \mathcal{Q}$
- d) $(\mathcal{Q} \circ \mathcal{P})^{\dagger_3} = \mathcal{Q}^{\dagger_3} \circ \mathcal{P}^{\dagger_3}$

$\mathcal{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j} = Q_0 + Q_1 \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j} + Q_3 \mathbf{k}$ bikompleks sayıları, $(+++)$ işaretine ve \mathcal{Q} 'nin 1.,2.,3. çeşit eşlenikleri sırasıyla $(+--)$, $(+-)$, $(+--)$, işaretlerine sahiptir [23].

Bu eşleniklerin her biri, diğer ikisi cinsinden ifade edilir. Birleşim altında eşlenikler Çizelge 4.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Bikompleks sayılarda eşleniklerin birleşimi [24]

•		\dagger_o	\dagger_1	\dagger_2	\dagger_3
\dagger_o		\dagger_o	\dagger_1	\dagger_2	\dagger_3
\dagger_1		\dagger_1	\dagger_o	\dagger_3	\dagger_2
\dagger_2		\dagger_2	\dagger_3	\dagger_o	\dagger_1
\dagger_3		\dagger_3	\dagger_2	\dagger_1	\dagger_o

4.2. Idempotent Bazlar

Her $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j}$ bikompleks sayıları aşağıdaki idempotent gösterime sahiptir:

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j} = (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{i}) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{i}) \mathbf{e}_2 \quad (4.12)$$

Burada,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1+\mathbf{k}}{2} \text{ ve } \mathbf{e}_2 = \frac{1-\mathbf{k}}{2} \quad (4.13)$$

dır. Bu temsil yardımıyla toplama, çarpma ve bölme kolaylıkla yapılabilir.

$\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{i} = 0$ veya $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{i} = 0$ olduğu zaman bikompleks sayı tersine çevrilemez [25].

4.3. Exponansiyel Fonksiyon

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $\mathcal{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j} \in \mathbb{T}$ olsun.

$$n^{\mathcal{Q}} = e^{\mathcal{Q} \ln(n)} \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$e^{\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j}} = e^{\mathbf{Q}_1} e^{\mathbf{Q}_2 \mathbf{j}} \text{ ve } e^{\mathbf{Q}_2 \mathbf{j}} = \cos(\mathbf{Q}_2) + \mathbf{j} \sin(\mathbf{Q}_2) \quad (4.15)$$

dir. Bu nedenle bunu,

$$n^{\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{j}} = e^{\mathbf{Q}_1 \ln(n)} [\cos(\mathbf{Q}_2 \ln(n)) + \mathbf{j} \sin(\mathbf{Q}_2 \ln(n))] \quad (4.16)$$

biçiminde yazabiliriz [26].

4.4. Bikompleks Schrödinger Eşitliği

Bikompleks sayılar, \mathbb{C} kompleks sayılarının ve \mathbb{D} hiperbolik sayıların bir genelleştirilmesidir. Bu nedenle bikompleks kuantum mekaniği, standart kuantum mekaniği ve hiperbolik kuantum mekaniğinin genelleştirilmesidir. Rochon ve Tremblay [3] Schrödinger eşitliğini biraz sonra değinileceği gibi bikompleks formda yazmışlardır.

İlk önce $\alpha, \beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye sahip $\Psi = e^{\alpha(x,t) + \beta(x,t)\mathbf{j}}$ oluşturulacak olursa o zaman Schrödinger eşitliği, α ve β fonksiyonları cinsinden iki diferansiyel denklem sistemi olarak yazılabilir:

$$-\hbar \partial_t \beta + \frac{\hbar^2}{2m} [\partial_x^2 \alpha + (\partial_x \alpha)^2 - (\partial_x \beta)^2] - V = 0 \quad (4.17a)$$

$$\partial_t \alpha + \frac{\hbar^2}{2m} [\partial_x^2 \beta + 2\partial_x \alpha \partial_x \beta] = 0 \quad (4.17b)$$

Standart Schrödinger eşitliğinin bikompleks uzay fonksiyonları üzerinde analogu incelendiğinde,

$$\mathbf{i} \hbar \partial_t \Psi(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi(x,t) - V(x,t) \Psi(x,t) = 0 \quad (4.18)$$

olur. Burada,

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T} \text{ ve } V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.19)$$

dır.

Hiperbolik kuantum mekaniğinde bikompleks Schrödinger eşitliğindeki \mathbf{i} imajiner biriminin seçimi keyfi değildir. Eğer, \mathbf{k} hiperbolik imajiner birimi seçilirse üst üste binme ilkesini sağlamayacaktır. Bu nedenle \mathbf{i} veya \mathbf{j} imajiner birimleri arasında bir seçim yapılmalıdır. Temelde \mathbf{j} 'nin yerine \mathbf{i} 'yi seçmenin önemli bir sebebi yoktur, ancak \mathbf{i} imajiner birimi, idempotent bazlar adını verdiğimiz bikompleks Schrödinger eşitliğinin bileşenleri için daha uygundur.

$\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu hiper-polar koordinatlarda

$$\psi(x, t) = e^{\mathbf{z}_1(x,t) + \mathbf{z}_2(x,t)\mathbf{j}} \quad (4.20)$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\mathbf{z}_1(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)\mathbf{i} \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{z}_2(x, t) = \gamma(x, t) + \delta(x, t)\mathbf{j} \quad (4.21b)$$

ve α, β, γ ve $\delta, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye giden reel fonksiyonlardır. Bu nedenle (4.18) bikompleks Schrödinger eşitliği α, β, γ ve δ reel fonksiyonları cinsinden dört diferansiyel denklem sisteminde bileşenlerine ayrılabilir:

$$-\hbar\partial_t\beta + \frac{\hbar^2}{2m}[\partial_x^2\alpha + (\partial_x\alpha)^2 - (\partial_x\beta)^2 - (\partial_x\gamma)^2 + (\partial_x\delta)^2] - V = 0 \quad (4.22a)$$

$$\partial_t\alpha + \frac{\hbar}{2m}[\partial_x^2\beta + 2(\partial_x\alpha\partial_x\beta - \partial_x\gamma\partial_x\delta)] = 0 \quad (4.22b)$$

$$-\partial_t\delta + \frac{\hbar}{2m}[\partial_x^2\gamma + 2(\partial_x\alpha\partial_x\gamma - \partial_x\beta\partial_x\delta)] = 0 \quad (4.22c)$$

$$+\partial_t\gamma + \frac{\hbar}{2m}[\partial_x^2\delta + 2(\partial_x\alpha\partial_x\delta + \partial_x\beta\partial_x\gamma)] = 0 \quad (4.22d)$$

$\gamma \rightarrow 0$ ve $\delta \rightarrow 0$ olduğunda Denklem (4.22a-d), (4.17a-b) standart Schrödinger eşitliğine gider.

4.5. Süreklilik Denklemleri

Bir dalga fonksiyonunun fiziksel olarak bir anlamı ve boyutu olmamakla birlikte, mutlak değerinin karesi yani $|\psi(x, y, z, t)|^2$, parçacığın birim hacimde bulunma olasılığıdır ve olasılık yoğunluğu adını alır, $\rho(x, y, z, t)$ ile gösterilir. Şu halde tanım olarak olasılık yoğunluğu;

$$\rho(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2 = \psi^*(x, y, z, t)\psi(x, y, z, t) \quad (4.23)$$

olmaktadır. Bu tanıma göre parçacığın herhangi bir $dV = dx dy dz$ hacim elemanı içinde bulunma olasılığı; $\rho(x, y, z, t)dV$, tüm uzayda bulunma olasılığı ise;

$$\int_{\text{tümuzay}} \rho(x, y, z, t)dV = \int_{\text{tümuzay}} \psi^* \psi dV = \frac{100}{100} = 1 \quad (4.24)$$

olur. Denklem (4.23) parçacığın uzayın herhangi bir yerinde mutlak var olması anlamını taşır ve dalga fonksiyonunun normalizasyon koşulu olarak bilinir. Bu

koşul yerine getirilerek dalga fonksiyonu normalize edilir. Parçacığın olasılık yoğunluğunun uzayda yer değiştirmesi ise olasılık akısı adını alır ve $\vec{J}(x, y, z, t)$ ile gösterilir. Olasılık yoğunluğu ve olasılık akısı arasında;

$$\frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(x, y, z, t) = 0 \quad (4.25)$$

ilişkisi vardır. Denklem (4.25)'e dikkat edilirse olasılık akısının konuma göre değişimi, olasılık yoğunluğunun zamana göre değişimine sebep olmaktadır. Denklem (4.25) "olasılık yoğunluğu ve akısının korunumu yasası" olarak bilinir [27]. Burada olasılık akımı

$$J(x, y, z, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \quad (4.26)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$J(\psi) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \partial_x \psi - \psi \partial_x \psi^*) \quad (4.27a)$$

$$= \frac{\hbar}{m} e^{2\alpha} \partial_x \beta \quad (4.27b)$$

dır. Denklem (4.27b) ve (4.25)'in olasılık akımının korunumuna denk geldiğine dikkat edelim. Bu nedenle standart Schrödinger eşitliğinin reel ve imajiner kısımlarına ayrılmasıyla iki eşitlik elde ederiz. Denklem (4.17a) Jacobi-Hamilton eşitliğinin genişletilmiş versiyonudur ve (4.17b) olasılık akımının korunumuna karşılık gelir.

4.5.1. Bikompleks süreklilik denklemleri

Rochon ve Tremblay [3], bikompleks Schrödinger denklemleri için süreklilik denklemlerini de türetmiştir. Bunun için bikompleks Schrödinger eşitliğine dört çeşit eşlenik sırasıyla uygulandığında,

$$+ i\hbar \partial_t \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi - V\psi = 0 \quad (4.28a)$$

$$- i\hbar \partial_t \psi^{\dagger} + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi^{\dagger} - V\psi^{\dagger} = 0 \quad (4.28b)$$

$$+i\hbar\partial_t\psi^{\dagger_2} + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi^{\dagger_2} - V\psi^{\dagger_2} = 0 \quad (4.28c)$$

$$-i\hbar\partial_t\psi^{\dagger_3} + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi^{\dagger_3} - V\psi^{\dagger_3} = 0 \quad (4.28d)$$

olur. ψ^{\dagger_1} ile çarpılan (4.28a), ψ ile çarpılan (4.28b)'den çıkartıldığında

$$i\partial_t(\psi\psi^{\dagger_1}) + \frac{\hbar}{2m}(\psi^{\dagger_1}\partial_x^2\psi - \psi\partial_x^2\psi^{\dagger_1}) = 0 \quad (4.29)$$

olur. Bu denklem süreklilik eşitliği cinsinden tekrar yazılır:

$$\partial_t(\psi\psi^{\dagger_1}) + \nabla \cdot \mathcal{J}_1(\psi) = 0 \quad (4.30)$$

Burada;

$$\mathcal{J}_1(\psi) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^{\dagger_1}\partial_x\psi - \psi\partial_x\psi^{\dagger_1}) \quad (4.31a)$$

$$= \frac{\hbar}{m}e^{2(\alpha+\gamma j)}\partial_x(\beta + \delta \mathbf{j}) \quad (4.31b)$$

dir. Bu hesaplamalar, (4.28a-d)'deki denklem çiftinin hepsi için yapılabilir. Ancak, her eşitliğin önündeki i imajiner biriminin işaretinin incelediğimiz denklem çiftindekine zıt olması koşuluyla bir süreklilik eşitliğini oluşturabiliriz. Aslında, (4.28a) ve (4.28c) veya (4.28b) ve (4.28d) çiftlerinden bir süreklilik eşitliği elde etmek mümkün değildir. Böylece diğer üç süreklilik denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\partial_t(\psi\psi^{\dagger_3}) + \nabla \cdot \mathcal{J}_2(\psi) = 0 \quad (4.32)$$

$$\mathcal{J}_2(\psi) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^{\dagger_3}\partial_x\psi - \psi\partial_x\psi^{\dagger_3}) \quad (4.33a)$$

$$= \frac{\hbar}{m}e^{2(\alpha+\delta \mathbf{k})}\partial_x(\beta - \gamma \mathbf{k}) \quad (4.33b)$$

$$\partial_t(\psi^{\dagger_2}\psi^{\dagger_1}) + \nabla \cdot \mathcal{J}_3(\psi) = 0 \quad (4.34)$$

$$\mathcal{J}_3(\psi) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^{\dagger_1}\partial_x\psi^{\dagger_2} - \psi^{\dagger_2}\partial_x\psi^{\dagger_1}) \quad (4.35a)$$

$$= \frac{\hbar}{m}e^{2(\alpha-\delta \mathbf{k})}\partial_x(\beta + \gamma \mathbf{k}) \quad (4.35b)$$

$$\partial_t(\psi^{\dagger_2}\psi^{\dagger_3}) + \nabla \cdot \mathcal{J}_4(\psi) = 0 \quad (4.36)$$

$$\mathcal{J}_4(\psi) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^{\dagger_3}\partial_x\psi^{\dagger_2} - \psi^{\dagger_2}\partial_x\psi^{\dagger_3}) \quad (4.37a)$$

$$= \frac{\hbar}{m} e^{2(a-\gamma j)} \partial_x (\beta - \delta \mathbf{j}) \quad (4.37b)$$

dört süreklilik denkleminin yukarıda tanımlanan denklemler sistemi olduğu kanıtlanabilir. Denklem (4.30)'un \dagger_2 eşleniği alınırsa (4.36) elde edilir. Burada $\mathcal{J}_4 = (\mathcal{J}_1)^{\dagger_2}$ 'dir. Aynı şekilde (4.32)'nin \dagger_1 eşleniği alındığında $\mathcal{J}_3 = (\mathcal{J}_2)^{\dagger_1}$ ile (4.34) elde edilir. Böylece iki bağımsız süreklilik denklemi elde edilir. \mathbf{J}_1 ve \mathbf{J}_2 akımlar için baz olarak seçilir.

Denklem (4.30)'daki süreklilik denklemi, gerçekte (4.22b) ve (4.22d)'ye eşdeğer, aynı şekilde (4.32)'deki süreklilik denklemi ve (4.22b) ve (4.22c)'ye eşdeğerdir. Bu yüzden (4.22a), standart durumun Hamilton-Jacobi eşitliğinin genişletilmiş versiyonuna ve (4.22b), (4.22c) ve (4.22d) \mathcal{J}_1 ve \mathcal{J}_2 cinsinden ifade edilen (4.30) ve (4.32)'deki süreklilik denklemlerine eşdeğerdir.

4.5.2. Bikompleks Schrödinger denklemlerinin kesikli simetrisi

Denklem (4.22a-d), sisteminin çözüm kümesini değişmez bırakan 8-boyutlu kesikli gruba sahiptir. Bu kesikli simetri grubu,

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 &= Id & \hat{P}_1 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow -\gamma \\ \delta \rightarrow -\delta \end{cases} \\ \hat{P}_2 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow -\delta \mathbf{j} \\ \delta \rightarrow \gamma \mathbf{j} \end{cases} & \hat{P}_3 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow \delta \mathbf{j} \\ \delta \rightarrow -\gamma \mathbf{j} \end{cases} \\ \hat{P}_4 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow \delta \mathbf{i} \\ \delta \rightarrow -\gamma \mathbf{i} \end{cases} & \hat{P}_5 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow -\delta \mathbf{i} \\ \delta \rightarrow \gamma \mathbf{i} \end{cases} \\ \hat{P}_6 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow \gamma \mathbf{k} \\ \delta \rightarrow \delta \mathbf{k} \end{cases} & \hat{P}_7 &= \begin{cases} \gamma \rightarrow -\gamma \mathbf{k} \\ \delta \rightarrow -\delta \mathbf{k} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.38)$$

dir.

$\Psi(x, t)$ bikompleks dalga fonksiyonununun $\alpha(x, t)$ ve $\beta(x, t)$ fonksiyonları, bu kesikli simetri grupları altında dönüştürülemez.

Bu dönüşümler ile ilgili bazı özellikler şunlardır:

- a) Denklem (4.38)'deki simetri grubu, $n = 0, 1, \dots, 7$ için $\hat{P}_n^2 = Id$ ile değişmeli bir gruptur.

b) $\{\hat{P}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3\}$ ile verilen küme, simetri grubunun bir alt grubudur ve bikompleks sayılar için (4.1) eşlenikler grubuna izomorftur.

c) $\hat{P}_4, \hat{P}_5, \hat{P}_6$ ve \hat{P}_7 kesikli operatörler, sırasıyla $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2$ ve \hat{P}_3 kesikli operatörleri gibi herhangi bir bikompleks sayı üzerinde işlem yapar, yani

$$\hat{P}_{n+4}(\varrho) = \hat{P}_n(\varrho) \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad \forall \varrho \in \mathbb{T} \quad (4.39)$$

dir. Bu nedenle $\{\hat{P}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3\}$ ile verilen simetri grubu için “temel bir alt grubu” elde ederiz.

Bu simetrisi, (4.22a)’yı içeren (4.22)’ye eşdeğer olan denklemler sistemine ve süreklilik denklemlerinin verildiği (4.30) ve (4.32)’ye uygulayalım. Denklem (4.22a) simetrisi altında invaryanttır. Denklem (4.30) ve (4.32)’deki süreklilik denklemlerinin bu simetrisi altında nasıl dönüştürüldüğü incelenebilir. \mathcal{J}_1 ve \mathcal{J}_2 , Ψ cinsinden ifade edilebildiği için yalnızca simetri operatörlerinin Ψ ’ye uygulanması hesaplanmalıdır:

$$\hat{P}_1(\Psi) = \Psi^{\dagger 2}, \quad \hat{P}_2(\Psi) = \Psi_+, \quad \hat{P}_3(\Psi) = \Psi_- \quad (4.40)$$

Burada Ψ_+ ve Ψ_- fonksiyonları,

$$\Psi_{\pm} = e^{\mathbf{z}_1 \mp \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{i}} = e^{(a \pm \delta) + (\beta \mp \gamma) \mathbf{i}} \quad (4.41)$$

ile verilen $\mathbb{C}(\mathbf{i})$ -uzayındaki fonksiyonlardır. Bu hesaplamalarda \hat{P}_1 (4.30) ve (4.32)’yi sırasıyla (4.36) ve (4.34)’e dönüştürür. \hat{P}_2 kesikli simetrisi altında (4.30) ve (4.32);

$$\partial_t(\Psi_+ \bar{\Psi}_+) + \nabla \cdot \mathcal{J}(\Psi_+) = 0 \quad (4.42)$$

süreklilik eşitliğine dönüşür. Burada;

$$\mathcal{J}(\Psi_+) = \frac{\hbar}{2m\mathbf{i}} (\bar{\Psi}_+ \partial_x \Psi_+ - \Psi_+ \partial_x \bar{\Psi}_+) \quad (4.43a)$$

$$= \frac{\hbar}{m} e^{2(a+\delta)} \partial_x (\beta - \gamma) \quad (4.43b)$$

dır. Son olarak \hat{P}_3 altında, (4.30) ve (4.32);

$$\partial_t(\Psi_- \bar{\Psi}_-) + \nabla \cdot \mathcal{J}(\Psi_-) = 0 \quad (4.44)$$

süreklilik eşitliğine dönüşür. Burada;

$$\mathcal{J}(\Psi_-) = \frac{\hbar}{2m\mathbf{i}} (\bar{\Psi}_- \partial_x \Psi_- - \Psi_- \partial_x \bar{\Psi}_-) \quad (4.45a)$$

$$= \frac{\hbar}{m} e^{2(\alpha-\delta)} \partial_x (\beta+\gamma) \quad (4.45b)$$

dır.

Denklem (4.42) ve (4.44)'de reel $\mathcal{J}(\psi_+)$ ve $\mathcal{J}(\psi_-)$ akımları ile ilişkili olan süreklilik denklemleri elde edilir.

İdempotent bazların kullanılmasıyla ψ bikompleks dalga fonksiyonu ψ_+ ve ψ_- cinsinden ifade edilir. Aslında, bütün bikompleks sayılar için $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ reel bazlarından, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ kompleks bazlarına geçilebilir. Burada $\mathbf{e}_1 = \frac{1+\mathbf{k}}{2}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1-\mathbf{k}}{2}$ dir. $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$ cinsinden yazılabilir yani $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1)^{\dagger_1} = (\mathbf{e}_1)^{\dagger_2}$ dir. Ancak $\mathbf{e}_2 \neq (\mathbf{e}_1)^{\dagger_3}$ dir. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ elemanları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(\mathbf{e}_1)^2 = \mathbf{e}_1, \quad (\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0 \quad (4.46)$$

Bikompleks exponansiyel aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$e^{\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \mathbf{j}} = e^{\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \mathbf{i}} \mathbf{e}_1 + e^{\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \mathbf{i}} \mathbf{e}_2 \quad (4.47)$$

Aynı şekilde dalga fonksiyonu, idempotent bazlarda;

$$\psi = \psi_+ \mathbf{e}_1 + \psi_- \mathbf{e}_2 \quad (4.48)$$

olarak ifade edebilir. Bu nedenle idempotent bazlar kullanıldığında, (4.18) bikompleks Schrödinger eşitliği;

$$\left(i\hbar \partial_t \psi_+ + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_+ - V \psi_+ \right) \mathbf{e}_1 + \left(i\hbar \partial_t \psi_- + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_- - V \psi_- \right) \mathbf{e}_2 = 0 \quad (4.49)$$

biçimini alır. Bu ifade, iki standart Schrödinger eşitliğine ayrıştırılır:

$$i\hbar \partial_t \psi_{\pm} + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_{\pm} - V \psi_{\pm} = 0 \quad (4.50)$$

Bu denklemler birleştirildiğinde, sırasıyla (4.43) ve (4.45) ile verilen $\mathbf{J}(\psi_{\pm})$ reel akımları cinsinden (4.42) ve (4.44) süreklilik denklemleri elde edilir [7].

5. KUATERNİYON CEBİRİ

5.1. Kuaterniyonların Tanımlanması

Kuaterniyon, dört tane bileşen içeren matematiksel bir yapıdır. William Hamilton 1843’de kuaterniyonları keşfetti. Kuaterniyonlar kompleks sayılarının bir genelleştirilmesi olarak ortaya çıktı. Bir kuaterniyon $\mathbf{Q} = Q_0\mathbf{e}_0 + Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3$ olarak yazılabilir. Burada \mathbf{e}_0 reel; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ imajiner birimlerdir [28]. Bu birimler,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 0, 1)\end{aligned}\tag{5.1}$$

olarak yazılır ve burada Q_0, Q_1, Q_2 ve Q_3 reel sayılardır [29]. Baz elemanlar aşağıdaki kuralları sağlar:

$$\mathbf{e}_0^2 = 1 \text{ ve } \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1\tag{5.2}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\tag{5.3}$$

Bir $\mathbf{Q} = Q_0\mathbf{e}_0 + Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3$ kuaterniyonu, (Q_0) skaler kısmını ve $(Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3)$ vektörel kısmını içerir. $\mathbf{Q}_V = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3$ biçimindeki bir kuaterniyona, pür kuaterniyon adı verilir ve herhangi bir vektöre benzer. Kuaterniyonlar $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_V$ olarak da yazılabilir. Burada Q_0, \mathbf{Q} ’nun reel kısmıdır ve $\mathbf{Q}_V = Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3$, \mathbf{Q} ’nun pür kuaterniyonudur.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ kuaterniyon bazlarının ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Pauli matrislerinin cebirsel olarak izomorf olduğuna dikkat edilir. Yani $\mathbf{e}_1 = -i\sigma_1, \mathbf{e}_2 = -i\sigma_2, \mathbf{e}_3 = -i\sigma_3$ dir [30].

5.1.1. Kuaterniyonlarda toplama işlemi

İki kuaterniyon,

$$\mathbf{P} = P_0\mathbf{e}_0 + P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2 + P_3\mathbf{e}_3\tag{5.4}$$

ve

$$\mathbf{Q} = Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.5)$$

olmak üzere toplama ve çıkarma işlemi,

$$\mathbf{P} \mp \mathbf{Q} = (P_0 \mp Q_0) \mathbf{e}_0 + (P_1 \mp Q_1) \mathbf{e}_1 + (P_2 \mp Q_2) \mathbf{e}_2 + (P_3 \mp Q_3) \mathbf{e}_3 \quad (5.6)$$

olarak tanımlanır. Bu kural ile her iki kuaterniyonun bileşenlerinin toplamı veya farkı, bu iki kuaterniyonun toplamı veya farkının bileşenlerini oluşturur [31].

5.1.2. Çarpımın tanımlanması

Çarpma işlemi toplama işlemine göre oldukça karmaşıktır. Çarpma işlemi dağılma özelliği yardımıyla tanımlanır.

$$\mathbf{P} = P_0 \mathbf{e}_0 + P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2 + P_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.7)$$

ve

$$\mathbf{Q} = Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.8)$$

olmak üzere kuaterniyonların çarpma işlemi,

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} = & (P_0 Q_0 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2 - P_3 Q_3) \mathbf{e}_0 + (P_0 Q_1 + Q_0 P_1 + P_2 Q_3 - P_3 Q_2) \mathbf{e}_1 \\ & + (P_0 Q_2 + Q_0 P_2 + P_3 Q_1 - P_1 Q_3) \mathbf{e}_2 + (P_0 Q_3 + Q_0 P_3 + P_1 Q_2 - P_2 Q_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

olarak ifade edilir [32].

$\mathbf{P} = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_v$ ve $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_v$ şeklinde iki kuaterniyonun çarpımı ise aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{P}_s \mathbf{Q}_s - \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{Q}_v + \mathbf{P}_s \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_s \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_v \times \mathbf{Q}_v \quad (5.10)$$

5.1.3. Kuaterniyonların çarpımının matris cebriyle gösterimi

Denklem (5.10)'da tanımlanan kuaterniyonların çarpımı matris cebirinin kullanılmasıyla ifade edilebilir. Eğer çarpma işlemi düzenlenirse;

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_v = R_0 \mathbf{e}_0 + R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 + R_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.11)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
R_0 &= P_0Q_0 - P_1Q_1 - P_2Q_2 - P_3Q_3 \\
R_1 &= P_0Q_1 + P_1Q_0 + P_2Q_3 - P_3Q_2 \\
R_2 &= P_0Q_2 - P_1Q_3 + P_2Q_0 + P_3Q_1 \\
R_3 &= P_0Q_3 + P_1Q_2 - P_2Q_1 + P_3Q_0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

dir ve matris gösterimi yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & P_0 & -P_3 & P_2 \\ P_2 & P_3 & P_0 & -P_1 \\ P_3 & -P_2 & P_1 & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

olur. Toplama işlemi düşünüldüğünde kuaterniyonlar cisim özelliklerini sağlarlar. Üstelik kuaterniyonlar kümesi, çarpmanın yer değiştirmesi dışında, bütün cisim özelliklerini sağladığı anlamına gelen değişimli olmayan bir bölüm cebridir [33].

İki kuaterniyonun çarpımı, $\mathbf{P}_s \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_s \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_v \times \mathbf{Q}_v$ vektörel kısmına sahip diğer bir kuaterniyondur. Bu yüzden kuaterniyonlar kümesi, toplamaya ek olarak çarpmada da kapalılık özelliğine sahiptir.

Kuaterniyon çarpımı, birleşme özelliğine sahiptir. $\mathbf{P}_v \times \mathbf{Q}_v$ vektörel çarpımı yer değiştirmedeği için, kuaterniyon çarpımı yer değiştirmez ve bu kuaterniyon cebirinin cisim özelliklerinden tek bir ayrıcalıktır. Fakat kuaterniyon çarpımı dışında toplama işlemi için de bir tanıma sahip olunmalıdır. Kuaterniyonlar kümesi, reel kısmı 1 ve vektör kısmı $\vec{0}$ olan bir kuaterniyon için $\mathbf{Q} = 1 + \vec{0}$ dir.

Sıfır olmayan her kuaterniyonun, çarpmaya göre tersi vardır.

5.1.4. Kuaterniyonlarda eşlenik işlemi

\mathbf{Q} kuaterniyon eşleniği,

$$\overline{\mathbf{Q}} = \overline{(Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3)} = Q_0 \mathbf{e}_0 - Q_1 \mathbf{e}_1 - Q_2 \mathbf{e}_2 - Q_3 \mathbf{e}_3 \tag{5.14}$$

olarak ifade edilir. $(\mathbf{Q} + \overline{\mathbf{Q}})$ ve $(\mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}})$ 'nun her ikisi de reeldir. Ayrıca,

$$|\mathbf{Q}| = \sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \tag{5.15}$$

olarak \mathbf{Q} 'nun normu tanımlanırsa, $\mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{Q} = |\mathbf{Q}|^2$ 'dir. İki kuaterniyonun toplamının eşleniği, bu kuaterniyonların ayrı ayrı eşleniklerinin toplamına eşittir:

$$\overline{\mathbf{P} + \mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} \quad (5.16)$$

Çarpma işleminde ise,

$$\overline{\mathbf{PQ}} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{P}} \quad (5.17)$$

biçiminde ifade edilir [34].

\mathbf{P} ve \mathbf{Q} kuaterniyonlarının çarpımının normu her bir kuaterniyonun normlarının çarpımına eşittir:

$$\begin{aligned} N^2(\mathbf{R}) &= (\mathbf{PQ})(\overline{\mathbf{PQ}}) \\ &= \mathbf{PQ}\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{P}} \\ &= \mathbf{P}N^2(\mathbf{Q})\bar{\mathbf{P}} \\ &= \bar{\mathbf{P}}\mathbf{P}N^2(\mathbf{Q}) \\ &= N^2(\mathbf{P})N^2(\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

İki birim kuaterniyonun çarpımı yine birim kuaterniyondur.

5.1.5. Kuaterniyonlarda bölme işlemi

Çarpma işlemi yer değiştirmedeği için aşağıdaki iki özdeşliğin çözümü olan $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}$ sembolik ifadenin tanımlanmasıyla soldan \mathbf{Q}_L^{-1} sağdan \mathbf{Q}_R^{-1} işlemlerinin her ikisini de türetelim:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}_L^{-1} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{Q}_R^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{P} \quad (5.19)$$

Bu özdeşliklerin her iki tarafını da sırasıyla soldan ve sağdan $\frac{\bar{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2}$ ile çarptığımızda

$$\mathbf{Q}_L^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{P}}{|\mathbf{Q}|^2}, \quad \mathbf{Q}_R^{-1} = \frac{\mathbf{P}\bar{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2} \quad (5.20)$$

elde ederiz. Bu nedenle genelde bu iki farklı bölme ortaya çıkacaktır, ancak $\mathbf{P} = 1$ olduğu özel bir durumda,

$$\mathbf{Q}_L^{-1} = \mathbf{Q}_R^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2} \quad (5.21)$$

biçiminde ifade edilen kuaterniyonun çarpmaya göre tersi elde edilir [34].

5.2. Bikuaterniyonların Tanımı

Bikuaterniyon, 19. yy. da William Kingdon Clifford, William Rowan Hamilton ve Alexander MacAuley tarafından geliştirilen bir nümerik ve geometriksel bir kavramdır.

Bütün bikuaterniyonlar kümesi, dört boyutlu bir kompleks vektör uzayını veya sekiz boyutlu bir reel vektör uzayını oluşturur. Kuaterniyon grubuna göre bileşene bağlı olarak toplama ve çarpma işlemleri incelendiğinde, bu küme yer değiştirmeyen ancak birleşme özelliğine sahip bir halkayı oluşturur [35].

Bikuaterniyonlar cebri, $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ ile gösterilir. Her \mathbf{Q} bikuaterniyonu,

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=0}^3 \mathbf{Q}_k \mathbf{e}_k \quad (5.22)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\{\mathbf{Q}_k\} \subset \mathbb{C}$ dir. \mathbf{e}_0 skaler birimdir ve $\{\mathbf{e}_i | i = 1,2,3\}$, kuaterniyonik imajiner birimlerdir. Bunlar

$$\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_i^2, \quad \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (5.23)$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

çarpım kurallarına uymaktadır [36]. Buradaki çarpma işlemleri

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\delta_{ij} + \sum \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (5.24)$$

biçiminde ifade edilir. Bikuaterniyonlar reel kuaterniyonların kompleks bir ifadesi olduğu için kompleks kuaterniyonlar olarak da adlandırılır [37].

$\mathbf{Q} = \sum_i \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i$ bikuaterniyonunu daha açık bir ifade ile yazabiliriz. \mathbf{P} ve

\mathbf{R} kuaterniyonları,

$$\mathbf{P} = P_0 \mathbf{e}_0 + P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2 + P_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.25)$$

ve

$$\mathbf{R} = R_0 \mathbf{e}_0 + R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 + R_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.26)$$

ile verilirse \mathbf{Q} bikuaterniyonunu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + i\mathbf{R} \quad (5.27)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (P_0 + iR_0)\mathbf{e}_0 + (P_1 + iR_1)\mathbf{e}_1 + (P_2 + iR_2)\mathbf{e}_2 + (P_3 + iR_3)\mathbf{e}_3 \\ &= (P_0 + iR_0, P_1 + iR_1, P_2 + iR_2, P_3 + iR_3) \\ &= (P_0 + iR_0, P_1 + iR_1) \\ &= (\mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}'_v) \end{aligned} \quad (5.28)$$

olur. \mathbf{Q} bikuaterniyonunun \mathbf{Q}_s ; skaler kısmını, \mathbf{Q}_v ; vektörel kısmını göstermek üzere,

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_0 \quad (5.29)$$

ve

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{Q}_3 \mathbf{e}_3 \quad (5.30)$$

şeklinde. i ise, $i^2 = -1$ olan kompleks bir sayıdır.

5.2.1. Bikuaterniyonlarda matematiksel işlemler

\mathbf{P} ve \mathbf{Q} gibi iki bikuaterniyonunun çarpımı aynı reel kuaterniyonlarda olduğu gibi;

$$\mathbf{PQ} = (\mathbf{P}_s + \mathbf{P}_v)(\mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_v) = \mathbf{P}_s \mathbf{Q}_s + \mathbf{P}_s \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_s \mathbf{P}_v - \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{Q}_v + \mathbf{P}_v \times \mathbf{Q}_v \quad (5.31)$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki nokta ve cross çarpımlar, üç boyutlu uzaydaki skaler ve vektörel çarpımlara karşılık gelmektedir. En son yazdığımız ifadeyi açarsak,

$$\begin{aligned}
\mathbf{PQ} &= \left[(P_0 + P_0') \mathbf{e}_0 + (P_1 + P_1') \mathbf{e}_1 + (P_2 + P_2') \mathbf{e}_2 + (P_3 + P_3') \mathbf{e}_3 \right] \\
&\quad \left[(Q_0 + Q_0') \mathbf{e}_0 + (Q_1 + Q_1') \mathbf{e}_1 + (Q_2 + Q_2') \mathbf{e}_2 + (Q_3 + Q_3') \mathbf{e}_3 \right] \\
&= (P_0 Q_0 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2 - P_3 Q_3 - P_0' Q_0' + P_1' Q_1' + P_2' Q_2' + P_3' Q_3') \mathbf{e}_0 \\
&\quad + i (P_0 Q_0' - P_1 Q_1' - P_2 Q_2' - P_3 Q_3' + P_0' Q_0 - P_1' Q_1 - P_2' Q_2 - P_3' Q_3) \mathbf{e}_0 \\
&\quad + (P_0 Q_1 + P_1 Q_0 + P_2 Q_3 - P_3 Q_2 - P_0' Q_1' - P_1' Q_0' - P_2' Q_3' + P_3' Q_2') \mathbf{e}_1 \\
&\quad + i (P_0 Q_1' + P_1 Q_0' + P_2 Q_3' - P_3 Q_2' + P_0' Q_1 + P_1' Q_0 + P_2' Q_3 - P_3' Q_2) \mathbf{e}_1 \\
&\quad + (P_0 Q_2 - P_1 Q_3 + P_2 Q_0 + P_3 Q_1 - P_0' Q_2' + P_1' Q_3' - P_2' Q_0' - P_3' Q_1') \mathbf{e}_2 \\
&\quad + i (P_0 Q_2' - P_1 Q_3' + P_2 Q_0' + P_3 Q_1' + P_0' Q_2 - P_1' Q_3 + P_2' Q_0 - P_3' Q_1) \mathbf{e}_2 \\
&\quad + (P_0 Q_3 + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 + P_3 Q_0 - P_0' Q_3' - P_1' Q_2' + P_2' Q_1' - P_3' Q_0') \mathbf{e}_3 \\
&\quad + i (P_0 Q_3' + P_1 Q_2' - P_2 Q_1' + P_3 Q_0' + P_0' Q_3 + P_1' Q_2 - P_2' Q_1 + P_3' Q_0) \mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{5.32}$$

olur. İki bikuaterniyonun çarpımının sonucunun yine bir bikuaterniyon olduğunu bu denklemler sisteminden görülebilir.

Her bikuaterniyon için eşlenik tanımlamak mümkündür. \mathbf{Q} bikuaterniyonun eşleniği,

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{Q}_3 \mathbf{e}_3 \tag{5.33}$$

olarak ifade edilir, ancak \mathbf{Q}^* kompleks eşleniği,

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_0^* \mathbf{e}_0 - \mathbf{Q}_1^* \mathbf{e}_1 - \mathbf{Q}_2^* \mathbf{e}_2 - \mathbf{Q}_3^* \mathbf{e}_3 \tag{5.34}$$

olarak tanımlanır. Eşlenik, bikuaterniyonlar halkasının otomorfizmidir. Yani

$$\overline{\mathbf{PQ}} = \overline{\mathbf{QP}} \tag{5.35}$$

dir. Kompleks eşlenik,

$$(\mathbf{PQ})^* = \mathbf{Q}^* \mathbf{P}^* \tag{5.36}$$

anti-otomorfizm olarak tanımlanır [38].

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{Q}_3 \mathbf{e}_3 \tag{5.37}$$

eşleniğine sahip bir \mathbf{Q} bikuaterniyonunun normu,

$$|\mathbf{Q}|^2 = \mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_0^2 + \mathbf{Q}_1^2 + \mathbf{Q}_2^2 + \mathbf{Q}_3^2 \tag{5.38}$$

ile verilir.

Sadece ve sadece $|\mathbf{Q}|^2 \neq 0$ ise \mathbf{Q} bikuaterniyonunun tersi vardır ve bu durumda

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2} \quad (5.39)$$

olur. Daha ileri gidilirse sadece ve sadece $|\mathbf{Q}|^2 = 0$ olursa \mathbf{Q} , cebirin bir sıfır bölenidir [39].

\mathbf{P} ve \mathbf{Q} bikuaterniyonları birleşim cebirlerini sağlar, yani

$$N(\mathbf{PQ}) = N(\mathbf{P})N(\mathbf{Q}) \quad (5.40)$$

dir [38].

$n = 2$ için \mathbf{e}_i ($i = 0,1,2,3$) temel birimlerine sahip bikuaterniyonların izomorf bir gösterimi Pauli matrisleriyle elde edilir.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_1 - i\mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_3 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

matris gösterimi ve $N(\mathbf{Q}) \equiv \det(\mathbf{Q})$ 'ye sahip genel bikuaterniyonlar ile

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

elde ederiz [40].

5.2.2. Bikuaterniyonik açısal momentum

Açısal momentum,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (5.43)$$

biçiminde temsil edilen vektörel niceliklerdir. Burada \vec{r} ve \vec{p} , sırasıyla konum ve momentum vektörleridir. Eğer \vec{r} ve \vec{p} vektörleri bikuaterniyonik notasyonda yazılırsa,

$$\mathbf{r} = ix\mathbf{e}_1 + iy\mathbf{e}_2 + iz\mathbf{e}_3 \quad (5.44)$$

ve

$$\mathbf{p} = ip_x\mathbf{e}_1 + ip_y\mathbf{e}_2 + ip_z\mathbf{e}_3 \quad (5.45)$$

denklemleri elde edilir. Bu bikuaterniyonlar çarpılırsa bikuaterniyonik açısal momentum,

$$\mathbf{rp} = (\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_v)(\mathbf{p}_s + \mathbf{p}_v) = \mathbf{r}_s \mathbf{p}_s + \mathbf{r}_s \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_s \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{p}_v + i \mathbf{r}_v \times \mathbf{p}_v \quad (5.46)$$

dır. Burada $\mathbf{r}_s = 0, \mathbf{p}_s = 0$ olduğundan son olarak yazılan (5.46),

$$\mathbf{rp} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + i \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.47)$$

olur ve

$$\overline{\mathbf{rp}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.48)$$

yazılabilir. Denklem (5.47) ve (5.48) taraf tarafa çıkartıldığında,

$$\mathbf{rp} - \overline{\mathbf{rp}} = 2i \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.49)$$

ve

$$\mathbf{rp} - \overline{\mathbf{rp}} = 2i \mathbf{L} \quad (5.50)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{rp} - \overline{\mathbf{rp}}}{2i} \quad (5.51)$$

olarak yazılabilir. Sonuç olarak bikuaterniyon formunda açısal momentum,

$$\mathbf{L} = i(y p_z - z p_y) \mathbf{e}_1 + i(z p_x - x p_z) \mathbf{e}_2 + i(x p_y - y p_x) \mathbf{e}_3 \quad (5.52)$$

dir. Açısal momentumun bileşenleri L_x, L_y ve L_z ,

$$L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_z \quad (5.53)$$

olarak yazılabilir. Bikuaterniyonik açısal momentum bileşenlerin toplamı olarak,

$$\mathbf{L} = i L_x \mathbf{e}_1 + i L_y \mathbf{e}_2 + i L_z \mathbf{e}_3 \quad (5.54)$$

dir [40].

6. OKTONYON CEBRİ VE UYGULAMALARI

Bölüm cebri oluşturulan sayı sistemlerinin sonucusu olan oktonyonlar, sekiz baz elemanın bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilen hiperkompleks bir sayıdır. Oktonyonlar kümesi bir cebri oluşturur. Eğer $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ üç tane oktonyonu temsil ederse \mathbb{O} ile gösterilen oktonyonlar cebri, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- Yer deęiřtirmeme özelliği : $\mathcal{P}\mathcal{Q} \neq \mathcal{Q}\mathcal{P}$
- Birleřmeme özelliği : $(\mathcal{P}\mathcal{Q})\mathcal{R} \neq \mathcal{P}(\mathcal{Q}\mathcal{R})$
- Üstlerin toplanması : $\mathcal{P}^n\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{n+m}$
- Alternatif : $\mathcal{P}(\mathcal{P}\mathcal{Q}) = (\mathcal{P}\mathcal{P})\mathcal{Q}$

6.1. Oktonyonların Tanımlanması

6.1.1. Oktonyonların koordinat gösterimi

Bir Q oktonyonu,

$$Q = \sum_{\mu=0}^7 Q_{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \quad \mu = 0, 1, \dots, 7 \quad (6.1)$$

bileşenlerine ayrılarak yazılabilir. Burada \mathbf{e}_{μ} , \mathbb{O} 'nun baz elemanıdır. \mathbf{e}_0 baz elemanı, reel baz eleman olarak seçilir [41].

6.1.2. Oktonyonların Zorn gösterimi

Zorn matrislerinden yararlanarak oktonyonların temsilleri verilmiştir:

$$Q \in \mathbb{O} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} a & \bar{x} \\ \bar{y} & b \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Bu matrisler için özel bir çarpım kuralı tanımlanır [42]:

$$\begin{pmatrix} a & \bar{x} \\ \bar{y} & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & \bar{x}' \\ \bar{y}' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \bar{x} \cdot \bar{y}' & a\bar{x}' + b'\bar{x} - \bar{y} \times \bar{y}' \\ a'\bar{y} + b\bar{y}' + \bar{y} \times \bar{y}' & bb' + \bar{y} \cdot \bar{x}' \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

6.1.3. Oktonyonların kuaterniyonik gösterim

İki tane \mathbf{P}_1 ve \mathbf{P}_2 4-boyutlu kuaterniyon biçiminde yazılan \mathcal{P} oktonyonu,

$$\mathcal{P} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \quad (6.4)$$

dir. \mathbb{O} oktonyon cebri için \mathbf{P}_1 ve \mathbf{P}_2 olan iki oktonyonun çarpım kurallarını tanımlamamız gerekmektedir. Q 'yi \mathbf{Q}_1 ve \mathbf{Q}_2 kuaterniyonları cinsinden yazdığımızda, \mathcal{P} ve Q 'nin çarpımını Cayley-Dickson çarpımı ile,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}Q &= (\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2)(\mathbf{Q}_1; \mathbf{Q}_2) \\ &= (\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 + \beta\overline{\mathbf{Q}_2}\mathbf{P}_2; \mathbf{P}_2\overline{\mathbf{Q}_1} + \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_1) \end{aligned} \quad (6.5)$$

yazabiliriz. Burada $\overline{\mathbf{Q}}$, \mathbf{Q} 'nin eşleniğidir ve β , bir parametredir [41].

Bir oktonyonu, iki kuaterniyonun kombinasyonu olarak yazmak mümkün olduğuna göre;

$$Q = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{e}_4 \quad Q \in \mathbb{O} \quad (6.6)$$

dir. Burada

$$\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{H} \quad \text{ve} \quad \mathbf{e}_4\mathbf{e}_4 = -1$$

dir. Buradaki \mathbf{e}_4 imajiner sayısının; her ne kadar kendisiyle çarpımı -1 ise de, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ imajiner sayıları ile aynı değildir. Öyle ki, \mathbf{e}_4 ile $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 'lerin çarpımı, $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_7$ gibi başka imajiner sayılardır.

Buna göre Q oktonyonu,

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{e}_4 \\ &= Q_{10}\mathbf{e}_0 + Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{12}\mathbf{e}_2 + Q_{13}\mathbf{e}_3 + (Q_{20}\mathbf{e}_0 + Q_{21}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{23}\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_4 \\ &= Q_{10}\mathbf{e}_0 + Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{12}\mathbf{e}_2 + Q_{13}\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_0\mathbf{e}_4Q_{20} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4Q_{21} + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4Q_{22} + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4Q_{23} \quad (6.7) \\ &= Q_0\mathbf{e}_0 + Q_1\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3 + Q_4\mathbf{e}_4 + Q_5\mathbf{e}_5 + Q_6\mathbf{e}_6 + Q_7\mathbf{e}_7 \\ &= (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$Q_{10} = Q_0, \quad Q_{11} = Q_1, \quad Q_{12} = Q_2, \quad Q_{13} = Q_3, \quad Q_{20} = Q_4, \quad Q_{21} = Q_5, \quad Q_{22} = Q_6, \quad Q_{23} = Q_7$$

notasyonu kullanılmıştır. \mathbf{e}_n : $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; oktonyon cebrinin baz elemanını

oluşturmaktadır. Baz elemanları arasındaki çarpım bağıntıları;

$$\mathbf{e}_n\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \quad (6.8)$$

$$\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = -\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (\mu\nu\rho = 0,1,2,3,4,5,6,7) \quad (6.9)$$

şeklinde. Buradaki $\epsilon_{\mu\nu\rho}$; 1,0,-1 değerlerini alabilen anti-simetrik bir tensördür. Bu tensörün değeri, (123),(245),(435),(651),(572),(714) ve (367) sıralı üçlülere ve bunların çift permütasyonları için +1 ve bunların tek permütasyonları için -1, $\mu\nu\rho$ 'nin diğer tüm sıralamaları için sıfırdır.

Bir \mathcal{Q} oktonyonundaki Q_0 reel bileşen; $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7$ elemanları ise imajiner bileşenler adını alır. İmajiner bileşenleri sıfır olan bir kuaterniyon bir reel sayıdır ($Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7 = 0$ ise $\mathcal{Q} = Q_0$). O halde reel sayılar oktonyonların alt kümesidir. Altı imajiner bileşeni sıfır olan bir oktonyon bir kompleks sayıdır ($Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = 0$ ise $\mathcal{Q} = Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 = (Q_0, Q_1)$). Aynı şekilde dört imajiner bileşeni sıfır olan bir oktonyon ise kuaterniyondur ($Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = 0$ ise $\mathcal{Q} = Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$). O halde tıpkı reel sayılar gibi kompleks sayılar ve kuaterniyonlar da oktonyonların bir alt kümesidir ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$) [43].

6.2. Skaler Birim Eleman

Oktonyon cebirinin skaler birim elemanı \mathbf{e}_0 'dır. Her $Q \in \mathbb{O}$ için;

$$\mathbf{e}_0 Q = Q \mathbf{e}_0 = Q \quad (6.10)$$

dir.

6.3. Oktonyonlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

$Q, R \in \mathbb{O}$, $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_7 \in \mathbb{R}$ ve $R_0, R_1, R_2, \dots, R_7 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$Q = (Q_0) \mathbf{e}_0 + (Q_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (Q_7) \mathbf{e}_7 \quad \text{ve} \quad R = (R_0) \mathbf{e}_0 + (R_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (R_7) \mathbf{e}_7$$

oktonyonlarının toplama ve çıkarma işlemi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= (Q_0 \mp R_0) \mathbf{e}_0 + (Q_1 \mp R_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (Q_7 \mp R_7) \mathbf{e}_7 \\
&= \sum_{\mu=0}^7 (Q_{\mu} \mp R_{\mu}) \mathbf{e}_{\mu}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

olarak tanımlanır.

6.4. Oktonyonlarda Çarpma İşlemi

İki oktonyonun çarpma işlemine geçmeden önce, baz elemanların çarpımını ele almak gerekir. Baz elemanlar için iki şekilde çarpım tanımlanmıştır. \mathbf{e}_0 birim elemandır.

6.4.1. Cayley-Dickson yöntemi

Oktonyonların baz elemanları \mathbf{e}_{μ} 'ler için çarpım kuralları aşağıdaki formda verilir:

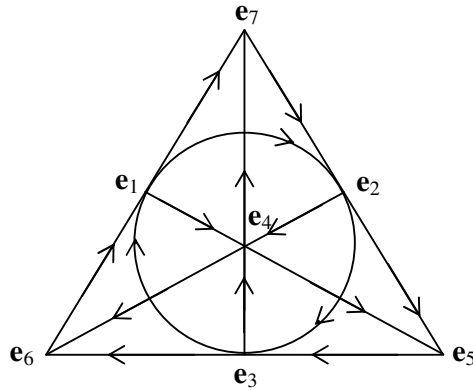
$$-\mathbf{e}_4 \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_4 = \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{e}_4 \hat{\mathbf{e}}_i = -\hat{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_0 \tag{6.12}$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\delta_{ij} \mathbf{e}_0 + \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \tag{6.13}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j = -\delta_{ij} \mathbf{e}_0 - \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{6.14}$$

$$-\hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{e}}_j = -\delta_{ij} \mathbf{e}_4 - \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k \tag{6.15}$$

Burada $\hat{\mathbf{e}}_k \equiv \mathbf{e}_{4+k}$ dir ($k = 1,2,3$). Ayrıca bu çarpımlar Şekil 6.1'deki diyagramla gösterilir.



Şekil 6.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley-Dickson yöntemine göre çarpım diyagramı[44]

Kolaylık olması açısından baz elemanların çarpımı için, Çizelge 6.1 kullanılır.

Çizelge 6.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley-Dickson yöntemine göre çarpımı [44]

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

6.4.2. Modül 7 Yöntemi

Bu yöntemde baz elemanların çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_0^2 = 1, \quad e_\mu^2 = -1, \quad e_\mu e_0 = e_0 e_\mu = e_\mu, \quad (e_\mu = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.16)$$

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7; i \neq j) \quad (6.17)$$

$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1} \quad (6.18)$$

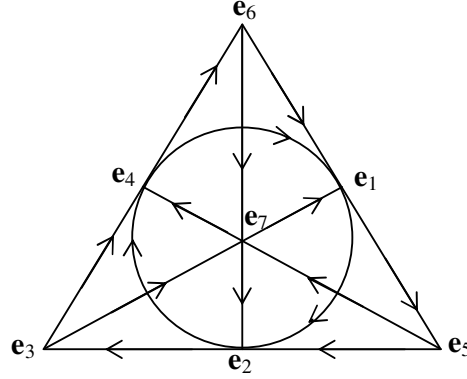
$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k} \quad (6.19)$$

Oktonyonların baz elemanlarının modül 7 yöntemine göre çarpımları Çizelge 6.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7 yöntemine göre çarpımları [45]

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Bu çarpımlar Şekil 6.2'deki diyagramla da gösterilir.



Şekil 6.2 Oktonyonların baz elemanlarının modül 7 yöntemine göre çarpım diyagramı [45]

Reel oktonyon 1 skaler, 7 imajiner bileşene sahiptir. Skaler kısmı Q_s ve imajiner kısmı Q_v olmak üzere bir oktonyonu $Q = Q_s + Q_v$ olarak yazabiliriz.

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_s + \mathcal{P}_v$ ve $Q = Q_s + Q_v$ iki reel oktonyonun çarpımı,

$$\mathcal{P}Q = \mathcal{P}_s Q_s + \mathcal{P}_s Q_v + \mathcal{P}_v Q_s - \mathcal{P}_v \cdot Q_v + \mathcal{P}_v \times Q_v \quad (6.20)$$

olarak tanımlanır.

6.5. İki Vektör Oktonyonun Skaler Çarpımı

Burada ilk olarak vektör oktonyon tanımlanmalıdır. Vektör oktonyon, skaler bileşeni olmayan sadece imajiner bileşeni olan oktonyondur.

\mathcal{P} ve Q sadece imajiner bileşene sahip iki oktonyon olmak üzere, çarpım;

$$\mathcal{P} \cdot Q = -\frac{1}{2}(\mathcal{P}Q + Q\mathcal{P}) \quad (6.21)$$

olarak tanımlanır.

6.6 İki Vektör Oktonyonun Vektörel Çarpımı

\mathcal{P} ve Q sadece imajiner bileşene sahip iki oktonyon olmak üzere, vektörel çarpım;

$$\mathcal{P} \times Q = \frac{1}{2}(\mathcal{P}Q - Q\mathcal{P}) \quad (6.22)$$

olarak tanımlanır.

6.7 Oktonyonların Eşleniği

\mathbb{R} üzerinden bir Q oktonyonunun eşleniği,

$$\bar{Q} = Q_0 \mathbf{e}_0 - \sum_{i=1}^7 Q_i \mathbf{e}_i = Q_s - Q_v \quad (6.23)$$

olarak tanımlanır [42]. Eşitlik (6.23) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= Q_0 \mathbf{e}_0 - Q_1 \mathbf{e}_1 - Q_2 \mathbf{e}_2 - Q_3 \mathbf{e}_3 - Q_4 \mathbf{e}_4 - Q_5 \mathbf{e}_5 - Q_6 \mathbf{e}_6 - Q_7 \mathbf{e}_7 \\ &= (Q_0, -Q_1, -Q_2, -Q_3, -Q_4, -Q_5, -Q_6, -Q_7) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\overline{\mathcal{P} + Q} = \bar{\mathcal{P}} + \bar{Q}$ (6.25)

- $\overline{\mathcal{P}Q} = \bar{Q} \bar{\mathcal{P}}$ (6.26)

6.8 Oktonyonların Normu

Bir oktonyonun normu, kendisi ile eşleniğinin çarpımı olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} N(Q) &= Q\bar{Q} = \bar{Q}Q \\ &= \sum_{\mu=0}^7 Q_\mu^2 = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2 + Q_7^2 \end{aligned} \quad (6.27)$$

$\mathcal{P}, Q \in \mathbb{O}$ olmak üzere iki oktonyonun çarpımının normu, bu oktonyonların ayrı ayrı normlarının çarpımına eşittir.

$$N(\mathcal{P}Q) = N(\mathcal{P})N(Q) \quad (6.28)$$

6.9 Bir Oktonyonun Ters

Normu sıfırdan farklı her Q oktonyonu için Q^{-1} ile ifade edilen bir ters eleman mevcuttur. Ters eleman, bir oktonyonun eşleniğinin normuna bölümüne eşittir [46]:

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N(Q)} \quad (6.29)$$

Ters elemanın kendisiyle çarpımı,

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = \mathbf{e}_0 \quad (6.30)$$

şeklinde birim elemanı verir.

6.10 Split Oktonyon Cebri

Herhangi bir split oktonyon,

$$Q = a\mathbf{u}_0^* + b\mathbf{u}_0 + x_i\mathbf{u}_i^* + y_i\mathbf{u}_i \quad (6.31)$$

olarak tanımlanır. Burada a ve b skaler nicelikler, x_i ve y_i vektörel niceliklerin bileşenleridir. $\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_i^*$, ve \mathbf{u}_i split oktonyonların baz elemanlarıdır. Burada $i = 1, 2, 3$ dir. Denklem (6.30),

$$Q = \begin{pmatrix} a & -\bar{x} \\ \bar{y} & b \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

şeklinde 2×2 Zorn vektör matrisleri olarak tekrar yazılır [47].

Pauli-spin matrislerinden yararlanılarak yukarıdaki baz elemanlar için matris temsili ($i = 1, 2, 3$),

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{e}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_i^* = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{e}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

olarak verilmektedir. Kompleks cisim üzerinden $\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_i^*$, ve \mathbf{u}_i baz elemanları,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_4) & \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_4) \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_5) & \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_5) \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_6) & \mathbf{u}_3^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_6) \\ \mathbf{u}_0 &= \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_7) & \mathbf{u}_0^* &= \frac{1}{2}(1 - i\mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (6.34)$$

olarak tanımlanır. Baz elemanların çarpım kuralı ise,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j &= \epsilon_{ijk} \mathbf{u}_k^* & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j^* &= -\epsilon_{ijk} \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^* &= -\delta_{ij} \mathbf{u}_0 \\
\mathbf{u}_i \mathbf{u}_0 &= 0 & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_0 &= \mathbf{u}_i^* & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j^* &= -\delta_{ij} \mathbf{u}_0^* \\
\mathbf{u}_i \mathbf{u}_0^* &= \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_0^* &= 0 & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_0^* &= 0 & \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_i \\
\mathbf{u}_0^* \mathbf{u}_i &= \mathbf{0} & \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_i^* &= 0 & \mathbf{u}_0^* \mathbf{u}_i^* &= \mathbf{u}_i^* \\
\mathbf{u}_0^2 &= \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_0^{*2} &= \mathbf{u}_0^* & \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* &= \mathbf{u}_0^* \mathbf{u}_0 = 0
\end{aligned} \tag{6.35}$$

şeklindedir. Buradaki çarpımları Çizelge 6.3 ile de gösterilir.

Çizelge 6.3. Split oktonyonların baz elemanlarının çarpımı [48]

$\begin{matrix} \text{II} \\ \text{I} \end{matrix}$	\mathbf{u}_0^*	\mathbf{u}_1^*	\mathbf{u}_2^*	\mathbf{u}_3^*	\mathbf{u}_0	\mathbf{u}_1	\mathbf{u}_2	\mathbf{u}_3
\mathbf{u}_0^*	\mathbf{u}_0^*	\mathbf{u}_1^*	\mathbf{u}_2^*	\mathbf{u}_3^*	0	0	0	0
\mathbf{u}_1^*	0	0	\mathbf{u}_3	\mathbf{u}_2^*	\mathbf{u}_1^*	$-\mathbf{u}_0^*$	0	0
\mathbf{u}_2^*	0	$-\mathbf{u}_3$	0	\mathbf{u}_1	\mathbf{u}_2^*	0	$-\mathbf{u}_0^*$	0
\mathbf{u}_3^*	0	$-\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	0	\mathbf{u}_3^*	0	0	$-\mathbf{u}_0^*$
\mathbf{u}_0	0	0	0	0	\mathbf{u}_0^*	\mathbf{u}_1^*	\mathbf{u}_2	\mathbf{u}_3
\mathbf{u}_1	\mathbf{u}_1	$-\mathbf{u}_0$	0	0	0	0	\mathbf{u}_3^*	$-\mathbf{u}_2^*$
\mathbf{u}_2	\mathbf{u}_2	0	$-\mathbf{u}_0$	0	0	$-\mathbf{u}_3^*$	0	\mathbf{u}_1^*
\mathbf{u}_3	\mathbf{u}_3	0	0	$-\mathbf{u}_0$	0	\mathbf{u}_2^*	$-\mathbf{u}_1^*$	0

Bir split oktonyonun eşleniği,

$$\begin{aligned}
\bar{Q} &= a\mathbf{u}_0^* + b\mathbf{u}_0 - x_i \mathbf{u}_i^* + y_i \mathbf{u}_i \\
&= \begin{pmatrix} b & \bar{x} \\ -\bar{y} & a \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

dir.

Q split oktonyonun normu,

$$Q = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = (ab + \bar{x}\cdot\bar{y})\mathbf{I} \tag{6.37}$$

olarak tanımlanır. Burada \mathbf{I} , birim matristir.

6.11 Oktonyonik Fiziksel Sinyaller

Herhangi bir oktonyon

$$\mathcal{S} = ct + x\mathcal{J}_1 + y\mathcal{J}_2 + z\mathcal{J}_3 + \frac{\hbar}{P_x} \mathbf{j}_1 + \frac{\hbar}{P_y} \mathbf{j}_2 + \frac{\hbar}{P_z} \mathbf{j}_3 + c\hbar w\mathbf{I} \quad (6.38)$$

biçiminde yazılabilir. t 'ye zaman, x, y, z 'ye koordinatlar, P_x, P_y, P_z 'ye momentum boyutundaki, w 'ya (enerji)⁻¹ boyutundaki nicelikler olarak dikkat edilebilir. Denklem (6.38)'da fiziğin iki temel sabiti olan, c ışık hızını ve \hbar Plank sabitini temsil etmektedir.

c ve \hbar sabitleri w 'dan çekilirse enerji boyutundaki bir nicelik elde edilir [49]:

$$E = \frac{c\hbar}{w} \quad (6.39)$$

Denklem (6.38)'deki split-oktonyonların ortogonal bazları, birim skaler eleman (1 ile gösteriyoruz) ve ortogonal hiper-kompleks birimlerin üç farklı cinsi (toplam yedi) ile oluşur: üç tane \mathcal{J}_n vektörsü eleman, üç tane \mathbf{j}_n versörsü birimler ve bir tane \mathbf{I} pseudoskaler vardır. Oktonyonlar, $\mathbb{R}^{7,0}$ 'ın $Cl_{0,7}$ Clifford cebriinde paravektörler ile de tanımlanır [5]. Farklı özelliklere sahip elemanların bir toplamı olarak temsil edilen niceliğe Clifford cebriinde para-vektör adı verilir.

Split oktonyonların baz elemanlar cebri, aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n^2 &= -\mathbf{j}_n^2 = \mathbf{I}^2 = 1 \\ \mathcal{J}_n \mathbf{j}_m &= -\mathbf{j}_m \mathcal{J}_n = -\epsilon_{nmk} \mathcal{J}^k \\ \mathcal{J}_n \mathcal{J}_m &= -\mathcal{J}_m \mathcal{J}_n = \mathbf{j}_n \mathbf{j}_m = -\mathbf{j}_m \mathbf{j}_n = \epsilon_{nmk} \mathbf{j}^k \\ \mathcal{J}_n \mathbf{I} &= -\mathbf{I} \mathcal{J}_n = \mathbf{j}_n \\ \mathbf{j}_n \mathbf{I} &= -\mathbf{I} \mathbf{j}_n = \mathcal{J}_n \end{aligned} \quad (6.40)$$

Burada ϵ_{nmk} , anti-simetrik tensördür. Baz elemanların eşleniği,

$$\bar{1} = 1, \bar{\mathcal{J}}_n = -\mathcal{J}_n, \bar{\mathbf{j}}_i = -\mathbf{j}_i, \bar{\mathbf{I}} = -\mathbf{I} \quad (6.41)$$

olarak yazılır [50]. Denklem (6.38)'daki oktonyonun eşleniği,

$$\bar{\mathcal{S}} = ct - x\mathcal{J}_1 - y\mathcal{J}_2 - z\mathcal{J}_3 - \frac{\hbar}{P_x} \mathbf{j}_1 - \frac{\hbar}{P_y} \mathbf{j}_2 - \frac{\hbar}{P_z} \mathbf{j}_3 - c\hbar w\mathbf{I} \quad (6.42)$$

şeklinde yazılır. Denklem (6.38)'deki oktonyonun normu, (4+4) işaretine sahiptir ve

$$N = \mathcal{S}\bar{\mathcal{S}} = c^2 t^2 + \left(\frac{\hbar}{P_x}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{P_y}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{P_z}\right)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - \frac{c^2 \hbar^2}{E^2} \quad (6.43)$$

bir çeşit faz uzayındaki bir aralığa benzerdir. Yukarıdaki denklemde Planck sabitinin bulunması standart yaklaşımdan önerilen farklı modellerin büyük enerjiler ve lineer olmayan alanlar için ortaya çıktığı anlamına gelmektedir.

Denklem (6.43),

$$\mathcal{S} = c(t + \hbar I w) + \mathcal{J}_n (x^n + \hbar I \lambda^n) \quad (6.44)$$

olarak tekrar yazılır. Formülden I pseudo-skalerinin, uzay-zaman koordinatlarının bazı çeşitli belirsizliklerine tekabül eden “kuantum” terimini tanımlar [51].

Denklem (6.44)'ü τ zamanına göre türevi alındığında, parçacığın hızı elde edilir:

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \left[c \left(1 + \hbar I \frac{dw}{dt} \right) + \mathcal{J}_n \left(\frac{dx^n}{dt} + \hbar I \frac{d\lambda^n}{dt} \right) \right] \quad (6.45)$$

Bu formülden (6.43)'deki norm sıfır olduğunda aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^n} = \hbar I \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial}{\partial w} = \hbar I \frac{\partial}{\partial t} \quad (6.46)$$

Denklem (6.43)'deki normun invaryansı,

$$\beta = \frac{d\tau}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \left[1 - \hbar^2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] - \frac{v^2}{c^2} \left[1 - \hbar^2 \left(\frac{d\lambda_n}{dx^n} \right)^2 \right] \quad (6.47)$$

dır. Burada hız,

$$v^2 = \delta_{mn} \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^n}{dt} \quad (6.48)$$

olur.

Denklem (6.43) pozitif olması gerektiğinden (6.47)'den birkaç bağıntı elde edilir.

$$v^2 \leq c^2, \quad \frac{dx^n}{d\lambda^n} \geq \hbar, \quad \frac{dt}{dw} \geq \hbar \quad (6.49)$$

λ ve w sırasıyla (momentum)⁻¹ ve (enerji)⁻¹ boyutlarına sahip olduğundan belirsizlik ilkesinin mümkün maksimum hız varlığı gibi aynı geometriksel anlama sahip olduğu sonucuna varılır.

6.12. Oktonyonik Geometri

$(1, \mathcal{J}^n, \mathcal{j}^n$ ve \mathcal{I}) split oktonyonların tam sekiz boyutlu bazlarını oluşturmak için sadece üç tane \mathcal{J}_n vektörsü elemanların çarpma ve dağılma kanunlarına gerek duyulur. O zaman uzayın üç boyutlu karakterinin hayali, sadece üç vektörsü baz birimlerinin varlığının sonucu olabilir. Gogberashvili, \mathcal{J}_n temel baz elemanlarını (6.50)'de gösterildiği gibi ortogonal birim Öklid vektörleri olarak temsil etmiştir ve bu kısımda Gogberashvili [52] tarafından baz elemanlar için yapılan yorumlar verilecektir.

$$\mathcal{J}_1 = \longrightarrow \quad \mathcal{J}_2 = \uparrow \quad \mathcal{J}_3 = \swarrow \quad (6.50)$$

Denklem (6.50)'deki baz elemanlar sırasıyla x , y ve z eksenlerinin pozitif yönlerine doğru yönlendirilmiştir. Ortogonal baz elemanların $\bar{\mathcal{J}}_n$ ile gösterilen eşlenikleri, yansıma vektörleridir:

$$\bar{\mathcal{J}}_1 = -\mathcal{J}_1 = \longleftarrow \quad \bar{\mathcal{J}}_2 = -\mathcal{J}_2 = \downarrow \quad \bar{\mathcal{J}}_3 = -\mathcal{J}_3 = \nearrow \quad (6.51)$$

Herhangi bir hiper-kompleks elemanın \mathcal{J}_n vektörsü eleman ile sol taraftan çarpımı geometriksel bir şekilde \mathcal{J}_n boyunca bu elemanın sürüklenmesi olarak düşünülür. Bu gösterimde \mathcal{J}_n 'nin karesi, \mathcal{J}_n 'nin \mathcal{J}_n boyunca orijinden bire eşit olan sonlu değere sürüklenmesi anlamına gelir.

$$\mathcal{J}_n \mathcal{J}_n = \mathcal{J}_n^2 = \longrightarrow \times \longrightarrow = 0 \dots \longrightarrow \quad 1 = 1 \quad (6.52)$$

$$\mathcal{J}_n \bar{\mathcal{J}}_n = -\mathcal{J}_n^2 = \longrightarrow \times \longleftarrow = -1 \dots \longleftarrow \quad 0 = -1$$

Denklem (6.38)'deki baz elemanlarının diğer çeşidi \mathcal{j}_n (\mathcal{J}_n 'e dual olan), iki temel \mathcal{J}_n baz birimlerinin skew çarpımı olarak tanımlanır:

$$\mathcal{j}_n = \frac{1}{2} \epsilon_{nmk} \mathcal{J}^m \mathcal{J}^k, \quad m, n, k = 1, 2, 3 \quad (6.53)$$

j_n elemanları bivektör olarak yorumlanır. $j_n^2 = -1$ olduğu için bivektörler, pür-imaginer nesnelere gibi davranır. Hamiltonyen'in kuaterniyonik birimlerine benzeyen j_n versörleri dönmeleri temsil eder. Vektör çarpımları için (6.53)'teki ϵ_{nmk} 'nin işaretini seçmede belirsizlik vardır. Kuaterniyonik ve vektör cebirlerindeki bu belirsizlik, sol-el ve sağ-el koordinat sistemleri ile ilişkilidir. j_n elemanları ona dik olan bir vektör notasyonuna güvenmeksizin yönlü düzlemin notasyonunu kodlar. Denklem (6.53)'de pozitif işaret de seçilir ancak farklı sinyallere karşılık gelen oktonyonların çarpımları incelediğinde belirsizlik hala devam eder ve fiziksel uygulamalarda spin tanımına karşılık gelen iki değerli dalga-fonksiyonu verir. j_n elemanlarını da kuaterniyonik kuantum mekaniğinde yapıldığı gibi benzer momentum operatörlerini tanımlamak için yararlıdır. Bu, (6.38)'de Planck sabitinin görünmesinin sebeplerinden biridir. j_n , (6.53)'teki ikinci temel vektörün birinci temel vektör boyunca süpürülmesiyle geometriksel bir şekilde elde edilen yönlü düzlemler olarak düşünülür. Örneğin:

$$j_3 = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 = \rightarrow \times \uparrow = \uparrow \rightarrow = -\rightarrow \uparrow \quad (6.54)$$

Denklem (6.54)'teki vektörün sırasının değişimi, düzlemin yönelimini tersine çevirir:

$$\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_1 = -j_3 = \uparrow \times \rightarrow = \rightarrow \uparrow = \rightarrow \uparrow \quad (6.55)$$

Benzer bir şekilde diğer j_1 ve j_2 bivektörleri için,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_3 = -j_2 &= \rightarrow \times \swarrow = \swarrow \rightarrow = \swarrow \rightarrow \\ \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3 = j_1 &= \uparrow \times \swarrow = \swarrow \uparrow = \swarrow \uparrow \end{aligned} \quad (6.56)$$

olur. Geometrik yaklaşımımızda sadece iki \mathcal{J}_n vektörsü birimlerinin çarpımlarının alt-cebri, (6.54), (6.55) ve (6.56)'nin dönmelerinden kolayca bulunur. Örneğin yer değiştirme kuralları,

$$\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2 \bar{\mathcal{J}}_1 = \bar{\mathcal{J}}_1 \bar{\mathcal{J}}_2 = \bar{\mathcal{J}}_2 \bar{\mathcal{J}}_1 \quad (6.57)$$

(x - y) düzlemlerindeki (6.54)'in dönmeleri olarak geometriksel yoruma sahiptir.

$$\rightarrow \uparrow = \leftarrow \downarrow = \downarrow \leftarrow = \leftarrow \downarrow \quad (6.58)$$

Benzer bir şekilde,

$$\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1 \bar{\mathcal{J}}_2 = \bar{\mathcal{J}}_2 \bar{\mathcal{J}}_1 = \bar{\mathcal{J}}_1 \mathcal{J}_2 \quad (6.59)$$

kuralları, zıt yönlü (6.55)'in dönüşümlerine karşılık gelir.

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \quad (6.60)$$

($x-y$) ve ($y-z$) düzlemlerindeki (6.56)'nin benzer dönmeleri ile bütün üç vektörsü \mathcal{J}_n baz birimleri ve $\bar{\mathcal{J}}_n$ eşleniklerinin ikili çarpımları tekrar elde edilir.

İki baz \mathcal{J}_n biriminden daha fazlasını içeren ifade için sol ve sağ çarpımlarının eşdeğer olmamasına sebep olan birleşme özelliğine sahip olmayan oktonyonlar, fiziksel bir şekilde nedensellik olarak yorumlanır. Örneğin sol çarpım, geçmişten geleceğe doğru olan yönelim ile ilişkilendirilir.

j_n 'nin \mathcal{J}_m ile çarpım ifadesini elde etmek için oktonyonların alternatiflik özelliği kullanılır. Böylece $n \neq m$ olduğunda j_n ve \mathcal{J}_m nin çarpımları

$$\mathcal{J}_n j_m = -\epsilon_{nmk} \mathcal{J}^k \quad (6.61)$$

olarak tanımlanabilir. \mathcal{J}_n 'nin j_m ile çarpımları \mathcal{J}_n vektörlerinin dönmeleridir. Örneğin j^3 'ün \mathcal{J}^2 'yi (veya \mathcal{J}_1 'i) soldan çarpma işlemi \mathcal{J}^2 'yi (veya \mathcal{J}_1 'i) saat yönünde ($x-y$) düzleminde $\frac{\pi}{2}$ açısı ile döndürür ve \mathcal{J}_1 (veya $-\mathcal{J}^2$) elde edilir:

$$\begin{aligned} j_3 \mathcal{J}_2 &= (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 = \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \frac{\pi}{2} \curvearrowright \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \\ j_3 \mathcal{J}_1 &= (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) \mathcal{J}_1 = -\mathcal{J}_2 = \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} = \frac{\pi}{2} \curvearrowright \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \end{aligned} \quad (6.62)$$

\mathcal{J}_n 'nin j_m ($n \neq m$) ile sağdan çarpımı, saat yönünün tersine dönmelerdir veya diğer bir şekilde, j_m yönlü düzlemlerinin soldan çarpımıdır. Örneğin (6.62)'nin tersi çarpma işlemleri,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 j_3 &= \mathcal{J}_1 (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \frac{\pi}{2} \curvearrowleft \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \\ \mathcal{J}_2 j_3 &= \mathcal{J}_2 (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} = \frac{\pi}{2} \curvearrowleft \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \end{aligned} \quad (6.63)$$

dir.

Üç tane \mathcal{J}^n elemanından oluşan maksimum çoklu vektör olan yedinci oktonyonik I baz elemanı, yönlü trivektördür. I , skaler 1 birimine dualdır ve aşağıda gösterildiği gibi ifade edilir:

$$I = \mathcal{J}_n j_n = -j_n \mathcal{J}_n \quad (6.64)$$

Denklem (6.64)'den dolayı üç eşdeğer I gösterimi vardır:

$$I = \mathcal{J}_1 j_1 = \mathcal{J}_2 j_2 = \mathcal{J}_3 j_3 \quad (6.65)$$

I , hacim sabitinin ifadesidir. I elemanı, \mathcal{J}_n vektörü boyunca yönlendirilmiş j_n düzleminin taranması ile elde edilen 3-boyutlu yönlü küp olarak gözlenir. Örneğin,

$$I = \mathcal{J}_1 j_1 = \mathcal{J}_1 (\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3) = \rightarrow \times \swarrow \uparrow = \swarrow \uparrow \rightarrow = \swarrow \uparrow \quad (6.66)$$

I 'nin diğer gösterimleri Denklem (6.66)'nin farklı dönüşümlerine karşılık gelir:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 (\mathcal{J}_3 \mathcal{J}_1) &= \mathcal{J}_2 j_2 = \uparrow \times \swarrow \rightarrow = \swarrow \rightarrow \uparrow \\ \mathcal{J}_3 (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) &= \mathcal{J}_3 j_3 = \swarrow \times \uparrow \rightarrow = \swarrow \rightarrow \uparrow \end{aligned} \quad (6.67)$$

Zıt bir şekilde yönlendirilmiş 3-küp, \mathcal{J}_m 'nin j_n ile soldan çarpılmasıyla elde edilir. $n \neq m$ olduğunda \mathcal{J}_m 'nin j_n ile soldan çarpımı \mathcal{J}_m 'nin dönüşümüdür:

$$\begin{aligned} j_1 \mathcal{J}_1 &= (\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3) \mathcal{J}_1 = \swarrow \uparrow \times \rightarrow = \swarrow \uparrow \rightarrow \\ j_2 \mathcal{J}_2 &= (\mathcal{J}_3 \mathcal{J}_1) \mathcal{J}_2 = \swarrow \rightarrow \times \uparrow = \swarrow \rightarrow \uparrow \\ j_3 \mathcal{J}_3 &= (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) \mathcal{J}_3 = \uparrow \times \swarrow \rightarrow = \uparrow \swarrow \rightarrow \end{aligned} \quad (6.68)$$

Oktonyonların birleşme özelliğinin olmaması nedeniyle (6.65)'deki hacim sabitini kullandığımızda

$$\mathcal{J}_1 (\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3) - (\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2) \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_1 j_1 - j_3 \mathcal{J}_3 = 2I = \swarrow \uparrow \rightarrow - \uparrow \swarrow \rightarrow = \swarrow \uparrow \rightarrow \neq 0 \quad (6.69)$$

olur. \mathcal{J}_n oktonyon temel baz birimlerinin birleşme özelliğinin olmaması, vektörlere benzediğini gösteren diğer özelliktir.

Denklem (6.69)'daki birleşme özelliğinin olmamasına dikkat edilirse, aynı zamanda oktonyonik cebri oluşturan bütün yedi oktonyonik baz birimler ve eşlenikleri çarpımları için kurallara ihtiyaç vardır. Bu ihtiyaç, yedinci I baz birimi ile vektörsü j^m elemanlarının çarpımındaki parantezlerin açılması ile

özel kuralların tanımlaması zorunluluğunu ortaya çıkarır. $n = m$ olduğunda $I = (\mathcal{J}_m \mathcal{J}_m)$ ile \mathcal{J}^n ve j^n 'nin çarpımları alternatiflik özelliğinden dolayı,

$$\mathcal{J}_n I = j_n, \quad j_n I = \mathcal{J}_n \quad (6.70)$$

eşitliğini verir. Ancak $n \neq m$ olduğunda bu çarpımlar bütün temel baz birimleri içerir. Çarpmanın yönlendirilmiş özelliği ihmal edildiğinde ve parantezler kaldırıldığında (6.69)'daki birleşme özelliğinin olmaması nedeniyle, bu çarpımlar iki değerli olur. Örneğin,

$$I \mathcal{J}_1 = (\mathcal{J}_2 j_2) \mathcal{J}_1 = \begin{cases} \mathcal{J}_2 (j_2 \mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_3 = +j_1 \\ -j_2 (\mathcal{J}_2 \mathcal{J}_1) = j_2 j_3 = -j_1 \end{cases} \quad (6.71)$$

dır. Bu bağıntıdan parantezler kaldırıldığında ve \mathcal{J}^n ve j^m baz birimlerinin farklı çeşitleri çarpıldığında negatif işaretin tanımlanması sonucunu ortaya çıkar. O halde (6.71)'nin ilk durumunda $j_2 \mathcal{J}_1$ çarpımlarının sonucu olarak ekstra eksi işareti ortaya çıkar ve her iki durum $-j_1$ benzer sonucunu verir. Parantezlerin açılma kuralı kullanıldığında yedinci baz birimin karesi, (6.65)'den herhangi bir gösterimi için tek değerli olur ve $I^2 = 1$ alınır. Ancak, farklı fiziksel sinyallerin oktonyonik çarpımları için bu belirsizlik kalır ve olasılıklı bir şekilde kuantum olasılıklarına ve bazı spin çeşitlerine karşılık gelir.

j_n 'nin j_m ile çarpılmasıyla, dört tane vektörsü baz eleman arasında karışıklık ortaya çıkacaktır. Bu yüzden burada parantezler kaldırılmamalıdır. j_n 'nin önce j_m 'i oluşturan \mathcal{J}_k vektörsü elemanın biri ile, daha sonra j_m 'i oluşturan diğer \mathcal{J}_k vektörsü eleman ile ikili çarpımı,

$$j_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{kmn} j^n j^m \quad (6.72)$$

sonucunu verir. Yukarıdaki gibi j^n ile soldan çarpımı saat yönünü ve sağdan çarpımı saat yönünün tersi olarak yorumlanır. O halde (6.72)'ün geometriksel yorumuna örnek aşağıdaki gibi gösterilir:

$$j_3 j_1 = -j_2 = \uparrow \times \swarrow = \frac{\pi}{2} \rightarrow \swarrow = \frac{\pi}{2} \nwarrow \rightarrow \uparrow = \swarrow \quad (6.73)$$

Diğer iki $j_2 j_3 = -j_1$ ve $j_1 j_2 = -j_3$ çarpımları içinde benzer şekiller vardır.

\mathcal{J}_n vektörlerinin yönlerini zıt yönde değiştirmesine sebep olan eşlenik herhangi ifadedeki elemanın derecesini tersine çevirir. Bu fiziksel olarak sonuçlar ile sebeplerin yer değiştirmesi anlamına gelir.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{J}}_n &= -\mathcal{J}_n \\ \bar{\mathcal{J}}_n &= \frac{1}{2} \epsilon_{nmk} \overline{\mathcal{J}^m \mathcal{J}^k} = \frac{1}{2} \epsilon_{nmk} \bar{\mathcal{J}}^k \bar{\mathcal{J}}^m = -\mathcal{J}_n\end{aligned}\quad (6.74)$$

$$\bar{I} = \overline{\mathcal{J}_n \mathcal{J}_n} = \bar{\mathcal{J}}_n \bar{\mathcal{J}}_n = -I$$

Son olarak (6.40), (6.53), (6.61), (6.70), (6.72) ve (6.69) bütün baz elemanların çarpım tablosunu verir ve split-oktonyonlar cebirini oluşturur.

7. SONUÇ

Bu çalışmada, iki boyutlu Clifford cebri olan Hiperbolik cebri tanımlanmış ve tanımlanmış olan hiperbolik kompleks uzaydaki dört-boyutlu uzay-zaman yer vektörleri ve dört boyutlu momentum vektörleri kullanılarak yazılan Dirac dalga denklemleri gösterilmiştir. Dört boyutlu Lorentz dönüşümünün ifadesi yazılarak tekrar matris formunda yazılan gösterimi verilmiştir. Klasik kuantum teorisi için hiperbolik dalga fonksiyonunu kullanarak Minkowski uzayındaki Schrödinger eşitliği yazılmıştır.

Bikompleks Schrödinger eşitliği ve süreklilik eşitliği, dört tane diferansiyel eşitlik sisteminde bileşenlerine ayrılarak yazıldıktan sonra bazı genellemeler yaparak bu eşitlik sisteminin sırasıyla standart Schrödinger eşitliğine ve süreklilik eşitliğine indirgenmiş olduğunu gözlemlenmiştir. Bikompleks Schrödinger eşitlik sisteminin, bu sistemin çözüm kümesini değişmez bırakan 8-boyutlu kesikli simetri grubu gösterilmiştir.

İmajiner baz elemanlarının karesi -1 olan ve bütün elemanları ters yer değiştiren bir cebir olan \mathbb{H} kuaterniyonlarının özellikleri incelenmiş daha sonra bu bağlamda $Cl_{0,3}(\mathbb{R})$ 8-boyutlu cebire izomorf olan bikuaterniyonlar adını verdiğimiz $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ kümesi tanımlanmıştır. Bikuaterniyonlar kümesinin, dört boyutlu bir kompleks vektör uzayını veya sekiz boyutlu bir reel vektör uzayını oluşturduğunu görülmüştür. Toplama ve çarpma işlemleri incelendiğinde kuaterniyon grubundan farklı olarak, bu kümenin yer değiştirmeyen ancak birleşme özelliğine sahip bir halkayı oluşturduğu görülmektedir. Fiziksel uygulama olarak momentum ve yer vektörlerinin bikuaterniyonik çarpımı sonucunda bikuaterniyonik formda elde edilmiş olan açısal momentum ifadesine yer verilmiştir.

Sekiz baz elemanın bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilen hiperkompleks bir sayı olan oktonyonlar cebri verilmiştir. Daha sonra split oktonyonlar cebri kullanılarak yazılan oktonyonik fiziksel sinyal ifadesi verilmiştir. Bu ifadenin de pozitif norma sahip olması şartından dolayı c ve \hbar 'ın fiziksel anlamları görülmüştür. Bölüm cebirlerinin avantajları olduğu için geometrik cebri split-oktonyonlar cebri içine yerleştirerek vektör formülasyonunu genişletmeye çalışan çalışmalara yer verilmiştir. Bu nedenle split oktonyonlardaki temel baz elemanlar, ortogonal birim öklid vektörler ile temsil

edilen geometrik gösterimlerin kullanım şekilleri verilmiştir. Sağdan ve soldan çarpımların farklı olması, zamanın tersinmez olduğu anlamına gelmektedir. Birkaç oktonyonun çarpımının sonucu tek değerli olmadığı için oktonyonlarla yapılan fiziksel süreçlerin hesabında temel olasılıklar ortaya çıkar.

KAYNAKLAR

- [1] Hucks, Z., ve ark., “Hyperbolic complex structures in physics,” *J. Math. Phys.*, **34(12)**, 5986-6008, 1993.
- [2] Kocik, J., “Duplex numbers, diffusion systems, and generalized quantum mechanics,” *Int. J. Theor. Physics*, **38(8)**, 2221-2230, 1999.
- [3] Rochon, D. and Tremblay, S., “Bicomplex quantum mechanics: I. the generalized Schrödinger equation,” *Advances In Applied Clifford Algebras*, **14(2)**, 231-248, 2004.
- [4] Bisht, P.S. and Negi, O.P.S., “Split octonion electrodynamics,” *Indian Journal of Pure & Applied Physics*, **31**, 292-296, 1993.
- [5] Lounesto, P., *Clifford algebras and spinors*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [6] Baylis, W., *Clifford (Geometric) algebras with applications to physics, mathematics and engineering*, Birkhauser, Boston, 1926.
- [7] Hestenes, D., ve Ziegler, R., “Projective geometry with clifford algebra,” *Acta Applicandae Mathematicae*, **23**, 25-63, 1991.
- [8] [http://www.uwindsor.ca/users/b/baylis/main.nsf/9d019077a3c4f6768525698a00593654/e639e0cdf0d162c985256bb2004c8fde/\\$FILE/cainphys.pdf](http://www.uwindsor.ca/users/b/baylis/main.nsf/9d019077a3c4f6768525698a00593654/e639e0cdf0d162c985256bb2004c8fde/$FILE/cainphys.pdf)
- [9] <http://modelingnts.la.asu.edu/pdf/OerstedMedalLecture.pdf>
- [10] Khrennikov, A., “Hyperbolic quantum mechanics,” *Advances In Applied Clifford Algebras*, **13(1)**, 1-19, 2003.
- [11] Li, W., “Clifford algebra and quantum logic gates,” *Advances In Applied Clifford Algebras*, **14(2)**, 225-230, 2004.
- [12] Ulrych, S., “Poincaré mass operator in terms of a hyperbolic algebra,” *Physics Letters B*, **612**, 89-91, 2005.
- [13] Ulrych, S., “Symetries in the hyperbolic hilbert space,” *Physics Letters B*, **618**, 233-236, 2005.
- [14] Xuegang, Y., Xueqian, Y., “Geometrical interpretation of uncertainty relation in minkowski space,” *Advances In Applied Clifford Algebras*, **13(1)**, 65-70 2003.
- [15] Xuegang, Y. ve ark. “Clifford algebraic spinor and the Dirac wave equations,” *Advances In Applied Clifford Algebras*, **11(1)**, 27-38, 2001.
- [16] Cinemre, V., *Klasik mekanik*, Çağlayan Basımevi, 1950.
- [17] Xueqian, Y. ve ark., “Clifford algebras and the four-dimensional Lorentz transformation”, *Advances In Applied Clifford Algebras*, **12(1)**, 13-19, 2002.
- [18] Önem, C., *Fizikte matematik metodlar*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 1999.
- [19] Zheng, Z. and Xuegang, Y., “Hyperbolic Schrödinger equation,” *Advances In Applied Clifford Algebras*, **14(1)**, 207-213, 2004.

- [20] Landau, L.D. ve Lifshitz, E.M., *Kuantum mekaniği I*, Bilim Yayıncılık, Ankara, 2000.
- [21] <http://en.wikipedia.org/wiki/bicomplex-number>
- [22] Rönn, S., *Bicomplex algebra and function theory*, 2001.
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0101/0101200.pdf
- [23] Rochon, D. ve Shapiro, M., “On the algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers,” *Anal. Univ. Oradea, fasc. Math.*, **11**, 71-110, 2004.
- [24] Rochon, D. ve Tremblay, S., *Bicomplex quantum mechanics: II. The hilbert space*, 2006.
- [25] Rochon, D., *Bicomplex Dynamics*, 2004.
http://www.3dfractals.com/docs/Bicomplex_Dynamics.pdf
- [26] Rochon, D., “A Bicomplex Riemann zeta function,” *J. Math.*, **27**, 357–369, 2004.
- [27] Zor, M., ve ark., S. “Fizik,” *Kuantum Fiziği* (Ed: Özdaş, K.), Açıköğretim Yayınları, 41-57, 1998.
- [28] Silva, C. ve Martins, R., “Polar and axial vectors versus quaternion,” *Am. J. Phys.*, **70(9)**, 958-963, 2002.
- [29] Cho, E., “De Moivre’s Formula for Quaternions,” *Appl. Math. Lett.*, **11(6)**, 33-35, 1998.
- [30] Majernik, V., “Quaternion formulation of the Galilean space-time transformation,” *Acta Physica Slovaca*, **56(1)**, 9-14, 2006.
- [31] Wilkins, D., *On Quaternions or on a new system of imaginaries in algebra William Rowan Hamilton*, Dublin, 2000.
- [32] Haetinger, C., ve ark., “A quaternion application to control rotation movements in the three dimensional space of an articulate mechanical arm type robot built from low cost materials as a supporting tool for teaching at the undergraduate level,” *GCETE*, 134-137, 2005.
- [33] Kuipers, J., *Quaternions and rotation sequences*, Princeton University Press, The United States of America, 1921.
- [34] Vinci, L., *Quaternions and Rotations in the 3-Space: The algebra and its geometric interpretation*, University of North Carolina at Chapel Hill, 2001.
- [35] <http://www.coo/dictionary.com/words/Biquaternion.Wikipedia>
- [36] Kravchenko, V., *On the relation between the Maxwell system and the Dirac equation*, 2002.
http://arxiv.org/PS_cache/math-ph/pdf/0202/0202009.pdf
- [37] Conte, E., *Biquaternion quantum mechanics*, Pitagora Editrice, Bologna, 2000.
- [38] Negi, O.P.S., Bish, S. ve Bisht P.S., “Revisiting quaternion formulation and electromagnetizm,” *II Nuovo Cimento*, **113B**, 1449-1467, 1998.

- [39] Agnew, A., "The twistor structure of the biquaternionic projective point," *Advances Applied Clifford Algebras* **13(2)**, 231-240, 2003.
- [40] Tanışlı, M. and Özgür, G., "Biquaternionic representations of angular momentum and Dirac equation," *Acta Physica Slovaca*, **53(3)**, 243-252, 2003.
- [41] <http://www.geocities.com/zerodivisor>
- [42] Daubol, J. And Delbourgo ,R., "Matrix representation of octonions and generalizations," *Journal of Mathematical Physics*, **40(8)**, 4134-4150, 1999.
- [43] Özdaş, K., *Bölüm cebirleri ve bunların fiziksel uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 1995.
- [44] <http://www.geocities.com/zerodivisor/obasis.html>
- [45] Yavaş, N., *Oktonionik kuantum mekaniği*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.
- [46] Gürsey, F., *On the role of division, jordan and related algebra in the particle physics*, World Scientific, Singapore, 1996
- [47] Bisht, P.S. and Negi, O.P.S., "Unified Split octonions of dyons and gravitodions," *Indian Journal of Pure & Applied Physics*, **32**, 183-185, 1994.
- [48] Bisht, P.S. and Negi, O.P.S., "Split octonion electrodynamics," *Indian Journal of Pure & Applied Physics*, **31**, 292-296, 1993.
- [49] Gogberashvili, M., *Observable algebra*, 2005.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/9404040>
- [50] Gogberashvili, M., *Octonionic electrodynamics*, 2006.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0512258>
- [51] Gogberashvili, M., *Octonionic version of Dirac equations*, 2005.
<http://arxiv.org/abs/hep-th/0505101>
- [52] Gogberashvili, M., "Octonionic geometry," *Advances In Applied Clifford Algebras*, **15(1)**, 55-56, 2005.