

**DİNAMİĞİN CLIFFORD CEBİRLERİYLE
İNCELENMESİ**

Müberra BALCIOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Aralık-2004

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Müberra Balcıoğlu ' nun "Dinamiğin Clifford Cebirleriyle İncelenmesi " başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi ~~17.12.2004~~ tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Adı-Soyadı

Üye(Tez Danışmanı) : Prof.Dr.Kudret ÖZDAŞ
Üye : Prof.Dr.Yalçın KÜÇÜK
Üye : Yard.Doç.Dr.Murat TANIŞLI

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ~~26.01.2005~~ tarih ve~~4/2~~.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Altuğ İFTAR
Fen Bilimleri Enstitüsü
Altug

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİNAMİĞİN CLIFFORD CEBİRLERİYLE İNCELENMESİ

MÜBERRA BALCIOĞLU

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2004, 65 Sayfa

Bu çalışmada Clifford cebirlerindeki temel kavramlar tanıtıldıktan sonra düşük boyuttaki Clifford cebirlerinden bazıları açıklandı. Bu cebirlerin baz vektörleri ve matris gösterimleri incelendi. Clifford cebirlerine uygun olan cebirler sınıflandırıldı. Düzlemde ve uzayda Clifford cebirleri incelendi. İki vektörün toplamı ve çarpımı, bir vektörün bileşenleri, izdüşümleri, yansıması ve dönmesi açıklandı. Koordinat sistemlerinde konum, hız, ivme, kuvvet, momentum, tork, açısal momentum vektörleri elde edildi. Dönme hareketi önce klasik mekanikte Euler açıları kullanılarak sonra Clifford cebriyle incelendi.

Anahtar kelimeler: Clifford cebirleri, dinamik, yansıma, dönme, rotor

ABSTACT

Master of Science Thesis

INVESTIGATION OF DYNAMICS WITH CLIFFORD ALGEBRAS

MÜBERRA BALCIOĞLU

**Anadolu University
Graduate School of Sciences
Physics Program**

Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2004, 65 pages

After introducing basic concepts in Clifford algebras, some algebras of low dimensional Clifford algebras are explained. Base vectors of this algebras and matrix representations are investigated. Corresponding algebras to Clifford algebras are classified. Clifford algebras are investigated on plane and space. Sum and product of two vector, components, projection, reflection and rotation of a vector are explained. Position, velocity, acceleration, force, momenta, moment, angular momenta vectors are obtained in coordinate systems. Rotation motion first using Euler angles in classical mechanics then with Clifford algebra is investigated.

Keywords: Clifford algebras, dynamics, reflection, rotation, rotor

TEŞEKKÜR

Bu alıőmada yardım ve desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ , Yard. Do. Dr Murat TANIŞLI ve Yard. Do. Dr. Süleyman DEMİR' e ok teşekkür ederim.

Ayrıca Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü öğretim üyelerinden sayın hocam Yard. Doç. Dr. Ayőe KAŐKAŐ' a ve aileme her zaman yanımda oldukları için çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. CLIFFORD CEBİRLERİ.....	4
2.1 Kuadratik Uzaylar.....	4
2.2 Clifford Cebirlerinin Tanımı	4
2.3 Clifford Cebirlerinin Matris Gösterimleri.....	6
2.3.1 Öklidyen Düzlem $\mathcal{R}^{2,0}$	6
2.3.2 Üç Boyutlu Öklidyen Uzay $\mathcal{R}^{3,0}$	7
2.3.3 Üç Boyutlu Anti Öklidyen Uzay $\mathcal{R}^{0,3}$	9
2.3.4 Dört Boyutlu Öklidyen Uzay $\mathcal{R}^{4,0}$	10
2.3.5 Öklidyen Doğru \mathcal{R}^1	11
2.3.6 Hiperbolik Düzlem $\mathcal{R}^{1,1}$	11
2.3.7 Uzay-zaman $\mathcal{R}^{3,1}$	12
2.3.8 Uzay-zaman $\mathcal{R}^{1,3}$	13
2.4 Clifford Cebirlerinin Sınıflandırılması.....	13

3. DÜZLEMDE CLIFFORD CEBRİ.....	21
3.1 Vektörlerin Clifford Çarpımı.....	21
3.2 Bir Vektörün Bileşenleri, İzdüşümleri ve Yansıması.....	27
4. UZAYDA CLIFFORD CEBRİ.....	33
4.1 Vektörlerin Clifford Çarpımı.....	33
4.2 Bir Vektörün Yansıması ve Dönmesi.....	34
5. CLIFFORD CEBİRLERİNİN FİZİKSEL UYGULAMALARI....	38
5.1 Koordinat Sistemlerinde Newton'un II. Yasası.....	38
5.1.1 Kartezyen Koordinatlarda Newton'un II. Yasası	38
5.1.2 Kutupsal (Polar) Koordinatlarda Newton'un II. Yasası.....	40
5.1.3 Silindirik Koordinatlarda Newton'un II. Yasası.....	43
5.1.4 Küresel Koordinatlarda Newton'un II. Yasası.....	44
5.2. Dönme Hareketinin İncelenmesi.....	46
5.2.1 Euler Açılıarı.....	46
5.2.2 Bir Noktası Sabit Dönen Topaç Hareketi.....	53
6. SONUÇ.....	63
KAYNAKLAR.....	64

ŞEKİLLER DİZİNİ

- 3.1. $a \wedge b$ ve $b \wedge a$ çarpımlarının geometrik anlamı.
- 3.2. $a \wedge b \wedge c$ çarpımının geometrik anlamı.
- 3.3. $a \times b$ vektörü.
- 3.4. r vektörünün bileşenleri.
- 3.5. a vektörünün paralel ve dik bileşenleri.
- 3.6. r vektörünün bileşenleri ve a vektörüne göre yansıması.
- 3.7. r , r' , r'' vektörleri arasındaki açılar.
- 4.1. $e_1 e_2$, $e_2 e_3$ ve $e_3 e_1$ bivektörleri ve $e_1 e_2 e_3$ hacim elemanının gösterimi.
- 4.2. Bir a vektörünün n' ye dik düzlemde yansıması.
- 4.3. İki yansımadan meydana gelen dönme.
- 4.4. Üç boyutta bir dönme.
- 5.1. Kutupsal koordinatlarda \vec{r} vektörü.
- 5.2. Silindirik koordinatlarda \vec{r} vektörü.
- 5.3. Küresel koordinatlarda \vec{r} vektörü.
- 5.4. X, Y, Z eksenleriyle x, y, z eksenlerinin herhangi bir andaki durumu.
- 5.5. Z eksenini etrafında saat yönünün tersi yönünde φ açısıyla dönme.
- 5.6. x' eksenini etrafında saat yönünün tersi yönde θ açısıyla dönme.
- 5.7. z eksenini etrafında ψ açısı kadar dönme.
- 5.8. Topacın cisim koordinat sistemi.
- 5.9. Topacın dönme açısı.
- 5.10. Topacın eğim açısı.
- 5.11. Topacın ağırlık merkezi.

ÇİZELGELER DİZİNİ

- 2.1. $Cl_{2,0}$ için çarpım çizelgesi.
- 2.2. $Cl_{2,0}$ cebri baz vektörlerinin matris gösterimi.
- 2.3. $Cl_{3,0}$ cebri baz vektörlerinin matris gösterimi.
- 2.4. $Cl_{3,0}$ için çarpım çizelgesi.
- 2.5. $Cl_{0,3}$ cebri baz vektörlerinin kuaternion ikilisi gösterimi.
- 2.6. $Cl_{1,0}$ cebri baz vektörlerinin ikili gösterimleri.
- 2.7. $Cl_{1,1}$ cebri baz vektörlerinin matris gösterimi.
- 2.8. $n \leq 8$ için $Cl_{n,0}$ ve $Cl_{0,n}$ cebirleri.
- 2.9. $r \leq 8$ ve $s \leq 8$ için $Cl_{r,s}$ cebirleri.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$: Vektörler
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$: Clifford cebirindeki vektörler
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: x, y, z eksen takımındaki birim vektörler
$\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$: x', y', z' eksen takımındaki birim vektörler
$\hat{i}'' , \hat{j}'' , \hat{k}''$: x'', y'', z'' eksen takımındaki birim vektörler
$\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$: X, Y, Z eksen takımındaki birim vektörler
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_j$: Clifford cebirindeki birim vektörler
$\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{ij}$: Bivektörler
$\mathbf{e}_{123}, \mathbf{e}_{ijk}$: Trivektörler
\mathbf{e}_{1234}	: 4-hacim elemanı
$Cl_{0,n}, Cl_{n,0}, Cl_{r,s}$: Clifford cebirleri
$Cl_c(n)$: Kompleks Clifford cebirleri
F	: Skaler alan
V	: Vektör uzayı
C	: Kompleks sayılar
C(n)	: Elemanları kompleks sayı olan $n \times n$ elemanlı matrisler
\mathcal{R}	: Reel sayılar
$\mathcal{R}(n)$: Elemanları reel sayı olan $n \times n$ elemanlı matrisler
H	: Kuaternionlar
H(n)	: Elemanları kuaternion olan $n \times n$ elemanlı matrisler
.	: Skaler çarpım
\times	: Vektörel çarpım
\wedge	: Wedge çarpım
\langle , \rangle	: $V \times V$ vektör uzayında iç çarpım
\otimes	: Tensör çarpım
\oplus	: Direkt toplam
\sum_j	: j üzerinden toplam
δ_{ij}	: Dirac-delta fonksiyonu

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Pauli spin matrisleri
$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: Dirac-gamma matrisleri,
\mathbf{a}_\perp	: \mathbf{a} vektörünün dik bileşeni
\mathbf{a}_\parallel	: \mathbf{a} vektörünün paralel bileşeni
α, β, λ	: Skaler sayılar
n_1, n_2, n_3	: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ eksenel vektörünün doğrultu kosinüsleri.
\mathbf{B}	: Bivektör
KCKS	: Katı cisim koordinat sistemi
φ, θ, ψ	: Euler açıları
\mathcal{R}	: Dönme operatörü (rotor)
\mathcal{R}^{-1}	: Ters yönde dönme operatörü
$\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{R}_\theta, \mathcal{R}_\psi$: φ, θ, ψ açılarıyla dönme
$\dot{\mathcal{R}}$: Dönme operatörünün zamana göre türevi
\vec{r}	: Konum vektörü
\vec{v}	: Hız vektörü
\vec{F}	: Kuvvet vektörü
\vec{a}	: İvme vektörü
\vec{P}	: Momentum vektörü
\vec{L}	: Açısal momentum vektörü
$\vec{\tau}$: Tork vektörü
$\vec{\omega}$: Açısal hız vektörü
\mathbf{r}	: Clifford cebirinde konum
\mathbf{V}	: Clifford cebirinde hız
\mathbf{F}	: Clifford cebirinde kuvvet
\mathbf{A}	: Clifford cebirinde ivme
\mathbf{P}	: Clifford cebirinde momentum
\mathbf{L}	: Clifford cebirinde açısal momentum

τ	: Clifford cebirinde tork
x_c	: Topaç üzerindeki bir nokta
$g(x)$: x noktasındaki kütle yoğunluğu
\dot{x}	: x ' in zamana göre türevi
I_j, I_{jk}	: Eylemsizlik momenti katsayıları
T	: Kinetik enerji
V	: Potansiyel enerji
M	: Kütle
g	: Yerçekimi ivmesi
H	: Yükseklik
L	: Lagrange fonksiyonu
q	: Genelleştirilmiş koordinatlar

1.GİRİŞ

Klasik fizikte herhangi bir ölçüm sürecinin sonucu bir reel sayı ile verilir. Kompleks sayılar kuantum fiziğinin temelinde yer alırlar. Bir taneciğin zaman içerisinde uzaydaki hareketini belirleyen dalga fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyondur [1]. $ax+b = 0$ denkleminin çözümü, yani bir sayının başka bir sayıya bölünebildiği sayı cebirleri sadece reel, kompleks, kuaternion ve oktonion cebirleridir. Bunlar sırasıyla bir, iki, dört ve sekiz bileşene sahiptirler. Kompleks sayılarda bir, kuaternionlarda üç, oktonionlarda yedi bileşen imajinerdir [2].

Clifford cebirleri ismi İngiliz matematikçi W.K.Clifford' un anısına verilmiştir. Clifford Alman matematikçi H.G.Grassmann' ın ortaya koyduğu geometrik cebiri geliştirmiştir[3]. İrlandalı matematikçi W.R.Hamilton' un bulduğu kuaternion cebri pek çok çağdaşı gibi Grassmann' ı da etkilemiştir[4].

Grassmann tarafından 1844' te oluşturulan \mathcal{R}^3 lineer uzayının dış cebri

$\Lambda\mathcal{R}^3$ ün baz vektörleri

1

e_1, e_2, e_3

$e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3, e_2\wedge e_3$

$e_1\wedge e_2 \wedge e_3$

olup

$$e_i\wedge e_j = -e_j\wedge e_i, \quad i \neq j \quad (1.1)$$

$$e_i\wedge e_i = 0 \quad (1.2)$$

çarpım kurallarını sağlıyordu. Grassmann' ın dış cebrinde iç çarpım ve bir metrik koşulu yoktu. Clifford 1878' de Hamilton' un görüşlerini geliştirerek vektörlerin çarpımı için metrik bağıntıları olan yeni bir çarpım elde etti. Birinci kural aynı kalacak şekilde ikinci kuralı değiştirdi:

$$e_i e_j = - e_j e_i \quad (1.3)$$

$$e_i e_i = -1 \quad (1.4)$$

\mathcal{R}^2 ' ye karşı gelen $Cl_{2,0}$ Clifford cebirinde skaler, vektör ve bivektör olmak üzere dört tane baz vektörü vardır. Bunlar $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ' dir. Bu cebir çarpım kuralları ve vektör yapısıyla $\{1, i \rightarrow \mathbf{e}_1, j \rightarrow \mathbf{e}_2, k \rightarrow \mathbf{e}_3\}$ olmak üzere Hamilton' un bulduğu kuaternionlara karşı gelir. Kuaternionlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Vektörlerle yapılan işlemlerde, öteleme, dönme gibi hareketlerde kuaternion kullanımı oldukça yaygındır. İki reel kuaterniondan oluşan dual kuaternion sistemi ve kompleks sayı-kuaternion bileşiminden oluşan kompleks kuaternionlar (bikuaternionlar), elektromagnetizma, özel relativite teorisi, kuantum mekaniği gibi pek çok kullanım alanı bulmuştur.

Clifford 1882' de birinci kural aynı kalacak şekilde ikinci kuralı yeniden değiştirdi:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad (1.5)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = 1 \quad (1.6)$$

\mathcal{R}^3 ' e karşı gelen $Cl_{3,0}$ Clifford cebirinde skaler, vektör, bivektör ve trivektör (hacim elemanı) olmak üzere sekiz tane baz vektörü vardır. Bunlar $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\}$ olup $\{i \rightarrow - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, j \rightarrow - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, k \rightarrow - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2\}$ olarak kuaternionlara karşı gelirler. Bu durumda i, j, k baz vektörleri temel bivektörlerdir [5].

Grassmann \mathbf{e}_i sayılarını birim yönlü çizgisel elemanlar olarak tanımladı. Bir keyfi vektör $a_i \mathbf{e}_i$ şeklinde yazılabilir. Burada a_i skaler bir sayıdır. Grassmann iki vektörün iç ve dış çarpımının $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ olarak yazılabileceğini gösterdi. Grassmann' ın merkez çarpım dediği bu çarpıma geometrik çarpım ya da Clifford çarpımı denir. İki vektörün çarpımı olan bu çarpım, iki vektörün nokta çarpımı (skaler çarpım) ile çapraz çarpımından (vektör çarpım) ibarettir. Skaler çarpımda (iç çarpım) değişme özelliği varken vektörel çarpımda (dış çarpım) yoktur [6].

Clifford cebirleri geometride, vektör çarpımında, yüzeylerin ve daha yüksek boyutlu nesnelere temsilinde, yansımalar, dönmeler ve diğer geometrik dönüşümlerde basit ve kullanışlıdır. Özellikle üç boyutlu uzayda Euler açılarının

kullanılması halinde ortaya çıkan kalabalık matris işlemleri yerine Clifford cebrinin kullanımı daha uygundur [7]. Özellikle teorik fizikte Clifford cebrinin kullanımıyla Maxwell denklemlerinin farklı yazımları elde edilmiştir. Klein-Gordon denklemini düzenlenirken kuantum mekaniğinde dönen bir elektronun hareket denklemlerini aynı yolla elde edilmiştir. Clifford \mathcal{R}^n uzayında sadece \mathcal{R}^3 ile ilgilenmiştir. Günümüzde $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{r+s}$ uzaylarında $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ ortonormal baz vektörlerinin karesi pozitif veya negatif olma durumlarına göre sırasıyla Öklidyen veya anti-Öklidyen uzaylar ($\mathcal{R}^{1,3}$ Minkowski uzayı gibi) için cebir tanımları yapılmaktadır. Bilinen birçok cebir sistemleri geometrik bağıntılar için geliştirilmiştir. Bunlar arasında kompleks analiz, vektör, tensör, kuaternion ve spinör cebri vardır. Clifford cebri tüm bu cebir sistemlerinin avantajlarını koruyarak yeni, güçlü ve kolay anlaşılır bir matematik dilinde temsilini sağlar.

Bu çalışmada Clifford cebrindeki temel kavramlar tanıtıldıktan sonra bilinen cebir sistemleri ile aralarındaki izomorfizm ilişkileri incelenecektir. Clifford cebirlerinin fiziksel uygulamaları yapılırken Newton'un II. Yasası çeşitli koordinat sistemlerinde incelenecektir. Önce Euler açılarıyla daha sonra Clifford cebriyle dönme hareketi açıklanacaktır. Daha sonra bir noktası sabit olarak dönen bir topacın hareketi Clifford cebri ile incelenecektir.

2. CLIFFORD CEBİRLERİ

2.1. Kuadratik Uzaylar

Reel veya kompleks olmak üzere F skaler alanı üzerinde sonlu vektör uzayı V olsun. $\lambda \in F$, $a \in V$ olmak üzere,

- $Q(\lambda a) = \lambda^2 Q(a)$
- $B(a,b) = \frac{1}{2} \{Q(a) + Q(b) - Q(a-b)\}$, $a, b \in V$

$Q : V \rightarrow F$ şeklinde bir Q varsa, (V, Q) çiftine bir kuadratik uzay denir ve F üzerindeki her vektör uzayı bir kuadratik uzay olur. B ise, $V \times V$ üzerinde bir iç çarpım uzayının bilinen bütün geometrik özelliklerini kapsar.

(V, Q) bir keyfi kuadratik uzay ve $j = 1, \dots, n$ olmak üzere $\{e_j\}$, V vektör uzayı için normalize baz vektörleri olsun. $Q(a)$ diyagonal formda,

$$Q(a) = \sum_j Q(e_j) a_j^2, \quad a = \sum_j a_j e_j \quad (2.1)$$

olarak yazılır [5].

2.2. Clifford Cebirlerinin Tanımı

F üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı V olsun. $\nu : V \rightarrow A$ ve birimi 1 olan F üzerinde birleşimli cebir A olsun. (V, Q) için

- $(\nu(a))^2 = -Q(a)1$, $\forall a \in V$
- A , $\{\nu(a) : a \in V\}$ ve $\{\lambda 1 : \lambda \in F\}$ tarafından üretilen bir cebir

iken (A, ν) çiftine bir Clifford cebri denir. V 'de a, b keyfi elemanları için

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= -Q(a,b) = 2B(a,b) - Q(a) - Q(b) \\ &= 2B(a,b) + a^2 + b^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

dir. Binom açılımından

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 \quad (2.3)$$

elde edilir. Denk (2.2) ve Denk (2.3) karşılaştırıldığında $V \times V$ deki B iç çarpımını A cebirinde

$$B(a,b) = -\frac{1}{2}(ab + ba) \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. V vektör uzayının $i=1,\dots,n$ olmak üzere e_i normalize baz vektörleri ,

$$e_i e_j + e_j e_i = \{e_i, e_j\} = -2Q(e_i) \delta_{ij} = 2 \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.5)$$

koşulunu sağlar. Denk (2.5)' i sağlayan $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baz vektörleriyle üretilen cebirler Clifford cebri olarak adlandırılırlar.

$i=j$ ise $(e_i)^2 = 1$ ve $(e_i)^2 = -1$ olmak üzere iki durum vardır. $r+s=n$ olmak üzere; $(e_i)^2 = 1$ yani pozitif tanımlanan Öklidyen uzay $\mathcal{R}^{n,0}$ için 2^n boyutlu $Cl_{r,s}$ Clifford cebri Cl_n veya $Cl_{n,0}$ olarak tanımlanır. $(e_i)^2 = -1$ yani negatif tanımlanan Öklidyen uzay $\mathcal{R}^{0,n}$ için 2^n boyutlu $Cl_{r,s}$ Clifford cebri $Cl_{0,n}$ ' dir.

$V = \mathcal{R}^{r+s}$ ve kuadratik form $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$ ile birleşmeli reel Clifford cebirleri $Cl(r+s)$ veya $Cl_{r,s}$ ile gösterilir. $V = \mathbb{C}^n$ için \mathbb{C}^n üzerinde bütün dejenere olmayan, kuadratik formları $Q(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ şeklindeki kompleks Clifford cebirleri $Cl_{\mathbb{C}}(n)$ ile gösterilir [5].

Eğer V vektör uzayı için ortonormal baz vektörleri $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ise reel Clifford cebri $Cl_{r,s}$ ' nin $\{e_i\}$ baz vektörleri,

$$e_i^2 = -1 \quad , \quad i = 1, \dots, r \quad (2.6)$$

$$e_{r+i}^2 = 1 \quad , \quad i = 1, \dots, s \quad (2.7)$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad , \quad i \neq j \quad (2.8)$$

bağıntılarını sağlarlar. Benzer şekilde kompleks Clifford cebri $Cl_c(n)$ 'nin baz vektörleri de

$$\mathbf{e}_i^2 = -1 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 0 \quad , \quad i \neq j \quad (2.10)$$

bağıntılarını sağlarlar. Hem $r+s=n$ olan $Cl_{r,s}$ hem de $Cl_c(n)$ cebirleri

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{r+s}, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{r+s-1} \mathbf{e}_{r+s}, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{r+s}\}$$

kümesiyle üretilen 2^n boyutlu vektör uzaylarıdır.

2.3. Clifford Cebirlerinin Matris Gösterimleri

$Cl_{r,s}$ olarak gösterilen Clifford cebirlerinde $r = n, s = 0$ şeklinde tanımlanırsa Öklidyen uzay $\mathcal{R}^{n,0}$ yerine \mathcal{R}^n ve Clifford cebri $Cl_{n,0}$ yerine Cl_n ifadesi kullanılır[7]. $x \in \mathcal{R}^n$ olmak üzere bir vektörün uzunluğu $|x|^2 = x \cdot x$ dir.

2.3.1. Öklidyen Düzlem $\mathcal{R}^{2,0}$

\mathcal{R}^2 nin Clifford cebri $Cl_{2,0}$; \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 ortonormal baz vektörlerine sahiptir.

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \quad (2.12)$$

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1 \quad (2.13)$$

Denk (2.12) kullanılırsa $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1$ elde edilir. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ skaler veya vektör değil bivektördür. Clifford cebri $Cl_{2,0}$ 'ın

1 : bir skaler

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$: vektörler

$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$: bir bivektör

olmak üzere dört baz vektörü vardır. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ yerine kısaca \mathbf{e}_{12} yazılabilir. $Cl_{2,0}$ cebri baz vektörleri Çizelge 2.1' deki çarpım özelliklerine sahiptir.

Çizelge 2.1. $Cl_{2,0}$ için çarpım çizelgesi

	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_1	1	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$-\mathbf{e}_1$
\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	-1

$\mathcal{R}^{2,0}$ Öklidyen düzleminin Clifford cebri $Cl_{2,0}$ reel 2×2 ' lik matris cebrine izomorftur. 1, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_{12} baz vektörlerinin matris gösterimleri Çizelge 2.2' de verilmiştir.

Çizelge 2.2. $Cl_{2,0}$ cebri baz vektörlerinin matris gösterimi.

$Cl_{2,0}$	$\mathcal{R}(2)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
\mathbf{e}_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2. Üç Boyutlu Öklidyen Uzay $\mathcal{R}^{3,0}$

$\mathcal{R}^{3,0}$ 'in Clifford cebri $Cl_{3,0}$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormal baz vektörlerine sahiptir. Bunların çarpılmasıyla $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$ olarak tanımlanan üç lineer bağımsız bivektör ve \mathbf{e}_{123} olarak tanımlanan bir trivektör(hacim elemanı) ile birlikte sekiz baz vektörü vardır. Bunlar:

- 1 : bir skaler
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$: vektörler
- $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$: bivektörler
- \mathbf{e}_{123} : bir trivektör

$\mathcal{R}^{3,0}$ Öklidyen uzayının Clifford cebri $Cl_{3,0}$; elemanları kompleks sayı olan 2×2 'lik matris cebrine izomorftur. Baz vektörlerinin matris gösterimleri Çizelge 2.3' de verilmiştir.

Çizelge 2.3. $Cl_{3,0}$ cebri baz vektörlerinin matris gösterimi.

$Cl_{3,0}$	C (2)
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
\mathbf{e}_{123}	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Çizelge 2.3 incelendiğinde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ baz vektörlerine karşı gelen matrislerin Pauli spin matrisleri olduğu görülür. Pauli matrisleri gibi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ baz vektörleri de,

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \quad (2.14)$$

$$e_1e_2 = e_{12} = ie_3, e_2e_3 = e_{23} = ie_1, e_3e_1 = e_{31} = ie_2 \quad (2.15)$$

$$e_1e_2e_3 = i1 \quad (2.16)$$

bağıntılarını sağlar. $Cl_{3,0}$ cebrinin e_1, e_2, e_3 baz vektörleri Çizelge 2.4' teki çarpım özelliklerine sahiptir.

Çizelge 2.4. $Cl_{3,0}$ için çarpım çizelgesi.

	e_1	e_2	e_3
e_1	1	ie_3	$-ie_2$
e_2	$-ie_3$	1	ie_1
e_3	ie_2	$-ie_1$	1

2.3.3. Üç Boyutlu Anti Öklidyen Uzay $\mathcal{R}^{0,3}$

$\mathcal{R}^{0,3}$ anti-Öklidyen uzayın Clifford Cebri de e_1, e_2, e_3 ortonormal baz vektörlerine sahiptir. Ancak negatif tanımlanan bir uzay olduğundan

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \quad (2.17)$$

olarak verilen bir vektörün büyüklüğü

$$x.x = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (2.18)$$

olur. $\mathcal{R}^{0,3}$ 'ün e_1, e_2, e_3 ortonormal baz vektörleri aşağıdaki çarpım kurallarını sağlarlar:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1 \quad (2.19)$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1, \quad e_1e_3 = -e_3e_1, \quad e_2e_3 = -e_3e_2 \quad (2.20)$$

Bu bağıntılar kuaternion cebirindeki birim kuaternionlara uygundur.

$$i = e_1, \quad j = e_2, \quad k = e_3, \quad ijk = e_1e_2e_3 = -1 \quad (2.21)$$

$e_3 = e_1e_2$ olmak üzere her kuaternion $x = x_01 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_1e_2$ şeklinde yazılabilir. Clifford cebri $Cl_{0,3}$, dual kuaternion denilen ve iki kuaternionun toplamı olan $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ cebrine izomorftur. Baz vektörlerinin kuaternion ikilisi gösterimleri Çizelge 2.5'te verilmiştir.

Çizelge 2.5. $Cl_{0,3}$ cebri baz vektörlerinin kuaternion ikilisi gösterimi.

$Cl_{0,3}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
1	(1,1)
e_1, e_2, e_3	(i,-i), (j,-j), (k,-k)
e_{23}, e_{31}, e_{12}	(i,i), (j,j), (k,k)
e_{123}	(-1,1)

2.3.4. Dört Boyutlu Öklidyen Uzay $\mathcal{R}^{4,0}$

$\mathcal{R}^{4,0}$ 'ün Clifford Cebri $Cl_{4,0}$; e_1, e_2, e_3, e_4 ortonormal baz vektörlerine sahiptir. Bunların ikili, üçlü ve dörtlü çarpılmasıyla 16 baz vektörü elde edilir.

Bunlar:

- 1 : bir skaler
- e_1, e_2, e_3 : vektörler
- $e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}$: bivektörler
- $e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$: trivektörler
- e_{1234} : bir 4-hacim elemanı

$\mathcal{R}^{4,0}$, dört boyutlu Öklidyen uzayının Clifford cebri $Cl_{4,0}$, elemanları kuaternion olan 2×2 'lik matris cebrine izomorftur. e_1, e_2, e_3, e_4 ortonormal baz vektörlerine karşı gelen matrisler şunlardır:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3.5. Öklidyen Doğru \mathcal{R}^1

Öklidyen Doğru $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}'$ nin Clifford cebri $Cl_{1,0}$; 1 ve e_1 baz vektörlerine sahiptir. $Cl_{1,0}$ reel sayı ikilileri olan $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}'$ ye izomorftur. Baz vektörleri için

$$1^2 = e_1^2 = 1 \tag{2.22}$$

çarpım kuralı geçerlidir. 1 ve e_1 baz vektörlerinin ikili gösterimleri Çizelge 2.6' da verilmiştir.

Çizelge 2.6. $Cl_{1,0}$ cebri baz vektörlerinin ikili gösterimleri.

$Cl_{1,0}$	$\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$
1	(1,1)
e_1	(1,-1)

2.3.6. Hiperbolik Düzlem $\mathcal{R}^{1,1}$

$\mathcal{R}^{1,1}$, in Clifford cebri $Cl_{1,1}$; e_1, e_2 baz vektörlerine sahiptir. $Cl_{1,1}$; elemanları reel sayı olan 2×2 ' lik reel matris cebrine izomorftur. e_1, e_2, e_{12} baz vektörlerinin matris gösterimleri Çizelge 2.7 'de verilmiştir.

Çizelge 2.7. $Cl_{1,1}$ cebri baz vektörlerinin matris gösterimi.

$Cl_{1,1}$	$\mathcal{R}(2)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
e_1, e_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
e_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.7. Uzay-zaman $\mathcal{R}^{3,1}$

$\mathcal{R}^{3,1}$ 'in Clifford cebri $Cl_{3,1}$; e_1, e_2, e_3, e_4 ortonormal baz vektörlerine sahiptir. Bunlar:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \quad (2.23)$$

$$e_4^2 = -1 \quad (2.24)$$

$$e_\mu e_\nu = -e_\nu e_\mu \quad , \quad \mu \neq \nu \quad (2.25)$$

özelliklerine sahiptirler. $Cl_{3,1}$ cebri, elemanları reel sayı olan 4×4 ' lük matris cebrine izomorftur. Ayrıca $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Pauli spin matrisleri kullanılarak 2×2 ' lik matrisler olarak da yazılabilirler.

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}$$

2.3.8. Uzay-zaman $\mathcal{R}^{1,3}$

$\mathcal{R}^{1,3}$ 'ün Clifford cebri $Cl_{1,3}$; elemanları kuaternion olan 2×2 ' lik matris cebrine izomorftur. $Cl_{1,3}$ 'ün baz vektörleri olan ve $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sembolleriyle gösterilen Dirac-gamma matrisleri,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

olup,

$$(\gamma_0)^2 = I \quad (2.26)$$

$$(\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -I \quad (2.27)$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu, \quad \mu \neq \nu \quad (2.28)$$

bağıntılarını sağlarlar. Buradaki I birim matristir.

2.4. Clifford Cebirlerinin Sınıflandırılması

Clifford cebirleri matematik ve fizikte kullanılmakta olan bazı cebirlere izomorftur. Bunları göstermek için aşağıdaki izomorfizmler kullanılır[8,9,10]:

$$Cl_{0,n+2} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \quad (2.29)$$

$$Cl_{n+2,0} \cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{R}(n) \otimes \mathcal{R}(m) \cong \mathcal{R}(nm) \quad (2.31)$$

$$\mathcal{R} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{R} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \quad (2.33)$$

$$\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}(n) \cong \mathbb{C}(n) \quad (2.34)$$

$$\mathbb{H} \otimes \mathcal{R} (n) \cong \mathbb{H}(n) \quad (2.35)$$

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathcal{R} (4) \quad (2.36)$$

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C} (2) \quad (2.37)$$

Buna göre $Cl_{n,0}$ ve $Cl_{0,n}$ Clifford cebirlerinden bazıları şunlardır:

$$Cl_{0,1} \cong \mathbb{C}$$

$$Cl_{1,0} \cong \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$$

$$Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$$

$$Cl_{2,0} \cong \mathcal{R} (2)$$

$$Cl_{0,3} \cong Cl_{1,0} \otimes Cl_{0,2} \cong (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}) \otimes \mathbb{H} \cong (\mathcal{R} \otimes \mathbb{H}) \oplus (\mathcal{R} \otimes \mathbb{H})$$

$$Cl_{0,3} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$

$$Cl_{3,0} \cong Cl_{0,1} \otimes Cl_{2,0} \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C}(2)$$

$$Cl_{3,0} \cong \mathbb{C}(2)$$

$$Cl_{0,4} \cong Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \cong \mathcal{R} (2) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(2)$$

$$Cl_{0,4} \cong \mathbb{H} (2)$$

$$Cl_{4,0} \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \cong \mathbb{H} \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (2)$$

$$Cl_{0,5} \cong Cl_{3,0} \otimes Cl_{0,2} \cong \mathbb{C} (2) \otimes \mathbb{H} \cong (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$$

$$Cl_{0,5} \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{R} (4) \cong \mathbb{C}(4)$$

$$Cl_{5,0} \cong Cl_{0,3} \otimes Cl_{2,0} \cong (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes \mathcal{R} (2) \cong (\mathbb{H} \otimes \mathcal{R} (2)) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathcal{R} (2))$$

$$Cl_{5,0} \cong \mathbb{H} (2) \oplus \mathbb{H}(2)$$

$$Cl_{0,6} \cong Cl_{4,0} \otimes Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H} \cong (\mathcal{R}(2) \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}$$

$$\cong \mathcal{R}(2) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \cong \mathcal{R}(2) \otimes \mathcal{R}(4) \cong \mathcal{R}(8)$$

$$Cl_{0,6} \cong \mathcal{R}(8)$$

$$Cl_{6,0} \cong Cl_{0,4} \otimes Cl_{2,0} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathcal{R}(2) \cong (\mathbb{H} \otimes \mathcal{R}(2)) \otimes \mathcal{R}(2)$$

$$\cong \mathbb{H} \otimes (\mathcal{R}(2) \otimes \mathcal{R}(2)) \cong \mathbb{H} \otimes \mathcal{R}(4) \cong \mathbb{H}(4)$$

$$Cl_{6,0} \cong \mathbb{H}(4)$$

$$Cl_{0,7} \cong Cl_{5,0} \otimes Cl_{0,2} \cong (\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)) \otimes \mathbb{H} \cong (\mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H})$$

$$\cong (\mathcal{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \oplus (\mathcal{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H})$$

$$\cong (\mathcal{R}(2) \otimes \mathcal{R}(4)) \oplus (\mathcal{R}(2) \otimes \mathcal{R}(4))$$

$$Cl_{0,7} \cong \mathcal{R}(8) \oplus \mathcal{R}(8)$$

$$Cl_{7,0} \cong Cl_{0,5} \otimes Cl_{2,0} \cong \mathbb{C}(4) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C} \otimes (\mathcal{R}(4) \otimes \mathcal{R}(2)) \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{R}(8)$$

$$Cl_{7,0} \cong \mathbb{C}(8)$$

$$Cl_{0,8} \cong Cl_{6,0} \otimes Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}(4) \otimes \mathbb{H} \cong \mathcal{R}(4) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \cong \mathcal{R}(4) \otimes \mathcal{R}(4)$$

$$Cl_{0,8} \cong \mathcal{R}(16)$$

$$Cl_{8,0} \cong Cl_{0,6} \otimes Cl_{2,0} \cong \mathcal{R}(8) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(16)$$

$$Cl_{0,8} \cong \mathcal{R}(16)$$

$n \leq 8$ için $Cl_{n,0}$ ve $Cl_{0,n}$ cebirleri Çizelge 2.8' de görülmektedir.

Çizelge 2.8. $n \leq 8$ için $Cl_{n,0}$ ve $Cl_{0,n}$ cebirleri.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl_{0,n}$	\mathcal{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathcal{R}(8)$	$\mathcal{R}(8) \oplus \mathcal{R}(8)$	$\mathcal{R}(16)$
$Cl_{n,0}$	\mathcal{R}	$\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$	$\mathcal{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathcal{R}(16)$

Clifford cebirleri daha genel olarak $Cl_{r,s}$ şeklinde ifade edilir. r ve s 'nin değerlerine göre karşılık gelen cebirler

$$Cl_{r+1,s+1} \cong Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} \quad (2.38)$$

izomorfizmi kullanılarak bulunur. Bu izomorfizme ve Çizelge 2.8'e göre bazı $Cl_{r,s}$ cebirleri şunlardır:

$$\begin{array}{ll} Cl_{0,0} \cong \mathcal{R} & Cl_{1,0} \cong \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} \\ Cl_{0,1} \cong \mathbb{C} & Cl_{2,0} \cong \mathcal{R} (2) \\ Cl_{0,2} \cong \mathbb{H} & Cl_{3,0} \cong \mathbb{C} (2) \\ Cl_{0,3} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} & Cl_{4,0} \cong \mathbb{H} (2) \\ Cl_{0,4} \cong \mathbb{H} (2) & Cl_{5,0} \cong \mathbb{H} (2) \oplus \mathbb{H} (2) \\ Cl_{0,5} \cong \mathbb{C} (4) & Cl_{6,0} \cong \mathbb{H} (4) \\ Cl_{0,6} \cong \mathcal{R} (8) & Cl_{7,0} \cong \mathbb{C} (8) \\ Cl_{0,7} \cong \mathcal{R} (8) \oplus \mathcal{R} (8) & Cl_{8,0} \cong \mathcal{R} (16) \\ Cl_{0,8} \cong \mathcal{R} (16) & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (2) \\ Cl_{1,2} \cong Cl_{0,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (2) \\ Cl_{1,3} \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (2) \\ Cl_{1,4} \cong Cl_{0,3} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (2) \oplus \mathbb{H} (2) \\ Cl_{1,5} \cong Cl_{0,4} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} (2) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (4) \\ Cl_{1,6} \cong Cl_{0,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (4) \otimes \mathcal{R} (2) = \mathbb{C} (8) \\ Cl_{1,7} \cong Cl_{0,6} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (8) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (16) \\ Cl_{1,8} \cong Cl_{0,7} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R} (8) \oplus \mathcal{R} (8)) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (16) \oplus \mathcal{R} (16) \end{array}$$

$$Cl_{2,1} \cong Cl_{1,0} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (2) \oplus \mathcal{R} (2)$$

$$Cl_{2,2} \cong Cl_{1,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (2) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (4)$$

$$Cl_{2,3} \cong Cl_{1,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (2) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (4)$$

$$Cl_{2,4} \cong Cl_{1,3} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} (2) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (4)$$

$$Cl_{2,5} \cong Cl_{1,4} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H} (2) \oplus \mathbb{H} (2)) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (4) \oplus \mathbb{H} (4)$$

$$Cl_{2,6} \cong Cl_{1,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} (4) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (8)$$

$$Cl_{2,7} \cong Cl_{1,6} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (8) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (16)$$

$$Cl_{2,8} \cong Cl_{1,7} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (16) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (32)$$

$$Cl_{3,1} \cong Cl_{2,0} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (2) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (4)$$

$$Cl_{3,2} \cong Cl_{2,1} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R} (2) \oplus \mathcal{R} (2)) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (4) \oplus \mathcal{R} (4)$$

$$Cl_{3,3} \cong Cl_{2,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (4) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (8)$$

$$Cl_{3,4} \cong Cl_{2,3} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (4) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (8)$$

$$Cl_{3,5} \cong Cl_{2,4} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} (4) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (8)$$

$$Cl_{3,6} \cong Cl_{2,5} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H} (4) \oplus \mathbb{H} (4)) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (8) \oplus \mathbb{H} (8)$$

$$Cl_{3,7} \cong Cl_{2,6} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} (8) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (16)$$

$$Cl_{3,8} \cong Cl_{2,7} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (16) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (32)$$

$$Cl_{4,1} \cong Cl_{3,0} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (2) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (4)$$

$$Cl_{4,2} \cong Cl_{3,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (4) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (8)$$

$$Cl_{4,3} \cong Cl_{3,2} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R} (4) \oplus \mathcal{R} (4)) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (8) \oplus \mathcal{R} (8)$$

$$Cl_{4,4} \cong Cl_{3,3} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R} (8) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathcal{R} (16)$$

$$Cl_{4,5} \cong Cl_{3,4} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} (8) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{C} (16)$$

$$Cl_{4,6} \cong Cl_{3,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H} (8) \otimes \mathcal{R} (2) \cong \mathbb{H} (16)$$

$$Cl_{4,7} \cong Cl_{3,6} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$$

$$Cl_{4,8} \cong Cl_{3,7} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(32)$$

$$Cl_{5,1} \cong Cl_{4,0} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(4)$$

$$Cl_{5,2} \cong Cl_{4,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(4) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(8)$$

$$Cl_{5,3} \cong Cl_{4,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(8) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(16)$$

$$Cl_{5,4} \cong Cl_{4,3} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R}(8) \oplus \mathcal{R}(8)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(16) \oplus \mathcal{R}(16)$$

$$Cl_{5,5} \cong Cl_{4,4} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(32)$$

$$Cl_{5,6} \cong Cl_{4,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(32)$$

$$Cl_{5,7} \cong Cl_{4,6} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(32)$$

$$Cl_{5,8} \cong Cl_{4,7} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$$

$$Cl_{6,1} \cong Cl_{5,0} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$$

$$Cl_{6,2} \cong Cl_{5,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(4) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(8)$$

$$Cl_{6,3} \cong Cl_{5,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(8) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(16)$$

$$Cl_{6,4} \cong Cl_{5,3} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(32)$$

$$Cl_{6,5} \cong Cl_{5,4} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R}(16) \oplus \mathcal{R}(16)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(32) \oplus \mathcal{R}(32)$$

$$Cl_{6,6} \cong Cl_{5,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(32) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(64)$$

$$Cl_{6,7} \cong Cl_{5,6} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(32) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(64)$$

$$Cl_{6,8} \cong Cl_{5,7} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(32) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(64)$$

$$Cl_{7,1} \cong Cl_{6,0} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(4) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(8)$$

$$Cl_{7,2} \cong Cl_{6,0} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$$

$$Cl_{7,3} \cong Cl_{6,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(8) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(16)$$

$$Cl_{7,4} \cong Cl_{6,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(32)$$

$$Cl_{7,5} \cong Cl_{6,3} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(32) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(64)$$

$$Cl_{7,6} \cong Cl_{6,4} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R}(32) \oplus \mathcal{R}(32)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(64) \oplus \mathcal{R}(64)$$

$$Cl_{7,7} \cong Cl_{6,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(64) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(128)$$

$$Cl_{7,8} \cong Cl_{6,6} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(64) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(128)$$

$$Cl_{8,1} \cong Cl_{7,0} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(8) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(16)$$

$$Cl_{8,2} \cong Cl_{7,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(8) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(16)$$

$$Cl_{8,3} \cong Cl_{7,2} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$$

$$Cl_{8,4} \cong Cl_{7,3} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}(16) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{H}(32)$$

$$Cl_{8,5} \cong Cl_{7,4} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C}(32) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathbb{C}(64)$$

$$Cl_{8,6} \cong Cl_{7,5} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(64) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(128)$$

$$Cl_{8,7} \cong Cl_{7,6} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathcal{R}(64) \oplus \mathcal{R}(64)) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(128) \oplus \mathcal{R}(128)$$

$$Cl_{8,8} \cong Cl_{7,7} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathcal{R}(128) \otimes \mathcal{R}(2) \cong \mathcal{R}(256)$$

$r \leq 8$ ve $s \leq 8$ için $Cl_{r,s}$ cebirleri Çizelge 2.9' da görülmektedir.

Çizelge 2.9. $r \leq 8$ ve $s \leq 8$ için $Cl_{r,s}$ cebirleri.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	\mathcal{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathcal{R}(8)$	$\mathcal{R}(8) \oplus \mathcal{R}(8)$	$\mathcal{R}(16)$
1	$\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$	$\mathcal{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathcal{R}(16)$	$\mathcal{R}(16) \oplus \mathcal{R}(16)$
2	$\mathcal{R}(2)$	$\mathcal{R}(2) \oplus \mathcal{R}(2)$	$\mathcal{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathcal{R}(32)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathcal{R}(4)$	$\mathcal{R}(4) \oplus \mathcal{R}(4)$	$\mathcal{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathcal{R}(8)$	$\mathcal{R}(8) \oplus \mathcal{R}(8)$	$\mathcal{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathcal{R}(16)$	$\mathcal{R}(16) \oplus \mathcal{R}(16)$	$\mathcal{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathcal{R}(32)$	$\mathcal{R}(32) \oplus \mathcal{R}(32)$	$\mathcal{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathcal{R}(64)$	$\mathcal{R}(64) \oplus \mathcal{R}(64)$	$\mathcal{R}(128) \oplus \mathcal{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$
8	$\mathcal{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathcal{R}(128)$	$\mathcal{R}(128) \oplus \mathcal{R}(128)$	$\mathcal{R}(256)$

olur. Çarpımı,

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(b_0 + b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{e}_1 + a_0b_2\mathbf{e}_2 + a_0b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1b_0\mathbf{e}_1 + a_1b_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &\quad + a_1b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_2b_0\mathbf{e}_2 + a_2b_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2b_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &\quad + a_3b_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_3b_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_3b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_3b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_3b_2 - a_2b_3)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{e}_2 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. Katsayılar,

$$\begin{aligned} a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 &= c_0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 + a_3b_2 - a_2b_3 &= c_1 \\ a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1 &= c_2 \\ a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 &= c_3 \end{aligned}$$

olarak alınırsa bu iki vektörün çarpımı

$$\mathbf{ab} = c_0 + c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_{12} \quad (3.7)$$

olur. Denk (3.4),

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} \quad (3.9)$$

olmak üzere ikiye ayrılabilir. Denk (3.8), \mathbf{a} ve \mathbf{b} ' nin skaler veya nokta çarpımı, Denk (3.9) ise \mathbf{a} ve \mathbf{b} ' nin dış veya wedge çarpımı olarak adlandırılır. Bir vektörün karesi vektörün büyüklüğünün karesine eşit olduğundan iki vektörün toplamının karesi

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} \quad (3.10)$$

dır. Pisagor teoreminden ,

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 \mathbf{a}\mathbf{b} \quad (3.11)$$

yazılabilir. Denk (3.10) ve Denk (3.11)' den hareketle

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}) \quad (3.12)$$

bulunur. Bu çarpıma “nokta çarpım” veya “iç çarpım” denir. Vektörler birbirine dik ise

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = 0 \quad (3.13)$$

olur ve Denk (3.12)' den

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = -\mathbf{b}\mathbf{a} \quad (3.14)$$

olur. \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin “wedge çarpımı” veya “dış çarpım”

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathbf{a}) = -\mathbf{b}\wedge\mathbf{a} \quad (3.15)$$

dır. Clifford çarpımı iç çarpım ile dış çarpımın birleşimidir. İç çarpım ve dış çarpım geometrik çarpımdan (Clifford çarpımı) elde edilebilir. Buradan Clifford çarpımının en temel çarpım olduğu sonucu çıkarılabilir[11,12]. Yani,

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (3.16)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim, çarpımın simetrik; ikinci terim antisimetrik kısmıdır. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ çarpımı \mathbf{a} vektörü ile değişimli olmadığından skaler değildir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \frac{1}{2} (|\mathbf{a}|^2 \mathbf{b} - \mathbf{aba}) = \frac{1}{2} (\mathbf{b} |\mathbf{a}|^2 - \mathbf{aba}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{ba}^2 + \mathbf{aba}) \\ &= (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 'nin karesi negatif olduğundan bir vektör değildir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \left(\frac{1}{2} (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \right)^2 = \frac{1}{4} ((\mathbf{ab})^2 - 2 |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{ba})^2) \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

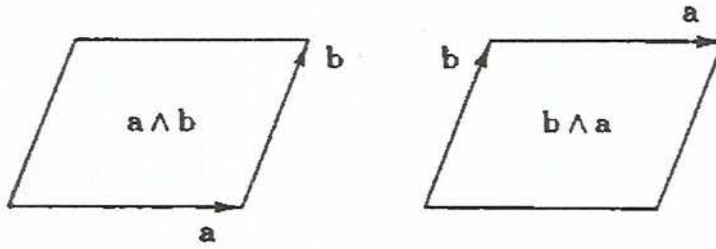
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \quad (3.19)$$

olduğundan,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 < 0 \quad (3.20)$$

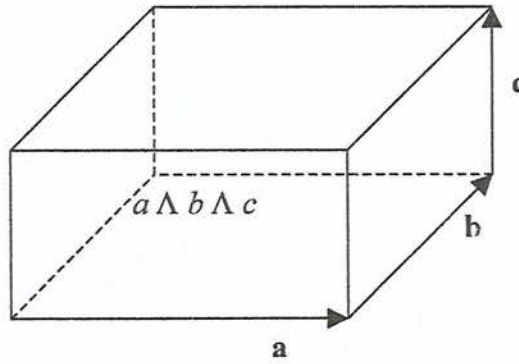
dır. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ' ye bivektör denir ve kenarları \mathbf{a} ve \mathbf{b} olan yönlü paralelkenar olduğu Şekil 3.1' de gösterilmiştir. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ bivektörünün büyüklüğü bu paralelkenarın alanıdır. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ve $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ bivektörleri aynı alana, aynı büyüklüğe sahiptirler ama zıt yönlüdürler.

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1| \quad (3.21)$$



Şekil 3.1. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ve $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ çarpımlarının geometrik anlamı.

Eğer bivektör bir λ skaleri ile çarpılırsa alan $|\lambda|$ kadar büyür. λ negatif ise değişiklik ters yönde olur. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ çarpımı ise bir trivektördür[13]. Bu çarpım Şekil 3.2' de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ çarpımının geometrik anlamı.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \quad (3.22)$$

$$c\Lambda(a\Lambda b) = \frac{1}{2}(c(a\Lambda b) + (a\Lambda b)c) = \frac{1}{2}((c\Lambda a)b + b(c\Lambda a) + a(b.c) - (b.c)a)$$

$$c\Lambda(a\Lambda b) = (c\Lambda a)\Lambda b \quad (3.23)$$

buradan bir vektörün bir bivektör ile wedge çarpımının simetrik olduğu görülür.

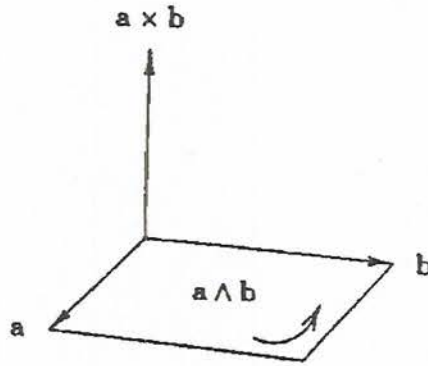
Wedge çarpım

$$a_1 \Lambda a_2 \Lambda \dots \Lambda a_n, \quad n > 3 \quad (3.24)$$

üç boyutlu uzayda sıfırdır ve herhangi bir trivektör, i birim trivektörün çarpımı ile ifade edilebilir. Adından da anlaşılacağı gibi i birim trivektörünün büyüklüğü 1'dir. Birim trivektör, üç boyutlu uzay cebirinin diğer tüm elemanlarıyla değişimlidir. i birim trivektörü üç boyutlu uzayda sanal birimdir. $a\Lambda b$ bivektörü ile $a \times b$ çapraz çarpımı arasında

$$a \times b = -i(a\Lambda b) \quad (3.25)$$

bağıntısı vardır. Şekil 3.3' de görüldüğü gibi burada $a \times b$ vektörü $a\Lambda b$ düzlemine diktir.



Şekil 3.3. $a \times b$ vektörü.

3.2. Bir Vektörün Bileşenleri, İzdüşümleri, Yansıması ve Dönmesi

İki bileşeni olan bir r vektörü $r = \alpha a + \beta b$ ile gösterilsin. α katsayısı,

$$r \wedge b = (\alpha a + \beta b) \wedge b = \alpha a \wedge b + \beta b \wedge b = \alpha a \wedge b$$

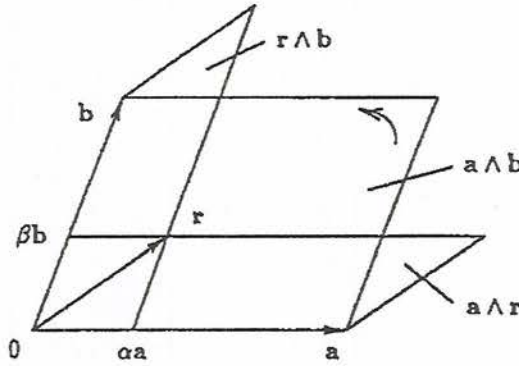
$$\alpha = \frac{r \wedge b}{a \wedge b} \quad (3.27)$$

ve β katsayısı benzer şekilde

$$a \wedge r = a \wedge (\alpha a + \beta b) = \alpha a \wedge a + \beta a \wedge b = \beta a \wedge b$$

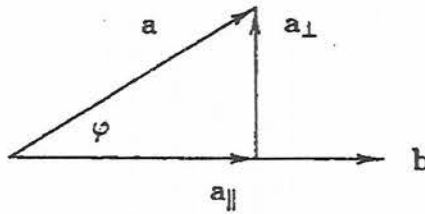
$$\beta = \frac{a \wedge r}{a \wedge b} \quad (3.28)$$

olarak hesaplanır. r vektörünün bileşenleri Şekil 3.4' de gösterilmiştir.



Şekil 3.4. r vektörünün bileşenleri.

a ve b vektörleri arasındaki φ açısı ($0 < \varphi < 180^\circ$) olmak üzere, a vektörünün b vektörü üzerindeki dik izdüşümü Şekil 3.5' de gösterilmiştir.



Şekil 3.5. a vektörünün paralel ve dik bileşenleri.

\mathbf{a} vektörünün \mathbf{b} vektörü üzerindeki \mathbf{a}_{\parallel} paralel bileşeni, $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ birim vektörünün

\mathbf{a} ile skaler çarpımıdır:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = |\mathbf{a}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \quad (3.29)$$

Başka bir deyişle \mathbf{a} 'nın paralel bileşeni \mathbf{a}_{\parallel} , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$ skaler çarpımı ile

$\mathbf{b}^{-1} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$ vektörünün çarpımıdır. Bu nedenle,

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \quad (3.30)$$

yazılabilir. Bu son ifade \mathbf{a} vektörünün \mathbf{b} vektörü üzerindeki izdüşümlerinin, \mathbf{b} vektörünün uzunluğundan bağımsız olduğu anlamına gelir. \mathbf{a} vektörünün \mathbf{a}_{\perp} dik bileşeni, $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel}$ farkı ile bulunur.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\perp} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \\ &= (\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \\ &= -\mathbf{b}^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b}^{-1} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \\ &= -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{b}^{-1} \\ \mathbf{a}_{\perp} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{b}^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Örnek: $\mathbf{r} = 5 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ olarak verilen bir vektörün iki bileşeni $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2 \mathbf{e}_2$ ve

$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ olduğuna göre α ve β katsayılarını bulunuz.

Çözüm: Önce $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ve $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$ çarpımları yazılmalıdır.

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{r}) = \frac{1}{2} [(5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)(5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] = 6\mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{a}\Delta\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2)] = 3\mathbf{e}_{12}$$

Denk. (3.27)' den $\alpha = 2$

$$\mathbf{a}\Delta\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{ar}-\mathbf{ra}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2)(5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2) - (5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2)] = 9\mathbf{e}_{12}$$

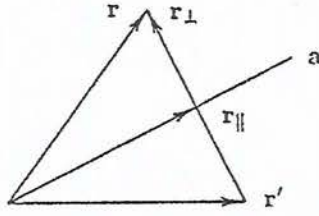
Denk. (3.28)' den $\beta = 3$

elde edilir. Bulunan α ve β katsayıları kullanılarak \mathbf{r} vektörü

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$$

şeklinde yazılır.

Clifford sayılarının cebirsel özellikleri yansımanın gösteriminde uygun bir yoldur [14]. Bir \mathbf{r} vektörünün \mathbf{a} vektörü üzerindeki yansıması olan \mathbf{r}' vektörü Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6. \mathbf{r} vektörünün bileşenleri ve \mathbf{a} vektörüne göre yansıması.

\mathbf{r} vektörü, \mathbf{a} doğrultusundaki paralel ve dik bileşenleri cinsinden

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} \quad (3.32)$$

ile tanımlanır. \mathbf{r} vektörünün \mathbf{a} vektörüne göre yansıması ise

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}_{\perp} \quad (3.33)$$

tir. Denk (3.30) ve Denk (3.31) kullanılırsa,

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} \quad (3.34)$$

Aynı \mathbf{r} vektörünün \mathbf{a} doğrultusundaki görüntüsünün \mathbf{b} vektörü doğrultusundaki yansıması ise

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{b} \mathbf{r}' \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{b} \mathbf{a}) \mathbf{r} (\mathbf{b} \mathbf{a})^{-1} \quad (3.35)$$

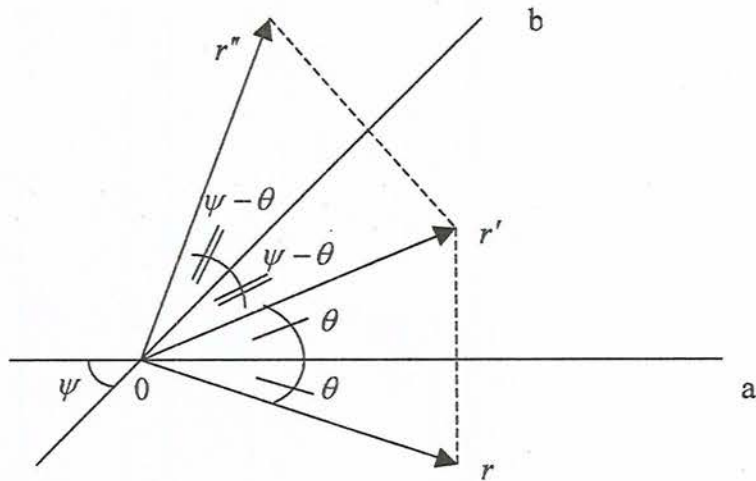
ifadesiyle verilir. Burada dönme operatörü

$$\mathfrak{K} = \mathbf{b} \mathbf{a} \quad (3.36)$$

olarak alınır

$$\mathbf{r}'' = \mathfrak{K} \mathbf{r} \mathfrak{K}^{-1} \quad (3.37)$$

olur. Şekil 3.7' den görüldüğü gibi \mathbf{a} ve \mathbf{b} arasındaki açı ψ olmak üzere \mathbf{r}' ve \mathbf{r}'' arasındaki açı 2ψ 'dir. Bu iki yansıma operasyonunun bileşimi \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri arasındaki açının iki katı olan dönmeye eşittir [15,16].



Şekil 3.7. \mathbf{r} , \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' vektörleri arasındaki açılar.

Buna göre \mathbf{ba} çarpımını yeniden hesaplamak için bileşenlerine ayırmak yararlı olacaktır. Vektörler $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_{12}$ ve $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_{12}$ ve

$\langle, \rangle : V \times V$ vektör uzayında iç çarpım olmak üzere;

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \mathbf{ba} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{1} - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle_1 \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle_2 \mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle_3 \mathbf{e}_{12}\end{aligned}\quad (3.38)$$

bulunur.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \psi \quad (3.39)$$

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \psi \quad (3.40)$$

bağıntıları bu vektörlerin uzunluklarını verir. \mathbf{a} ve \mathbf{b} birim uzunluktaki vektörler olduklarından

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \cos \psi, \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sin \psi \quad (3.41)$$

tir. Bu nedenle satır matrisi gösterimiyle;

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_2, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_3) = \sin \psi (n_1, n_2, n_3) \quad (3.42)$$

şeklinde yazılır. n_1, n_2, n_3 , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ eksenel vektörünün doğrultu kosinüsleridir. Buna göre \mathfrak{R} dönmesi

$$\mathfrak{R} = \cos \psi \mathbf{1} - \sin \psi (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_{12}) \quad (3.43)$$

olur. ψ açısı dönme açısı θ 'nın yarısıdır. Buna göre

$$\mathfrak{R} = 1 \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_{12}) \quad (3.44)$$

elde edilir. \mathfrak{R} 'den \mathfrak{R}^{-1} 'i elde etmek için θ yerine $-\theta$ yazmak yeterlidir.

$$\mathfrak{R}^{-1} = 1 \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_{12}) \quad (3.45)$$

Ayrıca Denk (3.44) ve Denk (3.45) kutupsal formda

$$\mathfrak{R} = e^{-i \frac{\theta}{2}} \quad (3.46)$$

$$\mathfrak{R}^{-1} = e^{i \frac{\theta}{2}} \quad (3.47)$$

olarak yazılabilir.

4. UZAYDA CLIFFORD CEBRİ

Üç boyutlu uzayda geometrideki ve klasik mekanikteki problemlerin çözümünde Clifford cebri kullanışlı bir yoldur. Vektörler, düzlemler, hacimler ve vektörel işlemlerde kullanılabilir.

Üç boyutlu $\mathcal{R}^{3,0}$ Öklidyen uzayının Clifford cebri $Cl_{3,0}$ ün baz vektörleri, cebirsel özellikleri, matris gösterimleri Bölüm 2.3.2' de tanımlanmıştır. $Cl_{3,0}$ ' te bir u keyfi elemanı skaler, vektör, bivektör ve hacim elemanının toplamı olarak yazılabilir.

4.1. Vektörlerin Clifford Çarpımı

$Cl_{3,0}$ Clifford cebrinde \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ olsun. Bu iki vektörün toplamı,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2b_2)\mathbf{e}_2 + (a_3b_3)\mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (4.1)$$

olarak bulunur. Bu vektörlerin çarpımı,

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_2b_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2b_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_3b_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_3b_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_3b_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

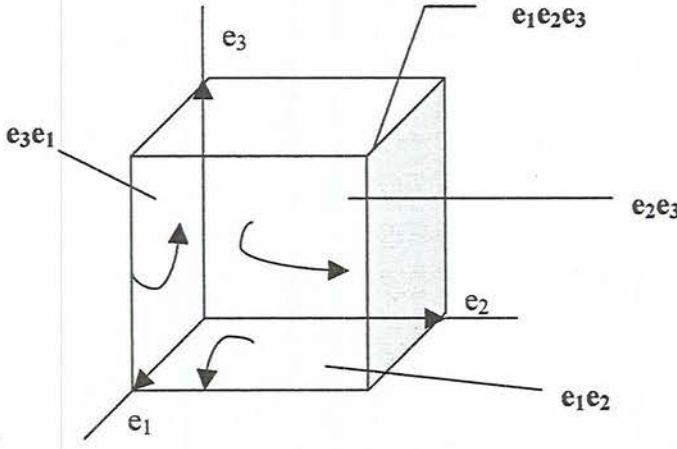
Birinci, beşinci ve dokuzuncu terimlerde Denk (2.14), diğerlerinde Denk(2.15) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) 1 + (a_1b_2 - a_2b_1) \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2) \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_3b_1 - a_1b_3) \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\end{aligned}\quad (4.2)$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$ ' dır. Bu denklemin hem skaler, hem bivektör bileşeni olduğu görülür. Denk (4.2)' deki 1' in katsayısı yani çarpımın skaler bileşeni, \mathbf{a} ve \mathbf{b} ' nin skaler veya iç çarpımı olan

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (4.3)$$

tür. Ayrıca, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ baz elemanlarının katsayıları $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ çarpımının üç bileşenidir. Bütün mümkün çarpımlar incelendiğinde $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ baz elemanları tarafından tanımlanan 8 boyutlu uzay elde edilir[17]. Bunlardan 1; bir skaler, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; üç vektör, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$; üç bivektör ve $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ise bir hacim elemanıdır. Bunlar Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ bivektörleri ve $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ hacim elemanının gösterimi.

4.2. Bir Vektörün Yansıması ve Dönmesi

Bir keyfi \mathbf{a} vektörü, \mathbf{n} birim vektör ($n^2=1$) olmak üzere, \mathbf{n} birim vektörüne paralel ve dik bileşenlerinin toplamı cinsinden yazılabilir.

$$\mathbf{a} = n^2\mathbf{a} = \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{n}\wedge\mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \quad (4.4)$$

Burada,

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}, \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{n}\mathbf{n}\wedge\mathbf{a} \quad (4.5)$$

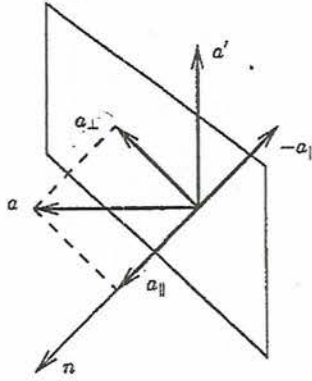
dır. Bir \mathbf{a} vektörünün \mathbf{n}' ye dik düzlemde yansıması,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{n}\mathbf{n}\wedge\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\mathbf{n}$$

$$= -\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}\mathbf{n} - \mathbf{n}\wedge\mathbf{a}\mathbf{n}$$

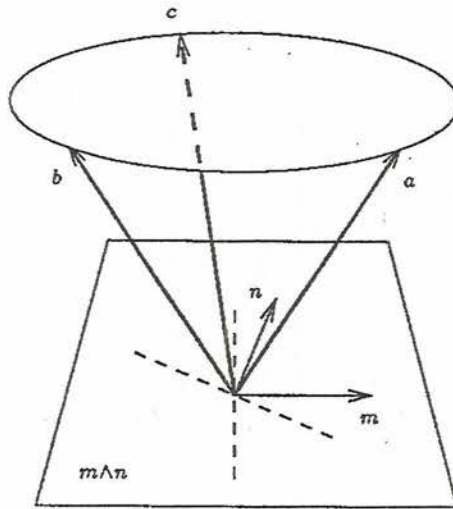
$$\mathbf{a} = -\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n} \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Vektörler Şekil 4.2' de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Bir a vektörünün n ' ye dik düzlemde yansıması.

m ve n boyunca uzanan düzlemde bir dönme, iki ardışık yansıma demektir. Bu dönme Şekil 4.3' te gösterilmiştir. Başlangıç vektörü a ile sonuç vektörü c arasındaki açı, m ve n arasındaki açının iki katıdır. m ve n arasındaki açının θ olması halinde ardışık iki yansımanın sonucu $m \wedge n$ düzleminde 2θ açısıyla yapılan bir dönmeye karşılık gelir.



Şekil 4.3. İki yansımadan meydana gelen dönme.

a vektörünün m ' ye göre yansıması,

$$b = -mam \quad (4.7)$$

ve \mathbf{b} vektörünün \mathbf{n}' ye göre yansımaları

$$\mathbf{c} = -\mathbf{nbn} = -\mathbf{n}(-\mathbf{mam})\mathbf{n} = \mathbf{nmamn} \quad (4.8)$$

dir.

$$\mathcal{R} = \mathbf{nm} \quad (4.9)$$

olarak tanımlanırsa dönme,

$$\mathbf{c} = \mathcal{R}\mathbf{a}\mathcal{R}^{-1} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır[18]. Buradaki dönme operatörü olan \mathcal{R} niceliğine kısaca rotor denir. \mathcal{R} rotoru,

$$\mathcal{R} = \mathbf{nm} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} + \mathbf{n}\wedge\mathbf{m} = \cos\theta + \mathbf{n}\wedge\mathbf{m} \quad (4.11)$$

dir. $\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}$ düzlemindeki birim bivektör $\mathbf{B}^2=1$ olmak üzere

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}}{\sin\theta} \quad (4.12)$$

olarak tanımlanır[15,18]. Şekil 4.3' teki dönme \mathbf{B} bivektörü cinsinden yazılırsa,

$$\mathcal{R} = \cos\theta - \mathbf{B} \sin\theta \quad (4.13)$$

olur. Bu ifade, bir kompleks sayının kutupsal gösterimi haline getirilebilir. Bunun için, birim bivektör \mathbf{B} , birim imajiner gibi düşünülür ve

$$\mathcal{R} = e^{-\mathbf{B}\theta} \quad (4.14)$$

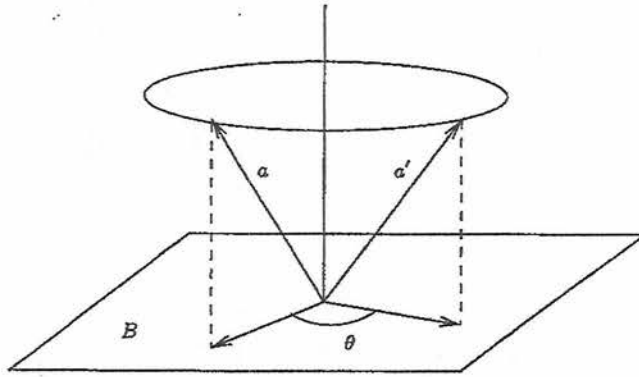
elde edilir. Dönme 2θ kadar olduğundan, θ açısı kadar olan bir dönmeyi temsil eden bir rotor,

$$\mathcal{R} = e^{-B\theta/2} \quad (4.15)$$

olur. Buna göre, bir \mathbf{a} vektörünün θ açısı kadar dönmesiyle elde edilen \mathbf{a}' vektörü

$$\mathbf{a}' = e^{-B\theta/2} \mathbf{a} e^{B\theta/2} \quad (4.16)$$

şeklinde yazılır. Bu vektör Şekil 4.4' de görülmektedir.



Şekil 4.4. Üç boyutta bir dönme.

\mathcal{R} rotoru iki birim vektörün geometrik çarpımı olduğundan

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} = \mathbf{nm}(\mathbf{nm})^{-1} = \mathbf{nmmn} = 1 = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} \quad (4.17)$$

olduğu görülür.

$$\mathbf{a}' = \mathcal{R}\mathbf{a}\mathcal{R}^{-1} \quad (4.18)$$

olarak yazıldığından Denk (4.17) göz önüne alınarak ters dönüşümü

$$\mathbf{a} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{a}'\mathcal{R} \quad (4.19)$$

şeklinde ifade edilebilir.

5. CLIFFORD CEBİRLERİNİN FİZİKSEL UYGULAMALARI

5.1. Koordinat Sistemlerinde Newton'un II. Yasası

5.1.1. Kartezyen Koordinatlarda Newton'un II. Yasası

Kartezyen koordinat sisteminde hareketli bir parçacığın konumu zamanın fonksiyonu olarak

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (5.1)$$

vektörü ile tanımlanır. \vec{r} konum vektörü Clifford cebriyle

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3 \quad (5.2)$$

şeklinde gösterilir. Hız vektörü ise

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3) = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3 \quad (5.3)$$

dır. İvme vektörü,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_3 \quad (5.4)$$

şeklinde yazılır.

M kütleli bir parçacığa etkiyen \vec{F} kuvveti Newton' un II. Yasası' nda

$$\vec{F} = M \vec{a} \quad (5.5)$$

olarak tanımlanır. Kütle skaler bir nicelik olduğundan Clifford cebriinde $M = M.1$ olarak yazılabilir. Buna göre Denk (5.5),

$$\mathbf{F} = M \left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_3 \right) \quad (5.6)$$

şeklinde yazılır. Bu parçacığın momentumu kütlesi ile hızının çarpımıdır:

$$\vec{P} = M \vec{v} \quad (5.7)$$

Momentum Clifford cebrinde,

$$\mathbf{P} = M \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_3 \right) \quad (5.8)$$

olur. Bir düzlemde bulunan ve yer vektörü $\vec{r}(t)$ olan bir parçacığa aynı düzlemde kalan bir \vec{F} kuvveti etki ederse meydana gelen tork,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.9)$$

olarak tanımlanır. \vec{r} ve \vec{F} vektörleri aynı düzlemde kalırlarsa $\vec{\tau}$ vektörü bu vektörlere diktir. Tork, Clifford cebrinde yazılırken Denk (5.2) ve Denk (5.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3) \times \left[M \left(\frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_3 \right) \right] \\ \tau &= M \left[\left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) \mathbf{e}_1 + \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) \mathbf{e}_2 + \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) \mathbf{e}_3 \right] \quad (5.10) \end{aligned}$$

Konum vektörü $\vec{r}(t)$ ve momentumu \vec{P} olan bir parçacığın açısal momentumu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (5.11)$$

olarak tanımlanır. Açısal momentum Clifford cebrinde yazılırken Denk (5.2) ve Denk (5.8) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \left[(x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3) \times M \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_3 \right) \right] \\ &= M \left[\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \mathbf{e}_1 + \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{e}_2 + \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \mathbf{e}_3 \right] \quad (5.12) \end{aligned}$$

Örnek: $\vec{r}(t) = 3t\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ konum vektörüne sahip olan cismin $t=2s$ anındaki hızını ve ivmesini hesaplayınız.

Cözüm: Konum vektörü Clifford cebriyle

$$\mathbf{r} = 3t\mathbf{e}_1 + 3t^2\mathbf{e}_2 + 2t^3\mathbf{e}_3$$

şeklinde yazılır. Hız vektörü,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (3t\mathbf{e}_1 + 3t^2\mathbf{e}_2 + 2t^3\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 6t\mathbf{e}_2 + 6t^2\mathbf{e}_3$$

olur. $t=2$ s anındaki hız,

$$\mathbf{V} = 3\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 + 24\mathbf{e}_3$$

bulunur. İvme vektörü,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (3\mathbf{e}_1 + 6t\mathbf{e}_2 + 6t^2\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_2 + 12t\mathbf{e}_3$$

olur. $t=2$ s anındaki ivme

$$\mathbf{a} = 6\mathbf{e}_2 + 24\mathbf{e}_3$$

olarak bulunur.

5.1.2. Düzlem Kutupsal Koordinatlarda Newton' un II. Yasası

Düzlemde hareket eden bir parçacığın konumu

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (5.13)$$

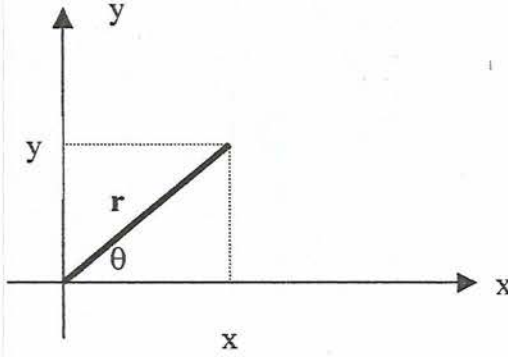
ile verilmişse bu parçacığın kutupsal koordinatlarda ifade edilmesi için Şekil 5.1'de verilen

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (5.14)$$

olan bileşenleri kullanarak

$$\vec{r}(t) = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \quad (5.15)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 5.1. Kutupsal koordinatlarda \vec{r} vektörü.

Bu vektör Clifford cebirinde

$$\mathbf{r} = r \cos\theta \mathbf{e}_1 + r \sin\theta \mathbf{e}_2 \quad (5.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu parçacığın hız vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \cos\theta \mathbf{e}_1 + r \sin\theta \mathbf{e}_2) \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cos\theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt} \sin\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \right) \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

ve ivme vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{dr}{dt} \cos\theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt} \sin\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \right) \mathbf{e}_2 \right) \\ \mathbf{a} &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} \cos\theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta - r \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos\theta \right) \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right) \mathbf{e}_2 \quad (5.18)$$

Örnek: Bir parçacık $\vec{r}(t) = t^2 (\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j})$ ile tanımlanan bir yörünge üzerinde hareket ediyor. $\omega = 15$ rad/s açısal hızıyla hareket eden bu parçacığın $t = 2$ s anındaki hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

Çözüm: $\vec{r}(t) = t^2 (\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j})$

vektörü $Cl_{2,0}$ Clifford cebirinde

$$\mathbf{r} = t^2 (\cos \omega t \mathbf{e}_1 + \sin \omega t \mathbf{e}_2) \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Bu parçacığın hızı Denk (5.9) dan,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t (\cos \omega t \mathbf{e}_1 + \sin \omega t \mathbf{e}_2) + t^2 (-\omega \sin \omega t \mathbf{e}_1 + \omega \cos \omega t \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{V} = (2t \cos \omega t - t^2 \omega \sin \omega t) \mathbf{e}_1 + (2t \sin \omega t + t^2 \omega \cos \omega t) \mathbf{e}_2$$

olur. $t = 2$ s anındaki hız,

$$\mathbf{V} = -26,56 \mathbf{e}_1 + 71,6 \mathbf{e}_2$$

bulunur. Parçacığın ivmesi Denk (5.10) dan,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (2\cos \omega t - 2t\omega \sin \omega t - 2t\omega \sin \omega t - t^2 \omega^2 \cos \omega t) \mathbf{e}_1$$

$$+ (2\sin \omega t + 2t\omega \cos \omega t + 2t\omega \cos \omega t - t^2 \omega^2 \sin \omega t) \mathbf{e}_2$$

olur. $t = 2$ s anında ivme,

$$\mathbf{a} = -832,28 \mathbf{e}_1 - 345,8 \mathbf{e}_2$$

bulunur.

5.1.3. Silindirik Koordinatlarda Newton' un II. Yasası

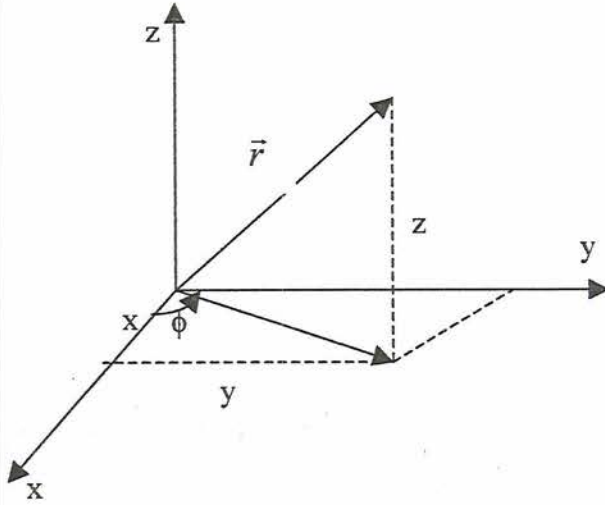
Hareketli bir parçacığın konum vektörü Denk (5.1)' deki x , y ve z bileşenlerinin Şekil 5.2' de gösterilen silindirik koordinatlardaki karşılıkları olan

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z \quad (5.19)$$

ifadeleri yazılıp düzenlenirse

$$\vec{r}(t) = (\rho \cos\phi) \hat{i} + (\rho \sin\phi) \hat{j} + z \hat{k} \quad (5.20)$$

olur.



Şekil 5.2. Silindirik koordinatlarda \vec{r} vektörü.

Clifford cebirinde ise

$$\mathbf{r} = (\rho \cos\varphi) \mathbf{e}_1 + (\rho \sin\varphi) \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 \quad (5.21)$$

olarak yazılabilir. Hız vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho \cos\varphi \mathbf{e}_1 + \rho \sin\varphi \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3) \\ &= \left(\frac{d\rho}{dt} \cos\varphi - \rho \frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{d\rho}{dt} \sin\varphi + \rho \frac{d\varphi}{dt} \cos\varphi \right) \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_3 \quad (5.22) \end{aligned}$$

ve ivme vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} \cos\varphi - 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \sin\varphi - \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} \sin\varphi - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos\varphi \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} \sin\varphi + 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \cos\varphi + \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\varphi - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin\varphi \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_3 \quad (5.23) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

5.1.4. Küresel Koordinatlarda Newton' un II. Yasası

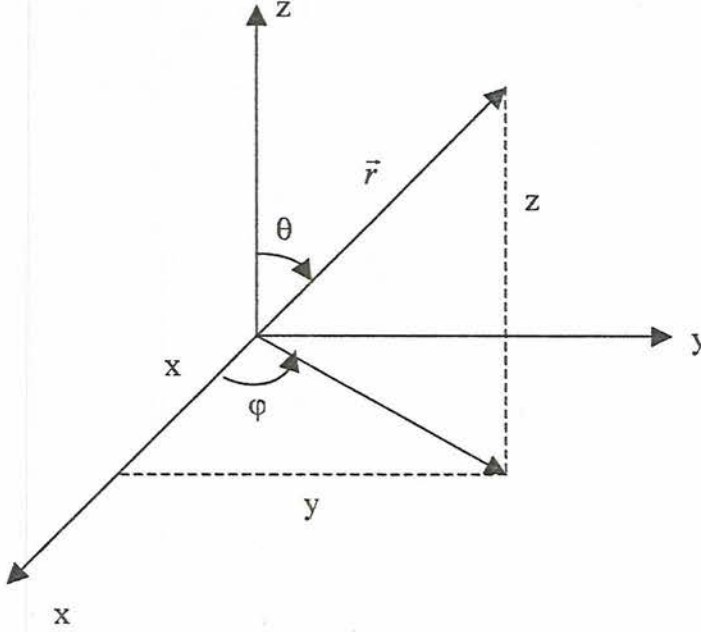
Hareketli bir parçacığın konum vektörü Denk (5.1)' deki x , y ve z bileşenlerinin küresel koordinatlardaki karşılıkları olan Şekil 5.3' te gösterilen

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta \quad (5.24)$$

ifadeleri yazılıp düzenlenirse

$$\vec{r}(t) = (r \sin\theta \cos\varphi) \hat{i} + (r \sin\theta \sin\varphi) \hat{j} + r \cos\theta \hat{k} \quad (5.25)$$

olur.



Şekil 5.3. Küresel koordinatlarda \vec{r} vektörü.

Clifford cebirinde ise

$$\mathbf{r} = r \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_1 + r \sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_2 + r \cos\theta \mathbf{e}_3 \quad (5.26)$$

olarak yazılır. Hız vektörü,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_1 + r \sin\theta \sin\varphi \mathbf{e}_2 + r \cos\theta \mathbf{e}_3) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & \left(\frac{dr}{dt} \sin\theta \cos\varphi + r \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \cos\varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \sin\varphi \right) \mathbf{e}_1 \\ & + \left(\frac{dr}{dt} \sin\theta \sin\varphi + r \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \sin\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \cos\varphi \right) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{dr}{dt} \cos\theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right) \mathbf{e}_3 \quad (5.28)$$

olarak yazılır. İvme vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \sin\theta \cos\varphi + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \cos\varphi - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \sin\varphi \right. \\ & - 2 r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \sin\varphi + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos\theta \cos\varphi - r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin\theta \sin\varphi \\ & \left. - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin\theta \cos\varphi - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin\theta \cos\varphi \right] \mathbf{e}_1 \\ & + \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \sin\theta \sin\varphi + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \sin\varphi + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \cos\varphi \right. \\ & + 2 r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \cos\varphi + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos\theta \sin\varphi + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin\theta \cos\varphi \\ & \left. - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin\theta \sin\varphi - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin\theta \sin\varphi \right] \mathbf{e}_2 \\ & + \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \cos\theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta - r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos\theta \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.29)$$

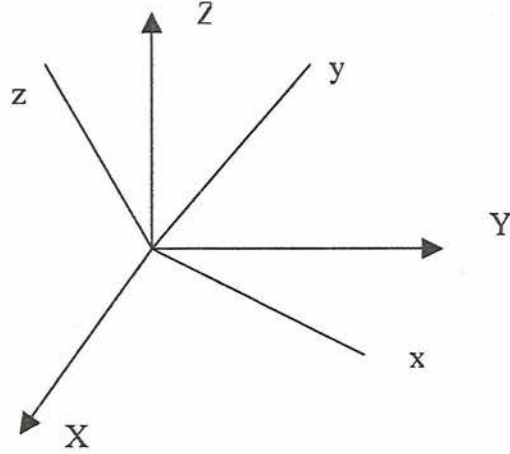
5.2. Dönme Hareketinin İncelenmesi

Clifford cebrinin uygulama alanlarından biri de klasik mekaniktir. Clifford cebri özellikle dönme ve öteleme hareketlerini tanımlayan sistemlerde uygulama alanları bulmuştur[20]. Bir cismin dönmesiyle ilgilenirken, cismin katı cisim olarak kabul edilmesi kolaylık sağlar. Bir katı cisim, şekli bozulmayan veya bütün parçacık çiftleri arasındaki uzaklıkların sabit olduğu bir cisim olarak tanımlanır[21,22].

5.2.1. Euler Açılımları

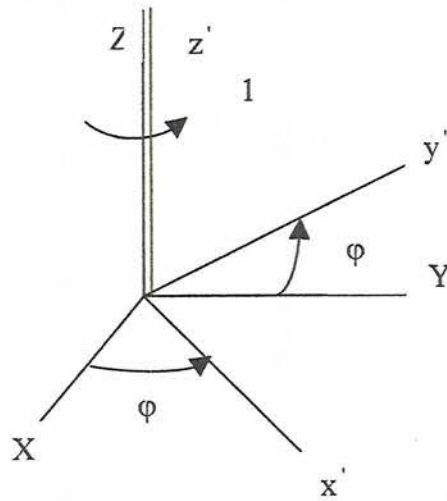
Katı cismin durumunu belirlemek amacıyla orijini katı cismin kütle merkezinde bulunan bir yardımcı koordinat sistemi tanımlamak gerekir. Katı cisim koordinat sisteminin (KCKS) eksenlerinin doğrultularını, bu yardımcı sistemin eksenlerinin doğrultularına göre belirlemek yeterlidir. Orijinleri aynı olan

bu iki koordinat sisteminin eksenlerinin doğrultuları birbirine bir dik matrisle bağlıdır[23]. x ekseninin XY düzlemine dik izdüşümünün doğrultusu ile X eksenindeki açı φ olsun. İzdüşüm doğrultusundaki eksen x' eksenini ve z' eksenini Z eksenine aynı olsun. y' eksenini x' , y' ve z' eksenleriyle bir sağ el kartezyen koordinat sistemi olacak şekilde seçilirse y' eksenini Y eksenine φ açısını yapar. Bu eksenler Şekil.5.4' te gösterilmiştir.



Şekil 5.4. X, Y, Z eksenleriyle x, y, z eksenlerinin herhangi bir andaki durumu.

$x'y'z'$ sisteminin eksenleri, yardımcı sistemin eksenlerine göre saat yönünün ters yönünde, birbirine paralel olan z ve Z eksenleri etrafında φ açısı kadar döner. Bu dönme Şekil 5.5' teki 1 dönmesidir.



Şekil 5.5. Z eksenini etrafında saat yönünün tersi yönünde φ açısında dönme.

Şekil 5.5' de görüldüğü gibi x' ve y' eksenleri X ve Y eksenlerinin oluşturduğu düzlem içinde kalır. x' , y' ve z' eksenlerinin doğrultularındaki birim vektörleri \hat{i}' , \hat{j}' , \hat{k}' ile X , Y , Z eksenlerinin doğrultularındaki birim vektörleri de \hat{I} , \hat{J} , \hat{K} ile gösterilirse,

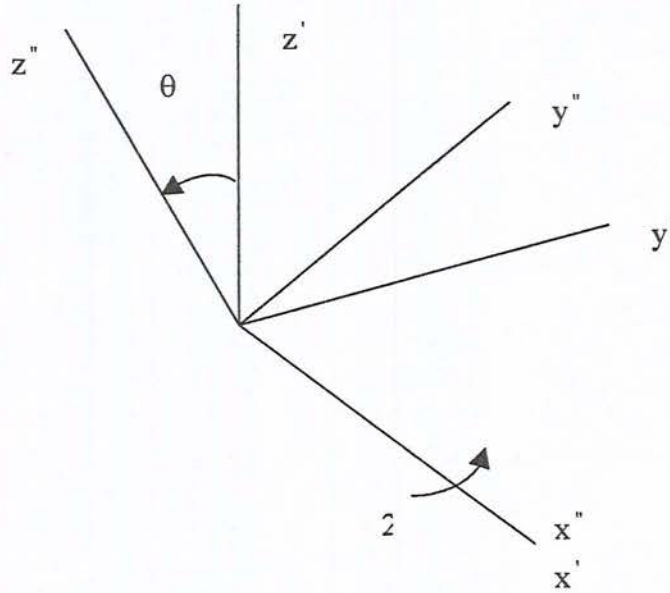
$$\hat{i}' = \text{Cos}\varphi \hat{I} + \text{Sin}\varphi \hat{J} \quad (5.29.a)$$

$$\hat{j}' = -\text{Sin}\varphi \hat{I} + \text{Cos}\varphi \hat{J} \quad (5.29b)$$

$$\hat{k}' = \hat{K} \quad (5.29c)$$

bulunur.

z eksenine Z eksenine arasındaki açı θ olsun. Z ekseninin doğrultusundan z ekseninin doğrultusuna geçmek için $x'y'z'$ sistemini x' eksenine etrafında saat yönünün ters yönünde θ açısı kadar döndürmenin yeterli olduğu Şekil 5.6' dan kolayca görülebilir.



Şekil 5.6. x' eksenine etrafında saat yönünün tersi yönde θ açısıyla dönme.

Yeni aksenlere x'' , y'' ve z'' aksenleri denirse Şekil 5.6' dan görüldüğü gibi y'' eksenini $y'z'$ düzleminin içinde kalırken x'' eksenini $y'z'$ düzlemine diktir. x'' , y'' , z'' aksenlerinin doğrultularındaki birim vektörleri \hat{i}'' , \hat{j}'' ve \hat{k}'' ile gösterilirse

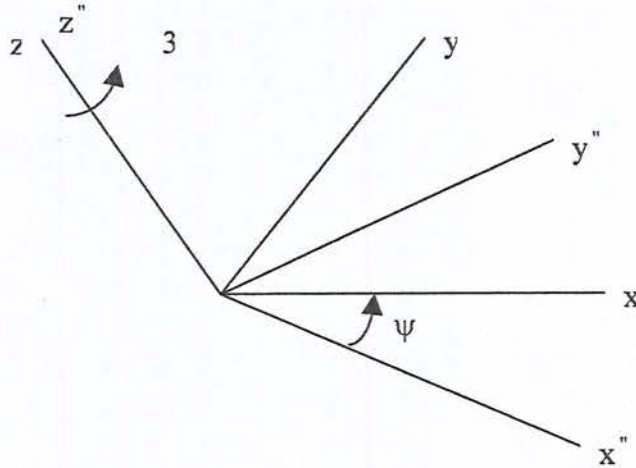
$$\hat{i}'' = \hat{i}' \quad (5.30.a)$$

$$\hat{j}'' = \cos\theta \hat{j}' + \sin\theta \hat{k}' \quad (5.30.b)$$

$$\hat{k}'' = -\sin\theta \hat{j}' + \cos\theta \hat{k}' \quad (5.30.c)$$

olur.

x' eksenini, x ekseninin XY düzlemine dik izdüşümüdür. x eksenini ile x' eksenini arasındaki açı ψ olsun. $x''y''z''$ eksen takımı z eksenini etrafında saat yönünün ters yönünde ψ açısı kadar döndürüldüğünde xyz eksen takımı elde edilir. Şekil 5.7' de gösterildiği gibi x eksenini x'' eksenine göre saat yönünün ters yönünde ψ açısı kadar dönmüş olsun.



Şekil 5.7. z eksenini etrafında ψ açısı kadar dönme.

x, y, z eksenleri yönündeki birim vektörler,

$$\hat{i} = \text{Cos}\psi \hat{i}'' + \text{Sin}\psi \hat{j}'' \quad (5.31.a)$$

$$\hat{j} = -\text{Sin}\psi \hat{i}'' + \text{Cos}\psi \hat{j}'' \quad (5.31.b)$$

$$\hat{k} = \hat{k}'' \quad (5.31.c)$$

olur.

Artık XYZ eksen takımından xyz takımına geçişi sağlayan dönüşümün matrisi kolaylıkla yazılabilir. XYZ sisteminden x'y'Z sistemine geçişi veren matris

$$B = \begin{pmatrix} \text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 \\ -\text{Sin}\varphi & \text{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

x'y'Z sisteminden x'y''z'' sistemine geçişi veren matris

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}\theta & \text{Sin}\theta \\ 0 & -\text{Sin}\theta & \text{Cos}\theta \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

dir. x'y''z'' sisteminden xyz sistemine geçişi sağlayan matris de

$$D = \begin{pmatrix} \text{Cos}\psi & \text{Sin}\psi & 0 \\ -\text{Sin}\psi & \text{Cos}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

dir. Bu üç matris döndürme işleminin uygulanış sırasına göre çarpılırsa

$$\begin{aligned}
A=DCB &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

elde edilir.

φ , θ ve ψ açılara Euler açıları denir. φ ve ψ açıları 0 ile 2π arasında, θ açısı 0 ile π arasında değişir. Koordinat sistemleri birbirine göre hareket ederken her üç açı da zamanla değişir. Sistemlerin orijinleri çakışık olduğundan sistemler birbirine göre ancak dönebilirler. xyz sisteminin XYZ sistemine göre dönmesini karakterize eden, $\bar{\omega}$ açısal hızıdır. Bu açısal hızı KCKS' ye göre şöyle yazılır:

Z ekseninde yapılan dönmeye (Şekil 5.5 ' teki 1 dönmesinde) açısal hızın büyüklüğü $\frac{d\varphi}{dt}$ ve doğrultusu da \hat{K} birim vektörünün doğrultusudur. $\bar{\omega}$ vektörünü xyz sisteminde yazmak için \hat{K} birim vektörünü \hat{i} , \hat{j} ve \hat{k} cinsinden hesaplamak gerekir.

Bunun için Denk (5.29), Denk (5.30) ve Denk (5.31) denklem setlerinde verilen değişik koordinat sistemlerinin birim vektörleri arasındaki bağıntılar birleştirilirse,

$$\begin{aligned}
\hat{i} &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi) \hat{I} + (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi) \hat{J} \\
&\quad + (\sin\theta\sin\psi) \hat{K} \quad (5.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{j} &= (-\sin\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi) \hat{I} + (-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi) \hat{J} \\
&\quad + (\sin\theta\cos\psi) \hat{K} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

$$\hat{k} = (\sin\varphi\cos\theta) \hat{I} - (\cos\varphi\sin\theta) \hat{J} + (\cos\theta) \hat{K} \quad (5.38)$$

bulunur. Denk (5.35) Sin ψ , Denk (5.36) Cos ψ ile çarpılıp taraf tarafa toplanır sonra bu toplam Sin θ ile çarpılır ve Denk (5.37) Cos θ ile çarpılıp tekrar taraf tarafa toplanırsa \hat{K} birim vektörü,

$$\hat{K} = \text{Sin } \theta \text{ Sin } \psi \hat{i} + \text{Sin } \theta \text{ Cos } \psi \hat{j} + \text{Cos } \theta \hat{k} \quad (5.39)$$

olarak elde edilir. Buradan z eksenini etrafındaki dönmeye (1. dönme) ait açısal hızın,

$$\bar{\omega}_1 = \frac{d\varphi}{dt} \hat{K} = \frac{d\varphi}{dt} (\text{Sin } \theta \text{ Sin } \psi \hat{i} + \text{Sin } \theta \text{ Cos } \psi \hat{j} + \text{Cos } \theta \hat{k}) \quad (5.40)$$

olduğu görülür. x' eksenini etrafındaki dönmeye (2. dönme) açısal hızın büyüklüğü $\frac{d\varphi}{dt}$ ve doğrultusu da $\hat{n} = \text{Cos } \psi \hat{i} + \text{Cos } (\psi + \frac{\pi}{2}) \hat{j}$ olur. Buna göre x' etrafındaki dönmeye açısal hız,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \frac{d\theta}{dt} \hat{n} = \frac{d\theta}{dt} (\text{Cos } \psi \hat{i} + \text{Cos } (\psi + \frac{\pi}{2}) \hat{j}) \\ \bar{\omega}_2 &= \frac{d\theta}{dt} (\text{Cos } \psi \hat{i} - \text{Sin } \psi \hat{j}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

dir. z eksenini etrafındaki dönmeye (3. dönme) açısal hızın büyüklüğü $\frac{d\psi}{dt}$ olup etrafında döndürülen eksen \hat{k} birim vektörüyle belirlenen eksendir. Buna göre

$$\bar{\omega}_3 = \frac{d\psi}{dt} \hat{k} \quad (5.42)$$

olur. Toplam açısal hız,

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 \\
\bar{\omega} &= \frac{d\varphi}{dt} (\sin \theta \sin \psi \hat{i} + \sin \theta \cos \psi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \\
&\quad + \frac{d\theta}{dt} (\cos \psi \hat{i} - \sin \psi \hat{j}) + \frac{d\psi}{dt} \hat{k} \\
\bar{\omega} &= \left(\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi \right) \hat{i} + \left(\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \cos \psi - \frac{d\theta}{dt} \sin \psi \right) \hat{j} \\
&\quad + \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt} \right) \hat{k} \tag{5.43}
\end{aligned}$$

bulunur.

5.2.2. Bir Noktası Sabit Dönen Topaç Hareketi

Clifford cebinde kullanışlı bir uygulama, bir noktası sabit, dönen topaç problemidir. Bu problemle ilgili en önemli özelliklerden biri dönme hareketindeki parametrelerdir. x , y veya z etrafındaki dönmelerin matris gösterimi biraz kalabalıktır. Diğer yandan üç boyutlu Öklid uzayında bir dönme, koordinat eksenleri etrafında üç dönmeye ayrılabilir. Dönen bir topaç için dönme dönüşümleri genellikle Euler açıları kullanılarak gösterilir[24]. Dönmeyi tanımlamak için başvurulan bir yöntem Euler açılarını (φ, θ, ψ) kullanmaktır[25]. Bunlar, başlangıçtaki eksenler kümesi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ' ten yeni eksenler kümesi $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ ' e dönmeyi tanımlar. Eksenler için çoğu kez $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ ifadesi kullanılır.

Birinci dönme, Bölüm 5.2.1' deki birinci dönme gibi $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ düzleminde \mathbf{e}_3 eksenini etrafında saat yönünün tersi yönünde φ açısı kadar ise bu dönme için rotor,

$$\mathcal{R}_\varphi = \exp(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\varphi/2) = e^{-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\varphi/2} \tag{5.44}$$

olur. İkinci dönme Bölüm 5.2.1' deki ikinci dönme gibi \mathbf{e}_1 eksenini etrafında θ açısı kadar ise, bu dönme için düzlem,

$$I \mathcal{R}_\varphi \mathbf{e}_1 \mathcal{R}_\varphi^{-1} = \mathcal{R}_\varphi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathcal{R}_\varphi^{-1} \tag{5.45}$$

olur. Buradaki I, üç boyutlu trivektör birim elemandır ve

$$\mathcal{R}I\mathcal{R}^{-1} = I\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} = I \quad (5.46)$$

koşulunu sağlar. İkinci dönme için rotor,

$$\mathcal{R}_\theta = \exp(-\mathcal{R}_\varphi e_2 e_3 \mathcal{R}_\varphi^{-1} \theta / 2) = \mathcal{R}_\varphi e^{-e_2 e_3 \theta / 2} \mathcal{R}_\varphi^{-1} \quad (5.47)$$

olur. Bu iki dönme birleştirilirse \mathcal{R}' rotoru,

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\varphi e^{-e_1 e_2 \varphi / 2} e^{-e_2 e_3 \theta / 2} \quad (5.48)$$

şeklinde elde edilir. Üçüncü dönme de Bölüm 5.2.1' deki üçüncü dönme gibi e_3 eksenini etrafında ψ açısı kadar ise bu dönme için düzlem,

$$I\mathcal{R}' e_3 \mathcal{R}'^{-1} = \mathcal{R}' e_1 e_2 \mathcal{R}'^{-1} \quad (5.49)$$

ve rotor,

$$\mathcal{R}_\psi = \exp(-\mathcal{R}' e_1 e_2 \mathcal{R}'^{-1} \psi / 2) = \mathcal{R}' e^{-e_1 e_2 \psi / 2} \mathcal{R}'^{-1} \quad (5.50)$$

olur. Bu üç dönme birleştirilirse,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\psi \mathcal{R}' = e^{-e_1 e_2 \varphi / 2} e^{-e_2 e_3 \theta / 2} e^{-e_1 e_2 \psi / 2} \quad (5.51)$$

elde edilir. Denk (5.35)' de verilen A matrisi ile karşılaştırıldığında Denk (5.51)' in daha sade ve işlemlerinin daha basit olduğu görülür.

Clifford cebri kullanılırken bir keyfi eksen etrafında dönmeyi göstermek kolaydır. Sabit bir nokta etrafında hareket eden bir katı cismin hareketi problemini incelemek, sadece gözlemcinin uzaysal koordinatlarında bir noktanın

koordinatlarını ifade etmemeli, katı cisme bağlanan cisim koordinat sistemini de ifade etmelidir. Bunu yapmak için Clifford cebri uygun bir yöntemdir. Clifford cebrinin tanımındaki

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 2\delta_{ij} \quad , \quad \mathbf{e}_i^2 = 1 \quad (5.52)$$

ifadelerini sağlayan elemanlar bu cebirin baz elemanlarını verir. Pauli spin matrisleri gibi 4×4 ' lük Dirac matrisleri de bu koşulları sağlarlar. Bunlar:

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

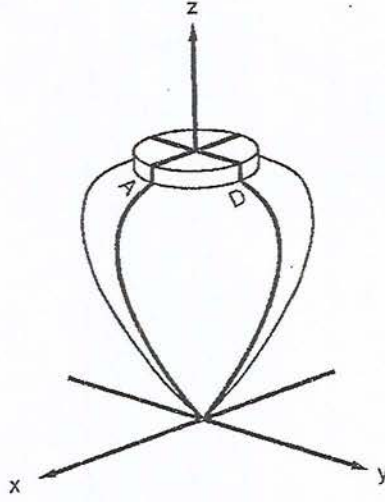
olup ikili ve üçlü çarpımları

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 \gamma_1 = \gamma_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_{123} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

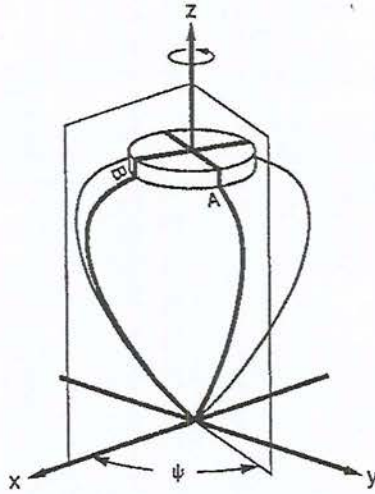
dir. Dirac matrislerinin bir lineer kombinasyonu vektör, γ_{12}, γ_{23} ve γ_{31} 'in lineer kombinasyonu bivektör ve γ_{123} çarpımı bir trivektördür.

Topacın simetri ekseninin alt ucu bir koordinat sisteminin orjiniinde sabit olsun. Bu koordinat sistemi topacın cisim koordinat sistemidir. Topacın cisim koordinat sistemi Şekil 5.8' de görülmektedir



Şekil 5.8. Topacın cisim koordinat sistemi.

Bu topaç kendi eksenini etrafında $\psi(t)$ açısı kadar döndüyorsa $\psi(t)$ ' ye dönme açısı denir ve bu açı cismin dönmesinin büyüklüğüdür. Dönme açısı Şekil 5.9' da görülmektedir.



Şekil 5.9. Topacın dönme açısı.

$\theta(t)$ eğim açısı, düşey z eksenini ve topacın simetri eksenini arasındaki açıdır. Yani $\theta(t)$, z ekseninin düşeye göre eğikliğini verir. $\phi(t)$ ile topacın düşey eksen etrafındaki enlemi ölçülür. Eğim açısı Şekil 5.10' da görülmektedir.

$$x = \mathcal{R} x_c \mathcal{R}^{-1} \quad (5.55)$$

dir. Burada

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{eğim} \mathcal{R}_{dönme} \quad (5.56)$$

\mathcal{R} dönme operatörü Euler açıları cinsinden ifade edilebilir:

$$\mathcal{R} = \left(I \cos \frac{\phi_E}{2} - \gamma_{12} \sin \frac{\phi_E}{2} \right) \left(I \cos \frac{\theta_E}{2} - \gamma_{23} \sin \frac{\theta_E}{2} \right) \left(I \cos \frac{\psi_E}{2} - \gamma_{12} \sin \frac{\psi_E}{2} \right) \quad (5.57)$$

Dönen bir topacın hareket denklemini elde etmek için kinetik enerji T ve potansiyel enerji V ifadelerini elde etmek gerekir. Katı cismin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} \int g(x) (\dot{x})^2 dV \quad (5.58)$$

ile ifade edilir. Burada $g(x)$, x noktasındaki kütle yoğunluğu ve \dot{x} , x' in zamana göre türevidir. \mathcal{R} dönme operatörünün zamana göre türevi $\dot{\mathcal{R}}$ ile gösterilirse Denk (5.55)' ten

$$\dot{x} = \dot{\mathcal{R}} x_c \mathcal{R}^{-1} + \mathcal{R} x_c (\dot{\mathcal{R}})^{-1} \quad (5.59)$$

$$\dot{x} = \mathcal{R} (\mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}} x_c - x_c \mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}}) \mathcal{R}^{-1}$$

$$(\dot{x})^2 = (\mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}} x_c - x_c \mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}})^2 \quad (5.60)$$

$$\mathcal{R}^{-1} (\dot{x})^2 \mathcal{R} = (\mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}} x_c - x_c \mathcal{R}^{-1} \dot{\mathcal{R}})^2 \quad (5.61)$$

Denk (5.57)' den,

$$\dot{\mathcal{R}} = \dot{\mathcal{R}}_e \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_e \dot{\mathcal{R}}_d \quad (5.62)$$

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_d^{-1} \mathcal{R}_e^{-1} \quad (5.63)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\mathcal{R}^{-1}\dot{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_d^{-1}(\mathcal{R}_e^{-1}\dot{\mathcal{R}}_e) \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_d^{-1}\dot{\mathcal{R}}_d \quad (5.64)$$

bulunur. Hesaplama sürdürülürse

$$\mathcal{R}^{-1}\dot{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}(\omega_1\gamma_{23} + \omega_2\gamma_{31} + \omega_3\gamma_{12}) \quad (5.65)$$

elde edilir. Burada

$$\omega_1 = -\dot{\phi}\sin\theta\cos(\psi - \phi) + \dot{\theta}\sin(\psi - \phi) \quad (5.66)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\sin(\psi - \phi) + \dot{\theta}\sin(\psi - \phi) \quad (5.67)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} - \dot{\phi}(1 - \cos\theta) \quad (5.68)$$

Benzer bir hesaplama Euler açıları ile yapılırsa verilen denklemler Denk (5.43)' te bulunan

$$\omega_1 = \dot{\phi}_E \sin\theta_E \sin\psi_E + \dot{\theta}_E \cos\psi_E \quad (5.69)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}_E \sin\theta_E \cos\psi_E + \dot{\theta}_E \sin\psi_E \quad (5.70)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}_E \cos\theta_E + \dot{\psi}_E \quad (5.71)$$

denklemler olarak elde edilir. Denklemler karşılaştırıldığında

$$\theta_E = \theta \quad (5.72)$$

$$\phi_E = \phi + \frac{\pi}{2} \quad (5.73)$$

$$\psi_E = \psi - \phi - \frac{\pi}{2} \quad (5.74)$$

olduğu görülür. Denk (5.60) ve Denk (5.65)'den

$$(\dot{x})^2 = [(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2](x_c)^2 - \sum_{j,k} \omega_j \omega_k x_c^j x_c^k \quad (5.75)$$

elde edilir. Bu sonuç Denk (5.58)'de yazılırsa,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} I_{jk} \omega_j \omega_k \quad (5.76)$$

bulunur. Buradaki

$$I_{jj} = \int g(x) [(x_c)^2 - (x_c^j)^2] dV \quad (5.77)$$

$$I_{jk} = - \int g(x) x_c^j x_c^k dV \quad (j \neq k \text{ için}) \quad (5.78)$$

I_{jk} sembolü eylemsizlik momenti katsayılarını gösterir. Eğer topaç silindirik simetrikse simetri eksenini olarak cisim koordinat sisteminde x_3 veya z eksenini tanımlanabilir. Çünkü silindirik simetride $j \neq k$ ise $I_{jk} = 0$ olduğunu kanıtlamak kolaydır. Örneğin,

$$\begin{aligned} I_{31} = I_{13} &= - \iiint g(\sqrt{x^2 + y^2}, z) x z dx dy dz \\ &= - \iiint g(r, z) r^2 z \cos \theta dr d\theta dz \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \iint g(r, z) r^2 z dr dz = 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Benzer şekilde $I_{11} = I_{22}$ olduğu gösterilebilir. I_{11} ve I_{22} , I_1 ; ve I_{33} , I_3 ile gösterilirse

$$T = \frac{1}{2} I_1 [(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2] + \frac{1}{2} I_3 (\omega_3)^2 \quad (5.80)$$

bulunur. Denk.(5.66), Denk.(5.67) ve Denk.(5.68) kullanılırsa

$$T = \frac{1}{2} I_1 \left[(\dot{\phi})^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left[\dot{\psi} - \dot{\phi} (1 - \cos \theta) \right]^2 \quad (5.81)$$

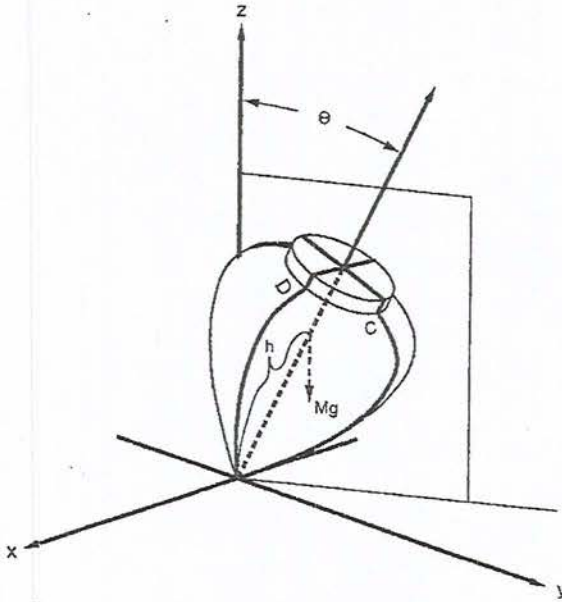
elde edilir. Ayrıca eşitlik Euler açıları cinsinden,

$$T = \frac{1}{2} I_1 \left[(\dot{\phi}_E)^2 \sin^2 \theta_E + (\dot{\theta}_E)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi}_E + \dot{\phi}_E \cos \theta_E)^2 \quad (5.82)$$

Topacın kütlesi M ve bütün kütlesi simetri eksenini üzerindeki bir sabit nokta olan kütle merkezinde toplanmış olsun. Bu noktanın topacın ucuna uzaklığı h olsun. Şekil 5.11' de gösterilen bu topaç için potansiyel enerji

$$V = Mgh \cos \theta \quad (5.83)$$

dır.



Şekil 5.11. Topacın ağırlık merkezi.

Bulunan kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinden Lagrange fonksiyonu,

$$L=T-V=\frac{1}{2}I_1\left[\left(\dot{\phi}_E\right)^2\text{Sin}^2\theta_E + \left(\dot{\theta}_E\right)^2\right] + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi}_E + \dot{\phi}_E\text{Cos}\theta_E\right)^2 - Mgh\text{Cos}\theta \quad (5.84)$$

şeklinde elde edilir. Topaç hareketi için θ , ϕ ve Ψ genelleştirilmiş koordinatlardır.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (5.85)$$

olarak verilen Euler-Lagrange denklemlerindeki q genelleştirilmiş koordinatları topaç hareketi için θ , ϕ veya ψ 'dir. Bu denklemler çözüldüklerinde θ , ϕ veya ψ genelleştirilmiş koordinatları zamanın fonksiyonu olarak belirlenir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada Clifford cebirlerinin klasik mekanikteki uygulama alanları, vektör cebirine göre kolaylık sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir. Clifford cebirlerinin tanımı yapılmış, en çok bilinen düzlem ve uzaylar için bu uzaylara karşı gelen Clifford cebirleri incelenmiştir. Clifford cebirlerinin baz elemanları, bunlara ait çarpım özellikleri ve matris gösterimleri verilmiş, $n \leq 8$ için sınıflandırma yapılmıştır. Daha sonra düzlemde ve uzayda Clifford cebirleri incelenmiş, vektörlerin Clifford çarpımları, bileşenleri, yansımaları ve dönmeleri açıklanmıştır.

Clifford cebirlerinin fiziksel uygulamaları olarak çeşitli koordinat sistemlerinde Newton'un II. Yasası olarak bilinen dinamiğin temel kanunu incelenmiştir. Dönme hareketi önce Euler açıları kullanılarak sonra Clifford cebri ile bir noktası sabit, dönen topaç örneği üzerinde incelenmiştir.

Skaler ve vektörel niceliklerin Clifford cebriyle gösterimi mümkündür. Bir cismin bir eksen etrafında dönmesi halinde Euler açıları ve dönüşüm matrisleri kullanılır. Eğer arka arkaya birden fazla dönme varsa matrislerin sayısı da artar. Dönüşüm matrisleri yerine Clifford cebirindeki dönüşüm bağıntıları kullanılırsa işlemler çok daha kolay ve hızlı bir şekilde yapılabilir. Clifford cebirleri klasik mekanikteki uygulamalarda istenilen üstünlüğü gösteremese de cisimlerin dönme hareketinde oldukça kullanışlıdır.

KAYNAKLAR

- [1] DERELİ, T., *Soyut Cebirler ve Fizikte Simetri Yasaları*, Bilim ve Teknik Dergisi, 34-38, Aralık (1992).
- [2] ÖZDAŞ, K., *Bölüm cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, Türkiye (1995).
- [3] SERDAROĞLU, M., *Fizikte Kuaternion ve Oktonion Yapılar*, Bilim ve Teknik Dergisi, 45-51, Ocak (1993).
- [4] HO, E.Y.T., *Applications of Clifford algebra in Mixed Reality Environmet*, The Eurographics association (2003).
- [5] GILBERT, J.E., *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1991).
- [6] CNOPS, J., *An Introduction to Dirac Operators on Manifolds*, Birkhauser, Boston, USA (2002).
- [7] LOUNESTO, P., *Clifford Algebras and Spinor Operators, Clifford (Geometric) Algebras with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, BAYLIS, W.E., Birkhauser, Boston, USA (1996).
- [8] HARVEY, F. R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press Inc., San Diego, LA, USA (1990).
- [9] PORTEUS, I., R., *Clifford Algebras and The Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1995).
- [10] HLADIK, J., *Spinors in Physics*, Springer-Verlag, New York, USA (1999).
- [11] GURLEBECK, K. ve SPROSSIG, W., *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicsts and Engineers*, John Wiley and Sons, Chichester, England (1997).
- [12] HURLEY, D.J. ve VANDYCK, M.A., *Geometry, Spinors and Applications*, Spinger, Chichester, UK (2000).
- [13] KILIÇ, A., ÖZDAŞ, K. ve TANIŞLI, M., *An Investigation of Symmetry Operations with Clifford Algebra*, Acta Physica Slovaca **54(3)**, 221-232, June (2004).
- [14] SNYGG, J., *Clifford Algebra*, Oxford University Pres, Newyork, USA (1997).

- [15] DORAN, C. ve LASENBY, A. , *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2003).
- [16] BAYRO-CORROCHANO, E., *Modeling the 3D Kinematics of the Eye in the Geometric Algebra Framework*, Pattern Recognition 36 (2003).
- [17] ABLAMOWICZ, R., FAUSER, B., PODLASKI, K. ve REMBLIELINSKI, J., *Idempotents of Clifford Algebra*, Czech. J. Phys. **53**, 949-956, (2003).
- [18] MULLINEUX, G., *Modeling Spatial Displacements Using Clifford Algebra*, Journal of Mechanical Design **126**, 420-424, May (2004).
- [19] KUIPERS, J. B., *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton University Pres, Princeton, New Jersey, USA (1999).
- [20] CONRADT, O., *Mechanics in Space and Counterspace*, J. Math. Phys., **41(10)**, Oct (2000).
- [21] ŞUHUBİ, E., *Rijid Cisimler Dinamiği*, Fen-Edebiyat Fakültesi Matbaası, İstanbul, Türkiye (1988).
- [22] GOLDSTEIN, H., *Klasik Mekanik*, (Çev. V. CİNEMRE), Çağlayan Basımevi, İstanbul, Türkiye (1974).
- [23] RIZAOĞLU, E. ve SÜNEL, N., *Klasik Mekanik*, Gazi Osman Paşa Üniversitesi, Tokat, Türkiye (2002).
- [24] SCARBOROUGH, J. B., *The Gyroscope, Theory and Applications*, Interscience Publishers, New York, USA (1958).
- [25] ANGELES, J., *Rational Kinematics*, Springer-Verlag, NewYork, USA (1988).