

**PLATONİK KATILARIN VE  
MOLEKÜLER SİMETRİNİN  
CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ**

**Abidin KILIÇ**  
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı  
Haziran-2004

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Abidin KILIÇ'ın Platonik Katıların ve Moleküler Simetrisinin Clifford Cebiriyle İncelenmesi** başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki Doktora Tezi 28.06.2004 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	<b>Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ</b>	
Üye	<b>Prof. Dr. Mustafa ŞENYEL</b>	
Üye	<b>Prof. Dr. Selami KILIÇKAYA</b>	
Üye	<b>Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK</b>	
Üye	<b>Yard. Doç.Dr. Murat TANIŞLI</b>	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 30.06.2004 tarih ve ....23.1.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

**Enstitü Müdürü**

**Prof. Dr. Altuğ İFTAR**  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Müdürü

## ÖZET

Doktora Tezi

### PLATONİK KATILARIN VE MOLEKÜLER SİMETRİNİN CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ

ABİDİN KILIÇ

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2004, 103 sayfa

Bu tezde Clifford cebirinin genel bir tanımı yapıldıktan sonra, farklı boyutlardaki geometrik özellikleri incelenmiş ve cebirsel işlemlerinin araştırılmasının sonrasında da simetri operasyonlarına uygulanmıştır. Altın oran ve Platonik katılara ait yansıma düzlemleri ve dönme eksenleri belirlenmiş, Clifford cebirinde tanımlanmış simetri operasyonları, Platonik katılara uygulanmıştır. Platonik katıların simetri grupları oluşturulmuştur. Clifford cebiriyle gerçekleştirilen bu simetri operasyonlarının sağladığı avantajlar ve gösterim kolaylıkları ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Clifford cebiri, Platonik katılar, Tetrahedron, Küb, Oktahedron, İkosahedron, Dodekahedron, Simetri operasyonları, Grup teori.

## **ABSTRACT**

**PhD Thesis**

### **AN INVESTIGATION OF PLATONIC SOLIDS AND MOLECULAR SYMMETRY WITH CLIFFORD ALGEBRA**

**ABİDİN KILIÇ**

**Anadolu University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Physics Program**

**Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ**

**2004, 103 pages**

**In this thesis, after the general definition of the Clifford algebra, the geometrical properties of Clifford algebra in different dimensions are investigated, it is also applied to the symmetry operations, as well. Golden ratio and the rotational axis and planes of reflection are defined belonging to the Platonic solids. Symmetry groups of Platonic solids are established. The symmetry operations defining the Clifford algebra are applied to the Platonic solids. Advantageous and compact representations of symmetry operations with Clifford algebra are obtained.**

**Keywords: Clifford algebra, Platonic solids, Tetrahedron, Cube, Octahedron, Icosahedron, Dodecahedron, Symmetry operations, Group theory.**

## **TEŞEKKÜR**

**Bu tezin hazırlanmasında, bilgi ve birikiminden daima yararlandığım feyz aldığım değerli hocam,**

**Prof.Dr.Kudret ÖZDAŞ'a,**

**yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen,**

**Yard.Doç.Dr.Murat TANIŞLI'ya,**

**değerli hocam,**

**Prof.Dr.Mustafa ŞENYEL'e**

**büyük özveri ile desteğini esirgemeyen**

**eşim Banu'ya**

*teşekkür ederim...*

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET.....</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR.....</b>	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER.....</b>	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ.....</b>	<b>viii</b>
<b>TABLOLAR DİZİNİ.....</b>	<b>ix</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....</b>	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. CLIFFORD CEBİRİ.....</b>	<b>5</b>
2.1 Altuzaylar.....	5
2.2 İki-vektörler.....	6
2.3 Öklidyen Düzlemi.....	8
2.4 Üç Boyut.....	10
2.5 Üçvektörler.....	12
2.6 n-vektörün Derecesi .....	12
2.7 Çokluvektörler.....	14
2.8 Geometrik Çarpım.....	15
2.9 İç Çarpım.....	21
2.10 İç, Dış Ve Geometrik Çarpım.....	23
2.11 $\mathbb{R}^2$ de $Cl_2$ 'nin Matris Gösterimi.....	24
2.12 $\mathbb{R}^3$ de $Cl_3$ 'ün Matris Gösterimi.....	24

<b>3. CLIFFORD CEBİRİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER.....</b>	<b>26</b>
3.1 Bir Çokluvektörün Derecesi.....	26
3.2 Bir Çokluvektörün Tersisi.....	27
3.3 Sankiskalar (pseudoscalar).....	29
3.4 Bir Çokluvektörün Duali.....	29
3.5 Bir Çokluvektörün İzdüşümü ve Dik Bileşeni.....	31
3.6 Yansıma Operasyonu.....	33
<b>4. CLIFFORD CEBİRİNİN DÖNME OPERASYONLARINA UYGULANMASI.....</b>	<b>36</b>
4.1 Öklid Düzleminde Dönme Operasyonu.....	36
4.2 Öklid Uzayında Dönme Operasyonu.....	41
<b>5. ALTIN ORAN VE PLATONİK KATILAR.....</b>	<b>48</b>
5.1 Altın Oran.....	50
5.2 Platonik Katılar.....	53
5.2.1 Platonik Katıların Geometrik Özellikleri.....	54
5.2.1.1 Tetrahedron.....	56
5.2.1.2 Küp.....	58
5.2.1.3 Oktahedron.....	60
5.2.1.4 İkosahedron.....	61
5.2.1.5 Dodekahedron.....	63
<b>6. PLATONİK KATILARIN SİMETRİ GRUPLARI.....</b>	<b>68</b>
6.1 Grup Kavramı.....	68
6.2 Permütasyon Grup Kavramı.....	68
6.3 Alt Grup Kavramı.....	69

6.4 İzomorf Gruplar.....	70
6.5 Bir Grubun Devirli Alt Grupları.....	71
6.6 Temel Hareket Grupları.....	73
6.6.1 Düzgün Bir Çokgenin 3-boyutlu Uzaydaki Kongruansları	74
6.6.1.1 Verilen bir Geometrik Şeklin Uzayda veya Düzlemde Kongruansları Grubunun Genel Tanımı.....	75
6.6.1.2 Doğrunun, Dairenin ve Düzlemin Hareket Grubu.....	75
6.7 Platonik Katıların Simetri Grupları.....	76
6.7.1 Tetrahedronun Simetri Grubu.....	76
6.7.2 Kübün Simetri Grubu.....	78
6.7.3 Oktahedronun Simetri Grubu.....	80
6.7.4 İkosahedronun Simetri Grubu.....	82
6.7.5 Dodekahedronun Simetri Grubu.....	83
<b>7. PLATONİK KATILARIN SİMETRİ OPERASYONLARININ CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ.....</b>	<b>86</b>
7.1 Tetrahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi.....	86
7.2 Kübün Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi.....	89
7.3 Oktahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi.....	91
7.4 İkosahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi.....	94



7.5 Dodekahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi.....	96
<b>TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>100</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>102</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	Nokta çarpım.....	6
2.2	$\vec{a}$ vektörünün, $\vec{b}$ vektörüne uzanımı.....	7
2.3	$\vec{b}$ vektörünün, $\vec{a}$ vektörüne uzanımı.....	7
2.4	İki-boyutlu uzayın bazları.....	8
2.5	Üç-boyutlu uzayın ikivektör bazları.....	11
2.6	Üç-vektör.....	12
2.7	Bir vektör ile ikivektörün iç çarpımı.....	22
3.1	$\vec{a}$ vektörünün, $\mathbf{B}$ ikivektörü üzerindeki bileşenleri.....	31
3.2	$\vec{a}$ vektörünün, $\mathbf{B}$ ikivektörü üzerindeki yansıması.....	35
4.1	Euclidian düzleminde bir doğru.....	40
4.2	Keyfi seçilmiş bir düzlemde dönme.....	42
4.3	Dönme operasyonu.....	46
5.1	Altın oranın elde edilişi.....	50
5.2	Altın üçgen.....	51
5.3	Düzgün beşgende altın oran.....	52
5.4	Tetrahedron.....	57
5.5	Küp.....	58
5.6	Oktahedron.....	60
5.7	İkosahedron.....	62
5.8	Dodekahedron.....	63
5.9	Dodekahedronda altın oran.....	66
6.1	Eşkenar üçgen.....	69
6.2	Altıgen.....	73
6.3	Tetrahedronun yansıma ve dönme operasyonları.....	75
6.4	Küpün yansıma ve dönme operasyonları.....	77
6.5	Oktahedronun yansıma ve dönme operasyonları.....	79
6.6	İkosahedronun yansıma ve dönme operasyonları.....	81
6.7	Dodekahedronun yansıma ve dönme operasyonları.....	83

## TABLolar DİZİNİ

2.1	İki-boyutlu uzayın dereceleri.....	13
2.2	Üç-boyutlu uzayın dereceleri.....	13
2.3	$Cl_n$ deki birim bazlar.....	14
2.4	İki-boyutlu Clifford uzayında dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları.....	19
2.5	Üç-boyutlu Clifford uzayında dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları.....	20
2.6	Üç-boyutlu Clifford uzayında iç çarpım için birim bazların olası kombinasyonları.....	23
5.1	Plato'nun ilk kuramı.....	53
5.2	Platonik katılara ait büyüklükler.....	55
5.3	Platonik katıların Schläfli sembolü ile temsili.....	55
5.4	Tetrahedronun köşe koordinatları.....	57
5.5	Küpün köşe koordinatları.....	59
5.6	Oktahedronun köşe koordinatları.....	60
5.7	İkosahedronun köşe koordinatları.....	62
5.8	Dodekahedronun köşe koordinatları.....	64
6.1	$S_3$ grubunun toplama operasyonu grubu.....	68
6.2	$R_3$ grubu.....	70
6.3	Devirli grubun toplam tablosu.....	72
6.4	Tetrahedronun yansıma operasyonu.....	76
6.5	Tetrahedronun dönme operasyonu.....	76
6.6	Küpün yansıma operasyonu.....	78
6.7	Küpün dönme operasyonu.....	78
6.8	Oktahedronun yansıma operasyonu.....	80
6.9	Oktahedronun dönme operasyonu.....	80
6.10	İkosahedronun yansıma operasyonları.....	82
6.11	İkosahedronun dönme operasyonları.....	82
6.12	Dodekahedronun yansıma operasyonları.....	84
6.13	Dodekahedronun dönme operasyonları.....	84

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$e_i$	birim bazlar
$\vec{a}$	vektör
$\mathbf{A}$	çokluvektör
$B$	karmaşık sayı
$\langle \mathbf{A} \rangle_s$	bir çokluvektörün s. dereceli kısmı
$\cdot$	nokta çarpım
$\times$	vektörel çarpım
$\lrcorner$	iç çarpım
$\wedge$	dış çarpım
$\vec{a}^{-1}$	vektörün tersi
$\vec{a}^*$	vektörün duali
$\mathbf{A}^{-1}$	çokluvektörün tersi
$\mathbf{A}^*$	çokluvektörün duali
$A$	versor
$A^{-1}$	versorun tersi
$I$	birim baz eleman
$\mathbf{I}$	geometrik cebirin sanki skaları
$\mathbf{M}$	dönüşüm matrisi
$\vec{a}_{\perp \mathbf{B}}$	$\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{B}$ ikivektörüne dik bileşeni
$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}}$	$\vec{a}$ vektörünün $\mathbf{B}$ ikivektörü üzerindeki bileşeni
$\mathbf{G}$	grup
$\mathbf{A}_n$	altgrup
$\mathbf{D}_x$	x-ekseni etrafındaki dönme matrisi

$\mathbf{D}_y$  y-ekseni etrafındaki dönme matrisi

$\mathbf{D}_z$  z-ekseni etrafındaki dönme matrisi

# 1. GİRİŞ

Clifford cebiri, adından da anlaşılacağı üzere William Kingdon Clifford tarafından ilk kez 1878 de *American Journal of Mathematics Pure and Applied* adlı dergide “*Application of Grassmann’s Extensive Algebra*” başlıklı makalesinde ortaya konulmuştur. Clifford daha çok Grassmann’ın eserlerinden etkilenmiştir. Clifford cebiri matematiksel fiziğin en temel teorilerinden biri olarak yerini almıştır. Özellikle Clifford çarpımı olarak adlandırılan işlem oldukça önemlidir.

Başlangıçta, Wessel, Argand ve Gauss bazı 2-boyutlu problemleri çözmeye çalışırken, kompleks sayıların faydasını gördüler ve özellikle dönme operasyonunun tanımlanmasında sanal sayıların exponansiyelinden yararlandılar [1]. Geometrik cebirde sanal sayıların exponansiyeli, özellikle dönme operasyonunun tanımlanmasında oldukça kullanışlı ve temel bir metottur.

Bir sonraki aşamada Hamilton, kompleks sayıları 3-boyutlu uzaya uyguladı ve meşhur kuaternion cebirini oluşturdu. Hamilton’un fikirleri çağdaşları arasında oldukça etkili oldu. Grassmann ve Clifford, Hamilton’un fikirlerinden yararlanarak modern geometrik cebiri oluşturdular.

Grassmann’ın cebiri kuaternion cebirine oldukça benzerdir. Grassmann  $e_i$  hiper sayılarını yönlü birim doğrular olarak tanımladı. Herhangi bir vektörü

$$a_i e_i \tag{1.1}$$

biçiminde yazdı. Burada  $a_i$  skalar bir sayıdır. Grassmann bu hiper sayılar için iki çarpma tanımladı. Bunlar iç çarpım,

$$e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = \delta_{ij} \tag{1.2}$$

ve dış çarpım

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i \tag{1.3}$$

dir. Bu ifadeler 2. Bölümde ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Grassmann dış çarpımın sonucunu yönlü bir alan olarak tanımladı ve 2 den fazla boyutlu cisimler için bu cebiri uyguladı. Bir çok matematik tarihçisine göre Grassmann ömrünün son yıllarında nokta ve dış çarpımı bir arada, merkezi (central) çarpım adıyla tanımladı:

$$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (1.4)$$

Merkezi çarpım, Clifford'un vektör çarpımı ile aynı ifadededir. Grassmann bu ifadeye Clifford'dan tamamen bağımsız olarak ulaştı. Clifford ise Grassmann'dan esinlenerek bu çalışmayı gerçekleştirmiş ve merkezi çarpımı göstermiştir. Hamilton'un kuaternion cebiri de bu cebir içinde tanımlanabilir. Clifford 1878 yılındaki makalesinde bu çalışmasını yayınlamış ve cebire *geometrik cebir* adını vermiştir.

Matematikçilerin basit olarak birleştirilmiş geometrik cebiri bulmak için gösterdikleri çabaya karşın, fizikçiler hibrit sisteme adapte olmuşlardı bile. Ta ki Gibbs'e kadar...

Gibbs vektörler için iki çarpım tanımladı. Grassmann'dan esinlendiği için iç çarpım ve kuaternionlardan esinlendiği vektörel (cross) çarpım. İki vektörün, vektörel çarpımı bir üçüncü vektörü verir. Gibbs'in cebiri buna yakındı ve başka ek elemanlar gerektirmiyordu.

Gibbs'in cebiri elektromanyetizmadaki problemleri çözmeye çok uygundu ve bu nedenle kısa zamanda yaygınlaştı. Ancak vektör çarpımı değişimli olmadığından ve çok-boyutlu sistemlere genelleştirilemediğinden bazı problemlerin çözümünde başarılı olamadı.

Sonuçta, Clifford cebiri, bu zayıf cebirler tarafından kuşatılmış halde, 19 yy.ın sonunda ortaya çıktı [2]. Birkaç uygulamadan sonra, kuaternion cebiri ile birlikte gelecekte bir çok problemin çözümü için araştırmacılara umut verdi.

Dirac elektron teorisi çalışmaları sırasında, Clifford cebirine, Clifford'dan 20 yıl sonra, çok farklı bir yolla ulaştı. Karesi Laplacian'ı veren  $\gamma^\mu \partial_\mu$  operatörünü buldu. Burada  $\gamma$ -matrisleri,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2I\eta^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

koşulunu sağlayan  $4 \times 4$  matrislerdir. Ancak ne yazık ki, bu noktada vektör geometrisiyle bağlantısını kaybetti.

Bu konu 30 yıl boyunca aynı kaldı. Fizikçiler aralıklı olarak koordinat geometrisi, matris cebiri, tensör cebiri, diferansiyel formu, spinör hesabı gibi yeni çok sayıda cebir ile çalıştılar. Atiyah ve Singer [3], meşhur index teoremi ile geometri ve topoloji konusunda yeni ufuklar açtılar. Atiyah ve Singer'ın çalışmalarında Clifford cebiri en temel rolü aldı ve bu iki bilim adamı son çalışmalarında Clifford cebiri için "geometri ve topoloji problemlerinin insanı şaşırtan çeşitliliğinin merkezinde karşımıza sürekli olarak çıkmaktadır" demişlerdir [4].

David Hestenes üniversitede felsefe eğitimi almış olmasına rağmen, fizikte oldukça başarılı çalışmalar yapmıştır. O, Clifford cebirinin anlaşılmasında çok farklı bir yaklaşım uyguladı. 60'lı yıllarda birçok teorik fizikçi gibi, alan teorileri ve parçacıklar üzerine çalıştı. Bu çalışma boyunca Dirac matrislerinin vektörler gibi yorumlanabileceğini ortaya koydu ve bu yorumuyla kuantum mekaniği ve Dirac eşitliğine yeni bakış açıları kazandırdı.

Bu düşüncenin başarısı, Hestenes'i, Clifford cebirinin yapabilecekleri konusunda yeniden düşünmeye sevk etti. Hestenes, Clifford cebirinin yönlü sayılar sisteminden ibaret olmadığı, doğal bir dil olduğu, teoremlerin sayılarla değil, cebir ve geometri sonuçlarından yararlanılarak ifade edilmesi gerektiği sonucuna vardı. Hestenes birçok yılını, Clifford cebirini fizik için yeterli bir dil haline getirmeye çalışmakla geçirdi ve adına da orjinaline bağlı kalarak *geometrik cebir* adını verdi.

Günümüzde ise Clifford cebiri bir çok alanda kolaylıklar sağlamaktadır. Özellikle robotikler, kuantum mekaniği, kristalografi gibi uygulama alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır.



Bu tezin 2. ve 3. Bölümlerinde 1, 2, 3-boyutlu uzayda Clifford cebiri incelenecek, 4. Bölümde ise bu cebirin dönme operasyonlarına nasıl uygulandığı ele alınacaktır. 5. Bölümde Platonik katılar ele alınacak ve bu cisimlerin geometrik özellikleri araştırılacaktır. 6. Bölümde Platonik katıların simetri grupları incelenecek ve 7. Bölümde ise Platonik katıların simetri operasyonları, Clifford cebiri ile tanımlanacaktır.

## 2. CLIFFORD CEBİRİ

Geometrik cebirin yapısı bir çok yöntemle açıklanabilir. En basit ve pratik yaklaşım vektör uzayının bilinen kavramları ile benzerdir. Ancak bu yaklaşım çok derinliğine bilgiler içermez. Geometrik cebir, vektörlerin çarpımı için kullanılan özel bazı kurallarla basit tanımlamalar yapar. Bu bölümde bu kavramlar da ele alınacaktır.

Lineer uzay ve vektör uzayı kavramları genellikle eş anlamlı kullanılmakla birlikte, bu çalışmada farklılıklarının olduğu da ortaya konacaktır. Lineer uzayın tanımında, vektörün bir skalarla vektörel çarpımı ya da bir skalarla toplamı mümkün değildir [4]. Bu da bir vektörün geometrik kavramlarının tanımlanması ve cebirsel temsili için, lineer uzay kavramının, yeterli olmadığını ortaya koyar.

Vektörlerin matematiksel tanımı, “geometrik çarpım” olarak adlandırılan çarpım kuralı ile tamamlandı. Bu nedenle geometrik çarpımla tanımlanmış lineer uzay için, vektör uzayı terimi kullanılır. Vektör uzay kavramından hareketle, lineer uzayın diğer çeşitleri de elde edilebilir.

Bu bölümde yöntem olarak, önce lineer uzayın alt uzayları ile 2 ve 3-boyutlu vektör uzayı tanımlanacak, sonra ise bu tanımlamalar geometrik cebir yardımı ile genişletilecektir.

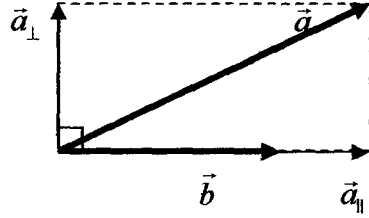
### 2.1 Altuzaylar

Grafik olarak bir vektör, yönlü bir doğru parçası ile gösterilir. Vektörü üzerinde taşıyan doğru, vektörün doğrultusunu, bu doğrunun uzunluğu ise vektörün şiddetini gösterir. Vektörler 2 ve daha büyük boyutlu uzaylarda incelenirken, 1-boyutlu alt uzaylar için ihmal edilir. 1-boyutlu alt uzaylar sadece bir görüş olarak ele alındığından, alt uzay kavramının temelini oluştururlar. Bu görüşler yardımıyla vektörler kullanılarak çok boyutlu alt uzay formları oluşturulur. Bu çok boyutlu alt uzay formları ve normal vektörler yardımıyla da düzlemler tanımlanır.

Bazı kaynaklar kuaterniyonlardan 4-boyutlu birim hiper uzay olarak söz eder [5].

Geometrik cebir, alt uzayları operatörlerle gösterip aritmetik olarak ifade eder. Geometrik cebir, 2-boyutlu alt uzaylarda olduğu gibi düzlemlerin de temsil edilebileceği, yönlü alanların tanımlanabileceği bir cebirdir. Bu cebirde, farklı boyutlu alt uzaylar toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılabilir ve bölünebilir, özel geometrik bağıntılar elde edilebilir.

1-boyutlu alt uzaylarda vektörlerin nasıl ifade edildiğini ve bu bilgilerden yola çıkarak, her boyutta alt uzay için vektörlerin nasıl ifade edilebileceği incelenecektir.

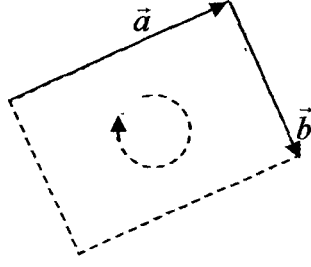


Şekil 2.1 Nokta çarpım

Şekil 2.1 de görülen,  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörleri için,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  çarpımı,  $\vec{a}$  vektörünün  $\vec{b}$  vektörü üzerine izdüşümü olan  $\vec{a}_{||}$  bileşeni büyüklüğünün,  $\vec{b}$  vektörünün büyüklüğü ile çarpımının sonucudur.

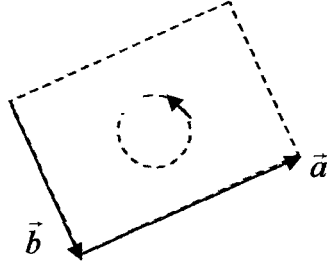
## 2.2 İkivektörler

Clifford cebirinde, içerdiği operatör yardımıyla, nokta çarpımın yanında oldukça kullanışlı bir diğer çarpım tanımlanabilir. Bu çarpıma ise dış çarpım adı verilir. Bu çarpma operatörü ise wedge ( $\wedge$ ) ile gösterilir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  iki vektör olmak üzere, bunların dış çarpımı  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  şeklinde gösterilir.



Şekil 2.2  $\vec{a}$  vektörünün  $\vec{b}$  vektörüne uzanımı

Şekil 2.2’de oluşan düzlem 2-boyutlu bir alt uzaydır ve ikivektör adını alır. Oluşan geometrik şekil bir paralelkenardır ve yönlü bir büyüklüktür.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin dönüşü saat ibrelerinin dönüşü yönündedir. Yani paralelkenar dikkate alınarak, vektörlerin oluşturduğu alan tanımlanabilir. Görüleceği üzere iki vektör yönlü bir alan, aynı şekilde bir vektör ise yönlü bir uzunluk tanımlar.



Şekil 2.3  $\vec{b}$  vektörünün  $\vec{a}$  vektörüne uzanımı

$\vec{b}$  vektörünün  $\vec{a}$  vektörü üzerindeki uzanımı ise, Şekil 2.3’teki gibi aynı büyüklükteki alana karşı gelir ancak ters yönlüdür. Matematiksel ifadesi ile dış çarpım değişimli değildir:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (2.1)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad (2.2)$$

$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$  ve  $-\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$  olduğundan  $\vec{a} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{a}$  ise  $\vec{0} = -\vec{0}$  olur. Sonuç olarak diyebiliriz ki kendisinin negatifliğine eşit olan sadece sıfır

vektördür. Ayrıca bu ifadenin diğer bir anlamı da vektörün kendisi boyunca uzanarak bir alan oluşturamadığıdır.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektör ve  $\lambda$  bir skalar olmak üzere;

$$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad \text{"skalarla çarpımın birleşikliği"} \quad (2.3)$$

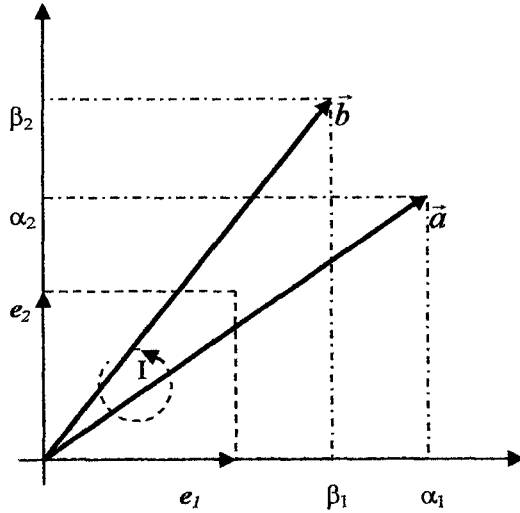
$$\lambda (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \lambda \quad \text{"skalarla çarpımın değişimliliği"} \quad (2.4)$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c}) \quad \text{"dış çarpımın vektörlerin toplanması üzerine dağılımı"} \quad (2.5)$$

özellikleri vardır.

## 2.3 Öklidyen Düzlemi

$n$ -boyutlu uzayda verilen bir vektörü  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  birim baz vektörleri ile temsil edebiliriz. Başka bir deyişle, herhangi bir vektör  $e_i$  baz vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilir. İki vektörleri de lineer kombinasyon şeklinde ifade etmek mümkündür.



Şekil 2.4 İki-boyutlu uzayın bazları

$\mathbb{R}^2$  Öklid düzleminin  $e_1$  ve  $e_2$  birim baz vektörleri ile tanımlı,  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerini ele alalım.  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  skalar olmak üzere;  $\vec{a}$  vektörü,

$$a=(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.6)$$

$\vec{b}$  vektörü ise,

$$b=(\beta_1, \beta_2) \quad (2.7)$$

olarak veya;

$$\vec{a}=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2 \quad (2.8)$$

$$\vec{b}=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2 \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin dış çarpımı;

$$\vec{a} \wedge \vec{b}=(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2) \wedge (\beta_1 e_1+\beta_2 e_2) \quad (2.10)$$

olup dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (\alpha_1 e_1 \wedge \beta_1 e_1) + (\alpha_1 e_1 \wedge \beta_2 e_2) + (\alpha_2 e_2 \wedge \beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2 \wedge \beta_2 e_2) \\ &= (\alpha_1 \beta_1 e_1 \wedge e_1) + (\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1) + (\alpha_2 \beta_2 e_2 \wedge e_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.2) den yararlanarak,

$$\vec{a} \wedge \vec{b}=(\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1) \quad (2.12)$$

ifadesi bulunur.  $e_1 \wedge e_2$  dış çarpımı  $I$  ile temsil edilirse,

$$e_1 \wedge e_2=I \quad (2.13)$$

$$e_2 \wedge e_1=-I \quad (2.14)$$

olur. Bu durumda Eşitlik (2.12);

$$\vec{a} \wedge \vec{b}=(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir.

## 2.4 Üç Boyut

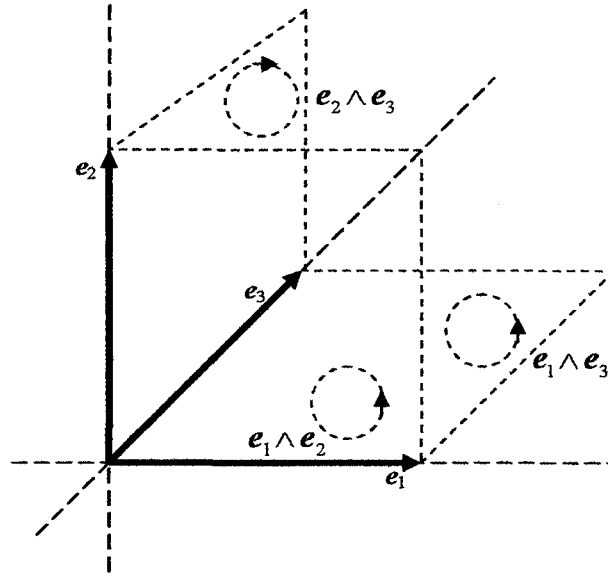
$\mathbb{R}^3$  uzayındaki hesaplamalar daha kompleksdir. Üç-boyutlu uzayın birim baz vektörleri  $e_1, e_2, e_3$  tür. Bu durumda ise 3 adet birim baz ikivektör tanımlıdır:

$$e_1 \wedge e_2 = e_{12} \quad (2.16)$$

$$e_1 \wedge e_3 = e_{13} \quad (2.17)$$

$$e_2 \wedge e_3 = e_{23} \quad (2.17)$$

Üç boyutlu uzayın birim baz vektörleri ve ikivektörleri Şekil 2.5'te gösterilmiştir.



Şekil 2.5 Üç-boyutlu uzayın ikivektör bazları

Birim baz ikivektörler tamamen keyfî olarak  $e_{ij}$  ya da  $e_{ji}$  den biri olarak seçilir. Bazı araştırmacılar  $\{e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$  gösterimini tercih ederler. Çünkü bu gösterim döngüselidir. Ancak bu gösterim 4-boyut ya da daha çok-boyutlu uzaylarda çalışmaz. Bu tezde  $\{e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$  gösterimi tercih edilecektir. Çünkü bu gösterim geometrik cebir problemlerinin çözümündeki gerekli hesaplamalarda kolaylıklar sağlar.

$\mathbb{R}^3$  uzayında üç birim baz vektör olduğundan,  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin, bu baz vektörlerin lineer kombinasyonları cinsinden ifadesi;

$$\vec{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.18)$$

$$\vec{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.19)$$

olduğundan, bu vektörlerin dış çarpımı da;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3) \wedge (\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3) \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\mathbb{R}^2$  uzayında olduğu gibi burada da dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanılarak;

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 \wedge \beta_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \wedge \beta_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \wedge \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \wedge \beta_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 \wedge \beta_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \beta_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_2 \beta_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \alpha_3 \beta_1 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \beta_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \beta_3 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir. Eşitlik(2.1) ve Eşitlik(2.2) dikkate alındığında,  $i \neq j$  için;

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0 \quad \text{“bir baz vektörün kendisiyle dış çarpımı sıfırdır”} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij} \quad \text{“farklı baz vektörlerin dış çarpımı birim baz ikivektöre eşittir”} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_{ij} \quad \text{“baz vektörlerin değişme özelliği yoktur”} \quad (2.24)$$

olduğundan, Eşitlik (2.21);

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{e}_{12} + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \mathbf{e}_{13} + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{e}_{23} \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik üç-boyutlu Öklid uzayında, iki vektörün dış çarpımı ifadesidir.

Buna benzer bir yöntem vektörel (cross) çarpımın tanımlanmasında da izlenebilir. Ancak bu tıpa tıp aynısı olmayacaktır. Çünkü dış çarpım tüm boyutlu uzaylarda geçerliken, vektörel çarpım sadece üç-boyutlu uzayda tanımlıdır.



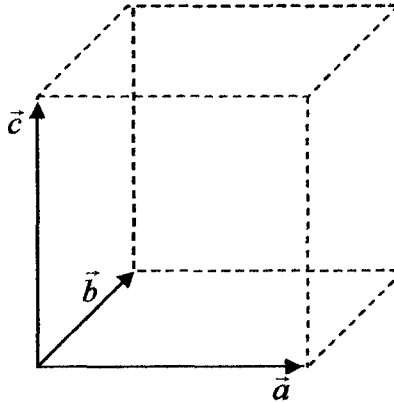
## 2.5 Üçvektörler

Bu bölüme kadar ikivektör operatörünü elde etmek için dış çarpım kullanılarak, bir boyutlu alt uzayın bir diğer bir boyutlu alt uzay üzerine uzanımı sonucu, iki-boyutlu alt uzay elde edildi. Şimdi ise üç adet bir-boyutlu uzayın dış çarpımının sonucu araştırılacaktır.

Şekil (2.6)'da görüldüğü gibi, bir ikivektörün, üçüncü bir diğer vektöre uzanımı sonucu yönlü bir hacim elemanı elde edilir. Buna üçvektör adı verilir.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  gibi üç vektörün dış çarpımının sonucu, 3-boyutlu bir alt uzay oluşturur.

$\mathbb{R}^3$  uzayında baz vektörler

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_{123} \quad (2.26)$$



Şekil 2.6 Üçvektör

şeklinde ifade edilir. Bu üçvektör Öklid uzayında  $I$  adını alır. Bu gösterim  $\vec{e}_{12}$  için kullanıldığı gibi,  $\vec{e}_{123}$  için de kullanılır.

## 2.6 n-vektörün Derecesi

Bu bölüme kadar 0-boyutlu, 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu uzayda skalar, vektör, ikivektör, üçvektör kavramları incelendi. Şimdi ise alt-uzayın boyutunu gösteren k-derece kavramı ifade edilecektir. Burada k, derecenin mertebesini gösterir. Skalar için derece 0, vektör için derece 1,

ikivektör için derece 2, üçvektör için derece 3'tür. Yüksek boyutlu uzayda ise 4.derece, 5.derece,.....şeklinde devam eder. Yani n-boyutlu uzay için bu gösterim "n-derece" dir. Aşağıdaki Tablo 2.1 ve Tablo 2.2'de 2 ve 3-boyutlu uzayda dereceler görülmektedir.

Tablo 2.1 İki-boyutlu uzayın dereceleri

<i>k</i>	<i>Baz eleman</i>	<i>toplam</i>
skalar	{1}	1
vektör	{ $e_1, e_2$ }	2
ikivektör	{ $e_{12}$ }	1

Tablo 2.2 Üç-boyutlu uzayın dereceleri

<i>k</i>	<i>Baz eleman</i>	<i>toplam</i>
skalar	{1}	1
vektör	{ $e_1, e_2, e_3$ }	3
ikivektör	{ $e_{12}, e_{13}, e_{23}$ }	3
üçvektör	{ $e_{123}$ }	1

n-boyutlu uzay için genelleştirme yapılabilir. Bunun için n-boyutlu uzayda kaç k-derece olduğunun bilinmesi gerekir. Bunun için binom çarpanı

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2.27)$$

dir. Burada n boyutu, k ise bazın derecesini gösterir. Örneğin 3-boyutlu uzayda ikivektör bazların sayısı için, n=3, k=2 olduğundan;

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

bulunur.

## 2.7 Çokluvektörler

Tüm  $\mathbb{R}^n$  uzaylarını meydana getiren birim bazlar, alt uzayların geometrik cebirini oluşturur. Bu da, n-dereceli Clifford uzayı olarak adlandırılır ve  $Cl_n$  şeklinde gösterilir. Örneğin, iki-boyutlu Clifford uzayı  $Cl_2$  için olası birim bazlar;

$$\{1, e_1, e_2, I\}$$

dir. Burada 1, skalar bazı göstermek için kullanılmıştır. İki-boyutlu Clifford uzayının geometrik cebirinin her elemanı birim baz derecelerinin lineer kombinasyonları gibi gösterilir. Örneğin üç-boyutlu Clifford uzayı  $Cl_3$  için birim bazlar;

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$$

dir. Cebirin birim bazlarının toplam sayısı, tüm derecelerindeki birim bazlarının toplanmasıyla hesaplanabilir:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2.28)$$

Bu formül bazı matematik kombinasyonlara dayanır ve bir çok düzlem oluşturur. Birkaç geometrik cebir için Eşitlik (2.28), Tablo 2.3'de görüldüğü gibi elde edilebilir.

Tablo 2.3  $Cl_n$  deki birim bazlar

$Cl_n$	Baz eleman	toplam
$Cl_0$	{1}	$2^0=1$
$Cl_1$	{1; $e_1$ }	$2^1=2$
$Cl_2$	{1; $e_1, e_2, e_{12}$ }	$2^2=4$
$Cl_3$	{1; $e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}$ }	$2^3=8$
$Cl_4$	{1; $e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}$ }	$2^4=16$

Bir çokluvektör (multivektör), k-dereceli bazların farklı lineer kombinasyonudur. Bu çalışmada bir çokluvektör **A** şeklinde

gösterilecektir. Örneğin 2-boyutlu  $\mathbb{R}^2$  uzayında bir **A** çokluvektörü bir skalar, bir vektör ve bir ikivektör içerir:

$$\mathbf{A} = \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{I} \quad (2.29)$$

$\alpha_i$  ler ( $i=1,2,3,4$ ) reel katsayıdır ve sıfır olabilir. Örneğin;  $\alpha_1$  ve  $\alpha_4$  sıfırsa çokluvektör bir vektör ve derecesi 1 dir.

İki-boyutlu uzayda tüm elemanları olan bir çokluvektörü göstermek için  $2^2=4$  reel katsayı gereklidir. Üç-boyutlu uzayda tüm elemanları olan bir çokluvektör  $2^3=8$  reel katsayı ile tanımlanabilir ve

$$\mathbf{A} = \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{e}_3 + \alpha_5 \mathbf{e}_{12} + \alpha_6 \mathbf{e}_{13} + \alpha_7 \mathbf{e}_{23} + \alpha_8 \mathbf{e}_{123} \quad (2.30)$$

biçiminde ifade edilir.

Benzer olarak, 4-boyutlu uzayda  $2^4=16$  bileşene ihtiyaç vardır. Çokluvektörleri göz önünde canlandırmak kolay değildir. Vektörler, bivektörler, trivektörler 2- veya 3-boyutlu uzayda sezgisel olarak göz önünde canlandırılırlar. Bir alana bir skalar eklemenin hiçbir yolu olmadığından bu düşünce çokluvektörler için anlamsızdır. Bir çokluvektör, altuzayların lineer bir kombinasyonu olduğundan, bu noktadan hareketle, bilinen bir çok geometrik kavram elde edilebilir.

## 2.8 Geometrik Çarpım

Bu bölüme dek sadece dış çarpım kullanıldı. Geometrik çarpım ise, nokta çarpım ile dış çarpımın birleşimidir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  keyfi vektörleri için geometrik çarpım aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (2.31)$$

$\mathbb{R}^2$ 'de nokta çarpımın sonucu bir skalar, dış çarpımın sonucu da bir ikivektör içerir. Bir ikivektör ile bir skaların toplanması, karmaşık sayılar gibi parçalara ayırmakla mümkündür. Karmaşık sayı  $(a+bi)$  gibi reel ve sanal kısımdan oluşur. Aynı şekilde  $\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$  de skalar ve

ikivektör kısımlarını içerir.

Genel olarak geometrik çarpım, çokluvektörler için bir operatördür ve aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) \quad \text{“çokluvektörlerin birleşme özelliği”} \quad (2.32)$$

$$\lambda \mathbf{A}=\mathbf{A} \lambda \quad \text{“çokluvektörün skalarla çarpımının değişme özelliği”} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \text{“çokluvektörlerde çarpımın toplama üzerine dağılma özelliği”} \quad (2.34)$$

Burada  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  ve  $\mathbf{C}$  keyfi çokluvektörler,  $\lambda$  bir skaldır.

Geometrik çarpımın değişme özelliği olmadığına dikkat edilmelidir. Nokta çarpımın değişme özelliği ve dış çarpımın anti-değişme özelliğinden elde edilen sonuç, geometrik çarpımın bölümlerini oluşturur. Vektörlerin geometrik çarpımında, nokta çarpım ve dış çarpım birlikte kullanılmaktadır.

2-boyutlu Clifford uzayında  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{B}$  gibi herhangi iki çokluvektör olmak üzere;

$$\mathbf{A}=\alpha_1+\alpha_2\mathbf{e}_1+\alpha_3\mathbf{e}_2+\alpha_4\mathbf{I} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}=\beta_1+\beta_2\mathbf{e}_1+\beta_3\mathbf{e}_2+\beta_4\mathbf{I} \quad (2.36)$$

ve  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  çokluvektörlerinin geometrik olarak çarpımı;

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=(\alpha_1+\alpha_2\mathbf{e}_1+\alpha_3\mathbf{e}_2+\alpha_4\mathbf{I})\mathbf{B} \quad (2.37)$$

Eşitlik (2.34) kullanılarak Eşitlik (2.37) yeniden yazılırsa,

$$\mathbf{A}\mathbf{B}=\alpha_1\mathbf{B}+\alpha_2\mathbf{e}_1\mathbf{B}+\alpha_3\mathbf{e}_2\mathbf{B}+\alpha_4\mathbf{I}\mathbf{B} \quad (2.38)$$

olur. Eşitlik (2.36) dan,  $\mathbf{B}$  çokluvektörü Eşitlik (2.38) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B} &= (\alpha_1(\beta_1+\beta_2\mathbf{e}_1+\beta_3\mathbf{e}_2+\beta_4\mathbf{I})) + (\alpha_2\mathbf{e}_1(\beta_1+\beta_2\mathbf{e}_1+\beta_3\mathbf{e}_2+\beta_4\mathbf{I})) \\ &+ (\alpha_3\mathbf{e}_2(\beta_1+\beta_2\mathbf{e}_1+\beta_3\mathbf{e}_2+\beta_4\mathbf{I})) + (\alpha_4\mathbf{I}(\beta_1+\beta_2\mathbf{e}_1+\beta_3\mathbf{e}_2+\beta_4\mathbf{I})) \end{aligned} \quad (2.39)$$

ifadesi elde edilir. İfadedeki parantezler açılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_1 + \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_3\mathbf{e}_2 \\
&+ \alpha_2\mathbf{e}_1\beta_4\mathbf{I} + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_2\beta_4\mathbf{I} + \alpha_4\mathbf{I}\beta_1 + \alpha_4\mathbf{I}\beta_2\mathbf{e}_1 \\
&+ \alpha_4\mathbf{I}\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_4\mathbf{I}\beta_4\mathbf{I}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

bulunur. Eşitlik (2.33) teki özellikten yararlanılarak, skalar çarpanlar tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{I} + \alpha_2\beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_4\mathbf{e}_1\mathbf{I} \\
&+ \alpha_3\beta_1\mathbf{e}_2 + \alpha_3\beta_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \alpha_3\beta_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\beta_4\mathbf{e}_2\mathbf{I} + \alpha_4\beta_1\mathbf{I} + \alpha_4\beta_2\mathbf{I}\mathbf{e}_1 \\
&+ \alpha_4\beta_3\mathbf{I}\mathbf{e}_2 + \alpha_4\beta_4\mathbf{I}\mathbf{I}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

elde edilir. Geometrik çarpımın tanım gereği,

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \tag{2.42}$$

dir. Eşitlik (2.2)'den  $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$  dır. Ayrıca kendisiyle nokta çarpım yapılan bir vektör, büyüklüğünün karesine eşittir.  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  gibi baz vektörlerin büyüklükleri 1 olduğundan,

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 = 1 + 0 = 1 \tag{2.43}$$

yazılabilir. İki-boyutlu Clifford uzayı için diğer bir örnek ise,

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \tag{2.44}$$

dir.  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{e}_2$  birbirine dik olduğuna göre, bunların nokta çarpımları  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$  olur. Buradan;

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = 0 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = 0 + \mathbf{I} = \mathbf{I} \tag{2.45}$$

dır.  $\mathbf{e}_1$  ve  $\mathbf{I}$  nın geometrik çarpımı ise Eşitlik (2.32) den;

$$\mathbf{e}_1\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = 1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \tag{2.46}$$

bulunur. Birim bazların geometrik çarpım sonuçlarını kolayca bulabilmek için bazı kurallar vardır:

i. Birden yüksek dereceli birim bazlar (ikivektör, üçvektör, dörtvektör) dik vektörlerin dış çarpımları gibi yazılabilirler. Ayrıca birbirlerine dik birim bazların nokta çarpımları sıfıra eşit olduğundan, birim bazları, vektörlerin geometrik çarpımları gibi yazarız. Örneğin çok boyutlu uzay için;

$$e_{12849} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_8 \wedge e_4 \wedge e_9 = e_1 e_2 e_8 e_4 e_9 \quad (2.47)$$

ii. Eşitlik (2.1) özelliğinden yararlanarak birim bazların sıraları değiştirilebilir

$$e_1 e_2 e_3 = -e_2 e_1 e_3 = e_2 e_3 e_1 = -e_3 e_2 e_1 \quad (2.48)$$

iii. Bir birim bazın kendisiyle geometrik çarpımı 1 dir:

$$e_i e_i = 1 \quad (2.49)$$

Birden fazla birim bazın geometrik çarpımında bu özellik kullanılarak sadeleştirme yapılabilir. Örneğin;

$$e_{112334} = e_{24}$$

dir. Bu üç kural kullanılarak birim bazların geometrik çarpımları sadeleştirilebilir. Örneğin  $\mathbf{P}$  bir çokluvektör olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= e_1 e_{23} e_{31} e_2 \\ &= e_1 e_2 e_3 e_3 e_1 e_2 && (i. kural kullanıldı) \\ &= e_1 e_2 e_1 e_2 && (iii. kural kullanıldı) \\ &= -e_1 e_1 e_2 e_2 && (ii. kural kullanıldı) \\ &= -1 && (iii. kural iki kez kullanıldı) \end{aligned}$$

bulunur.

Birim bazların geometrik çarpımlarının tüm kombinasyonlarının tablosu oluşturabilir. İki-boyutlu Clifford uzayının geometrik çarpım kombinasyonları Tablo (2.4)'te verilmiştir.

Tablo 2.4  $Cl_2$ 'de dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

$\wedge$	1	$e_1$	$e_2$	$I$
1	1	$e_1$	$e_2$	$I$
$e_1$	$e_1$	1	$I$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$-I$	1	$-e_1$
$I$	$I$	$-e_2$	$e_1$	-1

Bu tabloya göre  $I$  nın kendisi ile çarpımı -1 'e eşit olmalıdır:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= e_{12} e_{12} && \text{(tanımdan)} \\
 &= e_1 e_2 e_1 e_2 && \text{(i. kural kullanıldı)} \\
 &= -e_2 e_1 e_1 e_2 && \text{(ii. kural kullanıldı)} \\
 &= -e_2 e_2 && \text{(iii. kural kullanıldı)} \\
 &= -1 && \text{(iii. kural kullanıldı)}
 \end{aligned}$$

Birim bazların geometrik çarpımıyla ilgili kurallar, keyfi seçilmiş çokluvektörlerin geometrik çarpımlarına uygulanabilir. Eşitlik (2.41) yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 e_1 + \alpha_1\beta_3 e_2 + \alpha_1\beta_4 I + \alpha_2\beta_1 e_1 + \alpha_2\beta_2 e_1 e_1 + \alpha_2\beta_3 e_1 e_2 \\
 &+ \alpha_2\beta_4 e_1 I + \alpha_3\beta_1 e_2 + \alpha_3\beta_2 e_2 e_1 + \alpha_3\beta_3 e_2 e_2 + \alpha_3\beta_4 e_2 I + \alpha_4\beta_1 I + \alpha_4\beta_2 I e_1 \\
 &+ \alpha_4\beta_3 I e_2 + \alpha_4\beta_4 I I
 \end{aligned}$$

elde edilir. Birim bazların geometrik çarpımları Tablo (2.4)'ten yararlanılarak, Eşitlik (4.49)'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 e_1 + \alpha_1\beta_3 e_2 + \alpha_1\beta_4 I + \alpha_2\beta_1 e_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 I + \alpha_2\beta_4 e_2 + \alpha_3\beta_1 e_2 \\
 &- \alpha_3\beta_2 I + \alpha_3\beta_3 - \alpha_3\beta_4 e_1 + \alpha_4\beta_1 I - \alpha_4\beta_2 e_2 + \alpha_4\beta_3 e_1 - \alpha_4\beta_4
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade bazlara göre gruplandırıldığında;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4) + (\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) e_1 \\
 &+ (\alpha_1\beta_3 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1) e_2 + (\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) I \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuç dört birim bazın  $\{1, e_1, e_2, I\}$  lineer bir kombinasyonudur. Başka bir ifadeyle bir çokluvektördür. Bu sonuç



geometrik cebirde geometrik çarpımın kapalılık özelliği gösterdiğini kanıtlar. Şimdiye kadar iki boyutlu Clifford uzayında geometrik çarpımın nasıl yapıldığı gösterildi. Aynı metot üç ve daha çok-boyutlu Clifford uzayında da geçerlidir. Aynı üç kural yardımıyla üç-boyutlu Clifford uzayının ( $Cl_3$ ) geometrik çarpım kombinasyonları Tablo (2.5)'te verilmiştir.

Tablo 2.5  $Cl_3$ 'te dış çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

$\wedge$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
$e_1$	$e_1$	1	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_2$	$e_3$	$e_{123}$	$e_{23}$
$e_2$	$e_2$	$-e_{12}$	1	$e_{23}$	$-e_1$	$-e_{123}$	$e_3$	$-e_{13}$
$e_3$	$e_3$	$-e_{13}$	$-e_{123}$	1	$e_{123}$	$-e_1$	$-e_2$	$e_{12}$
$e_{12}$	$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	$e_{123}$	-1	$-e_{23}$	$e_{13}$	$-e_3$
$e_{13}$	$e_{13}$	$-e_3$	$-e_{123}$	$e_1$	$e_{23}$	-1	$-e_{12}$	$e_2$
$e_{23}$	$e_{23}$	$e_{123}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_{13}$	$e_{12}$	-1	$-e_1$
$e_{123}$	$e_{123}$	$e_{23}$	$-e_{13}$	$e_{12}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1

Vektörler için geometrik çarpım, nokta çarpım ve dış çarpımın bir kombinasyonu şeklinde Eşitlik 2.31'de tanımlandı. Geometrik çarpım bileşenleri olan nokta çarpım ve dış çarpım eşitlikleri kullanılarak yeniden ifade edilebilir:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) \quad (2.51)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) \quad (2.52)$$

Eşitlik (2.31)'in ispatı, Eşitlik (2.51) ve (2.52) kullanılarak yapılabilir.  $Cl_2$ 'nin elemanı, skalar ve ikivektörü sıfır olan **A** ve **B** gibi iki çokluvektör için,  $\alpha_1=\beta_1=\alpha_4=\beta_4=0$  olmak üzere, Eşitlik (2.31) kullanılarak **AB** ve **BA** ifadeleri,

$$\mathbf{AB}=(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{I} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{BA}=(\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3)+(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{I} \quad (2.54)$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler, Eşitlik (2.31) kullanılarak yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \frac{\overbrace{[(\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I}]}^{\mathbf{AB}} - \overbrace{[(\beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3) + (\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}]}^{\mathbf{BA}}}{2} \\ &= \frac{\overbrace{[(\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) - (\beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3)]}^{\text{Skalar kısım}} + \overbrace{[(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} + (\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}]}^{\text{İkivektör kısım}}}{2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

yazılabilir. Skalar kısım sıfır olacağından, ifade tekrar düzenlenirse;

$$\mathbf{AB} = \frac{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} - (\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}}{2}$$

bulunur. İkivektörleri aynı parantezde toplarsak;

$$\mathbf{AB} = \frac{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}}{2}$$

ve ifade tekrar düzenlenirse,

$$\mathbf{AB} = \frac{(2\alpha_2\beta_3 - 2\alpha_3\beta_2)\mathbf{I}}{2} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} \quad (2.56)$$

ifadesi elde edilir. İki-boyutlu Clifford uzayının elemanı olan çokluvektörün ikinci ve üçüncü bileşenleri içinde aynı eşitlikler geçerlidir. Eşitlik (2.51) ve Eşitlik (2.52) sadece vektörler için ele alındı. Dereceleri yüksek çokluvektörlerin iç ve dış çarpımları çok daha kompleksdir.

## 2.9 İç Çarpım

Bir vektör ile ikivektörün dış çarpımı, Bölüm 2.5'te üçvektör olarak tanımlandı. Şimdi ise, bir vektör ile bir ikivektörün iç çarpımı incelenecektir. İç çarpım “ $\lrcorner$ ” sembolü ile gösterilecektir. Ancak öncelikle farklı derecelerdeki alt uzaylar için iç çarpım;

skalarlar  $\alpha \rfloor \beta = \alpha\beta$  (2.57)

vektör ve skalar  $\vec{a} \rfloor \beta = 0$  (2.58)

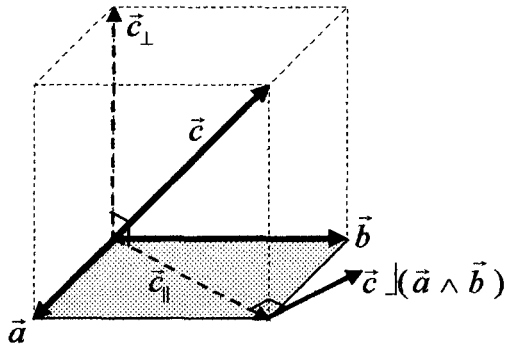
skalar ve vektör  $\alpha \rfloor \vec{b} = \alpha \vec{b}$  (2.59)

vektörler  $\vec{a} \rfloor \vec{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (nokta çarpım) (2.60)

vektör, multivektör  $\vec{a} \rfloor (\vec{b} \wedge \mathbf{C}) = (\vec{a} \rfloor \vec{b}) \wedge \mathbf{C} - \vec{b} \wedge (\vec{a} \rfloor \mathbf{C})$  (2.61)

dağılıma  $(\mathbf{A} \rfloor \mathbf{B}) \rfloor \mathbf{C} = \mathbf{A} \rfloor (\mathbf{B} \rfloor \mathbf{C})$  (2.62)

özelliklerine sahiptir.  $\vec{c}$  vektör,  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  ikivektör olmak üzere,  $\vec{c} \rfloor (\vec{a} \wedge \vec{b})$  iç çarpımı, Şekil 2.7'deki gibi gösterilebilir.  $Cl_3$  birim bazları için iç çarpım kombinasyonları Tablo (2.6)'da verilmiştir.



Şekil 2.7 Bir vektör ile ikivektörün iç çarpımı

Dikkat edilirse iç çarpımda birinci çarpanın derecesi, ikinci çarpanın derecesinden küçük ya da en fazla eşit olabilir. Değilse çarpımın sonucu sıfır olur. Eşit olduğunda ise vektörler için bildiğimiz nokta çarpımı adını alır.

Kısaca tanımlamak gerekirse, iç çarpımın sonucu, daima çarpanların derecelerinden daha küçüktür. Bu nedenle derece azaltan işlem olarak adlandırılır. Bu işlem aslında dış çarpımın tam tersidir. Bir de

Tablo 2.6 Üç-boyutlu Clifford uzayında iç çarpım için birim bazların olası kombinasyonları

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{123}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
$e_1$	$e_1$	1	0	0	0	0	0	0
$e_2$	$e_2$	0	1	0	0	0	0	0
$e_3$	$e_3$	0	0	1	0	0	0	0
$e_{12}$	$e_{12}$	$e_2$	$-e_1$	0	-1	0	0	0
$e_{13}$	$e_{13}$	$e_3$	0	$-e_1$	0	-1	0	0
$e_{23}$	$e_{23}$	0	$e_3$	$-e_2$	0	0	-1	0
$e_{123}$	$e_{123}$	$e_{23}$	$e_{13}$	$e_{12}$	$-e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1

çarpınların her ikisinin de vektör olması durumunda iç çarpım, bildiğimiz nokta (skalar) çarpım halini alır. Yani nokta çarpım, iç çarpımın bir özel halidir [7].

## 2.10 İç, Dış ve Geometrik Çarpım

Eşitlik (2.31)'de vektörlerin geometrik çarpımının, dış çarpım ve nokta çarpım kısımlarıyla tanımlandığı gösterildi. Eşitlik (2.51) ve Eşitlik (2.52) den yararlanarak, Eşitlik (2.31) elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) &= \frac{(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) + (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})}{2} \\
 &= \frac{(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})}{2} \\
 &= \frac{2\vec{a}\vec{b}}{2} \\
 &= \vec{a}\vec{b}
 \end{aligned}$$

Bu, geometrik cebirin tanımlanmasında iki olası yaklaşımı gösterir. Bazı araştırmacılar aksiyomlarla geometrik çarpımın soyut tanımını verir, geometrik çarpımdan iç ve dış çarpımı türetir [8]. Diğer kaynaklar ise, iç ve dış çarpımla geometrik çarpımı gösterebilir [9]. Bu tezde, geometrik

çarpımın iç ve dış çarpımlardan oluştuğunu savunan geometrik cebir üzerinde çalışılacaktır.

## 2.11 $\mathbb{R}^2$ de $Cl_2$ 'nin Matris Gösterimi

$\mathbb{R}^2$  uzayında birim baz vektörleri

$$\mathbf{e}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

şeklinde temsil edebiliriz. Ve ikivektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{12} &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{12} &\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

biçiminde yazabiliriz. Böylece  $Cl_2$  ve  $\mathbb{R}^2$  cebirlerinin karşılıklı izomorfizmi tespit edilebilir:

$$Cl_2 \cong \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.65)$$

$Cl_2$  cebirinde seçilmiş keyfi bir elemanın matris gösterimi;

$$\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_{12} \mathbf{e}_{12} \cong \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_{12} \\ \alpha_2 - \alpha_{12} & \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

biçimindedir [10].

## 2.12 $\mathbb{R}^3$ 'de $Cl_3$ 'ün Matris Gösterimi

Tablo (2.3)'de görüldüğü üzere  $Cl_3$  ün birim bazları,

1	skalar
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	vektör
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	ikivektör
$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$	üçvektör (hacim elemanı)

dır.  $\mathbb{C}$  kompleks alanında matris gösterimi olmasına rağmen, reel cebirin skalarla çarpımı sonucu,  $\mathbb{R}$ 'de bu, matrislerin yerine geçer.

Pauli matrisleri ise,

$$\sigma_1 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

dir. Her bir Pauli matrisinin kendisi ile çarpımı birim matrisi verir:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \quad (2.68)$$

Pauli matrisleri arasında,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 &= i \sigma_2 = -\sigma_1 \sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 &= i \sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

bağıntıları vardır. Pauli matrisleri ile  $Cl_3$ 'ün birim bazları arasında ise

$$\begin{aligned} e_1 &\cong \sigma_1 \\ e_2 &\cong \sigma_2 \\ e_3 &\cong \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.70)$$

izomorfizmi vardır. Bu izomorfizmi,

$I$	1	
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$e_1, e_2, e_3$	
$\sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 \sigma_3, \sigma_2 \sigma_3$	$e_{12}, e_{13}, e_{23}$	(2.71)
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	$e_{123}$	

şeklinde ifade edebiliriz [11].

### 3. CLIFFORD CEBİRİNDE CEBİRSEL İŞLEMLER

Clifford cebiriyle çokluvektörlerin cebiri oluşturulurken işlemciler ihtiyacı vardır. Bu bölümde bir çok uygulamada kullanılan kavramlar ve işlemciler tanımlanacaktır. Öncelikli olarak, alt uzayların dereceleri konusuna daha ayrıntılı olarak değinilecektir. Bir çokluvektörün tersi, sankiskalar (pseudoscalar), duali, izdüşümü (projection) ve dik bileşeni (rejection), yansıması (reflection) bu bölümde ele alınacak konulardır. Bu cebirsel işlemler daha sonraki bölümlerde, Clifford cebiri ile yapılacak uygulamalarda kullanılacaktır.

#### 3.1 Bir Çokluvektörün Derecesi

2. Bölüm'de altuzaylar konusunda bazı genel bilgilerden söz edildi. Bir altuzayın boyutu derecesi ile temsil edilebilir. Bir çokluvektör farklı derecelerin lineer kombinasyonudur. Bir çokluvektörün s dereceli kısmını göstermek için  $\langle \mathbf{A} \rangle_s$  gösterimi kullanılacaktır. Örneğin  $\mathbf{A}$  çokluvektörü,

$$\mathbf{A}=(2,7,6,1,5,3,8,9) \in Cl_3 \text{ ise,}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_0=2 \quad \text{skalar kısım}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_1=7, 6, 1 \quad \text{vektör kısım}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_2=5, 3, 8 \quad \text{ikivektör kısım}$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle_3=9 \quad \text{üç-vektör kısım}$$

kısımlarından oluşur. Clifford cebirinde  $\mathbf{A}$  çokluvektörü,

$$\sum_{s=0}^n \langle \mathbf{A} \rangle_s = \langle \mathbf{A} \rangle_0 + \langle \mathbf{A} \rangle_1 + \langle \mathbf{A} \rangle_2 + \dots + \langle \mathbf{A} \rangle_n \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu gösterimden yararlanarak, dereceleri bakımından iç ve dış çarpımın tanımı yeniden yorumlanabilir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin  $\vec{a} \rfloor \vec{b}$  iç çarpımının sonucu bir skaldır. Vektörün derecesi 1, skalar derecesi 0 olduğundan,

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \rfloor \langle \vec{b} \rangle_1 = \langle \vec{a} \vec{b} \rangle_0 \quad (3.2)$$

dır. Şekil 2.7’de görüldüğü üzere,  $\vec{a}$  vektörü  $\mathbf{B}$  ikivektörü üzerine yansıtıldığında, sonuç vektördür:

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \rfloor \langle \mathbf{B} \rangle_2 = \langle \vec{a} \mathbf{B} \rangle_{2-1}$$

Bu kural genelleştirilirse,

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s \rfloor \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_u \quad u = \begin{cases} s > t, & 0 \\ s \leq t, & t - s \end{cases} \quad (3.3)$$

yazılabilir. Bu ifadeden de görülebileceği üzere iç çarpım derece azaltan bir işlemcidir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin dış çarpımı

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \wedge \langle \vec{b} \rangle_1 = \langle \vec{a} \vec{b} \rangle_2 \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade genelleştirilirse;

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s \wedge \langle \mathbf{B} \rangle_t = \langle \mathbf{AB} \rangle_{s+t} \quad (3.5)$$

ifadesi yazılabilir.

### 3.2 Bir Çokluvektörün Tersisi

Çokluvektörler soldan

$$\mathbf{A}^{-1L} \mathbf{A} = 1 \quad (3.6)$$

ve sağdan

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1R} = 1 \quad (3.7)$$

tersiyle çarpıldığında 1 değerini verir. Çokluvektörü bir diğer çokluvektöre bölerken, terslerinden yararlanılır. Geometrik çarpım değişimli olmadığından bir çokluvektörün soldan ve sağdan tersi birbirine eşit olmayabilir. Bu nedenle  $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$  ifadesi,  $\mathbf{B}^{-1L} \mathbf{A}$  ve  $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1R}$  ifadelerinin her ikisi için de farklı anlama gelebilir.



Çokluvektörlerin tersini hesaplamak için çokluvektör setinin çok önemli olduğu açıktır. Çokluvektör seti versor olarak adlandırılır. Versorlar vektörlerin geometrik çarpımları gibi özelliklere sahiptir.  $\mathbf{A}$  bir çokluvektör,  $A$  ise bir versor olmak üzere;

$$\mathbf{A} = v_1 v_2 v_3 \dots v_k \quad (3.8)$$

dir. Burada  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$  dereceleri 1 olan vektörlerdir. Aslında tüm dereceler de versordur. Çünkü vektörlerin dış çarpımı vasıtasıyla, çok-boyutlu uzayların altuzaylarını elde edebiliriz.  $A$  versorunun tersini,  $A^{-1}$  sembolü ile gösterirsek;

$$A^{-1} = v_k v_{k-1} \dots v_2 v_1 \quad (3.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Eşitlik (2.1)'den de görülebileceği üzere, bir derecenin tersi işaret değişikliği ile de mümkündür. Eşitlik (3.9)'dan, eğer  $k$  tek ise  $A$ 'nın tersi  $-A$ ,  $k$  çift ise  $A$ 'nın tersi kendisine eşittir. Versorun sağdan ve soldan tersi aynıdır ve,

$$A^{-1} = \frac{A^{-1}}{A^{-1}A} \quad (3.10)$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlik (3.10)'un paydası daima skalar bir büyüklüktür;

$$\begin{aligned} A^{-1} A &= v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k v_k v_{k-1} \dots v_2 v_1 \\ &= |v_1|^2 |v_2|^2 |v_3|^2 + \dots + |v_{k-1}|^2 |v_k|^2 \end{aligned}$$

ve

$$A^{-1} A = \frac{A^{-1}}{A^{-1}A} A = \frac{A^{-1}A}{A^{-1}A} = 1 \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir.  $A$  versoru için,

$$A^{-1L} = A^{-1R} = A^{-1} \quad (3.12)$$

$$A^{-1L} A = A A^{-1R} = A^{-1} A = A A^{-1} = 1 \quad (3.13)$$

ifadeleri yazılabilir.  $A$ 'ların vektör olması halinde ise, vektörün büyüklüğünün karesinin skalar olması önemli bir farktır. Bir birim vektörün tersi, kendisine eşittir. Ayrıca  $\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{B}$  çokluvektör olmak üzere,

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.14)$$

$$(\mathbf{A+B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \quad (3.15)$$

eşitlikleri yazılabilir [11].

### 3.3 Sankiskalar (pseudoscalar)

Eşitlik (2.3)'de, verilen bir derece için birim bazların sayısının nasıl hesaplanacağı incelendi. Bu eşitlikten, her geometrik cebirin sadece bir adet 0-dereceli baz ya da birim skalara sahip olacağı görülebilir. Cebirin boyutundan bağımsız olarak;

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad (3.16)$$

dir.  $Cl_n$  geometrik cebiri için n-boyutlu uzayda derecelerin sayısı ise

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad (3.16)$$

ifadesi ile hesaplanır.  $Cl_2$  cebirinde ise birim bazlar  $e_1e_2=I$ , ve  $Cl_3$  de ise birim baz üç-vektör  $e_1e_2e_3=e_{123}$  tür. Genellikle her geometrik cebir, en büyük boyutunun derecesinde birim baza sahiptir. Bu birim baz sankiskalar olarak adlandırılır.

### 3.4 Bir Çokluvektörün Duali

Bilindiği üzere, lineer cebirde düzlemi temsil eden normal vektörler kullanılır. Geometrik cebirde ise aynı amaç için ikivektörler kullanılır. Sankiskaları kullanarak iki gösterim arasındaki bağıntı kurulabilir. Bir  $\mathbf{A}$  çokluvektörünün duali ( $\mathbf{A}^*$ ) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{I}^{-1} \quad (3.17)$$

$\mathbf{I}$ , geometrik cebirin sankiskalarını temsil eder.

$Cl_3$  için,  $e_{12}$  baz ikivektörün dualinin bulunması için,  $e_{123}$  sankiskalar olmak üzere, Eşitlik (3.17)'den,

$$e_{12}^* = e_{12}e_3e_2e_1 = e_1e_2e_3e_2e_1 = -e_1e_3e_2e_2e_1 = -e_1e_3e_1 = e_3 \quad (3.19)$$

bulunur.  $e_{12}$  baz ikivektörünün duali olan  $e_3$  baz vektörü, aynı zamanda  $e_{12}$  baz ikivektörünün normalidir. Aslında bu, bütün ikivektörler için geçerlidir.  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  üç-boyutlu Clifford uzayı elemanı olan keyfî vektörler ise,

$$\vec{a} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad (3.20)$$

$$\vec{b} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \quad (3.21)$$

Eşitlik (2.7)'ye göre bu iki vektörün dış çarpımı,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_{12} + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_{13} + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_{23} \quad (3.22)$$

dir. Bu ifadenin duali  $(\vec{a} \wedge \vec{b})^*$  dir:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^* = (\vec{a} \wedge \vec{b})\mathbf{I}^{-1} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b})^* &= (\vec{a} \wedge \vec{b})e_{123}^{-1} \\ &= (\vec{a} \wedge \vec{b})e_1e_2e_3^{-1} \\ &= (\vec{a} \wedge \vec{b})e_3e_2e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b})^* &= [(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_1e_2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_1e_3 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_2e_3]e_3e_2e_1 \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_1e_2e_3e_2e_1 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_1e_3e_3e_2e_1 \\ &\quad + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_2e_3e_3e_2e_1 \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Bu sonuç bilinen vektörel çarpımdır. Üç-boyutlu uzayda ikivektörün duali, kendisinin normalidir. Dual, bir yüzeyin normali ve

ikivektör arasındaki dönüşüm için kullanılabilir. Ancak dual daha çok çokluvektörlerde kullanılır. Çünkü tüm çokluvektörler için tanımlıdır.

### 3.5 Bir Çokluvektörün İzdüşümü ve Dik Bileşeni

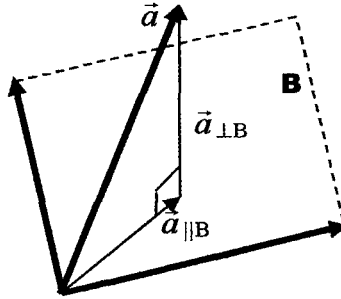
Eğer  $\vec{a}$  vektör,  $\mathbf{B}$  ikivektör ise  $\vec{a}$  vektörünü iki kısma ayırabiliriz. İlk kısım  $\mathbf{B}$  ile aynı doğrultulu olan kısımdır ve  $\vec{a}_{\parallel\mathbf{B}}$  ile gösterilir. Bu ifade  $\vec{a}$  vektörünün  $\mathbf{B}$  üzerindeki izdüşümü olarak adlandırılır. İkinci kısım ise  $\mathbf{B}$  ye diktir ve  $\vec{a}_{\perp\mathbf{B}}$  ile gösterilir. Bu ifade  $\mathbf{B}$ 'den  $\vec{a}$  vektörüne doğru çizilebilen dik vektör olarak adlandırılır. Böylece bir  $\vec{a}$  vektörünü,

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} + \vec{a}_{\perp\mathbf{B}} \quad (3.25)$$

şeklinde  $\mathbf{B}$ 'ye paralel ve dik bileşenlerinin toplamı olarak ifade edebiliriz. Bu ifade Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Keyfî seçilmiş  $\vec{a}$  vektörü ile k-dereceli  $\mathbf{B}$  çokluvektörünün geometrik çarpımı;

$$\vec{a}\mathbf{B} = \vec{a} \cdot \mathbf{B} + \vec{a} \wedge \mathbf{B} \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 3.1  $\vec{a}$  vektörünün  $\mathbf{B}$  ikivektörü üzerindeki bileşenleri

$\mathbf{B}$  ikivektörü üzerindeki bir  $\vec{a}$  vektörünün bileşenlerine ayrılmasını inceleyebiliriz. Tanımı gereği,  $\vec{a}$  vektörü ve  $\mathbf{B}$  ikivektörü ortogonal ise, iç çarpımları sıfırdır:

$$\vec{a}_{\perp\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.27)$$

$\vec{a}$  vektörü ve  $\mathbf{B}$  ikivektörü aynı yönlü ise, dış çarpımları sıfırdır:

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} = 0 \quad (3.28)$$

$\vec{a}$  vektörünün dik kısmı  $\mathbf{B}$  ikivektörü ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \mathbf{B} &= \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} + \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} \\ &= \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} \quad (3.27) \text{ eşitliğinden} \\ &= \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} + \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} \quad (3.28) \text{ eşitliğinden} \\ &= (\vec{a}_{\perp \mathbf{B}} + \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}}) \wedge \mathbf{B} \quad (2.4) \text{ eşitliğinden} \\ &= \vec{a} \wedge \mathbf{B} \quad (3.25) \text{ eşitliğinden} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece,  $\mathbf{B}$  ikivektörü kez  $\vec{a}$  vektörünün dik kısmı,  $\vec{a}$  ve  $\mathbf{B}$  'nin dış çarpımına eşittir. Eşitliğin iki tarafı  $\mathbf{B}$ 'ye bölünürse;

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \mathbf{B} &= \vec{a} \wedge \mathbf{B} \\ \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} &= (\vec{a} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \quad (3.29) \\ \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} &= (\vec{a} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

bulunur.  $\mathbf{B}$  nin bir derecesi olması ya da versor olması nedeniyle tersi kullanılabilir. Sağdan ve soldan tersi birbirine eşittir. Sonuç olarak;

$$\vec{a}_{\perp \mathbf{B}} = (\vec{a} \wedge \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir.

$\vec{a}$  vektörünün aynı doğrultulu kısmı için aynı yöntem uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} &= \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} + \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} \\ &= \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} \\ &= \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} + \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} \quad (3.31) \\ &= (\vec{a}_{\perp \mathbf{B}} + \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}}) \cdot \mathbf{B} \\ &= \vec{a} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Eşitliğin her iki tarafı  $\mathbf{B}$  ikivektörünün tersi ile çarpılırsa;

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} = (\vec{a} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1}$$

ve sonuç olarak

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} = (\vec{a} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \quad (3.32)$$

elde edilir. Bu eşitliği de kullanarak

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} + \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} = \vec{a}$$

ifadesi doğrulanabilir. Eşitlik (3.30) ve Eşitlik (3.31)'den;

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} + \vec{a}_{\perp \mathbf{B}} &= (\vec{a} \wedge \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} + (\vec{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \\ &= (\vec{a} \wedge \mathbf{B} + \vec{a} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \quad (2.2) \text{ eşitliğinden} \\ &= (\vec{a} \cdot \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) \quad (4.7) \text{ eşitliğinden} \\ &= \vec{a} \end{aligned}$$

bulunur.

### 3.6 Yansıma Operasyonu

Farklı derecelerdeki çokluvektör bileşenlerinin, dik ve aynı doğrultulu kısımlarına ayırma yöntemi, yansıma operasyonunda da kullanılabilir.  $Cl_3$ 'de  $\mathbf{B}$  ikivektör,  $\mathbf{B}^*$  onun duali,  $\vec{b}$  ise normal vektör olmak üzere,  $\vec{b}$  vektörü ile herhangi bir  $\vec{a}$  vektörünün çarpımı;

$$\begin{aligned} \vec{b}\vec{a} &= \vec{b}(\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} + \vec{a}_{\perp \mathbf{B}}) \\ &= \vec{b}\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} + \vec{b}\vec{a}_{\perp \mathbf{B}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

dir. Eşitlik (2.31)'den yararlanarak;

$$\vec{b}\vec{a} = (\vec{b}\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} + \vec{b} \wedge \vec{a}_{\parallel \mathbf{B}}) + (\vec{b}\vec{a}_{\perp \mathbf{B}} + \vec{b} \wedge \vec{a}_{\perp \mathbf{B}}) \quad (3.34)$$

ifadesi elde edilir.  $\mathbf{B}$  nin normali  $\vec{b}$  olduğundan  $\vec{b}$  ve  $\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}}$  vektörleri birbirine diktir. Buradan

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \cdot \vec{b} = 0 \quad (3.35)$$

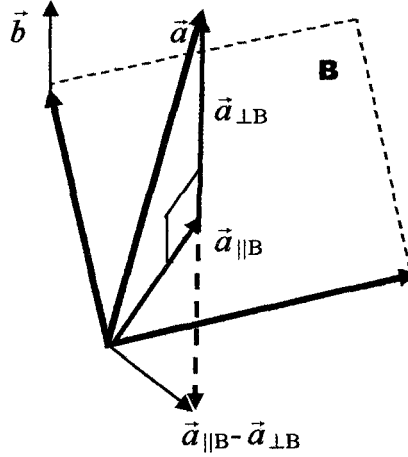
iç çarpımının sıfır olduğu sonucu çıkarılabilir. Aynı şekilde  $\vec{a}_{\perp \mathbf{B}}$  ve  $\vec{b}$  aynı doğrultu üzerindedir. Bu da,

$$\vec{a}_{\parallel \mathbf{B}} \wedge \vec{b} = 0 \quad (3.36)$$

dış çarpımının sıfır olduğu anlamına gelir. Değeri sıfır olan bu kısımlar Eşitlik (3.34)'ten kaldırılırsa;

$$\begin{aligned}\vec{b}\vec{a} &= (\vec{b} \wedge \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}}) + (\vec{b} \cdot \vec{a}_{\perp\mathbf{B}}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a}_{\perp\mathbf{B}} + \vec{b} \wedge \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}}\end{aligned}\quad (3.37)$$

bulunur.



Şekil 3.2  $\vec{a}$  vektörünün  $\mathbf{B}$  ikivektörü üzerindeki yansımaları

İki vektörün iç çarpımının değişme özelliği vardır, dış çarpımının ise değişme özelliği yoktur. Bu özellikten yararlanarak,

$$\vec{b}\vec{a} = \vec{a}_{\perp\mathbf{B}} \cdot \vec{b} - \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} \wedge \vec{b} \quad (3.38)$$

yazılabilir. İfadenin sıfıra eşit olan Eşitlik (3.35) ve (3.36), Eşitlik (3.38)'de yerine yazılır ve Eşitlik (2.31) formunda elde edilirse;

$$\vec{b}\vec{a} = (\vec{a}_{\perp\mathbf{B}} \cdot \vec{b} + \vec{a}_{\perp\mathbf{B}} \wedge \vec{b}) - (\vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} \cdot \vec{b} + \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} \wedge \vec{b}) \quad (3.39)$$

bulunur. Eşitlik (3.39) geometrik çarpımın genel ifadesi şekline getirilmek istenirse;

$$\begin{aligned}\vec{b}\vec{a} &= \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} \vec{b} - \vec{a}_{\perp\mathbf{B}} \vec{b} \\ &= (\vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} - \vec{a}_{\perp\mathbf{B}}) \vec{b}\end{aligned}\quad (3.40)$$

elde edilir. Bunun anlamı ise;

$$\begin{aligned}-\vec{b}\vec{a} &= -(\vec{a}_{\parallel\mathbf{B}} - \vec{a}_{\perp\mathbf{B}}) \vec{b} \\ &= (\vec{a}_{\perp\mathbf{B}} - \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}}) \vec{b}\end{aligned}\quad (3.41)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı  $\vec{b}^{-1}$  ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
-\vec{b}\vec{a}\vec{b}^{-1} &= (\vec{a}_{\perp\mathbf{B}} - \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}})\vec{b}\vec{b}^{-1} \\
&= \vec{a}_{\perp\mathbf{B}} - \vec{a}_{\parallel\mathbf{B}}
\end{aligned}
\tag{3.42}$$

ifadesi bulunur.

Genel olarak, bir  $\vec{b}$  vektörü ve onun tersi  $\vec{b}^{-1}$  arasına bir  $\vec{a}$  vektörü yerleştirildiğinde,  $\vec{a}$  vektörünün yansıması,  $\vec{b}^*$  dualinin normali olduğu düzlemde elde edilir.



## 4. CLIFFORD CEBİRİNİN DÖNME OPERASYONLARINA UYGULANMASI

Bu bölümde 2 ve 3-boyutlu Öklid uzayında dönme operasyonu incelenecektir. Dönme operasyonlarının Clifford cebiri ile temsili gerçekleştirilerek, sonuca ulaşmada mümkün kolaylıklar araştırılacaktır.

### 4.1 Öklid Düzleminde Dönme Operasyonu

2-boyutlu Öklid düzlemi tanımlanırken, Tablo 2.3'te birim ikivektör  $I$  için,  $I^2=-1$  olduğu belirtilmişti. Bu ifadeden;

$$I = \sqrt{-1}$$

yazılabilir. Bir çokluvektör, karmaşık sayılarda olduğu gibi temsil edilebilir. Çokluvektörün skalar kısmı, karmaşık sayının reel kısmına, ikivektör kısmı ise, karmaşık sayının sanal kısmına karşılık gelir.  $Cl_2$  de bir çokluvektör,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  ise, karmaşık sayı ifadesi,  $(\alpha_1+i\alpha_4)$  şeklinde yazılabilir. Bu durumda  $\alpha_2=\alpha_3=0$  olur. Dolayısıyla çokluvektörün toplanması ve farkı, karmaşık sayıların toplanması ve farkına karşılık gelir. Ayrıca geometrik çarpım, bu özel koşullar altında, karmaşık sayıların çarpımına karşılık gelir. **A** ve **B** çokluvektör olmak üzere,

$$\mathbf{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{B}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \quad (4.1b)$$

ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & ((\alpha_1\beta_1) + (\alpha_2\beta_2) + (\alpha_3\beta_3) - (\alpha_4\beta_4)) \\ & + ((\alpha_4\beta_3) - (\alpha_3\beta_4) + (\alpha_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1))e_1 \\ & + ((\alpha_1\beta_3) - (\alpha_4\beta_2) + (\alpha_2\beta_4) + (\alpha_3\beta_1))e_2 \\ & + ((\alpha_4\beta_1) + (\alpha_1\beta_4) + (\alpha_2\beta_3) - (\alpha_3\beta_2))I \end{aligned} \quad (4.2)$$

geometrik çarpımı elde edilir. **A** ve **B** çokluvektörleri, eğer karmaşık sayı

olsalardı,  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2$  ve  $\beta_3$  sıfır olacaktı.  $A$  ve  $B$  karmaşık sayılarının çarpımı sonucu;

$$AB = ((\alpha_1\beta_1) - (\alpha_4\beta_4)) + ((\alpha_4\beta_1) + (\alpha_1\beta_4))I \quad (4.3)$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda her iki ifadenin de birbirine eşit olduğu görülebilir.  $\alpha_1$  ve  $\beta_1$  sonuç ifadenin reel kısmını,  $\alpha_4$  ve  $\beta_4$  ise sonuç ifadenin sanal kısmını oluşturur.

Herhangi bir  $\vec{a}$  vektörü;

$$\vec{a} = \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \quad (4.4)$$

olmak üzere,  $\theta$  açısı kadar döndürüldüğünde,

$$\vec{a}' = \alpha'_2 \mathbf{e}_1 + \alpha'_3 \mathbf{e}_2 \quad (4.5)$$

vektörü elde edilir. Bu durumda;

$$\alpha'_2 = \cos\theta\alpha_2 - \sin\theta\alpha_3 \quad (4.6)$$

$$\alpha'_3 = \sin\theta\alpha_2 + \cos\theta\alpha_3 \quad (4.7)$$

yazılabilir. Ya da daha çok bilinen ifadesi ile,

$$\vec{a}' = \mathbf{M}\vec{a} \quad (4.8)$$

yazılabilir. Burada  $\mathbf{M}$  dönüşüm matrisidir:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$\vec{a}$  vektörü ile  $B$  karmaşık sayısı

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \\ B &= \beta_1 + \beta_4 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.10)$$

olmak üzere  $\vec{a}B$  işlemi;

$$\begin{aligned}
\vec{a}'' &= \vec{a} B \\
&= (\alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2)(\beta_1 + \beta_4 \mathbf{I}) \\
&= \alpha_2 \mathbf{e}_1 (\beta_1 + \beta_4 \mathbf{I}) + \alpha_3 \mathbf{e}_2 (\beta_1 + \beta_4 \mathbf{I}) \\
&= \alpha_2 \mathbf{e}_1 \beta_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \beta_4 \mathbf{I} + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \beta_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \beta_4 \mathbf{I} \\
&= \beta_1 \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_4 \alpha_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{I} + \beta_1 \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \alpha_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{I} \\
&= \beta_1 \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_4 \alpha_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \beta_1 \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \alpha_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\
&= \beta_1 \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_4 \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \beta_1 \alpha_3 \mathbf{e}_2 - \beta_4 \alpha_3 \mathbf{e}_1 \\
&= (\beta_1 \alpha_2 - \beta_4 \alpha_3) \mathbf{e}_1 + (\beta_4 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3) \mathbf{e}_2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

sonucunu verir. Bir vektör ile bir karmaşık sayının geometrik çarpımının sonucu bir vektördür.  $\vec{a}''$  vektörünün bileşenleri ise;

$$\begin{aligned}
\alpha_2'' &= \beta_1 \alpha_2 - \beta_4 \alpha_3 \\
\alpha_3'' &= \beta_4 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3
\end{aligned} \tag{4.12}$$

dir. Eşitlik (4.6) ve (4.7) ile Eşitlik (4.12) için;

$$\alpha_2' = \cos\theta \alpha_2 - \sin\theta \alpha_3 = \beta_1 \alpha_2 - \beta_4 \alpha_3 = \alpha_2'' \tag{4.13}$$

$$\alpha_3' = \sin\theta \alpha_2 + \cos\theta \alpha_3 = \beta_4 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3 = \alpha_3'' \tag{4.14}$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \cos\theta \\
\beta_4 &= \sin\theta
\end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur.

Eşitlik (4.11)'de kullanılan  $B$ , spinör olarak adlandırılır. Spinör  $n$ -boyutlu uzayın dönme operasyonu işlemcisidir. Bu işlemci genellikle *rotor* olarak adlandırılır. Eşitlik (4.13) ve (4.14)'ten de anlaşılacağı üzere,  $Cl_2$  de spinör, bir skalar ve ikivektörün lineer kombinasyonu olarak tanımlanır. Aslında burada spinör ifadesi, bir çokluvektöre de karşı gelmektedir. Bu nedenle bazı eşitliklerde  $\mathbf{B}$  şeklinde de temsil edilecektir

Eşitlik (2.31)'den görüleceği gibi, iki vektörün geometrik çarpımının sonucu, bir skalar ve ikivektörün toplamıdır:

$$\mathbf{B} = \underbrace{\beta_1}_{\text{skalar}} + \underbrace{\beta_4 \mathbf{I}}_{\text{ikivektör}} = \underbrace{\vec{p} \cdot \vec{q}}_{\text{skalar}} + \underbrace{\vec{p} \wedge \vec{q}}_{\text{ikivektör}} = \vec{p}\vec{q} \quad (4.16)$$

Bilinen vektör cebirinde, iki birim vektör arasındaki açıyı nokta çarpım kullanarak bulabiliriz. İki birim vektörün vektörel çarpımının büyüklüğü, aralarındaki açının *sinüsüne* eşittir. Yani  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  birim vektörler ise;

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = \sin\theta \quad (4.17)$$

dir. Bölüm 3.4'te vektörel çarpım, dış çarpımın duali olarak ilişkilendirilmiştir. Aslında iki birim vektörün dış çarpımı, aralarındaki açının *sinüsünün*,  $\mathbf{I}$  birim baz ikivektörü ile çarpımına eşittir [8]:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= \cos\theta \\ \vec{p} \wedge \vec{q} &= \sin\theta \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Eşitlik (2.31)'den  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  birim vektörleri için;

$$\vec{p}\vec{q} = \cos\theta + \sin\theta \mathbf{I} \quad (4.19)$$

yazılabilir. Burada  $\theta$ ,  $\vec{p}$  ve  $\vec{q}$  birim vektörleri arasındaki açıdır. Eşitlik (4.19)'dan da görüleceği gibi,  $Cl_2$ 'de spinör, skalar ve ikivektörün toplamıdır. İki vektörün geometrik çarpımının sonucu bir spinördür genellemesi yapılabilir. Aynı yöntemi izleyerek,

$$\vec{p}\vec{q}^{-1} = \vec{a}'\vec{a}^{-1}$$

$$\vec{a}' = \vec{p}\vec{q}^{-1}\vec{a}$$

birim vektörün tersi kendisine eşit olacağından,

$$\vec{a}^{-1} = \underbrace{\vec{p}\vec{q}}_{\text{spinör}} \vec{a} \quad (4.20)$$

$\vec{p}\vec{q}$  saatin hareketi yönündeki dönmeye karşı gelen spinör ise,  $\vec{q}\vec{p}$  saatin hareketine ters yöndeki dönmeye karşı gelen spinördür. Bu ifadeden de geometrik çarpımın değişimli olmadığı ispatlanmış olur.

İki spinörün geometrik çarpımının sonucu yine bir spinördür.  $A$  ve  $B$ , skalar ve ikivektörden oluşan spinör olmak üzere;

$$A = \alpha_1 + \alpha_4 I \quad (4.21)$$

$$B = \beta_1 + \beta_4 I \quad (4.22)$$

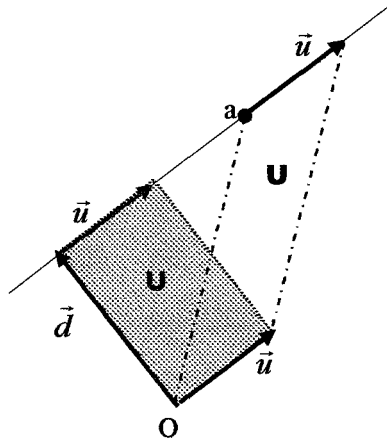
$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 + \alpha_4 I)(\beta_1 + \beta_4 I) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_4 I)\beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_4 I)\beta_4 I \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_4\beta_1 I + \alpha_1\beta_4 I + \alpha_4\beta_4 I I \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_4\beta_1 I + \alpha_1\beta_4 I - \alpha_4\beta_4 \\ &= \underbrace{(\alpha_1\beta_1 - \alpha_4\beta_4)}_{\text{skalar kısım}} + \underbrace{(\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4)}_{\text{ikivektör kısım}} I \end{aligned} \quad (4.23)$$

sonucu elde edilir. Bu iki spinörün çarpımının sonucu  $Cl_2$ 'de yine bir spinördür.

Eşitlik (2.2)'den de görülebileceği üzere, bir vektörün kendisi ile dış çarpımı sıfırdır. Örneğin Şekil (4.1)'den de görülebileceği gibi,  $\vec{u}$  vektörü ile aynı doğrultu üzerinde bulunan tüm noktalar için;

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad (4.24)$$

dır. Burada  $\vec{x}$ ,  $\vec{u}$  ile aynı doğrultu üzerinde bulunan bir noktayı temsil eden vektördür. Aynı doğrultu üzerindeki herhangi bir a noktasını temsil eden vektör için,



Şekil 4.1 Öklid düzleminde bir doğru

$$\begin{aligned}
(\vec{x}-\vec{a}) \wedge \vec{u} &= 0 \\
(\vec{x} \wedge \vec{u}) - (\vec{a} \wedge \vec{u}) &= 0 \\
(\vec{x} \wedge \vec{u}) &= (\vec{a} \wedge \vec{u}) \\
(\vec{x} \wedge \vec{u}) &= \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

dir. Burada  $\vec{u}$  doğrultu vektörüdür.  $\mathbf{U}$  ise ikivektörüdür ve  $\vec{a} \wedge \vec{u}$  ifadesine eşittir. İkivektör özel bir şekle sahip değildir. Sadece tanımlı bir alandır. Şekil (4.1)'den de görüldüğü gibi,  $\vec{d}$  vektörünün büyüklüğü, doğrunun orijine olan uzaklığını verir. Bu uzaklığı ise,

$$\begin{aligned}
\vec{d} \vec{u} &= \mathbf{U} \\
\vec{d} \vec{u} &= \vec{d} \cdot \vec{u} + \vec{d} \wedge \vec{u} = \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitliğinden bulunabilir.  $\vec{d} \cdot \vec{u}$  iç çarpımı birbirlerine dik olduklarından sifıra eşittir.  $\vec{u}$  birim vektör ise, birim vektörün tersi kendisine eşit olacağından,  $\vec{d} = \mathbf{U} \vec{u}$  ifadesi yazılabilir. Bu durumda  $|\mathbf{U}| = |\vec{d}|$  dir ve bu da doğrunun orijine olan uzaklığını verir.

## 4.2 Öklid Uzayında Dönme Operasyonu

Öklid düzleminde  $\cos\theta + \sin\theta I$  spinörü, bir vektörü  $\theta$  açısı kadar döndürmektedir. Eşitlik (4.18) den de görüleceği üzere,  $\vec{s}$  ve  $\vec{t}$  birim vektörler olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\vec{s} \cdot \vec{t} &= \cos\theta \\
\vec{s} \wedge \vec{t} &= \sin\theta I
\end{aligned} \tag{4.27}$$

olduğundan bir spinördür.

$I$  birim ikivektörü ile tanımlı bir dönme düzlemi tanımlansın. Bu düzlemde yer alan bir  $\vec{v}$  vektörü,  $\theta$  açısı kadar döndürüldüğünde  $\vec{v}'$  vektörü elde edilsin. Bu operasyonu gerçekleştiren spinör  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R} = \cos\theta + \sin\theta I \tag{4.28}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\vec{v}' = \mathbf{R} \vec{v} \quad (4.29)$$

ifadesinde  $\vec{v}'$  vektörü de  $I$  ve  $\vec{v}$  ile aynı düzlemedir. Bu nedenle;

$$\begin{aligned} \vec{v}' \wedge I &= 0 \\ \vec{v}' \cdot \vec{v} &= |\vec{v}'||\vec{v}|\cos\theta \end{aligned} \quad (4.30)$$

yazılabilir. Eşitlik (4.28)'den yararlanarak,

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \mathbf{R} \vec{v} \\ &= (\cos\theta + \sin\theta I) \vec{v} \\ &= \cos\theta \vec{v} + \sin\theta I \vec{v} \\ &= \cos\theta \vec{v} + \sin\theta (I \cdot \vec{v} + I \wedge \vec{v}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ifadesi elde edilir. Çünkü burada  $I$  ikivektör,  $\vec{v}$  ise vektördür.  $I$  birim ikivektörü ile  $\vec{v}$  vektörü aynı düzlemde olduğundan,

$$I \wedge \vec{v} = 0 \quad (4.32)$$

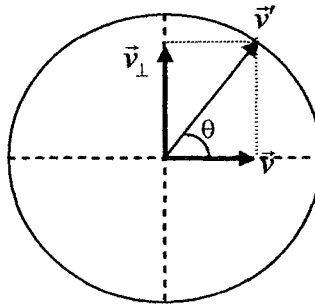
dır. Bu durumda Eşitlik (4.31);

$$\vec{v}' = \cos\theta \vec{v} + \sin\theta I \cdot \vec{v} \quad (4.33)$$

biçimine dönüşür. Şekil (2.7)'den görülebileceği üzere,  $I \cdot \vec{v}$  nokta çarpımının sonucu bir vektördür ve  $\vec{v}$  vektörüne diktir. Bu dik vektör  $\vec{v}_\perp$  şeklinde temsil edilecektir. Bu temsilden yararlanarak, Eşitlik (4.33);

$$\vec{v}' = \cos\theta \vec{v} + \sin\theta \vec{v}_\perp \quad (4.34)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil (4.2)'den görüldüğü gibi,  $\vec{v}'$  vektörü,  $\vec{v}$  ile  $\vec{v}_\perp$  vektörlerinin toplamıdır.



Şekil 4.2 Keyfi seçilmiş bir düzlemde dönme

Eşitlik (4.30) dan  $\vec{v}'$  ve  $\vec{v}$  vektörlerinin büyüklükleri eşit ise,

$$\vec{v}' \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \cos\theta \quad (4.35)$$

elde edilir. Eşitlik (4.34), Eşitlik (4.35)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} (\cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{v}_\perp) \cdot \vec{v}' &= |\vec{v}|^2 \cos\theta \\ \cos\theta\vec{v} \cdot \vec{v}' + \sin\theta\vec{v}_\perp \cdot \vec{v}' &= |\vec{v}|^2 \cos\theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

bulunur.  $\vec{v}$  ve  $\vec{v}_\perp$  birbirlerine dik olduğu için, nokta çarpımları sıfır olacağından;

$$\cos\theta\vec{v} \cdot \vec{v}' = |\vec{v}|^2 \cos\theta \quad (4.37)$$

ifadesi elde edilir. Bu da bizi bir vektörün kendisi ile nokta çarpımının, vektörün büyüklüğünün karesine eşit olduğu sonucuna götürür.

Herhangi bir  $\vec{v}$  vektörüne ardışık iki yansıma operasyonunun uygulandığını varsayalım. Burada  $\vec{s}$  ve  $\vec{t}$  birim vektörler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= -\vec{t}(-\vec{s}\vec{v}\vec{s})\vec{t} \\ &= \vec{t}\vec{s}\vec{v}\vec{s}\vec{t} \end{aligned} \quad (4.38)$$

dir.  $\vec{s}\vec{t} = \mathbf{R}$  spinörü ise,

$$\vec{t}\vec{s} = (\vec{s}\vec{t})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \quad (4.39)$$

dir ve Eşitlik (4.38)'de yerine yazılırsa;

$$\vec{v}' = \mathbf{R}^{-1}\vec{v}\mathbf{R} \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir. Spinörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \vec{s}\vec{t} = \vec{s} \cdot \vec{t} + \vec{s} \wedge \vec{t} \\ \mathbf{R}^{-1} &= \vec{t}\vec{s} = \vec{t} \cdot \vec{s} + \vec{t} \wedge \vec{s} \end{aligned} \quad (4.41)$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu spinörler skalar+ikivektör formundadır.

$\vec{s} \wedge \vec{t} = \mathbf{A}$  şeklinde temsil edildiğinde,  $\vec{v}$  vektörünün bileşenleri  $\vec{v}_{\parallel\mathbf{A}}$  ve  $\vec{v}_{\perp\mathbf{A}}$  ise,  $\vec{v}$  vektörü;

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel\mathbf{A}} + \vec{v}_{\perp\mathbf{A}} \quad (4.42)$$



şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{A} &= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} + \overbrace{\vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \wedge \mathbf{A}}^{=0} \\
&= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} \\
&= -\mathbf{A} \cdot \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \\
&= -\mathbf{A} \cdot \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} - \overbrace{\mathbf{A} \wedge \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}}}^{=0} \\
&= -\mathbf{A} \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}}
\end{aligned}$$

olduğundan, vektör ve ikivektör arasındaki iç çarpımın değişimli olmadığı söylenebilir. Halbuki iki vektör arasındaki iç çarpım değişimlidir.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{A} &= \overbrace{\vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}}^{=0} + \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} \\
&= \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \wedge \mathbf{A} \\
&= \mathbf{A} \wedge \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \\
&= \mathbf{A} \cdot \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} + \mathbf{A} \wedge \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \\
&= \mathbf{A} \vec{v}_{\perp \mathbf{A}}
\end{aligned}$$

eşitliğinden bir vektör ile ikivektör arasındaki dış çarpımın değişimli olduğu sonucu çıkarılabilir. İki vektörün dış çarpımı ise değişimli değildir.

Dış çarpımın değişimliliği için bir genelleme yapmak gerekir ise,  $\vec{v}$  bir vektör,  $\mathbf{Q}$  ise derecesi  $r$  olan bir eleman olmak üzere,

$$\vec{v} \wedge \mathbf{Q} = (-1)^r \mathbf{Q} \wedge \vec{v} \quad (4.43)$$

dir.

$$\vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{A} = -\mathbf{A} \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \quad (4.44)$$

$$\vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{A} = \mathbf{A} \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \quad (4.45)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1} \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} &= (\vec{s} \cdot \vec{t} - \vec{s} \wedge \vec{t}) \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \\
&= (\vec{s} \cdot \vec{t}) \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} - (\vec{s} \wedge \vec{t}) \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \\
&= (\vec{s} \cdot \vec{t}) \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} - \mathbf{A} \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}}
\end{aligned} \quad (4.46)$$

eşitliği elde edilir.  $\vec{s} \cdot \vec{t}$  çarpımının sonucu skaldardır ve  $(\vec{s} \cdot \vec{t}) \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}}$  geometrik çarpımı değişimlidir. Eşitlik (4.44) ün yerine yazılması ile, Eşitlik (4.46);

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1} \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} &= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} (\vec{s} \cdot \vec{t}) + \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{A} \\
&= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} (\vec{s} \cdot \vec{t}) + \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} (\vec{s} \wedge \vec{t}) \\
&= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} (\vec{s} \cdot \vec{t} + \vec{s} \wedge \vec{t}) \\
&= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. Aynı yöntemle ve Eşitlik (4.45)'in kullanılması ile;

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1} \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} &= (\vec{s} \cdot \vec{t} - \vec{s} \wedge \vec{t}) \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \\
&= (\vec{s} \cdot \vec{t}) \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} - (\vec{s} \wedge \vec{t}) \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \\
&= (\vec{s} \cdot \vec{t}) \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} - \mathbf{A} \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \\
&= \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} (\vec{s} \cdot \vec{t}) - \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{A} \\
&= \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} (\vec{s} \cdot \vec{t}) - \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} (\vec{s} \wedge \vec{t}) \\
&= \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} (\vec{s} \cdot \vec{t} - \vec{s} \wedge \vec{t}) \\
&= \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{R}^\dagger
\end{aligned} \tag{4.48}$$

değişimliliği ispatlanmış olur.

Eşitlik (4.40)'taki asıl ifadeye tekrar dönecek olursak;

$$\vec{v}' = \mathbf{R}^{-1} \vec{v} \mathbf{R}$$

idi. Eşitlik (4.47) ve (4.48)'deki ispatlardan yararlanırsak;

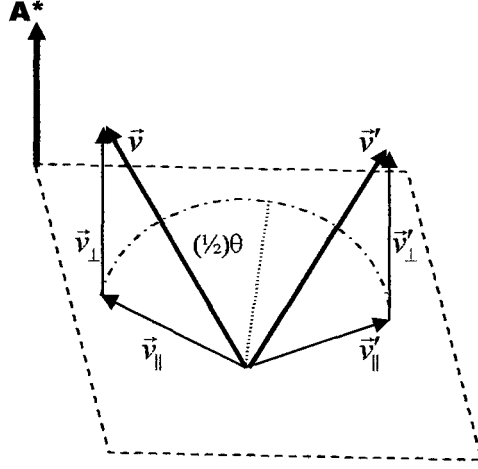
$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \mathbf{R}^{-1} (\vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} + \vec{v}_{\perp \mathbf{A}}) \mathbf{R} \\
&= \mathbf{R}^{-1} \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^{-1} \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{R} \\
&= \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{R} \mathbf{R} + \vec{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

ve Eşitlik (4.39)'dan

$$\vec{v}' = \vec{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{R} \mathbf{R} + \vec{v}_{\perp \mathbf{A}}$$

elde edilir. Bu ifadeden görüldüğü gibi,  $\mathbf{R}$  spinörü  $\vec{v}$  vektörünü  $\frac{1}{2}\theta$  kadar

bir açı ile döndürüyorsa, bu operasyon Eşitlik (4.50) gereği ardışık olarak



Şekil 4.3 Dönme operasyonu

iki kez uygulanmakta ve sonuçta  $\vec{v}$  vektörü, Şekil 4.3'te görüldüğü gibi,  $\theta$  açısı kadar dönmüş olmaktadır.

Bu durumda sonuç olarak,  $\mathbf{B}$  ikivektörü ve  $\theta$  açısı için  $\mathbf{R}$  spinörü;

$$\mathbf{R} = \cos \frac{1}{2} \theta + \sin \frac{1}{2} \theta \mathbf{B} \quad (4.50)$$

biçiminde yazılabilir[12].  $\mathbf{R}$ ,  $Cl_3$ 'te bir spinör ise

$$\mathbf{R} = \underbrace{\cos \frac{1}{2} \theta}_{\text{skalar}} + \underbrace{\sin \frac{1}{2} \theta \mathbf{B}}_{\text{ikivektör}} \quad (4.51)$$

formundadır. İfadenin skalar kısmı  $\alpha$ , ikivektör kısmı Eşitlik (4.1b) formunda  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  ise,  $\mathbf{R} \in Cl_3$  olmak üzere;

$$\mathbf{R} = (\alpha, xi, yj, zk) \quad (4.52)$$

şeklinde ifade edilebilir [13]. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} -\mathbf{k} &\cong \mathbf{e}_{12} \\ -\mathbf{j} &\cong \mathbf{e}_{31} \\ -\mathbf{i} &\cong \mathbf{e}_{23} \end{aligned} \quad (4.53)$$

izomorfizmi geçerlidir. Eşitlik (4.52) de,

$$\alpha = \cos \frac{1}{2} \theta$$

$$x = \sin \frac{1}{2} \theta \beta_1$$

$$y = \sin \frac{1}{2} \theta \beta_2$$

$$z = \sin \frac{1}{2} \theta \beta_3$$

(4.54)

eşitlikleri kullanılmıştır.

## 5. ALTIN ORAN VE PLATONİK KATILAR

Altın oran ya da altın sayı Yunanlı heykeltıraş “Phidias”ın anısına *pi* olarak adlandırılır. Aslında bu oran çok eski çağlarda kullanılmıştır. M.Ö 2560 yıllarında yapıldığı sanılan Büyük Giza Piramidi, altın oranın kullanıldığı ilk yapıdır. Bu piramidin her bir taban kenarının uzunluğu 237,36m ve yüksekliği ise 146,7m dir.  $237,36/146,7 = \frac{237,36}{146,7} = 1,618$  oranı ise altın orandır.

Bu oran, Atina’daki Parthenon, M.Ö 440 yılında yapılmıştır ve bu yapının boyutlarında da altın oran geçerlidir.

Günümüzde altın oran sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Örneğin insan yüzünün bazı bölgeleri arasındaki uzaklıklar oranı, altın oranı verir;

yüzün boyu / yüzün genişliği,

dudak-kaşların birleşim yeri arası / burun boyu,

yüzün boyu / çene ucu-kaşların birleşim yeri arası,

ağız boyu / burun genişliği,

burun genişliği / burun delikleri arası,

göz bebekleri arası / kaşlar arası.

Tabi ki bu oranlar ideal insan yüzünün oranlarıdır. Amerikalı fizikçi B. J. West ile doktor A. L. Goldberger, 1985-1987 yılları arasında yürüttükleri araştırmalarında, akciğerlerin yapısındaki altın oranının varlığını ortaya koydular. Akciğeri oluşturan bronş ağacının bir özelliği, asimetrik olmasıdır. Örneğin, soluk borusu, biri uzun (sol) ve diğeri de kısa (sağ) olmak üzere iki ana bronşa ayrılır ve bu asimetrik bölünme, bronşların ardışık dallanmalarında da sürüp gider. İşte bu bölünmelerin hepsinde uzun bronşun kısa bronşa oranının yaklaşık olarak 1,618 değerini verdiği saptanmıştır.

Canlıların tüm fiziksel özelliklerinin depolandığı molekül olan DNA da altın orana sahiptir. DNA düşey doğrultuda iç içe açılmış iki

sarmaldan oluşur. Bu sarmallarda her birinin bütün yuvarlağı içindeki uzunluk 34 angström( $\text{\AA}$ ), genişliği 21  $\text{\AA}$ 'dür. 21 ve 34 art arda gelen iki Fibonacci sayısıdır ve  $34/21=1,618$  dir.

Fibonacci isimli İtalyan matematikçinin bulduğu bu sayı dizisi, Fibonacci sayıları olarak adlandırılır ve bu sayıların özelliği, dizideki sayılardan her birinin, kendisinden önce gelen iki sayının toplamından oluşmasıdır.

Fibonacci Sayıları: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Fibonacci sayılarının ilginç bir özelliği daha vardır. Dizideki bir sayıyı kendinden önceki sayıya böldüğümüzde birbirine çok yakın sayılar elde edersiniz. Serideki 13. sırada yer alan sayıdan sonra bu sayı sabitlenir. İşte bu sayı "altın oran" olarak adlandırılır.

Altın oran kristal yapılarda da kendini gösterir. Bunların çoğu gözümüzle göremeyeceğimiz kadar küçük yapıların içindedir. Ancak kar kristali üzerindeki altın oranı gözle görebiliriz. Kar kristalini oluşturan kısalı uzunlu dallanmalarda, çeşitli uzantıların oranı hep altın oranı verir.

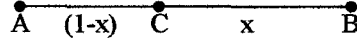
Mona Lisa'nın başının etrafına bir dikdörtgen çizildiğinde ortaya çıkan dört kenar bir altın dikdörtgendir. Bu dikdörtgen, göz hizasında çizilecek bir çizgiyle ikiye ayrıldığında yine bir altın oran elde edilir. Resmin boyutları da altın oran oluşturmaktadır.

Platonik katılar ise doğada mükemmel simetriye sahip geometrik cisimlerdir. Bunlar tetrahedron, küb, oktahedron, ikosahedron, dodekahedrondur M.Ö 400 yıllarında bu cisimleri ilk kez sınıflayan Plato'nun anısına bu ad verilmiştir.

Bu bölümde öncelikli olarak altın oranın hesaplanması ele alınacaktır. Daha sonra ise, Platonik katılarda altın oran araştırılacak ve Platonik katıların diğer geometrik özellikleri incelenecektir.

## 5.1 Altın Oran

Altın oran bir çok farklı yöntemle elde edilebilir. Bu tezde yöntemlerden sadece biri kullanılacaktır.



Şekil 5.1 Altın oranın ele edilişi

Şekil 5.1’de görüldüğü gibi birim uzunluklu bir AB doğru parçası olsun. Bir  $|AB|$  doğru parçasını şekildeki gibi küçük parçanın  $|AC|$ , büyük parçaya oranı  $|BC|$ , büyük parçanın bütün doğruya  $|AB|$  oranına eşit olacak şekilde bölündüğünde;

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad (5.1)$$

ifadesi elde edilir.

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

değerleri yerine yazılarak

$$x^2 + x - 1 = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin çözümünden,

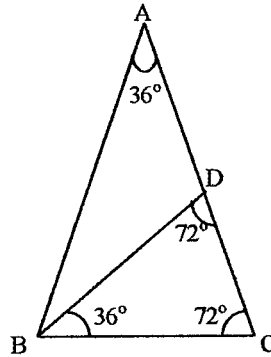
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

bulunur. İkinci kök negatif olduğundan, uzunluk negatif olamayacağı için, bu kök çözüm olamaz. Birinci kökün tam değeri,

$$\begin{aligned} x_1 = \phi &= 1,618033988749894848204586834365638117720309179805762862 \\ &1354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868 \\ &9175212663386222353693179318006076672635443338908659593958290 \end{aligned}$$

5638322661319928290267880675208766892501711696207032221043216  
2695486262963136144381497587012203408058879544547492461856953  
6486444924104432077134494704956584678850987433944221254487706  
6478091588460749988712400765217057517978834166256249407589069  
7040002812104276217711177780531531714101170466659914669798731  
7613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997  
8297783478458782289110976250030269615617002504643382437764861  
0283831268330372429267526311653392473167111211588186385133162  
0384005222165791286675294654906811317159934323597349498509040  
9476213222981017261070596116456299098162905552085247903524060  
2017279974717534277759277862561943208275051312181562855122248  
0939471234145170223735805772786160086883829523045926478780178  
8992199027077690389532196819861514378031499741106926088674296  
2267575605231727775203536139362107673893764556060605921658946  
6759551900400555908950229530942312482355212212415444006470340  
5657347976639723949499465845788730396230903750339938562102423  
6902513868041457799569812244574717803417312645322041639723213  
4044449487302315417676893752103068737880344170093954409627955  
8986787232095124268935573097045095956844017555198819218020640  
5290551893494759260073485228210108819464454422231889131929468  
1926372891067050339928226526355620902...

dir. Bu altın orana karşı gelen sayının tam değeridir.



Şekil 5.2 Altın üçgen



Tepe açısı  $36^\circ$  olan bir ikizkenar üçgen ele alalım. Şekil 5.2'de görüldüğü gibi, taban açıları  $72^\circ$  olacaktır. BD ise açı ortaydır. Bu durumda  $|BC|=|BD|=|AD|$  dir. Ayrıca BDC ve ABC üçgenleri benzer üçgenlerdir. Bu benzerlikten yararlanarak,

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|DC|} \quad (5.3)$$

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

oranları yazılabilir. Bu üçgende

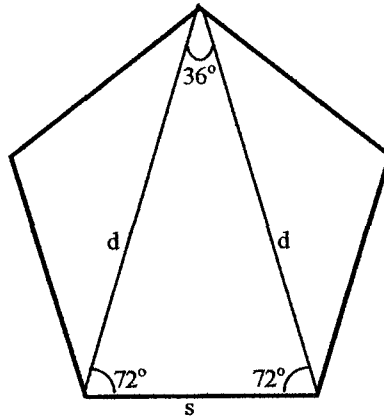
$$|BC| = \phi \cdot |AB| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} |AB| \quad (5.4)$$

altın oranı yazılabilir. Bu eşitlik ifadesi Platonik katıların incelenmesinde oldukça kullanışlı olacaktır.

Düzgün bir beşgen için altın oran araştırılacak olursa, Şekil 5.3'te görüldüğü gibi,

$$d = \phi \cdot s = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot s \quad (5.5)$$

elde edilir.



Şekil 5.3 Düzgün beşgende altın oran

## 5.2 Platonik Katılar

Plato, M.Ö 400 de uzayda mükemmel simetriye sahip noktalar setine sadece beş katının sahip olduğunu ortaya koydu ve buna “her şeyin teorisi” adını verdi. Bu teorinin ortaya çıkışından yaklaşık 2000 yıl sonra Johannes Keppler, benzeri bir yaklaşımla, bu beş katının geometrik özelliklerini kendi kozmolojik çalışmalarına uyguladı.

Plato'nun “her şeyin teorisi” yaklaşımı atom altı parçacıklar için de önemli rol oynadı. Plato atom-altı parçacıkların simetri açılarına göre Tablo 5.1'de görüldüğü gibi bir gruplama yaptı.

Tablo 5.1 Plato'nun ilk kuramı

	1. tip	2. tip
Tetrahedron=plazma (ateş)	24	0
Oktahedron=gaz (hava)	48	0
İkosahedron=sıvı (su)	120	0
Heksahedron=katı (yer)	0	24

Plato'nun teorisine göre, atom-altı parçacıklar farklı kombinasyonlar ile farklı atom yapılarını oluşturabilmektedir. Atom-altı parçacıklar aralarında üç açılı üç bağ oluşturarak temel parçacığı meydana getirmektedir. Bağlar arasındaki bu açılar Tablo 5.1'de görüldüğü gibi 2 tipten oluşmaktadır. 1.tipte bağ üçgeninin kenar uzunlukları oranı  $(1, 1, \sqrt{2})$ , 2.tipte ise  $(1, 2, \sqrt{3})$  dir. Günümüzde yapılan çalışmalar tetrahedronun 24, oktahedronun 48, ikosahedronun 120 adet 1.tip, heksahedron ise 24 adet 2.tip üçgenin bir araya gelmesinden oluştuğunu göstermektedir. Atom-altı parçacıklar farklı şekillerde bir araya geldiklerinde, Tablo 5.1'de görüldüğü gibi, farklı yapılar oluşturabilmektedir. Örneğin, sıvıyı oluşturan 120 adet 1.tip üçgen, 5 adet

plazma yapı, ya da 2 adet gaz ve 1 adet plazma yapı içermektedir. Plato'nun kuramına göre, bir sıvı, gazların ya da gaz ve plazmanın farklı kombinasyonlarla bir araya gelmesiyle oluşmaktadır.

Ayrıca Plato doğru açılar kullanıldığında, dodekahedrondan diğer dört simetrik katının elde edilebileceğini öne sürmüştür. Bu görüş daha da geliştirilerek Abraham F. Jalbout [15] tarafından makalesinde ispatlanmıştır.

$\mathbb{R}^3$ deki dışbükey tam simetrik düzgün katılara Platonik katılar adı verilir.  $\mathbb{R}^3$ uzayının sonlu alt gruplarının bazıları Platonik katılarla gösterilebilir.

- i. Bu çokyüzlüler  $\mathbb{R}^3$ uzayında, 2-boyutlu düzlemlerin, 1-boyutlu kenarların, köşelerde birleşmesi ile oluşur.
- ii. Bir çok yüzlünün tüm yüzeyleri, kenarları ve köşeleri birbirinin aynı ise düzgündür. Tüm yüzeyler aynı açılarla kenarlarda buluşurlar ve tüm kenarlar aynı açılarla köşelerde buluşurlar.

Plato'dan sonra, çeşitli yarı düzgün katılar üzerine Archimedes ve Keppler'in çalışmaları olmuştur.

### 5.2.1 Platonik Katıların Geometrik Özellikleri

Bu çalışmada Platonik katıların geometrik büyüklükleri ile ilgili verilecek tüm büyüklükler, normalize edilmiş katılara ait olacaktır. Normalize Platonik katı ise, her bir kenarının orta noktasının, katı hacminin merkezinde olduğu varsayılan orijine olan uzaklığı 1 birim olan katıdır.

Bir Platonik katının yüz sayısı  $f$ , köşe sayısı  $v$ , kenar sayısı  $e$  ile temsil edilir ise, aralarında

$$f+v-e=2 \quad (5.6)$$

bağıntısı vardır. Platonik katılara ait bazı büyüklükler Tablo 5.2 de verilmektedir.

Tablo 5.2 Platonik katılara ait büyüklükler

	yüz sayısı ( $f$ )	kenar sayısı ( $e$ )	köşe sayısı ( $v$ )	bir yüzü oluşturan kenar sayısı ( $p$ )	çifti
Tetrahedron	4	6	4	3	Tetrahedron
Küb	6	12	8	4	Oktahedron
Oktahedron	8	12	6	3	Küb
İkosahedron	20	30	12	3	Dodekahedron
Dodekahedron	12	30	20	5	İkosahedron

Platonik katıları Schläfli sembolü ile de temsil edebiliriz.  $p$  her bir yüze ait kenar sayısı,  $q$  ise her bir köşede birleşen yüz sayısı olmak üzere, her bir Platonik katı  $\{p,q\}$  formunda Schläfli sembolü ile temsil edilebilir [16]. Bu temsile göre Platonik katıların gösterimi Tablo 5.3'te verilmiştir.

Tablo 5.3 Platonik katıların Schläfli sembolü ile temsili

Platonik katı	Schläfli sembolü
Tetrahedron	$\{3,3\}$
Küb	$\{4,3\}$
Oktahedron	$\{3,4\}$
İkosahedron	$\{3,5\}$
Dodekahedron	$\{5,3\}$

Bu gösterimden yararlanarak Platonik katılar için bazı büyüklükleri formüle edebiliriz [16]. Bir Platonik katının yüzey alanı;

$$S = \frac{pq l^2}{4 - (p-2)(q-2)} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (5.7)$$

eşitliği ile bulunur. Benzer şekilde bir Platonik katının hacmi ise;

$$V = \left(\frac{1}{6}\right) \frac{pql^3}{4 - (p-2)(q-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-p-q}{p+q+2}\right)\right) \quad (5.8)$$

ifadesinden hesaplanabilir. Platonik katının bitişik herhangi iki yüzeyi arasındaki açı  $\phi$  ise;

$$\phi = 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)\right] \quad (5.9)$$

ifadesinden bulunabilir. Merkezi, platonik katının hacimsel orijini olmak üzere, bir Platonik katının tüm köşelerinden geçen kürenin yarıçapı ( ${}_0R$ ), tüm kenarlarından geçen kürenin yarıçapı ( ${}_1R$ ) ve tüm yüzeyleriyle temas halinde olan, katının içine yerleştirilebilecek en büyük kürenin yarıçapı ( ${}_2R$ ) olmak üzere bunlar arasında,

$${}_0R^2 = 4l^2 + {}_1R^2 = 4l^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + {}_2R^2 \quad (5.10)$$

ve

$${}_1R^2 = 4l^2 \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) + {}_2R^2 \quad (5.11)$$

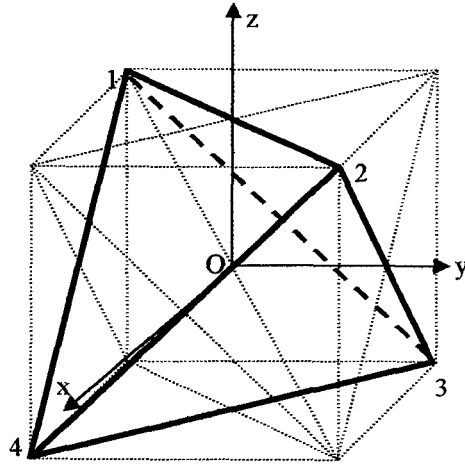
bağıntıları vardır.

Bundan sonraki bölümde ise her bir Platonik katının geometrik özellikleri ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

### 5.2.1.1 Tetrahedron

Platonik katılardan ilki tetrahedrondur. Normalize edilmiş bir tetrahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 5.4'teki gibidir.

Şekil 5.4'ten de görüleceği üzere tetrahedronun Schläfli sembolü  $\{3,3\}$  dür. Normalize edilmiş tetrahedronun bir kenarının uzunluğu  $2\sqrt{2}$  birimdir. Buna göre Eşitlik (5.7)'den tetrahedronun yüzey alanı,



Şekil 5.4 Tetrahedron

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{pql^2}{4-(p-2)(q-2)} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{3.3(2\sqrt{2})^2}{4-(3-2)(3-2)} \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{72}{3} \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong 13,8564 \text{ br}^2
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

olarak bulunur.

Tablo 5.4 Tetrahedronun köşe koordinatları

Köşe numarası	Koordinatı (x;y;z)
1	(-1;-1;1)
2	(1;1;1)
3	(-1;1;-1)
4	(1;-1;-1)

Eşitlik (5.8)'den tetrahedronun hacmi

$$\begin{aligned}
 V &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{pql^3}{4-(p-2)(q-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-p-q}{p+q+2}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{3.3(2\sqrt{2})^3}{4-(3-2)(3-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-3-3}{3+3+2}\right)\right) \\
 &\cong 2,6666 \text{ br}^3
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

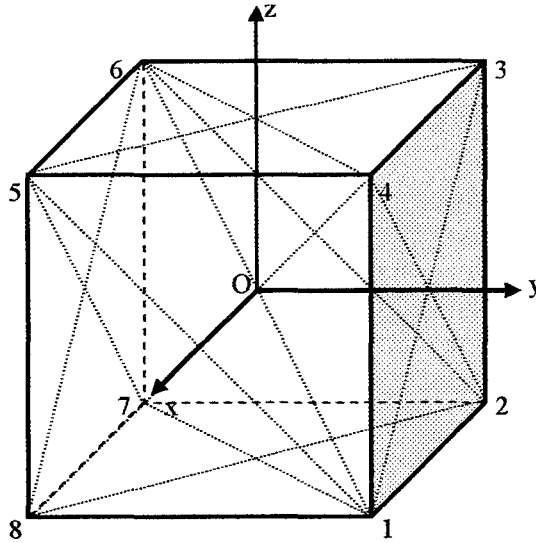
olarak bulunur. Tetrahedronun bitişik herhangi iki yüzeyi arasındaki açı  $\phi$  ise Eşitlik (5.9)'dan;

$$\begin{aligned}
 \phi &= 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)\right] = 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \csc\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
 &\cong 70,52^\circ
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

bulunur.

### 5.2.1.2 Küb

Platonik katılardan ikincisi kübtür. Normalize edilmiş bir kübün Şekil 5.5'de görüldüğü gibi, numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 5.5'teki gibidir. Burada  $a=0,707$  dir.



Şekil 5.5 Küb

Tablo 5.5 Kübün k  e koordinatları

K��e numarası	Koordinatı (x,y;z)
1	(a;a;-a)
2	(-a;a;-a)
3	(-a;a;a)
4	(a;a;a)
5	(a;-a;a)
6	(-a;-a;a)
7	(-a;-a;-a)
8	(a;-a;-a)

Şekil 5.5'ten de görüleceği üzere kübün Schl fli sembolü {4,3} d r. Normalize edilmiş kübün bir kenarının uzunluğu 1,414 birimdir. Buna göre EŞitlik (5.7)'den kübün yüzey alanı,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{pql^2}{4-(p-2)(q-2)} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{4.3(1,414)^2}{4-(4-2)(3-2)} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 12 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong 12 br^2
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

olarak bulunur. EŞitlik (5.8)'den k b n hacmi

$$\begin{aligned}
 V &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{pql^3}{4-(p-2)(q-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-p-q}{p+q+2}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{4.3(1,414)^3}{4-(4-2)(3-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-4-3}{4+3+2}\right)\right) \\
 &\cong 2,827br^3
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

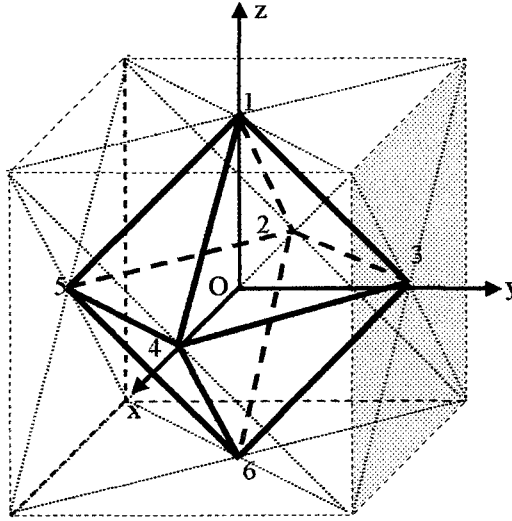
olarak bulunur. K b n bitişik herhangi iki yüzeyi arasındaki açı  $\phi$  ise EŞitlik (5.9)'dan bulunabilir:

$$\begin{aligned}
 \phi &= 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)\right] = 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
 &= 90^\circ
 \end{aligned} \tag{5.17}$$



### 5.2.1.3 Oktahedron

Platonik katılardan üçüncüsü oktahedrondur. Normalize edilmiş bir oktahedronun Şekil 5.6 da görüldüğü gibi, numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 5.6'daki gibidir. Burada  $b=1,414$  dür.



Şekil 5.6 Oktahedron

Tablo 5.6 Oktahedronun köşe koordinatları

Köşe numarası	Koordinatı
1	$(0;0;b)$
2	$(-b;0;0)$
3	$(0;b;0)$
4	$(b;0;0)$
5	$(0;-b;0)$
6	$(0;0;-b)$

Şekil 5.6'dan da görüleceği üzere oktahedronun Schläfli sembolü  $\{3,4\}$  dür. Normalize edilmiş oktahedronun bir kenarının uzunluğu 2 birimdir. Buna göre Eşitlik (5.7)'den oktahedronun yüzey alanı,

$$S = \frac{pql^2}{4-(p-2)(q-2)} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{3.4(2)^2}{4-(3-2)(4-2)} \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (5.18)$$

$$= 24 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong 13,856 \text{ br}^2$$

olarak bulunur. Eşitlik (5.8)'den oktahedronun hacmi

$$V = \left(\frac{1}{6}\right) \frac{pql^3}{4-(p-2)(q-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-p-q}{p+q+2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{3.4(2)^3}{4-(3-2)(4-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-3-4}{3+4+2}\right)\right) \quad (5.19)$$

$$\cong 3,7706 \text{ br}^3$$

olarak bulunur. Oktahedronun bitişik herhangi iki yüzeyi arasındaki açı  $\phi$  ise Eşitlik (5.9)'dan;

$$\phi = 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)\right] = 2\arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \csc\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad (5.20)$$

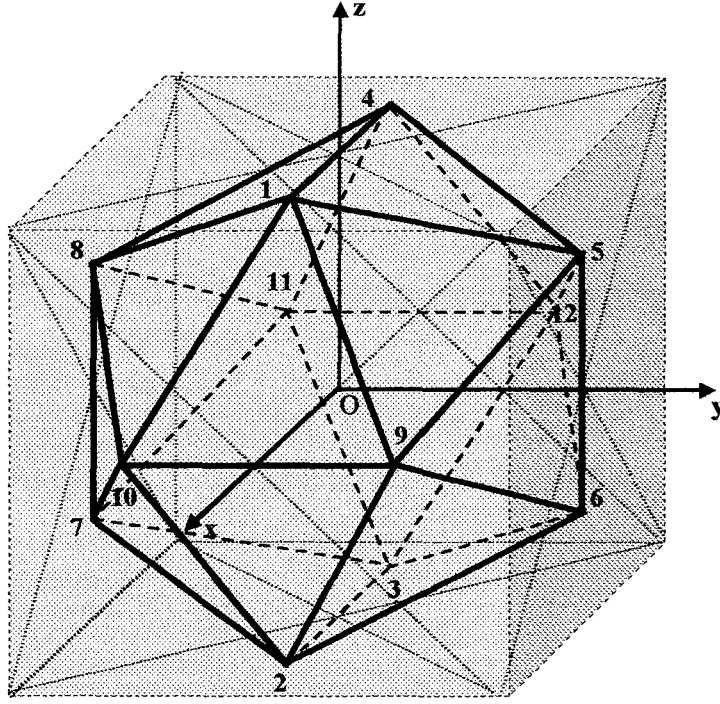
$$\cong 109,47^\circ$$

olarak hesaplanır.

#### 5.2.1.4 İkosahedron

Platonik katılardan dördüncüsü ikosahedrondur. Normalize edilmiş bir ikosahedronun Şekil 5.7'de görüldüğü gibi numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 5.7'deki gibidir. Burada  $c=0,618$  dir.

Şekil 5.7'den de görüleceği üzere ikosahedronun Schläfli sembolü  $\{3,5\}$  dür. Normalize edilmiş ikosahedronun bir kenarının uzunluğu 1,236 birimdir.



Şekil 5.7 İkosahedron

Buna göre Eşitlik (5.7)'den ikosahedronun yüzey alanı,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{pq l^2}{4 - (p-2)(q-2)} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{3.5(1,236)^2}{4 - (3-2)(5-2)} \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 22,915 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong 13,230 \text{ br}^2
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

olarak bulunur. Eşitlik (5.8)'den ikosahedronun hacmi

$$\begin{aligned}
 V &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{pq l^3}{4 - (p-2)(q-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{10-p-q}{p+q+2}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{3.5(1,236)^3}{4 - (3-2)(5-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{10-3-5}{3+5+2}\right)\right) \\
 &\cong 4,1194 \text{ br}^3
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

olarak bulunur.

Tablo 5.7 İkosahedronun köşe koordinatları

Köşe numarası	Koordinatı
1	(c;0;1)
2	(c;0;-1)
3	(-c;0;-1)
4	(-c;0;1)
5	(0;1;c)
6	(0;1;-c)
7	(0;-1;-c)
8	(0;-1;c)
9	(1;c;0)
10	(1;-c;0)
11	(-1;-c;0)
12	(-1;c;0)

İkosahedronun bitişik herhangi iki yüzeyi arasındaki açı  $\phi$  ise Eşitlik (5.9)'dan;

$$\phi = 2\arcsin \left[ \cos \left( \frac{\pi}{q} \right) \csc \left( \frac{\pi}{p} \right) \right] = 2\arcsin \left[ \cos \left( \frac{\pi}{5} \right) \csc \left( \frac{\pi}{3} \right) \right] \quad (5.23)$$

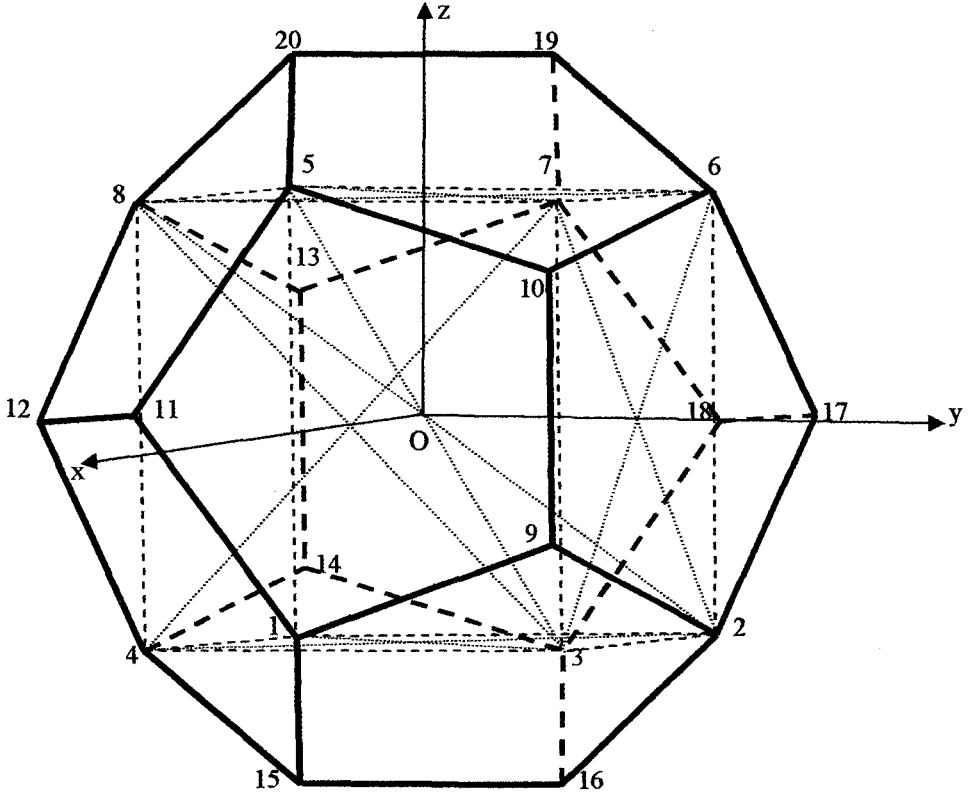
$$\cong 138,183^\circ$$

olarak hesaplanır.

### 5.2.1.5 Dodekahedron

Platonik katılardan beşincisi dodekahedrondur. Normalize edilmiş bir dodekahedronun numaralandırılmış köşelerinin, seçilmiş koordinat sistemine göre koordinatları Tablo 5.8'deki gibidir.

Şekil 5.8 den de görüleceği üzere dodekahedronun Schläfli sembolü  $\{5,3\}$  dür. Normalize edilmiş dodekahedronun bir kenarının uzunluğu 0,764 birimdir.



Şekil 5.8 Dodekahedron

Buna göre Eşitlik (5.7)'den dodekahedronun yüzey alanı,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{pql^2}{4-(p-2)(q-2)} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{5.3(0,764)^2}{4-(5-2)(3-2)} \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) \\
 &= 8,754 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) \cong 12,0488 \text{ br}^2
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

olarak bulunur. Eşitlik (5.8)'den dodekahedronun hacmi

$$\begin{aligned}
 V &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{pql^3}{4-(p-2)(q-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-p-q}{p+q+2}\right)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right) \frac{5.3(0,764)^3}{4-(5-2)(3-2)} \cot^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \csc\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{10-5-3}{5+3+2}\right)\right) \\
 &\cong 3,4172 \text{ br}^3
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

olarak bulunur.

Tablo 5.8 Dodekahedronun köşe koordinatları

Köşe numarası	Koordinatı
1	(0,618; 0,618; -0,618)
2	(-0,618; 0,618; -0,618)
3	(-0,618; -0,618; -0,618)
4	(0,618; -0,618; -0,618)
5	(0,618; 0,618; 0,618)
6	(-0,618; 0,618; 0,618)
7	(-0,618; -0,618; 0,618)
8	(0,618; -0,618; 0,618)
9	(0; 1; -0,382)
10	(0; 1; 0,382)
11	(1; 0,382; 0)
12	(1; -0,382; 0)
13	(0; -1; 0,382)
14	(0; -1; -0,382)
15	(0,382; 0; -1)
16	(-0,382; 0; -1)
17	(-1; 0,382; 0)
18	(-1; -0,382; 0)
19	(-0,382; 0; 1)
20	(0,382; 0; 1)

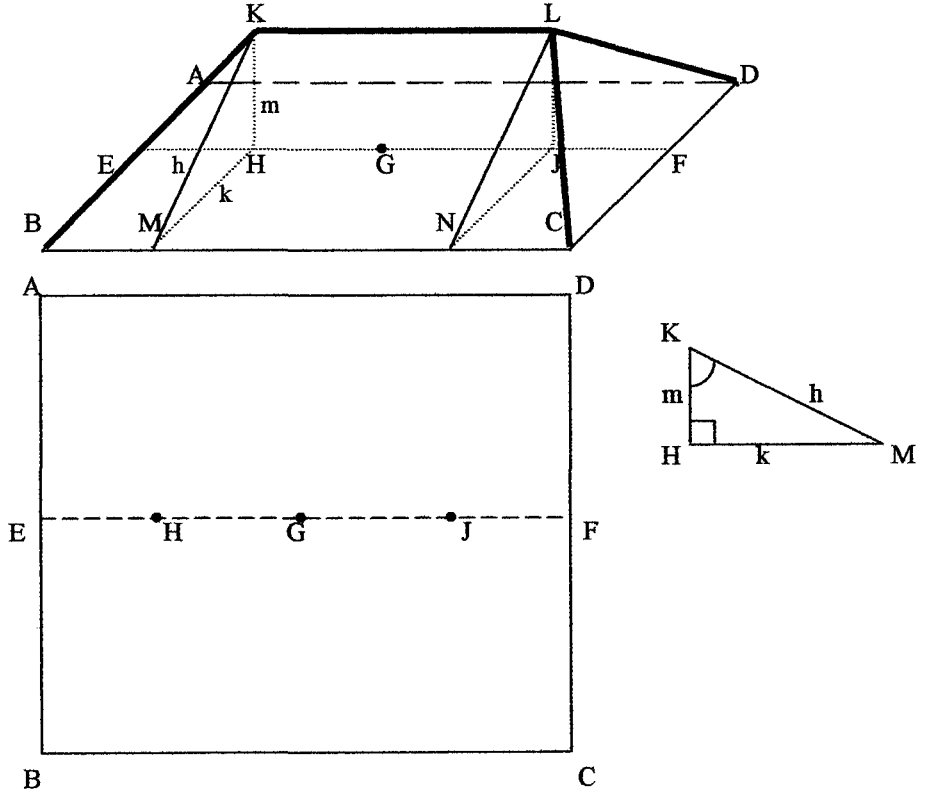
Dodekahedronun bitişik herhangi iki yüzeyi arasındaki açı  $\phi$  ise Eşitlik (5.9)'dan;

$$\phi = 2\arcsin \left[ \cos \left( \frac{\pi}{q} \right) \csc \left( \frac{\pi}{p} \right) \right] = 2\arcsin \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) \csc \left( \frac{\pi}{5} \right) \right] \quad (5.26)$$

$$\cong 116,565^\circ$$

olarak hesaplanır.

5; 6; 7; 8; 19; 20 nolu köşelerin sınırladığı hacimdeki geometrik hesaplamalar oldukça önemlidir. Burada geçerli olan bağıntıların temelinde altın oran vardır [17]. Dodekahedronun bu kısmı Şekil 5.9 da görülebilir. Buradaki köşeler gösterim kolaylığı için yeniden adlandırılmıştır:



Şekil 5.9 Dodekahedronda altın oran

- i. Şekil 5.9'da E noktası  $|AB|$  doğru parçasının, F noktası da  $|CD|$  doğru parçasının orta noktasıdır.
- ii. G noktası  $|EF|$  doğru parçasının orta noktasıdır.
- iii. H ve J noktalarının yerini tespit etmek için altın orandan yararlanılır.  $|GH|$  ve  $|GJ|$  uzun kısımlardır.
- iv. ABCD kare yüzeyine dik  $|KH|$  doğru parçası ve benzer şekilde  $|LJ|$  doğru parçası çizilir:  $|KH|=|LJ|=|GH|=|GJ|$
- v.  $|HM|$  doğru parçası  $|EF|$  ye diktir. k uzunluğu  $|AB|$  nin yarısıdır.

vi. Altın oran yaklaşımıyla,  $\frac{1,618}{k} = \frac{1}{m}$  dir. Ve  $k^2 + m^2 = h^2$  eşitliği vardır. Dolayısıyla  $\tilde{K} = \frac{m}{h}$  ifadesi yazılabilir.



## 6. PLATONİK KATILARIN SİMETRİ GRUBU

Platonik katıların simetri gruplarının incelenmesinden önce, grup kavramı ele alınacaktır. Bu tanımlamalardan sonra, her bir Platonik katının simetri gruplarının özellikleri incelenecektir.

### 6.1 Grup Kavramı

Belirli bir sonlu veya sonsuz  $G$  kümesinin verilmiş olduğu varsayılırsa, bu  $G$  kümesinin elemanları  $a$  ve  $b$  kabul edilsin. Bu iki elemanın toplamı olan ve  $a+b$  ile gösterilen,  $G$  nin belirli bir üçüncü elemanı tanımlanmış olsun. Bu toplama operasyonunun aşağıdaki şartları gerçeklemesi gerekir:

- i.* birleşme özelliği
- ii.* değişme özelliği
- iii.* verilen bir elemanın tersinin var olması şartı
- iv.* birim elemanın varlığı şartı

Bu koşullar gerçekleşiyorsa  $G$  ye değişimli grup (abelyen grup) adı verilir.

Sonlu sayıda elemandan oluşan gruba sonlu grup, aksi halde sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanları sayısına grubun mertebesi adı verilir[14].

### 6.2 Permütasyon Grup Kavramı

Tamamıyla keyfi şeylerin permütasyonundan söz edilebilir. Sıraları değiştirilen şeylerin yerine rakamlar yazılabilir. Bu durumda rakamların permütasyonundan söz edilebilir. 1, 2, 3 rakamları ile aşağıdaki permütasyonlar elde edilebilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

İlk  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  permütasyonuna birim (idantik) permütasyon denir. İki permütasyonu toplamak, bunların önce birincisini, sonra ikincisini birbiri

ardına uygulamak anlamına gelir. Bu toplamların sonuçlarını kolayca yazabilmek için aşağıdaki gösterimler kullanılabilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Bu gösterimden yararlanarak Tablo 6.1 oluşturulabilir.

Tablo 6.1  $S_3$  grubunun toplama operasyonu tablosu

	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_4$
$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_3$
$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_2$
$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_1$
$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_0$

Bu üç elemanın permütasyonları bir grup oluşturur. Bu grubu  $S_3$  ile gösterebiliriz. Bu grup değişimli değildir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_5 \\ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1 \end{aligned}$$

### 6.3 Alt Grup Kavramı

$\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{A}_1$  elemanlarını göz önüne alalım. Tablo 6.1'den

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere tüm grup aksiyomları gerçekleşmektedir.  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{A}_1$  bir grup oluşturur. Bu grup üç rakamın tüm permütasyonları grubunun bir kısmıdır.  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{A}_5$  çiftlerinin de bir grup olduğu aynı şekilde görülür.  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{A}_2$  çifti grup oluşturmazlar.  $\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4$  olduğundan grubun elemanı değildir.

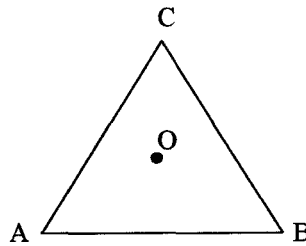
Bir  $G$  grubu verilmiş ise, bu  $G$  grubunun bazı elemanlarından oluşan  $H$  cümlesi,  $G$  için geçerli olan toplam kurallarına göre bir grup ise,  $H$ 'ye  $G$  grubunun alt grubu denir. Buna göre,  $(A_0;A_1)$ ,  $(A_0;A_2)$ ,  $(A_0;A_5)$ , eleman çiftlerinden her biri  $S_3$  grubunun mertebesi 2 olan alt grubudur.  $S_3$  grubunun mertebesi 2 olan başka alt grubu yoktur.  $G$  grubunun her alt grubu, grubun tanımına göre,  $G$  nin birim elemanını içermelidir. Bununla birlikte  $S_3$  grubunun ikinci mertebeden her alt grubu,  $(A_0;A_i)$ , biçimindedir. Burada  $i$  sayısı 1, 2, 3, 4, 5 değerlerini alabilir. Fakat bu örnek için  $i$  3 ve 4 olamaz. Bundan dolayı  $(A_0;A_1)$ ,  $(A_0;A_2)$ ,  $(A_0;A_5)$  alt grupları tanımlıdır. Ayrıca  $S_3$  grubunun üç elemanından oluşan ve mertebesi 3 olan  $(A_0;A_3;A_4)$  alt grubu vardır.

Tüm bu gruplarda toplam kuralları aynıdır.  $n$  tane rakamın iki permütasyonunu bulmak, bunları birbiri ardından soldan sağa doğru sırasıyla uygulamak demektir.

$n$  tane elemanın tüm permütasyonlarının oluşturduğu  $S_n$  grubuna,  $n$  elemanın permütasyonlarının simetrik grubu da denilir.  $S_n$  grubunun her alt grubuna permütasyon grubu adı verilir.

## 6.4 İzomorf Gruplar

Şekil 6.1'de görüldüğü gibi bir eşkenar üçgenin  $O$  orijini etrafındaki tüm mümkün devirleri incelenebilir.



Şekil 6.1 Eşkenar üçgen

Üçgenin mümkün olan tüm devirlerinden sadece üç tanesinin üçgeni kendi kendisine dönüştürdüğü görülebilir. Bunlar  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  ve  $360^\circ$ (idantik) devirlerdir.  $360^\circ$  lik( ya da sıfır) dönme operasyonu  $r_0$ ,  $120^\circ$

lik dönme operasyonu  $\mathbf{r}_1$ ,  $240^\circ$  lik dönme operasyonu  $\mathbf{r}_2$  ile temsil edildiğinde;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0 \\
 \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 \\
 \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2 \\
 \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 \\
 \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 \\
 \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

bağıntıları yazılabilir. Tablo 6.2’de operasyonların ardışık uygulanması ile ilgili kuralları göstermektedir. Bu operasyonların oluşturduğu gruba  $\mathbf{R}_3$  grubu adı verilsin.

Tablo 6.2  $\mathbf{R}_3$  grubu

	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$
$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$
$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_0$
$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_1$

Öte yandan üç rakamın tüm permütasyonları grubunun ( $\mathbf{A}_0 ; \mathbf{A}_3 ; \mathbf{A}_4$ ) alt grubunu ele alalım.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0 &\leftrightarrow \mathbf{r}_0 \\
 \mathbf{a}_1 &\leftrightarrow \mathbf{r}_1 \\
 \mathbf{a}_2 &\leftrightarrow \mathbf{r}_2
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

kabul edelim. Her iki gruba da aynı operasyonlar uygulandığında, yine birbirine karşı gelen elemanlar elde ediliyorsa bu iki grup birbirine *izomorfdur* denir. Elemanlarının uygun şekilde gösterilmesi sonucunda, toplam tabloları birbirine karşı gelen gruplara izomorf gruplar adı verilir.

## 6.5 Bir Grubun Devirli Alt Grupları

a bir  $\mathbf{G}$  grubunun keyfi bir elemanı olsun. Bu eleman kendisine ilave edildiğinde, yani  $a+a$  elemanı,  $2a$  ile gösterilebilir. Bu a’nın iki katı anlamında değil, sadece bir gösterimdir. Aynı şekilde  $a+a+a$  da,  $3a$  biçiminde gösterilebilir. Bu gösterim genel olarak

$$\underbrace{a+a+\dots+a}_n = na \quad (6.6)$$

şeklindedir. Aynı grubun  $-a$  elemanı göz önüne alındığında ise

$$\underbrace{(-a)+(-a)+\dots+(-a)}_n = -na \quad (6.7)$$

biçiminde temsil edilebilir.

Bir  $G$  grubunun  $n$  tamsayı olmak üzere,  $na$  şeklinde gösterilen elemanlarından oluşmuş  $H(a)$  cümlesi,  $G$  grubu dahilinde tanımlanmış olan toplama operasyonuna göre bir  $H(a)$  alt grubunu oluşturur.

$H(a)$  alt grubu,  $G$  grubunun  $ma$  şeklinde gösterilen tüm elemanlarından oluşmuş bir grup olarak tanımlansın. Bu grupta  $m_1 \neq m_2$  olmak üzere

$$(m_2 - m_1)a = 0 \quad (6.8)$$

ve

$$ma = 0 \quad (6.9)$$

şartını sağlayan bir  $m$  sayısı olsun. Tüm tam sayılar içerisinde  $m$  nin en küçük değeri  $\alpha$  ile gösterilsin. Bu durumda  $H(a)$  alt grubu  $\alpha$  tane,

$$0, a, 2a, \dots, (\alpha-1)a \quad (6.10)$$

elemanlarından oluşur.  $\alpha a = 0$  olmak üzere,

$$\dots, -ma, \dots, -a, 0, a, \dots, ma, \dots \quad (6.11)$$

dizisi kendisini sağa ve sola doğru sonsuz kez tekrar eder.

Düzgün bir  $\alpha$  köşeli ( $\alpha$  -kenarlı,  $\alpha$  -gen) ele alındığında, bu çokgenin bir kenarına karşı gelen merkez açısı,

$$\phi = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (6.12)$$

dır. Çokgen  $0, \phi, 2\phi, \dots, (\alpha-1)\phi$  açıları kadar devirlerinin her biri sonunda kendi kendisiyle çakışır. Aralarındaki fark  $360^\circ$  nin bir tam katı devirlere aynı devir gibi bakılabilir.

Çokgenin  $m\phi$  açısı kadar devrine  $H(a)$  grubunun  $m\alpha$  elemanı karşı geldiği taktirde,  $H(a)$  grubunun düzgün  $\alpha$  köşelinin devirleri grubu üzerine izomorf bir temsiline elde edildiği söylenebilir. Düzgün çokgenin devirleri grubuna izomorf olan gruplara *sonlu devirli gruplar* adı verilir.

Tablo 6.3'te mertebesi  $m$  olan devirli grup için, toplam tablosu verilmiştir.

Tablo 6.3 Devirli grubun toplam tablosu

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{m-1}$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{m-1}$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_0$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	...	$a_1$
$a_3$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	...	$a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{m-3}$	$a_{m-3}$	$a_{m-2}$	$a_{m-1}$	$a_0$	...	$a_{m-4}$
$a_{m-2}$	$a_{m-2}$	$a_{m-1}$	$a_0$	$a_1$	...	$a_{m-3}$
$a_{m-1}$	$a_{m-1}$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{m-2}$

Tam sayılar grubuna izomorf olan gruplara *sonsuz devirli gruplar* adı verilir.

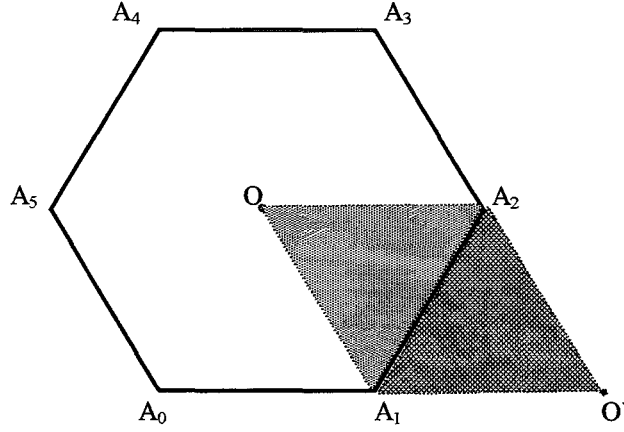
## 6.6 Temel Hareket Grupları

Geometrik şekillerin kongruans (congruous) grupları sonlu ve sonsuz gruplar içeren çok geniş ve çok önemli bir gruplar sınıfı oluştururlar. Verilen bir  $F$  geometrik şeklinin, uzayda veya düzlemde  $F$ 'yi kendine dönüştüren hareketine  $F$  geometrik şeklinin kongruansı denir.

Şekil 6.2'de görüldüğü gibi düzlemde bir altıgen için, çokgenin kendi kendisine dönüştüren hareketi incelenebilir.

Bir dönme operasyonu sonucu  $A_0$  köşesi  $A_k$  köşesine dönüşsün. Bu durumda  $A_0A_1$  kenarı,  $A_kA_{k+1}$  ya da  $A_kA_{k-1}$  kenarına dönüşür. Saat ibrelerinin hareket yönünün tersi pozitif yön kabul edildiğinden, bu kabule göre  $A_kA_{k+1}$  olmalıdır. Benzer şekilde  $A_1A_2$  kenarı,  $A_{k+1}A_{k+2}$  ye,  $A_2A_3$  kenarı da,  $A_{k+2}A_{k+3}$ 'e dönüşür.

Düzgün bir  $n$ -köşelinin kendi düzleminde her kongruansı, bu çokgenin  $k\frac{2\pi}{n}$  açısı kadar dönme operasyonu ile mümkündür. Bu ifadedeki



Şekil 6.2 Altıgen

$k$  bir tamsayıdır ve bu kongruanslardan  $n$  tane vardır ve bu dönme operasyonları bir grup oluşturur.

### 6.6.1 Düzgün Bir Çokgenin 3-boyutlu Uzaydaki Kongruansları

Bir  $n$ -köşelinin uzaydaki kongruanslarının incelenmesi için, düzlemdeki kongruanslarına ek olarak çokgenlerin çevirimleri ya da alt-üst edilmelerinin (kendi simetri eksenleri etrafında  $180^\circ$ 'lik dönme operasyonları) dikkate alınması gerekir. Düzgün bir  $n$ -köşelinin  $n$  tane simetri eksenleri vardır. Bunlar  $n$  çift sayı ise, karşılıklı köşe noktaları çiftini birleştiren  $\frac{n}{2}$  tane doğru ile, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren  $\frac{n}{2}$  tane doğru simetri eksenleridir.  $n$  tek sayı ise, bir köşe noktasının karşısındaki kenarı ortalamaya birleştiren doğrular  $n$  tane simetri eksenini oluşturur. Bu  $n$  tane devir ile birlikte,  $n$  tane çevirimin düzgün bir  $n$ -köşelinin tüm kongruanslarını, yani uzayda çokgeni kendi kendisine dönüştüren tüm hareketleri gerçekleştirirler.

### 6.6.1.1 Verilen bir Geometrik Şeklin Uzayda veya Düzlemde Kongruansları Grubunun Genel Tanımı

Uzayda veya düzlemde bir  $F$  şeklinin  $g_1$  ve  $g_2$  kongruansları ele alındığında,

- i.*  $g_1+g_2$  kongruansı,  $g_1$  ve  $g_2$  nin ardışık olarak uygulanması ile elde edilir.
- ii.*  $g_1+g_2$  de  $F$  şeklinin kongruansıdır.
- iii.*  $F$  şeklinin tüm kongruansları ardışık dönme operasyonlarına göre (toplama), bir grup oluştururlar.
- iv.* Ardışık kongruanslar kendi aralarında birleşimlidir.
- v.* Kongruanslar cümlesinde sıfır ya da idantik kongruans vardır Bu şeklin her noktasını sabit bırakan harekettir. Diğer bir deyişle hareketsizliktir.
- vi.* Her  $g$  kongruansının bir tersi ( $-g$ ) kongruans vardır.

### 6.6.1.2 Doğrunun, Dairenin ve Düzlemin Hareket Grubu

Bir düzlemden geçen herhangi bir doğrunun kongruansları grubu ele alındığında, bu kongruans grubunun, doğrunun kendi üzerinde kaymalarından ve üzerindeki herhangi bir noktası etrafında  $180^\circ$  lik dönme operasyonlarından oluştuğu görülür.

Doğrunun kendi üzerindeki kaymaları tüm kongruans grubunun alt grubunu oluşturur. Bu kaymalar doğrunun kendi üzerindeki tek harekettir. Doğrunun kendi üzerinde her kaymasına uzunluğunu ve yönünü belirten bir reel sayı karşı gelir Bu nedenle, bu alt grup reel sayılar grubuna izomorftur.

İkinci bir uygulama olarak, bir dairenin kendi düzlemi içindeki tüm kongruansları grubu ele alındığında ise, bu grubun dairenin kendi düzlemi içinde ve kendi merkezi etrafında mümkün olan tüm devirlerinden oluştuğu görülür.  $2\pi$  nin tam katlarına eşit açılar kadar devirlerine idantik devirler denir.



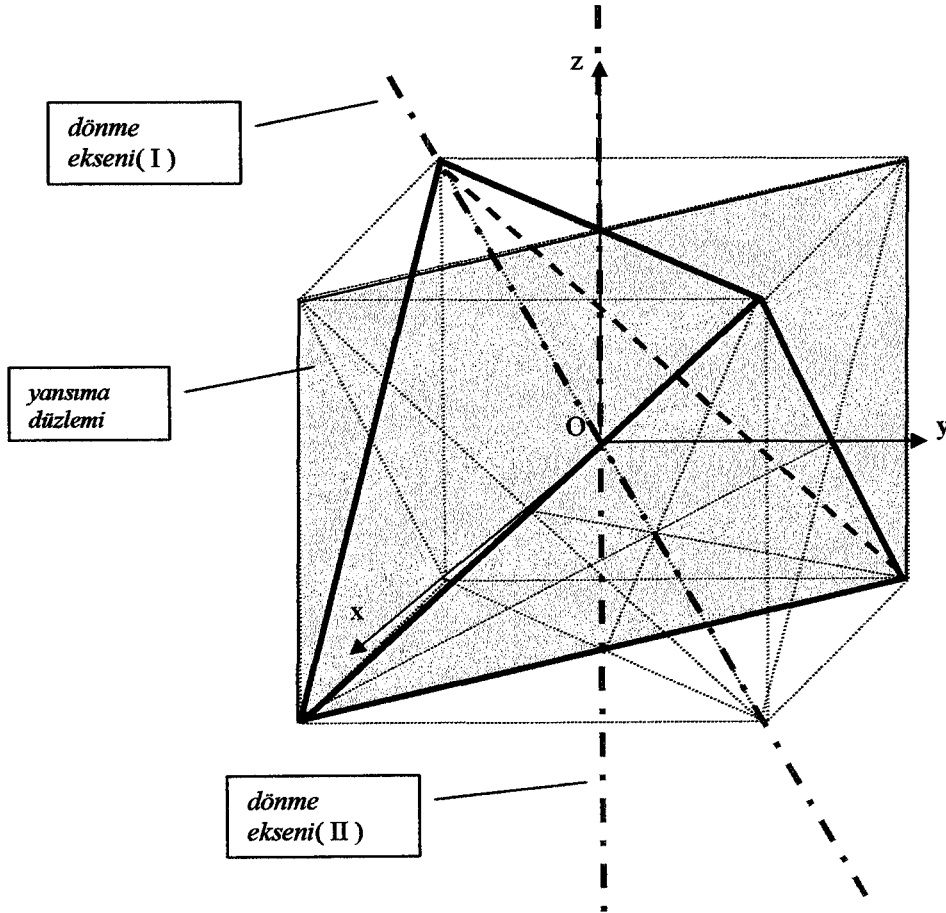
Bir düzlemin keyfi iki paralel kayma hareketinin toplamı, düzlemin yine bir paralel kaymasıdır ve bu iki kaymanın sırasına bağlı değildir. Düzlemin mümkün olan tüm doğrular boyunca, tüm paralel kaymalarının tamamı, kendi üzerindeki hareketleri grubunun, değişimli bir alt grubudur.

## 6.7 Platonik Katıların Simetri Grupları

Bu bölümde Platonik katıların her biri için simetri grupları incelenecektir.

### 6.7.1 Tetrahedronun Simetri Grubu

Tetrahedronun simetri grubunu  $S(T)$  ile gösterebiliriz. Bu grup bir yansıma, iki farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonlar nedeni ile,  $S_4$  simetri grubuna izomorftur.



Şekil 6.3 Tetrahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Tablo 6.4 Tetrahedronun yansıma operasyonları

Tetrahedron	Tanımlama	Sayısı
yansıma	Karşılıklı yüzeyler arasındaki kenar boyunca	6

Tetrahedronun bir tür yansıma düzlemi, iki tür de dönme ekseni vardır. Şekil 6.3'te dönme ekseni türlerine ve yansıma düzlemi türüne birer örnek çizilmiştir. Tüm yansıma düzlemleri ve dönme eksenleri çizildiğinde şekiller anlaşılabilir olacağından, böyle bir yöntem tercih edilmiştir. Tablo 6.4 ve 6.5'te ise tetrahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

Tablo 6.5 Tetrahedronun dönme operasyonları

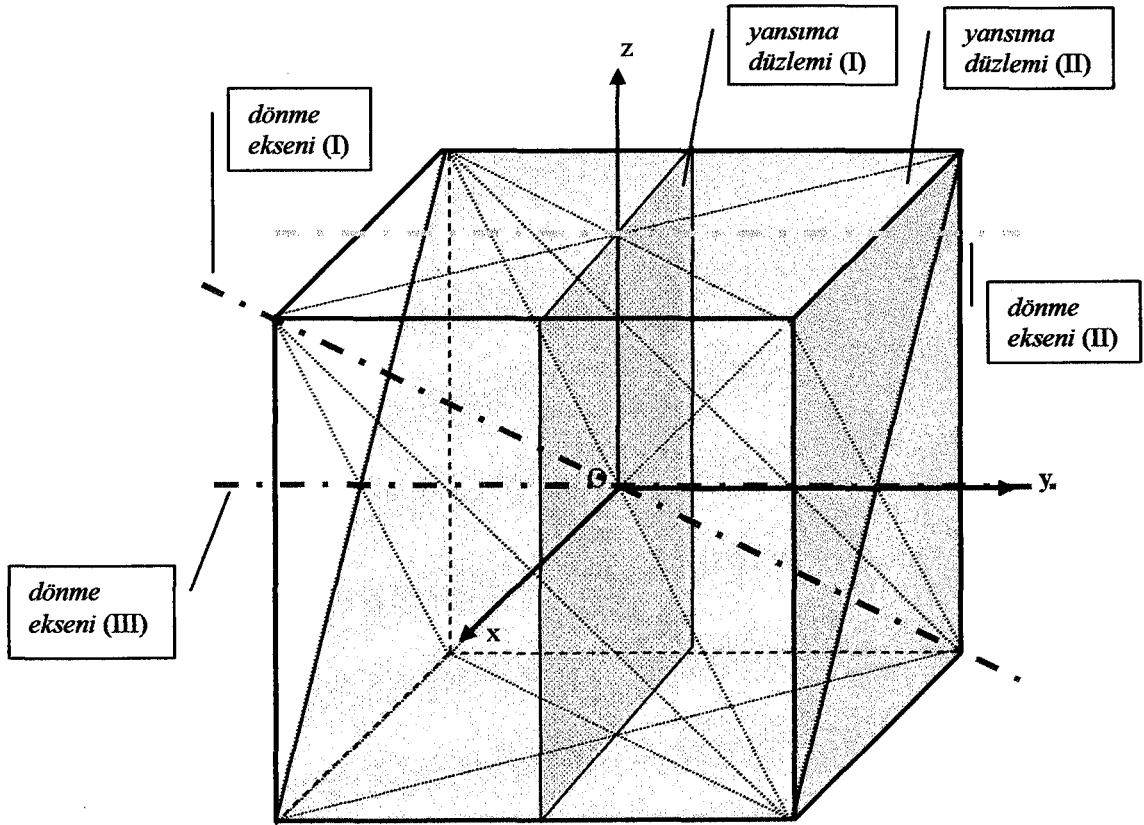
Tetrahedron	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (dönme ekseni-I)	Her bir köşeyi, karşısındaki yüzeyin merkezine birleştiren eksen	4	3
dönme operasyonu (dönme ekseni-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	3	2

Diğer tüm Platonik katılar da kendi hacim merkezleri etrafında simetriktirler.  $S(X)$  simetri grubu,  $S_a(X) \times \langle J \rangle$  direkt çarpımına izomorftur. Bu ifadede X herhangi bir Platonik katıyı,  $S_a(X)$  direkt simetri altgrubunu, daha başka bir deyişle, dönme operasyonlarının oluşturduğu altgrubu,  $\langle J \rangle$  ise yansıma operasyonlarının oluşturduğu altgrubu ifade eder.

## 6.7.2 Kübün Simetri Grubu

Kübün simetri grubunu  $S(K)$  ile gösterebiliriz. Bu grup iki farklı yansımaya,  c farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonları nedeni ile,  $S_d(K) \times \langle J \rangle$  simetri grubuna izomorftur.

Kübün iki tür yansımaya düzlemi,  c tür de dönme eksenine sahiptir. Şekil 6.4'te dönme eksenine türlerine ve yansımaya düzlemi türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 6.6 ve 6.7'de ise k be ait yansımaya ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.



Şekil 6.4 Kübün yansımaya ve dönme eksenleri

Tablo 6.6 Kübün yansma operasyonları

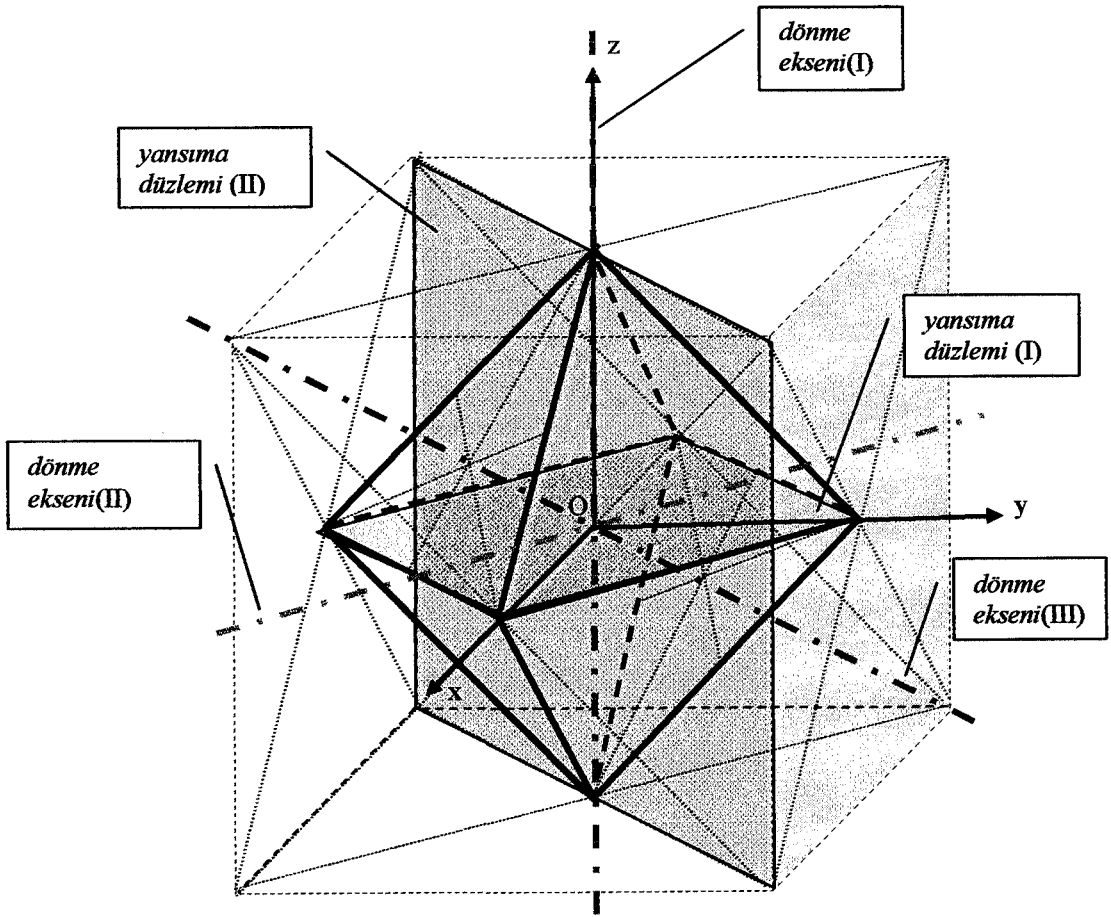
K�b	Tanımlama	Sayısı
Yansma(I)	Karşılıklı dört yüzeyin kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu yüzeyler	3
Yansma(II)	Birbirine dik yüzeylerin, komşu olmayan kenarlarını birleştiren yüzeyler	6

Tablo 6.7 Kübün dönme operasyonları

K�b	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (yansma eksen-i- I)	Karşılıklı köşeleri birleştiren eksen	3	4
dönme operasyonu (yansma eksen-i- II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	6	2
dönme operasyonu (yansma eksen-i- III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3

### 6.7.3 Oktahedronun Simetri Grubu

Oktahedronun simetri grubunu  $S(O)$  ile gösterebiliriz. Bu grup iki farklı yansıma, üç farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonları nedeni ile,  $S_a(C) \times \langle J \rangle$  simetri grubuna izomorftur. Küb ve oktahedron birbirlerinin duali olduğundan, simetri grupları aynıdır.



Şekil 6.5 Oktahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Tablo 6.8 Oktahedronun yansıma operasyonları

Oktahedron	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Hacim merkezindeki dörtgenlerin oluşturduğu düzlem	3
Yansıma(II)	Karşılıklı dört yüzün alt ve üstteki buluştukları noktalar ile, ortadaki dörtgenin kenar orta noktalarının oluşturdukları düzlem	6

Oktahedronun iki tür yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenidir. Şekil 6.5'te dönme eksenleri türlerine ve yansıma düzlemi türüne birer örnek çizilmiştir. Tablo 6.8 ve 6.9'da ise oktahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.

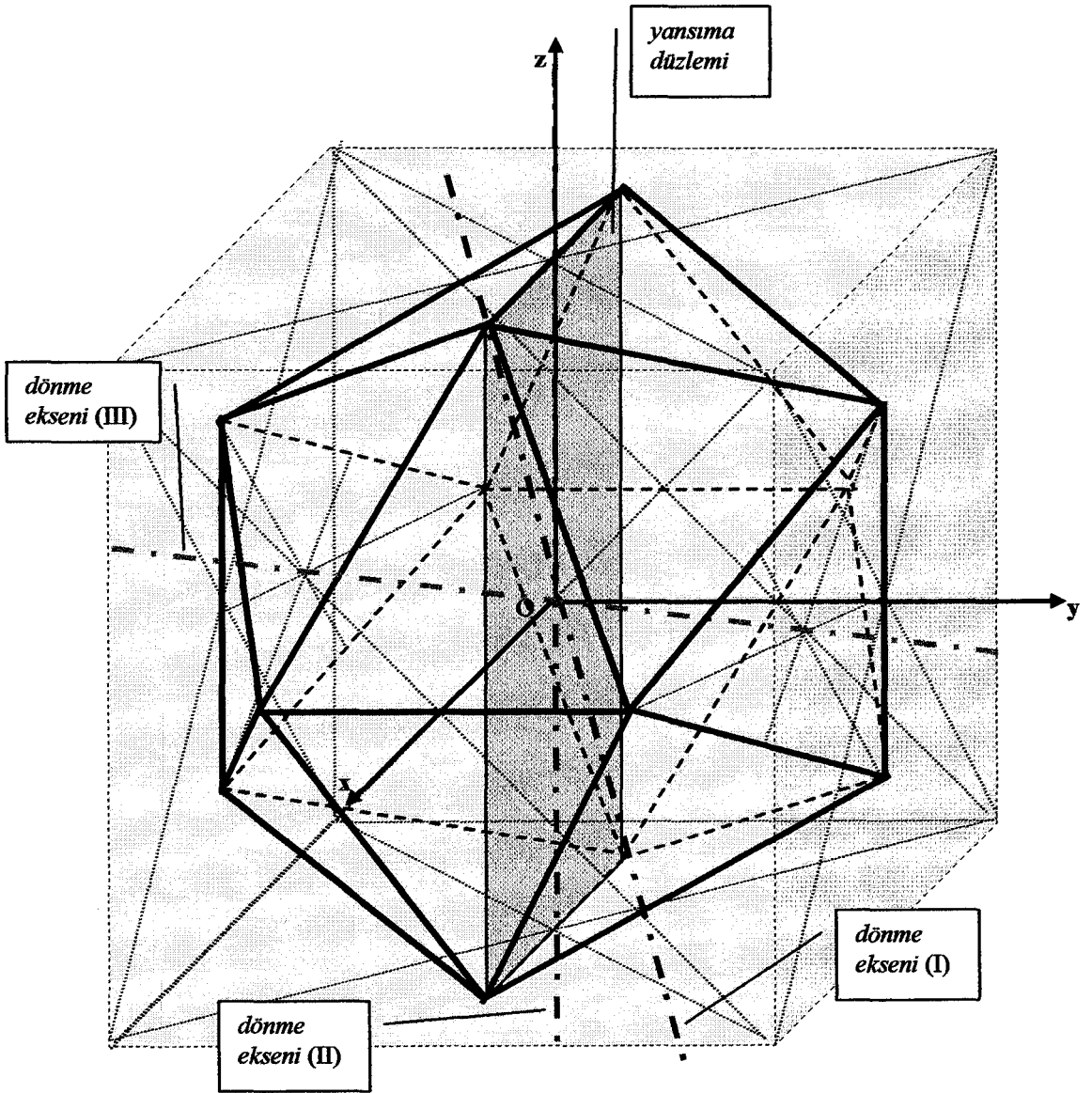
Tablo 6.9 Oktahedronun dönme operasyonları

Oktahedron	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (yansıma eksen-i I)	Karşılıklı köşeleri birleştiren eksen	3	4
dönme operasyonu (yansıma eksen-i II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	6	2
dönme operasyonu (yansıma eksen-i III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	4	3

### 6.7.4 İkosahedronun Simetri Grubu

İkosahedronun simetri grubunu  $S(\mathbb{I})$  ile gösterebiliriz. Bu grup bir yansıma, üç farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonları nedeni ile,  $S_d(\mathbb{I}) \cong A_5$  olduğundan,  $S_d(\mathbb{I}) \cong A_5 \times \langle J \rangle$  simetri grubuna izomorftur.

İkosahedronun bir yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenleri vardır. Şekil 6.6'da yansıma düzlemi ve dönme eksenleri türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 6.10 ve 6.11'de ise ikosahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.



Şekil 6.6 İkosahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Tablo 6.10 İkosahedronun yansıma operasyonları

İkosahedron	Tanımlama	Sayısı
Yansıma(I)	Karşılıklı dört yüzden, komşu iki yüzün ortak kenarının, karşı komşu iki yüzün ortak kenarı arasındaki yüzey	15

Tablo 6.11 İkosahedronun dönme operasyonları

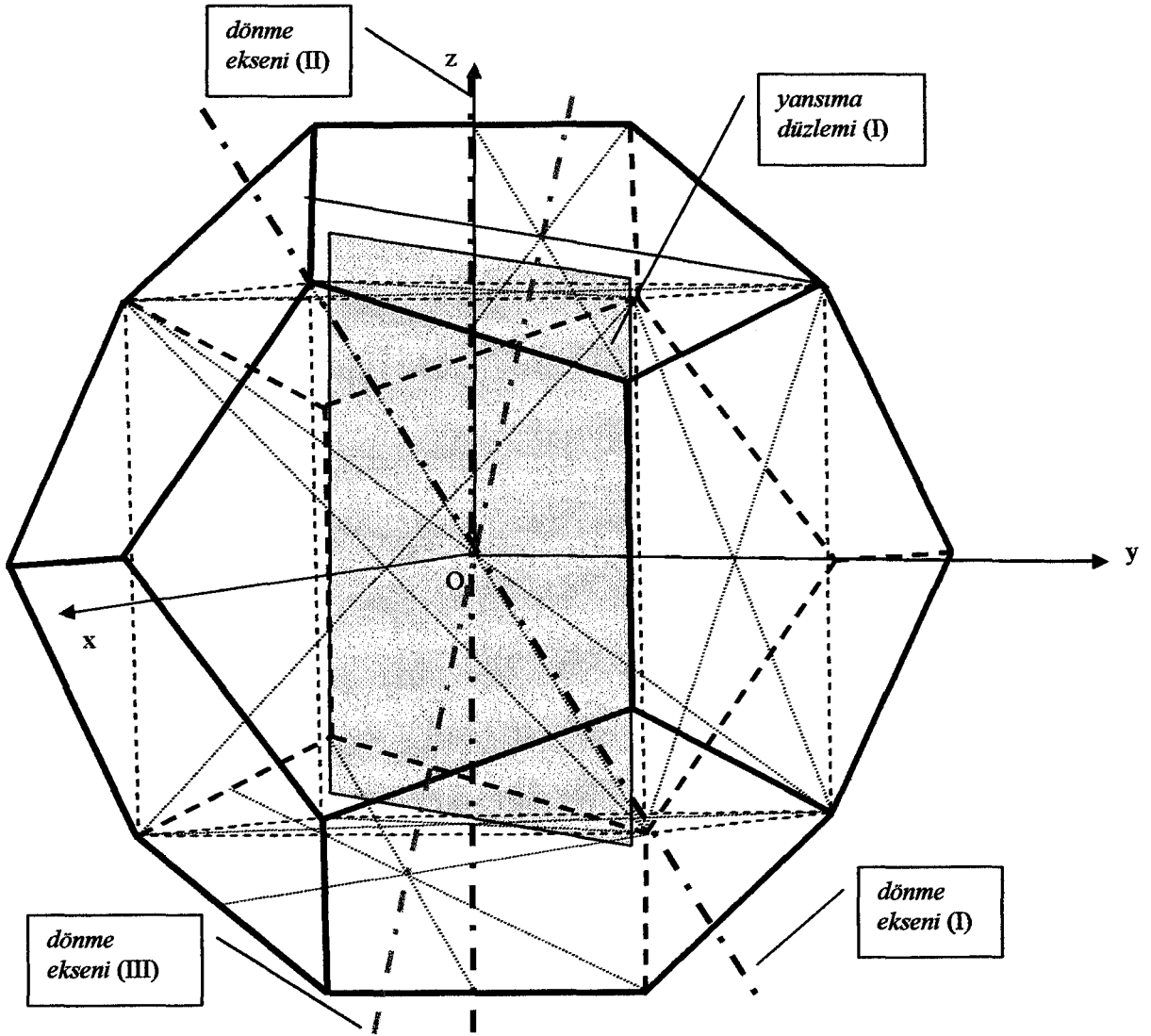
İkosahedron	Tanımlama	Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı	Tekrar sayısı
dönme operasyonu (yansıma eksen-i I)	Karşılıklı köşeleri birleştiren eksen	6	5
dönme operasyonu (yansıma eksen-i II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (yansıma eksen-i III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	10	3

### 6.7.5 Dodekahedronun Simetri Grubu

Dodekahedronun simetri grubunu  $S(D)$  ile gösterebiliriz. Dodekahedronla ikosahedron, birbirinin duali olduğundan, aynı simetri grubuna sahiptir. Dolayısıyla  $S(D)=S(\dot{I})$  dir. Bu grup bir yansıma, üç farklı eksen etrafında dönme ve idantik operasyonları nedeni ile,  $S_d(D) \cong A_5$  olduğundan,  $S_d(D) \cong A_5 \times \langle J \rangle$  simetri grubuna izomorftur.



Dodekahedronun bir yansıma düzlemi, üç tür de dönme eksenleri vardır. Şekil 6.7’de yansıma düzlemi ve dönme eksenleri türlerine birer örnek çizilmiştir. Tablo 6.12 ve 6.13’te ise dodekahedrona ait yansıma ve dönme eksenleri hakkında daha geniş açıklama yapılmıştır.



Şekil 6.7 Dodekahedronun yansıma ve dönme eksenleri

Tablo 6.12 Dodekahedronun yansıma operasyonları

<b>Dodekahedron</b>	<b>Tanımlama</b>	<b>Sayısı</b>
Yansıma(I)	Karşılıklı dört yüzden, komşu iki yüzün ortak kenarının, karşı komşu iki yüzün ortak kenarı arasındaki yüzey	15

Tablo 6.13 Dodekahedronun dönme operasyonları

<b>Dodekahedron</b>	<b>Tanımlama</b>	<b>Tanımlamanın uygulanacağı köşe sayısı</b>	<b>Tekrar sayısı</b>
dönme operasyonu (yansıma eksen-i-I)	Karşılıklı köşeleri birleştiren eksen	10	3
dönme operasyonu (yansıma eksen-i-II)	Bir kenarın orta noktasını, karşı kenarın orta noktasına birleştiren eksen	15	2
dönme operasyonu (yansıma eksen-i-III)	Bir yüzeyin orta noktasını, karşı yüzeyin orta noktasına birleştiren eksen	6	5

## 7. PLATONİK KATILARIN SİMETRİ OPERASYONLARININ CLIFFORD CEBİRİYLE İNCELENMESİ

Platonik katıların simetri operasyonlarının ifadesi, molekül fiziği, kristalografi ve katıhal fiziği için oldukça önemlidir. Molekül yapıların tanımlanması ve buradaki operasyonlar sonucundaki yapının yeni konumu ve bu ifadeler yardımıyla diğer fiziksel büyüklüklerin hesaplanması için operasyonların en kısa ve doğru metotla temsil edilmesi ve hesaplanabilmesi gerekir. Bu tezde, bu amacın Clifford cebiriyle de gerçekleştirildiği ortaya konulmuştur.

Bu tezde öne sürülen metot, bilinen matris metotlarından daha kısa ve daha işlevseldir. Bu bölümde Platonik katılar için bu işlevsellik ortaya konacak ve yapılan hesaplamalarla her bir katı için ispatlanacaktır.

### 7.1 Tetrahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi

Model olarak her bir katının 6. Bölüm'de gösterilen bir yansıma ve bir dönme operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer yansıma ve dönme operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- i. Şekil 6.3 ve Tablo 6.4'ten tetrahedronun yansıma operasyonu için yansıma düzleminin, karşılıklı yüzeyler arasındaki kenar boyunca olduğu görülebilir. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $\mathbf{Y}_t$  çokluvektörü ile gösterilebilir. Ancak burada ilginç bir durum söz konusudur. Yansıma düzlemi için:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_t &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 \\ &= \underbrace{(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}_{\text{bir noktaya karşı gelir}}\mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{7.1}$$

bulunur. Dolayısıyla yansıma düzlemi yerine  $e_3$  yazılır. Örneğin Tablo 5.4'ten 2 nolu köşenin  $\mathbf{Y}_t$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (4.55)'ten

$$\vec{R}' = \mathbf{Y}_t(\vec{R}_2)\mathbf{Y}_t^{-1} \quad (7.2)$$

bulunur. Tablo 5.4'ten 2 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_2 = e_1 + e_2 + e_3 \quad (7.3)$$

şeklindedir yazılabilir.  $\vec{R}_2$ , Eşitlik (7.2)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= (e_3)(e_1 + e_2 + e_3)(e_3) \\ &= -e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

bulunur. Sonuç vektör ise Tablo 5.4'ten görüleceği üzere 1 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

- ii. Tetrahedronun Şekil 6.3'teki II. dönme eksenini etrafında  $180^\circ$  lik bir dönme operasyonu yaptığı varsayalım. Bu durumda 1 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 1 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_1 = -e_1 - e_2 + e_3 \quad (7.5)$$

dir. Eşitlik (4.50)'den  $\mathbf{R}$  spinörü

$$\mathbf{R}_I = \cos \frac{1}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \vec{R}_I \quad (7.6)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte  $\vec{R}$  doğrultman kosinüsü olarak adlandırılır ve

$$\vec{R}_I = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_3 \quad (7.7)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik II. dönme eksenini için

$$\begin{aligned} \vec{R}_I &= \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

bulunur. Eşitlik (4.40), (7.5), (7.6) ve (7.8)'den;

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \mathbf{R}_I (\vec{R}_I) \mathbf{R}_I^* \\ &= \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=0} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=1} \vec{R}_I \right) (-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ &\quad \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=0} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=1} \vec{R}_I \right)^* \\ &= (\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3) \\ &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (7.9)$$

bulunur. Bölüm 3.3'te belirtildiği gibi bir birim vektörün tersi kendisine eşittir. Bulunan sonuç da 2 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

Aynı hesaplama bilinen matris metodu ile yapılmış olsaydı, z-ekseni etrafında dönme matrisi

$$\mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

olduğundan,  $\theta$  açısı kadar z-ekseni etrafındaki bir dönme operasyonu sonucu, bir noktanın yeni koordinatları,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

ifadesi ile bulunur. Ancak dikkat edilmesi gereken bir ayrıntı da her dönme eksenini için farklı dönme matrisi kullanılması gerektiğidir.

$$\mathbf{D}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Ayrıca eksenler üzerinde değil de her hangi bir köşe etrafındaki dönmelerde matris metodu daha da zorlaşacak ve işlem sayısı artacaktır. Halbuki Clifford cebiri kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamada dönme eksenine bağlı olmaksızın, aynı işlem sırası uygulanmaktadır. Köşelerden geçen dönme eksenleri etrafındaki dönme operasyonları hesaplamaları ise, kolaylıkla gerçekleştirilebilmektedir. Hesaplamaları çok daha karmaşık olan ikosahedron ve dodekahedron için bu hesaplamalar yapılacaktır.

## 7.2 Kübün Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi

Kübün 6. Bölüm'de gösterilen bir yansıma ve bir dönme operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer yansıma ve dönme operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- i. Şekil 6.4 ve Tablo 6.6'dan Kübün yansıma operasyonu için I. yansıma düzleminin, karşılıklı dört yüzeyin kenarlarının orta noktalarının oluşturduğu yüzeyler olduğu görülebilir. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $\mathbf{Y}_k$  çokluvektörü ile gösterilebilir:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{e}_{13} \quad (7.13)$$

Örneğin Tablo 5.5'ten 4 nolu köşenin,  $\mathbf{Y}_k$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (4.55)'ten

$$\vec{R}' = \mathbf{Y}_k (\vec{R}_4) \mathbf{Y}_k^{-1} \quad (7.14)$$

bulunur. Tablo 5.5'ten 4 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_4 = a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \quad (7.15)$$

şeklilde yazılabilir. Eşitlik 7.2'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= (\mathbf{e}_{13})(a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_{13}) \\ &= -a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 - a\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.16)$$

bulunur. Sonuç vektör ise Tablo 5.5'ten görüleceği üzere 2 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

ii. Kübün Şekil 6.4'teki III. dönme eksenini etrafında  $180^\circ$  lik bir dönme operasyonu yaptığı varsayalım. Bu durumda 4 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 4 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_4 = a\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \quad (7.17)$$

dir. Eşitlik (4.50)'den  $\mathbf{R}$  spinörü

$$\mathbf{R}_1 = \cos\frac{1}{2}\theta + \sin\frac{1}{2}\theta \vec{R}_1 \quad (7.18)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte  $\vec{R}$  doğrultman kosinüsü olarak adlandırılır ve

$$\vec{R}_I = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_3 \quad (7.19)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik III. dönme eksenini için

$$\begin{aligned} \vec{R}_I &= \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2}} \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

bulunur. Eşitlik (4.40), (7.17), (7.18) ve (7.20)'den;

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \mathbf{R}_I (\vec{R}_I) \mathbf{R}_I^* \\ &= \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=0} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=1} \vec{R}_I \right) (\mathbf{a} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a} \mathbf{e}_2 + \mathbf{a} \mathbf{e}_3) \\ &\quad \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=0} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(180^\circ)}_{=1} \vec{R}_I \right)^* \\ &= (\mathbf{e}_2) (\mathbf{a} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a} \mathbf{e}_2 + \mathbf{a} \mathbf{e}_3) (\mathbf{e}_2) \\ &= (-\mathbf{a} \mathbf{e}_1 + \mathbf{a} \mathbf{e}_2 - \mathbf{a} \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (7.21)$$

bulunur. Bölüm 3.3'te belirtildiği gibi bir birim vektörün tersi kendisine eşittir. Bulunan sonuç da Tablo 5.5'ten görülebileceği gibi 2 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

### 7.3 Oktahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi

Oktahedronun 6. Bölüm'de gösterilen bir yansıma ve bir dönme operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer yansıma ve dönme operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.



- i. Şekil 6.5 ve Tablo 6.8 den oktahedronun yansıma operasyonu için I. yansıma düzleminin, hacim merkezindeki dörtgenlerin oluşturduğu düzlemin, yansıma düzlemi olduğu görülebilir. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $\mathbf{Y}_0$  çokluvektörü ile gösterilebilir:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{e}_{12} \quad (7.22)$$

Örneğin Tablo 5.6'dan 1 nolu köşenin  $\mathbf{Y}_k$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (4.55)'ten

$$\vec{R}' = \mathbf{Y}_k (\vec{R}_1) \mathbf{Y}_k^{-1} \quad (7.23)$$

bulunur. Tablo 5.6'dan 1 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_1 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3 \quad (7.24)$$

şeklilde yazılabilir. Eşitlik (7.22), (7.23) ve (7.24)'ten;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= (\mathbf{e}_{12})(0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_{12}) \\ &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.25)$$

bulunur. Sonuç vektör ise, Tablo 5.6'dan görüleceği üzere 6 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

- ii. Oktahedronun Şekil 6.5'teki I. dönme eksenini etrafında  $180^\circ$  lik bir dönme operasyonu yaptığı varsayalım. Bu durumda 4 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 4 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_4 = b\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \quad (7.26)$$

dir. Eşitlik (4.50)'den  $\mathbf{R}$  spinörü

$$\mathbf{R}_I = \cos \frac{1}{2} \theta + \sin \frac{1}{2} \theta \vec{R}_I \quad (7.27)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte  $\vec{R}$  doğrultman kosinüsü olarak adlandırılır ve

$$\vec{R}_I = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_3 \quad (7.28)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik I. dönme eksenini için,

$$\begin{aligned} \vec{R}_I &= \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.29)$$

bulunur. Eşitlik (4.40), (7.26), (7.27) ve (7.29)'dan;

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \mathbf{R}_I (\vec{R}_I) \mathbf{R}_I^* \\ &= \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2} (180^\circ)}_{=0} + \underbrace{\sin \frac{1}{2} (180^\circ)}_{=1} \vec{R}_I \right) (\mathbf{b} \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3) \\ &= \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2} (180^\circ)}_{=0} + \underbrace{\sin \frac{1}{2} (180^\circ)}_{=1} \vec{R}_I \right)^* \\ &= (\mathbf{e}_3) (\mathbf{b} \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3) (\mathbf{e}_3) \\ &= -\mathbf{b} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (7.30)$$

bulunur. Bölüm 3.3'te belirtildiği gibi bir birim vektörün tersi kendisine eşittir. Bulunan sonuç da Tablo 5.6'dan görülebileceği gibi 2 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

## 7.4 İkosahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi

İkosahedronun 6. Bölüm’de gösterilen bir yansıma ve bir dönme operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer yansıma ve dönme operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- i. Şekil 6.6 ve Tablo 6.10’dan ikosahedronun yansıma operasyonu için I. yansıma düzleminin, karşılıklı dört yüzden, komşu iki yüzün ortak kenarının, karşı komşu iki yüzün ortak kenarı arasındaki yüzeyin, yansıma düzlemi olduğu görülebilir. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $\mathbf{Y}_i$  çokluvektörü ile gösterilebilir:

$$\mathbf{Y}_i = -\mathbf{e}_{13} \quad (7.31)$$

Örneğin Tablo 5.7’den 12 nolu köşenin  $\mathbf{Y}_i$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (4.55)’ten

$$\vec{R}' = \mathbf{Y}_i (\vec{R}_{12}) \mathbf{Y}_i^{-1} \quad (7.32)$$

olarak bulunur. Tablo 5.7’den 12 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_{12} = -1\mathbf{e}_1 + \mathbf{c}\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \quad (7.33)$$

şeklilde yazılabilir. Eşitlik (7.31), (7.32) ve (7.33)’ten;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= (-\mathbf{e}_{13})(-1\mathbf{e}_1 + \mathbf{c}\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_{13}) \\ &= -1\mathbf{e}_1 - \mathbf{c}\mathbf{e}_2 - 0\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.34)$$

bulunur. Sonuç vektör ise Tablo 5.7’den görüleceği üzere 11 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

ii. İkosahedronun Şekil 6.6'daki 1 nolu köşeden geçen I. dönme eksenini etrafında  $72^\circ$  lik bir dönme operasyonu yaptığı varsayalım. Bu durumda 4 nolu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 4 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_4 = -c\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \quad (7.35)$$

dir. Burada  $c=0,618$  dir. Eşitlik (4.50)'den  $\mathbf{R}$  spinörü

$$\mathbf{R}_1 = \cos \frac{1}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \vec{R}_7 \quad (7.36)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte  $\vec{R}$  doğrultman kosinüsü olarak adlandırılır ve

$$\vec{R}_7 = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_3 \quad (7.37)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik I. dönme eksenini için

$$\begin{aligned} \vec{R}_7 &= \frac{c}{\sqrt{(c)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{0}{\sqrt{(c)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{(c)^2 + (0)^2 + (1)^2}} \mathbf{e}_3 \\ &= 0,525\mathbf{e}_1 + 0,850\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.38)$$

bulunur. Eşitlik (4.40), (7.35), (7.36) ve (7.38)'den;

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \mathbf{R}_1(\vec{R}_4)\mathbf{R}_1^* \\
&= \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(72^\circ)}_{=0,809} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(72^\circ)}_{=0,587} \vec{R}_1 \right) (-c\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3) \\
&\quad \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(72^\circ)}_{=0,809} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(72^\circ)}_{=0,587} \vec{R}_1 \right)^* \\
&= [0,809 + 0,587(0,525\mathbf{e}_1 + 0,850\mathbf{e}_3)](-c\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3) \quad (7.39) \\
&\quad [0,809 - 0,587(0,525\mathbf{e}_1 + 0,850\mathbf{e}_3)] \\
&= (0,809 + 0,308\mathbf{e}_1 + 0,5\mathbf{e}_3)(-c\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3)(0,809 - 0,308\mathbf{e}_1 - 0,5\mathbf{e}_3) \\
&= (0\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 + 0,618\mathbf{e}_3) = (0\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan sonuç da Tablo 5.7'den görülebileceği gibi 8 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

## 7.5 Dodekahedronun Simetri Operasyonlarının Clifford Cebiriyle İncelenmesi

Dodekahedronun 6. Bölüm'de gösterilen bir yansıma ve bir dönme operasyonu Clifford cebiriyle hesaplanacaktır. Tüm diğer yansıma ve dönme operasyonları da, aynı metotla hesaplanabilir.

- i. Şekil 6.7 ve Tablo 6.12'den dodekahedronun yansıma operasyonu için I. yansıma düzleminin, karşılıklı dört yüzden, komşu iki yüzün ortak kenarının, karşı komşu iki yüzün ortak kenarı arasındaki yüzeyin, yansıma düzlemi olduğu görülebilir. Bu durumda yansıma düzlemi bir  $\mathbf{Y}_d$  çokluvektörü ile gösterilebilir. Örneğin 10 nolu köşenin xz-düzlemindeki yansıması için,

$$\mathbf{Y}_d = \mathbf{e}_{13} \quad (7.40)$$

dir ve Tablo 5.8'den 10 nolu köşenin  $\mathbf{Y}_i$  düzlemindeki yansıması Eşitlik (4.55)'ten

$$\vec{R}' = \mathbf{Y}_i (\vec{R}_{10}) \mathbf{Y}_i^{-1} \quad (7.41)$$

bulunur. Tablo 5.8'den 10 nolu köşeyi temsil eden vektör,

$$\vec{R}_{10} = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0,382\mathbf{e}_3 \quad (7.42)$$

şeklde yazılabilir. Eşitlik (7.40), (7.41) ve (7.42)'den;

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= (\mathbf{e}_{13})(0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 0,382\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_{13}) \\ &= -1\mathbf{e}_2 + 0,382\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.43)$$

bulunur. Sonuç vektör ise Tablo 5.8'den görüleceği üzere 13 nolu köşeyi temsil eden vektördür.

- ii. Dodekahedronun Şekil 6.7'deki 5 nolu köşeden geçen I. dönme eksenini etrafında  $120^\circ$  lik bir dönme operasyonu yaptığı varsayılınsın. Bu durumda 20 no lu köşenin yeni konumu araştırılabilir. 20 nolu köşeyi temsil eden vektör ise;

$$\vec{R}_{20} = 0,382\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \quad (7.44)$$

dir. Burada  $c=0,618$  dir. Eşitlik (4.50)'den  $\mathbf{R}$  spinörü

$$\mathbf{R}_5 = \cos \frac{1}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \vec{R}_5 \quad (7.45)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte  $\vec{R}$  doğrultman kosinüsü olarak adlandırılır ve

$$\vec{R}_5 = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_1 + \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \mathbf{e}_3 \quad (7.46)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik I. dönme eksenini için

$$\begin{aligned} \vec{R}_5 &= \frac{0,618}{\sqrt{(0,618)^2 + (0,618)^2 + (0,618)^2}} \mathbf{e}_1 \\ &+ \frac{0,618}{\sqrt{(0,618)^2 + (0,618)^2 + (0,618)^2}} \mathbf{e}_2 \\ &+ \frac{0,618}{\sqrt{(0,618)^2 + (0,618)^2 + (0,618)^2}} \mathbf{e}_3 \\ &= 0,5 + 0,5 \mathbf{e}_1 + 0,5 \mathbf{e}_2 + 0,5 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.47)$$

bulunur. Eşitlik (4.40), (7.44), (7.45) ve (7.47)'den;

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \mathbf{R}_5 (\vec{R}_{20}) \mathbf{R}_5^* \\ &= \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(120^\circ)}_{=0,5} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(120^\circ)}_{=0,866} \vec{R}_1 \right) (0,382 \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2 + 1 \mathbf{e}_3) \\ &\quad \left( \underbrace{\cos \frac{1}{2}(120^\circ)}_{=0,5} + \underbrace{\sin \frac{1}{2}(120^\circ)}_{=0,866} \vec{R}_1 \right)^* \\ &= [0,5 + 0,5 \mathbf{e}_1 + 0,5 \mathbf{e}_2 + 0,5 \mathbf{e}_3] (0,382 \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2 + 1 \mathbf{e}_3) \\ &\quad [0,5 - 0,5 \mathbf{e}_1 - 0,5 \mathbf{e}_2 - 0,5 \mathbf{e}_3] \\ &= (1 \mathbf{e}_1 + 0,382 \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (7.48)$$

bulunur. Bulunan sonuç da Tablo 5.8'den görülebileceği gibi 11 nolu köşenin koordinatlarını temsil eden vektördür.

*iii.* Platonik katıların Clifford cebiriyle tanımlanan simetri operasyonlarının ardışık olması durumunda ise, yine aynı yöntem uygulanabilir. Örneğin bir önceki örnekte olduğu gibi, 20 nolu köşe,

5 nolu köşeden geçen dönme eksenini etrafında  $120^\circ$  lik bir dönme operasyonu yapmakla birlikte, ardışık olarak, z-ekseni etrafında da  $180^\circ$  lik dönme operasyonu yaparsa;

$$\begin{aligned}
 \vec{R}' &= \mathbf{R}_z \mathbf{R}_5 (\vec{R}_{20}) \mathbf{R}_5^* \mathbf{R}_z^* \\
 &= [(1e_3)(0,5+0,5e_1+0,5e_2+0,5e_3)](0,382e_1+1e_3) \\
 &\quad [(0,5-0,5e_1-0,5e_2-0,5e_3)(1e_3)] \\
 &= (-e_1-0,382e_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç Tablo 5.8'den de görülebileceği gibi 18 nolu köşeyi temsil eden vektördür.



## TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Giriş bölümünde belirtildiği gibi, Clifford ve ondan sonraki bir çok araştırmacının amacı, geometrik cebiri, birçok bilim alanında kullanışlı kılmaktır. Çünkü kullanılan cebir, bazı problemlerin çözümünde, beklenmedik çözümlere imkan verebilir. Bu noktadan hareketle David Hestenes'in, geometrik cebiri Fizik'te bir cebirden öte, bir bilim dili olması için gösterdiği çaba da belirtilmelidir.

Bu tezde, Platonik katıların simetri operasyonları incelenerek, bu operasyonlar Clifford cebiri ile gerçekleştirilmiştir. Bu da, Platonik katılardaki tüm yansıma ve dönme operasyonları için kompakt bir ifade elde edilmesine imkan vermiştir. Bilindiği üzere, matris metodu ile bu operasyonlar gerçekleştirilmek istendiğinde, her bir dönme eksenini için, ayrı bir matris kullanılmakta ve işlemler oldukça uzun sürmektedir. Ancak aynı işlemler Clifford cebiri ile gerçekleştirildiğinde, tüm bu zorluklar aşılmakta ve tek bir yöntemle tüm yansıma ve dönme operasyonları gerçekleştirilebilmektedir. Dolayısıyla, Platonik katılar üzerinde ispatlanan bu yöntem, moleküller, kristal yapılar üzerinde de bir çok kolaylıklar sağlayacaktır:

Bu tezin sonuçlarından yararlanılarak bir çok alanda yeni açılımlar ve çözüm yöntemleri geliştirilebilir.

- i.* Platonik katıların birbirine dönüşümü mümkündür. Bu dönüşüm, özellikle molekül fiziği ve kuantum mekaniğinde uygulama alanları bulmaktadır[15]. Dönüşüme ait hesaplamalar, bu tezde kullanılan metotla gerçekleştirilebilir. Görüldüğü gibi, bu metot, hesaplamalarda kolaylıklar sağlamaktadır.
- ii.* Bu tezde ortaya konan yöntem, Archimedes katıları için de geliştirilebilir. Archimedes katıları, doğada Platonik katılar gibi tam simetriye sahip olmayan yapılardır ve bu yapılarda bir çok molekül yapı bulunmaktadır.

Bu, molekül yapıların simetri operasyonlarının tanımlanması ve uygulanmasında bir çok kolaylıklar sağlayacaktır.

- iii.* Bu tezde ortaya konan hesaplama yöntemi, bir molekülün açısal momentumunun hesaplanmasında kolaylıkla uygulanabilir. Bu sonuçtan yararlanarak dönme enerji düzeyleri hesaplanabilir[19].
- iv.* Özellikle dodekahedron, günümüz robot teknolojisinde, robotların eklem yerlerinde kullanılmaktadır. Bu eklem yerlerinin hareketleri, bilgisayar yazılımları tarafından kumanda edilmektedir. Bilgisayar yazılımlarında bu tezde kullanılan yöntem kullanılarak, hesaplamalarda kolaylıklar sağlanabilir[20].
- v.* Kristal yapılarının elektronik yapılarının incelenmesinde, bu tezde ortaya konan yöntem uygulanabilir[21].
- vi.* Tıp'ta Clifford cebirinin bazı uygulamaları olmuştur ve bu çalışmalar biyomekanik alanı için de geliştirilebilir.
- vii.* Clifford cebiri çok boyutlu uzaylarda da geçerli olduğundan [23][24], bu tezde ortaya konan yöntem, çok boyutlu uzaylarda da uygulanabilir.

Sonuç olarak, özellikle moleküler yapıların yansıma ve simetri operasyonlarının tanımlanması ve gerekli hesaplamaların yapılması açısından bu tezde ortaya konan yöntem, işlem kolaylıkları sağlamakla birlikte, kompakt bir gösterime de olanak sağlamaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] DORAN, C. J. L., HESTENES, D., SOMMEN, F. ve VAN ACKER, N., *Lie Groups as spin groups*, J.Math. Phys., **34**(8):3642, (1993).
- [2] KINLE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Pres, UK, (1972).
- [3] ATIYAH, M. ve F., SINGER, I. M., *The Index Of Elliptic Operators On Compact Manifolds*, Bull, A.M.S., **69**:422, (1963).
- [4] HESTENES, D., <http://modelingnts.la.asu.edu/pdf/NFMPchapt1.pdf>, (1998).
- [5] LAWSON, H.B. ve MICHELSON, M.L, *Spin Geometry*, Princeton University Pres, (1989).
- [6] FRITZER H. P., *Molecular Symmetry with Quaternions*, Spectrochimica Acta, **A57**, 1919-1930, (2001).
- [7] ZAHARIA, M. D., DORST, L. ve MANN, S., *Geometric Algebra: A Computational Framework for Geometrical Applications*, IEEE Computer Graphics and Applications, pp. 24-31, (2002).
- [8] HESTENES, D. ve SOBCYK, G., *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, Kluwer Academic Publishing, Dordecht, (1987).
- [9] HESTENES, D., *New Foundations For Classical Mechanics*, Kluwer Academic Publishing, Dordecht, (1986).
- [10] LOUNESTO, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Pres, UK, (1997).
- [11] LOUNESTO, P., *Introduction to Clifford Algebras*, TTU Press, Cookeville, (2002).
- [12] CONWAY, J. H., HARDIN, R.H. ve SLOANE, N.J.A., *Packing Lines, etc.: Packing in Grassmannian Spaces*, Experimental Mathematics, Vol. 5, 139-159, (1996).
- [13] ZAHARIA, M. D., *Computer Graphics from a Geometric Algebra Perspective*, IAS Technical Report Series, IAS-UVA, 02-05, Nr, (2002).

- [14] ALEXANDROFF, P.S., *Gruplar Teorisine Giriş*, Çev. Ali YAR, Türk Matematik Derneği, İstanbul, (1962).
- [15] JOLBOUT, A. F., *Metamorphosis of Polyhedrons 2. Oktahedron to Dodecahedron*, Journal of Molecular Structure, 197-205, (2002).
- [16] JOHNDALE, C.S., *Self-Assembling Micrite Based on the Platonic Solids*, Robotics and Autonomous Systems, 38, 62-92, (2002).
- [17] [www.toshen.com/dodecahedron.html](http://www.toshen.com/dodecahedron.html)
- [18] BRACX, F., DELANGLE, R. ve SERRAS, H., *Clifford Algebras and their Applications in Math. Phy.*, Deinze, (1993).
- [19] GURLEBECK, K. ve SPROSSIG, W., *Quaternionic and Clifford Calculuc for Physicists and Engineers*, John Willey&Sons, (1997).
- [20] ZAHARIA, M. D. ve DORST, L., *Modeling and Visualization of 3D Polygonal Mesh Surfaces Using Geometric Algebra*, Accepted for Computers & Graphics, (2003).
- [21] JANCEWICZ, B., *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [22] BAYRO, E., *Modeling the 3D kinematics of the eye in the geometric algebra framework*, Pattern Recognition, V36, 2993-3012, (2003).
- [23] POKORNY, A., HERZIG, P. ve ALTMANN, S.L., *On the Generation of Point Groups in Spaces of Various Dimensions*, Spectrochimica Acta, A57, 1931-1939, (2001).
- [24] HECKENBERGER, I., *Spin geometry on Quantum Groups Via Covariant Differential Calculi*, Advances in Mathematics, V175, 197-242, (2003).