

**ELEKTROMANYETİZMANIN CLIFFORD CEBİRİ
İLE İNCELENMESİ**

Fuat Tolga ATALAY
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Mayıs – 2004

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Fuat Tolga ATALAY'ın Elektromanyetizmanın Clifford Cebiri ile İncelenmesi başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi. ~~18.05.2004~~ tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI	
Üye	Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ	
Üye	Prof. Dr. Mustafa ŞENYEL	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ~~23.06.2004~~ tarih ve ~~22/A~~ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Altuğ İFTAR
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ELEKTROMAGNETİZMANIN CLIFFORD CEBİRİ İLE İNCELENMESİ

FUAT TOLGA ATALAY

**Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman: Yard.Doç.Dr.Murat TANIŞLI
2004, 32 sayfa**

Bu tezde bir sayı sistemi olan Clifford cebirinin tanımı yapıldıktan sonra, bu cebirin oluşturduğu alternatif cebirlerin genel özellikleri verilmiş ve karşılaştırılması yapılmıştır. Bunlara ek olarak, Clifford cebirinin matris temsili de yapılmıştır.

Klasik fizikte Newton yasalarının oynadığı rolü, elektromanyetizmada Maxwell deklemleri oynar. Daha önce tensörler, kuarternionlar ve vektörler gibi sayı cebiriyle ifade edilen Maxwell denklemler, bu tezde Clifford cebirinin temsilinden faydalanılarak yeniden ele alınmış,incelenmiş ve ortaya koyduğu yaklaşımlar gösterilmiştir. Bu çalışmada amaç, elektromanyetizmanın ve Lorentz kuvvet yasasının en basit şekline geometrik cebirin sistemsel çözümleri uygulanarak ulaşmaktır.

Anahtar Kelimeler: Clifford Cebiri, Dönme işlemi, Yansıma işlemi, Maxwell Denklemleri, Öklid Uzayı

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INVESTIGATION OF ELECTROMAGNETIZM WITH CLIFFORD ALGEBRA

FUAT TOLGA ATALAY

**Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Physics Program**

**Supervisor: Ass. Doç.Dr. Murat TANIŞLI
2004, 32 pages**

In this thesis, after defining Clifford algebra as a number algebra, general properties of alternative algebras formed by this base are given and defined. In addition, the matrix representation of Clifford algebra is given.

In electromagnetism, the Maxwell equations acts same role with Newton laws that in classical mechanics. In this thesis, the Maxwell equations which are defined by number systems as quaternions, tensors and vectors before, have been studied and investigated. New approaches have been represented by helping of representation of Clifford algebra. During this study, the aim is to reach most-easy form of electromagnetism and Lorentz force law by using systemical solutions of geometrical algebra.

Keywords: Clifford Algebra, Rotation Operation, Reflection Operation, Maxwell Equations, Eucludian space

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda bana daima yardımcı olan ve feyz aldığım hocam
Yard. Doç Dr. Murat TANIŞLI' ya

Katkılarını hiçbir zaman esirgemeyen

Öğr. Gör. Abidin KILIÇ' a

yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen arkadaşlarım

Şeyho ÖZDEMİR, Ömer CELAYİR ve Fidel YILDIZ'a

büyük özveri ile desteğini esirgemeyen

eşim Demet'e

teşekkür ederim...

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. CLIFFORD CEBİRİ.....	2
2.1. Geometrik Çarpım.....	2
2.2. Çokluvektörler.....	3
2.3. Dış Çarpım ve Nokta Çarpım.....	7
2.4. İç Çarpım.....	8
2.5. İç, Dış ve Geometrik Çarpım.....	10
3. ÖKLİD UZAYININ CLIFFORD CEBİRİYLE TEMSİLİ.....	11
3.1. İki Boyutlu Öklid Düzleminin Clifford Cebiriyle Temsili.....	12
3.2. İki Boyutlu Öklid Düzleminde Dönme Hareketinin Clifford Cebriyle Temsili.....	13
3.3. Üç Boyutlu Öklid Uzayının Clifford Cebiriyle Temsili.....	14
3.4. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Dönme ve Yansımanın Clifford Cebriyle Temsili.....	15
3.5. Cl_3 ün Matris Temsili.....	22
4. ELEKTROMANYETİZMANIN CLIFFORD CEBİRİYLE TEMSİLİ.....	24

4.1. Maxwell Denklemleri	24
4.2. Maxwell Denklemlerinin Clifford Cebiri ile Temsili.....	26
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	31
KAYNAKLAR	33

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.1 Genel bir geometrik yapıyı oluşturan matematik sistemler.....	1
2.1 Bir vektör ile bir iki-vektörün nokta çarpımı.....	9
3.1 e_{12} yönlü alanı	12
3.2 e_1e_2 – düzleminde r vektörünün dönme operatörü ile belirli açıda dönmesi.....	14
3.3 Öklid düzlemde bir vektörün bileşenleri.....	16

ÇİZELGELER DİZİNİ

1.1	Cl_n nin birim bazları.....	2
2.2	İki-boyutlu Clifford uzayında temel elemanların çarpım çizelgesi.....	6
2.3	Üç-boyutlu Clifford uzayında temel elemanların çarpım çizelgesi.....	7
3.1	$C(2)-Cl_3$ izomorfizmi.....	23

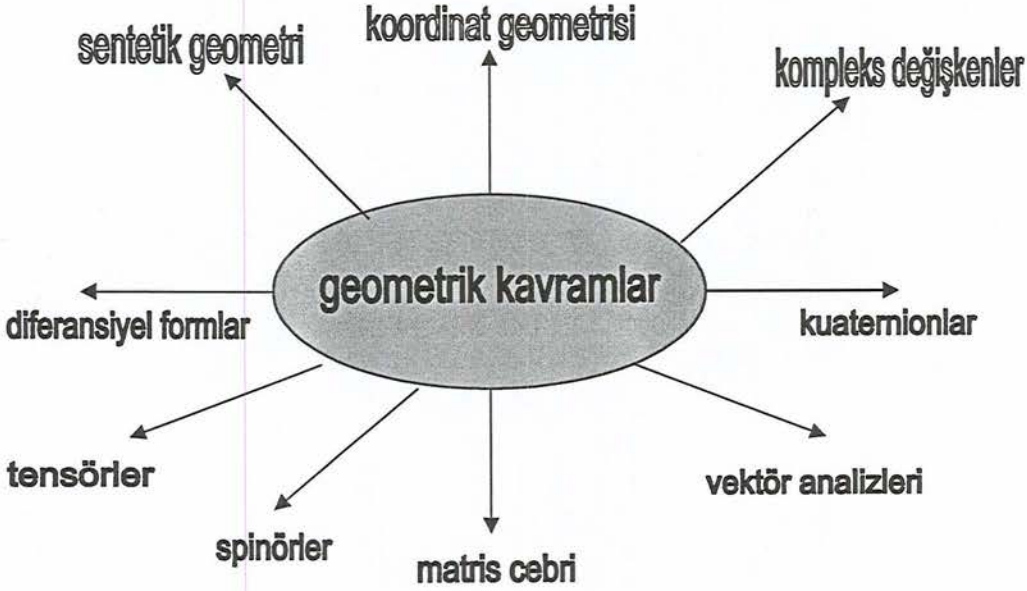
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbf{R}^n	n-boyutlu reel Lineer Uzay
$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n,0}$	n-boyutlu Öklid Uzayı
$Cl_{p,q}$	$\mathbf{R}^{p,q}$ 'nun Clifford Cebiri
$Cl_3 \cong Mat(2, C)$	\mathbf{R}^3 Öklid Uzayının Clifford Cebiri
$Cl_n = Cl_{n,0}$	$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n,0}$ Öklid Uzayının Clifford Cebiri
$Cl_{1,3} \cong Mat(2, \mathcal{H})$	$\mathbf{R}^{1,3}$ Minkonwski Uzayının Clifford Cebiri
$Cl_{3,1} \cong Mat(4, \mathcal{R})$	$\mathbf{R}^{3,1}$ Minkonwski Uzayının Clifford Cebiri
\bar{u}	u ' nun Clifford Konjugesi
u^*	u ' nun Kompleks Konjugesi
\mathbf{a}	vektör
\mathbf{e}_n	birim baz vektör
\mathbf{A}	çokluvektör

1. GİRİŞ

Newton'dan bu yana, farklı konulardaki problemleri çözmeye yönelik çeşitli sistemler oluşturuldu. Bugün kullanılan dokuz sistem Şekil 1.1 de listeleniyor. Çok az fizikçi bunların her biri konusunda uzmandır fakat her bir sistem bazı uygulama alanlarında diğerlerine nazaran üstünlük gösterir. Örneğin; dönmelerde, kuaternion'lar standart fizik derslerinde öğretilen vektör ve matris metotlarından açıkça daha etkilidir. Akademik alanda bu fark çok fazla sorun değildir. Uzay endüstrisinde kullanılan dönme operasyonları, bunların ana kaynağıdır. Mühendisler kuaternionları kullanmayı tercih eder.

Şekil 1.1'deki her bir matematiksel sistem, geometrinin bazı yönleriyle birleşir. Birlikte ele alındığında fizikte kullanılabilir olan geometrik kavramlar için gerekli sistemler kurarlar.



Şekil 1.1 Genel bir geometrik yapıyı oluşturan matematik sistemler

Bu tezde, bu matematik sistemlerden biri olan Clifford cebri ele alınıp, elektromanyetizmanın temel denklemleri olan Maxwell denklemleri Clifford cebri ile incelenmiştir. Bu yapılırken öncelikle, geometrik kavramların sistemini kurabilen Clifford cebrinin özellikle fizikte kullanımlarında kolaylık ve kullanışlı gösterimler sağlamaktadır.

2. CLIFFORD CEBİRİ

\mathbb{R}^n şeklindeki tüm uzaylar *Geometrik cebirin* alt uzayını oluşturacak temel elemanlar serisini üretir. Bu, n-dereceli Clifford uzayı olarak adlandırılır ve " Cl_n " şeklinde gösterilir. Örneğin, iki-boyutlu Clifford uzayı Cl_2 için olası temel elemanlar seti şu şekildedir:

$$\{1, e_1, e_2, I\}, \quad I = e_{12}$$

Burada 1, baz skaları veya temel 0-elemanı göstermek için kullanılmıştır. İki-boyutlu Clifford uzayının geometrik cebirinin her elemanı, temel elemanların lineer kombinasyonları gibi gösterilir. Başka bir örnek olarak, üç boyutlu Clifford uzayı Cl_3 için temel elemanlar;

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$$

dir[1]. Cebir için temel eleman toplam sayısı, bütün temel k-eleman sayılarının toplanmasıyla hesaplanabilir:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2.1)$$

Bu formül bazı matematik kombinasyonlarına dayanır ve bir çok düzlem oluşturur. Birkaç basit geometrik cebir için bu formülü aşağıdaki çizelgede kontrol edebiliriz:

Çizelge 1.1 Cl_n nin birim bazları

Cl_n	Temel elemanlar	toplam
Cl_0	{1}	$2^0=1$
Cl_1	{1;e ₁ }	$2^1=2$
Cl_2	{1;e ₁ ,e ₂ ;e ₁₂ }	$2^2=4$
Cl_3	{1;e ₁ ,e ₂ ,e ₃ ;e ₁₂ ,e ₂₃ ,e ₁₃ ;e ₁₂₃ }	$2^3=8$
Cl_4	{1;e ₁ ,e ₂ ,e ₃ ,e ₄ ;e ₁₂ ,e ₁₃ ,e ₁₄ ,e ₂₃ ,e ₂₄ ,e ₃₄ ;e ₁₂₃ ,e ₁₂₄ ,e ₁₃₄ ;e ₂₃₄ ;e ₁₂₃₄ }	$2^4=16$

2.1 Geometrik Çarpım

Bilindiği üzere nokta çarpım ile dış çarpımı birleştirecek olursak geometrik çarpımı elde ederiz. a ve b keyfi vektörleri için geometrik çarpım aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad (2.2)$$

Bu çarpımın nasıl yapıldığına bakılacak olursa, nokta çarpımının sonucu bir skalar, dış çarpımının sonucu da bir iki-vektör içerir. İki-vektör ile bir skaların toplanması, kompleks sayılar gibi parçalara ayırarak mümkündür. Aynı şekilde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ de bir skalar ve bir iki-vektör kısımlardan oluşmaktadır. Temel elemanların bu şekildeki kombinasyonlarına “çoklu-vektör” denir. Bu tezde çoklu-vektörler \mathbf{A} şeklinde gösterilecektir.

2.2 Çoklu-Vektörler

Bir çoklu-vektör, k-elemanların farklı lineer kombinasyonlarıdır. Çoklu-vektör 2-boyutlu uzayda \mathbf{R}^2 bir skalar kısım, vektör kısım ve iki-vektör kısım içerir:

$$\mathbf{A} = \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{e}_{12}$$

Burada α_i , reel sayılardır ve çoklu-vektörlerin bileşenleridir. α_i 'nin sıfır olabileceğine dikkat edilmelidir. Örneğin; α_1 ve α_4 sıfırsa bir vektör (1-dereceli elemanlar) olabilir. İki-boyutlu uzayda tam bir çoklu-vektörü göstermek için $2^2=4$ reel sayı gereklidir. Üç-boyutlu uzayda bir çoklu-vektörü göstermek için ise $2^3=8$ adet reel sayı gereklidir ve:

$$\mathbf{A} = \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{e}_3 + \alpha_5 \mathbf{e}_{12} + \alpha_6 \mathbf{e}_{13} + \alpha_7 \mathbf{e}_{23} + \alpha_8 \mathbf{e}_{123}$$

şeklinde gösterilir Aynı şekilde, 4-boyutlu uzayda $2^4=16$ bileşene ihtiyaç vardır. Çoklu-vektörler kolayca göz önünde canlandırılmazlar. Vektörler, iki-vektörler, üç-vektörler 2 ve 3-boyutlu uzayda sezgisel olarak göz önünde canlandırılırlar. Bir alana bir skalar eklemenin hiçbir yolu olmadığından bu düşünce çoklu-vektörler için de eksiktir. Bununla beraber, bir çoklu-vektör altuzayın bir lineer kombinasyonu gibi son derece anlamlıdır ve geometrinin birçok farklı kavramlarında kullanılabilir.

Genel olarak geometrik çarpım, çoklu-vektörler için bir operatördür ve aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad \text{birleşme özelliği} \quad (2.3)$$

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda \quad \text{skalarle çarpımın değişme özelliği} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{toplama üzerine dağılma özelliği} \quad (2.5)$$

\mathbf{A} , \mathbf{B} ve \mathbf{C} keyfi seçilmiş çoklu-vektörler, λ bir skaldır. Bu özellikleri daha sonra ispatlayacağız. Bu özelliklerin ispatları zor değildir, ancak şimdiye kadar sezgisel olarak varlığını kabul ettiğimiz bir cebirin üzerinde kurulmuş olması yanıltıcı gelebilir.

Geometrik çarpımın değişme özelliği olmadığına dikkat edilmelidir (**AB BA**). Nokta çarpımın değişme özelliği ve dış çarpımın değişimli olmama özelliğinden elde edilen sonuç geometrik çarpımın bölümlerini oluştururlar. Vektörlerin geometrik çarpımında nokta çarpım ve dış çarpım kullanıldığını görülür. Farklı çoklu-vektörler için, 2-boyutlu Clifford uzayından **A** ve **B** gibi çoklu-vektör seçilecek olursa;

$$\mathbf{A} = \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{I} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B} = \beta_1 + \beta_2 \mathbf{e}_1 + \beta_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \mathbf{I} \quad (2.7)$$

A ve **B** geometrik olarak çarpılacak olursa;

$$\mathbf{AB} = (\alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{I}) \mathbf{B} \quad (2.8)$$

(2.5) eşitliğini kullanarak bunu yeniden yazabilir:

$$\mathbf{AB} = \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{B} + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{B} + \alpha_4 \mathbf{I} \mathbf{B} \quad (2.9)$$

B yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & (\alpha_1 (\beta_1 + \beta_2 \mathbf{e}_1 + \beta_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \mathbf{I})) + (\alpha_2 \mathbf{e}_1 (\beta_1 + \beta_2 \mathbf{e}_1 + \beta_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \mathbf{I})) + (\alpha_3 \mathbf{e}_2 (\beta_1 + \beta_2 \mathbf{e}_1 + \beta_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \mathbf{I})) \\ & + (\alpha_4 \mathbf{I} (\beta_1 + \beta_2 \mathbf{e}_1 + \beta_3 \mathbf{e}_2 + \beta_4 \mathbf{I})) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ve parantezler açılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \beta_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \beta_4 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \beta_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \beta_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \beta_4 \mathbf{I} + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \beta_1 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \beta_2 \mathbf{e}_1 \\ & + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \beta_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \beta_4 \mathbf{I} + \alpha_4 \mathbf{I} \beta_1 + \alpha_4 \mathbf{I} \beta_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_4 \mathbf{I} \beta_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \mathbf{I} \beta_4 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.4) denklemindeki özellikten yararlanarak dış çarpımda yaptığımız gibi skalar çarpanlar tekrar düzenlenecek olursa;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \beta_3 \mathbf{e}_2 + \alpha_1 \beta_4 \mathbf{I} + \alpha_2 \beta_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \beta_4 \mathbf{e}_1 \mathbf{I} + \alpha_3 \beta_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \beta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \\ & + \alpha_3 \beta_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \beta_4 \mathbf{e}_2 \mathbf{I} + \alpha_4 \beta_1 \mathbf{I} + \alpha_4 \beta_2 \mathbf{I} \mathbf{e}_1 + \alpha_4 \beta_3 \mathbf{I} \mathbf{e}_2 + \alpha_4 \beta_4 \mathbf{I} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Bu, ilk bakışta içinden çıkılmaz bir hesaplama gibi gözükmemektedir. Ancak bu yapı üzerinde çalışacak olunursa çözüme kolayca ulaşılabilir. Eşitliğin sonucu, keyfi seçilen çoklu-vektörlerin geometrik çarpımlarını ifade eder. Temel elemanların geometrik çarpımlarının nasıl hesaplandığını anlamak için birkaç farklı kombinasyona bakmak gerekir. Örneğin (2.2) eşitliği kullanılırsa:

$$e_1 e_1 = e_1 e_1 + e_1 \wedge e_1 \quad (2.13)$$

Ancak, (2.2) eşitliğindeki $a \wedge a = 0$ ifadesinin bir alan belirtmediğini hatırlayalım. Ayrıca kendisiyle nokta çarpım yapılan bir vektör büyüklüğünün karesine eşittir. Eğer e_1 ve e_2 gibi temel vektörlerin büyüklüklerinin 1 olduğu düşünülürse, yukarıdaki ifadeyi sadeleştirebiliriz:

$$e_1 e_1 = e_1 e_1 + e_1 \wedge e_1 = e_1 e_1 + 0 = 1 + 0 = 1 \quad (2.14)$$

İki-boyutlu Clifford uzayı için diğer bir örnek:

$$e_1 e_2 = e_1 e_2 + e_1 \wedge e_2 \quad (2.15)$$

e_1 ve e_2 'nin birbirlerine dik olduklarını hatırlanırsa, bunların nokta çarpımları $e_1 e_2 = 0$ olur. Öyleyse ;

$$e_1 e_2 = e_1 e_2 + e_1 \wedge e_2 = 0 + e_1 \wedge e_2 = 0 + I = I \quad (2.16)$$

e_1 ve I 'nin geometrik çarpımları daha karmaşık bir problemdir. Önceki örneklerde $I = e_{12}$ 'nin $e_1 e_2$ çarpımına eşit olduğu gösterildi. Bu eşitliği ve (2.3) eşitliğini kullanarak;

$$e_1 I = e_1 e_{12} = e_1 (e_1 e_2) = (e_1 e_1) e_2 = 1 e_2 = e_2 \quad (2.17)$$

ifadesi elde edildi. Temel elemanlar birbirlerine dik olduklarından, nokta ve dış çarpımları önemsizdir. Geometrik çarpım sonuçlarını kolayca bulabilmek için bazı kurallar söz konusudur:

- i. Birden yüksek dereceli temel elemanlar (iki-vektör ,üç-vektör,4-eleman) dik vektörlerin dış çarpımları gibi yazılabilirler.Ayrıca birbirlerine dik temel elemanların nokta çarpımları sıfıra eşit olduğundan elemanları vektörlerin geometrik çarpımları gibi yazılır. Örneğin bir kaç boyutlu uzay için ;

$$e_{12849} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_8 \wedge e_4 \wedge e_9 = e_1 e_2 e_8 e_4 e_9 \quad (2.18)$$

şeklindedir.

- ii. (2.1) eşitliğindeki özellikten yararlanılarak vektörlerin sıraları değiştirilebilir. Bu şöyle ifade edilir:

$$e_1 e_2 e_3 = -e_2 e_1 e_3 = e_2 e_3 e_1 = -e_3 e_2 e_1 \quad (2.19)$$

- iii. Bir temel vektörün kendisiyle çarpımı 1'dir.

$$e_i e_i = 1 \quad (2.20)$$

Birden fazla temel vektörün geometrik çarpımında bu özellik kullanılarak sadeleştirme

yapılabilir.Örneğin;

$$e_{112334}=e_{24} \quad (2.21)$$

Bu üç kural kullanılarak temel vektörlerin her geometrik çarpımı sadeleştirilebilir.Aşağıdaki örneğe bakılacak olursa;

$$\begin{aligned} e_1 e_{23} e_{31} e_2 &= e_1 e_2 e_3 e_3 e_1 e_2 && (1.kural kullanıldı) \\ &= e_1 e_2 e_1 e_2 && (3. kural kullanıldı) \\ &= -e_1 e_1 e_2 e_2 && (2. kural kullanıldı) \\ &= -1 && (3. kural kullanıldı) \end{aligned}$$

Temel elemanların geometrik çarpımlarının bütün kombinasyonlarının listesi ile, çarpım çizelgesi oluşturabilir. İki-boyutlu Clifford uzayı için Çizelge 2.2 'de temel elemanların çarpımları görülmektedir:

Çizelge 2.2 İki-boyutlu Clifford uzayında temel elemanların çarpım çizelgesi

	1	e_1	e_2	I
1	1	e_1	e_2	I
e_1	e_1	1	I	e_2
e_2	e_2	$-I$	1	$-e_1$
I	I	$-e_2$	e_1	-1

Bu çizelgeye göre I ile I 'nin çarpımı -1 'e eşit olmalıdır. Aşağıda bu şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} I^2 &= e_{12} e_{12} && (\text{tanımdan}) \\ &= e_1 e_2 e_1 e_2 && (1.kural kullanıldı) \\ &= -e_2 e_1 e_1 e_2 && (2.kural kullanıldı) \\ &= -e_2 e_2 && (3. kural kullanıldı) \\ &= -1 && (3.kural kullanıldı) \end{aligned}$$

Birim bazların geometrik çarpımlarıyla ilgili kuralları, keyfi seçilmiş çoklu-vektörlere uygulayalım. Burada kolaylık olması açısından, eşitlik (2.12) tekrar ele alınacak olursa;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 e_1 + \alpha_1\beta_3 e_2 + \alpha_1\beta_4 I + \alpha_2\beta_1 e_1 + \alpha_2\beta_2 e_1 e_1 + \alpha_2\beta_3 e_{12} + \alpha_2\beta_4 e_1 I + \alpha_3\beta_1 e_2 + \alpha_3\beta_2 e_2 e_1 + \alpha_3\beta_3 e_2 e_2 \\ &+ \alpha_3\beta_4 e_2 I + \alpha_4\beta_1 I + \alpha_4\beta_2 I e_1 + \alpha_4\beta_3 I e_2 + \alpha_4\beta_4 I I \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Birim bazların geometrik çarpımlarına çizelgeden bakarak eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_3\mathbf{e}_2 + \alpha_1\beta_4\mathbf{I} + \alpha_2\beta_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3\mathbf{I} + \alpha_2\beta_4\mathbf{e}_2 + \alpha_3\beta_1\mathbf{e}_2 \\ & - \alpha_3\beta_2\mathbf{I} + \alpha_3\beta_3 - \alpha_3\beta_4\mathbf{e}_1 + \alpha_4\beta_1\mathbf{I} - \alpha_4\beta_2\mathbf{e}_2 + \alpha_4\beta_3\mathbf{e}_1 - \alpha_4\beta_4 \end{aligned} \quad (2.22)$$

ifadesi elde edilir. Son basamak olarak birim bazlar gruplanırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = & (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4) + (\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1)\mathbf{e}_2 \\ & + (\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Bu sonuç dört temel vektörün $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{I}\}$ lineer bir kombinasyonudur. Başka bir ifadeyle bir çoklu-vektördür. Bu sonuç, geometrik çarpımın Clifford cebirinde kapalılık özelliği gösterdiğini kanıtlar. Şimdiye kadar iki-boyutlu Clifford uzayında geometrik çarpımın nasıl hesaplandığı gösterildi. Aynı metot üç ve daha çok-boyutlu Clifford uzayında da geçerlidir. Aynı üç kural yardımıyla üç-boyutlu Clifford uzayı için çarpım çizelgesi oluşturulabilir:

Çizelge 2.3 : Üç-boyutlu Clifford uzayında temel elemanların çarpım çizelgesi-

\wedge	1	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{13}	\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{123}
1	1	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{13}	\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{123}
\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	1	\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{13}	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_{123}	\mathbf{e}_{23}
\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{12}$	1	\mathbf{e}_{23}	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_{123}$	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_{13}$
\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_{23}$	1	\mathbf{e}_{123}	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_{12}
\mathbf{e}_{12}	\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_{123}	-1	$-\mathbf{e}_{23}$	\mathbf{e}_{13}	$-\mathbf{e}_3$
\mathbf{e}_{13}	\mathbf{e}_{13}	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_{123}$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_{23}	-1	$-\mathbf{e}_{12}$	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{23}	\mathbf{e}_{123}	$-\mathbf{e}_3$	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_{13}$	\mathbf{e}_{12}	-1	$-\mathbf{e}_1$
\mathbf{e}_{123}	\mathbf{e}_{123}	\mathbf{e}_{23}	$-\mathbf{e}_{13}$	\mathbf{e}_{12}	$-\mathbf{e}_3$	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_1$	-1

2.3 Dış Çarpım ve Nokta Çarpım

Vektörler için geometrik çarpım, nokta çarpım ve dış çarpımın bir kombinasyonu olarak:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlandı. Geometrik çarpımın kısımları olan nokta çarpım ve dış çarpım eşitliklerini kullanarak, bu ifadeyi tekrar oluşturacak olursak;

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad (2.26)$$

yararlanarak, Eşitlik (2.25) doğrulanabilir. İki-boyutlu Clifford uzayı elemanı olan skalar ve iki-vektörü sıfır olan **A** ve **B** gibi iki tane çoklu-vektör ele alalım. Eşitlik (2.23) kullanarak $\alpha_1=\beta_1=\alpha_4=\beta_4=0$ yerine yazılırsa, **AB** ve **BA**;

$$\mathbf{AB}=(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{I} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{BA}=(\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3)+(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{I} \quad (2.28)$$

Eşitlik (2.25) kullanılarak yeniden düzenlensin:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}=[((\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{I}) - ((\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3)+(\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)\mathbf{I})] / 2$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [(\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) - (\beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} - (\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}] / 2 \quad (2.29)$$

Skalar kısım sıfır olduğundan;

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} - (\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}] / 2 \quad (2.30)$$

ve iki-vektörü aynı parantezde toplarsak;

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2)\mathbf{I}] / 2 = [(2\alpha_2\beta_3 - 2\alpha_3\beta_2)\mathbf{I}] / 2 \quad (2.31)$$

elde edilir. Bu eşitlik 2'ye bölünürse:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{I} \quad (2.32)$$

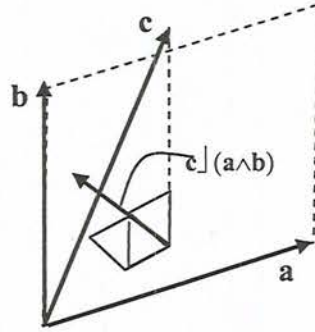
skaları olmayan iki-vektörlü **A** ve **B** çoklu-vektörleri için bu eşitliği bulabiliriz. **a** ve **b** gibi iki vektörün dış çarpımı Eşitlik (2.12) deki tanımlananlarla karşılaştırılabilir. İki-boyutlu Clifford uzayının elemanı olan çoklu-vektörün ikinci ve üçüncü bileşenleri içinde aynı eşitlikler geçerlidir. Eşitlik (2.25) ve Eşitlik (2.26) nin sadece vektörler için geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

2.4 İç Çarpım

Üç-vektörü; bir vektör ile bir iki-vektörün dış çarpımı olarak tanımlamıştık. Bir vektör ile bir iki-vektörün nokta çarpımı nasıldır? Sonuç şekil (2.1) de gösterilmiştir. İç çarpımın gerçek izdüşüme dik vektör olduğuna dikkat edilmelidir. Genel olarak, iç çarpım, (*B* altuzayı

içinde) B 'nin ortogonal izdüşümünün tamamlayıcısıdır[2]. Nokta çarpımının genelleştirilmesi çok uzun değildir. İzdüşümlerin genel durumları ve diklikleri için *iç çarpımın operatörleridir* denilebilir.

İç çarpımın tek bir tanımı yoktur, alan problemlerine bağlı olarak birçok tanımlamaları vardır. Farklı iç çarpımların bu esnekliği geometrik cebirin zorluklarından biridir. Lounesto iç çarpımının, bilgisayar tekniğinde çok yararlı olduğunun bilinmesi gibi, Öklid mekaniğinde de iç çarpımın iyi bilinmesi çok yararlıdır [3].



Şekil 2.1 Bir vektör ile bir iki-vektörün nokta çarpımı

Hestenes iç çarpımından bilindiği gibi diğer iç çarpımlar yarı-simetrik ve yarı-değişken iç çarpımlar içerir (Hestenes değişimi veya nokta çarpım için [4] ve Öklid kuvveti için [5] iç çarpım kısaltması kullanılır). Açıkça, bilgisayar tekniğiyle ilgilendiğimizden iç çarpımın kısaltmalarının kullanılması oldukça önemlidir ve \lrcorner sembolü kullanılarak gösterilecektir. Farklı dereceler için aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$\text{Skalarlar} \quad \alpha \lrcorner \beta = \alpha\beta \quad (2.33)$$

$$\text{vektör ve skalar} \quad \mathbf{a} \lrcorner \beta = 0 \quad (2.34)$$

$$\text{skalar ve vektör} \quad \alpha \lrcorner \mathbf{b} = \alpha\mathbf{b} \quad (2.35)$$

$$\text{vektörler} \quad \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ (nokta çarpım)} \quad (2.36)$$

$$\text{vektör, çoklu-vektör} \quad \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} - \mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{c}) \quad (2.37)$$

$$\text{dağılıma} \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \lrcorner \mathbf{C} = \mathbf{A} \lrcorner (\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{C}) \quad (2.38)$$

Yukardaki operatör kısaltmalarının ispatları için, skalarlar ve vektörler için temel kurallar vardır. Eşitlik (2.37) de bir vektör ile bir çoklu-vektörün dış çarpımları ve kısaltmaları kullanılmıştır. Kısaltmalar doğrusal olduğundan derecelerin kısaltması ve çoklu-vektörün kısaltması şeklinde ayrılabilir. Şimdi n-dereceli herhangi bir D derecesi, n-1 dereceli **C** ile **b** vektörünün dış çarpımı şeklinde yazılabilir.

Burada, $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{D}$ yani $\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{C})$ şeklindedir. Sonuç olarak Eşitlik (2.37)'e göre

$$(\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b}) \wedge \mathbf{C} - \mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{C})$$

olur. $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b}$ ifadesinin nasıl hesaplandığı biliniyor. İki vektörün kısaltmalarını azaltmak için $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{c}$ 'yi **C**'nin derecesi 1 olana dek çözülebilir. Açıkça bu iç çarpımın çözümü için yeterli bir çözüm yolu değildir. Ancak iç çarpım geometrik çarpımın kısımlarıyla ifade edilebilir [6].

2.5 İç, Dış ve Geometrik Çarpım

Vektörlerin geometrik çarpımlarının dış çarpım ve nokta (iç) çarpım kısımlarıyla tanımlandığı Eşitlik (2.2) de görüldü. Eşitlik (2.25) ve Eşitlik (2.26) eşitlikleri birleştirilirse;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) &= \frac{(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + (\mathbf{ab} - \mathbf{ba})}{2} \\ &= \frac{(\mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{ab} - \mathbf{ba})}{2} \\ &= \frac{2\mathbf{ab}}{2} \\ &= \mathbf{ab} \end{aligned} \tag{2.39}$$

elde edilir. Bu, geometrik cebirin iki olası yaklaşımını gösterir. Bazı kaynaklar aksiyomlarla geometrik çarpımın soyut tanımını verir, geometrik çarpımdan iç ve dış çarpımı türetir [7]. Bazı kaynaklar ise iç ve dış çarpımla geometrik çarpımı gösterebilir[3]. **a** ve **b** gibi iki vektör için ;

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \tag{2.40}$$

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{ba} \tag{2.41}$$

ise, iki dik vektörün iç çarpımları sıfıra eşit olacağından **a** ve **b** ortogondur. Eğer iki vektör ne aynı doğrultuda değilse, ne de ortogonal değilse aralarındaki ilişki geometrik çarpımla tanımlanabilir.

3. ÖKLİD DÜZLEMİNİN CLIFFORD CEBİRİYLE TEMSİLİ

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$ düzlemi düşünülecek olursa:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ifadesini ve $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ skalasını dahil ederek bir lineer yapı tanıtılsın. Burada, $\lambda \in \mathbf{R}$ dır. Bu lineer yapı, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ düzlemini \mathbf{R}^2 lineer uzayına dönüştürür. \mathbf{R}^2 ye ait (e_1, e_2) birim bazlar ele alındığında, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ şeklindedir. $r = xe_1 + ye_2$ uzunluğunu $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$ şeklinde verilsin. Uzunluğun bu şekilde gösterimi \mathbf{R}^2 nin bir Öklid düzlemi olduğunu gösterir. e_1, e_2 temel vektörleri birim vektörlerdir ve $|e_1| = 1, |e_2| = 1$ şeklindedir.

Uzunlukla ilgili olarak, burada $a = a_1e_1 + a_2e_2$, $b = b_1e_1 + b_2e_2 \in \mathbf{R}$ şeklindeki iki vektörün $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$ biçiminde skalar değerli bir çarpımı mevcuttur. Skalar çarpım simetriktir ve $a \cdot b = b \cdot a$ şeklindedir. a, b vektörleri ortogonaldir, $a \perp b$. Eğer skalar çarpım ortadan kalkacak olursa, $a \cdot b = 0$ olur. Ayrıca e_1, e_2 birim vektörleri de ortogonaldir, $e_1 \perp e_2$.

\mathbf{R}^2 'deki vektörler için değişme özeliği olmayan (simetrik olmayan) fakat birleşme özeliği olan bir çarpım tanıtılsın. Eğer r vektörünü kendiyile çarpıp veya karesi alınacak olursa,

$$rr = r^2.$$

$$r^2 = |r|^2 \quad (3.1)$$

şeklinde, r vektörünün karesinin, uzunluk vektörünün karesine eşit olması gerekmektedir. Koordinat formunda, $(xe_1 + ye_2) \cdot (xe_1 + ye_2) = x^2 + y^2$ olacak şekilde iki vektörün çarpımı tanıtılabilir. Birleşme özeliğini kullanmaksızın, dağılma kuralının kullanılmasıyla $x^2e_1^2 + y^2e_2^2 + xy(e_1e_2 + e_2e_1) = x^2 + y^2$ ifadesi ortaya çıkar. Eğer e_1, e_2 ortogonal birim vektörler ise,

$$\begin{aligned} |e_1| &= |e_2| = 1 \\ e_1 &\perp e_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ifadesine karşılık gelen

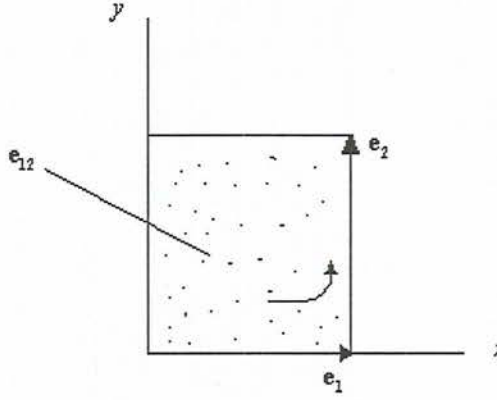
$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_2^2 = 1 \\ e_1e_2 &= -e_2e_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

çarpım kuralına uyulacak olursa bu ifade tatmin edici bir sonuç verir. Değişme özeliği olmadan, birleşme özeliğini kullanarak $(e_1e_2)^2 = -e_1^2e_2^2 = -1$ şeklinde bir hesaplama yapabiliriz. $e_1 \cdot e_2$ çarpımının karesi negatif olduğu müddetçe, e_1e_2 ne bir skalar ne de vektör

olacaktır. $e_1 e_2$ çarpımı iki-vektör olarak adlandırılan yeni bir niceliktir ve e_1 ve e_2 yönlü kare düzlem alanını gösterir (şekil 3.1). Bunu kısaca

$$e_{12} = e_1 e_2 \quad (3.4)$$

şeklinde yazarız.



Şekil 3.1 e_{12} yönlü alanı

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad \mathbf{b} = b_1 e_1 + b_2 e_2 \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanan iki vektörün Clifford çarpımı

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} \quad (3.6)$$

şeklinde dir. Burada bir skalar toplam ve bir de iki-vektör mevcuttur (\mathbf{ab} Clifford çarpımı $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ skalar çarpımıyla aynı şey değildir).

3.1. İki Boyutlu Öklid Düzleminin Clifford Cebiriyle Temsili

(e_1, e_2) , \mathbf{R}^2 Öklid düzleminin ortonormal temel vektörler olsun.

1 skalar

e_1, e_2 vektörler

e_{12} iki-vektör

$$(3.7)$$

şeklindeki dört eleman, iki boyutlu Öklid düzlemi \mathbf{R}^2 nin Cl_2 Clifford cebiri gösterimi için

$$(1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}) \quad (3.8)$$

şeklinde temel bir form teşkil eder.

Cl_2 deki

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_{12} \mathbf{e}_{12} \quad (3.9)$$

ifadesi u_0 'ın lineer bir kombinasyonu olup,

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \quad (3.10)$$

bir vektör ve

$$\mathbf{u} = u_{12} \mathbf{e}_{12} \quad (3.11)$$

iki-vektördür.

3.2 İki Boyutlu Öklid Uzayında Dönme Hareketinin Clifford Cebiriyle İle İncelenmesi

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \quad (3.12)$$

vektörünün ve

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi \quad (3.13)$$

kompleks sayısının çarpımı $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ – düzleminde başka bir

$$\mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{r} \mathbf{i} \sin \varphi = \mathbf{r} e^{i\varphi} \quad (3.14)$$

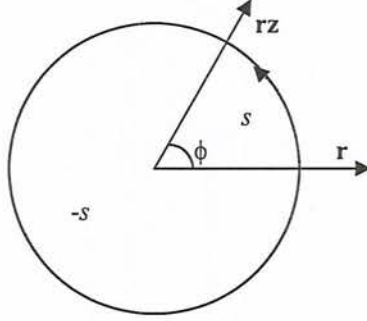
vektörünü verir. Burada kısaca, $\mathbf{i} = \mathbf{e}_{12}$ 'dir. $\mathbf{r} \mathbf{i} = x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1$ vektörü \mathbf{r} 'ye diktir. Bu sebeple saat yönüne ters $\pi/2$ radyanlık dönmeye \mathbf{r} 'yi $\mathbf{r} \mathbf{i}$ 'ye taşır.

Madem ki, \mathbf{i} birim vektörü $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ – düzleminde her \mathbf{r} vektörü ile değişimli olmayan ise dönme vektörünü şu şekilde de ifade edilebilir(şekil 3.2):

$$\mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{r} \mathbf{i} \sin \varphi = \mathbf{r} \cos \varphi - \mathbf{i} \mathbf{r} \sin \varphi = e^{-i\varphi} \mathbf{r}. \quad (3.15)$$

Ayrıca, $\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2$ 'den yararlanılacak olursak, dönme vektörü $s^{-1} \mathbf{r} s$ formuna sahip olacaktır. Burada $s = e^{i\varphi/2}$ ve $s^{-1} = e^{-i\varphi/2}$ 'dir. \mathbf{r} 'nin saat yönünün tersi yönünde φ açısıyla dönmesi $\mathbf{r} z = z^{-1} \mathbf{r} = s^{-1} \mathbf{r} s$ sonucunu doğuracaktır. Burada, $z = e^{i\varphi}$, $z^{-1} = e^{-i\varphi}$ ve $s^2 = z$ 'dir. $s^{-1} \mathbf{r} s = (-s)^{-1} \mathbf{r} (-s)$ şeklinde sonucu aynı yönlü olan, s ve $-s$ iki kompleks sayı mevcuttur. Başka deyişle, bunlar farklı yollardan aynı sonucu veren iki kompleks sayıdır:

$$\begin{aligned}
s &= e^{i\phi/2} \\
-s &= e^{i(2\pi-\phi)/2} = e^{i\phi/2} e^{-i\pi} \\
e^{i\pi} &= -1
\end{aligned}
\tag{3.16}$$



Şekil 3.2 e_1e_2 – düzleminde r vektörünün dönme operatörü ile belirli açıda dönmesi

3.3 Üç Boyutlu Öklid Uzayının Clifford Cebiriyle İle İncelenmesi

\mathbf{R}^3 üç boyutlu Öklid uzayı e_1, e_2, e_3 şeklinde üç ortogonal birim vektör içeren temel elemanlara sahiptir. \mathbf{R}^3 üç-boyutlu Öklid uzayını Cl_3 Clifford cebiri

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= 1, \quad e_2^2 = 1, \quad e_3^2 = 1 \\
e_1e_2 &= -e_2e_1, \quad e_1e_3 = -e_3e_1, \quad e_2e_3 = -e_3e_2.
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

bağıntılarıyla uygunluk sağlayan $\{e_1, e_2, e_3\}$ kurulumuyla birleşme özelliğine sahip olarak türetilmiştir. Clifford cebiri Cl_3 aşağıdaki temeller itibariyle 8-boyutludur:

1	skalar	
e_1, e_2, e_3	vektörler	
e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3	iki-vektörler	(3.18)
$e_1e_2e_3$	bir hacim elemanı	

$i \neq j$ ise birim vektörü $e_{ij} = e_i e_j$ şeklinde ve yönlü birim hacim elemanı $e_{123} = e_1 e_2 e_3$ şeklinde kısaltılır. Cl_3 'teki keyfi bir eleman bir skalar toplamı, bir vektör, bir iki-vektör ve bir hacim elemanıdır ve

$$\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b}e_{123} + \beta e_{123} \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ve $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ şeklindedir.

3.4 Üç-boyutlu Öklid Uzayında Dönme ve Yansımanın Clifford Cebiriyle Temsili

Öklid düzleminde dönme tartışıldığında, $\cos\theta + \sin\theta\mathbf{I}$ şeklindeki bir spinör'ün θ açısı kadar bir vektörü döndürdüğü görülür. Daha sonra birim vektörler olan \mathbf{s} ve \mathbf{t} 'nin geometrik çarpımlarının bir spinör olduğunu göreceğiz; çünkü $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = \cos\theta$ ve $\mathbf{s} \wedge \mathbf{t} = \sin\theta\mathbf{I}$ şeklindedir.

Şimdi bir düzlemdeki dönmenin tüm boyutlar için nasıl işlediği gösterilecek, bu devam ettirildiğinde keyfi dönmeler yapabilecektir. Sonuç olarak; bunun dönüşümler için geleneksel metotlarla nasıl bağıntısı olduğu görülecektir.

Birim iki-vektör \mathbf{B} 'yi dönme düzlemini tanımlamak için kullanır. Verilen \mathbf{v} vektörü iki-vektörle aynı düzlemdir. Bu \mathbf{v} vektörünün θ açısıyla \mathbf{v}' vektörüne döndürülecek olursa, $\cos\theta + \sin\theta \mathbf{B}$ formundaki \mathbf{R} spinörü kullanıldığında;

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v} \quad (3.20)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi kanıtlanması gereken \mathbf{v}' 'nin \mathbf{B} ve \mathbf{v} ile aynı düzlemde olduğudur. Bunun için;

$$\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B} = 0 \quad (3.21)$$

iyi bilinen nokta çarpım yoluyla \mathbf{v} ve \mathbf{v}' arasındaki açının θ 'ya eşit olduğunu gösterirsek, eşitlik aşağıdaki gibi devam eder:

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}'| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta \quad (3.22)$$

Dikkat edilmelidir ki, daha önce bu vektörlerin ve iki-vektörlerin uzaydaki boyutları hakkında söz edilmedi, bunun bütün boyutlarda geçerli olacağından emin olunmalıdır. Spinör tam olarak yazılırsa;

$$\mathbf{v}' = (\cos\theta + \sin\theta \mathbf{B})\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta \mathbf{B}\mathbf{v}$$

\mathbf{v} bir vektör ve \mathbf{B} bir iki-vektördür. Yukarıdaki eşitlik tekrar yazılırsa;

$$\mathbf{v}' = \cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{v})$$

dir. \mathbf{v} ve \mathbf{B} aynı düzlem üzerindedir ve biliyoruz ki $\mathbf{B} \wedge \mathbf{v} = 0$ dır. Sonuç olarak;

$$\mathbf{v}' = \cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$$

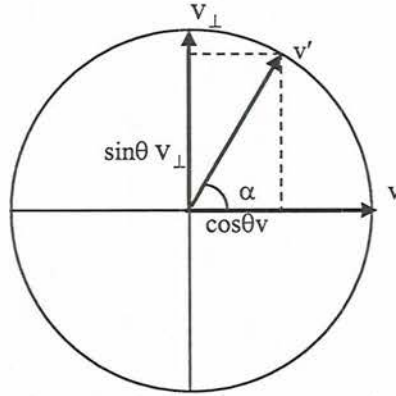
ifadesi yazılabilir. Bilindiği gibi birim vektörle, iki-vektörün iç çarpımları yansıma operasyonu sonucu, vektörün, iki-vektör düzlemi üzerindeki izdüşümü olacaktır. Böyle olunca \mathbf{v} vektörü iki-vektör düzleminde yer alır. Bu nedenle, bu kendi izdüşümüdür. Sonuç olarak; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$ aynı düzlemde bulunan bir vektördür fakat \mathbf{v} vektörüne diktir. Bu vektörü \mathbf{v}_\perp ile gösterilir.

$$\mathbf{v}' = \cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta \mathbf{v}_\perp$$

Eğer son eşitliğe bakılırsa \mathbf{v}' ; \mathbf{v} ve \mathbf{v}_\perp toplamına eşittir. Bu vektörlerin hepsi \mathbf{B} düzleminindedir. Bundan dolayı bütün bu vektörlerin toplamı aynı düzlem üzerinde olacaktır:

$$\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B} = 0$$

Eşitlik (3.21) nin ispatı için \mathbf{B} düzlemi içindeki üç vektörü Şekil 3.3 de göstereceğiz.



Şekil 3.3 Öklid düzlemde bir vektörün bileşenleri

Özetle göstermek gerekirse;

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}'| \cos\theta$$

\mathbf{v} ve \mathbf{v}' uzunlukları eşittir devam edilecek olursa;

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \cdot \cos\theta$$

\mathbf{v}' eşitlikte yerine yazılırsa,

$$(\cos\theta \mathbf{v} + \sin\theta \mathbf{v}_\perp) \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \cos\theta$$

Nokta çarpımı, vektör toplamı üzerinde dağıtılırsa;

$$(\cos\theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \sin\theta \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2 \cos\theta$$

\mathbf{v}_\perp ve \mathbf{v} birbirlerine dik ve bunların nokta çarpımları sıfırdır.

$$\cos\theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \cos\theta$$

Sonuç olarak bir vektörün kendisiyle nokta çarpımı, büyüklüğünün karesine eşittir.

$$\cos\theta |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2 \cos\theta$$

Sonuçta ispatı istenen, $(\cos\theta + \sin\theta \mathbf{B})$ şeklindeki spinörün \mathbf{B} düzlemi üzerindeki her vektörü θ açısıyla döndürmesidir. Bu da spinörlerin her boyutta çalıştığını gösterir. Öklid düzleminde \mathbf{B} düzlemi hakkında pek fazla seçenek yoktur, çünkü sadece bir tane düzlem vardı. Fakat üç ya da daha fazla boyutta keyfi alınan iki-vektör kullanılabilir.

Doğruları döndürmesi istenen vektör, gerçek düzlemde olduğunda yukarıdaki yaklaşım kullanılabilir. Açıkçası keyfi vektörleri döndürmek istenir. Şimdi bunu başarabilmek için yansımaların boyutsuz yoldan nasıl kullanıldığına değinilecektir.

Herhangi bir \mathbf{v} vektörü üzerinde ardışık iki yansıma operasyonunun sonucunu inceleyelim. Kullanılan birim vektörlerden biri \mathbf{s} diğeri ise \mathbf{t} olsun.

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{t}(-\mathbf{s}\mathbf{v}\mathbf{s})\mathbf{t} = \mathbf{t}\mathbf{v}\mathbf{s}\mathbf{t}$$

\mathbf{st} 'yi \mathbf{R} olarak ifade edilir, çünkü bu bir versordur:

$$\mathbf{ts} = (\mathbf{st})^\dagger = \mathbf{R}^\dagger$$

olarak yazılabilir.

\mathbf{R} ve \mathbf{R}^\dagger aşağıdaki gibi gösterilirse;

$$\mathbf{R} = \mathbf{st} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}$$

$$\mathbf{R}^\dagger = \mathbf{ts} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}$$

Bunlar spinörlerdir (skalar + iki-vektör) ve $\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}$ düzleminde döndürücü olarak kullanılabilir. Bunun kombinasyonu, keyfi dönüşümler yapmayı ve \mathbf{v} vektörünün dönme düzleminde olma koşulunu kaldırmayı sağlar.

Şimdi iki-vektör $\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}$ tarafından belirlenen dönme düzlemini \mathbf{A} ile gösterelim. \mathbf{v} vektörü ayrılsın, bir parçası \mathbf{A} 'ya dik diğeri parçası da \mathbf{A} 'ya paralel olsun.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel \mathbf{A}} + \mathbf{v}_{\perp \mathbf{A}}$$

Bundan sonraki işlemleri yapılacak olursa;

$$\begin{aligned}
v_{\parallel A} A &= v_{\parallel A} \cdot A + \overbrace{v_{\parallel A} \wedge A}^{=0} \\
&= v_{\parallel A} \cdot A \\
&= -A \cdot v_{\parallel A} \\
&= -A \cdot v_{\parallel A} - A \wedge v_{\parallel A} \\
&= -A v_{\parallel A}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlik $v_{\parallel A} \cdot A = -A \cdot v_{\parallel A}$ ifadesinin neden bu şekilde olduğunu gösterir. Vektörler için iç çarpımın değişme özelliği vardır. Oysa ki bir vektör ve iki-vektörün arasındaki iç çarpımın değişme özelliği yoktur. Buradan anlaşılıyor ki, değişimin işareti elemanların derecesine bağlıdır. \mathbf{p} vektörü, \mathbf{Q} elemanı ve r derecesi kullanıldığında;

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} = (-1)^{r+1} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p} \text{ olur.}$$

\mathbf{v} vektörünün dik olan kısmı için;

$$\begin{aligned}
v_{\perp A} A &= \overbrace{v_{\perp A} \cdot A}^{=0} + v_{\perp A} \wedge A \\
&= v_{\perp A} \wedge A \\
&= A \wedge v_{\perp A} \\
&= A \cdot v_{\perp A} + A \wedge v_{\perp A} \\
&= A v_{\perp A}
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Eğer bir vektörle, iki-vektörün dış çarpımlarının değişme özelliği konusunda anlaşılmayan bir kısım söz konusuysa; iki vektör arasındaki dış çarpımın değişme özelliği olmadığı hatırlanmalıdır. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}
v_{\perp A} \wedge A &= v_{\perp A} \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{t} \\
&= -\mathbf{s} \wedge v_{\perp A} \wedge \mathbf{t} \\
&= \mathbf{s} \wedge \mathbf{t} \wedge v_{\perp A} \\
&= A \wedge v_{\perp A}
\end{aligned}$$

Sonuçta \mathbf{p} vektörü, \mathbf{Q} elemanı ve r derecesindeki dış çarpımın değişme özelliği iç çarpımdaki gibi ilişkilidir.

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{Q} = (-1)^r \mathbf{Q} \wedge \mathbf{p}$$

Denkleminin ispatı kolaydır. İşareti basit olarak vektörün ne kadar değiştiğine ve vektörün derecesine bağlıdır. Bu direkt olarak vektörün derecesiyle ilgilidir. Oluşturulan bu tanım kısaca özetlenecek olursa;

$$v_{\parallel A} A = -A v_{\parallel A} \quad (3.23)$$

$$v_{\perp A} A = A v_{\perp A} \quad (3.24)$$

Bu ispatın diğer kısmında kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\parallel A} &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\parallel A} \\
 &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\parallel A} - (\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\parallel A} \\
 &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\parallel A} - \mathbf{A} \mathbf{v}_{\parallel A}
 \end{aligned}$$

İç çarpım $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$ sadece bir skalerdir ve bundan dolayı geometrik çarpımı $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\parallel A}$ değişme özelliğine sahiptir ve Eşitlik (3.23) aşağıdaki eşitliklerin yazılmasını sağlar:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\parallel A} &= \mathbf{v}_{\parallel A} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{v}_{\parallel A} \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{v}_{\parallel A} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{v}_{\parallel A} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \\
 &= \mathbf{v}_{\parallel A} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \\
 &= \mathbf{v}_{\parallel A} \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

Aynı yolla (3.24) eşitliği kullanıldığı zaman,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\perp A} &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\perp A} \\
 &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\perp A} - (\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\perp A} \\
 &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{v}_{\perp A} - \mathbf{A} \mathbf{v}_{\perp A} \\
 &= \mathbf{v}_{\perp A} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{v}_{\perp A} \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{v}_{\perp A} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{v}_{\perp A} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \\
 &= \mathbf{v}_{\perp A} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \\
 &= \mathbf{v}_{\perp A} \mathbf{R}^\dagger
 \end{aligned}$$

Yeni ortaya çıkan tanım aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\parallel A} = \mathbf{v}_{\parallel A} \cdot \mathbf{R} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\perp A} = \mathbf{v}_{\perp A} \cdot \mathbf{R} \quad (3.26)$$

Orijinal eşitliğe dönülecek olursa;

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v} \mathbf{R}$$

\mathbf{v}' niceliği (3.25) ve (3.26) 'denklemleri kullanılarak yeniden oluşturulacak olursa;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}' &= \mathbf{R}^\dagger (\mathbf{v}_{\parallel A} + \mathbf{v}_{\perp A}) \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\parallel A} \mathbf{R} + \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v}_{\perp A} \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{v}_{\parallel A} \mathbf{R} \mathbf{R} + \mathbf{v}_{\perp A} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

s ve t'nin birim vektörler olduğunu hatırlanacak olursa, sonuçta ;

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{R} = \mathbf{t} \mathbf{s} \mathbf{t} = 1$$

Bunun sonucu olarak;

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{R} \mathbf{R} + \mathbf{v}_{\perp \mathbf{A}} \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\parallel \mathbf{A}} \mathbf{R} \mathbf{R} + \mathbf{v}_{\perp \mathbf{A}}$$

elde edilir. \mathbf{A} 'ya paralel olan \mathbf{v} parçası \mathbf{R} ile iki kere çarpılacak olursa ve dik olana hiçbir işlem yapılmaz ise (tekrar hatırlanacak olursa \mathbf{R} bir skaler ve bir iki-vektör birleşimidir ki bu

vektör düzleminde vektörleri döndürür) $\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{A}}$ aynı düzlem üzerindedir. Bunun anlamı $\mathbf{R} \frac{1}{2} \theta$

açısı üzerinde döndürür. Bir çift dönüşümde θ açısıyla döner. Sonuçta $\mathbf{R}^\dagger \mathbf{v} \mathbf{R}$ tam istenilen sonucu verir. Bu Şekil (3.3)'te de gösterilmiştir. \mathbf{A} düzleminin dual'inin ifade edilmesi \mathbf{A}^* şeklinde olur. Bu düzlemin normalidir ve sonuçta düzlemin dönme eksenidir.

Geometrik cebirde dönmelerin inanılmaz karışık olduğunu düşünmek şaşırtıcıdır. Bu yapılanların hepsi θ açısının ve iki-vektör \mathbf{A} 'nın ispatıydı.

$$\mathbf{R} = \cos \frac{1}{2} \theta + \sin \frac{1}{2} \theta \mathbf{A}$$

Bir spinör, keyfi alınan bir vektörün dönüşümünü \mathbf{A} düzlemindeki bağıntısı aşağıdaki şekilde yapılabilir:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{v} \mathbf{R}$$

Diğer bir deyişle, spinör \mathbf{A} düzleminin normali etrafında dönmesini sağlar. Bunun en iyi tarafı spinörler, sadece vektörler için çalışmazlar her çoklu-vektör için çalışırlar, bunun anlamı spinörler ayrıca iki-vektörler, üç-vektörler ya da tümünü çoklu-vektörlere dönüştürmek için kullanılabilir. Örneğin, eğer bir iki-vektör varsa, bir \mathbf{a} eksenini ya da iki-vektör \mathbf{a} 'ya komşu olan $\mathbf{a}^* = \mathbf{A}$ eksenini etrafında θ derece kadar döndürülebilir.

$$\mathbf{B}' = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{B}' = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{B} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{A} \right)$$

Spinör teorisinin ifadesi ispatı birçok yoldan bulunabilir. Şimdi spinörlerin özgün tanımıyla, boyutunu ve bu eksenler etrafında dönmeleri daha iyi anlaşılabilir. Öklid düzlemine geri dönülecek olursa, üç boyutun anlamının ne olduğunu görülür. \mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{13} \mathbf{e}_{23} üç birim iki-vektörleri $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ şeklinde , kullanıldı ve üçlü bir yapı kullanarak herhangi bir iki-vektör

\mathbf{B} vektörü göz önünde bulunduruldu. Eğer \mathbf{B} bir birim iki-vektör ise skalar kısmı γ sembolü

ile tanımlanır. Daha sonra aşağıdaki gibi bir θ açısının üzerinde $\mathbf{R} \in Cl_3$ bir spinörü;

$$\mathbf{R} = \left(\underbrace{\cos \frac{\theta}{2}}_{\gamma} + \underbrace{\sin \frac{\theta}{2}}_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \mathbf{A} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi bir spinör, dört bileşenden meydana gelir. Şimdi aşağıdaki eşitliklere bakılacak olursa;

$$\mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{13} \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_{23} \mathbf{e}_{23} = -1$$

$$\mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{13} = -\mathbf{e}_{23}$$

$$\mathbf{e}_{13} \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{23}$$

$$\mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_{13}$$

$$\mathbf{e}_{23} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_{13}$$

$$\mathbf{e}_{13} \mathbf{e}_{23} = -\mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{e}_{23} \mathbf{e}_{13} = \mathbf{e}_{12}$$

Birim baz iki-vektörleri $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{13}$ sırasıyla $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ile gösterilirse;

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{jk} = \mathbf{i}$$

Cl_3 deki bir spinör yazılırsa;

$$\mathbf{R} = (w, xi, yj, zk)$$

$$w = \cos \frac{1}{2} \theta$$

$$x = \sin \frac{1}{2} \theta \beta_1$$

$$y = \sin \frac{1}{2} \theta \beta_2$$

$$z = \sin \frac{1}{2} \theta \beta_3$$

Benzer bir bakış açısıyla başlanırsa, kuaternionlarla ilgili anlatılan i, j, k çarpımı yoluyla, spinörlerin tanımı karşılaştırılırsa aralarındaki benzerlikler kolaylıkla görülebilir. Aslında üç boyutlularda spinörler tam olarak kuaternionlardır. Bir kuaternionun döndürülmesi kuaternionun ve onun tersi arasında bir vektör sıkışmasıdır (sandvic gibi). Kuaternionlarla spinörler tamamen aynıdır. Bir kuaternion bir skaler + bir iki-vektördür.

Burada önemli olan kuaternionların dört bileşenden oluşmasıdır. Dört boyutlu ya da sanal olarak kuaternionlar hakkında hiçbir şey yoktur. İlk bileşen skaler diğer üçü iki-vektör düzleminde yapılan döndürmeyle ilişkilidir. Eğer eksen açısının temsilinden bir kuaterniona olan değişmeye bakılırsa açının ikiye bölündüğü görülecektir.

Şimdi bu anlamlandırılı bilir. Çünkü spinör, vektörün aynı doğru üzerinde bulunan bölümünü dönüştürür. Bununla beraber eksenin çiftini(iki katını) alınıp $\sin \frac{1}{2}\theta$ ile çarpıldığında ihtiyacı duyulan iki-vektör ortaya çıkarır.

Eğer iki spinörün geometrik çarpımı tamamen yazılmak istenirse bunun kuaternion çarpımıyla tamamen aynı olduğu görülecektir. (w, x, y, z) spinörünün tersi $(w, -y, -x, -z)$ şeklindedir. Bu aslında ters açığa karşı gelen dönme anlamına gelir. Şöyle ki; $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ şeklindedir.

Spinörler üç boyutta kuaternionlar olabilir, fakat geometrik cebir bunu daha fazla açıklar.

- Bir kuaternionun 4-boyutta tanımlı değildir ve sanal kısmı yoktur. Bu basitçe bir skalar ve iki-vektördür.
- Spinörler sadece vektörleri döndürmezler, iki-vektörleri, üç-vektörleri, n-dereceleri ve bütün çoklu-vektörleri dönüştürebilirler. Eğer düzlemin normalini dönüştürmek değiştirmek denenirse, düzlemin direkt olarak değiştiği görülebilir.
- Spinörler boyuttan bağımsız; 2D, 4D ve diğer boyutlarda iyi çalışır. Bu teorilerin amacı, hiçbir değişiklik yapmadan uzayı genişletmektir.

3.5 Cl_3 Clifford Cebirinin Matris Gösterimi

Elemanları kompleks sayı olan 2×2 matrisleri $C(2)$ şeklinde gösterilir. Genel olarak, matris elemanları C kompleks alanda olsa bile, bunun R 'de reel sayılar üzerinden yapılan skalar çarpımla, reel bir cebir olarak kurulduğunu göz önünde bulundurmak gerekir.

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \text{ ve}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$$

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3$$

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2$$

(3.27)

çarpımlarıyla uygunluk sağlayan Pauli-Spin Matrisleri şu şekildedir:

$$\sigma_1 \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \cong \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Ayrıca bunlar, $C(2)$ reel cebirini üretmektedirler. $e_1 \cong \sigma_1, e_2 \cong \sigma_2, e_3 \cong \sigma_3$ arasındaki uyum reel cebirler arasında bir izomorfizm kurmaktadır,

$$Cl_3 \cong C(2)$$

Temel elemanların izomorfizm Çizelgesi şu şekildedir:

Çizelge 3.1 $C(2)-Cl_3$ izomorfizmi

$C(2)$	Cl_3
I	1
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	e_1, e_2, e_3
$\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3$	e_{12}, e_{13}, e_{23}
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	e_{123}

$i \neq j$ için $e_{ij} = -e_{ji}$ 'dir. Cl_3 Clifford cebri ve onun matris temsili $C(2)$ arasındaki temel fark şu şekildedir. Clifford Cebirinde kendi ifadesinde yer alan bir alt-uzay özelliğini seçmek gerekir. Bu seçim; içerisinde $r^2 = |r|^2$ şeklinde bir vektörün karesinin kendi uzunluğunun karesine eşit olduğu " \mathbf{R}^3 Vektör Uzayı"dır. Buna benzer hiçbir seçilmiş alt-uzay, $C(2)$ matris cebirinin tanımında görülmemektedir. Bunun yerine \mathbf{R}^3 'ü temsil etmek için iz'i (trace) olmayan hermityen matrisler kullanılır ve bu arada fazladan bir yapı $C(2)$ 'ye eklenmiştir.

4. ELEKTROMAGNETİZMANIN CLIFFORD CEBİRİYLE TEMSİLİ

4.1 Maxwell Denklemleri

Bilindiği gibi zamanla değişen manyetik alan,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1)$$

ile belirlenen \mathbf{E} elektrik alanını meydana getirir. Buna benzer olarak zamanla değişen elektrik akımının veya elektrik alanının da bir manyetik alan oluşturabileceği düşünülebilir. Başka bir deyimle $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ ile $d\phi_E / dt$ arasında bir bağıntı bulunabilir.

Bilindiği gibi elektrostatikte Gauss kanunu $\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q$ şeklinde ifade edilir. Ancak elektrik akısı $\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ olduğuna göre

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Öte yandan bu bağıntının zamana göre türevi alınırsa;

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dt} = \frac{i}{\epsilon_0}$$

veya

$$i = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (4.3)$$

şeklindedir. Bu bağıntıdan faydalanarak elektromanyetizmanın Amper kanunu;

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (4.4)$$

şeklinde de yazılabilir. Şu halde manyetik alan hem i elektrik akımı, hem de elektrik alanının değişimi ile meydana getirilebilir. Bu taktirde Ampere kanunu en genel halde

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılmalıdır. Buna *Ampere-Maxwell kanunu* denir.

Ancak Eşitlik (4.3) veya Eşililik (4.4) bağıntılarındaki $\epsilon_0 d\phi/dt$ akım şiddeti boyutundadır. Buna, yani (4.3) bağıntısıyla belirlenen akıma çoğu zaman *yer değiştirme akımı (deplasman akımı)* denir. Fiziksel olarak yüklerin hareke edebildiği ortamda bu akımı düşünmek kolaydır, fakat maddenin bulunmadığı boşlukta yer değiştirme akımından söz etmek ilk bakışta anlamsız gibi düşünülebilir. İşte Maxwell'in *elektromanyetik teoriye* en büyük katkısı, şüphesiz elektrik alanın değişimi nedeniyle boşlukta yer değiştirme akımının oluştuğunu düşünebilmesidir.

Akımdan söz edildiğinde bir hacime giren yükün o hacimden dışarı akan yüke eşit olduğu anlaşıldığından, bunun boşluk içinde geçerli olması gerekir. Örneğin bir kondansatörün bir levhasına giren akım levhayı aynen terk etmelidir. Ancak bu levha ile diğeri arasında, dielektrik gibi bir fiziksel ortam bulunmaya bilir. İşte tel boyunca akan akım kondansatörün levha hacmine girer, levhadan deplasman akımı çıkar. Bu nedenle iki tür akımdan söz etmek gerekli olur:

- i. Ohm kanununa uyan omik veya iletkenlik akımı,
- ii. Eşitlik (4.3) ile belirlenen deplasman akımı.

Başka bir deyimle bir ortamın iletkenliğinden, yani direncinden söz edilirse bu ortamda omik akım oluşur; ortamın direncinden söz edilmeyip, μ permeabilitesinden ve ϵ dielektrik sabitinden söz edilirse ortamda oluşan akım deplasman akımıdır. Bu taktirde Eşitlik (4.5), i_d yerdeğiştirme akımı olmak üzere,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i + i_d)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla yerdeğiştirme akımı kavramıyla akımın sürekliliği sağlanmış olur.

Elektromanyetizma, dört temel bağıntı ile anlaşılabilir. Bu dört bağıntıya *Maxwell denklemleri* denir ve aşağıdaki gibidir:

I. Elektrik alan ve elektrik yükleri arasındaki bağıntıyı veren Gauss yasası:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q \quad (4.6)$$

2-Manyetizmanın Gauss yasası:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.7)$$

3-Elektrik akımının veya değişken elektrik alanın oluşturduğu manyetik alanı ifade eden Ampere - Maxwell yasası:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_0}{dt} \quad (4.8)$$

4-Değişken manyetik alanın meydana getirdiği elektrik alanı ifade eden Faraday' ın indüksiyon yasası:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.9)$$

Bu dört matematiksel denklem aracılığı ile elektromanyetik enerjinin bir yerden bir başka yere taşınması veya aktarılmasının bir dalga hareketiyle olduğunu anlamak, bu dalga hareketinin diferansiyel denklemini belirlemek ve bu dalgaların hızını hesaplamak imkan dahilindedir.

4.2 Maxwell Denklemlerinin Clifford Cebiri ile Temsili

Maxwell denklemleri olan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

ve Lorentz kuvvet yasası,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.11)$$

ile başlayacak olursa burada, \mathbf{p} momentum, q yük, \mathbf{v} bilinen hız ifadesidir.

Clifford cebiri olarak da bilinen geometrik cebir daha önce tartışıldığı gibi bir çok avantaja sahiptir. Bu durum şu şekilde ortaya çıkıyor. Şu an itibariyle gösterebildiğimiz, Eşitlik (4.10), yani en basit şeklinin bütün anlamını içeren, kolay hatırlanabilir bir formda;

$$\nabla F = 4\pi J \quad (4.12)$$

yazabiliriz.

Bu ifade tarzı en az dönmeler kadar çıkışları içeren açıkça Lorentz sabiti olan büyük bir avantaja sahiptir. Lorentz sabiti açıkça belli olmadığında Eşitlik (4.10) ile bunun tersini verir.

En karmaşık yaklaşım Lorentz Kuvvet Yasasıyla birleşim içerisinde olan Eşitlik (4.12) denklemi çözmek olabilir. Bunun yerine Eşitlik (4.12) denklemden başlayarak en basit Maxwell denkleminin Eşitlik (4.10) elde edilmesine bakmak gerekir. İki yaklaşımı birbirine bağlamak için ortonormal temel vektörler olan $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 içindeki bir referans çerçevesinin seçildiği dört boyutlu elektrik akımı formülüne ihtiyaç vardır.

$$\mathbf{J} = \rho\gamma_0 + \mathbf{j}^k\gamma_k \quad (4.13)$$

Genel de, γ_0 zaman türü temel vektördür. Görüldüğü gibi ρ zaman yönünde korunumlu yük akışıyla birlikte hareket etmelidir.

Son olarak \mathbf{F} 'nin, bilinen \mathbf{E} ve \mathbf{B} alanları ile ne derece ilişkili olduğunu bilmek gerekir. Herhangi bir özel çerçevede;

$$\mathbf{F} = (\mathbf{E} + i\mathbf{B})\gamma_0 \quad (4.14)$$

şeklindedir. Burada $i = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ birim sankiskalar (pseudoscalar) dır. Bu ifade;

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{E}\gamma_0 - \mathbf{B}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &= \mathbf{E}^k\gamma_k\gamma_0 - \mathbf{B}^k\gamma_k\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklinde genişletilebilir. Burada \mathbf{E}^k ve \mathbf{B}^k bizim seçilen çerçevede ölçülmüş olan elektrik ve manyetik alanların bileşenleridir.

Burada belirtilen, elektromanyetik alanı iki-vektör olarak görmek gerektiğidir. Herhangi bir özel çerçevede bu iki-vektör \mathbf{F} iki katkı sunmaktadır; biri \mathbf{E} ile birleşik, zaman türü yönelimlerle iki-vektörün kenara sahip olmasıyken diğer yandan ikinci katkı \mathbf{B} ile birleşik, boşluk türü yöntemlerde iki-vektörün her iki kenara da sahip olmasıdır.

Burada, Clifford cebirinin merkezi özelliği en yüksek düzeyde kullanılmaktadır, yani vektörlerin çarpma özelliği kullanılıyor. Bu çarpma işlemi genel birleşme ve dağılma kurallarına uymaktadır. Fakat genel olarak değişme özelliğini içinde barındırmaz. Özelde,

temel vektör γ_μ ortogonal olduğu için, bunların hiçbiri diğerleriyle değişme özelliğini sağlamaz.

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu \text{ ve hepsi için } \mu \neq \nu \quad (4.16)$$

ve $D = 1+3$ teki nomalizasyon koşulu zaman türü bileşenlerde bir (-) işareti gerektiriyor.

$$\begin{aligned} \gamma_0 \gamma_0 &= -1, \\ \gamma_1 \gamma_1 &= +1, \\ \gamma_2 \gamma_2 &= +1, \\ \gamma_3 \gamma_3 &= -1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Şimdi yapılması gereken Eşitlik (4.14)ü, Eşitlik (4.12) nin içine yerleştirip türevini almaktır.

Burada \mathbf{E} içeren 12 denklem olacaktır. Çünkü \mathbf{E} , \mathbf{E}^k şeklinde 3 bileşene sahiptir ve türev operatörü ∇^μ de 4 bileşene sahiptir. Buna benzer şekilde, \mathbf{B} içeren 12 bileşen daha mevcut olacaktır.

$$\begin{aligned} \nabla F = & +(\nabla^0 E^1 \gamma_1)^* & +(\nabla^1 E^1 \gamma_0)^{***} & -(\nabla^2 E^1 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2)^{**} & +(\nabla^3 E^1 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_1)^{**} \\ & +(\nabla^0 E^2 \gamma_2)^* & +(\nabla^1 E^2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2)^{**} & +(\nabla^2 E^2 \gamma_0)^{***} & -(\nabla^3 E^2 \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3)^{**} \\ & +(\nabla^0 E^3 \gamma_3)^* & -(\nabla^1 E^3 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_1)^{**} & +(\nabla^2 E^3 \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3)^{**} & +(\nabla^3 E^3 \gamma_0)^{***} \\ & -(\nabla^0 B^1 \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3)^{**} & -(\nabla^1 B^1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)^{***} & -(\nabla^2 B^1 \gamma_3)^* & +(\nabla^3 B^1 \gamma_2)^* \\ & -(\nabla^0 B^2 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_1)^{**} & +(\nabla^1 B^2 \gamma_3)^* & -(\nabla^2 B^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)^{***} & -(\nabla^3 B^2 \gamma_1)^* \\ & -(\nabla^0 B^3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2)^{**} & -(\nabla^1 B^3 \gamma_2)^* & +(\nabla^2 B^3 \gamma_1)^* & -(\nabla^3 B^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)^{***} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bu ifadenin ne anlama geldiği tartışılırsa, * işaretli olarak göze çarpan 9 bileşenle başlayan, \mathbf{B} içeren 6 terim $\nabla \times \mathbf{B}$ 'nin bileşenleri iken \mathbf{E} içeren 3 terimde $+\nabla^0 \mathbf{E} = -(\partial/\partial t)\mathbf{E}$ 'nin bileşenleridir. Bu terimlerin her biri $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ boşluk türü temel vektörlerin bir tanesini içermektedir. Böylece $D=3$ 'teki yüzey vektörü ile ilgilenilmiş olunmaktadır. $D=3$ akım yoğunluğunu belirtir; sonuçta * şeklinde yazılmış terimler Eşitlik (4.10) ile çok iyi bir uyum sağlayan $\nabla \times \mathbf{B} - (\partial/\partial t)\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}$ formülünü verir.

Daha sonra, ** şeklinde göze çarpan 9 terim düşünülecek olursa; \mathbf{E} içeren 6 terim $\nabla \times \mathbf{E}$ 'nin bileşenleri iken, \mathbf{B} 'yi içeren 3 terim $-\nabla^0 \mathbf{B} = +(\partial/\partial t)\mathbf{B}$ 'nin bileşenleridir. Bu 9 terimin hepsi (γ_0) zaman türü doğrultuda bir izdüşümlü üç-vektör'dür. Eşitlik (4.12) herhangi bir üç-vektöre sahip olmadığından ** terimleri sıfırdır. Bu da $\nabla \times \mathbf{E} + (\partial/\partial t)\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 'dır. Ve ayrıca Eşitlik (4.10) ile uyum sağlamaktadır.

\mathbf{E} içeren *** ile gösterilen 3 terim zamanın fonksiyonu olan \mathbf{J} ile eşdeğerdir ve $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ olduğunu gösterir. \mathbf{B} içeren *** ile gösterilen 3 terim $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ denklemini verir.

Bu gerçekten yeteri kadar mekanik özelliğe sahiptir. Sadece olayın biçimselliği takip edilmiştir. Son sıradaki $+\nabla B^3 \gamma_1$ ifadesi hesaba katılırsa, iki çarpanlı ∇F ifadesi ile başlar. Böylece sorudaki terim iki çarpanlı olacaktır. Bunlar $-\nabla^2 \gamma_2 B^3 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ olacak şekilde birleşen $\nabla^2 \gamma_2$ ve $-B^3 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ifadeleridir. Burada yapılacak tek şey standart bir form elde edebilmek için (γ)'yi uygulamak gerekir. Skalar ifadeleri baş tarafa alıp $+\nabla^2 \mathbf{B}^3 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ifadesini elde etmek için Eşitlik (4.16) kullanılarak ilk iki vektör uygulanır. Eşitlik (4.17) kullanımını $-\nabla^2 \mathbf{B}^3 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3$ ifadesine indirgeyen $-\nabla^2 \mathbf{B}^3 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_2 \gamma_3$ ifadesini elde etmek için bir kez daha işleme tabi tutulur.

Sonuca ulaşmaya yardımcı olacak tek kısım $-\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3$ ifadesinin yerine $\gamma_0 \gamma_3 \gamma_1$ ifadesini yazmaktır. Bu işlem işaretlerin düşmesine iyi bir örnektir. Böylece vektörel çarpımla nasıl uyum sağladığını görmek için kolaylık sağlar. $i = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ifadesi i 'nin sankiskalar olduğu $\{i\gamma_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ temel özelliğini kullanarak bütün sankiskalarları yazmak bir kural olarak söylenirse, bunun daha uygun görünmesini sağlayabilir. İşlemler yapıldıktan sonra bazı hükümlere karar vermek için terimleri nasıl ayırmak gerektiğini düşünmek gerekir. Çünkü doğal olarak terimler, vektörler, üç-vektörle boşluk türü ve zaman türü olarak birbirinden ayrılmaktadır.

Ayrıca geometrik formalizmi kullanarak Lorentz Kuvvet Yasası aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{p} = q\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \quad (4.19)$$

Burada τ uygun zamanı $\mathbf{u} = \mathbf{p}/m$ uygun hızı ve m sabit kütleyi belirtir. $D=1+3$ boşluk türü boyutta \mathbf{p} ve \mathbf{u} birer vektördür. Bu Eşitlik (4.11) in göreceli olarak doğru bir genellemesidir:

- Düzlemde izdüşüm olarak dik vektör bileşeni iki-vektör düzleminden çıkarılabilir.
- Nokta çarpımın sonucu düzlemedir ve izdüşüme dik olur. Büyüklüğü iki-vektörün büyüklüğüne ve iz düşümün büyüklüğüne orantılı olacaktır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Geometrik cebir iki kavramı ele alır. İlki; geometrik cebir, bir vektörün tek boyutlu bir alt uzay olduğunu kabul eder ve bundan dolayı daha yüksek boyutlu alt uzaylar olabilir. Alt uzayların genelleştirilmesi gibi, iki-vektör, üç-vektör ve k derecelerini tanımlar. Çoklu-vektörler farklı derecelerin lineer kombinasyonlarıdır.

İkinci olarak geometrik cebir çoklu-vektörler için geometrik çarpımı tanımlar. Çünkü geometrik çarpım, iç ve dış çarpımların ikisini de kapsar ve bir uygulamada ortogonalite ve kolineerlik durumlarını birleştirir. Dereceleri, çoklu-vektörleri, iç ve dış çarpımları ve geometrik çarpımı kullanarak, izdüşümden, yansımalar, buluşmalardan meydana gelen bir çok araç geliştirebiliyoruz.

Temeller ve araçlar bize doğrular ve uzaylar gibi ortak elementleri tanımlamamız için yeni yollar sunarlar. Bu bizim elementler arasındaki bağlantıların sebeplerini anlayabilmemizi sağlar.

Ayrıca geometrik cebir, kuaternion teorisinin alt yapısını oluşturur. Son olarak kuaternionlar ile ilgili dört boyutlu uzayda hiçbir şey olmadığını kanıtlar. Kuaternionlar bir skalar ve bir iki-vektörün lineer kombinasyonudur. Kuaternionlar, Plücker uzayını homojen model, birleşme ve buluşma operatörlerine bağlı olarak açıklar.

En iyisi de bütün teori, boyutlara bağlı değildir. Bu bizim her durumda yapabileceğimiz bağımsız ispat ve hesaplamaları yapabilmemizi sağlar. Küçük boyutlarda ispat ve daha sonra bunu genelleştirmek sezgiseldir. Geometrik cebir bunu yaparken bize kolaylık sağlar.

Hala geometrik cebirin gücü ve kullanışlılığı çok net değildir. Bu geometrik cebiri ilginç hale getirir. Klasik methodlarımızı kaybetmediğimiz basit bir gerçektir. Geometrik cebir bu methodları açıklar ve geliştirir daha sonrada zenginleştirerek bütün teorileri bir teori içinde birleştirir.

Bu çalışmada öncelikle $\nabla\mathbf{F} = 4\pi\mathbf{J}$ şeklinde Maxwell denklemlerini en basit şekilde ifade eden bir yaklaşım ortaya konulmuştur ve bu ifadenin geometrik cebir ile çözümlenmesi esas alınmıştır. Bu yaklaşımın temelini oluştururken, Maxwell denklemleri ile Lorentz kuvvet yasasını birbirine bağlamak için ortonormal temel vektörler olan $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 içinde bir referans çerçevesinin seçildiği dört boyutlu $\mathbf{J} = \rho\gamma_0 + \mathbf{j}^k\gamma_k$ elektrik akım formülü ifade edilmiştir. Bu gösterimlerdeki amaç, elektromanyetizmanın ve Lorentz kuvvet yasasının en basit şekilde ifade edip geometrik cebirin sistemsel çözümünü uygulayarak sonuca ulaşmaktır.

Elektromanyetizmanın temel denklemleri olan Maxwell denklemleri Clifford cebri ile incelenmiştir. Bu yapılırken amaç öncelikle, geometrik kavramların sistemini kurabilen Clifford cebrinin özellikle fizikte kullanımlarında kolay ve kullanışlı gösterimler sağlamaktadır. Sonuçta da bu şekilde elde edilen, elektromanyetizmanın temel denklemleri Maxwell denklemleri kompakt gösteriminin yanı sıra işlem kolaylığı da sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] LOUNESTO, P., *Introduction to Clifford algebras*, TTU Press, TN,(2002).
- [2] DORST, L. ve MANN, S.,*Geometrik Algebra: Computational Framework for Geometrical Applications* (Part 1: Algebra) <http://www.science.uva.nl/leo/clifford/dorst-mann-II.pdf> , published in IEEE Computer Graphics and Applications May/June, (2002).
- [3] HESTENES, D., *New Foundation for Classical Mechanics*, Kluwer Academic Pub. Dordrecht, (1987).
- [4] IAN, C. ve BELL, G., *Multivector Method*, <http://www.iancgbell.clara.net/maths/geoalg1.htm>, (1998).
- [5] DORST, L., *The Inner Product of Geometric Algebra, Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*, (Dorst, Doran, Lasenby, eds), Birkhauser, (2002).
- [6] SUTER, J., *Clifford-An efficient Geometric Algebra Library Using Meta Programming*, <http://www.jaapsuter.com>
- [7] HESTENES, D. ve SOBCYK, G., *Clifford Algebra to Geometric Calculus: Unified Language for Mathematics and Physics*, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, (1987).