

194 d18

**KOMPLEKS VE DUAL KUATERNİONLARIN  
FİZİKSEL UYGULAMALARI**

Süleyman DEMİR  
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı  
Eylül – 2003

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Süleyman DEMİR' in Kompleks ve Dual Kuaternionların Fiziksel Uygulamaları başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 26.09.2003 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ	
Üye	Prof. Dr. Mustafa ŞENYEL	
Üye	Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK	
Üye	Prof. Dr. Selami KILIÇKAYA	
Üye	Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04.10.2003... tarih ve 32/1..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü  
Prof. Dr. Özgür ÖZALP  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
M ü d ü r ü

## ÖZET

Doktora Tezi

### KOMPLEKS VE DUAL KUATERNİONLARIN FİZİKSEL UYGULAMALARI

SÜLEYMAN DEMİR

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ  
2003, 130 sayfa

Bu tezde reel, kompleks ve dual kuaternionların genel bir tanımı yapıldıktan sonra fizikteki olası uygulama alanları araştırılmıştır. Dört bileşenli kuaternionlar üç boyutlu vektör uzayını da içerdiklerinden vektörlere ilişkin birçok fiziksel nicelik vektör kuaternion olarak görülebilir. Bu ifadelerden bazıları kuaternion uzayında verilmiştir. Kompleks ve dual kuaternionların izomorfik matris temsilleri gösterildikten sonra Lorentz dönüşümleri, Maxwell denklemleri, klasik ve rölativistik elektromanyetizmaya ilişkin denklemler kapalı ve açık formda hem kuaternionlarla hem de matrislerle elde edilmiştir. Elektromanyetik alanlara ilişkin kompleks ve dual kuaternion teorilerinin bu gösterimleri 4-boyutlu vektör uzayından 8-boyuta kadar genelleştirilmesine olanak verdiği görülmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Kuaternionlar, Elektromanyetizma, Maxwell denklemleri, Rölativistik mekanik

## **ABSTRACT**

**PhD Thesis**

### **THE PHYSICAL APPLICATIONS OF COMPLEX AND DUAL QUATERNIONS**

**SÜLEYMAN DEMİR**

**Anadolu University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Physics Program**

**Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ  
2003, 130 pages**

In this thesis, general definitions of real, complex and dual quaternions and their possible applications in physics were investigated. Since quaternions with four parameters include the 3-dimensional vector space, the physical quantities related to vectors were shown to be vector quaternions. Some of these expressions in quaternion space were given. After demonstrating the isomorphic matrix representations of complex and dual quaternions, Lorentz transformations, Maxwell's equations, classical and relativistic equations related to electromagnetism were derived in compact and expanded forms, respectively, both for quaternions and matrix representations. It was shown that the complex and dual quaternionic theory of generalized electromagnetic fields enhances the dimensionality of these representations from the 4-dimensional to the 8-dimensional vector space.

**Keywords: Quaternions, Electromagnetism, Maxwell's equations, Relativistic mechanics**

## **TEŞEKKÜR**

Bu tezin hazırlanması sırasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren değerli hocam,

*Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ'a,*

manevi desteęini her zaman yanımda hissettięim eŐim,

*Mehtap Yıldız DEMİR' e,*

ve beni her konuda cesaretlendiren,

*Kerem TIęLI' ya,*

en içten duygularımıla teŐekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. REEL KUATERNİONLAR.....</b>	<b>6</b>
2.1. Tanımlar .....	6
2.2. Kuaternionlar Üzerine Temel İşlemler.....	7
2.2.1. Eşitlik .....	7
2.2.2. Skaler ile çarpma.....	8
2.2.3. Toplam ve fark.....	8
2.2.4. Kuaternionların çarpımı .....	8
2.2.5. Bir Kuaternionun eşleniği.....	10
2.2.6. Bir Kuaternionun normu.....	10
2.2.7. Bir Kuaternionun tersi.....	11
2.2.8. Kuaternionlarda bölme işlemi.....	13
2.3. Reel Kuaternionların Matris Temsilleri .....	13
<b>3. UZAY-ZAMAN KAVRAMI VE LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ.....</b>	<b>16</b>
3.1. Uzay-Zaman Kavramı .....	16
3.2. Galileo Dönüşümleri .....	16
3.3. Özel Rölativite Teorisi .....	18
3.4. Lorentz Dönüşümleri .....	19
3.5. Uzay-Zaman Kavramının İncelenmesi .....	21
3.5.1. Dört boyutlu Minkowski uzayı.....	21

3.5.2. Değişmez aralık(Invariant Interval) .....	23
3.5.3. Öklitsel ve öklitsel olmayan geometri.....	25
<b>4. LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ.....</b>	<b>29</b>
4.1. Dönüşüm Formülleri ile Lorentz Dönüşümleri .....	29
4.2. Cayley-Klein Parametreleriyle Lorentz Dönüşümleri .....	33
<b>5. REEL KUATERNİONLARIN BAZI UYGULAMALARI .....</b>	<b>39</b>
5.1. Küresel Hareketin İncelenmesi.....	39
5.2. Reel Kuaternionlarla Lorentz Dönüşümleri .....	44
5.3. Reel Kuaternionlar ve Kuantum Mekaniksel Operatörler.....	47
<b>6. KOMPLEKS KUATERNİONLAR .....</b>	<b>51</b>
6.1. Tanımlar .....	51
6.1.1. Kompleks kuaternionların çarpımı.....	52
6.1.2. Kompleks kuaternionların eşleniği .....	52
6.1.3. Kompleks kuaternionların normu .....	53
6.1.4. Kompleks kuaternionların tersi.....	53
6.2. Kompleks Kuaternionların Matris Temsilleri.....	53
<b>7. KOMPLEKS KUATERNİONLARLA RÖLATİVİSTİK MEKANİK..</b>	<b>63</b>
7.1. Kompleks Kuaternionik Aralık.....	63
7.2. Kompleks Kuaternionlarla Dört Boyutlu Uzay-Zamanın Özelliklerinin İncelenmesi .....	64
7.3. Lorentz Dönüşümlerinin Kompleks Kuaternion Temsilleri.....	65
<b>8. KOMPLEKS KUATERNİONLAR VE KLASİK ELEKTROMANYETİZMA.....</b>	<b>73</b>
8.1. Temel Tanımlar.....	73
8.2. Kompleks Kuaternionlar ve Maxwell Denklemleri.....	76

<b>9. KOMPLEKS KUATERNİONLAR VE RÖLATİVİSTİK</b>	
<b>ELEKTROMANYETİZMA .....</b>	<b>81</b>
9.1. Lorentz Dönüşümleri ve Kompleks Kuaternionik Alanlar .....	81
9.2. Elektrik ve Manyetik Alanların Kompleks Kuaternionik Dönüşümleri .....	86
<b>10. KOMPLEKS KUATERNİONLARIN BAZI MEKANİKSEL</b>	
<b>UYGULAMALARI .....</b>	<b>91</b>
10.1. Kompleks Kuaternionlarla Dönme Hareketinin İncelenmesi .....	91
10.2. Kompleks Kuaternionlar ve Açılal Momentum .....	93
<b>11. DUAL KUATERNİONLAR .....</b>	<b>95</b>
11.1. Dual Sayı .....	95
11.2. Dual Sayılar Üzerine Temel Eşitlikler .....	95
11.2.1. Toplam ve fark .....	95
11.2.2. Dual Sayıların Çarpımı .....	95
11.2.3. Eşitlik .....	95
11.3. Dual Vektörler .....	96
11.4. Dual Vektörler Üzerine Temel Eşitlikler .....	97
11.4.1. Dual vektörlerin skaler çarpımı .....	97
11.4.2. Dual vektörlerin vektörel çarpımı .....	97
11.4.3. Dual vektör eşitlikleri .....	97
11.5. Dual Kuaternionlar .....	98
11.6. Dual Kuaternionlar Üzerine Temel Eşitlikler .....	98
11.6.1. Dual Kuaternionların eşitliği .....	98
11.6.2. Toplam ve fark .....	99
11.6.3. Dual kuaternionların çarpımı .....	99
11.6.4. Dual kuaternionların eşleniği .....	100
11.6.5. Bir dual kuaternionun normu .....	101
11.6.6. Bir dual kuaternionun tersi .....	102
11.6.7. Dual kuaternionların bölümü .....	102
11.7. Dual Kuaternionların Matris Temsilleri .....	102



11.7.1. Dual sayıların $2 \times 2$ matrislerle gösterimi .....	102
11.7.2. Dual kuaternionların $4 \times 4$ matrislerle temsili .....	104
<b>12. DUAL KUATERNİONLARLA DOĞRULARIN ANALİZİ .....</b>	<b>106</b>
12.1. Dual Kuaternionlarla Bir Doğrunun Tanımı .....	106
12.2. Doğru Dönüşümleri .....	109
12.3. Doğru Dönüşümlerinin Analizi .....	110
<b>13. DUAL KUATERNİONLARLA KLASİK</b>	
<b>ELEKTROMANYETİZMANIN REFORMÜLASYONU .....</b>	<b>113</b>
13.1. Temel Tanımlar .....	113
13.2. Dinamik Alanlar .....	114
13.3. Statik Alanlar .....	114
13.4. Süreklilik Denklemi .....	115
13.5. Dual Kuaternionik Elektromanyetik Potansiyel .....	116
<b>TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>118</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>122</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

3.1 Eylemsiz gözlem çerçeveleri.....	17
3.2 Değişmez aralık.....	25
3.4a Öklitsel(Euclidean) uzay.....	26
3.4b Yarı-öklitsel uzay.....	26
4.1 Dönme hareketi.....	29
5.1 $m$ kütleli cismin küresel hareketi.....	40
5.2 Hareketli gözlem çerçeveleri.....	45
5.3 Uzay-zamanda $\phi$ kadar dönme.....	46
8.1 Elektrik alanın temsili.....	79
10.1 Dönme hareketi.....	91

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

- $q$  : Reel sayılar
- $\lambda$  : Skaler
- $\mathbf{q}$  : Reel kuaternionlar
- $\mathbf{q}$  : Reel vektör kuaternionlar
- $e_0$  : Kuaternionların skaler bileşenine ilişkin baz elemanı
- $e_1$  : Kuaternionların birinci imajiner baz elemanı
- $e_2$  : Kuaternionların ikinci imajiner baz elemanı
- $e_3$  : Kuaternionların üçüncü imajiner baz elemanı
- $S_q$  : Reel Kuaternionların skaler kısmı
- $V_q$  : Reel kuaternionların vektörel kısmı
- $\vec{r}$  : Üç boyutlu uzayda vektör
- $P(\dots\dots)$  : Üç boyutlu uzayda bir nokta
- $i$  : Kartezyen koordinat sisteminde  $x$ -bileşenine ilişkin birim vektör
- $j$  : Kartezyen koordinat sisteminde  $y$ -bileşenine ilişkin birim vektör
- $k$  : Kartezyen koordinat sisteminde  $z$ -bileşenine ilişkin birim vektör
- $R$  : Reel sayılar uzayı
- $H$  : Reel kuaternion uzayı
- $\mathbf{q}^*$  : Reel kuaternionların eşleniği
- “.” : Skaler çarpım
- “ $\times$ ” : Vektörel çarpım
- $N_q$  : Reel kuaternionların normu
- $\hat{u}$  : Birim vektör
- $\mathbf{q}^{-1}$  : Reel kuaternionların tersi
- $\Omega_i$  : Kuaternionların taban elemanlarına karşı gelen  $4 \times 4$  birim matrisler
- $\mathbf{Q}$  :  $4 \times 1$  matris
- $I_2$  :  $2 \times 2$  birim matris
- $I_3$  :  $3 \times 3$  birim matris

$I_4$	: $4 \times 4$ birim matris
$I_8$	: $8 \times 8$ birim matris
$Q$	: $8 \times 8$ matris
$Q^*$	: $8 \times 8$ matrisin eşleniği
$\Gamma_i$	: Kuaternionların taban elemanlarına karşı gelen $2 \times 2$ matrisler
$\tilde{a}$	: Dalga simetrik $3 \times 3$ özel matris
$\tilde{b}$	: Dalga simetrik $3 \times 3$ özel matris
$i$	: Kompleks birim ( $i^2 = -1$ )
$R$	: Dört boyutlu konum vektörü
$H_C$	: Kompleks kuaternion uzayı
$Q$	: Kompleks kuaternion
$Q$	: Kompleks vektör kuaternion
$Q_i$	: Kompleks kuaternion bileşenleri
$S_Q$	: Kompleks kuaternionun skaler kısmı
$V_Q$	: Kompleks kuaternionun vektörel kısmı
$Q^*$	: Kompleks kuaternionun eşleniği
$Q^c$	: Kompleks kuaternionun kompleks eşlenik
$Q^{-1}$	: Kompleks kuaternionun tersi
$N_Q$	: Kompleks kuaternionun normu
$D$	: Kompleks kuaternionik diferansiyel operatörü
$\vec{\nabla}$	: Del operatörü
$\rho_v$	: Elektriksel yük yoğunluğu
$\phi$	: Elektriksel potansiyel
$\vec{E}$	: Elektrik alan vektörü
$\vec{H}$	: Manyetik alan vektörü
$\vec{J}$	: Akım yoğunluğu vektörü
$\vec{A}$	: Vektör potansiyel

- $A$  : Dual sayı  
 $\varepsilon$  : Dual birim  
 $\vec{A}$  : Dual vektör  
 $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$  : İki dual vektörün skaler çarpımı  
 $\vec{A} \times \vec{B}$  : İki dual vektörün vektörel çarpımı  
 $Q$  : Dual kuaternion  
 $Q$  : Dual vektör kuaternion  
 $Q^*$  : Dual kuaternionun eşleniği  
 $Q^\circ$  : Dual kuaternionların dual eşleniği  
 $Q^{-1}$  : Dual kuaternionun tersi  
 $N_Q$  : Dual kuaternionun normu  
 $Re\{\dots\}$  : Reel kısım  
 $Du\{\dots\}$  : Dual kısım  
 $Q$  :  $4 \times 4$  dual matris  
 $\eta$  : Dual kuaternionik birim doğru vektörü  
 $D$  : Dual kuaternionik diferansiyel operatörü

## 1. GİRİŞ

Matematiksel fiziğin en önemli yapı taşlarından olan kuaternionlar 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından kompleks sayıları üç boyutlu uzaya taşımak amacıyla geliştirilmiştir [1-3]. Çalışmalarını başta iki kompleks ve bir reel bileşene sahip  $a + bi + cj$  ile tanımlanan üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştıran Hamilton bu sayı sistemi ile üç boyutlu uzaydaki bir noktayı temsil etmeyi amaçlıyordu. Burada  $a + ib$  ile verilen kısım kompleks düzlemdeki yönleri yansıtırken  $j$  ile verilen bileşen ise bu iki yöne dik üçüncü yönelimi temsil etmekteydi. Bu yolla cebirsel bir sistem kurmaya çalışan Hamilton çabaları sonuç vermeyince üçlü sistemden vazgeçmiş, ardından bu sisteme üçüncü bir imajiner bileşen ekleyerek bugün bilim dünyasında çok iyi bilinen reel kuaternionları keşfetmiştir. Yukarıda belirtildiği gibi Hamilton' a göre  $a + bi + cj$  üçlü sistemi ile çalışırken reel kısım uzaydaki bir yönelimi temsil ederken imajiner bileşenler üç boyutlu uzaydaki birbirine dik diğer iki yönelimi temsil etmekteydi. Hamilton üçüncü imajiner birim  $k$ ' yı eklemesinin ardından bu yorumunu da değiştirmiştir. Bir  $a + bi + cj + dk$  kuaternionunda reel bileşenin artık geometrik bir anlamı kalmamış, bunun yerine diğer üç imajiner birim birbirine dik üç yönü göstermek için kullanılmıştır [4].

Bu aşamadan sonra Hamilton' un skaler bileşeni hala niçin muhafaza ettiği sorusu akla gelebilir. Diğer üç imajiner bileşen kullanılarak üç boyutlu uzay kolaylıkla temsil edilebilirdi. Çünkü henüz vektör cebri oluşturulmadığından bu pekala mümkündü. Hamilton' un bu adımı niçin atmadığı aslında çalışmalarının amacında gizlidir. Hamilton kompleks sayıları üç boyutlu uzaya genelleştirmek istemiştir. Bu nedenle kuaternionun skaler kısmı aslında kompleks sayı karakterini yansıtmak amacıyla muhafaza edilmiştir. Öte yandan üç imajiner bileşenden oluşacak  $bi + cj + dk$  niceliğinin diğer bir  $fi + gj + hk$  niceliği ile çarpımının reel bileşenler içermesi ve hatta hiç imajiner bileşen içermeme olasılığı, iki niceliğin çarpımının aynı türden olma koşulu ile çeliştiğinden, bu durum üçlü imajiner bileşenden oluşan bir nicelikten iyi bir cebir oluşturma çabasını baltalamıştır [4].

Hamilton' dan sonra kuaternionlar üzerinde çalışan ikinci bilim adamı Tait' tir [5]. Fiziksel çalışmalarında kuaternionları bir araç olarak kullanan Tait, aslında Maxwell'in Cambridge'den bir arkadaşıdır. Maxwell, arkadaşlığı

sebebiyle kuaternionlarla da ilgilenmiştir. Maxwell elektromanyetizma ile ilgili 1873 yılında yayınlanan ünlü çalışmasında kuaternionları basitleştirerek kullanmıştır [6].

Kuaternionlar ve vektörler birbirlerinden farklı matematiksel nicelikler olmasına karşın vektörlerin kuaternionların farklı bir biçimde yorumlanmasından ortaya çıktığı belirtilmektedir [4]. Bugünlerde kullandığımız vektör cebri Gibbs ve Heaviside tarafından geliştirilmiştir [7], [8]. Gibbs ve Heaviside, kuaternionların Maxwell'in elektromanyetik teoride ifade ettiği biçimini daha kullanışlı bulmuşlar ve birbirlerinden bağımsız olarak kuaternionların tamamını kullanmak yerine bir kısmının kullanılmasının daha akılcı olduğuna karar vererek bugün kullandığımız vektör cebrinin temellerini atmışlardır. Bu bilim adamları kuaternion çarpımını kullanmak yerine iki vektör arasında skaler ve vektörel çarpım olmak üzere iki farklı türde çarpım tanımlamışlardır. Heaviside vektör cebrinin gelişmesinde önemli bir rol oynamıştır. Silva ve Martins'e [4] göre ilk çalışmalarında kuaternionları kullanan Heaviside, daha sonraki çalışmalarında kurduğu vektör sisteminde kuaternionlarından esinlendiğini inkar etmiştir.

Yukarıda belirtildiği gibi kuaternionlar bir skaler ile imajiner baz elemanlarına sahip bir vektörden oluşan özgün bir yapı olarak düşünülebilir. Bu nedenle skaler ve vektörlere ilişkin özelliklerin nerede ise tamamı kuaternionlar tarafından sağlanır. Bu nedenle kuaternionlar vektörlerin kullanıldığı fiziksel niceliklerin temsilinde önemli derecede rol oynamaktadır. Özgün yapıları ve işlevselliği nedeniyle dönme ve öteleme hareketinin temsilinde oldukça kullanışlıdırlar. Özellikle dönme hareketi ile ilişkili olan açısız yerdeğiştirme, açısız hız, açısız ivme ve momentum niceliklerinin türetilmesi konusunda Chou [9] tarafından yapılan çalışma dikkat çekicidir. Euler parametrelerinin birim kuaternion olarak ele alınması durumunda bir koordinat sisteminin yönelimini belirlemede doğrultman kosinüsleri gibi klasik yöntemlere göre önemli derecede avantajlara sahip olduğu Chou [9] ve Wehage [10] tarafından yapılan çalışmalarda belirtilmiştir. Bu nedenle kuaternionlarla dönme hareketi bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [11-15].

Son yıllarda yapılan robotik sistemlerin temsiline ilişkin çalışmalarda kuaternionlar adeta yeniden keşfedilmiştir [16-20]. Öte yandan kontrol ve

similasyon çalışmalarında kuaternionların önemli roller üstlendiği yapılan çalışmalardan ortaya çıkmaktadır [21-31].

Kuaternionlar ayrıca yerdeğiştirme, hız, ivme, kuvvet vb. gibi klasik mekaniğe ilişkin günlük hayatımızda çok sık kullandığımız fiziksel niceliklerin temsilinde kolaylıkla kullanılabilir [32-34].

Kuaternionlar rölativistik mekaniğin incelenmesinde de önemli roller üstlenmektedir. Bu nedenle kuaternionların önemi yirminci yüzyılın başından itibaren uzay-zaman kavramı üzerindeki çalışmaların yoğunlaşması üzerine artmaya başlamıştır. Silberstein [35] 1912 yılında yayınlanan çalışmasında Lorentz dönüşümlerini kuaternionlarla ifade etmeyi başarmıştır. Kuaternionların kullanıldığı son yıllardaki diğer çalışmaların da yine Lorentz dönüşümleri üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir [36-38]. Öte yandan De Leo [39] tarafından yapılan çalışmada ise kuaternionlar kullanılarak özel rölativite teorisi incelenmiştir.

Kuaternionların kendisine rahatlıkla yer bulduğu uygulama alanlarından birisi de kuantum mekaniğinin incelenmesidir. Kompleks bileşenler içermeleri nedeniyle kuantum mekaniğinde çok kullanılan dalga fonksiyonları ve operatörleri temsil etmede kolaylıkla kullanılabilir [40]. Schrödinger ve Dirac denklemlerinin ifade edilmesinde Adler [41] ve diğer araştırmacıların çalışmaları dikkat çekicidir [42-52]. Bu çalışmalarda kuantum mekaniğine ilişkin çalışmalar hem klasik anlamda hem de rölativistik olarak incelenmiştir.

Kuaternionlar, keşfedilişlerinden itibaren birçok bilim adamının dikkatini çekmiş, özellikle fiziksel ve matematiksel uygulamalarda yoğun olarak kullanılmıştır. Bu uygulama alanlarının başka bir tanesi de daha önce değinildiği üzere elektromagnetik teoridir. Maxwell denklemleri üzerindeki kuaternionlara ilişkin çalışmalar bizzat Maxwell [6] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmasında Maxwell kuaternionları üç boyutlu uzayda daha etkin kullanabilmek amacıyla bazı semboller geliştirmiştir. Kuaternionun vektörel kısmını göstermek amacıyla "V", skaler kısmı için "S" sembolünü kullanan Maxwell, bu notasyonla yirmi eşitliği ifade etmiştir [52-55]. Bu sembolleri kullanmasına rağmen Maxwell aslında kuaternionlardan yeterince yararlanamamıştır. İşlemlerini kuaternionlarla yapmayan Maxwell sadece sonuçları kuaternion formunda ifade etmekle



yetinmiştir. Buna karşın 1911 yılında Conway [56], elektromagnetik teori üzerindeki yapılan çalışmalardan yola çıkarak kuaternionları tekrar bu alana uygulamıştır. Bu ilk çalışmalar zaman içerisinde şekil değiştirmiş ve geçen yüzyılın sonlarına doğru farklı bir kılıkta karşımıza çıkmıştır.

Kuaternion teorisi zaman içinde kendisini yenileyerek çeşitlenmiştir. Diğer bir deyişle yeni kuaternion türleri tanımlanmıştır. Hamilton tarafından 1843 yılında keşfedilen kuaternionların bazı elemanları imajiner, bileşenleri ise reel sayılar olduğu için bu ilk tür “reel kuaternionlar” şeklinde adlandırılmış; ardından bileşenleri kompleks sayı olan kuaternionlara “kompleks kuaternionlar veya bikuaternionlar”, bileşenleri dual sayılar olan kuaternion çeşidine de “dual kuaternionlar” adı verilmiştir. Kompleks ve dual kuaternionların reel kuaternionlardan en önemli farklarından birisi de reel kuaternionların aksine dört reel bileşenden ziyade sekiz reel bileşen içermeleridir. Daha sonra tanımlanan bu yapılar kuaternionlar için bir dezavantaj olmamış, aksine daha geniş bir spektrumda kullanım alanı bulmalarına neden olmuştur. Bu tezin amaçlarından birisi de kompleks ve dual kuaternionların kullanım alanlarını genişletmektir.

Kompleks kuaternionlar ortaya çıkışlarının hemen ardından elektromanyetik teoride kendilerine uygulama alanı bulmuştur. 1976 yılında klasik elektromanyetizma Imaeda [57] tarafından kompleks kuaternionlarla yeniden incelenmiştir. Minkowski uzayının doğası, Lorentz dönüşümleri ve Maxwell denklemleri kompleks kuaternionların fonksiyonu olarak yeniden tanımlanmıştır. Bu çalışmadan etkilenen Negi ve arkadaşları, 1998 yılında yayınlanan çalışmalarında [58] kompleks kuaternionların izomorfik  $8 \times 8$  matris temsillerini tanımlamış, Maxwell denklemlerinin kompakt ve açık formlarını kompleks kuaternionlarla vermiştir. Ayrıca bu eşitliklere karşı gelen izomorfik matris temsillerini de ifade etmişlerdir. Öte yandan kompleks kuaternionların klasik elektromanyetik teoriye ilişkin uygulamaları Lambek [59] ve Colombo [60], Sweeter [61], Gsponer ve Hurni [62] tarafından da incelenmiştir. Tüm bu uygulamalar yardımıyla Maxwell’ in dört eşitliği daha kompakt ve daha şık formdaki bir eşitliğe indirgenmiştir. Kompleks kuaternionların kullanıldığı rölativistik elektromanyetizmaya ilişkin çalışmalar ise Silberstein [35], Waser [53-54], Abonyi [55], Sobczyk [63], Ward [64], Dahm [65], Jantzen [66],

Kassandrov [67] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda Maxwell denklemlerinin Lorentz dönüşümleri altındaki yeni formları elde edilmiştir. Kompleks kuaternionlar kuantum mekaniksel çalışmalara da başarı ile uygulanmıştır [68-71].

Dual kuaternionların yapıları dual sayılar ile kompleks baz elemanlarının bir kombinasyonudur. Yapıları nedeniyle dönme ve öteleme hareketinin birlikte yer aldığı sistemlerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Reel kuaternionlar üç boyutlu uzaydaki bir noktanın konumunu sahip olduğu üç baz elemanı ile kolaylıkla belirleyebilirken, dual kuaternionlar altı reel elemanı ile bir doğruyu aynı derecede kolaylıkla tanımlayabilirler. Ayrıca bunlara ilaveten dönme hareketinin geometrisinin kolaylıkla ifade edilebilmesi nedeniyle robotik uygulamalarda kullanılan kinematik ve dinamik ifadelerin elde edilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır [72-83]. Öte yandan dual kuaternionlarla bilgisayar programlamanın avantajlı olduğu birçok kaynakta belirtilmiştir [84-87].

Son yıllarda ise kuaternionların uygulama alanları neredeyse bilimin tüm dallarına dağılmaktadır. Kimyada molekül yapılarının incelenmesinden [88-95] tıbbi bilimlerde DNA ve protein yapıları, göz hareketinin tanımlanması [96-102], hidrodinamik ve elastik [103-104], astronomi ve optikteki uygulamalara [105-106] kadar geniş bir spektrumda kullanılmaya başlandığı görülmektedir.

Bu tezin amacı kompleks ve dual kuaternionların cebirsel özelliklerini tanımladıktan sonra bu yapıların fizikteki olası uygulama alanlarını araştırmaktır. Bu amaçla kompleks ve dual kuaternionların klasik mekanikten, rölativistik mekanik ve elektromanyetizmaya kadar geniş bir yelpazedeki uygulama alanları üzerinde çalışılmıştır.

## 2. REEL KUATERNİONLAR

Bu bölümde reel kuaternionların tanımı yapıldıktan matematiksel özellikleri ve matris temsilleri incelenecektir. Ayrıca bu tanımların fizikteki olası karşılıklarına da değinilecektir.

### 2.1. Tanımlar

$q_0, q_1, q_2, q_3$  reel sayılar ve  $e_0 = 1$  ve  $e_1, e_2, e_3$  imajiner taban elemanları olmak üzere  $\mathbf{q}$  reel kuaternionu;

$$\mathbf{q} = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.  $e_0$  ve imajiner taban elemanları  $e_1, e_2, e_3$  ise aşağıdaki çarpım kurallarına uyarlar.

$$e_0^2 = 1 \quad e_j e_k = -\delta_{jk} e_0 + \varepsilon_{jkl} e_l \quad (2.2)$$

$\mathbf{q}$  kuaternionuna taban elemanları  $e_0, e_1, e_2$  ve  $e_3$  olan 4-boyutlu uzaydaki bir vektör gözüyle bakılabilir.  $q_0, q_1, q_2$  ve  $q_3$  reel sayılarına  $\mathbf{q}$  kuaternionunun bileşenleri denir.  $e_1, e_2, e_3$  imajiner taban elemanları, 3-boyutlu kartezyen koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Buradan yola çıkarak bir  $\mathbf{q}$  kuaternionunu  $S_q$  ile gösterilen skaler kısım,  $V_q$  ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki ayrı bölüme ayırmak mümkündür:

$$S_q = q_0 e_0 \quad (2.3)$$

$$V_q = \mathbf{q} = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad (2.4)$$

Buna göre  $\mathbf{q}$  kuaternionu;

$$\mathbf{q} = S_q + V_q = q_0 e_0 + \mathbf{q} = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Herhangi bir konum vektörü, skaler kısmı sıfır olan bir reel kuaternion ile temsil edilebilir.  $P(x, y, z)$  noktasına yönelmiş olan

$$\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.6)$$

konum vektörü;

$$\mathbf{p} = xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (2.7)$$

kuaternionu ile gösterilir.

Kuaternion cebrine geçmeden önce kuaternionlarla ilgili olarak bazı tanımları vermek uygun olacaktır.

Sıfır kuaternion elemanlarının tümü sıfır olan kuaterniondur. Skaler kuaternion ise,

$$\mathbf{q} = q_0 \quad (2.8)$$

şeklinde vektörel bileşenleri olmayan kuaternion olarak tanımlanır. İlerleyen bölümlerde sık sık karşılaşılabilecek olan vektör kuaternion ise; skaler kısmı sıfır, vektörel kısmı oluşturan  $q_1, q_2, q_3$  reel bileşenlerden en az birinin sıfırdan farklı olduğu kuaternion olup genel formda,

$$\mathbf{q} = q \quad (2.9)$$

ile temsil edilir.

## 2.2. Kuaternionlar Üzerine Temel İşlemler

Skalerler ve vektörler kuaternionların alt uzayı olduklarından skalerlere ve vektörlere ait kurallar kuaternionlara da uygulanabilir.

### 2.2.1. Eşitlik

İki kuaternionun eşit olabilmesi için karşılıklı elemanlarının eşit olması gerekir. Buna göre  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in H$  olmak üzere,

$$\mathbf{p} = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \quad (2.10)$$

ve

$$\mathbf{q} = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 \quad (2.11)$$

kuaternionlarının eşit olabilmesi için, kuaternionların karşılıklı bileşenlerinin eşit olması gerekir.

$$p_0 = q_0 \quad p_1 = q_1 \quad p_2 = q_2 \quad p_3 = q_3 \quad (2.12)$$

### 2.2.2. Skaler ile Çarpma

$\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\lambda$  skaleri ile  $\mathbf{q}$  kuaternionun çarpımı,

$$\lambda \mathbf{q} = \lambda(S_{\mathbf{q}} + V_{\mathbf{q}}) = \lambda(q_0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{q}) = \lambda q_0 \mathbf{e}_0 + \lambda q_1 \mathbf{e}_1 + \lambda q_2 \mathbf{e}_2 + \lambda q_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.13)$$

ile tanımlanır ve elde edilen nicelik,  $\mathbf{p}$  kuaternionunun  $\lambda$  katı olan başka bir kuaterniondur.

### 2.2.3. Toplam ve Fark

$\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaternionlarının toplam ve farkı karşılıklı olarak skaler ve vektörel bileşenlerinin toplamına ve farkına eşittir:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \pm \mathbf{q} &= (S_{\mathbf{p}} \pm S_{\mathbf{q}}) + (V_{\mathbf{p}} \pm V_{\mathbf{q}}) \\ &= (p_0 \pm q_0)\mathbf{e}_0 + (\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) \\ &= (p_0 \pm q_0)\mathbf{e}_0 + (p_1 \pm q_1)\mathbf{e}_1 + (p_2 \pm q_2)\mathbf{e}_2 + (p_3 \pm q_3)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bu işlem sonucu elde edilen nicelik bu iki kuaternionun toplam ve farkına eşit olan diğer bir kuaterniondur.

### 2.2.4. Kuaternionların Çarpımı

Kuaternion çarpımı vektörlerin çarpımından daha farklıdır. Alışlagelen vektör çarpımından daha fazla nicelik içerirler.  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaternionlarının çarpımı;

$$\mathbf{pq} = (p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = p_0 q_0 + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi kuaternion çarpımı iki skalerin çarpımı, skalerin vektörle çarpımı, skaler ve vektörel çarpım gibi vektör cebirinin tüm çarpımlarını içerir. Burada “ $\cdot$ ” ve “ $\times$ ” üç boyutlu vektör uzayında sırasıyla skaler ve vektörel çarpımları göstermektedir. (2.15) eşitliği daha açık bir formda;

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (p_1 q_0 + p_0 q_1 + p_2 q_3 - p_3 q_2)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (p_2 q_0 + p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_3 q_1)\mathbf{e}_2 + (p_3 q_0 + p_0 q_3 - p_2 q_1 + p_1 q_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir. Kuaternion çarpımı dağılımlı ve bileşimlidir.  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$  olmak üzere;

$$\mathbf{p}(\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{pq} + \mathbf{pr} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{qr}) = (\mathbf{pq})\mathbf{r} \quad (2.18)$$

bağıntılarını sağlarlar.

Kuaternion çarpımı değişme özelliğine sahip değildir. Fakat fiziksel uygulamalarda kullanılmak üzere skaler ve vektörel çarpımla ilişkilendirilebilir.  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaternionları;

$$\mathbf{p} = p \quad (2.19)$$

ve

$$\mathbf{q} = q \quad (2.20)$$

ile verilen vektör kuaternionlar olarak tanımlansın. Buna göre  $\mathbf{pq}$  ve  $\mathbf{qp}$  çarpımları;

$$\mathbf{pq} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{qp} = -\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \quad (2.22)$$

olacaktır.  $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$  olduğundan;

$$\mathbf{qp} = -\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.23)$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki eşitlikten yararlanarak  $\mathbf{pq}$  ile  $\mathbf{qp}$ 'nin toplamı için,

$$\mathbf{pq} + \mathbf{qp} = -2\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} \quad (2.24)$$

yazılabilir. Elde edilen nicelik skaler kuaterniondur. Daha açık bir ifade ile skaler çarpım-kuaternion çarpımı ilişkisi,

$$\mathbf{pq} = -\frac{1}{2}(\mathbf{pq} + (\mathbf{pq})^*) \quad (2.25)$$

şeklinde olmalıdır.  $\mathbf{pq}$  ile  $\mathbf{qp}$ 'nin farkı ise;

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = 2 \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.26)$$

ile verilen vektör kuaterniondur. Benzer şekilde vektörel çarpım-kuaternion çarpımı ilişkisi için de;

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - \mathbf{qp}) = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - (\mathbf{pq})^*) \quad (2.27)$$

yazılabilir.

### 2.2.5. Bir Kuaternionun Eşleniği

$\mathbf{p}$  kuaternionunun eşleniği, imajiner kısmının diğer bir deyişle vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir ve  $\mathbf{p}^*$  ile gösterilir:

$$\mathbf{p}^* = p_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{p} = p_0 \mathbf{e}_0 - p_1 \mathbf{e}_1 - p_2 \mathbf{e}_2 - p_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.28)$$

$a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$  olmak üzere eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(\mathbf{ap} + \mathbf{bq})^* = \mathbf{ap}^* + \mathbf{bq}^* \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{pq})^* = \mathbf{q}^* \mathbf{p}^* \quad (2.30)$$

$$(\mathbf{p}^*)^* = \mathbf{p}. \quad (2.31)$$

### 2.2.6. Bir Kuaternionun Normu

Bir  $\mathbf{q}$  reel kuaternionun normu kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir ve  $N_q$  ile gösterilir. Norm;  $\mathbf{q}, \mathbf{q}^* \in \mathbb{H}$  olmak üzere;

$$N_q = \mathbf{q} \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır. Normu bir olan kuaterniona ise birim kuaternion denir.  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$  olmak üzere  $\mathbf{pq}$  çarpımının normu, her bir kuaterniona ait normların çarpımına eşittir:

$$N_{\mathbf{pq}} = \mathbf{pq}(\mathbf{pq})^* (\mathbf{pq})^* = \mathbf{pq}(\mathbf{q}^* \mathbf{p}^*) = \mathbf{pp}^* \mathbf{qq}^* = N_p N_q. \quad (2.33)$$

Norm ifadesi kuaternionları ifade etmede kullanılabilir. Her kuaternionu polar formda yazmak mümkündür.  $\mathbf{u}$  birim vektöre karşı gelmek üzere  $\mathbf{q}$  kuaternionu;

$$\mathbf{q} = \sqrt{N_q} (\cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta) \quad (2.34)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\cos \theta = \frac{q_0}{\sqrt{N_q}} \quad (2.35)$$

ve

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N_q}} \quad (2.36)$$

olup,  $-1 \leq \cos \theta \leq +1$   $-1 \leq \sin \theta \leq +1$  aralığında değışirler ve  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  koşulunu sağlarlar. Herhangi bir  $\mathbf{q}$  reel kuaternionu eksponansiyel formda da ifade edilebilir [64]:

$$\mathbf{q} = \sqrt{N_q} e^{u\theta}. \quad (2.37)$$

Bu ifadede  $u^2 = -1$  olup,

$$e^{u\theta} = \cos \theta + u \sin \theta \quad (2.38)$$

ile verilir.

### 2.2.7. Bir Kuaternionun Tersi

3-Boyutlu uzayın vektörleri üzerine bölme işlemi tanımlı değildir. Diğer bir deyişle iki vektörün bölümünden bahsedilemez. 3-boyutlu uzayın vektörlerinin tersine kuaternionlar bölüm cebri oluşturdukları için bir kuaternionun tersi tanımlıdır.  $\mathbf{q}$  bir sıfır kuaternion olmamak şartıyla;

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1 \quad (2.39)$$

koşulunu sağlayan  $\mathbf{q}^{-1}$  kuaternionuna  $\mathbf{q}$  kuaternionunun tersi denir. Öte yandan,

$$N_q = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*\mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (2.40)$$

verildiğine göre;

$$\frac{\mathbf{q}\mathbf{q}^*}{N_q} = 1 \quad (2.41)$$

bağıntısı yazılabilir. Dolayısı ile  $\mathbf{q}$  kuaternionunun tersi;

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{N_q} \quad (2.42)$$

olmalıdır.



Dikkat edilirse reel kuaternionların tersi elde edilirken ele alınan kuaternionun eşleniği bir skalere bölünmektedir. Dolayısıyla ters alma işlemi sonucu elde edilecek nicelik yine bir reel kuaterniondur.

$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{H}$  olmak üzere bunların çarpımlarının tersi için,

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_n)^{-1} = \mathbf{q}_n^{-1} \mathbf{q}_3^{-1} \mathbf{q}_2^{-1} \mathbf{q}_1^{-1} \quad (2.43)$$

bağıntısı yazılabilir [9].  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  skaler kuaternion  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  ise vektör kuaternion olarak tanımlansın. Bu kuaternionlar arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur [34]:

$$\mathbf{c}\mathbf{d}^{-1} = \mathbf{d}^{-1}\mathbf{c} = \frac{c_0}{d_0} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{c}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{c}^{-1} = \frac{p_1}{c_0}\mathbf{e}_1 + \frac{p_2}{c_0}\mathbf{e}_2 + \frac{p_3}{c_0}\mathbf{e}_3 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{c}\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{c} = \frac{c_0}{p_1 + p_2 + p_3}(-p_1\mathbf{e}_1 - p_2\mathbf{e}_2 - p_3\mathbf{e}_3) \quad (2.46)$$

$$(\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1})^* = (\mathbf{q}^{-1})^*\mathbf{p} \quad (2.47)$$

### 2.2.8. Kuaternionlarda Bölme İşlemi

$\mathbf{q} \neq 0$  olmak üzere bir  $\mathbf{p}$  kuaternionunu bir  $\mathbf{q}$  kuaternionuna bölmek için  $\mathbf{p}$ 'yi  $\mathbf{q}^{-1}$  ile çarpmak gerekir. Fakat kuaternion çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türdür ve bu nedenle  $\mathbf{p}$ 'yi  $\mathbf{q}$  ile iki türlü bölmek gerekir.

$$\text{Sağdan bölme: } \mathbf{p}\mathbf{q}^{-1} \quad (2.48)$$

$$\text{Soldan bölme: } \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.49)$$

Bölme işlemi sonucunda elde edilen nicelik yine bir kuaterniondur.

$\mathbf{p}/\mathbf{q}$  kuaternionunun normu,  $\mathbf{p}$ 'nin normunun  $\mathbf{q}$ 'nin normuna bölümüne eşittir:

$$N_{\mathbf{p}/\mathbf{q}} = \frac{N_{\mathbf{p}}}{N_{\mathbf{q}}} \quad (2.50)$$

### 2.3. Reel Kuaternionların Matris Temsilleri:

Reel kuaternionları matris şeklinde ifade etmek mümkündür. 4-Boyutlu uzayda kuaternionların taban elemanları,

$$\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{\Omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

olmak üzere  $\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$  kuaternionu  $4 \times 4$  matris formunda,

$$\mathbf{Q} = q_0 \mathbf{\Omega}_0 + q_1 \mathbf{\Omega}_1 + q_2 \mathbf{\Omega}_2 + q_3 \mathbf{\Omega}_3 = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

ile veya  $4 \times 1$  matris formunda

$$\mathbf{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = (q_0, \mathbf{q})^T = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

şeklinde temsil edilebilir.

Kuaternionların kompleks  $2 \times 2$  matrisleri kullanılarak da ifadesi mümkündür.

$$\Gamma_0 = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

ve  $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = \Gamma_3^2 = -\Gamma_0$  bağıntısının sağlanması koşuluyla  $\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$  reel kuaternionu aşağıdaki  $2 \times 2$  matris formunda tanımlanır:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{q}} &= q_0 \Gamma_0 + q_1 \Gamma_1 + q_2 \Gamma_2 + q_3 \Gamma_3 \\ &= q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 + i q_1 & q_2 + i q_3 \\ -q_2 + i q_3 & q_0 - i q_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Matris uygulamaları kuaternion cebirinde de önemli bir yer tutar [107-113]. Kuaternion çarpımını matris formunda da ifade etmek mümkündür. Daha sonraki matris uygulamalarında kullanılmak üzere;

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

ve

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

matrisleri tanımlansın.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{H}$  olmak üzere  $\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{b}$  kuaternion çarpımı için,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0 & -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & a_0\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & b_0\mathbf{I}_3 - \tilde{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1 \\ a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.65)$$

matrisi elde edilir [9].

### 3. UZAY-ZAMAN KAVRAMI VE LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

Göreceli hareketin temellerine ilişkin tanımlar Dünya' nın evrenin merkezinde hareketsiz olarak bulunduğunu ve uzaydaki herşeyin Dünya' ya göre göreceli olarak hareket ettiğini öne süren Aristoteles' e kadar uzanmaktadır. Aristoteles' in yaşadığı çağdaki büyük prestijinden dolayı Dünya' nın mutlak olarak hareketsiz olduğu görüşü Galileo Galilee (1564-1642)' ye kadar kabul görmüştür. Galileo, durmak ve sabit hızla hareket etmenin gözlemciye göre göreceli olduğunu kanıtlamıştır [114].

#### 3.1. Uzay-Zaman Kavramı

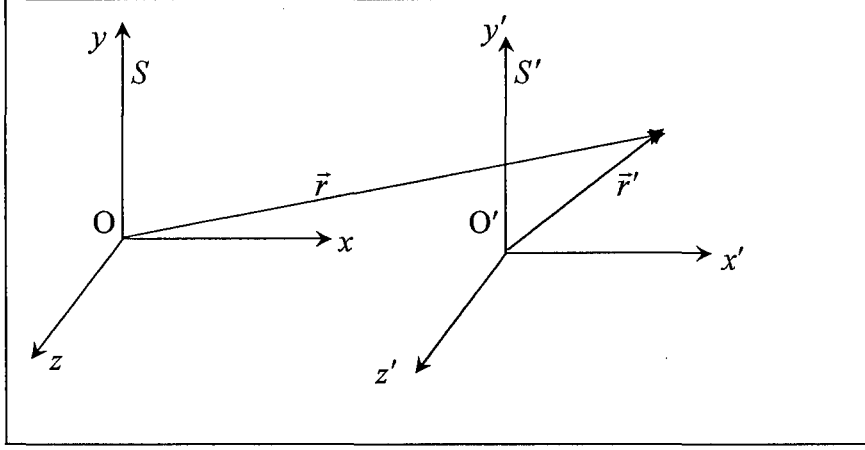
Geçmişten günümüze uzanan bu tartışmaların temelinde klasik mekaniğin *mutlak uzay* ve *mutlak zaman* kavramı yatar. Genel olarak mutlak uzay ve mutlak zaman kavramı ile ifade edilmek istenilen hiçbir şeye bağlı kalmaksızın kendi dinamiği içinde değişen zaman ve uzaydır. Bu yaklaşım bütün referans sistemlerini bünyesinde barındıran bir mutlak uzay bulunduğunu ve referans sistemine bağlı kalmaksızın bir cismin hareketinin bu mutlak uzaya göre mutlak hareketinin incelenebileceği fikrini öne sürmektedir. Bu yaklaşım ayrıca “zaman” kavramının seçilen referans sisteminden bağımsız ve bütün referans sistemlerinde aynı olduğunu savunur. Diğer bir deyişle herhangi bir referans sisteminde ölçülen bir olayın süresi başka bir referans sisteminde de ölçüldüğünde yine aynıdır [115].

Bir fizik yasası bir referans sisteminden bir başka referans sistemine bir koordinat dönüşümü vasıtasıyla aktarıldığında şekil bakımından aynı kalıyorsa bu fizik yasasının söz edilen koordinat dönüşümüne göre *değişmez* (invariant) kaldığı söylenir.

#### 3.2. Galileo Dönüşümü

Genel olarak bir cismin hareketini tanımlayabilmek için cisim üzerinde veya cisimden farklı bir konumda bir referans çerçevesine ihtiyaç duyulur. Böylelikle cismin hareket denklemleri bu referans çerçevesi baz alınarak yazılabilir. Durmakta olan veya sabit hızla hareket eden referans çerçevelerine *eylemsiz koordinat sistemi* adı verilir. Newton' un birinci yasası da bu eylemsiz koordinat sistemlerini işaret eder.

Şekil 3.1' de görüldüğü gibi hareketsiz olan referans sistemi  $S$  ile temsil edilsin.  $t$  anında gerçekleşen bir olayın koordinatları bu referans sisteminde  $x, y, z$  olarak bulunsun.  $S'$  ye göre sabit bir  $v$  hızıyla  $+x$  yönünde hareket eden diğer bir  $S'$  eylemsiz referans sistemindeki gözlemci aynı olayın  $t'$  anında ve  $x', y', z'$  koordinatlarında gerçekleştiğini görecektir.



Şekil 3.1 Eylemsiz gözlem çerçeveleri

İncelemenin basitleştirilmesi açısından  $t=0$  anında iki koordinat sisteminin orijinlerinin çakışık olduğu kabul edilsin.  $t$  süre sonra,  $S'$  referans sistemi  $x$ -ekseni boyunca,

$$d = vt \quad (3.1)$$

kadar yol alacaktır. Olayın konumu için  $S'$  de  $x$ -yönünde yapılan ölçümler  $S$ ' de yapılanlardan  $d$  kadar fazla olacaktır. Diğer bir deyişle;

$$x = x' + vt \quad (3.2)$$

olmalıdır.  $y$  ve  $z$  yönlerinde bağıl hareket olmadığından,

$$y = y' \quad (3.3)$$

$$z = z' \quad (3.4)$$

yazılabilir. Her iki referans sisteminde zaman koordinatının aynı olduğu düşünülerek,

$$t = t' \quad (3.5)$$

olmalıdır. Eylemsiz referans sistemlerinde bir olayı tanımlayan (3.3)' den (3.5)' e kadar olan eşitliklere *Galileo dönüşümleri* adı verilir.  $S'$  den  $S''$  ye olan ters dönüşümler ise,

$$x' = x - vt \quad (3.6)$$

$$y' = y \quad (3.7)$$

$$z' = z \quad (3.8)$$

$$t' = t \quad (3.9)$$

ile verilir. Klasik mekanik yasaları Galileo dönüşümleri altında değişmez kalırlar. Diğer bir deyişle bu dönüşümler klasik mekanik yasalarının birbirine göre düzgün doğrusal hareket eden referans sistemleri(eylemsiz referans çerçeveleri) için değişmez kaldığını ifade eder [115].

### 3.3. Özel Rölativite Teorisi

Klasik mekanik Newton yasaları yardımıyla 19. yüzyılın ikinci yarısına kadar fiziğin tüm ihtiyaçlarına cevap verebiliyordu. Klasik görüş, ses ve su dalgaları gibi maddesel dalgaların yayılmalarını ve ortamla etkileşimlerini kolaylıkla açıklayabiliyorken Maxwell' in temellerini kurduğu elektromanyetik teorisinin açıklanmasında güçlüklerle karşılaştı. Yaygın olarak inanılan esir kavramının doğru olmadığı Michelson-Morley deneyiyle kanıtlanması, ardından fotoelektrik olay, siyah cisim ışıması vb. olaylarda klasik mekaniğin içine düştüğü açmaz yeni bir teorisinin doğmasına yol açmıştır. Einstein tarafından ortaya atılan *özel rölativite teorisi* şöyle özetlenebilir:

- *Postüla 1:* Işığın serbest uzaydaki hızı gözlemcinin hareketinden bağımsız olarak bütün yönlerde aynıdır.
- *Postüla 2:* Fiziğin tüm yasaları eylemsiz gözlem çerçevelerinin tümünde aynı formdaki eşitliklerle ifade edilir.

Bu yeni teoriye göre Galileo dönüşümleri ancak düşük hızlar için geçerlidir. Ayrıca ikinci postülaya göre fizik yasalarının tüm eylemsiz gözlem çerçevelerinde

değişmez kalması gerekir. Fakat elektromanyetik teorinin Maxwell denklemleri incelendiğinde Galileo dönüşümlerine göre değişmez kalmamaktadır. Elde edilen tüm bu sonuçlar yukarıda belirtilen tüm sakıncaları ortadan kaldıracak yeni bir dönüşüme ihtiyaç duyulduğunu göstermiştir [115].

### 3.4. Lorentz Dönüşümleri

Elektromanyetizmanın yasaları Galileo dönüşümleri altında değişmez kalmadığına göre yeni dönüşüm bu yasaları özel rölativite teorisi ilkeleri bazında sağlamalıdır.

Galileo dönüşümleri düşük hızlarda geçerli olduğuna göre bu yeni dönüşüm bu hızlarda Galileo dönüşümlerine indirgenmelidir. Elde edilen bu yeni dönüşümlere *Lorentz dönüşümleri* adı verilir. Bu dönüşümler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.10)$$

$$y' = y \quad (3.11)$$

$$z' = z \quad (3.12)$$

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.13)$$

Bu dönüşümlerin düşük hızlarda Galileo dönüşümlerine indirgenmesi gerektiği daha önce belirtilmişti. Eğer hareketli referans sisteminin “v” hızı ışığın “c” hızı ile karşılaştırıldığında düşük kalıyorsa,

$$v^2/c^2 \approx 0 \quad (3.14)$$

olup (3.10) ifadesi için,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - 0}} = x - vt$$

yazılabilir. Benzer şekilde (3.13) denklemini ile verilen zaman ifadesi için de düşük hızlarda (3.14) yaklaşımı kullanılabilir ve



$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t - 0}{\sqrt{1 - 0}} = t$$

ifadesi elde edilir.

Görüldüğü gibi Lorentz dönüşümleri, gözlemcinin hızı, “c” ışık hızıyla karşılaştırıldığında düşük olduğu durumlarda Galileo dönüşümlerine indirgenmektedir.

Hareketli referans sisteminden hareketsiz referans sistemine olan ters dönüşümler özel rölativitenin ikinci postülasının kullanılmasıyla kolaylıkla gerçekleştirilebilir. Ters dönüşümlerin (3.10)-(3.13) eşitlikleriyle aynı biçimde olmaları beklenir. Bu ise  $v$  yerine  $-v$  alınıp üslü ve üssüz koordinatlar yer değiştirilerek gerçekleştirilir. Böylece ters dönüşümler;

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.15)$$

$$y = y' \quad (3.16)$$

$$z = z' \quad (3.17)$$

$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir [115].

### 3.5. Uzay-Zaman Kavramının İncelenmesi

Önceki bölümde ifade edilen Lorentz dönüşümleri, uzay ve zaman kavramlarının klasik mekaniğin temel yapı taşı olan Newton yaklaşımının aksine bağımsız olmayıp birbirleriyle yakından ilişkili olduklarını göstermektedir. (3.10) denklemi incelendiğinde “ $x'$ ” konumunun sadece “ $x$ ” konumuna bağlı olmadığı bunun yanında “ $t'$ ” zamanı ile de bağlantılı olduğu görülmektedir. Benzer şekilde “ $t'$ ” zaman parametresi de sadece “ $t$ ” zamanının fonksiyonu olmayıp, “ $x$ ” konumunun da bir fonksiyonudur. Buradan çıkarılacak sonuç *mutlak zaman*(*absolute time*) diye bir kavramın olmadığıdır. Çünkü denklemler zaman niceliğinin gözlemcinin konumuna bağlı olarak farklı ölçülebildiğini ifade etmektedir. Zaman kavramı artık görecelidir. Benzer şekilde artık mutlak uzay (*absolute space*)’ dan da bahsetmek mümkün değildir. Uzay ve zaman kavramları

tek başlarına bir anlam taşımamaktadır. Artık bunların yerine *uzay-zaman* kavramı düşünülmelidir. Bu sonuçlar fiziksel dünyanın sadece uzay-zaman ve madde nicelikleriyle düşünülmesi gerektiğini işaret etmektedir.

### 3.5.1 Dört boyutlu Minkowski uzayı

Tartışmalardan anlaşıldığı üzere doğada uzay ve zaman kavramları birbirinde ayrılmayacak biçimde iç içedir. Örneğin, bir gözlemcinin sadece cetvelle ölçebildiği bir uzunluğu diğer bir gözlemci ancak bir cetvel ve saatle ölçebilir [115].

Bir yüzey  $R(u, v)$  gibi iki parametrelili bir vektörel fonksiyonla temsil edilebilir. Fakat üç boyutlu uzayda bir noktanın konumunu belirtmek için üç parametrelili bir  $\vec{r}(u, v, w)$  vektörüne ihtiyaç vardır. Bu vektör kartezyen koordinat sisteminde  $\vec{r}(x, y, z)$  ile ifade edilebilirken silindirik koordinat sisteminde  $\vec{r}(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  ile tanımlanabilir. Bu koordinatlardaki üç nümerik değer fiziksel olayın nerede meydana geldiği hakkında bilgi verirken ne zaman meydana geldiği hakkında bir fikir vermez. Bu nedenle sözü edilen bilgi açığını kapatmak amacıyla yeni bir nümerik değere ihtiyaç duyulmaktadır. Fiziksel olayın ne zaman meydana geldiğini bildirmek amacıyla zaman koordinatının eklenmesiyle dördü bir koordinat takımı elde edilir. Ayrıca bu yaklaşım özel rölativitenin sonuçlarını ifade etmek için de rahat ve şık bir yoldur. Olayların dört boyutlu bir uzay-zamanda gerçekleştiğini düşünmek daha akıllıca bir yaklaşım olacaktır. Minkowski uzayı verilen bu uzayda bilinen üç koordinat  $x, y, z$  fiziksel olayın uzaydaki konumunu dördüncü koordinat ise  $t$  zamanını gösterir.

Bu dört boyutlu uzayın elle tutulur, gözle görünür, resmi çizilir, fiziksel olarak tanımlanabilir bir nesne olduğu düşünülmemelidir. Bu yaklaşım sadece olayları açıklamak için ortaya konan matematiksel bir modeldir. Uzay-zaman kavramı da fizikteki daha başka birçok matematiksel model gibi fiziksel olaylara giydirilmiş bir elbiseyi andırmaktadır [116].

Dört boyutlu uzayda zaman koordinatını bir sabit olan “ $c$ ” ışık hızıyla çarparak uzunluk boyutuyla ifade etmek uygun olacaktır. Böylelikle konum vektörü dört boyutlu uzayda,

$$\mathbf{R} = (x, y, z, ct) \quad (3.19)$$

ile ifade edilir.

$$\tau = ct \quad (3.20)$$

ile gösterilmek üzere  $\mathbf{R}$  uzay-zaman vektörü daha yalın bir ifade ile,

$$\mathbf{R} = (x, y, z, \tau) \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. Bu vektörün diferansiyelinin büyüklüğünün karesine bakıldığında,

$$dS^2 = d\mathbf{R}.d\mathbf{R} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2 \quad (3.22)$$

olmalıdır. Ne yazık ki bu kabul gözlemlediğimiz fiziksel dünyayı temsil etmek bakımından fazla simetriktir. İki konumsal koordinat arasındaki değişimin, referansa göre bir değişim olduğu açıkken zaman ve uzay diferansiyellerinin toplamındaki bir değişim fiziksel gözlemlerde bir karışıklığa yol açacaktır. Bu karışıklığı önlemenin en basit yolu zamansal ve uzaysal diferansiyeller arasındaki işaretin değiştirilmesi ile sağlanır. Bu işlem,

$$dS^2 = d\mathbf{R}.d\mathbf{R} = d\tau^2 - d\vec{r}.d\vec{r} \quad (3.23)$$

şeklinde veya

$$dS^2 = d\mathbf{R}.d\mathbf{R} = d\vec{r}.d\vec{r} - d\tau^2 \quad (3.24)$$

şeklinde olabilir. Bu gösterime *Minkowski uzayının temel formu* denir [117]. Burada,

$$\vec{r}(x, y, z) = xi + yj + zk \quad (3.25)$$

ile verilmektedir. Ortogonal bir dönüşümde,

$$d\vec{r}.d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.26)$$

büyüklüğü değişmez (invariant) kalır. Benzer şekilde (3.23) ve (3.24) ifadelerinin de dört boyutlu Minkowski uzayındaki eylemsiz referans sistemleri arasındaki bir dönüşümde değişmez kalması gerekir. (3.23) ve (3.24) eşitlikleri değişmez aralık (invariant interval) olarak adlandırılacak ve tanımlarının matematiksel ispatı da sonraki bölümde yapılacaktır.

### 3.5.2 Değişmez Aralık (Invariant Interval)

Buraya kadar olan açıklamalardan her şeyin göreceli olduğu sonucu çıkarılabilir. Fakat değişen uzay-zamanda değişmeden kalan başka bir nicelik var mıdır? Gözlemcilerin hareketinde bağımsız olarak tüm gözlemciler için değişmeden kalan nicelik *değişmez aralıktır*.

(3.10) ve (3.13) denklemleriyle verilen Lorentz dönüşümlerinin diferansiyelleri alınarak,

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.27)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \Delta x(v/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.28)$$

elde edilir. Bu denklemlerin kareleri alınırsa,

$$(\Delta x')^2 = \frac{(\Delta x)^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2(\Delta t)^2}{1 - v^2/c^2} \quad (3.29)$$

ve

$$(\Delta t')^2 = \frac{(\Delta t)^2 - (2v\Delta x\Delta t/c^2) + (v^2/c^4)(\Delta x)^2}{1 - v^2/c^2} \quad (3.30)$$

bulunur. (3.30) eşitliği  $c^2$  ile çarpılarak,

$$c^2(\Delta t')^2 = \frac{c^2(\Delta t)^2 - 2v\Delta x\Delta t + (v^2/c^2)(\Delta x)^2}{1 - v^2/c^2} \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.31) denkleminde (3.29) denklemini çıkartılarak,

$$\begin{aligned} c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 &= \frac{c^2(\Delta t)^2 - 2v\Delta x\Delta t + (v^2/c^2)(\Delta x)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{(\Delta x)^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2(\Delta t)^2}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 - (1 - v^2/c^2)(\Delta x)^2}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{c^2(1 - v^2/c^2)(\Delta t)^2 - (1 - v^2/c^2)(\Delta x)^2}{1 - v^2/c^2} \\ &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Daha yalın bir ifade ile,

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad (3.32)$$

denklemini elde edilir [114].

(3.32) denklemini hareketsiz  $S$  referans sistemindeki gözlemci tarafından ölçülen  $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  niceliğinin hareketli  $S'$  referans sistemindeki gözlemci tarafından ölçülen  $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$  niceliğine eşit olduğunu söylemektedir. Bu ancak (3.32) denkleminin her iki tarafının bir sabite eşit olmasıyla gerçekleştirilebilir. Bu nedenle  $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  niceliğinin bir değişmez(invariant) olduğu söylenebilir ve bu nicelik bütün eylemsiz referans sistemlerinde aynı değere sahiptir.  $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  niceliğine değişmez aralık (invariant interval) adı verilir ve  $(\Delta S)^2$  ile gösterilir.

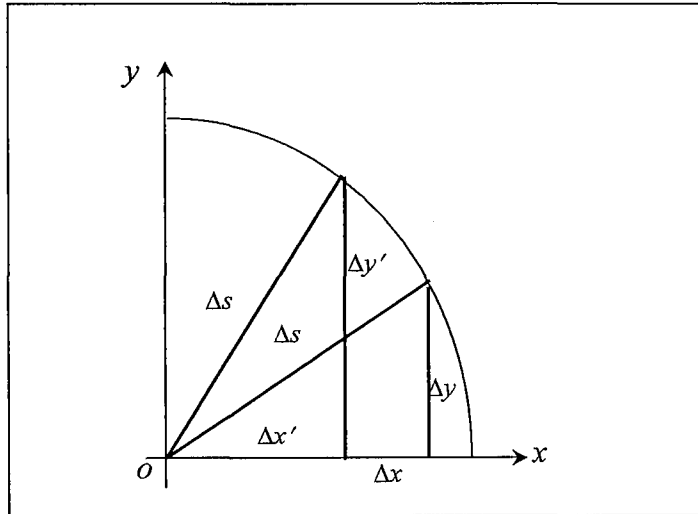
$$(\Delta S)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad (3.33)$$

Bu nicelik uzay-zamanda bir sabit olup, bütün gözlemciler hareketlerinden bağımsız olarak değişmez aralık için aynı değeri ölçerler. Eğer diğer iki boyut da incelemeye katılırsa (3.23)' de verilen bağıntı elde edilir [114].

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r}) \cdot (\Delta \vec{r}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3.5.3. Öklitsel ve Öklitsel Olmayan Geometri

Bu nicelik bir bakıma garip gelebilir. Şekil 3.2' de görüldüğü gibi adi uzayda (uzay-zamanda olmayan) değişmez aralık aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.2 Değişmez aralık

Şekil 3.2'den yola çıkarak,

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \quad (3.35)$$

yazılabilir. Aslında (3.35),  $\Delta S$  değişmezinin denklemi;

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3.36)$$

eşitliği ile verilen bir çemberin yarıçapından farklı bir şey olmadığını ifade etmektedir.  $\Delta x$  ile  $\Delta x'$  ve  $\Delta y$  ile  $\Delta y'$  birbirlerinden farklı veya negatif olsalar bile  $\Delta s$  daima pozitif bir niceliktir.

(3.33) denklemi göz önüne alındığında  $\tau = ct$  tanımı kullanılarak değişmez aralık aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir:

$$(\Delta S)^2 = (\Delta \tau)^2 - (\Delta x)^2. \quad (3.37)$$

$\Delta x$ 'in önündeki eksi işaret nedeni ile yukarıdaki denklem bir çember denkleminde ziyade bir hiperbol denklemdir.

$$x^2 - y^2 = \text{sabit} \quad (3.38)$$

Öklitsel (Euclidean) geometride iki nokta arasındaki uzaklık bir üçgenin hipotenüsü ile gösterilebilir. Hipotenüsün karesi diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir. Fakat uzay-zamanda  $\Delta s$ ' in karesi diğer iki kenarın kareleri toplamına eşit olmayıp, bunların toplamından ziyade karelerinin farkına eşittir. Dolayısı ile uzay-zamanın öklitsel olmadığı söylenebilir. Üç boyutlu uzay öklitsel iken uzay-zamanın öklitsel olmaması yeni bir tip geometrik yaklaşıma götürür. (3.34) eşitliği ile tanımlanan bu yeni tip geometriye düz hiperbolik geometri (flat-hyperbolic geometry) ya da öklitsel olmayan(non-euclidean) geometri denir [114].

Öklitsel geometri iki nokta arasındaki en kısa uzaklığın bir doğru olduğunu söyler. Oysa öklitsel olmayan uzay-zamandaki iki nokta arasındaki bir doğru bu noktalar arasındaki en uzun mesafedir.

Şekil 3.4a görüldüğü gibi  $ABC$  yolu göz önüne alınsın.  $AB$  yolu öklitsel geometride,

$$S_{AB} = \sqrt{(x/2)^2 + y^2} \quad (3.39)$$

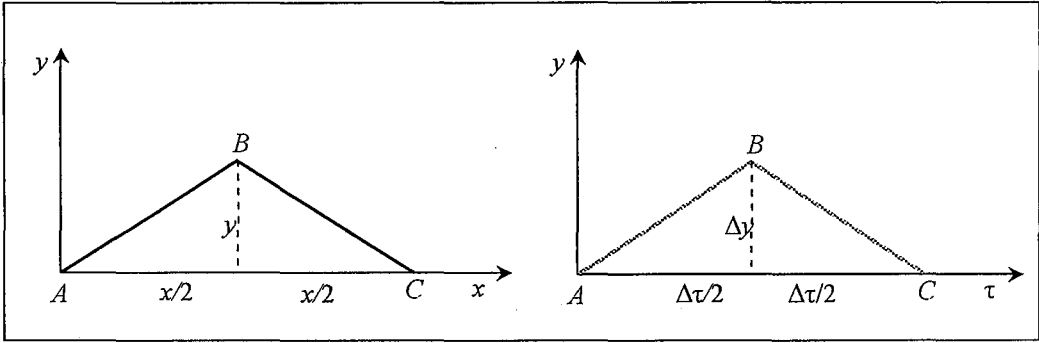
ile ve  $BC$  yolu,

$$S_{BC} = \sqrt{(x/2)^2 + y^2} \quad (3.40)$$

biçiminde olmalıdır.  $ABC$  yolu toplamı için,

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AB} + S_{BC} \\ &= 2\sqrt{(x/2)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2y)^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

yazılabilir.



Şekil 3.4a Öklitsel (Euclidean) uzay

Şekil 3.4b Yarı-öklitsel uzay

Oysa  $AC$  yolu boyunca alınan yol,

$$S_{AC} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \quad (3.42)$$

olup, beklendiği gibi  $ABC$  yolu boyunca alınan mesafe  $AC$  doğrusu boyunca alınan mesafeden büyüktür.

$$\sqrt{y^2 + (2x)^2} > y \quad (3.43)$$

Aynı yaklaşım uzay-zamanda yapıldığında, (3.34) denklemini gereğince  $AB$  yolu boyunca değişmez aralık,

$$\Delta S_{AB} = \sqrt{(\Delta\tau/2)^2 - (\Delta y)^2} \quad (3.44)$$

ile  $BC$  yolu boyunca değişmez aralık,

$$\Delta S_{BC} = \sqrt{(\Delta\tau/2)^2 - (\Delta y)^2} \quad (3.45)$$

ile verilmelidir. Uzay-zamanda  $ABC$  yolu boyunca alınan toplam yol,

$$\begin{aligned}\Delta S_{ABC} &= \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} \\ &= 2\sqrt{(\Delta\tau/2)^2 - (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta\tau)^2 - (2\Delta y)^2}\end{aligned}\quad (3.46)$$

olmalıdır.  $AC$  boyunca uzay-zamanda alınan yol için,

$$\Delta S_{AC} = \frac{\Delta\tau}{2} + \frac{\Delta\tau}{2} = \Delta\tau \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.46) ve (3.47) karşılaştırıldığında,

$$\sqrt{(\Delta\tau)^2 - (2\Delta y)^2} < \Delta\tau \quad (3.48)$$

olduğu görülmektedir.

(3.48) ifadesinden görüldüğü gibi uzay-zamanda  $ABC$  boyunca alınan yol  $AC$  doğrusu boyunca alınan yoldan daha kısadır. Dolayısıyla uzay-zamanda iki nokta arasındaki en kısa mesafenin artık bir doğru olmadığı söylenebilir. Aksine iki nokta arasındaki uzay-zamandaki doğru, en uzun mesafedir [114].

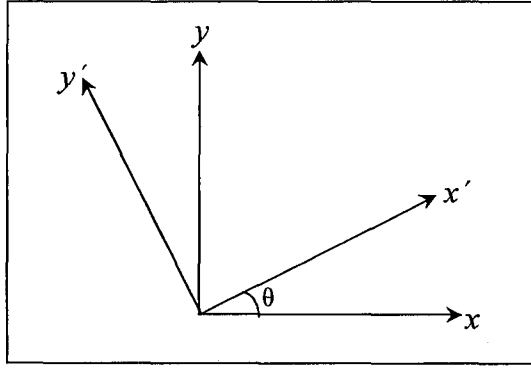


## 4. LORENTZ DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde Lorentz dönüşümlerinin elde edilmesinde kullanılan dönüşüm formülleri incelenecektir. Bu yöntemden yararlanarak Cayley-Klein parametreleri ile de Lorentz dönüşümlerinin elde edilebileceği ispat edilecektir.

### 4.1. Dönüşüm Formülleriyle Lorentz Dönüşümleri

Şekil 4.1' de görüldüğü gibi  $xyz$ -koordinat sistemi  $z$ -ekseni etrafında saat yönünün tersi yönde  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $x'y'z'$ -koordinat sistemi elde edilsin.



Şekil 4.1 Dönme hareketi

Bu dönüşüme ait dönme-dönüşüm bağıntıları,

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (4.1)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (4.2)$$

ve

$$z' = z \quad (4.3)$$

ile verilmektedir. Bu dönüşüm,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

şeklindeki bir matris bağıntısı ile gerçekleştirilebilir. Öte yandan Lorentz dönüşüm bağıntıları Bölüm 3' de,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

şeklinde verilmişti. Bu bağıntıların,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x' + \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} t' \quad (4.5)$$

$$y = y' \quad (4.6)$$

$$z = z' \quad (4.7)$$

$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x' + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} t' \quad (4.8)$$

biçimindeki açık ifadelerle yazılsın. Gösterimde daha uygun bir formatı yakalamak üzere,

$$t = \frac{x_0}{ic} \quad (4.9)$$

$$x = x_1 \quad (4.10)$$

$$y = x_2 \quad (4.11)$$

$$z = x_3 \quad (4.12)$$

ve

$$t' = \frac{x'_0}{ic} \quad (4.13)$$

$$x' = x'_1 \quad (4.14)$$

$$y' = x'_2 \quad (4.15)$$

$$z' = x'_3 \quad (4.16)$$

şeklinde düzenlensin ve ardından da,

$$\mu = \frac{v}{c} \quad (4.17)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (4.18)$$

ile verilen gösterimler seçilsin. Bu gösterimlere göre (4.5)' de verilen dönüşüm,

$$x_1 = \beta x'_1 + \beta v \left( \frac{x'_0}{ic} \right) = \beta x'_1 - i\mu\beta x'_0 \quad (4.19)$$

şeklinde ve (4.8) biçimindeki dönüşüm ise,

$$\frac{x_0}{ic} = \beta \frac{\mu^2}{v} x'_1 + \beta \frac{x'_0}{ic}$$

ve

$$x_0 = i\mu\beta x'_1 + \beta x'_0 \quad (4.20)$$

ifadesine dönüşür. (4.6) ve (4.7) ise,

$$x_2 = x'_2 \quad (4.21)$$

$$x_3 = x'_3 \quad (4.22)$$

olmalıdır.

Öte yandan eğer,

$$\cos\theta = \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (4.23)$$

$$\sin\theta = i\mu\beta = i \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (4.24)$$

şeklinde tanımlanırsa bu bağıntıların,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad (4.25)$$

eşitliğini sağlaması gerekir. Gerçekten de,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \beta^2 - \mu^2 \beta^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1-(v/c)^2} = 1$$

olduğu görülmektedir. Bu koşul sağlandığına göre Lorentz dönüşüm denklemlerini artık aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

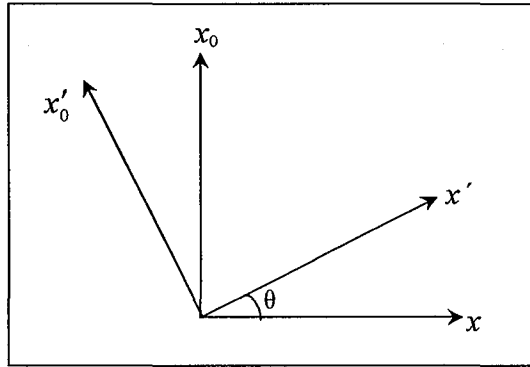
$$x_0 = x'_1 \sin \theta + x'_0 \cos \theta \quad (4.26)$$

$$x_1 = x'_1 \cos \theta - x'_0 \sin \theta \quad (4.27)$$

$$x_2 = x'_2 \quad (4.28)$$

$$x_3 = x'_3 \quad (4.29)$$

Geometrik olarak da bu formülleri yorumlamak mümkündür. Bu dönüşümler Bölüm 4'ün başında belirtildiği gibi bir koordinat sisteminin bir eksen etrafındaki hareketiyle özdeşleştirilebilir.



Şekil 4.2 Bir eksen etrafındaki dönme hareketi

Bu dönüşüm matrisler kullanılarak da,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

biçiminde gösterilebilir.

Ters dönüşüm bağıntıları ise  $\theta$  yerine  $-\theta$  almak suretiyle,

$$x_0 = -x_1 \sin \theta + x_0 \cos \theta \quad (4.31)$$

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_0 \sin \theta \quad (4.32)$$

$$x'_2 = x_2 \quad (4.33)$$

ve

$$x'_3 = x_3 \quad (4.34)$$

biçiminde elde edilir [116]. Bu dönüşüme karşılık gelen matris temsili ise,

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

ile verilmelidir.

#### 4.2. Cayley-Klein Parametreleriyle Lorentz Dönüşümleri

Genellikle bir koordinat sisteminin diğerine göre yönelimini belirlemek üzere bileşenleri reel olan dönme-dönüşüm matrisi kullanılır. Aynı dönüşümü, bileşenleri kompleks sayılar olan matrislerle de yapmak mümkündür.

İki boyutlu uzayda  $u$  ve  $v$  kompleks eksenler olmak üzere,

$$u' = \alpha u + \lambda v \quad (4.36)$$

$$v' = \gamma u + \delta v \quad (4.37)$$

şeklinde genel bir doğrusal dönüşüm ifade edilebilir. Buna karşı gelen dönüşüm matrisi,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

ile tanımlanır. Uzayda bir noktanın koordinatlarını belirtmek üzere  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gibi üç reel nicelik olsun ve  $\mathbf{P}$  matrisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

olarak tanımlansın. Bu matrisler kullanılarak  $xyz$ -koordinat sisteminin  $x'y'z'$  koordinat sistemine göre yönelimini belirtmek üzere,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{QPQ}^{-1} \quad (4.40)$$

dönüşümü yapılabilir. O halde dönüşüm matrisi,

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\lambda \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

olmalıdır. Yukarıdaki matris çarpımları yapılarak  $\mathbf{P}'$  matrisi için,

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \lambda\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \lambda\delta x_+ & -2\alpha\lambda z + \alpha^2 x_- - \lambda^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \lambda\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \lambda\delta x_+ \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

ifadesi yazılabilir. Matris elemanları eşitlenerek üslü ve üssüz koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm denklemi,

$$x'_+ = 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ \quad (4.43)$$

$$x'_- = -2\alpha\lambda z + \alpha^2 x_- - \lambda^2 x_+ \quad (4.44)$$

$$z' = (\alpha\delta + \lambda\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \lambda\delta x_+ \quad (4.45)$$

veya

$$z' = (\lambda\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \lambda\delta)y + (\alpha\delta + \lambda\gamma)z \quad (4.46)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre  $\mathbf{A}$  dönme-dönüşüm matrisi  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  ve  $\delta$  cinsinden,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \lambda^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \lambda^2) & \gamma\delta - \alpha\lambda \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \lambda^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \lambda^2) & -i(\alpha\lambda + \gamma\delta) \\ \lambda\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \lambda\delta) & \alpha\delta + \lambda\gamma \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

şeklinde yazılabilir. (4.47) eşitliği bir cismin uzayda yönelimini tanımlar.  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  ve  $\delta$ , *Cayley-Klein Parametreleri* olarak adlandırılır [118].

Cayley-Klein parametreleri istenirse Euler açıları cinsinden ifade edilebilir. Euler açılarını elde ederken ele alınan  $x'y'z'$ -koordinat sisteminin  $xyz$ -koordinat sistemine göre yönelimini belirlemek üzere ilk önce  $xyz$ -koordinat

sistemi  $z$ -ekseni etrafında saat yönünün tersi yönde  $\theta$  açısı kadar döndürülüyordu.  $x'_+$ ,  $x'_-$  ve  $z'$ , bu dönüşüme karşı gelmek üzere  $\theta$  açısı cinsinden ifade edilebilir. Böylelikle;

$$\begin{aligned}
 x'_+ &= x' + iy' \\
 &= (\cos\theta x + \sin\theta y) + i(-\sin\theta x + \cos\theta y) \\
 &= (\cos\theta - i\sin\theta)(x + iy) \\
 &= e^{-i\theta}(x + iy) \\
 &= e^{-i\theta}x_+
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

ile

$$\begin{aligned}
 x'_- &= x' - iy' \\
 &= (\cos\theta x + \sin\theta y) - i(-\sin\theta x + \cos\theta y) \\
 &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) \\
 &= e^{i\theta}(x - iy) \\
 &= e^{i\theta}x_-
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

ve

$$z' = z \tag{4.50}$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitlikler (4.43)-(4.46) denklemleri ile karşılaştırılarak (4.38) ile verilen  $Q$  matrisinin elemanları;

$$\gamma = \lambda = 0 \tag{4.51}$$

$$\alpha^2 = e^{i\theta} \tag{4.52}$$

$$\delta^2 = e^{-i\theta} \tag{4.53}$$

şeklinde elde edilir ve matris

$$Q_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

ifadesi ile temsil edilir. İkinci aşamada koordinat sistemi  $x$ -ekseni etrafında saat yönünün tersi yönde  $\varphi$  açısı kadar döndürülüyordu. Buna karşı gelen  $Q$  matrisi;

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & i \sin(\varphi/2) \\ i \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

olacaktır. Benzer şekilde üçüncü aşamada koordinat sisteminin,  $z$ -ekseni etrafında  $\psi$  açısı kadar döndürülmesine karşı gelen  $Q$  matrisi ise,

$$Q_3 = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

olacaktır.  $x'y'z'$ -koordinat sisteminin  $xyz$ -koordinat sistemine göre yönelimi bu üç  $Q$  matrisinin çarpımıyla belirlenecektir:

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & i \sin(\varphi/2) \\ i \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) & ie^{i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) \\ ie^{-i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) & e^{-i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

(4.57) matrisi, (4.38)'da verilen  $Q$  matrisi ile karşılaştırılarak Cayley-Klein parametreleri Euler açıları cinsinden;

$$\alpha = e^{i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) \quad (4.58)$$

$$\lambda = ie^{i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) \quad (4.59)$$

$$\gamma = ie^{-i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) \quad (4.60)$$

$$\delta = e^{-i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) \quad (4.61)$$

şeklinde bulunur [118].

Cayley-Klein parametrelerini içeren matris ifadelerinden yola çıkarak Lorentz dönüşümlerini ifade etmek mümkündür. (4.57) eşitliğinde  $\Psi = \varphi = 0$  alınır, diğer bir deyişle koordinat sisteminin sadece bir eksen etrafında döndüğü durumdaki ifadeye dönülürse, (4.58)-(4.61) denklemleri arasında ifade edilen Cayley-Klein parametreleri;

$$\alpha = e^{i(\theta/2)} \quad (4.62)$$

$$\lambda = ie^{-i(\theta/2)} \quad (4.63)$$

$$\gamma = ie^{i(\theta/2)} \quad (4.64)$$



$$\delta = e^{-i(\theta/2)} \quad (4.65)$$

halini alacaktır. Q matrisi ise,

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\theta/2)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta/2)} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

ifadesi ile verilmelidir. Öte yandan uzay-zamanı temsil etmek üzere uzay koordinatı  $x$ , zaman koordinatı ise  $x_0$  ile gösterilmek üzere (4.39)' de verilen P matrisini,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & x - ix_0 \\ x + ix_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X^* \\ X & 0 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

şekline dönüştürmek mümkündür. Bu takdirde (4.40) dönüşüm bağıntısı;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & x' - ix'_0 \\ x' + ix'_0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i(\theta/2)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta/2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x - ix_0 \\ x + ix_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\theta/2)} & 0 \\ 0 & e^{i(\theta/2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (x - ix_0)e^{i\theta} \\ (x + ix_0)e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

ile verilmelidir. Yukarıdaki ifadeden matrislerin eşitliği gereğince,

$$\begin{aligned} x' + ix'_0 &= (x + ix_0)e^{-i\theta} \\ &= (x + ix_0)(\cos\theta - i \sin\theta) \\ &= (x \cos\theta + x_0 \sin\theta) - i(x \sin\theta - x_0 \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.69)$$

ve

$$\begin{aligned} x' - ix'_0 &= (x - ix_0)e^{i\theta} \\ &= (x - ix_0)(\cos\theta + i \sin\theta) \\ &= (x \cos\theta + x_0 \sin\theta) + i(x \sin\theta - x_0 \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.70)$$

denklemleri yazılabilir. (4.69) ve (4.70) denklemlerinde reel ve imajiner bileşenler karşılıklı olarak eşit olmalıdır. O halde,

$$x' = x \cos\theta + x_0 \sin\theta \quad (4.71)$$

$$x'_0 = -x \sin\theta + x_0 \cos\theta \quad (4.72)$$

eşitlikleri yazılabilir. Eğer  $x_0$ ,  $\cos\theta$  ve  $\sin\theta$  terimleri için (4.9), (4.23) ve (4.24)'deki tanımlar kullanılırsa, Bölüm 3' de verilen,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentz dönüşüm denklemleri elde edilir.

## 5. REEL KUATERNİONLARIN BAZI UYGULAMALARI

Kuaternionların uygulama alanlarından biri de klasik mekaniktir. Kuaternionlar özellikle dönme ve öteleme hareketlerini tanımlayan sistemlerde kendisine uygulama alanları bulmuştur. Bu amaçla bu küresel hareketin tanımlanmasına ilişkin bağıntılar incelenecektir. Ardından ise reel kuaternionların kuantum mekaniksel operatörlerin temsiline ilişkin örnekler verilecektir.

### 5.1. Reel Kuaternionlarla Küresel Hareketin İncelenmesi

Kinematikte en önemli problemlerin birisi de küresel yerdeğiştirme ve hareketin gösterimidir. Gösterimde en iyi yollardan birisi de kompakt yapıları ve basitliği nedeniyle Euler parametrelerini kullanmaktır. Böylelikle bileşenleri,

$$p_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.1)$$

$$p_1 = u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.2)$$

$$p_2 = u_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.3)$$

$$p_3 = u_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.4)$$

olan bir reel kuaternion tanımlanabilir [14]. Burada  $\theta$ ; küresel yerdeğiştirmeye ilişkin dönme açısıdır.

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_1 + u_y \mathbf{e}_2 + u_z \mathbf{e}_3 \quad (5.5)$$

ise dönme eksenini yönündeki birim vektör olup,

$$N_u = \mathbf{u} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^* \mathbf{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (5.6)$$

bağıntısını sağlamaktadır.

Eğer  $\theta$  dönme açısı ve  $\mathbf{u}$  birim vektörü zamanın fonksiyonu ise, Euler parametreleri de zamanın fonksiyonu olacaktır ve böylece küresel hareketi temsil edebilir hale gelecektir. Eğer Euler parametreleri yardımıyla zamanın fonksiyonu olan;

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p_0 \mathbf{e}_0 + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_0 + u_x(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_1 + u_y(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_2 + u_z(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

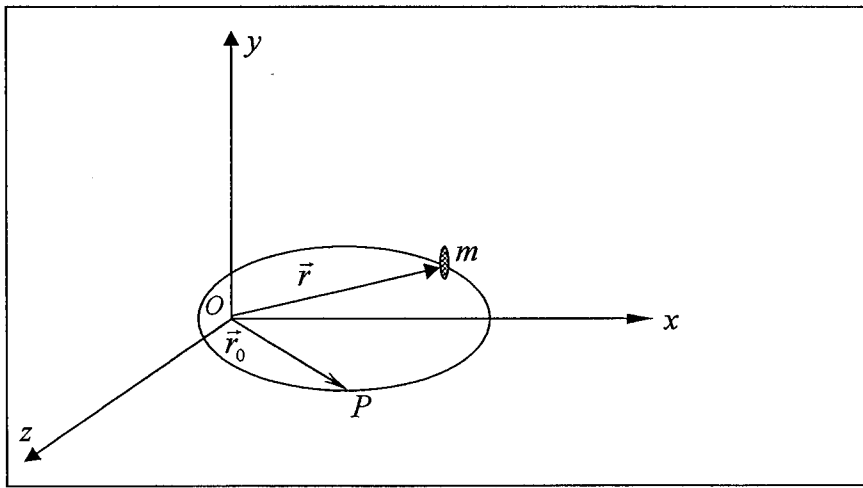
reel kuaternionu oluşturulursa, elde edilen kuaternionun normu,

$$\begin{aligned} N_p &= \mathbf{p} \mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* \mathbf{p} \\ &= [p_0 \mathbf{e}_0 + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3] [p_0 \mathbf{e}_0 - p_1 \mathbf{e}_1 - p_2 \mathbf{e}_2 - p_3 \mathbf{e}_3] \\ &= \left\{ \cos^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \right\} \{u_x^2(t) + u_y^2(t) + u_z^2(t)\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

bağıntısını sağlayacaktır. Burada  $\mathbf{p}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= p_0 \mathbf{e}_0 - p_1 \mathbf{e}_1 - p_2 \mathbf{e}_2 - p_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_0 - u_x(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_1 - u_y(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_2 - u_z(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

olup,  $\mathbf{p}$  reel kuaternionunun eşleniğini göstermektedir.  $\mathbf{p}$  reel kuaternionunun normu bir olduğuna göre  $\mathbf{p}$  birim kuaterniondur.



Şekil 5.1  $m$  kütleli cismin küresel hareketi

Şekil 5.1'de görüldüğü gibi, katı bir  $m$  cismi,  $O$  sabit noktası etrafında küresel bir harekete tabi tutulduğunda, küresel hareketin (5.7) eşitliği ile tanımlanan  $\mathbf{p}$  birim kuaternionu ile temsil edildiğini kabul ederek herhangi bir  $t$  anında küresel hareketin  $\omega(t)$  açısal hızını ve  $\alpha(t)$  açısal ivmesini tayin etmek mümkün olabilecektir.

Şekil 5.1’ de görüldüğü gibi  $\vec{r}$ ,  $O$  sabit noktası etrafında dönme hareketi yapan  $m$  katı cisminin konumunu belirleyen bir vektör fonksiyonu olsun.  $t = 0$  anında  $P(x, y, z)$  noktasının konum vektörü  $\vec{r}_0$  ise  $\vec{r}$  ve  $\vec{r}_0$  vektörleri,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3 \quad (5.10)$$

ve

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 \quad (5.11)$$

vektör kuaternionlarıyla temsil edilebilir [14]. Eğer  $m$  katı cisim küresel harekete maruz kalırsa,  $t$  anında  $P$  noktasının konum vektörü,

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} \mathbf{r}_0 \mathbf{p}^* \quad (5.12)$$

dönüşüm bağıntısından elde edilebilir. Burada  $\mathbf{p}$  birim kuaternion olduğundan

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^{-1} \quad (5.13)$$

bağıntısını sağlayacaktır. Küresel harekete ilişkin hız bağıntısını bulmak için (5.12) eşitliği ile verilen  $\mathbf{r} = \mathbf{p} \mathbf{r}_0 \mathbf{p}^*$  dönüşüm bağıntısının zamana göre türevini almak yeterlidir.

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.14)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (5.15)$$

ve

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \quad (5.16)$$

olmak üzere ilgili bağıntının zamana göre türevi için;

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} \mathbf{r}_0 \mathbf{p}^* + \mathbf{p} \dot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{p}^* + \mathbf{p} \mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{p}}^* \quad (5.17)$$

ifadesi yazılabilir. Bu bağıntıda  $\mathbf{r}_0$  vektör kuaternionu cismin başlangıçtaki konumunu verdiğinden,  $\mathbf{r}_0$  kuaternionunun zamana göre türevi sıfırdır.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} \mathbf{r}_0 \mathbf{p}^* + \mathbf{p} \mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{p}}^* \quad (5.18)$$

(5.18) eşitliği herhangi bir  $t$  anında  $P$  noktasının hızının hesaplanmasına olanak sağlayacaktır. Hız bağıntısını bu noktanın konumunu belirleyen  $\mathbf{r}$  kuaternionu cinsinden vermek daha uygun olacaktır. Bunu gerçekleştirmek için (5.12) eşitliğinden yararlanarak,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}^* \mathbf{r} \mathbf{p} \quad (5.19)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntı (5.18) eşitliğinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{p}}[\mathbf{p}^* \mathbf{r} \mathbf{p}] \mathbf{p}^* + \mathbf{p}[\mathbf{p}^* \mathbf{r} \mathbf{p}] \dot{\mathbf{p}}^* \\ &= \dot{\mathbf{p}} \mathbf{p}^* \mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{p} \dot{\mathbf{p}}^* \\ &= [\dot{\mathbf{p}} \mathbf{p}^*] \mathbf{r} + \mathbf{r} [\dot{\mathbf{p}} \mathbf{p}^*]^* \end{aligned} \quad (5.20)$$

bağıntısı elde edilir. (5.7) eşitliği ile tanımlanan  $\mathbf{p}$  kuaternionunu (5.5)' den yararlanarak,

$$\mathbf{p} = \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_0 + \mathbf{u}(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (5.21)$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür. Bu takdirde  $\mathbf{p}$ ' nin eşleniği,

$$\mathbf{p}^* = \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \mathbf{e}_0 - \mathbf{u}(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (5.22)$$

ile verilmelidir.

(5.20) eşitliği ile tanımlanan hız bağıntısına geri dönüldüğü takdirde  $\mathbf{p}$ ' nin türevi,

$$\dot{\mathbf{p}} = -\sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} \mathbf{e}_0 + \dot{\mathbf{u}}(t) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) + \mathbf{u}(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} \quad (5.23)$$

olmalıdır. Öte yandan denklemdeki  $\dot{\mathbf{p}} \mathbf{p}^*$  ifadesi için de  $\dot{\mathbf{p}}$  ve  $\mathbf{p}^*$  ifadeleri yerine konularak,

$$\dot{\mathbf{p}} \mathbf{p}^* = \mathbf{u}(t) \frac{\dot{\theta}(t)}{2} + \dot{\mathbf{u}}(t) \cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) - \dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{u}(t) \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \quad (5.24)$$

elde edilir. Bu ifadede,

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (5.25)$$

ve

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta)] \quad (5.26)$$

trigonometrik eşitliklerinden yararlanarak gerekli kısaltmalar yapılarak,

$$\dot{\mathbf{p}}\mathbf{p}^* = \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t)\mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\sin[\theta(t)] + (1 - \cos[\theta(t)])\mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{u}}(t)] \quad (5.27)$$

elde edilir. Bu ifade incelendiğinde  $\dot{\mathbf{p}}\mathbf{p}^*$  kuaternionunun skaler kısmının sıfır olması nedeniyle  $\dot{\mathbf{p}}\mathbf{p}^*$ ' in vektör kuaternion olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu vektör kuaternion,

$$\mathbf{q} = \dot{\mathbf{p}}\mathbf{p}^* \quad (5.28)$$

ile temsil edilsin. (5.20) eşitliğinde bu tanım kullanılarak,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{q}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{q}^* \quad (5.29)$$

ifadesi yazılabilir. Öte yandan vektör kuaternionlar için Bölüm 2'de verilen (2.27) eşitliği ile tanımlanan bağıntıdan yola çıkarak,

$$\mathbf{q}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{q}^* = 2\mathbf{q} \times \mathbf{r} \quad (5.30)$$

bağıntısına ulaşılabilir. O halde (5.29)' da verilen hız ifadesi,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{\theta}(t)\mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\sin[\theta(t)] + (1 - \cos[\theta(t)])\mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{u}}(t)] \times \mathbf{r}(t) \quad (5.31)$$

olmalıdır [14]. Bu ifadeden yola çıkarak cismin açısal hızını da reel kuaternionlarla ifade etmek mümkün olmaktadır.  $\boldsymbol{\omega}$  cismin açısal hızını göstermek üzere,

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (5.32)$$

bağıntısı yazılabilir. Yukarıda verilen hız bağıntıları karşılaştırılarak açısal hız,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t)\sin[\theta(t)] + (1 - \cos[\theta(t)])\mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (5.33)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde küresel harekette açısal ivme bağıntısını elde etmek için,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (5.34)$$

eşitliğini kullanmak yeterli olacaktır. Böylelikle açısal ivme için,

$$\begin{aligned} \alpha = & \dot{\theta}(t)\mathbf{u}(t) + \dot{\theta}(t)\dot{\mathbf{u}}(t)(1 + \cos[\theta(t)]) + \ddot{\mathbf{u}}(t)\sin[\theta(t)] \\ & + \dot{\theta}(t)\mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{u}}(t)\sin[\theta(t)] + \mathbf{u}(t) \times \ddot{\mathbf{u}}(t)(1 - \cos[\theta(t)]) \end{aligned} \quad (5.35)$$

bağıntısı elde edilir [14].

## 5.2. Reel Kuaternionlarla Lorentz Dönüşümleri

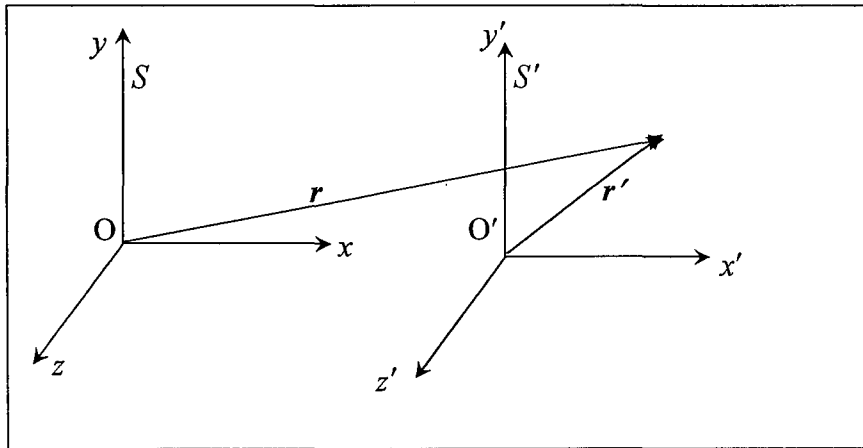
Reel kuaternionlarla bir eksen takımının  $\hat{n}$  birim vektörü çevresinde  $\theta$  açısı kadar döndürülmesini temsil eden dönüşüm denklemi,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{e} \mathbf{r} \mathbf{e}^* \\ &= \left( \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

bağıntısı ile verilir.  $xyz$ -koordinat sisteminin  $z$ -ekseni etrafında  $\varphi$  açısı kadar döndürülmesiyle elde edilecek yeni koordinatlar yukarıdaki denklemde  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  alınmasıyla,

$$\mathbf{r}' = \left( \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\theta}{2} \right) (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_3 \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.37)$$

şeklinde tanımlanır [34]. Bu dönüşüm iki boyutlu uzayda Lorentz dönüşümlerini elde etmede kullanılabilir.



Şekil 5.2 Hareketli gözlem çerçeveleri



Şekil 5.2' de görüldüğü gibi eylemsiz  $S'$  koordinat sistemi  $S$  koordinat sistemine göre  $x$ -ekseni boyunca  $v$  hızıyla hareket etsin. Böyle bir davranış sistemine ilişkin Lorentz bağıntıları önceki bölümlerde ayrıntılı olarak incelenmişti. Reel kuaternionlarla bu sistemi tanımlayan Lorentz dönüşümleri incelenirse,  $x_0$  zaman koordinatını göstermek üzere,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + x_0\mathbf{e}_2 \quad (5.38)$$

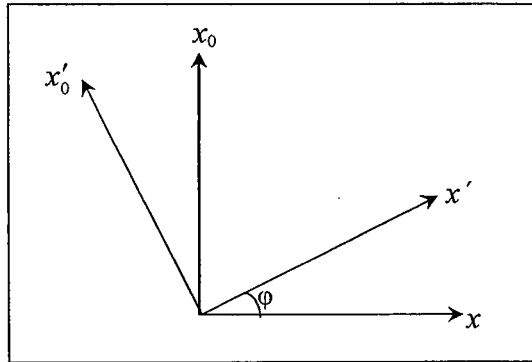
uzay zaman koordinatı,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= e\mathbf{r}e^* \\ (x'\mathbf{e}_1 + x'_0\mathbf{e}_2) &= (\cos\frac{\varphi}{2} + e_3 \sin\frac{\varphi}{2})(x\mathbf{e}_1 + x_0\mathbf{e}_2)(\cos\frac{\varphi}{2} - e_3 \sin\frac{\varphi}{2}) \end{aligned} \quad (5.39)$$

biçimindeki bir dönüşümle sağlanır. (5.39) denklemi daha açık bir formda yazılırsa,

$$\begin{aligned} (x'\mathbf{e}_1 + x'_0\mathbf{e}_2) &= (\cos\frac{\varphi}{2} + e_3 \sin\frac{\varphi}{2})(x\mathbf{e}_1 + x_0\mathbf{e}_2)(\cos\frac{\varphi}{2} - e_3 \sin\frac{\varphi}{2}) \\ &= (\cos\frac{\varphi}{2} + e_3 \sin\frac{\varphi}{2})[(x \cos\frac{\varphi}{2} - x_0 \sin\frac{\varphi}{2})\mathbf{e}_1 + (x_0 \cos\frac{\varphi}{2} + x \sin\frac{\varphi}{2})\mathbf{e}_2] \\ &= (x \cos\varphi - x_0 \sin\varphi)\mathbf{e}_1 + (x \sin\varphi + x_0 \cos\varphi)\mathbf{e}_2 \\ (x'\mathbf{e}_1 + x'_0\mathbf{e}_2) &= (x \cos\varphi - x_0 \sin\varphi)\mathbf{e}_1 + (x \sin\varphi + x_0 \cos\varphi)\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

bağıntısı elde edilir. Bu sonuç uzay-zamanda  $\varphi$  kadar bir dönmeye karşılık gelmektedir.



Şekil 5.3 Uzay-zamanda  $\varphi$  kadar dönme

Buna göre eğer Bölüm 3' deki ,  $\cos \varphi = \beta$  ve  $\sin \varphi = i\mu\beta$  ve  $x_0 = ict$  tanımları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (x'e_1 + x_0'e_2) &= (x\beta - x_0 i\beta\mu)e_1 + (xi\beta\mu + x_0 \beta)e_2 \\ &= \beta(x + ct\mu)e_1 + i\beta(x\mu + ct)e_2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

elde edilir.  $\mu = v/c$  ve  $\beta = 1/\sqrt{1-\mu^2}$  ile verilen tanımları kullanılarak,

$$x'e_1 + ict'e_2 = \frac{[x + ct(v/c)]e_1 + i[x(v/c) + ct]e_2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

ve

$$x'e_1 + ict'e_2 = \frac{x + vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}e_1 + i\frac{ct + x(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}e_2 \quad (5.42)$$

bulunur. (5.42) denkleminde eşitliğin sağ ve sol tarafları birbirlerine eşit olması gerektiğinden,

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

ve

$$ict' = i\frac{ct + x(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

olup

$$t' = \frac{t + x(v/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

bulunur. Bu sonuç daha önce çeşitli yöntemlerle bulunan sonuçlarla aynıdır.

### 5.3. Reel Kuaternionlar ve Kuantum Mekaniksel Operatörler

Reel kuaternionlarla kuantum mekaniksel uygulamalara geçmeden önce bazı tanımları vermek uygun olacaktır.  $\mathbf{r} = r = xe_1 + ye_2 + ze_3$  bir  $P(x, y, z)$  noktasının konumu gösteren vektör kuaternion olmak üzere,

$$\mathbf{r}\mathbf{r} = -(x^2 + y^2 + z^2) = -r^2 \quad (5.43)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu eşitlikte;

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \quad (5.44)$$

ile verilmiştir. Küresel koordinatlarda,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (5.45)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (5.46)$$

$$z = r \cos \theta \quad (5.47)$$

olduğuna göre yukarıda tanımlanan konumu gösteren  $\mathbf{r}$  kuaternionunu,

$$\mathbf{r} = r(\sin \theta e^{\varphi e_3} e_1 + \cos \theta e_3) \quad (5.48)$$

şeklinde yazmak mümkün olabilmektedir. Öte yandan  $\vec{\nabla}$  operatörü kuaternion formunda,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3 \quad (5.49)$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu tanımdan yola çıkarak,

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\nabla^2 \quad (5.50)$$

eşitliği elde edilir. Burada  $\nabla^2$ , çok iyi bilinen Laplace operatörüdür. Laplace eşitliği,

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (5.51)$$

ile verildiğine göre bu eşitliği kuaternion formunda,

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \Psi = 0 \quad (5.52)$$

şeklinde yazmak mümkündür [40].

Kuantum mekaniğinin momentum operatörleri,

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.53)$$

$$P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.54)$$

$$P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.55)$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde açısal momentum operatörleri ise basitlik açısından  $\hbar = 1$  kabul edilerek,

$$L_x = yP_z - zP_y = i(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}) \quad (5.56)$$

$$L_y = zP_x - xP_z = i(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}) \quad (5.57)$$

$$L_z = xP_y - yP_x = i(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}) \quad (5.58)$$

biçiminde verilmektedir.

Kuaternion yaklaşımı ile açısal momentumu tartışabilmek için yukarıda tanımlanan açısal momentum eşitlikleri,

$$\mathbf{L}_x = L_x = e_1 (z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}) \quad (5.59)$$

$$\mathbf{L}_y = L_y = e_2 (x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}) \quad (5.60)$$

$$\mathbf{L}_z = L_z = e_3 (y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}) \quad (5.61)$$

ile verilen kuaternionlarla tanımlansın. Böylelikle  $\mathbf{L}$  kuaternionik açısal momentum operatörü,

$$\mathbf{L} = L = \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_z \quad (5.62)$$

biçiminde  $\mathbf{L}_x$ ,  $\mathbf{L}_y$  ve  $\mathbf{L}_z$  kuaternionlarının toplamı olan bir vektör kuaternion olarak verilebilir.

Yukarıda tanımlanan operatörler, geleneksel kuantum mekaniğindeki operatörlerin sağladığı özelliklere benzer davranış göstermektedirler. Örneğin geleneksel kuantum mekaniğindeki,

$$L_x L_y - L_y L_x = iL_z \quad (5.63)$$

eşitliği kuaternion yaklaşımında,

$$\mathbf{L}_x \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_y \mathbf{L}_x = \mathbf{L}_z \quad (5.64)$$

şeklini alır. Benzer şekilde,

$$\mathbf{L}_y \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_z \mathbf{L}_y = \mathbf{L}_x \quad (5.65)$$

$$\mathbf{L}_z \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_x \mathbf{L}_z = \mathbf{L}_y \quad (5.66)$$

eşitlikleri de yazılabilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 &= \mathbf{L}\mathbf{L} \\ &= (\mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_z)(\mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_z) \\ &= \mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2 + \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_z \end{aligned} \quad (5.67)$$

olduğuna göre,

$$\mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2 = \mathbf{L}^2 - \mathbf{L} \quad (5.68)$$

ifadesi elde edilmektedir.

Görüldüğü gibi açısal momentum operatörlerinin kareleri toplamı geleneksel kuantum mekaniğinde olduğu gibi  $L^2$  değil  $L^2 - L$  ' olmaktadır.

Bununla birlikte,

$$\mathbf{L}(\mathbf{L}_z^2 - \mathbf{L}_z) = (\mathbf{L}_z^2 - \mathbf{L}_z)\mathbf{L} \quad (5.69)$$

bağıntısı yazılabilmektedir. Diğer bir deyişle  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_z^2 - \mathbf{L}_z$  ile sıra değiştirebilmektedir [40].

## 6. KOMPLEKS KUATERNİONLAR

Bu bölümde kompleks kuaternionların tanımı yapıldıktan sonra matematiksel özellikleri incelenecek, ardından da  $4 \times 4$  ve  $8 \times 8$  izomorfik matris temsilleri verilecektir.

### 6.1. Tanımlar

Kompleks kuaternionlar, reel kuaternionların kompleks bir ifadesidir.  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}'$  reel kuaternionları;

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3 \quad (6.1)$$

ve

$$\mathbf{q}' = q'_0 \mathbf{e}_0 + q'_1 \mathbf{e}_1 + q'_2 \mathbf{e}_2 + q'_3 \mathbf{e}_3 \quad (6.2)$$

ile verilmek üzere  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionu;

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + i\mathbf{q}' \quad (6.3)$$

şeklinde tanımlanır.  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionunu daha açık bir ifade ile;

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3) + i(q'_0 \mathbf{e}_0 + q'_1 \mathbf{e}_1 + q'_2 \mathbf{e}_2 + q'_3 \mathbf{e}_3) \\ &= (q_0 + iq'_0) \mathbf{e}_0 + (q_1 + iq'_1) \mathbf{e}_1 + (q_2 + iq'_2) \mathbf{e}_2 + (q_3 + iq'_3) \mathbf{e}_3 \\ &= Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.4)$$

biçiminde yazmak mümkündür [58]. Burada  $i^2 = -1$  olup,  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$  ise kompleks sayılardır. Diğer bir deyişle nasıl bileşenleri reel sayılar olan kuaternion reel kuaternion olarak adlandırılıyorsa, bileşenleri kompleks sayılar olan kuaternion da kompleks kuaternion olarak adlandırılır.

Reel ve kompleks kuaternionların cebirleri de benzerlik göstermektedir. Bir kompleks kuaternionu aynı reel kuaternionlarda olduğu gibi skaler ve vektörel terimler cinsinden de ifade etmek mümkündür.  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionunun  $S_Q$ ; skaler kısmını,  $V_Q$ ; vektörel kısmını göstermek üzere,

$$S_Q = Q_0 \mathbf{e}_0 \quad (6.5)$$

ve

$$V_Q = Q = Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3 \quad (6.6)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece  $Q$  kuaternionu;

$$Q = S_Q + V_Q = Q_0 e_0 + Q = Q_0 e_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3 \quad (6.7)$$

ile ifade edilir.

### 6.1.1. Kompleks Kuaternionların Çarpımı

$P$  ve  $Q$  gibi iki kompleks kuaternionunun çarpımı aynı reel kuaternionlarda olduğu gibi;

$$PQ = (P_0 + P)(Q_0 + Q) = P_0 Q_0 + P_0 Q + Q_0 P - P \cdot Q + P \times Q \quad (6.8)$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki nokta ve kros çarpımlar, üç boyutlu uzaydaki skaler ve vektörel çarpımlara karşılık gelmektedir.

### 6.1.2. Kompleks kuaternionların eşleniği

Her kompleks kuaternion için bir eşlenik tanımlamak mümkündür.  $Q$  kompleks kuaternionunun eşleniği  $Q^*$  ile gösterilir ve

$$Q^* = S_Q - V_Q = S_Q - Q = Q_0 e_0 - Q_1 e_1 - Q_2 e_2 - Q_3 e_3 \quad (6.9)$$

şeklinde tanımlanır [58]. Görüldüğü gibi  $Q^*$  nun eşleniği vektörel kısmın işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir.  $P, Q \in H_C$  olmak üzere kompleks kuaternionlarının çarpımının eşleniği için;

$$(PQ)^* = Q^* P^* \quad (6.10)$$

ifadesi yazılabilir. Kompleks kuaternionlar için kompleks eşlenik de tanımlanabilir.  $Q^\circ$  ile gösterilen kompleks eşlenik;

$$\begin{aligned} Q^\circ &= S_Q^\circ + V_Q^\circ \\ &= (q_0 - iq_0') e_0 + (q_1 - iq_1') e_1 + (q_2 - iq_2') e_2 + (q_3 - iq_3') e_3 \\ &= Q_0^\circ e_0 + Q_1^\circ e_1 + Q_2^\circ e_2 + Q_3^\circ e_3 \end{aligned} \quad (6.11)$$

ile verilir ve  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$  kompleks sayılarının eşleniğinin alınmasıyla elde edilir . Bu işlem sonucu elde edilen nicelik yine bir kompleks kuaterniondur [58].

### 6.1.3. Kompleks kuaternionların normu

Kompleks kuaternionların normu da tanımlıdır.  $Q$  kompleks kuaternionunun normu  $N_Q$  ile gösterilmek üzere;

$$N_Q = QQ^* = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \quad (6.12)$$

şeklinde tanımlanır. Diğer bir deyişle norm ifadesi, kompleks kuaternionun kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir.  $Q_0, Q_1, Q_2,$  ve  $Q_3$  kompleks sayılar olduğuna göre, kompleks kuaternionların normu kompleks bir skalerdir. Normu birim olan kompleks kuaterniona birim kompleks kuaternion denir.  $P$  ve  $Q$  kompleks kuaternionlarının çarpımının normu, herbirisinin normlarının çarpımına eşittir:

$$N_{PQ} = PQ(PQ)^* = PQQ^*P^* = QQ^*PP^* = N_QN_P = N_PN_Q. \quad (6.13)$$

### 6.1.4. Kompleks kuaternionların tersi

Normu sıfırdan farklı olmak kaydı ile ele alınan  $Q$  kompleks kuaternionunun tersi yine reel kuaternionlarda olduğu gibi;

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{N_Q} \quad (6.14)$$

şeklinde tanımlanır.

## 6.2. Kompleks Kuaternionların Matris Temsilleri

$q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\mathbf{q} = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$  reel kuaternionu için aşağıdaki  $4 \times 4$  matrisler kullanılabilir [58]:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$



$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Bu tanımlardan yararlanarak reel bir kuaternion aşağıdaki gibi  $4 \times 4$  dalga simetrik matrisle temsil edilebilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= q_0 \mathbf{Q}_0 + q_1 \mathbf{Q}_1 + q_2 \mathbf{Q}_2 + q_3 \mathbf{Q}_3 \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 \\ -q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & -q_3 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 \\ -q_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$  matrisleri reel kuaternionların taban elemanları arasındaki,

$$e_0^2 = 1 \quad e_j e_k = -\delta_{jk} e_0 + \varepsilon_{jkl} e_l \quad j, k, l = 1, 2, 3 \quad \text{ve} \quad e_0 = 1$$

bağıntıya benzer şekilde,

$$Q_0^2 = 1 \quad Q_j Q_k = -\delta_{jk} Q_0 + \varepsilon_{jkl} Q_l \quad (6.20)$$

eşitliğini sağlamaktadır.

$Q = Q_0 e_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3$  kompleks kuaternionunu,

$$Q = \begin{pmatrix} Q & Q' \\ -Q' & Q \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

$8 \times 8$  matrisi ile de temsil etmek mümkündür. Bu ifadede yer alan  $Q$  ve  $Q'$   $4 \times 4$  matrisleri,  $q$  ve  $q'$  reel kuaternionlarını temsil eden matrisler olup, dalga simetrik matris temsilleri  $q$  için (6.19) ve  $q'$  için de,

$8 \times 8$

$$Q' = q'_0 Q_0 + q'_1 Q_1 + q'_2 Q_2 + q'_3 Q_3 = \begin{pmatrix} q'_0 & q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ -q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ -q'_2 & q'_3 & q'_0 & -q'_1 \\ -q'_3 & -q'_2 & q'_1 & q'_0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

şeklinde verilmiştir. Öte yandan,

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

ve

$$I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

biçiminde tanımlanan matrisler olmak üzere, bu matrislerden yararlanarak;

$$K = \eta \times I_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_4 \\ -I_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_j \end{pmatrix} \quad (j=1,2,3) \quad (6.26)$$

ve

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

matrisleri türetilsin. Bu tanıma göre,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

matris ifadeleri yazılabilir. Yukarıda tanımlanan matrislerden yararlanarak  $\mathbf{Q} = (q_0 + iq'_0)\mathbf{e}_0 + (q_1 + iq'_1)\mathbf{e}_1 + (q_2 + iq'_2)\mathbf{e}_2 + (q_3 + iq'_3)\mathbf{e}_3$  şeklinde verilen  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionu da aynı formdaki,

$$\mathbf{Q} = (q_0 + \kappa q'_0)\mathbf{a}_0 + (q_1 + \kappa q'_1)\mathbf{a}_1 + (q_2 + \kappa q'_2)\mathbf{a}_2 + (q_3 + \kappa q'_3)\mathbf{a}_3 \quad (6.30)$$

matrisi ile temsil edilir [58]. Bu yolla  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionu, taban elemanları  $8 \times 8$  formundaki  $\mathbf{a}_0$  ve  $\mathbf{a}_j$  matrislerinden oluşan  $8 \times 8$  bir matrisle temsil edilebilir.  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  ve  $\mathbf{a}_3$  matrisleri kuaternion taban elemanlarının sağladığı aynı çarpım kurallarına uyarlar.

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_j \quad (6.31)$$

$$\mathbf{a}_0^2 = -\mathbf{a}_j^2 = \mathbf{I}_8 = \mathbf{a}_0 \quad (6.32)$$

$$\mathbf{a}_j \mathbf{a}_k = -\delta_{jk} \mathbf{a}_0 + \varepsilon_{jkl} \mathbf{a}_l \quad (6.33)$$

(6.30) eşitliği daha açık bir ifade ile,

$$q_0 \mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

ve

$$(\kappa q'_0) \mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 \\ -q'_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

olup, (6.30) eşitliğindeki matris ifadesinin birinci bileşeni,

$$q_0 \mathbf{a}_0 + q'_0 \kappa \mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 \\ -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde,

$$(\kappa q'_1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q'_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 \\ 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

olup ikinci bileşen,

$$q_1 \alpha_1 + (\kappa q'_1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 & 0 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & -q'_1 \\ 0 & 0 & -q_1 & 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 \\ 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 & 0 \\ q'_1 & 0 & 0 & 0 & -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ 0 & 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

matris ifadesine eşittir. Üçüncü bileşen için,

$$q_2 \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

ve

$$(\kappa q'_2)\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

$$q_2\mathbf{a}_2 + (\kappa q'_2)\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & q'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & q'_2 \\ -q_2 & 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ q'_2 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q'_2 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

bulunur. Son terim ise,

$$q_3\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

ve

$$(\kappa q'_3)\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

olup,

$$q_3 \mathbf{a}_3 + (\kappa q'_3) \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & q'_3 \\ 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & q'_3 & 0 & 0 \\ -q_3 & 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & q'_3 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 \\ 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ q'_3 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

elde edilir. Dolayısı ile (6.30) ifadesi,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 \\ -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 & 0 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_1 & 0 & 0 & 0 & -q'_1 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 \\ 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 & 0 \\ q'_1 & 0 & 0 & 0 & -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q'_1 & 0 & 0 & 0 & -q_1 \\ 0 & 0 & -q'_1 & 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & q'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & q'_2 \\ -q_2 & 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_2 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ q'_2 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q'_2 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & q'_3 \\ 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & q'_3 & 0 & 0 \\ -q_3 & 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & q'_3 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 \\ 0 & -q'_3 & 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 \\ q'_3 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin toplamına eşittir. Böylece  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionu aşağıdaki gibi  $8 \times 8$  simetrik matrisle gösterilebilir [58]:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q'_0 & q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 & -q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 & -q'_2 & q'_3 & q'_0 & -q'_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 & -q'_3 & -q'_2 & q'_1 & q'_0 \\ -q'_0 & -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q'_1 & -q'_0 & q'_3 & -q'_2 & -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q'_2 & -q'_3 & -q'_0 & q'_1 & -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q'_3 & q'_2 & -q'_1 & -q'_0 & -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

$\mathbf{Q}$  matrisinin izi ana diaogonal üzerindeki elemanların toplamına eşittir:

$$\text{Tr}\mathbf{Q} = 8q_0. \quad (6.46)$$

Öte yandan  $\mathbf{Q}$  matrisinin eşleniği ise,

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & q'_0 & -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 & q'_1 & q'_0 & q'_3 & -q'_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 & q'_2 & -q'_3 & q'_0 & q'_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 & q'_3 & q'_2 & -q'_1 & q'_0 \\ -q'_0 & q'_1 & q'_2 & q'_3 & q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q'_1 & -q'_0 & -q'_3 & q'_2 & q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q'_2 & q'_3 & -q'_0 & -q'_1 & q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q'_3 & -q'_2 & q'_1 & -q'_0 & q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

ile verilmektedir.



$P$  ve  $Q$  kompleks kuaternionlar olmak üzere,

$$(PQ)^* = Q^*P^*$$

ile verilen bağıntı, kuaternionlar ve matrisler arasındaki izomorflığı göstermek üzere,

$$(PQ)^* = Q^*P^* \tag{6.48}$$

matris eşitliği ile temsil edilebilir.

## 7. KOMPLEKS KUATERNİONLARLA RÖLATİVİSTİK MEKANİK

Bu bölümde uzay-zamanın kompleks kuaternionlarla nasıl ifade edildiği anlatılacak, daha sonra ise dört boyutlu uzay-zamanın özellikleri kompleks kuaternionlar kullanılarak incelenecektir. Kompleks kuaternionların Lorentz dönüşümlerini elde etmede oynadıkları rol de araştırılacaktır.

### 7.1. Kompleks Kuaternionik Aralık

Daha önce de belirtildiği gibi üç boyutlu uzayda bir noktanın konumunu  $\vec{r}(x, y, z)$  konum vektörü ile belirleyebilmek için üç parametreye ihtiyaç vardır. Koordinatı belirten bu üç değer fiziksel bir olayın nerede meydana geldiğini belirleyebilmek için yeterli iken ne zaman meydana geldiği hakkında fikir vermez. Dolayısı ile başka bir koordinata daha ihtiyaç duyulur. Fiziksel olayın ne zaman meydana geldiğini belirtmek için zaman koordinatının eklenmesiyle dördü bir koordinata ulaşılır. Zaman koordinatını uzunluk birimi cinsinden ifade etmek daha doğru olur. Bu nedenle zaman koordinatı sabit bir nicelik olan “ $c$ ” ışık hızı ile çarpılır. Böylelikle dört boyutlu uzayda konum vektörü,

$$\mathbf{R} = ct + i\mathbf{r} = ct + i(xe_1 + ye_2 + ze_3) \quad (7.1)$$

kompleks kuaternionu ile verilir.  $\tau = ct$  tanımı kullanılırsa bu eşitlik,

$$\mathbf{R} = \tau + i\mathbf{r} = \tau + i(xe_1 + ye_2 + ze_3) \quad (7.2)$$

halini alacaktır. Bölüm 3’de de belirtilen gibi özel rölativite teorisinin temelini teşkil eden dört boyutlu uzaydaki Minkowski uzayının temel formu kompleks kuaternionlarla,

$$N_{dR} = dS^2 = d\mathbf{R} d\mathbf{R}^* = (d\tau + i d\mathbf{r})(d\tau - i d\mathbf{r}) = d\tau^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

biçiminde elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta üç boyutlu uzaydaki  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  niceliği nasıl tüm ortogonal dönüşümler altında değişmez kalıyorsa dört boyutlu uzay-zamanda  $dS^2$  ile tanımlanan niceliğin de değişmez kalmasıdır [119].

## 7.2. Kompleks Kuaternionlarla Dört Boyutlu Uzay-Zamanın Özelliklerinin İncelenmesi

Üç boyutlu uzayda tanımlanan  $ds^2$  uzaklığının dört boyutlu uzaya nasıl genelleştirildiğini gördükten sonra üç boyutlu uzayda tanımlanan fiziksel niceliklerin dört boyutlu uzay-zamana kompleks kuaternionlarla nasıl genelleştirildiğini incelemek gerekir.

$$\mathbf{U} = u_0 + i\mathbf{u} = u_0 + i(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \quad (7.4)$$

ile tanımlanan  $\mathbf{U}$  kompleks kuaternionu ile,

$$\mathbf{V} = v_0 + i\mathbf{v} = v_0 + i(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \quad (7.5)$$

biçiminde verilen  $\mathbf{V}$  kompleks kuaternionunu ele alınsın.  $\mathbf{U}$  ve  $\mathbf{V}^*$  nin kuaternion çarpımından,

$$\mathbf{UV}^* = (u_0 + i\mathbf{u})(v_0 - i\mathbf{v}) = u_0v_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} + i(v_0\mathbf{u} + u_0\mathbf{v}) \quad (7.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin skaler kısmı,

$$Sc\{\mathbf{UV}^*\} = u_0v_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_0v_0 - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \quad (7.7)$$

ile ve vektörel kısmı ise,

$$\begin{aligned} Vec\{\mathbf{UV}^*\} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + i(v_0\mathbf{u} + u_0\mathbf{v}) \\ &= [(u_2v_3 - u_3v_2) + i(v_0u_1 - u_0v_1)]\mathbf{e}_1 \\ &\quad + [(u_3v_1 - u_1v_3) + i(v_0u_2 - u_0v_2)]\mathbf{e}_2 \\ &\quad + [(u_1v_2 - u_2v_1) + i(v_0u_3 - u_0v_3)]\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

ile verilecektir.  $\mathbf{U}$  kompleks kuaternionu ile  $\mathbf{V}$  kompleks kuaternionunun eşleniğinin kuaternion çarpımı yine bir kompleks kuaternion olduğundan bu çarpım,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = \mathbf{UV}^* &= Sc\{\mathbf{UV}^*\} + Vec\{\mathbf{UV}^*\} \\ &= [u_0v_0 - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)] + [(u_2v_3 - u_3v_2) + i(v_0u_1 - u_0v_1)]\mathbf{e}_1 \\ &\quad + [(u_3v_1 - u_1v_3) + i(v_0u_2 - u_0v_2)]\mathbf{e}_2 + [(u_1v_2 - u_2v_1) + i(v_0u_3 - u_0v_3)]\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

kompleks kuaternionu ile belirlensin.  $\mathbf{Z}$  kompleks kuaternionlarının bileşenleri;

$$Q_0 = u_0 v_0 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \quad (7.9)$$

$$Q_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 + i(u_1 v_0 - u_0 v_1) \quad (7.10)$$

$$Q_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 + i(u_2 v_0 u_2 - u_0 v_2) \quad (7.11)$$

$$Q_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 + i(u_3 v_0 - u_0 v_3) \quad (7.12)$$

şeklinde tanımlanmak üzere bu çarpım için Bölüm 6'da da belirtildiği gibi,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^* = Q_0 + \mathbf{Q} = Q_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 \quad (7.13)$$

ifadesi yazılabilir.

Diğer taraftan ele alınan  $\mathbf{Q} = q_0 + i\mathbf{q}$  gibi bir kompleks kuaternionun normu önemli tanımları doğurur. "0" indisi zaman bileşenini göstermek üzere eğer,

$$N_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = [q_0 + i\mathbf{q}][q_0 - i\mathbf{q}] = q_0^2 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) > 0 \quad (7.14)$$

ise yani zaman koordinatı daha baskın, dolayısı ile norm pozitif ise bu kompleks kuaternion *zamanımsı*,

$$N_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = [q_0 + i\mathbf{q}][q_0 - i\mathbf{q}] = q_0^2 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) < 0 \quad (7.15)$$

durumunda uzay koordinatları daha baskın, norm da negatif, ise *uzayımsı*,

$$N_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = [q_0 + i\mathbf{q}][q_0 - i\mathbf{q}] = q_0^2 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 0 \quad (7.16)$$

olması halinde norm sıfırdır ve *izotropik* adını alır [119].

### 7.3. Lorentz Dönüşümlerinin Kompleks Kuaternion Temsilleri

Kompleks kuaternionları Lorentz dönüşümlerini ifade etmede de kullanmak mümkündür. Önceki bölümlerde tartışıldığı gibi bu dönüşümlerde kompleks niceliklerin kullanılması, kompleks kuaternionları yapıları nedeniyle oldukça avantajlı hale getirmektedir.

$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$  reel kuaternionunu (2.34)-(2.36) tanımları kullanılarak,

$$\mathbf{q} = \sqrt{N_{\mathbf{q}}} (\cos \theta + \hat{\mathbf{q}} \sin \theta)$$

şeklinde temsil etmenin mümkün olduğu Bölüm 2' de belirtilmişti. Bu tanımdan yola çıkarak,

$$\mathbf{R} = t + i\mathbf{r} = t + i[r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3] \quad (7.17)$$

kompleks kuaternionu da,

$$\cos \varphi = \frac{t}{\sqrt{N_{\mathbf{R}}}} \quad (7.18)$$

ve

$$\sin \varphi = i \frac{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{N_{\mathbf{R}}}} = i \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}{\sqrt{N_{\mathbf{R}}}} \quad (7.19)$$

ile tanımlanmak üzere,

$$\mathbf{R} = \sqrt{N_{\mathbf{R}}} (\cos \varphi + \hat{\mathbf{r}} \sin \varphi) \quad (7.20)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $N_{\mathbf{R}}$  ;  $\mathbf{R}$  kompleks kuaternionunun normu olup,

$$N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{R} = (t + i\mathbf{r})(t - i\mathbf{r}) = t^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

Minscowki uzayının temel formunu ifade eder. Basitlik açısından (7.17)' deki tanımda  $c = 1$  alınmıştır. Öte yandan diğer bir  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionu ise,

$$\mathbf{Q} = \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{q}} \sinh \frac{\theta}{2} \quad (7.21)$$

şeklinde tanımlansın. Bölüm 3' de verilen Lorentz dönüşümleri kompleks kuaternion formunda,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}_c^* \quad (7.22)$$

ile tanımlanan bir dönüşüme karşılık gelmektedir [64]. (7.22) ifadesi daha açık bir formda,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \left\{ \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{q}} \sinh \frac{\theta}{2} \right\} (t + i\mathbf{r}) \left\{ \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{q}} \sinh \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= \sqrt{N_{\mathbf{R}}} \left\{ \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{q}} \sinh \frac{\theta}{2} \right\} \left\{ \cos \varphi + \hat{\mathbf{r}} \sin \varphi \right\} \left( \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{q}} \sinh \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Yukarıdaki ifadedeki ilk iki terimin kuaternion çarpımı açılarak,

$$\mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{q} \sinh \frac{\theta}{2} \right\} \left( \cos \varphi \cosh \frac{\theta}{2} + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} + \hat{r} \sin \varphi \cosh \frac{\theta}{2} - i(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} + i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \right)$$

elde edilir. Üçlü çarpım için ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cos \varphi \cosh^2 \frac{\theta}{2} + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{r} \sin \varphi \cosh^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ - i(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\ + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot \hat{q} \cos \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} - i(\hat{q} \cdot \hat{r}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\ + i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{q}(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \\ \left. - \hat{q} \times (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (7.23)$$

vektörel eşitliği kullanılarak  $\hat{q} \times (\hat{r} \times \hat{q})$  çarpımı için,

$$\hat{q} \times (\hat{r} \times \hat{q}) = \hat{r}(\hat{q} \cdot \hat{q}) - \hat{q}(\hat{q} \cdot \hat{r}) = \hat{r} - \hat{q}(\hat{q} \cdot \hat{r}) \quad (7.24)$$

ifadesi yazılabilir. Yukarıdaki  $\mathbf{R}'$  dönüşüm eşitliği tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cos \varphi \cosh^2 \frac{\theta}{2} + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{r} \sin \varphi \cosh^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ - i(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\ + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot \hat{q} \cos \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} - i(\hat{q} \cdot \hat{r}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\ + i(\hat{q} \times \hat{r}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{q}(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \\ \left. - (\hat{r} - \hat{q}(\hat{q} \cdot \hat{r})) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cos \varphi \cosh^2 \frac{\theta}{2} + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + \hat{r} \sin \varphi \cosh^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
- i(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\
+ i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\
+ \cos \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} - i(\hat{q} \cdot \hat{r}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} + i(\hat{q} \times \hat{r}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\
+ \hat{q}(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \\
\left. - \hat{r} \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} + \hat{q}(\hat{q} \cdot \hat{r}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik için,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cos \varphi (\cosh^2 \frac{\theta}{2} + \sinh^2 \frac{\theta}{2}) + 2i\hat{q} \cos \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \right. \\
+ \hat{r} \sin \varphi (\cosh^2 \frac{\theta}{2} - \sinh^2 \frac{\theta}{2}) - i(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\
+ i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} - i(\hat{q} \cdot \hat{r}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\
- i(\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\theta}{2} \\
\left. + 2\hat{q}(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\}
\end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Hiperbolik fonksiyonlar için geçerli,

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (7.25)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (7.26)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad (7.27)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (7.28)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (7.29)$$

eşitliklerini kullanarak  $\mathbf{R}'$  dönüşüm ifadesi daha yalın bir forma sokulabilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cos \varphi \cosh \theta + i\hat{q} \cos \varphi \sinh \theta + \hat{r} \sin \varphi - i(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \theta \right. \\
\left. + 2\hat{q}(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} + \hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Öte yandan yukarıdaki eşitlikte verilen,

$$\hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \quad (7.30)$$

ifadesinde vektörel çarpım kuralı gereğince,

$$\hat{q} \perp (\hat{r} \times \hat{q}) \quad (7.31)$$

olduğundan buradaki vektörel işlem,

$$\hat{q} \cdot (\hat{r} \times \hat{q}) = 0 \quad (7.32)$$

biçiminde olmalıdır. Bu nedenle dönüşüm denklemindeki son terim sıfırdır. O halde  $\mathbf{R}'$  için,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \cos \varphi \cosh \theta + i \hat{q} \cos \varphi \sinh \theta + \hat{r} \sin \varphi - i (\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh \theta \right. \\ \left. + 2 \hat{q} (\hat{r} \cdot \hat{q}) \sin \varphi \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (7.33)$$

yazılmalıdır. (7.18) ve (7.19) ile verilen tanımları yukarıdaki denkleme yerine yazarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' = \sqrt{N_R} \left\{ \frac{t}{\sqrt{N_R}} \cosh \theta + i \hat{q} \frac{t}{\sqrt{N_R}} \sinh \theta + i \hat{r} \frac{\sqrt{r \cdot r}}{\sqrt{N_R}} + (\hat{r} \cdot \hat{q}) \frac{\sqrt{r \cdot r}}{\sqrt{N_R}} \sinh \theta \right. \\ \left. + 2 i \hat{q} (\hat{r} \cdot \hat{q}) \frac{\sqrt{r \cdot r}}{\sqrt{N_R}} \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (7.34)$$

elde edilir. Yukarıdaki dönüşüm sonucu elde edilecek  $\mathbf{R}'$  kompleks kuaternionu,

$$\mathbf{R}' = t' + i r' = t + i(r'_1 e_1 + r'_2 e_2 + r'_3 e_3) \quad (7.35)$$

formatında olacağına göre (7.34) denkleminde verilen dönüşümün reel ve imajiner bileşenlerini ayrı ayrı gruplayarak ifade etmek daha uygun olacaktır.

$$\begin{aligned} t' + i r' = [t \cosh \theta + (\hat{r} \cdot \hat{q}) \sqrt{r \cdot r} \sinh \theta] \\ + i \left[ \hat{r} (\sqrt{r \cdot r}) + \hat{q} t \sinh \theta + 2 \hat{q} (\hat{r} \cdot \hat{q}) \sqrt{r \cdot r} \sinh^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.36)$$



Bu ifadede eşitliğin sol ve sağ tarafları birbirlerine eşit olması gerektiğinden “ $i$ ” terimini içeren bileşenler “ $r'$ ”ne, reel bileşenler de “ $t'$ ”ne eşit olmalıdır. O halde;

$$t' = t \cosh \theta + (\hat{r} \cdot \hat{q}) \sqrt{r \cdot r} \sinh \theta \quad (7.37)$$

ve

$$r' = \hat{r}(\sqrt{r \cdot r}) + \hat{q} t \sinh \theta + 2\hat{q}(\hat{r} \cdot \hat{q}) \sqrt{r \cdot r} \sinh^2 \frac{\theta}{2} \quad (7.38)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadelerde,

$$\hat{r} = \frac{r}{\sqrt{r \cdot r}} \quad (7.39)$$

ve

$$\hat{q} = \frac{v}{\sqrt{v \cdot v}} \quad (7.40)$$

tanımlarını yapıldıktan sonra  $\cosh \theta$  için,

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (7.41)$$

değeri atansın. Hiperbolik fonksiyonlar için tanımlanan (7.29) eşitliğini kullanarak,

$$\sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta - 1 = \frac{1}{1 - v^2} - 1 = \frac{v^2}{1 - v^2} \quad (7.42)$$

bulunur.  $\sinh \theta$  ise,

$$\sinh \theta = \pm \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (7.43)$$

olacaktır. Ardından da  $\sinh \theta$ ' nın alabileceği iki değerden eksi olanı seçilsin.

$$\sinh \theta = - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (7.44)$$

(7.39)'dan (7.44)'e kadar olan tanımlar (7.37) ve (7.38) eşitliklerinde yerine konularak,

$$t' = t \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - \left( \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \right) \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \quad (7.45)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{N_r} = r \quad (7.46)$$

$$\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{N_v} = v \quad (7.47)$$

olduğuna göre (7.45) eşitliği,

$$t' = t \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \quad (7.48)$$

halini alır. Benzer şekilde,

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (\cosh \theta - 1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right] \quad (7.49)$$

eşitliği de kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} (\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}) - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} t \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + 2 \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \left( \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \right) \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right] \\ &= \mathbf{r} - \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} + \left[ \frac{1}{1-v^2} - 1 \right] \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (7.50)$$

bulunur [64].

(7.48) ve (7.50) eşitlikleri Lorentz dönüşümlerinin standart biçimleridir. Örneğin +x yönünde v hızıyla uzaklaşan gözlem çerçevesi için x ve v paralel olacağına göre (7.48) eşitliğinden;

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (t - xv)$$

ve (7.50) eşitliğinden de,

$$\mathbf{r}' = x - \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} \mathbf{v} + \left[ \frac{1}{1-v^2} - 1 \right] \mathbf{v} (xv) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (x - vt)$$

elde edilir. Böylelikle Bölüm 3' de verilen Lorentz dönüşümlerine ulaşılır [64].

## 8. KOMPLEKS KUATERNİONLAR VE KLASİK ELEKTROMANYETİZMA

Kompleks kuaternionların en önemli uygulama alanlarından birisi de klasik elektromanyetizmadır. Bu uygulamalar aslında Maxwell' in [6] bizzat kendisi tarafından başlatılmıştır. Son yıllarda ise Lambek [59] ile Negi ve arkadaşları [58] tarafından gerçekleştirilen çalışmalar dikkat çekicidir.

### 8.1. Temel Tanımlar

Elektromanyetizmanın klasik denklemlerini kompleks kuaternionlarla birleştirmek mümkündür. Bu denklemler aynı zamanda matrislerle de temsil edilebilir. Birimsel açıdan bir kargaşaya yol açmamak ve daha basit bir gösterim için  $\varepsilon = \mu = c = \hbar = 1$  alınacaktır. Bölüm 7' de,  $\mathbf{R} = t + ir = t + i[xe_1 + ye_2 + ze_3]$  ile verilen kompleks kuaternionik uzay-zaman tanımı ile kompleks kuaternionların,

$$\mathbf{Q} = (q_0 + \kappa q'_0)\mathbf{a}_0 + (q_1 + \kappa q'_1)\mathbf{a}_1 + (q_2 + \kappa q'_2)\mathbf{a}_2 + (q_3 + \kappa q'_3)\mathbf{a}_3$$

$8 \times 8$  matrisi arasında paralellik kurmak açısından,

$$q_0 = 0 \tag{8.1}$$

$$q'_0 = t \tag{8.2}$$

$$q_1 = x \tag{8.3}$$

$$q_2 = y \tag{8.4}$$

$$q_3 = z \tag{8.5}$$

$$q'_1 = q'_2 = q'_3 = 0 \tag{8.6}$$

biçimsel gösterim değişimi yapılmalıdır. Dolayısıyla  $\mathbf{R}$  kompleks kuaternionu,

$$\mathbf{R} = t\mathbf{a}_0 + \kappa [x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3] \tag{8.7}$$

matris ifadesiyle elde edilir ve açık formda da,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z & t & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & -z & y & 0 & t & 0 & 0 \\ -y & z & 0 & -x & 0 & 0 & t & 0 \\ -z & -y & x & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ -t & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z \\ 0 & -t & 0 & 0 & -x & 0 & -z & y \\ 0 & 0 & -t & 0 & -y & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -t & -z & -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

$8 \times 8$  matrisi ile temsil edilir.

Öte yandan,

$$S^2 = N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{R} = t^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = t^2 - [x^2 + y^2 + z^2]$$

şeklindeki uzay-zaman değişmezi ise;  $\mathbf{I}_8$ ,  $8 \times 8$  birim matris olmak üzere,

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{R} = [t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]\mathbf{I}_8 \quad (8.9)$$

bağıntısıyla elde edilir. (8.9)' da verilen  $\mathbf{R}^*$  matrisi,

$$\mathbf{R}^* = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -z & t & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & z & -y & 0 & t & 0 & 0 \\ y & -z & 0 & x & 0 & 0 & t & 0 \\ z & y & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ -t & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & -y & -z \\ 0 & -t & 0 & 0 & x & 0 & z & -y \\ 0 & 0 & -t & 0 & y & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & -t & z & y & -x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

olup  $\mathbf{R}$  matrisinin eşleniğidir.

Yeni bir kompleks kuaternionik nicelik olan *kompleks kuaternionik diferansiyel operatörü*,

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right] \quad (8.11)$$

şeklinde tanımlanır ve kompakt formda,

$$\mathbf{D} = d_t \mathbf{a}_0 + \kappa [\partial_x \mathbf{a}_1 + \partial_y \mathbf{a}_2 + \partial_z \mathbf{a}_3] \quad (8.12)$$

şeklinde, açık formda ise;

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z & \partial_t & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_x & 0 & -\partial_z & \partial_y & 0 & \partial_t & 0 & 0 \\ -\partial_y & \partial_z & 0 & -\partial_x & 0 & 0 & \partial_t & 0 \\ -\partial_z & -\partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t \\ -\partial_t & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -\partial_t & 0 & 0 & -\partial_x & 0 & -\partial_z & \partial_y \\ 0 & 0 & -\partial_t & 0 & -\partial_y & \partial_z & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_t & -\partial_z & -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

matrisi ile temsil edilir [58-59].  $\mathbf{D}'$  nin normu için,

$$N_{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^*\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i\nabla \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.14)$$

şeklinde elde edilen ifade de  $8 \times 8$  matris formunda,

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^*\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \right] \mathbf{I}_8 \quad (8.15)$$

biçiminde gösterilir. Yine bu ifade yer alan  $\mathbf{D}^*$  matrisi,  $\mathbf{D}$  matrisinin eşleniği olup,

$$\mathbf{D}^* = d_t \mathbf{a}_0 - \kappa [ \partial_x \mathbf{a}_1 + \partial_y \mathbf{a}_2 + \partial_z \mathbf{a}_3 ] \quad (8.16)$$

ve

$$\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z & \partial_t & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x & 0 & \partial_z & -\partial_y & 0 & \partial_t & 0 & 0 \\ \partial_y & -\partial_z & 0 & \partial_x & 0 & 0 & \partial_t & 0 \\ \partial_z & \partial_y & -\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_t \\ -\partial_t & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z \\ 0 & -\partial_t & 0 & 0 & \partial_x & 0 & \partial_z & -\partial_y \\ 0 & 0 & -\partial_t & 0 & \partial_y & -\partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_t & \partial_z & \partial_y & -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

şeklinde ifade edilir.

## 8.2. Kompleks Kuaternionlar ve Maxwell Denklemleri

Buraya kadar sözü edilen tanımlar elektromanyetik teoriyi incelemede araç olarak kullanılabilir.  $\vec{E}$  elektrik alanı ve  $\vec{H}$  manyetik alanının özelliklerini tanımlayan Maxwell denklemleri;

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_v \quad (8.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.21)$$

şeklinde verilir. (8.18) denklemi Faraday indüksiyon yasasını, (8.19) denklemi Ampere yasasını, (8.20) elektrikte Gauss yasasını ve (8.21) ise manyetizmada Gauss yasasını ifade etmektedir.

Öte yandan  $\vec{E}$  elektrik alanı ile  $\vec{H}$  manyetik alanını birleştiren bir  $\mathbf{M}$  kompleks kuaternionunu,

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} + i\mathbf{E} = [H_x \mathbf{e}_1 + H_y \mathbf{e}_2 + H_z \mathbf{e}_3] + i[E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3] \quad (8.22)$$

biçiminde tanımlamak mümkündür [58-59], [120].  $\mathbf{M}$  kompleks kuaternionunu,

$$\mathbf{M} = (H_x + \kappa E_x)\mathbf{a}_1 + (H_y + \kappa E_y)\mathbf{a}_2 + (H_z + \kappa E_z)\mathbf{a}_3 \quad (8.23)$$

kompak matris gösterimiyle veya

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z & 0 & E_x & E_y & E_z \\ -H_x & 0 & -H_z & H_y & -E_x & 0 & -E_z & E_y \\ -H_y & H_z & 0 & -H_x & -E_y & E_z & 0 & -E_x \\ -H_z & -H_y & H_x & 0 & -E_z & -E_y & E_x & 0 \\ 0 & -E_x & -E_y & -E_z & 0 & H_x & H_y & H_z \\ E_x & 0 & E_z & -E_y & -H_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & -E_z & 0 & E_x & -H_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & E_y & -E_x & 0 & -H_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

şeklindeki  $8 \times 8$  matrisle temsil etmek mümkündür.

**D** kompleks kuaternionik diferansiyel operatörünün eşleniğinin **M** kompleks kuaternionu üzerine etkisi,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* \mathbf{M} &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i \nabla \right] [\mathbf{H} + i\mathbf{E}] \\ &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - i [-\nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{H}] + [-\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{E}] \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{E} \right] + i \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{H} \right] \end{aligned} \quad (8.25)$$

şeklinde olmalıdır.  $\nabla \cdot \mathbf{H}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}$  ve  $\nabla \times \mathbf{E}$  için (8.18) ile (8.21) arasındaki Maxwell eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* \mathbf{M} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \rho_v + \left( -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \right] + i \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] \\ &= -(\rho_v + i\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

bağıntısı elde edilir [58-59].

(8.26) eşitlinden yola çıkarak,

$$\mathbf{J} = \rho_v + i\mathbf{J} = \rho_v + i[J_x \mathbf{e}_1 + J_y \mathbf{e}_2 + J_z \mathbf{e}_3] \quad (8.27)$$

şeklindeki bir kompleks kuaternionla tanımlansın. Diğer tanımlarda olduğu gibi

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{a}_0 + \mathbf{K} [J_x \mathbf{a}_1 + J_y \mathbf{a}_2 + J_z \mathbf{a}_3] \quad (8.28)$$

ve

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & J_x & J_y & J_z & \rho_v & 0 & 0 & 0 \\ -J_x & 0 & -J_z & J_y & 0 & \rho_v & 0 & 0 \\ -J_y & J_z & 0 & -J_x & 0 & 0 & \rho_v & 0 \\ -J_z & -J_y & J_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_v \\ -\rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & J_x & J_y & J_z \\ 0 & -\rho_v & 0 & 0 & -J_x & 0 & -J_z & J_y \\ 0 & 0 & -\rho_v & 0 & -J_y & J_z & 0 & -J_x \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_v & -J_z & -J_y & J_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

matrisi ile temsil edilsin. Bu tanım gereğince (8.26) eşitliği,

$$\mathbf{D}^* \mathbf{M} = -\mathbf{J} \quad (8.30)$$

halini alacaktır. Dolayısı ile (8.30) bağıntısını  $8 \times 8$  matrisleri kullanarak,

$$\mathbf{D}^* \mathbf{M} = \mathbf{J}^T \quad (8.31)$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür. Burada “T” üst indisi,  $\mathbf{J}$  matrisinin transpozisini ifade etmektedir.

Elektromanyetik teoride  $\vec{E}$  elektrik alanının  $\phi$  potansiyelinden kaynaklandığı ve

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (8.32)$$

ile verildiği çok iyi bilinmektedir. Eğer yüklerin bazıları da hareketli ise orada bir  $\vec{H}$  manyetik alanı da mevcuttur. Eğer manyetik alan sabit değilse birinci alana ek olarak ikinci bir elektrik alan görülmektedir. Değişen manyetik alandan kaynaklanan elektrik alan  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  olup,  $\vec{E}$  elektrik alanının genel ifadesi,

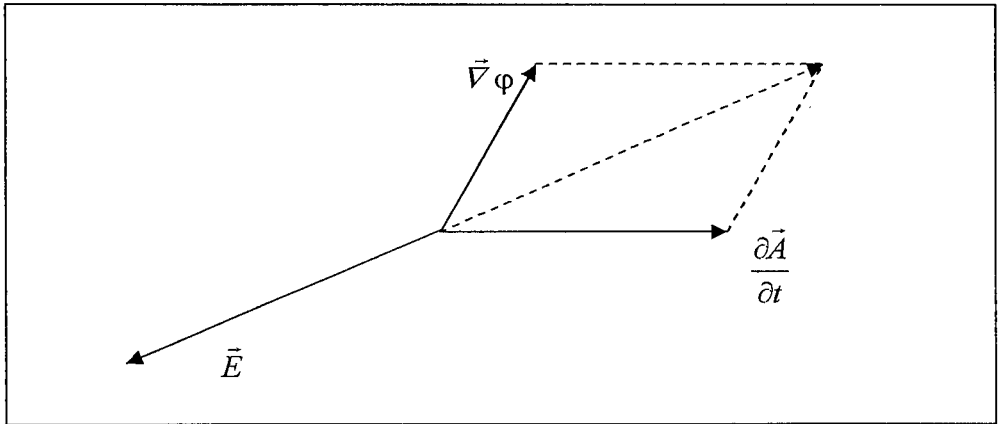
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8.33)$$

şeklini alacaktır.  $\vec{A}$ ’ya ise vektör potansiyel denir.

Şekil 8.1’ de görüldüğü gibi sabit hızla hareket eden bir yük için  $\vec{E}$  elektrik alanı,  $-\vec{\nabla} \phi$  ve  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  vektörlerinin toplamına eşittir.  $\vec{A}$  vektör potansiyeli ise,

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (8.34)$$

bağıntısı ile verilen  $\vec{H}$  manyetik alanını oluşturacaktır.



Şekil 8.1 Elektrik alanın temsili



Öte yandan (8.32) ve (8.34) denklemlerinde yer alan  $\phi$  skaler potansiyeli ile  $\vec{A}$  vektör potansiyelini

$$\mathbf{V} = \phi + i\mathbf{A} \quad (8.35)$$

ile tanımlanan bir kompleks kuaternion ile birleştirmek mümkündür.  $\mathbf{V}$ ' ye *kompleks kuaternionik elektromanyetik potansiyel* adı verilir [58-59]. Matris formunda ise,

$$\mathbf{V} = \phi \mathbf{a}_0 + \kappa[A_x \mathbf{a}_1 + A_y \mathbf{a}_2 + A_z \mathbf{a}_3] \quad (8.36)$$

biçiminde temsil edilir ve aşağıdaki  $8 \times 8$  matrisi ile gösterilir:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & A_x & A_y & A_z & \phi & 0 & 0 & 0 \\ -A_x & 0 & -A_z & A_y & 0 & \phi & 0 & 0 \\ -A_y & A_z & 0 & -A_x & 0 & 0 & \phi & 0 \\ -A_z & -A_y & A_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi \\ -\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & A_x & A_y & A_z \\ 0 & -\phi & 0 & 0 & -A_x & 0 & -A_z & A_y \\ 0 & 0 & -\phi & 0 & -A_y & -A_z & 0 & -A_x \\ 0 & 0 & 0 & -\phi & -A_z & -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

$\mathbf{D}$  kompleks kuaternionik diferansiyel operatörünün  $\mathbf{V}$  kompleks kuaternionik elektromanyetik potansiyel üzerine etkisi,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{V} &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \right] [\phi + i\mathbf{A}] \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + i\nabla \phi - [-\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{A}] \\ &= \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{A} \right] - i \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right] \end{aligned} \quad (8.38)$$

olacaktır. Lorentz koşulu gereğince,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (8.39)$$

verildiğine göre (8.38) ifadesi (8.33) ve (8.34) tanımları kullanılarak,

$$\mathbf{D}\mathbf{V} = -\nabla \times \mathbf{A} - i \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right] = -[\mathbf{H} + i\mathbf{E}] \quad (8.40)$$

şeklinde elde edilir. (8.22) eşitliğinde  $\mathbf{M} = \mathbf{H} + i\mathbf{E}$  şeklinde tanımlandığına göre yukarıdaki ifade,

$$\mathbf{D}\mathbf{V} = -\mathbf{M} \quad (8.41)$$

biçiminde yazılabilir.  $8 \times 8$  matrisler kullanılarak da, yukarıdaki eşitlik için;

$$\mathbf{D}\mathbf{V} = \mathbf{M}^T \quad (8.42)$$

ifadesi yazılabilir.

## 9. KOMPLEKS KUATERNİONLARLA RÖLATİVİSTİK ELEKTROMANYETİZMA

Bölüm 8’de kompleks kuaternionların klasik elektromanyetizmadaki uygulamaları, özellikle Maxwell denklemlerinin temsilinde oynadıkları önemli rol ayrıntılı olarak incelenmişti. Bu bölümde ise kompleks kuaternionların rölativistik elektromanyetizmadaki uygulamaları incelenecektir.

### 9.1. Lorentz Dönüşümleri ve Kompleks Kuaternionik Alanlar

Bölüm 3’de verilen Lorentz dönüşümleri  $x$ -ekseni yönündeki iki farklı koordinat sisteminin göreceli hareketine dayanır. Fakat genel anlamda aynı yönde olmayan bir  $\vec{v}$  hızından söz edilmelidir. Öte yandan bir  $\vec{r}$  vektörü,  $\vec{v}$  yönündeki bileşeni ile  $\vec{v}$ ’ye dik diğer bir bileşenin toplamı olarak iki parçaya ayrılabilir.  $\vec{v}$  yönündeki bileşen,

$$\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \quad (9.1)$$

ise  $\vec{v}$ ’ye dik diğer bileşen,

$$\vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \quad (9.2)$$

olacaktır. Bu takdirde  $\vec{r}$ ,

$$\vec{r} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} + \left[ \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \right] \quad (9.3)$$

şeklinde ifade edilmelidir.  $\vec{r}$ ’den  $\vec{r}'$ ’ne tanımlanan bir Lorentz dönüşümünde sadece yatay bileşen (hız yönündeki bileşen) dönüşümden etkilenirken düşey bileşende (hız yönüne dik bileşen) bir değişim gözlenmeyecektir. (3.10) eşitliğinden yararlanarak,

$$\vec{r}' = \left[ \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \right] + \beta \left[ \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} - \vec{v}t \right] \quad (9.4)$$

ve (3.13) eşitliğinden ise,

$$ct' = \beta \left[ ct - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}}{v^2} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (9.5)$$

yazılabilir. Bu denklemler düzenlenerek;

$$\vec{r}' = \vec{r} + [\beta - 1] \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{v^2} \vec{v} - \beta \vec{v} t \quad (9.6)$$

ve

$$ct' = \beta \left[ ct - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c} \right] \quad (9.7)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bütün bu tartışmalardan yola çıkarak elektromanyetik denklemleri Lorentz dönüşümleri altında incelemek mümkündür. Bölüm 7' de uzay-zamanı tanımlayan  $\mathbf{R} = ct + i\mathbf{r} = \tau + i\mathbf{r}$  kompleks kuaternionunu (9.6) ve (9.7)' den yararlanarak,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + [\beta - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} - \beta \tau \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (9.8)$$

ve

$$\tau' = \beta \left[ \tau - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{c} \right] \quad (9.9)$$

biçiminde ifade etmek mümkündür. Böylece  $\mathbf{R}'$  kompleks kuaternionu ise,

$$\mathbf{R}' = \left[ \tau - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{c} \right] + i \left[ \mathbf{r} + [\beta - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} - \beta \tau \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \quad (9.10)$$

şeklinde verilmelidir.  $c=1$ ,  $\mathbf{v}$  yerine  $-\mathbf{v}$  alındıktan sonra Bölüm 7' de

tanımlanan kompleks kuaternionik  $\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i \nabla$  diferansiyel operatörünün

Lorentz dönüşümü altındaki

$$\mathbf{D}' = \frac{\partial}{\partial t'} + i \nabla' \quad (9.11)$$

şeklinde olması gereken formu ele alınsın. Operatörün skaler bileşeni,

$$Sc\{\mathbf{D}'\} = \frac{\partial}{\partial t'} = \beta \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] \quad (9.12)$$

ve vektörel bileşeni ise,

$$Vec\{\mathbf{D}'\} = \nabla' = \nabla + [\beta - 1] \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla)}{v^2} \mathbf{v} + \beta \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.13)$$

halini almalıdır. Öyle ise (9.11) ifadesi, (9.12) ve (9.13) eşitlikleri gereğince,

$$\mathbf{D}' = \beta \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] + i \left[ \nabla + [\beta - 1] \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla)}{v^2} \mathbf{v} + \beta \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (9.14)$$

ile tanımlanmalıdır.

Elektromanyetik alanların Lorentz dönüşümü altındaki davranışını incelemek için Bölüm 8' de (8.35) ve (8.39) ile verilen tanımları incelemek gerekir. (8.39) eşitliği ile verilen Lorentz koşulu kompleks kuaternion formunda,

$$Sc\{\mathbf{D} \mathbf{V}\} = Sc\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + i \nabla \right] [\varphi + iA] \right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (9.15)$$

ile verilir. Öte yandan,

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{D} \mathbf{D}^* = \mathbf{D}^* \mathbf{D} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla \right] = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \quad (9.16)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\mathbf{\Omega} \varphi = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla \right] \varphi = \rho \quad (9.17)$$

olmalıdır.  $\mathbf{\Omega}$  operatörünün (8.35)' de tanımlanan  $\mathbf{V} = \varphi + iA$  kompleks kuaternionuna etkisi,

$$\mathbf{\Omega} \mathbf{V} = \mathbf{D}^* \mathbf{D} \mathbf{V} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla \right] [\varphi + iA] = \rho + iJ \quad (9.18)$$

ile verilir.

$\vec{E}$  ve  $\vec{H}$  alanlarının Lorentz dönüşümü altında nasıl değiştiğini görmek için Bölüm 8' de (8.33) eşitliği ile tanımlanan  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  elektrik alanını bileşenleri cinsinden yazmak daha uygun olacaktır:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \mathbf{e}_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) \mathbf{e}_2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Benzer şekilde (8.34) ile verilen  $\vec{H} = \vec{V} \times \vec{A}$  eşitliği de,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= H_x \mathbf{e}_1 + H_y \mathbf{e}_2 + H_z \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (9.20)$$

şeklindeki bileşenlere ayrılabilir. Öte yandan hız vektörü,  $x$ -bileşenleri yönünde seçilirse yani,

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_1 \quad (9.21)$$

reel vektör kuaternionuyla tanımlanır (9.8) denklemi gereğince  $\mathbf{V} = \varphi + iA$  kompleks kuaternionun bileşenleri rölativistik olarak,

$$A'_x = \beta(A_x - v\varphi) \quad (9.22)$$

$$A'_y = A_y \quad (9.23)$$

$$A'_z = A_z \quad (9.24)$$

$$\varphi' = \beta(\varphi - vA_x) \quad (9.25)$$

ve (9.11) ifadesinin bileşenleri de,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \beta \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad (9.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \beta \left[ \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (9.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.29)$$

haline gelecektir.

Bu tanımlardan yola çıkarak (9.19)' da verilen  $\mathbf{E}$  alanının Lorentz dönüşümü,

$$\begin{aligned}
E'_x &= -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} + \frac{\partial A'_x}{\partial t'}\right) \\
&= -\beta^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial t} \right] (\varphi - vA_x) - \beta^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] (A_x - v\varphi) \\
&= -\beta^2 (1 - v^2) \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] = -\left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] \\
&= E'_x
\end{aligned} \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned}
E'_y &= -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} + \frac{\partial A'_y}{\partial t'}\right) = -\beta \frac{\partial}{\partial y} [\varphi - vA_x] - \beta \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] A_y \\
&= -\beta \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right] - \beta v \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \\
&= \beta (E_y - vH_z)
\end{aligned} \tag{9.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
E'_z &= -\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z'} + \frac{\partial A'_z}{\partial t'}\right) = -\beta \frac{\partial}{\partial z} [\varphi - vA_x] - \beta \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] A_z \\
&= -\beta \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right] + \beta v \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\
&= \beta (E_z + vH_y)
\end{aligned} \tag{9.32}$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde  $\mathbf{H}$  alanı ise Lorentz dönüşümleri altında,

$$H'_x = \left( \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} \right) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = H_x \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}
H'_y &= \left( \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) = \beta \frac{\partial}{\partial z} (A_x - v\varphi) - \beta \left( \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial t} \right) A_z \\
&= \beta \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \beta v \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \\
&= \beta (H_y + vE_z)
\end{aligned} \tag{9.34}$$

ve

$$\begin{aligned}
H'_z &= \left( \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} \right) = \beta \left( \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial t} \right) A_y - \beta \frac{\partial}{\partial y} (A_x - v\varphi) \\
&= \beta \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \beta v \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) \\
&= \beta (H_z - vE_y)
\end{aligned} \tag{9.35}$$

olacaktır. Böylelikle,

$$\mathbf{E}' = E_x \mathbf{e}_1 + \beta(E_y - vH_z) \mathbf{e}_2 + \beta(E_z + vH_y) \mathbf{e}_3 \quad (9.36)$$

ve

$$\mathbf{H}' = H_x \mathbf{e}_1 + \beta(H_y + vE_z) \mathbf{e}_2 + \beta(H_z - vE_y) \mathbf{e}_3 \quad (9.37)$$

ifadeleri elde edilir.  $\mathbf{v}$  hızının  $x$ -eksenine paralel olmadığı durumda ise yukarıdaki denklemler,

$$\mathbf{E}' = \beta \mathbf{E} + (1 - \beta) \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (9.38)$$

ve

$$\mathbf{H}' = \beta \mathbf{H} + (1 - \beta) \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v} - \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \quad (9.39)$$

biçiminde ifade edilir.

## 9.2. Elektrik ve Manyetik Alanların Kompleks Kuaternionik Dönüşümleri

Buraya kadar klasik Lorentz dönüşüm formülleriyle elde edilen elektrik ve manyetik alana ilişkin denklemleri, Bölüm 7' de tanımlanan kompleks kuaternionik dönüşüm formülleri ile de elde etmek mümkündür.

$\mathbf{H}$  manyetik alanı ile  $\mathbf{E}$  elektrik alanını birleştiren  $\mathbf{M} = \mathbf{H} + i\mathbf{E}$  kompleks kuaternionu ele alınsın. Tanımlanacak dönüşüm sonucunda elde edilecek kompleks kuaternionun da,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{H}' + i\mathbf{E}' \quad (9.40)$$

formunda olması beklenir. Öte yandan diğer bir  $\mathbf{Q}$  kompleks kuaternionu,

$$\mathbf{Q} = q_0 + i\mathbf{q} \quad (9.41)$$

şeklinde tanımlanmak üzere kompleks kuaternionik dönüşüm formülü Bölüm 7' deki (7.22) eşitliğine benzer şekilde,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^* \quad (9.42)$$

ile tanımlanır [64]. Bu ifade açılarak,



$$\begin{aligned}
\mathbf{M}' &= [q_0 + i\mathbf{q}][\mathbf{H} + i\mathbf{E}][q_0 - i\mathbf{q}] \\
&= [q_0 + i\mathbf{q}][q_0\mathbf{H} + i\mathbf{H}\cdot\mathbf{q} - i\mathbf{H}\times\mathbf{q} + iq_0\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{E}\times\mathbf{q}] \\
&= [q_0^2\mathbf{H} + 2q_0(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) - \mathbf{q}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{q}) + \mathbf{q}\times(\mathbf{H}\times\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{q})] \\
&\quad + i[q_0^2\mathbf{E} + 2q_0(\mathbf{q}\times\mathbf{H}) - \mathbf{q}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) + \mathbf{q}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{q})]
\end{aligned} \tag{9.43}$$

elde edilir. Öte yandan  $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$  vektör eşitliğinden yararlanarak  $\mathbf{q}\times(\mathbf{H}\times\mathbf{q})$  ifadesi için,

$$\mathbf{q}\times(\mathbf{H}\times\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{H}) \tag{9.44}$$

ve  $\mathbf{q}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{q})$  ifadesi için ise,

$$\mathbf{q}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) = \mathbf{E}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{E}) \tag{9.45}$$

yazılabilir. Böylece (9.43) denklemi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}' &= [q_0^2\mathbf{H} + 2q_0(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) - \mathbf{q}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{q}) + \mathbf{H}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{H}) - \mathbf{q}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{q})] \\
&\quad + i[q_0^2\mathbf{E} + 2q_0(\mathbf{q}\times\mathbf{H}) - \mathbf{q}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) + \mathbf{E}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) - \mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{E})]
\end{aligned} \tag{9.46}$$

halini alacaktır. Öte yandan,

$$\mathbf{q} \perp (\mathbf{H}\times\mathbf{q}) \tag{9.47}$$

olduğuna göre yukarıdaki denklemde yer alan  $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{q})$  terimleri sıfırdır. (9.46) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}' &= [q_0^2\mathbf{H} + 2q_0(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) - 2\mathbf{q}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{q}) + \mathbf{H}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})] \\
&\quad + i[q_0^2\mathbf{E} + 2q_0(\mathbf{q}\times\mathbf{H}) - 2\mathbf{q}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{q}) + \mathbf{E}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})]
\end{aligned} \tag{9.48}$$

elde edilir.

(9.40)' da verilen tanım gereğince,

$$\mathbf{H}' = [q_0^2 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}]\mathbf{H} + 2q_0(\mathbf{E}\times\mathbf{q}) - 2\mathbf{q}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{q}) \tag{9.49}$$

ve

$$\mathbf{E}' = [q_0^2 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q}]\mathbf{E} + 2q_0(\mathbf{q}\times\mathbf{H}) - 2\mathbf{q}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{q}) \tag{9.50}$$

olmalıdır. Bununla birlikte

$$\zeta = i \frac{\alpha}{2} \quad (9.51)$$

şeklinde tanımlanmak üzere  $\mathbf{Q} = q_0 + i\mathbf{q}$  için,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= q_0 + i\mathbf{q} = \cos \zeta - \hat{\mathbf{q}} \sin \zeta \\ &= \cos\left(i \frac{\alpha}{2}\right) - \hat{\mathbf{q}} \sin\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\hat{\mathbf{q}} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.52)$$

ifadesi verilsin. Burada,

$$q_0 = \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (9.53)$$

ve

$$\mathbf{q} = -\hat{\mathbf{q}} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (9.54)$$

eşlemesi yapılmıştır.

$$\cosh \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (9.55)$$

$$\sinh \alpha = -\beta v \quad (9.56)$$

ve

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (9.57)$$

tanımları yapıldığı takdirde (9.49)' da verilen  $\mathbf{H}'$  ifadesi,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= \left[ \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \mathbf{H} - 2 \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}}{v} \right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\quad - 2 \frac{v}{v} \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}}{v} \right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.58)$$

halini alacaktır. Trigonometrik denklemlerden,

$$\cosh \alpha = \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (9.59)$$

ve

$$\sinh \alpha = 2 \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (9.60)$$

bilindiğine göre  $H'$  denklemi,

$$H' = \cosh \alpha H - \sinh \alpha \left( \frac{E \times v}{v} \right) - 2 \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \frac{v(H \cdot v)}{v} \quad (9.61)$$

şeklini alır. Yine trigonometrik denklemlerden yararlanarak,

$$\sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cosh \alpha - 1) = \frac{1}{2} (\beta - 1) \quad (9.62)$$

ifadesi yazılabilir. Nihayetinde  $H'$  için,

$$\begin{aligned} H' &= \beta H + \beta(E \times v) - (\beta - 1) \frac{v(H \cdot v)}{v^2} \\ &= \beta \left[ H - (v \times E) - \frac{v(H \cdot v)}{v^2} \right] + \frac{v(H \cdot v)}{v^2} \end{aligned} \quad (9.63)$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde  $E'$  için,

$$\begin{aligned} E' &= \left[ \cosh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] E - 2 \sinh \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cosh \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{H \times v}{v} \right) \\ &\quad - 2 \frac{v}{v} \sinh \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left( \frac{E \cdot v}{v} \right) \sinh \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \cosh \alpha E + \sinh \alpha \left( \frac{H \times v}{v} \right) - 2 \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \frac{v(E \cdot v)}{v} \end{aligned} \quad (9.64)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade de (9.55) ve (9.56) tanımları kullanılarak,

$$\begin{aligned} E' &= \beta E - \beta(H \times v) - (\beta - 1) \frac{v(E \cdot v)}{v^2} \\ &= \beta \left[ E - (v \times H) - \frac{v(E \cdot v)}{v^2} \right] + \frac{v(E \cdot v)}{v^2} \end{aligned} \quad (9.65)$$

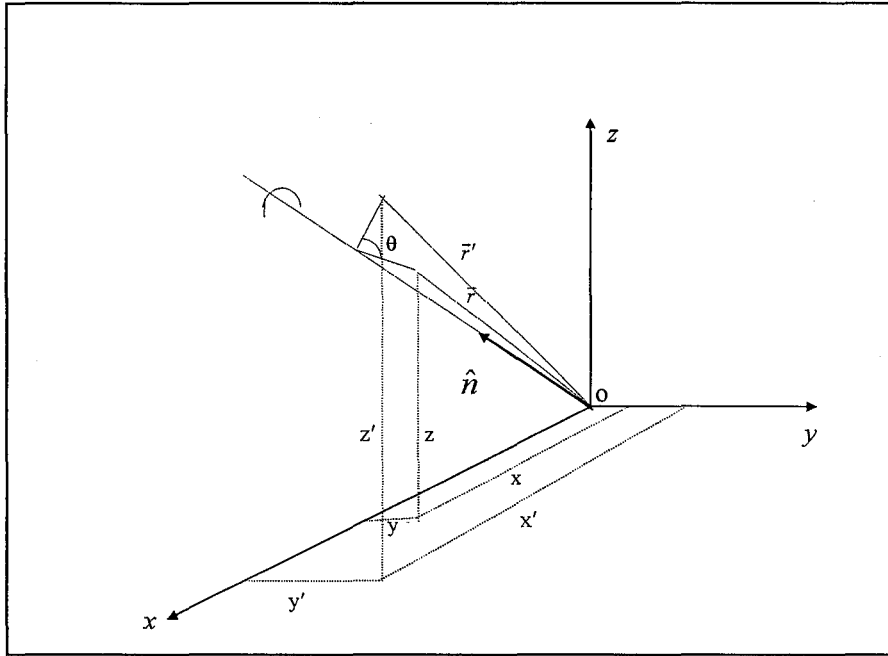
bulunur. Görüldüğü gibi  $H'$  ve  $E'$  için elde edilen bu denklemler, alışlagelen Lorentz dönüşüm denklemleriyle elde edilen (9.38) ve (9.39) ifadeleri ile aynıdır [64].

## 10. KOMPLEKS KUATERNİONLARIN BAZI MEKANİKSEL UYGULAMALARI

Bu bölümde kompleks kuaternionlar ile dönme hareketi incelenecek, ardından da açısal momentum kavramı verilecektir.

### 10.1. Kompleks Kuaternionlarla Dönme Hareketinin İncelenmesi

Şekil 10.1'de verilen  $\vec{r}$  yer vektörü  $\hat{n}$  birim vektörü çevresinde  $\theta$  açısı kadar döndürülerek  $\vec{r}'$  vektörü elde edilsin.



Şekil 10.1 Dönme hareketi

$\vec{r}(x, y, z)$  konum vektörü;

$$\mathbf{R} = 1 + i\mathbf{r} = 1 + i(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \quad (10.1)$$

kompleks kuaternionuyla tanımlanır. Benzer şekilde  $\vec{r}'(x', y', z')$  vektörü de;

$$\mathbf{R}' = 1 + i\mathbf{r}' = 1 + i(x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \quad (10.2)$$

biçimindeki kompleks kuaternionla verilmelidir.  $\vec{r}$  ve  $\vec{r}'$  arasındaki dönüşüm bağıntısı;

$$\mathbf{R}' = \mathbf{E}\mathbf{R}\mathbf{E}^* \quad (10.3)$$

ile verilir. Burada  $\mathbf{E}$  kuaternionu;

$$\mathbf{E} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (10.4)$$

biçiminde,  $\mathbf{E}^*$  ise,

$$\mathbf{E}^* = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (10.5)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (10.3) eşitliği daha açık bir formda yazılırsa;

$$\mathbf{R}' = \left( \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) [1 + i(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)] \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (10.6)$$

elde edilir. Bu dönüşüm sonucu elde edilen nicelik yine bir kompleks kuaterniondur [121].

### Uygulama

$\vec{r} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  vektörünün  $\mathbf{i}$  birim vektörü etrafında  $60^\circ$  döndürülmesiyle elde edilecek  $\vec{r}'$  vektörünü bulmak için  $\bar{\mathbf{R}}$  konum vektörü;

$$\mathbf{R} = 1 + i(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \quad (10.7)$$

şeklinde bir kompleks kuaternion olarak temsil edilebilir.  $\mathbf{E}$  kuaternionu;

$$\mathbf{E} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} = \cos 30^\circ + \mathbf{e}_1 \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{e}_1 \frac{1}{2} \quad (10.8)$$

ile  $\mathbf{E}^*$  ise;

$$\mathbf{E}^* = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} = \cos 30^\circ - \mathbf{e}_1 \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{e}_1 \frac{1}{2} \quad (10.9)$$

biçiminde tanımlanmalıdır. Bu dönüşüm sonucu elde edilecek  $\mathbf{R}'$  kompleks kuaternionu;

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' &= \mathbf{E}\mathbf{R}\mathbf{E}^* \\
&= [\cos 30^\circ + \mathbf{e}_1 \sin 30^\circ][1 + i(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)][\cos 30^\circ - \mathbf{e}_1 \sin 30^\circ] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right)[1 + i(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)]\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right) \\
&= \left[1 + i\left(\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{5 - \sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{2 + 7\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3\right)\right] \\
&= 1 + i(2.5\mathbf{e}_1 + 1.6\mathbf{e}_2 + 7.1\mathbf{e}_3)
\end{aligned} \tag{10.10}$$

şeklindeki bir kompleks kuaterniondur. Yukarıdaki eşitliğe göre yapılan dönme hareketi sonucu elde edilecek  $\vec{r}'$  konum vektörü ise;

$$\vec{r}' = 2.5\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j} + 7.1\mathbf{k} \tag{10.11}$$

olacaktır. Bu sonuç, sözü edilen dönüşümü tanımlayan diğer yöntemlerin kullanılması durumunda elde edilecek sonuçla aynıdır.

## 10.2. Kompleks Kuaternionlar ve Açısal Momentum

Uzay-zamanda konumu  $\mathbf{R} = t + i\mathbf{r}$  kompleks kuaternionu ile verilen

$$\mathbf{P} = p_0 + i\mathbf{p} \tag{10.12}$$

kompleks kuaternionik momentumuna sahip serbest bir parçacığın orijine göre  $\mathbf{L}$  açısal momentumu yine kompleks kuaternion formunda,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{R}\mathbf{P}^* = [t + i\mathbf{r}][p_0 - i\mathbf{p}] \\
&= tp_0 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{p} + i[p_0\mathbf{r} - t\mathbf{p}]
\end{aligned} \tag{10.13}$$

ile verilir [64]. Görüldüğü gibi açısal momentum açıkça orijinin konumuna bağlıdır. Parçacığın  $\mathbf{R}'$  uzay-zamanında konumu,

$$\mathbf{R}' = t' + i\mathbf{r}' \tag{10.14}$$

ise  $\mathbf{L}'$  açısal momentumu,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}' &= \mathbf{R}'\mathbf{P}^* = [t' + i\mathbf{r}'][p_0 - i\mathbf{p}] \\
&= t'p_0 - \mathbf{r}'\cdot\mathbf{p} + \mathbf{r}' \times \mathbf{p} + i[p_0\mathbf{r}' - t'\mathbf{p}]
\end{aligned} \tag{10.15}$$

olmalıdır.

$\mathbf{R}$  ve  $\mathbf{R}'$  parçacığının yolu üzerindeki iki olay olmak üzere  $\mathbf{R}$  ve  $\mathbf{R}'$  de gözlenen açısal momentumların farkı için,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} - \mathbf{L}' &= \mathbf{R}\mathbf{P}^* - \mathbf{R}'\mathbf{P}^* = [\mathbf{R} - \mathbf{R}']\mathbf{P}^* \\ &= [(t - t') + i(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] [p_0 - i\mathbf{p}] \\ &= (t - t')p_0 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{p} + i[p_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - t\mathbf{p}] \end{aligned} \quad (10.16)$$

ifadesi elde edilir.

## 11. DUAL KUATERNİONLAR

Bu bölümde daha önce verilen reel ve kompleks kuaternion kavramına ek olarak dual kuaternion kavramı incelenecektir. Bu amaçla dual sayılar ve dual vektörlerle birlikte dual kuaternionların cebirsel özellikleri tanımlanacaktır. Ayrıca dual niceliklerin  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  matris temsilleri de verilecektir.

### 11.1. Dual Sayı

Clifford [122]' un keşfettiği ve daha sonra Study(1891)'nin geliştirdiği bir  $A$  dual sayısı,

$$A = a + \varepsilon a' \quad (11.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\varepsilon$  dual birim olarak adlandırılır ve  $\varepsilon^2 = 0$  özelliği gösterir. Öte yandan  $a$  ve  $a'$  reel sayılar olup  $a$  ya  $A$  dual sayısının reel kısmı  $a'$  ' ne de dual kısmı denir.

### 11.2. Dual sayılar Üzerinde Temel Eşitlikler

#### 11.2.1. Toplam ve fark

Ele alınan  $A = a + \varepsilon a'$  ve  $B = b + \varepsilon b'$  gibi iki dual sayının toplamı ve farkı,

$$A \pm B = (a + \varepsilon a') \pm (b + \varepsilon b') = (a \pm b) + \varepsilon(a' \pm b') \quad (11.2)$$

ile verilir. Dikkat edilirse reel kısımlar kendi arasında ve dual kısımlar da kendi arasında toplama ve çıkarma işlemine tabi tutulurlar. İki dual sayının toplamı ve farkı yine bir dual sayıdır.

#### 11.2.2. Dual sayıların çarpımı

$A$  ve  $B$  dual sayılarını çarpımı;

$$A \times B = (a + \varepsilon a') \times (b + \varepsilon b') = (a \times b) + \varepsilon(a \times b' + a' \times b) \quad (11.3)$$

şeklinde tanımlanır. İki dual sayının çarpımı yine bir dual sayıdır.

#### 11.2.3. Eşitlik

$A = a + \varepsilon a'$  ve  $B = b + \varepsilon b'$  dual sayılar olmak üzere eğer;



$$a = b \quad (11.4)$$

ve

$$a' = b' \quad (11.5)$$

ise  $A$  dual sayısı  $B$  dual sayısına eşittir. Diğer bir deyişle iki dual sayının birbirlerine eşit olabilmesi için reel kısımlar kendi aralarında dual kısımlar da kendi aralarında eşit olmalıdır.

### 11.3. Dual Vektörler

$\vec{a}$  ve  $\vec{a}'$  üç boyutlu uzayda tanımlanan reel vektörleri göstermek üzere  $\vec{A}$  dual vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}' \quad (11.6)$$

şeklinde iki reel vektörün kombinasyonu olarak tanımlanır. Öte yandan  $\vec{a}$  ve  $\vec{a}'$  vektörleri,

$$\vec{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (11.7)$$

ve

$$\vec{a}' = a'_1 \mathbf{i} + a'_2 \mathbf{j} + a'_3 \mathbf{k} \quad (11.8)$$

ile verilmek üzere  $\vec{A}$  dual vektörünü;

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}' \\ &= a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} + \varepsilon [a'_1 \mathbf{i} + a'_2 \mathbf{j} + a'_3 \mathbf{k}] \\ &= (a_1 + \varepsilon a'_1) \mathbf{i} + (a_2 + \varepsilon a'_2) \mathbf{j} + (a_3 + \varepsilon a'_3) \mathbf{k} \\ &= A \mathbf{i} + B \mathbf{j} + C \mathbf{k} \end{aligned} \quad (11.9)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Bu ifadede  $A, B, C$  'nin dual sayısı olduğuna dikkat edilmelidir.  $\lambda$  bir skaler olmak üzere  $\vec{A}$  dual vektörünün bu skalerle çarpımı;

$$\lambda \vec{A} = \lambda \vec{a} + \varepsilon \lambda \vec{a}' = \lambda A \mathbf{i} + \lambda B \mathbf{j} + \lambda C \mathbf{k} \quad (11.10)$$

olup elde edilen nicelik yine bir dual vektördür. Reel ve dual bileşenleri sıfır olan dual vektöre *sıfır dual vektör* denir.

## 11.4. Dual Vektörler Üzerinde Temel Eşitlikler

### 11.4.1 Dual vektörlerin skaler çarpımı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}'$  ve  $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}'$  dual vektörlerinin skaler(iç çarpımı)  $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$  ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}', \vec{b} + \varepsilon \vec{b}' \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}', \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}' \rangle] \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \varepsilon [\vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}']\end{aligned}\quad (11.11)$$

şeklinde tanımlanır.

### 11.4.2. Dual vektörlerin vektörel çarpımı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}'$  ve  $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}'$  gibi iki dual vektörün vektörel çarpımı  $\vec{A} \times \vec{B}$  ile temsil edilir ve bu çarpım;

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}') \times (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}') = \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon [(\vec{a} \times \vec{b}') + (\vec{a}' \times \vec{b})] \quad (11.12)$$

ile verilir.

### 11.4.3. Dual vektör eşitlikleri

Reel vektörler için geçerli olan eşitlikler dual vektörler için de aynen geçirlidir [123]:

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{B} \times \vec{C}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{C} \times \vec{A}, \vec{B} \rangle \quad (11.13)$$

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \times \vec{C} \rangle \quad (11.14)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (11.15)$$

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \langle \vec{B}, \vec{D} \rangle - \langle \vec{A}, \vec{D} \rangle \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \quad (11.16)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \vec{B} - \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \vec{C}. \quad (11.17)$$

### 11.5. Dual Kuaternionlar

Dual vektörler iki reel vektörün kombinasyonu olarak tanımlanmıştı. Benzer şekilde, ele alınan bir  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionu;

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$$

ve

$$\mathbf{q}' = q'_0 \mathbf{e}_0 + q'_1 \mathbf{e}_1 + q'_2 \mathbf{e}_2 + q'_3 \mathbf{e}_3$$

gibi iki reel kuaternionun kombinasyonu olarak;

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}' \\ &= [q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3] + \varepsilon [q'_0 \mathbf{e}_0 + q'_1 \mathbf{e}_1 + q'_2 \mathbf{e}_2 + q'_3 \mathbf{e}_3] \\ &= (q_0 + \varepsilon q'_0) \mathbf{e}_0 + (q_1 + \varepsilon q'_1) \mathbf{e}_1 + (q_2 + \varepsilon q'_2) \mathbf{e}_2 + (q_3 + \varepsilon q'_3) \mathbf{e}_3 \\ &= Q_0 \mathbf{e}_0 + Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (11.18)$$

biçiminde tanımlanır.  $Q_0, Q_1, Q_2$  ve  $Q_3$  dual sayılarına  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionunun bileşenleri olarak adlandırılırlar. Reel kuaternionlarda olduğu gibi bir  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionu,

$$S_{\mathbf{Q}} = Q_0 \mathbf{e}_0 \quad (11.19)$$

ve

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} = Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + Q_3 \mathbf{e}_3 \quad (11.20)$$

biçiminde tanımlanan skaler ve vektörel kısımlara ayrılarak,

$$\mathbf{Q} = S_{\mathbf{Q}} + \mathbf{V}_{\mathbf{Q}} \quad (11.21)$$

şeklinde ifade edilebilir. (11.19) ve (11.20) tanımlarından anlaşılacağı üzere bir dual kuaternionun skaler kısmı bir dual sayı, vektörel kısmı da aslında dual bir vektördür.

## 11.6. Dual Kuaternionlar Üzerine Temel Eşitlikler

### 11.6.1. Dual Kuaternionların Eşitliği

Ele alınan  $\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  gibi iki dual kuaternionun reel ve dual kısımları;

$$S_{\mathbf{P}} = S_{\mathbf{Q}} \quad (11.22)$$

ve

$$V_{\mathbf{P}} = V_{\mathbf{Q}} \quad (11.23)$$

şeklinde karşılıklı olarak eşitse bu iki dual kuaternion eşittir.

### 11.6.2. Toplam ve fark

$\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  gibi iki dual kuaternionun toplam veya farkı, karşılıklı olarak reel ve dual kısımlarının toplamına veya farkına eşittir:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \pm \mathbf{Q} &= (S_{\mathbf{P}} \pm S_{\mathbf{Q}}) + (V_{\mathbf{P}} \pm V_{\mathbf{Q}}) \\ &= (P_0 \pm \varepsilon Q_0)e_0 + (P_1 \pm \varepsilon Q_1)e_1 + (P_2 \pm \varepsilon Q_2)e_2 + (P_3 \pm \varepsilon Q_3)e_3. \end{aligned} \quad (11.24)$$

### 11.6.3. Dual kuaternionların çarpımı

$\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionlarının çarpımı;

$$\mathbf{PQ} = [\mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{p}'][(\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}')] = \mathbf{pq} + \varepsilon(\mathbf{p}\mathbf{q}' + \mathbf{p}'\mathbf{q}) \quad (11.25)$$

şeklinde tanımlanır. Dual kuaternion çarpımı sonucunda elde edilen nicelik yine bir dual kuaterniondur. Bununla birlikte,

$$\mathbf{p}\mathbf{q}' + \mathbf{p}'\mathbf{q} = 0 \quad (11.26)$$

ise  $\mathbf{PQ}$  çarpımı reel kuaterniona indirgenir.

Öte yandan (11.18)' de verilen dual kuaternionların tanımından yola çıkarak  $\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionlarının çarpımını,

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= [P_0 e_0 + \mathbf{P}][Q_0 e_0 + \mathbf{Q}] \\ &= P_0 Q_0 + P_0 \mathbf{Q} + Q_0 \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (11.27)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. Görüldüğü üzere bu çarpım, klasik kuaternion çarpım kuralına uyar.

Dual kuaternion çarpımı değişme özelliği göstermez, fakat dağılımlı ve bileşimlidir:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{PQ} + \mathbf{PR} \quad (11.28)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{QR}) = (\mathbf{PQ})\mathbf{R} . \quad (11.29)$$

#### 11.6.4. Dual kuaternionların eşleniği

Dual kuaternionlarda eşlenik kavramı reel kuaternionlara benzer şekilde ifade edilir. Bir  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionun eşleniği  $\mathbf{Q}^*$  ile gösterilir ve

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{q}'^* = Q_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{Q} = Q_0 \mathbf{e}_0 - Q_1 \mathbf{e}_1 - Q_2 \mathbf{e}_2 - Q_3 \mathbf{e}_3 \quad (11.30)$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan dual kuaternionlar ile dönme ve öteleme ifadelerinde sıkça kullanılan dual eşlenik,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^c &= \mathbf{q} - \varepsilon \mathbf{q}' \\ &= [q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3] - \varepsilon [q'_0 \mathbf{e}_0 + q'_1 \mathbf{e}_1 + q'_2 \mathbf{e}_2 + q'_3 \mathbf{e}_3] \\ &= (q_0 - \varepsilon q'_0) \mathbf{e}_0 + (q_1 - \varepsilon q'_1) \mathbf{e}_1 + (q_2 - \varepsilon q'_2) \mathbf{e}_2 + (q_3 - \varepsilon q'_3) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (11.31)$$

ile  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionunun eşleniğinin dual eşleniği ise;

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}^*]^c &= \mathbf{q}^* - \varepsilon \mathbf{q}'^* \\ &= [q_0 \mathbf{e}_0 - q_1 \mathbf{e}_1 - q_2 \mathbf{e}_2 - q_3 \mathbf{e}_3] - \varepsilon [q'_0 \mathbf{e}_0 - q'_1 \mathbf{e}_1 - q'_2 \mathbf{e}_2 - q'_3 \mathbf{e}_3] \\ &= (q_0 - \varepsilon q'_0) \mathbf{e}_0 - (q_1 - \varepsilon q'_1) \mathbf{e}_1 - (q_2 - \varepsilon q'_2) \mathbf{e}_2 - (q_3 - \varepsilon q'_3) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (11.32)$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionlar olmak üzere, toplamının eşleniği

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q})^* = \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^* \quad (11.33)$$

ile verilir.  $\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  gibi iki dual kuaternionun çarpımının eşleniği ise;

$$\begin{aligned} (\mathbf{PQ})^* &= (\mathbf{pq})^* + \varepsilon (\mathbf{pq}' + \mathbf{p}'\mathbf{q})^* \\ &= \mathbf{q}^* \mathbf{p}^* + \varepsilon (\mathbf{q}'^* \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^* \mathbf{p}'^*) \\ &= (\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{q}'^*) + (\mathbf{p}^* + \varepsilon \mathbf{p}'^*) \\ &= \mathbf{Q}^* \mathbf{P}^* \end{aligned} \quad (11.34)$$

olacaktır. Diğer taraftan bu dual kuaternionlar için,

$$(\mathbf{PQ})^c = \mathbf{P}^c \mathbf{Q}^c \quad (11.35)$$

ve

$$[(\mathbf{PQ})^*]^c = [\mathbf{Q}^*]^c [\mathbf{P}^*]^c \quad (11.36)$$

bağıntıları yazılabilir.

### 11.6.5. Bir dual kuaternionun normu

Bir  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionun normu  $N_{\mathbf{Q}}$  ile gösterilir ve reel kuaternionlarda tanımlandığı gibi kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir:

$$N_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2. \quad (11.37)$$

$\mathbf{Q}$  dual kuaternionunun normu dual bir sayıdır.  $\mathbf{P}$  ve  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionlarının çarpımının normu için;

$$N_{\mathbf{PQ}} = (\mathbf{PQ})(\mathbf{PQ})^* = \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*\mathbf{P}^* = N_{\mathbf{P}}N_{\mathbf{Q}} \quad (11.38)$$

ifadesi yazılabilir.

Normu birim olan dual kuaterniona *birim dual kuaternion* denir. Birim dual kuaternionun reel kısmı bir, dual kısmı ise sıfırdır. Dolayısı ile,

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (11.39)$$

ifadesi yazılabilir.

### 11.6.6. Bir dual kuaternionun tersi

Dual kuaternionların tersi, reel kuaternionlarda tanımlanan ifadeye benzer şekilde tanımlanır ve  $\mathbf{Q}^{-1}$  ile gösterilir. Ele alınan bir  $\mathbf{Q}$  dual kuaternionunun tersi;

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\mathbf{Q}^*}{N_{\mathbf{Q}}} = \frac{Q_0 \mathbf{e}_0 - Q_1 \mathbf{e}_1 - Q_2 \mathbf{e}_2 - Q_3 \mathbf{e}_3}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \quad (11.40)$$

bağıntısı ile verilir. Bu ifade reel ve dual kısımdan oluşur.  $\mathbf{Q}^{-1}$ 'in reel kısmı;

$$Re\{\mathbf{Q}^{-1}\} = \frac{q_0 \mathbf{e}_0 - q_1 \mathbf{e}_1 - q_2 \mathbf{e}_2 - q_3 \mathbf{e}_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (11.41)$$

ve dual kısmı için

$$Du\{Q^{-1}\} = \frac{q'_0 e_0 - q'_1 e_1 - q'_2 e_2 - q'_3 e_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} - \frac{2(q_0 q'_0 + q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3)}{(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2} (q_0 e_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3) \quad (11.42)$$

ifadeleri yazılabilir [123]. Reel kuaternionlarda olduğu gibi dual kuaternionun tersi ile kendisinin çarpımı bir' e eşittir:

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1. \quad (11.43)$$

(11.40) denkleminde yararlanarak;

$$N_Q N_Q^{-1} = 1 \quad (11.44)$$

ve

$$N_Q^{-1} = \frac{1}{N_Q} \quad (11.45)$$

bağıntısı elde edilebilir.

### 11.6.7. Dual kuaternionların bölümü

Reel kuaternionlarda tanımlandığı gibi,  $Q \neq 0$  olmak üzere bir  $P$  dual kuaternionunu bir  $Q$  dual kuaternionuna bölmek için  $P$ 'yi  $Q^{-1}$  ile çarpmak gerekir. Fakat dual kuaternion çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türdür. Bu nedenle  $P$ 'yi  $Q$  ile iki türlü bölmek gerekir.

$$\text{Sağdan bölme: } PQ^{-1} \quad (11.46)$$

$$\text{Soldan bölme: } Q^{-1}P \quad (11.47)$$

Bölme işlemi sonucunda elde edilen nicelik yine bir dual kuaterniondur.

## 11.7. Dual Kuaternionların Matris Temsilleri

### 11.7.1. Dual sayıların $2 \times 2$ matrislerle gösterimi

Daha önceki bölümlerde reel ve kompleks kuaternionların  $2 \times 2$ ,  $4 \times 1$ ,  $4 \times 4$  ve  $8 \times 8$  matris temsilleri tanımlanmıştı. Bu bölümde dual kuaternionlar çeşitli matrislerle ifade edilmeye çalışılacaktır. Literatür incelendiğinde özellikle dönme ve öteleme hareketi yapan sistemlerin temsili olmak üzere pek çok dual kuaternionik matris uygulaması olduğu görülmektedir [124-130].

Ele alınan bir  $A = a + \varepsilon a'$  dual sayısı,

$$A = \begin{bmatrix} a & a' \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

şeklinde verilen bir  $2 \times 2$  matris ile gösterilir. Matrisin elemanları olan  $a$  ve  $a'$ 'nin dual sayıların tanımı gereğince reel sayılar olduğuna dikkat edilmelidir. Bu tanımdan yola çıkarak dual birim  $\varepsilon$ ; reel kısmı sıfır, dual kısmı bir olan aşağıdaki  $2 \times 2$  matris ile temsil edilir:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.49)$$

$\varepsilon$  dual biriminin tanımı gereğince  $\varepsilon^2 = 0$  olmalıdır. Gerçekten de  $\varepsilon$ 'yi temsil eden yukarıdaki matris,

$$\varepsilon \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

bağıntısını sağlar. Öte yandan ele alınan diğer bir  $B = b + \varepsilon b'$  dual sayısı da (11.48)'de verilen tanım gereğince,

$$B = \begin{bmatrix} b & b' \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (11.51)$$

matrisi ile temsil edilir. Reel matrisler için geçerli olan tanımlar dual matrisler için de geçerlidir.

Dual sayılar üzerine tanımlanan işlemler dual matrislerle izomorftur. Örneğin  $A$  ve  $B$  dual sayılar olmak üzere,



$$f(A + \lambda B) = f(A) + \lambda f(B) \quad (11.52)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon dual matrisler kullanılarak da,

$$f(A + \lambda B) = \begin{bmatrix} a + \lambda b & a' + \lambda b' \\ 0 & a + \lambda b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a' \\ 0 & a \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} b & b' \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (11.53)$$

aynı sonucu verir.

Dual sayılar için tanımlanan (11.3) çarpım bağıntısı  $2 \times 2$  matrisler kullanılarak da,

$$AB = \begin{bmatrix} a & a' \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & b' \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & ab' + a'b \\ 0 & ab \end{bmatrix} \quad (11.54)$$

şeklinde elde edilir.

### 11.7.2. Dual kuaternionların $4 \times 4$ matrislerle temsili

Bölüm 6'da bir  $\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$  reel kuaternionu, baz elemanları  $\mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  ve  $\mathbf{e}_3$  için tanımlanan  $4 \times 4$  matrislerden yola çıkarak elde edilen  $4 \times 4$  bir matris ile temsil edilmişti.  $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}'$  dual kuaternionu da tanımı gereğince, Bölüm 6'da (6.19) ve (6.22) eşitlikleri ile verilen  $\mathbf{q}$  ve  $\mathbf{q}'$  reel kuaternionlarına karşı gelen;

$$\mathbf{Q} = q_0 \mathbf{Q}_0 + q_1 \mathbf{Q}_1 + q_2 \mathbf{Q}_2 + q_3 \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{Q}' = q'_0 \mathbf{Q}_0 + q'_1 \mathbf{Q}_1 + q'_2 \mathbf{Q}_2 + q'_3 \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} q'_0 & q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ -q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ -q'_2 & q'_3 & q'_0 & -q'_1 \\ -q'_3 & -q'_2 & q'_1 & q'_0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin bir kombinasyonu olarak,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{Q}' \\
&= [q_0 \mathbf{Q}_0 + q_1 \mathbf{Q}_1 + q_2 \mathbf{Q}_2 + q_3 \mathbf{Q}_3] + \varepsilon [q'_0 \mathbf{Q}_0 + q'_1 \mathbf{Q}_1 + q'_2 \mathbf{Q}_2 + q'_3 \mathbf{Q}_3] \\
&= \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} q'_0 & q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ -q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ -q'_2 & q'_3 & q'_0 & -q'_1 \\ -q'_3 & -q'_2 & q'_1 & q'_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_0 + \varepsilon q'_0 & q_1 + \varepsilon q'_1 & q_2 + \varepsilon q'_2 & q_3 + \varepsilon q'_3 \\ -q_1 - \varepsilon q'_1 & q_0 + \varepsilon q'_0 & -q_3 - \varepsilon q'_3 & q_2 + \varepsilon q'_2 \\ -q_2 - \varepsilon q'_2 & q_3 + \varepsilon q'_3 & q_0 + \varepsilon q'_0 & -q_1 - \varepsilon q'_1 \\ -q_3 - \varepsilon q'_3 & -q_2 - \varepsilon q'_2 & q_1 + \varepsilon q'_1 & q_0 + \varepsilon q'_0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ -Q_2 & Q_3 & Q_0 & -Q_1 \\ -Q_3 & -Q_2 & Q_1 & Q_0 \end{pmatrix} \tag{11.55}
\end{aligned}$$

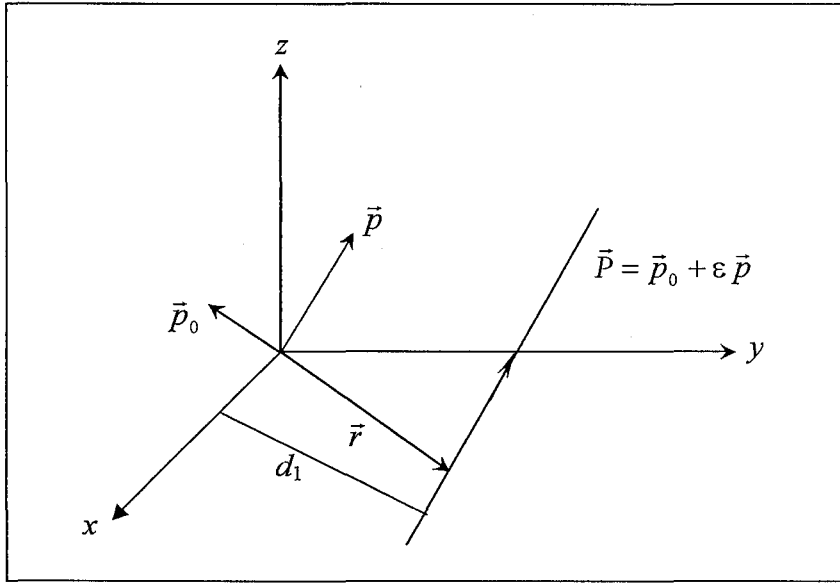
şeklindeki  $4 \times 4$  bir matrisle temsil edilebilir. Görüldüğü gibi elde edilen dual matris reel formdaki matrisle şekil bakımından aynı olup, aradaki fark sadece  $\mathbf{Q}$  dual matrisinin elemanlarının dual sayılardan oluşmasından kaynaklanmaktadır.

## 12. DUAL KUATERNİONLARLA DOĞRULARIN ANALİZİ

Bu bölümde dual kuaternionların en önemli uygulama alanlarından birisi olan vidasal yerdeğiştirme hareketi incelenecektir. Bu amaçla önce dual kuaternionlarla bir doğrunun nasıl tanımlanabileceği açıklanacak, daha sonra ise doğru dönüşümlerinin analizi yapılacaktır. Ayrıca bu dönüşümlerin  $4 \times 4$  dual matrislerle nasıl ifade edilebileceği gösterilecektir.

### 12.1. Dual Kuaternionlarla Bir doğrunun Tanımı

Üç boyutlu uzayda bir doğrunun gösterimi için altı Plücker koordinatı kullanılır. Bu altı koordinat  $\vec{p}$  ve  $\vec{p}_0$  gibi iki reel vektörün bileşenleridir.



Şekil 12.1. Bir doğrunun gösterimi

İlk birim vektör  $\vec{p}$ , verilen doğrunun üç doğrultman kosinüsü  $p_1$ ,  $p_2$  ve  $p_3$  ile belirlenir. Bileşenleri  $p'_1$ ,  $p'_2$  ve  $p'_3$  olan ikinci vektör  $\vec{p}_0$  ise doğrunun orijine göre momentidir. Böylece,

$$\vec{p}_0 = \vec{r} \times \vec{p} \quad (12.1)$$

ile tanımlanır. Burada  $\vec{r}$ , doğru üzerindeki herhangi bir noktanın konum vektörüdür.  $\vec{p}$  birim vektörü,  $\vec{r}$  konum vektörü ve  $\vec{p}_0$  momenti,

$$\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_3 \vec{e}_3, \quad (12.2)$$

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 \quad (12.3)$$

ve

$$\mathbf{p}_0 = p'_1 \mathbf{e}_1 + p'_2 \mathbf{e}_2 + p'_3 \mathbf{e}_3 \quad (12.4)$$

vektör kuaternionlarıyla temsil edilsin. Bu tanımlara ilaveten, altı Plücker koordinatı aşağıdaki iki bağıntıyı sağlar:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_0 = p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3 = 0 \quad (12.5)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (12.6)$$

Yukarıdaki bağıntılardan görüleceği gibi bir doğru dört serbestlik derecesine sahiptir. Bu altı koordinatı verilen doğruyu üç reel doğrultman kosinüsü ile ilişkilendirmek yararlı olacaktır. Taylor serisinden yola çıkarak,

$$\cos(\alpha_1 + \varepsilon d_1) = \cos \alpha_1 - \varepsilon d_1 \sin \alpha_1 = p_1 + \varepsilon p'_1 \quad (12.7)$$

$$\cos(\alpha_2 + \varepsilon d_2) = \cos \alpha_2 - \varepsilon d_2 \sin \alpha_2 = p_2 + \varepsilon p'_2 \quad (12.8)$$

$$\cos(\alpha_3 + \varepsilon d_3) = \cos \alpha_3 - \varepsilon d_3 \sin \alpha_3 = p_3 + \varepsilon p'_3 \quad (12.9)$$

bağıntıları yazılabilir [86].  $p_1 + \varepsilon p'_1$ ,  $p_2 + \varepsilon p'_2$  ve  $p_3 + \varepsilon p'_3$  dual sayılarına doğrunun dual doğrultman kosinüsü denir ve  $\mathbf{P}$  birim dual kuaternionunun üç bileşenini oluştururlar.  $\mathbf{P}$  ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{p}_0 \\ &= [p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + p_3 \mathbf{e}_3] + \varepsilon [p'_1 \mathbf{e}_1 + p'_2 \mathbf{e}_2 + p'_3 \mathbf{e}_3] \\ &= [p_1 + \varepsilon p'_1] \mathbf{e}_1 + [p_2 + \varepsilon p'_2] \mathbf{e}_2 + [p_3 + \varepsilon p'_3] \mathbf{e}_3 \\ &= P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2 + P_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (12.10)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\mathbf{P} = P_1 \mathbf{Q}_1 + P_2 \mathbf{Q}_2 + P_3 \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -P_3 & P_2 \\ -P_2 & P_3 & 0 & -P_1 \\ -P_3 & -P_2 & P_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

dual matrisi ile temsil edilir.

Gerçekten de  $\mathbf{P}$ 'nin normu için,

$$\begin{aligned}
 N_{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}\mathbf{P}^* \\
 &= ([p_1 + \varepsilon p'_1]\mathbf{e}_1 + [p_2 + \varepsilon p'_2]\mathbf{e}_2 + [p_3 + \varepsilon p'_3]\mathbf{e}_3) \\
 &\quad (-[p_1 + \varepsilon p'_1]\mathbf{e}_1 - [p_2 + \varepsilon p'_2]\mathbf{e}_2 - [p_3 + \varepsilon p'_3]\mathbf{e}_3) \\
 &= (P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2 + P_3\mathbf{e}_3)(-P_1\mathbf{e}_1 - P_2\mathbf{e}_2 - P_3\mathbf{e}_3) = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2
 \end{aligned} \tag{12.12}$$

bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki eşitlik matrisler kullanılarak da,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\mathbf{P}^* &= \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -P_3 & P_2 \\ -P_2 & P_3 & 0 & -P_1 \\ -P_3 & -P_2 & P_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & 0 & P_3 & -P_2 \\ P_2 & -P_3 & 0 & P_1 \\ P_3 & P_2 & -P_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \end{pmatrix} \\
 &= (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)\mathbf{I}_4
 \end{aligned} \tag{12.13}$$

elde edilir. Bu matrisin izinden,

$$N_{\mathbf{P}} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^*) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{P}^*\mathbf{P}) \tag{12.14}$$

bağıntısı yazılabilir.

Öte yandan (12.12) ifadesindeki dual sayıların kareleri açılarak,

$$\begin{aligned}
 N_{\mathbf{P}} &= [p_1 + \varepsilon p'_1]^2 + [p_2 + \varepsilon p'_2]^2 + [p_3 + \varepsilon p'_3]^2 \\
 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2\varepsilon(p_1p'_1 + p_2p'_2 + p_3p'_3) \\
 &\quad + \varepsilon^2(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2)
 \end{aligned} \tag{12.15}$$

bulunur. Diğer taraftan  $\varepsilon^2 = 0$  olduğundan son terim sıfır olacaktır. (12.5) ve (12.6) eşitliklerinin ışığında yukarıdaki eşitlik için,

$$N_{\mathbf{P}} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{12.16}$$

bağıntısı elde edilir.  $\mathbf{P}$  dual kuaternionunun normu bir olduğuna göre  $\mathbf{P}$  birim dual kuaternionudur.

## 12.2. Doğru Dönüşümleri

Buraya kadar bahsedilen dual kuaternion tanımları birim dual vektörlerin dönüşümünde kullanılabilir. Bir birim dual kuaternion bir birim dual vektör üzerine etkideğinde, bu vektör uzaydaki dual eksen boyunca vidasal bir yerdeğiştirmeye maruz kalır. Bu vidasal yerdeğiştirme,

$$\xi = \theta + \varepsilon s \quad (12.17)$$

şeklindeki dual bir sayı ile temsil edilir. Burada “ $\theta$ ” sözü edilen doğruya göre dönme açısı ve “ $s$ ” ise aynı doğru boyunca yapılan ötelemedir. Böylece bir  $Q$  birim dual kuaternionu,

$$Q(\theta, s) = \cos \frac{\xi}{2} + \eta \sin \frac{\xi}{2} \quad (12.18)$$

ile temsil edilir. Burada  $\eta$ ,

$$\eta = [q_1 + \varepsilon q'_1]e_1 + [q_2 + \varepsilon q'_2]e_2 + [q_3 + \varepsilon q'_3]e_3 \quad (12.19)$$

şeklindeki birim doğru vektörüdür.  $\eta$  birim dual vektörünün bileşenleri için,

$$[q_1 + \varepsilon q'_1]^2 + [q_2 + \varepsilon q'_2]^2 + [q_3 + \varepsilon q'_3]^2 = 1 \quad (12.20)$$

bağıntısı yazılabilir [86].

Dual vektörler sekiz boyutlu reel vektör uzayı oluştururlar.  $Q(\theta, s)$  dual kuaternionu herhangi bir  $P$  dual birim vektör kuaternionu üzerine etkideğinde  $\eta$ 'e göre  $\theta$  gibi bir açıyla ve  $\eta$  boyunca “ $s$ ” kadar bir yol boyunca vidasal bir hareket yapar. Bu dönüşüm,

$$P' = Q(\theta, s)PQ^{-1}(\theta, s) \quad (12.21)$$

ile verilir [131-132].

### 12.3. Doğru Dönüşümlerinin Analizi

Bu bölümde (12.21) ile tanımlanan eşitlik açılarak biraz daha etkin sonuçlara ulaşılmaya çalışılacaktır.  $Q$ , birim kuaternion olmak üzere;

$$Q = Q_0 + Q \quad (12.22)$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $Q_0$ ,  $Q$ ' nun skaler kısmıdır ve dual sayıdır.  $Q$  ise  $Q$ ' nun vektörel kısmını temsil etmekte olup dual bir vektördür.  $Q$ ' nun tersi  $Q^{-1}$  ile gösterilmek üzere,

$$Q^{-1} = Q_0 - Q = Q_0 - Q_1 e_1 - Q_2 e_2 - Q_3 e_3 \quad (12.23)$$

biçiminde verilir.  $Q$  birim dual kuaternion olduğu için,

$$Q_0^2 + Q^2 = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1 \quad (12.24)$$

bağıntısını sağlar.

Öte yandan  $P$ ' nin vidual yerdeğiştirmesi (12.21) denklemiyle tanımlanmıştı. Bu ifade daha açık bir formda,

$$P' = Q P Q^{-1} = [Q_0 + Q] P [Q_0 - Q] \quad (12.25)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $P$  dual vektör kuaternion olduğundan daha önce tanımlanan dual vektörlerin çarpımına ilişkin kurallardan yararlanılarak bu ifade,

$$\begin{aligned} P' &= Q P Q^{-1} = [Q_0 + Q] P [Q_0 - Q] \\ &= [Q_0 + Q] [Q_0 P + P \cdot Q - P \times Q] \\ &= Q_0^2 P + Q_0 (P \cdot Q) - Q_0 (P \times Q) - Q_0 (Q \cdot P) + Q_0 (Q \times P) + Q (P \cdot Q) \\ &\quad + Q \cdot (P \times Q) - Q \times (P \times Q) \end{aligned} \quad (12.26)$$

formunu alacaktır. Yukarıdaki denklemlerde,  $Q \perp (P \times Q)$  olduğundan,

$$Q \cdot (P \times Q) = 0 \quad (12.27)$$

yazılabilir. Bazı kısaltmalardan sonra  $P'$  için,

$$P' = Q_0^2 P + 2Q_0 (Q \times P) + Q (P \cdot Q) - Q \times (P \times Q) \quad (12.28)$$

genel ifadesine ulaşılır. Vektörel eşitliklerden,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}) \\ &= (1 - \mathbf{Q}^2)\mathbf{P} - \mathbf{Q}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (12.29)$$

bağıntısı yazılabildiğine göre (12.28) denklemi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{Q}_0^2 \mathbf{P} + 2\mathbf{Q}_0(\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) + \mathbf{Q}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) - (1 - \mathbf{Q}^2)\mathbf{P} - \mathbf{Q}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}) \\ &= (2\mathbf{Q}_0^2 - 1)\mathbf{P} + 2\mathbf{Q}_0(\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (12.30)$$

haline gelir.  $\mathbf{P}'$  dual kuaternionu da birim dual kuaterniondur.

(12.30) denklemini daha açık formdaki matrislerle temsil etmek de mümkündür. Bu matris ifadesi ise,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2Q_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2Q_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_0^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + 2Q_0 \begin{pmatrix} 0 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_3 & 0 & -Q_1 \\ -Q_2 & Q_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \\ &+ 2 \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} (Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3) \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2Q_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2Q_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_0^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 2Q_1^2 & -2Q_0Q_3 + 2Q_1Q_2 & 2Q_0Q_2 + 2Q_1Q_3 \\ 2Q_0Q_3 + 2Q_1Q_2 & 2Q_2^2 & -2Q_0Q_1 + 2Q_2Q_3 \\ -2Q_0Q_2 + 2Q_1Q_3 & 2Q_0Q_1 + 2Q_2Q_3 & 2Q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.31)$$

olmalıdır. Gerekli matris çarpımlarından sonrasında,

$$\begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(Q_2^2 + Q_3^2) & 2(Q_1Q_2 - Q_0Q_3) & 2(Q_1Q_3 + Q_0Q_2) \\ 2(Q_1Q_2 + Q_0Q_3) & 1 - 2(Q_1^2 + Q_1^4) & 2(Q_2Q_3 - Q_0Q_1) \\ 2(Q_1Q_3 - Q_0Q_2) & 2(Q_2Q_3 + Q_0Q_1) & 1 - 2(Q_1^2 + Q_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad (12.32)$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadede  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$  ve  $\mathbf{T}$  matrisleri sırasıyla,



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \quad (12.33)$$

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{pmatrix} \quad (12.34)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 - 2(Q_2^2 + Q_3^2) & 2(Q_1Q_2 - Q_0Q_3) & 2(Q_1Q_3 + Q_0Q_2) \\ 2(Q_1Q_2 + Q_0Q_3) & 1 - 2(Q_1^2 + Q_1^4) & 2(Q_2Q_3 - Q_0Q_1) \\ 2(Q_1Q_3 - Q_0Q_2) & 2(Q_2Q_3 + Q_0Q_1) & 1 - 2(Q_1^2 + Q_2^2) \end{pmatrix} \quad (12.35)$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T} \mathbf{P} \quad (12.36)$$

matris ifadesi yazılabilir.  $\mathbf{T}$  matrisi dual ortogonal bir matris olup  $\mathbf{p}$  birim dual vektörünün vidasal yerdeğiştirmesini ifade etmektedir [86].

## 13. DUAL KUATERNİONLARLA ELEKTROMANYETİZMANIN REFORMÜLASYONU

Literatürde elektromanyetik denklemleri ifade etmek için birçok metot mevcuttur. Vektörler haricinde bu metodların birisi de kompleks sayıları kullanmaktır. Shen ve Kong [133], Maxwell denklemleri de dahil olmak üzere zaman harmonik nicelikleri fazör notasyonu ile temsil etmiştir. İkinci metot, dört vektörleri kullanmaktır. Kyrala [117] elektromanyetizmanın ilgili denklemlerini dört vektörlerle ifade etmiştir. Üçüncü metot ise kompleks kuaternionlardan yararlanmaktır. Imaeda [57] klasik elektrodinamiği kuaternionlar teorisini kullanarak incelemiştir. Negi ve arkadaşları [58] Maxwell denklemlerini kompleks kuaternionların yardımıyla kompakt formda elde ettikten sonra matrislerle de açık formda ifade etmişlerdir. Lambek [59] ise özel rölativite teorisini ve Maxwell denklemlerini yine kompleks kuaternionlarla incelenmiştir. Dördüncü metot ise kuaternionlarla yakın ilişkisi olan Clifford cebirini kullanmaktır. Gsponer ve Hurni [62] bu cebiri kullanmanın parçacık fiziğinde ve Maxwell denklemlerinin formülasyonunda tatmin edici faydaları olduğunu ifade etmişlerdir.

Literatür incelemelerinde dual kuaternionların genel olarak dinamik ve kinematik uygulamaları olduğu görülmektedir. Bu bölümde elektromanyetizmanın klasik denklemleri ve Maxwell denklemleri ilk defa dual kuaternionlar kullanılarak incelenecektir.

Elektromanyetizmanın klasik denklemleri Bölüm 8'de kompleks kuaternionlarla ifade edilmişti. Bu bölümde ise ilgili eşitlikler dual kuaternionlar kullanılarak elde edilecektir.

### 13.1. Temel Tanımlar

Maxwell denklemleri fiziğin en iyi bilinen eşitliklerinden birisidir. Bu eşitlikler yüzyıldan fazla bir zaman öncesinde ifade edilmesine karşın halen elektromanyetizmanın temel taşlarından birisidir. Bu çalışmada birimsel açıdan bir kargaşaya yol açmamak ve daha basit bir gösterim için,  $\epsilon = \mu = c = \hbar = 1$  alınacaktır. Maxwell denklemlerinin dual kuaternionlarla yeniden formülasyonunda kullanılmak üzere birkaç yeni dual kuaternionik terimin

tanımlanmasına ihtiyaç vardır. Bunlardan birisi olan dual kuaternionik  $\mathbf{D}$  diferansiyel operatörü,

$$\mathbf{D} = \nabla + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \quad (13.1)$$

şeklinde ifade edilsin. Diğer bir yeni dual kuaternion olarak ise; bünyesinde hem elektrik alanı hem de manyetik alanı barındıran  $\mathbf{M}$  dual kuaternionu,

$$\mathbf{M} = -\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{H} = -[E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3] + \varepsilon [H_x \mathbf{e}_1 + H_y \mathbf{e}_2 + H_z \mathbf{e}_3] \quad (13.2)$$

şeklinde tanımlansın.

### 13.2. Dinamik Alanlar

$\mathbf{D}$  dual kuaternionik diferansiyel operatörünün  $\mathbf{M}$  dual kuaternionu üzerine etkisi,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{M} &= \left[ \nabla + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [-\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{H}] \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \left[ -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{H} \right] \end{aligned} \quad (13.3)$$

şeklinde olmalıdır.  $\nabla \cdot \mathbf{H}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}$  ve  $\nabla \times \mathbf{E}$  için Bölüm 8'de (8.18)-(8.21) eşitlikleri ile tanımlanan Maxwell denklemlerinden yukarıdaki ifadede yararlanarak,

$$\mathbf{D}\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + [\rho_v + \varepsilon \mathbf{J}] \quad (13.4)$$

bağıntısı elde edilir. Görüldüğü üzere bu etki sonucu, elektrik alana ilişkin  $\rho_v$  yük yoğunluğu ve manyetik alana ilişkin  $\mathbf{J}$  akım yoğunluğunu kolaylıkla elde edilmektedir.

### 13.3. Statik Alanlar:

Elektromanyetik alanlar genel olarak uzay ve zamanın fonksiyonudur. Fakat bazı hallerde bu alanlar zamana bağlı olarak değişmez. Bu durumda Maxwell denklemleri,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (13.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (13.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_v \quad (13.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (13.8)$$

biçiminde ifade edilir. Bu takdirde (13.4) ifadesindeki zamana bağlı olan  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  terimi yok olacağından dual kuaternionik eşitlik,

$$\mathbf{D} \mathbf{M} = \left[ \nabla + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [-\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{H}] = \rho_v + \varepsilon \mathbf{J} \quad (13.9)$$

biçimini alacaktır.

$\rho_v$  yük yoğunluğu ile  $\mathbf{J}$  akım yoğunluğunu (13.2) ifadesine benzer şekilde dual kuaternionik bir formda birleştirmek mümkündür:

$$\mathbf{S} = \rho_v + \varepsilon \mathbf{J} = \rho_v + \varepsilon [J_x \mathbf{e}_1 + J_y \mathbf{e}_2 + J_z \mathbf{e}_3]. \quad (13.10)$$

Bu takdirde (13.4) ifadesi,

$$\mathbf{D} \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{S} \quad (13.11)$$

şeklindeki ve (13.9) ifadesi de,

$$\mathbf{D} \mathbf{M} = \mathbf{S} \quad (13.12)$$

biçimindeki kompakt formlara indirgenir.

#### 13.4. Süreklilik Denklemi

(13.1) denklemi ile verilen dual kuaternionik diferansiyel operatörünün eşleniği,

$$\mathbf{D}^* = \nabla^* + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \quad (13.13)$$

şeklinde tanımlanmalıdır. Yukarıda verilen (13.4) denklemine benzer şekilde

$\mathbf{D}^* = \nabla^* + \varepsilon \partial_t$  operatörünün  $\mathbf{S} = \rho_v + \varepsilon \mathbf{J}$  dual kuaternionu üzerine etkimesiyle,

$$\mathbf{D}^* \mathbf{S} = \left[ \nabla^* + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [\rho_v + \varepsilon \mathbf{J}] = \varepsilon \left[ \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{J} \right] \quad (13.14)$$

elde edilir. Bu eşitliğin skaler kısmı,

$$Sc[\mathbf{D}^* \mathbf{S}] = \left[ \nabla^* + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [\rho_v + \varepsilon \mathbf{J}] = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (13.15)$$

sıfıra eşit olup süreklilik denklemi adını alır. Bu eşitlik Maxwell denklemlerinin en önemli sonuçlarından biridir. Dolayısı ile (13.15) denklemi,

$$Sc[\mathbf{D}^* \mathbf{S}] = \left[ \nabla^* + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [\rho_v + \varepsilon \mathbf{J}] = 0 \quad (13.16)$$

halini alacaktır.

### 13.5. Dual Kuaternionik Elektromagnetik Potansiyel

Maxwell denklemlerinin diğer bir sonucu da elektromanyetik bir potansiyelin varlığı durumunda ortaya çıkar. (13.10) eşitliğine benzer şekilde elektriksel yüklü bir parçacığın elektromanyetik potansiyeli,

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} - \varepsilon \phi = [A_x e_1 + A_y e_2 + A_z e_3] - \varepsilon \phi \quad (13.17)$$

dual kuaternionu ile tanımlanacak ve dual kuaternionik elektromagnetik potansiyel adı verilecektir.  $\mathbf{A}$  ve  $\phi$ , Bölüm 8'de de belirtildiği gibi sırasıyla elektromagnetik potansiyel ve elektriksel potansiyel adını alır.

(13.1) denklemde verilen dual kuaternionik diferansiyel operatörünün dual eşleniği,

$$\mathbf{D}^\circ = \nabla - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3 \right] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \quad (13.18)$$

şeklinde tanımlanır. (13.14) eşitliğinin elde edilmesinde izlenen yöntemle benzer şekilde  $\mathbf{D}^\circ = \nabla - \varepsilon \partial_t$  operatörü  $\mathbf{P} = \mathbf{A} - \varepsilon \phi$  dual kuaternionik elektromagnetik potansiyeli üzerine etkideğinde,

$$\mathbf{D}^\circ \mathbf{P} = \left[ \nabla - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [\mathbf{A} - \varepsilon \phi] = \nabla \times \mathbf{A} + \varepsilon \left[ -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \quad (13.19)$$

bağıntısını verecektir. Bu eşitlikte,

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ve

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

tanımları kullanılarak,

$$\mathbf{D}^\circ \mathbf{P} = \left[ \nabla - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [\mathbf{A} - \varepsilon\phi] = \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \quad (13.20)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi  $\mathbf{D}^\circ = \nabla - \varepsilon \partial_t$  operatörünün  $\mathbf{P} = \mathbf{A} - \varepsilon\phi$  üzerine etkimesi  $\mathbf{H}$  magnetik alanının ve  $\mathbf{E}$  elektrik alanının belirlenmesine olanak sağlamaktadır.

## TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Giriş bölümünde ayrıntılı olarak verildiği gibi Hamilton tarafından keşfinden itibaren kuaternionlar fiziğin çeşitli alanlarında kendisine uygulama alanı bulmuştur. Son yirmi yıl içerisinde özellikle teknoloji alanındaki gelişmeler kuaternionların robotik ve bilişim sistemlerinde yaygın olarak kullanılmasına olanak vermiştir. Tüm bu gelişmelere rağmen birçok bilim adamı kuaternionların gerçek anlamda hak ettikleri konumda olmadıklarını düşünmektedir. Bu yorumlara katılmamak mümkün değildir. Literatür incelendiğinde kuaternionların bugün fiziksel niceliklerin temsilinde en yaygın olarak kullanılan vektörlerin doğuşuna neden olduğu görülmektedir. Dolayısı ile vektör uzayını da kapsayan kuaternionların fiziksel dünyada çok daha yaygın bir şekilde kullanılması beklenirken bu beklentilerin tam manası ile gerçekleşmediği görülmektedir. Fakat bu durum kuaternion cebirindeki gelişmelere paralel olarak olumlu anlamda değişme göstermektedir. Bilimsel literatüre bu anlamda başta Feza Gürsey olmak üzere Türk bilim adamlarının katkısının da olduğu görülmektedir [76, 134-136].

Dört boyutlu reel kuaternion uzayından sekiz boyutlu kompleks ve dual kuaternion uzayına geçişle birlikte, bilim tarihinin yapı taşları olan birçok fiziksel eşitliğin kuaternionlarla daha özlü ve daha kolay bir şekilde ifadesi mümkün olabilmektedir. Böylece bu tezin amaçları arasında yer alan fiziğin çok iyi bilinen yasalarının kompleks ve dual kuaternionlarla temsili gerçekleşebilecektir.

Bu tezde ilk olarak kompleks ve dual kuaternionların temel yapıları olan reel kuaternionların tanımları verilmiş, cebirsel özellikleri incelenmiştir. Reel kuaternionların matematiksel açıdan kullanım kolaylığını sağlamak amacıyla matrislerle nasıl temsil edileceği, bu matrislerin sağlayacağı özellikler ayrıntılı olarak da verilmiştir. Bu sonuçlar, reel kuaternionların üç boyutlu vektör uzayı ile uyumlu bir birliktelik yaratabileceğini göstermektedir. Matris temsillerinin verilmesi ile de matematiksel anlamda reel kuaternionların kullanılmasının faydaları ortaya çıkmıştır. Çünkü dört farklı niceliğe sahip bir kuaternionu temsil etmek için on altı elemanı olan bir matrise ihtiyacınız vardır. Özellikle dönme ve öteleme hareketi yapan sistemlerde birbirlerinin ardı sıra matris çarpımlarına ihtiyaç bulunduğu düşünüldüğünde sayısı yüzlerce ifade edilebilecek çarpım işlemlerine ihtiyaç duyulacağı görülecektir. Oysa aynı işlemi, nicelikleri

kuaternionlarla temsil ettikten sonra yapmak daha az zahmetlidir ve daha az zaman alır.

Göreceli hareketin temellerine ilişkin tanımlar Dünya'nın evrenin merkezinde hareketsiz olarak bulunduğunu ve uzaydaki herşeyin Dünya'ya göre göreceli olarak hareket ettiğini öne süren Aristoteles'e kadar uzanmaktadır. Aristoteles'den günümüze kadar olan bu tartışmalar mutlak uzay ve mutlak zamandan ziyade birbirlerinden bağımsız olmayan, aksine birbirlerinin içerisine geçmiş uzay-zaman kavramının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Klasik mekanik yasalarına göre uzay, zaman ve maddeden oluşan fiziksel evren, yeni bir uzay-zaman tanımının ortaya çıkmasının ardından artık uzay-zaman ve madde kavramları ile ifade edilmeye başlanmıştır. Özellikle kompleks kuaternionların rölativistik mekanikteki uygulamalarının anlaşılması bakımından tezin uzay-zaman kavramının yer aldığı bölümünde kısaca Galileo ile Lorentz dönüşümlerine değinildikten sonra öklitsel ve öklitsel olmayan uzay kavramı, dört boyutlu Minkowski uzayının özellikleri incelenmiştir. Bu incelemeler daha sonraki bölümlerde kompleks kuaternionlar kullanılarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması bakımından yararlı olmuştur. Dönüşüm formülleri ile elde edilen Lorentz dönüşümlerinin alternatif bir yöntem olarak Cayley-Klein parametreleri ve reel kuaternionlarla da elde edilebileceği de ispatlanmıştır.

Kinematikte en önemli problemlerin birisi de küresel yerdeğiştirme ve hareketin gösterimidir. Kompak yapıları ve basitliği nedeniyle en iyi yollardan birisi de Euler parametrelerini kullanmaktır. Euler parametrelerinin dört bileşeni eğer bir birim vektör kuaternion olarak ifade edilirse, küresel harekete ilişkin açısal hız ve ivme bağıntıları kolaylıkla elde edilebilmektedir.

Kuantum mekaniğinin ortaya çıkışından sonra Pauli spin matrisleri kuaternionların baz elemanları olarak kullanılarak birçok kuantum mekaniksel terim yeniden ifade edilmiştir. Tezde, kuantum mekaniğinde yer alan operatör kavramına kısaca değinilerek, kuantum mekaniksel operatörlerin kuaternionlarla da ifade edilebileceği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre; bu operatörler klasik kuantum mekaniksel operatörlerle hemen hemen aynı özellikleri taşımaktadır.



Sekiz reel bileşene sahip kompleks kuaternionlar fiziğin çok iyi bilinen bazı yasalarının ifade edilmesinde oldukça yararlıdır. Bu amaçla kompleks kuaternionların cebirsel özellikleri incelenmiş, ardından  $8 \times 8$  izomorfik matris temsilleri de verilmiştir. Tanımı gereğince iki reel kuaternionun “ $i$ ” kompleks sayısı ile birleştirilmesi ile ortaya çıkan bu yapı, uzay-zaman niceliklerinin temsilinde kritik rol oynamaktadır. Bu yapı sayesinde dört boyutlu uzay-zaman kavramı basit bir şekilde temsil edilebilmekte ve ardından kompleks kuaternionların normu alınarak bir Lorentz değişmezi olan Minkowski uzayının temel formu da kolaylıkla elde edilebilmektedir. Rölativistik mekaniksel uygulamalar incelendiğinde, Lorentz dönüşümlerinin de kompleks kuaternionlarla ifade edilebileceği görülmektedir.

Kompleks kuaternionların en önemli faydalarından birisi de klasik Maxwell denklemlerinin temsilinde ortaya çıkmaktadır. Bu yapı kullanılarak Maxwell’in temel dört eşitliğini tek bir kompleks kuaternionik denkleme toplamak mümkün olmaktadır. Bu gösterimin en önemli avantajı basit ve kompakt yapısıdır. Ayrıca istendiğinde taktirde izomorfik matris temsilleri ile de ifade edilmesi mümkün olmaktadır. Kompleks kuaternionlar yardımıyla rölativistik olarak da Maxwell denklemlerinin bir dönüşümle elde edilebilmesi mümkündür.

Kuaternionların sık kullanıldığı alanlardan birisi de dönme hareketinin temsidir. Bu amaçla daha önceleri matrisler ve reel kuaternionlarla temsil edilen dönüşüm bağıntılarının kompleks kuaternionlarla da gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir. Üç boyutlu uzayda yer alan konum vektörü kompleks kuaternion formunda yazıldıktan sonra reel kuaternionlardaki dönüşüm bağıntısına benzer bir dönüşüm tanımlanmıştır. Ayrıca bununla ilgili bir uygulama da verilmiştir. Elde edilen sonuçlar, diğer yöntemlerle elde edilen sonuçların aynısıdır.

Kompleks kuaternionlara benzer diğer bir yapı da dual kuaternionlardır. Dual kuaternionlar iki reel kuaternionun  $\varepsilon$  dual sayısı ile birleştirilmesi sonucu ortaya çıkan niceliklerdir. Dual kuaternionların en önemli kullanım alanları özellikle dönme ve öteleme hareketi yapan robotik sistemlerdir. Vidasal yerdeğiştirme hareketini kolaylıkla ifade edebilen dual kuaternionların en önemli avantajı basitliği ve gösterimindeki ekonomikliğidir. Bu karakteristikler uzaysal bir eklem kinematik denklemlerinin elde edilmesinde ve ardıl birçok

dönüşümün meydana geldiği durumda oldukça önemli hale gelir. Bir dönüşümü tanımlayan bir matris için bilgisayar ortamında en az dokuz hafıza konumuna ihtiyaç duyulurken, aynı dönüşümü dual kuaternionlar kullanılarak ifade etmek için altı hafıza konumu yeterlidir.

Dual kuaternionların literatürde genel olarak kinematik ve dinamik uygulamaları görülmektedir. Oysa bu tezde literatürde ilk defa daha önceleri kompleks kuaternionlarla tanımlanan Maxwell denklemleri dual kuaternionlarla ifade edilmiş, süreklilik denklemi ve elektromanyetizmaya ilişkin diğer bağıntılar da elde edilmiştir.

Bu çalışmaların devamında; dual kuaternionların diğer matris temsillerinin araştırılması, rölativistik mekanikteki olası uygulama alanlarının incelenmesi düşünülmektedir. Sekiz reel bileşenli bir yapı olan dual kuaternionların kompleks kuaternionlara benzerlikleri nedeniyle, tezde kompleks kuaternionların temsili için verilen  $8 \times 8$  matrislere benzer formda ifade edilebilmesi mümkün olabilir. Bu çalışma yapıldıktan sonra dual kuaternionlarla elde edilen fiziksel niceliklerin artık  $8 \times 8$  matrislerle de temsili gerçekleştirilebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] HAMILTON, W. R., *Elements of Quaternions Vol.I, II and III*, Chelsea, New York, USA (1899).
- [2] McGUIRE, G., O ve CAIRBRE F., *A Bridge Over a Hamilton Path*, The Mathematical Tourist, **23**, 3, 41-43 (2001).
- [3] *A Collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton*, Scripta Mathematica, New York, USA (1945).
- [4] SILVA, C. C. ve MARTINS, R. A., *Polar and Axial Vectors Versus Quaternions*, American Journal of Physics, **70**, 9, 958-964 (2002).
- [5] TAIT, P. G., *An Elementary Treatise on Quaternions*, Cambridge U. P., Cambridge, ENGLAND (1873).
- [6] MAXWELL, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, New York, USA (1893).
- [7] WHEELER, L. P., *Josiah Willard Gibbs, The History of a Great Mind*, Ox Bow, Woodbridge, 1979.
- [8] NAHIN, P. J., *Oliver Heaviside: Sage in Solitude*, IEEE Press, New York, USA (1988).
- [9] CHOU, J. C. K., *Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations*, IEEE Transaction on Robotics and Automation, **8**, 1, 53-64 (1992).
- [10] WEHAGE, R. A., *Quaternion and Euler Parameters - A Brief Expansion*, Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics E.J. Haug ed., 147-180 (1984).
- [11] DU VAL, P., *Homographies, Quaternions and Rotations*. Oxford at The Clarendon Press, England (1964).
- [12] HARAUZ, G., *Representation of Rotations by Unit Quaternions*, Ultramicroscopy, **33**, 209-213 (1990).

- [13] SPENA, F. R., *A Note on Quaternion Algebra and Finite Rotations*, Nuovo Cimento, **108B**, 6, 689-698 (1993).
- [14] MARTINEZ, J. M. R. ve ALVARADO, J. G., *A Simple Method for the Determination of Angular Velocity and Acceleration of a Spherical Motion Through Quaternions*, Meccanica, **35**, 111-118 (2000).
- [15] GRAMKOW, C., *On Averaging Rotations*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, **15**, 7-16 (2001).
- [16] FUNDA J. ve RICHARD P. P., *A Computational Analysis of Screw Transformations in Robotics*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, **6**, 3, 348-356 (1990).
- [17] CHOU, J. C. K. ve KAMEL, M., *Finding the Position and Orientation of a Robot Manipulator Using Quaternions*, The International Journal of Robotics Research, **10**, 3, 240-254 (1991).
- [18] TANIŞLI, M., *Uzaysal Dönmelerin ve Robot Kollarının Pozisyonunun Kuaternion Dönüşümleri ile İncelenmesi*, Doktora Tezi., Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye (1995).
- [19] TANIŞLI, M., ÖZDAŞ, A. ve ÖZDAŞ, K., *An Application of General Quaternion for a Robotics Position*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, **3**, 65-68 (1997).
- [20] TANIŞLI, M. ve ÖZDAŞ, K., *Application of Quaternion Representation to Stanford Manipulator*, Balkan Physics Letters , **5**, 65-68 (1997).
- [21] CRISTI R., et al., *Adaptive Quaternion Feedback Regulation for Eigenaxis Rotations*, Journal of Guidance Control and Dynamics, **17**, 4, 1287-1291 (1994).
- [22] PSIAKI, M., *Attitude-Determination Filtering via Extended Quaternion Estimation*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, **23**, 2, 206-214 (2000).

- [23] AZOR, R., et al., Angular-Rate Estimation Using Delayed Quaternion Measurements, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **24**, 436-443 (2001).
- [24] COSTIC, B. T., et al., *Quaternion-Based Adaptive Attitude Tracking Controller Without Velocity Measurements*, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **24**, 6, 1214-1222 (2001).
- [25] CACCAVALE, F., VILLANI, L., *Output Feedback Control for Attitude Tracking*, *Systems and Control Letters*, **38**, 91-98 (1999).
- [26] MORTON; B., ELGERSMA, M., *A New Computational Algorithm for 7R Spatial Mechanisms*, *Mech. Mach. Theory*, **31**, 1, 23-43 (1996).
- [27] ITZHACK, Y. B., *New Method for Extracting the Quaternion from a Rotation Matrix*, *Journal of Guidance*, **23**, 6, 1085-1087 (2000).
- [28] ROSCHEL, O., *Rational Motion Design-A Survey*, *Computer-Aided Design*, **30**, 3, 169-178 (1998).
- [29] FRANG, Y. C., et al., *Real Time Motion Fairing with Unit Quaternions*, *Computer-Aided Design*, **30**, 3, 191-198 (1998).
- [30] MIURA, K. T., *Unit Quaternion Integral Curve: A New Type of Fair Free-Form Curves*, *Computer Aided Geometric Design*, **17**, 39-58 (2000).
- [31] NAGATOMO; Y., *Dimensional Reduction and Moment Maps*, *Journal of Geometry and Physics*, **41**, 208-223 (2002).
- [32] ÖZDAŞ, K. ve ÖZDAŞ, A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili*, *Fen-Edebiyat Dergisi*, **1**, 2, 101-113 (1989).
- [33] ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*. Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, Türkiye (1995).
- [34] DEMİR, S., *Kuaternionların Dinamiğe Uygulanması*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye (1999).

- [35] SILBERSTEIN, L., *Quaternionic Form of Relativity*, Philosophical Magazine, 23, 790-809 (1912).
- [36] RAO S. K. N., *On the Quaternion Representation of the Proper Lorentz Group  $SO(3,1)$* , Journal of Mathematical Physics, 24, 8, 1945-1954 (1983).
- [37] MANOGUE, C. ve SCHRAY, J., *Finite Lorentz Transformations, Automorphisms and Division Algebras*, Journal of Mathematical Physics, 34, 8, 3746-3767 (1993).
- [38] DE LEO, S., *Quaternionic Lorentz Group and Dirac Equation*, Foundations of Physics Letters, 14, 1, 37-50 (2001).
- [39] DE LEO, S., *Quaternions and Special Relativity*, Journal of Mathematical Physics, 37, 6, 2955-2968 (1996).
- [40] GOUGH, W., *Quaternions and Spherical Harmonics*, European Journal of Physics, 5, 163-171 (1984).
- [41] ADLER, S. L., *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Oxford University Press, New York, USA (1995).
- [42] DE LEO, S., *Quaternion Scalar Field*, Physical Review D, 45, 2, 575-579 (1992).
- [43] DE LEO, S. ve DUCATI, G., *Quaternionic Differential Operators*, Journal of Mathematical Physics, 42, 5, 2236-2265 (2001).
- [44] DE LEO, S., et al., *Quaternionic Potentials in Non-relativistic Quantum Mechanics*, Journal of Physics A, 35, 5411-5426 (2002).
- [45] DAVIES, A. J. ve MCKELLAR, B. H. J., *Nonrelativistic Quaternionic Quantum Mechanics in One Dimension*, Physical Review A, 40, 8, 4209-4214 (1989).

- [46] HORWITZ, L. P., *A Soluble Model for Scattering and Decay in Quaternionic Quantum Mechanics I. Decay*, Journal of Mathematical Physics, **35**, 6, 2743-2771 (1994).
- [47] DAVIES, A. J., *Quaternionic Dirac Equation*, Physical Review D, **41**, 8, 2628-2630 (1990).
- [48] DE LEO S., *A One-component Dirac Equation*, International Journal of Modern Physics A, **11**, 21, 3973-3985 (1996).
- [49] DE LEO S. ve ROTELLI, P., *The Quaternionic Dirac Lagrangian*, Modern Physics Letters, **11**, 5, 357-366 (1996).
- [50] SRINIVASAN, S. K. ve SUDARSHAN, E. C. G., *A Direct Derivation of the Dirac Equation via Quaternion Measures*, Journal of Physics A: Math. Gen., **29**, 5181-5186 (1996).
- [51] VILLALBA, V. M., *Exact Solution of Dirac Equation in the Presence of Pseudoscalar Potentials*, Nuovo Cimento, **112B**, 1, 109-116 (1997).
- [52] KRAVCHENKO, V., *Exact Solutions of the Dirac Equation with Harmonic Pseudoscalar, Scalar or Electric Potential*, Journal of Physics A: Math. Gen., **31**, 7561-7575 (1998).
- [53] WASER, A., *Quaternions in Electrodynamics*, <http://www.aw-verlag.ch/Documents/ElectrodynamicsWithTheScalarField03.pdf>
- [54] WASER, A., *On The Notation of Maxwell's Field Equations*, <http://www.aw-verlag.ch/Documents/Notation%20of%20Maxwell%20Field%20Equations.PDF>
- [55] ABONYI I., et al., *A Quaternion Representation of the Lorentz Group for Classical Physical Applications*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **24**, 3245-3254 (1991).
- [56] CONWAY, A. W., *On the Application of Quaternions to Some Recent Developments of Electrical Theory*, Proceedings of Royal Irish Academy, **50**, 261 (1911).

- [57] IMAEDA, K., *A New Formulation of Classical Electrodynamics*, Nuovo Cimento, **32B**, 1, 138-162 (1976).
- [58] NEGI, O. P. S., et al., *Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism*, Nuovo Cimento, **113B**, 12, 1449-1467 (1998).
- [59] LAMBEK, J., *If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics*, The Mathematical Intelligencer, **17**, 4, 7-15 (1995).
- [60] COLOMBO, F., et al., *Regular Functions of Biquaternionic Variables and Maxwell's Equations*, Journal of Geometry and Physics, **26**, 183-201 (1998).
- [61] SWEETER, D. ve DANDRI, G., *Maxwell's Vision: Electromagnetism with Hamilton's Quaternions*, Second Meeting on Quaternionic Structures in Mathematics and Physics, September 6-10, Roma, Italy (1999).
- [62] GSPONER, A. ve HURNI, J. P., *Comment on Formulating and Generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's Equations with Biquaternions or Clifford Numbers*, Foundations of Physics Letters, **14**, 1, 77-85 (2001).
- [63] SOBCZYK, G., *Spacetime Vector Analysis*, Physics Letters, **84A**, 2, 45-48 (1981).
- [64] WARD, J. P., *Quaternions and Cayley Numbers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1997).
- [65] DAHM, R., *Complex Quaternions in Spacetime Symmetry and Relativistic Spin-Flavor Supermultiplets*, Physics of Atomic Nuclei, **61**, 11, 1885-1891 (1998).
- [66] JANTZEN, R., *Generalized Quaternions and Spacetime Symmetries*, Journal of Mathematical Physics, **23**, 10, 1741-1746 (1982).
- [67] KASSANDROV, V. V., *Biquaternion Electrodynamics and Weyl-Cartan Geometry of Space-Time*, Gravitation and Cosmology, **1**, 3, 216-222 (1995).



- [68] MARCHIAFAVA, S. ve REMBIELINSKI, J., *Quantum Quaternions*, Journal of Mathematical Physics, **33**, 1, 171-173 (1992).
- [69] CONTE, E., *On a Generalization of Quantum Mechanics by Biquaternions*, Hadronic Journal, **16**, 261-275 (1993).
- [70] DE LEO, S. ve ROTELLI, P., *Translations Between Quaternion and Complex Quantum Mechanics*, Progress of Theoretical Physics, **92**, 5, 917-926 (1994).
- [71] DE LEO, S. ve RODRIGUES W. A., *Quantum Mechanics: From Complex to Complexified Quaternions*, International Journal of Theoretical Physics, **36**, 12, 2725-2757 (1997).
- [72] AGRAWAL, O. P., *Hamilton Operators and Dual Number Quaternions in Spatial Kinematics*, Mech. Mach. Theory, **22**, 569-575 (1987).
- [73] WALKER, M. W., SHAO, L. ve VOLZ, R. A., *Estimating 3-D Location Parameters Using Dual Number Quaternions*, CVGIP: Image Understanding, **54**, 3, 358-367 (1991).
- [74] LOSCO, L., et al., *Modelling of a Chain of Rigid Bodies by Biquaternions*, European Journal of Mechanics A/Solids, **10**, 4, 433-451 (1991).
- [75] CHEVALLIER, D. P., *Lie Algebras, Modules, Dual Quaternions and Algebraic Methods in Kinematics*, Mechanism and Machine Theory, **26**, 6, 613-627 (1991).
- [76] SİVRİDAĞ, A. İ., GÜNEŞ, R. ve KELEŞ, S., *The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion-Valued Functions of a Single Real Variable*, Mech. Mach. Theory, **29**, 5, 749-754 (1994).
- [77] HUNT, K. H. ve PARKIN, I. A., *Finite Displacements of Points, Planes, and Lines via Screw Theory*, Mech. Mach. Theory, **30**, 2, 177-192 (1995).
- [78] HORAUD, R. ve DORNAIKA, F., *Hand-Eye Calibration*, The International Journal of Robotics Research, **14**, 3, 195-210 (1995).

- [79] KIM, D., *Quaternion Application Kinematic Calibration of Wrist-Mounted Camera*, *Robotic Systems*, **13**, 3, 153-162 (1996).
- [80] FISCHER, I. S., *The Dual Angle and Axis of Screw Motion*, *Mech. Mach. Theory*, **33**, 3, 331-340 (1998).
- [81] FANG, Y. ve HUANG, Z., *Analytical Identification of Principal Screws of The Third Order Screw System*, *Mech. Mach. Theory*, **33**, 7, 987-992 (1998).
- [82] DANILIDIS, K., *Hand-Eye Calibration Using Dual Quaternions*, *The International Journal of Robotics Research*, **18**, 3, 286-298 (1999).
- [83] PEREZ, A. ve McCARTHY, J. M., *Bennett's Linkage and the Cyclindroid*, *Mechanism and Machine Theory*, **37**, 1245-1260 (2002).
- [84] CHENG, H., H., *Programming with Dual Numbers and its Applications in Mechanisms Design*, *Engineering with Computers*, **10**, 4, 212-229 (1994).
- [85] JÜTTLER, B., *Visualization of Moving Objects Using Dual Quaternion Curves*, *Computers and Graphics*, **18**, 3, 315-326 (1994).
- [86] AZARIADIS, P. ve ASPRAGATHOS, N., *Computer Graphics Representation and Transformation of Geometric Entities Using Dual Unit Vectors and Line Transformations*, *Computers and Graphics*, **25**, 195-209 (2001).
- [87] CORROCHANO, E. B., *Motor Algebra Approach for Visually Guided Robotics*, *Pattern Recognition*, **35**, 279-294 (2002).
- [88] BOYLE, L. L., *Quaternionic Wawefunctions for Triply Degenerate States*, *Chemical Physics Letters*, **13**, 2, 331-333 (1972).
- [89] MARKEY, B. R. ve WALMSLEY, S. H., *Quaternion Formulation of Lattice Dynamics of Molecular Crystals*, *Chemical Physics Letters*, **92**, 3, 257-261 (1982).

- [90] WALMSLEY, S. H., *A Hamiltonian Describing Molecular Orientation for Use in Lattice Dynamics of Molecular Crystals and Other Problems*, Chemical Physics Letters, **110**, 2, 159-162 (1984).
- [91] WALMSLEY, S. H., *Orientation of Rigid Linear Molecules: A Hamiltonian for Use in Lattice Dynamics*, Chemical Physics Letters, **114**, 2, 217-219 (1985).
- [92] WALMSLEY, S. H., *A Comparison of Infinitesimal Rotation, Quaternion and Direct Cosine Coordinates in the Dynamics of Molecular Clusters*, Journal of Molecular Structure, **189**, 129-135 (1988).
- [93] SAUE, T. ve Aa JENSEN, H. J., *Quaternion Symmetry in Relativistic Molecular Calculations: The Dirac-Hartree-Fock Method*, Journal of Chemical Physics, **111**, 14, 6211-6222 (1999).
- [94] BENOIT D. M. ve CLARY D. C., *Quaternion Formulation of Diffusion Quantum Monte-Carlo for the Rotation of Rigid Molecules in Clusters*, Journal of Chemical Physics, **113**, 13, 5193-5202 (2000).
- [95] FRITZER; H. P., *Molecular Symmetry with Quaternions*, Spectrochimica Acta Part A, **57**, 1919-1930 (2001).
- [96] TWEED, D. ve TUTIS, V., *Implications of Rotational Kinematics for the Oculomotor System in Three Dimensions*, Journal of Neurophysiology, **58**, 4, 832-849 (1987).
- [97] CARLTON, E. H., *Connection Between Internal Representation of Rigid Transformation and Cortical Activity Paths*, Biological Cybernetics, **59**, 419-429 (1988).
- [98] TWEED, D., et al., *Computing Three Dimensional Eye Position Quaternions and Eye Velocity From Search Coil Signals*, Vision Res., **30**, 1, 97-110 (1990).
- [99] CLEMENT, R. A., *Natural Coordinates for Specification of Eye Movements*, Vision Res., **31**, 11, 2029-2032 (1991).

- [100] MAGARSHAK, Y., *Quaternion Representation of RNA Sequences and Tertiary Structures*, BioSystems, **30**, 21-29 (1993).
- [101] HASLWANTER, T., *Mathematics of Three-Dimensional Eye Rotations*, Vision Res., **35**, 12, 1727-1739 (1995).
- [102] QUINE, J. R., *Helix Parameters and Protein Structure Using Quaternions*, Journal of Molecular Structure, **460**, 53-66 (1999).
- [103] GIBBON, J. D., *A Quaternionic Structure in the Three-Dimensional Euler and Ideal Magneto-Hydrodynamics Equations*, Physica D, **166**, 17-28 (2002).
- [104] KUTRUNOV, V. N., *The Quaternionic Method of Regularizing Integral Equations of The Theory of Elasticity*, J. Appl. Maths. Mechs., **56**, 5, 765-770 (1992).
- [105] VRBIK J., *Celestial Mechanics via Quaternions*, Canadian Journal of Physics, **72**, 3-4, 141-146 (1991).
- [106] AINOLA, L. ve ABEN, H., *Transformation Equations in Polarization Optics of Inhomogeneous Birefringent Media*, J. Opt. Soc. Am. A., **18**, 9, 2164-2170 (2001).
- [107] CHATTERS, A. W., *Matrices, Idealisers and Integer Quaternions*, Journal of Algebra, **150**, 45-56 (1992).
- [108] ASLAKSEN, H., *Quaternionic Determinants*, Mathematical Intelligencer, **18**, 3, 57-65 (1996).
- [109] HUANG, L., *On Two Questions About Quaternion Matrices*, Linear Algebra and its Applications, **318**, 79-86 (2000).
- [110] GROSS, J., et al., *Quaternions: Further Contributions to a Matrix Oriented Approach*, , Linear Algebra and its Applications, **326**, 205-213 (2001).
- [111] LIPING, H., *Consimilarity of Quaternion Matrices and Complex Matrices*, Linear Algebra and its Applications, **3331**, 21-30 (2001).

- [112] FAREBROTHER, R. W., et al., *Matrix Representation of Quaternions*, Linear Algebra and Applications, **362**, 251-255 (2003).
- [113] DEMİR, S. ve ÖZDAŞ, K., *Kuaternion Cebri ve Kuaternionların Matris Temsillerine Bir Bakış*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, **5**, 45-59 (2001).
- [114] NOLAN, P. J., *Fundamentals of College Physics*, Wm C. Publishers, Dubuque, Oxford, England (1993).
- [115] BEISER, A., *Concepts of Modern Physics*, 5<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, New York, USA (1995).
- [116] ÖZEMRE, A. Y., *Çağdaş Fiziğe Giriş*, II. Baskı, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul, Türkiye (1978).
- [117] KYRALA, A., *Theoretical Physics: Applications of Vectors, Matrices, Tensors and Quaternions*, W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, England (1967).
- [118] GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Singapore (1980).
- [119] DEMİR, S. ve ÖZDAŞ, K., *Four Dimensional Vector Analysis via Complex Quaternions and Some Physical Applications*, ICCA 6<sup>th</sup> International Conference on Clifford Algebras and Their Applications (Ed: ABLAMOWICZ, R., RYAN, J.), 16, Cookeville, Tennessee, USA (2002).
- [120] GURLEBECK, K. ve WOLFGANG S., *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. John Willey and Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Tronto, Singapore (1997).
- [121] DEMİR, S. ve ÖZDAŞ, K., *Investigation of Rotational Motion by Means of Complex Quaternions*, 1<sup>st</sup> Hellenic-Turkish International Physics Conference Books of Abstracts (Ed: YALÇINKAYA, M., AKKUŞ, B.), 142, Bodrum-Turkey, Kos-Greece (2001).

- [122] CLIFFORD, W. K., *Preliminary Sketch of Bi-Quaternions*, Proceedings of London Mathematical Society, **4**, 361-395 (1873).
- [123] HACISALİHOĞLU, H., *Hareket Geometrisi ve Kuarternionlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, Türkiye (1983).
- [124] VELDKAMP G. R., *On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics*, Mechanism and Machine Theory, **11**, 141-156 (1976).
- [125] PENNOCK G. R. ve YANG A. T., *Application of Dual-Number Matrices to the Inverse Kinematics Problem of Robot Manipulators*, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, **107**, 201-208 (1985).
- [126] McCARTHY, J. M., *Dual Orthogonal Matrices in Manipulator Kinematics*, The International Journal of Robotics Research, **5**, 2, 45-51 (1986).
- [127] VALASEK M. ve STAJSKAL V., *The Comparison of Matrix and Quaternion Approaches Towards Kinematic*, Acta Technica, Csav, **1**, 118-136 (1988).
- [128] PRADEEP, A. K., et al., *On the Use of Dual-Matrix Exponentials in Robotic Kinematics*, The International Journal of Robotics Research, **8**, 5, 57-66 (1989).
- [129] SAMUEL, A. E., et al., *Unifying Screw Geometry and Matrix Transformations*, The International Journal of Robotics Research, **10**, 5, 454-472 (1991).
- [130] PARKIN, I. A., *Unifying The Geometry of Finite Displacement Screws and Orthogonal Matrix Transformations*, Mech. Mach. Theory, **32**, 8, 975-991 (1997).
- [131] DEMİR, S., ÖZDAŞ, K. ve TANIŞLI, M., *Dönme ve Öteleme Hareketinin Dual Kuarternionlarla Temsili*, Proceedings of The Second International Symposium on Mathematical and Computational Applications, 52-58, Baku-Azerbaijan, (1999)

- [132] DEMİR, S., ÖZDAŞ, K. ve TANIŞLI, M., *Dönme ve Öteleme Hareketinin Dual Kuaternionlarla Temsili*, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, **16**, 55-63 (2000).
- [133] SHEN, L. C. ve KONG, J. A., *Applied Electromagnetism*, PWS Engineering, Boston, Massachusetts, USA (1987).
- [134] GÜRSEY, F. ve CHIA-HSIUNG, T., *On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, SINGAPORE (1996).
- [135] TANIŞLI, M. ve ÖZGÜR, G., *Biquaternionic Representations of Angular Momentum and Dirac Equation*, Acta Physica Slovaca, **53**, 3, 243-252 (2003).
- [136] TANIŞLI, M., *The Quaternionic Representations of Angular Momentum and Dirac Equation*, Acta Physica Slovaca, **53**, 3, 253-258 (2003).