

177888

**OKTONİONİK KUANTUM
MEKANİĞİ**

**Nesrin YAVAŞ
Yüksek Lisans Tezi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Eylül-2003**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nesrin YAVAŞ'ın Oktonionik Kuantum Mekaniği başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 03.10.2003 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
Üye : Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI
Üye : Yard. Doç. Dr. Oğuz ERTUĞRUL

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun
02/10/2003 tarih ve 33/3. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. OSMAN ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
M ü d ü r ü

Anadolu Üniversitesi
Merkez Kütüphane

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OKTONİONİK KUANTUM MEKANIĞI

NESRİN YAVAŞ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2003, 44 sayfa

Bu çalışmada, ilk olarak sayı sistemlerinin sonuncusu olan oktonionların tanımı yapılmış daha sonra; oktonionların skaler birim elemanı, normu, tersi ve eşleniği tanımlanmıştır. Ayrıca oktonionlarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinin nasıl yapılacağı anlatılmış ve reel oktonionların matris temsili verilmiştir. Aynı zamanda oktonionlarda değişme özelliğinin yanı sıra birleşme özelliğinin de bulunmadığı açıklanmıştır.

Oktonionik kuantum mekaniğinde Dirac denklemini türetmek için, sol/sağ sınırlı operatörler ve dönüşüm kuralları açıklanmıştır. Ayrıca dönüşüm fikrini açıklamak için $8 \times 8/4 \times 4$ kompleks matrisler ile sınırlandırılmış operatörler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Eklerde bulunan tablolarda da bu dönüşüm kuralları açıkça görülmektedir. Fizikte Dirac denklemi kısaca anlatılmış ve Dirac denklemi oktonionlarla ifade edilmeye çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sol/sağ sınırlı operatörler, dönüşüm kuralları, $8 \times 8/4 \times 4$ kompleks matrisler, Dirac denklemi

ABSTRACT

OCTONIONIC QUANTUM MECHANICS

NESRİN YAVAŞ

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Physics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ

2003, 44 pages

In this study, firstly the definition of octonions the last number systems, was given, then scalar unit element, norm, opposite and conjugate of octonions were defined. In addition to this, how addition, subtraction and multiplication operations in octonions are made were explained and matrice representation of reel octonions was given. At the same time it was also explained, that there is no commutative as well as no associative property in octonions exist.

The left/right limited operators and transformation rules were explained to derive Dirac equation in octonionic quantum mechanic. Besides, relationships between $8 \times 8 / 4 \times 4$ complex matrices and limited operators were given in order to explain the transformation. Dirac equation in Physics was described shortly and tried to be expressed with octonions.

Keywords : Left/right limited operators, transformation rules, $8 \times 8 / 4 \times 4$ complex matrices, Dirac equation

TEŞEKKÜR

Bu alıőma sırasında beni ynlendiren ve benden desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ' a ve bu çalıőma esnasında bana yardımcı olan herkese teşekkür ederim.

Nesrin YAVAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ:.....	1
2. OKTONİONLAR.....	3
2.1. Oktonionun Tanımı	3
2.2. Oktonion Cebri	4
2.2.1. Skaler Birim Eleman	4
2.2.2. Oktonionlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi	4
2.2.3. Oktonionlarda Çarpma İşlemi	4
2.2.3.1. İki Vektör Oktonionun Skaler Çarpımı.....	6
2.2.3.2. İki Vektör Oktonionun Vektörel Çarpımı.....	7
2.2.4. Bir Oktonionun Eşleniği	7
2.2.5. Oktonionların Normu	7
2.2.6. Bir Oktonionun Tersisi	8
2.2.7. Reel Oktonionların Matris Temsili	8
3. SOL \ SAĞ SINIRLANDIRILMIŞ OPERATÖRLER.....	11
4. DÖNÜŞÜM KURALLARI	13
4.1. 8x8 Kompleks Matrisler ve Sınırlandırılmış Operatörler Arasındaki İlişki	13
4.2. 4x4 Kompleks Matrisler ve Sınırlandırılmış Operatörler Arasındaki İlişki	19
4.3. Gama Matrislerinin Oktonionik Gösterimi	20
5. DİRAC TEORİSİ.....	22
5.1. Dirac Denklemi	22
5.2. Elektromagnetik Alanda Yüklü Parçacık	25
5.3. Delikler Teorisi.....	27
5.4. Dirac Denklemine Başarısı	28

6. OKTONİONİK DİRAC DENKLEMİ	29
6.1. Oktonionik Spinorlar Üzerinde $\gamma^{0,3}$ 'ün Tesiri	31
Ek A1:	33
Ek A2:	34
EK B1:	36
EK B2:	36
7. SONUÇ	42
KAYNAKLAR	43

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Reel sayılar
C	: Kompleks sayılar
H	: Kuaternionlar
O	: Oktonionlar
a, b	: Kuarternionların gösterimi
$x, X, \mathbf{A}, \mathbf{B}$: Oktonionların gösterimi
e_μ	: Oktonionların baz elemanları
$\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$: Oktonionların kompleks eşleniği
$N(\mathbf{A}), N(\mathbf{B})$: Oktonionun normu
\mathbf{A}^{-1}	: Oktonionun tersi
$a) b$: Sol-sınırlandırılmış operatörler
$a (b$: Sağ-sınırlandırılmış operatörler
γ	: Gama matrisleri
E	: Enerji
$\vec{\nabla}$: Üç boyutlu gradyent operatörü
p_x, p_y, p_z	: Momentum bileşenleri
$\Psi_{(\vec{r})}$: Dalga fonksiyonu
\times	: Vektörel çarpım
\cdot	: Skaler çarpım

1. GİRİŞ:

1930'ların başında P. Jordan, β -bozunumu ve kuvvetli etkileşmeler gibi yeni olayları açıklayabilmek için birleşimli olmayan ama değişme özelliğine sahip bir cebir önerdi. Bu cebir yeni kuantum teorisi için temel oluşturdu.

Böylece kuantum mekaniğinde ilk kez oktonionlar gözükmüş oldu. Birleşimli olmayan cebirlerin fiziğe uygulanabileceği umudu β -bozunumunun fermi teorisine ve nükleer kuvvetlerin Yukowa modeline yol açtı.

A.A. Albert'in teoremi gösterir ki birim elemanlı reel bir $N(a)$ modül fonksiyonu içeren ve aşağıdaki özelliklere sahip reel sayılar üzerindeki A cebirini yalnızca R (reel) C (kompleks) H (kuaternionları) ve O (oktonionları) oluşturur:

$$N(0) = 0$$

$$N(a) > 0 \quad \text{eğer } a \neq 0 \in A$$

$$N(ra) = |r|N(a) \quad (r \in R)$$

$$N(a_1 + a_2) \leq N(a_1) + N(a_2)$$

A.A. Albert'in teoremi daha önce aynı sonuçlara ulaşan fakat $N(a)^2$ 'yi bir kuadrik form kabul eden 19.yy'ın ünlü Frobenius ve Hurwitz'in sonuçlarına genelleştirilir.

A.A. Albert'in teoremine ek olarak bir $N(a)$ modül fonksiyonunu içeren cebirler üzerinde bölüm cebri kavramıyla, R , C , H ve O cebirlerini karakterize edebiliriz. Klasik teorem ifade eder ki, reel sayılar zerinde sadece, 1, 2, 4 ve 8 boyutlu cebirler bölüm cebirleridir. Bunlardan R , C ve H birleşimli iken O birleşimli değildir [1].

Türk fizikçilerimizden Prof. Dr. Feza Gürsey de kuaternionik ve oktonionik yapıların önemini 1950'li yıllarda sezip, bu yapıları ve ilgili istisnai grup ve geometri çalışmaları ile fiziğe yerleştirmiştir.

Gürsey, oktonionlar ve onlarla ilgili istisnai gruplarla 1970 yılında ilgilenmeye başladı ve kendi deyimi ile "onlarla eğlenmeye" hayatı boyunca devam etti. Anlaşılması son derece zor matematik yayınlarını tarayarak, oktonion cebirini "fizikçilerin hazmedebileceği şekilde derli toplu" bir matematik girişle fiziğe tanıttı. Gürsey'in, son on yılda süpergravitasyon, süpersicim konularında yaptığı çalışmalar tüm etkileşmeleri

birleştirecek teorilerin temelinde oktonionların yattığını ve bu ilginç cebirlerin doğa kanunlarının dili olduğunu ve doğanın geometrik yapısını anlamamıza yardımcı olduğunu kanıtladı. Oktonionik yapılar ve istisnai grupları kullanmadan doğanın sırlarını çözemeyeceğimiz açıkça belli oldu [2].

Burada, oktonion kavramı ve cebri açıklandıktan sonra kuantum mekaniğindeki uygulaması incelenecektir. Ayrıca Dirac denklemi oktonionik formda yazılacaktır.

2. OKTONİONLAR

2.1. Oktonionun Tanımı

Bölüm cebri oluşturan sayı sistemlerinin sonuncusu oktonionlardır. Bir oktonionu, iki kuaternionun kombinasyonu olarak oluşturmak mümkündür:

$$x = a + \xi b \quad x \in O, \quad a, b \in H \text{ ve } \xi^2 = -1 \quad (2.1)$$

Buradaki ξ imajiner sayısı; her ne kadar kendisiyle çarpımı "-1" ise de, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ imajiner sayıları ile aynı değildir. Öyle ki, ξ ile $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 'lerin çarpımı, $\xi\lambda_0 = \lambda_4, \xi\lambda_1 = \lambda_5, \xi\lambda_2 = \lambda_6, \xi\lambda_3 = \lambda_7$ gibi başka imajiner sayılardır.

$$\begin{aligned} x &= a + \xi b \\ &= a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \xi(b_0\lambda_0 + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3) \\ &= a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \xi\lambda_0b_0 + \xi\lambda_1b_1 + \xi\lambda_2b_2 + \xi\lambda_3b_3 \\ &= x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 + x_4\lambda_4 + x_5\lambda_5 + x_6\lambda_6 + x_7\lambda_7 \\ &= (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Burada; $a_0 = x_0, a_1 = x_1, a_2 = x_2, a_3 = x_3, b_0 = x_4, b_1 = x_5, b_2 = x_6, b_3 = x_7$ notasyonu kullanılmıştır. $\{\lambda_n : n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; oktonion cebrinin tabanını oluşturmaktadır. Taban elemanları arasındaki çarpım bağıntıları:

$$\lambda_n\lambda_0 = \lambda_0\lambda_n = \lambda_n \quad (n=0,1,2,3,4,5,6,7) \quad (2.3)$$

$$\lambda_\mu\lambda_\nu = -\delta_{\mu\nu}\lambda_0 + \psi_{\mu\nu\rho}\lambda_\rho \quad (\mu, \nu, \rho=1,2,3,4,5,6,7) \quad (2.4)$$

şeklinde. Buradaki $\psi_{\mu\nu\rho}$; 1, 0, -1 değerlerini alabilen antisimetrik bir tensördür. Bu tensörün değeri, (123), (245), (435), (651), (572), (714) ve (367) sıralı üçlülere ve bunların çift permütasyonları için +1 ve bunların tek permütasyonları için -1, $\mu\nu\rho$ 'nin diğer tüm sıralamaları için sıfırdır.

Bir x oktonionundaki x_0 ; reel bileşen, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ve x_7 elemanları ise imajiner bileşenler adını alır. İmajiner bileşenleri sıfır olan bir oktonion bir reel sayıdır ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ ise $X = x_0$). O halde reel sayılar oktonionların bir alt kümesidir. Altı imajiner bileşeni sıfır olan bir oktonion bir kompleks sayıdır ($x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ ise $X = x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 = (x_0, x_1)$). Aynı

şekilde dört imajiner bileşeni sıfır olan bir oktonion ise bir kuaterniondur $\{(x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 \text{ ise } X = x_0\lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = (x_0, x_1, x_2, x_3))\}$. O halde tıpkı reel sayılar gibi kompleks sayılar ve kuaternionlar da oktonionların bir alt kümesidir ($R \subset C \subset H \subset O$) [3].

2.2. Oktonion Cebri

2.2.1. Skaler Birim Eleman

Oktonion cebrinin skaler birim elemanı λ_0 'dır. Her $X \in O$ için;

$$\lambda_0 X = X\lambda_0 = X \quad (2.5)$$

2.2.2. Oktonionlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

$A, B \in O$ ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7 \in R$ olmak üzere toplama ve çıkarma işlemi

$$\begin{aligned} A &= (a_0 \mp b_0)e_0 \mp (a_1 \mp b_1)e_1 \mp \dots \mp (a_7 \mp b_7)e_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 (a_\mu \mp b_\mu)e_\mu \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır.

2.2.3. Oktonionlarda Çarpma İşlemi

İki oktonionun çarpımı işlemine geçmeden önce, baz elemanların çarpımını ele almak gerekir. Baz elemanlar için iki şekilde çarpım tanımlanmıştır. e_0 birim elemandır.

a) Cayley-Dickson Yöntemi

$$\hat{e}_i \equiv e_{4+k} \quad k=1,2,3 \text{ olsun.} \quad (2.7)$$

Oktonionların baz elemanı e_μ için çarpım kuralları aşağıdaki formda verilir [7]:

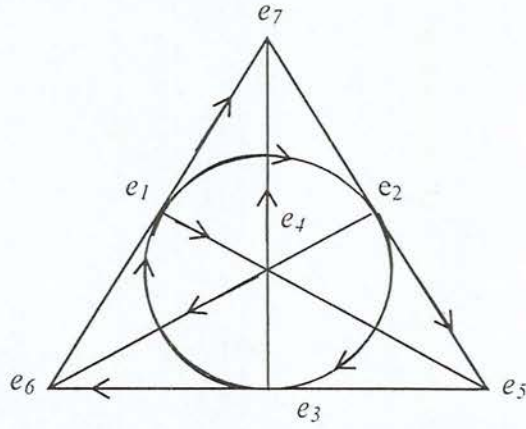
$$-e_4 e_i = e_i e_4 = \hat{e}_i, \quad e_4 \hat{e}_i = -\hat{e}_i e_4 = e_i, \quad e_4 e_4 = -e_0 \quad (2.8)$$

$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k \quad (2.9)$$

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = -\delta_{ij} e_0 - \varepsilon_{ijk} e_k \quad (i,j,k=1,2,3) \quad (2.10)$$

$$-\hat{e}_j e_i = e_i \hat{e}_j = -\delta_{ij} e_4 - \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (2.11)$$

Ayrıca bu çarpımlar Şekil 1'deki diyagramla gösterilebilir [4].



Şekil 1: Oktonionların baz elemanlarının çarpım diyagramı

Baz elemanların çarpımı, kolaylık olması açısından bir tablo ile de verilebilir [4].

Tablo I. Oktonionların baz elemanlarının çarpımı

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

b) Modül 7'ye Uygunluk

Bu yöntemde baz elemanların çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_0^2 = 1, \quad e_\mu^2 = -1, \quad e_\mu e_0 = e_0 e_\mu = e_\mu \quad (e_\mu = 1, 2, \dots, 7) \quad (2.12)$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7; i \neq j) \quad (2.13)$$

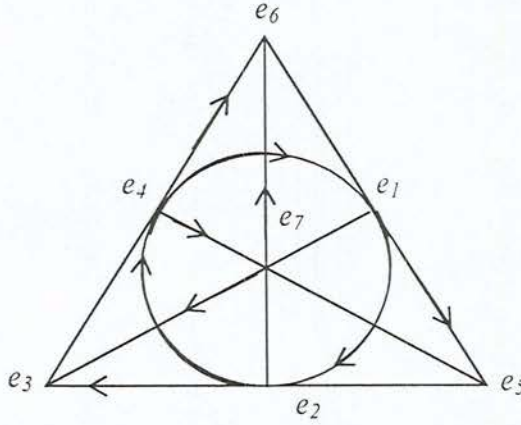
$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1} \quad (2.14)$$

$$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k} \quad (2.15)$$

Tablo II. Oktonionların baz elemanlarının modül 7'ye uygun çarpımları

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	e_6
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Bu çarpımlar Şekil 2'deki diyagramla da gösterilebilir [5].



Şekil 2: Oktonionların baz elemanlarının modül 7'ye uygun çarpım diyagramı

Reel oktonion 1 skaler, 7 imajiner bileşene sahiptir. Skaler kısmı S_A ve imajiner kısmı V_A olmak üzere bir oktonionu $A=S_A+V_A$ olarak yazabiliriz. $A=S_A+V_A$, $B=S_B+V_B$ iki reel oktonion olmak üzere iki oktonionun çarpımı;

$$AB=S_A S_B + S_A V_B + V_A S_B - V_A \cdot V_B + V_A \times V_B \quad (2.16)$$

olarak tanımlanır [6].

2.2.3.1. İki Vektör Oktonionun Skaler Çarpımı

Burada ilk olarak vektör oktonion tanımlanmalıdır. Vektör oktonion, skaler bileşeni olmayan sadece imajiner bileşeni olan oktoniondur.

A ve **B** sadece imajiner bileşene sahip iki oktonion olmak üzere, çarpım;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA}) \quad (2.17)$$

olarak tanımlanır [6].

2.2.3.2. İki Vektör Oktonionun Vektörel Çarpımı

\mathbf{A} ve \mathbf{B} sadece imajiner bileşene sahip iki oktonion olmak üzere, vektörel çarpım;

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) \quad (2.18)$$

olarak tanımlanır [6].

2.2.4. Bir Oktonionun Eşleniği

Bir oktonionun eşleniği;

$$\mathbf{A}^* = a_0 e_0 - \sum_{\mu=1}^7 a_\mu e_\mu = S_A - V_A \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır. Yani, bir oktonionun eşleniği, imajiner kısmının işaret değiştirmesiyle gerçekleşir [7,8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4 - a_5 e_5 - a_6 e_6 - a_7 e_7 \\ &= (a_0, -a_1, -a_2, -a_3, -a_4, -a_5, -a_6, -a_7) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Eşlenik operasyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\bullet (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A} \quad (2.21)$$

$$\bullet (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \quad (2.22)$$

$$\bullet (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^* \quad (2.23)$$

2.2.5. Oktonionların Normu

Bir oktonionun normu, kendisi ile eşleniğinin çarpımı olarak tanımlanır.

$$N(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \sum_{\mu=0}^7 a_\mu^2 \quad (2.24)$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in O$ olmak üzere iki oktonionun çarpımının normu, bu oktonionların ayrı ayrı normlarının çarpımına eşittir [7].

$$N(\mathbf{AB})=N(\mathbf{A}) N(\mathbf{B}) \quad (2.25)$$

2.2.6. Bir Oktonionun Tersı

Normu sıfırdan farklı her \mathbf{A} oktonionu için \mathbf{A}^{-1} ile ifade edilen bir tersi mevcuttur. Ters eleman, bir oktonionun eşleniğinin normuna bölümüne eşittir [5].

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{N(\mathbf{A})} \quad (2.26)$$

Ters elemanın kendisiyle çarpımı;

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = e_0 \quad (2.27)$$

şeklinde birim elemanı verir [10].

Oktonionlarda değişme özelliğinin yanı sıra birleşme özelliği de yitirilmiştir [6]:

$$XY \neq YX \quad (2.28)$$

$$X(YZ) \neq (XY)Z \quad (2.29)$$

2.2.7. Reel Oktonionların Matris Temsili

Oktonion cebri asosyatif olmadığından, reel sayıların cismi üzerinden herhangi bir matris cebri ile izomorf değildir. [Bilindiği gibi kuaternion cebri 4x4 reel matris cebri ile izomorf idi].

Oktonionlar için özel matris temsilleri geliştirilmiştir.

$$\mathbf{A} = a' + a''e_4 \quad \mathbf{A} \in O; \quad a', a'' \in H \quad (2.30)$$

$E_8 = [1, e_1, e_2, \dots, e_7]$ olmak üzere, oktonion cebrinin baz elemanları için çarpım kuralları aşağıdaki gibidir:

$$E_8 E_8^T = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ e_1 & -1 & e_3 & -e_2 & e_5 & -e_4 & e_7 & e_6 \\ e_2 & -e_3 & -1 & e_1 & e_6 & e_7 & -e_4 & -e_5 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -1 & e_7 & -e_6 & e_5 & -e_4 \\ e_4 & -e_5 & -e_6 & -e_7 & -1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_5 & e_4 & -e_7 & -e_6 & -e_1 & -1 & -e_3 & e_2 \\ e_6 & e_7 & e_4 & -e_5 & -e_2 & e_3 & -1 & -e_1 \\ e_7 & -e_6 & e_5 & e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Reel kuaternion için matris temsili:

$$\Phi(a) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

dir. Burada $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$ ' dir. Diğer matris tamsili ise,

$$\Gamma(a) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

olarak verilmektedir.

Oktonionların matris gösterimleri, kuaternionların reel matris gösterimine dayanır. Bir \mathbf{A} oktonionu,

$$\mathbf{A} = a' + a''e_4 \quad \mathbf{A} \in O; \quad a', a'' \in H \quad (2.34)$$

$$a' = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \quad (2.35)$$

$$a'' = a_4 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3 \quad (2.36)$$

$w(a)$, 8×8 matrisi R üzerinden \mathbf{A} oktonionunun sol matris gösterimi olarak adlandırılır,

$$w(a) = \begin{bmatrix} \Phi(a') & -\Gamma(a'')K_4 \\ \Phi(a'')K_4 & \Gamma(a') \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

olarak verilir. Burada $K_4 = [1, -1, -1, -1]$ ' dir. $w(a)$ bileşenler cinsinden açıkça gösterilebilir:

$$w(a) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\Phi(a'')K_4 = \begin{bmatrix} a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\nu(a'')K_4 = - \begin{bmatrix} a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & -a_6 \\ a_6 & a_7 & a_4 & a_5 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ -a_5 & a_4 & -a_7 & -a_6 \\ -a_6 & a_7 & a_4 & a_5 \\ -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Benzer şekilde $\nu(a)$, 8×8 matrisi, R üzerinden \mathbf{A} oktonionunun sol matris gösterimi olarak adlandırılır ve

$$\nu(a) = \begin{bmatrix} \Gamma(a') & -\Phi(a'')^* \\ \Phi(a'') & \Gamma(a')^* \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

olarak ifade edilir ve bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi gösterilir [8]:

$$\nu(a) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

3. SOL \ SAĞ SINIRLANDIRILMIŞ OPERATÖRLER

1989'da bir kuaternionik Dirac denklemi yazıldı. P. Rotelli bir çizgisel momentum operatörü ortaya koydu.

$$-\partial | i \quad [(-\partial | i) \equiv -\partial \psi i] \quad (3.1)$$

Rotelli operatörleri üstüne dayanan kısmen genelleşmiş bir kuaternion;

$$q + p | i \quad [q, p \in H] \quad (3.2)$$

kuaternionik kuantum mekaniğini formüle etmekte kullanılır.

Kuaternionik sayılar için tanımlanmış bir genelleme, takip eden sınırlandırılmış operatörler tarafından ifade edilir.

$$q_1 + q_2 | i + q_3 | j + q_4 | k \quad [q_{1,\dots,4} \in H] \quad (3.3)$$

ifadesine tamamen genelleştirilmiş kuaternionlar veya basit genelleşmiş kuaternionlar deriz. Tamamen genelleştirilmiş kuaternionlar $GL(4, R)$ 'nin bir basit formu ve onun 16 sınırlandırılmış serbest eleman formudur. Onlar Lorentz uzay-zaman dönüşümlerini formüle etmekte başarılıdır ve tek bileşenli Dirac denklemini yazmakta kullanılır [1].

Nitekim

$$o_0 + \sum_{m=1}^7 o_m | e_m \quad (3.4)$$

genelleştirilmiş oktonionların varlığını incelemenin doğasını bize gösterir.

$$[a | b] \psi \equiv a \psi b \quad (3.5)$$

iyi tanımlanmış işlem değildir. $a \neq b$ için üçlü çarpım $a \psi b$, $(a \psi) b$ veya $a(\psi b)$ 'den biri olabilir. Bu yüzden, belirsizlikten kaçınmak için oktonionik sayıların serbest olması gerekir. Sol-sağ sınırlandırılmış operatörleri tanımlamak gereklidir. Biz a ve b ile gösterilen oktonionik sayılarla $a | b$ ile sol-sınırlandırılmış operatörleri gösteririz [1,5].

$$[a] b \psi = (a \psi) b \quad (3.6)$$

Benzer şekilde sağ-sınırlandırılmış operatörleri $a (b$ ile belirtebiliriz.

$$[a(b) \psi = a(\psi b) \quad (3.7)$$

Ayrıca $\{x, y, z\} + \{z, y, x\} = 0$ denkleminde;

$$\{x, y, z\} = 0 \quad (3.8)$$

a sahibiz. Bu nedenle;

$$a) a = a (a \equiv a | a) \quad (3.9)$$

dir. İlk bakışta 106 adet sınırlandırılmış operatörü elde edebildiğimiz görülür.

$$1, e_m, 1 | e_m \quad (15 \text{ element})$$

$$e_m | e_m \quad (7)$$

$$e_m) e_n \quad (m \neq n) \quad (42)$$

$$e_m (e_n \quad (m \neq n) \quad (42) \quad (m, n = 1, \dots, 7)$$

Buna rağmen; her bir sağdan sınırlandırılmış operatörün, soldan sınırlandırılmış operatörlerin uygun bir kombinasyonu tarafından ifade edildiğini ispat etmek olasıdır.

Örneğin; $\{x, y, z\} + \{z, y, x\} = 0$ denkleminde $x = e_m$ ve $z = e_n$ alınmasıyla,

$$e_m (e_n + e_n (e_m \equiv e_m) e_n + e_n) e_m \quad (3.10)$$

elde ederiz. Bu yüzden, önceki 106 elemanı sadece soldan sınırlandırılmış operatörler tarafından 64'e indiririz. Çoğu genel oktonionik operatörleri

$$o_0 + \sum_{m=1}^7 o_m) e_m \quad [o_{0, \dots, 7} \text{ oktonionlar}] \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edebiliriz [1,5].

4. DÖNÜŞÜM KURALLARI

4.1. 8x8 Kompleks Matrisler ve Sınırlandırılmış Operatörler Arasındaki İlişki

Dönüşüm fikrini açıklamak için genel oktonionik φ fonksiyonu üzerinde $1 | e_1$ ve e_2 operatörlerinin etkisine açıkça bakalım [1,5]:

$$\varphi = \varphi_0 + e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 + e_3\varphi_3 + e_4\varphi_4 + e_5\varphi_5 + e_6\varphi_6 + e_7\varphi_7 \quad [\varphi_{0,\dots,7} \in R] \quad (4.1)$$

$$[1 | e_1]\varphi \equiv \varphi e_1 = e_1\varphi_0 - \varphi_1 - e_3\varphi_2 + e_2\varphi_3 - e_5\varphi_4 + e_4\varphi_5 + e_7\varphi_6 - e_6\varphi_7 \quad (4.2)$$

$$e_2\varphi = e_2\varphi_0 - e_3\varphi_1 - \varphi_2 + e_1\varphi_3 + e_6\varphi_4 + e_7\varphi_5 - e_4\varphi_6 - e_5\varphi_7 \quad (4.3)$$

ye sahibiz. Gerçek sütun vektörü tarafından φ oktonionik fonksiyonumuzu ifade edersek;

$$\varphi \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

matris formdaki φe_1 ve $e_2\varphi$ denklemlerini yazabiliriz [1,5].

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_1 \\ \varphi_0 \\ \varphi_3 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_5 \\ -\varphi_4 \\ -\varphi_7 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_0 \\ -\varphi_1 \\ -\varphi_6 \\ -\varphi_7 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Bu şekilde $1 | e_1$ ve e_2 oktonionik sınırlı operatörler için bir gerçek matris ifadesini doğrudan elde edebiliriz.

Bu prosedürün devamında sınırlandırılmış operatörler $1 | e_m$ ve e_m imajiner birimleri için dönüşüm kurallarının tüm seti kurulabilir (Ek A1-TabloV) ve L_m ve R_m oktonionik operatörler e_m ve $1 | e_m$ in matris zit parçalarını ifade ederler [1].

$$L_m \leftrightarrow e_m \quad \text{ve} \quad R_m \leftrightarrow 1 | e_m \quad (4.7)$$

Tablo V'ten özetlersek; e_1, e_2 ve e_3 yerini tutan matrisler L_1, L_2 ve L_3 'tür.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$L_1 L_2 \neq L_3 \quad (4.11)$$

oktonionik bağıntıyla açık zıtlıkta olduğunu buluruz [1].

$$e_1 e_2 = e_3 \quad (4.12)$$

Sonuçta çıkan dönüşüm kurallarıyla operatörler olarak oktonionları anlarız ve onlar belirli oktonionik fonksiyona (φ) uygulanmalıdır.

$$(e_1 e_2) \varphi = e_3 \varphi \quad (4.13)$$

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} e_1 (e_2 \varphi) &\neq e_3 \varphi \\ L_1 L_2 \varphi &\neq L_3 \varphi \end{aligned} \quad (4.14)$$

tarafından dönüştürülür. “ \times ” ve “ \cdot ” çarpımın iki çeşidi arasındaki farka sahibiz. Oktonionların seviyesinde

$$e_1 \cdot e_2 = e_3 \quad (4.15)$$

e sahibiz. Fakat oktonionik operatörlerin seviyesinde;

$$e_1 \times e_2 \neq e_3 \quad (4.16)$$

$$[e_1 \times e_2 \equiv e_3 + e_1] e_2 - e_1 (e_2 \rightarrow \dots\dots\dots)]$$

dir. Böyle operatörler; matris cebri tarafından asosyatif olmayan oktonionu ortaya çıkarmakta bize yardımcı olur. Düşünelim, örneğin;

$$[e_3 e_1] \varphi \equiv (e_3 \varphi) e_1 = e_2 \varphi_0 - e_3 \varphi_1 + \varphi_2 - e_1 \varphi_3 - e_6 \varphi_4 - e_7 \varphi_5 + e_4 \varphi_6 + e_5 \varphi_7 \quad (4.17)$$

bu denklem,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_3 \\ \varphi_0 \\ -\varphi_1 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ -\varphi_4 \\ -\varphi_5 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

içinde dönüştürülecektir. Oysa ki;

$$[e_3(e_1)]\varphi \equiv e_3(\varphi e_1) = e_2\varphi_0 - e_3\varphi_1 + \varphi_2 - e_1\varphi_3 + e_5\varphi_4 + e_7\varphi_5 - e_4\varphi_6 - e_5\varphi_7 \quad (4.19)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_3 \\ \varphi_0 \\ -\varphi_1 \\ -\varphi_6 \\ -\varphi_7 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

olacaktır. Sağ/sol sınırlandırılmış operatörler için dönüşüm kurallarının tüm seti Ek A1'in içinde Tablo VII ve VIII' da verilir. Sağdan ve soldan sınırlandırılmış operatörler için matris ifadesi L_m ve R_m matrislerinin uygun çarpımlarıyla elde edilebilir. Tablo VII ve VIII' dan $e_m e_n$ ve $e_m(e_n$ operatörlerine benzeyen matrisleri M_{mn}^L ve M_{mn}^R diye özetleyebiliriz. Açıkça;

$$\begin{aligned} M_{mn}^L &\equiv R_n L_m \\ M_{mn}^R &\equiv L_m R_n \end{aligned} \quad (4.21)$$

dir.

1. Asosyatif olmayan oktonion için matris ifadesi:

$$M_{mn}^L \neq M_{mn}^R \quad [R_n L_m \neq L_m R_n, m \neq n \text{ için}] \quad (4.22)$$

2. Genelleştirilmiş oktonionlar ve $GL(8, R)$ arasındaki isomorphism:

Gerçek matrisler tarafından 106 adet sınırlandırılmış operatörlerimizi tekrar yazarsak;

$$1, \quad L_m, \quad R_m \quad (15 \text{ matris})$$

$$M = L_m R_m = R_m L_m \quad (7)$$

$$M_{mn}^L \equiv R_n L_m \quad (42)$$

$$M_{mn}^R \equiv L_m R_n \quad (42)$$

$$(m, n = 1, \dots, 7)$$

olur. $GL(8, R)$ için iki farklı temele sahibiz.

$$(1) 1, L_m, R_m, R_n L_m$$

$$(2) 1, L_m, R_m, L_m R_n$$

Şimdi asosyatif olmayan oktoniondan çıkan bazı zorlukları görürüz. Genelleştirilmiş 8×8 gerçek matrislere oktonionlardan dönüştürdüğümüzde problem yoktur. Örneğin; oktonionik denklemde

$$e_4 \{[(e_6 \phi) e_1] e_5\} \quad (4.23)$$

izleyen soldan sınırlandırılmış operatörleri tanıtabiliriz. $e_4(e_5$ ve $e_6)e_1$ tablomuzu kullanırsak;

$$M_{45}^L M_{61}^L \phi \quad (4.24)$$

içinde (2.76) denklemini dönüştürebiliriz.

Buna rağmen; 8×8 gerçek matrislerden oktonionlara geçtiğinde, düzenlemede dikkat etmeliyiz. Örneğin; $AB\phi$; $(AB)\phi$ veya $A(B\phi)$ olarak anlaşılabilir. Doğru denklem hangisidir? Çözümü bulmak için açıkça belli matrisleri kullanalım.

Tanımlama;

$$A \rightarrow L_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_6 \quad (4.25)$$

$$B \rightarrow M_{31}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_3)e_1 \quad (4.26)$$

önceki matris denklemleri olduğunu buluruz.

$$e_6 \times [e_3)e_1] \varphi \quad (4.27)$$

ve

$$e_6 [(e_3)\varphi)e_1] \quad (4.28)$$

olur. “×” çarpımının standart oktonionik çarpımdan farklı olduğunu biliyoruz, bu yüzden;

$$e_6 \times [e_3)e_1] \neq -e_3)e_1 \quad (4.29)$$

kullanılan A2 eki ve AB matrisi, $e_6 \times [e_3)e_1]$ 'e uygun oktonionik operatörü elde edebiliriz. Açık olarak,

$$\{ e_4 - 1 | e_4 - 2e_1)e_5 - e_5)e_1 - e_6)e_2 + e_2)e_6 + 2e_7)e_3 - e_3)e_7 \} / 3 \quad (4.30)$$

e sahibiz. Karışıklığı düşünülen $AB\varphi$ için $A(B\varphi)$ 'yi seçtiğimizi ileri sürüp biçimlendirdik. Genelde;

$$ABC...Z\varphi \equiv A(B(C...(Z\varphi)...)) \quad (4.31)$$

dir. Sadece e_m ve $1 | e_m$ için yaparsak, “ \times ” çarpım kurallarına sahibiz. Gerçekte, yararlanılan birleştirici özelliklerle

$$\begin{aligned} e_m(e_n\varphi) &= (e_m e_n)\varphi + (e_m\varphi)e_n - e_m(\varphi e_n) \\ (\varphi e_m)e_n &= \varphi(e_m e_n) - (e_m\varphi)e_n + e_m(\varphi e_n) \end{aligned} \quad (4.32)$$

ifadelerini bulabiliriz. Nitekim,

$$e_m \times e_n \equiv -\delta_{mn} + \varepsilon_{mnp} e_p + e_m e_n - e_m(e_n) \quad (4.33a)$$

$$[1 | e_n] \times [1 | e_m] \equiv -\delta_{mn} + \varepsilon_{mnp} e_p - e_m e_n + e_m(e_n) \quad (4.33b)$$

dir.

4.2. 4x4 Kompleks Matrisler ve Sınırlandırılmış Operatörler Arasındaki İlişki

Rölativistik kuantum mekaniğinde $GL(4, C)$, Dirac denkleminin yazımında temeldir. Oktonionik dalga fonksiyonu üzerindeki soldan sınırlandırılmış operatörlerin tesirini analiz edersek;

$$\psi = \psi_1 + e_2\psi_2 + e_3\psi_3 + e_4\psi_4 \quad [\psi_{1,\dots,4} \in C(1, e_1)] \quad (4.34)$$

buluruz. Örneğin;

$$[1 | e_1]\psi \equiv \psi e_1 = \psi_1 + e_2(e_1\psi_2) + e_4(e_1\psi_3) + e_6(e_1\psi_4)$$

$$e_2\varphi = -\psi_2 + e_2\psi_1 - e_4\psi_4^* + e_6\psi_3^*$$

$$[e_3)e_1]\psi \equiv (e_3\psi)e_1 = \psi_2 + e_2\psi_1 + e_4\psi_4^* - e_6\psi_3^*$$

dir. Dönüşüm sınırlandırılmış operatörler için işlemez. Bu açığı gösterelim. Örneğin;

$$\begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \\ -\psi_4^* \\ \psi_3^* \end{pmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_4^* \\ -\psi_3^* \end{pmatrix}$$

sütun vektörleriyle verilen

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

daimi tesir eden bir 4×4 kompleks matris bulamayız. Ve bu yüzden bir kompleks matrisle e_2 veya e_3) e_1 ilişkisine olasılık vermeyiz. Buna rağmen böyle operatörlerin toplam tesirlerini,

$$e_2\psi + (e_3\psi)e_1 = 2e_2\psi_1$$

verir ki, bu;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4×4 kompleks matrisi tarafından $e_2 + e_3$) e_1 oktonionik sınırlandırılmış operatörü ifade etmeyi bize kabul ettirir. Bu işlemler ilerlediğinde, oktonionik sınırlandırılmış operatörler tarafından genel bir 4×4 kompleks matrisi ifade edebiliriz. Açık ilişki tabloları Ek B2’de verilir.

Operatör $1|e_1$, 4×4 kompleks matrisler tarafından dönüştürülebilen tüm operatörlerle değiş tokuş edilir. Bu genelde bir genel oktonionik operatör için doğru değildir. Örneğin; $1|e_1$ operatörü ile e_2 ’nin ilişkili olmadığını gösterebiliriz. Açıkça,

$$e_2 \{ [1|e_1] \psi \} \equiv e_2 (\psi e_1) = -e_1\psi_2 - e_3\psi_1 - e_5\psi_4^* - e_7\psi_3^* \quad (4.35)$$

$$[1|e_1] \{ e_2\psi \} \equiv (e_2\psi)e_1 = -e_1\psi_2 - e_3\psi_1 + e_5\psi_4^* + e_7\psi_3^* \quad (4.36)$$

olur. Açıklama basittir: e_2 bir 4×4 kompleks matris tarafından ifade edilemez.

4.3. Gama Matrislerinin Oktonionik Gösterimi

1. Dirac İfadesi:

$$\gamma^0 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sum_{m=1}^3 e_m |e_m + \frac{1}{3} \sum_{n=4}^7 e_n |e_n \quad (4.37a)$$

$$\gamma^1 = -\frac{2}{3}e_6 - \frac{1}{3}(e_6 + e_5)e_3 - e_3)e_5 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps6} e_p e_s \quad (4.37b)$$

$$\gamma^2 = -\frac{2}{3}e_7 - \frac{1}{3}(e_7 + e_3)e_4 - e_4)e_3 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps7} e_p e_s \quad (4.37c)$$

$$\gamma^3 = -\frac{2}{3}e_4 - \frac{1}{3}(e_4 + e_7)e_3 - e_3)e_7 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps4} e_p e_s \quad (4.37d)$$

2. Majorana İfadesi:

$$\gamma^0 = \frac{1}{3}e_7 - \frac{1}{3}(e_7 + e_3)e_4 - e_5)e_2 + e_6)e_1 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps7} e_p e_s \quad (4.38a)$$

$$\gamma^1 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}(e_1 + e_5)e_4 - e_4)e_5 + \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps1} e_p e_s \quad (4.38b)$$

$$\gamma^2 = \frac{2}{3}e_7 + \frac{1}{3}(e_7 + e_4)e_3 - e_3)e_4 + \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps7} e_p e_s \quad (4.38c)$$

$$\gamma^3 = \frac{2}{3}e_3 + \frac{1}{3}(e_3 + e_7)e_4 - e_4)e_7 + \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps3} e_p e_s \quad (4.38d)$$

3. Chiral İfadesi:

$$\gamma^0 = \frac{1}{3}e_4 - \frac{1}{3}(e_4 + e_7)e_3 - e_2)e_6 + e_5)e_1 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps4} e_p e_s \quad (4.39a)$$

$$\gamma^1 = -\frac{2}{3}e_6 - \frac{1}{3}(e_6 + e_5)e_3 - e_3)e_5 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps6} e_p e_s \quad (4.39b)$$

$$\gamma^2 = -\frac{2}{3}e_7 - \frac{1}{3}(e_7 + e_3)e_4 - e_4)e_3 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps7} e_p e_s \quad (4.39c)$$

$$\gamma^3 = -\frac{2}{3}e_4 - \frac{1}{3}(e_4 + e_7)e_3 - e_3)e_7 - \frac{1}{3} \sum_{p,s=1}^7 \varepsilon_{ps4} e_p e_s \quad (4.39d)$$

5. DİRAC TEORİSİ

Dalga mekaniği, klasik mekaniğe oranla çok daha fazla olayı açıklayabilen ve öngörebilen evrimleşmiş bir teori manzarası göstermekteyse de prensip bakımından bazı kusurları vardır. Bu kusurlardan ilki; dalga denkleminin, Schrödinger'in vermiş olduğu şekil bakımından elektronun spinini kapsamadığı ve ikincisi de dalga denkleminin Lorentz dönüşümlerine göre invariant olmadığı keyfiyetidir. Bu sonuncu duruma bağlı olarak Schrödinger denklemi, ancak hızları ışık hızına göre çok küçük olan yani düşük enerjili tanecikler veya sistemler için geçerli olabilmektedir.

Spini, dalga mekaniği çerçevesi içine sokmak ve Schrödinger denkleminin hareketle taneciklere spin atfedilmek amacıyla ilk defa Wolfgang Pauli $\Psi_{(F)}$ dalga fonksiyonunun, skaler bir fonksiyon değil de, her bir bileşeni spinin mümkün yönelmelerinden birine tekabül eden, iki bileşenli bir vektör olarak tasarlamıştır. Bu yeni dalga fonksiyonu kavramı Schrödinger denkleminin ortaya koyduğu modele nazaran her ne kadar bir ilerleme teşkil ediyorsa da yeni dalga denklemi için gene relativist olmama, yani bir Lorentz dönüşümüne göre invariant kalmama durumu söz konusu olmuştur.

Schrödinger dalga denklemini, hem spini kapsayacak ve hem de Lorentz dönüşümlerine göre invariantlığını sağlayacak şekilde genelleştirmek 1928 yılında P. M. A. Dirac tarafından yapılmıştır [15].

5.1. Dirac Denklemi

Spini $1/2$ olan parçacığı tanımlamak, $m_s = \pm 1/2$ olmak üzere $m_s \hbar$ değerini alan spin açısız momentumun z bileşeni S_z nin iki spin durumuna izin veren iki bileşene sahip bir dalga fonksiyonunu gerektirir. Bununla birlikte, tüm $1/2$ spinli parçacıklar için aynı kütle ve aynı spine sahip fakat antiparçacık olarak bilinen bir parçacığın eşlik etmesi nedeniyle, dört bileşenli dalga fonksiyonuna gereksinim olmasını bekleriz. Dirac, denklemini ileri sürdüğünde bu durum bilinmemekteydi ve Dirac'ın kuramından elektronun antiparçacığı pozitronun varlığını ortaya koyabilmesi kuramsal fiziğin en büyük başarılarından biri olmuştur.

Dirac'ın gerek spin ve gerekse Lorentz dönüşümlerine göre invariantlığı olan bir dalga denklemi kurarken hareket noktası enerjinin relativiteki ifadesi olan;

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (5.1)$$

ifadesi olmuştur. Buradan hareketle serbest bir parçacık için Dirac denklemini yazmak mümkündür. Bu durumda Hamiltonyen'in \vec{r} ve t den bağımsız olması gerekir ve en basit biçimde, momentum ve kütle terimlerine göre doğrusal olarak;

$$H = c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m\beta c^2 \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada karşılığı bulunma ilkesine göre $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ dir. β büyüklüğü gibi $\vec{\alpha}$ nın üç bileşeni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \vec{r}, t, \vec{p}$ ve E den bağımsızdır fakat birbiriyle komüte etmeleri gerekmez.

Denklem (5.2)'yi $E = H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ olduğundan Dirac denklemini,

$$(E - c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} - m\beta c^2)\Psi = 0 \quad (5.3)$$

ya da

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i\hbar c \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} \Psi + m\beta c^2 \Psi \quad (5.4)$$

biçiminde elde ederiz. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β , $N \times N$ matris biçimindedir. Ψ ise N bileşenli bir dalga fonksiyonudur.

Hamiltonyen H 'nin hermitik ($H = H^+$) olması gerektiğinden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β matrislerinin de hermitik yani,

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^+, \beta = \beta^+ \quad (5.5)$$

olması gerekir.

$\vec{\alpha}$ ve β nın sağlayacağı ek koşullar Ψ nin her bir bileşenin ayrı ayrı,

$$\left[E^2 - p^2 c^2 - m_0^2 c^4 \right] \Psi = 0 \quad (5.6)$$

olarak yazılabilen Klein-Gordon denklemini sağlamaları gereğinden çıkarılabilir. Denklem (5.3)'ü $\left[E + c\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m_0 \beta c^2 \right]$ işlemcisi ile soldan çarparak ikinci mertebe,

$$\begin{aligned}
& \{E^2 + c^2 [p_1^2 \alpha_1^2 + p_2^2 \alpha_2^2 + p_3^2 \alpha_3^2 + p_1 p_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) \\
& + p_2 p_3 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) + p_3 p_1 (\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3)] - m_0^2 c^4 \beta^2 \\
& - m_0 c^3 [p_1 (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) + p_2 (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) + p_3 (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3)]\} \Psi_{(\vec{r},t)} = 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

denklemini elde ederiz. Burada p_1, p_2 ve p_3 ; \vec{p} nin kartezyen bileşenlerini göstermektedir. Denklem (5.7)'yi (5.6) ile karşılaştırarak,

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \\
[\alpha_1, \alpha_2]_+ &= [\alpha_2, \alpha_3]_+ = [\alpha_3, \alpha_1]_+ = 0 \\
[\alpha_1, \beta]_+ &= [\alpha_2, \beta]_+ = [\alpha_3, \beta]_+ = 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

olması koşuluyla dalga fonksiyonu Ψ nin her bir bileşeninin Klein –Gordon denklemini sağladığını görürüz. Burada $[A, B]_+$,

$$[A, B]_+ = AB + BA \tag{5.9}$$

dir ve ters komütasyonu gösterir.

Ayrıca α_1, α_2 ve α_3 'ün komütasyon bağıntıları da,

$$[\alpha_1, \alpha_2] = 2i\alpha_3, [\alpha_2, \alpha_3] = 2i\alpha_1, [\alpha_3, \alpha_1] = 2i\alpha_2 \tag{5.10}$$

ve

$$[\alpha_2, \alpha_1] = -2i\alpha_3, [\alpha_3, \alpha_2] = -2i\alpha_1, [\alpha_1, \alpha_3] = -2i\alpha_2 \tag{5.11}$$

şeklindedir. Burada $[A, B]$,

$$[A, B] = AB - BA \tag{5.12}$$

dir ve komütasyonu gösterir [16].

Denklem (5.5) ve (5.8) ile verilen koşulları sağlaması gereken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β matrislerinin minimum boyutlarının 4×4 olması gerektiği gösterilebilir. Buna uygun olarak dalga fonksiyonu Ψ nin en az dört bileşene sahip olması gerekir. Bu dört bileşenin her birinin spinini $1/2$ olan parçacık ve anti-parçacığı tasvir için gerekli olduğu düşüncesiyle $N = 4$ olduğunu varsayacağız. Denklem (5.5) ve $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi$

denklemlerinin çözümlerinin tek değil fakat bu koşulları sağlayan matrisler takımının aynı fiziksel sonuçları oluşturduğu gösterilebilir. Dirac denkleminin görelî olmayan limitini incelemek için özellikle yararlı olan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β matrislerinin bir temsili,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{bmatrix} \bar{I} & 0 \\ 0 & -\bar{I} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

ile verilir. Burada \bar{I} ; 2×2 'lik bir matristir, α_1, α_2 ve α_3 ise 2×2 'lik Pauli spin matrisler yani,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde dirler. σ 'nın özellikleri kullanılarak (5.5) ve (5.8) ifadelerinin sağlanacağı kolayca gösterilebilir.

5.2. Elektromagnetik Alanda Yüklü Parçacık

q yüklü bir parçacık için ve bu parçacığın bir ϕ skaler potansiyeli ve $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ vektör potansiyelinden türemiş bir elektromagnetik alanda bulunması şartı altında (5.3) yerine,

$$\left[(E - q\phi) - c(\vec{p} - q\vec{A}) \cdot \vec{\alpha} - m_0 \beta c^2 \right] \Psi = 0 \quad (5.15)$$

veya

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[-i\hbar c \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} - cq\vec{A} \cdot \vec{\alpha} + q\phi + m_0 \beta c^2 \right] \Psi \quad (5.16)$$

ifadesini yazabiliriz.

Burada dikkati çekecek bir husus (5.15) denkleminin kompleks eşleniğini alıp da denklemi -1 ile çarptığımızda ortaya çıkar ve,

$$\left[(E + q\phi) - c(\vec{p} + q\vec{A}) \cdot \vec{\alpha} - m_0 \beta c^2 \right] \Psi^* = 0 \quad (5.17)$$

olur. (5.17) denklemini, (5.15) denkleminin birincisindeki q 'nin burada $-q$ olması hariç formel olarak tamamen aynısıdır. (5.15) denklemini $-q$ yüklü ve m_0 kütle sine sahip bir parçacığa tekabül eden dalga fonksiyonunu veren bir denklemdir. (5.17) ise karşımıza,

dir, yani relativite teorisi negatif enerjileri de kapsamaktadır. E 'nin bu ifadesinde m_0c^2 taneciğin (örneğin elektronun) sükunet enerjisini göstermekte olup $-m_0c^2$ ile $+m_0c^2$ arasında elektron için mümkün hiçbir enerji seviyesi bulunmaz. E enerjisi $+m_0c^2$ nin ötesinde pozitif ve $-m_0c^2$ nin berisinde de negatiftir. Enerji, kuantum mekaniğinde sürekli olarak değişmediğine göre bir tanecik $2m_0c^2$ 'lik bir enerji kuantumu olarak enerjisi $E<0$ iken $E>0$ olabilir.

5.3. Delikler Teorisi

Dirac 1928 yılında evrende normal halde $-\infty$ 'dan $-m_0c^2$ 'ye kadar olan negatif enerjili bütün hallerin her birini, Pauli'nin dışarlama ilkesi uyarınca serbest elektron tarafından işgal edilmiş olarak tasarlamış ve bir miktar elektronun da pozitif enerjili hallerde bulduklarını varsaymıştır. Ayrıca bu şemaya göre pozitif enerjili bağlı hallerle pozitif enerjili serbest haller arasında geçişlerin daima mümkün olmasına karşılık, yeteri kadar güçlü bir etkileşme mevcut olmadığı takdirde negatif enerjili haller arasında ya da pozitif enerjili bir halden negatif enerjili bir hale doğrudan doğruya bir geçiş de olmayacaktır.

Negatif enerjili hallerinde bulunan bütün elektronlar bir çeşit süreklilik teşkil ederler; öyle ki eğer elektromagnetik bir alanın etkisi altında negatif bir $E<0$ enerji seviyesini işgal eden bir elektron işgal edilmemiş bir pozitif enerji seviyesine sıçrayacak olursa terk etmiş olduğu yer negatif enerji seviyelerinde bir delik ya da bir boşluk gibi gözükcektir. Bu deliğin civarı tamamen negatif enerjili elektronlar tarafından işgal edilmiş olduğundan ve bu delik de negatif enerjili bir taneciğin yokluğunu aksettirdiğinden bu delik tıpkı pozitif enerjili bir tanecikmiş gibi davranacak ve negatif bir yükün yokluğuna tekabül ettiği için de pozitif yüklü bir tanecikmiş gibi görünecektir. İşte bu tür özelliklere sahip olan bu deliğe, bir elektronun karşıt-taneciği ya da kısa adıyla pozitron adı verilir.

Bir tanesi hariç olmak üzere bütün negatif enerji seviyelerini işgal eden elektronların sonsuz dağılımında ortaya çıkan bu delik, dengesiz bir tanecik görünüşünü arz eder; çünkü, pozitif enerji seviyelerinden bu deliğe doğru bir geçiş mümkün olur. Bu

takdirde bir elektron-pozitron çifti yok olması olayı olur ve elektromagnetik enerji şeklinde $2m_0c^2$ 'den büyük bir enerji açığa çıkar.

Teori, bir elektronla bir pozitronun olağanüstü kısa bir zaman zarfında hidrojen atomunun yapısına benzer bir sistem teşkil edebileceklerini de öngörmektedir. 1951 yılında varlığı deneysel olarak Deutsch tarafından ortaya konmuş olan bu atomsal yapıya pozitronyum adı verilir.

Pozitron ise deneysel olarak 1932-1933 yıllarında C. D. Anderson ile P. M. S. Blackett, J. Chadwick ve G. P. S. Occhialini ekibi tarafından gözlenmiştir.

5.4. Dirac Denkleminin Başarısı

Dirac denklemi aracılığıyla, spinleri $1/2$ olan bütün taneciklerin doyurucu bir teorisi de gerçekleşmiştir. Ayrıca bu denklemin hidrojen atomu için çözümleri o zamana kadar varlığından şüphe dahi edilmeyen iki yeni spektroskopik olayı öngörmüş ve böylece hidrojenin ince yapısını mükemmel bir şekilde izah edebilmiştir.

Dirac denklemi, daha sonraları, herhangi bir spin değerine sahip olan taneciklere de genelleştirilmiştir. Ve ayrıca "Kuantum Alanlar Teorisi" diye bilinen teorinin hareket noktasını teşkil etmiştir. 1927 yılından beri gelişmiş olan kuantum alanlar teorisi tabiatın dalgasal ve tanecikli görünüşünün en iyi sentezi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu teoride; uzayın her noktasında, bu noktadaki alanın şiddetini temsil eden bir sayı tanımlanır. Bunu tanımlamak üzere **i)** bir taneciğin yaratılmasını temsil eden bir operatörle, **ii)** bir taneciğin yok olmasını temsil eden bir operatör gereklidir. Yaratılma ve yok olma operatörleri süreksizliği ve alanın şiddeti de sürekliliği dile getirirler.

Çok gelişmiş matematiksel bilgi ve tekniklerin gerekli olduğu bu teoride elektromagnetik kuantum alanı uzaydaki her noktada belirtilmiş olan "foton yaratılması" ve "foton yok olması" operatörleriyle tanımlanır. Bu itibarla fotonlar elektromagnetik alanın kuantumları rolünü oynarlar. Kuantum alanları çerçevesi içinde her cins taneciğe kendisinin kuantumu mertebesinde olan ayrı bir kuantum alanı tekabül ettirmek mümkün olmuştur. Mesela atom çekirdeklerinde temel tanecikleri birbirine yapışık olarak tutan ve ancak 10^{-13} cm'lik uzaklıklar için geçerli olan çekirdek kuvvetlerinin meydana getirdiği alanın kuantumu mezonlardır [15].

6. OKTONİONİK DİRAC DENKLEMİ

Standart Dirac denklemi,

$$\gamma^{\nu} p_{\nu} \psi = m \psi \quad (6.1)$$

dir. Burada p_{ν} “gerçek” özdeğer değerini (momentum operatörünün) gösterir. Ve denklemimize $\gamma^{\mu} p_{\mu}$ ’yu uygularsak,

$$\gamma^{\mu} p_{\mu} (\gamma^{\nu} p_{\nu} \psi) = m \gamma^{\mu} p_{\mu} \psi \quad (6.2)$$

önceki denklem kısaca;

$$p^{\mu} p_{\nu} \gamma^{\mu} (\gamma^{\nu} \psi) = m^2 \psi \quad (6.3)$$

gibi tekrar yazılabilir. ψ ’nin her bir bileşeninin standart Klein-Gordon denklemini sağlaması istendiğinde oktonionik dünyada olan Dirac şartını buluruz;

$$\gamma^{\mu} (\gamma^{\nu} \psi) + \gamma^{\nu} (\gamma^{\mu} \psi) = 2 g^{\mu\nu} \psi \quad (6.4)$$

Burada parantezler oktonionların asosyatif olmayan doğasından dolayı uygundur. Oktonionik sayılar kullanıldığında ve sınırlı operatörler yokken (6.4) denklemden Dirac şartını elde edebiliriz;

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2 g^{\mu\nu} \quad (6.5)$$

Gerçekte işlemci özelliği anımsandığında,

$$\{a, b, \psi\} = -\{b, a, \psi\} \quad [a, b \text{ oktonionik sayılar}]$$

denklemini izleyen uygun ilişki çabucak bulunur.

$$(ab + ba)\psi = a(b\psi) + b(a\psi)$$

Dirac denklemini (6.5) sağlayan aşağıdaki uygun üç gamma matrisini yazmak sorun değildir.

$$(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (e_1, e_2, e_3) \quad (6.6)$$

Fakat, $e_4|e_4$ veya $e_4)e_1$ gibi sınırlandırılmış operatörler γ^0 matrisini ifade edemez. Tablo XII-XV’ den e_1 ile yer değiştirmeyen $e_4|e_4$ sınırlandırılmış operatörü yazabilir.

$$e_1(e_4\psi e_4) + e_4(e_1\psi)e_4 = -2(e_3\psi_2 + e_7\psi_4) \neq 0 \quad (6.7)$$

$$[\psi = \psi_1 + e_2\psi_2 + e_4\psi_3 + e_6\psi_4]$$

Burada $e_4)e_1, e_1$ ile değişmez.

$$e_1[(e_4\psi)e_1] + [e_4(e_1\psi)]e_1 = 0 \quad (6.8a)$$

dır. Fakat $\gamma_0^2 = 1$ olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\{e_4[(e_4\psi)e_1]\}e_1 = \psi_1 - e_2\psi_2 + e_4\psi_3 - e_6\psi_4 \neq \psi \quad (6.8b)$$

dir.

Kompleks geometriyle oktonionik kuantum mekaniğinde uygun momentum operatörü

$$\mathbf{p} \equiv -\partial | e_1$$

dir. Nitekim, kovaryant formdaki oktonionik Dirac denklemi ;

$$\gamma^\mu (\partial_\mu \psi e_1) = m \psi \quad (6.9)$$

ile verilir. Burada γ^μ (4.37a)-(4.37d)'de verilen oktonionik sınırlı operatörler tarafından gösterilir. Düzlem dalga çözümleri vardır ve çözümler (6.10) şeklindedir.

$$\psi(\vec{x}, t) = [u_1(\vec{p}) + e_2u_2(\vec{p}) + e_4u_3(\vec{p}) + e_6u_4(\vec{p})]e^{-pxe_1} \quad [u_{1,\dots,4} \in C(1, e_1)] \quad (6.10)$$

$$\mathbf{p} \equiv (0, 0, p_z)$$

ile başlayalım. (6.9)'dan

$$E(\gamma^0\psi) - p_z(\gamma^3\psi) = m\psi \quad (6.11)$$

eşitliğine sahibiz. $\gamma^{0,3}$ oktonionik operatörlerin açık şeklini kullanmakla ve EkB1'deki tablolardan hareketlerini özetlemekle,

$$E(u_1 + e_2u_2 - e_4u_3 - e_6u_4) - p_z(u_3 - e_2u_4 - e_4u_1 + e_6u_2) = m(u_1 + e_2u_2 + e_4u_3 + e_6u_4) \quad (6.12)$$

Bu denklemden 4 kompleks denklem çıkarırız;

$$\begin{aligned}
(E - m)u_1 &= +p_z u_3 \\
(E - m)u_2 &= -p_z u_4 \\
(E + m)u_3 &= +p_z u_1 \\
(E - m)u_4 &= -p_z u_2
\end{aligned}$$

Basit cebirsel işlemlerden sonra aşağıdaki oktonionik Dirac çözümlerini buluruz;

$$\begin{aligned}
E = +|E|, \quad u^{(1)} &= N \left(1 + e_4 \frac{p_z}{|E| + m} \right), \quad u^{(2)} = N \left(e_2 - e_6 \frac{p_z}{|E| + m} \right) = u^{(1)} e_2, \\
E = -|E|, \quad u^{(3)} &= N \left(\frac{p_z}{|E| + m} - e_4 \right), \quad u^{(4)} = N \left(e_2 \frac{p_z}{|E| + m} + e_6 \right) = u^{(3)} e_2
\end{aligned}$$

N gerçekte bir normalizasyon sabitidir. $2|E|$ 'ye norm ayarlandığında.

$$N = (|E| + m)^{1/2}$$

buluruz.

6.1. Oktonionik Spinörler Üzerinde $\gamma^{0,3}$ 'ün Tesiri

Tablo III ve IV' de; γ^0 ve γ^3 'deki görülen sınırlandırılmış operatörlerin oktonionik spinör üzerindeki tesirini açıkça görürüz.

$$u = u_1 + e_2 u_2 + e_4 u_3 + e_6 u_4 \quad [u_{1,\dots,4} \in C(1, e_1)]$$

Tablo III. Oktonionik Spinörler Üzerinde γ^0 'ın Tesiri

$\gamma^0 - tesiri$	u_1	$e_2 u_2$	$e_4 u_3$	$e_6 u_4$
$e_1 e_1$	$-u_1$	$e_2 u_2$	$e_4 u_3$	$e_6 u_4$
$e_2 e_2$	$-u_1^*$	$-e_2 u_2^*$	$e_4 u_3$	$e_6 u_4$
$e_3 e_3$	$-u_1^*$	$e_2 u_2^*$	$e_4 u_3$	$e_6 u_4$
$e_4 e_4$	$-u_1^*$	$e_2 u_2^*$	$-e_4 u_3^*$	$e_6 u_4$
$e_5 e_5$	$-u_1^*$	$e_2 u_2$	$e_4 u_3^*$	$e_6 u_4$
$e_6 e_6$	$-u_1^*$	$e_2 u_2$	$e_4 u_3$	$-e_6 u_4^*$
$e_7 e_7$	$-u_1^*$	$e_2 u_2$	$e_4 u_3$	$e_6 u_4^*$

Tablo IV. Oktonionik Spinörler Üzerinde γ^3 'ün Tesiri

$\gamma^3 - tesiri$	u_1	$e_2 u_2$	$e_4 u_3$	$e_6 u_4$
e_4	$e_4 u_1$	$-e_6 u_2^*$	$-u_3$	$e_2 u_4$
$1 e_4$	$e_4 u_1^*$	$-e_6 u_2^*$	$-u_3^*$	$-e_2 u_4^*$
$e_7 e_3$	$e_4 u_1^*$	$e_6 u_2$	u_3	$-e_2 u_4^*$
$e_3 e_7$	$-e_4 u_1^*$	$-e_6 u_2^*$	$-u_3$	$e_2 u_4$
$e_6 e_2$	$e_4 u_1^*$	$-e_6 u_2$	u_3	$-e_2 u_4^*$
$e_2 e_6$	$-e_4 u_1^*$	$-e_6 u_2^*$	$-u_3$	$-e_2 u_4$
$e_5 e_1$	$e_4 u_1$	$e_6 u_2^*$	u_3	$-e_2 u_4^*$
$e_1 e_5$	$-e_4 u_1^*$	$-e_6 u_2^*$	$-u_3^*$	$e_2 u_4^*$

Böyle tabloları kullanmakla, doğrusal cebirsel işlemlerden sonra;

$$\gamma^0 u = u_1 + e_2 u_2 - e_4 u_3 - e_6 u_4$$

$$\gamma^3 u = u_3 - e_2 u_4 - e_4 u_1 + e_5 u_2$$

buluruz.

Ek A1:

Bu ekte oktonionik sol-sağ sınırlandırılmış operatörler ve 8×8 gerçek matrisler arasındaki dönüşüm kuralları verilmiştir. Dönüşüm tablolarını basitleştirmek için aşağıdaki notasyonu ortaya koyarız.

$$\{a,b,c,d\}_{(1)} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \{a,b,c,d\}_{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \quad (6.13a)$$

$$\{a,b,c,d\}_{(3)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{a,b,c,d\}_{(4)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.13b)$$

Tablo V. 8×8 Gerçek Matrisler ve Oktonionik Sınırlı Operatörler $e_m \cdot 1 \mid e_m$ Arasındaki Dönüşüm Kuralları

$e_1 \rightarrow$	$\{-i\sigma_2, -i\sigma_2, -i\sigma_2, i\sigma_2\}_{(1)}$,	$1 \mid e_1 \rightarrow$	$\{-i\sigma_2, i\sigma_2, i\sigma_2, -i\sigma_2\}_{(1)}$
$e_2 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, \sigma_3, -1, 1\}_{(2)}$,	$1 \mid e_2 \rightarrow$	$\{-1, 1, 1, -1\}_{(2)}$
$e_3 \rightarrow$	$\{-\sigma_1, \sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_2\}_{(2)}$,	$1 \mid e_3 \rightarrow$	$\{-i\sigma_2, -i\sigma_2, i\sigma_2, i\sigma_2\}_{(2)}$
$e_4 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, 1, \sigma_3, -1\}_{(3)}$,	$1 \mid e_4 \rightarrow$	$\{-1, -1, 1, 1\}_{(3)}$
$e_5 \rightarrow$	$\{-\sigma_1, i\sigma_2, \sigma_1, i\sigma_2\}_{(3)}$,	$1 \mid e_5 \rightarrow$	$\{-i\sigma_2, -i\sigma_2, -i\sigma_2, -i\sigma_2\}_{(3)}$
$e_6 \rightarrow$	$\{-1, -\sigma_3, \sigma_3, 1\}_{(4)}$,	$1 \mid e_6 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, \sigma_3, -\sigma_3, \sigma_3\}_{(4)}$
$e_7 \rightarrow$	$\{-i\sigma_2, -\sigma_1, \sigma_1, -i\sigma_2\}_{(4)}$,	$1 \mid e_7 \rightarrow$	$\{-\sigma_1, \sigma_1, -\sigma_1, \sigma_1\}_{(4)}$

Tablo VI. 8×8 Gerçek Matrisler ve Oktonionik Sınırlı Operatörler $e_m \mid e_m$ Arasındaki Dönüşüm Kuralları

$e_1 \mid e_1 \rightarrow$	$\{-1, 1, 1, 1\}_{(1)}$,	$e_2 \mid e_2 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, -\sigma_3, 1, 1\}_{(1)}$
$e_3 \mid e_3 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, \sigma_3, 1, 1\}_{(1)}$,	$e_4 \mid e_4 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, 1, -\sigma_3, 1\}_{(1)}$
$e_5 \mid e_5 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, 1, \sigma_3, 1\}_{(1)}$,	$e_6 \mid e_6 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, 1, 1, -\sigma_3\}_{(1)}$
$e_7 \mid e_7 \rightarrow$	$\{-\sigma_3, 1, 1, \sigma_3\}_{(1)}$			

Burada a, b, c, d , ve $0, 2 \times 2$ gerçek matrisleri gösterir ve Pauli-Spin matrisleri olarak adlandırılırlar;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Ek A2:

Bu ekte verilen bir genel 8×8 gerçek matris, onun oktonionik kopyasını çabukça elde etmekte bize imkan veren kuralları bize açıkça verir.

$$M_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & \varphi_1 & \eta_1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & \varphi_2 & \eta_2 & \lambda_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 & \varphi_3 & \eta_3 & \lambda_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \varepsilon_4 & \varphi_4 & \eta_4 & \lambda_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 & \varepsilon_5 & \varphi_5 & \eta_5 & \lambda_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \delta_6 & \varepsilon_6 & \varphi_6 & \eta_6 & \lambda_6 \\ \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 & \delta_7 & \varepsilon_7 & \varphi_7 & \eta_7 & \lambda_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 & \gamma_8 & \delta_8 & \varepsilon_8 & \varphi_8 & \eta_8 & \lambda_8 \end{pmatrix} \leftrightarrow O = \sum_{m=1}^{64} x_m \rho_m \quad (6.15)$$

Tablo VII. 8×8 Gerçek Matrisler ve Oktonionik Sol-Sınırlı Operatörler Arasındaki Dönüşüm Kuralları

$e_1 \rangle e_2 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} i\sigma_2 & -i\sigma_2 & i\sigma_2 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_1 \rangle e_3 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{Bmatrix}_{(2)}$
$e_1 \rangle e_4 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} i\sigma_2 & -i\sigma_2 & -i\sigma_2 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_1 \rangle e_5 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}_{(3)}$
$e_1 \rangle e_6 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & -\sigma_1 & \sigma_1 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(4)}$	$e_1 \rangle e_7 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & \sigma_3 & -\sigma_3 & \sigma_3 \end{Bmatrix}_{(4)}$
$e_2 \rangle e_1 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_2 \rangle e_3 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_1 & i\sigma_2 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(1)}$
$e_2 \rangle e_4 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} 1 & -1 & -\sigma_3 & \sigma_3 \end{Bmatrix}_{(4)}$	$e_2 \rangle e_5 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} i\sigma_2 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_1 \end{Bmatrix}_{(4)}$
$e_2 \rangle e_6 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_3 & -\sigma_3 & -1 & -1 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_2 \rangle e_7 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & -\sigma_1 & i\sigma_2 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(3)}$
$e_3 \rangle e_1 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & \sigma_3 & 1 & -1 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_3 \rangle e_2 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 & i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(1)}$
$e_3 \rangle e_4 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} i\sigma_2 & i\sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_1 \end{Bmatrix}_{(1)}$	$e_3 \rangle e_5 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -1 & -1 & \sigma_3 & -\sigma_3 \end{Bmatrix}_{(4)}$
$e_3 \rangle e_6 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_3 \rangle e_7 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_3 & \sigma_3 & -1 & -1 \end{Bmatrix}_{(3)}$
$e_4 \rangle e_1 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & i\sigma_2 & -\sigma_1 & i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_4 \rangle e_2 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -1 & -\sigma_3 & -1 & -1 \end{Bmatrix}_{(4)}$
$e_4 \rangle e_3 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -i\sigma_2 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(4)}$	$e_4 \rangle e_5 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & i\sigma_2 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(1)}$
$e_4 \rangle e_6 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & 1 & -\sigma_3 & -1 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_4 \rangle e_7 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 & i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(2)}$
$e_5 \rangle e_1 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & -1 & \sigma_3 & 1 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_5 \rangle e_2 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -i\sigma_2 & -\sigma_1 & i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(4)}$
$e_5 \rangle e_3 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} 1 & \sigma_3 & -1 & \sigma_3 \end{Bmatrix}_{(4)}$	$e_5 \rangle e_4 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 & i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(1)}$
$e_5 \rangle e_6 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & i\sigma_2 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_5 \rangle e_7 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & 1 & \sigma_3 & -1 \end{Bmatrix}_{(2)}$
$e_6 \rangle e_1 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} i\sigma_2 & \sigma_1 & -\sigma_1 & -i\sigma_2 \end{Bmatrix}_{(4)}$	$e_6 \rangle e_2 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & -1 & 1 & -\sigma_3 \end{Bmatrix}_{(3)}$
$e_6 \rangle e_3 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & i\sigma_2 & i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_6 \rangle e_4 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_3 & -1 & -1 & -\sigma_3 \end{Bmatrix}_{(2)}$
$e_6 \rangle e_5 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & -i\sigma_2 & i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_6 \rangle e_7 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & -i\sigma_2 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(1)}$
$e_7 \rangle e_1 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -1 & -\sigma_3 & \sigma_3 & -1 \end{Bmatrix}_{(4)}$	$e_7 \rangle e_2 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & -i\sigma_2 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(3)}$
$e_7 \rangle e_3 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_3 & -1 & 1 & \sigma_3 \end{Bmatrix}_{(3)}$	$e_7 \rangle e_4 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_1 & \sigma_2 & -i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(2)}$
$e_7 \rangle e_5 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} -\sigma_3 & -1 & -1 & \sigma_3 \end{Bmatrix}_{(2)}$	$e_7 \rangle e_6 \leftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \sigma_1 & i\sigma_2 & i\sigma_2 & -\sigma_1 \end{Bmatrix}_{(1)}$

$\rho_1 = 1$,	$\rho_2 = e_1$,	$\rho_3 = e_2$,	$\rho_4 = e_3$,
$\rho_5 = e_4$,	$\rho_6 = e_5$,	$\rho_7 = e_6$,	$\rho_8 = e_7$,
$\rho_9 = 1 \mid e_1$,	$\rho_{10} = 1 \mid e_2$,	$\rho_{11} = 1 \mid e_3$,	$\rho_{12} = 1 \mid e_4$,
$\rho_{13} = 1 \mid e_5$,	$\rho_{14} = 1 \mid e_6$,	$\rho_{15} = 1 \mid e_7$,	$\rho_{16} = e_1 \mid e_1$,
$\rho_{17} = e_2 \mid e_2$,	$\rho_{18} = e_3 \mid e_3$,	$\rho_{19} = e_4 \mid e_4$,	$\rho_{20} = e_5 \mid e_5$,
$\rho_{21} = e_6 \mid e_6$,	$\rho_{22} = e_7 \mid e_7$,	$\rho_{23} = e_1 \mid e_2$,	$\rho_{24} = e_1 \mid e_3$,
$\rho_{25} = e_1 \mid e_4$,	$\rho_{26} = e_1 \mid e_5$,	$\rho_{27} = e_1 \mid e_6$,	$\rho_{28} = e_1 \mid e_7$,
$\rho_{29} = e_2 \mid e_1$,	$\rho_{30} = e_2 \mid e_3$,	$\rho_{31} = e_2 \mid e_4$,	$\rho_{32} = e_2 \mid e_5$,
$\rho_{33} = e_2 \mid e_6$,	$\rho_{34} = e_2 \mid e_7$,	$\rho_{35} = e_3 \mid e_1$,	$\rho_{36} = e_3 \mid e_2$,
$\rho_{37} = e_3 \mid e_4$,	$\rho_{38} = e_3 \mid e_5$,	$\rho_{39} = e_3 \mid e_6$,	$\rho_{40} = e_3 \mid e_7$,
$\rho_{41} = e_4 \mid e_1$,	$\rho_{42} = e_4 \mid e_2$,	$\rho_{43} = e_4 \mid e_3$,	$\rho_{44} = e_4 \mid e_5$,
$\rho_{45} = e_4 \mid e_6$,	$\rho_{46} = e_4 \mid e_7$,	$\rho_{47} = e_5 \mid e_1$,	$\rho_{48} = e_5 \mid e_2$,
$\rho_{49} = e_5 \mid e_3$,	$\rho_{50} = e_5 \mid e_4$,	$\rho_{51} = e_5 \mid e_6$,	$\rho_{52} = e_5 \mid e_7$,
$\rho_{53} = e_6 \mid e_1$,	$\rho_{54} = e_6 \mid e_2$,	$\rho_{55} = e_6 \mid e_3$,	$\rho_{56} = e_6 \mid e_4$,
$\rho_{57} = e_6 \mid e_5$,	$\rho_{58} = e_6 \mid e_7$,	$\rho_{59} = e_7 \mid e_1$,	$\rho_{60} = e_7 \mid e_2$,
$\rho_{61} = e_7 \mid e_3$,	$\rho_{62} = e_7 \mid e_4$,	$\rho_{63} = e_7 \mid e_5$,	$\rho_{64} = e_7 \mid e_6$,

Sağ-sınırlı operatörler için dönüşüm kuralları Tablo VIII.' da verilmiştir. ($\rho_{23}, \dots, \rho_{64}$ sağ-sınırlı operatörleri ifade etmektedir).

Tablo VIII. 8x8 Gerçek Matrisler ve Oktonionik Sağ-Sınırlı Operatörler Arasındaki Dönüşüm Kuralları

$e_1 (e_2 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, -i\sigma_2, -i\sigma_2, -i\sigma_2 \}_{(2)}$,	$e_1 (e_3 \leftrightarrow \{ -1, -1, 1, -1 \}_{(2)}$,
$e_1 (e_4 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, i\sigma_2, -i\sigma_2, i\sigma_2 \}_{(3)}$,	$e_1 (e_5 \leftrightarrow \{ -1, -1, -1, 1 \}_{(3)}$,
$e_1 (e_6 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, \sigma_1, -\sigma_1, -\sigma_1 \}_{(4)}$,	$e_1 (e_7 \leftrightarrow \{ \sigma_3, -\sigma_3, \sigma_3, \sigma_3 \}_{(4)}$,
$e_2 (e_1 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, -\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_2 \}_{(2)}$,	$e_2 (e_3 \leftrightarrow \{ \sigma_1, -\sigma_1, -i\sigma_2, i\sigma_2 \}_{(1)}$,
$e_2 (e_4 \leftrightarrow \{ \sigma_3, -\sigma_3, -1, 1 \}_{(4)}$,	$e_2 (e_5 \leftrightarrow \{ \sigma_1, -\sigma_1, i\sigma_2, -i\sigma_2 \}_{(4)}$,
$e_2 (e_6 \leftrightarrow \{ -1, -\sigma_3, -\sigma_3, -\sigma_3 \}_{(3)}$,	$e_2 (e_7 \leftrightarrow \{ -i\sigma_2, -i\sigma_2, -\sigma_1, -\sigma_1 \}_{(3)}$,
$e_3 (e_1 \leftrightarrow \{ \sigma_3, \sigma_3, -1, 1 \}_{(2)}$,	$e_3 (e_2 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, -\sigma_1, i\sigma_2, -i\sigma_2 \}_{(1)}$,
$e_3 (e_4 \leftrightarrow \{ \sigma_1, -\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_2 \}_{(4)}$,	$e_3 (e_5 \leftrightarrow \{ -\sigma_3, \sigma_3, -1, -1 \}_{(4)}$,
$e_3 (e_6 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, i\sigma_2, \sigma_1, -\sigma_1 \}_{(3)}$,	$e_3 (e_7 \leftrightarrow \{ -1, -1, -\sigma_3, \sigma_3 \}_{(3)}$,
$e_4 (e_1 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, -i\sigma_2, -\sigma_1, -i\sigma_2 \}_{(3)}$,	$e_4 (e_2 \leftrightarrow \{ -\sigma_3, -1, -\sigma_3, -1 \}_{(4)}$,
$e_4 (e_3 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, i\sigma_2, -\sigma_1, i\sigma_2 \}_{(4)}$,	$e_4 (e_5 \leftrightarrow \{ \sigma_1, -i\sigma_2, -\sigma_1, i\sigma_2 \}_{(1)}$,
$e_4 (e_6 \leftrightarrow \{ 1, \sigma_3, -1, -\sigma_3 \}_{(2)}$,	$e_4 (e_7 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, \sigma_1, -i\sigma_2, -\sigma_1 \}_{(2)}$,
$e_5 (e_1 \leftrightarrow \{ \sigma_3, 1, \sigma_3, -1 \}_{(3)}$,	$e_5 (e_2 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, -i\sigma_2, -\sigma_1, i\sigma_2 \}_{(4)}$,
$e_5 (e_3 \leftrightarrow \{ \sigma_3, -1, \sigma_3, 1 \}_{(4)}$,	$e_5 (e_4 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, i\sigma_2, -\sigma_1, -i\sigma_2 \}_{(1)}$,
$e_5 (e_6 \leftrightarrow \{ -i\sigma_2, -\sigma_1, i\sigma_2, -\sigma_1 \}_{(2)}$,	$e_5 (e_7 \leftrightarrow \{ 1, \sigma_3, -1, \sigma_3 \}_{(2)}$,
$e_6 (e_1 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, -\sigma_1, \sigma_1, -i\sigma_2 \}_{(4)}$,	$e_6 (e_2 \leftrightarrow \{ 1, -\sigma_3, \sigma_3, -1 \}_{(3)}$,
$e_6 (e_3 \leftrightarrow \{ -i\sigma_2, -\sigma_1, -\sigma_1, -i\sigma_2 \}_{(3)}$,	$e_6 (e_4 \leftrightarrow \{ -1, -\sigma_3, -\sigma_3, -1 \}_{(2)}$,
$e_6 (e_5 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, \sigma_1, -\sigma_1, -i\sigma_2 \}_{(2)}$,	$e_6 (e_7 \leftrightarrow \{ -\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_2, -\sigma_1 \}_{(1)}$,
$e_7 (e_1 \leftrightarrow \{ -1, \sigma_3, -\sigma_3, -1 \}_{(4)}$,	$e_7 (e_2 \leftrightarrow \{ i\sigma_2, -\sigma_1, \sigma_1, i\sigma_2 \}_{(3)}$,
$e_7 (e_3 \leftrightarrow \{ 1, \sigma_3, \sigma_3, -1 \}_{(3)}$,	$e_7 (e_4 \leftrightarrow \{ -i\sigma_2, -\sigma_1, -\sigma_1, i\sigma_2 \}_{(2)}$,
$e_7 (e_5 \leftrightarrow \{ -1, -\sigma_3, \sigma_3, -1 \}_{(2)}$,	$e_7 (e_6 \leftrightarrow \{ \sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_2, -\sigma_1 \}_{(1)}$,

EK B1:

Oktonionik fonksiyonlar üzerindeki sınırlı operatörlerin etkisi Tablo XII-XV' de verilmiştir.

$$\psi = \psi_1 + e_2\psi_2 + e_4\psi_3 + e_6\psi_4 \quad [\psi_{1,\dots,4} \in C(1, e_1)] \quad (6.16)$$

Bu tablolarda,

$$e_2 \rightarrow \{-\psi_2, \psi_1, -\psi_4, \psi_3\} \quad (6.17)$$

notasyonunu kullandık.

$$e_2\psi = -\psi_2 + e_2\psi_1 - e_4\psi_4 + e_6\psi_5 \quad (6.18)$$

şeklinde gösterilir.

EK B2:

Aşağıdaki tablolarda, 4×4 kompleks matrisler ve oktonionik sol/sağ-sınırlı operatörler arasındaki ilişki kurulmuştur.

Tablo IX. Oktonionik Sınırlı Operatörler İçin Gerçek Katsayılar

$x_1 = (5\alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 + \delta_4 + \epsilon_5 + \varphi_6 + \eta_7 + \lambda_8)/12$	$x_2 = (4\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \epsilon_6 + \varphi_5 + \eta_5 - \lambda_7)/10$
$x_3 = (5\alpha_3 + \beta_4 - \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 + \eta_5 + \lambda_6)/12$	$x_4 = (5\alpha_4 - \beta_3 + \gamma_2 - \delta_1 - \epsilon_8 + \varphi_7 - \eta_6 + \lambda_5)/12$
$x_5 = (5\alpha_5 + \beta_6 + \gamma_7 + \delta_8 - \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$	$x_6 = (5\alpha_6 - \beta_5 + \gamma_8 - \delta_7 - \epsilon_2 - \varphi_1 + \eta_4 - \lambda_3)/12$
$x_7 = (5\alpha_7 - \beta_5 - \gamma_5 + \delta_6 + \epsilon_3 - \varphi_4 - \eta_1 + \lambda_2)/12$	$x_8 = (3\alpha_8 - \beta_7 - \gamma_6 - \delta_5 + \epsilon_4 - \varphi_3 - \eta_2 - \lambda_1)/12$
$x_9 = (\alpha_2 - 4\beta_1 + \gamma_4 - \epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 + \lambda_7)/10$	$x_{10} = (\alpha_3 - \beta_4 - 5\gamma_1 - \delta_2 + \epsilon_7 - \varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$
$x_{11} = (\alpha_4 + \beta_3 - \gamma_2 - 5\delta_1 + \epsilon_8 - \varphi_7 + \eta_6 - \lambda_5)/12$	$x_{12} = (\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 - 5\epsilon_1 - \varphi_2 + \eta_3 + \lambda_4)/12$
$x_{13} = (\alpha_6 - \beta_5 - \gamma_8 - \delta_7 - \epsilon_2 - 5\varphi_1 - \eta_4 + \lambda_3)/12$	$x_{14} = (\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 - \varphi_4 - 5\eta_1 - \lambda_2)/12$
$x_{15} = (\alpha_8 - \beta_7 - \gamma_6 + \delta_5 - \epsilon_4 - \varphi_3 + \eta_2 - 3\lambda_1)/8$	$x_{16} = (-\alpha_1 - 5\beta_2 + \gamma_3 + \delta_4 + \epsilon_5 + \varphi_6 + \eta_7 - \lambda_8)/12$
$x_{17} = (-\alpha_1 + \beta_2 - 5\gamma_3 + \delta_4 + \epsilon_5 + \varphi_6 + \eta_7 + \lambda_8)/12$	$x_{18} = (-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - 5\delta_4 + \epsilon_5 + \varphi_6 + \eta_7 + \lambda_8)/12$
$x_{19} = (-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - \delta_4 - 5\epsilon_5 + \varphi_6 + \eta_7 + \lambda_8)/12$	$x_{20} = (-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - \delta_4 + \epsilon_5 - 5\varphi_6 - \eta_7 + \lambda_8)/12$
$x_{21} = (-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - \delta_4 + \epsilon_5 - \varphi_6 - 5\eta_7 + \lambda_8)/12$	$x_{22} = (-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \delta_4 + \epsilon_5 + \varphi_6 + \eta_7 - 5\lambda_8)/12$

Tablo X. Oktonionik Sol-Sınırlı Operatörler İçin Gerçek Katsayılar

$x_{23} = (-\alpha_4 - \beta_3 - 5\gamma_2 - \delta_1 - \epsilon_8 + \varphi_7 - \eta_6 + \lambda_5)/12$	$x_{24} = (\alpha_3 - \beta_4 + \gamma_1 - 5\delta_2 + \epsilon_7 + \varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$
$x_{25} = (-\alpha_6 - \beta_5 + \gamma_8 - \delta_7 - 5\epsilon_2 - \varphi_1 + \eta_4 - \lambda_3)/12$	$x_{26} = (\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 + \epsilon_1 - 5\varphi_2 + \eta_3 + \lambda_4)/12$
$x_{27} = (\alpha_8 + \beta_7 + \gamma_6 + \delta_5 - \epsilon_4 - \varphi_3 - 3\eta_2 + \lambda_1)/12$	$x_{28} = (-\alpha_7 - \beta_8 - \gamma_5 + \delta_6 + \epsilon_3 - \varphi_4 - \eta_1 - 5\lambda_2)/12$
$x_{29} = (\alpha_4 - 5\beta_3 - \gamma_2 + \delta_1 + \epsilon_8 - \varphi_7 + \eta_6 - \lambda_5)/12$	$x_{30} = (-\alpha_2 - \beta_1 - \gamma_4 - 5\delta_3 - \epsilon_6 + \varphi_5 + \eta_8 - \lambda_7)/12$
$x_{31} = (-\alpha_7 - \beta_8 - \gamma_5 + \delta_6 - 5\epsilon_3 - \varphi_4 - \eta_1 + \lambda_2)/12$	$x_{32} = (\beta_7 - \varphi_3)/2$
$x_{33} = (\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 + \epsilon_1 + \varphi_2 - 5\eta_3 + \lambda_4)/12$	$x_{34} = (\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_8 + \delta_7 - \epsilon_2 + \varphi_1 - \eta_4 - 5\lambda_3)/12$
$x_{35} = (-\alpha_3 - 5\beta_4 - \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 + \eta_5 + \lambda_6)/12$	$x_{36} = (\alpha_2 + \beta_1 - 4\gamma_4 + \epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 + \lambda_7)/10$
$x_{37} = (-\alpha_8 - \beta_7 - \gamma_6 - \delta_5 - 3\epsilon_4 + \varphi_3 - \eta_2 - \lambda_1)/8$	$x_{38} = (\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 - 5\varphi_4 + \eta_1 - \lambda_2)/12$
$x_{39} = (-\alpha_6 - \beta_5 + \gamma_8 - \delta_7 + \epsilon_2 - \varphi_1 - 5\eta_4 - \lambda_3)/12$	$x_{40} = (\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 + \epsilon_1 + \varphi_2 + \eta_3 - 5\lambda_4)/12$
$x_{41} = (\alpha_6 - 5\beta_5 - \gamma_8 + \delta_7 - \epsilon_2 + \varphi_1 - \eta_4 + \lambda_3)/12$	$x_{42} = (\alpha_7 + \beta_8 - 5\gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 + \varphi_4 + \eta_1 - \lambda_2)/12$
$x_{43} = (-\beta_7 - \delta_5)/2$	$x_{44} = (-\alpha_2 - \beta_1 - \gamma_4 - \epsilon_6 - 4\varphi_5 + \eta_8 - \lambda_7)/10$
$x_{45} = (-\alpha_3 + \beta_4 - \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 - 5\eta_5 + \lambda_6)/12$	$x_{46} = (-\alpha_4 - \beta_3 + \gamma_2 - \delta_1 - \epsilon_8 + \varphi_7 - \eta_6 - 5\lambda_5)/12$
$x_{47} = (-\alpha_5 - 5\beta_6 + \gamma_7 + \delta_8 - \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$	$x_{48} = (\alpha_8 + \beta_7 - 3\gamma_6 + \delta_5 - \epsilon_4 - \varphi_3 + \eta_2 + \lambda_1)/8$
$x_{49} = (-\alpha_7 - \beta_8 - \gamma_5 - 5\delta_6 + \epsilon_3 - \varphi_4 - \eta_1 + \lambda_2)/12$	$x_{50} = (\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_4 - 4\epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 + \lambda_7)/10$
$x_{51} = (\alpha_4 + \beta_3 - \gamma_2 + \delta_1 + \epsilon_8 - \varphi_7 - 5\eta_6 - \lambda_5)/12$	$x_{52} = (-\alpha_3 + \beta_4 - \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 + \eta_5 - 5\lambda_6)/12$
$x_{53} = (-\alpha_8 - 5\beta_7 - \gamma_6 - \delta_5 + \epsilon_4 + \varphi_3 - \eta_2 - \lambda_1)/8$	$x_{54} = (-\alpha_5 + \beta_6 - 5\gamma_7 + \delta_8 - \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$
$x_{55} = (\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_8 - 5\delta_7 - \epsilon_2 + \varphi_1 - \eta_4 + \lambda_3)/12$	$x_{56} = (\alpha_3 - \beta_4 + \gamma_1 + \delta_2 - 5\epsilon_7 + \varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$
$x_{57} = (-\alpha_4 - \beta_3 + \gamma_2 - \delta_1 - \epsilon_8 - 5\varphi_7 - \eta_6 + \lambda_5)/12$	$x_{58} = (\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_4 + \epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 - 4\lambda_7)/10$
$x_{59} = (\alpha_7 - 5\beta_8 + \gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 + \varphi_4 + \eta_1 - \lambda_2)/12$	$x_{60} = (-\alpha_6 - \beta_5 - 5\gamma_8 - \delta_7 + \epsilon_2 - \varphi_1 + \eta_4 - \lambda_3)/12$
$x_{61} = (-\alpha_5 + \beta_6 + \gamma_7 - 5\delta_8 - \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$	$x_{62} = (\alpha_4 + \beta_3 - \gamma_2 + \delta_1 - 5\epsilon_8 - \varphi_7 + \eta_6 - \lambda_5)/12$
$x_{63} = (\alpha_3 - \beta_4 + \gamma_1 + \delta_2 + \epsilon_7 - 5\varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$	$x_{64} = (\delta_3 - \eta_8)/2$

Tablo XI. Oktonionik Sağ-Sınırlı Operatörler İçin Gerçek Katsayılar

$x_{23} = (-\alpha_4 - 5\beta_3 - \gamma_2 - \delta_1 + \epsilon_8 - \varphi_7 + \eta_6 - \lambda_5)/12$	$x_{24} = (\alpha_3 - 5\beta_4 + \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 + \eta_5 + \lambda_6)/12$
$x_{25} = (-\alpha_6 - 5\beta_5 - \gamma_8 + \delta_7 - \epsilon_2 - \varphi_1 - \eta_4 + \lambda_3)/12$	$x_{26} = (\alpha_5 - 5\beta_6 + \gamma_7 + \delta_8 + \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$
$x_{27} = (\alpha_8 - 5\beta_7 - \gamma_6 - \delta_5 + \epsilon_4 + \varphi_3 - \eta_2 + \lambda_1)/12$	$x_{28} = (-\alpha_7 - 5\beta_8 + \gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 + \varphi_4 - \eta_1 - \lambda_2)/12$
$x_{29} = (\alpha_4 - \beta_3 - 5\gamma_2 + \delta_1 - \epsilon_8 + \varphi_7 - \eta_6 + \lambda_5)/12$	$x_{30} = (-\alpha_2 - \beta_1 - 5\gamma_4 - \delta_3 + \epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 + \lambda_7)/12$
$x_{31} = (-\alpha_7 + \beta_8 - 5\gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 + \varphi_4 - \eta_1 - \lambda_2)/12$	$x_{32} = (-\alpha_8 - \beta_7 - 5\gamma_6 + \delta_5 - \epsilon_4 - \varphi_3 + \eta_2 - \lambda_1)/12$
$x_{33} = (\alpha_5 + \beta_6 - 5\gamma_7 + \delta_8 + \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$	$x_{34} = (\alpha_6 - \beta_5 - 5\gamma_8 - \delta_7 + \epsilon_2 + \varphi_1 + \eta_4 - \lambda_3)/12$
$x_{35} = (-\alpha_3 - \beta_4 - \gamma_1 - 5\delta_2 + \epsilon_7 + \varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$	$x_{36} = (\alpha_2 + \beta_1 - \gamma_4 - 5\delta_3 - \epsilon_6 + \varphi_5 + \eta_8 - \lambda_7)/12$
$x_{37} = (-\alpha_8 - \beta_7 + \gamma_6 - 5\delta_5 - \epsilon_4 - \varphi_3 + \eta_2 - \lambda_1)/12$	$x_{38} = (\alpha_7 - \beta_8 - \gamma_5 - 5\delta_6 + \epsilon_3 - \varphi_4 + \eta_1 + \lambda_2)/12$
$x_{39} = (-\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_8 - 5\delta_7 - \epsilon_2 - \varphi_1 - \eta_4 + \lambda_3)/12$	$x_{40} = (\alpha_5 + \beta_6 + \gamma_7 - 5\delta_8 + \epsilon_1 - \varphi_2 - \eta_3 - \lambda_4)/12$
$x_{41} = (\alpha_6 - \beta_5 + \gamma_8 - \delta_7 - 5\epsilon_2 + \varphi_1 + \eta_4 - \lambda_3)/12$	$x_{42} = (\alpha_7 - \beta_8 - \gamma_5 + \delta_6 - 5\epsilon_3 - \varphi_4 + \eta_1 + \lambda_2)/12$
$x_{43} = (\alpha_8 + \beta_7 - \gamma_6 - \delta_5 - 5\epsilon_4 + \varphi_3 - \eta_2 + \lambda_1)/12$	$x_{44} = (-\alpha_2 - \beta_1 + \gamma_4 - \delta_3 - 5\epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 + \lambda_7)/12$
$x_{45} = (-\alpha_3 - \beta_4 - \gamma_1 + \delta_2 - 5\epsilon_7 + \varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$	$x_{46} = (-\alpha_4 + \beta_3 - \gamma_2 - \delta_1 - 5\epsilon_8 - \varphi_7 + \eta_6 - \lambda_5)/12$
$x_{47} = (-\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 - \epsilon_1 - 5\varphi_2 + \eta_3 + \lambda_4)/12$	$x_{48} = (\alpha_8 + \beta_7 - \gamma_6 - \delta_5 + \epsilon_4 - 5\varphi_3 - \eta_2 + \lambda_1)/12$
$x_{49} = (-\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_5 - \delta_6 - \epsilon_3 - 5\varphi_4 - \eta_1 - \lambda_2)/12$	$x_{50} = (\alpha_2 + \beta_1 - \gamma_4 + \delta_3 - \epsilon_6 - 5\varphi_5 + \eta_8 - \lambda_7)/12$
$x_{51} = (\alpha_4 - \beta_3 + \gamma_2 + \delta_1 - \epsilon_8 - 5\varphi_7 - \eta_6 + \lambda_5)/12$	$x_{52} = (-\alpha_3 - \beta_4 - \gamma_1 + \delta_2 + \epsilon_7 - 5\varphi_8 - \eta_5 - \lambda_6)/12$
$x_{53} = (-\alpha_8 - \beta_7 + \gamma_6 + \delta_5 - \epsilon_4 - \varphi_3 - 5\eta_2 - \lambda_1)/12$	$x_{54} = (-\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 - \epsilon_1 + \varphi_2 - 5\eta_3 + \lambda_4)/12$
$x_{55} = (\alpha_6 - \beta_5 + \gamma_8 - \delta_7 + \epsilon_2 + \varphi_1 - 5\eta_4 - \lambda_3)/12$	$x_{56} = (\alpha_3 + \beta_4 + \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 - 5\eta_5 + \lambda_6)/12$
$x_{57} = (-\alpha_4 + \beta_3 - \gamma_2 - \delta_1 + \epsilon_8 - \varphi_7 - 5\eta_6 - \lambda_5)/12$	$x_{58} = (\alpha_2 + \beta_1 - \gamma_4 + \delta_3 - \epsilon_6 + \varphi_5 - 5\eta_8 - \lambda_7)/12$
$x_{59} = (\alpha_7 - \beta_8 - \gamma_5 + \delta_6 + \epsilon_3 - \varphi_4 + \eta_1 - 5\lambda_2)/12$	$x_{60} = (-\alpha_6 + \beta_5 - \gamma_8 + \delta_7 - \epsilon_2 - \varphi_1 - \eta_4 - 5\lambda_3)/12$
$x_{61} = (-\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_7 - \delta_8 - \epsilon_1 + \varphi_2 + \eta_3 - 5\lambda_4)/12$	$x_{62} = (\alpha_4 - \beta_3 + \gamma_2 + \delta_1 - \epsilon_8 + \varphi_7 - \eta_6 - 5\lambda_5)/12$
$x_{63} = (\alpha_3 + \beta_4 + \gamma_1 - \delta_2 - \epsilon_7 - \varphi_8 + \eta_5 - 5\lambda_6)/12$	$x_{64} = (-\alpha_2 - \beta_1 + \gamma_4 - \delta_3 + \epsilon_6 - \varphi_5 - \eta_8 - 5\lambda_7)/12$

Tablo XII. e_m ve $1 | e_m$ Oktonionik Sınırlı Operatörlerin Ψ Üzerindeki Tesiri

$e_1 \rightarrow \{ e_1\psi_1, -e_1\psi_2, -e_1\psi_3, -e_1\psi_4 \}$	$1 e_1 \rightarrow \{ e_1\psi_1, e_1\psi_2, e_1\psi_3, e_1\psi_4 \}$
$e_2 \rightarrow \{ -\psi_2, \psi_1, -\psi_4^2, \psi_3^2 \}$	$1 e_2 \rightarrow \{ -\psi_2^2, \psi_1^2, \psi_4^2, -\psi_3^2 \}$
$e_3 \rightarrow \{ -e_1\psi_2, -e_1\psi_1, -e_1\psi_4^2, e_1\psi_3^2 \}$	$1 e_3 \rightarrow \{ e_1\psi_2^2, -e_1\psi_1^2, e_1\psi_4^2, -e_1\psi_3^2 \}$
$e_4 \rightarrow \{ -\psi_3, \psi_2^2, \psi_1, -\psi_2^2 \}$	$1 e_4 \rightarrow \{ -\psi_3^2, -\psi_2^2, \psi_1^2, \psi_2^2 \}$
$e_5 \rightarrow \{ -e_1\psi_3, e_1\psi_4^2, -e_1\psi_1, -e_1\psi_2^2 \}$	$1 e_5 \rightarrow \{ e_1\psi_3^2, -e_1\psi_4^2, -e_1\psi_1^2, e_1\psi_2^2 \}$
$e_6 \rightarrow \{ -\psi_4, -\psi_3^2, \psi_2^2, \psi_1 \}$	$1 e_6 \rightarrow \{ -\psi_4^2, \psi_3^2, -\psi_2^2, \psi_1^2 \}$
$e_7 \rightarrow \{ e_1\psi_4, e_1\psi_3^2, -e_1\psi_2^2, e_1\psi_1 \}$	$1 e_7 \rightarrow \{ -e_1\psi_4^2, -e_1\psi_3^2, e_1\psi_2^2, e_1\psi_1^2 \}$

Tablo XIII. $e_m e_m$ Oktonionik Sınırlı Operatörlerin Ψ Üzerindeki Tesiri

$e_1 e_1 \rightarrow \{ -\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \}$	$e_2 e_2 \rightarrow \{ -\psi_1^*, -\psi_2^*, \psi_3, \psi_4 \}$
$e_3 e_3 \rightarrow \{ -\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3, \psi_4 \}$	$e_4 e_4 \rightarrow \{ -\psi_1^*, \psi_2, -\psi_3^*, \psi_4 \}$
$e_5 e_5 \rightarrow \{ -\psi_1^*, \psi_2, \psi_3^*, \psi_4 \}$	$e_6 e_6 \rightarrow \{ -\psi_1^*, \psi_2, \psi_3, -\psi_4^* \}$
$e_7 e_7 \rightarrow \{ -\psi_1^*, \psi_2, \psi_3, \psi_4^* \}$	

Tablo XIV. Ψ Üzerindeki Oktonionik Sol-Sınırlı Operatörün Hareketi

$e_1 e_2 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_4^*, -e_1 \psi_3^* \}$	$e_1 e_3 \rightarrow \{ -\psi_2^*, -\psi_1^*, -\psi_3^*, \psi_4^* \}$
$e_1 e_4 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3^*, -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_4^* \}$	$e_1 e_5 \rightarrow \{ -\psi_3^*, \psi_4^*, -\psi_1^*, -\psi_2^* \}$
$e_1 e_6 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4^*, e_1 \psi_3^*, -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1^* \}$	$e_1 e_7 \rightarrow \{ \psi_4^*, \psi_3^*, -\psi_2^*, -\psi_1^* \}$
$e_2 e_1 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2, e_1 \psi_1, -e_1 \psi_4, e_1 \psi_3 \}$	$e_2 e_3 \rightarrow \{ e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_3, e_1 \psi_4 \}$
$e_2 e_4 \rightarrow \{ \psi_1, -\psi_3, -\psi_2, \psi_4 \}$	$e_2 e_5 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4, -e_1 \psi_3, e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_1^* \}$
$e_2 e_6 \rightarrow \{ -\psi_3, -\psi_4, -\psi_1^*, -\psi_2^* \}$	$e_2 e_7 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3, e_1 \psi_1, e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_4^* \}$
$e_3 e_1 \rightarrow \{ \psi_2, \psi_1, \psi_4^*, -\psi_3^* \}$	$e_3 e_2 \rightarrow \{ -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4 \}$
$e_3 e_4 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4, e_1 \psi_3, e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_1^* \}$	$e_3 e_5 \rightarrow \{ -\psi_4, -\psi_3, \psi_2^*, -\psi_1^* \}$
$e_3 e_6 \rightarrow \{ e_1 \psi_3, e_1 \psi_1, -e_1 \psi_4, e_1 \psi_2 \}$	$e_3 e_7 \rightarrow \{ -\psi_3, \psi_4, -\psi_1^*, -\psi_2^* \}$
$e_4 e_1 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3, e_1 \psi_1, e_1 \psi_4, -e_1 \psi_2 \}$	$e_4 e_2 \rightarrow \{ -\psi_4, -\psi_3, -\psi_2, -\psi_1 \}$
$e_4 e_3 \rightarrow \{ e_1 \psi_2, e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4, -e_1 \psi_1 \}$	$e_4 e_5 \rightarrow \{ e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_3, e_1 \psi_4 \}$
$e_4 e_6 \rightarrow \{ e_2, \psi_1^*, -\psi_4, -\psi_3^* \}$	$e_4 e_7 \rightarrow \{ e_1 \psi_2, -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4^* \}$
$e_5 e_1 \rightarrow \{ \psi_3, -\psi_1^*, \psi_1, \psi_2^* \}$	$e_5 e_2 \rightarrow \{ e_1 \psi_4, e_1 \psi_3^*, e_1 \psi_2, -e_1 \psi_1^* \}$
$e_5 e_3 \rightarrow \{ \psi_1, \psi_2^*, -\psi_4, \psi_3^* \}$	$e_5 e_4 \rightarrow \{ -e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4 \}$
$e_5 e_6 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2, e_1 \psi_4, e_1 \psi_3^*, e_1 \psi_1^* \}$	$e_5 e_7 \rightarrow \{ \psi_2, \psi_1^*, \psi_4, -\psi_3^* \}$
$e_6 e_1 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4, -e_1 \psi_3, e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_1^* \}$	$e_6 e_2 \rightarrow \{ \psi_3, -\psi_4^*, \psi_1^*, -\psi_2 \}$
$e_6 e_3 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3, e_1 \psi_1, e_1 \psi_4, -e_1 \psi_2 \}$	$e_6 e_4 \rightarrow \{ -\psi_2, -\psi_1^*, -\psi_1^*, -\psi_3 \}$
$e_6 e_5 \rightarrow \{ e_1 \psi_2, -e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4 \}$	$e_6 e_7 \rightarrow \{ -e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_2, -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4^* \}$
$e_7 e_1 \rightarrow \{ -\psi_4, -\psi_3^*, \psi_2^*, -\psi_1 \}$	$e_7 e_2 \rightarrow \{ e_1 \psi_3, -e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_4 \}$
$e_7 e_3 \rightarrow \{ \psi_3, -\psi_1^*, \psi_1^*, \psi_2 \}$	$e_7 e_4 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2, e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_3^*, -e_1 \psi_4 \}$
$e_7 e_5 \rightarrow \{ -\psi_2, -\psi_1^*, -\psi_1^*, \psi_3 \}$	$e_7 e_6 \rightarrow \{ e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2, e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4^* \}$

Tablo XV. Ψ Üzerindeki Oktonionik Sağ-Sınırlı Operatörün Tesiri

$e_1 (e_2 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_4^*, e_1 \psi_3^* \})$	$e_1 (e_8 \rightarrow \{ -\psi_2^*, -\psi_1^*, -\psi_3^*, \psi_4^* \})$
$e_1 (e_4 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3^*, e_1 \psi_4^*, -e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_2^* \})$	$e_1 (e_6 \rightarrow \{ -\psi_3^*, -\psi_4^*, -\psi_1^*, \psi_2^* \})$
$e_1 (e_6 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4^*, -e_1 \psi_3^*, e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1^* \})$	$e_1 (e_7 \rightarrow \{ \psi_4^*, \psi_3^*, \psi_2^*, \psi_1^* \})$
$e_2 (e_1 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2, e_1 \psi_1, e_1 \psi_4, -e_1 \psi_3 \})$	$e_2 (e_3 \rightarrow \{ e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4 \})$
$e_2 (e_4 \rightarrow \{ \psi_1^*, -\psi_3^*, -\psi_2, \psi_1 \})$	$e_2 (e_5 \rightarrow \{ e_1 \psi_4^*, e_1 \psi_3^*, e_1 \psi_2, \psi_1 \})$
$e_2 (e_6 \rightarrow \{ -\psi_3^*, -\psi_4^*, -\psi_1, -\psi_2 \})$	$e_2 (e_7 \rightarrow \{ e_1 \psi_3^*, -e_1 \psi_4^*, e_1 \psi_1, -e_1 \psi_2 \})$
$e_3 (e_1 \rightarrow \{ \psi_2, \psi_1, -\psi_4^*, \psi_3^* \})$	$e_3 (e_2 \rightarrow \{ -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_3, e_1 \psi_4 \})$
$e_3 (e_4 \rightarrow \{ e_1 \psi_4^*, e_1 \psi_3^*, -e_1 \psi_2, e_1 \psi_1 \})$	$e_3 (e_5 \rightarrow \{ -\psi_4^*, \psi_3^*, -\psi_2, -\psi_1 \})$
$e_3 (e_6 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3, e_1 \psi_1, -e_1 \psi_4, -e_1 \psi_2 \})$	$e_3 (e_7 \rightarrow \{ -\psi_3^*, -\psi_4^*, -\psi_1, \psi_2 \})$
$e_4 (e_1 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4, e_1 \psi_1, e_1 \psi_2 \})$	$e_4 (e_2 \rightarrow \{ -\psi_4^*, -\psi_3, -\psi_2^*, -\psi_1 \})$
$e_4 (e_3 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4, e_1 \psi_3, e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1^* \})$	$e_4 (e_5 \rightarrow \{ e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_2, e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4 \})$
$e_4 (e_6 \rightarrow \{ \psi_2^*, \psi_1, -\psi_3, -\psi_4^* \})$	$e_4 (e_7 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1, -e_1 \psi_4^*, -e_1 \psi_3 \})$
$e_5 (e_1 \rightarrow \{ \psi_3, \psi_4^*, \psi_1, -\psi_2^* \})$	$e_5 (e_2 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4^*, -e_1 \psi_3, e_1 \psi_2^*, -e_1 \psi_1 \})$
$e_5 (e_3 \rightarrow \{ \psi_1^*, -\psi_3, \psi_2^*, \psi_1 \})$	$e_5 (e_4 \rightarrow \{ -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2, e_1 \psi_3^*, e_1 \psi_4 \})$
$e_5 (e_6 \rightarrow \{ e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_1, e_1 \psi_4^*, -e_1 \psi_3 \})$	$e_5 (e_7 \rightarrow \{ \psi_2^*, \psi_1, -\psi_4^*, \psi_3 \})$
$e_6 (e_1 \rightarrow \{ -e_1 \psi_4, e_1 \psi_3, -e_1 \psi_2, e_1 \psi_1 \})$	$e_6 (e_2 \rightarrow \{ \psi_3, -\psi_4, \psi_1, -\psi_2^* \})$
$e_6 (e_3 \rightarrow \{ -e_1 \psi_3, e_1 \psi_4, e_1 \psi_1, e_1 \psi_2 \})$	$e_6 (e_4 \rightarrow \{ -\psi_2, -\psi_1, -\psi_1, -\psi_3^* \})$
$e_6 (e_5 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2, -e_1 \psi_1, e_1 \psi_3, e_1 \psi_4 \})$	$e_6 (e_7 \rightarrow \{ -e_1 \psi_1^*, e_1 \psi_2, e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4^* \})$
$e_7 (e_1 \rightarrow \{ -\psi_4, \psi_3^*, -\psi_2^*, -\psi_1 \})$	$e_7 (e_2 \rightarrow \{ -e_1 \psi_2^*, e_1 \psi_4, -e_1 \psi_1, -e_1 \psi_3^* \})$
$e_7 (e_3 \rightarrow \{ \psi_3^*, \psi_4, \psi_1, -\psi_2^* \})$	$e_7 (e_4 \rightarrow \{ e_1 \psi_2, e_1 \psi_1, e_1 \psi_4, -e_1 \psi_3^* \})$
$e_7 (e_5 \rightarrow \{ -\psi_2^*, -\psi_1, \psi_4, -\psi_3^* \})$	$e_7 (e_6 \rightarrow \{ e_1 \psi_1^*, -e_1 \psi_2, -e_1 \psi_3, -e_1 \psi_4^* \})$

Tablo XVI. 4x4 Kompleks Matrisler ve Sol-Sınırlı Operatörler

$$\mathcal{R}_{11} \leftrightarrow \frac{1}{2} [1 - e_1 | e_1]$$

$$\mathcal{R}_{12} \leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1) e_3 + e_3) e_1 - 2 | e_2 - e_2 + e_4) e_6 - e_6) e_4 + e_5) e_7 - e_7) e_5]$$

$$\mathcal{R}_{13} \leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1) e_5 + e_5) e_1 - 2 | e_4 - e_4 + e_6) e_2 - e_2) e_6 + e_7) e_3 - e_3) e_7]$$

$$\mathcal{R}_{14} \leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1) e_7 + e_7) e_1 - 2 | e_6 - e_6 + e_2) e_4 - e_4) e_2 + e_5) e_3 - e_3) e_5]$$

$$\mathcal{R}_{21} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_2 + e_3) e_1]$$

$$\mathcal{R}_{22} \leftrightarrow \frac{1}{6} [1 + e_1 | e_1 + e_4 | e_4 + e_5 | e_5 + e_6 | e_6 + e_7 | e_7] - \frac{1}{3} [e_2 | e_2 + e_3 | e_3]$$

$$\mathcal{R}_{23} \leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_2) e_4 - e_3) e_5]$$

$$\mathcal{R}_{24} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_3) e_7 - e_2) e_6]$$

$$\mathcal{R}_{31} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_4 + e_5) e_1]$$

$$\mathcal{R}_{32} \leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_5) e_3 - e_4) e_2]$$

$$\mathcal{R}_{33} \leftrightarrow \frac{1}{6} [1 + e_1 | e_1 + e_2 | e_2 + e_3 | e_3 + e_6 | e_6 + e_7 | e_7] - \frac{1}{3} [e_4 | e_4 + e_5 | e_5]$$

$$\mathcal{R}_{34} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_5) e_7 - e_4) e_6]$$

$$\mathcal{R}_{41} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_6 - e_7) e_1]$$

$$\mathcal{R}_{42} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7) e_3 - e_6) e_2]$$

$$\mathcal{R}_{43} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7) e_5 - e_6) e_4]$$

$$\mathcal{R}_{44} \leftrightarrow \frac{1}{6} [1 + e_1 | e_1 + e_2 | e_2 + e_3 | e_3 + e_4 | e_4 + e_5 | e_5] - \frac{1}{3} [e_6 | e_6 + e_7 | e_7]$$

$$\mathcal{C}_{11} \leftrightarrow \frac{1}{2} [1 | e_1 + e_1]$$

$$\mathcal{C}_{12} \leftrightarrow \frac{1}{6} [-2e_1) e_2 - e_3 - 2 | e_3 - e_2) e_1 + e_4) e_7 + e_6) e_5 - e_5) e_6 - e_7) e_4]$$

$$\mathcal{C}_{13} \leftrightarrow \frac{1}{6} [-2e_1) e_4 - e_5 - 2 | e_5 - e_4) e_1 - e_6) e_3 - e_2) e_7 + e_7) e_2 + e_3) e_6]$$

$$\mathcal{C}_{14} \leftrightarrow \frac{1}{6} [-2e_1) e_6 + e_7 + 2 | e_7 - e_6) e_1 - e_2) e_5 + e_4) e_3 + e_5) e_2 - e_3) e_4]$$

$$\mathcal{C}_{21} \leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_3 + e_2) e_1]$$

$$\mathcal{C}_{22} \leftrightarrow \frac{1}{6} [1 | e_1 - e_1 + e_4) e_5 - e_5) e_4 - e_6) e_7 + e_7) e_6] - \frac{1}{3} [e_2) e_3 - e_3) e_2]$$

$$\mathcal{C}_{23} \leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_2) e_5 + e_3) e_4]$$

$$\mathcal{C}_{24} \leftrightarrow \frac{1}{2} [e_3) e_6 + e_2) e_7]$$

$$\begin{aligned}
C_{31} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_5 + e_4) e_1] \\
C_{32} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_5) e_2 - e_4) e_3] \\
C_{33} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 | e_1 - e_1 + e_2) e_3 - e_3) e_2 - e_6) e_7 + e_7) e_6] - \frac{1}{3} [e_4) e_5 - e_5) e_4] \\
C_{34} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_5) e_6 + e_4) e_7] \\
C_{41} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7 + e_6) e_1] \\
C_{42} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_7) e_2 - e_6) e_3] \\
C_{43} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_7) e_4 - e_6) e_5] \\
C_{44} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 | e_1 - e_1 + e_2) e_3 - e_3) e_2 + e_4) e_5 - e_5) e_4] - \frac{1}{3} [e_7) e_6 - e_6) e_7]
\end{aligned}$$

Tablo XVII. 4x4 Kompleks Matrisler ve Sağ-Sınırlı

$$\begin{aligned}
R_{11} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [1 - e_1 | e_1] \\
R_{12} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_2 + e_3 (e_1] \\
R_{13} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_4 + e_5 (e_1] \\
R_{14} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_6 - e_7 (e_1] \\
R_{21} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1 (e_3 + e_3 (e_1 + 2 | e_2 + e_2 + e_4 (e_6 - e_6 (e_4 + e_5 (e_7 - e_7 (e_5] \\
R_{22} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 + e_1 | e_1 + e_4 | e_4 + e_5 | e_5 + e_6 | e_6 + e_7 | e_7] - \frac{1}{3} [e_2 | e_2 + e_3 | e_3] \\
R_{23} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_5 (e_3 - e_4 (e_2] \\
R_{24} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7 (e_3 - e_6 (e_2] \\
R_{31} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1 (e_5 + e_5 (e_1 + 2 | e_4 + e_4 + e_6 (e_2 - e_2 (e_6 + e_7 (e_3 - e_3 (e_7] \\
R_{32} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_2 (e_4 - e_3 (e_5] \\
R_{33} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 + e_1 | e_1 + e_2 | e_2 + e_3 | e_3 + e_6 | e_6 + e_7 | e_7] - \frac{1}{3} [e_4 | e_4 + e_5 | e_5] \\
R_{34} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7 (e_5 - e_6 (e_4] \\
R_{41} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1 (e_7 + e_7 (e_1 + 2 | e_6 + e_6 + e_2 (e_4 - e_4 (e_2 + e_5 (e_3 - e_3 (e_5] \\
R_{42} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_3 (e_7 - e_2 (e_6] \\
R_{43} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_5 (e_7 - e_4 (e_6] \\
R_{44} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 + e_1 | e_1 + e_2 | e_2 + e_3 | e_3 + e_4 | e_4 + e_5 | e_5] - \frac{1}{3} [e_6 | e_6 + e_7 | e_7] \\
C_{11} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [1 | e_1 + e_1] \\
C_{12} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_2 (e_1 - e_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_4 (e_1 - e_5)] \\
C_{14} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_6 (e_1 + e_7)] \\
C_{21} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1 (e_2 - e_3 + -2 | e_3 + e_2 (e_1 + e_4 (e_7 + e_6 (e_5 - e_5 (e_6 - e_7 (e_4)] \\
C_{22} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 | e_1 - e_1 - e_4 (e_5 + e_5 (e_4 + e_6 (e_7 - e_7 (e_6)] - \frac{1}{3} [-e_2 (e_3 + e_3 (e_2)] \\
C_{23} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_5 (e_2 + e_4 (e_3)] \\
C_{24} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7 (e_2 + e_6 (e_3)] \\
C_{31} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [2e_1 (e_4 - e_5 - 2 | e_5 + e_4 (e_1 - e_6 (e_3 - e_2 (e_7 + e_7 (e_2 + e_3 (e_5)] \\
C_{32} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_2 (e_5 - e_3 (e_4)] \\
C_{33} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 | e_1 - e_1 - e_2 (e_3 + e_3 (e_2 + e_6 (e_7 - e_7 (e_6)] - \frac{1}{3} [-e_4 (e_5 + e_5 | e_4] \\
C_{34} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [e_7 (e_4 + e_6 (e_5)] \\
C_{41} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [-2e_1 (e_6 - e_7 + 2 | e_7 + e_6 (e_1 - e_2 (e_5 + e_4 (e_3 + e_5 (e_2 - e_3 (e_4)] \\
C_{42} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_3 (e_6 - e_2 (e_7)] \\
C_{43} &\leftrightarrow \frac{1}{2} [-e_5 (e_6 - e_4 (e_7)] \\
C_{44} &\leftrightarrow \frac{1}{6} [1 | e_1 - e_1 - e_2 (e_3 + e_3 (e_2 - e_4 (e_5 + e_5 | e_4)] - \frac{1}{3} [e_6 (e_7 - e_7 (e_6)]
\end{aligned}$$

Önceki tablolar sol/sağ-sınırlı operatörler arasındaki ilişkileri veya oktonionik operatör işlem kurallarını özetlemek için çok kullanışlıdır. Örneğin,

$$[e_2)e_7 + e_3)e_6] \leftrightarrow 2C_{24} \leftrightarrow [e_7(e_2 + e_6(e_3)]$$

kolayca buluruz [1].

7. SONUÇ

Oktonionlar daha çok kuantum mekaniği, relativite, parçacık fiziği ve elektromagnetik teoride kullanılmaktadır. Ayrıca oktonionlar grup teorisinde ve elemanter parçacıkların sınıflandırılmasında da başarıyla kullanılmaktadır.

Bu çalışmada oktonion cebirinin özellikleri belirtilerek, sol-sağ sınırlandırılmış operatörler ve dönüşüm kuralları ifade edilmiştir. Ayrıca eklerde bulunan tablolarda da bu dönüşüm kuralları açıkça verilmektedir. Bunun yanısıra Dirac denklemi de oktonionik formda ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. DE LEO, S. ve ABDEL-KHALEK, K., *Toward an Octonionic World*, International Journal of Theoretical Physics, **37**, 7, 1944-1985, (1998).
2. SERDAROĞLU, M., *Fizikte Kuaternion ve Oktonion Yapılar*, Bilim ve Teknik Dergisi, 45-51, Ocak (1993).
3. ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir (1995).
4. IMADAE, K. ve IMADAE, M., *Octonions & Sedenions*, 'http://www.geocities.com/zerodivisor'.
5. BAEZ, J., C., *The Octonions*, 'http://math.ucr.edu/home/baez/Octonions' (2001).
6. LOUNESTO, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997).
7. DABOUL, J. ve DELBOURGO R., *Matrix Representation of Octonions and Generalizations*, Journal of Mathematical Physics, **40**, 4134-4150 (1999).
8. TIAN, Y., *Matrix Representations of Octonions and Their Applications*, Advances in Applied Clifford Algebras, **10**, 61-90 (2000).
9. DE LEO, S. ve ABDEL-KHALEK, K., *Octonionic Dirac Equation*, Progress of Theoretical Physics, **96**, 4, 833-845, October (1996).
10. DE LEO, S. ve ABDEL-KHALEK, K., *Octonionik Quantum Mechanics and Complex Geometry*, Progress of Theoretical Physics, **96**, 4, 823-831, October (1996).
11. DERELİ, T., *Soyut Cebirler ve Fizikteki Simetri Yasaları*, Bilim ve Teknik Dergisi, 34-38, Aralık (1992).
12. GAMBA, A., *Maxwell Equations in Octonion Form*, II. Nuovo Cimento, **111A**, 293-299, (1998).
13. LOHMUS, J. PAAL, E. ve SORGSEPP, L., *About Nonassociativity in Mathematics and Physics*, Acta Applicandae Mathematicae, **50**, 3-31 (1998).

14. JAMES D. EDMONDS, JR., *Nature's Unnatural Numbers: An Octonion-Based Extension of the Dirac/Clifford algebra and Dirac/Maxwell Equations*, Physics Essays, **5**, **1**, 56-60, (1992).
15. ÖZEMRE, A. Y., *Çağdaş Fiziğe Giriş*, Cilt:1, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, (1983).
16. LIBOFF, R. L., *Introductory Quantum Mechanics*, Addison Wesley Longman, Inc., ISBN 0-201-87879-8, Cornell University, (1998).
17. DE LEO, S., *A One Component Dirac Equation*, International Journal of Modern Physics A, **11**, **21**, 3973-3985, (1996).
18. GÜRSEY, F. ve TZE, C. H., *On The Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, 202-345, (1992).