BİKUATERNİONLARIN ALTERNATİF CEBİRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI VE BİKUATERNİONİK DIRAC DENKLEMİ

Güner ÖZGÜR

Yüksck Lisans Tczi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Haziran-2002

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİKUATERNİONLARIN ALTERNATİF CEBİRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI VE BİKUATERNİONİK DIRAC DENKLEMİ

GÜNER ÖZGÜR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI
2002, 38 sayfa

Bu çalışmada, bir sayı sistemi olan bikuaternionların (kompleks kuaternionların) tanımı yapıldıktan sonra bu sayı sisteminin oluşturduğu alternatif cebirlerin genel özellikleri verilmiş ve karşılaştırılması örneklerle yapılmıştır. Ayrıca bikuaternionlar için tanımlanan her iki cebrin de matris temsilleri verilmiştir. Bikuaternion cebrinin birleşme özelliği bulunmasına karşılık değişme özelliği bulunmamaktadır. Bikuaternionlar için tanımlanan cebirlerin karşılaştırmasını yapmak için açısal momentum ifadesi tanımlanan her iki cebirle de bikuaternionik formda yazılmıştır. Ayrıca bikuaternionların matris temsillerinden yararlanarak da Dirac denklemi bikuaternionlarla ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuaternion, Kompleks kuaternion, Bikuaternion, Açısal momentum, Dirac denklemi

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE COMPARISON OF ALTERNATIVE ALGEBRAS OF BIQUATERNIONS AND BIQUATERNIONIC DIRAC EQUATION

GÜNER ÖZGÜR

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Science
Physics Program

Supervisor: Ass. Prof. Murat TANIŞLI

2002, 38 pages

In this thesis; after defining biquaternions (complex quaternions), general properties of alternative algebras formed by this base are given and defined some comparative examples. It is also shown that the matrix representation of these two algebras defined for biquaternions. Biquaternion algebra is not commutative but it is associative. In order to compare these two algebras for biquaternions, it is rewritten angular momentum in these algebras. It is also defined the Dirac equation using the matrix representation of biquaternions.

Keywords: Quaternion, Complex quaternion, Biquaternion, Angular momentum, Dirac equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında beni yönlendiren ve benden desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Murat Tanışlı'ya ve bu çalışma esnasında bana yardımcı olan herkese teşekkür ederim

Güner ÖZGÜR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Re$	: Reel sayılar uzayı
$\boldsymbol{C}$	: Kompleks sayılar uzayı
a, b, p, q	: Skalerin gösterimi
$\boldsymbol{p}$	: Kuaternionun gösterimi
$\boldsymbol{Q, P, Z, Z', A, B}$	: Bikuaternionların gösterimi
$Q_i, P_i, Z_i, Z_i', A_i, B_i$	: Bikuaternionların bileşenleri
$\hat{e}_i$	: Kuaternion ve bikuaternion birimleri
$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{Z}, \vec{Z}'$	: Vektörlerin gösterimi
$\boldsymbol{P^*, Q^*, Z^*, Z'^*}$	: Bikuaternionların kompleks eşleniği
$\overline{\boldsymbol{P}}, \overline{\boldsymbol{Q}}, \overline{\boldsymbol{Z}}, \overline{\boldsymbol{Z}'}$	: Bikuaternionların kuaternion eşleniği
$\boldsymbol{N(Q), N(Z)}$	: Bikuaternionun normu
$\boldsymbol{Q^{-1}, Z^{-1}}$	: Bikuaternionun tersi
σ_k	: Pauli spin matrisleri
$\boldsymbol{\Gamma}_j$	: Kuaternion taban elemanlarının 4×4 matris gösterimi
i	: Kompleks birim
$\vec{L}$	: Açısal momentum vektörü
$\vec{r}$	: Yer vektörü
$\vec{p}$	: Momentum vektörü
$\boldsymbol{L}$	: Açısal momentum bikuaternionu
$\boldsymbol{r}$	: Konum bikuaternionu
$\boldsymbol{p}$	: Momentum bikuaternionu
L_x, L_y, L_z	: Açısal momentum bileşenleri
x, y, z	: Konum bileşenleri
p_x, p_y, p_z	: momentum bileşenleri
$\boldsymbol{N(L)}$	: Açısal momentum bikuaternionunun normu

S_z	: Spin açısal momentumun z bileşeni
$\Psi_{(\vec{r})}$	: Dalga fonksiyonu
$\vec{\nabla}$	: Üç boyutlu gradyent operatörü
E	: Enerji
H	: Hamiltoniyen
$\times$	: Vektörel çarpım
$.$	: Skaler çarpım

1. GİRİŞ: KUATERNİON VE TARİHÇESİ

Kuaternionlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowman HAMILTON tarafından bulunmuştur. Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerine çalışmış ve nihayet 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğunun sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak bundan sonraki 10 yıl içinde çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan üçlü sayı sistemi $(q = a + ib + jc)$ üzerinde yoğunlaştırmıştır. Hamilton daha sonraları vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. İki kompleks sayının çarpımı $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ olduğu halde, Hamilton'un kompleks sayısı $(a + ib + jc)(a - ib - jc) = (a^2 + b^2 + c^2) - (ij + ji)bc$ oluyordu. 1843 yılında bu sayı sistemi üzerinde çarpma işleminin değişme özelliğinin gerçekleşmediğini anladı ve çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçerek $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımladı. Böylece Hamilton'un kompleks sayısı a, b, c, d $\in \Re$ olmak üzere $a + ib + jc + kd$ formunda oluştu ve buna kuaternion denildi [1, 2].

Yirminci yüzyılın başlarında Yale Üniversitesi profesörlerinden Gibbs uygun kuaternion için kullanım şeklini Hamilton'un çalışmalarını ve Rodrigues'e ait çalışmalarının anahtar noktalarını buna ilave ederek keşfetti ve çalışmalarını vektör nokta çarpımı ve bugün bildiğimiz vektörel çarpımla tamamladı.

Kuaternionlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaternionlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaternionlarda iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılarda kuaternionların bir alt kümesi olmalıdır. Bu sonuç, kuaternionların hem reel hem de kompleks sayıları kapsayan oldukça büyük bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir.

Fizikte ölçülebilen her şey reel olmak zorundadır. Bu nedenle reel sayılar bilimin doğuşundan itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur. Öte yandan kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özellikle devre analizlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Ne yazık ki bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki boyut getirir. Üç boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır. Fakat vektörlerin bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülmektedir.

Kuaternionlar vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, bunlara ilaveten bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut katar.

Kuaternionlar bölüm cebrine sahiptir. Kuaternion cebri birleşimli fakat değişimli olmayan $(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ gibi dört elemandan oluşur. Bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır:

$$\hat{e}_i^{\,2} = -1 \qquad (\boldsymbol{i}=1,2,3)$$

$$\hat{e}_0^{\,2} = 1 \qquad (\hat{e}_0 : \textit{birim eleman})$$

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = -\hat{e}_j \hat{e}_i \qquad (i=1,2,3\ ; j=1,2,3 \text{ ve } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j})$$

Bir $\boldsymbol{p}$ kuaternionu;

$$\boldsymbol{p} = p_0\hat{e}_0 + p_1\hat{e}_1 + p_2\hat{e}_2 + p_3\hat{e}_3$$

şeklinde ifade edilir. Burada p_0, p_1, p_2, p_3 reel sayılardır.

Kuaternion cebrinin keşfedildiği yıllarda A. Cayley, K. Clifford ve J. J. Sylvester gibi İngiliz cebir geleneğini geliştiren matematikçiler ve elektromagnetik teoriyi bulan J. C. Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler bu konuya önemli katkıda bulunmuşlardır. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebrini geliştiren fizikçiler, fizikte vektör cebrinin kullanımını benimsetmişlerdir [3].

Türk fizikçilerimizden Prof. Dr. Feza Gürsey de kuaternionik ve oktonionik yapıların önemini 1950'li yıllarda sezip, bu yapıları ve ilgili istisnai grup ve geometrileri çalışmaları ile fiziğe yerleştirmiştir. Kendisinin kuaternionlar üzerindeki çalışmaları konform grubu, genel relativitede bazı çözümler, Yang Mills teorisinde instanton çözümleri, kuaternionik analitisite ve Öklidiyen de Kahler yapısı ve bu uzayda diffeomorfizmlerin kuaternionlarla kovaryant gösterimi gibi geniş bir yelpaze oluşturur.

Kuaternionların temel fizik kanunlarının incelenmesinde oynadığı rolün önemi, özel relativite ve kuantum mekaniğinin keşfi ile daha iyi anlaşıldı. Feza Gürsey 1955 yılında özel relativiteyi kuaternionlar ile ifade etmeye çalıştığı bir yayın yaptı. Simetrik yapıları fark etmesindeki olağanüstü kolaylığı ile Feza Gürsey kuaterionların temel fizik kanunlarında önemli bir rol oynayacağını sezmişti [4].

Kuaternionlar son yıllarda her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Kuaternion cebri de kuaternionların kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermektedir. Kompleks sayı – kuaternion bileşiminden oluşan kompleks kuaternionlar (bikuaternionlar), fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Gurlebeck ve Wolfgang kompleks kuaternionları yani bikuaternionları özel relativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromagnetizmaya uygulayarak kompleks kuaternionların kendine oldukça geniş bir uygulama alanı bulduğunu göstermişlerdir.

Bugüne kadar fizikteki birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaternionlarla yeniden ifade edilmiştir. Chou [5] kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler kuantum mekaniğini, Jolly [6] matris ve kuaternionlar arasındaki izomorfizm, Tanışlı ve Özdaş robotik manipülatörlerin kuaternion dönüşümünü [17], Negi ve arkadaşları [1] tek kutup dynonslar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır.

Kompleks kuaternionların fizikteki uygulamaları daha çok genel ve özel relativite ile kuantum mekaniği alanında olmuştur. Kompleks kuaternionlarla Dirac relativistik denklemlerinin çeşitli formulasyonlarının ilk öncüsü Conway [7] olarak görülmekle birlikte bir çok bilim adamının yazılarında kompleks kuaternion ve kuantum mekaniğine ilişkin açıklamalar bulunur. Kompleks kuaternionlarla kuantum mekaniği Morita [8] tarafından yeniden formüle edilmiştir. Leo [9]'nun da kuaternion ve kompleks kuaternionlarla ilgili çalışmaları vardır.

Burada, bikuaternion (kompleks kuaternion) kavramı ve cebri açıklandıktan sonra kuantum mekaniğindeki uygulaması incelenecektir. Bu yapılırken bikuaternion cebri için diğer bir gösterimde ele alınmış, alternatif cebir oluşturulmuştur. Ayrıca Dirac Denklemi bikuaternionik formda yazılmıştır.

2. BİKUATERNİON

Bikuaternionlar bir hiperkompleks sayı çeşididir. $\boldsymbol{Q}$ gibi bir bikuaternion,

$$\boldsymbol{Q} = Q_0\hat{e}_0 + Q_1\hat{e}_1 + Q_2\hat{e}_2 + Q_3\hat{e}_3 \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ incelersek; $\hat{e}_0 = 1$ skaler birim olarak tanımlanır ve $\hat{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ ise komüte olmayan üçlüdür ve $\hat{e}_i^{\ 2} = -1$ dir. Burada çarpım;

$$\hat{e}_i\hat{e}_j = -\delta_{ij}\hat{e}_0 + \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k$$

kuralına uymaktadır. Bikuaternionlar aynı zamanda kompleks kuaternion olarak da adlandırılırlar.

2.1. Bikuaternionun Tanımı

Bikuaternion, kuaternionun kompleks bileşenlisidir. Yani kompleks bir kuaterniondur. $\boldsymbol{Q}$ bir bikuaternion olmak üzere,

$$\boldsymbol{Q} = Q_0\hat{e}_0 + Q_1\hat{e}_1 + Q_2\hat{e}_2 + Q_3\hat{e}_3$$

şeklinde yazılabilir.

Q_m $(m = 0,1,2,3)$ kompleks sayılar. Yani,

$$Q_m = a_m + ib_m \quad (m = 0,1,2,3 \ ve \ i^2 = -1) \tag{2.2}$$

dir.

Bu durumda;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= (a_0 + ib_0)\hat{e}_0 + (a_1 + ib_1)\hat{e}_1 + (a_2 + ib_2)\hat{e}_2 + (a_3 + ib_3)\hat{e}_3 \\ &= (a_0 + ib_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, a_3 + ib_3) = (a_0 + ib_0, \vec{a} + i\vec{b}) = (Q_0, \vec{Q})\end{aligned} \tag{2.3}$$

olur. Burada

Q_0 : Bikuaternionun Skaler Bileşeni

$\vec{Q} = Q_1\hat{e}_1 + Q_2\hat{e}_2 + Q_3\hat{e}_3$: Bikuaternionun Vektörel Bileşeni

dir. $a_i \ ve \ b_i$ $(i = 0,1,2,3)$ ise reel sayılardır. $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ bikuaternionun baz elemanlarıdır. i ise,

$$i^2 = -1$$

olan kompleks bir sayıdır.

2.2. Bikuaternion Cebri

2.2.1. Skaler Birim Eleman

Bikuaternion cebrinin skaler birim elemanı $\hat{e}_0 = 1$ dir. Buna göre,

$$1\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}1 = \boldsymbol{Q} \tag{2.4}$$

dur.

2.2.2. İki Bikuaternionun Eşitliği

$\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ gibi iki bikuaternionun birbirine eşit olabilmesi için karşılıklı elemanlarının eşit olması gerekir. $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ bikuaternionları,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= (a_0 + ib_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (a_1 + ib_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (a_2 + ib_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (a_3 + ib_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= P_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + P_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + P_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + P_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = (P_0, \vec{P})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= (c_0 + id_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (c_1 + id_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (c_2 + id_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (c_3 + id_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= Q_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Q_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Q_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = (Q_0, \vec{Q})\end{aligned}$$

ise bu iki bikuaternionun eşitliği;

$$a_0 + ib_0 = c_0 + id_0,\ a_1 + ib_1 = c_1 + id_1,\ a_2 + ib_2 = c_2 + id_2,\ a_3 + ib_3 = c_3 + id_3$$

şeklindedir. Ya da diğer bir ifadeyle,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \text{ ise } P_0 = Q_0,\ P_1 = Q_1,\ P_2 = Q_2 \text{ ve } P_3 = Q_3$$

olmalıdır.

2.2.3. Bikuaternionlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

İki bikuaternionun toplamı veya farkı, bu iki bikuaternionun karşılıklı elemanlarının toplam veya farkından oluşan bir diğer bikuaterniondur. $\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ iki bikuaternion olmak üzere;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \pm \boldsymbol{Q} &= (P_0 \pm Q_0)\hat{\boldsymbol{e}}_0 + (P_1 \pm Q_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (P_2 \pm Q_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (P_3 \pm Q_3)\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= [P_0 \pm Q_0, P_1 \pm Q_1, P_2 \pm Q_2, P_3 \pm Q_3]\end{aligned} \tag{2.5}$$

ile verilir. Görüldüğü gibi sonuç yine bir bikuaternion olmaktadır.

2.2.4. Bikuaternionlarda Çarpma İşlemi

$\boldsymbol{P}$ ve $\boldsymbol{Q}$ gibi iki bikuaternionun çarpımının sonucu yine bir bikuaternion olmaktadır ve aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
PQ=&[(a_0+ib_0)\hat{e}_0+(a_1+ib_1)\hat{e}_1+(a_2+ib_2)\hat{e}_2+(a_3+ib_3)\hat{e}_3][(c_0+id_0)\hat{e}_0+(c_1+id_1)\hat{e}_1\\
&+(c_2+id_2)\hat{e}_2+(c_3+id_3)\hat{e}_3]\\
&=(a_0c_0-a_1c_1-a_2c_2-a_3c_3-b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)\hat{e}_0\\
&+i(a_0d_0-a_1d_1-a_2d_2-a_3d_3+b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)\hat{e}_0\\
&+(a_0c_1+a_1c_0+a_2c_3-a_3c_2-b_0d_1-b_1d_0-b_2d_3+b_3d_2)\hat{e}_1\\
&+i(a_0d_1+a_1d_0+a_2d_3-a_3d_2+b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)\hat{e}_1\\
&+(a_0c_2-a_1c_3+a_2c_0+a_3c_1-b_0d_2+b_1d_3-b_2d_0-b_3d_1)\hat{e}_2\\
&+i(a_0d_2-a_1d_3+a_2d_0+a_3d_1+b_0c_2-b_1c_3+b_2c_0+b_3c_1)\hat{e}_2\\
&+(a_0c_3+a_1c_2-a_2c_1+a_3c_0-b_0d_3-b_1d_2+b_2d_1-b_3d_0)\hat{e}_3\\
&+i(a_0d_3+a_1d_2-a_2d_1+a_3d_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1+b_3c_0)\hat{e}_3\\
&=P_0Q_0-\vec{P}.\vec{Q}+P_0\vec{Q}+\vec{P}Q_0+i\vec{P}\times\vec{Q}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Görüldüğü gibi iki bikuaternionun çarpımı yine bir bikuaterniondur ve karşı gelen bileşenler cinsinden, $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{A}$ dir ve $\boldsymbol{A}=A_0\hat{e}_0+A_1\hat{e}_1+A_2\hat{e}_2+A_3\hat{e}_3$ $\quad A_i\in\boldsymbol{C}$ $(i=0,1,2,3)$

$$\begin{aligned}
A_0\hat{e}_0&=(a_0c_0-a_1c_1-a_2c_2-a_3c_3-b_0d_0+b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)\hat{e}_0\\
&\quad+i(a_0d_0-a_1d_1-a_2d_2-a_3d_3+b_0c_0-b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3)\hat{e}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1\hat{e}_1&=(a_0c_1+a_1c_0+a_2c_3-a_3c_2-b_0d_1-b_1d_0-b_2d_3+b_3d_2)\hat{e}_1\\
&\quad+i(a_0d_1+a_1d_0+a_2d_3-a_3d_2+b_0c_1+b_1c_0+b_2c_3-b_3c_2)\hat{e}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2\hat{e}_2&=(a_0c_2-a_1c_3+a_2c_0+a_3c_1-b_0d_2+b_1d_3-b_2d_0-b_3d_1)\hat{e}_2\\
&\quad+i(a_0d_2-a_1d_3+a_2d_0+a_3d_1+b_0c_2-b_1c_3+b_2c_0+b_3c_1)\hat{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3\hat{e}_3&=(a_0c_3+a_1c_2-a_2c_1+a_3c_0-b_0d_3-b_1d_2+b_2d_1-b_3d_0)\hat{e}_3\\
&\quad+i(a_0d_3+a_1d_2-a_2d_1+a_3d_0+b_0c_3+b_1c_2-b_2c_1+b_3c_0)\hat{e}_3
\end{aligned}$$

dir.

ÖRNEK:

$\boldsymbol{P}=i\hat{e}_2+\hat{e}_3$ *ve* $\boldsymbol{Q}=1+\hat{e}_1$ birer bikuaternion olmak üzere, $\boldsymbol{PQ}$ ve $\boldsymbol{QP}$ çarpımlarını bulalım ve bu çarpım sonucunda elde edilen sonuçların birer bikuaternion olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM:

$$\boldsymbol{PQ} = (i\hat{e}_2 + \hat{e}_3)(1 + \hat{e}_1) = i\hat{e}_2 - i\hat{e}_3 + \hat{e}_3 + \hat{e}_2 = (1 - i)\hat{e}_3 + (1 + i)\hat{e}_2$$

olur. $\boldsymbol{QP}$ çarpımı ise,

$$\boldsymbol{QP} = (1 + \hat{e}_1)(i\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = i\hat{e}_2 + \hat{e}_3 + i\hat{e}_3 - \hat{e}_2 = (1 + i)\hat{e}_3 + (-1 + i)\hat{e}_2$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi her iki çarpımında sonucu birer bikuaternion olmaktadır.

2.2.5. Bir Bikuaternionun Eşleniği

Bir bikuaternion için kuaternionik eşlenik ve kompleks eşlenik olmak üzere iki tür eşlenik tanımlanır. Kuaternion eşlenik; bikuaternionun vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesiyle elde edilir. $\overline{\boldsymbol{Q}}$ ile gösterilir ve

$$\overline{\boldsymbol{Q}} = Q_0\hat{e}_0 - Q_1\hat{e}_1 - Q_2\hat{e}_2 - Q_3\hat{e}_3 = \lfloor Q_0, -\vec{Q} \rfloor \qquad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Daha net bir şekilde yazacak olursak;

$$\boldsymbol{Q} = (a_0 + ib_0)\hat{e}_0 + (a_1 + ib_1)\hat{e}_1 + (a_2 + ib_2)\hat{e}_2 + (a_3 + ib_3)\hat{e}_3$$

ise

$$\overline{\boldsymbol{Q}} = (a_0 + ib_0)\hat{e}_0 - (a_1 + ib_1)\hat{e}_1 - (a_2 + ib_2)\hat{e}_2 - (a_3 + ib_3)\hat{e}_3$$

olur.

Kompleks eşlenik; bir bikuaternionun kompleks katsayılarının eşlenikleri alınarak elde edilir ve

$$\boldsymbol{Q}^* = Q_0^*\hat{e}_0 + Q_1^*\hat{e}_1 + Q_2^*\hat{e}_2 + Q_3^*\hat{e}_3 \qquad (2.8)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$Q_0^* = a_0 - ib_0$$

$$Q_1^* = a_1 - ib_1$$

$$Q_2^* = a_2 - ib_2$$

$$Q_3^* = a_3 - ib_3$$

dir. Bikuaternionun kompleks eşlenik ifadesini daha açık bir şekilde yazacak olursak;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^* &= (a_0 + ib_0)^*\hat{e}_0 + (a_1 + ib_1)^*\hat{e}_1 + (a_2 + ib_2)^*\hat{e}_2 + (a_3 + ib_3)^*\hat{e}_3 \\ &= (a_0 - ib_0)\hat{e}_0 + (a_1 - ib_1)\hat{e}_1 + (a_2 - ib_2)\hat{e}_2 + (a_3 - ib_3)\hat{e}_3\end{aligned}$$

elde edilir.

P ve Q iki bikuaternion olmak üzere, P ve Q çarpımlarının kuaternion eşleniği;

$$\overline{(PQ)} = \overline{Q}\,\overline{P} \tag{2.9}$$

olur ve P ve Q iki bikuaternionun kompleks eşleniği ise;

$$(PQ)^{*} = Q^{*}P^{*} \tag{2.10}$$

olarak verilir.

2.2.6. Bikuaternionun Normu

Bir Q bikuaternionununun normu, kendisi ile kuaternion eşleniğinin çarpımına eşittir.

$$N(Q) = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q = Q_0^{\,2} + Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2} + Q_3^{\,2} \tag{2.11}$$

Bu işlem sonucu elde edilen nicelik kompleks skalerdir [1]. Ama bir bikuaternionun normu $N(Q) = 0$ olabileceğinden Q'ya bir sıfır bölen denir. Bikuaternion cebri bu nedenle bir bölüm cebri oluşturmaz [10].

İki bikuaternion çarpımının normu, normlarının çarpımına eşittir. Yani

$$N(PQ) = (PQ)\overline{(PQ)} = PQ\overline{Q}\,\overline{P} = N(P)N(Q) \tag{2.12}$$

olur.

2.2.7. Bir Bikuaternionun Tersi

Normu sıfırdan farklı her Q bikuaternionu için, Q^{-1} ile ifade edilen bir tersi mevcuttur.

$N(Q) = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q$ olduğunu daha önce belirtmiştik. Eğer buradan Q^{-1}'i elde edecek olursak, bikuaternionun tersi ifadesi,

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{N(Q)} \tag{2.13}$$

ile verilir. Bir bikuaternionun tersi ile kendisinin çarpımı 1'e eşittir. Yani,

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1 \tag{2.14}$$

dir.

Bikuaternion cebri değişimli değildir, genel olarak Q ve P iki bikuaternion olmak üzere,

$$QP \neq PQ \tag{2.15}$$

dur. O halde bikuaternionlar değişimli olmayan fakat birleşimli bir cebir oluştururlar.

ÖRNEK:

$P = i\hat{e}_2 + \hat{e}_3$ ve $Q = 1 + \hat{e}_1$ birer bikuaternion olmak üzere $QP \neq PQ$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$PQ = (i\hat{e}_2 + \hat{e}_3)(1 + \hat{e}_1) = i\hat{e}_2 - i\hat{e}_3 + \hat{e}_3 + \hat{e}_2 = (1-i)\hat{e}_3 - (1-i)\hat{e}_2$$

olur. QP çarpımı ise,

$$QP = (1 + \hat{e}_1)(i\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = i\hat{e}_2 + \hat{e}_3 + i\hat{e}_3 - \hat{e}_2 = (1+i)\hat{e}_3 - (1-i)\hat{e}_2$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi $PQ \neq QP$

2.2.8. Bikuaternionlarda Bölme İşlemi

Q ; normu sıfır olmayan bir bikuaternion olmak üzere,

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1$$

koşulunu sağlayan Q^{-1} bikuaternionunun Q bikuaternionunun tersi olduğunu daha önce belirtmiştik. Aynı zamanda Q gibi bir bikuaternionun normunu da;

$$N(Q) = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q = Q_0^{\,2} + Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2} + Q_3^{\,2}$$

olduğunu göstermiştik. Buradan;

$$\frac{Q\overline{Q}}{N(Q)} = 1$$

yazabiliriz. O halde;

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{N(Q)}$$

olduğu açıktır. Yani bir Q bikuaternionunun tersi, kendi kuaternion eşleniğinin normuna bölümüyle elde edilen bir bikuaternion olmaktadır.

Bir P bikuaternionunun bir Q bikuaternionuna bölmek demek P'yi Q^{-1} ile çarpmak demektir. Ancak iki bikuaternionun çarpımı değişme özelliğine sahip olmadığından $\left(Q^{-1}P \neq PQ^{-1}\right)$, P bikuaternionunun bir Q bikuaternionuna farklı şekilde iki bölümü tanımlanabilir:

$$\frac{P}{Q}=\begin{cases} Q^{-1}P=\dfrac{\overline{Q}}{N(Q)}P : \text{Soldan Bölme} \\ PQ^{-1}=P\dfrac{\overline{Q}}{N(Q)} : \text{Sağdan Bölme} \end{cases} \tag{2.16}$$

ÖRNEK:

$$P=i\hat{e}_0+(2+3i)\hat{e}_1+(1+i)\hat{e}_2+2i\hat{e}_3$$

ve

$$Q=(1+i)\hat{e}_0+(3+2i)\hat{e}_1+(2+3i)\hat{e}_2+3\hat{e}_3$$

birer bikuaternion olmak üzere $\frac{P}{Q}$ 'nun değerini, soldan ve sağdan bölerek tayin edelim ve bunların eşit olmadığını gösterelim.

ÇÖZÜM:

Q 'nun normu;

$$\begin{aligned} N(Q)&=Q\overline{Q} \\ &=\left[(1+i)\hat{e}_0+(3+2i)\hat{e}_1+(2+3i)\hat{e}_2+3\hat{e}_3\right]\left[(1+i)\hat{e}_0-(3+2i)\hat{e}_1-(2+3i)\hat{e}_2-3\hat{e}_3\right] \\ &=\left[(1+i)^2+(3+2i)^2+(2+3i)^2+3^2\right] \\ &=(1+2i-1+9+12i-4+4+12i-9+9)=9+26i \end{aligned}$$

olduğundan soldan bölme;

$$\begin{aligned} Q^{-1}P&=\frac{\overline{Q}}{N(Q)}P \\ &=\frac{1}{9+26i}\left\{\left[(1+i)\hat{e}_0-(3+2i)\hat{e}_1-(2+3i)\hat{e}_2-3\hat{e}_3\right]\left[i\hat{e}_0+(2+3i)\hat{e}_1+(1+i)\hat{e}_2+2i\hat{e}_3\right]\right\} \\ &=\frac{1}{9+26i}[i\hat{e}_0+2\hat{e}_1+3i\hat{e}_1+\hat{e}_2+i\hat{e}_2+2i\hat{e}_3-\hat{e}_0+2i\hat{e}_1-3\hat{e}_1+i\hat{e}_2-\hat{e}_2-2\hat{e}_3 \\ &-3i\hat{e}_1+6\hat{e}_0+9i\hat{e}_0-3\hat{e}_3-3i\hat{e}_3+6i\hat{e}_2-2\hat{e}_1-4i\hat{e}_0+6\hat{e}_0+2i\hat{e}_3-2\hat{e}_3+4\hat{e}_2-2i\hat{e}_2 \\ &+4\hat{e}_3+6i\hat{e}_3+2\hat{e}_0+2i\hat{e}_0-4i\hat{e}_1+3\hat{e}_2+6i\hat{e}_3-9\hat{e}_3+3i\hat{e}_0-3\hat{e}_0+6\hat{e}_1-3i\hat{e}_3-6\hat{e}_2 \\ &-9i\hat{e}_2+3\hat{e}_1+3i\hat{e}_1+6i\hat{e}_0] \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{9+26i}\left[(-1+6+6+2-3)\hat{e}_0+i(1+9-4+2+3+6)\hat{e}_0\right.$$
$$+(2-3+6+3)\hat{e}_1+i(3+2-3-2-4+3)\hat{e}_1+(1-1+4+3-6)\hat{e}_2+i(1+1+6-2-9)\hat{e}_2$$
$$\left.+(-2-3-2+4-9)\hat{e}_3+i(2-3+2+6+6-3)\hat{e}_3\right]$$

$$Q^{-1}P=\frac{1}{9+26i}\left[(10+15i)\hat{e}_0+(8-i)\hat{e}_1+(1-3i)\hat{e}_2+(-12+10i)\hat{e}_3\right]$$

değerine sahiptir. Sağdan bölme ise;

$$PQ^{-1}=P\frac{\overline{Q}}{N(Q)}$$
$$=\frac{1}{9+26i}\left[i\hat{e}_0+(2+3i)\hat{e}_1+(1+i)\hat{e}_2+2i\hat{e}_3\right]\left[(1+i)\hat{e}_0-(3+2i)\hat{e}_1-(2+3i)\hat{e}_2-3\hat{e}_3\right]$$
$$=\frac{1}{9+26i}\left[i\hat{e}_0-\hat{e}_0-3i\hat{e}_1+2\hat{e}_1-2i\hat{e}_2+3\hat{e}_2-3i\hat{e}_3+2\hat{e}_1+2i\hat{e}_1+6\hat{e}_0+4i\hat{e}_0-4\hat{e}_3\right.$$
$$-6i\hat{e}_3+6\hat{e}_2+3i\hat{e}_1-3\hat{e}_1+9i\hat{e}_0-6\hat{e}_0-6i\hat{e}_3+9\hat{e}_3+9i\hat{e}_2+\hat{e}_2+i\hat{e}_2+3\hat{e}_3+2i\hat{e}_3$$
$$+2\hat{e}_0+3i\hat{e}_0-3\hat{e}_1+i\hat{e}_2-\hat{e}_2+3i\hat{e}_3-2\hat{e}_3+2i\hat{e}_0-3\hat{e}_0-3i\hat{e}_1+2i\hat{e}_3-2\hat{e}_3-6i\hat{e}_2$$
$$\left.+4\hat{e}_2+4i\hat{e}_1-6\hat{e}_1+6i\hat{e}_0\right]$$
$$PQ^{-1}=\frac{1}{9+26i}\left[(-2+25i)\hat{e}_0+(-8+3i)\hat{e}_1+(13+3i)\hat{e}_2+(4-8i)\hat{e}_3\right]$$

şeklinde olmaktadır.

2.2.9. Birim Bikuaternion

Normu bir olan bikuaterniona birim bikuaternion denir [1]. Yani, $\boldsymbol{Q}$; bikuaternion olmak üzere;

$$N(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}\overline{\boldsymbol{Q}}=\overline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}=Q_0^{\;2}+Q_1^{\;2}+Q_2^{\;2}+Q_3^{\;2}=1 \tag{2.17}$$

ise $\boldsymbol{Q}$ 'ya birim bikuaternion denir.

2.3. Bikuaternion İçin Farklı Bir Gösterim ve Alternatif Bir Cebir

Burada bikuaternionlar için farklı bir gösterim ve alternatif bir cebir sunulacaktır.

Bu cebirler arasında temelde bir fark olmamasına karşılık gösterim farkından dolayı bir cebir farklılığı olmaktadır. Bu ikisi arasındaki en büyük fark $\hat{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ birim baz elemanları arasında olmaktadır. İlk cebirden bilindiği üzere $\hat{e}_i^{\,2} = -1$ idi. Burada ise $\hat{e}_i^{\,2} = 1$ olmaktadır. Bunların kendi aralarındaki çarpımları da farklılık göstermektedir. Daha önce $\hat{e}_i\hat{e}_j = -\delta_{ij}\hat{e}_0 + \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k$ iken şimdi ise $\hat{e}_i\hat{e}_j = \delta_{ij}\hat{e}_0 + i\varepsilon_{ijk}\hat{e}_k$ olmaktadır. Dolayısıyla buna bağlı olarak da cebirler arasında bazı temel işlemlerde farklılıklar meydana gelmektedir. Bu farklılıklar iki bikuaternionun çarpımı, normu, tersi ve bölümü ifadelerinde karşımıza çıkmaktadır.

2.3.1. Skaler Birim Eleman

Bikuaternionun bu cebrine ait skaler birim elemanı da $\hat{e}_0 = 1$ dir. Buna göre,

$$1\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}1 = \boldsymbol{Z} \tag{2.18}$$

dir.

2.3.2. İki Bikuaternionun Eşitliği

$\boldsymbol{Z}$ ve $\boldsymbol{Z}'$ gibi iki bikuaternionun birbirine eşitliği ;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= (a_0 + ib_0)\hat{e}_0 + (a_1 + ib_1)\hat{e}_1 + (a_2 + ib_2)\hat{e}_2 + (a_3 + ib_3)\hat{e}_3 \\ &= Z_0\hat{e}_0 + Z_1\hat{e}_1 + Z_2\hat{e}_2 + Z_3\hat{e}_3 = (Z_0, \vec{Z}) \\ \boldsymbol{Z}' &= (c_0 + id_0)\hat{e}_0 + (c_1 + id_1)\hat{e}_1 + (c_2 + id_2)\hat{e}_2 + (c_3 + id_3)\hat{e}_3 \\ &= Z_0'\hat{e}_0 + Z_1'\hat{e}_1 + Z_2'\hat{e}_2 + Z_3'\hat{e}_3 = (Z_0', \vec{Z}')\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Yani,

$$a_0 + ib_0 = c_0 + id_0,\ a_1 + ib_1 = c_1 + id_1,\ a_2 + ib_2 = c_2 + id_2,\ a_3 + ib_3 = c_3 + id_3$$

olmalıdır. Ya da diğer bir ifadeyle,

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}'$$

ise aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$$Z_0 = Z_0',\ Z_1 = Z_1',\ Z_2 = Z_2' \text{ ve } Z_3 = Z_3'$$

2.3.3. Bikuaternionlarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

İki bikuaternionun toplamı veya farkı, yine önceki cebirde olduğu gibi, bu iki bikuaternionun karşılıklı elemanlarının toplam veya farkından oluşan bir diğer bikuaterniondur. $\boldsymbol{Z}$ ve $\boldsymbol{Z}'$ iki bikuaternion olmak üzere;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z} \pm \boldsymbol{Z}' &= (Z_0 \pm Z_0')\hat{e}_0 + (Z_1 \pm Z_1')\hat{e}_1 + (Z_2 \pm Z_2')\hat{e}_2 + (Z_3 \pm Z_3')\hat{e}_3 \\ &= [Z_0 \pm Z_0', Z_1 \pm Z_1', Z_2 \pm Z_2', Z_3 \pm Z_3'] \end{aligned} \tag{2.19}$$

şeklindeki gibi yine bir bikuaterniondur.

2.3.4. Bikuaternionlarda Çarpma İşlemi

$\boldsymbol{Z}$ ve $\boldsymbol{Z}'$ gibi iki bikuaternionun çarpımının sonucu bikuaternion olarak farklı bir biçimde,

$$\hat{e}_i^{\,2} = 1$$

ve

$$\hat{e}_1\hat{e}_2 = i\hat{e}_3,\ \hat{e}_2\hat{e}_3 = i\hat{e}_1,\ \hat{e}_3\hat{e}_1 = i\hat{e}_2,\ \hat{e}_1\hat{e}_3 = -i\hat{e}_2,\ \hat{e}_3\hat{e}_2 = -i\hat{e}_1,\ \hat{e}_2\hat{e}_1 = -i\hat{e}_3 \tag{2.20}$$

olmaktadır. Buna göre $\boldsymbol{ZZ}'$ çarpımı;

$$\begin{aligned} ZZ' &= [(a_0+ib_0)\hat{e}_0 + (a_1+ib_1)\hat{e}_1 + (a_2+ib_2)\hat{e}_2 + (a_3+ib_3)\hat{e}_3][(c_0+id_0)\hat{e}_0 + (c_1+id_1)\hat{e}_1 \\ &\quad + (c_2+id_2)\hat{e}_2 + (c_3+id_3)\hat{e}_3] \\ &= (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 - b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\hat{e}_0 \\ &\quad + i(a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 + b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\hat{e}_0 \\ &\quad + (a_0c_1 + a_1c_0 - a_2d_3 - a_3c_2 - b_0d_1 - b_1d_0 - b_2c_3 + b_3d_2)\hat{e}_1 \\ &\quad + i(a_0d_1 + a_1d_0 + a_2c_3 - a_3c_2 + b_0c_1 + b_1c_0 - b_2d_3 + b_3d_2)\hat{e}_1 \\ &\quad + (a_0c_2 + a_1d_3 + a_2c_0 - a_3d_1 - b_0d_2 + b_1c_3 - b_2d_0 - b_3c_1)\hat{e}_2 \\ &\quad + i(a_0d_2 - a_1c_3 + a_2d_0 + a_3c_1 + b_0c_2 + b_1d_3 + b_2c_0 - b_3d_1)\hat{e}_2 \\ &\quad + (a_0c_3 - a_1d_2 + a_2d_1 + a_3c_0 - b_0d_3 - b_1c_2 + b_2c_1 - b_3d_0)\hat{e}_3 \\ &\quad + i(a_0d_3 + a_1c_2 - a_2c_1 + a_3d_0 + b_0c_3 - b_1d_2 + b_2d_1 + b_3c_0)\hat{e}_3 \\ &= Z_0Z_0' + \vec{Z}.\vec{Z}' + Z_0\vec{Z}' + \vec{Z}Z_0' + i\vec{Z}\times\vec{Z}' \end{aligned} \tag{2.21}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi burada da iki bikuaternionun çarpımı yine bir bikuaternion olmaktadır.

Diğer taraftan farklı olarak burada sadece $\vec{Z}.\vec{Z}'$ çarpımının işareti değişmektedir.

$\boldsymbol{ZZ}' = \boldsymbol{B}$ dir ve $\boldsymbol{B} = B_0\hat{e}_0 + B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$ $\quad B_i \in C \quad (i = 0,1,2,3)$ ve

bileşenler cinsinden

$$B_0\hat{e}_0 = (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 - b_0d_0 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3)\hat{e}_0$$
$$+ i(a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 + b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\hat{e}_0$$

$$B_1\hat{e}_1 = (a_0c_1 + a_1c_0 - a_2d_3 - a_3c_2 - b_0d_1 - b_1d_0 - b_2c_3 + b_3d_2)\hat{e}_1$$
$$+ i(a_0d_1 + a_1d_0 + a_2c_3 - a_3c_2 + b_0c_1 + b_1c_0 - b_2d_3 + b_3d_2)\hat{e}_1$$

$$B_2\hat{e}_2 = (a_0c_2 + a_1d_3 + a_2c_0 - a_3d_1 - b_0d_2 + b_1c_3 - b_2d_0 - b_3c_1)\hat{e}_2$$
$$+ i(a_0d_2 - a_1c_3 + a_2d_0 + a_3c_1 + b_0c_2 + b_1d_3 + b_2c_0 - b_3d_1)\hat{e}_2$$

$$B_3\hat{e}_3 = (a_0c_3 - a_1d_2 + a_2d_1 + a_3c_0 - b_0d_3 - b_1c_2 + b_2c_1 - b_3d_0)\hat{e}_3$$
$$+ i(a_0d_3 + a_1c_2 - a_2c_1 + a_3d_0 + b_0c_3 - b_1d_2 + b_2d_1 + b_3c_0)\hat{e}_3$$

dir.

ÖRNEK:

$\boldsymbol{Z} = i\hat{e}_2 + \hat{e}_3$ *ve* $\boldsymbol{Z}' = 1 + \hat{e}_1$ birer bikuaternion olmak üzere, $\boldsymbol{ZZ}'$ ve $\boldsymbol{Z'Z}$ çarpımlarını bulalım ve bu çarpım sonucunda elde edilen sonuçların birer bikuaternion olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM:

$$\boldsymbol{ZZ}' = (i\hat{e}_2 + \hat{e}_3)(1 + \hat{e}_1) = i\hat{e}_2 + \hat{e}_3 + \hat{e}_3 + i\hat{e}_2 = 2(i\hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

olur. $\boldsymbol{Z'Z}$ çarpımı ise,

$$\boldsymbol{Z'Z} = (1 + \hat{e}_1)(i\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = i\hat{e}_2 + \hat{e}_3 - \hat{e}_3 - i\hat{e}_2 = 0$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi her iki çarpımında sonucu birer bikuaternion olmaktadır. $\boldsymbol{Z'Z}$ çarpımının sonucu ise sıfır bikuaternionu olarak karşımıza çıkmaktadır.

2.3.5. Bir Bikuaternionun Eşleniği

Bir bikuaternion için kuaternionik eşlenik ve kompleks eşlenik olmak üzere iki tür eşlenik tanımlanmıştı. Kuaternion eşlenik; yine daha önce olduğu gibi bikuaternionun vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesiyle elde edilir. $\overline{\boldsymbol{Z}}$ ile gösterilir ve

$$\overline{\boldsymbol{Z}} = Z_0\hat{e}_0 - Z_1\hat{e}_1 - Z_2\hat{e}_2 - Z_3\hat{e}_3 = \left[Z_0, -\vec{Z}\right] \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilir. Daha net bir şekilde yazacak olursak;

$$\boldsymbol{Z} = (a_0 + ib_0)\hat{e}_0 + (a_1 + ib_1)\hat{e}_1 + (a_2 + ib_2)\hat{e}_2 + (a_3 + ib_3)\hat{e}_3$$

ise

$$\overline{Z} = (a_0 + ib_0)\hat{e}_0 - (a_1 + ib_1)\hat{e}_1 - (a_2 + ib_2)\hat{e}_2 - (a_3 + ib_3)\hat{e}_3$$

olacaktır.

Kompleks eşlenik; önceki cebirde ifade edildiği gibi bir bikuaternionun kompleks katsayılarının eşlenikleri alınarak elde edilir ve

$$Z^* = Z_0{}^*\hat{e}_0 + Z_1{}^*\hat{e}_1 + Z_2{}^*\hat{e}_2 + Z_3{}^*\hat{e}_3 \qquad (2.23)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$Z_0{}^* = a_0 - ib_0$$

$$Z_1{}^* = a_1 - ib_1$$

$$Z_2{}^* = a_2 - ib_2$$

$$Z_3{}^* = a_3 - ib_3$$

dir. Kompleks eşlenik ifadesini daha açık bir ifadeyle yazacak olursak;

$$\begin{aligned} Z^* &= (a_0 + ib_0)^*\hat{e}_0 + (a_1 + ib_1)^*\hat{e}_1 + (a_2 + ib_2)^*\hat{e}_2 + (a_3 + ib_3)^*\hat{e}_3 \\ &= (a_0 - ib_0)\hat{e}_0 + (a_1 - ib_1)\hat{e}_1 + (a_2 - ib_2)\hat{e}_2 + (a_3 - ib_3)\hat{e}_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Z ve Z' iki bikuaternion olmak üzere Z ve Z' çarpımlarının kuaternion eşleniği ile kompleks eşleniği yine aynı şekildedir ve sırasıyla;

$$\left(\overline{ZZ'}\right) = \overline{Z'}\,\overline{Z} \qquad (2.24)$$

ve

$$(ZZ')^* = Z'^*Z^* \qquad (2.25)$$

olarak verilir.

2.3.6. Bikuaternionun Normu

Bir Z bikuaternionunun normu, kendisi ile kuaternion eşleniğinin çarpımına eşitti. Buna göre,

$$N(Z) = Z\overline{Z} = \overline{Z}Z = Z_0{}^2 - Z_1{}^2 - Z_2{}^2 - Z_3{}^2 \qquad (2.26)$$

olarak tanımlanabilir.

Bu işlem sonucu elde edilen nicelik yine kompleks skalerdir. Bir bikuaternionun normu $N(Z)=0$ olabileceğinden Z'ye bir sıfır bölen denir. Bikuaternion cebri bu nedenle bir bölüm cebri oluşturmaz [10].

İki bikuaternion çarpımının normu, normlarının çarpımına eşittir. Yani

$$N(ZZ')=(ZZ')(\overline{ZZ'})=ZZ'\overline{Z'}\overline{Z}=N(Z)N(Z') \tag{2.27}$$

dir.

2.3.7. Bikuaternionun Tersi

Normu sıfırdan farklı her Z bikuaternionu için, Z^{-1} ile ifade edilen bir tersi mevcuttur.

$N(Z)=Z\overline{Z}=\overline{Z}Z$ olduğunu daha önce belirtmiştik. Eğer buradan Z^{-1}'i çekecek olursak, bikuaternionun tersi ifadesi,

$$Z^{-1}=\frac{\overline{Z}}{N(Z)} \tag{2.28}$$

ile verilir. Bir bikuaternionun tersi ile kendisinin çarpımı 1'e eşittir. Yani,

$$ZZ^{-1}=Z^{-1}Z=1 \tag{2.29}$$

dir.

Bikuaternionun bu cebri de değişimli değildir, genel olarak Z ve Z' iki bikuaternion olmak üzere,

$$ZZ'\neq Z'Z \tag{2.30}$$

şeklindedir. O halde bikuaternionlar değişimli olmayan fakat birleşimli bir cebir oluştururlar.

ÖRNEK:

$Z=i\hat{e}_2+\hat{e}_3$ ve $Z'=1+\hat{e}_1$ birer bikuaternion olmak üzere $ZZ'\neq Z'Z$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$ZZ'=(i\hat{e}_2+\hat{e}_3)(1+\hat{e}_1)=i\hat{e}_2+\hat{e}_3+\hat{e}_3+i\hat{e}_2=2(i\hat{e}_2+\hat{e}_3)$$

dir. $Z'Z$ çarpımı ise,

$$Z'Z=(1+\hat{e}_1)(i\hat{e}_2+\hat{e}_3)=i\hat{e}_2+\hat{e}_3-\hat{e}_3-i\hat{e}_2=0$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi $ZZ'\neq Z'Z$ dir.

2.3.8. Bikuaternionlarda Bölme İşlemi

Z ; $N(Z) \neq 0$ olmak üzere,

$ZZ^{-1} = Z^{-1}Z = 1$

koşulunu sağlayan Z^{-1} bikuaternionuna Z bikuaternionunun tersi olduğunu daha önce belirtmiştik. Aynı zamanda Z gibi bir bikuaternionun normu da;

$$N(Z) = Z\overline{Z} = \overline{Z}Z = Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2$$

şeklindeydi Buradan;

$$\frac{Z\overline{Z}}{N(Z)} = 1$$

yazılabilir. O halde;

$$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{N(Z)}$$

olduğu açıktır. Yani bir Z bikuaternionunun tersi, kendi kuaternion eşleniğinin normuna bölümüyle elde edilen bir bikuaternion olmaktadır.

Bir Z' bikuaternionunun bir Z bikuaternionuna bölmek demek, Z' bikuaternionunu Z^{-1} ile çarpmak demektir. Ancak bikuaternionun çarpımı değişme özelliğine sahip olmadığından $\left(Z^{-1}Z' \neq Z'Z^{-1}\right)$, Z' bikuaternionunun bir Z bikuaternionuna farklı şekilde iki bölümü mevcuttur:

$$\frac{Z'}{Z} = \begin{cases} Z^{-1}Z' = \dfrac{\overline{Z}}{N(Z)}Z' : \text{Soldan Bölme} \\ Z'Z^{-1} = Z'\dfrac{\overline{Z}}{N(Z)} : \text{Sağdan Bölme} \end{cases} \tag{2.31}$$

ÖRNEK:

$$Z = (1+i)\hat{e}_0 + (3+2i)\hat{e}_1 + (2+3i)\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3$$

ve

$$Z' = i\hat{e}_0 + (2+3i)\hat{e}_1 + (1+i)\hat{e}_2 + 2i\hat{e}_3$$

bikuaternionlar olmak üzere $\dfrac{Z'}{Z}$ 'nun değerini soldan ve sağdan bölerek tayin ediniz ve bunların eşit olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$\boldsymbol{Z}$ 'nun normu;

$$
\begin{aligned}
N(Z) &= Z\overline{Z} \\
&= [(1+i)\hat{e}_0 + (3+2i)\hat{e}_1 + (2+3i)\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3][(1+i)\hat{e}_0 - (3+2i)\hat{e}_1 - (2+3i)\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3] \\
&= [(1+i)^2 - (3+2i)^2 - (2+3i)^2 - 3^2] \\
&= (1+2i-1-9-12i+4-4-12i+9-9) = -9-22i
\end{aligned}
$$

olduğundan soldan bölme;

$$
\begin{aligned}
Z^{-1}Z' &= \frac{\overline{Z}}{N(Z)}Z' \\
&= -\frac{1}{9+22i}\{[(1+i)\hat{e}_0 - (3+2i)\hat{e}_1 - (2+3i)\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3][i\hat{e}_0 + (2+3i)\hat{e}_1 + (1+i)\hat{e}_2 + 2i\hat{e}_3]\} \\
&= -\frac{1}{9+22i}[i\hat{e}_0 + 2\hat{e}_1 + 3i\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + i\hat{e}_2 + 2i\hat{e}_3 - \hat{e}_0 + 2i\hat{e}_1 - 3\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 - \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 \\
&\quad - 3i\hat{e}_1 - 6\hat{e}_0 - 9i\hat{e}_0 - 3i\hat{e}_3 + 3\hat{e}_3 - 6\hat{e}_2 + 2\hat{e}_1 - 4i\hat{e}_0 + 6\hat{e}_0 + 2\hat{e}_3 + 2i\hat{e}_3 - 4i\hat{e}_2 - 2i\hat{e}_2 \\
&\quad + 4i\hat{e}_3 - 6\hat{e}_3 - 2\hat{e}_0 - 2i\hat{e}_0 + 4\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 6\hat{e}_3 - 9i\hat{e}_3 - 3i\hat{e}_0 + 3\hat{e}_0 + 6i\hat{e}_1 - 3i\hat{e}_3 - 6i\hat{e}_2 \\
&\quad + 9\hat{e}_2 + 3i\hat{e}_1 - 3\hat{e}_1 - 6i\hat{e}_0] \\
&= -\frac{1}{9+22i}[(-1-6+6-2+3)\hat{e}_0 + i(1-4-9-3-2-6)\hat{e}_0 \\
&\quad + (2-3+2+4-3)\hat{e}_1 + i(3+2-3+6-3)\hat{e}_1 \\
&\quad + (1-1-6+3+9)\hat{e}_2 + i(1+1-4-2-6)\hat{e}_2 \\
&\quad + (-2+3+2-6-6)\hat{e}_3 + i(2-3+2+4-9-3)\hat{e}_3]
\end{aligned}
$$

$$
Z^{-1}Z' = -\frac{1}{9+22i}[(2-23i)\hat{e}_0 + (2+5i)\hat{e}_1 + (6-10i)\hat{e}_2 + (-9-7i)\hat{e}_3]
$$

değerine sahiptir. Sağdan bölme ise;

$$
\begin{aligned}
Z'Z^{-1} &= Z'\frac{\overline{Z}}{N(Z)} \\
&= -\frac{1}{9+22i}[i\hat{e}_0 + (2+3i)\hat{e}_1 + (1+i)\hat{e}_2 + 2i\hat{e}_3][(1+i)\hat{e}_0 - (3+2i)\hat{e}_1 - (2+3i)\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3] \\
&= -\frac{1}{9+22i}[i\hat{e}_0 - \hat{e}_0 - 3i\hat{e}_1 + 2\hat{e}_1 - 2i\hat{e}_2 + 3\hat{e}_2 - 3i\hat{e}_3 + 2\hat{e}_1 + 2i\hat{e}_1 - 6\hat{e}_0 - 4i\hat{e}_0 - 4i\hat{e}_3 \\
&\quad + 6\hat{e}_3 + 6i\hat{e}_2 + 3i\hat{e}_1 - 3\hat{e}_1 - 9i\hat{e}_0 + 6\hat{e}_0 + 6\hat{e}_3 + 9i\hat{e}_3 - 9\hat{e}_2 + \hat{e}_2 + i\hat{e}_2 + 3i\hat{e}_3 - 2\hat{e}_3 \\
&\quad - 2\hat{e}_0 - 3i\hat{e}_0 - 3i\hat{e}_1 + i\hat{e}_2 - \hat{e}_2 - 3\hat{e}_3 - 2i\hat{e}_3 - 2i\hat{e}_0 + 3\hat{e}_0 + 3\hat{e}_1 + 2i\hat{e}_3 - 2\hat{e}_3 + 6\hat{e}_2 \\
&\quad + 4i\hat{e}_2 - 4\hat{e}_1 - 6i\hat{e}_1 - 6i\hat{e}_0] \\
&= -\frac{1}{9+22i}[(-1-6+6-2+3)\hat{e}_0 + i(1-4-9-3-2-6)\hat{e}_0 \\
&\quad + (2+2-3+3-4)\hat{e}_1 + i(-3+2+3-3-6)\hat{e}_1 \\
&\quad + (3-9+1-1+6)\hat{e}_2 + i(-2+6+1+1+4)\hat{e}_2 \\
&\quad + (6+6-2-3-2)\hat{e}_3 + i(-3-4+9+3-2+2)\hat{e}_3]
\end{aligned}
$$

$$
Z'Z^{-1} = -\frac{1}{9+22i}[-23i\hat{e}_0 + 7i\hat{e}_1 + 10i\hat{e}_2 + (5+5i)\hat{e}_3]
$$

şeklindedir. Burada kullanılan bikuaternionlar, daha önceki bölümde, bölme işleminde, kullanılan bikuaternionlardan farklıdır. Burada $\hat{e}_i^{\,2} = 1$ olduğundan, sonuçlar eşit çıkmamaktadır.

2.3.9. Birim Bikuaternion

Normu bir olan bikuaterniona birim bikuaternion denir. Yani,

$$N(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z}\overline{\boldsymbol{Z}} = \overline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z} = Z_0^{\,2} - Z_1^{\,2} - Z_2^{\,2} - Z_3^{\,2} = 1 \tag{2.32}$$

ise bu durumda $\boldsymbol{Z}$ 'ye birim bikuaternion denir.

2.4. Bikuaternionların Matris Temsili

2.4.1. Bikuaternionların 2×2 Matris Temsili

$\boldsymbol{I}$: 2×2 birim matris ve σ_k'ler $(k = 1,2,3)$ Pauli spin matrisleri ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $\boldsymbol{I}$ ve $-i\sigma_k$ matrislerinin cebri bikuaternionun bazları olan $\hat{e}_0$ ve $\hat{e}_i$'lerin cebri ile aynıdır. O halde $\hat{e}_0$ ve $\hat{e}_i$'ler;

$$\hat{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix};\ \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

2×2 matrisleri ,ile temsil edilirler [11]

Buna göre;

$$\boldsymbol{Q} = Q_0\hat{e}_0 + Q_1\hat{e}_1 + Q_2\hat{e}_2 + Q_3\hat{e}_3 = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \tag{2.34}$$

şeklindeki bikuaternion;

$$\boldsymbol{Q} = Q_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Q_1\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} + Q_2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + Q_3\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 - iQ_3 & -Q_2 - iQ_1 \\ Q_2 - iQ_1 & Q_0 + iQ_3 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

2×2 kompleks değerli bir matris olarak ifade edilebilir. Buradaki A_{11} elemanına a ve A_{21} elemanına b dersek;

$$a = Q_0 - iQ_3 \text{ ve } b = Q_2 - iQ_1$$

A_{22} elemanı; $Q_0 + iQ_3 = a^*$ ve A_{12} elemanı; $-Q_2 - iQ_1 = -b^*$ olacaktır. Buna göre $\boldsymbol{Q}$ bikuaternionu $\boldsymbol{a}$ ve b kompleks sayıları cinsinden;

$$Q=\begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

olarak yazılır ve determinantı bize Q bikuaternionunun normunu verir:

$$\det Q = N(Q) \tag{2.37}$$

2.4.2. Bikuaternionların 4×4 Matris Temsili

Bikuaternionlar 4×4 matris formunda ifade edilebilirler. Bikuaternionun baz elemanları ile i kompleks sayısının 4×4 matris temsili,

$$\hat{e}_0=\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix};\ \hat{e}_1=\begin{bmatrix} 0&i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&i&0 \end{bmatrix};\ \hat{e}_2=\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_3=\begin{bmatrix} -i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i \end{bmatrix};\ i=\begin{bmatrix} 0&0&i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&i&0&0 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

ile verilir. Buna göre,

$$Q=(a_0+ib_0)\hat{e}_0+(a_1+ib_1)\hat{e}_1+(a_2+ib_2)\hat{e}_2+(a_3+ib_3)\hat{e}_3$$

şeklinde ifade edilen Q bikuaternionunun 4×4 matris formundaki yazılışı,

$$Q=\begin{bmatrix} a_0-ia_3 & ia_1+a_2 & ib_0+b_3 & -b_1+ib_2 \\ ia_1-a_2 & a_0+ia_3 & -b_1-ib_2 & ib_0-b_3 \\ ib_0+b_3 & -b_1+ib_2 & a_0-ia_3 & ia_1+a_2 \\ -b_1-ib_2 & ib_0-b_3 & ia_1-a_2 & a_0+ia_3 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$c_0=a_0-ia_3;\ c_1=ia_1-a_2;\ c_2=ib_0+b_3;\ c_3=-b_1-ib_2$$

olarak ifade edilirse, bir bikuaternionun 4×4 matris temsili;

$$Q=\begin{bmatrix} c_0 & -c_1^* & c_2 & c_3^* \\ c_1 & c_0^* & c_3 & -c_2^* \\ c_2 & c_3^* & c_0 & -c_1^* \\ c_3 & -c_2^* & c_1 & c_0^* \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

ile gösterilir. Burada c_0, c_1, c_2 ve c_3 kompleks sayılardır. (*) ise kompleks eşleniği ifade etmektedir [12, 13].

2.4.3. Bikuaternionların 8×8 Matris Temsili

Sekiz bileşenli olan bikuaternion, 8×8 reel matrisle de temsil edilir. $\boldsymbol{Q}$ bikuaternionu için $\boldsymbol{Q}$ matrisi;

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

olarak tanımlanır. $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ reel kuaternionlardır ve

$$\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{\Gamma}_0+a_1\boldsymbol{\Gamma}_1+a_2\boldsymbol{\Gamma}_2+a_3\boldsymbol{\Gamma}_3 \tag{2.42a}$$

$$\boldsymbol{B}=b_0\boldsymbol{\Gamma}_0+b_1\boldsymbol{\Gamma}_1+b_2\boldsymbol{\Gamma}_2+b_3\boldsymbol{\Gamma}_3 \tag{2.42b}$$

şeklinde anti-simetrik matrislerle ifade edilirler.

Eşitlik (2.41) ve eşitlik (2.42)'ye göre de bikuaternionun $\boldsymbol{Q}$ matris temsili;

$$\boldsymbol{Q}=(a_0+Jb_0)\boldsymbol{\alpha}_0+(a_1+Jb_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(a_2+Jb_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(a_3+Jb_3)\boldsymbol{\alpha}_3 \tag{2.43}$$

ile verilir. Burada;

$$J=\varepsilon\times\boldsymbol{I}_4=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_4 \\ -\boldsymbol{I}_4 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \varepsilon=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.44a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{I}_2\times\boldsymbol{I}_4=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_4 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix} \tag{2.44b}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{I}_2\times\boldsymbol{\Gamma}_j=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_j & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Gamma}_j \end{bmatrix} \quad (j=1,2,3)) \tag{2.44c}$$

dir. $\boldsymbol{\Gamma}_j$ matrisleri ise $(j=1,2,3)$ için sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\boldsymbol{\Gamma}_1=\begin{bmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.45a}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.45b}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.45c)$$

$\boldsymbol{I}_2$ ve $\boldsymbol{I}_4$ sırasıyla 2×2 ve 4×4 birim matrislerdir. Böylece (2.41) denklemi ile verilen bikuaternion $\boldsymbol{Q}$ 'nun $\boldsymbol{\alpha}_0$ ve $\boldsymbol{\alpha}_j$ matrisleriyle 8×8 formu elde dilir. Burada $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ ve $\boldsymbol{\alpha}_3$ ifadeleri aşağıdaki çarpım kurallarına uyar:

$$\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha}_j$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0^{\ 2} = -\boldsymbol{\alpha}_j^{\ 2} = \boldsymbol{I}_8 = \boldsymbol{\alpha}_0$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_k = -\delta_{jk}\boldsymbol{\alpha}_0 + \varepsilon_{jkl}\boldsymbol{\alpha}_l$$

Denklem (2.43) de J matrisi imajiner nicelik ve $i=\sqrt{-1}$ 'e kabulüne uygundur. Böylece $\boldsymbol{Q}$ bikuaternionunun 8×8 matris temsili;

$$\boldsymbol{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & -b_3 & -b_0 & b_1 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & -b_0 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{(i,j=1,2,\ldots,8)} \qquad (2.46)$$

şeklinde gösterilir [1].

2.5. Alternatif Cebir İçin Bikuaternionların Matris Temsili

2.5.1. Bikuaternionun 2×2 Matris Temsili

Bu cebirdeki $\hat{e}_0$ ve $\hat{e}_i$ birim baz elemanlarının 2×2 matris gösterimi

$$\hat{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix};\ \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.47)$$

şeklindedir [14]. Bu gösterim aynı zamanda complex-four vector cebrindeki gösterim ile aynı olmaktadır.

Buna göre,

$$\boldsymbol{Z} = Z_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + Z_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + Z_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + Z_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = [Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]$$

şeklinde bir bikuaternionun 2×2 matris gösterimi

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} Z_0 + Z_3 & Z_1 - iZ_2 \\ Z_1 + iZ_2 & Z_0 - Z_3 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

kompleks değerli bir matris olarak ifade edilebilir. Bu matrisin determinantı bize $\boldsymbol{Z}$ bikuaternionunun normunu verir. Yani,

$$N(\boldsymbol{Z}) = det\,\boldsymbol{Z} \tag{2.49}$$

dir [14].

2.5.2. Bikuaternionun 4×4 Matris Temsili

$$\boldsymbol{Z} = a_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + a_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + a_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 + ib_0\hat{\boldsymbol{e}}_0 + ib_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + ib_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + ib_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{2.50}$$

şeklindeki bir bikuaternionu 4×4 matris formunda yazabilmek için $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ birim baz elemanlarının 4×4 matris formunda yazmamız gerekir. $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ birim baz elemanları ile i kompleks sayısının 4×4 matris temsili,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};\ i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

ile verilir. O halde $\boldsymbol{Z}$ bikuaternionunun 4×4 matris temsili,

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 & ib_0 - ib_3 & ib_1 + b_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 & ib_1 - b_2 & ib_0 + ib_3 \\ ib_0 - ib_3 & ib_1 + b_2 & a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ ib_1 - b_2 & ib_0 + ib_3 & a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

şeklinde elde edilir.

3. AÇISAL MOMENTUM İFADESİNİN BİKUATERNİONLARIN FARKLI İKİ CEBRİ İLE GÖSTERİMİ

Bilindiği üzere açısal momentum; yer vektörü ile momentum vektörünün vektörel çarpımı ile;

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu fiziksel nicelikleri bikuaternion olarak ifade edersek;

$$\boldsymbol{r} = ix\hat{e}_1 + iy\hat{e}_2 + iz\hat{e}_3$$

ve

$$\boldsymbol{p} = ip_x\hat{e}_1 + ip_y\hat{e}_2 + ip_z\hat{e}_3$$

olmaktadır. Burada, $\hat{e}_i^{\,2} = -1 \;\; (i = 1,2,3)$ 'dir.

Daha önce iki bikuaternion çarpımı;

$$\boldsymbol{PQ} = P_0Q_0 - \vec{P}.\vec{Q} + P_0\vec{Q} + \vec{P}Q_0 + i\vec{P} \times \vec{Q}$$

olarak tanımlanmıştı. Bu denklemde, $P_0 = 0$ ve $Q_0 = 0$ alırsak,

$$\boldsymbol{PQ} = -\vec{P}.\vec{Q} + i\vec{P} \times \vec{Q}$$

olur. O halde $\vec{P} \times \vec{Q}$ 'i,

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \frac{\boldsymbol{PQ} - \overline{\boldsymbol{PQ}}}{2i}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $(\bar{\ })$ kuaternion konjügeyi gösterir.

O halde $\boldsymbol{L}$ bikuaternionunu,

$$\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{rp} - \overline{\boldsymbol{rp}}}{2i}$$

olarak yazabiliriz.

Buna göre,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{rp} &= (ix\hat{e}_1 + iy\hat{e}_2 + iz\hat{e}_3)(ip_x\hat{e}_1 + ip_y\hat{e}_2 + ip_z\hat{e}_3) \\ &= (xp_x + yp_y + zp_z)\hat{e}_0 + (zp_y - yp_z)\hat{e}_1 + (xp_z - zp_x)\hat{e}_2 + (yp_x - xp_y)\hat{e}_3\end{aligned}$$

ve

$$\overline{\boldsymbol{rp}} = (xp_x + yp_y + zp_z)\hat{e}_0 - (zp_y - yp_z)\hat{e}_1 - (xp_z - zp_x)\hat{e}_2 - (yp_x - xp_y)\hat{e}_3$$

olur. Sonuçta $\boldsymbol{L}$'yi

$$\boldsymbol{L} = i(yp_z - zp_y)\hat{e}_1 + i(zp_x - xp_z)\hat{e}_2 + i(xp_y - yp_x)\hat{e}_3$$

yazabiliriz.

O halde açısal momentum bikuaternionu sonuç olarak,

$$\boldsymbol{L} = iL_x\hat{e}_1 + iL_y\hat{e}_2 + iL_z\hat{e}_3$$

bulunur.

Buradan açısal momentum bikuaternionunun normunu;

$$N(\boldsymbol{L}) = -L_x^{\ 2} - L_y^{\ 2} - L_z^{\ 2}$$

elde ederiz.

Farklı yazılımda $\vec{r}$ yer vektörü ile $\vec{p}$ momentum vektörü bikuaternion olarak,

$$\boldsymbol{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$$

ve

$$\boldsymbol{p} = p_x\hat{e}_1 + p_y\hat{e}_2 + p_z\hat{e}_3$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\hat{e}_i^{\ 2} = 1 \ (\boldsymbol{i} = 1,2,3)$'dir.

Görüldüğü üzere, $i\hat{e}_i \rightarrow \hat{e}_i$ şekline dönüşmektedir. Önceki bölümlerde alternatif cebirde iki bikuaternionun çarpımı ifadesini,

$$\boldsymbol{ZZ'} = Z_0Z_0' + \vec{Z}.\vec{Z}' + Z_0\vec{Z}' + \vec{Z}Z_0' + i\vec{Z}\times\vec{Z}'$$

şeklinde ifade etmiştik. Burada da, $Z = r$ ve $Z' = p$ alırsak denklemimiz,

$$\boldsymbol{rp} = \vec{r}.\vec{p} + i\vec{r}\times\vec{p}$$

şeklini alacaktır. O halde $\boldsymbol{L}$ açısal momentum bikuaternionu yine,

$$\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{rp} - \overline{\boldsymbol{rp}}}{2i}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{rp} &= (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3)(p_x\hat{e}_1 + p_y\hat{e}_2 + p_z\hat{e}_3) \\ &= (xp_x + yp_y + zp_z)\hat{e}_0 + i(yp_z - zp_y)\hat{e}_1 + i(zp_x - xp_z)\hat{e}_2 + i(xp_y - yp_x)\hat{e}_3\end{aligned}$$

olur. $\overline{\boldsymbol{rp}}$ ise,

$$\overline{\boldsymbol{rp}} = (xp_x + yp_y + zp_z)\hat{e}_0 - i(yp_z - zp_y)\hat{e}_1 - i(zp_x - xp_z)\hat{e}_2 - i(xp_y - yp_x)\hat{e}_3$$

yazılır. O halde,

$$\boldsymbol{L}=\frac{\boldsymbol{rp}-\overline{\boldsymbol{rp}}}{2i}=\frac{2i\left(\left(yp_z-zp_y\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1+\left(zp_x-xp_z\right)\hat{\boldsymbol{e}}_2+\left(xp_y-yp_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_3\right)}{2i}$$

$$\boldsymbol{L}=\left(yp_z-zp_y\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1+\left(zp_x-xp_z\right)\hat{\boldsymbol{e}}_2+\left(xp_y-yp_x\right)\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

elde edilir. Yine,

$$L_x=yp_z-zp_y\,;\;L_y=zp_x-xp_z\,;\;L_z=xp_y-yp_x$$

olduğundan, açısal momentum bikuaternionu,

$$\boldsymbol{L}=L_x\hat{\boldsymbol{e}}_1+L_y\hat{\boldsymbol{e}}_2+L_z\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

olur. Buradan açısal bikuaternionunun normu da,

$$\boldsymbol{N(L)}=-L_x^{\,2}-L_y^{\,2}-L_z^{\,2}$$

olmaktadır.

4. DIRAC TEORİSİ

Dalga mekaniği, klasik mekaniğe oranla çok daha fazla olayı açıklayabilen ve öngörebilen evrimleşmiş bir teori manzarası göstermekteyse de prensip bakımından bazı kusurları vardır. Bu kusurlardan ilki; dalga denkleminin, Schrödinger'in vermiş olduğu şekil bakımından elektronun spinini kapsamadığı ve ikincisi de dalga denkleminin Lorentz dönüşümlerine göre invaryant olmadığı keyfiyetidir. Bu sonuncu duruma bağlı olarak Schrödinger denklemi, ancak hızları ışık hızına göre çok küçük olan yani düşük enerjili tanecikler veya sistemler için geçerli olabilmektedir.

Spini, dalga mekaniği çerçevesi içine sokmak ve Schrödinger denkleminden hareketle taneciklere spin atfedebilmek amacıyla ilk defa Wolfgang Pauli $\Psi_{(\vec{r})}$ dalga fonksiyonunun, skaler bir fonksiyon değil de, her bir bileşeni spinin mümkün yönelmelerinden birine tekabül eden, iki bileşenli bir vektör olarak tasarlamıştır. Bu yeni dalga fonksiyonu kavramı Schrödinger denkleminin ortaya koyduğu modele nazaran her ne kadar bir ilerleme teşkil ediyorsa da yeni dalga denklemi için gene relativist olmama, yani bir Lorentz dönüşümüne göre invaryant kalmama durumu söz konusu olmuştur.

Schrödinger dalga denklemini, hem spini kapsayacak ve hem de Lorentz dönüşümlerine göre invaryantlığını sağlayacak şekilde genelleştirmek 1928 yılında P. M. A. Dirac tarafından yapılmıştır [15].

4.1. Dirac Denklemi

Spini 1/2 olan parçacığı tanımlamak, $m_s = \pm 1/2$ olmak üzere $m_s\hbar$ değerini alan spin açısal momentumun z bileşeni S_z nin iki spin durumuna izin veren iki bileşene sahip bir dalga fonksiyonunu gerektirir. Bununla birlikte, tüm 1/2 spinli parçacıklar için aynı kütle ve aynı spine sahip fakat antiparçacık olarak bilinen bir parçacığın eşlik etmesi nedeniyle, dört bileşenli dalga fonksiyonuna gereksinim olmasını bekleriz. Dirac, denklemini ileri sürdüğünde bu durum bilinmemekteydi ve Dirac'ın kuramından elektronun antiparçacığı pozitronun varlığını ortaya koyabilmesi kuramsal fiziğin en büyük başarılarından biri olmuştur.

Dirac'ın, gerek spin ve gerekse Lorentz dönüşümlerine göre invaryantlığı olan bir dalga denklemi kurarken hareket noktası enerjinin relativitedeki ifadesi olan;

$$E^2 = {m_0}^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{4.1}$$

ifadesi olmuştur. Buradan hareketle serbest bir parçacık için Dirac denklemini yazmak mümkündür. Bu durumda Hamiltonyen'in $\vec{r}$ ve t den bağımsız olması gerekir ve en basit biçimde, momentum ve kütle terimlerine göre doğrusal olarak;

$$H = c\vec{p}.\vec{\alpha} + m\beta c^2 \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada karşılığı bulunma ilkesine göre $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ dır. β büyüklüğü gibi $\vec{\alpha}$ nın üç bileşeni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $\vec{r}, t, \vec{p}$ ve E den bağımsızdır fakat birbiriyle komüte etmeleri gerekmez.

Denklem (4.2)'yi $E = H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ olduğundan Dirac denklemini,

$$\left(E - c\vec{p}.\vec{\alpha} - m\beta c^2\right)\boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{4.3}$$

ya da

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi} = -i\hbar c\vec{\nabla}.\vec{\alpha}\,\boldsymbol{\Psi} + m\beta c^2\,\boldsymbol{\Psi} \tag{4.4}$$

biçiminde elde ederiz. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β, $N \times N$ matris biçimindedir. $\boldsymbol{\Psi}$ ise N bileşenli bir dalga fonksiyonudur.

Hamiltonyen H'nin hermitik $\left(H = H^+\right)$ olması gerektiğinden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β matrislerinin de hermitik yani,

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^+,\ \beta = \beta^+ \tag{4.5}$$

olması gerekir.

$\vec{\alpha}$ ve β nın sağlayacağı ek koşullar $\boldsymbol{\Psi}$'nin herbir bileşeninin ayrı ayrı,

$$\left[E^2 - p^2c^2 - {m_0}^2 c^4\right]\boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{4.6}$$

olarak yazılabilen Klein-Gordon denklemini sağlamaları gereğinden çıkarılabilir. Denklem (4.3)'ü $\left[E + c\vec{p}.\vec{\alpha} + m_0\beta c^2\right]$ işlemcisi ile soldan çarparak ikinci mertebe,

$$\{E^2 - c^2[p_1^2\alpha_1^2 + p_2^2\alpha_2^2 + p_3^2\alpha_3^2 + p_1p_2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1)$$

$$+ p_2p_3(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2) + p_3p_1(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3)] - m_0^2c^4\beta^2 \tag{4.7}$$

$$- m_0c^3[p_1(\alpha_1\beta + \beta\alpha_1) + p_2(\alpha_2\beta + \beta\alpha_2) + p_3(\alpha_3\beta + \beta\alpha_3)]\}\Psi_{(\vec{r},t)} = 0$$

denklemini elde ederiz. Burada p_1, p_2 ve p_3; $\vec{p}$ nin kartezyen bileşenlerini göstermektedir. Denklem (4.7)'yi (4.6) ile karşılaştırarak,

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$$

$$[\alpha_1, \alpha_2]_+ = [\alpha_2, \alpha_3]_+ = [\alpha_3, \alpha_1]_+ = 0 \tag{4.8}$$

$$[\alpha_1, \beta]_+ = [\alpha_2, \beta]_+ = [\alpha_3, \beta]_+ = 0$$

olması koşuluyla dalga fonksiyonu Ψ nin her bir bileşeninin Klein- Gordon denklemini sağladığını görürüz. Burada $[A, B]_+$,

$$[A, B]_+ = AB + BA \tag{4.9}$$

dir ve ters komütasyonu gösterir.

Ayrıca α_1, α_2 ve α_3'ün komütasyon bağıntıları da,

$$[\alpha_1, \alpha_2] = 2i\alpha_3,\ [\alpha_2, \alpha_3] = 2i\alpha_1,\ [\alpha_3, \alpha_1] = 2i\alpha_2 \tag{4.10}$$

ve

$$[\alpha_2, \alpha_1] = -2i\alpha_3,\ [\alpha_3, \alpha_2] = -2i\alpha_1,\ [\alpha_1, \alpha_3] = -2i\alpha_2 \tag{4.11}$$

şeklindedir. Burada $[A, B]$,

$$[A, B] = AB - BA \tag{4.12}$$

dir ve komütasyonu gösterir [16].

Denklem (4.5) ve (4.8) ile verilen koşulları sağlaması gereken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β matrislerinin minimum boyutlarının 4×4 olması gerektiği gösterilebilir. Buna uygun olarak dalga fonksiyonu Ψ'nin en az dört bileşene sahip olması gerekir. Bu dört bileşenin her birinin spini 1/2 olan parçacık ve anti-parçacığı tasvir için gerekli olduğu düşüncesiyle $N = 4$ olduğunu varsayacağız. Denklem (4.5) ve $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi$ denklemlerinin çözümlerinin tek değil fakat bu koşulları sağlayan matrisler takımının aynı fiziksel sonuçlarını oluşturduğu gösterilebilir. Dirac denkleminin göreli olmayan limitini incelemek için özellikle yararlı olan $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ve β matrislerinin bir temsili,

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & \sigma\\ \sigma & 0\end{bmatrix} \text{ ve } \beta=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix} \tag{4.13}$$

ile verilir. Burada $\boldsymbol{I}$; 2×2'lik birim matristir, σ_1,σ_2 ve σ_3 ise 2×2'lik Pauli spin matrisler yani,

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{4.14}$$

şeklindedirler. σ'nın özellikleri kullanılarak (4.5) ve (4.8) ifadelerinin sağlanacağı kolayca gösterilebilir.

4.2. Elektromagnetik Alanda Yüklü Parçacık

q yüklü bir parçacık için ve bu parçacığın bir ϕ skaler potansiyeli ve $\vec{A}=\left(A_x, A_y, A_z\right)$ vektör potansiyelinden türemiş bir elektromagnetik alanda bulunması şartı altında (4.3) yerine,

$$\left[(E-q\phi)-c\left(\vec{p}-q\vec{A}\right).\vec{\alpha}-m_0\beta c^2\right]\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{4.15}$$

veya

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-i\hbar c\vec{\nabla}.\vec{\alpha}-cq\vec{A}.\vec{\alpha}+q\phi+m_0\beta c^2\right]\boldsymbol{\Psi} \tag{4.16}$$

ifadesini yazabiliriz.

Burada dikkati çekecek bir husus (4.15) denkleminin kompleks eşleniğini alıp da denklemi –1 ile çarptığımızda ortaya çıkar ve,

$$\left[(E+q\phi)-c\left(\vec{p}+q\vec{A}\right).\vec{\alpha}-m_0\beta c^2\right]\boldsymbol{\Psi}^*=0 \tag{4.17}$$

olur. (4.17) denklemi, (4.15) denkleminin birincisindeki q'nun burada $-q$ olması hariç, formel olarak tamamen aynısıdır. (4.15) denklemi $-q$ yüklü ve m_0 kütlesine sahip bir parçacığa tekabül eden dalga fonksiyonunu veren bir denklemdir. (4.17) ise karşımıza, yine aynı m_0 sükunet kütlesine sahip fakat q yüklü bir taneciğe tekabül eden dalga fonksiyonunu veren bir denklem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Göz önüne aldığımız herhangi bir parçacık değil de bir elektron olsaydı aynı şekilde buna zıt yüklü fakat aynı sükunet kütlesine sahip bir taneciğe (pozitrona) eşlik eden dalga fonksiyonunu veren denklem (4.17) şeklinde bir dalga denklemi bulunacağı açıktır. "Acaba bu türlü elde edilen denklemler fiziksel bir gerçeğe tekabül etmekte midirler?" sorusunun cevabı olumludur, yani gerçekten de her yüklü taneciğe bunun tersi olan, başka bir deyişle aynı sükunet kütlesine sahip olmakla beraber yükü göz önüne alınan taneciğin tersi olan bir tanecik tekabül etmekte ve tabiatta da bulunmaktadır. Hatta taneciklerin böylece çiftler meydana getirmeleri yalnız yüklü taneciklerle sınırlı değildir. Nötr yani yüksüz taneciklerin de karşıt-tanecikleri mevcuttur. Bu takdirde nötr bir taneciği, karşıt-taneciğinden farklı yapan kinetik magnetik momentlerinin işaretleridir.

Bu arada, yükü olmayan bir taneciğin nasıl olup da bir magnetik momente sahip olduğu sorusu sorulabilir. Gerçekte, bir taneciğin yüke sahip olmasına rağmen bünyesindeki mevcut pozitif ve negatif elektrik yüklerinin bileşkelerinin sıfır olması bu taneciğin elektrik bakımından nötr olarak görünmesi için yeterlidir. Taneciğin bünyesin de bileşkeleri sıfır olan bu yüklerin yer değiştirmeleri taneciğin sıfırdan farklı bir magnetik momente sahip olmasını sağlar. İşte, nötron/karşıt-nötron, nötrino/karşıt-nötrino gibi karşıt tanecikler birbirinden hep magnetik momentleriyle ayrılırlar.

Denklem (4.15) ve denklem (4.17)'ye dönecek olursak ve q yükünü elektronun e yükü olarak alırsak birinci denklemin temsil ettiği $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_{el}$ dalga fonksiyonunun negatif yüklü elektrona ve ikinci denklemin temsil ettiği,

$$\boldsymbol{\Psi}^* = \boldsymbol{\Psi}_{el}^* = \boldsymbol{\Psi}_{poz} \tag{4.18}$$

dalga fonksiyonunun da elektronun karşıt-taneciği olan pozitrona karşılık geldiğini söyleyebiliriz. (4.18) den yararlanarak Dirac teorisinde,

$$E_{poz} = -E_{el} \tag{4.19}$$

olduğu ispatlanır. Diğer yandan enerjinin relativistik ifadesine göre,

$$E = \pm\sqrt{m_0^{\,2} c^4 + p^2 c^2} \tag{4.20}$$

dir, yani relativite teorisi negatif enerjileri de kapsamaktadır. E'nin bu ifadesinde $m_0 c^2$ taneciğin (örneğin elektronun) sükunet enerjisini göstermekte olup $-m_0 c^2$ ile $+m_0 c^2$

arasında elektron için mümkün hiçbir enerji seviyesi bulunmaz. E enerjisi $+m_0c^2$ nin ötesinde pozitif ve $-m_0c^2$ nin berisinde de negatiftir. Enerji, kuantum mekaniğinde sürekli olarak değişmediğine göre bir tanecik $2m_0c^2$'lik bir enerji kuantumu alarak enerjisi $E<0$ iken $E>0$ olabilir.

4.3. Delikler Teorisi

Dirac 1928 yılında evrende normal halde $-\infty$'dan $-m_0c^2$'ye kadar olan negatif enerjili bütün hallerin herbirini, Pauli'nin dışarlama ilkesi uyarınca serbest elektron tarafından işgal edilmiş olarak tasarlamış ve bir miktar elektronun da pozitif enerjili hallerde bulunduklarını varsaymıştır. Ayrıca bu şemaya göre pozitif enerjili bağlı hallerle pozitif enerjili serbest haller arasında geçişlerin daima mümkün olmasına karşılık, yeteri kadar güçlü bir etkileşme mevcut olmadığı takdirde negatif enerjili haller arasında ya da pozitif enerjili bir halden negatif enerjili bir hale doğrudan doğruya bir geçiş de olmayacaktır.

Negatif enerji hallerinde bulunan bütün elektronlar bir çeşit süreklilik teşkil ederler; öyle ki eğer elektromagnetik bir alanın etkisi altında negatif bir $E<0$ enerji seviyesini işgal eden bir elektron işgal edilmemiş bir pozitif enerji seviyesine sıçrayacak olursa terk etmiş olduğu yer negatif enerji seviyelerinde bir delik ya da bir boşluk gibi gözükecektir. Bu deliğin civarı tamamen negatif enerjili elektronlar tarafından işgal edilmiş olduğundan ve bu delik de negatif enerjili bir taneciğin yokluğunu aksettirdiğinden bu delik tıpkı pozitif enerjili bir tanecikmiş gibi davranacak ve negatif bir yükün yokluğuna tekabül ettiği için de pozitif yüklü bir tanecikmiş gibi görünecektir. İşte bu türlü özelliklere sahip olan bu deliğe, bir elektronun karşıt-taneciği ya da kısa adıyla pozitron adı verilir.

Bir tanesi hariç olmak üzere bütün negatif enerji seviyelerini işgal eden elektronların sonsuz dağılımında ortaya çıkan bu delik, dengesiz bir tanecik görünüşünü arz eder; çünkü, pozitif enerji seviyelerinden bu deliğe doğru bir geçiş mümkün olur. Bu takdirde bir elektron-pozitron çifti yok olması olayı olur ve elektromagnetik enerji şeklinde $2m_0c^2$'den büyük bir enerji açığa çıkar.

Teori, bir elektronla bir pozitronun olağanüstü kısa bir zaman zarfında hidrojen atomunun yapısına benzer bir sistem teşkil edebileceklerini de öngörmektedir. 1951 yılında varlığı deneysel olarak Deutsch tarafından ortaya konmuş olan bu atomsal yapıya pozitronyum adı verilir.

Pozitron ise deneysel olarak 1932-1933 yıllarında C. D. Anderson ile P. M. S. Blackett, J. Chadwick ve G. P. S. Occhialini ekibi tarafından gözlenmiştir.

4.4. Dirac Denkleminin Başarısı

Dirac denklemi aracılığıyla, spinleri ½ olan bütün taneciklerin doyurucu bir teorisi de gerçekleşmiştir. Ayrıca bu denklemin hidrojen atomu için çözümleri o zamana kadar varlığından şüphe dahi edilmeyen iki yeni spektroskopik olayı öngörmüş ve böylece hidrojenin ince yapısını mükemmel bir şekilde izah edebilmiştir.

Dirac denklemi, daha sonraları, herhangi bir spin değerine sahip olan taneciklere de genelleştirilmiş ve ayrıca "Kuantum Alan Teorisi" diye bilinen teorinin hareket noktasını teşkil etmiştir. 1927 yılından beri gelişmiş olan kuantum alanları teorisi tabiatın dalgasal ve tanecikli görünüşünün en iyi sentezi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu teoride; uzayın her noktasında, bu noktadaki alanın şiddetini temsil eden bir sayı tanımlanır. Bunu tanımlamak üzere **i)** bir taneciğin yaratılmasını temsil eden bir operatörle, **ii)** bir taneciğin yok olmasını temsil eden bir operatör gereklidir. Yaratılma ve yok olma operatörleri süreksizliği ve alanın şiddeti de sürekliliği dile getirirler.

Çok gelişmiş matematiksel bilgi ve tekniklerin gerekli olduğu bu teoride elektromagnetik kuantum alanı, uzaydaki her noktada belirtilmiş olan "foton yaratılması" ve "foton yok olması" operatörleriyle tanımlanır. Bu itibarla fotonlar elektromagnetik alanın kuantumları rolünü oynarlar. Kuantum alanları çerçevesi içinde her cins taneciğe kendisinin kuantumu mertebesinde olan ayrı bir kuantum alanı tekabül ettirmek mümkün olmuştur. Mesela atom çekirdeklerinde temel tanecikleri birbirine yapışık olarak tutan ve ancak 10^{-13} cm'lik uzaklıklar için geçerli olan çekirdek kuvvetlerinin meydana getirdiği alanın kuantumu mezonlardır [15].

5. BİKUATERNİONİK DIRAC DENKLEMİ

Serbest parçacık için Dirac denklemi,

$$\left(E - c\vec{p}.\vec{\alpha} - mc^2\beta\right)\Psi = 0$$

ile ifade edilir. Burada E, $\vec{p}$ ve m sırasıyla parçacığın enerjisi, momentumu ve kütlesine karşılık gelmektedir. Ψ ise parçacığın spin dalga fonksiyonudur. α ve β matrisleri ise Dirac denkleminin göreli olmayan limitini incelemek için özellikle yararlı olan matrislerdir ve

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

ile verilirler. Burada I : 2×2 'lik birim matristir. σ_1, σ_2 *ve* σ_3 ise 2×2 'lik Pauli spin matrislerdir ve

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedirler. Buna göre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve β matrisleri

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ve} \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. α matrislerini bikuaternionun birim baz elemanlarıyla ifade edecek olursak,

$$\alpha_1 = -i\hat{e}_1$$
$$\alpha_2 = -i\hat{e}_2$$
$$\alpha_3 = ie_3$$

şeklinde olur. Burada $\alpha_i^2 = 1$ ve $\hat{e}_i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$ dir. i kompleks sayısının matris ifadesi daha önceki bölümlerde belirtilmiş olan

$$i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Yine aynı şekilde $\hat{e}_i$ birim baz elemanlarının matris ifadeleri de sırasıyla daha önce verilen;

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \ \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \ \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix};$$

şeklindedir.

O halde serbest parçacık için Dirac denklemini kolayca ifade edebiliriz. x, y ve $-z$ koordinatlarına sahip bir serbest parçacık için,

$$\boldsymbol{p} = p_x \hat{e}_1 + p_y \hat{e}_2 + p_z \hat{e}_3$$

ve

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3$$

olmak üzere,

$$\vec{p}.\vec{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{p\alpha} + \overline{\boldsymbol{p\alpha}}}{2}$$

olduğundan,

$$\vec{p}.\vec{\alpha} = -(p_x \alpha_1 + p_y \alpha_2 + p_z \alpha_3)$$

olur.

O halde Dirac denkleminin yeni bikuaternionik formu,

$$(E + cp_x \alpha_1 + cp_y \alpha_2 + cp_z \alpha_3 - mc^2 b)\hat{e}_0 \boldsymbol{\Psi} = 0$$

yazılabilir. Burada $b = \pm 1$ değerini almaktadır ve pozitron ile elektron arasındaki çözümü ifade etmektedir.

α_1, α_2 ve α_3 yerine bikuaternionun birim baz elemanları cinsinden karşılık gelen ifadelerini yazacak olursak, Dirac denklemi;

$$\left((E - mc^2 b)\hat{e}_0 - icp_x \hat{e}_1 - icp_y \hat{e}_2 - icp_z \hat{e}_3\right)\boldsymbol{\Psi} = 0$$

şeklini alır.

6. SONUÇ

Bikuaternionlar daha çok genel ve özel relativite ile kuantum mekaniğinde denklemleri daha anlaşılır şekilde ifade etmek ve çözmek için kullanılmıştır.

Bu çalışmada bikuaternionlar için farklı iki cebir tanımlanmıştır. Bikuaternionlar için tanımlanan farklı iki cebrinin olması bunların kullanım alanını genişletmektedir. Kuaternionlarla ifade edilen tüm denklemleri bikuaternionlarla ifade etmek mümkündür. Bunun yanında, tanımlanan alternatif cebir ile de kompleks uzayda tanımlanan ifadeleri bikuaternionlarla temsil edebiliriz. Bu cebir aynı zamanda kompleks dört-vektör cebri ile de aynı olmaktadır.

Bu çalışmada ayrıca iki cebir arasındaki benzerlik ve farklılıklar örnekler verilerek ifade edilmiştir. Bikuaternionların alternatif cebirlerinin özellikleri belirtilerek, açısal momentum ifadesi bikuaternionlarla yazılmıştır. Ayrıca Dirac denklemi de bikuaternionik formda gösterilmiştir.

7. KAYNAKLAR

[1] NEGİ, O. P. S., BISHT, S., ve BISHT, P. S., *Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism*, Il Nuovo Cimento, **113B**, 12, 1449-1467, (1998).

[2] LAMBEK, J., *If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics*, The Mathematical Intelligence, **17**, 4, 7-15, (1995).

[3] DERELİ, T., *Soyut Cebirler ve Fizikteki Simetri Yasaları,* Bilim ve Teknik Dergisi, 34-38, Aralık 1992.

[4] SERDAROĞLU, M., *Fizikte Kuaternion ve Oktonion Yapılar*, Bilim ve Teknik Dergisi, 45-51, Ocak 1993.

[5] CHOU, J. C. K., *Quaternion Kinematics and Dynamic Differantial Equation*, IEEE Transaction on Robotics and Automation, **8**, 1, 53-63, (1992).

[6] JOLLY, D. C., Lett. Nuovo Cimento, **44**, 80, (1985).

[7] CONWAY, A. W., *The Quaternionic Form of Relativity*, Phil. Mag. **24**, 208-211, (1912).

[8] MORITA, K., *Quaternions and Simple D=4 Supergravity*, Progress of Theoretical Physics, **73**, 4, 1056-1059, (1995).

[9] DE LEO, S., *A One Component Dirac Equation*, International Journal of Modern Physics A, 11, 21, 3973-3985, (1996).

[10] IMAEDA, K., *A New Formulation of Classical Electrodynamics*, Il Nuovo Cimento, 32B, 1, 138-162, (1976).

[11] ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, (1995).

[12] KRAVCHENKO, V. V., DE ARELLANO, E. R., ve SHAPIRO, M. V., *On Integral Representations and Boundary Properties of Spinor Fields*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **19**, 977-989, (1996).

[13] VARLAMOV, V. V., *Generalized Weierstrass Representation for Surfaces in Terms of Dirac-Hestenes Spinor Field*, J. Geometry and Physics, **32**, 241-251, (2000).

[14] CONTE, E., *Biquaternion Quantum Mechanics*, Pitagora Editrice, Via del Legatore3, Bologna, Italy, ISBN 88-371-1189-4, (2000).

[15] ÖZEMRE, A. Y., *Çağdaş Fiziğe Giriş* , Cilt:1, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, (1983).

[16] LIBOFF, R. L., *Introductory Quantum Mechanics*,Addison Wesley Longman, Inc.,ISBN 0-201-87879-8 (hardcover), Cornell University, (1998).

[17] TANIŞLI, M., ve ÖZDAŞ, K., *Aplication of Quaternion Representation to Stanford Manipulator,* Balkan Physics Letters, **5(2)**, 65-68, (1997).