ELEKTROMAGNETİK TEORİNİN KUATERNİONLARLA İNCELENMESİ

Nuray CANDEMİR
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Ağustos – 2001

Danışman: Prof.Dr. Kudret ÖZDAŞ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nuray CANDEMİR'in **Elektromagnetik Teorinin Kuaternionlarla İncelenmesi** başlıklı Fizik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 24.08.2001 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof.Dr. Kudret ÖZDAŞ**	
Üye	**: Doç.Dr. Mustafa ŞENYEL**	
Üye	**: Yard.Doç.Dr. Murat TANIŞLI**	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 03.09.2001 tarih ve ..26/4...sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ELEKTROMAGNETİK TEORİNİN KUATERNİONLARLA İNCELENMESİ

NURAY CANDEMİR

Anadolu Üniversitesi
Fen bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
2001, 35 sayfa

Bu tezde, reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemi olan kuaternion ve kompleks kuaternionların tanımı yapılmıştır. Bu sayı sistemlerinin oluşturduğu cebrin genel özellikleri verilmiştir. Kuaternion ve kompleks kuaternion cebirlerinin birleşme özelliğine sahip olması nedeniyle bunların matris temsilleri araştırılmıştır. Kuaternionların 2×2 kompleks matris temsili ile 4×4 reel matris temsili, kompleks kuaternionların 2×2 ve 4×4 kompleks matris temsili ile 8×8 reel matris temsili verilmiştir. Elektromagnetik teori özellikle elektromagnetik teoriyi özetlediği düşünülen Maxwell denklemleri, yük korunumunu ifade eden süreklilik denklemi ve enerjinin korunumunu veren Poynting teoremi anlatılmıştır. Daha sonra, kuaternion ve kompleks kuaternion cebirleri kullanılarak Maxwell denklemlerinin, süreklilik denkleminin ve Poynting denkleminin nasıl ifade edildiği gösterilmiştir. Maxwell'in dört denkleminin kuaternionlarla iki denklemle ifade edilebilirken kompleks kuaternionlarla tek denklemde birleştirilebildiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kuaternion, Kompleks Kuaternion, Elektromagnetik Teori

ABSTRACT

Master of Science Thesis

APPLICATION OF ELECTROMAGNETIC THEORY ON QUATERNIONS

NURAY CANDEMİR

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Science
Physics Program

Supervisor: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
2001, 35 pages

In this thesis, quaternion and complex quaternion which are a system of numbers as real and complex numbers are defined. The general properties of algebra which are composed of these number systems are given. Since quaternion and complex quaternion algebra are associated to each other their matrix representation are investigated. 2×2 Complex matrix representation and 4×4 reel matrix representation of quaternions, 2×2 and 4×4 complex matrix representation and 8×8 reel matrix representation of complex quaternion are given. Electromagnetic theory, specially Maxwell's equations that are considered as an abstract of electromagnetic theory, continuity equation that is expressed in terms of charge conservation, and Poynting theorem that gives energy conservation are discussed. Then, using quaternion and complex quaternion algebra the way of expressing Maxwell's equation, continuity equation and Poynting theorem are shown. As Maxwell's four equations could be expressed in two equations in terms of quaternion, and it was found that it could also be combined into a single equation in terms of complex quaternion.

Keywords: Quaternion, Complex Quaternion, Electromagnetic Theory

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam sırasında beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ'a, tezin yazımı sırasında yardımcı olan Arş. Grv. Tülay TOLAN'a teşekkür ederim.

Nuray CANDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Re$	: Reel sayılar uzayı
λ	: Skalerin gösterimi
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$...	: Vektörlerin gösterimi
∇	: Üç boyutlu gradyent operatörü
i	: Kompleks birim
$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{h}$...	: Kuaternionların gösterimi
q_i	: Kuaternion bileşenleri
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	: Kuaternion birimleri
$\mathbf{q}^*$	: **q** kuaternionunun kompleks eşleniği
$\mathbf{q}^{-1}$	: **q** kuaternionunun tersi
$N(\mathbf{q})$	: **q** kuaternionunun normu
I, J, K	: Kuaternion taban elemanlarının 2x2 matrisi temsili
Γ_i	: Kuaternion taban elemanlarının 4x4 matrisi temsili
$Q, \mathbf{Q}$	: Kuaternionların matris temsilleri
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$...	: Kompleks kuaternion
Q_0	: Kompleks kuaternion bileşeni
$\mathbf{Q}^*$	: Kompleks kuaternionun kuaternion eşleniği
$\mathbf{Q}^c$	: Kompleks kuaternionun kompleks eşleneği
$N(\mathbf{P})$	: Kompleks kuaternionun normu
$\mathbf{Q}^{-1}$	: Kompleks kuaternionun tersi
Q, □, $\mathcal{Q}$	: Kompleks kuaternionun matris temsilleri
$\mathbf{D}$	: Kompleks kuaternion diferansiyel operatörü
$d\tau$	: Diferansiyel hacim elemanı
da	: Diferansiyel alan elemanı
ε_0	: Permitivite
μ_0	: Permeabilite
.	: Skaler çarpım
$\times$.....	: Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Kuaternionlar 1843 yılında İrlandalı fizikçi William Rowan HAMILTON'un üç boyutlu uzayda dönme işlemini gerçekleştirme çabası sonucu bulunmuştur. O yıllarda, iki boyutta dönme işlemi kompleks sayılarla rahatça tanımlanabiliyordu. Hamilton ise bundan yola çıkarak üç boyutta dönme işlemini $a+ib+jc$ ve $i^2 = j^2 = -1$ kompleks sayı ile tanımlamaya çalıştı. İki kompleks sayının çarpımı $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ olduğu halde, Hamilton'un kompleks sayısı $(a+ib+jc)(a-ib-jc)=(a^2+b^2+c^2)-(ij+ji)bc$ oluyordu. Bu sonuçtan yola çıkarak Hamilton çarpma işleminin komutatif özelliğinden vazgeçerek $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımladı. Üçüncü imajiner birimle birlikte Hamilton'un kompleks sayısına dördüncü bir bileşen eklendi. Böylece a,b,c,d$\in \Re$ olmak üzere $a+ib+jc+kd$ formunda oluşan sayıya kuaternion denildi (Negi et al. 1998, Lambek 1995).

Kuaternion cebrinin keşfedildiği yıllarda A. Cayley, K.Clifford ve J. J. Slyvester gibi İngiliz cebir geleneğini geliştiren matematikçiler ve elektromagnetik teoriyi bulan J. C. Maxwell ile P. G. Tait gibi fizikçiler bu konuya önemli katkıda bulundular. 20. yüzyılın başlarında ise vektör ve tensör cebrini geliştiren fizikçiler fizikte vektör cebrinin kullanımını benimsettiler (Dereli 1992).

Daha sonraları ise fizikteki gelişmeler kuaternionların fizikte tekrar kullanıma girmesini kaçınılmaz kıldığı gibi kuaternion cebrinin gelişmesine de yol açmıştır. Kompleks kuaternionlar bu gelişmelerin sonucu fiziğe girmişlerdir.

Bugüne kadar fizikteki birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaternionlarla yeniden ifade edilmiştir. Chou [1] kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri, Adler kuantum mekaniğini, Jolly [2] matris ve kuaternionlar arasındaki izomorfizm, Tanışlı ve Özdaş robotik manipülatörlerin kuaternion dönüşümünü, Negi ve ark. [3] tek kutup dynonslar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır.

Kompleks kuaternionların fizikteki uygulamaları daha çok genel ve özel rölativite ile kuantum mekaniği alanında olmuştur. Kompleks kuaternionlarla Dirac rölativistik denklemlerinin çeşitli formulasyonlarının ilk öncüsü Conway [6] olarak görülmekle birlikte birçok bilim adamının yazılarında kompleks kuaternion ve kuantum mekaniğine ilişkin açıklamalar bulunur. Leo [4] kuaternion ve kompleks kuaternionları tanımı yaparak Dirac denklemini kuaternion ve kompleks kuaternionlarla ifade etmiştir. Yine kompleks kuaternionlarla kuantum mekaniğinin Morita [5] tarafından yeniden formüle edilmiştir.

Bu çalışmada reel ve kompleks kuaternion kavramı açıklandıktan sonra elektromagnetik teorinin bu kavramlarla ifadesi verilecektir.

2. KUATERNİONLAR

2.1. Kuaternion Tanımı

Bir **q** kuaternion

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \qquad (2-1)$$

biçiminde matematiksel bir nesnedir. Burada q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar ve i, j, k ise;

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \qquad (2-2)$$

$$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j \qquad (2-3)$$

kuralına uyan birbirine dik imajiner birimlerdir. Böylece, matematiksel olarak, bir kuaternion $(1, i, j, k)$ taban elemanlarıyla 4 boyutlu reel vektör uzayını oluşturur (Funda and Richard 1990). i, j, k birimleri 3 boyutlu vektör uzayının birbirine dik baz vektörleri olarak alınabilirler. Böylelikle **q** kuaternionu bir skaler ve bir uzaysal vektörün lineer bir kombinasyonu olarak düşünülebilir (Hacısalihoğlu 1983). Eğer **q** 'nun skaler ve vektör kısımları sırasıyla S_q ve V_q ile gösterirsek;

$$S_q = q_0 \qquad (2-4)$$

$$V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k \qquad (2-5)$$

Buna göre **q** kuaternionu;

$$\mathbf{q} = S_q + V_q \qquad (2-6)$$

ile ifade edilir (Ward 1997).

2.2. Sıfır, Skaler ve Vektör Kuaternion Kavramları

Bazı özelliklere sahip kuaternionlara özel adlar verilir. Sıfır kuaternion;

$$\mathbf{q} = [0,0,0,0] \qquad (2-7)$$

şeklinde bütün elemanları sıfir olan kuaterniondur.

Skaler kuaternion;

$$\mathbf{q} = [q,0,0,0] \qquad (2-8)$$

şeklinde vektör kısmı sıfır olan kuaterniondur. Vektör kuaternion ise;

$$\mathbf{q}=[0,q_1,q_2,q_3] \qquad (2-9)$$

şeklinde skaler kısmı sıfır olan ve vektörel kısmının bileşenlerini oluşturan q_1, q_2, q_3, reel bileşenlerinden en az birinin sıfırdan faklı olduğu kuaterniondur. Aynı zamanda saf kuaternion olarak da bilinir (Özdaş 1995).

2.3. Kuaternionlar Üzerine Temel İşlemler

2.3.1. İki kuaternionun eşitliği

İki kuaternionun eşit olması demek, karşılıklı elemanlarının eşit olması demektir. **p** ve **q** kuaternionlarının eşit olabilmesi için;

$$\mathbf{p}=S_p+V_q \qquad \mathbf{q}=S_q+V_q$$

$$S_p=S_q \qquad V_p=V_q \qquad (2-10)$$

ya da bileşenleri cinsinden,

$$p_o=q_0 \qquad p_1=q_1 \qquad p_2=q_2 \qquad p_3=q_3 \qquad (2-11)$$

olmalıdır (Hacısalihoğlu1983).

2.3.2. Skaler ile çarpma

$\lambda \in R$ olmak üzere, bir λ skaler ile bir **q** kuaternionunun çarpımı,

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{q}&=\lambda(S_q+V_q)=\lambda S_q+\lambda V_q\\&=(\lambda q_0+\lambda q_1\boldsymbol{i}+\lambda q_2\boldsymbol{j}+\lambda q_3\boldsymbol{k})\\&=[\lambda q_0,\lambda q_1,\lambda q_2,\lambda q_3]\end{aligned} \qquad (2-12)$$

şeklinde her bir elemanı **q** kuaternionunun λ katı olan başka bir kuaterniondur.

2.3.3. Toplama ve çıkarma

İki kuaternionun toplam ve farkı, bu kuaternionların karşılıklı elemanlarının toplam ve farkından oluşan bir diğer kuaterniondur. **p** ve **q** iki kuaternion olmak üzere;

$$\begin{aligned}\mathbf{p}+\mathbf{q} &= \left(S_p \pm S_q\right)+\left(V_p \pm V_q\right) \\ &= \left[\left(p_0 \pm q_0\right)+\left(p_1 \pm q_1\right)i+\left(p_2 \pm q_2\right)j+\left(p_3 \pm q_3\right)k\right]\end{aligned} \qquad (2 - 13)$$

olarak ifade edilir.

2.3.4. Bir kuaternionun eşleniği

Bir **q** kuaternionunun eşleniği, bu kuaternionun imajiner bir başka deyişle vektörel kısmının işaretlerinin değişmesiyle elde edilen $\mathbf{q}^*$ kuaternionudur. **q** kuaternionunun eşleniği;

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^* &= S_q - V_q \\ &= q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \\ &= \left[q_0, -q_1, -q_2, -q_3\right]\end{aligned} \qquad (2 - 14)$$

şeklinde tanımlanır (Özdaş ve Özdaş 1989). Ayrıca eşlenik işleminde,

$$\left(\mathbf{q}^*\right)^* \qquad (2 - 15)$$

$$(\mathbf{qp})^* = \mathbf{p}^* \mathbf{q}^* \qquad (2 - 16)$$

özellikleri vardır (Serdaroğlu 1983).

2.3.5. Kuaternion çarpımı ve özellikleri

p ve **q** iki kuaternionun çarpımını bir an için çarpımın toplamaya göre dağılma özelliğinin olduğunu farz ederek şu şekilde gösterebiliriz:

$$\begin{aligned}\mathbf{pq} &= \left(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\right)\left(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) \\ &= \left(S_p + V_p\right)\left(S_q + V_q\right) \\ &= S_p S_q + S_q V_p + S_p V_q + V_p V_q \\ &= S_p S_q - V_p \cdot V_q + S_q V_p + S_p V_q + V_p \times V_q\end{aligned} \qquad (2 - 17)$$

burada '.' skaler çarpımı, '×' ise dış vektörel çarpımı ifade eder. Öyle ise kuaternion çarpımı nokta çarpım ve vektör çarpımlarını içermektedir. Genelde $V_p \times V_q \neq V_q \times V_p$ olduğundan, V_p V_q ya paralel veya $\mathbf{p}$ ve$\mathbf{q}$'lardan biri sıfır vektör kısmına sahip olmadıkça kuaternion çarpım komutatif değildir.

Her ne kadar kuaternion çarpımı komutatif değilse de, birleşme özelliğine sahiptir. $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{h}$ üç kuaternion olsun. $\mathbf{q}(\mathbf{ph})$ çarpımı;

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(\mathbf{ph}) &= (S_q + V_q)(S_{(ph)} + V_{(ph)}) \\
&= S_q S_p S_h - \{S_q V_p \cdot V_h + S_p V_h \cdot V_q + S_h V_q \cdot V_p\} \\
&\quad + \{S_q S_h V_p + S_h S_p V_q + S_p S_q V_h\} \\
&\quad + \{S_q V_p \times V_h - S_p V_h \times V_q + S_h V_q \times V_p\} \\
&\quad - (V_p \cdot V_h) V_q + V_q \times (V_p \times V_h) - V_q \cdot (V_p \times V_h)
\end{aligned} \tag{2 - 18}$$

ve $(\mathbf{qp})\mathbf{h}$ çarpımı;

$$\begin{aligned}
(\mathbf{qp})\mathbf{h} &= S_q S_p S_h - \{S_h V_q \cdot V_p + S_q V_p \cdot V_h + S_q V_p \cdot V_h\} \\
&\quad + \{S_q S_p V_h + S_h S_q V_p + S_h S_q V_p\} \\
&\quad + \{S_q V_p \times V_h + S_p V_q \times V_h + S_h V_q \times V_p\} \\
&\quad - (V_q \cdot V_p) V_h + (V_q \times V_p) \times V_h - (V_h \times V_p) \cdot V_h
\end{aligned} \tag{2 - 19}$$

olur. Burada $\mathbf{q}(\mathbf{ph}) = (\mathbf{qp})\mathbf{h}$ geçerli ise,

$$-(V_p \cdot V_h) V_q + V_q \times (V_p \times V_h) = -(V_q \cdot V_p) V_h + (V_q \times V_p) \times V_h$$

olduğunu göstermeliyiz. Standart vektör özdeşliklerini uygularsak bunun doğru olduğunu görebiliriz:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \\
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{2 - 20}$$

$$\therefore \mathbf{q}(\mathbf{ph}) = (\mathbf{qp})\mathbf{h} \tag{2 - 21}$$

Kuaternion çarpımının toplamaya göre dağılma özelliğine sahip olduğunu aşağıdaki gibi doğrulayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &= (S_q + V_q)[S_p + S_h + V_p + V_h] \\
&= S_q S_p + S_q S_h - V_q \cdot (V_p + V_h) \\
&\quad + S_h V_q + S_p V_q + S_p (V_p + V_h) + V_q \times (V_p + V_h) \\
&= \{S_q S_p - V_q \cdot V_p + S_p V_q + S_q V_p + V_q \times V_p\} \\
&\quad + \{S_q S_h - V_q \cdot V_h + S_q V_h + S_h V_q + V_q \times V_h\} \\
&= \mathbf{qp} + \mathbf{qh}
\end{aligned} \qquad (2-22)$$

(Ward 1997).

2.4. Kuaternion Normu ve Birim Kuaternion

Bir $\mathbf{q}$ kuaternionun normu $\mathrm{N}(\mathbf{q})$ ile gösterilirse,

$$\mathrm{N}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*\mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \qquad (2-23)$$

ile tanımlanır. Norm; kuaternion ile kuaternionun kendi eşleniğinin çarpımına eşit olup bir skalerdir (Chou 1992).

İki kuaternionun çarpımının normu ise;

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(\mathbf{pq}) &= \mathbf{pq}(\mathbf{pq})^* = \mathbf{pq}(\mathbf{q}^*\mathbf{p}^*) = \mathbf{pp}^*\mathbf{qq}^* \\
&= \mathrm{N}(\mathbf{p})\mathrm{N}(\mathbf{q})
\end{aligned} \qquad (2-24)$$

normların çarpımına eşittir (Ward 1997).

Normu $\mathrm{N}(\mathbf{q}) = 1$ olan kuaterniona birim kuaternion denir (Tanışlı ve ark. 1997).

2.5. Bir Kuaternionun Tersi

$\mathbf{q}$ bir sıfır kuaternion olmamak koşuluyla,

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1 \qquad (2-25)$$

koşulunu sağlayan $\mathbf{q}^{-1}$ kuaternionuna $\mathbf{q}$ kuaternionunun tersi denir.

Bir $\mathbf{q}$ kuaternionun eşleniği, normu, normu;

$$\mathbf{q}^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]$$

$$\mathrm{N}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*\mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

verildiğine göre tersi;

$$q^{-1}=\frac{1}{q}=\frac{1}{q}\frac{q^{*}}{q^{*}}=\frac{q^{*}}{N(q)} \tag{2-26}$$

olur. Böylelikle bir **q** kuaternionunun tersi kendi eşleniğinin yine kendi normuna eşit olan bir skalere bölümüne eşittir (Janez and Richard 1990).

2.6. İki Kuaternionun Bölümü

Bir **q** kuaternionunu bir **p** kuaternionuna bölmek demek **q**'yu p^{-1} ile çarpmak demektir. Ancak iki kuaternionun çarpımı değişme özeliğine sahip olmadığından $\left(p^{-1}q \neq qp^{-1}\right)$, **p** kuaternionunun **q** kuaternionuna farklı şekilde iki bölümü mevcuttur. $N(p)\neq 0$ olmak üzere;

$$\frac{q}{p}=\begin{cases} p^{-1}q=\dfrac{q^{*}}{N(q)}p: & \text{soldan bölme} \\ \hline qp^{-1}=p\dfrac{q^{*}}{N(q)}: & \text{sagdan bölme} \end{cases} \tag{2-27}$$

dir (Özdaş1995).

2.7. Kuaternionların Matris Temsili

Kuaternion cebri birleşme özelliğine sahip olduğundan, kuaternionları matris biçiminde de ifade etmek mümkündür.

Kuaternionların 2×2 matris temsilini şu şekilde tanımlamak mümkündür. Kuaternion taban elemanları;

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} \tag{2-28}$$

$$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad K=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} \tag{2-29}$$

2×2 matrisiyle temsil edilebilirler. Böylece $\mathbf{q}=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$ kuaternionu;

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q} &= q_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+q_1\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}+q_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+q_3\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1\\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}30)\\
&= \begin{pmatrix}u & -v^*\\ v & u^*\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

şeklinde 2×2 kompleks değerli bir matris olarak ifade edilebilir (Özdaş1995).

Kuaternionları 4×4 matris formunda da temsil etmek mümkündür. Kuaternionların taban elemanları 4×4 matris formunda;

$$
\Gamma_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \Gamma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad ..(2\text{-}31)
$$

$$
\Gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} \qquad \Gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}32)
$$

olur. Böylece $\mathbf{q}=q_0+q_1\,\boldsymbol{i}+q_2\,\boldsymbol{j}+q_3\,\boldsymbol{k}$ kuaternionunun matris formu;

$$
\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}q_0&q_1&q_2&q_3\\-q_1&q_0&-q_3&q_2\\-q_2&q_3&q_0&-q_1\\-q_3&-q_2&q_1&q_0\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}33)
$$

şeklinde ifade edilir (Negi et al. 1998).

3. ELEKTROMAGNETİK TEORİ

3.1. Maxwell Denklemleri

Elektrik ve magnetizmanın bir bileşimi olan elektromagnetizmanın temel denklemlerini oluşturan Maxwell denklemleri integral ve diferansiyel biçimleriyle;

i) $\oint E \cdot ds = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$, $\qquad \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

ii) $\oint B \cdot ds = 0$, $\qquad \nabla \cdot B = 0$

iii) $\oint E \cdot dl = -\frac{d}{dt}\int B \cdot ds$, $\qquad \nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}$

iv) $\oint B \cdot dl = \mu_0 \sum \mathrm{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial E}{\partial t} \cdot ds$, $\qquad \nabla \times B = \mu_0 J + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

şeklinde verilir. Bu denklemlerin fiziksel olarak anlatmak istedikleri şey şudur:

i) denklemi, Gauss yasası olup, Statik alanlar için Coulomb yasasına denktir. Bu, elektrik alanının bir kapalı yüzeydeki akısının bu yüzeyle sarmalanmış olan hacmin içindeki net yükle orantılı olduğunu ifade eder.

ii) denklemi, magnetik alanlar için Gauss yasası olup, magnetik alanın bir kapalı yüzey üzerindeki akısının sıfır olduğunu ifade etmektedir. Bu akı hep sıfır olduğundan elektrik yükünün magnetik karşılığı yoktur.

iii) denklemi, Faraday yasası olup elektrik alanının bir kapalı çizgi üzerindeki integralinin, bu çizginin sınırladığı yüzeydeki magnetik akının değişim hızıyla orantılı olduğunu ifade eder. Dolayısıyla değişken bir manyetik alana bir elektrik alan eşlik eder.

iv) denklemi de Ampere yasasının Maxwell tarafından geliştirilmiş şeklidir. Maxwell'in denkleme getirdiği yenilik, sağ taraftaki ikinci terimdir. Bu terim elektrik alanının akısıyla tanımlanan yer değiştirme akımını içerir. Ampere yasasının bu geliştirilmiş biçimi, manyetik alanın bir kapalı çizgi üzerinden integrali iki terimin toplamıyla orantılıdır. Birinci terim kapalı çizginin sınırladığı yüzeyden geçen net akımı; Maxwell'in katkısı olan ikinci terim ise, aynı yüzeydeki elektrik akısının değişme hızını içerir. Bu denklem, Maxwell'in getirdiği eklemeden dolayı değişken elektrik alanına bir magnetik alanın eşlik ettiğini ifade etmektedir (Akyüz ve ark. 1996)

3.2. Elektromanyetik Teoride Korunum Yasaları

3.2.1. Yükün korunumu

Maxwell denklemlerinde, aynı zamanda yüklerin korunumunu ifade eden süreklilik denklemi dahi, kapalı olarak bulunmaktadır. IV. Maxwell denkleminin her iki tarafının diverjansının alınmasıyla;

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \left(\mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

bu denklemin sol tarafı, vektör analizinde bir vektörün rotasyonelinin diverjansı daima sıfır olacağından

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$$

verir. Böylece;

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3 - 1}$$

süreklilik denklemi elde edilir (Griffiths 1991). Bu bağıntı bir bölgedeki yükün azalma hızının bu bölgenin çevresinden dışarı çıkan akıma eşit olduğunu ifade eder. Yüklerin korunumu ilkesi fizikteki temel postülatlardan birisi olup 'Elektrik yükü yoktan var, vardan da yok edilemez' şeklinde ifade edilir (İdemen 1996).

3.2.2. Enerjinin korunumu

Elektrostatikte, statik bir yük dağılımını oluşturmak için elektriksel kuvvetlere karşı yapılması gereken iş,

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \tag{3 - 2}$$

Burada E ortamdaki net elektrik alandır. Benzer şekilde, bir akım dağılımını sürdürebilmek için, zıt emk'lara karşı yapılması gereken iş şöyledir:

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 d\tau \qquad (3-3)$$

Burada B bileşke magnetik alandır. Buna göre , elektrik ve magnetik alanların birlikte bulunduğu bir sistemde depolanan toplam enerjinin,

$$W_{EB} = \frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d\tau \qquad (3-4)$$

olması beklenir. Şimdi, elektromagnetik alanda enerji korunumu çerçevesinde, bu sonucun genel ispatını yapalım.

Belirli bir t anında E ve B alanlarına yol açan bir yük ve akım dağılımı olsun. dt kadar zaman sonra yükler bir miktar yer değiştirmiş olacaktır. dt zaman aralığında elektromagnetik kuvvetlerin bu yükler üzerinde yapmış olduğu iş; Lorentz kuvveti ifadesine göre, küçük bir dq yükünün dl kadar yer değiştirmesi sırasında yapılan iş;

$$F \cdot dl = dq(E + v\times B)\cdot v\,dt = E \cdot v\,dqdt \qquad (3-5)$$

olur. Ortamdaki ρ ve J dağılımları cinsinden $dq = \rho d\tau$ ve $\rho v = J$ olur. Buna göre, sonlu V hacmi içindeki tüm yüklerin hareketi sırasında yapılan iş

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (E \cdot J)d\tau \qquad (3-6)$$

şeklindedir. O halde, $(E \cdot J)$ çarpımı birim hacimde ve birim zamanda yapılan iş yani, birim hacimde harcanan güç olur. Buradaki J çarpanını magnetik alan cinsinden ifade etmek için, Ampere yasasını kullanılırsa,

$$E \cdot J = \frac{1}{\mu_0} E \cdot (\nabla \times B) - \varepsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (3-7)$$

olur. Çarpım kuralına göre,

$$\nabla \cdot (E \times B) = B \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times B) \qquad (3-8)$$

alınır ve $\left(\nabla \times E = -\partial B/\partial t\right)$ Faraday yasası kullanılırsa;

$$\nabla \cdot (E \times B) = -B\frac{\partial B}{\partial t} - E \cdot (\nabla \times B) \qquad (3-9)$$

bulunur. Şu iki terimi değişik şekilde,

$$\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(B^2\right) \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2\right) \qquad (3-10)$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right) \qquad (3-11)$$

olur. Bu ifadeyi (3 – 6) denkleminde yerine koyar ve ikinci Stokes teoremini uygularsak,

$$\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\oint_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mu_0}\oint_S\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \qquad (3-12)$$

olur; burada V hacmini saran kapalı yüzey S'dir. Bu sonuç Poynting teoremi adıyla bilinir; elektrodinamikte iş-enerji teoreminin karşılığıdır. Sağ taraftaki birinci integral alanlarda depolanan enerji olup (3 - 4) denklemindeki W_{BE}'dir. İkinci terim V hacminin yüzeyinden dışarı enerji akışını temsil eder. Poynting teoremine göre, elektromagnetik kuvvetlerin yaptığı iş, alanlarda depolanan enerjideki azalma ile yüzeyden kaybedilen enerji toplamına eşit olur (Griffiths 1991).

3.2. Elektromagnetik Teorinin Potansiyel Formulasyonu

3.2.1. Skaler ve vektör potansiyeller

Elektrostatikte,

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \qquad (3-13)$$

olma özelliğinden yararlanıp, elektrik alanı skaler bir potansiyelin gradyanı olarak

$$\boldsymbol{E}=-\nabla \mathrm{V} \qquad (3-14)$$

şeklinde yazılır. Elektromagnetik teori de bu mümkün değildir, çünkü $\boldsymbol{E}$'nin rotasyoneli artık sıfırdan farklıdır. Bu nedenle, $\boldsymbol{E}$ artık skalar bir potansiyelin gradyenti olarak bulunamaz.

Fakat tüm bu durumlarda, $\boldsymbol{B}$'nin diverjansı hala sıfır olduğundan, magnetizma da olduğu gibi

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (3-15)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunu Faraday yasasında kullanırsak;

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

olur, yani rotasyoneli sıfir olan vektörel bir büyüklüktür. Şimdi bunu skaler bir potansiyelin gradyantı olarak yazabiliriz:

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \mathrm{V}$$

Böylece $\boldsymbol{E}$ alanının V ve $\boldsymbol{A}$ cinsinden;

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \mathrm{V} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad (3-16)$$

ifadesi bulunur (Şeker ve Çerenci, 1994).

4. ELEKTROMAGNETİK TEORİNİN KUATERNİONLARLA İNCELENMESİ

Bu bölümde elektromagnetik teorinin özünü oluşturan Maxwell denklemleri kuaternionlarla ifade edilecektir. Burada, Gaussiyen birim sistemi kullanılarak $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ alınmaktadır.

4.1.Maxwell Denklemleri

Üç boyutlu vektör uzayında herhangi bir yerde bulunan $\boldsymbol{E}$ elektrik alanı ve $\boldsymbol{B}$ magnetik alan;

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k} \qquad (4-1)$$

$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k} \qquad (4-2)$$

vektörleri ile temsil edilir. $\boldsymbol{E}$ elektrik alan vektörü ile $\boldsymbol{B}$ magnetik alan vektörü kuaternion formda;

$$\mathbf{E} = [0, \boldsymbol{E}] = [0, E_x, E_y, E_z] \qquad (4-3)$$

$$\mathbf{B} = [0, \boldsymbol{B}] = [0, B_x, B_y, B_z] \qquad (4-4)$$

ile verilir.

Maxwell denklemlerini tanımlamak için ise;

$$\mathbf{D} = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right] = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \qquad (4-5)$$

ile tanımlanan kuaternion diferansiyel operatörü kullanılır ki burada;

$$\nabla = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (4-6)$$

genel üç boyutlu nabla operatörüdür. Maxwell denklemleri bu kuaternion diferansiyel operatörünün elektrik ve magnetik alanlarla oluşturduğu komutatör ve antikomutatörlerinin birleşiminden türetilir.

Komutatörlük ve antikomutatörlük;

$$[A,B] = \frac{AB + \left(A^*B^*\right)^*}{2} \qquad \text{ve} \qquad \{AB\} = \frac{AB - \left(A^*B^*\right)^*}{2}$$

ile tanımlanır.

D kuaternion diferansiyel operatörünün **B** magnetik alanıyla komutatörü ile **E** elektrik alanının antikomütatörünün toplamı;

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),(0,\boldsymbol{B})\right]+\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),(0,\boldsymbol{E})\right\} \\
&=(\frac{1}{2}\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}+0+\nabla\times\boldsymbol{B}\right) \\
&+\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}+0-\nabla\times\boldsymbol{B}\right)) \\
&+(\frac{1}{2}\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{E},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+0+\nabla\times\boldsymbol{E}\right) \\
&-\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{E},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+0-\nabla\times\boldsymbol{E}\right)) \\
&=\left(-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)+(0,\nabla\times\boldsymbol{E}) \\
&=\left(-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\
&=(0,\boldsymbol{0})
\end{aligned}
\qquad (4-7)
$$

kuaternionunu verir. Bu kuaternionun skaler kısmı magnetik alanlar için Gauss yasasını, vektörel kısmı Faraday yasasını ifade eder.

D kuaternion diferansiyel operatörü ile **B** magnetik alanının antikomütatörü ile **E** elektrik alanın komutatörünün farkı;

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),(0,\boldsymbol{B})\right\}-\left[\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),(0,\boldsymbol{E})\right] \\
&=(\frac{1}{2}\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}+0+\nabla\times\boldsymbol{B}\right) \\
&-\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}+0-\nabla\times\boldsymbol{B}\right)) \\
&-(\frac{1}{2}\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{E},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+0+\nabla\times\boldsymbol{E}\right) \\
&+\left(0-\nabla\cdot\boldsymbol{E},\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+0-\nabla\times\boldsymbol{E}\right)) \\
&=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E},\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \\
&=4\pi(\rho,\boldsymbol{J})
\end{aligned}
\qquad (4-8)
$$

kuaternionunu verir. Bu bir tek kuaternion, skaler kısmı ile Gauss yasasını vektör kısmı ile de Maxwell'in düzelttiği Amper yasasını tanımlar.

4.2. Maxwell Denklemlerinin Potansiyel Formu

Elektrik alan, V skaler ve A vektör potansiyeli cinsinden,

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \mathrm{V} - \frac{\partial A}{\partial t} \qquad (3 - 4)$$

şeklinde ve magnetik alanı ise yine A cinsinden,

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times A \qquad (3 - 5)$$

şeklinde ifade edilmekteydi. Kuaternion tanımı göz önüne alınarak skaler ve vektör potansiyelin birleşimi olan tek bir potansiyel tanımlanabilir. Dört bileşenli bu potansiyele **A** kuaternion potansiyeli adını verelim ve **A** ile temsil edelim:

$$\mathbf{A} = [A, A] \qquad (4 - 9)$$

Kuaternion potansiyeli bileşenleri cinsinden;

$$\mathbf{A} = [A, A_x, A_y, A_z] \qquad (4 - 10)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradaki A, denklem (3 – 4)'deki V skaler potansiyelidir.

Elektrik alan ve manyetik alan **A** potansiyelinden türetilebilir.

D kuaternion diferansiyel operatörünün eşleniği ile **A** kuaternion potansiyelinin eşleniğinin komutatörünün vektörel kısmı;

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= vektör\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), (A, -A)\right] \\
&= vektör(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \cdot A, -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla A + \nabla \times A\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \cdot A, -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A + \nabla \times A\right)\right)) \qquad (4 - 11) \\
&= vektör\left(\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \cdot A, -\nabla A - \frac{\partial A}{\partial t}\right) \\
&= \left(0, -\nabla A - \frac{\partial A}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

elektrik alanı tanımlar.

B magnetik alan kuaternionu da **A** kuaternion potansiyelinden türetilebilir. **D** kuaternion diferansiyel operatörünün eşleniğinin **A** potansiyelinin eşleniği ile antikomutatörü;

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right),(A,\text{-}A)\right\} \\ &= (\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\cdot A,-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla A+\nabla\times A\right)\right. \\ &\left.-\left(\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\cdot A,-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla A-\nabla\times A\right)\right)) \\ &= (0,\nabla\times A)\end{aligned} \qquad (4-12)$$

olarak magnetik alan kuaternionunu verir.

Elektrik ve magnetik alanların kuaterniyonik formları başlangıçtaki denklem (4 – 7)'deki Maxwell denklemine yerleştirildiğinde;

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)(A,\text{-}A)\right\}\right]+\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),\text{vektör}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)(A,\text{-}A)\right\}\right\} \\ &=\left[\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)(0,\nabla\times A)\right]+\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)\left(0,-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left(\left(0-\nabla\cdot\nabla\times A,\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times A)+0+\nabla\times\nabla\times A\right)\right. \\ &\left.+\left(0-\nabla\cdot\nabla\times A,\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times A)+0-\nabla\times\nabla\times A\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(\left(0-\nabla\cdot\left(-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right),\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right)+0+\nabla\times\left(-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right)\right. \\ &\left.-\left(0-\nabla\cdot\left(-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right),\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right)+0+\nabla\times\left(-\nabla A\text{-}\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right)\right) \\ &=\left(-\nabla\cdot\nabla\times A,\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times A)\right)+\left(0,-\nabla\times\nabla A\text{-}\nabla\times\frac{\partial A}{\partial t}\right) \\ &=(-\nabla\cdot\nabla\times A,-\nabla\times\nabla A) \\ &=\left(-\nabla\cdot\boldsymbol{B},\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\ &=(0,\boldsymbol{0})\end{aligned} \qquad (4-13)$$

olarak magnetizma için Gauss yasası ile Faraday yasası elektrik ve magnetik alanı meydana getiren **A** kuaternion potansiyeli cinsinden tanımlanmış olur.

Denklem (4 – 8)'e aynı şekilde elektrik ve magnetik alanın kuaternionik formları yerleştirilerek;

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),\left[\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)(A,-A)\right]\right]\\
&-\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right),vekt\ddot{o}r\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)(A,-A)\right\}\right\}\\
&=\left(-\nabla\cdot\nabla A-\nabla\cdot\frac{\partial A}{\partial t},\nabla\times\nabla\times A+\frac{\partial^2 A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla A\right) \qquad (4-14)\\
&=\left(\nabla\cdot \boldsymbol{E},\nabla\times \boldsymbol{B}-\frac{\partial E}{\partial t}\right)\\
&=4\pi(\rho,\boldsymbol{J})
\end{aligned}
$$

şeklinde skaler kısmı Gauss yasasının ve vektör kısmı Maxwell'in düzelttiği Amper yasasınının potansiyel cinsinden ifadesini elde ederiz.

4.3. Elektromagnetik Teoride Korunum Yasaları

4.3.1. Yükün korunumu

Süreklilik denklemi, Gauss yasası ve Maxwell'in düzelttiği Amper yasasını birlikte tanımlayan kuaternion üzerine **D** kuaternion diferansiyel operatörünün eşleniğinin uygulanmasıyla oluşturulur:

$$
\begin{aligned}
&\text{skaler}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)4\pi(\rho,\boldsymbol{J})\right)\\
&=\text{skaler}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)\left(\nabla\cdot \boldsymbol{E},\nabla\times \boldsymbol{B}-\frac{\partial E}{\partial t}\right)\right)\\
&=\text{skaler}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot \boldsymbol{E}-(-\nabla)\cdot\left(\nabla\times \boldsymbol{B}-\frac{\partial E}{\partial t}\right),\right. \qquad (4-15)\\
&\left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times \boldsymbol{B}-\frac{\partial E}{\partial t}\right)+(-\nabla)\times\left(\nabla\times \boldsymbol{B}-\frac{\partial E}{\partial t}\right)\right)\\
&=\left(\nabla\cdot\nabla\times \boldsymbol{B}-\nabla\cdot\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot \boldsymbol{E},0\right)
\end{aligned}
$$

Sağ taraf sıfirdır, bu nedenle akım yoğunluğunun diverjansı artı yük yoğunluğunun değişim oranının toplamı sıfira eşit olmalıdır anlamına gelen yük korunumu ifade edilmiş olunur.

4.3.2. Enerjinin korunumu

Elektromagnetik teori de enerjinin korunumunu ifade eden Poynting teoremi denklem (4 – 15) ile verilen yükün korunumu denklemindeki $\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)$ diferansiyel işlemcinin eşleniği yerine elektrik alan kuaternion eşleniğinin kullanılmasıyla elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\text{skaler}((0,-\boldsymbol{E})(\rho,\boldsymbol{J}))\\
&=\text{skaler}\left((0,-\boldsymbol{E})\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E},\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\right)\\
&=\left(\boldsymbol{E}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right),0\right)\\
&=\left(\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},0\right)\\
&=(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J},0)
\end{aligned}
\qquad (4-16)
$$

Burada;

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})+\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{E}^2}{\partial t^2}\qquad\qquad \boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{B}^2}{\partial t^2}$$

özellikleri ile

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

eşitliğinin kullanılmasıyla;

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J},0)&=\left(\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},0\right)\\
&=\left(\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})+\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})-\frac{\partial\boldsymbol{E}^2}{2\partial t},0\right)\\
&=\left(\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\frac{\partial\boldsymbol{E}^2}{2\partial t}-\frac{\partial\boldsymbol{B}^2}{2\partial t}\right)
\end{aligned}
\qquad .(4-17)
$$

olarak Poynting denklemi elde edilmiş olur (doug@swester.com).

4.4. Uygulama

Örnek 1:

$\varepsilon_R = \mu_R = 1$ bölgesinde $\sigma = 0$ ve vektör potansiyel $A = 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \cos z\, k$ Wb/m ve skalar potansiyel $V = 310^5 y \sin 3.10^8 t \sin z$ volt'dur. Elektrik alan E'yi ve magnetik alan B'yi bulunuz.

Elektrik alan;

$$\mathbf{E} = vektör\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)(A, -A)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)\left(3.10^5 y \sin 3.10^8 t \sin z, 0, 0, 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \cos z\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}((9.10^{13} y \cos 3.10^8 t \sin z + 3.10^5 y \sin 3.10^8 t \cos z\, k$$

$$-3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j + 0 + 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i$$

$$-3.10^5 \sin 3.10^8 t \cos z\, k - 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \sin z)$$

$$+(9.10^{13} y \cos 3.10^8 t \sin z + 3.10^5 y \sin 3.10^8 t \cos z\, k$$

$$-3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j + 0 + 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i$$

$$-3.10^5 \sin 3.10^8 t \cos z\, k - 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \sin z)$$

$$= \left(0 + 0i + 3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin j + 0k\right) \mathrm{V}/\mathrm{m}$$

bulunur. Magnetik alan;

$$\mathbf{B} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), (A, -A)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}((9.10^{13} y \cos 3.10^8 t \sin z + 3.10^5 y \sin 3.10^8 t \cos z\, k$$

$$-3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j + 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i$$

$$-3.10^5 y \sin 3.10^8 t \cos z\, k - 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \cos z\, i)$$

$$-(9.10^{13} y \cos 3.10^8 t \sin z + 3.10^5 \sin 3.10^8 t \cos z\, k$$

$$-3.10^5 \sin 310^8 t \sin z\, j - 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i$$

$$-3.10^5 y \sin 3.10^8 t \cos z\, k - 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \sin z)$$

$$= \left(0 + 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i + 0j + 0k\right) \mathrm{Wb/m}$$

olur.

5. KOMPLEKS KUATERNİON

5.1. Kompleks Kuaternion Tanımı

Kompleks katsayılı kuaternionlara kompleks kuaternion (bikuaternion) denir. Bir kompleks kuaternion;

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \mathbf{q} + i\mathbf{q}' \\ &= (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) + i(q_0' + q_1'\boldsymbol{i} + q_2'\boldsymbol{j} + q_3'\boldsymbol{k}) \\ &= (q_0 + iq_0') + (q_1 + iq_1')\boldsymbol{i} + (q_2 + iq_2')\boldsymbol{j} + (q_3 + iq_3')\boldsymbol{k} \\ &= (q_0 + iq_0', q + iq')\end{aligned} \qquad (5-1)$$

olarak tanımlanıp,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= [\mathbf{q}, \mathbf{q}'] \\ &= [Q_0, Q_1, Q_2, Q_3]\end{aligned} \qquad (5-2)$$

ile temsil edilir. Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılardır (Negi et al. 1998). $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ reel kuaternion taban elemanlarıdır. Burada i

$$i^2 = (ijk)^2 = -1 \qquad (5-3)$$

olan olağan kompleks birimdir (Ward 1997). Bir kompleks kuaternionun skaler ve vektör kısmı reel kuaternionlarda olduğu gibi

$$\begin{aligned}S &= Q_0 \\ V &= Q_1\boldsymbol{i} + Q_2\boldsymbol{j} + Q_3\boldsymbol{k}\end{aligned} \qquad (5-4)$$

ile verilir. Böylece $\mathbf{Q}$ kompleks kuaternionu;

$$\mathbf{Q} = S_{\mathrm{Q}} + V_{\mathrm{Q}} \qquad (5-5)$$

şeklinde ifade edilebilir (Negi et al. 1998).

5.2. Kompleks Kuaternionlar Üzerine Temel İşlemler

5.2.1. İki kompleks kuaternionun eşitliği

$\mathbf{P}$ ve $\mathbf{Q}$ iki kompleks kuaternionun birbirine eşit olabilmesi için skaler ve vektörel kısımlarının karşılıklı olarak eşit olması gerekir:

$$\mathrm{S}_P = \mathrm{S}_Q \qquad V_P = V_Q \qquad (5-6)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \qquad (5-7)$$

5.2.2. Toplama ve çıkarma

İki kompleks kuaternionun toplam ve farkı, bu iki kompleks kuaternionun karşılıklı elemanlarının toplam ve farkına eşittir. **P** ve **Q** iki kompleks kuaternion olmak üzere;

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\pm\mathbf{Q} &= (S_P \pm S_Q)+(V_P \pm V_Q)\\ &= (P_0 \pm Q_0)+(P_1 \pm Q_1)i+(P_2 \pm Q_2)j+(P_3 \pm Q_3)k \\ &= [P_0 \pm Q_0, P_1 \pm Q_1, P_2 \pm Q_2, P_3 \pm Q_3]\end{aligned} \qquad (5-8)$$

ile verilir.

5.2.3. Çarpma

P ve **Q** iki kompleks kuaternionun çarpımı;

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ} &= (S_P + V_P)(S_Q + V_Q)\\ &= S_P S_Q - V_P \cdot V_Q + S_P V_Q + S_Q V_P + V_P \times V_Q\end{aligned} \qquad (5-9)$$

şeklinde olup reel iki kuaternionun çarpımı ile aynıdır.

5.3. Bir Kompleks Kuaternionun Eşleniği

Bir kompleks kuaternion için kuaternion eşlenik ve kompleks eşlenik olmak üzere iki tür eşlenik tanımlanır. Kuaternion eşlenik; kompleks kuaternionun vektörel kısmın işaretinin değiştirilmesiyle elde edilir ve

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Q}} &= Q_0 - Q_1\, i - Q_2\, j - Q_3\, k\\ &= [Q_0, -Q]\end{aligned} \qquad (5-10)$$

şeklinde ifade edilir.

Kompleks eşlenik; bir kompleks kuaternionun kompleks katsayılarının eşlenikleri alınarak elde edilir ve

$$\mathbf{Q}^c = Q_0^{\,c} + Q_1^{\,c} + Q_2^{\,c} + Q_3^{\,c} \qquad (5-11)$$

şeklinde yazılır. Burada;

$$Q_0^{\,c} = q_0 - iq_0'$$

$$Q_1^{\,c} = q_1 - iq_1'$$

$$Q_2^{\,c} = q_2 - iq_2'$$

$$Q_3^c = q_3 - iq'_3$$

dir.

P ve **Q** iki kompleks kuaternion olmak üzere **P** ve **Q** çarpımlarının eşleniği;

$$\left(\overline{\mathbf{PQ}}\right) = \left(\overline{\mathbf{Q}}\right)\left(\overline{\mathbf{P}}\right)$$

olur ve **P** ve **Q** iki kompleks kuaternionun çarpımının kompleks eşleniği ise;

$$(\mathbf{PQ})^C = \mathbf{P}^C \mathbf{Q}^C \qquad (5-12)$$

olarak verilir.

5.4. Kompleks Kuaternionun Normu

Bir **Q** kompleks kuaternionunun normu, kendisi ile kendi kuaternion eşleniğinin çarpımına eşittir.

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(\mathbf{Q}) &= \mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Q} \\ &= Q_0^{\,2} + Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2} + Q_3^{\,2} \end{aligned} \qquad (5-13)$$

Bu işlem sonucu elde edilen nicelik kompleks skalerdir (Negi et al. 1998). Ama bazen bir kompleks kuaternionun normu $\mathrm{N}(\mathbf{Q}) = 0$ olabileceğinden **Q** 'ya bir sıfır bölen denir. Kompleks kuaternion cebri bu nedenle bir bölüm cebri değildir (İmaeda 1976).

İki kompleks kuaternionun çarpımının normu, normlarının çarpımına eşit olup;

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(\mathbf{PQ}) &= (\mathbf{PQ})\left(\overline{\mathbf{PQ}}\right) \\ &= \mathbf{P}\mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}}\,\overline{\mathbf{P}} \\ &= \mathrm{N}(\mathbf{P})\mathrm{N}(\mathbf{Q}) \end{aligned} \qquad (5-14)$$

ile verilir.

5.5. Bir Kompleks Kuaternionun Tersi

Normu sıfır olmayan bir **Q** kompleks kuaternionunun tersi $\mathbf{Q}^{-1}$ ile temsil edilir ve

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{N(Q)} \tag{5-15}$$

verilir.

5.6. Birim Kompleks Kuaternion

Normu bir olan kompleks kuaterniona birim kuaternion denir (Negi et al. 1998).

$$Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1. \tag{5-16}$$

5.7. Kompleks Kuaternionların Matris Temsili

Bir reel kuaternionu;

$$q = q_0 + q_1 + q_2 + q_3$$

ve 2×2 matris formunda,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ile göstermiştik. Bir **Q** kompleks kuaternionu iki kuaternionun toplamı olarak;

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + i\,\mathbf{q}'$$

şeklinde yazılabileceğinden iki kuaternionun 2×2 matris formlarının toplamı şeklinde **Q**;

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} u' & -v'^* \\ v' & u'^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u + iu' & -v^* - v'^* \\ v + v' & u^* + iu'^* \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5-17}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$u + iu' = p, \qquad -v^* - iv'^* = q$$

$$v + iv' = r, \qquad u^* + iu'^* = s$$

ile ifade edilirse **Q** kompleks kuaternionu 2×2 matris formu;

$$Q = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ -q^c & p^c \end{bmatrix} \tag{5 - 18}$$

ile gösterilir (Lambek 1995).

Kompleks kuaternion 4×4 matris formunda ifade edilir. Kompleks kuaternion taban elemanları ile i kompleks sayısının 4×4 matris temsili,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \dot{I} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \tag{5 - 19}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \tag{5 - 20}$$

$$\dot{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5 - 21}$$

ile verilir. Buna göre **Q** kompleks kuaternionun matris temsili;

$$\square = q_0 I + q_1 \dot{I} + q_2 J + q_3 K + \dot{\mathrm{I}}(q_0' I + q_1' \dot{I} + q_2' J + q_3' K) \tag{5 - 22}$$

ile verilir. Denklem (5 – 22)'de matris işlemi yapılırsa;

$$\square = \begin{bmatrix} q_0 - iq_3 & q_2 + iq_1 & q_3' + iq_0 & -q_1' + q_2' \\ -q_2 + q_1 & q_0 + iq_3 & -q_1' - iq_2' & -q_3' + iq_0' \\ q_3' + iq_0' & -q_1' + q_2' & q_0 - iq_3 & q_2 + iq_1 \\ -q_1' - q_2' & -q_3' + q_0 & -q_2 + iq_1 & q_0 + iq_3 \end{bmatrix} \tag{5 - 23}$$

elde edilir. Burada;

$$c_0 = q_0 - iq_3, \qquad c_1 = -q_2 + q_1$$

$$c_2 = q_3' + iq_0', \qquad c_3 = -q_1' - q_2'$$

olarak ifade edilirse, bir kompleks kuaternionunun 4×4 matris temsili;

$$\square = \begin{bmatrix} c_0 & -c_1^* & c_2 & -c_3^* \\ c_1 & c_0^* & c_3 & -c_2^* \\ c_2 & c_3^* & c_0 & -c_1^* \\ c_3 & -c_2^* & c_1 & c_0^* \end{bmatrix} \tag{5 - 24}$$

ile gösterilir. Burada c_0, c_1, c_2 ve c_3 kompleks sayılardır. (*) kompleks eşleniği ifade etmektedir (Kravchenko et al. 1996).

Sekiz bileşenli olan kompleks kuaternion 8×8 reel matrisle de temsil edilir. **Q** kompleks kuaternionu için Q matrisi;

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{q}' \\ -\mathbf{q}' & \mathbf{q} \end{pmatrix} \qquad (5-25)$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{q}'$ reel kuaternionlardır ve

$$\mathbf{q} = q_0\Gamma_0 + q_1\Gamma_1 + q_2\Gamma_2 + q_3\Gamma_3 \qquad (5-26a)$$

$$\mathbf{q}' = q_0'\Gamma_0 + q_1'\Gamma_1 + q_2'\Gamma_2 + q_3'\Gamma_3 \qquad (5-26b)$$

şeklinde anti-simetrik matrislerle ifade edilirler.

Eşitlik (5 – 24) ve (5 – 25)'e göre de kompleks kuaternionun Q matris temsili;

$$Q = (q_0 + Jq_0')\alpha_0 + (q_1 + Jq_1')\alpha_1 + (q_2 + Jq_2')\alpha_2 + (q_3 + Jq_3')\alpha_3 \quad (5\text{-}27)$$

ile verilir. Burada;

$$J = \varepsilon \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_4 \\ -\mathrm{I}_4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ile} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5-28a)$$

$$\alpha_0 = \mathrm{I}_2\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_4 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_4 \end{pmatrix} \qquad (5-28b)$$

$$\alpha_j = \mathrm{I}_2\Gamma_j = \begin{pmatrix} \Gamma_j & 0 \\ 0 & \Gamma_j \end{pmatrix} \quad (j=1,2,3) \qquad (5-28c)$$

dir. Γ_j eşitlik (2 - 28) tarafindan verilen 4×4 matrisi iken I_2 ve I_4 sırasıyla 2×2 ve 4×4 birim matrislerdir. Böylece (5 - 24)'in kompleks kuaternion Q'si α_0 ve α_j 8×8 matrisleriyle onun temel elemanlarının 8×8 matris temsilini oluşturur. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aşağıdaki çarpım kurallarına uyar:

$$\begin{aligned} &\alpha_0\alpha_j = \alpha_j\alpha_0 = \alpha_j \\ &\alpha_0^{\,2} = -\alpha_j^{\,2} = \mathrm{I}_8 = \alpha_0 \\ &\alpha_0\alpha_0 = -\delta_{jk}\alpha_0 + \varepsilon_{jkl}\alpha_l \end{aligned} \qquad (5-29)$$

denklem (5 - 26)'da J matrisi imajiner nicelik $i = \sqrt{-1}$'e uygundur. Böylece **Q** kompleks kuaternionunun 8×8 matris temsili;

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q'_0 & q'_1 & q'_2 & q'_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 & -q'_1 & q'_0 & -q'_3 & q'_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 & -q'_2 & q'_3 & q'_3 & q'_3 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 & -q'_3 & q'_3 & q'_3 & q'_3 \\ -q'_0 & -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q'_1 & -q'_0 & q'_3 & q'_2 & -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q'_2 & -q'_3 & -q'_0 & q'_1 & -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q'_3 & q'_2 & -q'_1 & -q'_0 & -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \qquad (5-30)$$

şeklinde gösterilir (Negi et al. 1998).

6. KOMPLEKS KUATERNİON ile ELEKTROMAGNETİK TEORİNİN İFADESİ

6.1. Maxwell Denklemlerinin Kompleks Kuaternion İfadesi

D ile gösterilen bir kompleks kuaternion diferansiyel operatörü

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} + i\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \qquad (6-1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (4-6)$$

genel üç boyutlu gradyent operatörüdür.

D kompleks kuaternion diferansiyel operatörünü elektromagnetik alanları tanımlamada kullanılır. Elektrik E ve magnetik B alanları bir tek **Q** kompleks kuaternion alanı ile

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B} - i\,\mathbf{E} \qquad (6-2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu biçimde B ve E vektör kuaternion olarak düzenlenmiştir. Benzer olarak yük yoğunluğu ρ ve akım yoğunluğu J bir kompleks kuaternion olarak;

$$\mathbf{J} = -\rho + i\,\mathbf{J} \qquad (6-3)$$

ya da bileşenleri cinsinden

$$\mathbf{J} = -\rho + iJ$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada **ρ** skaler kuaternion, **J** vektör kuaternion olarak dşünülebilir.

Böylece **D** kompleks kuaternion diferansiyel operatörünün **Q** kompleks kuaternionu alanı üzerine uyguanmasıyla;

$$\begin{aligned} \mathbf{DQ} &= \mathbf{J} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \right] [B - iE] \\ &= \frac{\partial B}{\partial t} - i\frac{\partial E}{\partial t} + i(-\nabla \cdot B + \nabla \times B) + (-\nabla \cdot E + \nabla \times E) \\ &= -\rho + iJ \end{aligned} \qquad (6-4)$$

bağıntısı elde edilir. Bu denklemle Maxwell denklemlerinin tümü bir tek kompleks kuaternion denklemi ile birleştirilmiştir. Bu denklemde;

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (6-5)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \qquad (6-6)$$

bağıntılarının hepsi bulunmaktadırlar (Ward 1997).

6.2. Maxwell Denklemlerinin Potansiyel Formu

Bir skaler potansiyel A ve bir vektör potansiyel $\boldsymbol{A}$ kullanılarak elektrik ve magnetik alanların nasıl tanımlandığı Bölüm 3'de denklem (3 - 2) ve (3 - 3)'de gösterilmiştir. A skalar ve $\boldsymbol{A}$ vektör potansiyel olmak üzere bu potansiyellerin birleşimi olan tek bir $\mathbf{A}$ kompleks kuaternion potansiyeli;

$$\mathbf{A} = A + i\boldsymbol{A} \qquad (6-7)$$

tanımlanır.

$\mathbf{D}$ kompleks kuaternion diferansiyel operatörünün $\mathbf{A}$ kompleks kuaternion potansiyeli üzerine uygulanmasıyla;

$$\begin{aligned} \mathbf{DA} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla\right]\left[A + i\boldsymbol{A}\right] \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + i\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + i\nabla A + \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned} \qquad (6-8)$$

bulunur. Bu ifadenin kuaternion eşleniği;

$$\overline{\mathbf{DA}} = \frac{\partial A}{\partial t} - i\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - i\nabla A + \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad (6-9)$$

dir. Bu ifadenin kompleks kuaternion eşleniği ise;

$$\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^c = \frac{\partial A}{\partial t} + i\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + i\nabla A + \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad (6-10)$$

olur. Bu denkleminde vektör kısmı;

$$\mathrm{V}\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^c = i\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + i\nabla A + \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad (6-11)$$

gösterir. Böylece $\mathrm{V}\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^c = \mathbf{B} - i\mathbf{E}$ olarak alınırsa;

$$E=-\nabla A-\frac{\partial A}{\partial t} \qquad \text{ve} \qquad B=\nabla\times A$$

olduğu bulunur.

Maxwell denklemlerini potansiyel formda elde edebilmek için aşağıdaki işlemin yapılması gerekir.

$$\frac{1}{2}\mathbf{D}\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^{c}-\left(\mathbf{DA}\right)^{c}=\mathbf{J}=-\rho+iJ \qquad (6-12)$$

Bu işlem yapıldığında;

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{D}\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^{c}-\left(\mathbf{DA}\right)^{c}&=\left[\frac{\partial}{\partial t}+i\nabla\right]\left[i\frac{\partial A}{\partial t}i\nabla A+\nabla\times A\right]\\&=i\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+i\frac{\partial}{\partial t}\nabla A+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times A\\&\quad+\nabla\cdot\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\times\frac{\partial A}{\partial t}\\&\quad+\nabla\cdot\nabla A-\nabla\times\nabla A\\&\quad-i\nabla\cdot\nabla\times A+i\nabla\times\nabla\times A\end{aligned} \qquad (6-13)$$

elde edilir. Burada;

$$\nabla\cdot(\nabla\times a)=0 \qquad \nabla\times\nabla a=0 \qquad (6-14)$$

özdeşlikler için geçerli olan kurallara uyulmadan üstteki denklemle Maxwell denklemleri ifade edilmektedir (Ward 1997).

6.3. Elektromagnetik Teoride Korunum Yasaları

6.3.1. Yükün korunumu

Yük yoğunluğu ve akım yoğunluğunun birlikte ifade edldiği **J** kompleks kuaterniomu üzerine **D** operatörünün uygulanmasıyla;

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+i\nabla\right]\left[-\rho+iJ\right]=-\frac{\partial\rho}{\partial t}+i\frac{\partial J}{\partial t}-i\nabla\rho+\nabla\cdot J-\nabla\times J \qquad (6-15)$$

elde edilir. Bu denklemin skaler kısmı;

$$S\left[\frac{\partial}{\partial t}+i\nabla\right]\left[-\rho+iJ\right]=-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot J=0 \qquad (6-16)$$

şeklinde süreklilik denklemini verir (Lambek 1995).

6.4. Uygulama

Örnek 1:

$\varepsilon_R = \mu_R = 1$ bölgesinde $\sigma = 0$ ve vektör potansiyel $A = 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \cos z\, k$ Wb/m ve skaler potansiyel $V = 3.10^5 y \sin 3.10^8 t \sin z$ volt'dur. Elektrik alan E'yi ve magnetik alan B'yi bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{DA} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla\right][A + iA]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\left[3.10^5 y \sin 3.10^8 t \sin z + i10^{-3} y \cos 3.10^8 t \cos z\, k\right]$$

$$= 9.10^{13} y \cos 3.10^8 t \sin z + i3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j$$

$$+ 10^{-3} y \cos 3.10^8 t \sin z - 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i$$

bu ifadenin kuaternion eşleniği;

$$\overline{\mathbf{DA}} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla\right][A + iA]$$

$$= 9.10^{10} y \cos 3.10^8 t \sin z + 10^{-3} \cos .310^8 t \cos z\, i - i3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j$$

üsteki ifadenin kompleks eşleniği;

$$\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^c = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla\right][A + iA]$$

$$= 9.10^{10} y \cos 3.10^8 t \sin z + 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i + i3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j$$

bu sonucun vektörel kısmı;

$$V\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^c = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla\right][A + iA]$$

$$= 10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, i + i3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j$$

ve $V\left(\overline{\mathbf{DA}}\right)^c = \mathbf{B} - i\mathbf{E}$ olduğuna göre;

$$\mathbf{E} = \left[0,0,-3.10^5 \sin 3.10^8 t \sin z\, j, 0\right] \text{V/m}$$

$$\mathbf{B} = \left[0,10^{-3} \cos 3.10^8 t \cos z\, 0,0\right] \text{W/m}$$

olur.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kuaternionlar 1843'te Hamilton'un keşfinden bugüne fizikte gerek fiziksel denklemleri ve varlıkları daha anlaşılır şekilde ifade etmek, gerekse çözmek için kullanılmıştır.

Bu çalışma da, kuaternion ve kompleks kuaternion cebrinin özellikleri belirtilerek, elektromagnetik teorinin bu cebirlerle ifadesi verilmektedir. Elektromagnetik teorinin kuaternionlarla ifadesinde belli bir yarar sağlanmamaktadır. Yalnızca dört Maxwell denkleminin kuaternionlarla ifadesinde denklem sayısı iki kuaternion denkleme, kompleks kuaternion ile ifadesinde ise tek denkleme indirgendiği görülmüştür.

Kompleks kuaternionlar, kuaternionlar için geçerli olan özelliklerin bir çoğuna sahip olurken, sekiz bileşeni dört kompleks sayı ile ifade edildiğinde kuaternionlara yapı bakımından da benzemektedirler.

Bu çalışma da değinilmemekle birlikte sekiz bileşenden oluştukları bilinen dual kuaternion ve oktonion yapılar kompleks kuaternionlara karıştırılabilinir. Kompleks kuaternion ile dual kuaternion arasında göze çarpan ilk fark dual birim i^2'nin kompleks kuaternionda -1 iken dual kuaternionda 1 oluşudur. Kompleks kuaternionu, kuaternion, dual kuaternion ve oktoniondan ayıran en belirgin özellik oluşturduğu cebrin bir bölüm cebri olmamasıdır.

KELLER, F.J., GETTYS, W.E., SKOVE, M.J., *Physics*, McGrawHill C. 2,1993. Çeviri: AKYÜZ, R.Ö., GÜLMEZ, E., KARAOĞLU, B., NERGİZ, S., TEPEHAN, G., *Fizik*, Literatür Yayıncılık, (1995).

KRAVCHENKO, V.V., DE ARELLANO, E.R., SHAPIRO, M.V., *On Integral Representations and Boundary Properties of Spinor Fields*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 19, 977-989 (1996).

LAMBEK, J., *If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics*. The Mathematical Intelligence, 17, 4, 7-15 (1995).

MORITA, K., *Quaternions and Simple D=4 Supergravity*, Progress of Theoretical Physics, 73, 4, 1056-1059 (1995).

NEGİ, O. P. S., BISHT, S., BISHT, P. S., *Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism*, Il Nuovo Cimento, 113B, 12, 1449-1467, (1998).

ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, (1995).

ÖZDAŞ, K., ÖZDAŞ, A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili*, Fen-Edebiyat Dergisi, I, 2, 101-113, (1989).

SERDAROĞLU, M., Fizikte *Kuaternion ve Oktonion Yapılar*, Bilim ve Teknik Dergisi, 45-51, Ocak (1993).

ŞEKER, Ş.S., ÇERENCİ, O., *Elektromagnetik Dalgalar ve Mühendislik Uygulamaları*, Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, İstanbul, (1994).

TANIŞLI, M., ÖZDAŞ, K., ÖZDAŞ, A., *An Application of General Quaternion Transformation for a Robotics Position*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, 3, 55-68 (1997).

WARD, J. P., *Quaternion and Cayley Numbers*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1997).