KUATERNİONLARIN KUANTUM FİZİĞİNE UYGULANMASI

Abidin KILIÇ
Yüksek Lisans Tezi
Fizik Anabilim Dalı
1999

Abidin Kılıç'ın yükseklisans tezi olarak hazırladığı Kuaternionların Kuantum Fiziğine Uygulanması başlıklı tez .....11..02..1999..tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
Üye	:	Doç. Dr. Mustafa ŞENYEL
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Murat TANIŞLI

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..17.02.1999 tarih ve ..5/4..........sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ABSTRACT

Master of Science Thesis

APPLICATION OF QUATERNIONS TO QUANTUM PHYSICS

ABİDİN KILIÇ

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Physics Program

Supervisor:Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
1999, page 52

Quaternion algebra satisfies the associative law but not commutative law for the quaternions of having four elements. The application of quaternions to Quantum Physics has created new approaches. In our study, we represent gamma-matrices by quaternions. In addition, we compared classical physics with quantum mechanics in chapter 3. Then, at the end, we also compared the quaternionic quantum mechanics with the other models that contribute to the grand unified model.

Keywords:Quaternions, Gamma matrices.

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\boldsymbol{R}$	:Reel sayılar uzayı
C	:Kompleks sayılar uzayı
Q	:Kuaternionlar
O	:Oktonyonlar
$\mathbf{q}$	:Kuaternion
q^0	:Kuaternion bileşeni
γ_i	:Gama matrisleri
V_{IH}	:Hilbert uzayı
$\widetilde{\mathbf{H}}$	:anti-self adjoint kuaternion
a,b..	:skalar
a,b..	:vektör
$\otimes$	:vektörel çarpım
$\odot$	:skalar çarpım

1.KUATERNİONLAR

1.1 GİRİŞ

Reel sayılar, kompleks sayılar, kuaternionlar ve oktonyonlar,(*R,C,Q,O*) sırasıyla bir, iki, dört ve sekiz boyutlu sayılardır. Bu dört sayı sistemine kısaca *bölüm cebri* denilir. Bir boyutlu reel sayılar sisteminden, sekiz boyutlu oktonyonlara giderken bölüm cebrinin bazı özellikleri kaybolur. Reel sayılarda ve kompleks sayılarda çarpma işlemi hem değişimli hem de birleşimli, kuaternionlarda ise ne değişimli ne de birleşimlidir.

Temel fiziksel nicelikler, skalar ve vektörel nicelikler olmak üzere iki grupta incelenebilir. Skalar nicelikler reel sayılarla gösterilebilir. Vektörel nicelikler ise, 3-boyutlu uzayın vektörleri ile gösterilebilir.

Kuaternionlar ilk defa 13 Kasım 1843' te Hamilton (1805-1865) tarafından *Royal Irish Academy* de ünlü bildirisi *"On a New Species of Imagianery Quantites Connected with the Theory of Quaternions"* ile tanımlanarak yayınladı.

Kuaternion cebri birleşimli, değişimli olmayan (1,i,j,k) gibi dört elemandan oluşur. Bunlardan biri reel, diğer üçü sanaldır.

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1$$
$$\mathbf{ij}=-\mathbf{ji}=\mathbf{k}$$
$$\mathbf{q}=q_o 1+q_1\mathbf{i}+q_2\mathbf{j}+q_3\mathbf{k} \qquad 1.1.1$$

Hamilton, fizik uygulamaları için uygun üç boyutlu uzayın doğal cebrini kuaternionlarla kurduğuna herkesi ikna ederek, kuramsal kuaternionları vektörlerle temsil etti ve iki kuaternionun çarpımını skalar ve vektörel kısım olmak üzere ayırarak;

$$\mathbf{qq}'=-\sum_{i=1}^{3} q_i q_i' + (q_2q'_3-q_3q'_2)\,\mathrm{i}+(q_3q'_1-q_1q'_3)\,\mathrm{j}+(q_1q'_2-q_2q'_1)\,\mathbf{k} \qquad 1.1.2$$

şeklinde yazmıştı (Özdaş ve Özdaş[1]).

1.2. TANIM

Kuaternionlar, reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Bir kuaternion;

$$q=\sum_{k=0}^{3} q^{k} e_k = q^{0} e_0 + q^{1} e_1 + q^{2} e_2 + q^{3} e_3 \qquad 1.2.1$$

veya

$$q=[q^0,q^1,q^2,q^3] \qquad 1.2.2$$

olarak gösterilebilir. Kuaternionların cebir yapısı;

$$\forall \mathbf{p},\mathbf{q} \in Q \xrightarrow{\sigma} r=\sigma(\mathbf{p},\mathbf{q})=\mathbf{pq} \in Q \qquad 1.2.3$$

şeklinde bir ikili işlemi ile tanımlanır.

Q cebrinin birim elemanı $\mathbf{e_0}$=1 dir. Buna göre, $\mathbf{e_0 q}=\mathbf{q e_0}=\mathbf{q}$ dur. Q cebri bir bölüm cebridir. Çünkü cebrin sıfırdan farklı her q elemanı için, q^{-1} ile ifade edilen bir ters elemanı vardır;

$$\forall \mathbf{q} \in Q, \mathbf{q} \neq 0$$

için,

$$\mathbf{qq^{-1}=q^{-1}q=e_0} \qquad 1.2.4$$

dır. Q cebri değişimli değildir, genel olarak $\mathbf{p,q} \in Q$ iken

$$\mathbf{pq} \neq \mathbf{qp} \qquad 1.2.5$$

dir. Fakat,

$$\mathbf{p,q,r} \in Q \text{ için } \mathbf{(pq)r=p(qr)} \qquad 1.2.6$$

dir. O halde kuaternionlar değişimli olmayan fakat birleşimli bir bölüm cebri oluşturmaktadır.

R^3 deki vektörleri kuaternionlarla temsil etmek mümkündür. Bunun için $\{e_i;\ i=1,2,3\}$ tabanının elemanlarına birer yön tahsis etmek gerekir. Bunlar sırası ile kartezyen koordinat sisteminin x,y ve z eksenlerinin pozitif yönlerini temsil etsinler. O zaman kartezyen bileşenleri r_1=x, r_2=y, r_3=z olan R^3 deki bir vektörü;

$$\mathbf{r}=[0,x,y,z] \qquad 1.2.7$$

şeklinde bir vektör kuaternionla temsil etmek mümkün olur.

Bilindiği gibi R^3 de bölme işlemi yoktur. Yani R^3 deki bir vektörü diğer bir vektöre bölmek mümkün değildir. Oysa R^3 ün vektörleri birer vektör kuaternionla temsil edilirse, vektör kuaternionlar için bölme işlemi tanımlı olduğundan bu eksiklik ortadan kalkacaktır (Özdaş ve Özdaş, [1]).

1.3 KUATERNİONLAR ÜZERİNE TEMEL İŞLEMLER

1.3.1 Kuaternionlarda Toplama ve Çıkarma

p ve **q** gibi iki kuaternionun toplamı;

$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=[p^0,p^1,p^2,p^3]+[q^0,q^1,q^2,q^3]$$
$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=[p^0+q^0, p^1+q^1, p^2+q^2, p^3+q^3] \qquad 1.3.1$$

şeklinde karşılıklı bileşenlerin toplanmasıyla elde edilir. **p** ve **q** gibi iki kuaternionun farkı ise;

$$\mathbf{p}-\mathbf{q}=[p^0,p^1,p^2,p^3]-[q^0,q^1,q^2,q^3]$$
$$\mathbf{p}-\mathbf{q}=[p^0-q^0, p^1-q^1, p^2-q^2, p^3-q^3] \qquad 1.3.2$$

dir.

1.3.2 İki Kuaternionun Kuaternion Çarpımı

p ve **q** gibi iki kuaternionun çarpımı;

$$\mathbf{pq}=[p^0,p^1,p^2,p^3][q^0,q^1,q^2,q^3]$$
$$\mathbf{pq}=[p^0q^0-p^1q^1-p^2q^2-p^3q^3),(p^0q^1+p^1q^0+p^2q^3-p^3q^2),$$
$$(p^0q^2+p^2q^0+p^3q^1-p^1q^3),(p^0q^3+p^3q^0+p^1q^2-p^2q^1)] \qquad 1.3.3$$

şeklinde yapılmaktadır. Kuaternion cebrinde çarpma işlemi değişimli değildir:

$$\mathbf{pq} \neq \mathbf{qp}$$

1.3.3 Kuaternionlarda Bölme

p ve **q** kuaternionlarının **p/q** bölümü, kuaternion çarpımı değişimli olmadığı için iki şekilde yapılır.

$$pq^{-1} = p\frac{q^*}{\sum_{k=0}^{3}(q^k)^2} \quad \text{“sağdan bölme”}$$

1.3.4

$$q^{-1}p = \frac{q^*}{\sum_{k=0}^{3}(q^k)^2}p \quad \text{“soldan bölme”}$$

$pq^{-1} \neq q^{-1}p$ dir. *Q* nun skalar bir kuaternion olması halinde sağdan bölme, soldan bölmeye eşittir (Tanışlı, [3]).

1.3.4 Özellikler

Kuaternion ifadeleri için aşağıdaki özellikleri kullanabiliriz. Burada **m** ve **n** skalar kuaternion, **p** ve **q** vektör kuaternion olmak üzere ;

- $\mathbf{mn}=[m^0n^0,0,0,0]$
- $\mathbf{mn}^{-1}=\mathbf{n}^{-1}\mathbf{m}=[m^0/n^0,0,0,0]$
- $\mathbf{mp}=\mathbf{pm}=[0,m^0p^1,m^0p^2,m^0p^3]$
- $\mathbf{pm}^{-1}=\mathbf{m}^{-1}\mathbf{p}=[0,\frac{p^1}{m^0},\frac{p^2}{m^0},\frac{p^3}{m^0}]$
- $\mathbf{mp}^{-1}=\mathbf{p}^{-1}\mathbf{m}=\frac{m^0}{((p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2)}[0,-p^1,-p^2,-p^3]$
- $\mathbf{pq}=(\mathbf{qp})^*$ veya $\mathbf{qp}=(\mathbf{pq})^*$
- $\mathbf{pq}^{-1}=(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{p})^*$ veya $\mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}=(\mathbf{pq}^{-1})^*$

özellikleri vardır.

1.4 KUATERNİONLARIN FİZİĞE UYGULANMASI

Fizikteki, skalar ve vektörel büyüklükler kuaternionlarla tanımlanabilir. Örneğin;

kütle	:	$\mathbf{m}=(m,0,0,0)$
sıcaklık	:	$\mathbf{t}=(t,0,0,0)$
kuvvet	:	$\mathbf{F}=(0,F^1,F^2,F^3)$
elektrik alan	:	$\mathbf{E}=(0,E^1,E^2,E^3)$

şeklinde temsil edilebilir. Ya da kuaternionlarda dört işlemin özelliklerinden yararlanarak diğer fiziksel büyüklüklerin değerleri de hesaplanabilir.

$$F=(0,F^1,F^2,F^3)$$
$$dr=(0,dr^1,dr^2,dr^3) \quad 1.4.1$$

F kuvvetinin dr yerdeğiştirmesi boyunca yaptığı işi, **F** ve **dr** vektör kuaternionlarının skalar çarpımı olarak tanımlarız.

$$\mathbf{W} = [\mathbf{F},\mathbf{dr}]_{+} = -\frac{1}{2}[\mathbf{Fdr} + (\mathbf{Fdr})^*]$$
$$= ((F_1dr_1 + F_2dr_2 + F_3dr_3),0,0,0) \quad 1.4.2$$

İki kuaternionun çarpımı sonucunda skalar kuaternion elde edilir ve iki vektör kuaternionun skalar çarpımı değişimlidir (Tanışlı[3]):

$$\mathbf{p\Theta q=q\Theta p}$$

Eğer **p** ve **q** vektör kuaternionlarının skalar çarpımı sıfırsa, bu vektör kuaternionlar birbirine diktir(Özdaş ve Özdaş[2]).

Dikkat edilirse **F** ve **dr** vektör kuaternionlar olduğu halde **W** işi vektör cebrinde karşılığı aynı olan skalar kuaternion olarak elde edilmiştir (Tanışlı, [3]).

2. KUATERNİONLARIN KUANTUM FİZİĞİNE UYGULANMASI

2.1 SPİN KAVRAMI VE PAULİ SPİN MATRİSLERİ

Atomik sistemlerde elektron, çekirdek ve nükleonlar (proton ve nötron) için söz konusu olan bir de spin hareketi vardır. Bu hareketlerin de kuantum mekanik teori çerçevesinde incelenmesi gerekir.

Kuantum mekanik teori ve onun çok geniş bir uygulaması olan atom fiziğinde Schrödinger'in dalga mekaniği teorisine bir alternatif yöntem yine kuantum mekaniksel yaklaşım içinde Heisenberg'in matris mekaniği teorisidir.

Elektron, proton,nötron, vb. spin kuantum sayısı s=1/2 olan parçacıklar için geçerli olan Pauli spin matrislerini ve ilgili kavramları incelemek gerekir. Pauli spin matrisleri,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2.1.1$$

şeklinde tanımlanır ve spini 1/2 olan parçacıkların spin açısal momentum vektörlerinin bileşenleri de;

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2}\hbar\sigma_x \\ S_y &= \frac{1}{2}\hbar\sigma_y \\ S_z &= \frac{1}{2}\hbar\sigma_z \end{aligned} \qquad 2.1.2$$

olarak alınır.

Spini 1/2 olan parçacıkların uzayı iki boyutlu olduğundan iki tane spin dalga fonksiyonu olmaktadır. Bu spin dalga fonksiyonları (spinörler) spin uzayını geren baz vektörleri olarak düşünülebilir. Spin uzayını geren bu vektörleri kolon matrisi olarak,

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{“spin- yukarı spinör”} \\ \beta &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{“spin- aşağı spinör”} \end{aligned} \qquad 2.1.3$$

şeklinde yazılabilir (Aygün ve Zengin, [9]).

2.2 DİREKT ÇARPIM

İki matrisin direkt çarpımı denilen çarpma işlemi;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{11} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \qquad 2.2.1$$

şeklinde yapılmaktadır. Bu çarpma işlemi daha sonra gama matrislerinin elde edilmesinde kullanılacaktır.

2.3 GAMA MATRİSLERİ

γ matrisleri;

$$\sigma_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2.3.1$$

şeklinde daha önce tanımladığımız Pauli spin matrisleri ile biçimlenirler.

Elektron, proton, nötron vb. spin kuantum sayısı s=1/2 olan parçacıklar için geçerli olan Pauli spin matrislerini ve ilgili kavramları incelersek, s=1/2 olan kuantum sistemleri için yukarıdaki Pauli spin matrisleri yazılabilir.

Pauli spin matrislerinden elde edilen gama matrislerinin çeşitli gösterimleri vardır. Bunlar Weyl, Majarona ve Dirac gösterimleridir (Feynman [14]).

2.3.1 Weyl Gösterimi

Bu gösterimde γ_5:diagonal, γ_5, γ_2, γ_4:reel, hiçbir elemanı imajiner değildir. Yani;

(n=1,2,3),

$\gamma_n=\rho_2\sigma_n$
$\gamma_4=\rho_1$
$\gamma_5=\rho_3$
$C=\gamma_2\gamma_4$

dir. Burada ρ_i ve σ_i gösterimleri Pauli matrislerine aittir (i=1,2,3) ve:

$$\gamma_1 = \rho_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \rho_2\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \rho_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = \rho_1 = \rho_1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \rho_3 = \rho_3 \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2.3.2$$

$$C = \gamma_2\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Her temsilde geçen C' ler charge conjugation operasyonunun tanımındaki $C_{\alpha\beta}$ dır. Weyl temsilinde;

$$\gamma_5^w = \rho_3 \text{ ve } \gamma_4^w = \rho_1$$

olduğundan,

$$\gamma_5^W \gamma_4^W = \rho_3\rho_1$$

yazılır. Ayrıca;

$$\rho_i\rho_j = i\,\epsilon_{ijk}\,\rho_k \Rightarrow \rho_3\rho_1 = i\rho_2 \qquad 2.3.3$$

$$\gamma_5^W \gamma_4^W = \rho_3\rho_1 = i\rho_2$$

olur. Herhangi bir $e^{i\alpha\rho_2}$ seriye açılırsa;

$$e^{i\alpha\rho_2} = 1 + i\alpha\rho_2 + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\rho_2^2 + \frac{(i\alpha)^3}{3!}\rho_3^3 + \frac{(i\alpha)^4}{4!}\rho_4^4 + \ldots$$
$$= (1 - \frac{(i\alpha)^2}{2!}\rho_2^2 + \frac{(i\alpha)^4}{4!}\rho_4^4 + \ldots) + i\rho_2(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!}\rho_2^2 + \frac{\alpha^5}{5!}\rho_4^2 - \ldots$$

olur. Burada ρ_i ler Pauli matrisleri olduğundan $\rho_i^2 = 1 \Rightarrow \rho_2^2 = 1$ dir. Buna göre,

$$e^{i\alpha\rho_2} = (1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots) + i\rho_2(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots)$$
$$= \cos\alpha + i\rho_2 \sin\alpha$$

olduğundan, eğer

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

ise,

$$e^{i\alpha\rho_2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\rho_2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\rho_2\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$e^{i\alpha\rho_2} = \frac{1 + i\rho_2}{\sqrt{2}} \qquad 2.3.4$$

bulunur.Bu ifade Eşitlik 2.3.7' nin elde edilmesinde kullanılacaktır.

2.3.2 Dirac Gösterimi

Bu gösterimin iki tipi vardır;

a) $\gamma_n = \rho_2\sigma_n$ n=1,2,3
$\gamma_4 = \rho_3$
$\gamma_5 = -\rho_1$

b) $\gamma_n = -\rho_2\sigma_n$ n=1,2,3
$\gamma_4 = \rho_3$
$\gamma_5 = \rho_1$
$c = \gamma_2\gamma_4$

a) İlk gösterim metodunda γ 'ları yazalım. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$'ler Weyl temsilindekilerle aynıdır. Dirac gösterimindeki γ_4 Weyl temsilindeki $-\gamma_5$ e eşitir. γ_5 de yine Weyl temsilindeki - γ_4'e eşittir. Şimdi bunları gösterelim:

$$\gamma_1=\rho_2\sigma_1=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_2=\rho_2\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3=\rho_2\sigma_3=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_4=\rho_3\otimes I=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_5=-\rho_1\otimes I=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\otimes I=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} \qquad 2.3.5$$

$$C=\gamma_2\gamma_4=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

b) Bu tip gösterimde ise;

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad \gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix} \qquad 2.3.6$$

$$\gamma_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad C=\gamma_2\gamma_4=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Weyl temsilinden Dirac temsiline geçiş için dönüşüm formülü olan

$$\gamma_\mu^{\text{Dirac}}=e^{\frac{\pi}{4}\gamma_5^w\gamma_4^w}\gamma_\mu^w e^{-\frac{\pi}{4}\gamma_5^w\gamma_4^w}$$

şeklinde bir dönüşüm formülü vardır. Eşitlik 2.3.4' den yararlanarak bu bağıntının doğruluğunu araştıralım. μ=5 için;

$$\begin{aligned}\gamma_5^{\text{Dirac}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\rho_2)\gamma_5^W(1-i\rho_2)\\&=\frac{1}{2}(1+i\rho_2)\rho_3(1-i\rho_2)=\frac{1}{2}(\rho_3+i\rho_2\rho_3)(1-i\rho_2)\\&=\frac{1}{2}\left[(\rho_3+i(i\rho_1)(1-i\rho_2)\right]=\frac{1}{2}(\rho_3-\rho_1)(1-i\rho_2)\\&=\frac{1}{2}(\rho_3-i\rho_3\rho_2-\rho_1+i\rho_1\rho_2)=\frac{1}{2}(\rho_3-i(-i\rho_1)-\rho_1+i(i\rho_3))\\&=\frac{1}{2}(\rho_3-\rho_1-\rho_1-\rho_3)=-\rho_1\end{aligned} \qquad 2.3.7$$

Bu da Dirac temsilinde γ_5 e eşittir. Buradan eşitliğin doğru olduğu anlaşılır. Her iki temsilde de;

$$\gamma_1^D=\gamma_1^w,\gamma_2^D=\gamma_2^w,\gamma_3^D=\gamma_3^w \qquad 2.3.8$$

dir.

2.3.3 Majorana Gösterimi

Bu gösterimin de;

a) $\gamma_1=\rho_1$
$\gamma_2=\rho_2\sigma_2$
$\gamma_3=\rho_3$
$\gamma_4=\rho_2\sigma_1$
$\gamma_5=\rho_2\sigma_3$

b) $\gamma_1=\rho_2\sigma_2$
$\gamma_2=\rho_3$
$\gamma_3=-\rho_1$
$\gamma_4=-\rho_2\sigma_1$
$\gamma_5=-\rho_2\sigma_3$
$\psi_c=\psi^*$, $C=-\gamma_4$

şeklinde iki tipi vardır.

a)

$$\gamma_1=\rho_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \qquad \gamma_2=\rho_2\sigma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3=\rho_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \qquad \gamma_4=\rho_2\sigma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix} \qquad 2.3.9$$

$$\gamma_5=\rho_2\sigma_3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix} \qquad C=-\gamma_4=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}$$

b)

$$\gamma_1=\rho_2\sigma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \gamma_2=\rho_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3=-\rho_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\qquad \gamma_4=-\rho_2\,\sigma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\qquad 2.3.10$$

$$\gamma_5=-\rho_2\sigma_3=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}\qquad C=-\gamma_4=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

Majorana temsilinde γ-matrisleri şu şekilde özetlenebilir:

γ_1:reel, $\gamma_1=\gamma_1^T$, $\gamma_1=\gamma_1^+$
γ_2:reel, $\gamma_2=\gamma_2^T$, $\gamma_2=\gamma_2^+$
γ_3:reel, $\gamma_3=\gamma_3^T$, $\gamma_3=\gamma_3^+$
γ_4:kompleks, $\gamma_4=-\gamma_4^T$, $\gamma_4=\gamma_4^+$
γ_5:kompleks, $\gamma_5=-\gamma_4^T$, $\gamma_4=\gamma_4^+$

Majorana temsilinde tanımlanan ilk beş γ matrisinden sonra bir sonraki dört γ matrisi $\gamma_\mu\gamma_5$ (μ=1,2,3,4) şeklinde yazılabilir:

$$\gamma_1\gamma_5=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{"kompleks"},\quad \gamma_1\gamma_5=(\gamma_1\gamma_5)^T,\gamma_1\gamma_5=-(\gamma_1\gamma_5)^+$$

$$\gamma_2\gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"kompleks"},\quad \gamma_2\gamma_5=(\gamma_2\gamma_5)^T,\gamma_2\gamma_5=-(\gamma_2\gamma_5)^+$$

$$\gamma_3\gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"kompleks"},\quad \gamma_3\gamma_5=(\gamma_3\gamma_5)^T,\gamma_3\gamma_5=-(\gamma_3\gamma_5)^+$$

$$\gamma_4\gamma_5=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"reel"},\quad \gamma_4\gamma_5=-(\gamma_4\gamma_5)^T,\gamma_4\gamma_5=-(\gamma_4\gamma_5)^+ \qquad 2.3.11$$

Ayrıca $\gamma_\mu\gamma_\nu$ çarpımından altı adet γ matrisi bulunur:

$$\gamma_1\gamma_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&-i&0\end{pmatrix},\quad \gamma_1\gamma_2\text{:kompleks}; (\gamma_1\gamma_2)=-(\gamma_1\gamma_2)^T;\quad (\gamma_1\gamma_2)=(\gamma_1\gamma_2)^+$$

$$\gamma_1\gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma_1\gamma_3\text{:kompleks}; (\gamma_1\gamma_3)=-(\gamma_1\gamma_3)^T;\quad (\gamma_1\gamma_3)=(\gamma_1\gamma_3)^+$$

$$\gamma_1\gamma_4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\quad \gamma_1\gamma_4\text{:reel}; (\gamma_1\gamma_4)=(\gamma_1\gamma_4)^T;\quad (\gamma_1\gamma_4)=(\gamma_1\gamma_4)^+$$

$$\gamma_2\gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma_2\gamma_3\text{:kompleks}; (\gamma_2\gamma_3)=-(\gamma_2\gamma_3)^T;\quad (\gamma_2\gamma_3)=(\gamma_2\gamma_3)^+$$

$$\gamma_2\gamma_4=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \gamma_2\gamma_4\text{:reel}; (\gamma_2\gamma_4)=(\gamma_2\gamma_4)^T;\quad (\gamma_2\gamma_4)=(\gamma_2\gamma_4)^+ \qquad 2.3.12$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad I\text{:reel}; I=I^T;\quad I=I^+$$

Bu gama matrislerinin 10 tanesi simetrik, 6 tanesi anti simetriktir. Simetrik olanlar;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1\gamma_5, \gamma_2\gamma_5, \gamma_3\gamma_5, \gamma_1\gamma_4, \gamma_2\gamma_4, \gamma_3\gamma_4, I$

dir ve anti simetrik olanlar ise;

$\gamma_4, \gamma_5, \gamma_4\gamma_5, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_3, \gamma_1\gamma_3$

dir. Şimdi de gama matrislerinin komütasyon bağıntıları incelenecektir.

2.4 GAMA MATRİSLERİNİN KOMÜTASYON BAĞINTILARI

Gama matrislerinin aralarındaki komütasyon ya da antikomütasyon bağıntıları;

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)=2\delta_{\mu\nu} \qquad \delta_{\mu\nu}:\text{Kronecker delta} \qquad 2.4.1$$

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]=(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)=2i\sigma_{\mu\nu} \qquad 2.4.2$$

dir. Bu iki bağıntıyı taraf tarafa toplarsak;

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=\delta_{\mu\nu}+i\sigma_{\mu\nu} \qquad 2.4.3$$

elde edilir. $\sigma_{\mu\nu}$matrisleri antisimetriktirler. $\delta_{\mu\nu}$ nin özellikleri ise;

$$\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ 1 & \mu=\nu=4\\ -1 & \mu=\nu=1,2,3\end{cases} \qquad 2.4.4$$

dir. $\sigma_{\mu\nu}$ ler ile γ_μ lerin komütasyon bağıntıları ise;

$$[\sigma_{\mu\nu},\gamma_\lambda]=2i(\delta_{\mu\lambda}\gamma_\nu-\delta_{\nu\lambda}\gamma_\mu) \qquad (\mu,\nu,\lambda=1,2,3,4) \qquad 2.4.5$$

$$[\gamma_5,\sigma_{\mu\nu}]=0 \qquad 2.4.6$$

dir. Üç γ_μ nün çarpımı ise;

$$\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\kappa=\delta_{\lambda\mu}\gamma_\kappa+\delta_{\mu\kappa}\gamma_\lambda-\delta_{\lambda\kappa}\gamma_\mu-\varepsilon_{\lambda\mu\kappa\nu}\gamma_5\gamma_\nu \qquad (\mu,\nu,\lambda,\kappa=1,2,3,4)$$

$$\varepsilon_{\lambda\mu\kappa\nu}=\left\{\begin{array}{lll}\varepsilon_{1234}=1 & (1,2,3,4)\text{ ün çift permütasyonu} & :1\\ \varepsilon_{2134}=-1 & (1,2,3,4)\text{ ün tek permütasyonu} & :-1\\ \varepsilon_{2214}=0 & (1,2,3,4)\text{ de tekrarlanan indis} & :0\end{array}\right\} \qquad 2.4.7$$

$$\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\kappa+\gamma_\kappa\gamma_\mu\gamma_\lambda=2\{\delta_{\lambda\mu}\gamma_\kappa+\delta_{\kappa\mu}\gamma_\lambda-\delta_{\lambda\kappa}\gamma_\mu \qquad 2.4.8$$

$$\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\kappa-\gamma_\kappa\gamma_\mu\gamma_\lambda=2\varepsilon_{\lambda\mu\kappa\nu}\gamma_5\gamma_\mu \qquad 2.4.9$$

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_5\sigma_{\nu\mu} \qquad 2.4.10$$

şeklindedir. Bu bağıntılardan gama matrislerinin kuaternionlarla gösterimi sırasında yararlanacağız (Feynman [14])

2.5 GAMA MATRİSLERİNİN KUATERNİONLARLA GÖSTERİMİ

2.5.1 Weyl Temsilinde Gama Matrislerinin Kuaternionlarla Gösterimi

Bölüm 2.3 te gama matrislerinin Weyl temsili yazılmıştı. Şimdi ise Weyl temsilindeki gama matrislerini kuaternionlarla temsil edeceğiz. Matrisin birinci kolonu bunun için kullanılır ve ($i = \sqrt{-1}$) olmak üzere;

$$\frac{\gamma_1}{i} = [0,0,0,1]$$

$$\gamma_2 = [0,0,0,-1]$$

$$\frac{\gamma_3}{i} = [0,0,1,0]$$

$$\gamma_4 = [0,0,1,0]$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

$$\gamma_5 = [1,0,0,0]$$

$$\gamma_6 = \gamma_1\gamma_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_6}{i} = [0,0,0,1]$$

$$\gamma_7 = \gamma_2\gamma_5 = [0,0,0,-1] \qquad 2.5.1$$

$$\gamma_8 = \gamma_3\gamma_5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_8}{i} = [0,0,1,0]$$

$$\gamma_9 = \gamma_4\gamma_5 = [0,0,1,0]$$

elde edilir. γ Matrislerinin komütasyon ve antikomütasyon bağıntıları;

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\upsilon\} = (\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = 2\delta_{\mu\nu}$$

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu] = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = 2i\sigma_{\mu\nu}$$

idi. Bunları taraf tarafa toplarsak;

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\sigma_{\mu\nu} \qquad 2.5.2$$

elde edilir. $\delta_{\mu\nu}$ nin özellikleri ise;

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu = 4 \\ -1 & \mu = \nu = 1,2,3 \end{cases}$$

dir. Bu özelliklerden yola çıkarsak, geri kalan yedi gama matrisini,

$$\begin{aligned}
\gamma_{10} &= \frac{\gamma_1\gamma_2}{i} = [1,0,0,0] \\
\gamma_{11} &= \frac{\gamma_1\gamma_3}{i} \quad \Rightarrow \frac{\gamma_{11}}{i} = [0,-1,0,0] \\
\gamma_{12} &= \frac{\gamma_1\gamma_4}{i} = [0,-1,0,0] \\
\gamma_{13} &= \frac{\gamma_2\gamma_3}{i} = [0,1,0,0] \\
\gamma_{14} &= \frac{\gamma_2\gamma_4}{i} \quad \Rightarrow \frac{\gamma_{14}}{i} = [0,-1,0,0] \\
\gamma_{15} &= \frac{\gamma_3\gamma_4}{i} = [-1,0,0,0] \\
\gamma_{16} &= [1,0,0,0]
\end{aligned} \qquad 2.5.3$$

şeklinde elde ederiz.

2.5.2 Majorana (a) Temsilinde Gama Matrislerinin Kuaternionlarla Gösterimi

Bölüm 2.3.3' de yazılan Majorana (a) gösterimi gama matrislerinin kuaternionlarla temsili ise;

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [0,0,1,0] \\
\gamma_2 &= [0,0,0,-1] \\
\gamma_3 &= [1,0,0,0] \\
\frac{\gamma_4}{i} &= [0,0,0,1] \\
\gamma_5 &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad \Rightarrow \frac{\gamma_5}{i} = [0,0,1,0]
\end{aligned}$$

$$\gamma_6 = \gamma_5\gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_6}{i} = [-1,0,0,0]$$

$$\gamma_7 = \gamma_5\gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_7}{i} = [0,-1,0,0]$$

$$\gamma_8 = \gamma_5\gamma_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_8}{i} = [0,0,1,0]$$

$$\gamma_9 = \gamma_5\gamma_4 = [0,-1,0,0]$$

$$\gamma_{10} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{i} \Rightarrow \frac{\gamma_{10}}{i} = [0,1,0,0]$$

$$\gamma_{11} = \frac{\gamma_1\gamma_3}{i} \Rightarrow \frac{\gamma_{11}}{i} = [0,0,-1,0]$$

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1\gamma_4}{i} = [0,1,0,0]$$

$$\gamma_{13} = \frac{\gamma_2\gamma_3}{i} \Rightarrow \frac{\gamma_{13}}{i} = [0,0,0,1] \qquad 2.5.4$$

$$\gamma_{14} = \frac{\gamma_4\gamma_2}{i} = [1,0,0,0]$$

$$\gamma_{15} = \frac{\gamma_4\gamma_3}{i} = [0,0,0,1]$$

$$\gamma_{16} = [1,0,0,0]$$

dir.

2.5.3 Majorana (b) Temsilinde Gama Matrislerinin Kuaternionlarla Gösterimi

Bölüm 2.3.3' de yer alan Majorana (b) gösterimi gama matrislerinin kuaternionlarla temsili ise;

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= [0,0,0,-1] \\
\gamma_2 &= [1,0,0,0] \\
\gamma_3 &= [0,0,-1,0] \\
\frac{\gamma_4}{i} &= [0,0,0,-1] \\
\frac{\gamma_5}{i} &= [0,0,1,0]
\end{aligned}
\qquad 2.5.5
$$

dir. Gama matrislerinin komütasyon bağıntılarından yararlanılarak geri kalan 11 gama matrislerinin kuaternion temsili de yazılabilir. Gama matrislerinin kuaternionlarla temsili ile gösteriminde ve işlemlerde kolaylık sağlanacaktır. Bundan sonraki bölümlerde ise kuaternion cebrinin kuantum fiziğine getirdiği yeni görüşler ele alınacaktır.

3. KLASİK GÖRÜŞ VE KUANTUM MEKANİĞİ

Bu bölümde kuaternionların kullanıldığı bazı temel denklemler ele alınacaktır.

3.1 DİRAC DENKLEMİ

Atomik spektrumlarda gözlenen bazı olaylar, elektronların ancak spine sahip oldukları, yani kütle merkezlerinden geçen bir eksen etrafında döndükleri varsayıldığı da açıklanabilmektedir. Oysa kuantum mekaniğinin temel denklemi olan Schrödinger denklemi spini bir sonuç olarak vermemektedir. Diğer taraftan Schrödinger denklemi yalnız düşük enerjili sistemlere uygulanabilen bir denklemdir. Dolayısıyla özel relativite ile uyuşan bir dalga denklemi yazmak gerekir. Böyle bir denklem Dirac tarafından ortaya atılmıştır.

Spektral analiz, sinyal analizi ve rezonans fiziği gibi konularda Dirac δ-fonksiyonu kavramının bilinmesi gerekir. Bu özel fonksiyon Kronecker δ_{nn} kavramının sürekli şeklidir. Kronecker δ-kavramı kuantum fiziğinde dalga fonksiyonlarının iç çarpımı ile ilgili olup,

$$\psi_n^* \psi_{n'} = \langle n | n' \rangle = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1; & n = n' \\ 0; & n \neq n' \end{cases}, \qquad 3.1.1$$

anlamındadır. Buna ψ fonksiyonlarının ortonormallik şartı denir. Dirac δ-fonksiyonu ise n, n' gibi kuantumlu değişken yerine sürekli bir değişken x ve x_0 alarak Kronocker-δ özelliğini aynen sağlayan fonksiyon demektir. Bu mantık içerisinde Dirac δ-fonksiyonu, matematiksel tanımı ile

$$\delta(x - x_0) = 0; \quad x \neq x_0$$
$$\delta(x - x_0) = \infty; \quad x = x_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad 3.1.2$$

şeklinde olan fonksiyona denir. Dikkat edilirse δ(x) ,x_0 etrafında simetrik (çift) fonksiyon olmaktadır. Yine dikkat edilirse δ(x) in x-ekseni ile sınırladığı alan birim alan olmaktadır. Burada x' in mutlaka uzunluk olmayıp herhangi bir bağımsız değişken olduğuna dikkat edilmelidir (Aygün ve Zengin, [10]).

Serbest bir elektron için Dirac denklemi;

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x} + m\right)\psi = 0 \qquad 3.1.3$$

şeklindedir. μ=1,2,3,4 değerlerini alan γ lar ise;

$$\gamma_\mu \gamma_\upsilon + \gamma_\upsilon \gamma_\mu = 2\gamma_{\upsilon\mu}, \gamma_{\upsilon\mu} = \begin{cases} 1, & \mu = \upsilon \\ 0, & \mu \neq \upsilon \end{cases} \qquad 3.1.4$$

dir ve koşullarına uymak zorundadırlar. Pauli matrisleri ve birim matris cinsinden γ matrisleri;

$$\gamma_\kappa = \begin{vmatrix} 0 & -i\sigma_\kappa \\ i\sigma_\kappa & 0 \end{vmatrix}, \quad (\kappa = 1,2,3)$$
$$\gamma_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad 3.1.5$$

Buradaki her eleman 2x2 matrislerdir. Buna göre γ_μ lerini açık şekilde yazarsak,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3.1.6$$

olur. γ matrisleri 4x4 matrisler olduğundan ψ dalga fonksiyonunun

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad 3.1.7$$

şeklinde yazılması gerekir. Buna göre Dirac denklemini açıkça yazarsak;

$$(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + m)\psi = 0 \qquad 3.1.8$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} \right. \qquad 3.1.9$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_4} + m \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0$$

olur. Bu ifade dört lineer denklem şeklinde de

$$-i\frac{\partial\psi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_4}{\partial x_2} - i\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_4} + m\psi_1 = 0$$

$$-i\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} + i\frac{\partial\psi_4}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_4} + m\psi_2 = 0$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_4} + m\psi_3 = 0$$

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - i\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_4}{\partial x_4} + m\psi_4 = 0 \qquad 3.1.10$$

olarak yazılabilir. Bu sistemin düzlem dalga çözümü,

$$\psi(r) = u_j e i p_\mu x_\mu \qquad (j=1,2,3,4...) \qquad 3.1.11$$

veya dört bileşenli ψ dalga fonksiyonu ile dört bileşenli u_j spinörünü açıkça yazdığımızda;

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e i p_\mu x_\mu \qquad 3.1.12$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada x_μ uzay zaman koordinatı ve p_μ enerji-momentum vektörüdür(Özdaş,[8]).

3.2 KLEIN-GORDON, PAULI VE DIRAC DENKLEMLERİ

Relativistik klasik mekaniğe uygun olarak Hamiltonyen,

$$H = \sqrt{(p - eA)^2 + m^2} + e\phi \qquad 3.2.1$$

denklemi ile verilmektedir. Eğer p için kuantum mekaniksel operatör $-i\nabla$ kullanılırsa, kare-kök tarafından belirtilen operasyon tanımsızdır. Bu yüzden relativistik kuantum mekaniksel Hamiltonyen doğrudan klasik denkleminden elde edilemez. Bununla beraber operatörün karesini tanımlamak ve yazmak mümkündür (Adler[13]).

$$(H - e\phi)^2 - (p - eA)^2 = m^2 \qquad 3.2.2$$

Eğer;

$$H = i\frac{\partial}{\partial t} \qquad 3.2.3$$

ise,

$$\left[-(\frac{h}{i})\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right]^2 \psi - \left[(\frac{h}{i})(\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{e}{c}A_x\right] 2\psi - ...... = m^2\psi \qquad 3.2.4$$

dir. Burada bir operatörün karesi adi operatör cebriyle belirlenir. Bu denkleme ilk kez mümkün relativistik denklem olarak bakılır. Buna genellikle Klein-Gordon denklemi adı verilir. Bunun relativistik notasyonu da,

$$(i\nabla\mu - eA\mu)(i\nabla\mu - eA\mu)\psi = m^2\psi \qquad 3.2.5$$

olmaktadır. Bu denklem spin'e izin vermez ve bu yüzden hidrojen spektrumunun yapısını iyi tanımlayamaz. Bu ifade spinsiz bir parçacık olan π mezona uygulanabilir. Bunun hidrojen atomuna uygulanmasını açıklamak için, A=0 ve

$$\phi = -\frac{ze}{r}$$

olsun. Buradan;

$$\Psi = x(r)\exp(-iEt) \qquad 3.2.6$$

alırsak bu durumda denklem;

$$(E + z\frac{e^2}{r})^2 x + \nabla^2 x = m^2 x \qquad 3.2.7$$

şeklindedir. E=m+W alarak, burada $W << m$, ve $V=-ze^2/r$ yazarsak;

$$(W-V)x+\nabla^2 x/2m=-(W-V)^2 x/2m \qquad 3.2.8$$

olur. Sağ taraftaki terimin sol taraftaki birinci terime göre ihmal edilmesi adi Schrödinger denklemini verir. $(W-V)^2/2m$ nin bir pertürbasyon potansiyeli olarak kullanılması ile hidrojen atomu için ince yapı elde edilecek ve doğru değerlerle karşılaştırılacaktır. Klein-Gordon denkleminden,

$$E=\pm(m^2+pp)^{1/2} \qquad 3.2.9$$

elde edilir. E nin negatif değerlerinin imkansızlığının açık olması Dirac'ın yeni bir dalga denklemi kurmasına yol açtı. Dirac denklemi hidrojen atomunun önceden haber verilen enerji tabakalarını doğru olarak sağlar ve elektronun kabul edilmiş bir tanımını verir. Bununla birlikte Dirac'ın orjinal maksadına zıt olarak, onun denklemi de negatif enerji tabakalarının varlığına götürür. Dirac denkleminin geliştirilmesindeki orjinal metod yerine burada farklı bir yaklaşım kullanacağız. Klein-Gordon denklemi gerçekte Schrödinger denkleminin dört vektör formudur. Görüş noktasının bir benzerliği ile Dirac denklemi, Pauli denkleminin dört vektör formu olarak geliştirilebilir. Böyle bir işlemin izlenmesi ile spin içeren terimler relativistik denklem içerisinde bulundurulacakdır. Spin düşüncesi ilk olarak Pauli tarafından ortaya atıldı, fakat önceleri elektronun manyetik momentinin niçin $\frac{he}{2mc}$ değerini aldığı açık değildi. Bu değerin doğal olarak Dirac denkleminin sonucu olduğu görüldü ve genellikle gösterildiği gibi yalnız Dirac denklemi elektronun manyetik momentinin doğru değerini bir sonuç olarak verir. Bununla beraber bu doğru değildir. Pauli denklemi üzerindeki daha ileri çalışmalar gösterdi ki aynı değer Pauli denkleminde de elde edilebilir. Dirac denkleminde spin vardır, Klein-Gordon denkleminde spin yoktur. Bu nedenle de Klein-Gordon denkleminin geçersiz olduğu düşünülebilir ve spinin relativistik bir gereklilik olduğu sonucu çıkarılabilir. Fakat bu yanlıştır. Çünkü Klein-Gordon denklemi spinsiz parçacıklar için geçerli bir relativistik denklemdir (Adler [13]).

Bu yüzden Schrödinger ve Pauli denklemlerinin her ikisi de;

$$H\psi=E\psi$$

dir. Burada,

$$H=\frac{1}{2m}(-i\nabla-e\mathbf{A})^2+e\phi \qquad 3.2.10$$

yazılır ve Klein-Gordon denklemi,

$$\left[(H-e\phi)^2-(-i\nabla-e\mathbf{A})^2\right]\psi=m^2\psi \qquad 3.2.11$$

şeklinde ifade edilir ve buradaki H ise;

$$H=\left(\frac{1}{2m}\right)[\sigma(-i\nabla-e\mathbf{A})]^2+e\phi \qquad 3.2.12$$

dir.

Böylece Schrödinger denklemindeki $(-i\nabla-eA)^2$ terimi, $[\sigma(-i\nabla-eA)]^2$ ile yer değiştirir. O zaman Pauli denkleminin mümkün bir adaptasyonu, Klein-Gordon denklemine benzer olarak,

$$(H-e\phi)^2\psi-\{\sigma[(h/i)\nabla-(e/c)\mathbf{A}]\}^2\psi=m^2\psi \qquad 3.2.13$$

olabilir. Gerçekte bu hatalıdır., fakat H ile $i(\partial/\partial t)$ yer değiştirdiği zaman elde edilen çok benzer form doğrudur, yani;

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-e\phi-\sigma(-i\nabla-e\mathbf{A})\right]\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-e\phi+\sigma(-i\nabla-e\mathbf{A})\right]\psi=m^2\psi \qquad 3.2.14$$

Bu Dirac denkleminin bir formudur. Üzerindeki operasyonlar yerine getirilmiş olan ψ dalga fonksiyonu gerçekte bir matristir:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \qquad 3.2.15$$

Orijinal olarak Dirac tarafından teklif edilene daha yakın bir form aşağıdaki gibi elde edilebilir. Uygunluk için,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-e\phi&=\pi_4\\ -i\nabla-(e/c)A&=\pi \end{aligned} \qquad 3.2.16$$

x fonksiyonu;

$$(\pi_4+\sigma\pi)\psi=mx$$

ile tanımlanmış olsun. O zaman denklem 3.2.14;

$$(\pi_4-\sigma\pi)x=m\,\psi$$

anlamına gelir. Bu denklem çifti;

$$\begin{aligned} x+\psi&=\psi_a\\ x-\psi&=\psi_b \end{aligned} \qquad 3.2.17$$

yazmakla yeniden elde edilir. Buradan;

$$x=\frac{1}{2}(\psi_a+\psi_b)$$
$$\psi=\frac{1}{2}(\psi_a-\psi_b) \qquad 3.2.18$$

bulunur. Bunlar;

$$(\pi_4+\sigma\pi)\psi=mx$$

ve 3.2.19

$$(\pi_4-\sigma\pi)x=m\,\psi$$

denklem çiftinde yerine konup bir kez taraf tarafa toplanıp, bir kez de çıkarılırsa, o zaman,

$$\begin{aligned}\pi_4\psi_a-\sigma\pi\psi_b&=m\psi_a\\ -\pi_4\psi_b+\sigma\pi\psi_a&=m\psi_b\end{aligned} \qquad 3.2.20$$

bulunur. Bu iki denklem belirli konvansiyonların kullanılması ile;

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_{a1}\\ \psi_{a2}\\ \psi_{a3}\\ \psi_{a4}\end{pmatrix} \qquad 3.2.21$$

olarak yeni bir dalga fonksiyonu matrisi tanımlanır. Burada ψ_a ve ψ_b nin matris karakteri açıkça gösterilmektedir.

$$\psi_a=\begin{pmatrix}\psi_{a1}\\ \psi_{b1}\end{pmatrix}$$
$$\psi_b=\begin{pmatrix}\psi_{a1}\\ \psi_{b2}\end{pmatrix} \qquad 3.2.22$$

Yardımcı tanımlamalar yapılırsa;

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vec{\sigma} & \\ 0 & 0 & & \\ -\vec{\sigma} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3.2.23$$

örneği verilebilir. γ_y ve γ_z benzerdirler. ψ_a ve ψ_b iki denklem

$$\gamma_4\pi_4\psi - \vec{\gamma}\vec{\pi}\psi = m\psi$$

formunda bir tane olarak yazılabilir. Bu dört dalga fonksiyonunu içeren dört denklemdir. Dört vektör notasyonu kullanıldığında, Dirac denklemi;

$$\gamma_\mu\pi_\mu\psi = m\psi \qquad 3.2.24$$

dir, veya;

$$\gamma_\mu(i\nabla\mu - e\mathbf{A}_\mu)\psi = m\psi \qquad 3.2.25$$

şeklinde olur.

Dirac denklemi için benzer bir form Klein-Gordon denklemine karşılaştırma ile farklı bir argüman ile elde edilebilir. Böylece,

$$H = i(\partial/\partial t) = i\nabla_4 \qquad 3.2.26$$

ve

$$e\phi = e\mathbf{A}_4$$

ile 3.2.11 denklemi dört vektör notasyonunda;

$$(i\nabla_\mu - e\mathbf{A}_\mu)^2\psi = m^2\psi \qquad 3.2.27$$

olur. Pauli denkleminde de benzer notasyonda $\vec{\sigma} = \vec{\gamma}$ ve $\sigma_4=\gamma_4$ kullanılması ile denklem 3.2.12'e benzer formda;

$$\left\{\gamma_\mu\left[\left(\frac{h}{i}\right)\nabla_\mu-\left(\frac{e}{c}\right)A_\mu\right]\right\}^2\psi=m^2\psi \qquad 3.2.28$$

yazılır (Feynman,[14]).

3.3 KLASİZME KARŞI KUANTUM MEKANİĞİ

Feynman(1948), kuantum fiziğini, klasik fizikten ayırt eden özellikleri yeniden incelemiştir. Önce klasik sistemi göz önüne alalım. Sistemin özelliklerini taşıyan nitelikleri A,B,C ve B özel tek durum olarak verilsin (Örnek olarak B sınırlı durumun ölçüsü ve momentum durumu ile, görünür uzayda özel ölçülemeyecek en küçük parçasıdır). Tek klasik sistemden, Hamiltonien eşitliğinin zaman içinde ileri ve geri integre edilmesi ile, klasik sistemin gelecek ve geçmişe ait evrelerini belirleyebiliriz. Bu sebeple tek klasik sistemden her hangi bir durumlar grubuna geçiş için tanımlanmış bir olasılıktır ve tersi de doğrudur (Adler[13]).

P_{ba}=B den b nin bulunma olasılığı

A dan a nın bulunma olasılığı

P_{cb}=Cden c nin bulunma olasılığı 3.3.1

B dan b nın bulunma olasılığı

P_{ca}=C den c nin bulunma olasılığı

A dan a nın bulunma olasılığı

$$P_{ca}=\sum_b P_{cb}P_{ba} \quad \text{“klasik sistemde geçerli”} \qquad 3.3.2$$

Bu ifade kuantum fiziğinde geçerli değildir. Kuantum fiziğinde bulunma olasılığı $\Phi_{ba},\Phi_{cb},\Phi_{ca}$ ile ifade edilir (Adler [13]). Bulunma olasılığı Dirac bra-ket notasyonu ile;

$$\Phi_{ba}=\langle b|a\rangle$$

ile gösterilir. Bunun mutlak değeri ya da modüle eden fonksiyon $N(\Phi)$ ise;

$$P_{ba}=\left[N(\Phi_{ba})\right]^2, P_{cb}=\left[N(\Phi_{cb})\right]^2, P_{ca}=\left[N(\Phi_{ca})\right]^2 \qquad 3.3.3$$

$$\Phi_{ca}=\sum_b \Phi_{cb}\Phi_{ba} \qquad 3.3.4$$

dir. Burada b üzerinden alınan toplam kuantum mekaniksel durumları tam olarak verir.

3.3.1 Olasılık Genişliği İçin Sayı Sistemlerinin Kullanılması

Bu bölümde olasılık genişliği için hangi sayı sistemlerinin kullanılacağı saptanacaktır. ϕ ler sonlu boyutlu cebir elemanlarıdır ve;

$$\Phi = \sum_A \Gamma_A e_A \qquad 3.3.5$$

ifadesi ile gösterilir. Burada Γ_A reel sayıdır ve e_A cebrin temel elemanıdır.

$$e_A e_B = \sum_c f_{ABC} e_c \qquad 3.3.6$$

$$e_0 = 1$$

$$f_{0BC} = \delta_{BC}, \quad f_{A0C} = \delta_{AC} \qquad 3.3.7$$

$N(\Phi)$ modül fonksiyonu, Γ_A da reel sayı fonksiyonu olarak kullanıldığında, A cebrinin tanımlanmasına izin verir. Modül fonksiyon formuyla ilgili asimptotların sayısı oldukça önemlidir. İlk dört asimptot en basit olanlardır. Bunlardan biri genellikle modül fonksiyon için öngörülür(Adler[13]):

$$N(0) = 0 \qquad 3.3.8a$$

$$N(\Phi) > 0\text{dır, eğer } \Phi \neq 0 \qquad 3.3.8b$$

$$N(r\Phi) = |r| N(\Phi),\ r\text{: reel} \qquad 3.3.8c$$

$$N(\Phi_1 + \Phi_2) \leq N(\Phi_1) + N(\Phi_2) \qquad 3.3.8d$$

Eşitlik 3.3.4 den yararlanarak;

$$\Phi_{ca} = \Phi_{cb} \quad \Phi_{ba} \qquad 3.3.9$$

yazılabilir. Aynı şekilde;

$$P_{ca} = P_{cb} P_{ba} \qquad 3.3.10$$

olur. Bu eşitliklerden yararlanarak $N(\Phi_1 \Phi_2)$ yı şu şekilde yazabiliriz:

$$N(\Phi_1 \Phi_2) = N(\Phi_1) N(\Phi_2) \qquad 3.3.11$$

İki bileşeni yazarsak;

$$\Phi_1 = \Phi_{cb}, \Phi_2 = \Phi_{ba}$$

dir ve bunlar A cebrinin iki elemanıdır. N(Φ) modül fonksiyonu reel sayılarda;

$$\mathbf{R}: \Phi = r\text{, r:reel, } N(\Phi) = |r| \qquad 3.3.12$$

kompleks sayılarda;

$$\mathbf{C}: \Phi = r_0 + ir_1, \quad r_{0,1}(\text{reel}), \ i^2 = -1 \qquad 3.3.13$$

$$N(\Phi) = \left(\overline{\Phi}\Phi\right)^{1/2} = (r_0^2 + r_1^2)^{1/2}$$

kuaternionlarda;

$$\overline{\Phi} = r_0 - ir_1 \qquad 3.3.14$$

$$\mathbf{Q}: \Phi = r_0 + r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3, \qquad r_{0,1,2,3}\text{:reel} \qquad 3.3.15$$

şeklindedir. Burada e_A sanal, birleşimli, ama değişimli bileşenler cebri ise

$$e_A e_B = -\delta_{AB} + \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{ABC} e_c \qquad 3.3.16$$

bağıntısını sağlamaktadır. Burada ε_{ABC} toplamı antisimetrik ve (123) kombinasyonunun herbirinin eşitliğinin, kuaternionlar için normu;

$$N(\Phi) = (\overline{\Phi}\Phi)^{1/2} = (\Phi\overline{\Phi})^{1/2} = (\sum_{A=0}^{3} r_A^2)^{1/2} \qquad 3.3.17$$

dir. Bu ifadede geçen $\overline{\Phi}$ kuaternionunun tanımı yapılır ise;

$$\overline{\Phi} = r_0 - r_1e_1 - r_2e_2 - r_3e_3$$

yazılır. Sonuçta *O* oktonyonu ise;

$$O: \ \Phi = r_0 + \sum_{A=1}^{7} e_A r_A \qquad r_0\text{:reel} \qquad 3.3.18a$$

şeklinde ifade edilir. Burada e_A elemanları değişimli olmayan ve birleşimli değildir.

$$e_A e_B = -\delta_{AB} + \sum_{c=1}^{7} f_{ABC} e_C \qquad 3.3.18b$$

ile birlikte, f_{ABC} antisimetrik ve yedi kombinasyonunun toplamıdır.

(123), (246), (435), (367), (651), (572), (714)

$$N(\Phi) = (\overline{\Phi}\Phi)^{1/2} = (\Phi\overline{\Phi})^{1/2} = (\sum_{A=0}^{7} r_A{}^2)^{1/2} \qquad 3.3.18c$$

$\overline{\Phi}$ oktonyon tanımı ise;

$$\overline{\Phi} = r_0 - \sum_{A=1}^{7} e_A r_A \qquad 3.3.18d$$

$$N(\Phi) = (\overline{\Phi}\Phi)^{1/2}$$

olduğunu açıkça görüyoruz (Adler [13]).

$N(\Phi)$ modül fonksiyonunun Albert teoremine ilaveten diğer iki cebir karakterizasyonu da ilginçtir. Bunlardan ilki bölüm cebri kavramına dayanır. Bu da $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $ab \neq 0$ sonlu boyutlu bir cebirdir. Diğer bir deyişle 0 ın 0 olmayan bölümlerinin olmadığıdır. Klasik teorem (Bott and Minor 1958; Kervair 1958) bize reel sayılar üzerinde olabilecek tek bölüm cebrinin 1, 2, 4, 8 boyutlu cebirler olabileceğini söyler; reel sayılar üzerinde olabilecek bileşik bölüm cebirleri ***R, C, Q*** (Frobenius) ve birleşimli olmayan bölüm cebirleri de oktonyonları içerir (Doğal olarak diğerleri de vardır,Okuba 1990). Bölümsüz cebrin basit bir örneği kompleks kuaternion elemanlarında görülür (Adler).

$$1, i, e_{1,2,3}, ie_{1,2,3} \qquad 3.3.19$$

Burada i ve e_A nın komut olduğu kabul edilir. Bu durum bölüm cebrinde geçerli değildir:

$$(1+ie_3)(1-ie_3)=1-(-1)^2=0 \qquad 3.3.20$$

Bu nedenle kompleks kuaternionlar cebri için Eş.3.3.8 in özelliklerini sağlayan bir modül fonksiyon oluşturmak olanaklı değildir. Yalnız daha önceden de görüldüğü gibi eğer olasılık genlikleri kompleks kuaternionlar olarak varsayılırsa tatmin edici olasılık yorumları sağlanamaz. Bu nedenle kompleks kuaternionlar ele alınmayacaktır.

İkinci ek karakterizasyon sayı alanları kavramına dayanır. ***Q,C,R*** (***O*** değil). Sayı alanları sistemleri iki işlemli bir sayı sistemidir. Bu sistemlerde toplama ve çarpma;

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad 3.3.21a$$

$$a(bc)=(ab)c \qquad 3.3.21b$$

dir ve çarpmanın dağılma özelliği;

$$a(b+c)=ab+ac \qquad 3.3.22$$

toplamanın değişme özelliği;

$$(a+b)=(b+a) \qquad 3.3.23a$$

vardır. Ancak çarpmanın değişme özelliği yoktur:

$$ab \neq ba \qquad 3.3.23b$$

Sayıların çarpmada ve toplamada tersleri, a için -a ise;

$$a+(-a)=0 \qquad 3.3.24a$$

dir. a sıfırdan farklı ise, tersi a^{-1};

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1 \qquad 3.3.24b$$

şeklinde ifade edilir.

4. KUATERNİONİK KUANTUM MEKANİĞİNDE BAZI UYGULAMALAR

4.1 DURUMLAR, OPERATÖRLER, DALGA FONKSİYONLARI VE İÇ ÇARPIM

Kuaternionik kuantum mekaniğinin yapıları, V_{IH} Hilbert uzayının vektörleri aşağıdaki aksiyomlarla tanımlanacaktır (Adler [13]).

i) $V_{IH,}$ kuaternionik skalarlarla sağdan çarpım altında lineer vektör uzayıdır. **f**, **g** birer vektördür ve V_{IH}' ın elemanıdır. Ayrıca $\phi,\phi_1,\phi_2 \in Q$ dir ve skalardır. **f**, **g** vektörleri;

$$
\begin{aligned}
& f\phi_1 + g\phi_2 \in V_H \\
& (f+g)\phi = f\phi + g\phi \\
& f(\phi_1\phi_2) = (f\phi_1)\phi_2 \qquad\qquad 4.1.1 \\
& f(\phi_1 + \phi_2) = f\phi_1 + f\phi_2
\end{aligned}
$$

özelliklerine sahiptir.

ii) Aşağıdaki özelliklere sahip, bir reel değerli $\|f\|$ normunu tanımlamakta kullanabileceğiz ve $V_H{*}V_H$ ın Q içerisine (f,g) şeklinde bir skalar çarpımı veya ikili dönüşümü vardır ve

$$\overline{(f,g)} = (g,f) \qquad 4.1.2a$$

$$\|f\|^2 = (f,f) > 0 \qquad f \neq 0 \qquad 4.1.2b$$

$$(f,g+h) = (f,g) + (f,h) \qquad 4.1.2c$$

$$(f,g\phi) = (f,g)\phi \qquad 4.1.2d$$

şeklindedir. 4.1.2d ve 4.1.5 in kombinasyonunun alınması ile

$$(f\phi,g) = \bar{\phi}(f,g) \qquad 4.1.2e$$

bulunur.

iii) V_{IH} uzayı ayrılabilir ve bütün olarak, $\|f\|$ ile temsil edilir. Eş.4.1.2 nin norm özellikleri ve skalar çarpımdan, doğrudan kuaternionik Schwarz eşitsizliğinin ispatını yapabiliriz. Buradan başlayarak;

$$0 \leq (f\phi - g\psi, f\phi - g\psi) = \bar{\phi}(f,f)\phi - \bar{\psi}(g,f)\phi - \bar{\phi}(f,g)\psi + \bar{\psi}(g,g)\psi \qquad 4.1.3a$$

yazabiliriz. Burada

$$\phi \leq (g,g), \quad \psi = (g,f)$$

ve

$$0 \leq (g,g)[(f,f)(g,g)-(f,g)(g,f)] \qquad 4.1.3b$$

dir. $(g,g) \geq 0$ Eş. 4.1.3b' de uygulanırsa,

$$(f,g)(g,f) = |(f,g)|^2 \leq (f,f)(g,g) = \|f\|^2 \, \|g\|^2 \qquad 4.1.3c$$

bulunur. Eş. 4.1.3c, $\mathbf{f}\phi - \mathbf{g}\psi = 0$ ise mümkündür. Ayrıca **f** ve **g** vektörleri birbirlerinin katı olması gerekir.

V_{IH}' da durumlar ve iç çarpım için Dirac bra-ket gösteriminin kullanılması uygun olacaktır. Ket durumu $|f\rangle$ ile tanımlanır,

$$|f\,\phi\rangle = |f\rangle\phi \qquad 4.1.4a$$

ve bra durumları $\langle f|$ ile gösterilir, bunun adjointi matris anlamındadır.

$$\langle f| = |f\rangle^{+} \qquad 4.1.4b$$

Eşitlik 4.1.4a' dan

$$\langle f\,\phi| = \bar{\phi}\langle f| \qquad 4.1.4.c$$

Eş. 4.1.2' nin skalar yapısı ise şeklinde gösterilir:

$$(f,g) = \langle f|g\rangle \qquad 4.1.5$$

Eş. 4.1.4 ve 4.1.5'e somut örnek, sınırlı sayıda dikkate alınabilir, n boyut söylenebilir ve quaternionik Hilbert uzayı bunlardan biridir. Ket durumu kolon vektör olarak;

$$|f\rangle = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \qquad 4.1.6a$$

dir ve kuaternion bileşenleri $\mathbf{f}_1$........$\mathbf{f}_n$ ise Eş.4.1.4ifadesi;

$$|f\,\phi\rangle = \begin{pmatrix} f_1\phi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}\phi = |f\rangle\phi \qquad 4.1.6b$$

şeklindedir. Bra durumu $\langle f|$ Eş. 4.1.6a' nın matris adjointini karesel olmayan matrislere uygularsak, Eş. 4.1.6a' nın kuaternion konjügasyonun transpozunun alınması ile bra durumu $\langle f|$ satır vektörü bulunur;

$$\langle f| = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{f}_n \end{pmatrix}^T \qquad 4.1.6c$$

ve Eş. 4.1.4c elde edilir:

$$\langle f\,\phi| = \begin{pmatrix} \overline{f_1\phi} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{f_n\phi} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \overline{\phi f_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\phi f_n} \end{pmatrix}^T = \bar{\phi}\begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{f}_n \end{pmatrix}^T = \bar{\phi}\langle f| \qquad 4.1.6d$$

Skalar çarpım sınırlı (sayılabilir) boyutta şu biçimde verilir;

$$\langle f|g\rangle = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{f}_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \bar{f}_l\, g_l \qquad 4.1.6e$$

ve eşitlik için ön kabullenmelere uygun düşer.

$\langle f|g\rangle$ genlik olasılığı ya da iç çarpımı şu olasılığı çağrıştırır:

$$P_{gf} = |\langle g|f\rangle|^2 \qquad 4.1.7$$

4.1.4a, 4.1.4c ve 4.1.7 eşitliklerinden şunu görüyoruz ki, fiziksel uzay ve Hilbert uzay vektörleri arasındaki birleşim birebir değildir. Şöyle ki normalleştirilmiş birim vektörü $|f\rangle$ ile düzensizlik vektörü $|f\,w\rangle$' nin yerlerini değiştirirsek, $|w| = 1$ ile P_{gf}

olasılıkları hiçbir **g** için değişmemiştir. Böylece fiziksel durumlar aşağıdaki formun kuaternionik Hilbert uzayının "unit rays" leri ile bire bir uygunluk gösterir. Burada,

$$|f\rangle = \{|f\,w\rangle; |w| = 1\} \qquad 4.1.8$$

ve herhangi bir vektör ya da ışın olasılıkları hesaplamada $|f\,w\rangle \in |f\rangle$ kullanılır. Kabullenmelere uygun olarak V_{IH} sağda skalar çarpımın altındaki uzay vektörüdür. Aşağıda görüldüğü gibi operatörler her zaman soldan işleme başlayacaktır.

$$o|f\rangle \qquad 4.1.9a$$

Operatör terimi ilave edilen değişiklik ile kullanılır. Var olduğu kabul edilerek, kuaternion lineer operatörle işleme sokulursa;

$$o(|f\rangle\phi) = (o|f\rangle)\phi \qquad 4.1.9b$$

ϕ keyfi seçilen bir kuaterniondur.

$$(\mathbf{f}, o\mathbf{g}) = (o^{+}\mathbf{f}, \mathbf{g}) \qquad 4.1.10$$

Bazı o operatörleri için, $o^{+}{}_{adjoint}$ operatörü ile keyfi uygun alanlarda **f,g** durum vektörleri tanımlayacağız. Bu tanımları Teicmüller (1935), Horwitz ve Biedenharn (1984) göstermiştir. Burada soldan işleyen operatörler ortaya konacaktır. Ayrıca,

$$1 \equiv E_0, \qquad I \equiv E_1, \qquad J \equiv E_2, \qquad K \equiv E_3 \qquad 4.1.11a$$

isomorfik cebirdir. Soldan işlem yapan I, J, K operatörler, soldan işlem yapan i, j, k sabitlerinden üstündür. Keyfi olarak seçilen cebir operatörü o için $o_{0,1,2,3}$ reel bileşenlerini tanımlayabiliriz;

$$\begin{aligned} o_0 &= \frac{1}{4}(o - IoI - JoJ - KoK) \\ o_1 &= -\frac{1}{4}(Io + oI - JoK + KoJ) \\ o_2 &= -\frac{1}{4}(Jo + oJ - KoI + IoK) \\ o_3 &= -\frac{1}{4}(Ko + oK - IoJ + JoI) \end{aligned} \qquad 4.1.11b$$

$$[o_A, I] = [o_A, J] = [o_A, K] = 0 \qquad A = 0,1,2,3 \qquad 4.1.11c$$

ve o terimlerine ayrıştırılırsa;

$$o = o_0 + Io_1 + Jo_2 + Ko_3 \qquad 4.1.11d$$

bulunur. I, J, K operatörleri devamlı olarak anti-self adjoint olursa;

$$I^+ = -I, \qquad J^+ = -J, \qquad K^+ = -K, \tag{4.1.11e}$$

yazılır. Eş.4.1.11d in adjointi;

$$o^+ = o_0^+ - Io_1^+ - Jo_2^+ - Ko_3^+ \tag{4.1.11f}$$

Eğer o self adjoint ya da anti self adjoint ise, Eş. 4.1.11c-f;

$$\begin{aligned} &o_0 = o_0^+ \\ &o_A = -o_A^+ \; A = 1,2,3 \qquad o \text{ self adjoint} \\ \\ &o_0 = -o_0^+ \\ &o_A = o_A^+ \; A = 1,2,3 \qquad o \text{ anti-self adjoint} \end{aligned} \tag{4.1.11g}$$

bulunur. Buradan operatörler arası ilişki, adjointleri ve kuaternionik kuantum mekaniğindeki reel bileşenlerinin özellikleri, kompleks kuantum mekaniğinde reel ve imajiner bileşenlerin özelliklerine benzer bilinen özelliklerdir.

Soldan işlem yapan I, J, K operatörleri ve sağdan işlem yapan i, j, k sabitlerinin $|f\rangle$ keyfi durumu için reel $|f_{0,1,2,3}\rangle$ bileşenleri;

$$\begin{aligned} |f_0\rangle &= \frac{1}{4}(|f\rangle - I|f\rangle i - J|f\rangle j - K|f\rangle k) \\ |f_1\rangle &= -\frac{1}{4}(I|f\rangle + |f\rangle i - J|f\rangle k - K|f\rangle j) \\ |f_2\rangle &= -\frac{1}{4}(J|f\rangle + |f\rangle j - K|f\rangle i - I|f\rangle k) \\ |f_3\rangle &= -\frac{1}{4}(K|f\rangle + |f\rangle k - I|f\rangle j + J|f\rangle i) \end{aligned} \tag{4.1.11.h}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan;

$$|f\rangle = |f_0\rangle + I|f_1\rangle + J|f_2\rangle + K|f_3\rangle = |f_0\rangle + |f_1\rangle i + |f_2\rangle j + |f_3\rangle k \tag{4.1.11.i}$$

elde edilir. Sonuçta I, J, K operatörleriyle işlem yapan soldan işlem cebri ile, i, j, k' larla yapılan sağdan işlem cebri benzerdir.

Schrödinger kararlı durum denkleminin çözümüne imkan veren E_n enerji değerlerine *özdeğerler* ve bunlara karşılık gelen ψ_n dalga fonksiyonlarına *özfonksiyonlar* denir.

Özdeğerler reel olsalar dahi özdurumların sağına yazacağız ki bu durum kuaternionlarda sağdan çarpma kuralına uygundur. χ bir kuaternion ise;

$$\chi|\chi'\rangle = |\chi'\rangle\chi \qquad 4.1.12$$

dir. Bağıntının bütünü yazılırsa;

$$1 = \int d^3\chi|\chi\rangle\langle\chi| \qquad 4.1.13$$

genel skalar çarpım $\langle f|g\rangle$,

$$\langle f|g\rangle = \int d^3\chi\langle f|\chi\rangle\langle\chi|g\rangle \qquad 4.1.14$$

dir. Burada $g(\chi)$ kuaternionik değerli dalga fonnksiyonunu tanımlıyorsa;

$$g(\chi) = \langle\chi|g\rangle \qquad 4.1.15a$$

bulunur. Eş. 4.1.2a dan;

$$\bar{g}(\chi) = \langle g|\chi\rangle \qquad 4.1.15b$$

ve Eş.4.1.14 den;

$$\langle f|g\rangle\int d^3\chi\, f(\chi)g(\chi) \qquad 4.1.16$$

yazılabilir.

Kompleks kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonlarının terimlerinde iç çarpım için benzer ve bilinen yollar kullanılır. Kuaternion dağerli $\langle f|g\rangle$ iç çarpımı ile bununla benzeterek (Horwitz ve Biedenharn, 1984, Günaydın, 1976) $C(1,i)$ kompleks iç çarpımı $\langle f|g\rangle_c$ tanımlanırsa;

$$\langle f|g\rangle_c = tr\langle f|g\rangle - itr(\langle f|g\rangle i) \qquad 4.1.17$$

ve reel iç çarpım $\langle f|g\rangle_R$;

$$\langle f|g\rangle_R = tr\langle f|g\rangle \qquad 4.1.18$$

Burada tr kuaternionun reel kısmının tanımlanması için kullanılan operatördür.

Eş. 4.1.17 ve 4.1.18 çok belirli formda, dalga fonksiyonlarının terimleri içinde $\langle f | g \rangle$ kuaternionik iç çarpıma ekspres olarak izin verir, Eş. 4.1.16 da ve onların reel veya simpletik bileşenlerinin terimlerinden yazılacak dalga fonksiyonları;

$$\begin{aligned} f(\chi) &\equiv f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3 = f_a + jf_b \\ g(\chi) &\equiv g = g_0 + ig_1 + jg_2 + kg_3 = g_a + jg_b \end{aligned} \qquad 4.1.19$$

$$\langle f | g \rangle = \int d^3\chi \begin{bmatrix} f_0g_0 + f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3 + i(f_0g_1 - f_1g_0 + f_3g_2 - f_2g_3) \\ j(f_0g_2 - f_2g_0 + f_1g_3 - f_3g_1) + k(f_0g_3 - f_3g_0 + f_2g_1 - f_1g_2) \end{bmatrix}$$

$$= \int d^3\chi \left[f_\alpha^* g_\alpha + f_\beta^* g_\beta + j(f_\alpha^* g_\beta - f_\beta^* g_\beta) \right] \qquad 4.1.20a$$

$$= \int d^3\chi \bar{f} g$$

$$\langle f | g \rangle_c = \int d^3\chi \left[f_0g_0 + f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3 + i(f_0g_1 - f_1g_0 + f_3g_2 - f_2g_3) \right]$$

$$= \int d^3\chi \left[f_\alpha^* g_\alpha + f_\beta^* g_\beta \right] \qquad 4.1.20b$$

$$\langle f | g \rangle_R = \int d^3\chi \left[f_0g_0 + f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3 \right] \qquad 4.1.20c$$

şeklindedir. $\langle f | g \rangle$ nin reel izdüşümü $\langle f | g \rangle_C$ ve $\langle f | g \rangle_R$ karşılık olarak, kompleks $C(1,i)$ olduğundan, $\langle f | g \rangle$ nin invaryansı olan bazı dönüşümleri $\langle f | g \rangle_C$ ve $\langle f | g \rangle_R$ de otomatikman invaryansıdır (Adler [13]).

4.2 GÖZLENEBİLİRLİK VE SELF ADJOİNT OPERATÖRLER

Kompleks kuantum mekanikle kıyaslandığında, kuaternionik kuantum mekaniğin de gözlemlenebileceğini, kuaternionik self adjoint operatörlerle göstereceğiz. Lineer ve self adjoint veya Hamilton kuaternionunun her ikisi de **H** ile gösterilecektir.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ \qquad 4.2.1$$

Eğer $|h\rangle$, **H**'nin özdurumu dur ve h özdeğeri ile;

$$\mathbf{H}|h\rangle = |h\rangle h \qquad 4.2.1$$

şeklinde yazılabilir. Buradan;

$$h = \frac{\langle h|\mathbf{H}|h\rangle}{\langle h|h\rangle}$$

$$\bar{h} = \frac{\langle h|\mathbf{H}^{+}|h\rangle}{\langle h|h\rangle} = \frac{\langle h|\mathbf{H}|h\rangle}{\langle h|h\rangle} = h \qquad 4.2.3$$

yazılır ve h özdeğeri reeldir. Çünkü h reel ise, bazı kuaternionlar ile komuttur. Eğer **H** ın özdurumları $|h\rangle$ ve $|h'\rangle$ ile $h \neq h'$ özdeğerleri farklı ise;

$$\langle h|\mathbf{H}|h'\rangle = \langle h|h'\rangle h'$$
$$\langle h|\mathbf{H}^{+}|h'\rangle = \bar{h}\langle h|h'\rangle \qquad 4.2.4a$$

dir, h ve h' reel ise;

$$(h - h')\langle h|h'\rangle = 0 \qquad 4.2.4b$$

yazılır veya başka bir ifade ile;

$$\langle h|h'\rangle = 0 \qquad 4.2.4c$$

şeklinde ifade edilir.

H nin özdurumları ile, farklı özdeğerleri ortogonaldir. Eğer **H** nin dejenere alt uzayı n>1 de h özdeğerine sahipse, bunun yerini tutan bu alt uzaya karşılık gelen özfonksiyonları ortogonal olabilir. Normalize edilmesi eğer zorunlu ise, tüm $|h\rangle$ özfonksiyonlarını kısımlarına normalize olmuş kabul edebiliriz. Kompleks kısmı ise **H** hermitiyen operatörünün özdurumlarının tamamen ortonormal durumdaki formundadır:

$$H = \sum_{h} |h\rangle h\langle h| \qquad 4.2.5$$

Eş. 4.2.5 den $|b\rangle$ durumları arasında **H'**nin matris elemanı, keyfi gösterimi $|b'\rangle$ ise;

$$\langle b|\mathbf{H}|b'\rangle = \sum_{h} \langle b|h\rangle h\langle h|b'\rangle \qquad 4.2.6a$$

ve $|b'\rangle = |b\rangle$ de **H'**nin beklenen değeri, $|b\rangle$ keyfi durumunda,

$$\langle b|\mathbf{H}|b\rangle = \sum_{h} |\langle b|h\rangle|^{2} h \qquad 4.2.6b$$

dir. Eş.4.2.6b de $\langle b|\mathbf{H}|b\rangle$ den beklenen değeri, **H**'nin h özdeğerlerinin toplamıdır.

Kısaca $\langle b|\mathbf{H}|b'\rangle$ matrisi diagonal formu ile matris dönüşümü kullanılarak $\langle b|h\rangle$ dönüşüm fonksiyonu ile işleme sokulursa;

$$\sum_{b,b'}\langle h|b\rangle\langle b|\mathbf{H}|b'\rangle\langle b'|h'\rangle$$

$$=\langle h|\mathbf{H}|h'\rangle \qquad 4.2.6c$$

$$=h\delta_{hh'}$$

bulunur. İfadenin kompleks kısmı, kuaternionik birim matrisle tam bir benzerlik içindedir. Kuaternionik birim matrisi ise;

$$U_{bh}=\langle b|h\rangle \qquad 4.2.6d$$

$$(UU^{+})_{bb'}=\sum_{h}U_{bh}U^{+}{}_{hb'}$$

$$=\sum_{h}U_{bh}\overline{U}_{b'h}$$

$$=\sum_{h}\langle b|h\rangle\overline{\langle b'|h\rangle}$$

$$=\sum_{h}\langle b|h\rangle\langle h|b'\rangle$$

$$(U^{+}U)_{hh'}=\sum_{b}U^{+}{}_{hb'}U_{bh'}$$

$$=\sum_{b}U_{bh}\overline{U}_{bh'}$$

$$=\sum_{b}\overline{\langle b|h\rangle}\langle b|h'\rangle$$

$$=\sum_{b}\langle h|b\rangle\langle b|h'\rangle$$

$$=\langle h|h'\rangle=\delta_{hh'} \qquad 4.2.6e$$

şeklinde bulunur. Bu da Eş. 4.2.6c' nin kompleks kısmı ile aynıdır.

5. KUATERNİONİK KOMPLEKS VE REEL KUANTUM MEKANİKTE ENERJİ DURUMLARI VE REEL KUANTUM MEKANİK İÇİN KOMPLEKS UYGULAMALAR

Karşılaştırmalı tartışmayı sonuçlandırmak için kuaternionik kompleks ve reel kuantum mekanikte enerji özdurum analizine paralel form içinde başlanır (Adler[13]). $\tilde{\mathbf{H}}$'ı bağımsız olarak kabul edelim.

i) Kuaternionik kuantum mekaniğinde, Schrödinger eşitliği;

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{f}\rangle = -\tilde{\mathbf{H}}|\mathbf{f}\rangle \qquad 5.1.1$$

ile gösterilir. $\tilde{\mathbf{H}}$ anti-self adjoint kuaterniondur. $\tilde{\mathbf{H}}$ özdurumlarının tamamını bulabiliriz.

$$\tilde{\mathbf{H}}|h_1\rangle = |h_1\rangle E_1 i, \quad E_1 \geq 0 \qquad 5.1.2$$

dir ve zamana bağlı ifadesi ise;

$$|h_1(t)\rangle = |h_1(0)\rangle e^{-iE_1 t} \qquad 5.1.3$$

şeklinde yazılır ve $|\mathbf{f}\rangle$ nin zamana bağlı terimlerinde genelde süperpozisyonu gösterir ki bu da;

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{1} |h_1(t)\rangle C_1 \qquad 5.1.4$$

şeklinde ifade edilir. Burada C_1 zamandan bağımsız kuaternionik katsayıdır. Kuaternionik kuantum mekanikteki ilk anlaşılmaz durum enerjinin her zaman negatif olmamasıdır. Bunun nedeni ise buradaki E' nin ölçülen değeri göstermesidir. $|\mathbf{f}\rangle$ durumundaki enerjinin ölçülebilmesi için orijinin yer değiştirmesi basit bir yoldur. Kompleks kuantum mekanikte ise $\tilde{\mathbf{H}}$ ile I_H ın çarpımındaki değişiklik enerji skalasının orijinindeki değişikliğe eşdeğerdir. Bu da;

$$\left(\tilde{\mathbf{H}} - C I_{\tilde{\mathbf{H}}}\right)|h_1\rangle(E_1 - C)i \qquad 5.1.5$$

ile ifade edilir.Kompleks kısım ise;

$$|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{f}'\rangle e^{-iCt} \qquad 5.1.6$$

şeklinde yazılır. Eşitlik 5.1.1 başka bir ifade ile;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}'\right\rangle = -\tilde{\mathbf{H}}\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}'\right\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}'\right\rangle iC \qquad 5.1.7$$

yazılır.

ii) Kompleks kuantum mekaniğinde, Schrödinger eşitliği;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}\right\rangle = -\tilde{\mathbf{H}}\left|\mathbf{f}\right\rangle \qquad 5.1.8$$

şeklinde yazılabilir ve burada $\tilde{\mathbf{H}}$ anti self adjointtir. $\tilde{\mathbf{H}}$=i**H** yazılabilir. Bu durumda **H** kompleks self adjointtir. Schrödinger eşitliğini standart formda yazarsak;

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}\right\rangle = \mathbf{H}\left|\mathbf{f}\right\rangle \qquad 5.1.9$$

olur. **H** için $\left|h_1\right\rangle$ enerji öz durumunun ifadesini her zaman bulabiliriz;

$$\mathbf{H}\left|h_1\right\rangle = E_1\left|h_1\right\rangle \qquad 5.1.10$$

dir. Burada E_l reeldir ancak kesinlikle negatif değildir. Zamana bağlı değişimi ise ;

$$\left|h_1(t)\right\rangle = \left|h_1(0)\right\rangle e^{-iEit} \qquad 5.1.11$$

şeklinde yazılır. $\left|\mathbf{f}\right\rangle$ yerine;

$$\left|\mathbf{f}\right\rangle = \left|\mathbf{f}\right\rangle e^{-iCt} \qquad 5.1.12$$

yazılırsa, Schrödinger eşitliği de değişir ve;

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}'\right\rangle = (\mathbf{H}-C)\left|\mathbf{f}'\right\rangle \qquad 5.1.13$$

şeklinde yazılır. Burada C, orijin ile ölçülen enerji değeri arasındaki farkı göstermektedir.

iii) Reel kuantum mekaniğinde Schrödinger denklemi;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\mathbf{f}\right\rangle = -\tilde{\mathbf{H}}\left|\mathbf{f}\right\rangle \qquad 5.1.14$$

şeklinde ifade edilir. $\tilde{\mathbf{H}}$ reel antiself adjointtir. Bununla birlikte reel anti-self adjoint operatörü, kesinlikle reel paralel olmayan simetriye sahiptir. Reel paralel olmayan simetrik matris için kabul edilen form;

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{D}' \qquad 5.1.15$$

olup burada $\otimes$ işareti direkt çarpımı gösterir. **D** reel ve diagonaldir. Ancak özdeğer probleminin,

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5.1.16$$

için çözümü varken, diğer reel değerlerle çözümü yapılamamıştır.

Reel Kuantum Mekaniğinde enerji öz durumları yoktur. Stueckelberg (1960, 1961 ve 1962)ve Mackey (1968) bu görüşün tanımladığı noktalar üzerinde tartışmışlardır. Kompleks kuantum mekaniğin yapısı içinde yer almayan, ancak reel kuantum mekaniğinde tatmin edici fiziksel yorum çıkarmak için birkaç yolu araştırmışlardır.

Bu tartışmanın somut örneği 2n boyutlu reel Hilbert uzayı dikkate alınırsa ve Eş. 5.1.15 in D matrisi ile işlem yapılır ve i_2 matrisinin iki boyutlu uzayda çarpımı gösterilirse (Adler [13]);

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad w_{1_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5.1.17$$

olur. Genel reel lineer operatör $\boldsymbol{o}$ ise;

$$\begin{aligned} o &= o_a + w_b \\ o_a &= o_0 + i_2 o_1 \\ o_b &= o_2 + i_2 o_3 \end{aligned} \qquad 5.1.18$$

$o_{0...3}$ operatörleri n-boyutlu uzayda işlemci ise, bu nedenle Eş. 5.1.17 in operatörleri komuttur. Eş5.1.18 kuaternionik simpletik duruma aşırı benzerliğe rağmen temelde çok farklıdır. Çünkü **w** operatörü self adjointtir. $\mathbf{w}^2=1$ bağıntısını sağlar. Halbuki kuaternionik benzeri **J** antiself adjointtir ve $\mathbf{J}^2=-1$' i sağlar. $o_{0,2,3}$ reel ve self adjoint olduğu zaman (ki aynı zamanda simetriktir), o_1 reel antiself adjoint olduğundan $\boldsymbol{o}$ operatörü de self adjoint olur.

Benzer şekilde $o_{0,2,3}$ reel antiself adjoint olduğunda ve o_1 de reel self adjoint olduğunda $\boldsymbol{o}$ operatörü de self adjoint olacaktır. Tüm fiziksel operatörler $\boldsymbol{i_2}$ ile komut olduğunda $\boldsymbol{o}$ operatörü;

$$o = o_a = o_0 + i_2 o_1 \qquad 5.1.19$$

formuna indirgensin. Burada o antiself adjoint olduğunda o_0 simetrik ve o antiself adjoint olduğunda da tersi olacaktır. Özellikle zamana bağlı antiself adjoint $\widetilde{\mathbf{H}}$ operatörü;

$$\widetilde{\mathbf{H}} = H_0 + i_2 H_1 = \begin{pmatrix} H_0 & H_1 \\ -H_1 & H_0 \end{pmatrix} \qquad 5.1.20$$

dir.

Varsayalım ki ψ_f Schrödinger eşitliği Eş. 5.1.21'i sağlayan 2n-bileşenli sütun vektörü olsun.

$$\frac{\partial \psi_f}{\partial t} = -\widetilde{\mathbf{H}}\,\overline{\psi}_f \qquad 5.1.21$$

ψ_f 'i n-bileşenli $\mathbf{f}_0$ ve $\mathbf{f}_1$ sütun vektörleri cinsinden yazabiliriz.

$$\psi_f = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} \qquad 5.1.22$$

Eş.5.1.20 ve5.1.21 aşağıdaki forma dönüşür.

$$\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial t} = -\left(H_0\,\mathbf{f}_0 + H_1\,\mathbf{f}_1\right), \qquad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} = \left(H_1\,\mathbf{f}_0 - H_0\,\mathbf{f}_1\right) \qquad 5.1.23$$

H_1 in simetrik olmasından, H_0 ın da anti simetrik olmasından yukarıdaki dinamiğin iki iç çarpımının değişmez (invaryans) olduğu görülür:

$$\left(\psi_f, \psi_g\right)_R = \mathbf{f}_o{}^T \mathbf{g}_0 + \mathbf{f}_1{}^T \mathbf{g}_1, \qquad \left(\psi_f, \psi_g\right)_I = \mathbf{f}_o{}^T \mathbf{g}_0 + \mathbf{f}_1{}^T \mathbf{g}_1 \qquad 5.1.24$$

Bu da bize Eş. 5.1.21 den Eş. 5.1.23' e reel kuantum dinamiğini kompleks kuantum mekaniği içine dahil etmemizi sağlar. Kompleks kuantum dinamiği kompleks dalga fonksiyonu ile tanımlanır.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + i\mathbf{f}_1$$

Burada kompleks iç çarpımı;

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_C = \left(\psi_f, \psi_g\right)_R + i\left(\psi_f, \psi_g\right)_I = \mathbf{f}^{*T}\,\mathbf{g} = \mathbf{f}^{*}\mathbf{g} \qquad 5.1.25$$

dir. Bu da zamana bağlı kompleks Schrödinger eşitliği altında invaryanttır.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\widetilde{\mathbf{H}}_f \qquad 5.1.26$$
$$\mathbf{H} = H_0 + iH_1$$

dir ve i_2, ψ_f 'e uygulandığında;

$$i_2\psi_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \psi_{if} \qquad 5.1.27$$

bulunur. Reel kuantum sisteminde i_2 ile çarpım, kompleks sistemde i ile çarpıma karşılık gelir. Benzer şekilde w, ψ_f 'e uygulandığında;

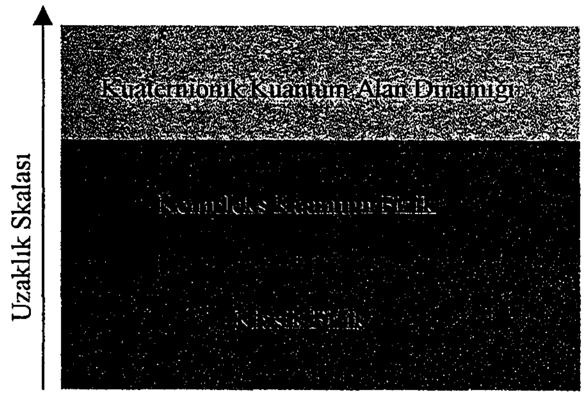
$$w\psi_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{pmatrix} = \psi_{f*}$$

bulunur. Reel kuantum sistemde w ile çarpım, kompleks sistemde, kompleks konjügesinin antilineer operatörüne karşılık gelir.

6. NEDEN KUATERNİONİK KUANTUM MEKANİĞİ

Kuaternionik kuantum mekaniğine fiziğin tüm alanlarında rastlanıyor. Bilinen tüm fiziksel olgular da, kuaternionik kuantum mekaniğin açıklanmasında kullanılır. SU(3)xSU(2)xU(1) standart modelinde güçlü ve elektrozayıf kuvvetler somutlaştırılmıştır ve klasik genel relativite ile gravitasyonu açıklar. Bilinmektedir ki, standart model de tamamlanmamış durumdadır. $\approx 10^{15}$-10^{17} GeV değerindeki enerjiye sahip ($\approx 10^{-29}$-10^{-31}cm) ideal modellerle birleştirilebilir.

10^{-33} cm mertebesinde hali hazırdaki 10^{19} GeV' luk en yüksek Planck enerjisi, kuantum gravitasyonunu nitelendirir. Temel parçacık kuvvetleri ve gravitasyon yeni bir kuantum teorinin oluşumuna nedendir. Standart model çiftlemelerinin gözlemli uygulamasında, büyük birleşim fikrinin deneysel desteğinin oluşundan, şu fikir rahatlıkla söylenebilir ki kompleks kuantum mekaniği hızlandırıcılarla incelenebilen fiziğin çok daha ötelerinde bile geçerlidir. Burada uzaklık skalasında kozmostan aşağıya doğru, büyük birleşik skalaya kadar genişleyen konvensiyonel olan ve konvensiyonel olmayan ölçüm alanlarının rejimini tanımlayıp, kompleks kuantum mekaniğinin fizikte yeni temel kinematik yapılanmaların, sadece büyük birleşim skalasının altındaki seviyelerde tanımlı olup olmadığını ele alınabilir. Ancak bu, yeni kinematik ilkelerinin çok daha küçük skalalarda ya da daha geniş olan skalalarda,büyük birleşik modelin nitelendirilmesinde egemen olacak anlamına gelmez.



Ortaya çıkan bu tabloda kuaternionik kuantum mekaniğinin yeri saptanacaktır.

i) Kuaternionik kuantum fiziğinin asimtotik olarak kendisini kompleks teori gibi göstermesi, saçılma teorilerinin hesaplanmasında da desteklenir.

*ii)*Fiziksel olayların matematiksel tanımı, kompleksten öte kuaternionik olması fikri, Hilbert uzayında, uzay-zaman dönüşümleri üretecinin spektral analizi ile desteklenir. Kompleks Hilbert uzayında bunlar, self-adjoint operatörler tarafından temsil edilir.

$$H = p^0 = -p_0, \quad p^1 = p_1 \qquad 6.1.1a$$

Burada, mutlak spektral teoremi kullanılarak, kompleks self adjoint operatörler için, alan spektra oluşur.

$$-\infty < p^0 < \infty, \qquad -\infty < p^1 < \infty \qquad 6.1.1b$$

Bununla beraber $\mathbf{p}^0$ enerjisi tanımlanırsa;

$$C \leq \mathbf{P}^0{}_{\text{gözlenen}} \qquad 6.1.1.c$$

şeklinde ifade edilir. Bu kararlılık koşulu kuaternionik kuantum mekaniği için ayrıca ele alınır.

Kuaternionik Hilbert uzayında uzay-zaman dönüşümleri antiself adjoint tarafından oluşturulur:

$$-\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{p}}^0, \quad \widetilde{\mathbf{p}}_1 \qquad 6.1.2a$$

Bu kurala göre $\widetilde{\mathbf{H}}$ ve $\widetilde{\mathbf{p}}_1$ nin birbirlerine diagonal olduğu temel durumları daima bulabiliriz:

$$\mathbf{E} \geq 0, \qquad -\infty < \mathbf{P}_1 < \infty \qquad 6.1.2b$$

Bu tanım gereği, uzay-zaman eşitliklerinde değişimli olan özdeğerler pozitif değerler alır.

Gözlediğimiz $\mathbf{P}^0$ enerjisini referans terim olarak alıp, gözüken maddeyi enerji-momentum tensörü olarak tanımlarız ve gravitasyon alan eşitliklerindeki kaynak terimini 6.1.1c'dekinden daha iddialı bir ifade olarak elde ederiz. Gravitasyonel olarak tanımlanan enerjinin deneysel değerinin alt sınırı;

$$C=0 \qquad 6.1.3$$

dır.

Kompleks kuantum mekaniğinde sıfır enerji noktasını dalga fonksiyonu ile oynayarak elde ederiz. Çünkü C=0' ı açıklamak için ilave hipotezler dahi yeterli olmamıştır. Kuaternionik kuantum mekaniğinde ise, sıfır noktası önemlidir, kaydırılamaz. Böylece kuaternionik Hilbert uzayı Eş. 6.1.3'ün açıklanmasına olanak sağlar. C=0 noktası birleşik alanlar teorisinin kuantum maddeleri ve klasik gravitasyoneller bileşenlerine ayrıştığı sınır durumdur. Başka bir deyişle, kozmolojik sabitin sıfırlanmasının gözlenmesi doğanın boşluk enerjisinin sıfır noktasını önemsediğini gösterir. Bu kuaternionik kuantum mekanikte önemli bir özelliktir. Bu durum kompleks kuantum mekanikte açık değildir.

iii) Tarihsel perspektif açısından, fizik yasalarının birleştirilmesi araştırmaları ile keşfi iç içedir. Böylece Maxwell denklemlerinde elektrik ve magnetizmanın birleştirilmesi doğrudan doğruya Abelian ayar değişmesi, relativistik kinematikle ilgilidir. Benzer şekilde standart modelin gelişmesi Abelian gruptan Abelian olmayan gruplara genişletilmesi ile ortaya çıkmıştır.

iv) Hem standart modelde, hem de onun büyük birleştirilmiş genişletilmesinde açıklanamayan sırlardan bir tanesi de kuark ve leptonların üç ailesinin özdeş kuantum sayılarının aynı olmasıdır. Araştırmalar kuark ve lepton ailelesinin diğer temel fermionlardan oluştuğunu göstermiştir. Temel fermionlara preonlar denir. Birçok kompleks kuantum alan teorilerinde preon maddeleri üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Üç parçacık temel durum dalga fonksiyonun üç sanal parçacık yaklaşımı tam olmadığından ve de kabuk modelinin kendisinin bir yaklaşıklık olmasından bileşenlere etkiyen bir takım artık kuvvetler vardır. Bu artık kuvvetler ilke olarak kuarklara ve leptonlara etkiyen standart modelin ayar alanlarının ortaya çıkmasına yol açar.

Kuaternionik Hilbert uzayında, yapısında multi kuaternionik yapılar ortaya çıktığı için, SU(2)x SU(2) periyodik alan gruplarından daha büyük ve daha etkin ayar gruplarını elde etmek mümkündür. Bununla beraber ilgilendiğimiz ayar grupları $\uparrow$ ve $\downarrow$ spin grupları birbirleri ile eşleştirilmeyecektir ki, bu da spinle birleştirilmiş triplet yapının tanımlanması için bir temel oluşturur.

v) Kuaternionik Hilbert uzayında temel parçacık kuvvetleri betimlenirse, kuantum maddeleri ile klasik metrik alanları çok daha temel pregeometrik serbestlik derecesinde, Planck skalasında en düşük seviyede birleştirmede önemli bir rol oynar. Bu durumda Planck skalasına varılmadan önce de kuaternionik kuantum mekaniği ve klasik genel relativite arasında yapısal benzerlikler görürüz. Bunlardan birincisi, kuaternionik kuantum mekaniğin, kompleks kuantum mekaniği ve genel relativitenin limiti arasındadır. İkinci bir nokta ise, genel relativistik ve göreli kuaternionik kuantum alanlar teorisinde birbirine benzer ayar alan yapıları vardır. Genel relativitede öklid geometrisi yerine, formu değiştirilebilen Riemannian geometrisi konmuştur. Üçüncü ve son bir nokta ise spinörlerin orijinleri ile ilgilidir. Geometridinamikteki temel soru "genel olarak ½ spini açıklayabilecek tanım ile geometrik tanım nasıl yapılabilir?"dir. Olası bir cevap ise kuaternionik yapı taşıyan manifoldlarda spinörlerin ortaya çıkması otomatik olmaktadır. Bunun da nedeni, kuaternionlar üzerinde SU(2) dönme grubunun iki tane tek boyutlu indirgenemeyen temsilinin olmasıdır.

Büyük birleştirme ve elektro zayıf kütle arasında 10^{13} oranın ortaya çıkması, standart modelin diğer bir şaşırtıcı özelliğini ortaya koyar. Süpersimetrinin hiyerarşi problemi diye adlandırılan problemi çözmede önemli bir rol oynadığı varsayılsa da kompleks kuantum alan teorisinin bunu çözebileceği sanılmıyor. Kuaternionik kuantum mekaniği ve alan teorisi, kompleks kuantum teorisinden potansiyel olarak çok daha zengin bir yapıya sahiptir. Kuaternionik Hilbert uzayında, kuantum alan dinamiğinin yapısı içinde, hiyerarşi problemine ve de standart modelin diğer şaşırtıcı durumlarına çözüm bulunacağı umudu vardır.

KAYNAKLAR

[1] Özdaş, K., Özdaş, A., Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili, Fen Edebiyat Dergisi, C:I,2,101-113, 1989

[2] Özdaş, K.,Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 1995

[3] Tanışlı, M., Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1995.

[4] Dixon, G.M., Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbersand the Algebraic Design of Physics, Kluwer Academic Publishers, London, 1994.

[5] Kaya, R., Koçak, Ş,. On the Pseudo-Quaternions and "Division by a Vector", Journal of Sci. And Arts of Gazi Univ. V.2. Number 2 pp. 39-50, 1988.

[6] Marhiafava, S., Rembielenski, Jakup., Quantum Quaternions, Journal of Mathematical Physics, 33, 171-173, January, 1992.

[7] Morita, Kasusada., " Arole of Quaternions in the Dirac Theory", Prog. Theor. Phys. Vol.75. No.1, 220-223, January 1986,

[8] Özdaş, K., "Dirac Denklemi", EDMMA, 4,4,272-277, 1980.

[9] Aygün, E., Zengin,D.M, Atom ve Molekül Fiziği, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 1992.

[10] Aygün, E., Zengin,D.M, Kuantum Fiziği, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 1990.

[11] Chou, J.C.K., "Quaternion Kinematik and Dynamic Differantial Equations", IEEE, Transaction on Robotics and Automation, 8,1,53-64, 1992.

[12] Leo, S.D., Rotelli, P., "Translations between Quaternion and Complex Quantum Mechanics, Progress of Theoretical Physics", vol. 92, No.5, 917-926, November, 1994

[13] Adler, S.L., Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press, New York, 1995

[14] Feyman, R.P., Quantum Electrodynamics, W.A. Benjamin, New York, 1962.