

**KUATERNİONLARIN
DİNAMİĞE UYGULANMASI**

SÜLEYMAN DEMİR
Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı
Haziran-1999

ABSTRACT

Master of Science Thesis

APPLICATION OF QUATERNIONS TO DYNAMICS

SÜLEYMAN DEMİR

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Physics Program

Supervisor: Prof . Dr. Kudret ÖZDAŞ

1999, Page 62

In this thesis; after general definition of quaternions, quaternion algebra and quaternion-vector relation have been investigated and many useful identities pertaining to quaternion multiplications have been generalized. Then, the matrix representations of quaternions have been showed. The methods which are used to describe the coordinate systems which make rotational and translational motion have been discussed and the relation between them and quaternion approach have been investigated. Physical applications of quaternions have been analysed and finally, dual quaternion concept has been defined and the applications of dual quaternions have been given.

Keywords: quaternion, dual quaternion, rotation, translation

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren değerli hocam,

Sayın *Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ*'a,
yardımlarından dolayı,

Sayın *Yrd. Doç. Dr. Murat TANIŞLI*'ya,
ve tezin yazımı sırasındaki katkıları için,

Sayın *Yrd. Doç. Dr. Metin KUL*'a
teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KUATERNİONLAR	3
2.1. Kuaternion Kavramı	3
2.2. Sıfır, Skaler ve Vektör kuaternion Kavramı	4
2.3. Kuaternionlar Üzerine Temel İşlemler	4
2.3.1. Eşitlik	4
2.3.2. Skaler ile Çarpma	4
2.3.3. Toplama ve Çıkarma	5
2.3.4. Bir Kuaternionun Eşleniği	5
2.3.5. Kuaternion Çarpımı ve Fiziksel Uygulamaları	5
2.4. Norm ve Birim Kuaternion	7
2.5. Bir Kuaternionun Tersisi	9
2.6. İki Kuaternionun Bölümü	10
2.7. Kuaternionların Matris Temsilleri	11
3. 3 ve 4 BOYUTLU UZAYDA DÖNME ve ÖTELEME	15
3.1. Euler Açılımları	15
3.2. Cayley-Klein Parametreleri	18
3.3. Euler Parametreleri	22
3.4. Kuaternionlarla Dönme Hareketinin İncelenmesi	25
3.5. Kuaternionlarla Öteleme Hareketinin İncelenmesi	28
3.6. Kuaternionlarla Dönme+Öteleme Hareketinin İncelenmesi	29
4. KUATERNİONLARIN FİZİKSEL UYGULAMALARI	31
4.1. Eylemsiz Referans Sisteminde Newton'un II. Kanunu	31
4.2. Polar Koordinatlarda Newton'un II. Kanunu	33
4.3. Doğal Koordinat Sisteminin (Serret-Frenet Üçyüzlüsü) Kuaternion Temsili	35
4.4. Mekanikte Dönme Eksenleri	41
5. DUAL KUATERNİONLAR	44
5.1. Dual Sayılar	44
5.2. Dual Sayılar Üzerine Temel İşlemler	44
5.2.1. Toplama ve Çıkarma	44
5.2.2. Çarpma	44
5.3.3. Eşitlik	44

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Dönme hareketleri	17
Şekil 3.2 \vec{r} vektörünün \hat{n} birim vektörü çevresinde θ açısı kadar döndürülmesi	23
Şekil 3.3 Dönme hareketi	25
Şekil 3.4 Öteleme hareketi	28
Şekil 3.5 Dönme+Öteleme hareketi	29
Şekil 4.1 xy düzleminde hareket	33
Şekil 4.2 Eğri üzerinde hareket	35
Şekil 6.1 Öteleme hareketi	51
Şekil 6.2 Dönme hareketi	53
Şekil 6.3 Dönme+Öteleme hareketi	55

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

- $p, q, r...$: Kuaternion
 $p_i, q_i, ...$: Kuaternion bileşenleri
 e : Euler Parametrelerinden oluşan birim kuaternion
 $e_0, e_1, ...$: Euler Parametreleri
 p^* : p kuaternionunun kompleks eşleniği
 p^{-1} : p kuaternionunun tersi
 N_p : p kuaternionunun normu
 pq : p ve q kuaternionlarının kuaternion çarpımı
 $\vec{r}, \vec{p}, \vec{q}$: 3-Boyutlu uzayda vektör
 $\vec{p} \cdot \vec{q}$: \vec{p} ve \vec{q} vektörlerinin skaler çarpımı
 $\vec{p} \times \vec{q}$: \vec{p} ve \vec{q} vektörlerinin vektörel çarpımı
 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{n}$: Birim vektör
 A : Dual sayı
 $\vec{A}, \vec{P}...$: Dual vektör
 $P, Q...$: Dual kuaternion
 \vec{a}, \vec{b} : Dalga simetrik matris
 $A, B...$: 3-Boyutlu uzayda dönme-dönüşüm matrisi
 A : 4-Boyutlu uzayda dönme-dönüşüm matrisi
 Q, Q, P : Matris
 $\overset{+}{A}, \overset{-}{C}, \overset{+}{E}$: Özel matrisler
 A^{-1} : A matrisinin tersi
 A^T : A matrisinin transpozesi(devriği)

1. GİRİŞ

Kuaternionlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan HAMILTON tarafından bulunmuştur. Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerine çalışmış ve nihayet 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğunu sonucuna varmıştır. Bu sonuçtan yola çıkarak bundan sonraki on yıl içinde çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan üçlü sayı sistemi ($q = a + \hat{i}b + \hat{j}c$) üzerinde yoğunlaştırmıştır. Hamilton daha sonraları vektör olarak adlandırdığı bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metod geliştirememiştir. 1843 yılında bu sayı sistemi üzerinde çarpma işleminin değişme özelliği gerçekleşmediğini anlamasından sonra bölme işlemi tanımlayı başarmıştır. Bu çalışmalar bugün kuaternionlar adını verdiğimiz sayı sisteminin doğuşuna ilişkin ilk çalışmalardır (Ward [3], Gurlebeck and Wolfgang [4]).

Kuaternionlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaternionlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaternionlar da iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılar da kuaternionların bir alt kümesi olmalıdır. Bu sonuç, kuaternionların hem reel hem de kompleks sayıları kapsayan oldukça büyük bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir.

Fizikte ölçülebilen herşey reel olmak zorundadır. Bu nedenle reel sayılar bilimin doğuşunda itibaren kendilerine her alanda uygulama sahası bulmuştur. Öte yandan kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarda, özellikle devre analizlerinde kullanıldığı bilinmektedir. Ne yazıkki bu sayı sistemi uygulamalara sadece iki boyut getirir. Üç boyutlu uygulamalarda ise vektörler kullanılır. Fakat vektörlerin de bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı görülmektedir.

Kuaternionlar ilerleyen bölümlerde tartışılacağı gibi vektörleri ifade etmede kullanılabilir. Bu sayı sistemi vektörleri kapsadığı gibi, bunlara ilaveten bir de reel bileşen ortaya koyarak uygulamalara dördüncü bir boyut katar.

Kuaternionlar son yıllarda her alanda artan bir hızla kullanılmaktadır. Uzaysal dönmeler (Harauz [12], Du Val [2]), robotik uygulamalar (Chou and Kamel [16], Funda and Richard [23]), grup teori uygulamaları bunlardan birkaçıdır. Özellikle ardıl uzaysal dönmeler ve robotik uygulamalarda karşılan birbiri ardına hantal matris çarpımları yerine kuaternionlar daha basit ve kullanışlı bir yöntem ortaya koymaktadır (Tanışlı [8]). Bu yol ise bilgisayar algoritması geliştirmede oldukça yararlıdır. Kuaternionların uygulama alanlarından birisi de astrofiziktir. Vrbik [17], 1993 yılında yayınlanan makalesinde gök mekaniğine ilişkin temel eşitlikleri kuaternionlarla ifade etmiştir.

Kuaternion cebri de kuaternionların kullanım alanlarının artmasına paralel olarak gelişme göstermektedir. Kompleks sayı-kuaternion bileşiminden oluşan kompleks kuaternionlar, fiziksel uygulamalarda son yıllarda artan bir hızla yer almaktadır. Gurlebeck and Wolfgang [4] kompleks kuaternionları özel relativite teorisi, parçacık mekaniği ve elektromagnetizmaya uygulayarak kompleks

kuaternionların oldukça geniş bir spektrumda kendine uygulama alanı bulunduğunu göstermişlerdir.

İki reel kuaterniondan oluşan dual kuaternion sistemi de kuaternion cebirinin içinde olduğu ilerlemenin bir başka kanıtıdır. Valesek and Stajskal [18] dual kuaternion kavramını tanımladıktan sonra dual kuaternionların robotik uygulamalarına ilişkin eşitlikler ortaya koymuşlardır. Benzer bir çalışma Walker, Shao et al. [19] tarafından yapılmış olup, dual kuaternionların matris temsilleri incelenmiştir. Veldkamp [22] dual kuaternionların uzaysal kinematikteki temsilleri üzerinde dururken, Pennock and Yang [21] dual kuaternionları kullanarak robot manipülatörlerin ters kinematik denklemlerini vermiştir. Sivridağ ve Güneş vd. [20] ise Serret-Frenet formüllerini dual kuaternionlarla ifade etmiştir.

Bu çalışmada ise reel ve dual kuaternion kavramı, kuaternionların vektörlerle ilişkisi, kuaternion temsilleri ile reel ve dual kuaternionların dinamikteki uygulamaları üzerinde durulacaktır.

2. KUATERNİONLAR

2.2. Kuaternion Kavramı

Kuaternionlar genel anlamda kompleks sayıların genelleştirilmiş bir ifadesidir. Bir q kuaternionu,

$$q = q_0 + q_1 \hat{i} + q_2 \hat{j} + q_3 \hat{k} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$q = [q_0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.2)$$

ile temsil edilir (Tanışlı ve Özdaş [11]). Burada q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar olmak üzere $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ imajiner taban elemanları

$$\hat{i}\hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j}\hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k}\hat{i} = \hat{j} \quad \hat{j}\hat{i} = -\hat{k} \quad \hat{k}\hat{j} = -\hat{i} \quad \hat{i}\hat{k} = -\hat{j} \quad (2.3)$$

ve

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1 \quad (2.4)$$

bağıntılarını sağlarlar. q kuaternionuna taban elemanları $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ olan 4-boyutlu uzaydaki bir vektör gözüyle bakılabilir. q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılarına q kuaternionunun bileşenleri denir. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ birimleri, 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Buradan yola çıkarak q kuaternionu S_q ile gösterilen skaler kısım, \vec{V}_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

$$S_q = q_0 \quad (2.5)$$

$$\vec{V}_q = q_1 \hat{i} + q_2 \hat{j} + q_3 \hat{k} = \vec{q} \quad (2.6)$$

Buna göre q kuaternionu,

$$q = S_q + \vec{V}_q = q_0 + q_1 \hat{i} + q_2 \hat{j} + q_3 \hat{k} \quad (2.7)$$

ile ifade edilir (Ward [3]). Herhangi bir konum vektörü, skaler kısmı sıfır olan bir kuaternion ile temsil edilebilir. $P(x, y, z)$ noktasına yönelmiş olan $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ konum vektörü,

$$p = [0, x, y, z] \quad (2.8)$$

kuaternionu ile gösterilir (Tanışlı [8]).

2.2. Sıfır, Skaler ve Vektör Kuaternion Kavramı

Kuaternion cebirine geçmeden önce kuaternionlarla ilgili olarak bazı tanımları vermek uygun olacaktır. *Sıfır kuaternion*,

$$\mathbf{q} = [0, 0, 0, 0] \quad (2.9)$$

ile verilen, elemanlarının tümü sıfır olan quaterniondur. *Skaler kuaternion*,

$$\mathbf{q} = [q_0, 0, 0, 0] \quad (2.10)$$

şeklinde vektörel bileşenleri olmayan kuaternion olarak tanımlanır. İlerleyen bölümlerde sık sık karşılaşılabilecek olan *vektör kuaternion* ise; skaler kısmı sıfır, vektörel kısmı oluşturan q_1, q_2, q_3 reel bileşenlerden en az birinin sıfırdan farklı olduğu kuaternion olup genel formda

$$\mathbf{q} = [0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.11)$$

ile ifade edilir.

2.3. Kuaternionlar Üzerine Temel İşlemler

Skalerler ve vektörler kuaternionların alt uzayı olduklarından skalerlere ve vektörlere ait kurallar quaternionlara da uygulanabilir. $\mathbf{p} = p_0 + \vec{p}$, $\mathbf{q} = q_0 + \vec{q}$ ve $\mathbf{r} = r_0 + \vec{r}$ ile verilen üç kuaternion ele alınsın. Bu kuaternionlar kullanılarak aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

2.3.1. Eşitlik

İki kuaternionun eşit olabilmesi için karşılıklı elemanlarının eşit olması gerekir. Buna göre \mathbf{p} ve \mathbf{q} kuaternionlarının eşit olabilmesi için

$$p_0 = q_0 \quad p_1 = q_1 \quad p_2 = q_2 \quad p_3 = q_3 \quad (2.12)$$

olmalıdır (Özdaş [1]).

2.3.2. Skaler ile Çarpma

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λ skaleri ile \mathbf{p} kuaternionun çarpımı

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{p} &= \lambda(p_0 + p_1 \hat{i} + p_2 \hat{j} + p_3 \hat{k}) = \lambda[p_0, p_1, p_2, p_3] \\ &= [\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3] \end{aligned} \quad (2.13)$$

ile tanımlanır ve elde edilen nicelik, \mathbf{p} kuaternionunun λ katı olan başka bir kuaterniondur (Özdaş [1]).

2.3.3. Toplama ve Çıkarma

p ve q kuaternionlarının toplam ve farkı karşılıklı elemaların toplam ve farkına eşittir:

$$\begin{aligned} p \pm q &= (S_p \pm S_q) + (\bar{V}_p \pm \bar{V}_q) \\ &= (p_0 \pm q_0) + (\bar{p} \pm \bar{q}) \\ &= (p_0 \pm q_0) + (p_1 \pm q_1)\hat{i} + (p_2 \pm q_2)\hat{j} + (p_3 \pm q_3)\hat{k} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bu işlemler sonucu elde edilen nicelik bu iki kuaternionun toplam ve farkına eşit olan diğer bir kuaterniondur (Ward [3]).

2.3.4. Bir Kuaternionun Eşleniği

p kuaternionunun eşleniği imajiner, diğer bir deyişle vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir ve p^* ile gösterilir:

$$p^* = p_0 - \bar{p} = [p_0, -p_1, -p_2, -p_3] = [p_0, -\bar{p}] \quad (2.15)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Hacısalihoglu [7]):

$$(ap + bq)^* = ap^* + bq^* \quad (2.16)$$

$$(pq)^* = q^* p^* \quad (2.17)$$

$$(p^*)^* = p \quad (2.18)$$

2.3.5. Kuaternion Çarpımı ve Fiziksel Uygulamaları

Kuaternion çarpımı vektörlerin çarpımından daha farklıdır. Alışlagelen vektör çarpımından daha fazla nicelik içerirler. p ve q kuaternionlarının çarpımı,

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + \bar{p})(q_0 + \bar{q}) \\ &= p_0q_0 + p_0\bar{q} + q_0\bar{p} - \bar{p} \cdot \bar{q} + \bar{p} \times \bar{q} \\ &= [p_0q_0 - \bar{p} \cdot \bar{q}, p_0\bar{q} + q_0\bar{p} + \bar{p} \times \bar{q}] \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır (Tanışlı [8]). Görüldüğü gibi kuaternion çarpımı iki skalerin çarpımı, skalerin vektörle çarpımı, skaler ve vektörel çarpım gibi vektör cebirinin tüm çarpımlarını içerir. Burada “ \cdot ” ve “ \times ” üç boyutlu vektör uzayında skaler ve vektörel çarpımları göstermektedir. Kuaternion çarpımını bileşenler cinsinden,

$$\begin{aligned} pq &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_1q_0 + p_0q_1 + p_2q_3 - p_3q_2)\hat{i} \\ &\quad + (p_2q_0 + p_0q_2 - p_1q_3 + p_3q_1)\hat{j} + (p_3q_0 + p_0q_3 - p_2q_1 + p_1q_2)\hat{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ile verilir. Görüldüğü gibi iki kuaternionun çarpımı yine bir kuaterniondur.

Kuaternion çarpımı değişme özelliğine sahip değildir. Fakat fiziksel uygulamalarda kullanılmak üzere skaler ve vektörel çarpımla ilişkilendirilebilir. Yukarıda verilen kuaternionlardan farklı olarak bu kez p ve q kuaternionları

$$p = \bar{p} = [0, p_1, p_2, p_3] \quad (2.21)$$

$$q = \bar{q} = [0, q_1, q_2, q_3] \quad (2.22)$$

ile verilen vektör kuaternion olarak tanımlansın. Buna göre pq ve qp çarpımları;

$$pq = -\bar{p} \cdot \bar{q} + \bar{p} \times \bar{q} \quad (2.23)$$

$$qp = -\bar{q} \cdot \bar{p} + \bar{q} \times \bar{p} \quad (2.24)$$

olacaktır. $\bar{p} \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$ ve $\bar{p} \times \bar{q} = -\bar{q} \times \bar{p}$ olduğundan

$$qp = -\bar{q} \cdot \bar{p} - \bar{p} \times \bar{q} \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan yola çıkarak pq ile qp 'nin toplamı için

$$\begin{aligned} pq + qp &= -2 \bar{q} \cdot \bar{p} \\ &= -2[\bar{q} \cdot \bar{p}, 0, 0, 0] \\ &= -2[\bar{q} \cdot \bar{p}, \vec{0}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

yazılabilir. Elde edilen nicelik skaler kuaterniondur. Daha açık bir ifade ile skaler çarpım-kuaternion çarpımı ilişkisi,

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = -\frac{1}{2}(pq + qp) \quad (2.27)$$

olmalıdır. pq ile qp 'nin farkı ise;

$$pq - qp = 2[0, \bar{p} \times \bar{q}] \quad (2.28)$$

ile verilen vektör kuaterniondur. Benzer şekilde vektörel çarpım-kuaternion çarpımı ilişkisi için de;

$$\bar{p} \times \bar{q} = \frac{1}{2}(pq - qp) \quad (2.29)$$

yazılabilir (Özdaş ve Özdaş[9]).

Kuaterniyon çarpımı dağılımlı ve bileşimlidir. $a, b, c \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 a(b+c) &= (S_a + \vec{V}_a)[S_b + S_c + \vec{V}_b + \vec{V}_c] \\
 &= S_a S_b + S_a S_c - \vec{V}_a \cdot (\vec{V}_b + \vec{V}_c) + S_c \vec{V}_a + S_b \vec{V}_a \\
 &\quad + S_a (\vec{V}_b + \vec{V}_c) + \vec{V}_a \times (\vec{V}_b + \vec{V}_c) \\
 &= (S_a S_b - \vec{V}_a \cdot \vec{V}_b + S_b \vec{V}_a + S_a \vec{V}_b + \vec{V}_a \times \vec{V}_b) \\
 &\quad + (S_a S_c - \vec{V}_a \cdot \vec{V}_c + S_a \vec{V}_c + S_c \vec{V}_a + \vec{V}_a \times \vec{V}_c) \\
 &= ab + ac
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
 a(bc) &= (S_a + \vec{V}_a)(S_{(bc)} + \vec{V}_{(bc)}) \\
 &= S_a S_b S_c - (S_a \vec{V}_b \cdot \vec{V}_c + S_b \vec{V}_c \cdot \vec{V}_a + S_c \vec{V}_a \cdot \vec{V}_b) \\
 &\quad + (S_a S_c \vec{V}_b + S_b S_c \vec{V}_a + S_a S_b \vec{V}_c) \\
 &\quad + (S_a \vec{V}_b \times \vec{V}_c - S_b \vec{V}_c \times \vec{V}_a + S_c \vec{V}_a \times \vec{V}_b) \\
 &\quad - (\vec{V}_b \cdot \vec{V}_c) \vec{V}_a + \vec{V}_a \times (\vec{V}_b \times \vec{V}_c) - \vec{V}_a \cdot (\vec{V}_b \times \vec{V}_c)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (ab)c &= S_a S_b S_c - (S_c \vec{V}_a \cdot \vec{V}_b + S_a \vec{V}_b \cdot \vec{V}_c + S_b \vec{V}_a \cdot \vec{V}_c) \\
 &\quad + (S_a S_b \vec{V}_c + S_a S_c \vec{V}_b + S_c S_a \vec{V}_b) \\
 &\quad + (S_a \vec{V}_b \times \vec{V}_c + S_b \vec{V}_a \times \vec{V}_c + S_c \vec{V}_a \times \vec{V}_b) \\
 &\quad - (\vec{V}_a \cdot \vec{V}_b) \vec{V}_c + (\vec{V}_a \times \vec{V}_b) \times \vec{V}_c - (\vec{V}_a \times \vec{V}_b) \cdot \vec{V}_c
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

eşitliklerini sağlarlar.

$a(bc) = (ab)c$ olması için $-(\vec{V}_b \cdot \vec{V}_c) \vec{V}_a + \vec{V}_a \times (\vec{V}_b \times \vec{V}_c) - \vec{V}_a \cdot (\vec{V}_b \times \vec{V}_c)$ 'nin $-(\vec{V}_a \cdot \vec{V}_b) \vec{V}_c + (\vec{V}_a \times \vec{V}_b) \times \vec{V}_c - (\vec{V}_a \times \vec{V}_b) \cdot \vec{V}_c$ 'ye eşit olduğunu göstermek gerekir. Standart vektör eşitliklerinden;

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{2.33}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \tag{2.34}$$

bilindiğine göre $a(bc) = (ab)c$ 'dir (Ward [3]).

2.4. Norm ve Birim Kuaternion

Bir kuaternionun normu kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir ve N gösterilir. Norm ; $q, q^* \in \mathbb{H}$ olmak üzere;

$$N_q = qq^* = q^*q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{2.35}$$

şeklinde tanımlanır. Normu 1 olan kuaterniona ise *birim kuaternion* denir.

$p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere pq çarpımının normu, her bir kuaterniona ait normların çarpımına eşittir (Hacısalıhoğlu [7]):

$$N_{pq} = pq (pq)^* = pq (q^*p^*) = pp^*qq^* = N_p N_q \quad (2.36)$$

Norm ifadesi kuaternionları ifade etmede kullanılabilir. Her kuaternionu polar formda yazmak mümkündür. \hat{q} birim vektör olmak üzere q kuaternionu,

$$q = \sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta) \quad (2.37)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\cos \theta = \frac{q_0}{\sqrt{N_q}} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N_q}} \quad (2.38)$$

olup,

$$-1 \leq \cos \theta \leq +1 \quad -1 \leq \sin \theta \leq +1 \quad (2.39)$$

aralığında değişirler ve

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (2.40)$$

koşullunu sağlarlar.

(2.37) denkleminde verilen q kuaternionu eksponansiyel formda da ifade edilebilir.

$$q = \sqrt{N_q} e^{\hat{q}\theta} \quad (2.41)$$

Bu ifadede $\hat{q}^2 = -1$ olup

$$e^{\hat{q}\theta} = \cos \theta + \hat{q} \sin \theta \quad (2.42)$$

ile verilir. Öte yandan

$$(\cos \theta + \hat{q} \sin \theta)^n = \cos n\theta + \hat{q} \sin n\theta \quad (2.43)$$

bağıntısından yararlanarak

$$q^n = (\sqrt{N_q})^n (\cos n\theta + \hat{n} \sin n\theta) \quad (2.44)$$

ifadesi elde edilir (Ward [3]).

2.5. Bir Kuaternionun Tersisi

Uzaysal vektörler üzerine bölme işlemi tanımlı değildir. Diğer bir deyişle iki vektörün bölümünden bahsedilemez. Uzaysal vektörlerin tersine kuaternionlar bölüm cebri oluşturtukları için bir kuaternionun tersi tanımlıdır.

q bir sıfır kuaternionun olmamak şartıyla,

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \quad (2.45)$$

koşulunu sağlayan q^{-1} kuaternionuna q kuaternionunun tersi denir.

$$N_q = qq^* = q^*q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (2.46)$$

verildiğine göre

$$\frac{qq^*}{N_q} = 1 \quad (2.47)$$

dir. Dolayısıyla q kuaternionunun tersi,

$$q^{-1} = \frac{q^*}{N_q} \quad (2.48)$$

olmalıdır. Bir kuaternionun tersi elde edilirken, kuaternionun eşleniği bir skalere bölündüğüne göre elde edilen nicelik yine bir kuaterniondur.

(2.45) eşitliğinden yola çıkarak,

$$qq^{-1} = q^{-1}q = \frac{qq^*}{N_q} = \frac{q^*q}{N_q} = 1 \quad (2.49)$$

bulunur (Hacısalihoglu [7]).

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \in \mathbb{H}$ olmak üzere bunlar arasında

$$(p_1 p_2 p_3 \dots p_n)^{-1} = p_n^{-1} \dots p_3^{-1} p_2^{-1} p_1^{-1} \quad (2.50)$$

bağıntıları mevcuttur (Chou [13]). a, b skaler quaternion; p, q vektör quaternion iseler

$$ab^{-1} = b^{-1}a = \left[\frac{a_0}{b_0}, 0, 0, 0 \right] \quad (2.51)$$

$$a^{-1}p = pa^{-1} = \left[0, \frac{p_1}{a_0}, \frac{p_2}{a_0}, \frac{p_3}{a_0} \right] \quad (2.52)$$

$$ap^{-1} = p^{-1}a = \frac{a_0}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} [0, -p_1, -p_2, -p_3] \quad (2.53)$$

$$pq^{-1} = (q^{-1}p) \quad \text{veya} \quad q^{-1}p = (pq^{-1})^* \quad (2.54)$$

bağıntılarını sağlarlar (Tanışlı [8]).

2.6. İki Kuaternionun Bölümü

$q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaternionunu bir q kuaternionuna bölmek için p 'yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaternion çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türdür ve bu nedenle p 'yi q ile iki türlü bölmek gerekir:

$$\text{Sağdan bölme: } pq^{-1} \quad (2.51)$$

$$\text{Soldan bölme: } q^{-1}p \quad (2.52)$$

Bölme işlemi sonucunda elde edilen nicelik yine bir kuaterniondur.

p/q kuaternionunun normu, p 'nin normunun q 'nin normuna bölümüne eşittir (Hacısalihoglu [7]).

$$N_{p/q} = \frac{N_p}{N_q} \quad (2.53)$$

2.7. Kuaternionların Matris Temsilleri:

Kuaternionları matris şeklinde ifade etmek mümkündür. 4-Boyutlu uzayda kuaternionların taban elemanları

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

olmak üzere $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ kuaternionu 4x4 matris formunda

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

ile veya 4x1 matris formunda

$$\mathbf{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = (q_0, \mathbf{q})^T = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

şeklinde temsil edilebilir.

Kuaternionların kompleks 2x2 matrisleri kullanılarak da ifadesi mümkündür.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
 \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

ve $\mathbf{i}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\mathbf{U}$ olması şartıyla,

$$\mathbf{Q} = q_0\mathbf{U} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{J} + q_3\mathbf{K} \tag{2.58}$$

olup matris ifadesi açık formda;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= q_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + q_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

ile verilir.

Matris uygulamaları kuaternion cebrinde de yer alır. Kuaternion çarpımını matris formunda ifade etmek mümkündür. Daha sonraki matris uygulamalarında kullanılmak üzere;

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

ve

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

matrisleri tanımlansın. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ kuaternion çarpımı için

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & \mathbf{a}_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 & -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{b}_0 \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_3 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

elde edilir (Whage [15]).

Kuaternion çarpımının değişme özelliği göstermediği daha önce belirtilmişti. Fakat bu engel küçük bir işaret değişikliği ile aşılabilmektedir.

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a_0 & -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & a_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{a}} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

ve

$$\mathbf{B}^- = \begin{pmatrix} b_0 & -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & b_0 \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

olmak üzere (2.63) eşitliği kapalı formda,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^- = \mathbf{B}^- \mathbf{A}^+ \quad (2.66)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki özellik üçlü çarpımlarda büyük kolaylık sağlar. abc üçlü çarpımı matris formunda,

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{B}^- \mathbf{C} = \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{B}^- \quad (2.67)$$

veya

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{B}^- \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{A}^+ \mathbf{B}^- \quad (2.68)$$

ile ifade edilebilir. Böylece yukarıdaki eşitliklerden yararlanarak,

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{C}^- = \mathbf{C}^- \mathbf{A}^+ \quad (2.69)$$

elde edilir. $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \in H$ olmak üzere (2.66) eşitliğini,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^+ \mathbf{P}_2^+ \dots \mathbf{P}_{n-1}^+ \mathbf{P}_n^+ &= \mathbf{P}_n^- \mathbf{P}_{n-1}^- \dots \mathbf{P}_2^- \mathbf{P}_1^- \\ &= (\mathbf{P}_1^+ \mathbf{P}_2^+ \dots \mathbf{P}_{i-1}^+) (\mathbf{P}_n^- \mathbf{P}_{n-1}^- \dots \mathbf{P}_{i+1}^-) \mathbf{P}_i^- \end{aligned} \quad (2.70)$$

şeklinde, (2.2.69) eşitliğini,

$$(\mathbf{P}_1^+ \mathbf{P}_2^+ \dots \mathbf{P}_n^+) (\mathbf{Q}_1^- \mathbf{Q}_2^- \dots \mathbf{Q}_m^-) = (\mathbf{Q}_1^- \mathbf{Q}_2^- \dots \mathbf{Q}_m^-) (\mathbf{P}_1^+ \mathbf{P}_2^+ \dots \mathbf{P}_n^+) \quad (2.71)$$

şeklinde genelleştirmek mümkündür. Benzer şekilde (2.66) ve (2.2.69) eşitlikleri kullanılarak,

$$(\mathbf{P}_1^+ \mathbf{P}_2^+ \dots \mathbf{P}_{n-1}^+ \mathbf{P}_n^+) = \mathbf{P}_1^+ \mathbf{P}_2^+ \dots \mathbf{P}_{n-1}^+ \mathbf{P}_n^+ \quad (2.72)$$

$$(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \overset{+}{\mathbf{P}}_n) = \overset{-}{\mathbf{P}}_n \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \dots \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \overset{-}{\mathbf{P}}_1 \quad (2.73)$$

$$(\overset{-}{\mathbf{P}}_1 \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \dots \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \overset{-}{\mathbf{P}}_n) = \overset{+}{\mathbf{P}}_n \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \dots \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \overset{+}{\mathbf{P}}_1 \quad (2.74)$$

$$(\overset{-}{\mathbf{P}}_1 \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \dots \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \overset{-}{\mathbf{P}}_n) = \overset{-}{\mathbf{P}}_1 \overset{-}{\mathbf{P}}_2 \dots \overset{-}{\mathbf{P}}_{n-1} \overset{-}{\mathbf{P}}_n \quad (2.75)$$

eşitlikleri elde edilebilir.

Eğer çarpımlar kuaternionların eşleniğini de içeriyorsa (2.66)' dan (2.75)'e kadar olan eşitlikler halen geçerlidir. $p, q, r \in \mathbb{H}$ olmak üzere, iki kuaternionun eşleniğinin çarpımı olan $r = p^*q^*$ kuaternionu matris formunda;

$$\mathbf{R} = \overset{+}{\mathbf{P}}^* \mathbf{Q}^* = \overset{-}{\mathbf{Q}}^* \mathbf{P}^* = (\overset{+}{\mathbf{P}})^T \mathbf{Q}^* = (\overset{-}{\mathbf{Q}})^T \mathbf{P}^* \quad (2.76)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla,

$$\overset{+}{\mathbf{P}}^* = (\overset{+}{\mathbf{P}})^T \quad (2.79)$$

ve

$$\overset{-}{\mathbf{Q}}^* = (\overset{-}{\mathbf{Q}})^T \quad (2.80)$$

olmalıdır. Eğer çarpım, ardışık bir biçimde kuaternionların eşleniklerinin çarpımlarını içeriyorsa,

$$(p_1 p_2 \dots p_n)^* = p_n^* \dots p_2^* p_1^* \quad (2.81)$$

olup matris formunda;

$$(\overset{+}{\mathbf{P}}_1 \overset{+}{\mathbf{P}}_2 \dots \overset{+}{\mathbf{P}}_{n-1} \overset{+}{\mathbf{P}}_n)^* = (\overset{+}{\mathbf{P}}_n)^T \dots (\overset{+}{\mathbf{P}}_2)^T \overset{+}{\mathbf{P}}_1^* \quad (2.82)$$

olarak ifade edilir (Chou [13]).

3. 3 ve 4 BOYUTLU UZAYDA DÖNME ve ÖTELEME

Orijinleri çakışık iki koordinat sisteminin birbirlerine göre göreceli yönelimi çeşitli biçimlerde temsil edilebilir. Bu bölümde bu temsiller üzerinde durulacak ve bölüm sonunda ise kuaternion yaklaşımı ele alınacaktır.

3.1. Euler Açıları

Bir koordinat sisteminden bir başkasına dönüşüm, özel bir sıra ile uygulanan üç ardışık dönme ile yapılabilir. Bu üç ardışık dönme, xyz -koordinat sistemini z eksenini etrafında θ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülerek başlatılacaktır. Bu şekilde elde edilen koordinat sistemine $x_1y_1z_1$ adı verilsin. İkinci aşama, $x_1y_1z_1$ koordinat sistemini x_1 eksenini çevresinde saat yönünün tersi yönde φ açısı kadar döndürmektir. Bu koordinat sistemi ise $x_2y_2z_2$ ile temsil edilsin. Üçüncü ve son aşama $x_2y_2z_2$ koordinat sistemini z_2 eksenini etrafında ψ açısı kadar saat yönünün tersi yönde döndürülerek tamamlanır ve arzu edilen $x'y'z'$ -koordinat sistemi elde edilir. $x'y'z'$ -koordinat sisteminin xyz -koordinat sistemine göre yönelimini belirleyen θ, φ, ψ açılara *Euler açıları* denir.

xyz -koordinat sistemini z -eksenini etrafında saat yönünün tersi yönde θ açısı kadar döndürülerek elde edilen $x_1y_1z_1$ sistemine ait dönme-dönüşüm matrisi \mathbf{B} ile temsil edilirse,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ve $\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}\mathbf{X}$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

dir. $x_1y_1z_1$ -koordinat sistemini x_1 eksenini çevresinde saat yönünün tersi yönde φ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen $x_2y_2z_2$ sistemine karşı gelen \mathbf{C} dönme-dönüşüm matrisi

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ve $\mathbf{X}_2 = \mathbf{C}\mathbf{X}_1$;

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ile verilir. $x_2y_2z_2$ -koordinat sistemini z_2 eksenini etrafında saat yönünün tersi yönde ψ açısı kadar döndürülerek elde edilen $x'y'z'$ -koordinat sistemine ilişkin \mathbf{D} dönme dönüşüm matrisi,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ve $\mathbf{X}' = \mathbf{D}\mathbf{X}_2$;

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

dir. Buna göre $x'y'z'$ -koordinat sisteminin xyz -koordinat sistemine göre

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (3.7)$$

yönelimini belirleyen \mathbf{A} toplam dönme-dönüşüm matrisi;

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{B} \quad (3.8)$$

olacaktır. \mathbf{A} matrisi daha açık bir formda,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \psi \sin \varphi \\ -\sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir.

$x'y'z'$ -koordinat sisteminin xyz -koordinat sistemine ters dönüşüm bağıntısı,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}' \quad (3.10)$$

ile verilir. Sözü edilen dönüşümler ortogonal olduğundan,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{U} \quad (3.11)$$

dir. (3.11) eşitliği \mathbf{A} matrisinin tersi ile sağdan çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}^T &= \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

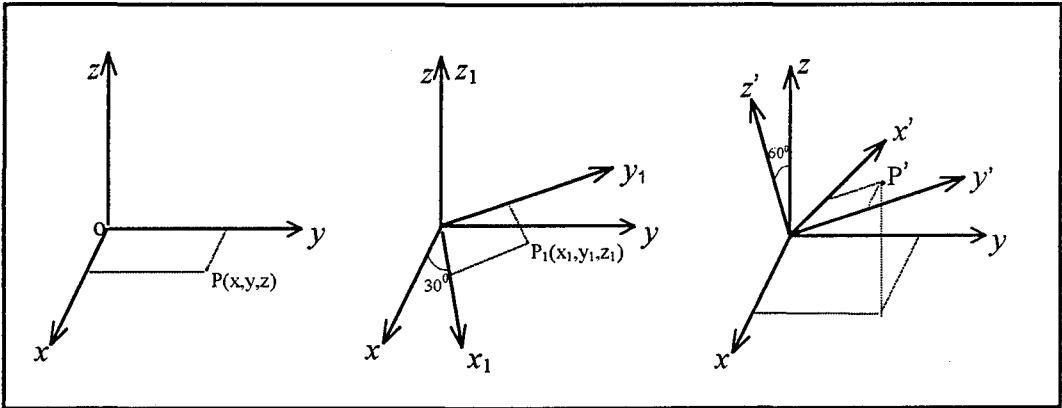
bulunur. \mathbf{A}^{-1} matrisi

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta - \sin \psi \cos \varphi \sin \theta & -\sin \psi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \psi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\sin \varphi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

olmalıdır (Goldstein [5]).

Örnek:

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi, xyz -kartezyen koordinat sisteminde yer alan P noktasının koordinatları $P(1,2,0)$ ile verilmektedir. xyz -koordinat sistemi önce z -ekseni etrafında 30° , daha sonra ise yeni oluşan x_1 -ekseni etrafında 60° döndürülüyor. P noktasının yeni koordinatlarını bulunuz.



Şekil 3.1. Dönme hareketleri

Çözüm:

xyz -koordinat sistemi ilk önce z -ekseni çevresinde 30° döndürüldüğüne göre dönüşüm bağıntısı (3.2)' den,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

olacaktır. Daha sonra yeni oluşan $x_1y_1z_1$ -koordinat sistemi, x_1 -ekseni etrafında 60° döndürüldüğünden dönüşüm bağıntısı (3.4) denkleminde yola çıkarak,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 & \sin 60 \\ 0 & -\sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade daha açık bir formda yazılarak,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 & \sin 60 \\ 0 & -\sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 30 & \sin 30 & 0 \\ -\cos 60 \sin 30 & \cos 60 \cos 30 & \sin 60 \\ \sin 60 \sin 30 & -\sin 60 \cos 30 & \cos 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,87 & 0,50 & 0 \\ -0,25 & 0,43 & 0,87 \\ 0,43 & -0,75 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,87 \\ 0,61 \\ -1,07 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $P'(x', y', z')$, noktasının yeni koordinatları $P'(1.87, 0.61, -1.07)$ olmalıdır.

3.2 Cayley-Klein Parametreleri

Daha önceki bölümde, bir koordinat sisteminin diğerine göre yönelimini belirlemek üzere bileşenleri reel olan dönme-dönüşüm matrisi kullanılmıştı. Aynı dönüşüm bileşenleri kompleks sayılar olan matrisler kullanılarak da yapılabilir.

İki boyutlu uzayda u ve v kompleks eksenler olmak üzere

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v \\ v' &= \gamma u + \delta v \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde genel bir lineer dönüşüm ifade edilebilir. Buna karşı gelen dönüşüm matrisi,

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

dir. Uzayda bir noktanın koordinatlarını belirtmek üzere x, y, z üç reel nicelik olsun ve P matrisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

olarak tanımlansın. Bu matrisler kullanılarak xyz-koordinat sisteminin $x'y'z'$ koordinat sistemine göre yönelimini belirtmek üzere,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{QPQ}^{-1} \quad (3.17)$$

dönüşümü yapılabilir. dönüşüm matrisi o halde,

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

olmalıdır. Yukarıdaki matris çarpımları yapılarak \mathbf{P}' matrisi için,

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

ifadesi yazılabilir. Matris elemanları eşitlenerek üslü ve üssüz koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm denklemi,

$$\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ \\ x'_- &= -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ \end{aligned} \quad (3.20)$$

veya

$$z' = (\beta\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\gamma)z \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre Bölüm 3.1'de (3.9) eşitliğiyle tanımlanan \mathbf{A} dönme dönüşüm matrisi α , β , γ ve δ cinsinden,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \delta^2 - \beta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \beta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. (3.22) eşitliği bir cismin uzayda yönelimini tanımlar. α , β , γ ve δ Cayley-Klein Parametreleri olarak adlandırılır.

Cayley-Klein parametreleri istenirse Euler açıları cinsinden ifade edilebilir. Bölüm 3.1'de $x'y'z'$ -koordinat sisteminin xyz -koordinat sistemine göre yönelimini belirlemek üzere ilk önce xyz -koordinat sistemi z -ekseni etrafında saat yönünün tersi yönde θ açısı kadar döndürülüyordu. x'_+ , x'_- ve z' , bu dönüşüme karşı gelmek üzere θ açısı cinsinden ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
 x'_+ &= x' + iy' \\
 &= (\cos\theta x + \sin\theta y) + i(-\sin\theta x + \cos\theta y) \\
 &= (\cos\theta - i\sin\theta)(x + iy) \\
 &= e^{-i\theta}(x + iy) \\
 &= e^{-i\theta}x_+
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 x'_- &= x' - iy' \\
 &= (\cos\theta x + \sin\theta y) - i(-\sin\theta x + \cos\theta y) \\
 &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) \\
 &= e^{i\theta}(x - iy) \\
 &= e^{i\theta}x_-
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$z' = z \tag{3.25}$$

Bu eşitlikler (3.20) denklemi ile karşılaştırılarak (3.15) ile verilen Q matrisinin elemanları;

$$\gamma = \beta = 0, \quad \alpha^2 = e^{i\theta}, \quad \delta^2 = e^{-i\theta} \tag{3.26}$$

ve

$$Q_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

olur. İkinci aşamada $x_1y_1z_1$ -koordinat sistemi x_1 -ekseni etrafında saat yönünün tersi yönde φ açısı kadar döndürülüyordu. Buna karşı gelen Q matrisi;

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & i \sin(\varphi/2) \\ i \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

dir. Benzer şekilde $x_2y_2z_2$ -koordinat sisteminin, z_2 ekseni etrafında ψ açısı kadar döndürülmesine karşı gelen Q matrisi ise

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

olacaktır. $x'y'z'$ -koordinat sisteminin xyz -koordinat sistemine göre yönelimi, bu üç Q matrisinin çarpımıyla belirlenecektir:

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & i \sin(\varphi/2) \\ i \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) & i e^{i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) \\ i e^{-i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) & e^{-i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

(3.30) matrisi, (3.15)'de verilen Q matrisi ile karşılaştırılarak Cayley-Klein parametreleri Euler açıları cinsinden;

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) \\ \beta &= i e^{i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) \\ \gamma &= i e^{-i(\psi-\theta)/2} \sin(\varphi/2) \\ \delta &= e^{-i(\psi+\theta)/2} \cos(\varphi/2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

olacaktır (Goldstein [5]).

Örnek:

xyz -koordinat sisteminde yer alan $P(0,0,1)$ noktası ilk olarak x -eksenine göre 90° , daha sonra yeni oluşan z -eksenine göre tekrar 90° döndürülüyor. P noktasının yeni koordinatlarını Cayley-Klein Parametrelerini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

Cayley-Klein Parametreleri (3.31) eşitliğinde Euler açıları cinsinden ifade edilmişti. (3.31) eşitliği kullanılarak x -ekseni etrafındaki 90° 'lik dönme için Cayley-Klein Parametreleri;

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(\varphi/2) \\ \beta &= i \sin(\varphi/2) \\ \gamma &= i \sin(\varphi/2) \\ \delta &= \cos(\varphi/2) \end{aligned}$$

olmalıdır. (3.18) dönüşüm bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}' &= \begin{pmatrix} z' & x'_{-} \\ x'_{+} & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & i \sin(\varphi/2) \\ i \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_{-} \\ x_{+} & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & -i \sin(\varphi/2) \\ -i \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z' & x'_{-} \\ x'_{+} & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90/2) & i \sin(90/2) \\ i \sin(90/2) & \cos(90/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90/2) & -i \sin(90/2) \\ -i \sin(90/2) & \cos(90/2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeye göre ilk dönüşüm sonucu elde edilen \mathbf{P}' noktası $(0,1,0)$ olmaktadır. Bu yeni oluşan koordinat sistemi z -ekseni etrafında yeniden 90° döndürüldüğüne göre (3.31) ile verilen Cayley-Klein parametreleri;

$$\alpha = e^{i\pi/4}$$

$$\gamma = e^{-i\pi/4}$$

$$\beta = \delta = 0$$

olacaktır. Bu dönmeye karşı gelen dönüşüm bağıntısını kullanarak;

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}'' &= \begin{pmatrix} z'' & x''_{-} \\ x''_{+} & -z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & x'_{-} \\ x'_{+} & -z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z'' & x''_{-} \\ x''_{+} & -z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z'' & x'' - iy'' \\ x'' + iy'' & -z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i e^{i\pi/2} \\ i e^{-i\pi/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

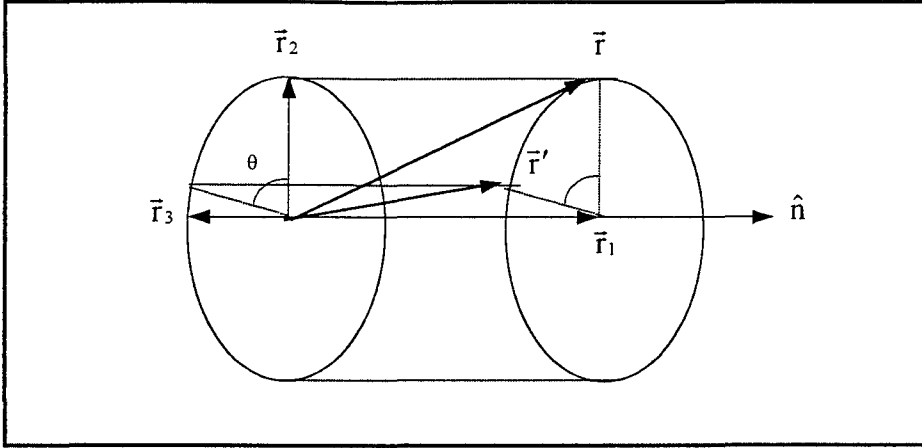
bulunur. Yukarıdaki eşitliğe göre \mathbf{P}'' noktasının yeni koordinatları $(1, 0, 0)$ olmalıdır.

3.3. Euler Parametreleri

$\bar{\mathbf{r}}$, üç boyutlu uzayda bir noktanın koordinatlarını belirleyen bir vektör olsun. Şekil 3.2' de verildiği gibi $\bar{\mathbf{r}}$ vektörü $\hat{\mathbf{n}}$ birim vektörü çevresinde θ açısı kadar döndürülerek $\bar{\mathbf{r}}'$ vektörü elde edilsin.

Bu şekilden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:

- $\bar{\mathbf{r}}_1$ vektörü $\bar{\mathbf{r}}$ 'nin $\hat{\mathbf{n}}$ üzerindeki izdüşümüdür ve $\bar{\mathbf{r}}_1 = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{n}}$ ile verilir.
- $\bar{\mathbf{r}}_2$, $\bar{\mathbf{r}}$ 'nin $\hat{\mathbf{n}}$ birim vektörüne dik vektör bileşenidir ve $\bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1$ şeklinde tanımlanır.
- $\bar{\mathbf{r}}_3$ vektör bileşeni $\hat{\mathbf{n}}$ ve $\bar{\mathbf{r}}$ 'ye dik olup $\bar{\mathbf{r}}_2$ ile aynı büyüklüğe sahiptir. Bu vektör bileşeni $\bar{\mathbf{r}}_3 = \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{r}}_2 = \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{r}}$ eşitliklerini sağlar



Şekil 3.2 \vec{r} vektörü \hat{n} birim vektörü çevresinde θ açısı kadar döndürülmesi

\vec{r}' vektörünü bu üç vektör cinsinden aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \cos \theta + \vec{r}_3 \sin \theta \\ &= (\hat{n} \cdot \vec{r}) \hat{n} + \cos \theta (\vec{r} - (\hat{n} \cdot \vec{r}) \hat{n}) + \sin \theta (\hat{n} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (3.32)$$

(3.32) eşitliği *dönme denklemi* olarak adlandırılır. Dönme denklemi bir e_0 skaleri ve bileşenleri e_1, e_2, e_3 olan bir \vec{e} vektörü kullanarak daha kullanışlı bir forma dönüştürülebilir. Burada,

$$e_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.33)$$

ve

$$\vec{e} = \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.34)$$

olmak üzere bunlar arasında;

$$e_0^2 + |\vec{e}|^2 = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (3.35)$$

bağıntısı vardır. Bu dört nicelik *Euler parametreleri* olarak adlandırılır. (3.35) eşitliği kullanılarak;

$$\cos \theta = 2e_0^2 - 1 = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \quad (3.36)$$

ve

$$\hat{n} \sin \theta = 2e_0 \vec{e} \quad (3.37)$$

yazılabilir. Bu denklemlerden yararlanarak dönme denklemi Euler Parametreleri cinsinden,

$$\vec{r}' = \vec{r}(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2\vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{r}) + 2(\vec{r} \times \vec{e})e_0 \quad (3.38)$$

şeklinde ifade edilir.

İki kartezyen koordinat sisteminin birbirlerine göre yönelimini temsil etmede kullanılan yollardan birisi olan Cayley-Klein parametreleri geçen bölümde incelenmişti. Bu parametrelerden α ile β reel ve imajiner bileşenler cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha &= e_0 + i e_3 \\ \beta &= e_2 + i e_1 \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlanırsa (3.9)'da verilen dönme dönüşüm matrisi Euler parametreleri cinsinden;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1 e_2 + e_0 e_3) & 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) \\ 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2 e_3 + e_0 e_1) \\ 2(e_1 e_3 + e_0 e_2) & 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

olacaktır. (3.31) eşitliğinde Cayley-Klein parametreleri Euler açıları cinsinden verilmişti. (3.39)'da verilen tanım (3.31) eşitliğinde kullanılarak Euler parametreleri Euler açıları cinsinden;

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\theta + \psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ e_1 &= \sin \frac{\theta - \psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ e_2 &= \cos \frac{\theta - \psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ e_3 &= \sin \frac{\theta + \psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir.

Euler Parametreleri biri skaler üçü vektörel olmak üzere dört bileşen içermelerinden dolayı bir kuaternion olarak ele alınabilirler.

$$e = e_0 + \vec{e} = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} = e_0 + e_1 \hat{i} + e_2 \hat{j} + e_3 \hat{k} \quad (3.42)$$

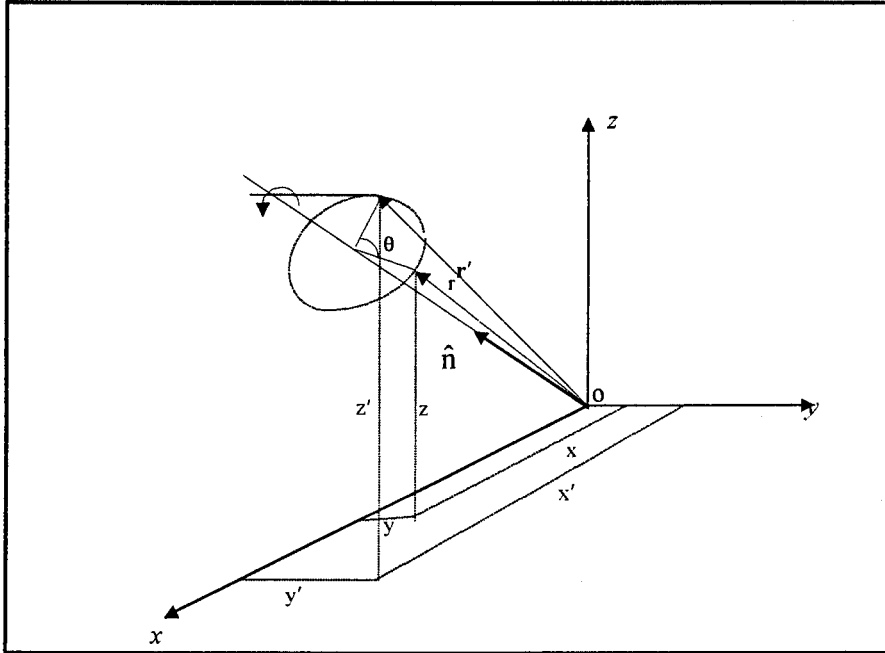
Diğer taraftan,

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

olması nedeniyle e kuaterniyonu birim kuaterniondur (Goldstein [5]).

3.4 Kuaternionlarla Dönme Hareketinin İncelenmesi

Şekil 3.3'de verilen \vec{r} yer vektörü \hat{n} birim vektörü çevresinde θ açısı kadar döndürülerek \vec{r}' vektörü elde ediliyor.



Şekil 3.3 Dönme hareketi

$\vec{r}(x,y,z)$ yer vektörü;

$$\mathbf{r} = [0, x, y, z] \quad (3.43)$$

kuaternionuyla ve $\vec{r}'(x', y', z')$ vektörü de

$$\mathbf{r}' = [0, x', y', z'] \quad (3.44)$$

kuaternionuyla temsil edilmek üzere \vec{r} ve \vec{r}' arasındaki dönüşüm bağıntısı;

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e} \mathbf{r} \mathbf{e}^* \quad (3.45)$$

ile verilir (Tanışlı ve Özdaş vd. [10]). (3.45) eşitliği daha açık bir formda yazılırsa;

$$[0, x', y', z'] = \left[\cos \frac{\theta}{2}, \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \right] [0, x, y, z] \left[\cos \frac{\theta}{2}, -\hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.46)$$

olmalıdır. Bu dönüşüm sonucu elde edilen nicelik yine bir kuaterniondur.

Kuaternion dönüşümlerini matris formunda da ifade etmek mümkündür. (3.43) eşitliğiyle tanımlanan ve 3-Boyutlu uzaydaki yer vektörüne karşı gelen vektör kuaternion yerine, \mathbf{r} kuaternionu;

$$\mathbf{r} = r_0 + r_1 \hat{\mathbf{i}} + r_2 \hat{\mathbf{j}} + r_3 \hat{\mathbf{k}} = [r_0, r_1, r_2, r_3] \quad (3.47)$$

şeklinde tanımlansın. 4-boyutlu uzaydaki dönme-dönüşüm bağıntısı (3.45) ifadesiyle verilen 3-boyutlu uzaydaki dönme-dönüşüm bağıntısı ile aynıdır ve bağıntı matris formunda;

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} + & - \\ \mathbf{E} & \mathbf{E}^T \end{pmatrix} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} - & + \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{R} \quad (3.48)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\mathbf{D}^+ = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & (\mathbf{e}_0 \mathbf{U} + \mathbf{e}^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

ve

$$\mathbf{D}^- = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & (\mathbf{e}_0 \mathbf{U} - \mathbf{e}^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 & -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_0 & -\mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

olmak üzere (3.48) dönüşümünü;

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^+ \mathbf{D}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.51)$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür. Burada \mathbf{A} matrisi (3.48) eşitliğinden yararlanılarak;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + & - \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & + \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

ile verilir ve 4-boyutlu uzayda kuaternion dönüşümüne karşı gelen 4x4 matristir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_0^2 + \mathbf{e}_1^2 - \mathbf{e}_2^2 - \mathbf{e}_3^2 & 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3) & 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2) \\ 0 & 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3) & \mathbf{e}_0^2 - \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2^2 - \mathbf{e}_3^2 & 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1) \\ 0 & 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2) & 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1) & \mathbf{e}_0^2 - \mathbf{e}_1^2 - \mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

(3.51)'de verilen dönüşüm ortogonal olduğundan, r ve r' kuaternionlarının normları eşittir. Diğer bir deyişle bu dönüşüm sonucu temsil ettikleri niceliklerin büyüklükleri aynı kalır. (3.51) eşitliğinden çıkartılabilecek bir başka sonuç; dönüşüm sonucu r kuaternionunun skaler kısmı değişmediği ve vektörel kısmının ise \hat{n} birim vektörü çevresinde θ açısı kadar döndürüldüğüdür (Chou [13]).

(3.40) ifadesinde verilen ve 3-Boyutlu uzaydaki dönme-dönüşüm matrisini de

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \begin{matrix} +\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T \end{matrix} \mathbf{D} = (\mathbf{e}_0^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e})\mathbf{U} + 2(\mathbf{e} \mathbf{e}^T + \mathbf{e}_0 \tilde{\mathbf{e}}) \quad (3.54)$$

şeklinde tanımlamak mümkündür (Walker and Shao et al. [17]).

Örnek:

$\vec{r} = 5\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$ vektörünün \hat{i} birim vektörü etrafında 60° döndürülmesiyle elde edilecek \vec{r}' vektörü ne olur?

Çözüm:

\vec{r} vektörü $r = [0, 5, 7, 2]$ şeklinde bir vektör kuaternion olarak temsil edilebilir. e kuaternionu ise

$$\begin{aligned} e &= \cos \frac{\theta}{2} + \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \cos 30 + \hat{i} \sin 30 \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right] \end{aligned}$$

olup r' kuaternionu

$$\begin{aligned} r' &= ere^* \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right] [0, 5, 7, 2] \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \right] \\ &= \left[0, \frac{5}{2}, \frac{5 - \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + 7\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= [0, 2.5, 1.6, 7.1] \end{aligned}$$

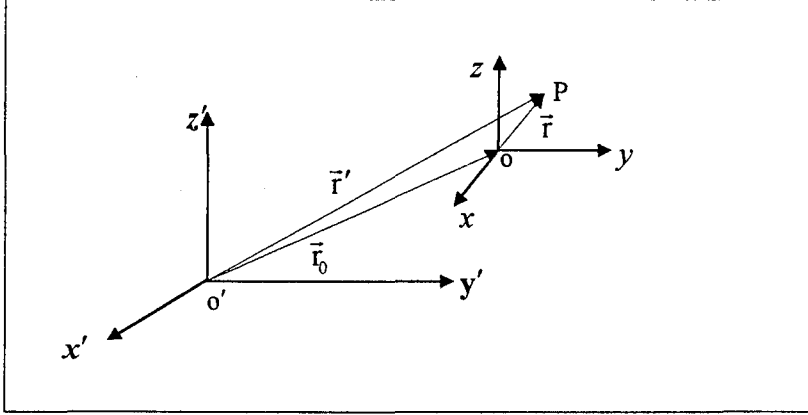
şeklinde yine bir vektör kuaternionudur. Yukarıdaki eşitliğe göre \vec{r}' vektörü;

$$\vec{r}' = 2,5 \hat{i} + 1,6 \hat{j} + 7,1 \hat{k}$$

olacaktır.

3.5 Kuaternionlarla Öteleme Hareketinin İncelenmesi

Kuaternionlar öteleme hareketi yapılan koordinat sistemlerine uygulanabilirler. P noktasının O orijinli xyz -koordinat sistemine göre yervektörü \vec{r} olsun. Şekil 3.4'de görüldüğü gibi xyz -koordinat sistemi O' orijinli $x'y'z'$ -koordinat sistemine göre \vec{r}_0 vektörü kadar öteleniyor.



Şekil 3.4 Öteleme hareketi

P noktasının $x'y'z'$ -koordinat sistemine göre yervektörü \vec{r}' olduğuna göre, \vec{r} ve \vec{r}' arasındaki ilişki;

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (3.55)$$

olmalıdır.

(3.55) bağıntısı kuaternion formunda;

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r} \quad (3.56)$$

ile verilir ve

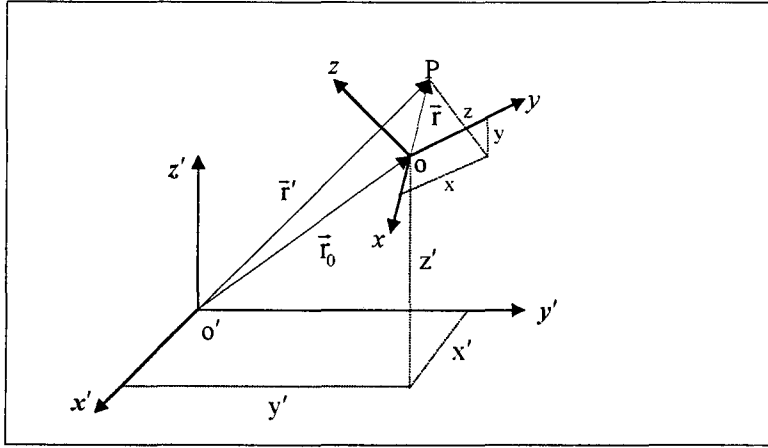
$$\begin{aligned} [0, x', y', z'] &= [0, x_0, y_0, z_0] + [0, x, y, z] \\ &= [0, x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z] \end{aligned} \quad (3.57)$$

şeklinde ifade edilir (Tan and Balchen [14]). Öteleme hareketini matris formunda da temsil etmek mümkündür ve dönüşüm bağıntısı;

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

ile verilir (Özdaş [1]).

3.6 Kuaternionlarla Dönme+Öteleme Hareketinin İncelenmesi



Şekil 3.5 Dönme+Öteleme hareketi

Dönme+Öteleme hareketi dönme ve öteleme hareketinin kombinasyonudur. Şekil 3.5' de görüldüğü gibi O orijinli xyz -koordinat sistemi O' orijinli $x'y'z'$ koordinat sistemine göre \vec{r}_0 vektörü kadar ötelenirken aynı zamanda \hat{n} birim vektörü etrafında θ açısı kadar dönüyor olsun.

P noktasının $x'y'z'$ koordinat sistemine göre yervektörü \vec{r}' olduğuna göre, \vec{r} ve \vec{r}' arasındaki ilişki;

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{r} \quad (3.59)$$

olmalıdır. Bu eşitlik kuaternion formunda, her bir harekete ilişkin bağıntıların ayrı ayrı yazılmasıyla ifade edilir:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{ere}^* \quad (3.60)$$

Yukarıdaki eşitlikteki ilk terim öteleme hareketine karşı gelirken ikinci terim ise dönme hareketini tanımlar. (3.60) ifadesi daha açık bir formda;

$$[0, x', y', z'] = [0, x_0, y_0, z_0] + \left[\cos \frac{\theta}{2}, \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \right] [0, x, y, z] \left[\cos \frac{\theta}{2}, -\hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.61)$$

ile verilir (Özdaş [1]). (3.61) ifadesinde dikkat edilecek bir nokta ifadenin basitliğidir. (3.48) ile (3.54) arasında kalan matris ifadeleri ne kadar karışık ve iç karartıcı iken, kuaternion yaklaşımının kullanıldığı ifadeler o kadar açık, kısa ve anlaşılırdır.

Örnek:

Bir parçacığın xyz -koordinat sistemindeki $\vec{r} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$ yervektörü z -ekseni etrafında 90° döndürüldüğü anda bu xyz -koordinat sisteminin O' orijinine göre yervektörü $\vec{r}_0 = 4\hat{i} + 7\hat{j} + \hat{k}$ ise bu parçacığın $x'y'z'$ -koordinat sistemine göre yervektörü ne olur?

Çözüm:

\vec{r} ve \vec{r}' yervektörlerini;

$$\mathbf{r} = [0, 3, 6, 2]$$

$$\mathbf{r}_0 = [0, 4, 7, 1]$$

şeklinde birer vektör kuaternionla temsil edelim. e birim kuaternionu ise;

$$\begin{aligned} e &= \cos \frac{\theta}{2} + \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} = \cos 45 + \hat{k} \sin 45 \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \end{aligned}$$

olacaktır. Buna göre (3.60) dönüşüm bağıntısından;

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_0 + e \mathbf{r} e^* \\ &= [0, 4, 7, 1] + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] [0, 3, 6, 2] \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= [0, 4, 7, 1] + [0, -6, 3, 2] \\ &= [0, -2, 10, 3] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıya göre aranan \vec{r}' vektörü, $\vec{r}' = -2\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}$ olacaktır.

4. KUATERNİONLARIN FİZİKSEL UYGULAMALARI

3. bölümde kuaternionların dönme ve öteleme hareketlerine ilişkin bağıntıları incelenmişti. Bu bölümde bunlara ek olarak kuaternionların fizikteki diğer uygulamaları üzerinde durulacaktır.

4.1 Eylemsiz Referans Sisteminde Newton'un II. Kanunu

Kartezyen koordinat sisteminde bir parçacığın konumu zamanın fonksiyonu olarak

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (4.1)$$

vektörü ile belirlenir. \vec{r} konum vektörü kuaternion formunda;

$$\mathbf{r} = [0, x(t), y(t), z(t)] \quad (4.2)$$

ile verilir. Hız ifadesini bulmak için

$$\mathbf{d}_t = \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] \quad (4.3)$$

ile tanımlanan türev operatörü kullanılır.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] [0, x(t), y(t), z(t)] \\ &= \left[0, \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

İvme ifadesini bulmak için ise \mathbf{r} kuaternionunu iki kez türev operatörü ile çarpmak gerekecektir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] [0, x(t), y(t), z(t)] \\ &= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] \left[0, \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right] \\ &= \left[0, \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Örnek:

Bir maddesel noktanın hareketi $x = (t+1)^2$ ve $y = (t+1)^{-2}$ denklemleriyle veriliyor. x ve y metre, t ise saniye cinsinden ölçüldüğüne göre $t = 2$ s anında maddesel noktanın konumunu, hızını ve ivmesini hesaplayınız.

Çözüm:

Maddesel noktanın konumu (4.2) eşitliğinden kuaternion formunda;

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [0, x(t), y(t), z(t)] \\ &= [0, (t+1)^2, (t+1)^{-2}, 0] \end{aligned}$$

ile verilecektir. $t = 2$ s anındaki konumu ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [0, (2+1)^2, (2+1)^{-2}, 0] \\ &= [0, 9, \frac{1}{9}, 0] \end{aligned}$$

olacaktır. Maddesel noktanın hızı eşitlik (4.4)'den;

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [0, \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}] \\ &= [0, 2(t+1), -2(t+1)^{-3}, 0] \end{aligned}$$

olup, $t = 2$ s anında hızı,

$$\mathbf{v} = [0, 6, -\frac{2}{27}, 0]$$

dir. Maddesel noktanın ivmesi eşitlik (4.5) gereğince;

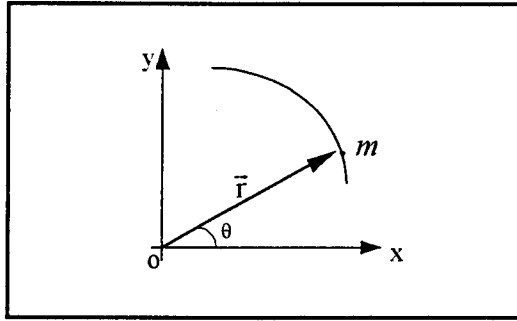
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [0, \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}] \\ &= [0, 2, 6(t+1)^{-4}, 0] \end{aligned}$$

bulunur. $t = 2$ s anında sahip olduğu ivme ise,

$$\mathbf{a} = [0, 2, \frac{2}{27}, 0]$$

ile verilir.

4.2 Polar koordinatlar ve Newton'un II. Kanunu



Şekil 4.1 xy düzleminde hareket

Polar koordinat sisteminde m parçacığının konumu $|\vec{r}| = \rho$ ve \vec{r} doğrultusundaki birim vektör \hat{e}_ρ , ve \vec{r} 'ye dik birim vektör \hat{e}_θ olmak üzere $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$ ile veriliyordu. Bu konum vektörü kartezyen koordinat sisteminde;

$$\vec{r} = r(t) \cos[\theta(t)] \hat{i} + r(t) \sin[\theta(t)] \hat{j} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır. \vec{r} vektörünün kuaternion formundaki ifadesi;

$$\mathbf{r} = [0, r(t) \cos[\theta(t)], r(t) \sin[\theta(t)], 0] \quad (4.7)$$

ile verilir. Hız ifadesini elde edebilmek için (4.3)'de verilen d_t türev operatörü ile \mathbf{r} kuaternionunu çarpmak gerekir:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= d_t \mathbf{r} \\ &= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] [0, r(t) \cos[\theta(t)], r(t) \sin[\theta(t)], 0] \\ &= \left[0, \frac{d}{dt} r(t) \cos[\theta(t)], \frac{d}{dt} r(t) \sin[\theta(t)], 0 \right] \\ &= \left[0, \frac{dr(t)}{dt} \cos[\theta(t)] - r(t) \sin[\theta(t)] \frac{d\theta(t)}{dt}, \right. \\ &\quad \left. \frac{dr(t)}{dt} \sin[\theta(t)] + r(t) \cos[\theta(t)] \frac{d\theta(t)}{dt}, 0 \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

İvme ifadesini bulmak için d_t türev operatörü \mathbf{r} kuaternionuna iki kez veya \mathbf{v} kuaternionuna bir kez uygulanmalıdır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= d_t d_t \mathbf{r} \\
&= d_t \mathbf{v} \\
&= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] \left[0, \frac{dr(t)}{dt} \cos[\theta(t)] - r(t) \sin[\theta(t)] \frac{d\theta(t)}{dt}, \right. \\
&\quad \left. \frac{dr(t)}{dt} \sin[\theta(t)] + r(t) \cos[\theta(t)] \frac{d\theta(t)}{dt}, 0 \right] \\
&= \left[0, -2 \sin[\theta(t)] \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} - r(t) \cos[\theta(t)] \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \cos[\theta(t)] \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r(t) \sin[\theta(t)] \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}, \right. \\
&\quad \left. 2 \cos[\theta(t)] \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} - r(t) \sin[\theta(t)] \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sin[\theta(t)] \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + r(t) \cos[\theta(t)] \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}, 0 \right] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Örnek:

Bir parçacık $r = 3\theta$ ve $\theta = 2t^3$ ile verilen eğri boyunca hareket etmektedir. r metre, t ise saniye cinsinden ölçüldüğüne göre parçacığın $\theta = 0,5$ rad anında hızını ve ivmesini bulunuz.

Çözüm:

$\theta = 2t^3$ olduğuna göre,

$$t = \sqrt[3]{\frac{\theta}{2}} = \sqrt[3]{\frac{0,5}{2}} = 0,63 \text{ s}$$

olmalıdır. r 'nin büyüklüğü ise,

$$\begin{aligned}
r &= 3\theta = 6t^3 \\
&= 6(0,63)^3 \\
&= 1,5 \text{ m}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.7) ifadesine göre parçacığın konumu,

$$\mathbf{r} = [0, 1,5 \cos(0,5), 1,5 \sin(0,5), 0],$$

(4.8) ifadesine göre parçacığın hızı,

$$\mathbf{v} = [0, 7,1, 3,6, 0]$$

ile verilir. Hızın büyüklüğü ise v kuaternionunun normunun kareköküne eşittir.

$$\begin{aligned} N_v &= vv^* \\ &= (7,1)^2 + (3,6)^2 \\ &= 63,4 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v| &= \sqrt{N_v} \\ &= 7,9 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Eşitlik (4.9) dan parçacığın ivmesi,

$$a = [0, -9,3, 46,6, 0]$$

bulunur. İvmenin büyüklüğü ise,

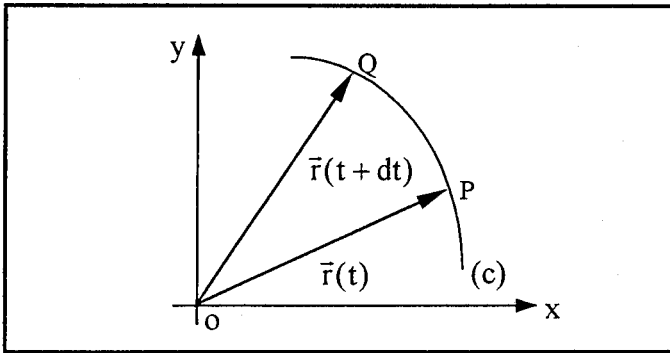
$$\begin{aligned} N_a &= aa^* \\ &= (-9,3)^2 + (46,6)^2 \\ &= 2258 \text{ m}^2 / \text{s}^4 \end{aligned}$$

$$|a| = \sqrt{N_a} = 47,5 \text{ m/s}^2$$

olmalıdır.

4.3 Doğal Koordinat Sisteminin (Serret-Frenet Üçyüzlüsü) Kuaternion Temsili

Şekil 8'de görüldüğü gibi sürekli bir (c) eğrisi üzerinde hareket eden bir parçacık ele alınsın.



Şekil 4.2 Eğri üzerinde hareket

Parçacığın \bar{r} yervektörü zamanın fonksiyonu olarak kuaternion formunda,

$$r = [0, x(t), y(t), z(t)] \quad (4.10)$$

ile verilsin. r , eğri üzerinde alınan bir başlangıçtan itibaren ölçülen (s) yay uzunluğunun fonksiyonu olarak;

$$\begin{aligned}
 v &= d_t r \\
 &= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] [0, x(s), y(s), z(s)] \\
 &= \left[0, \frac{dx(s)}{dt}, \frac{dy(s)}{dt}, \frac{dz(s)}{dt} \right] \\
 &= \left[0, \frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt}, \frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt}, \frac{dz(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde yazılabilir. $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ kuarternionu;

$$\cos \theta = \frac{q_0}{\sqrt{N_q}}$$

ve

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N_q}}$$

olmak üzere;

$$q = \sqrt{N_q} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta)$$

şeklinde yazılabileceği Bölüm 1'de belirtilmişti. Buna göre eşitlik (4.11) de verilen v kuarternionu;

$$\begin{aligned}
 N_v &= \left(\frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\cos \theta = 0 \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\sin \theta &= \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2}}{\sqrt{N_q}} \\
&= \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2}}{\frac{ds}{dt}} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olduğuna göre,

$$v = \sqrt{N_v} t \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. Burada t kuaternionu;

$$t = \left[0, \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds}\right] \tag{4.16}$$

ile verilmektedir. t ' nin normu;

$$\begin{aligned}
N_t &= \left(\frac{dx(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz(s)}{ds}\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olduğuna göre t kuaternionu birim kuaterniondur ve bundan sonra \hat{t} ile gösterilecektir. v kuaternionu parçacığın hızına karşı gelen vektörü temsil ederken, \hat{t} kuaternionu da yörüngeye teğet birim vektöre karşılık gelir.

Parçacığın P noktasındaki ivmesi ise v kuaternionuna türev operatörünün uygulanması ile elde edilir. Buna göre a , parçacığın ivme vektörüne karşı gelen kuaternion olmak üzere;

$$\begin{aligned}
a &= d_t v \\
&= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0\right] \left[0, \frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt}, \frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt}, \frac{dz(s)}{ds} \frac{ds}{dt}\right] \\
&= \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0\right] \left[\left[\frac{ds}{dt}, 0, 0, 0\right] \left[0, \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds}\right]\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left[\frac{d^2 s}{dt^2}, 0, 0, 0 \right] \left[0, \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds} \right] \\
&\quad + \left[\frac{ds}{dt}, 0, 0, 0 \right] \left[\frac{d}{dt}, 0, 0, 0 \right] \left[0, \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds} \right] \\
&= \left[\frac{d^2 s}{dt^2}, 0, 0, 0 \right] \left[0, \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{dz(s)}{ds} \right] \\
&\quad + \left[\frac{ds}{dt}, 0, 0, 0 \right] \left[0, \frac{d^2 x(s)}{ds^2}, \frac{d^2 y(s)}{ds^2}, \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \right] \left[\frac{ds}{dt}, 0, 0, 0 \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ile verilmelidir. (4.18) eşitliği yeniden düzenlenirse;

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2 s}{dt^2}, 0, 0, 0 \right] \hat{\mathbf{t}} + \left(\left[\frac{ds}{dt}, 0, 0, 0 \right] \right)^2 \left[\frac{d}{ds}, 0, 0, 0 \right] \hat{\mathbf{t}} \tag{4.19}$$

elde edilir. Öte yandan $\hat{\mathbf{t}}$ birim kuaternion olduğundan

$$\hat{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{t}}^* = 1 \tag{4.20}$$

olup (4.20) eşitliğinin yay uzunluğuna göre türevi için;

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\left[\frac{d}{ds}, 0, 0, 0 \right] \right) \hat{\mathbf{t}}^* + \hat{\mathbf{t}} \left(\left[\frac{d}{ds}, 0, 0, 0 \right] \hat{\mathbf{t}}^* \right) \\
0 &= \left[0, \frac{d^2 x(s)}{ds^2}, \frac{d^2 y(s)}{ds^2}, \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \right] \hat{\mathbf{t}}^* + \hat{\mathbf{t}} \left[0, -\frac{d^2 x(s)}{ds^2}, -\frac{d^2 y(s)}{ds^2}, -\frac{d^2 z(s)}{ds^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. $\hat{\mathbf{t}}^* = -\hat{\mathbf{t}}$ olduğundan (4.21) eşitliğine göre,

$$\left[0, \frac{d^2 x(s)}{ds^2}, \frac{d^2 y(s)}{ds^2}, \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \right] \hat{\mathbf{t}} = 0 \tag{4.22}$$

yazılabilir. Bu ifadeye göre,

$$\left[0, \frac{d^2 x(s)}{ds^2}, \frac{d^2 y(s)}{ds^2}, \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \right] \perp \hat{\mathbf{t}} \tag{4.23}$$

olmalıdır. P noktasında $\hat{\mathbf{t}}$ kuaternionuna karşı gelen vektöre dik birim vektör, $\hat{\mathbf{n}}$ birim kuaternionu ile temsil edilirse $k, R \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left[0, \frac{d^2 x(s)}{ds^2}, \frac{d^2 y(s)}{ds^2}, \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \right] = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{R} \hat{\mathbf{n}} \tag{4.24}$$

ile tanımlanmak üzere (4.19) ifadesi;

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2s}{dt^2}, 0, 0, 0 \right] \hat{\mathbf{t}} + k \left(\left[\frac{ds}{dt}, 0, 0, 0 \right] \right)^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (4.25)$$

şeklini alır. k 'ya (c) eğrisinin P noktasındaki *eğriliği*, R 'ye ise *eğrilik yarıçapı* denir.

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{n}} \quad (4.26)$$

olmak üzere,

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\tau} \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} + \frac{1}{R\tau} \hat{\mathbf{t}} \quad (4.27)$$

birim kuaternionu tanımlansın. $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ birim kuaternionları doğal olarak

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{t}} \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{b}} \quad (4.29)$$

koşullarını sağlarlar.

Örnek:

$x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ uzay eğrisinin herhangi bir noktasındaki $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ kuaternionları ile eğrilik yarıçapı ve eğriliği bulunuz.

Çözüm:

Eşitlik (4.10)'dan,

$$\mathbf{r} = [0, 3\cos t, 3\sin t, 4t]$$

şeklinde ifade edilmelidir. (4.11) ve (4.15)'den,

$$\mathbf{v} = d_t \mathbf{r} = \sqrt{N_v} \hat{\mathbf{t}}$$

olduğuna göre;

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{r} &= \left[0, \frac{dx(s)}{dt}, \frac{dy(s)}{dt}, \frac{dz(s)}{dt} \right] \\ &= [0, -3\sin t, 3\cos t, 4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{N_v} &= \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} \\ &= 5\end{aligned}$$

bulunur. \hat{t} birim kuaternionu,

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \frac{1}{\sqrt{N_v}} \mathbf{v} \\ &= \left[0, -\frac{3}{5} \sin t, \frac{3}{5} \cos t, \frac{4}{5}\right]\end{aligned}$$

ile verilecektir. \hat{t} nin yay uzunluğuna göre türevi

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{t}}{ds} &= \frac{d\hat{t}}{dt} \frac{1}{\sqrt{N_v}} \\ &= \frac{1}{R} \hat{n}\end{aligned}\tag{4.30}$$

ve

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\hat{t}}{dt}}{\sqrt{N \frac{dt}{dt}}} = [0, -\cos t, -\sin t, 0]$$

olmalıdır. (4.30) eşitliğinden

$$\left[0, -\frac{3}{5} \cos t, \frac{3}{5} \sin t, 0\right] = \frac{\sqrt{N_v}}{R} [0, -\cos t, -\sin t, 0]$$

yararlanılarak $R = \frac{25}{3}$ ve $k = \frac{1}{R} = \frac{3}{25}$ bulunur. \hat{b} kuaternionu ise;

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \hat{t} \hat{n} \\ &= \left[0, \frac{4}{5} \sin t, -\frac{4}{5} \cos t, \frac{3}{5}\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

4.4. Mekanikte Dönme Eksenleri

Kuaternionlar katı bir cismin dönen bir koordinat sisitemine göre kinematik bağıntılarını bulmada kullanılabilirler. Bileşenleri zamana bağlı q birim kuaternionu ele alınsın. q birim kuaternion olduğuna göre

$$qq^* = 1 \quad (4.30)$$

bağıntısını sağlar. (4.30) denkleminin zamana göre türevi alınarak,

$$\frac{dq}{dt} q^* + q \frac{dq^*}{dt} = 0 \quad (4.31)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\left(\frac{dq}{dt} q^* \right) = -q \frac{dq^*}{dt} = - \left[\frac{dq}{dt} q^* \right]^* \quad (4.32)$$

olduğundan $\frac{dq}{dt} q^*$ skaler bileşene sahip değildir. (4.30) eşitliğinden yola çıkarak;

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{dq}{dt} q^* \right) q \quad (4.33)$$

yazılabilir.

$$w \equiv 2 \frac{dq}{dt} q^* \quad (4.34)$$

şeklinde verilen vektör kuaternion olmak üzere (4.33) denklemini;

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} w q$$

ile ifade edilebilir. Buradan yola çıkarak,

$$\frac{dq^*}{dt} = \frac{1}{2} (w q)^* = -\frac{1}{2} q^* w \quad (4.35)$$

yazılabilir. w vektör kuaternion olduğundan $w^* = -w$ olduğunu hatırlayınız.

Uzayda sabit bir koordinat sistemine göre dönme miktarı q 'nın değeri tarafından belirlenen bir cisim ele alınsın ve cismin bu sabit koordinat sistemine göre koordinatları p vektör kuaternionu ile belirlensin. Cisim üzerinde yer alan bir koordinat sistemine göre cismin koordinatları;

$$p' = q * pq \quad (4.36)$$

olacaktır.

$$\frac{dp'}{dt} = 0 \quad (4.37)$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dq}{dt} * pq + q * \frac{dp}{dt} q + q * p \frac{dq}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} q * wpq + q * \frac{dp}{dt} q + \frac{1}{2} q * p w q \\ &= q * \left[-\frac{1}{2} (wp - pw) + \frac{dp}{dt} \right] q \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.37) eşitliği gereğince ve (4.38) eşitliğinden;

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} (wp - pw) \equiv \bar{\omega} \times \bar{p} \quad (4.39)$$

olmalıdır. Bu sonuca göre $\bar{\omega}$ açısal hız, w da açısal hız vektörüne karşı gelen vektör kuarternion olarak yorumlanabilir. Bu inceleme, cisim veya sabit koordinat sistemine göre konumları sabit olmayan parçacıkların hareketini tanımlamak için genişletilebilir. r ve r' kuarternionlarının vektörel kısımları cisim ve sabit koordinat sistemine göre parçacığın konumlarını belirleyen yervektörlerine karşılık gelsin. r ve r' arasında

$$r' = q * r q \quad (4.40)$$

bağıntısı mevcuttur. Yukarıdaki ifadenin zamana göre türevi alınarak;

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{dt} &= \frac{dq}{dt} * r q + q * \frac{dr}{dt} q + q * r \frac{dq}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} q * w r q + q * \frac{dr}{dt} q + \frac{1}{2} q * r w q \\ &= q * \left[-\frac{1}{2} (wr - rw) + \frac{dr}{dt} \right] q \end{aligned} \quad (4.41)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan;

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} \boldsymbol{\omega} &= (\bar{\boldsymbol{\omega}}[\boldsymbol{r}_0 + \bar{\boldsymbol{r}}]) - ([\boldsymbol{r}_0 + \bar{\boldsymbol{r}}]\bar{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= \boldsymbol{r}_0 \bar{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}_0 \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\boldsymbol{r}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} \\
&= 2\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{r}}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

olduğuna gore (4.41) ifadesi;

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{q} * \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{r}} \right] \boldsymbol{q} \tag{4.43}$$

haline indirgenir. Yukarıda verilen eşitliğin bir kez daha turevi alınarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \boldsymbol{r}'}{dt^2} &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{q} * \boldsymbol{\omega} \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{r}} \right] \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} * \left[\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} - \frac{d\bar{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \bar{\boldsymbol{r}} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} \right] \boldsymbol{q} \\
&\quad + \boldsymbol{q} * \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{r}} \right] \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{q} \\
&= \boldsymbol{q} * \left[\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dt} - \frac{d\bar{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \bar{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{r}}) \right] \boldsymbol{q}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

elde edilir. Eğer eksenler biran iin st-ste gelecek şekilde seilirse $\boldsymbol{q} = 1$ olacağından (4.44) ifadesi, donen koordinat sistemleri arasındaki klasik bağıntıya indirgenir (Ward [3]).

5. DUAL KUATERNİONLAR

Bu bölümde daha önce verilen kuaternion kavramına ek olarak dual kuaternion kavramı incelenecektir. Daha sonra ise dual kuaternionların fiziksel uygulamaları üzerinde durulacaktır.

5.1. Dual Sayı

a, a' reel sayı ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere A dual sayısı;

$$\vec{A} = [\vec{a}, \vec{a}'] \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır (Veldkamp [22]). a sayısına A dual sayısının reel kısmı ve a' reel sayısına da A dual sayısının dual kısmı denir.

$[1, 0]$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilecek olup *dual birim* olarak adlandırılır.

5.2. Dual sayılar Üzerine Temel İşlemler

5.2.1. Toplama ve Çıkarma

$A = a + \varepsilon a' = [a, a']$ ve $B = b + \varepsilon b' = [b, b']$ gibi iki dual sayının toplamı ve farkı,

$$A \pm B = (a + \varepsilon a') \pm (b + \varepsilon b') = (a \pm b) + \varepsilon (a' \pm b') \quad (5.2)$$

ile verilir. Dikkat edilirse reel kısımlar kendi arasında ve dual kısımlar da kendi arasında toplama ve çıkarma işlemine tabi tutulurlar. İki dual sayının toplamı ve farkı yine bir dual sayıdır.

5.2.2. Çarpma

A ve B dual sayılarının çarpımı;

$$A \times B = (a + \varepsilon a') \times (b + \varepsilon b') = (a \times b) + \varepsilon (a \times b' + a' \times b) \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır. İki dual sayının çarpımı yine bir dual sayıdır.

5.3.3. Eşitlik

$A = a + \varepsilon a' = [a, a']$ ve $B = b + \varepsilon b' = [b, b']$ olmak üzere

$$a = b, \quad a' = b' \quad (5.4)$$

ise A dual sayısı B dual sayısına eşittir.

5.3. Dual Vektörler

\vec{a}, \vec{a}' üç boyutlu uzayın reel vektörlerini göstermek üzere \vec{A} dual vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}' \quad (5.5)$$

şeklinde iki reel vektörün kombinasyonu olarak tanımlanır ve

$$\vec{A} = [\vec{a}, \vec{a}'] \quad (5.6)$$

ile temsil edilir. Diğer taraftan $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ve $\vec{a}' = a'_1\hat{i} + a'_2\hat{j} + a'_3\hat{k}$ olmak üzere \vec{A} dual vektörünü;

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}' = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + \varepsilon (a'_1\hat{i} + a'_2\hat{j} + a'_3\hat{k}) \\ &= (a_1 + \varepsilon a'_1)\hat{i} + (a_2 + \varepsilon a'_2)\hat{j} + (a_3 + \varepsilon a'_3)\hat{k} \\ &= A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k} \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. (5.7) ifadesinde A, B, C 'nin dual sayı olduğuna dikkat ediniz. λ bir skaler olmak üzere \vec{A} dual vektörünün bu skalerle çarpımı;

$$\lambda \vec{A} = [\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}'] \quad (5.8)$$

olup elde edilen nicelik yine bir dual vektördür.

Reel ve dual bileşenleri sıfır olan dual vektöre *sıfır dual vektör* denir ve

$$\vec{0} = [\vec{0}, \vec{0}] \quad (5.9)$$

ile gösterilir (Hacısalihoglu [7]).

5.3.1 Dual Vektörlerin Skaler Çarpımı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}'$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}'$ dual vektörlerinin iç çarpımı $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ ile gösterilir ve

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}', \vec{b} + \varepsilon \vec{b}' \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}', \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}' \rangle] \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanır (Veldkamp [22]).

5.3.2 Dual Vektörlerin Vektörel Çarpımı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}'$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}'$ gibi iki dual vektörün vektörel çarpımı $\vec{A} \times \vec{B}$ ile temsil edilir ve bu çarpım;

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}', \vec{b} + \varepsilon \vec{b}') = \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon [(\vec{a} \times \vec{b}') + (\vec{a}' \times \vec{b})] \quad (5.11)$$

ile verilir (Veldkamp [22]).

5.3.3 Dual Vektör Eşitlikleri

Reel vektörler için geçerli olan eşitlikler dual vektörler için de aynen geçerlidir (Hacısalihoglu [7]):

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{B} \times \vec{C}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{C} \times \vec{A}, \vec{B} \rangle \quad (5.12)$$

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \times \vec{C} \rangle \quad (5.13)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (5.14)$$

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \langle \vec{B}, \vec{D} \rangle - \langle \vec{A}, \vec{D} \rangle \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \quad (5.15)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \vec{B} - \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \vec{C} \quad (5.16)$$

5.4 Dual Kuaternionlar

Dual vektörler iki reel vektörün kombinasyonu olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde Q dual kuaternionu;

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q_0 + q_1 \hat{i} + q_2 \hat{j} + q_3 \hat{k} \\ \mathbf{q}' &= q'_0 + q'_1 \hat{i} + q'_2 \hat{j} + q'_3 \hat{k} \end{aligned} \quad (5.17)$$

gibi iki reel kuaternionun kombinasyonu olarak;

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{q}' = [\mathbf{q}, \mathbf{q}'] \\ &= (q_0 + \varepsilon q'_0) + (q_1 + \varepsilon q'_1) \hat{i} + (q_2 + \varepsilon q'_2) \hat{j} + (q_3 + \varepsilon q'_3) \hat{k} \\ &= Q_0 + Q_1 \hat{i} + Q_2 \hat{j} + Q_3 \hat{k} \end{aligned} \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}, \mathbf{q}'] = [Q_0, Q_1, Q_2, Q_3] \quad (5.19)$$

ile temsil edilir. Q_0, Q_1, Q_2 ve Q_3 , Q dual quaternionunun dual bileşenleri olarak adlandırılırlar. Reel quaternionlarda olduğu gibi bir dual quaternion,

$$S_Q = Q_0 \quad (5.20)$$

ve

$$V_Q = Q_1 \hat{i} + Q_2 \hat{j} + Q_3 \hat{k} \quad (5.21)$$

ile tanımlanan skaler ve vektörel kısımlara ayrılarak,

$$Q = S_Q + V_Q \quad (5.22)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bir dual quaternionun skaler kısmı bir dual sayı, vektörel kısmı da bir dual vektördür (Hacısalihoglu [7]).

5.5 Dual Quaternionlar Üzerine Temel İşlemler

5.5.1 Dual Kuaternionların Eşitliği

Ele alınan herhangi P ve Q gibi iki dual kuaternionun reel ve dual kısımları karşılıklı olarak eşitse bu iki dual kuaternion eşittir.

$$S_P = S_Q \quad \text{ve} \quad V_P = V_Q \quad \Rightarrow \quad P = Q \quad (5.23)$$

5.5.2 Toplam ve Fark

İki dual quaternionun toplam veya farkı karşılıklı olarak reel ve dual kısımlarının toplamına veya farkına eşittir:

$$\begin{aligned} P \pm Q &= (S_P \pm S_Q) + (V_P \pm V_Q) \\ &= (P_0 \pm \varepsilon Q_0) + (P_1 \pm \varepsilon Q_1)\hat{i} + (P_2 \pm \varepsilon Q_2)\hat{j} + (P_3 \pm \varepsilon Q_3)\hat{k} \\ &= [P_0 \pm \varepsilon Q_0, P_1 \pm \varepsilon Q_1, P_2 \pm \varepsilon Q_2, P_3 \pm \varepsilon Q_3] \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.5.3 Çarpma

P ve Q gibi iki dual kuaternionun çarpımı;

$$PQ = (p + \varepsilon p')(q + \varepsilon q') = pq + \varepsilon(pq' + p'q) = [pq, pq' + p'q] \quad (5.25)$$

şeklinde tanımlanır. Dual kuaternion çarpımı sonucunda elde edilen nicelik yine bir dual kuaterniondur. Bununla birlikte $pq' + p'q = 0$ ise PQ çarpımı reel kuaterniona indirgenir.

Dual kuaternion çarpımı değişme özelliği göstermez, fakat dağılımlı ve bileşimlidir (Hacısalihoglu [7]):

$$P(Q + R) = PQ + PR \quad (5.26)$$

$$P(QR) = (PQ)R \quad (5.27)$$

5.5.4 Eşlenik

Dual kuaternionlarda eşlenik kavramı reel kuaternionlara benzer şekilde ifade edilir. Bir dual kuaternionun eşleniği Q^* ile gösterilir ve,

$$\begin{aligned} Q^* &= q^* + \varepsilon q'^* = [q^*, q'^*] \\ &= [Q_0, -Q_1, -Q_2, -Q_3] \end{aligned} \quad (5.28)$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan dual kuaternionlar ile dönme ve öteleme ifadelerinde sıkça kullanılacak olan dual eşlenik,

$$Q_c = q - \varepsilon q' = [q, -q'] \quad (5.29)$$

ile Q dual kuaternionunun eşleniğinin dual eşleniği ise;

$$Q_c^* = q^* - \varepsilon q'^* = [q^*, -q'^*] \quad (5.30)$$

şeklinde tanımlanır (Valasek and Stajskal [18]).

P ve Q dual kuaternion olmak üzere P ve Q 'unun toplamının eşleniği

$$\begin{aligned} (P + Q)^* &= (p + q)^* + \varepsilon(p' + q')^* \\ &= p^* + q^* + \varepsilon p'^* + \varepsilon q'^* \\ &= (p^* + \varepsilon p'^*) + (q^* + \varepsilon q'^*) \\ &= P^* + Q^* \end{aligned} \quad (5.31)$$

ile verilir. İki dual kuaternionun çarpımının eşleniği ise;

$$\begin{aligned} (PQ)^* &= (pq)^* + \varepsilon(pq' + p'q)^* \\ &= q^* p^* + \varepsilon(q'^* p^* + q^* p'^*) \\ &= (q^* + \varepsilon q'^*)(p^* + \varepsilon p'^*) \\ &= Q^* P^* \end{aligned} \quad (5.32)$$

olacaktır (Hacısalihoglu [7]). Diğer taraftan bu dual kuaternionlar için

$$(PQ)_c = P_c Q_c \quad (5.33)$$

ve

$$(PQ)_c^* = Q_c^* P_c^* \quad (5.34)$$

bağıntıları yazılabilir (Valasek and Stajskal [18]).

5.5.5. Norm

Bir Q dual kuaternionun normu N_Q ile gösterilmek üzere; aynen reel kuaternionlarda tanımlandığı gibi kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir:

$$\begin{aligned} N_Q &= QQ^* = Q^* Q \\ &= Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Bu işlem sonucunda elde edilen nicelik bir dual sayıdır. İki dual kuaternionun çarpımının normu için;

$$\begin{aligned} N_{PQ} &= (PQ)(PQ)^* \\ &= PQQ^*P^* \end{aligned} \quad (5.36)$$

ifadesi yazılabilir. $QQ^* = N_Q$ olup, N_Q ise bir dual sayıdır. Bir dual sayının bir dual kuaternionla çarpımı değişme özelliği gösterdiğinden (5.36) ifadesi yeniden düzenlenerek;

$$\begin{aligned} N_{PQ} &= PQQ^*P^* \\ &= PN_QP^* \\ &= PP^*N_Q \\ &= N_PN_Q \end{aligned} \quad (5.37)$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu [7]).

5.5.6. Birim Dual Kuaternion

Normu birim olan dual kuaterniona *birim dual kuaternion* denir. Birim dual kuaternionun reel kısmı birim ve dual kısmı sıfırdır:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (5.38)$$

5.5.7. Bir Dual Kuaternionun Tersisi

Dual kuaternionların tersi, reel kuaternionlarda tanımlanan ifadeye benzer şekilde tanımlanır ve Q^{-1} ile gösterilir. Q dual kuaternionunun tersi;

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{N_Q} = \frac{Q_0 - Q_1\hat{i} - Q_2\hat{j} - Q_3\hat{k}}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \quad (5.39)$$

ile verilir. Bu ifade reel ve dual kısımdan oluşur. Q^{-1} 'in reel kısmı;

$$\frac{q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k}}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (5.40)$$

ve dual kısmı için

$$\frac{q'_0 - q'_1\hat{i} - q'_2\hat{j} - q'_3\hat{k}}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} - \frac{2(q_0q'_0 + q_1q'_1 + q_2q'_2 + q_3q'_3)}{(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2} (q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k}) \quad (5.41)$$

ifadeleri yazılabilir. Reel kuaternionlarda olduğu gibi dual kuaternionun tersi ile kendisinin çarpımı birimdir:

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = 1 \quad (5.41)$$

(5.37) denklemini kullanılarak;

$$N_Q N_{Q^{-1}} = 1 \quad (5.42)$$

ve

$$N_{Q^{-1}} = \frac{1}{N_Q} \quad (5.43)$$

elde edilir.

5.5.8 İki Dual Kuaternionun Bölümü

Reel kuaternionlarda tanımlandığı gibi, $Q \neq 0$ olmak üzere bir P dual kuaternionunu bir Q dual kuaternionuna bölmek için P 'yi Q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat dual kuaternion çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türlüdür. Bu nedenle P 'yi Q ile iki türlü bölmek gerekir.

$$\text{Sağdan bölme: } PQ^{-1} \quad (5.44)$$

$$\text{Soldan bölme: } Q^{-1}P \quad (5.45)$$

Bölme işlemi sonucunda elde edilen nicelik yine bir dual kuaterniondur

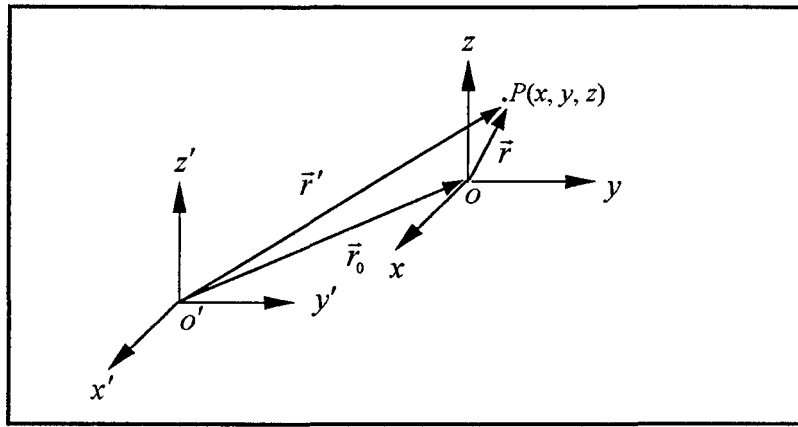
6. DUAL KUATERNİON UYGULAMALARI

6.1. Dual Kuaternionlarla Öteleme Hareketinin İncelenmesi

Üç boyutlu uzayda yer alan P noktasının O orijinli xyz koordinat sistemine göre koordinatları dual kuaternion formunda;

$$R = [I, \mathbf{r}] = [1, 0, 0, 0 ; 0, x, y, z] \quad (6.1)$$

ile verilir (Valasek and Stajskal [18]).



Şekil 6.1 Öteleme hareketi

Şekil 6.1'de gösterildiği gibi O orijinli xyz sistemi, O' orijinli $x'y'z'$ koordinat sisteminden orijinleri paralel kalacak şekilde öteleniyor. P noktasının $x'y'z'$ koordinat sistemine göre koordinatları,

$$R' = [I, \mathbf{r}'] = [1, 0, 0, 0 ; 0, x', y', z'] \quad (6.2)$$

ve O orijininin O' orijinine göre konumu;

$$R_0 = [I, \mathbf{r}_0] = [1, 0, 0, 0 ; 0, x_0, y_0, z_0] \quad (6.3)$$

dır. A dual kuaternionu;

$$A = [I, \frac{1}{2} \mathbf{r}_0] = [1, 0, 0, 0 ; 0, \frac{1}{2} x_0, \frac{1}{2} y_0, \frac{1}{2} z_0] \quad (6.4)$$

ile verilmek üzere dönüşüm bağıntısı;

$$R' = AR A_c^* = [I, \frac{1}{2} \mathbf{r}_0] [I, \mathbf{r}] [I, \frac{1}{2} \mathbf{r}_0] \quad (6.5)$$

şeklinde tanımlanır (Valasek and Stajskal [18]). (6.5) eşitliği daha açık bir formda

$$[I; 0, x', y', z'] = [I; 0, \frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}y_0, \frac{1}{2}z_0][I; x, y, z][I; 0, \frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}y_0, \frac{1}{2}z_0] \quad (6.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu dönüşüm sonucu elde edilen nicelik yine bir dual kuaterniondur.

Örnek:

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ vektörünün başlangıç noktasına göre $\vec{r}_0 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ vektörü kadar ötelenmesi ile elde edilen yeni vektörü bulunuz.

Çözüm:

(6.1) eşitliği gereğince \vec{r} vektörü dual kuaternion formunda;

$$R = [I, r] = [1, 0, 0, 0; 0, 1, 1, 1]$$

şeklinde ifade edilmelidir. (6.4) eşitliğinden A kuaternionu,

$$A = [I, \frac{1}{2}r_0] = [1, 0, 0, 0; 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}]$$

olup A dual kuaternionunun eşleniğinin dual eşleniği ise;

$$A^* = [I, \frac{1}{2}r_0] = [1, 0, 0, 0; 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}]$$

olacaktır. (6.5) eşitliğinde verilen dönüşüm bağıntısı gereğince elde edilecek yeni vektör dual kuaternion formunda;

$$\begin{aligned} [I; 0, x', y', z'] &= [I; 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}][I; 1, 1, 1][I; 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}] \\ &= [I; 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}][I; 0, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}] \\ &= [I; 0, 2, 3, 4] \end{aligned}$$

olmalıdır. Dolayısıyla \vec{r} vektörünün başlangıç noktasına göre \vec{r}_0 vektörü kadar ötelenmesi ile elde edilecek yeni vektör $\vec{r}' = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ile verilecektir.

6.1. Dual Kuaternionlarla Dönme Hareketinin İncelenmesi

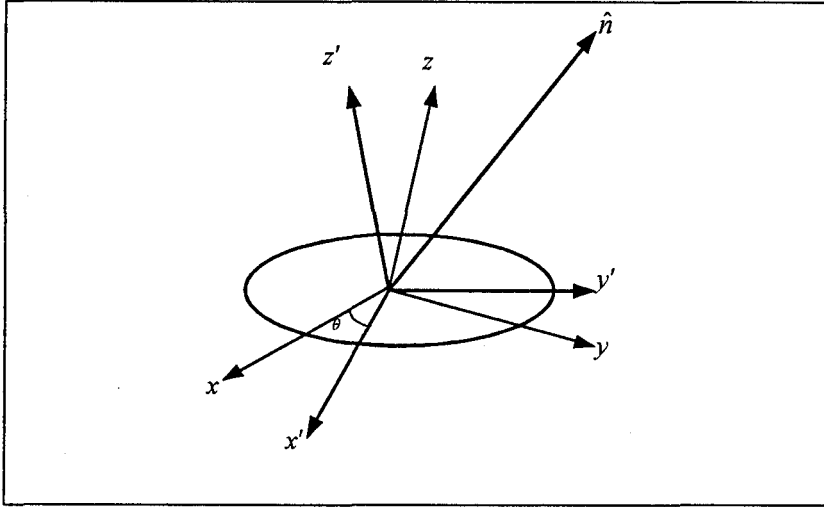
Şekil 6.2' deki xyz sistemin yer alan P(x, y, z) noktası ele alınsın. Bu noktanın koordinatları,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (6.7)$$

vektörü ile belirlenebileceğinden, bu vektöre karşı gelen dual kuaternion;

$$R = [I, \mathbf{r}] = [1, 0, 0, 0 ; 0, x, y, z] \quad (6.8)$$

ile verilecektir.



Şekil 6.2 Dönme hareketi

xyz-koordinat sistemi Şekil 6.2' de gösterildiği gibi \hat{n} birim vektörü çevresinde θ açısı kadar döndürüldüğüne göre P noktasının yeni koordinatları $\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$ vektörü ile belirleneceğinden \vec{r}' vektörüne karşı gelen dual kuaternion;

$$R' = [I, \mathbf{r}'] = [1, 0, 0, 0 ; 0, x', y', z'] \quad (6.9)$$

olmalıdır. Bu dönüşümde kullanılacak olan A dual kuaternionu;

$$A = [e, \theta] = \left[\cos \frac{\theta}{2}, \hat{n} \sin \frac{\theta}{2}; 0, 0, 0, 0 \right] \quad (6.10)$$

ile verilecek olup, reel kuaternionlardaki dönme-dönüşüm bağıntılarında tanımlandığı gibi Euler parametreleri içerir. A dual kuaternionunun eşleniğinin dual eşleniği ise;

$$A_c^* = [e^*, \theta] = \left[\cos \frac{\theta}{2}, -\hat{n} \sin \frac{\theta}{2}; 0, 0, 0, 0 \right] \quad (6.11)$$

şeklinde tanımlanacaktır. R ve R' arasındaki dönme-dönüşüm bağıntısı,

$$R' = AR A_c^* = [e, \theta] [I, \mathbf{r}] [e^*, \theta] \quad (6.12)$$

ile verilir (Valasek and Stajskal [18]). (6.12) eşitliği daha açık bir formda yazılabilir:

$$[I; 0, x', y', z'] = [\cos \frac{\theta}{2}, \hat{n} \sin \frac{\theta}{2}; \theta] [I; 0, x, y, z] [\cos \frac{\theta}{2}, -\hat{n} \sin \frac{\theta}{2}; \theta] \quad (6.13)$$

Bu dönüşüm sonucu elde edilen niceliğin yine bir dual kuaternion olduğuna dikkat ediniz.

Örnek:

$\vec{r} = 7\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ vektörünün \hat{k} birim vektörü etrafında 90° döndürülmesiyle elde edilecek \vec{r}' vektörünü bulunuz.

Çözüm:

(6.8) eşitliği gereğince \vec{r} vektörü dual kuaternion formunda;

$$R = [I, \mathbf{r}] = [1, 0, 0, 0; 0, 7, 2, 5]$$

şeklinde ifade edilecek olup dönme-dönüşüm bağıntısında kullanılacak olan A dual kuaternionu ve A 'nın eşleniğinin dual eşleniği;

$$A = [e, \theta] = [\cos \frac{90}{2}, 0, \sin \frac{90}{2}; 0, 0, 0, 0] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}; 0, 0, 0, 0]$$

$$A_c^* = [e, \theta] = [\cos \frac{90}{2}, 0, -\sin \frac{90}{2}; 0, 0, 0, 0] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0, 0, 0, 0]$$

olacaktır. (6.13) denkleminle tanımlanan dönme-dönüşüm bağıntısından yararlanarak;

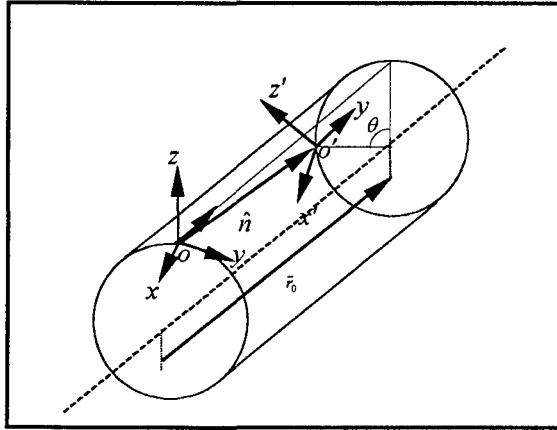
$$\begin{aligned} [0, x', y', z'; \theta] &= [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}; \theta] [I; 0, 7, 2, 5] [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}; \theta] \\ &= [I; 0, -2, 7, 5] \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki sonuca göre \vec{r} vektörünün \hat{k} birim vektörü çevresinde 90° döndürülmesiyle elde edilecek \vec{r}' vektörü, $\vec{r}' = -2\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$ olmalıdır.

6.3. Dual Kuaternionlarla Dönme+Öteleme Hareketinin İncelenmesi

6.1 ve 6.2'de dual kuaternionlarla dönme ve öteleme hareketine ilişkin bağıntılar incelenmişti. Bu bölümde ise bu iki hareketin bileşimi olan dönme+öteleme hareketi incelenecektir. Temel olarak dönme ile ötelemeye ilişkin denklemler yine aynı kalacaktır. Fakat dönme+öteleme hareketi sözü edilen hareketlerin kombinasyonu olduğundan elde edilen denklem de her bir harekete karşı gelen denklemlerin kombinasyonudur.

Şekil 6.3'de görüldüğü gibi O orijinli xyz -koordinat sistemi O' orijinli $x'y'z'$ koordinat sistemine göre \vec{r}_0 vektörü kadar ötelenirken aynı zamanda \hat{n} birim vektörü etrafında θ açısı kadar dönüyor olsun.



Şekil 6.3 Dönme+Öteleme hareketi

Bu bileşke harekete ilişkin eşitlik, her bir harekete ilişkin bağıntıların ayrı ayrı yazılmasıyla elde edilebilir. $A_1 = [e, \theta]$ ve $A_{1c} = [e^*, \theta]$ olmak üzere dönme-dönüşüm bağıntısı;

$$R' = A_1 R' A_{1c}^* \quad (6.14)$$

ve $A_2 = [I, \frac{1}{2} r_0]$ ve $A_{2c}^* = [I, \frac{1}{2} r_0]$ olmak üzere öteleme hareketine ilişkin bağıntı;

$$R'' = A_2 R' A_{2c}^* \quad (6.15)$$

ile verilir. Bu iki hareketin kombinasyonu olan dönme+öteleme hareketi ise;

$$R'' = A_2 A_1 R' A_{1c}^* A_{2c}^* \quad (6.16)$$

bağıntısı ile temsil edilecektir (Valasek and Stajskal [18]). Bu eşitlik daha açık bir formda;

$$\begin{aligned} R'' &= [I, \frac{1}{2} r_0] [e, \theta] [I, r] [e^*, \theta] [I, -\frac{1}{2} r_0^*] \\ &= [e, \frac{1}{2} r_0 e] [I, r] [e^*, -\frac{1}{2} e^* r_0^*] \\ &= [e, \frac{1}{2} r_0 e] [I, r] [e^*, -\frac{1}{2} (r_0 e)^*] \end{aligned} \quad (6.17)$$

şeklinde yazılabilir.

$$C = [e, \frac{1}{2} r_0 e] \quad (6.18)$$

ile tanımlanmak üzere bu bileşke hareket, dönme ve öteleme hareketine ilişkin bağıntılara benzer şekilde ifade edilebilir;

$$R'' = C R C_c^* \quad (6.19)$$

ile verilecektir. Dönme+öteleme hareketine ilişkin dönüşüm sonucu elde edilen nicelik yine bir dual kuaterniondur.

Örnek:

$\vec{r} = 7\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ vektörünün \hat{k} birim vektörü etrafında 90° döndürülüp, başlangıç noktasına göre $\vec{r}_0 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ vektörü kadar ötelenmesi ile elde edilecek \vec{r}' vektörünü bulunuz.

Çözüm:

\vec{r} vektörü dual kuaternion formunda;

$$R = [1, r] = [1, 0, 0, 0; 0, 7, 2, 5]$$

ile temsil edilecektir. (6.71) bağıntısı kullanılarak;

$$\begin{aligned} R'' &= [I; 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}] [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}; \theta] [I; 0, 7, 2, 5] [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}; \theta] [I; 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ &= [I; 0, -1, 8, 6] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukardaki sonuca göre dönme+öteleme sonucu elde edilen \vec{r}' vektörü

$$\vec{r}' = -\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$$

olmalıdır.

6.4. Dual Kuaternionların Denge Problemlerine Uygulanması

Klasik mekanikte bir cismin dengede olabilmesi için iki şart öne sürülür. Cismin kütle merkezinin ivmesi ile açısal ivmesi sıfır olmalıdır. \vec{F} cisim üzerine etkiyen dış kuvvetlerin toplamını göstermek üzere cismin öteleme hareketine ilişkin hareket denklemi Newton'un II. kanuna göre,

$$\vec{F} = m\vec{a}_{km}$$

olmalıdır. Denge şartı gereğince $\vec{a}_{km} = 0$ olduğuna göre,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (6.20)$$

olmalıdır. (6.20) denkleminde göre \vec{F} kuvvetini oluşturan kuvvetlerin bileşenlerinin toplamının da sıfır olması gereklidir:

$$\sum F_x = 0 \quad (6.21)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (6.22)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (6.23)$$

Dengenin ikinci şartı gereğince açısal ivme sıfır olmalı idi. Bu nedenle cismin dönme hareketini tanımlayan;

$$\vec{\tau} = I\alpha \quad (6.24)$$

denkleminde cisim üzerine etkiyen toplam torkun sıfır olması gerekir:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots + \vec{\tau}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = 0 \quad (6.25)$$

Bu şart aynı zamanda toplam torku oluşturan torkların bileşenlerinin de sıfır olmasını gerektirir (Özdaş ve Yörükoğulları [6]):

$$\sum \tau_x = 0 \quad (6.26)$$

$$\sum \tau_y = 0 \quad (6.27)$$

$$\sum \tau_z = 0 \quad (6.28)$$

Bir Q dual kuaternionu q, q' gibi iki reel kuaterniondan oluştuğu ve $Q = [q, q']$ şeklinde temsil edildiği Bölüm 4'de belirtilmişti. Bu tanım denge

probleminin çözümünde ve ifade edilmişinde kolaylık sağlayabilir. Yapılması gereken şey cisim üzerine etkiyen kuvvetlerin herbirini ve bunların cisim üzerinde oluşturduğu torku dual kuaternionun q, q' bileşenleri olarak ifade etmektir.

Cisim üzerine $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_n$ kuvvetleri etkidiği ve bu kuvvetlerin cisim üzerinde $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3 \dots \vec{\tau}_n$ torkları oluşturduğu düşünölsün. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \dots \vec{r}_n$ vektörleri herbir kuvvetin tork alınan noktaya göre konumunu belirtmek üzere $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_n$ dual kuaternionları,

$$Q_1 = \vec{F}_1 + \varepsilon \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{F}_1 + \varepsilon \vec{\tau}_1 = [F_1; \tau_1] \quad (6.29)$$

$$Q_2 = \vec{F}_2 + \varepsilon \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \varepsilon \vec{\tau}_2 = [F_2; \tau_2] \quad (6.30)$$

$$Q_3 = \vec{F}_3 + \varepsilon \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{F}_3 + \varepsilon \vec{\tau}_3 = [F_3; \tau_3] \quad (6.31)$$

$$Q_n = \vec{F}_n + \varepsilon \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{F}_n + \varepsilon \vec{\tau}_n = [F_n; \tau_n] \quad (6.32)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denge koşulu gereğince cisim üzerine etkiyen kuvvet ve torkların toplamı sıfır olacağına göre, bunları belirleyen dual kuaternionların toplamı da sıfır olmalıdır:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = 0 \quad (6.33)$$

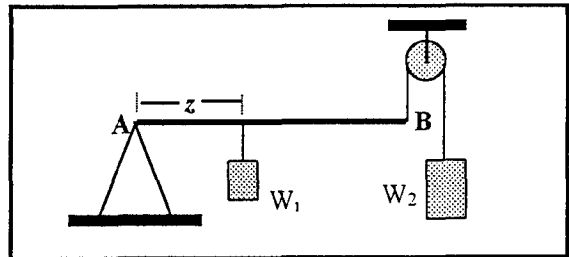
(6.33) ifadesi daha açık bir formda;

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \left[\sum_{i=1}^n F_i; \sum_{i=1}^n \tau_i \right] = [0; 0] \quad (6.34)$$

şeklinde yazılabilir. (6.34)'de verilen ifadenin (6.20) ve (6.25) eşitlikleriyle paralellik gösterdiğine dikkat ediniz.

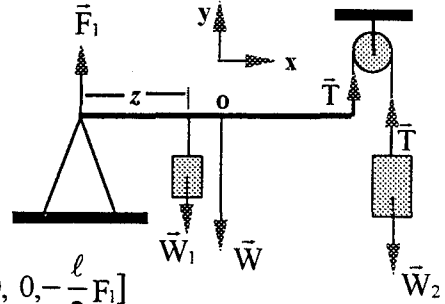
Örnek:

Şekilde görölen $\ell = 2\text{ m}$ uzunluğundaki düzgün AB çubuğunun ağırlığı 30 N , W_1 ve W_2 yüklerinin büyüklükleri sırasıyla 100 N ve 80 N 'dur. Sistemin dengede olduğu bilindiğine göre A noktasındaki düşey tepki kuvveti ile z uzaklığını bulunuz.



Çözüm:

Çubuğun orta noktası orijin olarak seçilsin. (6.32) eşitliğine göre sistem üzerine etkiyen kuvvetler ve bunların o noktasına göre oluşturdukları torklar dual kuaternion formunda;



$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= F_1 \hat{j} + \varepsilon \left(-\frac{\ell}{2} \hat{i} \times F_1 \hat{j} \right) = [0, 0, F_1, 0; 0, 0, 0, -\frac{\ell}{2} F_1] \\ &= [0, 0, F_1, 0; 0, 0, 0, -F_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 &= -W_1 \hat{j} + \varepsilon \left[-\left(\frac{\ell}{2} - z \right) \hat{i} \times (-W_1) \hat{j} \right] = [0, 0, -W_1, 0; 0, 0, 0, \left(\frac{\ell}{2} - z \right) W_1] \\ &= [0, 0, -100, 0; 0, 0, 0, (1-z)100] \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q}_3 = T \hat{j} + \varepsilon \left(\frac{\ell}{2} \hat{i} \times T \hat{j} \right) = [0, 0, T, 0; 0, 0, 0, \frac{\ell}{2} T] = [0, 0, 80, 0; 0, 0, 0, 80]$$

$$\mathcal{Q}_4 = -W \hat{j} + \varepsilon (0 \times W \hat{j}) = [0, 0, -W, 0; 0, 0, 0, 0] = [0, 0, -30, 0; 0, 0, 0, 0]$$

şeklinde ifade edilebilir. (6.34) eşitliği gereğince;

$$\sum_{i=1}^4 \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4 = [0; 0]$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4 &= [0, 0, F_1 + 80 - 100 - 30, 0; 0, 0, 0, -F_1 + (1-z)100 + 80] \\ &= [0, 0, F_1 - 50, 0; 0, 0, 0, -F_1 + (1-z)100 + 80] = [0, 0] \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin reel kısmından;

$$F_1 - 50 = 0$$

ve

$$F_1 = 50 \text{ N}$$

bulunur. Aynı eşitliğin dual kısmından;

$$-F_1 + (1-z)100 + 80 = 0$$

olacağından, F_1 'in değeri yerine konularak;

$$z = 1,3 \text{ m}$$

elde edilir.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Kuaternionlar son yıllarda artan bir hızla kullanılmaya başlanmıştır. Klasik Newton Mekaniğinden kuantum fiziğine, robotik uygulamalardan astrofiziğe kadar kendine uygulama alanı bulmuştur. Bu bulgunun başka bir kanıtı da internet ortamında bir arama motoru kullanarak *quaternion* anahtar kelimesini girdiğinizde sayıları binlerle ifade edilen web sitelerini karşınızda bulursunuz.

Bu çalışma bir anlamda kuaternionların klasik mekanikteki uygulamaları ile ilişkilendirilmiştir. Aranılan, kuaternionların klasik uygulamalarda vektör cebirine göre kolaylık sağlayıp sağlamadığıdır. Örnekler incelendiğinde vektörel ve skaler niceliklerin kuaternionlarla temsili mümkün olduğu görülmektedir. Bu temsiller klasik uygulamalarda arzu edilen ölçüde kolaylık sağlayamamaktadır. Fakat bu temsillerin vektör temsillerine göre üstünlükleri de gözden kaçmamalıdır. Örneğin vektörler üzerinde bölme işlemi tanımlı değilken kuaternionlar üzerinde bölme işlemi tanımlıdır.

Robotik uygulamalar gibi dönme ve öteleme hareketlerini içeren sahalarda kuaternion temsillerinin önemi ve faydası gözardı edilemez. Bu alanlarda kuaternionlar dışında matris temsillerini kullanmak mümkündür. İzlenecek yöntem dönme ve öteleme hareketlerine karşı gelen matrisleri yazıp bu matrisleri belli bir sıra ile çarpmaktır. Her öteleme hareketi bir matris ve her dönme hareketine yine bir matris karşı geleceğine göre bunların bileşimi olan dönme + öteleme hareketi ise iki matrisle temsil edilecektir. Fonksiyonel bir robot kolu ele alındığında kol üzerinde birden fazla eklem bulunur. Kol hareket ettirildiğinde her eklem için öteleme ve dönme hareketi yaptığı düşünülürse, bileşke hareket için çok sayıda matrisin ardı ardına çarpma ve toplama işlemine tabi tutulacağı açıktır. Sistem bir bilgisayar yardımıyla kontrol ediliyorsa, bu harekete ilişkin bilgisayar programı yeterince etkin ve hızlı tepki verebilecek kapasitede olmalıdır. Ardı sıra matris çarpımları bilgisayarın tepki hızını azaltır ve bilgisayar algoritması geliştirmeyi zorlaştırır. Sözü edilen robot eğer endüstriyel bir robotsa ve bir üretim hattında bulunuyorsa bu sonuç daha uzun sürede daha az üretim anlamına gelir. Dönme ve öteleme hareketine ilişkin kuaternion temsilleri incelendiğinde, bu temsillerin oldukça kısa ve yalın olduğu görülür. Ardı ardına kuaternionları çarpmak, ardı ardına matrisleri çarpmaktan daha kolaydır ve daha az zaman alır. Bu ise hız ve etkinlik bakımından dönme ve öteleme hareketinin kullanıldığı bütün alanlarda kolaylık sağlar.

Bölüm 5 ve 6'da dual kuaternion kavramı ele alınmıştı. Dual kuaternionlar reel kuaternionlar kadar olmasa da fiziğin çeşitli dallarında yavaş yavaş uygulama alanı bulmaya başlamıştır. Reel kuaternionların robotik uygulamalarda getirdiği kolaylıktan olsa gerek dual kuaternion uygulamalarının neredeyse tamamı robotik uygulama ağırlıklıdır.

Dual kuaternionlar, sekiz bileşenden oluşmaları nedeniyle oktonionlarla karıştırılır. Her ne kadar bu çalışmada oktonion yapılar incelenmediyse de oktonionların değişme ve birleşme özelliğini sağlamadığı bilinmektedir. Dual kuaternionlar birleşme özelliğini sağlarken değişme özelliği göstermezler. Eğer dual kuaternionlar oktonion yapılar olsaydı birleşme özelliği de göstermezdi. Dolayısıyla dual kuaternionlar oktonion yapılar olamaz.

KAYNAKLAR

1. ÖZDAŞ, K., *Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları*. Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 1995.
2. DU VAL, P., *Homographies, Quaternions and Rotations*. Oxford at the Clarendon Press, 1964.
3. WARD, J. P., *Quaternions and Cayley Numbers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1997.
4. GURLEBECK, K., WOLFGANG S., *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. John Willey and Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Tronto, 1997.
5. GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Singapore, 1980.
6. ÖZDAŞ K., YÖRÜKOĞULLARI E., *Uygulamalı Temel Fizik*. Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, İstanbul, 1990.
7. HACISALİHOĞLU, H., *Hareket Geometrisi ve Kuaternionlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 1983.
8. *Uzaysal Dönmelerin ve Robot Kollarının Pozisyonunun Kuaternion Dönüşümleri ile İncelenmesi*, TANIŞLI, M. Doktora Tezi., Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1995, 69.
9. ÖZDAŞ, K., ÖZDAŞ, A., *Fiziksel Niceliklerin Kuaternionlarla Temsili*, Fen - Edebiyat Dergisi, C:I, 2, 101 - 113, 1989.
10. TANIŞLI, M., ÖZDAŞ, A. , ÖZDAŞ, K., *An Application of General Quaternion for a Robotics Position*, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, 3, 65-68, 1997.
11. TANIŞLI, M., ÖZDAŞ, K., *Application of Quaternion Representation to Stanford Manipulator*, Balkan Physics Letters , Vol. 5, 65-68, 1997.
12. HARAUZ, G., *Representation of Rotations by Unit Quaternions*, Ultramicroscopy, 33, 209-213, 1990.
13. Chou, J.C.K., *Quaternion Kinematic and Dynamic Differentiaal Equations*, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 8, 1, 53-64, 1992.

KAYNAKLAR (DEVAM)

14. TAN, Q., BACHEN J., *General Quaternion Transformation Representation for Robotic Application*, IEEE-SMC, 1993.
15. WEHAGE, R.A., *Quaternion and Euler Parameters - A Brief Expansion*, Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics E.J. Haug ed., 147-180, 1984.
16. CHOU, J.C.K., KAMEL, M., *Finding the Position and Orientation of a Sensor on a Robot Manipulator Using Quaternions*, The International Journal of Robotics Research, 10, 3, 240-254, 1991.
17. VRBIK J., *Celestial Mechanics via Quaternions*, Canadian Journal of Physics, Vol.72, 3-4, 141-146, 1991.
18. VALASEK M., STAJSKAL V., *The Comparison of Matrix and Quaternion Approaches Towards Kinematic*, Acta Technica, Csav,1, 118-136, 1988.
19. WALKER, M.W., SHAO,L., VOLZ, R.A., *Estimating 3-D Location Parameters Using Dual Number Quaternions*, CVGIP: Image Understanding, 54, 3, 358-367, 1991.
20. SİVRİDAĞ, A.İ., GÜNEŞ, R., KELEŞ, S., *The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion-Valued Functions of a Single Real Variable*, Mech. Mach. Teory, 29, 5, 749-754, 1994.
21. PENNOCK G. R., YANG A. T., *Application of Dual-Number Matrices to the Inverse Kinematics Problem of Robot Manipulators*, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol.107, 201-208, 1985.
22. VELDKAMP G. R., *On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 11, 141-156, 1976.
23. FUNDA J., RICHARD P. P., *A Computational Analysis of Screw Transformations in Robotics*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 6, No.3, 1990.