

İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMLAR

ve

FİZİKSEL UYGULAMALARI

Ali ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

1991

İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMLAR ve FİZİKSEL UYGULAMALARI

Ali ÇETİN

Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Fizik Anabilim Dalı  
Genel Fizik Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Naci EKEM

Şubat 1991

Ali Çetin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı  
"İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMLAR ve FİZİKSEL UYGULAMALARI"  
başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili  
maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

2 ..... 1991  
...../.....

Uye : Doç. Dr. A. Fuat YÜZER

Uye : Doç. Dr. Kudret ÖZDAŞ

Uye : Y. Doç. Dr. Naci EKEM

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 20 MART 1991  
gün ve 271-8 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Rüstem KAYA

## ÖZET

Makroskopik bir sistem, atomlar yada moleküller gibi birçok mikroskopik parçacıktan oluşur. İstatistik fizik olarak bilinen bilim dalı, bir parçacıklar sisteminin makroskopik özellikleriyle, mikroskopik özellikleri arasında bağlantı kurar. Gerçekte, istatistik fizik, moleküler fizik ve klasik fizik arasında bir köprüdür. Bir sistemdeki parçacıkların hareketlerini tek tek incelemek çok zordur. Bu yüzden istatistiksel bir yaklaşım yapmak gereklidir.

İstatistik fizik Boltzmann ve Maxwell tarafından 19.yy. da geliştirilmiştir. Bu bilim dalı, bir gaz sistemi gibi klasik problemlere bir metal içindeki serbest elektronlar gibi ve bir kutudaki fotonlar gibi kuantum mekaniksel problemlere uygulanabilir. Kuantum olasılık kavramları laser fiziğinde ve yarı iletkenler fiziğinde çok önemlidir. Bir gazdaki moleküler hızları hesaplamak için klasik dağılım daha etkilidir. Çünkü gaz parçacıkları, klasik dağılıma uygun davranış gösterirler. Elektronlar ve fotonlar kuantum istatistiksel dağılımına uygun davranış gösterirler.

Bu çalışmada, istatistik fizikteki temel kavramlar açıklanmıştır ve istatistiksel olasılık dağılım fonksiyonları elde edilmiştir. Daha sonra istatistiksel yöntemlerin fiziksel sistemlere uygulamaları incelenmiştir. Sonuç olarak, istatistiksel dağılım fonksiyonları kıyaslanmıştır.

## SUMMARY

A macroscopic system consists of many microscopic particles such as atoms or molecules. The branch of science called statistical physics is related between macroscopic and microscopic properties of the particles in a system. Statistical physics, essentially, is a bridge between molecular physics and classical physics. To examine the motion of particles in a system one by one is very difficult. Therefore, a statistical approach is necessary.

Statistical physics was developed in 19th. century by Maxwell and Boltzmann. This branch of science is applicable to classical problems such as molecules in gases and to quantum mechanical problems such as free electrons in metals and as well as photons in a box. The quantum mechanical probability concepts are very important in laser and semiconductor physics. Classical probability concepts are more effective than the calculation of molecular velocities in a gas. Because, particles of a gas behaviour according to classical distribution. Electrons and photons behaviour according to quantum statistical distributions.

In this study, basic concepts were explained in statistical physics, and statistical probability distribution functions were obtained. Then, applications of statistical methods were explained for physical system. Consequently, probability distribution functions were compared in this context.

## TEŐEKKÜR

Bu alıőmayı, yüksek lisans tezi olarak veren ve bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Naci EKEM'e, çalıőmalarım sırasında bana yardımcı olan bölüm başkanımız Sayın Prof. M.S. KILIÇKAYA'ya ,tezin yazılması sırasında benden yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Ercan UÇGUN'a ve teknisyen Zlkarni DELİL'e teőekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	iii
SUMMARY .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	ix
SİMGELER DİZİNİ .....	x
1. GİRİŞ .....	1
2. BAZI TEMEL TANIMLAR .....	3
2.1. İstatistiksel Denge .....	3
2.2. Makroskopik ve Mikroskopik Durum .....	4
2.3. Kuantum Durumları .....	5
2.4. Girilebilir Durumlar .....	10
2.5. Temel Postülatlar .....	11
2.6. İstatistiksel Ağırlık .....	11
2.7. Mikrodurum Yoğunluğu .....	12
2.8. Olasılıktaki Temel Kavramlar .....	16
2.8.1. Rassal Deney .....	16
2.8.2. Olasılık Kavramı .....	16
2.8.3. Rassal Değişken Kavramı .....	18

## İÇİNDEKİLER (devam)

2.8.4.Olasılık Fonksiyonları .....	18
2.8.4.1.Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu ..	19
2.8.4.2.Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu .....	19
2.8.5.Dağılım Fonksiyonu .....	21
3. DAGILIM FONKSİYONLARI .....	23
3.1. Maxwell-Boltzmann Dağılımı .....	24
3.2. Bose-Einstein Dağılımı .....	30
3.3.Fermi-Dirac Dağılımı .....	33
4. İSTATİSTİĞİN FİZİKSEL SİSTEMLERE UYGULANMASI .....	37
4.1.İstatistiğin Gazlara Uygulanması .....	37
4.2.Foton Gazı ve Siyah Cisim Işınması .....	45
4.3.Elektron Gazı .....	50
4.4.Enerji ve Basıncın Üleşim Fonksiyonundan Elde Edilmesi .....	55
5.SONUÇ .....	57
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	59
EKLER	
EK 1.Stirling Yaklaşımının Çıkarılması	
EK 2.Gauss İntegralleri	
EK 3.Gama ve Zeta Fonksiyonları	



## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. İki uçundan sıkıştırılmış bir teldeki dalgalar .....	6
2.2. X sürekli ve $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu iken $P\{a < x \leq b\}$ olasılığı .....	20
4.1. Kapalı bir kaptaki bulunan gazdaki moleküllerin hız değerlerinin hız uzayındaki gösterilişi .....	31
4.2. Gaz moleküllerinin hız dağılım fonksiyonunun grafiki .....	32
4.3. Maxwell-Boltzmann hız dağılım eğrisinin üç ayrı sıcaklık için aldığı görünüm .....	34
4.4. Sabit bir sıcaklıkta hız dağılım eğrisi üzerindeki en olası hız ( $V_m$ ), ortalama hız ( $V$ ) ve etkin hız ( $\langle V \rangle$ ) değerleri .....	37
4.5. Maxwell hız dağılım ilkesini deneyle doğrulamak amacı ile Lambert tarafından kullanılan düzenek .....	37
4.6. Herbir kenarı L uzunluğunda iç yüzeyleri iyi yansıtıcı olan küpün kesiti .....	39
4.7. Olasılık fonksiyonunun $T=0^\circ\text{K}$ de enerjiye göre değişimi .....	45
4.8. Olasılık fonksiyonunun sıcaklıkla değişimi .....	46
4.9. Sıcaklığın artmasıyla metal içindeki serbest elektronlardan enerjisi $\epsilon_f$ Fermi enerjisinden büyük olanların sayısı giderek artacağı için Fermi-Dirac dağılım eğrisinde meydana gelen değişim .....	47

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
2.1. Sıfır spinli bir parçacıkta enerji düzeyleri .....	10
EK 2. Gauss integrallerinin birkaç değeri .....	
EK 3. $n$ nin yarıtamsayı değerleri için Gama fonksiyonlarının birkaç değeri .....	
EK 3. $s$ nin bazı değerleri için Gama fonksiyonları .....	
EK 3. $s$ nin bazı değerleri için Zeta fonksiyonları	
EK 3. $s$ nin bazı değerleri için (6) integralinin aldığı değerler .....	

## SIMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Acıklama</u>
$N$	Toplam parçacık sayısı
$\epsilon_i$	Kuantalaştırılmış durumların enerjisi
$n_i$	Kuantalaştırılmış enerji durumundaki parçacık sayısı
$E$	Toplam enerji
$H$	Hamiltonyen
$\Psi$	Dalga fonksiyonu
$p$	Momentum
$m$	Kütle
$\lambda$	Dalgaboyu
$L$	Uzunluk
$n_x, n_y, n_z$	Kuantum sayıları
$h$	Evrensel Planck sabiti
$g_n$	Çakışma sayısı
$\Omega(E)$	Mikrodurum sayısı
$\rho(E)$	Mikrodurum yoğunluğu
$\Phi(E)$	$E$ enerjisinin altında bir enerji değerine sahip mikrodurumların sayısı
$R$	Küre yarıçapı
$V$	Hacim
$g_i$	İstatistiksel ağırlık
$A$	Lagrange çarpanı
$\alpha$	Lagrange çarpanı
$\beta$	Lagrange çarpanı
$k$	Boltzmann sabiti
$T$	Sıcaklık
$l$	Yörüngesel açısal momentum sayısı
$\epsilon_f$	Fermi enerji düzeyi
$E_k$	Kinetik enerji
$P$	Basınç
$V$	Hız
$\bar{V}$	Ortalama hız
$\langle V \rangle$	Etkin hız

## SIMGELER DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$V_m$	En olası hız
$f(V)$	Hız dağılım fonksiyonu
$D_1, D_2$	Metal diskler
$\phi$	Faz açısı
$\omega$	Açısal hız
$f$	Dönme frekansı
$t$	Zaman
$\nu$	Işınım frekansı
$\mathbf{k}$	Dalganın yayılma vektörü
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Birim baz vektörler
$c$	Işık hızı
$\sigma$	Stefan-Boltzmann sabiti
$Z$	Üleşim fonksiyonu
$S$	Entropi

## 1.GİRİŞ:

Bir sistemin makroskopik özelliklerinin, sistemi oluşturan parçacıkların bireysel hareketlerine ilişkin yeni kavramların kullanılarak incelenmesi İstatistik Fiziği oluşturur. Eğer parçacıkların bireysel hareketlerine dayalı yeni kavramlar klasik fizik yasalarına göre incelenmiş ise bu kavramların kullanılmasyla türetilen istatistik fizik, Klasik İstatistik Fizik adını alır. Öte yandan kuantum mekaniksel yasalara dayalı olarak oluşturulan istatistik fiziğe de Kuantum İstatistik Fizik adı verilir.

Maddeyi oluşturan atomların ve moleküllerin davranışı ve mikroskopik özellikleri, kuantum mekanik yasalarınca, tüm ayrıntısı ile belirlenebilmektedir. Bu durumda atomların ve moleküllerin mikroskopik özelliklerini belirleyen aynı kuantum mekaniksel yasalar kullanılarak çok sayıda parçacıktan oluşan sistemlerin, makroskopik özelliklerinin de incelenebileceği beklenebilir. Bununla beraber, kuantum mekaniğinde bir tek parçacık için hareket denklemi yazıp çözüme gidilebiliyorsa da, makroskopik sistemin çok sayıda parçacıktan oluşmasının yarattığı güçlük böyle bir incelemeyi oldukça zorlaştırır.

Bunun gibi nedenler, Avagadro sayısına yakın sayıda parçacıktan oluşan çok parçacıklı bir sistemin makroskopik özelliklerinin incelenmesinin çok zor olacağını göstermektedir. Bu sorunu çözenin yolu, bir sistemin ölçülebilen makroskopik özelliklerine istatistiksel bir yapı kazandırmaktır. Yani bir sistemin herhangi bir makroskopik davranışının, o sistemi meydana getiren parçacıkların her birinin mikroskopik davranışlarının ortalamasına karşı geldiğini düşünmektir.

Bu şekilde çok sayıda parçacıktan oluşan bir sistemde ölçülebilen makroskopik özelliklerin incelenebilmesi için sisteme, kendisini oluşturan parçacıkların mikroskopik davranışlarının ayrıntılarına inmeden, olasılık kavramlarının uygulanması istatistik fizik yöntemini oluşturur.

Bu istatistiksel yöntem, çok sayıdaki atomlar ve moleküller için geçerli olduğu gibi fotonlar, katılardaki esnek dalgalar ve kuantum mekaniğindeki dalga fonksiyonları için de geçerlidir. Bundan dolayı istatistiksel yöntem, klasik termodinamik yöntemden daha üstün ve daha çok uygulama alanına sahip olan bir yöntemdir.

Makroskopik niceliklerin istatistiksel yöntemlerle incelenmesinde ele alınan kuantum durumları yerine, sistemi oluşturan parçacıkların hızlarını ele alarak yapılan inceleme Kinetik Teori adını alır. Kinetik Teori, klasik fizik yasalarını sistemin molekül sel yapısına uygulayıp, makroskopik niceliklerin büyüklüklerini bulmaya çalışır. Daha sonra da bulunan niceliklerle moleküllerin hareketleri arasında ilişki kurar.



## 2. BAZI TEMEL TANIMLAR:

### 2.1. İstatistiksel Denge:

İstatistik Fizik, çok sayıda tanecikten oluşan sistemlerin makroskopik özelliklerini, her bir taneciğin ayrıntılı hareketini gözönüne almaksızın, olasılık kavramlarını uygulamaya yönelik yöntemleri içermektedir.

Çok sayıda tanecikten oluşan bir sistemi, istatistik fizikle incelerken, her bir taneciğin kendine özgü bireysel hareketi incelenmese bile sahip olduğu dinamik hal hakkında bazı varsayımlar yapmak gereklidir. Bunun içinde taneciklerin sahip olabilecekleri farklı dinamik hallere, nasıl dağıtılabileceklerinin olasılığı gözönüne alınır. Böyle bir olasılık kavramını işin içine sokmak, sözkonusu taneciklerin hiçbir kurala uymaksızın tümüyle rastgele hareket etmekte olduklarını ifade etmek değildir. Bu yalnızca, sistemi oluşturan taneciklerin mümkün kuantum durumlarını değerlendirmeye ilişkin yöntemle ilgilidir.

Büyük bir sayıda  $N$  tane parçacıktan oluşan bir sistemi gözönüne alalım. Her bir parçacığın  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$  gibi ayrık ve kuantalaştırılmış enerji durumlarında bulunması mümkün olsun. Belirli bir  $t$  anında  $n_1$  tane parçacık  $\epsilon_1$  enerjisini,  $n_2$  tane parçacık  $\epsilon_2$  enerjisini,  $n_3$  tane parçacık  $\epsilon_3$  enerjisini içeriyorsa, toplam parçacık sayısı için

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots = \sum_i n_i \quad (2.1)$$

ve sistemin toplam enerjisi için de

$$E = n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + n_3 \epsilon_3 + \dots = \sum_i n_i \epsilon_i \quad (2.2)$$

yazabiliriz. Eş.(2.2), sistem içinde tanecikler arasında etkileşme olmadığı zaman geçerlidir. Eğer sistemi oluşturan tanecikler arasında, sistemin enerjisine katkıda bulunan bir etki-

leşme olsaydı

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i + \sum_j \epsilon_{i,j} , \quad i \neq j \quad (2.3)$$

yazmak gerekecekti.

Yalıtılmış bir sistemi gözönüne alırsak, yani dışarısıyla hiçbir ısı alışverişi bulunmuyorsa, enerjinin korunumu ilkesine göre sistemin enerjisi sabit kalır. Ancak, sistemi oluşturan parçacıkların birbirleriyle çarpışmalarından parçacıkların enerjileri değişir. Parçacıklar arasındaki çarpışmalar, bunların bir kuantum durumundan başka bir kuantum durumuna geçişlerine ve aynı kuantum durumunda bulunan parçacıkların da sayısının değişmesine neden olur. Bu durumda parçacıkların mümkün kuantum durumlarına dağıtımını da zamanla değiştirebilecektir. Bununla beraber sistemin, makroskopik fiziksel büyüklüklerle belirlenen makroskopik durumuna bir dağılım karşılık gelmelidir. Yani bir parçacık sistemi verildiğinde bunun parçacık sayısı, toplam enerjisi ve her bir parçacığın yapısı ile belirlenen en muhtemel dağılım vardır. Bu dağılımla ifade edilen sistem, dışarıdan herhangi bir etkiyle karşılaşmadığı sürece denge durumunu korur. Sistemde her bir parçacığın bu en muhtemel dağılım uyarınca, bir kuantum durumunda bulunması halinde sistemin istatistiksel dengede olduğu söylenir.

Her bir enerji düzeyinde kaç tane parçacığın bulunduğunu gösteren  $n_1, n_2, \dots$  dağıtım sayıları, en olası dağılıma karşılık gelen istatistiksel denge durumunda sahip oldukları değerler etrafında küçük sapmalar gösterebilirler. Fakat bu makroskopik ölçekte çok küçüktür. İstatistiksel dengeye etkisi dikkate alınmaz.

## 2.2. Makroskopik ve Mikroskopik Durum:

İstatistik fiziğin ele aldığı bir sistem, çok sayıda atom ya da molekülden oluştuğu için, çoğu zaman çok sayıda dinamik serbestlik derecesine sahiptir. Böyle bir sistemde, sadece sıcaklık, enerji ve basınç gibi fiziksel niceliklerin ölçülmesi



ile belirlenen duruma o sistemin makroskopik durumu adı verilir.

Diğer yandan, bu sistemi oluşturan parçacıklardan her birinin konum ve momentumunun ayrı ayrı belirlenmesi o sistemin mikroskopik durumunu oluşturur. Enerji gibi bir niceliğin belirlenmesinde sistemin mikroskopik durumlarının ayrıntılı olarak bilinmesi gerekmemektedir. Örneğin sistemin enerjisi, sistemi oluşturan parçacıkların enerjilerinin toplamı olacaktır.

Enerjiyi bulmak için, sistemin mikroskopik durumlarının bilinmesine gerek kalmadan, belli bir enerji değerine sahip olan kaç tane parçacık bulunduğunu bilmek yeterli olacaktır. Başka bir deyişle, bir sistemde parçacıkların özelliklerine bakılmaksızın her enerji durumunda kaç tane parçacık olduğunu saptamak, o sistemin makroskopik durumunu oluşturmak demektir.

### 2.3. Kuantum Durumları:

Kuantum mekaniğinde, Heisenberg belirsizlik ilkesine göre konum ve momentum aynı anda belirlenemediğinden, klasik fizik anlamını yitirir. Bu nedenle kuantum istatistik fizikte geçerli olan mikroskopik durum tanımı, tamamen kuantum mekanik ilkelerine göre yapılır.

Kuantum mekaniğine göre, bir sistemin durumu

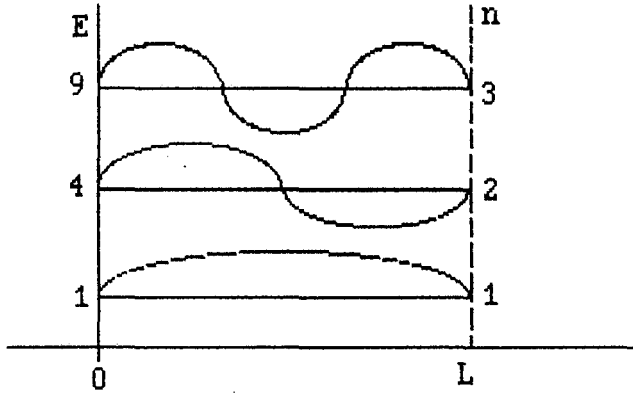
$$H \Psi_n = E_n \Psi_n ; n=1,2,\dots \quad (2.4)$$

denklemleri ile uyuşan kuantum durumlarından biridir. Burada,  $H$  sistemin enerji hamiltonyeni;  $\Psi_n$ ,  $n$  kuantum durumunu belirleyen dalga fonksiyonu ve  $E_n$  de  $n$  kuantum durumuna karşı gelen enerji değeridir. Buna göre kuantum istatistik fizikte mikroskopik durumlar,  $n$  kuantum sayısının belirlediği kuantum durumlarına karşılık gelmektedir. Kütle  $m$ , momentumu  $p$  olan bir parçacığın enerji hamiltonyeni

$$H=P^2/2m \quad (2.5)$$

dir. (Özemer, 1978). Bu parçacığın kuantum durumunu inceleyelim.

Schrödinger denklemi, iki uçundan sıkıştırılmış bir teldeki enine dalgaların yayılmasını ifade eden dalga denklemine benzer (Şekil 2.1)



Şekil 2.1. İki uçundan sıkıştırılmış bir teldeki dalgalar.

Şekle göre durgun dalgaların olası dalga boyu

$$\lambda_n = 2L/n \quad (2.6)$$

dir. Burada

$$n=1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

gibi tamsayı değerler alır ve karın noktalarının sayısını belirler.

Bir durgun dalga, ters yönlerde yayılan iki dalganın telin uç kısımlarında yansımından oluşur. Buna göre, bir serbest parçacığın bir doğru üzerinde ileri geri hareket etmesi ve uç noktalarda esnek çarpışma yapması tam olarak bir durgun dalgaya karşılık gelir. Başka bir deyişle, kuantum mekaniğinde bir parçacık demek, Schrödinger dalgası demektir. Bu durumda parçacığın momentumunu

$$P_n = h/\lambda_n$$

$$P_n = (h/2L)n \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (Erbil. 1989).

Eğer parçacık kenar uzunluğu L olan bir küp içinde hareket ediyorsa, bu harekete karşı gelen momentumun, küpün kenarlarına paralel olan bir (X,Y,Z) dik kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri

$$P_x = (h/2L)n_x \quad (2.9a)$$

$$P_y = (h/2L)n_y \quad (2.9b)$$

$$P_z = (h/2L)n_z \quad (2.9c)$$

bağıntıları ile verilebilir. Burada  $n_x, n_y, n_z$  kuantum sayılarıdır ve herbiri 1,2,3,... gibi değerler alır. Öte yandan parçacığın bileşke momentumu

$$P_n^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

$$P_n^2 = (h^2/4L^2)(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$P_n^2 = n^2(h^2/4L^2) \quad (2.10)$$

dir. Burada

$$n^2 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (2.11)$$

olarak düşünülmüştür. Buna göre parçacığın enerjisi (2.5) bağıntısına göre

$$E_n = (h^2/8mL^2)n^2 \quad (2.12)$$

olacaktır. Bu bağıntı gösteriyor ki, parçacığın enerjisi  $n^2$  ye bağlı olduğu için, momentum vektörünün doğrultusuna değil, sadece büyüklüğüne bağlıdır.

Parçacığın hareket ettiği kabın hacmi  $V=L^3$  ise,

$$E_n = (h^2/8mV^{2/3})n^2 \quad (2.13)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu bağıntı herhangi bir şekle sahip başka bir kap içinde de geçerlidir. Ancak kabın boyutları Schrödinger dalga boyundan büyük olmalıdır. Örneğin kenarları  $L_x, L_y, L_z$  olan dikdörtgen şeklindeki bir kap için,

$$E_n = (h^2/8m) \{ (n_x^2/L_x^2) + (n_y^2/L_y^2) + (n_z^2/L_z^2) \} \quad (2.14)$$

olarak yazılabilir.

Bu son bağıntıdaki  $n_x, n_y, n_z$  kuantum sayıları, enerjisi  $E_n$  olan parçacığın enerji durumlarını belirler. Buna göre  $n^2$  nin farklı değerlerine karşı gelen enerji değerleri parçacığın enerji düzeylerine karşı gelir.

Ayrıca momentum vektörü,  $n_x, n_y$  ve  $n_z$  kuantum sayılarına bağlı olduğu için, momentum vektörünün farklı doğrultuları, parçacığın farklı enerji durumlarını belirler. Bir parçacığın farklı enerji durumlarından bazıları aynı enerji değerine sahip olabilir. Yani bir enerji düzeyi birden fazla durumdan oluşabilir. Böyle enerji düzeylerine çakışık enerji düzeyleri denir. Çakışık enerji düzeyini oluşturan enerji durumlarının sayısına da çakışma sayısı denir ve  $g_n$  ile gösterilir.  $g_n=0,1,2,\dots$  gibi değerler alır.

Buna göre, bir parçacığın  $n$  inci enerji düzeyi  $g_n$ -katlı çakışık ise, bu parçacığın  $E_n$  enerji değerine karşı gelen  $g_n$  tane farklı enerji durumu vardır denir.  $g_n=1$  olan enerji düzeyine çakışık olmayan enerji düzeyi denir. Yani bu enerji düzeyi bir tek enerji durumundan oluşmuştur. Buna çoğu kez, tek-katlı enerji düzeyi de denir.

Enerji düzeylerinin çakışık olmasını daha iyi anlamak için Çizelge (2.1). deki örneği ele alalım. Örnekte, kenar uzunlukları  $L$  olan bir kap içindeki, sıfır spinli bir parçacığın enerji düzeylerinin,  $n_x, n_y, n_z$  kuantum sayılarının alacağı değerlere göre nasıl değiştiği görülmektedir. (Apaydın. 1988).

Çizelgede görüldüğü gibi parçacığın en düşük enerji düzeyi,  $n_x=n_y=n_z=1$  olan kuantum sayılarına karşı gelen taban enerji düzeyidir, ve tek katlıdır, yani çakışık değildir. Fakat parçacığın birinci uyarılmış enerji düzeyi,  $3h^2/4mL^2$  lik bir enerjiye sahiptir. Bu enerji değerine sahip olan,

$$(n_x=2, n_y=1, n_z=1)$$

$$(n_x=1, n_y=2, n_z=1)$$

$$(n_x=1, n_y=1, n_z=2)$$

gibi üç ayrı kuantum durumu vardır. Bu kuantum durumlarının herbiri bir mikroskopik duruma karşı gelir. Böylece parçacığın  $3h^2/4mL^2$  enerji değerine sahip en olası makroskopik durumu çizelgedeki mikroskopik durumlardan oluşmaktadır.

Eğer incelenen parçacık, sıfırdan farklı bir spine sahip ise enerji düzeylerinin herbiri fazladan  $(2J+1)$  katlı çakışık olabilir. Burada  $J$  parçacığın spin kuantum sayısıdır. (Ekem. 1987)

Denge durumunda bulunan bir sistemin, yapılan makroskopik gözlemler süresince değişmez olduğunu söylemek, sistemin mikroskopik özellikleri yönünden değişmez olduğunu söylemek demek değildir. Yani makroskopik özellikleri yönünden denge durumunda olan bir sistemin hangi mikroskopik durumunda bulunduğunu kesinlikle söylemek olanaksızdır. Böyle bir sistemde yapılabilecek tek şey, sistemin tüm olası durumları için bir olasılık tanımlamaktır. Bu durum bizi, istatistik fiziğin temel postülatlarına götürür

Çizelge 2.1. Sıfır Spinli Bir Parçacıkta Enerji Düzeyleri

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$E_n$	$g_n$	
1	1	1	3	1	Tek-katlı enerji düzeyi
2	1	1			
1	2	2	6	3	Üç-katlı 1. uyarılmış enerji düzeyi
1	1	2			
2	2	1			
2	1	2	9	3	Üç-katlı 2. uyarılmış enerji düzeyi
1	2	2			
3	1	1			
1	3	1	11	3	Üç-katlı 3. uyarılmış enerji düzeyi
1	1	3			
2	2	2	12	1	Tek-katlı 4. uyarılmış enerji düzeyi
3	2	1			
3	1	2			
1	3	2			
1	2	3	14	6	Altı-katlı 5. uyarılmış enerji düzeyi
2	1	3			
2	3	1			
3	2	2			
2	3	2	17	3	Üç-katlı 6. uyarılmış enerji düzeyi
2	2	3			

## 2.4. Girilebilir Durumlar:

Çizelgede yapılan incelemeden "N tane parçacıktan oluşan bir sistemde çok sayıda kuantum durumu vardır" sonucuna varı-

labilir. Sistemin, bu kuantum durumlarından hangisinde bulunduğunu söylemenin hiçbir yolu yoktur. Ancak incelenen sistem hakkında bazı bilgilerin önceden bilinmesi, kuantum durumları hakkında, daha kesin olmaya yarayabilir. Örneğin sistemin enerjisi önceden biliniyorsa, sistemin bu enerji ile uyum içinde olan kuantum durumlarının herhangi birinde bulunabileceği söylenebilir. İşte bu tür kuantum durumlarına, sistemin girilebilir kuantum durumları denir.

## 2.5. Temel Postülatlar:

Birinci Postülat: Girilebilir durumların herbirinde eşit olasılıkla bulunabilen bir sistem denge durumundadır.

İkinci Postülat: Bir sistem başlangıçta girilebilir durumların herbirinde eşit olasılıkla bulunamıyorsa, bu sistem dengede değildir. Sistem zamanla girilebilir durumların herbirinde eşit olasılıkla bulunabilir ve denge durumuna gelebilir.

Üçüncü Postülat: Eğer yalıtık bir sistem denge durumunda ise, girilebilir durumların herbirinde eşit olasılıkla bulunabilir.

## 2.6. İstatistiksel Ağırlık:

İstatistik Fiziğin ele aldığı ve denge durumunda bulunan makroskopik sistemlerin temel özelliği, sistemi oluşturan parçacıkların enerji durumlarında en olası gelişigüzel bir dağılım göstermesidir. Bir parçacıklar sisteminin en olası gelişigüzel dağılımı, o sistemin makroskopik durumunu belirler. Makroskopik durumda çok sayıda mikroskopik durumdan oluşmaktadır.

Bir sistemin herhangi bir makroskopik durumuna karşı gelen eşit olasılıklı mikroskopik durumların sayısına bu makroskopik durumun istatistiksel ağırlığı denir.

## 2.7. Mikrodurum Yoğunluğu:

Çok sayıda parçacıktan oluşan bir sistem, kuantum fiziği içinde tanımlanabilir. Bunun içinde, sistemin hamiltonyen operatörü  $H$  nin tanımlanması ve daha sonrada  $H$  özdeğerleri ve öz-fonksiyonlarının saptanması gerekmektedir.  $H$  nin özdeğerleri, sistemin alabileceği mümkün enerji düzeylerini verir. Bunların tümü bir sistemin kuantalaştırılmış enerji spektrumunu oluşturur. Mümkün enerji düzeylerinin ayırık olması, bunların sayılabilirliklerine olanak sağlar.

Kuantum fiziğinde, birkaç parçacıktan oluşan bir sistemin spektrumunun tanımladığı enerji düzeylerinin, kuantalaştırma olayını açık olarak yansıtacak şekilde ayırık olmalarına karşılık, çok sayıda parçacıktan oluşan büyük sistemlerde de enerjilerin kuantalaştırılması varolmakla beraber peşpeşe iki enerji düzeyi arasındaki fark gitgide o kadar azalır ki spektrum ayırık durumdan farklı olarak parçacık sayısı  $N$  arttıkça adeta sürekli bir spektrum durumu gösterir.

Diğer yandan Heisenberg'in belirsizlik bağıntılarına göre belirli bir enerji düzeyi ile bu düzeyi ölçmek için geçen zaman arasında

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

bağıntısı vardır. (Sproull, 1980). Bu belirsizlik bağıntısı bir sistemin özenerjilerinin kesinlikle ölçülebilmesine engel olur. Bundan dolayı, çok sayıda parçacıktan oluşan bir sistemin mümkün enerji düzeylerinin sayımını kolaylaştırmak için;  $\delta E$  makroskopik ölçeğe göre çok küçük fakat mikroskopik ölçeğe göre ise peşpeşe iki enerji düzeyi arasındaki farktan çok büyük bir enerji aralığı olmak üzere, sistemin bütün spektrumunu aynı  $\delta E$  genişliğine sahip aralıklara bölelim. Bu durumda  $\delta E$  aralığı, böyle bir sistemin mümkün enerji düzeylerinden pekçoğunu içerebilecektir.

Eğer  $E$  ile  $E + \delta E$  enerjileri arasında kalan enerji düzeylerinin sayısını, ya da başka bir deyişle sistemin mikrodurumlarının sayısını  $\Omega(E)$  ile gösterirsek,  $\delta E$  nin makroskopik yönden



çok küçük olması nedeniyle, bu sayı  $\delta E$  ile orantılı olacaktır.

$$\Omega(E) = \rho(E) \delta E \quad (2.15)$$

Bu ifadedeki  $\rho(E)$  ye mikrodurum yoğunluğu adı verilir.  $\rho(E)$ , belirli bir  $E$  enerjisi için, birim enerji başına düşen durum sayısını gösterir.

$\delta(E)$  nin çok sayıda özenerji düzeyi içermesi nedeniyle bir  $\delta(E)$  aralığından daha sonraki  $\delta(E)$  aralığına geçildiğinde,  $\Omega(E)$  çok az değişmiş olacaktır. Bu yüzden,  $\Omega(E)$  ye  $E$  enerji değişkeninin sürekli bir fonksiyonu gözüyle bakılabilir.

Şimdi eğer  $\Phi(E)$  ile  $E$  nin altında bir enerji değerine sahip mikrodurumların sayısını gösterirsek,  $E$  ile  $E + \delta E$  enerji düzeyleri arasındaki mikrodurumların sayısı olan  $\Omega(E)$  nin,  $\Phi(E)$  cinsinden

$$\Omega(E) = \Phi(E + \delta E) - \Phi(E)$$

$$\Omega(E) = (d\Phi/dE) \delta E \quad (2.16)$$

ifadesiyle verilebileceği kolaylıkla görülebilir.

Eş(2.15) ile (2.16) nın kıyaslanmasından mikrodurum yoğunluğunun

$$\rho(E) = (d\Phi/dE) \quad (2.17)$$

olduğu anlaşılmaktadır. (Özemerre, 1987).

$\Omega(E)$  yi  $\Phi(E)$  aracılığıyla iki basit örnekle elde etmeye çalışalım.

Önce  $L$  uzunluğundaki tek boyutlu bir kutuda bulunan  $m$  kütleli tek bir parçacığı gözönüne alalım. Kuantum fiziğinde, böyle basit bir sistemin mümkün enerji düzeylerinin  $n=1, 2, \dots$  olmak

üzere,

$$E=(h^2/8mL^2)n^2$$

ile verilebileceğini Eş(2.12) ile göstermiştik. Bu durumda belirli bir E enerjisi için n nin değeri,

$$n=(2L/h)(2mE)^{1/2} \quad (2.18)$$

dir. Peşpeşe gelen kuantum durumları, birbirlerinden sadece bir birim farkedilen n değerlerine karşılık geldiği için, belirli bir E enerjisinden ya da bu enerjiye karşılık gelen  $n=(2L/(2mE)^{1/2})/h$  kuantum sayısından daha alt düzeydeki bütün enerji düzeylerinin  $\Phi(E)$  sayısı, bu durumda n den ibaret olacaktır:

$$\Phi(E)=n$$

$$\Phi(E)=(2L/h)(2mE)^{1/2} \quad (2.19)$$

Buna göre, tek boyutlu bir kutuya hapsedilmiş parçacığın bir  $\delta E$  enerji aralığında kalan bütün mümkün özenerji düzeylerinin sayısı

$$\Omega(E)=(d\Phi/dE)\delta E$$

$$\Omega(E)=(L/h)(2m/E)^{1/2} \delta E \quad (2.20)$$

olacaktır.

İkinci örnekte de, her bir kenarı L ye eşit olan üç boyutlu bir küp içindeki, m kütleli parçacığın bir  $\delta E$  enerji aralığında kalan bütün mümkün özenerji düzeylerinin  $\Omega(E)$  sayısını hesaplayalım. Kuantum fiziğinden, böyle bir parçacığın sahip olabileceği enerjinin  $n_x, n_y, n_z=1, 2, \dots$  olmak üzere

$$E=(h^2/8mL^2)(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$

ile verilebileceğini Eş(2.14) ile göstermiştik. Eksenleri  $n_x, n_y, n_z$  ile gösterilen dik kartezyen koordinat sistemi sayılar uzayını oluşturur. Bu uzayda sözkonusu üç kuantum sayısının karelerinin toplamının

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = (L/h)^2 8mE = R^2 \quad (2.21)$$

olması gerektiği, yani belirli bir E değerine karşılık gelen üç kuantum sayısının

$$R = (2L/h)(2mE)^{1/2} \quad (2.22)$$

yarıçaplı bir kürenin yüzeyi üzerinde bulunacakları görülmektedir.

Buna göre enerjileri E den küçük olan durumların  $\Phi(E)$  sayısı, bu R yarıçaplı küre içinde  $n_x, n_y, n_z$  nin pozitif değerlerine karşılık gelen ve dolayısıyla hacminin (1/8) inde bulunan birim küplerin sayısına eşittir.

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= (1/8) ((4/3)(\pi R^3)) \\ \Phi(E) &= (4\pi L^3/3h^3)(2mE)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

dir. Buna göre, üç boyutlu bir kutuya hapsedilmiş bir parçacığın bir E enerji aralığında kalan bütün mümkün durumların sayısının da,  $V=L^3$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= (d\Phi/dE)\delta E \\ \Omega(E) &= ((2\pi V/h^3) (2m)^{3/2} (E)^{1/2})\delta E \end{aligned} \quad (2.24)$$

olacağı belirlenmiş olur.

## 2.8.Olasılıktaki Temel Kavramlar —

### 2.8.1.Rassal Deney

Bir sistemdeki gözlemlere dayanarak yapılan genellemelerden sonra sonuçların doğruluğunu kanıtlamak için deneyler yapılır. Deneyleme, ya bütün koşullar hazırlanıp fiziksel ortamda olayın akışı gözlenerek, ya da geliştirilen matematiksel modellerle sistemin davranışı incelenerek yapılır.

İşte gerek fiziksel ortamda, gerekse matematiksel model üzerinde bir olayın akışının gösterilme işlemine deney denir.

Fiziksel ortamın hazırlanmasına karşın, bir deneyle değişmeyen koşullar altında aynı sonucu elde etmek mümkün olmayabilir. Bu nedenle, fiziksel ortamda ya da matematiksel modellerle yapılan deneyleri de belirli ve belirli olmayan deneyler olarak sınıflayabiliriz.

En genel anlamda değişmeyen koşullar altında farklı sonuçlar veren deneylere rassal (tesadüfi) deneyler denir.

Rassal deneyleme ile açıklanabilen sistemlere rassal sistem ve bu sistemlerde karşılaşılan karar problemlerine belirsizlik ortamında karar problemi denir.

### 2.8.2.Olasılık Kavramı

Bir olayın ortaya çıkma olasılığına ilişkin değişik tanımlar yapılmıştır. Zaman içindeki gelişim sırasına göre aşağıdaki bu tanımlara değinelim.

**Kişisel Tanım:**Olabilirlik, gelecekteki bir olay için bireylerin umutlarının bir ölçüsüdür. Ortak bir dil oluşturabilmek için, bir olayın ortaya çıkma olasılığı  $P(o)$  şeklinde gösterilmiş ve ölçüye sıfır ile bir arasında bir değer verilmiştir.

Klasik Tanım: Bir rassal deney sonucu karşılaşılabılır her olayın ortaya çıkma şansı aynı olsun. Eş olasılı olaylardan oluşan böyle bir örnek uzayında, karşılaşılabılır birim sayısı  $s(S)$  ve ilgilenilen  $O_i$  olayına ilişkin birim sayısı  $s(O_i)$  ise,  $O_i$  olayının ortaya çıkma olasılığı  $P(O_i)$  şeklinde gösterilir, ve

$$P(O_i) = s(O_i)/s(S)$$

$P(O_i)$ =İlgilenilen sonuç sayısı / Karşılaşılabılır sonuç sayısı olarak tanımlanır.  $O_i \leq S$  olduğundan,  $s(O_i) \leq s(S)$  eşitsizliğine bağlı olarak;

$$P(O_i) = s(O_i) / s(S) \leq 1$$

ve

$$s(O_i) \geq 0, s(S) > 0 \text{ eşitsizliklerinden,}$$

$$P(O_i) \geq 0 \text{ ve } P(s) = 1$$

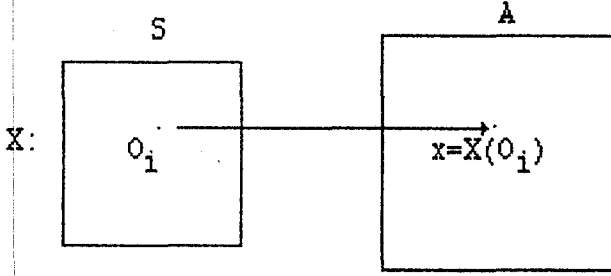
elde edilir.

Görüldüğü gibi, bu tanımda bir olayın ortaya çıkma olasılığı 0 ile 1 arasında bir değer almaktadır.

Klasik tanım, örnek uzayının sonlu sayıda birimden oluşması ve her olayın eşolasılıkla ortaya çıkması karşısında kullanılabilir. Gerçek hayatta eşolasılı olaylarla zor (nadir) karşılaşılmamasının yanında, örnek uzayındaki birim sayısı  $s(S)$  yeterince büyütüldüğünde,  $s(O_i)/s(S)$  oranının matematiksel işlemlere elverişli olmadığıda açıktır.

### 2.8.3. Rassal Değişken Kavramı

S örnek uzayının her bir basit olayını yalnız gerçekte değere dönüştüren  $X$  fonksiyonuna rassal (tesadüfi) değişken denir. Bu tanıma göre:



veya,  $X: S \rightarrow A \subset R$  olup, her basit  $O_i$  olayı için  $x = X(O_i)$  dir.

Görüldüğü gibi "rassal değişken" gerçekte bir fonksiyon olup, örnek uzayından gerçekte sayı kümesine bir dönüşüm olarak karşımıza çıkmaktadır.

Örnek uzayından gerçekte sayı kümesine tanımlanan bir fonksiyon olan rassal değişken, aldığı sayısal değerlere göre iki farklı şekilde olabilir.

$X$  rassal değişkeninin  $R$ 'deki değer kümesi olan  $A$  sayılabilir veya sayılabilir olarak sonsuz bir küme ise  $X$ 'e kesikli (süreksiz) rassal değişken denir.

$X$  rassal değişkeninin  $R$ 'deki değer kümesi  $A$ , sayılamaz bir küme ise,  $X$ 'e sürekli rassal değişken denir.

### 2.8.4. Olasılık Fonksiyonları

Örnek uzayında tanımlanabilen her olay,  $X$  rassal değişkeni cinsinden yazılabildiğine göre, ilgilenilen tüm olasılıklar  $X$ 'e bağlı bir fonksiyonun (matematiksel model) kullanımıyla kolaylıkla bulunabilecektir. Bu amaçla, rassal değişkenin özelliğinde gözönüne alınarak tanımlanan fonksiyonlar aşağıda incelenmiştir.

#### 2.8.4.1. Kesikli Rassal Değişkenin Olasılık Fonksiyonu

$X$  kesikli bir rassal değişken ve bunun değer kümesi

$$A = \{ X_i \mid i=1,2,3,\dots \}$$

olsun.  $x_i \in A$  için  $P\{X=x_i\} = p(x_i)$  ve  $x_i \notin A$  için  $p(x_i)=0$  şeklinde tanımlanan  $p(x)$ 'e  $X$ 'in olasılık fonksiyonu denir.

Görüldüğü gibi,  $X$  rassal değişkeni tanımlandıktan sonra, bunun olasılık fonksiyonu olan  $p(x)$  bulunabilirse, ilgilenilen her türlü olasılıklar, doğrudan  $p(x)$  kullanılarak bulunabilir.

#### 2.8.4.2. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Kesikli rassal değişken için tanımlanan olasılık fonksiyonu, ilgili tüm olasılıkları kolaylıkla hesaplama olanağı sağlamaktadır. Ele alınan sistem veya örnek uzayında tanımlanan rassal değişken,  $R$ 'nin belirli alt kümelerinde (aralıklarında) tüm değerleri alabilir olduğu zaman, yani  $X$  sürekli bir rassal değişken iken, benzer kolaylıkları sağlayan fonksiyona gereksinim vardır.

$X$  değer kümesi  $A$  olan sürekli bir rassal değişken iken,  $x \notin A$  için  $f(x)=0$  olmak üzere, her  $A_i=(a,b] \subset A$  için;

$$P(X \in A_i) = \int_a^b f(x) dx$$

özelliğini gerçekleyen  $f(x)$  e  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

$f(x)$  bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu ise, aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Verilen fonksiyon matematiksel olarak her  $x \in R$  için bir değer alabilir. Ancak, tanım gereği  $x \notin A$  için  $f(x)=0$  olarak ele alınacaktır.

ii) Her  $A_i \subset A$  için  $P(A_i) > 0$  olması gerektiğine göre,  $(a, b]$  aralığı yeterince küçültüldüğü zamanda;

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f(x) dx > 0$$

olabilmesi için, her  $x \in A$  için  $f(x) > 0$  gerçekleşir.

iii)  $X$  rassal değişkeni,  $S$  örnek uzayını  $A$  kümesine dönüştürdüğüne göre;

$$P(S) = P(X \in A) = \int_A f(x) dx = 1$$

olur.

iv) Her  $(a, b] \subset A$  için;

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f(x) dx$$

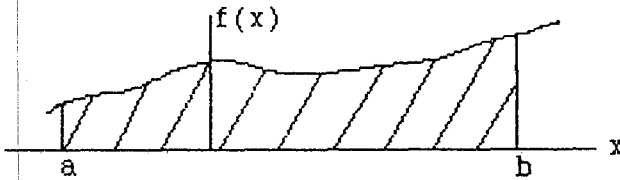
integralinin hesaplanabilir olması gerektiğine göre,  $A$  üzerinde  $f(x)$  sonlu sayıda noktalar dışında süreklidir.

$X$  rassal değişkeni için yukarıda sıralanan özellikleri sağlayan bir  $f(x)$  fonksiyonu bulunabilirse,  $X$ 'e sürekli rassal değişken ve  $f(x)$ 'e  $X$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir şeklinde tanımlamada yapılmaktadır.

$f(x)$ , bir  $X$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu iken,  $x \in (a, b]$  olasılığı,

$$P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$

şeklinde bulunabildiğine ve  $x \in A$  için  $f(x) > 0$  olduğuna göre, ilgilenen olasılık şekilde görüldüğü gibi  $f(x)$  in grafiğiyle,  $x=a$ ,  $x=b$  doğruları ve  $x$  eksenini arasında kalan alan olmaktadır.



Şekil 2.3.  $X$  sürekli ve  $f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu iken  $P\{a < x \leq b\}$  olasılığı.



Öte yandan,

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

olduğundan,  $X$  sürekli bir rassal değişken iken,  $X$ 'in verilen bir değere eşit çıkma olasılığı

$$P\{X=X_0\}=0$$

olacaktır.  $X$  rassal değişkeni sürekli iken, değer kümesi  $A$  sayılamaz bir küme olduğundan, bir anlamda bu sonuç olasılığın klasik tanımının bir gerektirmesidir. Bu nedenle,  $X$  sürekli bir rassal değişken iken,  $(a,b]$  ile ilgili olasılık,

$$P(a < b) = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < x < b\}$$

şeklinde yazılabilir.

#### 2.8.5. Dağılım Fonksiyonu

Örnek uzayı  $X$  rassal değişkeni ile gerçek değerlere dönüştürüldükten sonra,  $X$ 'e bağlı olasılık yada olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunduğunda, ilgilenilen olaylara ilişkin olasılıklar doğrudan hesaplanabilmekteydi. Ilgilenilen olasılıkları bulmanın yanında, olasılık fonksiyonu veya olasılık yoğunluk fonksiyonuyla doğrudan ilişkili ve özellikle rassal değişkenlerin fonksiyonlarının olasılıkları yada modelleriyle ilgilenildiğinde, çok yönlü kullanım alanı olan  $X$ 'in diğer bir özel fonksiyonu daha vardır.

$$X: S \rightarrow A,$$

$$A_1 = \{t \mid t \leq x\} \text{ ve } ACR \text{ iken,}$$

$$P\{X \in A_1\} = P\{X \leq x\} = F(x)$$

ilişkinine karşı gelen  $F(x)$ 'e, dağılım fonksiyonu (birikimli dağılım fonksiyonu) denir.

Tanımda görüldüğü gibi,  $X$ 'in verilen bir değere eşit veya küçük çıkma olasılığıyla ilgilenildiğinde, doğrudan  $F(x)$  fonksiyonunun verilen  $x$  için değerini hesaplama yeterlidir.  $F(x)$ ,  $x$ 'in verilen bir değerden küçük veya eşit çıkma olasılığını verdiği için,  $F(x)$ 'e birikimli dağılım fonksiyonunda denmektedir.

$X$ 'e bağlı bir fonksiyon olan  $F(x)$ ,  $x \in A$  için bulunur. Öte yandan,  $F(x)$  ilgilenilen olasılıkları verdiği için, alabileceği değerler sıfır ile bir arasındadır. Yani  $F(x)$  in, değer kümesi  $[0, 1]$  dir.

Dağılım fonksiyonu  $X$ 'in verilen bir değere eşit veya küçük çıkma olasılığını veren bir fonksiyon olduğuna göre bununla olasılık yada olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki ilişki

$$F(x) = \sum_{-\infty}^x P(t) \quad , \quad (x\text{-kesikli})$$

ve

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad , \quad (x\text{-sürekli})$$

olur.

### 3. DAĞILIM FONKSİYONLARI:

İstatistik fiziği, sabit bir toplam enerji miktarının bir özdeş parçacıklar topluluğunun çeşitli bireyleri arasında en muhtemel yolla nasıl dağıldığını belirlemek için kullanacağız. Sistem içindeki parçacıkların, topluluktaki ısı dengeyi sağlayacak kadar etkileştikleri, fakat bu etkileşmenin parçacıkların bireysel hareketlerine etkimeyecek şekilde oldukları kabul edilmiştir. Üç çeşit parçacıklar topluluğunu ele alacağız:

1) Ayırdedilebilir olması için, yeterince birbirinden ayrı, herhangi spin değerine sahip özdeş parçacıklar. Bir gazın molekülleri bu tür parçacıklardır. Böyle parçacıklar için Maxwell-Boltzmann dağılım kanunu geçerlidir.

2) Birbirinden ayırdedilemeyecek, sıfır veya tamsayı spin değerine sahip özdeş parçacıklar. Bu parçacıklar dışarlama ilkesine uymazlar. Böyle parçacıklara için Bose-Einstein dağılım kanunu geçerlidir. Bu tür parçacıklara Bose parçacıkları veya bosonlar adı verilir. Fotonlar, bosonlara örnek olarak gösterilebilir. Bir siyah cismin ışım spektrumunu açıklayabilmek için Bose-Einstein dağılım kanunu da kullanılabilir.

3) Birbirinden ayırdedilemeyecek  $1/2$  spinli özdeş parçacıklar. Bu parçacıklar dışarlama ilkesine uyarlar. Böyle parçacıklar için Fermi-Dirac dağılım kanunu geçerlidir. Bu tür parçacıklara Fermi parçacıkları veya fermiyon adı verilir. Bir metaldeki serbest elektronların davranışını açıklayabilmek için Fermi-Dirac dağılım kanunu kullanılabilir.

Şimdi üç gruba ayırdığımız bu parçacıklar için geçerli olan Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac ve Bose-Einstein istatistiklerini inceleyip, sırasıyla bu istatistiklere ilişkin dağılım fonksiyonlarını elde etmeye çalışacağız.

### 3.1. Maxwell-Boltzmann Dağılımı:

Bu istatistik yönteminde ele alınan sistemdeki parçacıklar özdeşler, fakat birbirlerinden ayırdedilebilirler. Ayrıca, aynı kuantum durumunda bulunan parçacıkların sayıları sınırlı değildir.

Bu yöntem J.C.Maxwell (1860) ve L.Boltzmann (1877) tarafından yapılan çalışmalarla, aslında kapalı bir kap içindeki gaz moleküllerinin hız dağılımlarını tayin etmek amacıyla ortaya konmuştur.

Şimdi  $\Omega$  sayısını hesaplamak üzere, önce birbirlerinden ayırdedilebilen  $N$  tane parçacığın mümkün olan düzenlemelerinin (permütasyonlarının) sayısının  $N!$  olduğunu düşünelim.

Özdeş olmakla birlikte, birbirlerinden yine de ayırdedilebilen ve bu nedenle herbirini ayrı bir rakamla gösterebileceğimiz  $N$  tane parçacıktan oluşan bir sistemdeki bütün parçacıkları; herbiri  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$  enerji düzeylerine karşılık gelmek üzere  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tane parçacıktan oluşan gruplara ayıralım.

Sistemdeki herhangi iki parçacığı yer değiştirsek, yapılan bu işlem sistemin  $N$  toplam parçacık sayısını da,  $E$  toplam enerjisini de değiştirmeyen yeni bir durum ortaya çıkarır. Ancak bu yeni durum, herbir parçacığın farklı enerji durumlarına karşılık gelmeleri halinde eskisinden farklı olur. O halde, aynı enerji düzeyine karşılık gelen bir gruptaki herhangi iki taneciği yer değiştirirsek, eskisinden farklı bir durum elde edilmiş olmaz. Bunu bir örnekle ele alalım. A,B,C,D gibi dört molekülümüz olsun.  $4!$  'in değeri,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

dür. Gerçekten de bunları düzenlemenin 24 yolu vardır.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Eğer A,B ve C molekülleri aynı düzeyde bulunuyorlarsa, bunları ABC, ACB, BCA, BAC, CAB veya CBA şeklinde düzenlememizin hiçbir önemi yoktur. Bu altı dağılım birbirine özdeştir. Çünkü parçacık sayısı  $n=3$  'dür ve bu düzeydeki enerji değişmemektedir. Buradan aynı enerji seviyesindeki parçacıkları düzenlemenin, böyle durumda önemi yoktur sonucuna varabiliriz. (Beiser. 1982).

Bu yüzden ve aynı  $i$  inci gruptaki  $n_i$  tane parçacığın kendi aralarındaki toplam  $n_i!$  tane yer değiştirmesi farklı bir durum vermeyeceğinden;  $N$  tane parçacığın mümkün bütün enerji gruplarına farklı durum oluşturacak şekilde dağıtımlarının toplam sayısı

$$N!/n_1!n_2!n_3!...$$

olacaktır.

Ancak her bir  $\epsilon_i$  enerjisine karşılık gelen grupta  $g_i$  tane kuantum durumuna ayrılmış bulunmaktadır. Buna göre aradığımız farklı durumların toplam sayısı, her  $\epsilon_i$  enerjisine karşılık gelen  $n_i$  tane parçacığın birbirlerinden farklı  $g_i$  tane kuantum durumlarına farklı dağıtımlarının sayısı ile orantılı olacaktır.

$i$  inci gruptaki  $n_i$  tane parçacığın herbirinin  $g_i$  tane kuantum durumundan birine isabet etme olasılığı  $g_i$  tanedir. Buna göre de,  $n_i$  tane parçacık için  $(g_i)^{n_i}$  tane dağılım olanağı vardır. Bu durumda toplam mikrodurum sayısının

$$\Omega' = (N!/n_1!n_2!...) g_1^{n_1} g_2^{n_2}...$$

$$\Omega' = N! \prod_i ((g_i)^{n_i} / n_i!) \quad (3.1)$$

olacağı düşünülebilir. Yalnızca farklı numaralara sahip, fakat özdeş iki parçacığın yerdeğiştirilmesiyle birbirlerinden farklı iki mikrodurumun özdeş olmaları gerekir.

Bundan dolayı Eş.(3.1) ifadesini sistemdeki bütün parçacıkların düzenlemelerini veren sayı ile bölersek aynı bir seviyeye karşılık gelen mikrodurum sayısı olarak

$$\Omega = \prod_i ((g_i)^{n_i} / n_i!) \quad (3.2)$$

bulunur.

Sistemin denge durumu önceden açıklamasını yaptığımız şekilde,  $\Omega$  farklı mikrodurum sayısının

$$N = \sum_i n_i = \text{sabit} \quad (3.3a)$$

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i = \text{sabit} \quad (3.3b)$$

şartları altında, maksimum olmasına karşılık gelir. Eş.(3.2)'yi maksimum yapan  $n_i$  değerleri aynı zamanda  $\ln \Omega$  'yı da maksimum yapan değerlerdir. Kolaylık sağlamasından dolayı  $\Omega$  'nın maksimumunu tesbit etmek yerine  $\ln \Omega$  'nın maksimumunu tesbit edelim.

$X$  çok büyük bir sayı olduğunda

$$\ln(X!) \cong X \ln X - X$$

Stirling yaklaşımı (Bkz. EK 1) kullanılabilir. Bu yaklaşımı gözönüne alarak Eş.(3.2) ifadesini ele alırsak

$$\ln \Omega = \prod_i (\ln(g_i)^{n_i} - \ln n_i!)$$

$$\ln \Omega = \sum_i n_i \ln g_i - \sum_i n_i \ln n_i + \sum_i n_i$$

$$\ln\Omega = \sum_i n_i \ln(g_i/n_i) + N \quad (3.4)$$

şeklinde ifade elde ederiz.

Bizim amacımız Eş(3.3a) ve (3.3b) şartları altında Eş(3.4) ün maksimumunu bulmaktır. Bunun için de Lagrange çarpanları yöntemini kullanacağız (Özemre.1983). Eş.(3.4), (3.3a) ve (3.3b) ifadelerinin diferansiyellerini alıp  $d(\ln\Omega) = 0$  işlemini yaparsak

$$d(\ln\Omega) = \sum_i (d(n_i \ln(g_i/n_i)) + d(N))$$

$$d(\ln\Omega) = \sum_i (\ln(g_i/n_i)) dn_i + \sum_i ((n_i^2/g_i)(-g_i/n_i^2)) dn_i$$

$$d(\ln\Omega) = \sum_i (\ln(g_i/n_i)) dn_i - d(\sum_i n_i)$$

$$d(\ln\Omega) = \sum_i (\ln(g_i/n_i)) dn_i = 0 \quad (3.5)$$

$$dN = \sum_i dn_i = 0 \quad (3.6)$$

$$dE = \sum_i \epsilon_i dn_i = 0 \quad (3.7)$$

sonuçlarına ulaşırız.

Şimdi  $A$  ve  $\beta$  iki Lagrange çarpanı olmak üzere Eş.(3.6)'yı  $\ln A$  ve Eş.(3.7)'yi de  $-\beta$  ile çarparak her üç denklemi de taraf tarafa toplarsak

$$\sum_i (\ln(g_i/n_i)) dn_i + \ln A \sum_i dn_i + (-\beta) \sum_i \epsilon_i dn_i = 0$$

$$\sum_i (\ln(g_i/n_i) + \ln A - \beta \epsilon_i) dn_i = 0 \quad (3.8)$$

olur. Bulunan ifadenin sıfıra eşit olabilmesi için  $i$  üzerinden yapılan her toplamda parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekir. Bu işlem yapıldığında

$$\ln(g_i/n_i) + \ln A - \beta \epsilon_i = 0$$

$$\ln g_i - \ln n_i + \ln A - \beta \epsilon_i = 0$$

$$\ln n_i = \ln(A g_i) - \beta \epsilon_i$$

$$n_i = A g_i e^{-\beta \epsilon_i} \quad (3.9)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıya göre her  $\epsilon_i$  enerji düzeyindeki  $n_i$  parçacık sayısının, enerji düzeyinin istatistik ağırlığı ile orantılı olduğu ve düzeyin enerjisiyle de üstel olarak değiştiği görülmektedir.

Şimdi Eş.(3.9) ifadesindeki A ve  $-\beta$  parametrelerini belirlemeye çalışalım. Eş.(3.9) bağıntısının her iki tarafının i üzerinden toplamı yapılırsa

$$N = \sum_i n_i = A \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} \quad (3.10)$$

olur. Burada eşitliğin sağ tarafındaki

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} \quad (3.11)$$

ile tanımlanan bağıntıya Üleşim Fonksiyonu adı verilir. Eş.(3.10) ve (3.11) ifadelerinden

$$A = N/Z$$

olduğu görülmektedir.  $\beta$ 'nin değeri bulunursa üleşim fonksiyonu belirlenmiş olacaktır. Bunları gözönünde tutarak

$$n_i = N (g_i e^{-\beta \epsilon_i})/Z \quad (3.12)$$

şeklinde bir ifade yazılabilir.



Eğer  $i$  inci enerji düzeyindeki parçacıkların sayısının  $j$  inci enerji düzeyindeki parçacıkların sayısına oranı hesaplanmak istenirse, Eş.(3.12) 'den bunun

$$n_i/n_j = (g_i/g_j) e^{-\beta(\epsilon_i - \epsilon_j)} \quad (3.13)$$

şeklinde olacağı kolaylıkla görülmektedir.

Şimdi  $\beta$  parametresini belirleyeceğiz. Termodinamiğin Birinci Kanunu ve entropi kavramına göre

$$dE = dQ - P dV = T dS - P dV$$

yazılabileceğinden, bu termodinamik işlemin sabit hacimde meydana gelmesi durumunda

$$(\partial S / \partial E)_V = 1/T \quad (3.14)$$

bağıntısı geçerli olur. (Salinger.1975). Eş.(3.8) den ve (3.5) den

$$d(\ln \Omega) = \sum_i (\ln(g_i/n_i)) dn_i$$

$$d(\ln \Omega) = \sum_i \beta \epsilon_i dn_i - \ln A \sum_i dn_i$$

$$d(\ln \Omega) = \beta d(\sum_i \epsilon_i n_i) - \ln A d(\sum_i n_i)$$

$$d(\ln \Omega) = \beta dE$$

ve buradan da Eş.(3.4) 'ü gözönünde tutarak

$$\beta = d(\ln \Omega) / dE = (1/k) d(k \ln \Omega) / dE = (1/k) (\partial S / \partial E)_V$$

sonucu bulunur. Bu sonucun Eş.(3.14) ile karşılaştırılmasıyla

$$\beta = 1 / kT \quad (3.15)$$

bulunur. (Şenvar. 1982).

Bu sayıyı belirlemek için önce,  $n_i$  tane bosonu tek bir sıra halinde dizelim. Aralarına  $(g_i-1)$  tane perde koyarak bunları  $g_i$  tane gruba ayıralım. Herbir gruptaki aynı bir  $\epsilon_i$  enerjisine sahip, fakat farklı  $g_i$  tane kuantik durumdan bir tanesine karşılık gelen boson bulunacaktır.

Böylece  $n_i$  tane boson ile  $(g_i-1)$  tane perdenin mümkün bütün düzenlemelerinin sayısı, bir satır üzerine dizilmiş bulunan  $(n_i+g_i-1)$  nesnenin düzenlemelerinin sayısı olan  $(n_i+g_i-1)!$  olacaktır.

Fakat bütün bosonlar özdeş ve birbirlerinden ayırdedilemez olduklarından, birbirlerinden yalnızca bosonların sırası dolayısıyla farkeden bütün düzenlemeler farklı bir mikroduruma karşılık gelmiş olmayacaklardır. Bu yüzden  $(n_i+g_i-1)!$  sayısını  $n_i!$  ile bölmek gereklidir.

Ayrıca, bosonlar birbirlerinden ayırdedilemedikleri için  $(g_i-1)$  tane perdenin bütün mümkün düzenlemeleri de yine aynı ve farksız bir mikroduruma karşılık gelecektir. Bu durumda,  $n_i$  tane bosonun  $g_i$  tane kuantum durumuna farklı dağıtımlarının sayısı

$$\Omega_i = (n_i+g_i-1)!/n_i!(g_i-1)! \quad (3.18)$$

olacaktır.

Buna göre  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$  enerji düzeylerindeki  $n_1, n_2, n_3, \dots$  tane bosonun farklı dağılım şekillerinin toplam sayısı da

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i (n_i+g_i-1)!/n_i!(g_i-1)! \quad (3.19)$$

olacaktır.

Boson sisteminin istatistiksel denge durumuna karşılık gelen  $n_i$  değerleri, yine

$$N = \sum_i n_i = \text{sabit}$$

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i = \text{sabit}$$

şeklinde ifade edilen Eş.(3.3a) ve (3.3b) şartları altında  $\Omega$  nın maksimumunu sağlayan değerler olacaktır. Eş.(3.19) bağıntısını maksimum yapan  $n_i$  değerleri aynı zamanda  $\ln\Omega$  yı da maksimum yapan değerlerdir. Önce  $\ln\Omega$  yı bulmaya çalışalım. Eş.(3.19) bağıntısındaki  $(n_i+g_i-1)$  ifadesi yerine  $n_i+g_i$  ifadesi 1'den çok büyük olduğundan 1 ihmal edilebilir. Bu durumda ifade  $(n_i+g_i)$  şeklini alır. Bu durumda Eş.(3.19) bağıntısını yazarsak

$$\Omega = \prod_i (n_i+g_i)! / n_i! (g_i-1)!$$

ve bu ifadeye de Stirling yaklaşımını uygularsak

$$\begin{aligned} \ln\Omega = \sum_i & ((n_i+g_i)\ln(g_i+n_i) - (n_i+g_i) - n_i \ln n_i + n_i \\ & - (g_i-1)\ln(g_i-1) + (g_i-1)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinde bir ifade elde ederiz.

$\ln\Omega$  nın maksimumunu bulmak için Eş.(3.20) nin diferansiyelini alıp sıfıra eşitlersek

$$d(\ln\Omega) = \sum_i (\ln(1+(g_i/n_i))) dn_i = 0 \quad (3.21)$$

ifadesini buluruz.

Şimdi  $\alpha$  ve  $\beta$  iki Lagrange çarpanı olmak üzere Eş.(3.6) yı  $-\alpha$  ve Eş.(3.7) yi  $-\beta$  ile çarparak bu ifadelerle birlikte Eş.(3.21) ifadesini taraf tarafa toplarsak

$$\sum_i (\ln(1+(g_i/n_i)) - \alpha - \beta\epsilon_i) dn_i = 0 \quad (3.22)$$

olur. Bunun sıfıra eşit olabilmesi için  $i$  üzerinden yapılan her toplamda parantez içindeki ifadenin sıfır olması gerekir. Böylece

$$\ln(1+(g_i/n_i)) - \alpha - \beta\epsilon_i = 0$$

$$g_i/n_i = e^{\alpha} e^{\beta\epsilon_i} - 1$$

$$n_i = g_i / e^{\alpha + \beta\epsilon_i} - 1 \quad (3.23)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıya Bose-Einstein dağılım fonksiyonu ya da Boson dağılım fonksiyonu adı verilir. Bağıntıdaki parametrelerden  $\alpha$  nın özel bir anlamı yoktur.  $n_i$  ler negatif olamayacakları için  $\alpha > \epsilon_i/kT$  olmalıdır.  $T$  sıcaklığı çok büyük değerler alabildiği için  $\alpha > 0$  diyebiliriz.  $\beta = 1/kT$  olduğunu da daha önce bulmuştuk.

### 3.3. Fermi-Dirac Dağılımı:

Bu istatistik yönteminde, birbirlerinden ayırdedilemeyen ve Pauli'nin dışarlama ilkesi uyarınca aynı bir kuantum durumunda birden fazla parçacığın bulunamayacağı parçacıklardan oluşan sistemler incelenir. Bu özelliğe sahip parçacıklar yarı tamsayı spin değerlerine sahiptir. Bu parçacıklar antisimetrik dalga fonksiyonlarıyla temsil edilirler. (Toda et al 1983).

Bir elektron gazı içindeki elektronların hız ve enerji dağılımlarını bulmak amacıyla E.Fermi (1926) ve P.A.M.Dirac (1926)'ın yaptıkları çalışmalar sonucunda ortaya çıkan bu yöntem Fermi-Dirac istatistiği adı verilir. Bu istatistik yönteminin ele aldığı parçacıklara fermiyon denir. Sahip oldukları özellikleri dolayısıyla, elektron bir fermiyondur.

Şimdi aynı bir  $\epsilon_i$  enerjisine,  $g_i$  tane kuantum durumu karşılık geldiğini düşünelim. Örneğin ele aldığımız fermiyonlar, eğer bir magnetik alan içinde bulunuyorlarsa, bunların aynı bir özenerji değeri için spinleri ya  $+1/2$  ya da  $-1/2$  olacaktır. Bu durumda, bu özenerji düzeyine karşılık gelen istatistik ağırlık  $g_i=2$  olacaktır. Merkezi bir alanda bulunan bir taneciğin hareketi sözkonusu olduğunda, bu parçacığın enerjisi, yörüngesel açısal momentin sahip olabileceği  $(2l+1)$  tane mümkün yönden ba-

çımsızdır. Bu yüzden parçacığın aynı bir  $\epsilon_i$  özenerjisine  $g_i=2l+1$  tane kuantum durumu karşılık gelmektedir. Eğer gözönüne aldığımız parçacık fermiyon ise, bunun aynı bir  $\epsilon_i$  enerjisine karşılık gelen mümkün kuantum durumu sayısı spinlerin yönlerinin de dikkate alınmasıyla  $g_i=2(2l+1)$  olur.

Pauli dışarlama ilkesi uyarınca, aynı bir kuantum durumunda aynı enerjili iki fermiyon bulunamayacağından,  $g_i$  istatistiksel ağırlığı, aslında bu ilkeyi çiğnemediği aynı bir enerji düzeyinde bulunabilecek fermiyonların maksimum sayısını göstermektedir. Bu durumda, fermiyonlar sözkonusu olduğunda,  $i$  inci enerji düzeyindeki fermiyonların sayısı, bu düzeye karşılık gelen  $g_i$  istatistiksel ağırlığından daha büyük olamaz. Yani  $n_i \leq g_i$  dir.

Buna göre  $g_i$  tane kuantum durumunun  $n_i$  tane fermiyona kaç türlü karşılık getirilebileceğinin sayısı,  $g_i$  nesnenin  $n_i$  şer  $n_i$  şer kombinezonlarından ibaret olacaktır:

$$\Omega_i = \binom{g_i}{n_i} = \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!} \quad (3.24)$$

Bu durumda herbir enerji düzeyine karşılık gelen  $n_1, n_2, \dots$  parçacık sayılarını gözönüne alarak, aynı bir makroduruma karşılık gelen mikrodurumların sayısının

$$\Omega = \prod_i \Omega_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!} \quad (3.25)$$

olduğu görülmektedir.

Sistemin istatistiksel denge durumuna karşılık gelen dağılımlar,  $\Omega$  nın Eş.(3.3a) ve (3.3b) yan şartları altında maksimum olmasını sağlayan  $n_i$  değerleridir.

Stirling yaklaşımı aracılığıyla Eş.(3.25) den

$$\ln\Omega = \sum_i (g_i \ln g_i - g_i - n_i \ln n_i + n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) + (g_i - n_i)) \quad (3.26)$$

bulunur. Bunun diferansiyelini alıp  $-d(\ln\Omega) = 0$  diyelim:

$$-d(\ln\Omega) = \sum_i (\ln(n_i/(g_i - n_i))) dn_i = 0 \quad (3.27)$$

Eş.(3.3a) ve (3.3b) nin de diferansiyelleri, Eş.(3.6) ve (3.7) deki gibi

$$dN = \sum_i dn_i = 0$$

$$dE = \sum_i \epsilon_i dn_i = 0$$

şeklindedirler.

$\alpha$  ve  $\beta$  iki Lagrange çarpanı olmak üzere, Eş.(3.6) yı  $\alpha$  ve (3.7) yi  $\beta$  ile çarparak, elde edilen bu ifadelerle Eş.(3.27) yi taraf tarafa toplarsak

$$\sum_i ((\ln(n_i/(g_i - n_i))) + \alpha + \beta \epsilon_i) dn_i = 0 \quad (3.28)$$

sonucu bulunur. Bu eşitliğin de gerçekleşmesi için

$$\ln(n_i/(g_i - n_i)) + \alpha + \beta \epsilon_i = 0$$

olmalıdır. Buradan da  $n_i$  dağılımının istatistiksel denge durumuna karşılık gelen değerinin

$$(g_i - n_i)/n_i = e^{\alpha + \beta \epsilon_i}$$

$$g_i/n_i = e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + 1$$

$$n_i = g_i / (e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + 1) \quad (3.29)$$

şeklinde olması gerektiği belirlenmiş olur. Bulunan bu ifadeye Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu veya Fermiyon dağılım fonksiyonu adı verilir.

Buradaki  $\beta$  parametresi önceki dağılım fonksiyonlarında elde ettiğimiz gibi  $\beta=1/kT$  dir.  $\alpha$  parametresi ise boyutları enerji boyutları olan ve

$$\alpha = -\epsilon_f/kT$$

diye tanımlanan bir büyüklük alınır. Buna göre dağılım fonksiyonu

$$n_i = g_i/e^{(\epsilon_i - \epsilon_f)/kT} + 1 \quad (3.30)$$

olur. Bağlıntıdaki  $\epsilon_f$ , Fermi enerjisidir. Fiziksel uygulamalarda genellikle katı cisimlerin elektronik teorisinde çok önemli bir rol oynar.

#### 4. İSTATİSTİĞİN FİZİKSEL SİSTEMLERE UYGULANMASI: —

Bu bölümde, bir önceki bölümde elde ettiğimiz istatistiksel dağılım fonksiyonlarından yararlanarak fiziksel sistemlere ilişkin çeşitli nicelikleri elde etmeye çalışacağız.

##### 4.1. İstatistiğin Gazlara Uygulanması:

Kapalı bir kap içinde T sıcaklığında, ısıl denge durumundaki bir gaz sistemini ele alalım. Gaz molekülleri, birbirlerinden farklı hızlarda, çeşitli yönlerde hareket halindedirler. Birim hacimdeki moleküllerin sayısı n, bir molekülün kütlesi m ile gösterilirse, moleküllerin ortalama kinetik enerjisi ve kap içindeki gaz basıncı için sırasıyla

$$E_k = mV^2/2 \quad (4.1)$$

$$P = 2nE_k/3 = nkT \quad (4.2)$$

eşitlikleri yazılabilir. (Kılıçkaya.1987). Bu bağıntıdaki k, Boltzmann sabiti ve

$$V^2 = 3kT/m \quad (4.3)$$

molekülün etkin hızıdır. Gözönüne alınan bir kartezyen koordinat sistemine göre hız, bileşenleri cinsinden şöyle yazılabilir:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad (4.4)$$

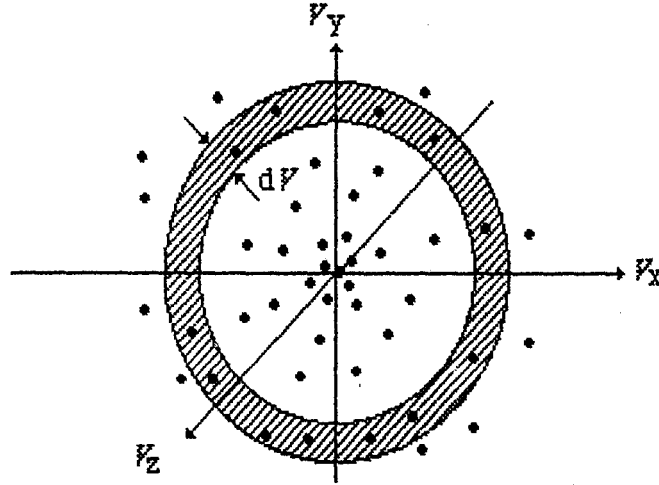
Belirli bir eksen, örneğin X-ekseni doğrultusundaki hız bileşeni ise

$$V_x^2 = V^2/3 = kT/m \quad (4.5)$$

dir.



Şimdi her moleküle ait hız değerlerini, eksenleri  $V_x, V_y, V_z$  olan bir koordinat sisteminde, Şekil (4.1) deki gibi işaretli olduğunu kabul edelim.



Şekil 4.1. Kapalı bir kaptaki bulunan gazdaki moleküllerin hız değerlerinin hız uzayındaki gösterilişi (Gündüz, E. 1988).

Böyle bir koordinat sistemini, hız uzayı olarak tanımlayabiliriz. Moleküllerin birbirleriyle çarpışmaları, bunların hızlarını ve bundan dolayı hız uzayındaki konumlarını değiştirmektedir. Ancak ısıl denge durumu değişmediği sürece, gözönüne alınan herhangi bir bölge içindeki moleküllerin sayısı daima sabit kalmaktadır. Konum ve hız değişimleri uzaydaki her yön için eşit olasılık taşıdığından dolayı, hız uzayı küresel bir simetriye sahiptir. Bunun gibi bir uzay parçası için, birim hacimdeki molekül sayısı  $n$ , hızları  $V$  ile  $V+dV$  arasındaki moleküllerin sayısı  $dn$  ile gösterilirse, ortaya çıkan durumu, hız uzayındaki  $V$  ile  $V+dV$  yarıçaplı iki küresel yüzey arasında kalan hacim içindeki noktaların sayısını bularak belirlemek mümkündür.

Sözü edilen sayım

$$dn = n f(V) dV \quad (4.6)$$

ya da

$$dn/n = f(V) dV \quad (4.7)$$

bağıntılarıyla ifade edilebilir. Burada  $dn/n$ , hızları  $V$  ile  $V+dV$  arasında kalan moleküllerin toplam molekül sayısı içindeki oranını,  $f(V)$  ise bu olasılığı veren dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Başka bir deyişle,  $dn/n$ , birim hacimdeki gaz moleküllerinden herhangi birinin  $V$  hızı civarındaki  $dV$  gibi bir hız aralığında bulunma olasılığını göstermektedir.  $f(V)$  ise bu olasılığı belirleyen hız dağılım fonksiyonudur. Maxwell bu hız dağılım fonksiyonunun

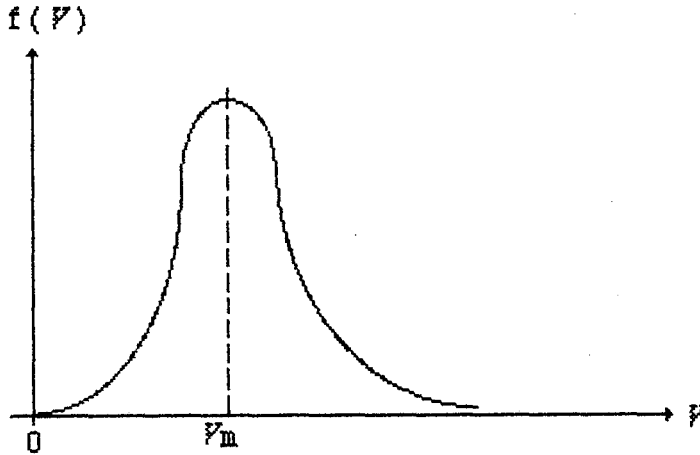
$$f(V) = (dn/n)dV = 4(\pi)^{-1/2} (m/2kT)^{3/2} V^2 e^{-mV^2/2kT} \quad (4.8)$$

ifadesi ile verilebileceğini göstermiştir. (Longair, 1986). Buna göre Eş(4.7) ile belirtilen olasılık için

$$(dn/n) = 4(\pi)^{-1/2} (m/2kT)^{3/2} V^2 e^{-mV^2/2kT} dV \quad (4.9)$$

yazabiliriz.

Eş(4.8) ile verilen hız dağılım fonksiyonunun grafiğine bakarsak, Şekil(4.2) deki gibi bir durumla karşılaşırız.



Şekil 4.2. Gaz moleküllerinin hız dağılım fonksiyonunun grafiği.

$V=0$  için sıfır değerinden başlayan fonksiyon, bir maksimum değere ulaştıktan sonra hız sonsuza doğru giderken sıfır değerine asimtot kalacak şekilde değişmektedir. Gaz içinde hızı sıfır veya sonsuz olan bir molekül bulunamayacağı düşünülürse bu

sonuç mantıklıdır. Fonksiyonun maksimum olduğu  $V=V_m$  değerine en olası hız denir. Şekilde de görüldüğü gibi, moleküllerin büyük bir kısmının hızı  $V_m$  ye çok yakın değerlere sahiptir. Başka bir deyişle, herhangi bir molekül gözönüne alındığında, bu molekülün  $V_m$  civarındaki bir hıza sahip olma olasılığı en büyüktür.

Üçüncü bölümde elde ettiğimiz Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonu, ısıl denge durumundaki gaz moleküllerinin üç boyutlu bir uzay içindeki hız dağılımlarını belirlemek amacıyla da kullanılabilir. Bunun yanında, gözönüne alınan  $\mathcal{E}_1$  ve  $\mathcal{E}_2$  gibi iki ayrı enerji durumu için, bu enerjilere sahip moleküllerin sayıları arasındaki oran da belirlenebilir:

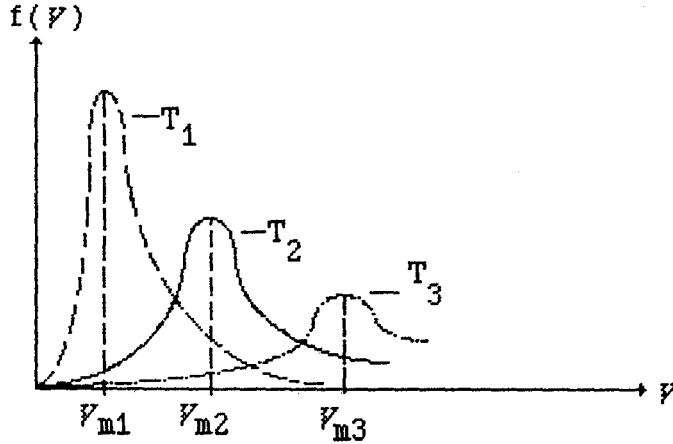
$$n_1/n_2 = e^{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/kT} \quad (4.10)$$

Bu bağıntı, Eş(4.8) ile verilen dağılım fonksiyonunun üstel terimi içinde yer aldığından,  $f(V)$  fonksiyonu Maxwell-Boltzmann hız dağılım fonksiyonu olarak anılmaktadır.

Eş(4.8) deki  $f(V)$  dağılım fonksiyonu incelenirse; fonksiyonun, gazın  $m$  molekül kütlesine ve  $T$  sıcaklığına bağlı olduğunu görürüz. Fonksiyonun grafiği farklı sıcaklıklarda incelenirse Şekil(4.3) dekine benzer bir durumla karşılaşırız.

Düşük sıcaklıklarda, oldukça dik bir görünüme sahip olan eğri, sıcaklığın yükselmesiyle giderek basıklaşmakta, şiddet maksimumlarının değeri giderek küçülürken buna karşı gelen  $V_m$  hız değerleri (en olası hız) yüksek hızlara doğru kaymaktadır. Bu durum Şekil(4.3) de sıcaklığın üç ayrı değeri için çizilen eğrilerden açıkça görülmektedir. Eğri tarafından sınırlanan alan birim hacimdeki toplam molekül sayısını gösterdiğine göre ortaya çıkan sonuç mantığa uygundur. Düşük sıcaklıklarda, moleküllerin çeşitli hızlara sahip olmakla birlikte, hızı  $V_m$  ye eşit ve bu değere yakın olanların sayısı, toplam molekül sayısı için oldukça büyük bir oran gösterir. Bu durum,  $T=73^\circ\text{K}$  için çizilmiş olan eğrinin  $V_m$  civarında keskin bir duruma sahip olmasından açıkça görülmektedir. Sıcaklık arttıkça, moleküllerin çeşitli

hız değerlerine daha fazla dağıldıkları, bunun yanında,  $V_m$  değerinde bir artış görülmekle beraber bu hıza sahip moleküllerin sayısının giderek azaldığı gözlenmektedir.



Şekil 4.3. Maxwell-Boltzmann hız dağılım eğrisinin üç ayrı sıcaklık için aldığı görünüm (Gündüz, E. 1988).

Maxwell-Boltzmann hız dağılım ifadesinden yararlanılarak, molekül hızları hesaplanabilir. Şimdi bu molekül hızlarını inceleyelim.

Ortalama Hız ( $\bar{V}$ ): Birim hacimdeki moleküllerin hızlarının aritmetik toplamının, bu hacim içindeki molekül sayısı oranına aritmetik ortalama hız yada kısaca ortalama hız denir ve  $\bar{V}$  ile gösterilir. Birim hacimdeki hızları  $V$  ile  $V+dV$  arasında olan moleküllerin sayısı  $n f(V)dV$ , bütün moleküllere ilişkin hızların toplamı  $\int_0^{\infty} n f(V)dV$  dir. Ele alınmış moleküllerin hızlarının toplamını bulabilmek için, bu ifadenin sıfır ile sonsuz değerleri arasında kalan sınırlar içindeki integralini almamız gerekir.

Bu durumda ortalama hız için

$$\bar{V} = (1/n) \int_0^{\infty} V n f(V) dV$$

$$\bar{V} = \int_0^{\infty} V f(V) dV \quad (4.11)$$

ifadesini yazabiliriz.  $f(V)$  dağılım fonksiyonu için Eş.(4.8) de

verilen bağıntıyı kullanarak integral işlemini yaptığımızda (Bkz. EK 2), ortalama hızı

$$\bar{V} = (8kT/\pi m)^{1/2} \quad (4.12)$$

şeklinde buluruz. Görüldüğü gibi ortalama hız, sisteme verilen  $kT$  ısı enerjisinin kareköküyle artarken, parçacığın kütlesi arttıkça bunun kareköküyle azalmaktadır.

Etkin Hız ( $\langle V \rangle$ ): Birim hacimde yeralan moleküllere ilişkin hızların kareleri toplamı  $V^2 n f(V) dV$  dir. Ele aldığımız birim hacimdeki hızların kareleri toplamını bulabilmek için, bu ifadeyi sıfır ile sonsuz değerleri arasında kalan sınırlar içindeki integralini almamız gerekir.

Bu durumda kare ortalama hız için

$$\begin{aligned} V^2 &= (1/n) \int_0^{\infty} V^2 n f(V) dV \\ V^2 &= \int_0^{\infty} V^2 f(V) dV \end{aligned} \quad (4.13)$$

eşitliğini yazabiliriz. Aynı şekilde  $f(V)$  dağılım fonksiyonu için Eş. (4.8) de verilen bağıntıyı kullanarak, integral aldığımızda (Bkz. EK 2) kare ortalama hızı

$$V^2 = 3kT/m \quad (4.14)$$

şeklinde buluruz. Kare ortalama hızın kareköküne etkin hız denir.  $V_{\text{kok}}$  ya da  $\langle V \rangle$  ifadeleriyle gösterilir. Bu durumda, etkin hız

$$\langle V \rangle = (3kT/m)^{1/2} \quad (4.15)$$

olacaktır. Etkin hız da sisteme verilen ısı enerjisinin kareköküyle artar. Fakat parçacığın kütlesi arttıkça bunun kareköküne bağlı olarak azalmaktadır.

En olası hız ( $V_m$ ): En fazla molekülün sahip olduğu hıza en olası ya da maksimum hız adı verilir. Kısaca  $V_m$  ile gösterilir. Maxwell-Boltzmann olasılık dağılım fonksiyonunun maksimum değerine karşılık gelen hız değeri en olası hız ya da maksimum hızdır (Bkz. Şekil (4.3)). Bu hız değerini hesaplamak için, dağılım fonksiyonu  $f(V)$  nin  $dV$  ye göre diferansiyelini alarak ve bu ifadeyi sifıra eşitleyerek,

$$(d/dV)(f(V)) = 0$$

$$(d/dV)(4(\pi)^{-1/2} (m/2kT)^{3/2} e^{-mV^2/2kT}) = 0$$

$$2V e^{-mV^2/2kT} (1-(mV^2/2kT)) = 0 \quad (4.16)$$

sonucuna ulaşırız. Bu ifadeyi sıfır yapabilecek hız değeri

$$V_m = (2kT/m)^{1/2} \quad (4.17)$$

dir. İşte bu hız değerine en olası hız ya da maksimum hız denir. Bu hız değeri de önceki hız değerleri gibi, sisteme verilen ısı enerjisinin kareköküyle artarken, parçacığın kütesinin kareköküyle azalmaktadır.

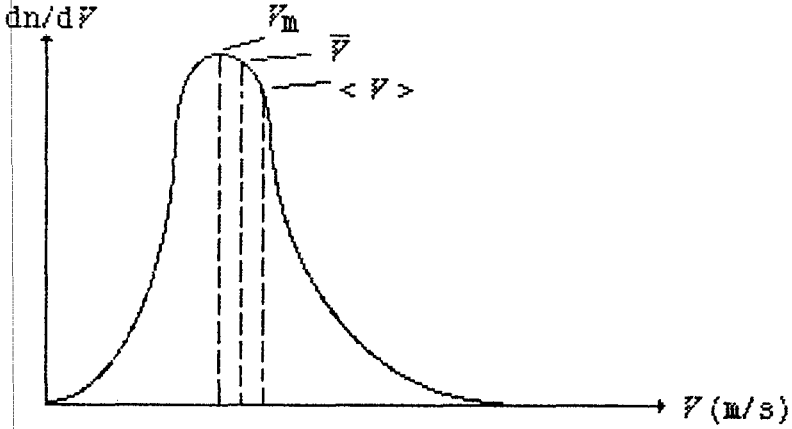
Bulduğumuz üç hız değeri arasındaki bağıl oranlar

$$V_m = 0.886 \bar{V} \quad (4.18a)$$

$$V_m = 0.816 \langle V \rangle \quad (4.18b)$$

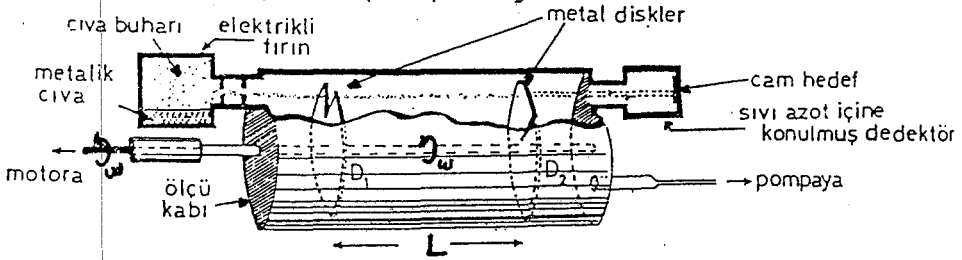
$$\bar{V} = 0.912 \langle V \rangle \quad (4.18c)$$

şeklindedir. Dikkat edersek, üç hız ifadesi de birbirine çok yakındır. Azot gazı moleküllerinde hız değerlerinin  $T=273^\circ\text{K}$  sıcaklığında görünen sıralanışı Şekil (4.4) deki gibidir. Ortalama hız ve etkin hız değerleri, en olası hıza oldukça yakındırlar.



Şekil 4.4. Sabit bir sıcaklıkta hız dağılım eğrisi üzerindeki en olası hız ( $v_m$ ), ortalama hız ( $\bar{v}$ ) ve etkin hız ( $\langle v \rangle$ ) değerleri.

Maxwell-Boltzmann hız dağılım ilkesini deneyle doğrulamak amacıyla Lambert tarafından kullanılan deney düzeneğinin basitleştirilmiş şeması Şekil (4.5) de görülmektedir.



Şekil 4.5. Maxwell hız dağılım ilkesini deneyle doğrulamak amacı ile Lambert tarafından kullanılan düzenek (Gündüz, E. 1988).

Elektrikli bir fırın içinde buharlaştırılan civa atomları, fırınla bağlantılı olan bir silindir içine gönderilmekte, yolları üzerinde dönmekte olan  $D_1$  ve  $D_2$  dairesel metal diskler üzerindeki dar aralıklardan ince bir demet şeklinde geçebilenler, sıvı azot sıcaklığında tutulan bir dedektör üzerine düşürülmektedir.  $D_1$  ve  $D_2$  diskleri, üzerlerindeki aralıklar birbirleriyle sabit bir  $\phi$  açısı yapacak şekilde, ortak bir motor miline bağlı olarak,  $\omega$  açısal hızıyla döndürülmektedir. Diskler hareketsiz kaldığı sürece, civa atomları, dedektörü oluşturan camdan yapılmış

miş hedef üzerine ulaşamazlar. Motor mili  $\omega$  açısal hızıyla dönerse, sadece belirli bir hıza sahip olan civa atomları  $D_2$  yi de geçip dedektöre ulaşabilir. Bu civa atomlarının hızı, iki disk arasındaki  $L$  yolunun geçilmesi için geçen süre, disk üzerindeki yarıkların aynı hizadan geçmeleri için geçen süreye eşit olmasını gerektiren bir hızdır.  $\omega=2\pi f$  ve  $\phi=\omega t=2\pi f t$  olup,  $L$  uzaklığının  $V$  gibi bir hızla geçildiği düşünülürse,  $t=L/V$ ,  $\phi=\omega t$  ya da  $\phi = 2\pi f L / V$  dir. Buradan

$$V = 2\pi f L / \phi \quad (4.19)$$

bulunur.

Kullanılan düzeneğe, gerek  $L$  uzaklığı ve gerekse  $\phi$  açısı belirli olduğuna göre, moleküllerin hız değerlerini belirlemek için disklerin dönme frekansını bilmek yeterli olacaktır.  $\omega$  nın çeşitli değerleri için tekrarlanan deneyler, moleküllerin hız dağılımlarının Maxwell-Boltzmann bağıntısına uygun olduğunu göstermiştir.

#### 4.2. Foton Gazı ve Siyah Cisim Işıması: —

Burada fotonların bazı temel özelliklerini ve siyah cisim ışımalarını ele alacağız.

Fotonlar spini 1 olan boson parçacıklarıdır. Boson parçacıkları olduğu için, verilen bir enerji durumundaki foton sayısında bir kısıtlama yoktur. Foton sisteminde toplam parçacık sayısının korunumlu olması gerekmez. Çünkü, oyuk içindeki fotonlar, oyuk duvarları tarafından sürekli olarak soğurulur ve yeniden salınırlar. Bu durumda, bir oyuk içindeki foton sayısı korunumlu değildir, duvarların sıcaklığına bağlı olarak değişir.

Bazı cisimler, yüksek sıcaklıklara kadar ısıtıldıkları zaman akkor duruma gelirler. Bu akkorluk ısı ışımaya adını alır. Cisimlerin bu tür ısı ışımaları, cisim içindeki atom ve elektronların gelişigüzel hareketlerinden kaynaklanmaktadır. Isıl

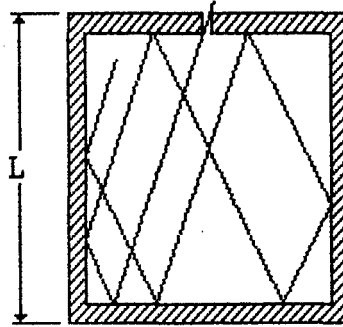


ışınma cismin yüzeyine ulaşmadan önce atom ve elektronlar tarafından birçok kez soğurulur ve salınır. Sonunda ısı denge korunmuş olur.

İçinde ısı ışıma oluşan bir cismin yüzeyinden bu ışımanın yalnızca bir kısmı dışarıya salınır. Ayrıca bir cismin yüzeyine dışarıdan gelen ısı ışımanın yalnızca bir kısmı yüzey tarafından soğurulur ve geri kalan yansır. Ancak bir cismin yüzeyinin soğurduğu ısı ışıma saldığı ısı ışımaya eşittir.

Son derece iyi bir soğurucu ve aynı zamanda iyi bir salıcı yüzeye sahip olan bir cisme siyah cisim denir. Siyah cisim olarak, çoğu kez içi boş ve duvarlarından birinin üzerine küçük bir delik açılmış küp biçimindeki bir kutu alınır. Bu durumda, duvarları  $T$  sıcaklığında tutulan kutunun içinde oluşan ısı ışıma bir foton gazı olarak düşünülebilir. Bu nedenle siyah cisim ışıması ya da oyuk ışıması eş anlamlı olarak alınır.

Şimdi her bir kenarı  $L$  uzunluğunda ve iç yüzeyleri de iyi yansıtıcı olan bir küpün içinde sabit bir  $E$  enerjisinin Şekil (4.6) daki gibi tutulduğunu düşünelim. Küpün içindeki fotonla-



Şekil 4.6. Herbir kenarı  $L$  uzunluğunda iç yüzeyleri iyi yansıtıcı olan küpün kesiti.

rın ısı dengeinin meydana gelmiş olması şartı altında, mümkün enerji düzeylerine nasıl dağılacaklarını hesaplayalım:

$\nu$  frekanslı bir elektromagnetik dalgaya karşılık gelen fotonun enerjisi bilindiği gibi  $\mathcal{E} = h\nu$  şeklindedir. Söz konusu fo-

ton gazını incelerken fotonların birbirleriyle etkileşmedikleri, fakat iç yüzeyler tarafından soğurulup yayınlandıklarını düşüneceğiz. Bu yüzden, dağılımların hesaplanmasında

$$E = \sum_i \epsilon_i n_i = \sum_j h\nu n_j = \text{sabit} \quad (4.20)$$

şartı geçerli olmasına rağmen, fotonların tüm N sayısı sabit kalmaz.

Bunun yanında, eğer fotonların bulunduğu küpün boyutları ışınının ortalama dalgaboyuna göre çok büyükse, fotonların enerji düzeyleri arasındaki fark çok küçük olacağından fotonların spektrumu sürekliymiş gibi de düşünülebilir. N nin sabit olmaması nedeniyle  $\alpha=0$  olacağından

$$dn = (g(\nu)d\nu)/(e^{h\nu/kT} - 1) \quad (4.21)$$

yazılabilir.

$g(\nu)$  istatistiksel ağırlığını, ya da başka bir deyişle kuantum durum yoğunluğunu hesaplamak için, her bir kenarı L olan küp içindeki durağan bir elektromagnetik dalga ifadesinin

$$\Psi(x, y, z) = C \sin(k_x \pi(x/L)) \sin(k_y \pi(y/L)) \sin(k_z \pi(z/L))$$

şeklinde olduğuna dikkat edelim. Burada C, dalganın genliğini gösteren bir sabit ve

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$$

ile de dalganın yayılma vektörü gösterilmiştir.  $|\mathbf{k}|$  ile  $\lambda$  dalgaboyu arasında bağıntı, dalganın yüzeyleri üzerinde düğüm noktaları oluşturması gereğinden ortaya çıkar:

$$|\mathbf{k}|/2L = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}/2L$$

$$|\mathbf{k}|/2L = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2}$$

$$|\mathbf{k}|/2L = 1/\lambda = v/c = \mathcal{E}/hc \quad (4.22)$$

Her fotonun sahip olduğu kuantum durumu, kendisine karşılık gelen elektromagnetik dalganın  $\mathbf{k}$  yayılma vektörünün bileşenlerinin değerleriyle belirlenir. Eş.(4.22) bağıntısı aynı bir  $\mathcal{E}=h\nu$  foton enerjisine  $k_x, k_y, k_z$  nin alacağı değerlere göre  $\infty^3$  kuantum durumu karşılık gelebileceğini göstermektedir.

Şimdi  $(k_x, k_y, k_z)$  uzayında  $|\mathbf{k}|$  ile  $|\mathbf{k}|+d|\mathbf{k}|$  arasında kalan küresel kabuk içindeki bütün pozitif  $k_x, k_y, k_z$  değerlerinin sayısını, yani  $d|\mathbf{k}|$  ya karşılık gelen  $d\nu$  frekans aralığındaki kuantum durumlarının sayısını hesaplamaya çalışalım. Bizi yalnızca  $k_x \geq 0, k_y \geq 0, k_z \geq 0$  değerleri ilgilendirdiğinden sözkonusu küresel kabuğun yalnızca 1/8 ini hesaba katacağız. Buna göre aradığımız sayı,

$$(1/8)(4\pi|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|) \quad (4.23)$$

olacaktır. Elektromagnetik dalgaların hızı  $c$ ,  $\lambda=c/\nu$  olduğundan

$$v=c/\lambda = (c/2L)|\mathbf{k}| \quad (4.24a)$$

$$dv=(c/2L)d|\mathbf{k}| \quad (4.24b)$$

yazılabileceğinden

$$(1/8)(4\pi|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|) = (1/8)4\pi(2L\nu/c)^2(2Ld\nu/c)$$

$$(1/8)(4\pi|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|) = (4\pi\nu/c^3)v^2 d\nu \quad (4.25)$$

olur.

Ancak, herhangi bir yayılma doğrultusu verildiğinde, fotona karşılık gelen elektromagnetik dalganın yayılma doğrultusuna dik iki polarizasyon düzlemi olacağından belirli bir  $\mathcal{E}=h\nu$  foton

enerjisine karşılık gelen fotonların mümkün kuantum durumlarının sayısı da Eş.(4.25) in iki katı olacaktır. Bu durumda,

$$g(v)dv=(8\pi V/c^3)v^2dv \quad (4.26)$$

elde edilir. Buna göre foton sayısı da Eş.(4.21) bağıntısından

$$dn_v=(8\pi V/c^3)(v^2dv/e^{hv/kT}-1) \quad (4.27)$$

olacaktır. Buradan da birim hacim başına  $\nu$  frekanslı ışınma enerjisinin, yani ışınma enerjisi yoğunluğunun

$$dE_v=(E_v/V)dn_v=(8\pi h/c^3)(v^3dv/e^{hv/kT}-1) \quad (4.28)$$

ile verilebileceği görülmektedir. Buna Planck Işınma Kanunu adı verilir.

Şimdi birim hacim başına düşen toplam ışınma enerjisini hesaplayabiliriz.  $x=hv/kT$  dersek,

$$E=E/V=\int_0^{\infty} (E_v/V)(dn_v/dv)dv=(8\pi h/c^3)\int_0^{\infty} (v^3dv/e^{hv/kT}-1)$$

$$E=(8\pi k^4/h^3c^3)T^4 \int_0^{\infty} (x^3dx/e^x-1)$$

integraline ulaşılır. Bu integral işlemi sonucunda (Bkz. EK 3),

$$E=(8\pi^5k^4/15h^3c^3)T^4$$

$$E=\sigma T^4 \quad (4.29)$$

elde edilir. Bu ifade, bir siyah cismin toplam ışınma yoğunluğunun, cismin sıcaklığının dördüncü kuvvetiyle orantılı olduğunu belirten Stefan-Boltzmann Kanunu'dur.  $\sigma$  sabitine de Stefan-Boltzmann sabiti adı verilir, değeri  $\sigma=(8\pi^5k^4/15h^3c^3)=7.56 \times 10^{-16}$  j m<sup>-3</sup> dür. Bose-Einstein İstatistiği denel olarak ölçülmüş olan bu sabiti teorik olarak da başarılı bir şekilde bulmuştur.

#### 4.3. Elektron Gazı:

Fermi-Dirac dağılım ilkesi, belirli bir T sıcaklığında, hızları  $V$  ile  $V+dV$ , enerjileri ise  $E$  ile  $E+dE$  arasında değişen birim hacimdeki serbest elektronların sayısının, toplam serbest elektron sayısı içindeki oranını bulmayı amaçlar. Metaller içindeki serbest elektronlar ile gaz molekülleri arasında bazı davranış farklılıkları vardır. Bu farkları şöyle sıralayabiliriz:

i) Gaz moleküllerinin aksine, elektronlar yalnız belirli ve sonlu enerji değerlerine sahip olabilirler.

ii) Metal içinde, serbest elektronların çeşitli enerji düzeylerine karşılık gelen sayıları kısıtlı olup, Pauli ilkesine uygun olarak her düzeye, spinleri birbirlerine antiparalel olan en çok iki elektron yerleşebilir.

iii) Serbest elektronların enerji düzeylerine dağılımında, en kararlı olan en düşük enerjili düzey ilk önce, diğer düzeyler ise sırasıyla daha sonra doldurulacak şekilde bir seçim kuralı vardır.

Serbest elektronların enerji düzeylerine dağılımında, yukarıdaki şartların geçerli olduğu bu durumu,

$$n_i = (g_i / e^{(\epsilon_i - \epsilon_f) / kT} + 1)$$

şeklinde Eş(3.30) ile göstermiştik. Bu bağıntıda  $\epsilon_f$  ile gösterdiğimiz enerji değerine Fermi enerjisi adı verilmektedir. Fermi enerjisi, metallerin elektriksel özelliklerinin saptanmasında çok önemli bir kavramdır.

Şimdi bir metal içindeki serbest elektronları gözönüne alalım. Bunlara karşılık gelen enerji seviyelerinin istatistiksel ağırlığı, belirli bir V hacminde tutulan parçacıkların enerji seviyelerinin istatistiksel ağırlığı gibidir. Fakat metal içinde zıt yönlü spinli iki grup elektron olduğundan bunların

istatistiksel ağırlığı, V hacmindeki parçacıklarınkinden iki kat fazla olacaktır. Böylece Eş(2.24) ifadesini gözönünde bulundurup, fermiyonların Pauli ilkesine uymaları dolayısıyla, her durumda bir elektron bulunması gerektiğinden, metalde enerjilerinin sürekli olduğu kabul edilebilen üst iletim bandları için

$$\Omega(E)=\Delta g(E)=2(2\pi V/h^3)(2m)^{3/2}(E)^{1/2}\Delta E \quad (4.30)$$

olduğu, yani fermiyonların istatistiksel ağırlığının, enerjilerinin kareköküyle orantılı olarak artacağı görülmektedir. E ile E+ΔE enerjileri arasındaki aralıkta bulunan elektronların Δn sayısı için

$$\Delta n=(\Delta g(E)/e^{(\epsilon_i-\epsilon_f)/kT}+1)$$

yazılabilir. Buradan Δn ve Δεnin sonsuz küçük olduklarını düşünerek diferansiyel formda yazarsak

$$dn=(4\pi V/h^3)(2m)^{3/2}((E)^{1/2}dE/e^{(\epsilon_i-\epsilon_f)/kT}+1) \quad (4.31)$$

olur. Bu ifade, serbest elektronların enerji dağılımları için Fermi-Dirac denklemidir. Fermi enerjisi T=0°K sıcaklığında elektronların bulunabileceği maksimum enerji düzeyi idi. Dolayısıyla Eş(4.31) ifadesini sıfır ile ε<sub>f</sub> Fermi enerji düzeyleri arasında integre edersek, toplam parçacık sayısını ε<sub>f</sub> ye bağlı olarak

$$N=\int_0^{\epsilon_f} dn=(4\pi V(2m)^{3/2}/h^3) \int_0^{\epsilon_f} (E)^{1/2}dE$$

$$N=((8\pi V(2m)^{3/2})/3h^3)(\epsilon_f)^{3/2} \quad (4.32)$$

şeklinde buluruz. Buradan Fermi enerjisinin

$$\epsilon_f=(h^2/8m)(3N/\pi V)^{2/3} \quad (4.33)$$

olduğu, yani metaldeki elektronların N/V yoğunluğu bilindiğinde,

bu elektronların Fermi enerjisinin saptanabileceği ortaya konmuş olur.

Şimdi Eş.(3.30) ile gösterdiğimiz olasılık dağılım fonksiyonunu inceleyelim. Her kuantum durumunda tek parçacık olduğunu düşünürsek, fonksiyon

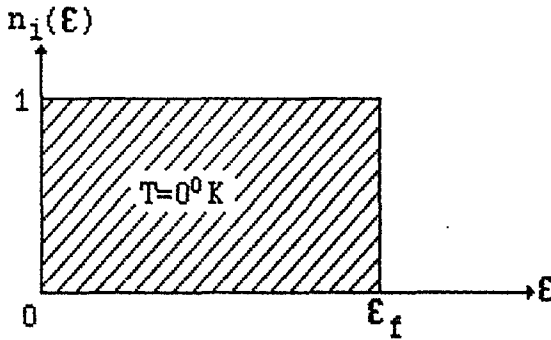
$$n_i = 1 / (e^{(\epsilon - \epsilon_f) / kT} + 1)$$

şeklini alır. Bu fonksiyonun  $T=0^\circ\text{K}$  deki durumunu incelersek

$$\epsilon < \epsilon_f \quad \text{için} \quad n_i(\epsilon) = 1 \quad (4.34a)$$

$$\epsilon > \epsilon_f \quad \text{için} \quad n_i(\epsilon) = 0 \quad (4.34b)$$

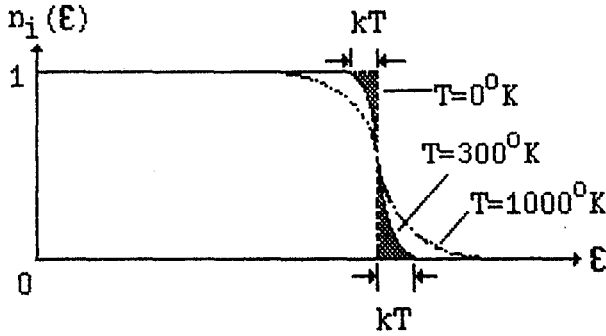
ve bunun sonucu olarak da olasılık fonksiyonunun biçimi Şekil(4.7) deki gibidir.



Şekil 4.7. Olasılık fonksiyonunun  $T=0^\circ\text{K}$  de enerjiye göre değişimi.

Şekilden de görüldüğü gibi mutlak sıfır sıcaklığında bulunan bir metalde, metal içindeki elektronların hepsi de Fermi enerji değerinin altındaki enerji değerlerine sahiptir. Enerjileri  $\epsilon < \epsilon_f$  olan bütün kuantum durumları dolu,  $\epsilon > \epsilon_f$  olan bütün kuantum durumları boştur.

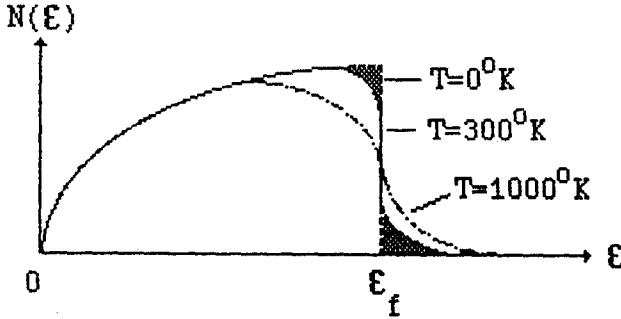
Olasılık fonksiyonunun  $T=0^{\circ}\text{K}$  sıcaklıklarındaki durumunu inceleyelim. Metalin sıcaklığının mutlak sıfırdan başlayarak, giderek arttığını düşünürsek, her sıcaklık değeri için elektronlara  $kT$  kadar bir ısı enerjisi ilave etmiş oluruz. Fermi düzeyinin yeterince altında, belirli enerji düzeylerine Pauli ilkesine uygun olarak tamamen doldurmuş bulunan elektronlar, civarda gidebilecekleri hiçbir boş enerji düzeyi (kuantum durumu) bulunmadığı için, kendilerine verilen ek enerjiyi kabul edemezler. Verilen ilave enerji, yalnız Fermi düzeyi civarında  $kT$  kadar bir enerji aralığında bulunan serbest elektronlar tarafından alınabilir. Böylece bu elektronların Fermi düzeyinin dışına çıkmaları sağlanır. Bu durumda, metal içindeki elektronların sayısı  $N$  sabit olduğundan,  $n_i(\epsilon)$  olasılık dağılım fonksiyonunun eğrisi, sıcaklık arttıkça eski keskin biçimini kaybedecektir. (Şekil 4.8) Aynı nedenle, bir kısım elektronun Fermi enerji düzeyinin üzerine çıkmaları sonucu, Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu da giderek biçim değiştirecektir.



Şekil 4.8. Olasılık fonksiyonunun sıcaklıkla değişimi.

Metallerin elektriksel ve ısı özelliklerini, metal içindeki serbest elektronların, tümü değil, enerjisi Fermi sınır enerjisi değerinden büyük olan, çok küçük bir bölümü yansıtır. Örneğin,  $T=300^{\circ}\text{K}$  de Şekil (4.8) ve (4.9) da taranmış bölgelerdeki elektronlar bu özellikleri yansıtır. Oda sıcaklığında, elektriksel ve ısı iletimleri sağlayan bu elektronların toplam elektron sayısı içindeki oranını bulmaya çalışalım. Fermi düzeyine kadar olan enerji düzeylerinin sayısını  $N/2$  olarak





Şekil 4.9. Sıcaklığın artmasıyla metal içindeki serbest elektronlardan enerjisi  $\epsilon_f$  Fermi enerjisinden büyük olanların sayısı giderek artacağı için, Fermi-Dirac dağılım eğrisinde meydana gelen değişim.

kabul edersek, düzeyler arasındaki farkları birbirine eşit ve  $\Delta\epsilon$  ile gösterirsek,

$$\Delta\epsilon \cong \epsilon_f / (N/2) = 2\epsilon_f / N$$

yazılabilir. Isıl uyarımlardan, sadece Fermi düzeyine yakın  $kT$  enerjisini alabilecek elektronlar etkilendiklerinden, sözkonusu enerji aralığındaki enerji düzeylerinin sayısı,  $kT/\epsilon_f = kTN/2\epsilon_f$  dir. Bu düzeydeki serbest elektronların sayısı ise  $kTN/\epsilon_f$  kadardır. Bu elektronların yarısının Fermi düzeyinin üstüne çıktıklarını kabul edersek

$$\Delta N/N \cong kT/2\epsilon_f$$

bağıntısından hesaplayabiliriz. Oda sıcaklığı civarında ( $T=300^\circ\text{K}$ )  $kT \cong 0.025$  eV, metaller için Fermi enerji değeri  $\epsilon_f=3-10$ eV olduğundan,

$$\Delta N/N \cong 0.01$$

bulunur. Yani, ısıl iletme katkıda bulunan elektron sayısı toplam elektron sayısının yüzde biri kadardır. Başka bir deyişle,

oda sıcaklığındaki bir metalde, her yüz elektrondan ancak birisi, Fermi sınırını geçerek, metalin elektriksel veya ısıl karakteri üzerinde etkili olabilmektedir. Sıcaklığı arttırsak, bu sayı bir miktar daha yükselir. Fakat toplam elektron sayısı içindeki oranları yine çok azdır. Örneğin,  $T=1000^{\circ}\text{K}$  gibi yüksek sıcaklıklarda bile  $\Delta N/N \approx 0.02-0.03$  mertebesinde dir.

#### 4.4. Enerji ve Basıncın Üleşim Fonksiyonuyla Elde Edilmesi:

Üleşim fonksiyonuna Eş.(3.11) ile

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/kT}$$

şeklinde göstermiştik. Üleşim fonksiyonu ele alınan sistemin özellikleri hakkında önemli bilgileri içermektedir. Bu sistemin E toplam iç enerjisi, S entropisi ve P basıncını üleşim fonksiyonuna bağlı olarak ifade edebiliriz.

V yi sabit tutarak Eş.(3.11) in T ye göre kısmi türevini alalım. Bu işlemi yaparsak

$$(\partial Z/\partial T)_V = \sum_i g_i (\epsilon_i/kT^2) e^{-\epsilon_i/kT}$$

$$(\partial Z/\partial T)_V = (1/kT^2) \sum_i g_i \epsilon_i e^{-\epsilon_i/kT}$$

$$(\partial Z/\partial T)_V = (1/kT^2) \sum_i (Z/N) \epsilon_i n_i$$

$$(\partial Z/\partial T)_V = (Z/NkT^2) \sum_i \epsilon_i n_i$$

$$(\partial Z/\partial T)_V = ZE/NkT^2$$

olur. Buradan toplam iç enerjiyi

$$E = NkT^2(\partial \ln Z/\partial T)_V \quad (4.35)$$

şeklinde buluruz. Ayrıca parçacık başına düşen enerji gözönüne alınırsa

$$\langle \mathcal{E} \rangle = E/N = kT^2(\partial \ln Z / \partial T) \quad (4.36)$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi de entropinin istatistiksel ifadesi  $S = k \ln \Omega$  eşitliğini dikkate alırsak, Eş.(3.4) bağıntısından yararlanarak

$$S = -k \sum_i n_i \ln(n_i/g_i) + kN \quad (4.37)$$

yazabiliriz. Diğer yandan  $n_i/g_i$  nin değerini de Eş.(3.12) den bularak yukarıdaki eşitlikte yerine koyarsak

$$S = Nk \ln(Z/N) + E/T + Nk \quad (4.38)$$

olur.

Şimdi de basıncı, üleşim fonksiyonuna bağlı olarak ifade edebilmek için, termodinamiğin birinci kanunundan

$$P = -dE/dV + T(dS/dV) = -(\partial(E-TS)/\partial V)_T$$

yazabiliriz. Eş.(4.38) den

$$E-TS = -NkT \ln(Z/N) - NkT$$

olduğundan sonuç olarak basınç için

$$P = NkT(\partial \ln Z / \partial V)_T \quad (4.39)$$

bağıntısını buluruz.

Böylece, sistemin mikroskopik özelliklerinin bir özeti olarak ifade edilebilecek olan bir üleşim fonksiyonu bilinirse, sistemin toplam iç enerjisi ve basıncı gibi niceliklerini T sıcaklığına bağlı olarak belirlemenin mümkün olduğu görülmektedir.

## 5. SONUÇ:

Çeşitli parçacıkların birbirleriyle etkileşirken ele aldığımız kurallar içinde, bir sistemin fiziksel özellikleri, içerdiği parçacıkların tek tek hareketlerine değil, büyük bir bölümünün ortaya koyduğu ortak davranışlara bağlıdır. Bu davranışlar istatistik fizik tarafından belirli bazı olasılık ve dağılım ilkelerine uygun olarak açıklanabilir. Bu davranışları açıklayabilmek için yapılan çalışmalar sonucunda, 3 üncü bölümde incelediğimiz istatistiksel dağılım ilkeleri ortaya çıkmıştır.

Kuantlaşmamış durumlar için geçerli olan

$$n_i = A g_i e^{-\epsilon_i/kT}$$

şeklinde gösterdiğimiz Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonu, gaz moleküllerinin hız dağılımlarını tayin etmekte başarılı olmuştur.

Fotonların enerji dağılımı ve metallerdeki serbest elektronların enerji düzeylerine olan dağılımları gibi bazı kuantlaşmış durumlarda Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonunun yetersiz kalışı, yeni araştırmalara çığır açmıştır. Foton gazı için klasik dağılım fonksiyonunun başarılı olamamasının nedenlerini araştırırken Bose ile Einstein birbirlerinden bağımsız olarak çalışmışlar ve

$$n_i = (g_i / e^{(\alpha + \epsilon_i/kT)} - 1)$$

olarak ifade edilen Bose-Einstein dağılım fonksiyonunu türetmişlerdir. Bu bağıntı siyah cisim ışımasının açıklanabilmesinde çok önemli katkılar sağlamıştır.

Herbir kuantum durumunda, sadece tek bir parçacığın bulunduğu sistemlerdeki, örneğin bir metaldeki elektronların davranışında, fiziksel olayların incelenebilmesi için Fermi ve Dirac tarafından

$$n_i = (g_i / e^{(\epsilon_i - \epsilon_f) / kT} + 1)$$

eşitliğiyle verilen Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu, metallerin ısı ve elektriksel özelliklerini incelerken çok önemli bir rol oynar. Bu dağılım fonksiyonu katı hal fiziğinde yapılan çalışmalarda, özellikle yarıiletkenler üzerinde yapılan araştırmalarda önemli bir parametredir.

Bu üç istatistiksel dağılım fonksiyonu

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{(MB)} \\ +1 & \text{(BE)} \\ -1 & \text{(FD)} \end{cases}$$

olmak üzere

$$(g_i / n_i) + \delta = e^{(\alpha + \epsilon_i / kT)}$$

şeklinde tek bir ifade de toplanabilir (Resnick et al 1980).

$(g_i / n_i)$  ifadesi 1 den çok büyük olduğunda yani  $g_i$  istatistiksel ağırlığı  $n_i$  den çok büyük olduğu sistemlerde her üç dağılım fonksiyonunda benzer sonuçlar verir. Bu yüksek sıcaklıklar için geçerlidir. Böyle durumlarda, kuantum istatistiğinin ortaya koyduğu etkiler ihmal edilebilir. Yani yüksek sıcaklıklarda klasik dağılım fonksiyonu daha başarılıdır. Sıcaklık düştükçe özellikle mutlak sıfır sıcaklığına yakın sıcaklıklarda kuantlaşmış durumlar için geçerli olan dağılım fonksiyonları daha başarılıdır.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Apaydın, F., 1988, İstatistik fizik, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, A-57, 453 s.
- Beiser, A., 1982, Concepts of modern physics, Mc Graw-Hill International Book Company, 533 p.
- Ekem, N., 1987, Kuantum fiziği ders notları (yayınlanmamış).
- Erbil, H., 1989, Kuantum fiziği, Ege Üniversitesi Basımevi, 482 s.
- Glimm, J. and Jaffe, A. 1981, Quantum physics, Springer-Verlag, 417 p.
- Gündüz, E., 1988, Modern fiziğe giriş, Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, 495 s.
- Jeans, S.J., 1962, An introduction to the kinetic theory of gases, Cambridge at the University Press, 311 p.
- Kara, İ., 1982, Olasılığa giriş, Eskişehir İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayınları, 325 s.
- Kılıçkaya, M.S., 1987, İstatistiksel fizik ve termodinamik ders notları (yayınlanmamış).
- Koç, Y., 1983, Doğanın kuantum mekaniksel betimlemesi ve ölçme sorunu, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, 185 s.
- Longair, M.S., 1986, Therotical concepts in physics, Cambridge University Press, 365 p.
- Mandl, F., 1980, Statistical physics, John Wiley & Sons Ltd., 379 p.

- Özemre, A.Y., 1978, Çağdaş fiziğe giriş, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, 198 s.
- Özemre, A.Y., 1983, Fizikte matematik metodlar, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, 360 s.
- Özemre, A.Y., 1987, Isı teorisi, İstanbul Üniversitesi Rektörlüğü Film Merkezi ve Matbaası, 208 s.
- Resnick, R. and Eisberg, R., 1974, Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles, John Wiley & Sons, 713 p.
- Salinger, G.L. and Sears, F.W., 1975, Thermodynamics, kinetic theory and statistical thermodynamics, Addison-Wesley Publishing Company, 454 p.
- Sproull, R.L. and Philips, W.A., 1980, Modern physics, the quantum physics of atoms, solids and nuclei, John Wiley & Sons, 682 p.
- Şenvar, C., 1982, Atom molekül ve çekirdek, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, 658 s.
- Toda, M., Kubo, R. and Saito, N., 1983, Statistical physics I, Springer-Verlag, 249 p.
- Wittke, J.P. and Dicke, R.H., 1969, Introduction to quantum mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, 369 p.

## EK 1. STIRLING YAKLAŞIMININ ÇIKARILMASI:

İstatistik fizikte, parçacık sayısının çok büyük, örneğin Avagadro sayısına yakın olduğu durumlarda  $N!$  gibi bir niceliği hesaplamak uzun işlemler gerektirir. Bu nedenle,  $N$  nin büyük olduğu durumlarda  $N!$  i hesaplamak için, bir yaklaşım yapılabilir.

$N!$  in değeri

$$N! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (N-1) \times N$$

dir. Buradan her iki tarafın  $\ln$ ' ine geçilirse

$$\ln N! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(N-1) + \ln N$$

$$\ln N! = \sum_{r=1}^N \ln r$$

yazılır. Buradaki  $r$  nin bir birim değişmesi  $\ln r$  yi değiştirmeyeceği için yukarıdaki toplama işlemi yerine, integral işlemi yapılabilir. Yani,

$$\ln N! = \int_1^N \ln r \, dr = (r \ln r - r) \Big|_1^N$$

yazılır. Burada  $N \gg 1$  olduğu için alt sınır 1 den 0 a götürülebilir. Böylece

$$\ln N! = N \ln N - N$$

bulunur. Bu bağıntı Stirling Yaklaşımı adını alır.



## EK 2. GAUSS INTEGRALLERİ:

x bir değişken,  $\alpha$  değişmez bir nicelik ve  $n \gg 0$  olmak üzere,

$$I(n) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

integraline Gauss integrali denir. Bu integralin değeri üstel fonksiyonların özellikleri kullanılarak bulunur. Gauss integrali, n nin birkaç değeri için aşağıdaki gibidir.

Çizelge Gauss Integrallerinin Birkaç Değeri:

<u>n</u>	<u>I(n)</u>	<u>I'(n)</u>
0	$(\sqrt{\pi/2})(\alpha)^{-1/2}$	$\sqrt{\pi}(\alpha)^{-1/2}$
1	$(1/2)(\alpha)^{-1}$	0
2	$(\sqrt{\pi/4})(\alpha)^{-3/2}$	$(\sqrt{\pi/2})(\alpha)^{-3/2}$
3	$(1/2)(\alpha)^{-2}$	0
4	$(3\sqrt{\pi/8})(\alpha)^{-5/2}$	$(3\sqrt{\pi/4})(\alpha)^{-5/2}$
5	$(\alpha)^{-3}$	0
6	$(15\sqrt{\pi/16})(\alpha)^{-7/2}$	$(15\sqrt{\pi/8})(\alpha)^{-7/2}$

Bu değerlere bağlı olarak

$$I'(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx$$

integralinin değerleri de yukarıda gösterildiği gibi  $I'(n)$  nin altında toplanmıştır.  $I'(n)$  nin integralleri,  $n=1,3,5,\dots$  gibi değerler için sıfırdır.

### EK 3. GAMA VE ZETA FONKSİYONLARI:

X değişken ve n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (1)$$

integraline gama fonksiyonu denir. Bu integrali oluşturmak için,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

integralini ele alalım. Bu integral, kısmi integral yöntemiyle

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = -(e^{-x} x^n)|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

yazılır. Burada birinci terim sıfır olduğu için,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (2)$$

ifadesi bulunur. Bu ifadenin sağ tarafına

$$n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = -n(e^{-x} x^{n-1})|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx$$

şeklinde arka arkaya kısmi integral uygulanırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$

deşitliđi bulunur. Yani,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n! \quad (3)$$

dir. Ayrıca Eş(1) ile verilen gama fonksiyonu tanımı, Eş(2) ve (3) bağıntılarında kullanılırsa

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n! \quad (4)$$

bulunur. Bu bağıntı n nin pozitif yada yarı tamsayı olması durumlarına karşı gelen gama fonksiyonlarının değerlerini bulmaya yeterlidir. Örneğin n pozitif tamsayı olmak üzere, (4) bağıntısının son iki eşitliğinden

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad ; \quad n > 0 \quad (5)$$

bulunur.

n=1,2,3,4 değerleri için, Eş(11) e göre

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1, \quad \Gamma(3)=2, \quad \Gamma(4)=6$$

olduğu görülmektedir. Aksine n pozitif yarı tam sayı ise, Eş(4) bağıntısının ilk iki eşitliğinden,

$$\Gamma(n+1)=n \Gamma(n) \quad , \quad n=1/2, 3/2, 5/2, \dots$$

yazılır. Bu eşitlikten bulunan gama fonksiyonu n nin yarı tamsayı değerlerinden birkaçı için aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge n nin Yarıtamsayı Değerleri İçin Gama Fonksiyonlarının Birkaç Değeri:

<u>n(yarı tamsayı)</u>	<u><math>\Gamma(n+1)</math></u>
1/2	$\Gamma(3/2)=(1/2)\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}/2$
3/2	$\Gamma(5/2)=(3/2)\Gamma(3/2)=(3/4)\Gamma(1/2)=3\sqrt{\pi}/4$
5/2	$\Gamma(7/2)=(5/2)\Gamma(5/2)=(15/8)\Gamma(1/2)=15\sqrt{\pi}/8$
7/2	$\Gamma(9/2)=(7/2)\Gamma(7/2)=(105/16)\Gamma(1/2)=105\sqrt{\pi}/16$
9/2	$\Gamma(11/2)=(9/2)\Gamma(9/2)=(945/32)\Gamma(1/2)=945\sqrt{\pi}/32$

Burada  $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$  olarak alınmıştır. Gerçekte Eş(1) de n=1/2 alınırsa

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1/2} dx$$

bulunur. Burada  $y=x^2$  alınırsa,

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

elde edilir. Bu integralin değeri EK 2. de  $\sqrt{\pi}$  ye eşittir. O halde

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

olacaktır.

Zeta Fonksiyonu:

$S > 0$  olmak üzere,

$$I_S = \int_0^{\infty} (x^S dx / e^x - 1) \quad (6)$$

gibi bir integrali ele alalım. Burada,

$$(x^S / e^x - 1) = (x^S e^{-x} / 1 - e^{-x}) = x^S e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} e^{-rx} x^S$$

yazılırsa,

$$I_S = \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^S e^{-rx} dx \quad (7)$$

bulunur. Eğer,  $xr=y$  değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$I_S = \sum_{r=1}^{\infty} (1/r^{S+1}) \int_0^{\infty} e^{-y} y^S dy \quad (8)$$

elde edilir. Eş(7) deki integral Eş(1) uyarınca gama fonksiyonudur. Bu durumda,

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-Y} Y^s dy$$

biçiminde yazılabilir ve değeri s nin alacağı değerlere göre aşağıdaki çizelgeden bulunur.

Çizelge s nin Bazı Değerleri İçin Gama Fonksiyonları:

s	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
s+1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
$\Gamma(s+1)$	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2	$15\sqrt{\pi}/8$	6	$105\sqrt{\pi}/16$	24

Eş(7) deki toplama ise Rieman Zeta fonksiyonudur ve,

$$\zeta(s+1) = \sum_{r=1}^{\infty} (1/r^{s+1}) \quad (9)$$

yazılır. Z nin birkaç değerine karşılık gelen zeta fonksiyonunun değeri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge s nin Bazı Değerleri İçin Zeta Fonksiyonları:

s	1/2	1	3/2	2	3
s+1	3/2	2	5/2	3	4
$\zeta(s+1)$	2.612	$\pi^2/6$	1.341	1.202	$\pi^4/90$

O halde Eş(6) ile verilen integralin değeri, gama fonksiyonuyla zeta fonksiyonunun çarpımıdır:

$$I_s = \Gamma(s+1) \zeta(s+1) \quad (10)$$

Bu bağıntılardan yararlanarak bulunan  $I_s$  değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge s nin Bazı Değerleri İçin (6) Integralinin Aldığı Değerler:

S	$I_s$
1/2	$\int_0^{\infty} (x^{1/2} dx) / (e^x - 1) = \Gamma(3/2)\zeta(3/2) = 2.612(\sqrt{\pi}/2) = 1.845$
1	$\int_0^{\infty} (x dx) / (e^x - 1) = \Gamma(2)\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.645$
3/2	$\int_0^{\infty} (x^{3/2} dx) / (e^x - 1) = \Gamma(5/2)\zeta(5/2) = 1.341(\sqrt{\pi}/4) = 1.783$
2	$\int_0^{\infty} (x^2 dx) / (e^x - 1) = \Gamma(3)\zeta(3) = 2 \times 1.202 = 2.404$
3	$\int_0^{\infty} (x^3 dx) / (e^x - 1) = \Gamma(4)\zeta(4) = 6 \times (\pi^4/90) = \pi^4/15 = 6.494$

