TENSÖR ANALİZİ ve

FİZİĞE UYGULAMALARI

Murat TANIŞLI

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim

Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Kudret ÖZDAŞ

Eylül- 1989

Murat Tanışlı nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Tensör Analizi ve Fiziğe Uygulamaları" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

..6./.9../1989.

üye : Doç. Ertunç ARAL

üye : Doç. M. Selami KILIÇKAYA

üye : Y. Doç. Dr. Kudret ÖZDAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu nun 11 EYLÜL 1989 gün ve .219/2...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Tensörel ifadeler, fiziğin her dalında olduğu gibi mühendislik dallarının bir çoğuna geniş uygulama alanı olarak girmiştir. Tensör analizi yardımıyla her koordinat sisteminde kullanabileceğimiz denklemler elde edilebilir. Bu denklemler kullanım kolaylığı sağladığı için, çözülebilecek problem sayısını da artıracaktır.

Bu çalışmada, tensör tanımından yola çıkarak, tensör cebri incelenmiştir. Uygulamada karşımıza çıkabilecek yalın ve her koordinat sisteminde geçerli genel ifadeler elde edilmiştir. Bunlardan yararlanarak Lagrange ve Hamilton denklemlerinin tensörel formda nasıl ifade edildiği bir uygulama alanı olarak ele alınmıştır. Ayrıca elastisite teorisinin temel kavramları olan stress ve strain, diğer bir uygulama olarak tensörel formda ifade edilmiştir.

SUMMARY

Tensors have been applied besides, in every branch of physics, widely in engineering. By using tensor analysis, we can obtain the equations that can be used in every coordinate system. These equations, because of their easy usage, increase the number of solvable problems.

In this study, first tensors were described and tensor algebra was discussed. Then, general expressions, which are flame and valid in every coordinate system and, could be our concerning in the applications, were obtained. By using these equations, the expression of Lagrange and Hamilton equations were discussed as an application. In addition, the basic concepts of the elasticity theory, stress and strain, were expressed in tensor form as an another application.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı,yüksek lisans tezi olarak bana veren ve çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren Sayın Yrd. Doç. Dr. Kudret ÖZDAŞ a,tezin yazımı sırasında benden yardımlarını esirgemeyen Hidayet ÖZDEMİR e teşekkür ederim.

M. TANIŞLI

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\hat{e}_i$	Baz vektörler
$\hat{e}^k$	Ters baz vektörler
g_{ik} , g^{ik} , $g_i^{\cdot k}$	Metrik tensörler
δ	Kronecker deltası
ϵ	Permütasyon sembolü
∂	Kısmi türev gösterimi
∇	Nabla (del) operatörü
grad	Gradyent
div	Diverjans
curl	Curl
∇^2	Laplacian
q	Koordinatlar
Γ	Christoffel sembolleri
m	Kütle
$d\sigma$	Alan elemanı

1.GİRİŞ

Tensörler,skalar ve vektörlerin bir genelleştirilmiş şeklidir. Tensörel denklemlerle elde edilen fizik yasaları yalın ve her koordinat sisteminde geçerlidir. Çünkü tensör analizi,koordinat dönüşümlerine rahatlıkla uygulandığı için problemlerin her referans çerçevesinde çözülmesine imkan sağlar. Genel olarak n-boyutlu uzayda n inci mertebe bir tensör,n tane bileşene sahiptir. Bu bileşenler göz önüne alındığında karşımıza,tensörün mertebesine göre,bir sayı,bir vektör veya bir matris çıkabilir.

Tensör analizi yöntemleri,fiziğin mekanik (Bradbury,1968),Akışkanlar mekaniği (Lai,Rubin and Krempl,1978),elektromagnetik teori (Schwartz,1972), yüksek enerji fiziği (Nishijima,1974),termodinamik (Nye,1957),katıhal fiziği (Harrison,1970),kuantum fiziği (Schiff,1968) dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Günümüzde pek çok uygulamalı araştırmada da tensör hesabına da baş vurulmaktadır. örneğin tensör hesabı kulllanılarak robot kollarının hareketi analiz edilmiş (Bae and Haug,1987),lityum un spektrometrik parametreleri hesaplanarak deney sonuçlarıyla karşılaştırılmış (Kostritskii and Semenov,1984),dielektrik kristallerde jirasyon ve elektrojrasyon etkileri arasındaki bağıntı verilmiş (Stasyuk and Kotsur,1985),elastisite teorisinin lineer olmayan problemlerinin çözümleri tensörel olarak ele alınmıştır (Nikolskii,1986).

Bu çalışmada şu sıra izlenmiştir : Bölüm 2 de,tensör tanımı ele alınarak,bileşenler tanıtılmıştır. Bölüm 3 de,baz vektörler ve bunların direkt ve ters dönüşümleri ve aralarındaki dönüşüm bağıntıları,bölüm 4 de ise tensör kavramına giriş yapılarak sıfırıncı,birinci,ikinci ve yüksek mertebeli tensörler anlatılmıştır. Bölüm 5 te tensör denklemlerinin invaryanslığı,bölüm 6 da ise bazlar ve koordinat eksenleri anlatılmıştır. Bir tensörün kovaryant, kontravaryant ve karma bileşenlerinin ele alındığı bölüm 7 de, metrik tensör de tanıtılmıştır. Bölüm 8 de tensör cebri ele alınmış ve tensörlerde toplama, çarpma, daraltma, simetrik ve antisimetrik tensörlerle, tensörün invaryantları incelenmiştir. Bölüm 9 da birinci mertebe tensör olarak ele alınan vektörlerin cebri anlatılmıştır. Bölüm 10 da diferansiyel vektör operatörleri tensörel bir yaklaşımla ele alınmış ve bölüm 11, bölüm 12, bölüm 13 de sırasıyla Lagrange ve Hamilton denklemleri ile stress ve strain, tensör hesabının uygulamaları olarak incelenmiştir.

2. TENSÖR

2.1. Tanım

Herhangi bir vektörü başka vektöre dönüştüren bir T dönüşümünü ele alalım. Eğer T; a_1 i b_1 e, a_2 yi de b_2 ye dönüştürüyorsa,

$$T\,a_1 = b_1$$
$$T\,a_2 = b_2$$

yazabiliriz. Buradaki T dönüşümü ; a_1 ve a_2 herhangi iki vektör ve α keyfi bir skalar sayı olmak üzere,

$$T(a_1 + a_2) = T\,a_1 + T\,a_2$$
$$T(\alpha a_1) = \alpha T\,a_1$$

gibi lineer özelliklere sahipse, lineer dönüşüm veya kabaca tensör olarak adlandırılır (Lai, Rubin and Krempl, 1978).

2.2. Bir Tensörün Bileşenleri

Kartezyen koordinat sisteminde x_1, x_2 ve x_3 -eksenleri doğrultusundaki birim vektörleri sırasıyla $\hat{i}=\hat{e}_1$, $\hat{j}=\hat{e}_2$, $\hat{k}=\hat{e}_3$ olarak alalım. Bir **a** vektörünün kartezyen bileşenleri,

$$a_1 = a_1 \cdot \hat{e}_1$$
$$a_2 = a_2 \cdot \hat{e}_2$$

$$a_3 = a \cdot \hat{e}_3$$

veya kompakt olarak,

$$a_i = a \cdot \hat{e}_i \qquad i=1,2,3 \qquad (2.1)$$

şeklinde yazılır. Buna göre, **a** vektörü bileşenleri cinsinden;

$$a = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3$$
$$= a_i\ \hat{e}_i \qquad i=1,2,3 \qquad (2.2)$$

dir.

Şimdi lineer dönüşüm tanımını kullanarak, herhangi bir **a** vektörünü, **b** = T **a** şeklinde bir **b** vektörüne dönüştüren T tensöiünün bileşenlerini bulalım. Dönüşümün açık ifadesi,

$$b = T\ a = a_1\ T\ \hat{e}_1 + a_2\ T\ \hat{e}_2 + a_3\ T\ \hat{e}_3$$
$$= a_i\ T\ \hat{e}_i \qquad i=1,2,3 \qquad (2.3)$$

şeklindedir. **b** vektörünün bileşenleri ise,

$$b_1 = b\cdot\hat{e}_1 = a_1\,\hat{e}_1\cdot T\ \hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_1\cdot T\ \hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_1\cdot T\ \hat{e}_3$$
$$b_2 = b\cdot\hat{e}_2 = a_1\,\hat{e}_2\cdot T\ \hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2\cdot T\ \hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_2\cdot T\ \hat{e}_3$$
$$b_3 = b\cdot\hat{e}_3 = a_1\,\hat{e}_3\cdot T\ \hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_3\cdot T\ \hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3\cdot T\ \hat{e}_3$$

veya kompakt olarak,

$$b_i = a_j \hat{e}_i \cdot T \hat{e}_j \qquad i,j=1,2,3 \qquad (2.4)$$

dir.[1] Buradaki $\hat{e}_i \cdot T \hat{e}_j$ terimi, $T \hat{e}_j$ nin $\hat{e}_i$ bileşenidir. örneğin $\hat{e}_1 \cdot T \hat{e}_1$ terimi, $T \hat{e}_1$ in; $\hat{e}_1$ bileşenidir. Bu bileşenleri $T_{11} = \hat{e}_1 \cdot T \hat{e}_1$, $T_{21} = \hat{e}_2 \cdot T \hat{e}_1$ ve $T_{12} = \hat{e}_1 \cdot T \hat{e}_2$ v.s. olarak yazmayı kabul edersek, T tensörünün T_{ij} bileşenleri,

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot T \hat{e}_j \qquad (2.5)$$

olarak yazılır. Buna göre **b** = T **a** vektör denklemini bileşenleri cinsinden,

$$\begin{aligned} b_1 &= T_{11} a_1 + T_{12} a_2 + T_{13} a_3 \\ b_2 &= T_{21} a_1 + T_{22} a_2 + T_{23} a_3 \\ b_3 &= T_{31} a_1 + T_{32} a_2 + T_{33} a_3 \end{aligned}$$

veya genel olarak,

$$b_i = T_{ij} a_j \qquad i,j=1,2,3 \qquad (2.6)$$

---

[1] Burada Einstain in toplam kuralı kullanılmıştır. Bu kurala göre tekrarlanan indis üzerinden toplam alınacaktır. Yani, $b_i = \sum_{i,j=1}^{3} a_j \hat{e}_i \cdot T \hat{e}_j$ ifadesinin yazılımı $b_i = a_j \hat{e}_i \cdot T \hat{e}_j$ dir.

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadenin matris formu ise,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

olarak yazılır. Buradaki,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

matrisi $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ baz vektörlerine göre T tensörünün matris formu adını alır.

Matrisin birinci, ikinci ve üçüncü sütunlarındaki bileşenlerinin sırasıyla $T\hat{e}_1$, $T\hat{e}_2$ ve $T\hat{e}_3$ vektörlerinin bileşenleri olduğunu kabul edelim. Buna göre; $T\hat{e}_1$, $T\hat{e}_2$ ve $T\hat{e}_3$ vektörlerini,

$$T\hat{e}_1 = T_{11}\hat{e}_1 + T_{21}\hat{e}_2 + T_{31}\hat{e}_3 = T_{j1}\hat{e}_j$$
$$T\hat{e}_2 = T_{12}\hat{e}_1 + T_{22}\hat{e}_2 + T_{32}\hat{e}_3 = T_{j2}\hat{e}_j$$
$$T\hat{e}_3 = T_{13}\hat{e}_1 + T_{23}\hat{e}_2 + T_{33}\hat{e}_3 = T_{j3}\hat{e}_j$$

veya kompakt olarak,

$$T\hat{e}_i = T_{ji}\hat{e}_j \,, \qquad i,j=1,2,3 \tag{2.8}$$

şeklinde yazabiliriz.

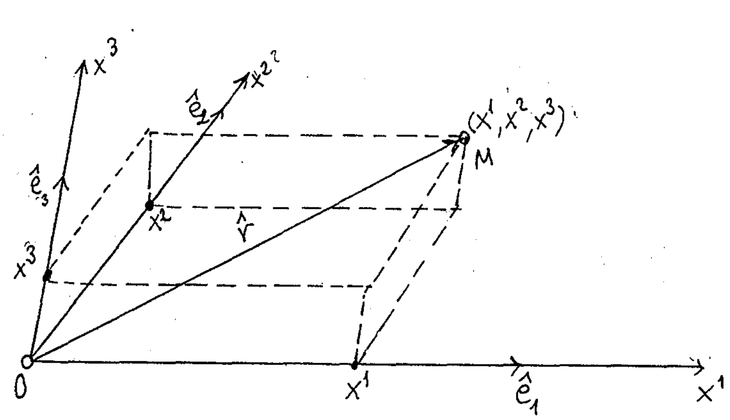
3.BAZLAR VE BAZ VEKTÖRLER

Üç boyutlu uzayda bir baz denildiğinde, $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ lineer bağımsız vektörlerin bir kümesini anlarız. $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ vektörlerinin herbiri bir baz vektör olarak adlandırılır. $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ baz vektörleri verilsin, her **A** vektörü;

$$A = m\,\hat{e}_1 + n\,\hat{e}_2 + p\,\hat{e}_3$$

şeklinde tek bir ifadeye sahiptir.

Farz edelimki; $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ baz vektörlerinin hepsi aynı O orijininden çizilsin ve Ox^k ; $\hat{e}_k$ vektörünü içeren doğruyu göstersin. Burada k, 1 den 3 e kadar değer alır. Bu, şekil 3.1 deki gibi O orijinli ve eksenleri Ox^1 , Ox^2 ve Ox^3 olan yatık koordinat sistemini verir.

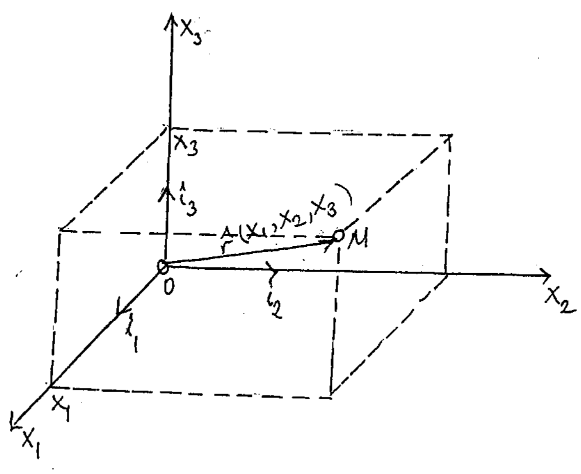


Şekil 3.1 ($\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$) bazlı yatık koordinat sistemi

Kartezyen olsun veya olmasın verilen bir koordinat sistemine göre bir M noktasının konumu $\mathbf{r} = \mathbf{r}$ (M) yer vektörüyle belirlidir (Şekil 3.1 ve Şekil 3.2). Yani yer vektörü M noktasına, koordinat sisteminin orijininden çizilen bir vektörle gösterilir. Farz edelim ki kartezyen koordinat sisteminde M noktası x_1, x_2 ve x_3 koordinatlarına sahip olsun. x_1, x_2 ve x_3 koordinatları, M ile $x_2\, x_3$, $x_3\, x_1$ ve $x_1\, x_2$ - düzlemleri arasındaki mesafelerdir. Böylece yer vektörü kartezyen bileşenleri cinsinden,

$$r = x_1\, \hat{i}_1 + x_2\, \hat{i}_2 + x_3\, \hat{i}_3$$

olarak yazılır.

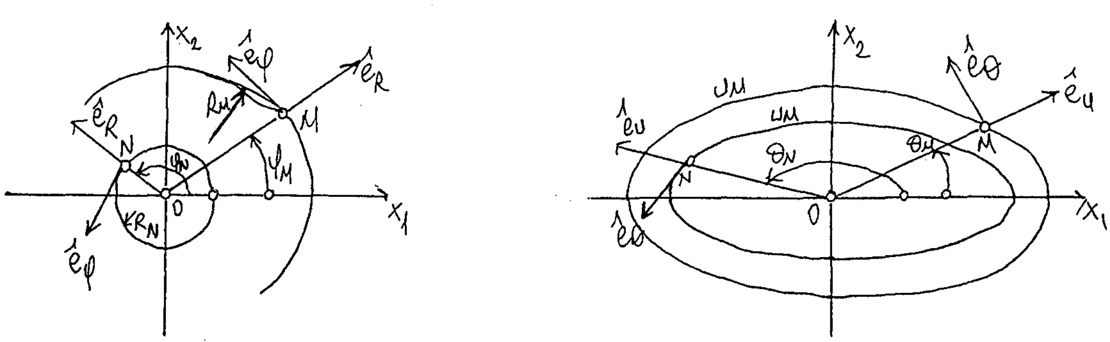


Şekil 3.2 $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$ bazlarıyla bir kartezyen koordinat sistemi

Vektör ve tensörlerin en önemli özelliği fiziksel olayları tanımlayan denklemleri herhangi bir koordinat sistemine bağlı olmaksızın ifade edebilmesidir. Bununla beraber verilen bir problemi çözmek için gereken hesapların yapılmasında problem yalnızca skalarları içeren bir forma dönüştürülür. Bu işlem uygun bir koordinat sistemi meydana getirildikten sonra verilen vektör (veya tensör) denklemleri eşdeğer skalar denklem sistemiy ile yer değiştirilerek yapılır. Skalar denklem sistemi yalnız sayıları içerir ve bilinen aritmetik kurallara tabi olur. Bunu yapmak için anahtar adım bir vektörü (veya tensörü) seçilen koordinat sistemine karşı gelen uygun bir baza göre açmaktır.

örnek olarak iki boyutlu durumu ele alalım. Düzlemde bir M noktasının konumu, koordinat sisteminden bağımsız ve keyfi olarak seçilen sabit O noktasına göre bir $\mathbf{r}$ yer vektörüyle belirtilir. Bununla beraber, herhangi bir hesaplama yapmadan önce, koordinat sistemine bir giriş yapmalıyız. Düzlemde M noktasının konumu, onun koordinatları olarak adlandırılan p ve q sasayılarıyla verilir, bunlar ölçme birimlerine ve koordinat sistemine bağlıdır. Kartezyen koordinat sisteminde, bu $p \equiv x_1$ ve $q \equiv x_2$ koordinatları M ile orijinden geçen dik iki doğru arasındaki mesafelerdir. Bir koordinatı sabit tutup diğerini sürekli olarak değiştirdiğimizde bir koordinat eğrisi elde ederiz. Bu durumda düzlemin her noktasından geçen iki koordinat eğrisi vardır. Kartezyen koordinat sisteminde bu eğriler koordinat eksenlerine paralel doğrulardır. p ve q koordinatlarına karşı gelen baz vektörler olarak M noktasında koordinat eğrilerine teğet birim vektörleri seçeriz. Kartezyen koordinatlarda bunlar, koordinat eksenlerine paralel $\hat{i}_1$ ve $\hat{i}_2$ birim vektörleridir.

Aşikar olarak kartezyen koordinat sisteminin $\hat{i}_1$ ve $\hat{i}_2$ baz vektörleri M noktasından bağımsız olup daima birbirlerine diktirler. M nin konumu kartezyen koordinatlar yerine polar koordinatlarda da ifade edilebilir. Bu durumda koordinatlar M noktası ile sabit O noktası (kutup noktası) arasındaki R mesafesi ile O dan geçen ve polar eksen adını alan ışın ile OM doğru parçası arasındaki φ açısıdır. Polar koordinatlardaki koordinat eğrileri R yarıçaplı daireler ile O noktasından geçen ışınlardır. Bu koordinat eğrilerine karşı gelen baz vektörler şekil 3.3a da gösterilen $\hat{e}_R$ ve $\hat{e}_\varphi$ birim vektörleridir. Bu baz vektörler kartezyen baz vektörlerinin aksine noktadan noktaya değişir. Ancak daima birbirine dik kalır. Bir koordinat sisteminin baz vektörleri her noktada daima birbirlerine dik iseler böyle koordinat sistemlerine ortogonal koordinat sistemleri adı verilir. Uygulamada en çok kullanılan koordinat sistemleri bunlardır. Bir koordinat sisteminin koordinat eğrileri doğru çizgiler değilseler böyle koordinat sistemlerine eğrisel koordinat sistemleri adı verilir.



(a) (b)

Şekil 3.3 Düzlemde eğrisel koordinatlar

(a) Polar koordinatlar (b) Genelleştirilmiş polar koordinatlar

Kutup noktası O olan bir $R\varphi$ -polar koordinat sistemi ve orijini yine O olan x_1 x_2 -kartezyen koordinat sistemi verilsin, varsayalım ki polar koordinat sisteminin polar ekseni ile kartezyen koordinat sisteminin x_1 -ekseni çakışsın. Bu durumda x_1 x_2 -kartezyen koordinatları ve $R\varphi$-polar koordinatları arasındaki dönüşüm ve ters dönüşüm bağıntıları,

$$x_1 = R\cos\varphi$$
$$x_2 = R\sin\varphi \qquad (3.1)$$

ve

$$R=\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad (0 \leq R < \infty)$$
$$\tan\varphi = x_2 / x_1 \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

formülleriyle verilir (Şekil 3.3).

Daha genel olarak koordinat eğrileri,

$$u=\sqrt{(x_1^2 / a^2) + (x_2^2 / b^2)} \qquad (0 \leq u < \infty)$$

şeklinde elipsler olan $u\theta$-genel koordinat sistemi düşünelim. Burada ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$) olup diğer koordinat eğrileri,

$$\tan\theta = a\, x_2 / b\, x_1 \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

şeklinde verilen ışınlardır. u,θ genel polar koordinatları x_1, x_2 kartezyen koordinatları arasındaki dönüşüm bağıntıları,

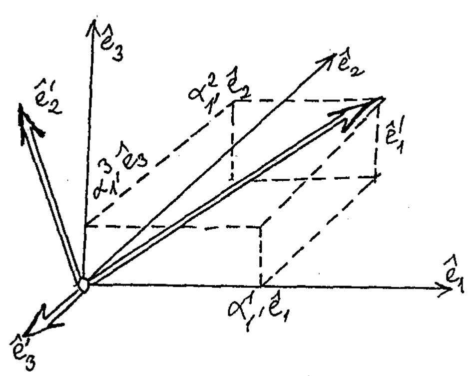
$$x_1 = a\, u \cos\theta$$

$$x_2 = b\ u\ \sin\theta$$

dir. Sistemin baz vektörleri $\hat{e}_u$ ve $\hat{e}_\theta$ birim vektörleridir (Şekil 3.3b). $\hat{e}_u$ ve $\hat{e}_\theta$ tıpkı polar baz vektörler gibi noktadan noktaya değişir. Ancak her zaman ortogonal değildir. Bu yüzden uθ-genel polar koordinat sistemi ortogonal değildir.

3.1. Baz Vektörlerin Direk ve Ters Dönüşümü

Aynı O noktasından çizilen iki $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ve $\hat{e}_{1'}, \hat{e}_{2'}, \hat{e}_{3'}$ bazını ele alalım. Birinci bazın her vektörü ikinci bazın vektörleri cinsinden ifade edilebilir (Şekil 3.4).



Şekil 3.4 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ vektörlerine göre $\hat{e}_{i'}$ vektörünün dağılımı.

$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ vektörlerine göre $\hat{e}_{i'}$ nin açılım katsayıları $\alpha_{i'}^1, \alpha_{i'}^2, \alpha_{i'}^3$ olsun. Buna göre,

$$\hat{e}_{1'} = \alpha_{1'}^1 \hat{e}_1 + \alpha_{1'}^2 \hat{e}_2 + \alpha_{1'}^3 \hat{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{1'}^k \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_{2'} = \alpha_{2'}^1 \hat{e}_1 + \alpha_{2'}^2 \hat{e}_2 + \alpha_{2'}^3 \hat{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{2'}^k \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_{3'} = \alpha_{3'}^1 \hat{e}_1 + \alpha_{3'}^2 \hat{e}_2 + \alpha_{3'}^3 \hat{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{3'}^k \hat{e}_k$$

veya kompakt olarak,

$$\hat{e}_{i'} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{i'}^k \hat{e}_k \qquad i=1,2,3 \qquad (3.2)$$

dir. Buradaki dokuz $\alpha_{i'}^{k}$ (i,k=1,2,3) katsayısı üssüz sistemden üslü sisteme direk dönüşüm katsayıları olarak adlandırılır.

Benzer yolla, $\hat{e}_{1'}$, $\hat{e}_{2'}$, $\hat{e}_{3'}$ vektörlerine göre $\hat{e}_{i}$ açılım katsayıları olarak $\alpha_{i}^{1'}, \alpha_{i}^{2'}, \alpha_{i}^{3'}$ leri alırsak,

$$\hat{e}_{i} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{i}^{k'} \hat{e}_{k'} \qquad i=1,2,3 \qquad (3.3)$$

dir. Buradaki dokuz $\alpha_{i}^{k'}$ katsayısı ise üslü sistemden üssüz sisteme ters dönüşüm katsayıları olarak adlandırılır.

Direk, ters dönüşüm katsayıları arasında basit bağıntı vardır. Denklem (3.3) yi denklem (3.2) de yerine koyarak düzenlersek,

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{i'} &= \alpha_{i'}^{1} \hat{e}_{1} + \alpha_{i'}^{2} \hat{e}_{2} + \alpha_{i'}^{3} \hat{e}_{3} \\
&= \alpha_{i'}^{1} (\alpha_{1}^{1'} \hat{e}_{1'} + \alpha_{1}^{2'} \hat{e}_{2'} + \alpha_{1}^{3'} \hat{e}_{3'}) + \alpha_{i'}^{2} (\alpha_{2}^{1'} \hat{e}_{1'} + \ldots) + \alpha_{i'}^{3} (\alpha_{3}^{1'} \hat{e}_{1'} + \ldots) \\
&= (\alpha_{i'}^{1} \alpha_{1}^{1'} + \alpha_{i'}^{2} \alpha_{2}^{1'} + \alpha_{i'}^{3} \alpha_{3}^{1'}) \hat{e}_{1'} + (\alpha_{i'}^{1} \alpha_{1}^{2'} + \ldots) \hat{e}_{2'} + (\alpha_{i'}^{1} \alpha_{1}^{3'} + \ldots) \hat{e}_{3'} \\
&= \hat{e}_{1'} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_{l}^{1'} + \hat{e}_{2'} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_{l}^{2'} + \hat{e}_{3'} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_{l}^{3'} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \hat{e}_{k'} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_{l}^{k'} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

denklemi elde ederiz. Aynı yolla, diğer dönüşüm:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{i} &= \hat{e}_{1} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i}^{l'} \alpha_{l'}^{1} + \hat{e}_{2} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i}^{l'} \alpha_{l'}^{2} + \hat{e}_{3} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i}^{l'} \alpha_{l'}^{3} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \hat{e}_{k} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i}^{l'} \alpha_{l'}^{k} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklem (3.4) ve denklem (3.5) bize aşağıdaki on sekiz bağıntıyı verir:

$$\sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_{l}^{j'} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } i \neq j \\ 1 & \text{eğer } i = j \end{cases}$$

$$\sum_{l=1}^{3} \alpha_{i}^{l'} \alpha_{l'}^{j} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } i \neq j \\ 1 & \text{eğer } i = j \end{cases} \qquad (3.6)$$

4.TENSÖR KAVRAMI

Bir skalar, herhangi bir koordinat sisteminde tek bir sayı ile belirtilebilen bir niceliktir. Bir vektör 3-boyutlu koordinat sisteminde, herhangi bir baza göre üç sayı ile belirtilebilen bir niceliktir. Skalarlar ve vektörlerin her ikisi, n inci mertebe tensör olarak adlandırılan daha genel niceliklerin özel halleridir. Bir n inci mertebe tensör, verilen herhangi bir 3-boyutlu koordinat sisteminde, tensörün bileşenleri adı verilen 3^n tane sayı ile tayin edilir. Skalarlar $3^0=1$ bilişene sahip sıfırıncı mertebe tensörler, vektörler ise $3^1=3$ bileşene sahip birinci mertebe tensörlerdir.

Bir tensörün anahtar özelliği, bileşenlerinin dönüşüm yasasıdır. Yani tensörün bir koordinat sistemindeki bileşenlerinin diğer koordinat sistemindeki bileşenlerine nasıl bağlı olduğudur.

4.1. Sıfırıncı Mertebe Tensörler-Skalarlar

Pozitif, negatif veya sıfır olabilen tek bir sayıyla ifade edilebilen niceliklere skalar adı verilir. Skalarlar ancak aynı fiziksel boyuta sahipseler birbiriyle karşılaştırılabilirler. Aynı birim sisteminde ölçüler iki skaların eşit olabilmesi için bunların aynı büyüklük ve işarete sahip olmaları gerekir. Bir skalar herhangi bir koordinat sisteminde tek bir reel sayıyla ifade edilebilen bir niceliktir. Skaların değeri veya bileşeni denilen bir reel sayı koordinat sisteminin değişimleri altında invaryant kalır. Yani, koordinat sistemi değiştiği zaman skaların değeri değişmez. Bu yüzden herhangi bir koordinat sisteminde bir skaların değeri φ ve diğerinde φ' ise $\varphi = \varphi'$ dir.

4.2. Birinci Mertebe Tensörler-Vektörler

3-boyutlu uzayda bir vektör üç skalar ile meydana getirilir. Bu skalarlara vektörün bileşenleri adı verilir. örneğin üç boyutlu uzayda bir yer değiştirme üç skalarla belirtilir. Yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri olan bu skalarlar koordinat değişimleri altında belirli bir yasaya göre dönüşürler. Daha genel olarak bir vektörün üç bileşeni uzayda belirli bir yasaya göre dönüştüğünde yeni bileşenler daima aynı vektörü belirtir.

Şimdi vektörlerin dönüşüm yasasını bulalım : A ve B noktalarının koordinatları arasındaki fark K sisteminde Δx_i , K' sisteminde $\Delta x_i'$ olsun. O zaman bunlar arasındaki dönüşüm bağıntısı :

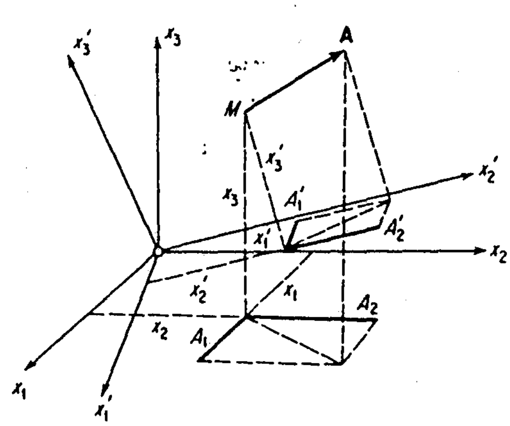
$$\Delta x_i' = \alpha_{i'k} \, \Delta x_k \tag{4.1}$$

dir. Buradaki $\alpha_{i'k}$; K' sisteminin i inci ekseni ile K sisteminin k ıncı ekseni arasındaki açının kosinüsüdür.

Benzer olarak bir A vektörünün K sistemindeki bileşenlerinin A_i, K'de A_i' olduğunu varsayalım (Şekil 4.1.). A_i ve A_i' bileşenleri tıpkı Δx_i ve $\Delta x_i'$ koordinat farkları gibi dönüşür. Bu durum şu tanıma yol açar : Bir vektör herhangi bir koordinat sisteminde, vektörün bileşenleri adını alan üç reel sayıyla ifade edilir. Bu reel sayılar koordinat sisteminin değişimleri altında,

$$A'_i = \alpha_{i'k} A_k \qquad (4.2)$$

yasasına uygun olarak dönüşür.



Şekil 4.1 Koordinat sistemlerinin değişimi altında, bir vektörün bileşenlerinin değişimi

4.3. İkinci Mertebe Tensörler

İkinci mertebe tensorler, skalarlar ve vektörlerden daha yüksek mertebeye sahip tensörlerin en basitidir. Bir ikinci mertebe tensör, üç boyutlu uzayda, dokuz reel sayı tarafından tek bir şekilde ifade edilir. Tensörün bileşenleri adını alan bu reel sayılar koordinat sisteminin değişimleri altında,

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\,\alpha_{k'm}\,A_{lm} \qquad (4.3)$$

yasasına uygun olarak dönüşürler. Buradaki A_{lm}; tensörün K sistemindeki bileşenleri, A'_{ik}; tensörün K' sistemindeki bileşenleridir. $\alpha_{i'l}$; K' nin i inci ekseni ile K nın l ıncı ekseni arasındaki açının kosinüsü, $\alpha_{k'm}$ ise K' nın k ıncı ekseni ile K nın m inci ekseni arasındaki kosinüsüdür.[1]

4.4. Yüksek Mertebe Tensörler

Mertebesi sıfır, bir, iki olan tensörlerin dönüşüm yasalarının;

$$\varphi = \varphi'$$
$$A'_i = \alpha_{i'l}\,A_l \qquad (4.4)$$
$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\,\alpha_{k'm}\,A_{lm}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir. Denklem (4.3) in doğal genelleştirilmesi aşağıdaki gibi yapılır. 3-boyutlu uzayda bir n inci mertebe tensör, tensörün bileşenleri adını alan 3^n reel sayıyla meydana getirilir. Bu n inci mertebe

---

[1] Bir ikinci mertebe tensörün herhangi bir kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri verildiğinde, diğer herhangi sistemdeki bileşenleri denklem (4.3) kurularak bulunabilir.

tensörün bileşenleri koordinat değişimleri altında,

$$A'_{i_1' i_2' \ldots i_n'} = \alpha_{i_1' k_1} \alpha_{i_2' k_2} \ldots \alpha_{i_n' k_n} A_{k_1 k_2 \ldots k_n} \qquad (4.5)$$

yasasına uygun olarak dönüşürler. Buradaki $A_{k_1 k_2 \ldots k_n}$; tensörün K sisteminde bileşenleri, $A'_{i_1' i_2' \ldots i_n'}$ ise tensörün K' sistemindeki bileşenleridir. $\alpha_{i_1' k_1}$; K' nin i_1 inci ekseni ile K' nın k_1 ekseni arasındaki açının kosinüsüdür (Diğer $\alpha_{i_n' k_n}$ katsayıları da benzer şekilde).

5. TENSÖR DENKLEMLERİNİN İNVARYANSLIĞI

Bir K kartezyen koordinat sisteminde; φ , ψ ,... skalarlarına, a_i , b_i ,... vektörlerini, c_{ik} , d_{ik} ,... tensörlerini v.s. içine alan,

$$F(\varphi, \psi, \ldots, a_i, b_i, \ldots, c_{ik}, d_{ik}, \ldots) = 0 \qquad (5.1)$$

denklemini ele alalım. Farzedelimki K sistemi döndürülüp ve kaydırılarak yeni bir K' kartezyen koordinat sistemi elde edilsin. O zaman denklem (5.1),

$$G(\varphi', \psi', a_i', b_i', \ldots, c_{ik}', d_{ik}', \ldots) = 0 \qquad (5.2)$$

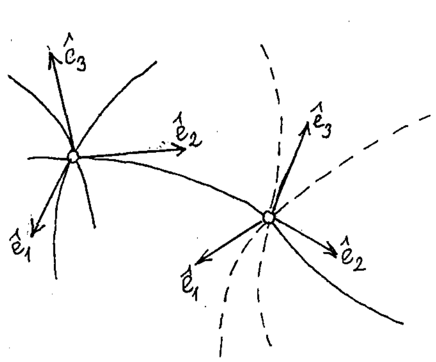
denklemi ile yer değiştirilir. Burada skalarların, vektörlerin ve tensörlerin bütün bileşenleri K' de yazılmıştır. Genelde, denklem (5.1) ve denklem (5.2) aynı formda değildir yani, $F \not\equiv G$ dir. Bununla beraber denklem (5.2) nin denklem (5.1) ile aynı forma sahip olduğunu varsayalım, öyleki; denklem (5.2)

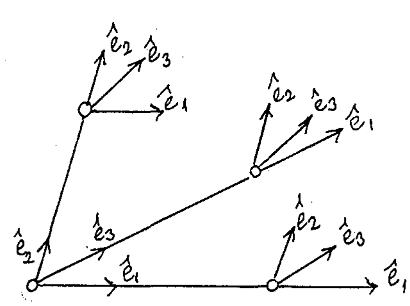
$$F(\varphi',\psi',a_i',b_i',\ldots,c_{ik}',d_{ik}',\ldots)=0 \qquad (5.3)$$

olsun. Bu durumda denklem (5.1) in K dan, K' ye dönüşüm altında invaryant olduğu söylenir. Fizik yasalarını ifade eden formüller, kaymalar ve dönmeler altında invaryant olmalıdır. Çünkü gerçek uzay homojen ve izotropiktir. Bir fizik yasasını ifade eden bir denklemdeki bütün tensör terimleri aynı mertebeden olmalıdır. Ayrıca fizik yasalarını ifade eden denklemlerin seçilen birimlerden bağımsız olması gerekir.

6. BAZLAR VE KOORDİNAT EKSENLERİ

q^1, q^2, q^3 genelleştirilmiş koordinatlarına sahip bir sistemin bazı sözüyle koordinat eğrilerinin pozitif yönlerine doğru yönelmiş $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sabit uzunluklu vektörlerin kümesini anlarız. $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ vektörleri baz vektörler olarak adlandırılırlar. Böylece $\hat{e}_1$, (q^1) koordinat eğrisine teğettir ve artan (q^1) in yönüne yönelmiştir. $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ bazı, şekil 6.1a da görüldüğü gibi noktadan noktaya değiştiğinden "Local" dir. Şunu da belirtmek gerekir ki, baz vektörler genelde ne dik ne de birim uzunluktadır.





Şekil 6.1 "Local" bazlar

(q^i) koordinat eğrisine teğet olan doğru, q^i -ekseni(i=1,2,3) olarak adlandırılır ve q^i -ekseni boyunca pozitif yön, $\vec{e}_i$ baz vektörünün yönüdür.

Kartezyen ve yatık koordinatlarda baz vektörler noktadan noktaya de- değişmezler(Şekil 6.16). Bir koordinat sisteminin koordinat eğrileri doğru çizgiler değilse, böyle koordinat sistemlerine eğrisel koordinat sistemi denir. Bu yüzden bir eğrisel koordinat sisteminin bazı lokaldir. Yani baz vektörler noktadan noktaya değişir. Baz vektörleri birbirine dik olan koordinat sistemlerine ortogonal koordinat sistemleri denir. Bu yüzden kartezyen, küresel ve silindirik koordinat sistemleri ortogonal dir. Uygulamada kullanılan koordinat sistemlerinin çoğu ortogonaldir.

7. BİR TENSÖRÜN KOVARYANT, KONTRAVARYANT VE KARMA BİLEŞENLERİ

Genelleştirilmiş koordinat sisteminde, birinci mertebe bir A tensörü, üç tane A_i kovaryant bileşen veya üç tane A^i kontravaryant bileşen cinsinden tek bir ifadeye sahiptir. Baz değişimleri altında A_i nicelikleri, A^i niceliklerinden farklı olarak dönüşür :

$$A'_i = \alpha^k_{i'} \; A_k \qquad\qquad (7.1)$$
$$A'^i = \alpha^{i'}_k \; A^k,$$

Kovaryant ve kontravaryant bileşenler bağımsız değillerdir ve birbirlerine ;

$$A_i = g_{ik} A^k, \qquad\qquad (7.2)$$

$$A^{i} = g^{ik} A_k$$

formülleriyle bağlıdırlar. Burada g_{ik}, g^{ik} katsayıları A tensörünün yazıldığı koordinat sisteminin bazı tarafından tayin edilir.

ikinci mertebe veya daha yüksek mertebeden tensörler bir genelleştirilmiş koordinat sisteminde çeşitli tipte bileşenlere sahip olabilir. Vektörler halinde, bileşenlerin çeşitli tiplerini birbirine bağlayan formüller vardır. Bir ikinci mertebe tensör kartezyen koordinat sisteminde dokuz sayıyla tek bir şekilde ifade edilebilir. Bu bileşenler A_{ik} kovaryant, A^{ik} kontravaryant veya $A_i^{\cdot k}$, $A^{i}_{\cdot k}$ karma bileşenler olabilir ve bunlar,

$$\begin{aligned} A'_{ik} &= \alpha^{l}_{i'} \alpha^{m}_{k'} \; A_{lm}, \\ A'^{ik} &= \alpha^{i'}_{l} \alpha^{k'}_{m} \; A^{lm}, \\ A'^{\cdot k}_{i} &= \alpha^{l}_{i'} \alpha^{k'}_{m} \; A^{\cdot m}_{l}, \\ A'^{i}_{\cdot k} &= \alpha^{i'}_{l} \alpha^{m}_{k'} \; A^{l}_{\cdot m}. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

formüllerine göre dönüşürler. Buradaki $\alpha^{k}_{i'}$ ve $\alpha^{k'}_{i}$ lar direk ve ters dönüşüm katsayılarıdır. Bir tensörün değişik bileşenleri arasındaki bağıntı, metriği ($ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ olan bir koordinat sisteminde aşağıdaki formüllerle verilir :

$$\begin{aligned} A_{ik} &= g_{il} \; g_{km} \; A^{lm} = g_{kl} \; A_i^{\cdot l} = g_{il} \; A^{l}_{\cdot k} \\ A^{ik} &= g^{il} \; g^{km} \; A_{lm} = g^{il} \; A_l^{\cdot k} = g^{kl} \; A^{i}_{\cdot l} \\ A_i^{\cdot k} &= g^{kl} \; A_{il} = g_{il} \; A^{lk} \\ A^{i}_{\cdot k} &= g^{il} \; A_{lk} = g_{kl} \; A^{il} \end{aligned} \qquad (7.4)$$

Karma bileşenlerde görülen nokta, indisin meydana geliş sırasını belirtir. Bu yüzden, $A_{i}^{\cdot k}$ de birinci indis "kovaryant" ve ikincisi "kontravaryant" tır. ve $A_{\cdot k}^{i}$ de ise birinci indis "kontravaryant" ve ikincisi "kovaryant" tır. Buradaki g_{ik}, g^{ik} ve $g_{i}^{\cdot k}$ nicelikleri bir ikinci mertebe tensörün bileşenleridir ve metrik tensör olarak adlandırılır.

7.1 g_{ik}, g^{ik} ve $g_{i}^{\cdot k}$ nin Tensör Karakterleri

Şimdi; g_{ik}, g^{ik} ve $g_{i}^{\cdot k}$ niceliklerinin, metrik tensör olarak adlandırılan, gerçekte bir ikinci mertebe tensörün bileşenleri olduğunu gösterelim. İlk olarak, denklem (3.2), denklem (3.3) ve

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k &= g_{ik} = g_{ki}, \\
\hat{e}^i \cdot \hat{e}^k &= g^{ik} = g^{ki}, \\
\hat{e}_i \cdot \hat{e}^k &= g_{i}^{\cdot k} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } i \neq k \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } i = k \text{ ise} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

formüllerini içine alan, bazların değişimi altında g_{ik}, g^{ik}, $g_{i}^{\cdot k}$ için dönüşüm yasalarını gözleyelim :

$$
\begin{aligned}
g'_{ik} &= \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k = \alpha_{i'}^{l}\, \hat{e}_l \cdot \alpha_{k'}^{m} \hat{e}_m = \alpha_{k'}^{m}\, \alpha_{i'}^{l}\; \hat{e}_l \cdot \hat{e}_m = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m}\, g_{lm}, \\
g'^{ik} &= \hat{e}'^i \cdot \hat{e}'^k = \alpha_{l}^{i'}\, \alpha_{m}^{k'}\; \hat{e}^l \cdot \hat{e}^m = \alpha_{l}^{i'}\, \alpha_{m}^{k'}\, g^{lm} \\
g'^{\cdot k}_{i} &= \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'^k = \alpha_{i'}^{l}\, \alpha_{m}^{k'}\; \hat{e}_l \cdot \hat{e}^m = \alpha_{i'}^{l}\, \alpha_{m}^{k'}\, g_{l}^{\cdot m}.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Burada, g'_{ik} bazı tensörlerin kovaryant bileşenleri, g^{ik} bazı tensörlerin kontravaryant bileşenleri ve $g_{i}^{\cdot k}$ bazı tensörlerin karma bileşenleridir. Bütün bu nicelikler aynı tensörün bileşenleri olduğunu gerçekleştirmek için bunların denklem (7.4) formundaki bağıntılarla bağıntılı olduğunu göstermek gereklidir. Fakat g_{ik} nın tanımı ve $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ bazı ile bunun $\hat{e}^1$, $\hat{e}^2$, $\hat{e}^3$ ters bazının özelliklerinden,

$$\hat{e}_i = g_{il} \; \hat{e}^l$$

dir. Onun için,

$$g_{ik} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = g_{il} \, \hat{e}^l \cdot g_{km} \, \hat{e}^m = g_{il} \; g_{km} \; \hat{e}^l \cdot \hat{e}^m = g_{il} \; g_{km} \; g^{lm}$$

$$g_{ik} = g_{il} \; \hat{e}^l \cdot \hat{e}_k = g_{il} \; g^{l}_{\cdot k} ,$$

dir. Buradaki $g_{i}^{\cdot k}$ nın bileşenleritıpkı Kronecker deltanın bileşenleri gibidir (Borisenko and Tarapov,1968) :

$$g_{i}^{\cdot k} = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad i \neq j \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer} \quad i = j \quad \text{ise} \end{cases} \qquad (7.7)$$

8.TENSÖR CEBRİ

8.1.Tensörlerde Toplama

A_{ik} ve B_{ik} olarak iki ikinci mertebe tensörün bileşenlerini ele alalım ve,

$$T_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$$

olsun. T_{ik} lar bir ikinci mertebe tensörün bileşenleridir ve A_{ik}, B_{ik} bileşenli tensörlerin toplamı olarak adlandırılır. A_{ik} ve B_{ik},

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, A_{lm}$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, B_{lm}$$

formüllerine göre dönüşür. T_{ik} ise benzer yolla,

$$\begin{aligned} T'_{ik} &= A'_{ik} + B'_{ik} \\ &= \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, (A_{lm} + B_{lm}) \qquad (8.1) \\ &= \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, T_{lm} \end{aligned}$$

şeklinde dönüşür.

Aynı mertebeli iki veya daha fazla tensörün toplamı da benzer şekilde tanımlanır. Yani aynı mertebeli iki veya daha fazla sayıda tensörün toplamı, tensörlerin karşılıklı bileşenlerinin toplanmasıyla elde edilir. Farklı mertebeden tensörler toplanamazlar. Aynı mertebeli tensörlerin çıkarılması da benzer yolla meydana getirilir.

Genelleştirilmişkoordinatlar halinde tensörlerin toplanıp çıkarılabilmeleri için tensörlerin hem aynı mertebeden hem de aynı yapıda olmaları gerekir. Yani, kovaryant ve kontravaryant indisler aynı sayıda ve aynı yerde olmalıdır. örneğin,

$$T^{ik} = A^{ik} + B^{ik}$$

$$T_{i}^{\cdot k} = A_{i}^{\cdot k} + B_{i}^{\cdot k}$$

$$T^{ik}_{\cdot\cdot l} = A^{ik}_{\cdot\cdot l} + B^{ik}_{\cdot\cdot l} \tag{8.2}$$

$$(A_{i}^{\cdot k} = g^{kl} \; A_{il} = g_{il} \quad A^{lk} = (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_l \;) A^{lk} \;)$$

toplamlarında olduğu gibi sol taraf ile sağ taraftaki tensörler aynı mertebede ve aynı yapıda olmalıdır. Bu durum bir tensör için dönüşüm yasasının katsayıları cinsinden homojen ve tensörün bileşenleri cinsinden lineer olmasının bir sonucudur.

8.2. Tensörlerde Çarpma

A_{ik} ve B_{ik} iki ikinci mertebe tensörün bileşenleri olsun.

$$T_{iklm} = A_{ik} \; B_{lm} \tag{8.3}$$

formundaki mümkün bütün çarpımları göz önüne alalım. Bu durumda T_{iklm} nicelikleri dördüncü mertebe bir tensörün bileşenleri olup bileşenleri A_{ik} ve B_{ik} olan tensörlerin (dış) çarpımı olarak adlandırılır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} T'_{iklm} &= A'_{ik} \; B'_{lm} = \alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's} \quad A_{np} \; B_{rs} \\ &= \alpha_{i'n} \; \alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's} \; T_{nprs} \end{aligned} \tag{8.4}$$

olduğundan T_{iklm} nin bir dördüncü mertebe tensörün bileşenleri olduğu bellidir. Tensör çarpımının değişme özelliğinin olmadığını görmek kolaydır:

$$T_{iklm} = A_{ik}\, B_{lm} \neq T_{lmik} = A_{lm}\, B_{ik}$$

Herhangi sayıdaki keyfi mertebeli tensörlerin çarpımı da benzer yolla meydana getirilir. Yani iki veya daha fazla tensörün çarpımı da bir tensördür. Bu tensörün bileşenleri, çarpanların bileşenlerinin çarpımlarıdır. Aşikar olarak tensör çarpımının mertebesi, çarpanların mertebelerinin toplamına eşittir.

Genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden niceliklerin biri kovaryant diğerleri kontravaryant olabilir. örneğin, $A^{i}_{\cdot kl}$ ve B^{ik} bileşenli tensörlerin çarpımı, bileşenleri

$$T^{i\cdot mn}_{\cdot kl} = A^{i}_{\cdot kl}\ B^{mn}$$

olan tensördür. Burada gösterilen $T^{i\cdot mn}_{\cdot kl}$, belirtilen yapıda beşinci mertebe bir tensördür. Bu durum $A^{i}_{\cdot kl}$ ve B^{ik} nın dönüşüm yasalarının doğrudan bir sonucudur. Buradan görüldüğü gibi keyfi mertebeli tensörler çarpılabilir ama toplanamazlar.

8.3. Tensörlerin Daraltılması

n (n $\geqslant$ 2) mertebeli bir tensörün iki bileşeni üzerinden toplama işlemi daraltma olarak adlandırılır. örneğin üçüncü mertebe A_{ikl} tensörünün birinci ve ikinci bileşenlerinin daraltılması,

$$A_{iil} = \sum_{i=1}^{3} A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l}\ , (l=1,2,3) \qquad (8.5)$$

niceliğini verir. A'_{ikl} nin diğer mümkün iki daraltılması A'_{iki} ve A'_{ill} dir. Böyle herbir daraltma bir birinci mertebe tensör yani bir vektördür. Gerçekten A'_{ikl} ,üçüncü mertebe tensörü,

$$A'_{ikl} = \alpha_{i'm}\alpha_{k'n}\alpha_{l'r} A_{mnr} \tag{8.6}$$

formülüne uygun olarak dönüşür. Burada k=i alınıp,i üzerinden toplam yapılırsa,

$$\begin{aligned} A'_{iil} &= \alpha_{i'm}\alpha_{i'n}\alpha_{l'r}\, A_{mnr} = \delta_{mn}\alpha_{l'r}A_{mnr} \\ A'_{iil} &= \alpha_{l'r}\,(\delta_{mn}\ A_{mnr})=\alpha_{l'r}\, A_{mmr} \end{aligned} \tag{8.7}$$

olduğu görülür. Yani A'_{iil} nicelikleri,beklendiği gibi bir vektör dönüşümü olarak elde edilmiştir. Daha genelde $n(n\geqslant 2)$ mertebeli bir tensörün daraltılması (n-2) mertebeli bir tensörü verir. (n-2) mertebeli bir tensör tekrar daraltılabilir. Bu durumda (n-4) mertebeli bir tensörü elde ederiz. Daraltma işlemi 2 den daha az mertebeli bir tensör elde edilinceye kadar sürebilir. Neticede n inci mertebe bir tensörün tekrarlanan daraltılmaları eğer n çift ise bir skaları,eğer n tek ise bir vektörü verir.

iki veya daha fazla tensörün çarpımı ve sonra farklı çarpanlara ait indisler üzerinden daraltma işlemi verilen tensörlerin iç çarpımı olarak adlandırılır. örneğin, $A_{ik}\ B_k$ ve $\lambda_{iklm}\ B_{lm}$ ifadelerinin her ikisi birer iç çarpımdır. **A** ve **B** gibi iki vektörün $A_i\ B_i$ skalar çarpımı da bir iç çarpımdır.

Genelleştirilmiş koordinatlar durumunda daraltma işleminin yalnızca farklı pozisyonlardaki indis çiftleri üzerinden yapılabileceğine dikkat etmek önem taşır. Yani daraltma indislerinden biri kovaryant iken diğeri kontravaryant olmalıdır. Başka türlü daraltmanın sonucu bir tensör olmayacaktır. Farz edelim ki, i ve k indisleri üzerinden $A_i^{\cdot kl}$ tensörünü daralttık. $A_i^{\cdot il}$ bir tensördür, çünkü

$$A_{i'}^{\cdot i'l'} = \alpha_{i'}^{m} \alpha_{n}^{i'} \alpha_{r}^{l'} A_{m}^{\cdot nr} = \alpha_{r}^{l'} A_{n}^{\cdot nr} \tag{8.8}$$

dir. Bununla beraber k ve l indisleri üzerinden $A_i^{\cdot kl}$ daraltılması dönüşüm yasası

$$A_{i'}^{\cdot k'k'} = \alpha_{i'}^{m} \alpha_{n}^{k'} \alpha_{r}^{k'} A_{m}^{\cdot nr} \tag{8.9}$$

olan bir niceliği verir ki bu bir birinci mertebe tensör (bir vektör) değildir. Benzer şekilde, genelleştirilmiş koordinatlarda iç çarpımı oluşturulmasında $A^i B_i$, $A_{ik} B^k$, $\lambda_{ik}^{\cdot\cdot lm} B_{lm}$, $\lambda_{ik\cdot m}^{\cdot\cdot l} B_l^{\cdot m}$ ye benzer ifadelerin farklı konumlardaki indisler üzerinden toplam yapabiliriz.

8.4. Simetrik ve Antisimetrik Tensörler

İki veya daha yüksek mertebeli bir $T_{ikl\ldots}$ tensörü eğer;

$$T_{ikl\ldots} = T_{kil\ldots}$$

ise bu tensörün i ve k indislerine göre simetrik olduğu söylenir. Buna göre simetrik bir tensörde komşu iki indisin yer değiştirmesi, tensörün karşı gelen bileşenini değiştirmez. Bu yüzden,

$$T_{12l\ldots} = T_{21l\ldots}\ , \qquad T_{23l\ldots} = T_{32l\ldots}$$

dir.

örnek 1.

x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinat sisteminde $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$ ortonormal baz ları ile yay uzunluğu elemanı Kronecker delta cinsinden,

$$(ds)^2 = \delta_{ik}\ dx_i\ dx_k$$

olarak verilir. Buradaki, $\delta_{jk} = \hat{i}_j \cdot \hat{i}_k$; Kronecker delta veya birim tensör olarak adlandırılan bir ikinci mertebe simetrik tensördür.

Aynı şekilde iki veya daha yüksek mertebeli $A_{ikl\ldots}$ tensörü;

$$A_{ikl\ldots} = -A_{kil\ldots}$$

ise o zaman $A_{ikl\ldots}$ tensörünün i ve k indislerine göre antisimetrik olduğu söylenir. Yani $A_{ikl\ldots}$; i ve k indislerine göre antisimetrik ise i ve k indislerinin yer değiştirmesiyle, karşı gelen tensör bileşeninin işareti değişir. Bu yüzden,

$$A_{12l\ldots} = -A_{21l\ldots}\ , \qquad A_{23l\ldots} = -A_{32l\ldots}$$

olur. Eğer $A_{ikl\ldots}$; bir indis çiftine göre antisimetrik ise bu indislerin eşitlenmesiyle elde edilen bileşenler sıfır olmalıdır. Yani $A_{11l\ldots} = -A_{11l\ldots}$ olur ki, bu da $A_{11l\ldots} = 0$ olması demektir.

örnek 2.

Bileşenleri A_i ve B_l olan **A** ve **B** vektörleri verilmiş olsun. O zaman bileşenleri,

$$C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i$$

şeklinde tanımlanan bir ikinci mertebe tensör antisimetriktir.

Bir tensör verilen herhangi bir koordinat sisteminde simetrik (veya antisimetrik) ise diğer bütün koordinat sistemlerinde de simetriktir (veya antisimetriktir).

örneğin T_{ik} verilen bir sistemde simetrik yani $T_{ik} = T_{ki}$ olsun. O zaman diğer bütün sistemde,

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{ml} = \alpha_{k'm}\alpha_{i'l}T_{ml} = T'_{ki} ,$$

olur ki, bu da bu tensörün yeni sistemde de simetrik olması demektir. Simetrik bir ikinci mertebe S_{ik} tensörü,

$$[S_{ik}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris formuna sahiptir. Antisimetrik bir ikinci mertebe A_{ik}

tensörü ise,

$$[A_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris formuna sahiptir. Bu yüzden simetrik bir ikinci mertebe tensör bağımsız 6 bileşene sahipken antisimetrik bir ikinci mertebe tensör 3 bağımsız bileşene sahiptir.

Herhangi bir ikinci mertebe T_{ik} tensörü bir simetrik tensör ile bir antisimetrik tensörün toplamı olarak,

$$T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada,

$$S_{ik} = 1/2\ (T_{ik} + T_{ki}), \qquad \text{simetrik}$$
$$A_{ik} = 1/2\ (T_{ik} - T_{ki}), \qquad \text{antisimetrik}$$

dir ve S_{ik} ; T_{ik} nın simetrik kısmı, A_{ik} ise T_{ik} nın antisimetrik kısmı olarak adlandırılır.

Keyfi bir T_{ik} tensörünü ele alalım. Bu tensörden bileşenleri $T_{ik} + T_{ki}$ olan bir tensör elde etmek işlemine simetrizasyon, bileşenleri $T_{ik} - T_{ki}$ olan bir tensör elde etme işlemine ise antisimetrizasyon işlemi denir.

Genelde simetri ve antisimetri kavramları aynı konumdaki indis çiftlerine uygulanır. Bu yüzden,

$$A_{ik}^{\cdot\cdot l} = A_{ki}^{\cdot\cdot l}$$

ise $A_{ik}^{\cdot\cdot l}$ simetrik,

$$B^{ik}_{\cdot\cdot l} = -B^{ki}_{\cdot\cdot l}$$

ise $B^{ik}_{\cdot\cdot l}$ antisimetriktir.

8.5. Bir Tensörün invaryantları

Verilen bir **A** vektörünün bir K kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri A_i ve diğer bir K' kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri ise A'_i olsun. K dan K' ye geçildiğinde **A** nın bileşenleri değişir. Ancak bu dönüşüm altında değişmeyen bir ifade bulabiliriz. Bu ifade **A** nın uzunluğunun karesidir :

$$A_i\ A_i = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2 = (A'_1)^2 + (A'_2)^2 + (A'_3)^2 = A'_i\ A'_i$$

Bir koordinat sisteminden diğerine dönüşümler altında değişmeyen $A_i A_i$ şeklindeki bir ifade **A** vektörünün invaryantı olarak adlandırılır. Örneğin, ikinci mertebe T_{ik} tensörünün;

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

veya,

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33})$$

$$+ \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$- \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.10)$$

karakteristik denklemini ele alalım (Borisenko and Tarapov, 1968). Buradaki λ, λ^2, λ^3 sayıları koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır ve bu yüzden bunlar denklem (8.10) de katsayı durumundadır. öyleyse,

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \qquad (8.11)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

nicelikleri T_{ik} tensörünün tüm invaryantlarıdır. Denklem (8.11) i kullanarak başka birçok invaryant oluşturulabilir. örneğin,

$$I_1^2 = (T_{ii})^2$$

$$I_1^2 - 2I_2 = T_{ik}' T_{ik}',$$

ifadeleri, denklem (8.11) den elde edilen diğer invaryantların birkaçıdır.

I_1 invaryantının sıfır olduğu bir tensör "deviator" olarak adlandırılır. Herhangi bir T_{ik} tensörü "deviator" ve bir izotropik tensörün toplamı olarak yazılabilir :

$$T_{ik} = T_{ik} - 1/3\ T_{ll}\,\delta_{ik} + 1/3\ T_{ll}\,\delta_{ik} = D_{ik} + 1/3\,\delta_{ik}\ T_{ll}.$$

Burada $1/3\,\delta_{ik}\ T_{ll}$ aşikar olarak izotropiktir ve D_{ik} ;

$$D_{ll} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = T_{ll} - 1/3\ T_{ll} \cdot 3 = 0$$

olduğundan bir "deviator" dur.

9. BİRİNCİ MERTEBE TENSÖRLER OLARAK, VEKTÖRLERDE ÇARPMA İŞLEMİ

9.1. Skalar Çarpım

Herhangi **A** ve **B** vektörlerini ele alalım. Skalar, iç veya nokta çarpım **A** · **B** sembolüyle gösterilir ve,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \qquad (9.1)$$

ile ifade edilir. Nokta çarpım invaryanttır :

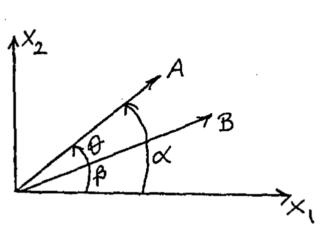
$$A'_i \; B'_i = \alpha_{i'j}\alpha_{i'k} \; A_j \; B_k$$
$$= \delta_{jk} \; A_j \; B_k \qquad (9.2)$$
$$= A_k \; B_k$$

Bir vektörün uzunluğunun karesi vektörün kendisi ile nokta çarpımıdır. iki vektör verildiğinde bu vektörlerle oluşturulabilen yalnız iç invaryant vardır. Bunların ikisi vektörlerin uzunlukları üçüncüsü de iki vektörün nokta çarpımıdır. Farklı görünüşte diğer bütün invaryantlar bu üçünün fonksiyonlarıdır.

Nokta çarpım basit bir geometrik yoruma sahiptir. **A** ve **B** ortak bir noktadan çıkan iki vektör olsun. **A** ve **B** nin oluşturduğu düzlemle, $x_1 x_2$- düzlemi çakışan bir koordinat sistemi seçelim (Şekil 9.1). Geometriden,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2$$
$$= AB \cos\alpha \cos\beta + AB \sin\alpha \sin\beta \qquad (9.3)$$
$$= AB \cos(\alpha - \beta)$$
$$= AB \cos\theta$$

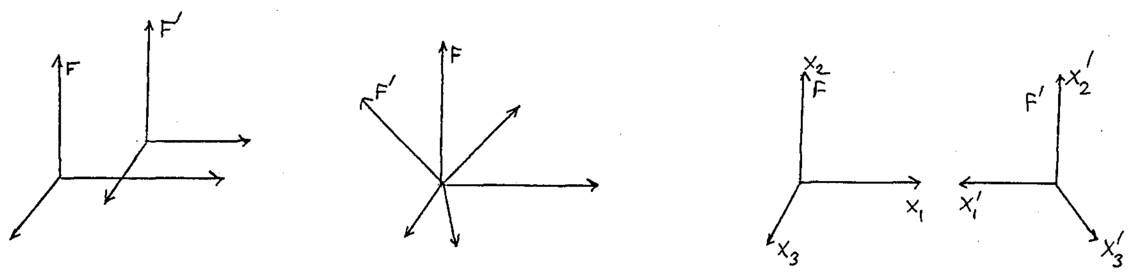
olduğu görülür. Bu yüzden nokta çarpım, aralarındaki açının kosinüsü kere iki vektörün uzunluklarının çarpımı büyüklüğünde bir invaryanttır. Eğer iki vektör ortogonal ise $\theta=90^\circ$ ve nokta çarpım sıfırdır.



Şekil 9.1 **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzlemle, $x_1 x_2$- düzlemi çakışan koordinat sistemi

Denklem (9.3), **A** . **B** bir invaryant olduğundan seçilen koordinat sisteminden bağımsızdır.

Kartezyen koordinat sistemi arasındaki mümkün dönüşümler üç grupta ele alınabilir. Bunların birincisi şekil 9.2a da görülen eksenlerin basit ötelenmesidir. İkincisi 9.2b de görülen bir dönmedir. Üçüncüsü ise şekil 9.2c de görülen ayna yansımasıdır. Sonuncusunda $x' = -x_1$ olacak şekilde bir dönüşüm vardır. Bu türlü dönüşümlere "imporeper" dönüşümler denir. Basit öteleme ve dönme halinde yeni K′ çerçevesi orijinal K çerçevesinin sürekli hareketi ile elde edilebilir. Fakat ayna yansıması halinde K dan K′ ye sürekli bir harekete geçmek mümkün değildir. En genel dönüşüm bu üç basit tipteki dönüşümün bir lineer kombinasyonudur.



Şekil 9.2 Kartezyen koordinat sistemindeki dönüşümler

9.2. Permütasyon Sembolü

Permütasyon sembolü, çoğu zaman Levi-Civita tensörü olarak adlandırılır ve,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{eğer } i,j,k \text{ ; 1,2 ve 3 ün çift permütasyonu ise} \\ -1 & \text{eğer } i,j,k \text{ ; 1,2 ve 3 ün tek permütasyonu ise} \\ 0 & \text{eğer en az iki indis eşit ise} \end{cases} \qquad (9.4)$$

ile ifade edilir. Yani,

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$$
$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$
$$\epsilon_{112} = \epsilon_{222} = \epsilon_{311} = 0$$

dir. Bir determinant açılımı, permütasyon sembolünü kullanarak,

$$\det a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1i}\ a_{2j}\ a_{3k}\ \epsilon_{ijk} \tag{9.5}$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (9.5) den tekrarlanan indisler üzerinden toplam yapılıp ϵ_{ijk} lar yerine değerleri konulduğunda, beklenildiği gibi,

$$\begin{aligned} \det a_{ij} = & -a_{13}\, a_{22}\, a_{31} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \\ & -a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \end{aligned} \tag{9.6}$$

olduğu görülür.

Permütasyon sembolünün özelliklerinden, bir determinantın iki sırası yer değiştirildiğinde determinantın işaretinin değişeceği ispatlanabilir. Eğer denklem (9.5) de a_{1i} ve a_{2j} yer değiştirilirse,

$$\det a_{ij} = a_{2j}\ a_{1i}\ a_{3k}\ \epsilon_{ijk} \tag{9.7}$$

olur. Permütasyon sembolü üzerinde i ve j nin yer değiştirilmesiyle onun işareti de değişeceğinden,

$$\det a_{ij} = -a_{2j}\, a_{1i}\, a_{3k}\, \epsilon_{jik} \tag{9.8}$$

olur. Bu ifade determinantın 1. ve 2. sıralarının yer değiştirmesine eş değerdir.

Bir determinant açılımı,

$$\epsilon_{lmn}(\det a_{ij}) = a_{li}\, a_{mj}\, a_{nk}\, \epsilon_{ijk} \tag{9.9}$$

olarak ifade edilebilir. Eğer sıralar bir tek sayı veya bir çift sayı kere yer değiştirilirse otomotikmen doğru işareti sağlar. Eğer denklem (9.9) dan a_{ij} ler bir ortogonal dönüşümün katsayılarıyla yer değiştirilirse,

$$\pm\epsilon_{lmn} = \alpha_{li}\, \alpha_{mj}\, \alpha_{nk}\, \epsilon_{ijk} \tag{9.10}$$

olur. Burada $\det\alpha_{ij} = \pm 1$ kullanılmıştır. Eğer dönüşüm " improper " ise $\det\alpha_{ij} = -1$ dir. Denklem (9.10) dan ϵ_{ijk} nın "proper" dönüşümler altında bir üçüncü mertebe tensör olduğu söylenir. Eğer dönüşüm "improper" ise o zaman dönüşüm denklem (9.10) da eksi işareti kullanılmalıdır. Böyle tensörler pseudo tensörler olarak adlandırılır. Permütasyon sembolerinin bileşenleri bütün koordinat sistemlerinde Kronecker deltası gibi aynı nümerik değerlere sahiptir. Permütasyon sembolü bu yüzden izotropik tensördür. Kronecker deltası ile permütasyon sembolü arasındaki bir önemli eşitlik,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\ \delta_{km} - \delta_{jm}\ \delta_{kl} \tag{9.11}$$

dir. Bunun denel ispatı zordur ancak bu eşitlik indislerin belirli değerleri için kolayca doğrulanabilir. Örneğin, j=k=1 ise bu eşitliğin sol yanı ϵ_{ijk} nın tanımı uyarınca sıfırdır. Aynı şekilde sağ yanında sıfır olduğunu göstermek kolaydır veya, j=l=1 ve k=m=2 ise,

$$\begin{aligned}\epsilon_{i12}\ \epsilon_{i12} &= \delta_{112}\ \delta_{112} + \delta_{212}\ \delta_{212} + \delta_{312}\ \delta_{312}\\ &= 0 + 0 + 1\\ &=1\end{aligned}$$

ve

$$\delta_{11}\ \delta_{22} - \delta_{12}\ \delta_{21} = 1-0 = 1$$

olduğundan eşitlik yine doğrulanmış olur.

9.3. Vektörel Çarpım

A ve **B** vektörleri verilsin, permütasyon sembolünü kullanarak, bunlardan bir pseudo vektör oluşturmak mümkündür :

$$\gamma_i = \epsilon_{ijk}\ A_j\ B_k \tag{9.12}$$

Bir pseudo vektör axial vektör olarak ve bir adi vektör de polar vektör olarak adlandırılır. "improper" dönüşümler hariç tutulursa, γ bir adi vektörün bütün özelliklerine sahiptir. γ nın bileşenleri,

$$\gamma_1 = \epsilon_{1jk} A_j B_k = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \tag{9.13}$$

ve

$$\gamma_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 , \qquad \gamma_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \tag{9.14}$$

dir. Sıkça kullanılan bir gösterim,

$$\gamma = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{9.15}$$

dir ve γ ; **A** ve **B** nin vektörel çarpımı olarak adlandırılır. Vektörel çarpım komütatif değildir. Denklem (9.12) ye göre **B** x **A** nın bileşenleri,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} B_j A_k &= -\epsilon_{ikj} B_j A_k = -\epsilon_{ijk} B_k A_j . \\ &= -\epsilon_{ijk} A_j B_k \end{aligned} \tag{9.16}$$

dir. Bu yüzden,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{9.17}$$

dir. Çok kullanılan bir vektör özdeşliği,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{9.18}$$

dir. Bu özdeşlik denklem (9.11) in kullanılmasıyla kurulur. **A** x (**B** x **C**) nin bileşenleri, önce γ = (**B** x **C**) elde edilir. Sonra **A** x γ hesaplanarak bulunur. Bu yüzden **A** x (**B** x **C**) nin i inci bileşeni,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\
&= A_m B_i C_m - C_i A_l B_l \\
&= B_i (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_i (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})
\end{aligned}
$$

olur. Denklem (9.17) ve denklem (9.18) den vektörel çarpımın birleşme özelliğinin olmadığı görülür :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}\,(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}\,(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$$

Bu yüzden,

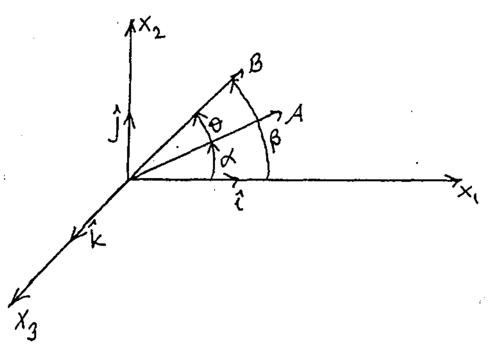
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

dir.

Dikkat edelim ki, **A** x (**B** x **C**) nin bileşenleri permütasyon sembolünü iki kez içerirler. Bundan dolayı **A**, **B** ve **C** polar vektörler ise, **A** x (**B** x **C**) öyledir. Benzer olarak eğer **B** bir axial vektör ve **A** da bir polar vektör ise **A** x **B** bir polar vektördür.

Vektörel çarpım basit bir geometrik yoruma sahiptir. Aynı orijinli **A** ve **B** vektörlerini ele alalım. x_1x_2- düzlemi, **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzlemle çakışan bir koordinat sistemi tanımlayalım (Şekil 9.3). $A_3 = B_3 = 0$ olduğundan, denklem (9.13) ve denklem (9.14) de **A** ve B nin vektörel çarpımı yalnız bir bileşene sahiptir :

$$\gamma = A \times B = \hat{k}\ (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$



Şekil 9.3 **A** ve B vektörlerinin oluşturduğu düzlemle, $x_1 x_2$- düzlemi çakışan koordinat sistemi.

Şekil 9.3 ün geometrisinden,

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = AB(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta)$$
$$= AB \sin(\beta - \alpha) = AB \sin\theta$$

dir. Böylece **A** x **B**, **A** ve B ile oluşturulan düzleme dik bir yöndedir ve vektörlerin aralarındaki açının sinüsü kere vektörlerin uzunluklarının çarpımına eşit bir büyüklüktür. Vektörel çarpımın büyüklüğü **A** ve **B** ile oluşturulan paralel kenarın alanına eşittir.

Şekil 9.3 de ki gibi koordinat sisteminde; $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ birim vektörleri,

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{0} \qquad \hat{j} \times \hat{j} = \hat{0} \qquad \hat{k} \times \hat{k} = \hat{0} \qquad (9.19)$$

denklemleriyle birbirlerine bağlıdırlar.

Birim vektörler için vektörel çarpım bağıntıları, $\hat{e}_1 = \hat{i}, \hat{e}_2 = \hat{j}, \hat{e}_3 = \hat{k}$ denilmesiyle kompakt olarak,

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk}\, \hat{e}_k \tag{9.20}$$

şeklinde ifade edilir (Bradbury, 1968).

10. DIFFERANSIYEL VEKTÖR OPERATÖRLERININ TENSÖREL FORMU

10.1 Gradyent

Sıfırıncı mertebe tensör alanı, konumun basit skalar fonksiyonudur. $\psi(x_1, x_2, x_3)$ skalar fonksiyonundan üç kısmi türev formüle edilebilir. Bunlar,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$$

dir. Bir vektörün bileşenlerini gösteren üç kısmi türev ortogonal dönüşümün yardımıyla eskilerinden elde edilen yeni x_i' koordinatları cinsinden ψ nin fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi kurulur :

$$\psi = \psi\,(x_1\,(x_1', x_2', x_3'), x_2\,(x_1', x_2', x_3'), x_3\,(x_1', x_2', x_3'))$$

Zincir kuralını kullanarak,

(10.1)

elde edilir. Buradaki kısmi türevler,

$$\begin{aligned} x_1 - x_1(p) &= \alpha_{i'1}(x'_i - x'_i(p)) \\ x_2 - x_2(p) &= \alpha_{i'2}(x'_i - x'_i(p)) \\ x_3 - x_3(p) &= \alpha_{i'3}(x'_i - x'_i(p)) \end{aligned} \qquad (10.2)$$

dönüşüm denklemlerinden elde edilir. Burada $x_i - x_i(p)$; değisken noktaya, uzaydaki sabit bir p noktasından olan $\mathbf{r}$ yer vektörünün bileşenleridir.

Denklem (10.2) nin x'_1 e göre türevi alındığında,

$$\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = \alpha_{1'1} \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} = \alpha_{1'2} \quad , \quad \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} = \alpha_{1'3} \qquad (10.3)$$

bulunur. Eğer denklem (10.3) ü, denklem (10.1) de yerine koyarsak,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'_1} = \alpha_{1'1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_{1'2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_{1'3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$$

olur. x'_2 ve x'_3 ye göre kısmi türevler için de benzer türevler alınabilir. Sonuçta, x'_i e göre kısmi türev için,

$$\partial'_i \psi = \alpha_{i'j} \, \partial_j \psi \qquad (10.4)$$

elde edilir. Burada,

$$\partial_i' = \frac{\partial}{\partial x_i'} \qquad \text{ve} \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

gösterimi kullanılmıştır. Denklem (10.4) de $\partial_i \psi$,bir vektörün bileşenleridir. Bu vektör ψ nin gradyenti olarak adlandırılır ve $\nabla\psi$ olarak yazılır. ∇ ise vektör operatörünün sembolüdür. Bu operatör bazen del veya nabla olarak adlandırılır. Burada ∇;

$$\nabla = \hat{\imath}\,\partial_1 + \hat{\jmath}\,\partial_2 + \hat{k}\,\partial_3$$

dir. Bir skalar fonksiyonu üzerinde del in etkisi;

$$\partial\psi = \text{grad}\,\psi = \hat{\imath}\,\partial_1\psi + \hat{\jmath}\,\partial_2\psi + \hat{k}\,\partial_3\psi \qquad (10.5)$$

şeklindedir. Kartezyen koodinatlarda ifade edilen skalar fonksiyonun gradyenti ise,

$$\partial\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^1}\,\hat{\imath} + \frac{\partial\psi}{\partial x^2}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial\psi}{\partial x^3}\,\hat{k} = \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\hat{\imath}_j \qquad (10.6)$$

olur. Burada $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ile birim kartezyen vektörler ifade edilmektedir. Keyfi eğrisel koordinat sistemlerinde ∇ operatörünü nasıl göstereceğiz? $\nabla\psi$ yi eğrisel koordinatlar cinsinden ifade edecek olursak;

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q^k}\,\frac{\partial q^k}{\partial x^j}\,\hat{\imath}_j = \frac{\partial\psi}{\partial q^k}\,\nabla q_k \qquad (10.7)$$

dir. Fakat, ∇q_k ters baz vektörlerdir. Böylece,

$$\nabla\psi = \hat{e}^k \partial_k \psi$$

şeklinde yazılır. Demek ki ∇ sembolünü,

$$\nabla = \hat{e}^k \partial_k \qquad (10.8)$$

olarak gösterebiliriz. Her eğrisel koordinat sisteminde gradyent vektörü,

$$\nabla\psi = \hat{e}^k \partial_k \psi = \hat{e}^{i'} \partial_{i}' \psi \qquad (10.9)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

10.2. Diverjans

Eğer **A** bir vektör alanı ise, **A** nın üç bileşeni koordinatlarının fonksiyonudur. **A** nın bileşenlerinden matris formunda dokuz kısmi türev kurmak mümkündür :

$$\begin{bmatrix} \partial_1 A_1 & \partial_1 A_2 & \partial_1 A_3 \\ \partial_2 A_2 & \partial_2 A_2 & \partial_2 A_3 \\ \partial_3 A_3 & \partial_3 A_2 & \partial_3 A_3 \end{bmatrix} \qquad (10.10)$$

$\partial_i A_j$ ler ikinci mertebe bir tensörün bileşenleridir. Bununla beraber, kısmi türev fikrini sonuç bir ikinci mertebe tensör olacak şekilde genelleştirmek mümkündür. Bu genelleştirme kovaryant türev gibi bilinir. Denklem (10.10) ile verilen tensörün izi invaryanttır. Ve **A** nın diverjansı olarak adlandırılır. **A** nın diverjansı ∇ vektör sembolü ile **A** nın nokta çarpımı gibi düşünülebilir:

$$\text{div}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3$$

Eğer **A** vektörü, ψ skalar fonksiyonunun gradyenti ise,

$$\text{div grad}\,\psi = \nabla\cdot\nabla\psi = \partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi + \partial_3^2\psi$$

dir. Ayrıca,

$$\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

sıkça kullanılan bir operatör olup Laplacian olarak adlandırılır.

Genelleştirilmiş koordinatlarda ise diverjans **A** herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$A = A^i\,\hat{e}_i$$

dir. Burada A^i ler koordinatların fonksiyonudur. **A** ; herhangi bir vektör alanı, örneğin elektrik alan olabilir. Bir vektör alanının diverjansı, herhangi bir eğrisel koordinat sisteminde, ∇ sembolik operatörünü kullanmakla aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot \mathbf{A} &= (\hat{e}^k \partial_k)\cdot(A^i\,\hat{e}_i) = \hat{e}^k\cdot(\hat{e}_i\partial_k A^i + A^i\partial_k \hat{e}_i) \\
&= \hat{e}^k\cdot(\hat{e}_i\partial_k A^i + A^i\,\Gamma_{ik}^{\;j}\,\hat{e}_j) \\
&= \delta_i^{\,k}\partial_k A^i + A^i\,\Gamma_{ik}^{\;j}\,\delta_j^{\,k} \\
&= \partial_i A^i + A^i\,\Gamma_{ik}^{\;k}
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

İlk terime bakıldığında bunun kartezyen koordinat sistemindeki diverjansa benzer bir ifade olduğu görülür. Kartezyen koordinatlarda baz vektörler şüphesiz sabit vektörlerdir. Bu yüzden bunların türevleri sıfırdır. Denklem (10.11) de görülen Christoffel semboleri adını alan $\Gamma_{ik}^{\;j}$ lar, genel eğrisel koordinatların sabit olmayan baz vektörlerinin türevlerinden gelmektedir. (Bkz. Ek 1). Denklem (10.11) de görülen Christoffel sembolünde iki indis üzerinden daraltma vardır. Buna göre;

$$
\Gamma_{ik}^{\;k} = g^{kj}\,1/2\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right)
\tag{10.12}
$$

dir. $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\,\dot{q}^i\,\dot{q}^j = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\,\dot{q}^i\,\dot{q}^j$ olduğundan denklem (10.12) deki 1. ve 3. terimler birbirini götürür:

$$
\Gamma_{ik}^{\;k} = 1/2\; g^{kj}\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}
\tag{10.13}
$$

Diverjans ifadesinde biraz daha basitleştirme yapmak mümkündür.

Metrik tensörün determinantı,

$$g = g_{1j}\ g_{2k}\ g_{3l}\ \epsilon_{jkl} \tag{10.14}$$

idi. Bunun q^i e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial g}{\partial q^i} = \frac{\partial g_{1j}}{\partial q^i}\ g_{2k}\ g_{3l}\ \epsilon_{jkl} + g_{1j}\ \frac{\partial g_{2k}}{\partial q^i}\ g_{3l}\ \epsilon_{jkl} + g_{1j}\ g_{2k}\ \frac{\partial g_{3l}}{\partial q^i}\ \epsilon_{jkl} \tag{10.15}$$

olur. Ayrıca $g_{1j} \cdot g^{1j} = 1$ olduğundan,

$$g_{1j}\ g\ g^{1j} = g \tag{10.16}$$

olur. Denklem (10.16) ve denklem (10.14) ün karşılaştırılmasıyla

$$g_{2k}\ g_{3l}\ \epsilon_{jkl} = g\ g^{1j}$$

olduğu görülür. Denklem (10.15) deki diğer terimler de benzer işlemlerle düzenlenirse,

$$\frac{\partial g}{\partial q^i} = \frac{\partial g_{1j}}{\partial q^i}\ g\ g^{1j} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial q^i}\ g\ g^{2k} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial q^i}\ g\ g^{3l}$$

ve

$$1/g\ \frac{\partial g}{\partial q^i} = g^{kj}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \tag{10.17}$$

olur. Böylece bir vektörün diverjansı için ifademiz,

$$\nabla\cdot A = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + \frac{A^i}{2g}\ \frac{\partial g}{\partial q^i} = 1/\sqrt{g}\ \frac{\partial}{\partial q^i}\ (\sqrt{g}\ \ A^i) \tag{10.18}$$

şeklini alır. Bu ifade her eğrisel koordinat sistemi için geçerlidir.

10.3. Curl

C vektörü, bir **A** vektörünün ∇ sembolik operatörüyle vektörel çarpım gibi yazıldığında;

$$C = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (10.19)$$

veya bileşen formunda,

$$C_i = \epsilon_{ijk}\ \partial_j\ A_k \qquad (10.20)$$

dır. *C* vektörü **A** nın curl ü olarak adlandırılır.

Genelleştirilmiş koordinatlarda bir vektörün curl ünü elde etmek için;

$$\begin{aligned} C = \nabla \times \mathbf{A} &= (\hat{e}^j\ \partial_j\ )\times(A_k\ \hat{e}^k\ ) \\ &= \hat{e}^j\ \times(\hat{e}^k\cdot\partial_j\ A_k + A_k\ \partial_j\ \hat{e}^k\ ) \\ &= \hat{e}^j\ \times(\hat{e}^k\ \partial_j\ A_k - A_k\ \Gamma_{ji}^{\ k}\ \hat{e}_i\ ) \\ &= \epsilon^{jki}\ \hat{e}_i\cdot\partial_j\ A_k - A_k\ \Gamma_{ji}^{\ k}\ \epsilon^{jil}\ \hat{e}_l \end{aligned} \qquad (10.21)$$

yazılabilir. Christoffel sembolleri iki alt indise göre simetrik, ϵ^{jil} tensörü ise antisimetriktir. Bu yüzden,

$$\Gamma_{ji}^{\ k}\,\epsilon^{jil}=0$$

dır. Böylece curl ün kontravaryant bileşenleri;

$$c^{i}=\epsilon^{jki}\,\partial_j\,A_k \tag{10.22}$$

şeklinde ifade edilir (Bradbury,1968)

11. LAGRANGE DENKLEMLERİ

Genelleştirilmiş kuvvet kavramı,verilen bir koordinat sisteminde ivme için kinematik ifadenin hesaplama metodu olarak kullanılır. Bu durumda hareket denklemleri F=ma dan türetilirler.

Bir parçacık üzerine uygulanan bir korunumlu kuvvet yüzünden üç boyutlu uzayda hareket ediyor olsun. Bir kısıtlama olmadığını varsayalım. O zaman parçacık üç bağımsız koordinata veya serbestlik derecesine sahiptir. Genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri,

$$Q_k=\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}\,Q_i' \tag{11.1}$$

şeklinde kovaryant dönüşüm yasasına uyarlar. Burada q_i' ler kartezyen koordinatlardır.O zaman $Q_i' = F_i$ ler kuvvetin kartezyen bileşenleridir ve V;potansiyel fonksiyonu olmak üzere,

$$Q_k=\frac{\partial x_i}{\partial q^k}\,F_i=-\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,\frac{\partial V}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{11.2}$$

dir. öte yandan,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^k}=Q_k \tag{11.3}$$

olduğundan (Bkz. Ek 2),denklem (11.2) ve denklem (11.3) in taraf tarafa eşitlenmesiyle

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^k} \tag{11.4}$$

yazılır. Bunu düzenleyecek olursak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0$$

olur. V potansiyel fonksiyonu $\dot{q}_k$ hızına bağlı olmadığından,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-V)$$

dir. Buna göre denklem (11.4),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-V)-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0$$

veya

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \tag{11.5}$$

şeklini alır. Buradaki,

$$L = T - V$$

lagrange fonksiyonu (Lagranjyen) adını alır.

Denklem (11.5);sistemin Lagrange denklemleri adını alır. Bu denklemler yardımıyla sistemin hareket denklemleri kuvvetleri bilmeye gerek duymadan yazılabilir.

Şimdi koordinatları birbirine bağlayan bir denklem olduğunu varsalım Bu denklem,

$$f\,(q_1\,,\,q_2\,,q_3\,) = 0 \qquad (11.6)$$

olarak ifade edilsin. Bu denklem bir koordinatı diğer ikisi cinsinden ifade etmemize izin verir. Böylece genelleştirilmiş koordinatların fonksiyonu olarak kartezyen koordinatlar arasındaki dönüşüm denklemleri,

$$x_i = x_i\,(q_1\,,\,q_2\,)$$

şeklini alır.

Denklem (11.6) üç boyutlu uzayda bir yüzeyi temsil eder. Parçacığı bu yüzey üzerinde tutmak için belirli bir kuvvet gerekir. Bağ kuvveti olarak adlandırılan bu kuvvet yüzey tarafından uygulanıyor olarak düşünülebilir. Eğer sürtünme yoksa bağ (kısıtlama) kuvvetinin yüzeye dik olması gerekir. Bu yüzden bu kuvvet tarafından parçacık üzerine iş yapılmaz.

Parçacık üzerindeki kuvvetin dik bileşenlerine bağlantılı olan yalnız iki genelleştirilmiş kuvvet bileşeni vardır. Bunlar,

$$Q_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} F_i \qquad (\alpha=1,2;i=1,2,3) \qquad (11.7)$$

olarak ifade edilirler. Buradaki F_i ler parçacık üzerindeki net kuvvetin kartezyen bileşenleridirler ve bağ kuvvetlerini de içerirler. Parçacık bir ds miktarı kadar yer değiştirirse, onun üzerine yapılan iş,

$$dw = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_i\, dx_i \qquad (11.8)$$

dir. $d\mathbf{s}$ vektörü elbette bağ yüzeyi üzerinde yatmak zorundadır. Burada dx_i yerine,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \qquad (11.9)$$

yazıp ve bunu iş ifadesinde kullanırsak,

$$dw = F_i\, dx_i = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = Q_\alpha\, dq_\alpha \qquad (11.10)$$

olur. $F_i\, dx_i$ toplamı içerisinde üç terim, $Q_\alpha\, dq_\alpha$ toplamı içerisinde ise yalnız iki terim vardır. Şimdi parçacık üzerine uygulanan kuvvetin kartezyen bileşenlerini biri C_i kısıtlama kuvveti, diğeri içerilen diğer bütün G_i kuvvetleri olmak üzere iki kısma ayıralım:

$$F_i = C_i + G_i \qquad (11.11)$$

Kısıtlama kuvveti iş yapmadığından;

$$C_i \, dx_i = 0$$

dir ve bu yüzden denklem (11.10),

$$G_i \, dx_i = G_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = Q_\alpha \, dq_\alpha \qquad (11.12)$$

şeklini alır. İki q_1 ve q_2 koordinatı bağımsızdırlar, bu yüzden,

$$Q_\alpha = G_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \qquad (11.13)$$

ifadesi doğrudur. Genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri bağ kuvvetini içermezler. Eğer bağ kuvvetinden başka diğer bütün kuvvetler bir potansiyelden türetilebilir ise;

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad (11.14)$$

yazılabilir. Bu yüzden Lagrange denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} &= Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= 0, \qquad L=T-V \end{aligned} \qquad (11.15)$$

olurlar. Böylece bağ denklemi yardımıyla Lagranjyen den, koordinatlardan biri elenirse, kalan iki koordinat için hareket denklemleri doğrudan doğruya denklem (11.15) den elde edilebilir. Eğer,

$$f_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad f_2(q_1, q_2, q_3) = 0 \tag{11.16}$$

gibi iki kısıtlama denklemi varsa, o zaman yalnız bir bağımsız kooardinat vardır. Bu durumda Lagranjyenden, q_2 ve q_3 elimine edildiğinde sadece, aşağıdaki gibi yalnız bir Lagrange denklemi olur:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \tag{11.17}$$

Bu durumda parçacık denklem (11.16) yüzeylerinin arakesiti olan bir eğri üzerinde hareket etmeye kısıtlanır.

Genelleştirilmiş momentum,

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{11.18}$$

şeklinde tanımlanabilir. Genelleştirilmiş momentum, kanonik momentum veya eşlenik momentum olarak da isimlendirilebilir. Bu durumda Lagrange denklemleri;

$$\dot{P}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{11.19}$$

şekline girer.

Lagranjyen içerisinde bir koordinat aşikar olarak gözükmezse bu koordinata karşı gelen eşlenik momentum bir hareket sabiti olur. Çünkü bu durumda $\dot{P}_\alpha = 0$ olacağından P_α = sabit dir.

Değişik niceliklerin dönüşüm özelliklerini ortaya koymak için L yi;

$$L = 1/2\ m\ g_{\alpha\beta}\ \dot{q}^{\alpha}\ \dot{q}^{\beta} - V\ (q_1, q_2, q_3) \tag{11.20}$$

olarak yazalım. Alt indisler 1 den 3 e, 1 den 2 ye kadar değişir veya tek bir değeri için kısıtlanırlar. Kanonik momentumlar,

$$P_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = m\ g_{\alpha\beta}\ \dot{q}^{\beta} \tag{11.21}$$

dir.

12. HAMİLTON DENKLEMLERİ

Bir Lagranjyen ile tanımlanan bir sistemin hareket denklemleri Hamilton formülasyonu olarak bilinen başka bir formda yeniden düzenlenebilir. Hamiltonyen;

$$H = P_{\alpha}\ \dot{q}_{\alpha} - L \tag{12.1}$$

olarak tanımlanır. Burada toplam, sistemin serbestlik derecelerinin sayısı üzerindedir. Bir örnek vermek gerekirse; bir parçacıktan oluşan bir sistemin bir holonom kısıtlaması var ise, serbestlik derecesi iki olacağından

$$P_{\alpha}\ \dot{q}_{\alpha} = P_1\ \dot{q}_1 + P_2\ \dot{q}_2$$

olur. H'nin toplam diferansiyeli,

$$dH = P_\alpha\, d\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha\, dP_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\, dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\, d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \qquad (12.2)$$

dir. Burada $d\dot{q}_\alpha$, dP_α v.s. matematiksel varyasyonlar dır ve bir parçacığın gerçek yörüngesi üzerinde komşu noktalar arasında hesaplanacak farka eşit olmaları gerekmez. Burada,

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad , \quad \dot{P}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (12.3)$$

olduğundan denklem (12.2);

$$dH = \dot{q}_\alpha\, dP_\alpha - \dot{P}_\alpha\, dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \qquad (12.4)$$

şekline indirgenir. Farz edelimki daha önce yazdığımız $P_\alpha = m\, g_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\beta$ bağıntıları, $\dot{q}_\beta$ için çözülsünler ve $\dot{q}_\beta$ lar Hamiltonyenden elimine edilsinler. O zaman bu bağıntı q_α nın fonksiyonu olarak gözükür. Bu takdirde H nin toplam differansiyeli,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\, dP_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\, dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt \qquad (12.5)$$

olarak ifade edilebilir. Denklem (12.4) ve denklem (12.5) in karşılaştırılmasıyla,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} \quad , \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (12.6)$$

olduğu görülür. Bunlar kanonik Hamilton denklemleri olarak bilinirler. Bu denklemler bir sistemin hareket denklemlerini elde etmek için Lagrange denk leri yerine kullanılabilir.

Eğer aşikar olarak zamanı içermiyorsa Hamiltonyen hareket sabitidir. H nin zamana göre toplam türevi;

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{12.7}$$

dir. Denlem (12.6) den;

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{12.8}$$

yazılabilir. Bu yüzden $\partial L / \partial t = 0$ ise H bir hareket sabitidir.

Denklem (12.6) denklemine, q_α , p_α cisinden birinci mertebe denklemlerin bir kümesi olarak bakmak mümkündür. Kısıtlamasız (bağsız) tek bir parçacık için 6 adet böyle birinci mertebe denklem olacaktır. Parçacık, üç koordinat üç momentten oluşan 6 boyutlu bir uzay olan faz uzayında kendi yörüngesi tarafından tanımlanabilir.

Basit korunumlu sistemler için Hamiltoyenin toplam enerjiyi temsil ettiğini göstermek mümkündür. Gerçekten;

$$p_\alpha \dot{q}_\alpha = m\, g_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = 2T \tag{12.9}$$

olduğundan Hamiltonyen ifadesi,

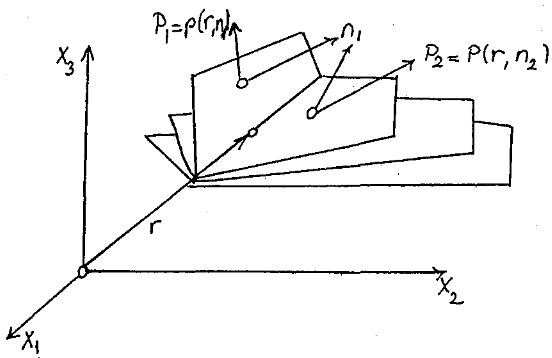
$$H= 2T - (T-V) = T + V \qquad (12.10)$$

dir. Burada H nin toplam enerji ile eşdeğerliği yalnız basit korunumlu sistemler için geçerlidir. Lagrange veya Hamilton formülasyonu ile tanımlanabilen en genel sistemlerde H nin mutlaka toplam enerjiyi temsil etmesi doğru değildir (Bradbury, 1968).

13. STRESS VE STRAİN TENSÖRLER

13.1. Stress Tensörü

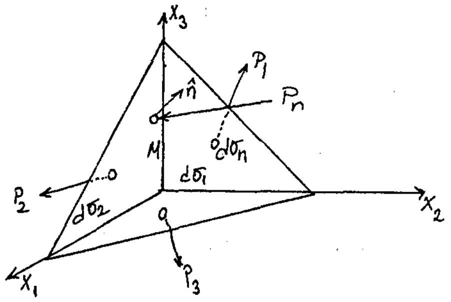
Elastik bir ortamın stress durumu, keyfi bir M noktasında bulunan $d\sigma$ elemanına etkiyen kuvvet bilindiğinde tayin edilir. **r**, M nin yer vektörü ve $\hat{n}$ ise $d\sigma$ ya dik bir birim vektör olsun. O zaman $d\sigma$ ya etkiyen kuvvet, $Pd\sigma$ dır. Burada P stress i, r ve $\hat{n}$ gibi iki vektörün $P(r,\hat{n})$ şeklinde bir fonksiyonudur. (Şekil 13.1).



Şekil 13.1 Noktanın konum ve doğrultusuna bağlı elastik ortamda alan elemanı üzerindeki stress.

$P(\boldsymbol{r},\mathbf{n})$ fonksiyonu, stress tensörü olarak adlandırılan ve yalnızca $\boldsymbol{r}$ ye bağlı olan belirli bir ikinci mertebe tensörden çıkarılabilir.

M noktası civarında kenarları K kartezyen koordinat sisteminin eksenleri boyunca yönelmiş bir elemanter dört yüzlü kuralım (Şekil 13.2).



Şekil 13.2 Dört yüzlünün yüzey lerindeki stress ler.

x_1, x_2, x_3 eksenlerine dik yüzeylerin alanlarını, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ ile gösterelim. $d\sigma_n$ ise $\hat{n}$ birim normale sahip eğik yüzeyin alanını temsil etsin. Ayrıca $P_{-1}\,d\sigma_1$, $P_{-2}\,d\sigma_2$, $P_{-3}\,d\sigma_3$ ve $P_{-n}\,d\sigma_n$ ler alanları $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ ve $d\sigma_n$ olan yüzeylere etkiyen kuvvetler olsun. Eksi işaretleri P_{-1}, P_{-2}, P_{-3} stress lerinin dört yüzlünün dış yüzeylerine etki ettiğini ifade eder. Dört yüzlünün dış normalleri koordinat eksenlerine zıt yöndedir. Etki=Tepki yasasıyla; dört yüzlünün iç yüzeyine etkiyen $P_1\,d\sigma_1$, $P_2\,d\sigma_2$, $P_3\,d\sigma_3$ kuvvetleri dış yüzeylere etkiyen kuvvetlere eşit ve zıt yönlüdür. Yani,

$$P_1 = -P_{-1}\ ,\quad P_2 = -P_{-2}\ ,\quad P_3 = -P_{-3}$$

dir.

Şimdi **a** yı dört yüzlünün kütle merkezinin ivmesi ve **f** yi dört yüzlünün birim kütleye etkiyen kuvvet olarak alalım. Newton un ikinci yasası yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\,dm &= \mathbf{f}\,dm + P_n\,d\sigma_n + P_{-1}\,d\sigma_1 + P_{-2}\,d\sigma_2 + P_{-3}\,d\sigma_3 \\ &= \mathbf{f}\,dm + P_n\,d\sigma_n - P_1\,d\sigma_1 - P_2\,d\sigma_2 - P_3\,d\sigma_3 \end{aligned} \tag{13.1}$$

yazabiliriz. Burada dm, dört yüzlünün kütlesidir. Limit halde dört yüzlü M noktasına çekilirken,

$$P_n \, d\sigma_n = P_1 \, d\sigma_1 + P_2 \, d\sigma_2 + P_3 \, d\sigma_3 = \sum_{i=1}^{3} P_i \, d\sigma_i \tag{13.2}$$

olur. Çünkü dm yi içeren terimler dört yüzlü hacmiyle orantılıdır ve denklemde içerilen alan elemanlarıyla karşılaştırıldığında ihmal edilebilecek büyüklüktedir. Bu yüzden,

$$d\sigma_i = d\sigma_n \cos(n, x_i) = n_i \, d\sigma_n \, , \tag{13.3}$$

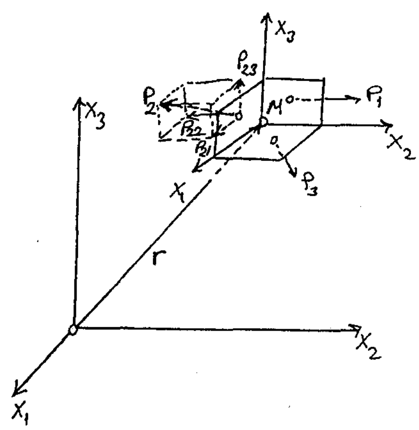
olduğundan, n birim normali alan elemanı üzerindeki stress,

$$P_n = \sum_{i=1}^{3} P_i \, n_i = P_i \, n_i \tag{13.4}$$

ile verilir. P_n nin K sisteminin eksenleri üzerindeki görüntüsünün alınmasıyla,

$$P_{nk} = P_{ik} \, n_i \qquad i,j,k=1,2,3$$

elde ederiz. Burada P_{ik} lar (i,k=1,2,3) M noktasındaki üç ortogonal alan elemanı üzerine etkiyen, i=k olduğunda normal i≠k olduğunda ise teğet olan dokuz elemanlı bir kümedir (Şekil 13.3). P_{ik} lar üzerine stress etkiyen alanın n yönelmesinden bağımsız olmakla beraber, bu dokuz nicelik M noktasına bağımlıdır. Bu yüzden keyfi bir n için P_n i belirtmemize izin verir. Bileşenleri P_{ik} olan fiziksel nicelik elastik ortamın her bir noktasındaki stress durumunu yegane olarak tayin eden stress tensörü olarak adlandırılır.



Şekil 13.3 Küb ün üç ortogonal elemanı üzerine etkiyen (P_1 , P_2 , P_3) üç stress vektörünün bir seti şeklinde stress tensörü.

Şimdi P_{ik} nin tensör karekterli olduğunu gösterelim. P_{ik} nın tanımı **n** normali üzerine kısıtlama koymadığından genellikten kaybımız olmaksızın yeni K' sisteminin i inci eksenini **n** boyunca alabiliriz. Bu durumda,

$$n = \hat{i}'_i$$

olur. K ve K' sistemleri sırasıyla $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$ ve $\hat{i}'_1$, $\hat{i}'_2$, $\hat{i}'_3$ ortonormal baz larına sahiptir. K nin l inci ekseni üzerindeki **n** normalinin görüntüsü olan n_l ,

$$n_l = n \cdot \hat{i}_l = \hat{i}'_i \cdot \hat{i}_l = \alpha_{i'l} \qquad (13.5)$$

ile verilir. Burada $\alpha_{i'l}$ K' nin i inci ekseni ile K nın l inci ekseni arasın daki açının kosinüsüdür. Böylece,

$$P_n = P_{i'} = P_l \; n_l = \alpha_{i'l} \; i_m \, P_{lm} \qquad (13.6)$$

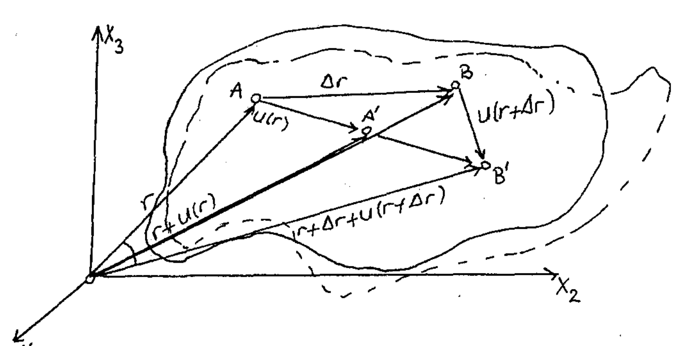
yazılabilir. öte yandan, P_l nin K$'$ daki k ıncı eksen üzerindeki görüntüsü alındığında,

$$\begin{aligned} P_l \cdot n'_k &= \alpha_{i'l} \, (i_m \cdot i'_k) P_{lm} \\ &= \alpha_{i'l} \, \alpha_{k'm} \quad P_{lm} \end{aligned} \qquad (13.7)$$

elde ederiz. Denklem (13.7) ve denklem (4.3) ün karşılaştırılması $P_{i'k}$ nin bir ikinci mertebe tensör olduğunu ortaya koyar.

13.2. Strain Tensörü (Deformasyon)

Elastik cismin, A ve B gibi iki komşu noktası verilsin. Bir deformasyonla A ve B yeni A$'$ ve B$'$ yeni konumlarına getirilsin. A ve B de; r ve $r + \Delta r$ yer vektörlerin A$'$ ve B$'$ de; r + U(r) ve $r + \Delta r$ + U($r + \Delta r$) yer vektörlerine sahip olsun (Şekil 13.4).



Şekil 13.4 Elastik cismin deformasyonu

Burada U(r) ve U(r+Δ r) vektörleri deformasyon sonunda A ve B noktalarının yer değiştirmesini tanımlar. (Şekil 13.4) de gösterildiği gibi, noktaların relativ konumu deformasyondan önce **Δ r** ile, deformasyondan sonra ise, $\Delta r'$ dir. Farz edelim ki, U_i bileşenleri $U_i = U_i(x_1, x_2, x_3)$ olan konumun bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + U_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) = U_i(x_1, x_2, x_3) \tag{13.9}$$

yazabiliriz. Taylor teoremini kullandıktan sonra ikinci mertebe terimlerin ihmal edilmesiyle

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \Delta x_k \tag{13.10}$$

yazabiliriz. Dikkat edilirse,

$$\Delta x_i' \, \Delta x_i' = (\Delta r')^2, \qquad \Delta x_i \, \Delta x_i = (\Delta r)^2 \tag{13.11}$$

dir. Denklem (13.10) ün karesini aldığımızda,

$$\begin{aligned}(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 &= 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l \\ &= \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_l}{\partial x_i} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \Delta x_i \Delta x_k \\ &= 2 U_{ik} \Delta x_i \Delta x_k ,\end{aligned} \tag{13.12}$$

olur. Burada,

$$U_{ik} = 1/2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \tag{13.13}$$

dir. Bu yüzden elastik cismin herhangi iki noktası arasındaki mesafedeki değişiklik U_{ik} niceliğiyle belirtilir ve bu nicelik deformasyon tensörü olarak adlandırılır.

U_{ik} nın gerçekten bir tensör olduğunu göstermek için yeni bir K' sistemine dönüşüm yapalım:

$$U'_{ik} = 1/2 \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_l}{\partial x'_i} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right) \qquad (13.14)$$

öte yandan K' den K ya

$$x_i = \alpha_{k'i} \, x'_k + x'_{\alpha} \qquad (13.15)$$

dönüşümünden yararlanılarak,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \alpha_{k'i} \qquad (13.16)$$

yazabiliriz. Zincir kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned}
U'_{ik} &= 1/2 \Big(\frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{i'm} U_m) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{k'n} U_n) \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{l'r} U_r) \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{l's} U_s) \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} \Big) \\
&= 1/2 \Big(\alpha_{i'm} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \alpha_{k'n} + \alpha_{k'n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \alpha_{i'm} \\
&\quad + \alpha_{l'r} \frac{\partial u_r}{\partial x_m} \alpha_{i'm} \alpha_{l's} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \alpha_{k'n} \Big) \\
&= \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \, 1/2 \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \delta_{rs} \frac{\partial u_r}{\partial x_m} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \right) \\
&= \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \, 1/2 \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_r}{\partial x_m} \frac{\partial u_r}{\partial x_n} \right)
\end{aligned} \qquad (13.17)$$

elde ederiz. Denklem (13.13) ile denklem (13.17) nin karşılaştırılmasıyla

$$U'_{ik} = \alpha_{i'm}\, \alpha_{k'n}\, U_{mn} \tag{13.18}$$

sonucunu verir. Denklem (13.18) ve denklem (4.3) ün karşılaştırılması U'_{ik} nın bir ikinci mertebe tensör olduğunu ortaya koyar (Borisenko and Tarapov, 1968).

14. SONUÇ

Fizikteki temel yasaların herhangi koordinat sisteminden veya tanımlama biçiminden bağımsız olması fiziğin temel prensibidir. Fiziksel bir olayın tanımlanmasında koordinat sistemleri mutlak gereklidirler. Olayı tanımlamakta yapılabilecek en iyi şey fizik yasalarını koordinat sistemlerinden bağımsız olarak ifade etmektir. Bunun da tensör analizi ile yapılabileceğini burada göstermeye çalıştık.

Tensörün tanımından yola çıkarak konular her koordinat sisteminde geçerli olabilecek şekilde ele alınıp incelenmiştir. Yani, genel ifadeler tanımlanmıştır. Uygulamada ele alınan konular da aynı özellikte olup diğer fizik yasalarının da bu şekilde ifade edilebileceği gösterilmiş.

Matematiksel bir nicelik olarak karşımıza çıkan tensörlerle elde edilen denklemler, nümerik olarak çözüm kolaylığı sağladığı gibi bilgisayar programları için de büyük bir kolaylık getirmektedir. Tensörel ifadeler olarak kullanıcı tarafından hazırlanan ifadelerle istenilen koordinat sisminde ve verilen herhangi değerlerle problemin nümerik olarak hesaplanması mümkün olmaktadır.

KAYNAKLAR DiZiNi

Bae, D.S., and Haug, E.J., A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part 1. Open Loop System, Mech. Struct. and Mach. 15(3), 1987, 359 -382 p.

Borisenko, A. I., and Tarapov, I.E., Vector on Tensor Analysis, Dover Publications, Inc., NewYork, 1968, 9-121 p.

Bradbury, T.C., Theoretical Mechanics, John Wiley, NewYork, 1968 43-85 p.

Harrison, W.A., Solid State Theory, McGraw-Hill, NewYork, 1970.

Kostritskii, S.M., and Semenov, A.E., Angular Dependence of the Raman Scattering of Light in Lithium Biobate Crystals, Fiz. Tverd. Tela. 26, 1984, 317-320 p.

Lai, W.M., and Rubin, D. and Krempl, E., Introduction to Continuum Mechanics, Pergamon Press, NewYork, 1978, Volume 17, 13-18 p.

Lass, H., Vector and Tensor Analysis, Tokyo, 1950, 248-254 p.

Nikolskii, M.D., Variational Statements of Geometrically Nonlinear Problems of the Elasticity Theory, Izv-An. SSSR, Mechanika Tverdogo Tela 21(6), 1986, 66-70 p.

Nishijima, K., Fields and Particles, W.A. Benjamin Massachusets, 1974.

Nye, J.F., Physical Properties of Crystals, Clarendon Press. oxford, 1957, 170-191 p.

Schwartz, M., Principles of Electrodynamics, McGraw-Hill Kogakusha, 1972.

Stasyuk, I.V., and Kotsur, S.S., On the Theory of Electrogyration in Dielectric Crystals, Phys. Stat. Sol. (b), 130(1), 1985, 103-113 p.

EK.1. Vektörlerin Türevi

Genelleştirilmiş kooardinatlar ve baz vektörler cinsinden infinitesimal bir deplasman vektörü $d\mathbf{s} = dq^i \vec{e}_i$ olarak ifade edilir. Parçacık hızını hesaplamak için bunu dt ye bölersek,

$$\upsilon = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \dot{q}^i \ \vec{e}_i$$

olur. $\dot{q}^1$, $\dot{q}^2$ ve $\dot{q}^3$ nicelikleri hızın kontravaryant bileşenleridir, fakat bunlar ekseriya genelleştirilmiş hız bileşenleri olarak adlandırılır. ivme nin hesabı böyle kolay değildir, çünkü baz vektörlervektörel fonksiyonlardır Formel olarak ivme yukarıdaki hız ifadesinin türevinin alınmasıyla hesaplanır:

$$\frac{du}{dt} = \ddot{q}^i \ \hat{e}_i + \dot{q}^i \frac{d\vec{e}_i}{dt}$$

Bu yüzden problemimiz baz vektörlerin nasıl türevlendiğini öğrenmektir. Burada,

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^j} \quad \dot{q}^j$$

yazarız ve kısmi türevleri hesaplarız. Herhangi bir koordinat sisteminde baz vektörleri kartezyen $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ vektörleri cinsinden ifade etmek mümkündür. Bu durumda kaybımız kovaryansın kaybıdır. Bu yüzden hesabımızı bütün nicelikleri genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden ifade ederek yapacağız.

Baz vektörlerin kısmi türevlerinin, baz vektörlerin lineer kombinasyonları olduğu önermesiyle işe başlarız:

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^{k} \hat{e}_k$$

Buradaki baz vektörlerin Γ_{ij}^{k} katsayıları ikinci türden Christoffel sembol leri olarak adlandırılır.

Christoffel sembollerinin önemli özelliği iki alt indise göre simetrik olmasıdır. Bu durum baz vektörlerin kartezyen birim vetörler cinsinden ifadesiyle kolayca ispat edilir.

$$\hat{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \hat{i}_k .$$

idi, türev alırsak,

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \hat{i}_k = \frac{\partial^2 x^k}{\partial q^j \partial q^i} \hat{i}_k$$

bulunur. Bu

$$\hat{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial q^j} \hat{i}_k$$

$$\frac{\partial \hat{e}_j}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial q^i \partial q^j} \hat{i}_k$$

olur. Türev almada sıra önemli olmayacağına göre,

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \hat{e}_j}{\partial q^i} \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$$

olduğu yani Christoffel sembolünün i,j alt indislerine göre simetrik olduğu anlaşılır.

EK.2. İkinci Newton Yasasının Kovaryant Formu

Newton un ikinci yasasını, A_k kovaryant ivme bileşenleri cinsinden,

$$Q_k = m\, A_k$$

olarak ifade etmek mümkündür. Q_k bileşenleri kuvvetin kovaryant bileşenleri dirler, fakat bunlar ekseriya genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri olarak isimlendirilirler. Yukarıdaki denklem bir vektör denklemi olduğundan bütün koordinat sistemlerinde geçerlidir. Amacımız genel kovaryant formda Newton un II. yasasının ifadesini meydana getirmektir.

Bölüm 7 de ifade edildiği gibi, $ds^2 = g_{ij}\, dq^i\, dq^j$ ile verilen bir çizgi elemanının ifadesiyle parçacığın kinetik enerjisi genelleştirilmiş hızlar cinsinden kuadratik formda ifade edilebilir:

$$T = 1/2\;\; m\, \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1/2\; m\, g_{ij}\;\; \dot{q}^i\;\; \dot{q}^j$$

Kinetik enerji, metrik tensörün koordinatlara bağımlılığından genelleştirilmiş koordinatların bir fonksiyonudur. Bu yüzden,

$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = 1/2\;\; m\;\; \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\; \dot{q}^i\;\; \dot{q}^j$$

dir. Ayrıca metrik tensör hızlara bağlı olmadığından,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = m\, g_{ki}\; \dot{q}^i$$

dir.

Şimdi Newton un II. yasasını uygun formda ifade etmek mümkündür:

$$Q_k = m\, A_k$$

idi A_k değeri yerine de

$$A_k = \frac{d}{dt}\,(g_{ki}\ \dot{q}^i) - 1/2\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\ \dot{q}^i\ \dot{q}^j$$

koyarsak (Bradbury, 1968), Q_k ifadesi,

$$Q_k = m\ \frac{d}{dt}\,(q_{ki}\ \dot{q}^i) - 1/2\ m\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\ \dot{q}^i\ \dot{q}^j$$

olacaktır. Burada,

$$1/2\ \ m\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\ \dot{q}^i\ \dot{q}^j = \frac{\partial T}{\partial q^k}$$

ve

$$q_{ki}\ \dot{q}^i = 1/2\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}$$

değerlerini yerlerine koyarsak,

$$Q_k = m\ \frac{d}{dt}\,(\frac{1}{m}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}) - \frac{\partial T}{\partial q^k}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}) - \frac{\partial T}{\partial q^k}$$

şeklini alır.