

173900

**FOURIER SERİSİ VE ALTUZAY-TABANLI
TANIYIM YÖNTEMLERİ İLE YOL
SPEKTRUMLARININ KESTİRİMİ**

Semiha TÜRKAY
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Ağustos – 2003

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Semiha Türkyay'ın **Fourier Serisi ve Altuzay-Tabanlı Tanıym Yöntemleri ile Yol Spektrumlarının Kestirimi** başlıklı **Elektrik-Elektronik Mühendisliği** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi **04.08.2003** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. HÜSEYİN AKÇAY	
Üye	: Doç. Dr. Ata Mugan	
Üye	: Yard.Doç.Dr. M. Tankut Özgen	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun **11.08.2003**... tarih ve **2913**... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
M ü d ü r ü

Anadolu Üniversitesi
Merkez Kütüphane

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FOURIER SERİSİ VE ALTUZAY-TABANLI TANIYIM YÖNTEMLERİ İLE YOL SPEKTRUMLARININ KESTİRİMİ

SEMIHA TÜRKAY

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Hüseyin Akçay

2003, 119 sayfa

Bu tezde, spektral çarpımlara ayırma yönteminin yol spektrumlarının kestirimi için uygulanabilirliği araştırıldı. Düzgün aralıklı olmayan spektrum ölçümleri kullanılarak çok-girdili/çok-çıkıtlı, doğrusal-zamandan bağımsız sistemlerin tanıyımı için iki algoritma geliştirildi. Birinci algoritma Fourier serisi tabanlı tanıyım algoritmasıdır. Bu algoritmanın yakınsama analizi sunuldu. İkinci algoritma altuzay-tabanlı algoritmadır. Bu algoritmanın amacı var olan çalışmalarda kabul edilen frekansların düzgün olma şartını ortadan kaldırmaktır. Son olarak, çeyrek araç modeli kullanılarak bir aracın, beyaz-gürültü veya renkli-gürültü hız girdileri olarak ele alınan rassal yol bozucu etkenlere karşı yanıtı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Sistem tanıyımı; Fourier serisi; Yol güç spektrumu; Kestirim; Rassal titreşimler.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ESTIMATION OF ROAD SPECTRA BY FOURIER SERIES AND SUBSPACE-BASED METHODS

SEMIHA TÜRKAY

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Electrical and Electronics Engineering Program

Supervisor: Prof.Dr. Hüseyin Akçay

2003, 119 pages

In this thesis, application of the spectral factorization to estimation of road spectra is investigated. Two algorithms are developed for the identification of multi-input/multi-output, linear-time invariant systems from non-uniformly spaced power spectrum measurements. The first algorithm is a Fourier series based identification algorithm. A convergence analysis of this algorithm is performed. The second algorithm is a subspace-based algorithm. The objective is to relax the uniformity condition imposed on the frequencies in the existing works. Then, the quarter-car model is used to study the response of the vehicle to random road excitations by treating them either as white-noise velocity inputs or colored-noise inputs.

Keywords: System identification; Fourier series; Road power spectrum; Estimation; Random vibrations.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımnda beni yönlendiren ve benden yardımlarımı esirgemeyen danıőmanım Sayın Prof.Dr. Hüseyin AKÇAY'a ve beni destekleyen aileme ve arkadaşlarım Araç.Gör. Nuray AT'a ve Őenay KURTULDU'ya sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Çalışma Motivasyonu	1
1.2 Geçmiş Çalışmalar	2
1.3 Tezin Kapsadığı Çalışmalar	3
2 STOKASTİK SÜREÇLERİN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ	6
2.1 Genel Kavramlar	6
2.1.1 Stokastik Süreçlerin İstatistikleri	6

2.2	Durağan Süreçler	9
2.3	Stokastik Girdili Sistemler	10
2.3.1	Doğrusal Sistemler	11
2.4	Güç Spektrumu	16
2.4.1	Doğrusal sistemler	17
2.5	Özet	18
3	STOKASTİK YOL VE İZ MODELLEMESİ	19
3.1	Yol Yüzeyinin Pürüzlülük Tanımı	20
3.1.1	Yolun Homojen ve İzotropik Bir Rassal Süreç Olarak Tanımlanması	20
3.1.2	Frekans Bölgesinde Yol ve İz Modellemesi	23
3.2	Tek Bir Spektral Yoğunluk ile Yol Tanımı	25
3.3	İlişkilendirilmiş Rassal Yol Uyarıcıları	26
3.3.1	Sol ve Sağ İzler Arasındaki Çapraz-Korelasyon: Biçimlendirici Filtre Yaklaşımı	28
3.3.2	Ön ve Arka Tekerlekler Arasındaki Korelasyon	33
3.3.3	Yol Uyarıcılarının Spektral Gösterimi	34
3.4	Yatışkın-Durum Kovaryans Denklemleri	37
3.5	Özet	42
4	TEK-İZ YOL SPEKTRUMLARININ KESTİRİMİ	43
4.1	Kesikli-Zaman Stokastik Süreçler	43

4.1.1	Kesikli-Zaman Doğrusal Sistemler	46
4.1.2	Sürekli-Zaman ve Kesikli-Zaman Modelleri Arasındaki Bağıntılar	47
4.2	Yol Spektrumlarının Kestirimi	50
4.2.1	Fourier Serisi-Tabanlı Tanıyım Algoritması	50
4.3	Kestirim Sonuçları	58
4.4	Algoritma 4.2.1'in Yakınsama Analizi	61
4.5	Özet	65
4.6	Algoritma 4.2.1'in MatLab Programı	65
5	ALTUZAY-TABANLI SPEKTRUM TANIYIMI	71
5.1	Güç Spektrumu Tanıyımı	72
5.2	Stokastik Yol Modelleme Örneği	83
5.3	Özet	85
5.4	Algoritma 5.1.1'in MatLab Programı	86
6	ÇEYREK-ARAÇ MODELİ	95
6.1	Durum-Uzay Formundaki Hareket Denklemleri	95
6.2	Frekans Yanıtı Çizimleri	98
6.3	Aracın Rassal Titreşimleri	99
6.3.1	Beyaz Gürültü Hız Girdisi	100
6.3.2	Renkli Gürültü Hız Girdisi	102
6.4	Özet	106

7 SONUÇ	112
7.1 Son Açıklamalar	112
7.2 Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler	112
KAYNAKLAR	114

ŞEKİLLER DİZİNİ

3.1	x, y -düzleminde ölçülmüş yol yüzeyinin (z) yüksekliği	21
3.2	Tekerlek girdilerinin, dört-girdili araç modeli yapısı	25
3.3	Üç farklı tip karayolu boyunca paralel izlerin spektral yoğunlukları: A, otoyol; B, tali yol; C, kaplama yol, ve \dots : $\hat{S}_L(\tilde{n})$; — : $\hat{S}_R(\tilde{n})$.	27
3.4	b (tali yol) iz genişliğinin tutarlılık fonksiyonu $\gamma(\tilde{n})$; — : $b = 0.61$ m, - - : $b = 1.22$ m, \dots : $b = 2.44$ m	28
3.5	Ölçülmüş tutarlılık fonksiyonları ve izotropi varsayımı altında hesaplanmış değerlerinin karşılaştırılması. A: otoyol; B: tali yol; C: kaplama yol ve A', B', C' $R_R(\tau_1)$ bilgisinden hesaplanmış değerlerdir	29
3.6	Tipik temel bir yolun spektral yoğunluğu $\hat{S}_R(\tilde{n})$ 'ya uygun çift eğim karakteristiğini gösterir	30
3.7	Yol Modeli	31
4.1	Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin bölünmüş güç yasası ve integrali alınmış beyaz gürültü ile yaklaşık olarak modellenmesi	58
4.2	Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 8.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi . .	59
4.3	Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 1.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi . .	60

5.1	$\widehat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 5.1.1'den elde edilen 1.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi	84
6.1	Bir taşıtın çeyrek-arac modelini	96
6.2	Aracın düşey ivme genlik-frekans yanıtı	99
6.3	Aracın süspansiyon deformasyonu genlik-frekans yanıtı	100
6.4	Aracın lastik deformasyonu genlik-frekans yanıtı	101
6.5	Beyaz-gürültü hız girdisi ile uyarılan aracın RMS düşey ivmesi ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki	103
6.6	Beyaz-gürültü hız girdisi ile uyarılan aracın RMS lastik deformasyonu ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki	104
6.7	Beyaz-gürültü hız girdisi ile uyarılan aracın RMS düşey ivmesi ve RMS lastik deformasyonu arasındaki ilişki	105
6.8	Şekil 3.6'daki $\widehat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 8.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi. Basamak 10'da, azalma faktörü $0.3/(s + 0.3)$ olarak alınmıştır . . .	106
6.9	Şekil 3.6'daki $\widehat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 1.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi. Basamak 10'da, azalma faktörü $0.3/(s + 0.3)$ olarak alınmıştır . . .	107
6.10	Beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS düşey ivmeleri arasındaki ilişki	108
6.11	Beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS süspansiyon deformasyonları arasındaki ilişki	108

6.12 Beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS lastik deformasyonları arasındaki ilişki	109
6.13 $v = 108$ km/sa hızında, beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS düşey ivme ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki	109
6.14 $v = 108$ km/sa hızında, beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS lastik deformasyonu ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki .	110
6.15 $v = 108$ km/sa hızında, beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS düşey ivme ve RMS lastik deformasyonu arasındaki ilişki	111

ÇİZELGELER DİZİNİ

- 3.1 Tek-iz pürüzlülük spektrumlarını temsil eden fonksiyonlar . . . 26
- 6.1 Çeyrek-araç modeli için araç parametre değerleri 96

Bölüm 1

GİRİŞ

1.1 Çalışma Motivasyonu

Araç titreşiminin yüksek nitelikli simülasyonu sadece üç boyutlu modellerle yapılabilir. Birçok serbestlik derecesine sahip sistemlerin hareket denklemleri bilgisayarlı algoritmalar tarafından türetildiği için, gerçek araç dinamiğine karşı iyi bir yaklaşım elde etmek mümkündür. Bununla birlikte, aktif ve pasif süspansiyon sistemlerinin sürüş performans limitlerinin ayrıntılı analizi, detaylı yol modelleme analizini gerektirir ve optimal kontrol kanunlarında kullanılan performans indeksleri, yol yükseltilerinin bilinmesini gerektirir. Böylece, araç dinamiği yanıtını gerçekçi yol modelleri kullanarak önceden tahmin etmek oldukça önem kazanır.

Gerçekçi bir yol modeli farklı akslar arasındaki ve paralel izler arasındaki korelasyonları göz önüne almalıdır. Genel olarak tipik yol yüzeyleri homojen ve izotropik iki-boyutlu-Gaussyan rassal süreçler olarak düşünülebilir ve bu varsayımlar, bir yol profilinin tamamını herhangi bir boyutsal izde hesaplanmış tek bir güç spektral yoğunluk ile tanımlamayı mümkün kılar. Daha sonra, yolun spektral tanımı, üzerinden geçme hız bilgisi ve aracın dinamik özellikleri ile birlikte araç yanıtının yer değiştirme, ivme ve gerilme cinsinden

ifadesini tanımlayacak olan yanıt analizini ortaya koyacaktır.

Böylece, bu tezde yol profili spektrumunu güç spektrumu ölçümlerini kullanarak modelleyen tanıyım algoritmaları geliştirildi. Buradaki amaç yol spektrumunu uygun düşük dereceli rasyonel bir transfer fonksiyonu ile modellemek ve bu yaklaşımı girdisi beyaz gürültü olan doğrusal biçimlendirici filtre tasarımında kullanmaktır. Böyle bir yaklaşım yapıldığında, araç kontrol problemi standart formda formüle edilebilir.

1.2 Geçmiş Çalışmalar

Araç süspansiyonlarının aktif kontrolü 1960'lı yılların sonlarından bu yana önemli araştırmaların konusu oldu; mesela, [4, 28, 10, 49, 12, 13]'e ve oradaki referanslara bakınız. Limitleri dikkate alan çalışmalar ve aktif süspansiyonların getirdiği potansiyel kazançlar [6, 52, 13, 15, 26] göstermiştir ki sabit performans ölçümüne odaklanmış süspansiyon kontrolörleri, tüm yol koşulları için incelendiğinde geleneksel pasif süspansiyonlara göre performansta sınırlı gelişme sağladılar. Sürme hareketi boyunca, yol ve araç arasındaki dinamik etkileşim, yol yüzeyi ve araç hızına bağlı olarak etkileyici bir biçimde değişir. Bu değişiklikler, her koşulda sistemin optimal (veya en azından optimale yakın olan) davranışını garanti edebilmek için dikkate alınmalıdır. Genel olarak, çok pürüzlü yol profillerinde bile süspansiyon sınırlarına ulaşılmasını engellemek için aktif süspansiyonlar tasarlanır. Aktif süspansiyonların tüm işlevlerini gerçekleştirebilmeleri için, tasarlanan kontrolörler değişken yol koşullarına karşı adapte olabilme yeteneğine sahip olmalıdır. Böylece, bu tezin esas konusu olan gerçekçi bir yol modeli geliştirebilme problemi oldukça önem kazanır.

Literatürde yer alan üç önemli süspansiyon performans ölçütü, yolcu konforu, süspansiyon deformasyonu, yani araç gövdesi ve tekerlek takımı arasındaki göreceli yer değiştirme ve lastik deformasyonudur. Genel olarak alçak,

düsey ivme sınırlarının arttırılmış konfora karşılık geldiği kabul edilir. Aracın yapısal özellikleri, süspansiyon deformasyon miktarları üzerinde katı sınırlamalar koyarak araç gövde ivmesinin azalmasına elverişli bir durum yaratır; ve iyi yol tutuş özelliği araç kullanımı ve genel olarak arttırılmış güvenlik için önemlidir. Sisteme ilave edilmiş sınırlamalar, tüm sistemin gürbüzlüğü, güvenliği ve maliyet giderleri tarafından getirilir.

Yol yüzeylerinin, durağan rassal süreçlerin realizasyonları olarak gösterilmesi, yolda oldukça sık karşılaşılan çukurlar gibi büyük düzensiz etkilerin analizden uzaklaştırılması ve ayrı olarak ele alınması şartıyla mümkündür. Böyle bir durum söz konusu olduğunda, yol yüzeyinin durağan rassal bir sürecin realizasyonu olarak tanımlanması verilen yol üzerinden geçen aracın yanıtının, rassal titreşimler teorisinin kabul görmüş teknikleri vasıtasıyla belirlenmesine imkan tanıyacaktır [43]. Ele alınan yol yüzeyinin izotropik olduğu düşünüldüğünde önemli bir basitleştirme mümkün hale gelecektir. Çünkü, tüm yüzeyin rassal tanımı tek bir izin rassal tanımı kullanılarak yapılabilecektir [44]. [24]'te yol uyarıcı süreçleri arasındaki tüm korelasyonları dikkate alan değiştirilmiş biçimlendirici filtre yaklaşımı önerilmiştir ve bu filtre rassal araç yanıtlarını önceden tahmin etmede kullanılmıştır.

1.3 Tezin Kapsadığı Çalışmalar

Bu çalışmanın amacı rassal yol uyarıcılarına karşı araç yanıtını belirlemeye yarayan yol spektrumunu kestirmektir. Bir sonraki amaç ise yol modellerinin aktif süspansiyon sistemlerinin tasarımındaki etkilerini araştırmaktır.

Bölüm 2'de, stokastik süreçler üzerine verilen genel kavramlar ve doğrusal filtreleme yöntemi gözden geçirilmiştir. Bu meteryal oldukça standarttır ve amaç bir sonraki bölümlerde kullanılacak olan terminolojiyi tanıtmaktır. Tezin önemli bir bölümü Bölüm 3'te ortaya konulmuştur. Bu bölümde, araç dinamiği literatüründeki stokastik yol modelleme sonuçları sunulmuştur. Bu

sunumdaki yenilik, yol spektrumuna uygun rasyonel yaklaşımlar getiren ve tekerlekler arasındaki tüm korelasyonları dikkate alan frekans bölgesi biçimlendirici filtre tasarımını yeniden spektral çarpımlarına ayırma problemi olarak düzenlemektir. Daha sonra, biçimlendirici filtrenin durum-uzay formülleri, aracın hareket denklemleri ile genişletilerek yol uyarıcılarının neden olduğu rassal titreşimleri tanımlamak için kullanılırlar. Son olarak, yatışkın-durum kovaryans denklemi düz bir yolda sabit ileri hızla hareket eden bir araç için türetilir.

Bölüm 4'te, önce Bölüm 2'de verilen genel kavramların kesikli-zaman uyarlamaları gözden geçirilmiştir. Daha sonra, Bölüm 3'te formüle edilmiş spektral çarpımlarına ayırma problemini çözen Fourier-serisi tabanlı tanıyım algoritmasını sunulmuştur. Bu algoritma, başarılı bir biçimde [43]'teki verilere uygulanmıştır. Son olarak, algoritmanın yakınsama analizi yapılmıştır. Fourier serisinde, trigonometrik fonksiyonların seçimi notasyonel basitliği sağlamak için yapılmıştır. Bu fonksiyonlar, herhangi bir düzgün sınırlı taban fonksiyonlarının tüm seti ile yer değiştirebilirler [1]. Bölüm 4'ün sonuçları [50]'de yayınlanmak üzere gönderilmiştir.

Bölüm 5'te, düzgün aralıklı olmayan frekanslarda ölçülmüş güç spektrum örneklerinden çok-girdili/çok-çıkıtlı sistemlerin tanıyımında kullanılan altuzay tabanlı bir algoritma geliştirilmiştir. Bu bölümdeki amaç [33]'ta verilen çalışmanın frekanslar üzerine konulmuş düzgünlük şartını kaldırmaktır. Daha sonra, algoritma Bölüm 5'te çalışılan rassal yol modelleme problemini çözen uygulamalı bir örnek ile gösterilmiştir. Bölüm 5'in sonuçları [51]'de yayınlanmak üzere gönderilmiştir.

Bölüm 6'da, çeyrek araç modeli kullanılarak bir aracın, beyaz-gürültü veya renkli-gürültü hız girdileri olarak ele alınan rassal yol bozucu etkenlere karşı yanıtı analiz edilmiştir. Basitleştirilmiş bir veya iki serbestlik derecesine sahip modeller, yani taşıtların çeyrek-arac modelleri, birçok araştırmacı tarafından aktif ve pasif sistemlerin davranışını analiz etmede kullanılmıştır.

Basit olmalarına rağmen, süspansiyon performans sınırlamalarının temellerini içerirler. Böylece, ilgilenilen değişkenler arasındaki uzlaşımlar bir dizi yol modeli ve araç ileri hızları için gösterilmiştir. En iyi sonuçlar yol spektrumunun yüksek dereceli rasyonel modelleri için elde edilmiştir. Bu bölümün içeriği [38, 39]'de yayınlanmak üzere gönderilmiştir.

Bölüm 2

STOKASTİK SÜREÇLERİN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

Bu bölümde, tek-boyutlu stokastik süreçler gözden geçirilecektir. Gözden geçirilen materyal oldukça standart olup, mesela ders kitabı olan [21]'de bulunabilir.

2.1 Genel Kavramlar

Rassal bir değişken olan x , herhangi bir deneyin ζ gibi bir sonucuna $x(\zeta)$ gibi bir değer atayan kuraldır. Stokastik bir süreç olan $x(t)$ ise her ζ değerine $x(t, \zeta)$ gibi bir fonksiyon atayan kuraldır. Böylece, bir stokastik süreç, ζ parametresine bağlı zaman fonksiyonlarının oluşturduğu bir topluluktur veya, t ve ζ 'ya bağlı bir fonksiyondur. ζ kümesi deneysel sonuçların oluşturduğu bir setten oluşur ve t kümesi de reel sayıların oluşturduğu \mathbf{R} setinden oluşur. Bu tezde $x(t)$ gösterimi, ζ 'ya bağlılığı ihmal edilmiş stokastik bir süreci belirtecektir.

2.1.1 Stokastik Süreçlerin İstatistikleri

Sayılamayan sonsuz tane reel rassal değişken, her t değeri için, bir reel stokastik süreç oluşturur. Belirlenmiş bir t değeri için, $x(t)$ aşağıdaki dağılım fonksiy-

onuna sahip bir rassal değişken olur.

$$F(x; t) = \text{Prob} \{x(t) \leq x\}. \quad (2.1)$$

$x(t)$ 'nin n .inci dereceden dağılım fonksiyonu, $x(t_1), \dots, x(t_n)$ rassal değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonudur ve $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ ile gösterilir.

Complex bir süreç olan $z(t) = x(t) + jy(t)$, $x(t)$ ve $y(t)$ reel süreçlerinin bileşik istatistiği ile tanımlanır. Bir sonraki ifadelerde, hem reel hem de complex süreçler $x(t)$, sembolü ile gösterileceklerdir.

Bir stokastik sürecin istatistiksel özelliklerini belirleyebilmek için $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ fonksiyonunun her x_i, t_i , ve n 'deki değerleri bilinmelidir. Fakat birçok uygulamada, özellikle $x(t)$ ve $|x(t)|^2$ 'nin beklenen değerleri gibi sadece kesin ortalamalar kullanılır. Bu nicelikler, $x(t)$ 'nin aşağıda tanımlanan ikinci derece özellikleri cinsinden ifade edilebilir.

Ortalama: $x(t)$ 'nin ortalaması olan $\eta(t)$, $x(t)$ 'nin beklenen değeridir,

$$\eta(t) = E \{x(t)\}. \quad (2.2)$$

Otokorelasyon: $x(t)$ süreci'nin otokorelasyonu olan $R(t_1, t_2)$,

$$R(t_1, t_2) = E \{x(t_1)x^*(t_2)\} \quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlanır. burada a^* , a 'nın kompleks eşleniğidir. *Ortalama güç* $R(t_1, t_2)$ 'nin $t_1 = t_2 = t$ köşegeni üzerindeki değeridir,

$$R(t, t) = E \{|x(t)|^2\}. \quad (2.4)$$

Otokovaryans : $x(t)$ sürecinin otokovaryansı olan $C(t_1, t_2)$, $x(t_1)$ ve $x(t_2)$ rassal değişkenlerinin kovaryansıdır:

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta^*(t_2) \quad (2.5)$$

Korelasyon katsayısı: Korelasyon katsayısı aşağıda verilen oran ile tanımlanır ve $r(t_1, t_2)$ ile gösterilir.

$$r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}}. \quad (2.6)$$

Çapraz-korelasyon: $x(t)$ ve $y(t)$ süreçlerinin çapraz korelasyonları

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E \{x(t_1)y^*(t_2)\} = R_{yx}^*(t_2, t_1) \quad (2.7)$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

Çapraz-kovaryans: $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin çapraz-kovaryansları benzer şekilde

$$C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_y^*(t_2) \quad (2.8)$$

ile tanımlanır.

$x(t)$ ve $y(t)$ birbirine (karşılıklı) *diktir* şayet

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 0, \quad \text{her } t_1 \text{ ve } t_2 \text{ için.} \quad (2.9)$$

Bu iki süreç arasında *korelasyon yoktur* şayet

$$C_{xy}(t_1, t_2) = 0, \quad \text{her } t_1 \text{ ve } t_2 \text{ için.} \quad (2.10)$$

Beyaz gürültü: $\nu(t)$ süreci beyaz gürültüdür, eğer $\nu(t_i)$ ve $\nu(t_j)$ değerlerinin her t_i ve $t_j \neq t_i$ için korelasyonları yoksa:

$$C(t_i, t_j) = 0, \quad \text{her } t_i \neq t_j. \quad (2.11)$$

Beyaz gürültü sürecinin otokovaryansı,

$$C(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad q(t_1) \geq 0 \quad (2.12)$$

formunda olmalıdır. Burada $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonudur.

Normal süreç: $x(t_1), \dots, x(t_n)$ rassal değişkenleri, herhangi bir n ve t_1, \dots, t_n değerleri için bileşik normal ise bu değişkenlerin oluşturduğu $x(t)$ süreci normaldir. Normal sürecin istatistiği tamamen, ortalama değeri olan $\eta(t)$ ve otokovaryansı olan $C(t_1, t_2)$ ifadeleriyle belirlenir.

2.2 Durağan Süreçler

Stokastik bir süreç olan $x(t)$ 'nin istatistiksel özellikleri orjine götürüldüğünde değişmiyorsa, bu sürece *tam durağan* süreç denir. Bu da, herhangi bir c değeri için $x(t)$ ve $x(t+c)$ süreçlerinin aynı istatistiğe sahip olacağı anlamına gelir. $x(t)$ ve $y(t)$ 'nin bileşik istatistiği ile, $x(t+c)$ ve $y(t+c)$ 'nin bileşik istatistiği, herhangi bir c değeri için, aynı istatistiğe sahipse, $x(t)$ ve $y(t)$ süreçlerine *bileşik durağan* süreçler denir. Kompleks bir sürecin reel ve imajiner kısımları bileşik durağan ise, bu süreç de bileşik durağan olur.

Yukardaki tanımdan hareketle, reel tam durağan bir sürecin n .inci dereceden yoğunluk fonksiyonu olan $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, herhangi bir c değeri için

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır. Özellikle, $f(x; t) = f(x; t+c)$ dir. Bu nedenle $x(t)$ 'nin birinci dereceden yoğunluğu t 'den bağımsızdır:

$$f(x; t) = f(x) \quad (2.14)$$

Benzer şekilde, herhangi bir c değeri için $f(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c)$, c 'den bağımsızdır. Bu aşağıdaki sonucu ortaya koyar:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau), \quad \tau = t_1 - t_2. \quad (2.15)$$

Böylece $x(t+\tau)$ ve $x(t)$ reel rassal değişkenlerinin bileşik yoğunluğu t 'ye bağlı değildir ve $f(x_1, x_2; \tau)$ 'e eşittir.

Stokastik bir süreç olan $x(t)$ 'nin ortalama değeri sabit ise bu sürece *geniş anlamda durağan* bir süreç denir.

$$E \{x(t)\} = \eta, \quad (2.16)$$

ve otokorelasyonu sadece $\tau = t_1 - t_1$ 'ye bağlıdır:

$$E \{x(t+\tau)x^*(t)\} = R(\tau). \quad (2.17)$$

Özellikle dikkat edilirse,

$$E \{ |x(t)|^2 \} = R(0). \quad (2.18)$$

Durağan sürecin ortalama gücü böylece t 'den bağımsızdır ve $R(0)$ 'a eşittir. (2.17)'den anlaşıldığı gibi, geniş anlamda durağan sürecin otokorelasyonu sadece $\tau = (t_1 - t_2)$ 'ye bağlıdır:

$$C(\tau) = R(\tau) - |\eta|^2 \quad (2.19)$$

ve korelasyon katsayısı da

$$r(\tau) = C(\tau)/C(0) \quad (2.20)$$

eşittir.

$x(t)$ ve $y(t)$ süreçleri bileşik geniş-anlamda durağandır, eğer bu süreçlerinin her biri geniş anlamda durağan ve çapraz korelasyonları sadece $\tau = t_1 - t_2$ 'ye bağlı ise:

$$R_{xy}(\tau) = E \{ x(t + \tau)y^*(t) \}, \quad C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \eta_x \eta_y^*. \quad (2.21)$$

$x(t)$ geniş anlamda durağan beyaz gürültü olduğu zaman,

$$C(\tau) = q\delta(\tau). \quad (2.22)$$

Dikkat edilecek olursa bir süreç tam durağan ise, aynı zamanda geniş anlamda durağandır.

2.3 Stokastik Girdili Sistemler

Verilmiş stokastik bir süreç olan $x(t)$ 'nin her $x(t, \zeta_i)$ örneklerine, belli bir kural dahilinde $y(t, \zeta_i)$ fonksiyonu atanır. Böylece, örnekleri $y(t, \zeta_i)$ fonksiyonları olan yeni bir

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

süreci meydana gelir. Yeni oluşturulan $y(t)$ süreci, girdisi $x(t)$ süreci olan bir *sistemin* (dönüşüm \mathcal{T} sembolü ile gösterilmiştir) çıktısı olarak da düşünülebilir.

Bir sistem, eğer sadece t değişkenine bağlıysa ve bu sistemde ζ parametre olarak yer alıyorsa bu sisteme *belirleyici (deterministic)* sistem denir. Bu ifade, girdinin $x(t, \zeta_1)$ ve $x(t, \zeta_2)$ örneklerinin t değişkenine göre özdeş olması halinde, bunlara karşılık gelen çıktının, $y(t, \zeta_1)$ ve $y(t, \zeta_2)$ örneklerinin de t 'ye göre özdeş olacağını anlamına gelir. Eğer \mathcal{T} operatörü her iki t ve ζ değişkenlerine bağlıysa bu sisteme *stokastik* sistem denir. Bu da ζ_1 ve ζ_2 gibi, $x(t, \zeta_1) = x(t, \zeta_2)$ 'nin t 'ye göre özdeş olduğu, fakat $y(t, \zeta_1) \neq y(t, \zeta_2)$ olacağı iki sonucun var olduğu anlamına gelir. Bu tezde sadece belirleyici sistemlerle ilgilenilecektir.

2.3.1 Doğrusal Sistemler

$$y(t) = \mathcal{L}[x(t)] \quad (2.23)$$

notasyonu, $y(t)$ 'nin, girdisi $x(t)$ olan *doğrusal* bir sistemin çıktısı olduğunu gösterecek. Aşağıdaki ifade

$$\mathcal{L}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1\mathcal{L}[x_1(t)] + a_2\mathcal{L}[x_2(t)] \quad (2.24)$$

herhangi a_1 ve a_2 sayıları ile girdi örnekleri $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ için geçerlidir. Yukarıdaki ifade doğrusallığın bilinen tanımıdır ve a_1 ve a_2 katsayılarının rasal değişkenler olması durumunda da geçerlidir, çünkü, sistemin deterministik olduğunu varsayarak sadece t değişkenine bağlı olduğu belirtilmiş oldu. Eğer bir sistem, iç yapısı veya bir diferansiyel denklem ile ifade edilirse, o zaman (2.24) eşitliği, $y(t)$ 'nin sadece *sıfır-durum yanıtı* olması durumunda geçerli olur. Başlangıç koşullarına göre yanıt (sıfır-girdi yanıtı) dikkate alınmayacaktır.

Bir sistemin $x(t + c)$ 'ye verdiği yanıt, bütün c değerleri için $y(t + c)$ 'ye eşitse, bu sisteme *zamandan bağımsız* bir sistem denir. Bu tezde ele alınacak olan bütün doğrusal sistemlerin zamandan bağımsız oldukları düşünülecektir. Doğrusal, zamandan bağımsız bir sistemin çıktısı aşağıdaki konvolüsyon ile bulunur.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \alpha)h(\alpha)d\alpha. \quad (2.25)$$

Burada $h(t) = \mathcal{L}[\delta(t)]$ sistemin darbe yanıtıdır. Sistemin transfer fonksiyonu, $h(t)$ 'nin Laplace dönüşümü olan $H(s)$ ile gösterilecektir.

İleride, bir çok sistem (2.25) eşitliği ile tanımlanacak. Bununla birlikte, incelemeye, bir sonraki teoreme dayanan bir çok sonucun, aynı zamanda bir veya daha fazla değişken içeren keyfi doğrusal operatörler için de geçerli olduğu vurgulanarak işlevsel bir gösterim olan (2.23) ile başlanacaktır. Eğer $x(t)$ tam durağan bir süreç ise $y(t)$ 'ninde tam durağan bir süreç olacağına dikkat edilmelidir.

Teorem 2.3.1 (Temel Teorem) *Herhangi bir doğrusal sistem için,*

$$E \{ \mathcal{L}[x(t)] \} = \mathcal{L}[E \{ x(t) \}]. \quad (2.26)$$

Başka bir deyişle, $y(t)$ çıktısının ortalaması $\eta_y(t)$, sistemin $\eta_x(t)$ ortalamalı girdisine olan yanıtına eşittir.

$$\eta_y(t) = \mathcal{L}[\eta_x(t)], \quad (2.27)$$

Buna göre,

$$E \{ y(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} E \{ x(t - \alpha) \} h(\alpha)d\alpha = \eta_x(t) * h(t). \quad (2.28)$$

Teorem (2.3.1), doğrusal bir sistemin çıktısı olan $y(t)$ 'nin herhangi bir derecedeki bileşik momentlerini, bunlara karşılık gelen girdinin momentleri cinsinden ifade etmek için kullanılabilir. Aşağıdaki özel durumlar, stokastik girdili sistemlerin çalışma alanlarında birinci dereceden bir öneme sahiptir.

Teorem 2.3.2 *Aşağıdaki koşullar geçerlidir,*

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \mathcal{L}_{(2)}[R_{xx}(t_1, t_2)] \quad (2.29)$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \mathcal{L}_{(1)}[R_{xy}(t_1, t_2)]. \quad (2.30)$$

Yukarıda, $\mathcal{L}_{(2)}$ ($\mathcal{L}_{(1)}$) notasyonu sistemin t_2 (t_1) değişkeni üzerinden işlem gördüğünü ve t_1 (t_2)'in parametre olarak yer aldığını söyler. (2.25)'teki içeriğe uygun olarak,

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t_1, t_2 - \alpha)h(\alpha)d\alpha \quad (2.31)$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t_1 - \alpha, t_2)h(\alpha)d\alpha \quad (2.32)$$

bulunur.

Beyaz gürültü yanıtı

Beyaz gürültü ile sürülen bir sistemin çıktısının $E\{|y(t)|^2\}$ ortalama şiddeti belirlenecektir.

Teorem 2.3.3 Bir doğrusal sistemin girdisi beyaz gürültü ise ve otokorelasyonu

$$R_{xx}(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad (2.33)$$

ise, o zaman

$$E\{|y(t)|^2\} = q(t) * |h(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q(t - \alpha) |h(\alpha)|^2 d\alpha \quad (2.34)$$

şeklinde bulunur.

Türev Alıcılar

Çıktısı, girdinin türevi olan doğrusal sisteme türev alıcı sistem denir.

$$\mathcal{L}[x(t)] = \dot{x}(t) \quad (2.35)$$

Bundan dolayı, bir önceki sonuçlar, $\dot{x}(t)$ 'nin ortalama değerini ve otokorelasyonunu bulmak için kullanılabilir. (2.27)'den hareketle,

$$\eta_{\dot{x}}(t) = \mathcal{L}[\eta_x(t)] = \frac{d}{dt} \eta_x(t). \quad (2.36)$$

Benzer şekilde,

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = \mathcal{L}_{(2)}[R_{xx}(t_1, t_2)] = \frac{\partial}{\partial t_2} R_{xx}(t_1, t_2) \quad (2.37)$$

çünkü, bu durumda, $\mathcal{L}_{(2)}$ t_2 'ye göre türev alımı anlamına gelir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} R_{\dot{x}\dot{x}}(t_1, t_2) &= \mathcal{L}_{(1)}[R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)] = \frac{\partial}{\partial t_1} R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{xx}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

ifadesi elde edilir.

Durağan Süreçler

Eğer $x(t)$ geniş anlamda durağan ise, $\eta_x(t)$ sabit bir değere eşittir; bu nedenle,

$$E \{ \dot{x}(t) \} = 0. \quad (2.39)$$

Ayrıca, $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$ olduğundan dolayı, $\tau = t_1 - t_2$ ile aşağıdaki sonuca varılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} R_{xx}(t_1 - t_2) &= -\frac{d}{d\tau} R_{xx}(\tau), \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{xx}(t_1 - t_2) &= -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{xx}(\tau). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Bu nedenle

$$\begin{aligned} R_{x\dot{x}}(\tau) &= -\frac{d}{d\tau} R_{xx}(\tau) \\ R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) &= -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{xx}(\tau) \end{aligned} \quad (2.41)$$

olur.

Diferansiyel Denklemler

Gelişi güzel uyarılan bir belirleyici diferansiyel denklem

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = x(t) \quad (2.42)$$

formuna sahiptir.

Ortalama: Girdisi $\eta_x(t)$ olan \mathcal{L} 'nin çıktısı, $y(t)$ 'nin ortalaması olan $\eta_y(t)$ dir ve aşağıdaki denklemi

$$a_n \eta_y^{(n)}(t) + \dots + a_0 \eta_y(t) = \eta_x(t) \quad (2.43)$$

başlangıç koşulları

$$\eta_y(0) = \dots = \eta_y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (2.44)$$

için sağlar.

Korelasyon: $R_{xy}(t_1, t_2)$ 'yi belirlemek için, (2.29) kullanılır.

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \mathcal{L}_{(2)}[R_{xx}(t_1, t_2)]. \quad (2.45)$$

Bu durumda, $\mathcal{L}_{(2)}$ ifadesi, $R_{xy}(t_1, t_2)$ 'nin,

$$a_n \frac{\partial^n}{\partial t_2^n} R_{xy}(t_1, t_2) + \dots + a_0 R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) \quad (2.46)$$

diferansiyel denklemini,

$$R_{xy}(t_1, 0) = \dots = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_2^{n-1}} R_{xy}(t_1, 0) = 0 \quad (2.47)$$

başlangıç koşulları için sağladığı görülür.

Benzer şekilde,

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \mathcal{L}_{(1)}[R_{xy}(t_1, t_2)] \quad (2.48)$$

olduğundan dolayı,

$$R_{yy}(0, t_2) = \dots = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1^{n-1}} R_{yy}(0, t_2) = 0 \quad (2.49)$$

başlangıç koşulları için, yukarıdaki sonuca benzer bir sonuç elde edilir:

$$a_n \frac{\partial^n}{\partial t_1^n} R_{yy}(t_1, t_2) + \dots + a_0 R_{yy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2). \quad (2.50)$$

2.4 Güç Spektrumu

Geniş anlamda durağan bir süreç olan $x(t)$ 'nin (reel veya kompleks) *güç spektrumu*, otokorelasyon fonksiyonu $R(\tau) = E \{x(t + \tau)x^*(\tau)\}$ 'nin $S(\omega)$ Fourier dönüşümü olarak tanımlanır:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.51)$$

$R(-\tau) = R^*(\tau)$ olduğu için, $S(\omega)$ 'nin ω 'nın reel bir fonksiyonu olduğuna dikkat edilmeli. Fourier geri dönüşüm formülünden,

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.52)$$

olarak elde edilir.

Sık olarak, güç spektrumu, dalgaboyu sayısı n cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{S}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi n\tau} d\tau. \quad (2.53)$$

Daha sonra, otokorelasyon fonksiyonu

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(n)e^{j2\pi n\tau} dn \quad (2.54)$$

formülüyle geri elde edilir.

Dalgaboyu sayısı'nın birimi bir saniyedeki devir sayısıdır (genel olarak SI birim sisteminde Hertz (Hz) olarak adlandırılır) ve frekans değişkeni ω 'nın birimi bir saniyedeki radyan miktarıdır (rad/sec).

$S(\omega)$ ile $\hat{S}(n)$ arasındaki ilişkinin,

$$\hat{S}(n) = S(2\pi n) \quad (2.55)$$

olduğuna dikkat edilmeli.

Bazı yazarlar güç spektrum yoğunluğunu tanımlarken farklı ifadeler kullanırlar, ve eğer, güç spektrum yoğunluğunun nasıl tanımlandığı bilinmezse, yayınlanmış yol profili verileri karşılaştırılırken güçlükler doğar. (Liste için

[29]'e bakınız). Bu tezde, (2.51)–(2.52) ve (2.53)–(2.54) çift yönlü dönüşümlerine bağlı kalınmıştır.

$x(t)$ ve $y(t)$ süreçlerinin *çapraz-güç spektrumu*, çapraz korelasyon fonksiyonu $R_{xy}(\tau) = E\{x(t + \tau)y^*(t)\}$ 'nin $S_{xy}(\omega)$ Fourier dönüşümüdür. Böylece,

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau; \\ R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (2.56)$$

$x(t)$ ve $y(t)$ süreçleri reel olsalar dahi $S_{xy}(\omega)$ fonksiyonu, genel olarak, kompleks-değerlidir, ve bütün durumlarda,

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega) \quad (2.57)$$

ifadesi geçerlidir.

Tutarlılık fonksiyonu $\gamma(n)$,

$$\gamma(n) = \frac{|\hat{S}_{xy}(n)|}{\sqrt{\hat{S}_x(n)\hat{S}_y(n)}} \quad (2.58)$$

şeklinde tanımlanır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$0 \leq \gamma(n) \leq 1, \quad 0 \leq n < \infty \quad (2.59)$$

olduğu görülür.

2.4.1 Doğrusal sistemler

Doğrusal bir sistemin yanıtı olan

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \alpha)h(\alpha)d\alpha \quad (2.60)$$

çıktısının $R_{yy}(\tau)$ otokorelasyonu ve $S_{yy}(\omega)$ güç spektrumu, $x(t)$ girdisinin otokorelasyonu $R_{xx}(\tau)$ ve güç spektrumu $S_{xx}(\omega)$ cinsinden ifade edilecektir.

Teorem 2.4.1 (2.60) ile ifade edilen doğrusal sistemi düşünölsün. Böylece,

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau); \quad R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau) * h(\tau) \quad (2.61)$$

$$S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega)H^*(\omega); \quad S_{yy}(\omega) = S_{xy}(\omega)H(\omega). \quad (2.62)$$

ifadeleri elde edilir.

(2.61) ve (2.62) ifadeleri birleştirilirse, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) = R_{xx}(\tau) * \rho(\tau) \quad (2.63)$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)H(\omega)H^*(\omega) = S_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2$$

burada

$$\rho(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau)h^*(t)dt \leftrightarrow |H(\omega)|^2 \quad (2.64)$$

olarak tanımlanmıştır.

Özellikle, eğer $x(t)$ ortalama gücü q olan beyaz güröltü ise, o zaman

$$R_{xx}(\tau) = q\delta(\tau); \quad S_{xx}(\omega) = q \quad (2.65)$$

$$S_{yy}(\omega) = q |H(\omega)|^2; \quad R_{yy}(\tau) = q\rho(\tau)$$

olduğuna dikkat edilmeli.

Dönüşüm formölünden,

$$E \{ |y(t)|^2 \} = R_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \geq 0 \quad (2.66)$$

ifadesi bulunur.

2.5 Özet

Bu bölümde, bir sonraki bölümlerde gerekli olacak birçok temel kavram gözden geçirildi. Bu ifadeler ve tanımlar, gösterimlerde küçük değişiklikler ile çok boyutlu ve vektörel değerli stokastik süreçleri de ifade etmede kullanılacaktır.

Bölüm 3

STOKASTİK YOL VE İZ MODELLEMESİ

Yol veya yüzey pürüzlülüğü, sürücüye veya aracın kendi yapısına uygulanan temel bozucu fonksiyonları gösterir. Bunun için, aracın dinamik yanıtını, realistik bir yol modeli kullanarak, önceden tahmin etmek önemlidir, fakat tamamen realistik bir yol modeli geliştirmek de oldukça zordur. Bütün yol modelleri, yol profilini stokastik bir süreç olarak idealleştiren ve yolda oldukça sık karşılaşılan çukurlar gibi büyük, düzensiz etkileri göz önüne almayan, önemli bir varsayıma göre ortaya konulmuştur. İkinci etki tabiki göz ardı edilmemelidir.

Yol yüzeyinin, durağan rassal bir sürecin gerçekleşmesi olarak tanımlanması, verilen bir yolun üzerinden geçen aracın yanıtının, rassal titreşimler teorisinin kabul görmüş teknikleri vasıtasıyla belirlenmesine imkan tanıyacaktır. Durağan rassal uyarıcıların normal dağılımlı ve sıfır-ortalama değerli olduğu özel bir durumda, uyarıcı sürecin yeterli istatistiksel tanımını elde etmek için, uyarıcıların geçmiş bilgilerinden sadece ikinci derece momentlerini veya aslında sadece spektral yoğunluklarını hesaplamak gerekir. Böylece, yolun spektral tanımı, hız bilgisi ve aracın dinamik özellikleriyle birlikte, sistemin yer değiştirme, ivme ve gerilim cinsinden ifade edilmiş cevabını kullanışlı olacak düzeyde tanımlayacak olan bir yanıt analizini verecektir.

Bu bölümde [43, 44, 24, 47]'teki çalışmalar tekrar gözden geçirilecektir.

Daha fazla referans, gelişmiş yer araç süspansiyon sistemlerinin dinamik analizleri ve kontrol tasarım görüşleri ile ilgili oldukça geniş bir literatürü sınıflandıran [34]'teki bibliografik listede bulunabilir.

3.1 Yol Yüzeyinin Pürüzlülük Tanımı

Yol boyunca ilerleyen, dört tekerlekli bir araç, herbir tekerleğe birtane olmak üzere, dört etkili yerdeğiştirme uyarıcısının etkisi altında kalır. Yolun tanımı, her bir tekerleğe etkiyen yer değiştirmeyi (istatistiksel terimler cinsinden) ve dört yerdeğiştirme arasındaki bütün korelasyonları tanımlayacak bir biçimde eksiksiz yapılmış olmalıdır.

3.1.1 Yolun Homojen ve İzotropik Bir Rassal Süreç Olarak Tanımlanması

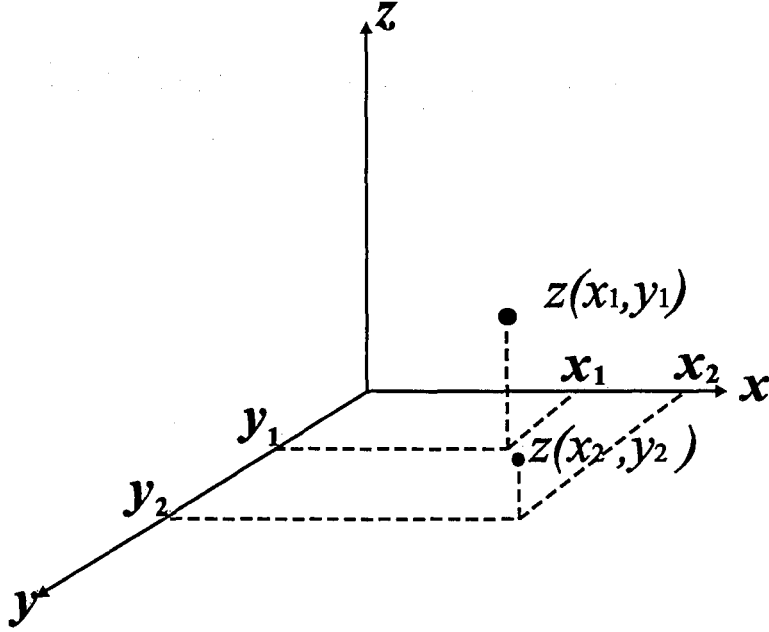
Eğer yol yüzeyi oldukça genel, stokastik bir sürecin gerçekleşmesi olarak düşünülürse, iki-boyutlu korelasyon fonksiyonları yolun istatistiksel bir tanımını ortaya koyacaktır. Bu fonksiyonları bulmak için, sabit düzleme ilişkin yüzey profili bilgileri, mümkün olan her bir yol-yüzey bölümü için ölçülerek, $z(x, y)$ yerdeğiştirmesi tüm (x, y) noktalarında tanımlanmış bir biçimde elde edilmelidir. Burada x boylamsal koordinat, y ise enlemsel koordinattır (Şekil 3.1). Bu bilgiler kullanılarak genel otokorelasyon fonksiyonları

$$R(x_1, y_1; x_2, y_2) = E [z(x_1, y_1)z(x_2, y_2)] \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilebilir. Yukarıdaki ifade (2.3) ile karşılaştırıldığında, zaman değişkeni t yerine (x, y) 'nin geldiği görülecektir.

Bu otokorelasyon fonksiyonlarının oluşturulması, hem veri toplamada hem de bunlarla ilgili hesaplamalarda oldukça zahmetli işlemler gerektirir, bundan dolayı onlara dayalı analizlerin pratikte ne kadar kullanılabilir olacağı

şüphe götürür bir durumdur. Bunun için, yeni, basitleştirilmiş yol yüzey tanımlarının araştırılması kaçınılmaz hale gelmiştir.



Şekil 3.1: x, y -düzleminde ölçülmüş yol yüzeyinin (z) yüksekliği

Rassal bir yüzeyin, tüm istatistiksel ortalamaları, tanımlanmış oldukları bölgede gerçek pozisyonlarından bağımsız ise bu yüzeye *homojen yüzey* denir. Böylece eğer $z(x, y)$ rassal yüzeyi homojense aşağıdaki durumları sağlar:

1. z 'nin beklenen değeri $\eta(x, y)$ x, y 'den bağımsızdır; genellemeden birşey kaybetmeksizin sıfır kabul edilebilir;
2. $R(x_1, y_1; x_2, y_2)$ korelasyon fonksiyonu $\tau_1 = x_1 - x_2, \tau_2 = y_1 - y_2$ farkına bağlıdır, yani tek tek x_1, y_1, x_2, y_2 değerlerine bağlı değildir; bundan dolayı

$$R(\tau_1, \tau_2) = E[z(x + \tau_1, y + \tau_2)z(x, y)] \quad (3.2)$$

eşitliği (3.1)'in yerine kullanılabilir.

Aşağıdaki vektör tanımları yapılsın:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

(3.2)'den, $R(\tau) = E[z(\vartheta + \tau)z(\vartheta)]$ olduğu gözlemlenir. Böylece, homojen rassal bir yüzey geniş anlamda durağandır. Eğer $z(x, y)$ otokorelasyonu *ergodik* bir süreç ise, o zaman $R(\tau)$,

$$R(\tau) = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} z(\vartheta + \tau)z(\vartheta) dx dy. \quad (3.4)$$

şeklinde kestirilebilir.

Şimdi daha ileri gidilip, bu sürecin izotropik olduğu düşünülürse, yani $z(x, y)$ homojen süreci dairesel simetriye sahip olursa, bazı ilginç sonuçlar ortaya çıkar. Bu da $R(\tau)$ 'ın sadece,

$$\|\tau\|_2 = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

eşitliğine bağlı olduğu anlamına gelir.

İzotropi hipotezi, başarılı bir şekilde türbülans [3] ve okyanus-dalga hareketinin [18] analitiksel yaklaşımlarında kullanıldı. Sabit izotropik rassal yüzeylerin analitik özellikleri [43, 44]'de incelenmiş ve bu yüzey tanımları ile ilgili sınırlamalara işaret edilmiştir.

Özellikle, [43]'te tipik yol yüzeylerinin homojen ve izotropik iki boyutlu Gaussyan rassal süreçlerinin gerçeklemeleri olarak düşünülebileceği gösterilmiştir; ve bu nedenle böyle bir sürecin tam tanımının herhangi bir izde hesaplanmış tek bir otokorelasyon fonksiyonu ile yapılabileceği, ve tek direkt spektral yoğunluk fonksiyonununun, bu nedenle çok-izli araç yanıtı analizinde gerekli yüzey tanımını verebileceği ifade edilmiştir. İleride izotropi kavramı yol ve iz modellemesi üzerine ayrıntılandırılacaktır.

3.1.2 Frekans Bölgesinde Yol ve İz Modellemesi

$R_R(\tau_1)$ ve $R_L(\tau_1)$ ifadeleri sırasıyla sağ ve sol izlerin otokorelasyon fonksiyonlarını (Şekil 3.2) gösterebilir. Böylece (3.2)'den

$$R_R(\tau_1) = R_L(\tau_1) = R(\tau_1, 0) \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. $y = b/2$ ve $y = -b/2$ (Şekil 3.2) ile tanımlanmış iki izin yer değiştirmeleri arasındaki çapraz korelasyonlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_{RL}(\tau_1) = E[z(x + \tau_1, -b/2)z(x, b/2)] = R(\tau_1, -b) \quad (3.7)$$

ve

$$R_{LR}(\tau_1) = E[z(x + \tau_1, b/2)z(x, -b/2)] = R(\tau_1, b). \quad (3.8)$$

Fakat $R(\tau_1, \tau_2)$ otokorelasyon fonksiyonu her iki τ_1 ve τ_2 değerleri için çift olması gerektiğinden (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden

$$R_{RL}(\tau_1) = R_{LR}(\tau_1) = R_{LR}(-\tau_1) \quad (3.9)$$

ifadesi bulunur.

(3.9)'dan, b mesafesi ile ayrılan iki paralel izin yer değiştirmeleri arasındaki çapraz-korelasyon fonksiyonunun çift değerli olduğu görülür. Bu ifade ayrıca, $S_{RL}(\Omega)$ çapraz-spektral yoğunluğunun gerçek değerli bir fonksiyon olması gerektiğine de işaret eder, çünkü $\tilde{\tau}_1 = -\tau_1$ değişken değişimi ile (3.9) daki eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} S_{RL}^*(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{RL}(\tau_1) e^{j\Omega\tau_1} d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{RL}(-\tilde{\tau}_1) e^{-j\Omega\tilde{\tau}_1} d\tilde{\tau}_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{RL}(\tilde{\tau}_1) e^{-j\Omega\tilde{\tau}_1} d\tilde{\tau}_1 = S_{RL}(\Omega) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada, Ω uzaysal frekanstır ve birimi rad/m'dir.

(3.9)'dan

$$S_{RL}(\Omega) = S_{LR}(\Omega) \quad (3.10)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. İzotropi hipotezinden ve (3.8) eşitliğinden, $R_{RL}(\tau_1)$, $R_R(\tau_1)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_{RL}(\tau_1) = R((\tau_1^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, 0) = R_R((\tau_1^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}). \quad (3.11)$$

Çapraz-güç spektrumu (2.55), (2.56), (3.11)'den , ve [8]'deki (12).inci denklemden aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{RL}(\tilde{n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_R \left((\tau_1^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \right) e^{-j2\pi\tilde{n}\tau_1} d\tau_1 \\ &= \widehat{S}_R(\tilde{n}) - 2\pi b \int_{|\tilde{n}|}^{\infty} \widehat{S}_R(\tilde{n}_1) \tilde{n}_1 \frac{J_1 \left(2\pi b(\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}^2)^{\frac{1}{2}} \right)}{(\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}^2)^{\frac{1}{2}}} d\tilde{n}_1.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Burada $\widehat{S}_R(\tilde{n}) = S_R(2\pi\tilde{n})$, $\widehat{S}_L(\tilde{n}) = S_L(2\pi\tilde{n})$, $\widehat{S}_{RL}(\tilde{n}) = S_{RL}(2\pi\tilde{n})$; ve J_1 birinci dereceden Bessel fonksiyonudur. \tilde{n} 'nin birimi ise cycle/m'dir. Aşağıda verilen $J_1(x)$ yaklaşımları faydalıdır [9];

$$\begin{aligned}J_1(x) &\sim \frac{x}{2} \quad (x \rightarrow 0) \\ J_1(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (x \rightarrow \infty).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Süregelen analizden, homojenlik ve izotropi varsayımları altında, yol profilinin tam tanımının, herhangi bir boylamsal izde hesaplanmış $S_R(\Omega)$ gibi tek bir güç spektral yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilebileceği sonucuna varılır. Bu durumda, sol ve sağ izler arasındaki çapraz-güç spektral yoğunluk (3.12)'den hesaplanır.

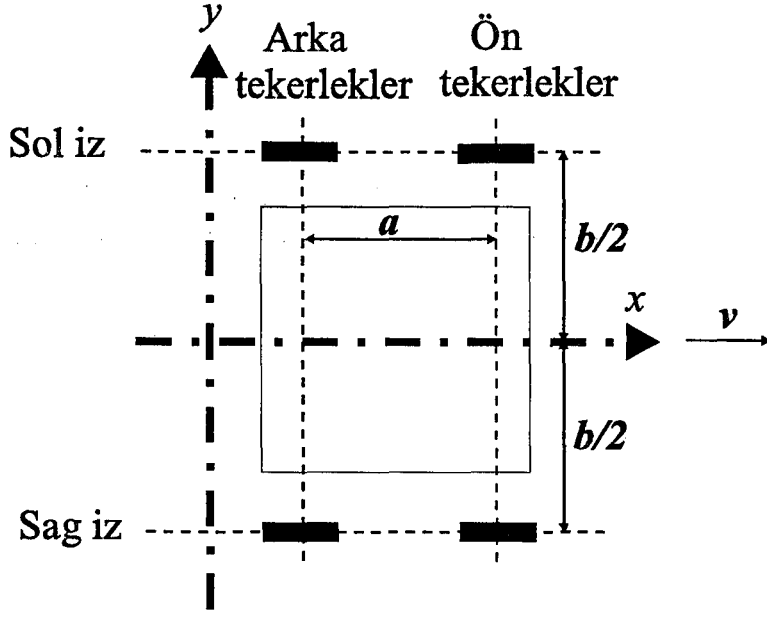
Tüm tek-iz spektrumları izotropi varsayımı altında kabul edilebilir değildir; iki boyutlu güç spektrumlarının negatif olmaması gerekir.

$$S_Z(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\tau_1\Omega_1 + \tau_2\Omega_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.14)$$

[44]'de bu durumun

$$\frac{d}{d\tilde{n}} \int_{\tilde{n}}^{\infty} \widehat{S}_R(\tilde{n}_1) \frac{\tilde{n}_1}{\sqrt{\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}^2}} d\tilde{n}_1 \leq 0 \quad (\tilde{n} \geq 0). \quad (3.15)$$

olduğu zaman sağlandığı gösterilmiştir. (3.15)'teki şartın uygulanabilir olması için, $\widehat{S}_R(\tilde{n})$ fonksiyonunun $|\tilde{n}|$ 'e göre monoton azalan olması yeterlidir [44].



Şekil 3.2: Tekerlek girdilerinin, dört-girdili araç modeli yapısı

3.2 Tek Bir Spektral Yoğunluk ile Yol Tanımı

Tablo 3.1 genellikle tek-iz spektrumlarını tanımlamakta kullanılan fonksiyonları ve bunların tartışıldığı veya uygulandığı referansları listeler. Rasyonel fonksiyonlar, yol pürüzlülüğü modellemesinde, beyaz gürültü ile uyarılan doğrusal bir filtrenin çıktısı olarak önem kazanırlar [45, 23].

1-4 fonksiyonlar $|\tilde{n}|$ 'ye göre monoton azalırlar ve bu nedenle (3.15)'teki koşulu sağlarlar. 5.inci fonksiyon da $\delta_1 \geq \delta_2$ olması şartıyla (3.15)'teki koşulu sağlar [8]. Böylece, 1-5 arasındaki tüm fonksiyonlar kabul edilebilirdir. [8]'de çapraz spektumlar için kapalı çözümler elde edilmiştir.

Şekil 3.3'te [43], herbiri farklı, üç yol yüzeyinin iz çiftlerinden alınmış spektral yoğunluklar gösterilmiştir. Şekilden, boylamsal yöndeki yol yüzeyinin spektral yoğunluğunun her bir durumda takip ettiği izden bağımsız olduğu görülür, bu da homojenlik varsayımını destekler.

Deneysel araştırmalar [43], çapraz korelasyon fonksiyonları $R_{LR}(\tau_1)$ ve

Çizelge 3.1: Tek-iz pürüzlülük spektrumlarını temsil eden fonksiyonlar

	$\widehat{S}_R(\tilde{n})$	Referanslar
1. Güç yasası	$C \tilde{n} ^{-2\delta}$	[20]
2. Bölünmüş güç yasası	$\begin{cases} C \tilde{n}/\tilde{n}_0 ^{-2\delta_1}, & 0 < \tilde{n} < \tilde{n}_0 \\ C \tilde{n}/\tilde{n}_0 ^{-2\delta_2}, & \tilde{n}_0 \leq \tilde{n} < \infty \end{cases}$	[43, 14]
3. Rasyonel fonksiyon	$\frac{C}{\tilde{n}^2 + \delta^2}, \quad 0 \leq \tilde{n} < \infty$	[35, 27]
4. Rasyonel fonksiyon	$\frac{C}{(\tilde{n}^2 + \delta^2)^2}, \quad 0 \leq \tilde{n} < \infty$	[19]
5. Rasyonel fonksiyon	$\frac{C(\tilde{n}^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2)}{(\tilde{n}^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\tilde{n}^2\delta_1^2}, \quad 0 \leq \tilde{n} < \infty$	[27]

Not: $C, \delta, \delta_1,$ ve δ_2 pozitif sabit değerlerdir.

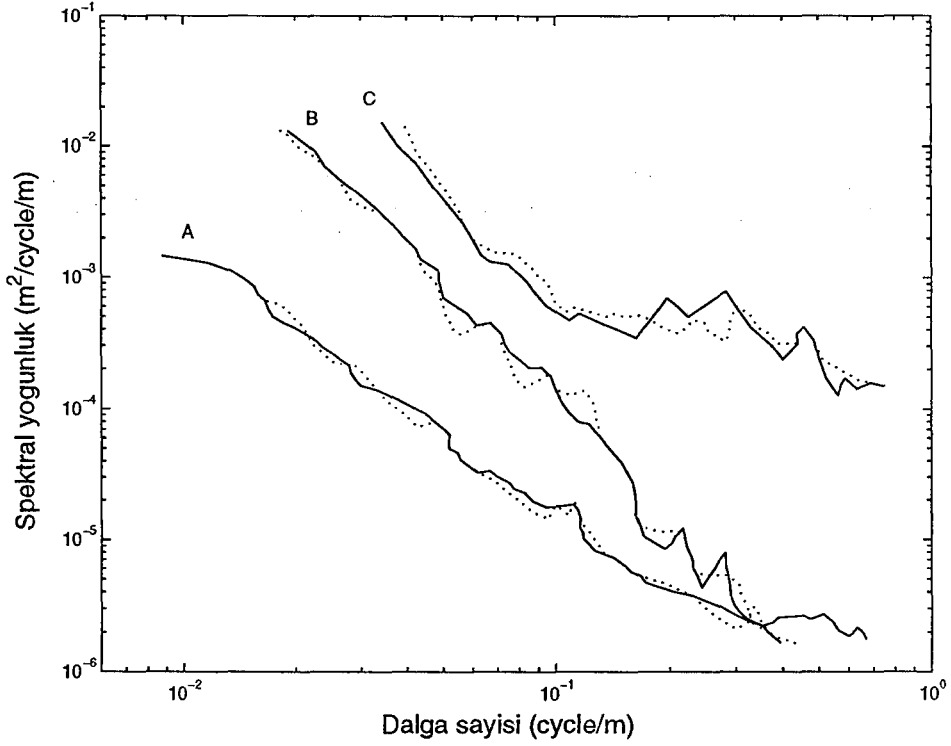
$R_{RL}(\tau_1)$ 'in simetrik olduğunu gösterir; bu da karşılıklı iki izden alınmış iki çapraz-spektral yoğunluğun gerçek olduğunu gösterir. Şekil 3.4'te [43]

$$\gamma(\tilde{n}) = \frac{\widehat{S}_{RL}(\tilde{n})}{\sqrt{\widehat{S}_R(\tilde{n})\widehat{S}_L(\tilde{n})}} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanmış $\gamma(\tilde{n})$ tutarlılık fonksiyonu verilen yolun üç farklı iz genişlikleri için çizilmiştir.

Şekil 3.5'te [43], üç farklı yol yüzeyi için $\gamma(\tilde{n})$ 'nin tek iz genişliğini gösteren iz çiftlerinden hesaplanmış değerleri ile tek izden hesaplanmış (izotropi varsayımı altında) değerleri karşılaştırılmıştır. Böylece bu veriler izotropi varsayımının değişik yol durumları için geçerli olduğuna kanıt oluşturur.

Şekil 3.6'da [43], tipik bir yolun spektral yoğunluğu ve bölünmüş güç yasası ile yaklaşımı (Tablo 3.1) deneme yanılma yöntemi ile $\tilde{n}_0 = 0.15708$ cycles/m, $\delta_1 = 1.6$, $\delta_2 = 1.1$, ve $C = 0.76 \times 10^{-5}$ değerleri için gösterilmiştir. Bu yaklaşımın çok küçük frekanslar haricinde doğru sonuçlar verdiği görülür.



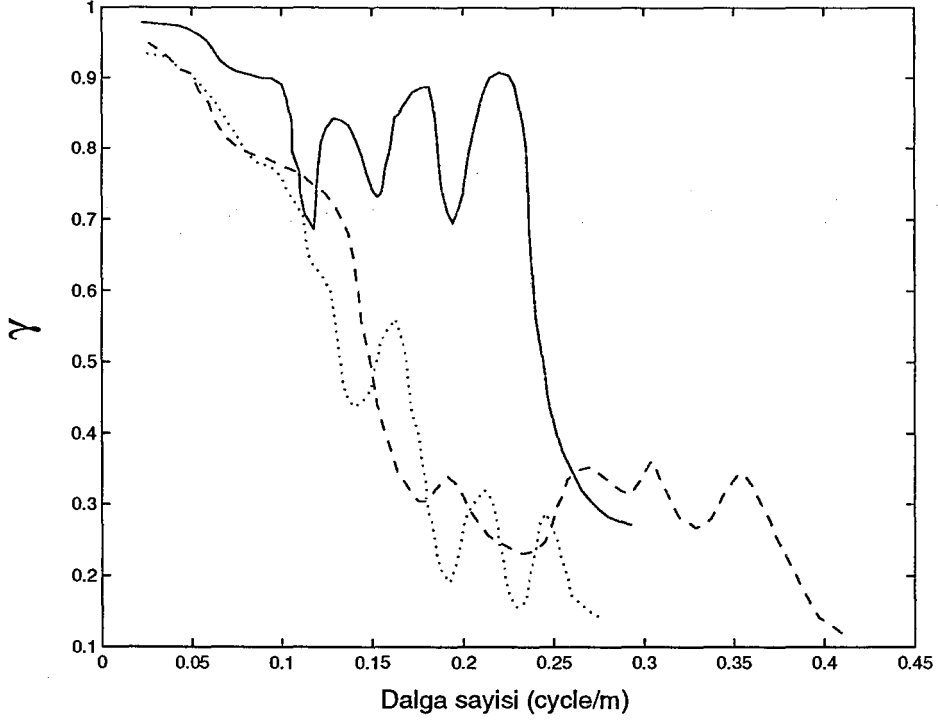
Şekil 3.3: Üç farklı tip karayolu boyunca paralel izlerin spektral yoğunlukları: A, otoyol; B, tali yol; C, kaplama yol, ve $\dots : \hat{S}_L(\tilde{n})$; $— : \hat{S}_R(\tilde{n})$

3.3 İlişkilendirilmiş Rassal Yol Uyarıcıları

Düz bir yolda, sabit ileri v hızıyla hareket eden bir araç için (Şekil 3.2), iki tip korelasyon mevcuttur:

1. Sağ ve sol izler arasındaki çapraz-korelasyon,
2. Ön ve arka tekerlekler arasındaki zaman gecikmesi.

Daha sonra bu korelasyon tiplerini ayrı ayrı ele alacağız. Dikkat edilmeli ki homojen ve izotropik yol varsayımı altında, iki ön (arka) tekerlekler arasındaki çapraz korelasyon $R_R(b)$ 'ye eşittir, ve aynı iz üzerinde iki tekerleğin korelasyonu da $R_R(a)$ 'a eşittir. Ayrıca, köşegenler ile ayrılmış iki tekerleğin arasındaki çapraz korelasyon da $R_R((a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}})$ 'a eşittir.



Şekil 3.4: b (tali yol) iz genişliğinin tutarlılık fonksiyonu $\gamma(\tilde{n})$; — : $b = 0.61$ m, - - : $b = 1.22$ m, \cdots : $b = 2.44$ m

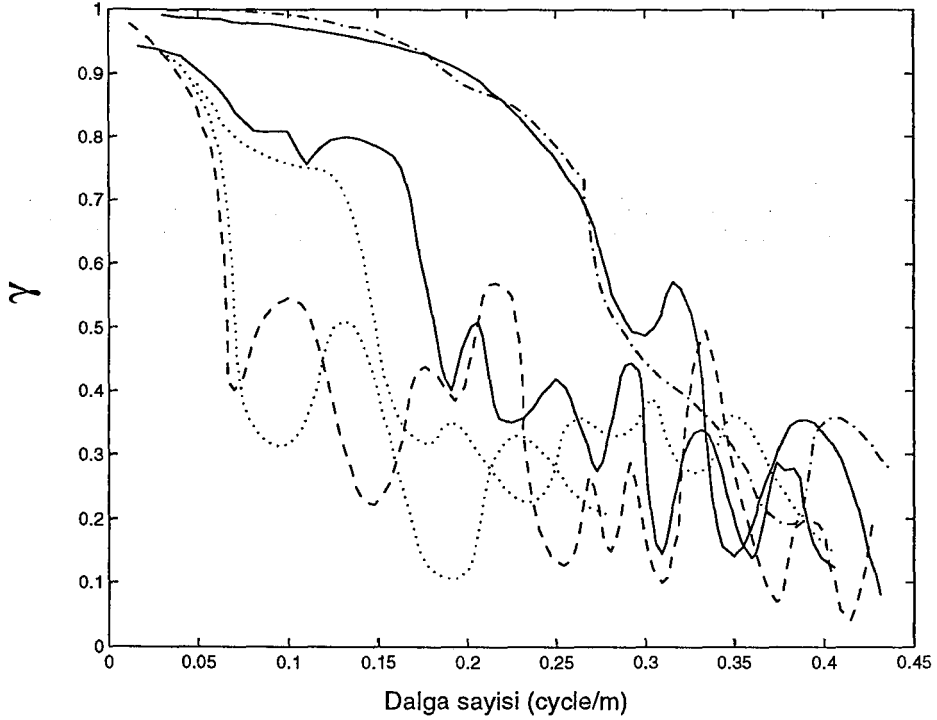
3.3.1 Sol ve Sağ İzler Arasındaki Çapraz–Korelasyon: Biçimlendirici Filtre Yaklaşımı

Sol ve sağ izler arasındaki korelasyonu belirtmek amacıyla, [24, 6]'de değiştirilmiş birinci derece biçimlendirici filtre yaklaşımı [22] kullanılmıştır. Biçimlendirici filtre yaklaşımında, ön sağ ve sol köşelerdeki, $z(x, -b/2)$ ve $z(x, b/2)$ yerdeğiştirmelerinin (Şekil 3.7), aralarında korelasyon olmayan $z(x, 0)$ ve $\theta(x)$ gibi iki fonksiyondan oluştuğu varsayılmıştır.

$$z(x, -b/2) = z(x, 0) - (b/2)\theta(x) \quad (3.17)$$

$$z(x, b/2) = z(x, 0) + (b/2)\theta(x).$$

$\xi_R(x) = z(x, -b/2)$, $\xi_L(x) = z(x, b/2)$, ve $\xi_M(x) = z(x, 0)$ olsun. Bu durumda, $\xi_R(x)$ ve $\xi_L(x)$ süreçlerinin güç spektral ve çapraz spektral yoğunlukları,



Şekil 3.5: Ölçülmüş tutarlılık fonksiyonları ve izotropi varsayımı altında hesaplanmış değerlerinin karşılaştırılması. A: otoyol; B: tali yol; C: kaplama yol ve A', B', C' $R_R(\tau_1)$ bilgisinden hesaplanmış değerlerdir

$\xi_M(x)$ ve $\theta(x)$ 'in sırasıyla $S_M(\Omega)$ ve $S_\theta(\Omega)$ güç spektral yoğunlukları cinsinden, (3.17)'deki eşitlik kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

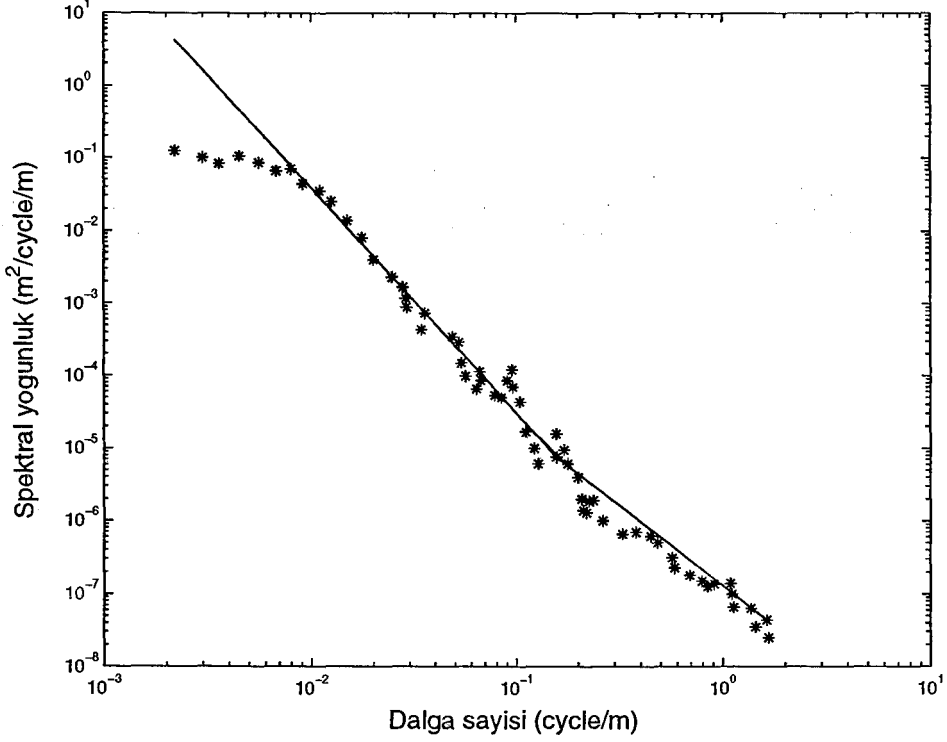
$$S_R(\Omega) = S_L(\Omega) = S_M(\Omega) + (b^2/4)S_\theta(\Omega) \quad (3.18)$$

$$S_{RL}(\Omega) = S_{LR}(\Omega) = S_M(\Omega) - (b^2/4)S_\theta(\Omega).$$

Biçimlendirici filtreler yardımıyla, $\xi_M(x)$ ve $\theta(x)$ süreçleri, sıfır ortalama değerli ve kovaryansları

$$E \{ \nu_k(x) \nu_l(x') \} = R_{\nu_k \nu_l}(x, x') = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ q\delta(x - x'), & k = l \end{cases} \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanmış, beyaz gürültü süreçlerinden elde edilir. Burada k ve l , 1 ve 2 değerlerini alır, ve q 'da beyaz gürültü süreçlerinin şiddetini gösterir.



Şekil 3.6: Tipik temel bir yolun spektral yoğunluğu $\hat{S}_R(\tilde{n})$ 'ya uygun çift eğim karakteristiğini gösterir

Birinci derece biçimlendirici filtre yaklaşımı, örneğin aşağıdaki denklemler ile sonuçlanır:

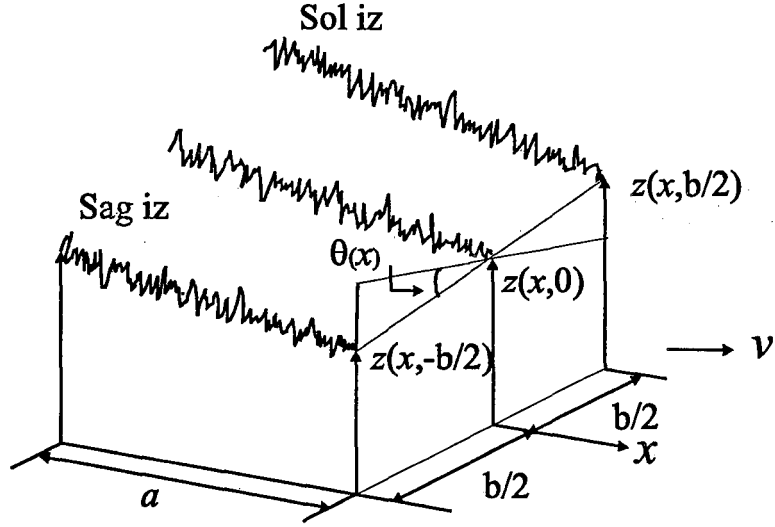
$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \xi_M(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = A_\Omega \begin{bmatrix} \xi_M(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} + B_\Omega \begin{bmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_R(x) \\ \xi_L(x) \end{bmatrix} = C_\Omega \begin{bmatrix} \xi_M(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix}$$

burada

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B_\Omega = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}, \quad C_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -b/2 \\ 1 & b/2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece, (2.65), (3.18), (3.19), (3.20), ve (2.58)'den



Şekil 3.7: Yol Modeli

aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$S_R(\Omega) = S_0 \frac{\Omega^2 + \frac{\lambda_2^2 + \alpha\lambda_1^2}{1 + \alpha}}{\Omega^4 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Omega^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2} \quad (3.22)$$

$$\gamma(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)\Omega^2 + \lambda_2^2 - \alpha\lambda_1^2}{(1 + \alpha)\Omega^2 + \lambda_2^2 + \alpha\lambda_1^2}$$

burada

$$\alpha = (b\kappa_2/2\kappa_1)^2 \quad (3.23)$$

$$S_0 = q\kappa_1^2(1 + \alpha)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle, (3.20)'deki biçimlendirici filtre, tek iz güç spektral yoğunluğun spektral çarpımına ikinci dereceden rasyonel bir yaklaşım getirir.

(3.12)deki eşitlikten gözlemlenecek olursa, $S_R(\Omega)$, Ω 'nin rasyonel bir fonksiyonu olsa dahi, $S_{RL}(\Omega)$ genel olarak rasyonel bir fonksiyon değildir. Bu da izotropik yol varsayımının, biçimlendirici filtre yaklaşımı ile karşılanamayacağını gösterir.

Zaman Bölgesine Geçiş

Biçimlendirici filtre denklemleri (3.20), zaman bölgesine türevin zincir kuralını $x = vt$ ifadesine uygulayarak aşağıdaki gibi dönüştürülebilirler:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} &= vA_\Omega \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} + vB_\Omega \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} &= C_\Omega \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

burada

$$\begin{aligned} \zeta_1(t) &= \xi_M(vt), & \zeta_2(t) &= \theta(vt); \\ \eta_1(t) &= \nu_1(vt), & \eta_2(t) &= \nu_2(vt); \\ w_1(t) &= \xi_R(vt), & w_2(t) &= \xi_L(vt). \end{aligned}$$

$\eta_k(t)$ süreçlerinin kovaryansları, $k = 1, 2$, (3.19)'dan

$$\begin{aligned} R_{\eta_k \eta_l}(t, t') &= E \{ \nu_k(vt) \nu_l(vt') \} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ q\delta(v(t-t')), & k = l \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{q}{v}\delta(t-t'), & k = l \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak hesaplanır. Son eşitlik herhangi bir düzgün $f(t)$ fonksiyonu için, aşağıdaki bilgiden faydalanılarak yazılmıştır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(v(t-t')) dt = \frac{1}{v} f(t').$$

Bu nedenle (3.25) ve (2.51)'den

$$S_\eta(\omega) = \frac{q}{v} I_2 \quad (3.26)$$

bulunur. Burada $I_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$, n 'e n 'lik birim matrisini gösterir. Böylece (2.63) ve (3.24)'ten,

$$S_w(\omega) = G_w(j\omega) S_\eta(\omega) G_w^T(-j\omega) \quad (3.27)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$G_w(s) = C_\Omega(sI_2 - vA_\Omega)^{-1}vB_\Omega, \quad (3.28)$$

$$G_\Omega(s) = C_\Omega(sI_2 - A_\Omega)^{-1}B_\Omega \quad (3.29)$$

olarak tanımlansın. O zaman,

$$G_w(s) = G_\Omega\left(\frac{s}{v}\right) \quad (3.30)$$

ve (3.27) ve (3.26)'dan

$$S_w(\omega) = \frac{1}{v}G\left(j\frac{\omega}{v}\right)G^T\left(j\frac{\omega}{v}\right) \quad (3.31)$$

ifadesi elde edilir. Özellikle,

$$S_{w_1w_1}(\omega) = \frac{1}{v}S_R\left(\frac{\omega}{v}\right), \quad \gamma_{12}(\omega) = \gamma\left(\frac{\omega}{v}\right) \quad (3.32)$$

olur. Burada $\gamma_{12}(\omega)$, $w_1(t)$ and $w_2(t)$ süreçlerinin tutarlılık fonksiyonudur.

3.3.2 Ön ve Arka Tekerlekler Arasındaki Korelasyon

Şimdi, Şekil 3.7'deki aracın zaman gecikmesine bağlı ön ve arka tekerlekleri arasındaki korelasyonu incelenecektir. $\xi'_R(x) = z(x - a, -b/2)$ ve $\xi'_L(x) = z(x - a, b/2)$ sırasıyla arka sağ ve sol köşelerdeki yerdeğiştirmeleri gösterebilir. $x = vt$ eşitliği kurulsun; ve $w_3(t) = \xi'_R(vt)$ ve $w_4(t) = \xi'_L(vt)$ olsun. Sonra, Şekil 3.7'deki şu kinematik sınırlamalara dikkat edilmeli:

$$w_3(t) = w_1\left(t - \frac{a}{v}\right), \quad w_4(t) = w_2\left(t - \frac{a}{v}\right). \quad (3.33)$$

Bu sınırlamalar (3.24)'ten, $w_3(t)$ ve $w_4(t)$ için durum-uzay formüllerini şöyle oluştururlar;

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_3(t) \\ \zeta_4(t) \end{bmatrix} = vA_\Omega \begin{bmatrix} \zeta_3(t) \\ \zeta_4(t) \end{bmatrix} + vB_\Omega \begin{bmatrix} \eta_3(t) \\ \eta_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix} = C_\Omega \begin{bmatrix} \zeta_3(t) \\ \zeta_4(t) \end{bmatrix}$$

burada

$$\eta_3(t) = \eta_1\left(t - \frac{a}{v}\right), \quad \eta_4(t) = \eta_2\left(t - \frac{a}{v}\right) \quad (3.35)$$

olarak tanımlanmıştır.

3.3.3 Yol Uyarıcılarının Spektral Gösterimi

İki matrisin Kronecker çarpımı oldukça faydalı bir operasyondur ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. $A = [a_{kl}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$ ve $B \in \mathbf{C}^{p \times q}$ verilmiş iki matris olsun. A ve B 'nin, $A \otimes B$ şeklinde yazılan Kronecker (veya tensör) çarpımı, $mp \times nq$ 'luk bir matristir.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Kronecker çarpımlarının oldukça ilginç özellikleri vardır. Onlardan bazıları aşağıdaki ifadelerde toplanmıştır.

Olgu 3.3.1 $A, B, C,$ ve D uyumlu boyutlarda verilmiş dört matris olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$
2. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$
3. α_j ve $\beta_k,$ sırasıyla $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ and $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 'nin özdeğerlerini gösterebilir. $(A \otimes B)$ 'nin mn tane özdeğeri $\{\alpha_j \beta_k : j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n\}$ olarak gösterilir.
4. $\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m, A \in \mathbf{R}^{m \times m}, B \in \mathbf{R}^{n \times n}.$

Her iki çeşit korelasyonu da göz önüne alan, $w_1, w_2, w_3,$ ve w_4 yerdeğiştirme-
lerinin durum-uzay tanımları, (3.24) ve (3.34) birleştirilerek aşağıdaki gibi
elde edilir:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= (I_2 \otimes vA_\Omega) \zeta(t) + (I_2 \otimes vB_\Omega) \eta(t) \\ w(t) &= (I_2 \otimes C_\Omega) \zeta(t)\end{aligned}\tag{3.36}$$

burada

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_4 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_4 \end{bmatrix}\tag{3.37}$$

ve $\eta(t)$ 'nin otokorelasyon fonksiyonu

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = \frac{q}{v} \begin{bmatrix} \delta(t_1 - t_2) & \delta(t_1 - t_2 + d) \\ \delta(t_1 - t_2 - d) & \delta(t_1 - t_2) \end{bmatrix} \otimes I_2\tag{3.38}$$

olarak verilmiştir. Burada

$$d = \frac{a}{v}.\tag{3.39}$$

$w(t)$ 'nin otokorelasyon matrisi veya buna eşdeğer olarak, güç spektral
yoğunluğu (3.36) ve (3.38)'den şöyle hesaplanabilir. Önce $R_{\eta\eta}(t)$ 'nin Fourier
dönüşümü alınarak

$$S_\eta(\omega) = \frac{q}{v} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega d} \\ e^{-j\omega d} & 1 \end{bmatrix} \otimes I_2\tag{3.40}$$

elde edilir.

$\widehat{G}_w(s)$: $\eta \mapsto w$ olan transfer fonksiyonunu gösterebiliriz. Böylece (3.30)'dan

$$\widehat{G}_w(s) = I_2 \otimes G_w(s)\tag{3.41}$$

bulunur. Daha sonra $S_w(\omega)$,

$$S_w(\omega) = \widehat{G}_w(j\omega) S_\eta(\omega) \widehat{G}_w^H(j\omega)\tag{3.42}$$

ifadesinden hesaplanır. Burada A^H , verilen A matrisinin kompleks eşleniğinin transpozisini gösterir. Böylece

$$S_w(\omega) = \frac{q}{v} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega d} \\ e^{-j\omega d} & 1 \end{bmatrix} \otimes G_w(j\omega)G_w^H(j\omega) \quad (3.43)$$

eşitliği elde edilir.

Bıçimlendirici filtre yaklaşımında A_Ω , B_Ω , C_Ω durum uzay matrislerini uygun seçerek

$$\begin{bmatrix} S_R(\Omega) & S_{RL}(\Omega) \\ S_{RL}(\Omega) & S_R(\Omega) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

matrisini, (3.19)'daki beyaz gürültü girdileri için, $G_\Omega(s)$ filtresinin çıktı spektral yoğunluğuna eşleştirmek amaçlanır. Daha önce de önemle vurgulandığı gibi, $S_R(\Omega)$ rasyonel bir fonksiyon olsa dahi, $S_{RL}(\Omega)$ 'nin rasyonel olması gerekmez. Bununla birlikte, filtrenin derecesi artırıldığında, (3.44) ifadesi gittikçe daha iyi eşleşir.

Aşağıdaki denklemi sağlayan sonlu boyutta $G_\Omega(s)$ filtresi bulma problemi,

$$qG_\Omega(j\Omega)G_\Omega^*(j\Omega) \simeq \begin{bmatrix} S_R(\Omega) & S_{RL}(\Omega) \\ S_{RL}(\Omega) & S_R(\Omega) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

kestirim literatüründe *spektral çarpımlarına ayırma* problemi olarak bilinir. $X(\Omega) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ matris fonksiyonu olsun. X için aşağıdaki gibi bir norm tanımlanır:

$$\|X\|_\infty = \max_{k,l} \max_{\Omega} |X_{k,l}(\Omega)|. \quad (3.46)$$

Her sabit Ω değeri için, tüm matris normlarının eşdeğer olduğu hatırlanmalı. (3.45)'deki \simeq notasyonu şu anlama gelir:

Verilmiş bir $\epsilon > 0$ için

$$\left\| qG_\Omega(j\Omega)G_\Omega^*(j\Omega) - \begin{bmatrix} S_R(\Omega) & S_{RL}(\Omega) \\ S_{RL}(\Omega) & S_R(\Omega) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \epsilon \quad (3.47)$$

ifadesini sağlayan m .inci dereceden bir $G_\Omega(s)$ filtresi bulunsun.

◇

Bu problem daha sonra detaylı olarak incelenecektir. Bu problemin en yeni dökümü oldukça iyi bir ders kitabı olan [30]'de bulunabilir. (3.45)'in çözümü sadece yaklaşık bir sonuç vereceği için, (3.43)'teki zaman gecikmelerine de sonlu boyutta yaklaşımlar düşünülebilir. Böylece, her iki çeşit korelasyonuda göz önüne alan sözü geçen spektral çarpımlarına ayırma problemi formüle edilmelidir.

Verilmiş bir $\epsilon > 0$ için,

$$\left\| qG_{\Omega}(j\Omega)G_{\Omega}^*(j\Omega) - \begin{bmatrix} 1 & e^{jv d\Omega} \\ e^{-jv d\Omega} & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} S_R(\Omega) & S_{RL}(\Omega) \\ S_{RL}(\Omega) & S_R(\omega) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \epsilon \quad (3.48)$$

ifadesini sağlayan m .inci dereceden bir $G_{\Omega}(s) = C_{\Omega}(sI_n - A_{\Omega})^{-1} B_{\Omega}$ filtresi bulunsun.

◇

Böylece, Şekil 3.7'deki dört uyarıcı, dört boyutlu sıfır ortalama değerli ve

$$R_e(t, t') = \frac{q}{v} I_4 \delta(t - t') \quad (3.49)$$

kovaryans matrisine sahip durağan beyaz gürültü süreci $e(t)$ 'nin sürdüğü $(vA_{\Omega}, vB_{\Omega}, C_{\Omega})$ filtresinin $w(t)$ çıktısı olarak düşünülebilir.

3.4 Yatışkın-Durum Kovaryans Denklemleri

Şekil 3.7'deki aracın hareket denklemleri durum-uzay formunda, şöyle verilmiş olsun:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Hw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

burada $x(t) \in \mathbf{R}^n$ durum vektörünü, $w(t)$ dört köşedeki yer değiştirmeleri ve $y(t) \in \mathbf{R}^m$, ilgilenilen değişkenlerin çıktı vektörlerini gösterir. İleri bir

bölümde, verilmiş hareket denklemleri setinin nasıl bu forma getirileceği görülecektir.

(3.50) ile ifade edilen sistemin *kararlı* ve (3.50) realizasyonun *minimal* olduğu varsayalım. Bu da $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 'nin özdeğerlerinin gerçekte kısımlarının negatif olduğu ve (A, B) ve (A, C) çiftlerinin sırasıyla *denetlenebilir* ve *gözlenebilir* olduğu anlamına gelir. Eğer aşağıda tanımlanmış C_n *denetlenebilirlik matrisi*, tam rank n 'e sahipse herhangi bir (A, B) çifti denetlenebilirdir.

$$C_n = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]. \quad (3.51)$$

Dualite'den de, eğer aşağıda tanımlanmış *gözlenebilirlik matrisi* O_n tam rank, n 'e sahipse (A, C) çifti gözlenebilirdir.

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Kare simetrik bir matris olan Q , tüm $x \neq 0$ için $x^T Q x > 0$ ($x^T Q x \geq 0$) koşulunu sağlıyor ise *pozitif-(yarı)-belirlidir* ve $Q > 0$ ($Q \geq 0$) ile gösterilir. Pozitif-yarı-belirli bir matris olan Q 'nun kare kök faktörü U , $Q = U U^T$ eşitliğini sağlayan herhangi bir matris olarak tanımlanır. $Q^{1/2}$, pozitif-yarı-belirli bir matris olan Q 'nun kare kök faktörünü gösterebilir. Aşağıda *Lyapunov denklemi* olarak tanımlanan eşitlik, doğrusal sistemlerin kararlılık ve yatışkın-durum kovaryans çalışmalarında önem kazanır.

$$AP + PA^T + Q = 0. \quad (3.53)$$

Lyapunov denkleminin özellikleri aşağıdaki yardımcı teoremden verilmiştir ve ispatı [30, 42]'de yapılmıştır.

Yardımcı teorem 3.4.1 (3.53)'teki eşitlik ele alınsın. A 'nın kararlı olduğu varsayalım. O zaman, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. Her bir Q için, (3.53)'ün buna karşılık gelen tek çözümü,

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\sigma} Q e^{A^T \sigma} d\sigma \quad (3.54)$$

ifadesiyle verilir.

2. $P > 0$ eğer $Q > 0$ ve $P \geq 0$ eğer $Q \geq 0$.

3. $Q \geq 0$ olduğu zaman, sadece ve sadece $P > 0$ ise $(A, Q^{1/2})$ denetlenebilir-dir.

Bu bölümde, $y(t)$ 'nin kovaryansı $P_y(t) = R_{yy}(t, t)$ için, asimtotik bir denklemler türetilecektir, ve $w(t)$ (3.36) ve (3.38)'e göre oluşturulacaktır. Bunun için önce $x(t)$ $\zeta(t)$ ile genişletilerek aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{H} \eta(t) \\ y(t) &= \hat{C} \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

burada

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & H(I_2 \otimes C_\Omega) \\ 0 & I_2 \otimes vA_\Omega \end{bmatrix}, \\ \hat{H} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \otimes vB_\Omega \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C \ 0] \end{aligned} \quad (3.56)$$

olarak tanımlanmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

Teorem 3.4.1 (3.55) ile ifade edilen sistem düşünölsün. A ve A_Ω kararlı matrislerdir ve $\eta(t)$ sıfır ortalama değerine ve (3.38)'deki otokorelasyon fonksiyonuna sahip durağan bir süreçtir. d (3.39)'daki gibi olsun. \hat{H} şöyle parçalan-sın:

$$\hat{H} = [\hat{H}_1 \ \hat{H}_2 \ \hat{H}_3 \ \hat{H}_4] \quad (3.57)$$

ve

$$Q = \hat{H} \hat{H}^T + e^{d\hat{A}} (\hat{H}_1 \hat{H}_3^T + \hat{H}_2 \hat{H}_4^T) + (\hat{H}_3 \hat{H}_1^T + \hat{H}_4 \hat{H}_2^T) e^{d\hat{A}^T} \quad \text{olsun.} \quad (3.58)$$

O zaman,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{y(t)\} \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_y(t) \rightarrow \widehat{C}\widehat{P}_x\widehat{C}^T \quad (3.59)$$

olur. Burada \widehat{P}_x Lyapunov denkleminin tek, pozitif-yarı-belirli bir çözümüdür:

$$\widehat{A}\widehat{P}_x + \widehat{P}_x\widehat{A}^T + \frac{q}{v}Q = 0. \quad (3.60)$$

İspat: (3.55)'in durum çözümü

$$\widehat{x}(t) = e^{\widehat{A}t}\widehat{x}(0) + \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\tau)}\widehat{H}\eta(\tau)d\tau \quad (3.61)$$

ifadesiyle verilir. Bu ifade'den (3.59) daki birinci eşitlik hemen sağlanır.

Genellemeden hiçbirşey kaybetmeksizin $\widehat{x}(0) = 0$ olduğu varsayılabilir. O zaman,

$$\begin{aligned} R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) &= E\{\widehat{x}(t)\widehat{x}^T(t)\} \\ &= \int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)}\widehat{H}E\{\eta(\sigma)\eta^T(\rho)\}\widehat{H}^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}d\sigma d\rho \\ &= \int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)}\widehat{H}R_{\eta\eta}(\sigma, \rho)\widehat{H}^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}d\sigma d\rho \\ &= \frac{q}{v} \int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)}\widehat{H} \begin{bmatrix} I_2\delta(\sigma - \rho) & I_2\delta(\sigma - \rho + d) \\ I_2\delta(\sigma - \rho - d) & I_2\delta(\sigma - \rho) \end{bmatrix} \\ &\quad \widehat{H}^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}d\sigma d\rho \\ &= \frac{q}{v} \int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)} \left\{ \widehat{H}\widehat{H}^T \delta(\sigma - \rho) + (\widehat{H}_1\widehat{H}_3^T + \widehat{H}_2\widehat{H}_4^T)\delta(\sigma - \rho + d) \right. \\ &\quad \left. + (\widehat{H}_3\widehat{H}_1^T + \widehat{H}_4\widehat{H}_2^T)\delta(\sigma - \rho - d) \right\} e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}d\sigma d\rho \\ &= \frac{q}{v} \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)} \left\{ \widehat{H}\widehat{H}^T + e^{\widehat{A}d} (\widehat{H}_1\widehat{H}_3^T + \widehat{H}_2\widehat{H}_4^T) \right. \\ &\quad \left. + (\widehat{H}_3\widehat{H}_1^T + \widehat{H}_4\widehat{H}_2^T) e^{\widehat{A}^T d} \right\} e^{\widehat{A}^T(t-\sigma)}d\sigma \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki son eşitlik aşağıdaki eşitliklerden ortaya çıkmıştır.

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)}\widehat{H}_1\widehat{H}_3^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}\delta(\sigma - \rho + d)d\sigma d\rho \\ &= \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\rho)}e^{\widehat{A}d}\widehat{H}_1\widehat{H}_3^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}d\rho \end{aligned}$$

ve (integrasyon sırası değiştirildikten sonra)

$$\int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)}\widehat{H}_3\widehat{H}_1^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)}\delta(\sigma - \rho - d)d\sigma d\rho$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)} \widehat{H}_3 \widehat{H}_1^T e^{\widehat{A}^T(t-\rho)} \delta(\sigma - \rho - d) d\rho d\sigma \\
&= \int_0^t e^{\widehat{A}(t-\sigma)} \widehat{H}_3 \widehat{H}_1^T e^{\widehat{A}^T d} e^{\widehat{A}^T(t-\sigma)} d\sigma
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) = \frac{q}{v} \int_0^t e^{\widehat{A}\sigma} Q e^{\widehat{A}^T\sigma} d\sigma \quad (3.62)$$

eşitliği elde edilir.

$Q \geq 0$ olduğu iddia edilsin. Bu iddia'yı ispatlamak için, (3.62) x^T ile soldan ve x ile sağdan çarpılsın. Tüm t 'ler için $R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) \geq 0$ olduğundan dolayı, her x ve tüm t değerleri için, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$x^T R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) x = \int_0^t x^T e^{\widehat{A}\sigma} \left(\frac{qQ}{v} \right) e^{\widehat{A}^T\sigma} x d\sigma \geq 0. \quad (3.63)$$

(3.63)'teki integrand t 'nin sürekli bir fonksiyonudur ve $t = 0$ 'da $x^T (qQ/v) x$ 'e eşittir. Böylece, tüm yeterince küçük t 'ler için

$$x^T R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) x = \frac{q}{v} (x^T Q x) t + O(t^2) \quad (3.64)$$

elde edilir. Eğer Q pozitif-yarı-belirli değilse, o zaman bazı x_0 lar için $x_0^T Q x_0 < 0$ olur. Bu da (3.64)'ten yeterince küçük t 'ler için $x_0^T R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) x_0 < 0$ olacağı anlamına gelir; bu bir çelişkidir.

A ve A_Ω kararlı matrisler olduğundan dolayı, \widehat{A} 'da kararlı bir matristir. Ayrıca, $Q \geq 0$. Bu nedenle, $R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t)$ sınırlı azalmayandır ve pozitif-yarı-belirli bir matrise yakınsar:

$$R_{\widehat{x}\widehat{x}}(\infty) = \int_0^\infty e^{\widehat{A}\sigma} \left(\frac{qQ}{v} \right) e^{\widehat{A}^T\sigma} d\sigma. \quad (3.65)$$

Yardımcı teorem 3.4.1'den, \widetilde{P}_x ile gösterilen $R_{\widehat{x}\widehat{x}}(\infty)$ 'un (3.60)'taki eşitliğin tek çözümü olduğuna dikkat edilmeli. Böylece, (3.59)'daki ikinci denklem $R_{yy}(t, t) = \widehat{C} R_{\widehat{x}\widehat{x}}(t, t) \widehat{C}^T$ ifadesinden elde edilir.

◇

$(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ üçlüsünü, spektral çarpımlarına ayırma problemi (3.48)'i çözerek elde etmek, daha basittir ve sadece küçük değişiklikler gerektirir.

3.5 Özet

Bu bölümde, stokastik yol modellemesi literatüründeki sonuçlar gözden geçirildi. Yol yüzeylerinin homojen ve izotropik iki-boyutlu Gaussyan rassal süreçlerin gerçeklemeleri olarak düşünülebileceği görüldü. Homojenlik ve izotropi varsayımı altında herhangi bir izden alınmış olan güç spektrum ölçümleri ile bir yol profilinin tamamının tanımlanması mümkündür.

Biçimlendirici filtre yaklaşımı yol uyarıcılarının zaman bölgesinde modellenmesi için incelendi. Bu prosedür, yol spektrumlarına rasyonel yaklaşımlar getiren ve tekerlekler arasındaki olası bütün korelasyonları hesaba alan spektral çarpımlarına ayırma problemi olarak frekans bölgesinde yeniden formüle edildi. Daha sonra, yol uyarıcılarının neden olduğu rassal titreşimleri tanımlamak için araç hareket denklemleri genişletilerek biçimlendirici filtre durum-uzay formülleri eklendi. Son olarak, düz bir yolda sabit ileri hızla hareket eden araç için yatışkın-durum kovaryans denklemi türetildi.

Bölüm 4

TEK-İZ YOL SPEKTRUMLARININ KESTİRİMİ

Bu bölümde, verilmiş skalar değerli spektrum verilerine uygun rasyonel modeller bulan Fourier serisi tabanlı tanıyım algoritmasını tanıtılacaktır. Algoritma parametrik değildir. Bu bölüm kesikli-zamanlı stokastik süreçlerin tekrarı ile başlayacaktır. Daha sonra algoritma § 4.2’de ana hatlarıyla verilecektir ve spektral verilerin kestirim sonuçları Şekil 3.6’de çizilip § 4.3’te tartışılacaktır. Algoritmanın yakınsama analizi ise § 4.4’te yapılacaktır. Algoritmayı gerçekleştiren MatLab komutlar listesi § 4.6’de verilecektir.

4.1 Kesikli-Zaman Stokastik Süreçler

Bu bölümde, Bölüm 1’de sürekli zaman süreçleri için verilen genel kavramların kesikli-zaman uyarlamaları gözden geçirilecektir. Birçok uygulamada, incelemekte olduğumuz kesikli-zaman süreçleri, sürekli-zaman süreçlerinin örneklenmesinden elde edilir. Buradaki amaç kesikli-zaman süreçlerinin ve sürekli zaman süreçlerinin korelasyon ve spektrumları arasında ilişkiler kurmaktır.

$x(t)$ ’nin $R(\tau)$ otokorelasyonlu ve $S(\omega)$ güç spektrumlu geniş-anlamda durağan bir sürekli-zaman süreci olduğu varsayalım. Gösterimde ufak bir değişiklik yapılarak örneklenmiş $x(kT)$ süreci $x[k]$ ile gösterilsin. Burada T örnekleme periyodudur. Böylece, $x[k]$ ’nin otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi hesa-

planır.

$$R[m] = E \{x[k+m]x^*[k]\} = E \{x(kT+mT)x^*(kT)\} = R(mT). \quad (4.1)$$

$x[k]$ 'nin güç spektrumu $R[m]$ 'in kesikli Fourier dönüşümü olarak tanımlanır:

$$S^d(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m]e^{-jm\omega T}. \quad (4.2)$$

$R[-m] = R^*[m]$ olduğundan dolayı, $S^d(\omega)$ 'nin ω 'nın gerçek bir fonksiyonu olduğuna dikkat edin. Ayrıca bu fonksiyon periyodiktir ($2\pi/T$ periyodu ile); ve $x[n]$ 'nin gerçek bir süreç olduğu durumda çifttir.

Fourier ters dönüşüm formülünden, $R[m]$ aşağıdaki gibi geri elde edilir.

$$R[m] = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S^d(\omega)e^{jm\omega T} d\omega \quad (4.3)$$

burada $\omega_c = \pi/T$ bilindiği gibi Nyquist frekansıdır. Özellikle

$$E \{|x[m]|^2\} = R[0] = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S^d(\omega) d\omega \quad (4.4)$$

olduğuna dikkat edilmeli.

$R[m]$ 'in ayrıca z dönüşümünü tanımlamak yerinde olacaktır:

$$\mathcal{Z} \{R[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m]z^{-m}. \quad (4.5)$$

O zaman,

$$S^d(\omega) = \mathcal{Z} \{R[m]\}_{z=e^{j\omega T}} \quad (4.6)$$

olur.

Kesikli-zaman güç spektrumu sürekli-zaman güç spektrumuna Poisson toplam formülü ile ilişkilendirilmiştir:

$$S^d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(\omega + 2m\omega_c). \quad (4.7)$$

$x(t)$ 'nin gerçek, band-sınırlı bir süreç olduğu varsayalım, yani, $S(\omega) = 0$, $|\omega| \geq \omega_c$. O zaman (4.7)'den

$$S(\omega) = TS^d(\omega), \quad |\omega| \leq \omega_c \quad (4.8)$$

$y[k]$, geniş-anlamda durağan kesikli-zaman süreci $x[k]$ ile sürülen, belirleyici, doğrusal, zamandan bağımsız bir sistemin çıktısını gösterebilir. Bu sistemin *kesikli darbe yanıtı* fonksiyonu $g[n]$ ile belirlenir. Birim kesikli darbe fonksiyonunun aşağıdaki gibi tanımlandığı hatırlanmalıdır:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

O zaman, $y[n]$, $x[k]$ 'nin $g[k]$ ile *kesikli konvolüsyonundan* elde edilir:

$$y[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[k-l]g[l] = x[k] * g[k]. \quad (4.11)$$

Sistemin transfer fonksiyonu şöyle hesaplanır:

$$G_d(z) = \mathcal{Z}\{g[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]z^{-k}. \quad (4.12)$$

Buradan

$$E\{y[k]\} = E\{x[k]\} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g[l] = \eta_x G_d(1) \quad (4.13)$$

sonucu elde edilir.

Bölüm 1'de sürekli-zamanlı sistemler için tanımlanan korelasyon ve spektrumların yerini kesikli-zamanda

$$\begin{aligned} R_{xy}[m] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}[k+m]g^*[k] = R_{xx}[m] * g^*[-m] \\ R_{yy}[m] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}[m-k]g[k] = R_{xy}[m] * g[m] \end{aligned} \quad (4.14)$$

tanımları alır. Her iki tarafın kesikli Fourier dönüşümü alınırsa,

$$S_{xy}^d(\omega) = S_{xx}^d(\omega)G_d^*(e^{j\omega T}), \quad S_{yy}^d(\omega) = S_{xy}^d(\omega)G_d(e^{j\omega T}) \quad (4.15)$$

ifadeleri bulunur ve

$$\rho[m] = g[m] * g^*[-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[m+k]g[k] \quad (4.16)$$

tanımından hareketle

$$R_{yy}[m] = R_{xx}[m] * \rho[m], \quad S_{yy}^d(\omega) = S_{xx}^d(\omega)|G_d(e^{j\omega T})|^2 \quad (4.17)$$

ifadeleri elde edilir. Eğer $g[n]$ gerçektir ise, o zaman $G_d^*(e^{j\omega T}) = G_d(e^{-j\omega T})$ olur; ve bu durumda

$$S_{yy}^d(z) = S_{xx}^d(z)G_d(z)G_d(z^{-1}) \quad (4.18)$$

eşitliği bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} E\{|y[k]|^2\} = R_{yy}(0) &= \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_{xx}^d(\omega) |G_d(e^{j\omega T})|^2 d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}[k]\rho[k] \end{aligned} \quad (4.19)$$

olduğuna dikkat edilmeli.

4.1.2 Sürekli-Zaman ve Kesikli-Zaman Modelleri Arasındaki Bağlılıklar

Çok girdili/çok çıktılı bir sürekli-zaman sistemi düşünelim. Bu sistemin transfer fonksiyonu $G(s)$ olsun ve durum-uzay gösterimi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde verilsin. Burada $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, ve $y \in \mathbf{R}^p$. Böylece, $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ dir.

(4.20)'nin sıfırıncı-dereceden tutucu (zero-order hold) kesikli-zaman eşdeğeri

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u_d[k] \\ y[k] &= Cx[k] \end{aligned} \quad (4.21)$$

formülleriyle tanımlanır. Burada $u_d[k] = u(kT)$ örneklenmiş girdidir ve sistem matrisleri

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \quad (4.22)$$

şeklinde bulunur. (4.21)'deki kesikli-zaman sisteminin transfer fonksiyonu

$$G_d(z) = C(zI_n - A_d)^{-1}B_d \quad (4.23)$$

ifadesiyle hesaplanır. Eğer $u_d[k]$, $\frac{1}{T}$ varyansına sahip kesikli-zamanlı beyaz gürültü süreci ise, o zaman $S_{u_d u_d}^d(\omega) = \frac{1}{T}$ olur; ve (4.18)'den

$$S_{yy}^d(\omega) = \frac{1}{T} |G_d(e^{j\omega T})|^2 \quad (4.24)$$

ifadesi elde edilir.

$u(t)$ 'nin sürekli-zaman beyaz bir gürültü olduğunu ve otokorelasyon matrisinin

$$R_{uu}(t_1, t_2) = I_n \delta(t_1 - t_2) \quad (4.25)$$

şeklinde verildiği farzedilsin. (2.65)'dan, o zaman

$$S_{yy}(\omega) = G(j\omega)G(-j\omega) \quad (4.26)$$

bulunur.

T 'yi yeterince küçük seçmek şartıyla, (4.8)'den tüm $|\omega| \leq \omega_c$ değerleri için $S_{yy}(\omega) \approx TS_{yy}^d(\omega)$ olduğuna dikkat edilmeli. Böylece, tüm $|\omega| \leq \omega_c$ değerleri için $|G(j\omega)|^2 \approx |G_d(e^{j\pi\omega/\omega_c})|^2$ olur.

Bu bölümde, $S_{yy}^d(\omega_k)$ ile gösterilen kesikli güç spektrumu $S_{yy}^d(\omega)$ 'nin N örneğinden, benzeşim dönüşümüne kadar tek olan üçlü durum-uzay parametre seti (A, B, C) 'yi bulma problemi ele alınacaktır. Bu problem, sürekli-zaman sistemleri ile onların kesikli-zaman karşılıkları arasındaki ileri ve geri dönüşümleri içerir.

İki dönüşüm yöntemi dikkate alınacaktır. Birinci yöntem, (4.21) ve (4.22) formülleri ile gösterilen sıfıncı-dereceden tutucu eşdeğerliktir. Böylece, bulacağımız uygun A_d , B_d , ve C değerleri için $|G_d(e^{j\pi\omega_k/\omega_c})|^2$ ifadesi $TS_{yy}^d(\omega_k)$ ifadesine en iyi biçimde eşleşir. Daha sonra, (4.22)'den A ve B hesaplanır. $\hat{G}(s)$, A , B , ve C matrisleriyle hesaplanan sürekli-zamanlı transfer fonksiyonunu gösterebilir. Aşağıdaki eşitsizlikten (ispatı için mesela [53] bakınız)

$$|\hat{G}(j\omega) - G_d(e^{j\pi\omega/\omega_c})| \leq \pi \frac{\omega}{\omega_c} \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau,$$

burada $g(\tau)$ ifadesi, \hat{G} 'nin sürekli darbe yanıt fonksiyonunu gösterir, şayet $\omega_N = o(\omega_c)$ ise bütün k değerleri için $\hat{G}(j\omega_k) \approx G_d(e^{j\pi\omega_k/\omega_c})$ elde edilir.

Burada, $\beta_k = o(\alpha_k)$ notasyonu $|\alpha_k|/|\beta_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) ifade eder. Tüm $|\omega| \leq \omega_c$ için $|G(j\omega)|^2 \approx |G_d(e^{j\pi\omega/\omega_c})|^2$ olduğundan dolayı ω_c yeterince büyükse ve (4.9) ifadesi geçerliyse $\hat{G}(j\omega_k) \approx G(j\omega_k)$ bulunur.

İkinci yöntem çift doğrusal haritalama (bilinear map) yöntemidir ve

$$s = \psi(z) = \lambda \frac{z-1}{z+1} \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lambda > 0$ ölçekleme katsayısıdır. Bu haritalama yöntemi oldukça faydalı özelliklere sahiptir. Mesela, rasyonel fonksiyonları rasyonel fonksiyonlara haritalar ve Hankel tekil değerlerini değiştirmeden bira-kır. Bu özellikler yaklaşıklık hatalarının kontrolünde oldukça önemlidir. $\psi(z)$ 'in birim çemberi sanal eksene haritaladığı gözlemlenmeli. Özellikle, $e^{j\theta_k}$ 'nin görüntüsü $\lambda \tan(\theta_k/2) = \omega_k$ 'yi sağlar. Bu yöntem $TS_{yy}^d(\omega_k)$ üzerinde birinci yöntemle aynı biçimde işlem görür. Tek farklılık ω_k ve θ_k arasındaki ilişkiden kaynaklanır. Bir önceki yöntemde, $\omega_k, \theta_k = \pi\omega_k/\omega_c$ 'ya haritalanmıştır. Bu yöntem başlangıç yaklaşıklık hatası $S_{yy}(\omega_k) \approx TS_{yy}^d(\omega_k)$ 'den daha büyük hatalar üretmez.

Yöntem seçimi yapılacak uygulamalara bağlıdır. Temel olarak buna, sürekli-zaman frekanslarının dağılımına göre karar verilir. Yukarıdaki tanıyım problemi ileri ve geri dönüşümlerden yararlanmadan direkt çözülebilir. Fakat dönüşümleri kullanmak için iki neden vardır. Birinci neden, bir çok tanıyım algoritmasının kesikli-zaman sistemleri için geliştirilmiş olmasıdır. İkinci neden ise, genel olarak sürekli-zaman frekans bölgesinin π 'ye kıyasla kesikli-zaman frekans bölgesine göre çok daha geniş olmasıdır. Bu durum birçok sürekli-zaman tanıyım algoritmasını nümerik olarak kötü-koşullandırılmış yapar.

4.2 Yol Spektrumlarının Kestirimi

Bölüm 3'te, yol yüzeylerinin homojen ve izotropik, iki-boyutlu Gaussian rassal süreçler olarak düşünülebileceği görülmüştü. Homojenlik ve izotropi

varsayımları altında, yol profilinin tam tanımı herhangi bir boylamsal izde hesaplanmış tek bir güç spektral yoğunluk fonksiyonu ile yapılabilmişti. Bu bölümde, çıktı spektrumu, $S_R(\Omega)$ spektral verilerine yaklaşan bir rasyonel transfer fonksiyonu bulma problemi ele alınacaktır.

Bu bölümde ele alacağımız spektral kestirim problemi şu şekildedir:

Verilen: $S_k \geq 0$ gibi N tane örnekten oluşan güç spektrumu $S_R(\Omega)$, N frekansta hesaplanan:

$$S_k = S_R(\Omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.28)$$

Bulunacak: Kararlı, minimum-fazlı ve

$$S_R(\Omega) = G_R(j\Omega)G_R(-j\Omega) \quad (4.29)$$

eşitliğini sağlayan $G_R(s)$ transfer fonksiyonu.

(4.29)'u sağlayan $G_R(s)$ transfer fonksiyonuna S_R 'in *spektral çarpımı* denir. S_R 'in spektral çarpımı iki farklı yöntem ile kestirilmeye çalışılacaktır. Birinci yöntem S_R 'in Fourier serisi yaklaşımına dayalıdır. İkinci yöntem ise, bir sonraki bölümde sunulacak olan altuzay-tabanlı tanıyım algoritmasıdır.

4.2.1 Fourier Serisi-Tabanlı Tanıyım Algoritması

Üzerinde çalışacağımız tanıyım algoritması şu yapıya sahiptir:

Algoritma 4.2.1

1. Sürekli-zaman frekansları Ω_k 'leri kesikli-zaman frekanslarına haritalayın:

$$\theta_k = 2 \arctan \left(\frac{\Omega_k}{\lambda} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.30)$$

Burada $\lambda > 0$ ölçekleme katsayısıdır.

2. $M \geq N$ için pozitif bir tamsayı seçin ve spektral verilerden düzgün aralıklı spektral veriler elde etmek için parçalı-doğrusal aradeğerleyin (interpolation):

$$S_l^u = S_k + \frac{S_{k+1} - S_k}{\theta_{k+1} - \theta_k} \left(\frac{\pi l}{M} - \theta_k \right), \quad l = 0, 1, \dots, M; \quad \theta_k \leq \frac{\pi l}{M} \leq \theta_{k+1}. \quad (4.31)$$

Burada $\theta_{N+1} = \pi$ için $S_{N+1} = 0$ olsun ve eğer $\theta_1 > 0$ ise $\theta_0 = 0$ noktasında spektral bir veri elde etmek için S_1 ve S_2 dışdeğerlenir (extrapolation).

3. $M + 1$ tane S_l^u spectral veriyi, aşağıdaki kurala göre $2M$ tane düzgün ayrılmış veriye genişletin:

$$S_{M+l}^u = S_{M-l}^u, \quad l = 1, \dots, M - 1. \quad (4.32)$$

4. Genişletilmiş veriler üzerinde $2M$ -noktalı ters kesikli Fourier dönüşümünü alın:

$$\hat{s}_l = \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{2M-1} S_k^u e^{j2\pi kl/2M}, \quad l = 0, 1, \dots, 2M - 1. \quad (4.33)$$

5. $L < M$ şeklinde bir pencere büyüklüğü seçin ve nedensel çarpım olan $G_c(z; L)$ 'yi şöyle tanımlayın:

$$G_c(z; L) = \sum_{l=0}^L \tilde{s}_l z^{-l} \quad (4.34)$$

burada

$$\tilde{s}_l = \begin{cases} \frac{\hat{s}_l}{2}, & l = 0 \\ \hat{s}_l, & l = 1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad (4.35)$$

6. En büyük n tane Hankel tekil değerlerine ait durumları koruyarak $G_c(z; L)$ 'yi dengeli kesme (balanced truncation) yöntemi ile indirgeyin. $G_r(z) = B_r(z)/A_r(z)$ n.inci dereceden indirgenmiş modelin transfer fonksiyonunu göstereyin.

7. ε verilmiş küçük pozitif bir sayı olsun. $A_r(z)$ yeniden aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\check{A}_r(z) = \begin{cases} A_r(z), & \text{eğer } A_r(0) \neq 0 \\ \varepsilon + A_r(z), & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.36)$$

ve

$$\widehat{D}_r(z) = B_r(z)z^n \check{A}_r(z^{-1}) + \check{A}_r(z)z^n B_r(z^{-1}) \quad (4.37)$$

olsun. $B_r(z)$ yeniden

$$\check{B}_r(z) = \begin{cases} B_r(z), & \text{if } \widehat{D}_r(0) \neq 0 \\ B_r(z) + \varepsilon \check{A}_r(z), & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (4.38)$$

şeklinde tanımlansın.

8. Yukarıdaki eşitliklerden,

$$D^\sharp(z) = \check{B}_r(z)z^n \check{A}_r(z^{-1}) + \check{A}_r(z)z^n \check{B}_r(z^{-1}), \quad (4.39)$$

$$A^\sharp(z) = \check{A}_r(z)z^n \check{A}_r(z^{-1}).$$

$D^\sharp(z) = 0$ 'ın birim çember içinde kalan ve z_k ile gösterilen n tane kökünü; ve $A^\sharp(z) = 0$ 'ın p_k ile gösterilen n tane kökünü bulun. Böylece

$$\Upsilon = \left(\frac{D^\sharp(0)}{A^\sharp(0)} \prod_{k=1}^n \frac{p_k}{z_k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

olsun.

9. z -bölgesindeki spektral çarpım $G_c(z)$ 'yi aşağıdaki gibi tanımlayın:

$$G_c(z) = \Upsilon \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{z - p_k}. \quad (4.41)$$

10. $G_R(s)$ spektral çarpımını

$$G_R(s) = \left(\frac{\Lambda}{s + \Lambda} \right)^{n_r} G_c \left(\frac{\lambda + s}{\lambda - s} \right) \quad (4.42)$$

şeklinde tanımlayın. Burada $\Lambda > 0$ ve n_r negatif olmayan bir tam sayıdır.

Algoritma 4.2.1'in 1.inci basamağı problemi (4.27)'deki çift doğrusal haritalama yöntemi aracılığıyla kesikli-zaman kestirim problemine dönüştürür. Burada λ , spektral verilerin (cycle/m cinsinden ölçülmüş) band-genişliği mertebesinde seçilmiştir. 2.inci basamak düzgün aralıklı spektrum örneklerinin

elde edildiği aradeğerleme (interpolation) adıdır. Parçalı doğrusal spline'ların kullanımı gerekli değildir; örneğin, kübik spline'lar da kullanılabilir. 3.üncü basamak, güç spektrumunun, frekansların gerçek-simetrik bir fonksiyonu olduğu bilgisinden yola çıkarak negatif frekanslar için spektrum örnekleri elde eder.

4.üncü basamak, $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ periyodik fonksiyonunun Fourier katsayılarının kestirimini yapar:

$$s_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(\lambda \tan(\theta/2)) e^{-jl\theta} d\theta, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm M \quad (4.43)$$

burada \hat{s}_{2M-l} , s_{-l} 'in kestirim değeridir. $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ gerçek-simetrik olduğundan dolayı, tüm l değerleri için, $s_l = s_{-l}$ olur. Şimdi, toplamın nedensel olmayan $G_{ac}(z; L)$ terimini şöyle tanımlansın:

$$G_{ac}(z; L) = \sum_{l=-L}^0 \tilde{s}_l z^{-l} \quad (4.44)$$

burada

$$\tilde{s}_{-l} = \begin{cases} \frac{\hat{s}_l}{2}, & l = 0 \\ \hat{s}_{2M-l}, & l = 1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad (4.45)$$

(4.32)'den

$$\hat{s}_{2M-l} = \hat{s}_l, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (4.46)$$

olduğuna dikkat edilmeli. Böylece, bunu izleyen transfer fonksiyonu

$$\hat{G}(z; L) = G_c(z; L) + G_{ac}(z; L) \quad (4.47)$$

$z = e^{j\theta}$ 'da hesaplanmıştır ve $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ 'nin

$$S_R^d(\theta; L) = \sum_{l=-L}^L s_l e^{jl\theta} \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlanmış Fourier serisine yaklaşır. (4.47) ve (4.48)'deki serilerin yakınsama özellikleri bu bölümün sonunda analiz edilecektir. Bu analizin amacı, veri sayısı arttıkça L 'nin sınırsız artmasına izin verilerek, $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ 'nin daha hatasız modellenbildiğini göstermektir. $G_{ac}(z^{-1}; L) = G_c(z; L)$ olduğunu gözlemleyin. Bu da $G_c(z; L)$ ve $G_{ac}(z; L)$ tamamen aynı yaklaşma özelliklerine sahip olmasını gerektirir.

6.ıncı basamak, sistem yaklaşımı literatüründe oldukça iyi bilinir. Yaklaşım hatası, n 'yi ayarlamak suretiyle kontrol altında tutulur. Yukarıda gösterildiği gibi,

$$\widehat{G}_r(z) = G_r(z) + G_r(z^{-1}) \quad (4.49)$$

$2L$.inci derece transfer fonksiyonu $\widehat{G}(z; L)$ 'nin en fazla $2n$.inci derece yaklaşımıdır.

Geriye algoritmanın 7-10 basamaklarının gerekliliğinden bahsetmek kaldı. Bundan önce, ilk olarak D_r ve \widehat{A}_r gibi iki polinom tanımlansın:

$$\begin{aligned} D_r(z) &= B_r(z)z^n A_r(z^{-1}) + A_r(z)z^n B_r(z^{-1}) \\ \widehat{A}_r(z) &= A_r(z)z^n A_r(z^{-1}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

(4.50) ile tanımlanan bu polinomlar aralarında asaldır. Gerçekten, \widehat{G}_r şöyle yazılsın:

$$\widehat{G}_r(z) = \frac{B_r(z)z^n A_r(z^{-1}) + A_r(z)z^n B_r(z^{-1})}{A_r(z)z^n A_r(z^{-1})}. \quad (4.51)$$

Şimdi, \widehat{G}_r 'ın sıfırı $\alpha \neq 0$ olsun. \widehat{G}_r 'nin her sıfırının aynı zamanda D_r 'nin de sıfırı olduğuna dikkat edilmeli. Böylece, $D_r(\alpha^{-1}) = \alpha^{-2n} D_r(\alpha)$ eşitliği, her iki α ve α^{-1} 'in D_r 'nin sıfırları olmalarını gerektirir. Tam tersine, $D_r(\alpha) = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olduğunu farzedin. Eğer $A_r(\alpha) = 0$ ise, o zaman $B_r(\alpha)\alpha^n A_r(\alpha^{-1}) = 0$ dır. A_r ve B_r aralarında asal olduğundan dolayı, $A_r(\alpha^{-1}) = 0$ dır, yani, α^{-1} A_r 'nin sıfırındır. Buradan her iki α ve α^{-1} 'in $A_r(z)$ 'nin sıfırları olduğu sonucu çıkar. Fakat A_r 'nin tüm kökleri birim çember içinde kaldığı için bu mümkün değildir. Bundan dolayı, $A_r(\alpha) \neq 0$. α yerine α^{-1} yazalım. O zaman, $D_r(\alpha^{-1}) = 0$ olduğundan dolayı $A_r(\alpha^{-1}) \neq 0$. Bu nedenle, D_r 'nin sıfırdan farklı sıfırları, \widehat{A}_r 'nin sıfırdan farklı sıfırları ile sadeleşemez. $A_r(0) = 0$ olduğunu farzedin. O zaman, $D_r(0) = 0$, $B_r(0) = 0$ olmasını gerektirir bu da A_r ve B_r 'nin aralarında asal olduğu gerçeği ile çelişir. Bundan dolayı, eğer $A_r(0) = 0$ ise $D_r(0) \neq 0$ dır. Aynı şekilde, eğer $D_r(0) = 0$ ise $A_r(0) \neq 0$ dır. Bunun getirdiği sonuca göre D_r ve \widehat{A}_r aralarında asaldır.

Böylece, \widehat{G}_r şöyle oluşturulabilir:

$$\widehat{G}_r(z) = \Upsilon' z^\kappa \Phi(z) \quad (4.52)$$

burada, sadece ve sadece A_r 'in orijinde sıfır(lar)ı var ise ve $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = \frac{\prod_{k=1}^{n_z} (z - z_k)(1 - zz_k)}{\prod_{k=1}^{n_p} (z - p_k)(1 - zp_k)} \quad (4.53)$$

şeklinde tanımlanmış ise $\kappa < 0$ dir. Tüm θ değerleri için $\Phi(e^{j\theta}) \geq 0$ olduğundan dolayı, sadece ve sadece $\kappa = 0$ and $\Upsilon' > 0$ olduğu zaman tüm θ değerleri için $\widehat{G}_r(e^{j\theta}) \geq 0$ dir. Bu negatif-olmama koşulu (4.36) ve (4.38) deki A_r ve B_r 'yi gerektiği zaman yeniden tanımlamayı zorunlu kılmıştır. Gerçekte, $G_r'(z) = B_r(z)/\check{A}_r(z)$ olsun. O zaman, $\check{A}_r(0) \neq 0$. Şimdi,

$$\tilde{G}_r(z) = G_r'(z) + G_r'(z^{-1}) = \frac{\widehat{D}_r(z)}{A^\sharp(z)} \quad (4.54)$$

olsun. $A^\sharp(z)$ 'nin orijinde sıfırı olmadığı için, (4.52)'de $\kappa \geq 0$ ve $n_p = n$ dir. Bundan sonra, $G_r''(z) = \check{B}_r(z)/\check{A}_r(z)$ ve

$$G^\sharp(z) = G_r''(z) + G_r''(z^{-1}) = \frac{D^\sharp(z)}{A^\sharp(z)} \quad (4.55)$$

olsun. Eğer $\widehat{D}_r(0) = 0$ ise, o zaman,

$$G^\sharp(z) = 2\varepsilon + \tilde{G}_r(z) \quad (4.56)$$

ifadesi $D^\sharp(0) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle, (4.52)'de $\kappa = 0$ ve $n_z = n$ dir. Bunu izleyen sonuç; bazı $\Upsilon'' \in \mathbf{R}$ için ve birim çember içinde kalıp kompleks eşlenik simetriğini sağlayan z_k ve p_k kompleks sayıları için $G^\sharp(z)$ çarpanlarına şöyle ayrılabilir,

$$G^\sharp(z) = \Upsilon'' \prod_{k=1}^n \frac{(z - z_k)(1 - zz_k)}{(z - p_k)(1 - zp_k)}. \quad (4.57)$$

θ_0 noktasında en azından, $G^\sharp(e^{j\theta_0}) > 0$ eşitliği sağlandığı için, Υ'' pozitif olmalı.

(4.56) ve (4.36)'dan

$$\begin{aligned}
\|\widehat{G}_r - G^\sharp\|_\infty &\leq 2\varepsilon + \|\widehat{G}_r - \widetilde{G}_r\|_\infty \\
&= 2\varepsilon + 2\left\|\frac{B_r}{A_r} - \frac{B_r}{\varepsilon + A_r}\right\|_\infty \\
&\leq 2\left(1 + \frac{\|G_r\|_\infty}{\|A_r\|_\infty - \varepsilon}\right)\varepsilon
\end{aligned} \tag{4.58}$$

olduğu gözlemlenir. Böylece,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\widehat{G}_r - G^\sharp\|_\infty = 0;$$

yine de tüm θ ve ε için $G^\sharp(e^{j\theta}) \geq 0$ dir. Bu da, G_r 'ın pay ve paydasını birazcık düzensizleştirmek (perturbation) suretiyle, tüm θ değerleri için $G^\sharp(e^{j\theta})$ 'nın negatif olmamasının kesinleştirmiş olacağı anlamına gelir. Dikkat edilirse $G^\sharp(z)$ 'nin birim çember üzerinde bulunan sıfırları birim çemberin birazcık içerisine/dışarısına hareket ettirilmesiyle (4.58)'deki üst sınırın çok etkilenmediği görülür. ε 'a 10^{-4} gibi küçük bir değer atanabilir.

(4.57)'den

$$G^\sharp(z) = G_c(z)G_c(z^{-1}) \tag{4.59}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$G_c(z) = \sqrt{\Upsilon''} \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{z - p_k} \tag{4.60}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.55) ve (4.57)'den de

$$\frac{D^\sharp(0)}{A^\sharp(0)} = \Upsilon'' \prod_{k=1}^n \frac{z_k}{p_k} \tag{4.61}$$

olduğuna dikkat edilmeli. Daha sonra, (4.40) elde etmek için $\Upsilon = \sqrt{\Upsilon''}$ olarak atanır.

10.uncu basamakta, azalma faktörü: $(\frac{\Lambda}{s+\Lambda})^{n_r}$ tanıtıldı. Bunun nedeni $G_c(\psi^{-1}(s))$ fonksiyonunun sadece uygun (proper) sürekli-zaman transfer fonksiyonu olmasıdır. Bu da $G_c(\psi^{-1}(j\omega))$ 'nın \mathbf{R} üzerinde kare integrallenebilir (square integrable) olmadığı anlamına gelir. ((2.52)'ye göre, her bir güç spektral yoğunluk fonksiyonu integrallenebilir olmalı). Bu faktör yüksek

frekanslardaki frekans cevabını azaltır. Λ parametresi $G_c(\psi^{-1}(s))$ 'in band genişliği dışında seçilir.

Spektral çarpımlarına ayırma problemi istatistikte ve mühendislikte iyi bilinen konulardandır. Biçimsel olarak, bir kesikli-zaman stokastik süreci, çarpımlarına ayrılabilir $S_R^d(\theta)$ spektral yoğunluk fonksiyonuna sadece ve sadece bu fonksiyon düzenli (regular) ise:

$$\int_0^{2\pi} \ln S_R^d(\theta) d\theta > -\infty \quad (4.62)$$

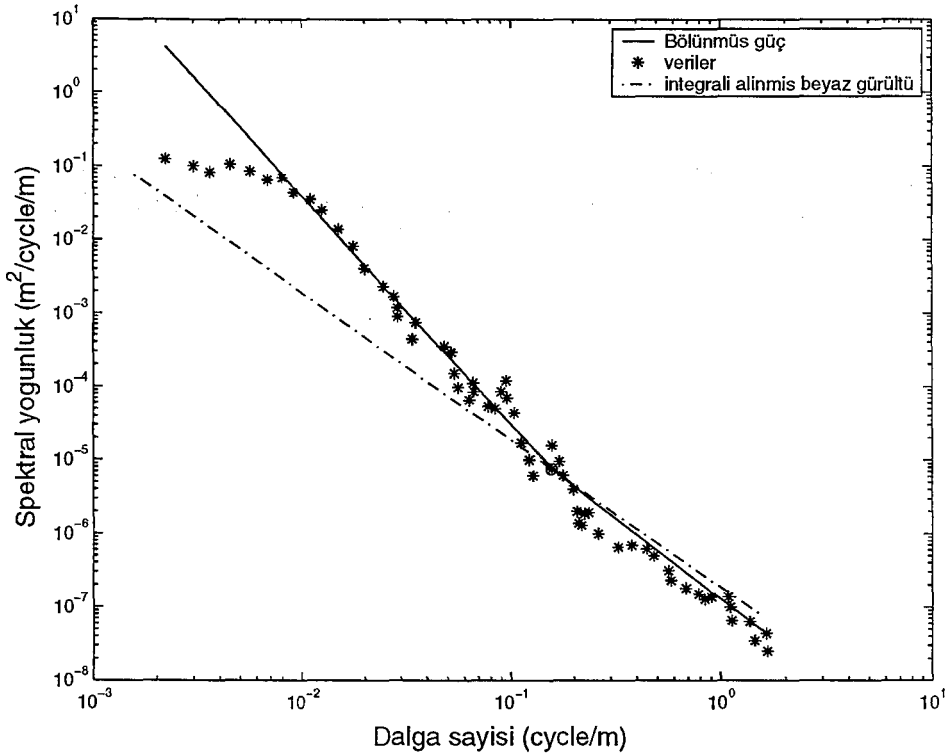
sahiptir. O zaman, $S_R^d(\theta)$ 'nın spektral çarpımlarını, $\ln(S_R^d(\theta))^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun Fourier katsayıları cinsinden yazmak mümkün olacaktır. Fourier katsayıları, kesikli Fourier dönüşümü yöntemiyle hesaplanabilir. Bu işlem [25]'te genel hatlarıyla özetlenmiştir. Algoritma 4.2.1, spektrum örneklerinin düzgün aralıklı olmasını gerektirmez; ve çıktı olarak bir rasyonel spektral çarpım verir. Fourier serisini genelleştirilmiş Fourier serisi ile ifade edebilme olanağı § 4.4'te tartışılacaktır. Bir sonraki bölüme geçmeden önce, bir sürekli-zaman stokastik süreci için, düzenliliğin bilindik Paley-Wiener şartı ile garantilenmiş olacağı belirtilebilir:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln S_R(\Omega)}{1 + \Omega^2} d\Omega > -\infty.$$

4.3 Kestirim Sonuçları

Bu bölümde, Şekil 3.6'da çizilen spektral verilere Algoritma 4.2.1 uygulanacaktır. Verilere, bölünmüş güç yasası (split power law) ve integrali alınmış beyaz gürültü yöntemleri ile yapılan yaklaşımlar Şekil 4.1'de gösterilmiştir. (Integrali alınmış beyaz gürültü, $\delta = 1$ olduğu zaman Tablo 3.1'deki güç yasasıdır). Her iki yaklaşım da \tilde{n}_0 cycles/m'deki spektral veriyi yakalamayı amaçlar. Açıkça görülüyor ki özellikle \tilde{n}_0 'dan daha düşük frekanslarda, integrali alınmış beyaz-gürültü modeli oldukça yetersizdir.

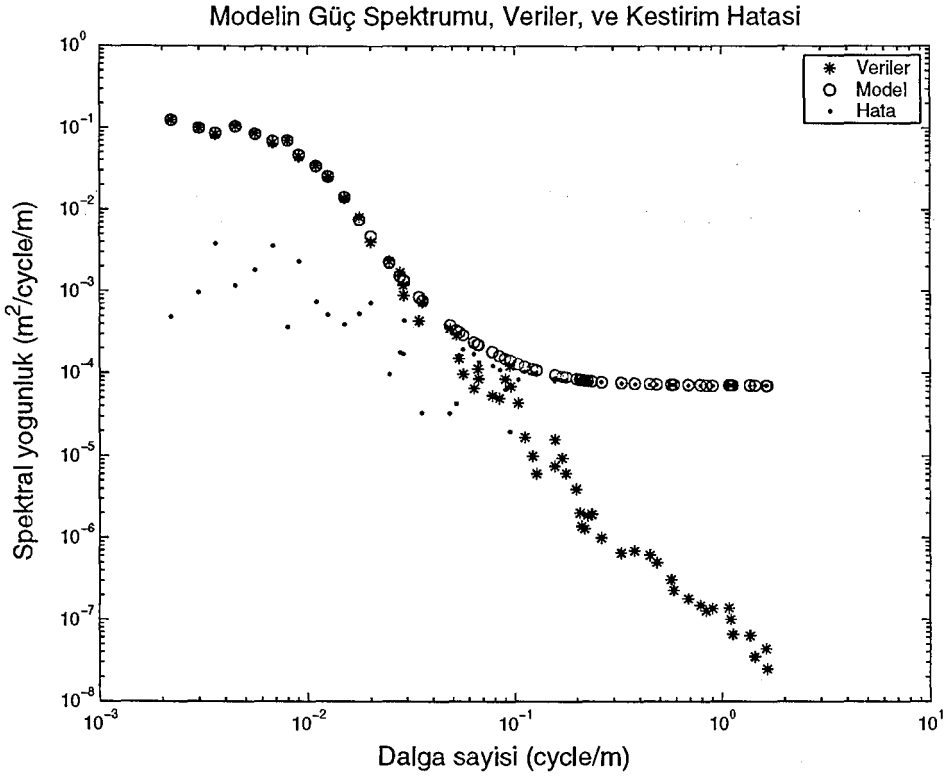
Daha sonra, Algoritma 4.2.1 kullanılarak 1.inci basamakta $\lambda = 0.2$; 2.inci



Şekil 4.1: Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin bölünmüş güç yasası ve integrali alınmış beyaz gürültü ile yaklaşık olarak modellenmesi

basamakta $M = 128$; ve 5.inci basamakta $L = 126$ seçildi. 7.inci basamakta, düzenleme (regularizasyon) için herhangi bir $\varepsilon \neq 0$ ihtiyaç duyulmadı. Şekil 4.2 ve 4.3'te, kestirim sonuçları sırasıyla $n = 8$ ve $n = 1$ inci dereceden rasyonel fonksiyonlar için çizilmiştir. 10.uncu basamak $n_r = 0$ seçilerek tamamlanmıştır.

Şekil 4.2'de gösterildiği gibi, Algoritma 4.2.1'den elde edilen sekizinci dereceden rasyonel model yol dinamiğini 0.1 cycles/m'ye kadar yakalar. Bu frekanstan sonra, zaten yol dinamiği ihmal edilebilirdir, çünkü yolun güç spektral yoğunluğu 10^{-4} m²/cycle/m'nin altına düşer. Bundan farklı olarak, Şekil 4.3'te, Algoritma 4.2.1'den elde edilen birinci dereceden rasyonel modelin sadece 0.01 cycle/m'ye kadar doğru sonuçlar verdiği görülür. Bu nedenle, yol profillerinin modellenmesinde seçilecek uygun bir model değildir. Bu



Şekil 4.2: Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 8.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi

sınırlı gözlemlere dayalı olarak, yol modellemesinde yüksek-dereceli biçimlendirici filtreler kullanılması önerilir.

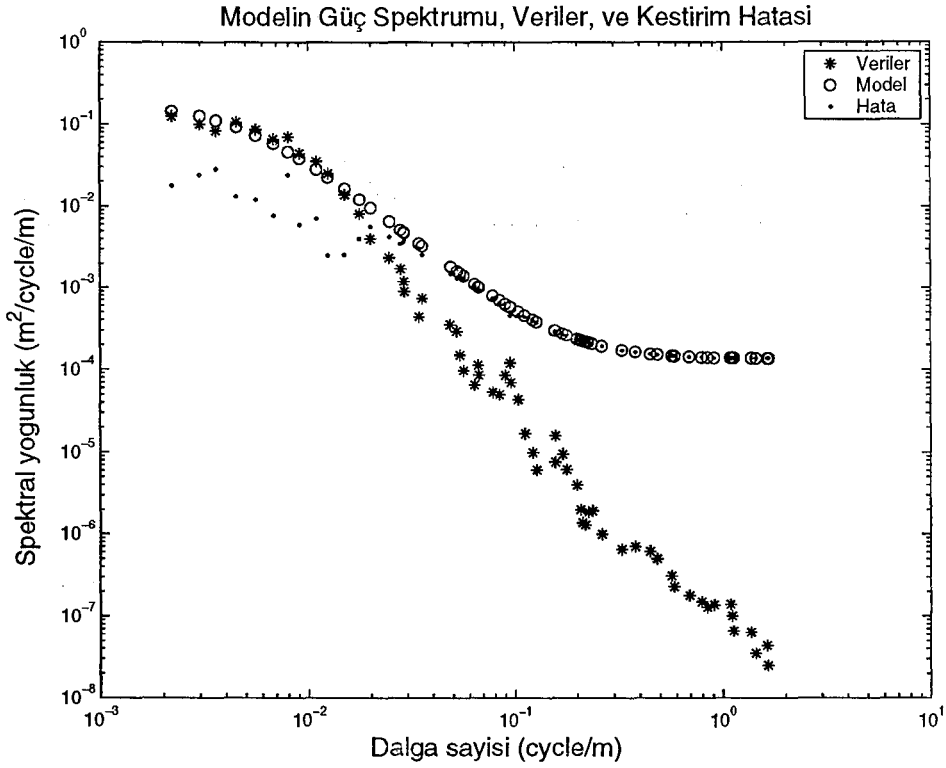
Algoritma 4.2.1 ile kestirilen, $n = 8$ ve $n = 1$ inci dereceden spektral çarpımlar aşağıda verilmiştir:

$$G_R(s) = 0.0084 \frac{(s + 0.0024)(s + 0.5587)(s + 0.0042 \pm j0.0254)}{(s + 0.0023)(s + 0.0214)(s + 0.0041 \pm j0.0263)} \times \frac{(s + 0.0032 \pm j0.0516)(s + 0.0980 \pm j0.0491)}{(s + 0.0028 \pm j0.0514)(s + 0.0383 \pm j0.0675)} \quad (4.63)$$

ve

$$G_R(s) = 0.0116 \frac{s + 1.0860}{s + 0.0304} \quad (4.64)$$

(4.63)'teki yakın kutup-sıfır sadeleştirmeleri üçüncü dereceden bir spektral çarpım kullanmayı önerir. Bu durum şimdilik görmezlikten gelinip konu



Şekil 4.3: Şekil 3.6'daki $\widehat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 1.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi

burada kesilecektir.

4.4 Algoritma 4.2.1'in Yakınsama Analizi

Bu bölümde, 5.inci basamağın yakınsama analizi yapılacaktır. Fakat, daha önce bazı gösterimlerin tanıtılması gerekir.

D açık birim diskini: $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ ve \mathbf{T} 'de sınırlarını gösterebilir. \mathbf{T} 'deki kompleks fonksiyonların *Lebesgue* uzayları $\mathcal{L}_p(\mathbf{T})$ ile gösterilir. Ölçülebilir $G(e^{j\theta})$ fonksiyonunun aşağıda tanımlanmış normu sadece ve sadece sonlu ise bu fonksiyon $\mathcal{L}_p(\mathbf{T})$ ($p \geq 1$)'dedir;

$$\|G\|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |G(e^{j\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{z \in \mathbf{D}} |G(z)|, & p = \infty. \end{cases} \quad (4.65)$$

\mathbf{D} 'de analitik fonksiyonların Hardy uzayları, $\mathcal{H}_p(\mathbf{D})$ ile gösterilir. $\mathcal{H}_p(\mathbf{D}) \subset \mathcal{L}_p(\mathbf{T})$ olduğuna dikkat edin. \mathcal{A} ile gösterilen disk cebiri, \mathbf{T} üzerinde sürekli olarak genişletilebilir \mathbf{D} üzerinde sınırlı analitik fonksiyonların setidir. $g(t)$, $G \in \mathcal{L}_p(\mathbf{T})$ ($p \geq 1$)'nin Fourier katsayılarını gösterebilir. Bu dizi üzerinde

$$\|g\|_p = \begin{cases} (\sum_{t=-\infty}^{\infty} |g(t)|^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_t |g(t)|, & p = \infty. \end{cases} \quad (4.66)$$

normu konular. Bu normlar tarafından üretilen *Banach* uzayları ℓ_p -uzayları olarak bilinir. Eğer $G \in \mathcal{H}_p(\mathbf{D})$ ise, o zaman tüm $t < 0$ için $g(t) = 0$. Kesikli-zaman, doğrusal-zamandan bağımsız, ℓ_2 sınırlı-girdi/sınırlı-çıkı kararlı bir sistem $\mathcal{H}_\infty(\mathbf{D})$ 'de bir transfer fonksiyonuna sahiptir. Buna ilave olarak, bu sistem ℓ_∞ sınırlı-girdi/sınırlı-çıkı kararlı ise, o zaman transfer fonksiyonu \mathcal{A} 'dadır.

Banach uzayı \mathcal{B} 'nin alt uzayı olan \mathcal{X} 'in $\text{clos}(\mathcal{X})$ ile gösterilen kapalılığı kompakt ise, \mathcal{X} 'e *göreceli kompakt* denir. \mathcal{B} 'nin göreceli kompakt alt uzayları *tamamen sınırlıdır* ve bu durumun tersi de geçerlidir. Bu da her $\epsilon > 0$ için, sonlu bir $\mathcal{X}_\epsilon = \{f_1, f_2, \dots, f_{M_\epsilon}\} \subset \mathcal{X}$ setini bulabileceğimiz anlamına gelir, öyle ki her $f \in \mathcal{X}$ için, $\|f - f_k\| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $f_k \in \mathcal{X}_\epsilon$ vardır.

Göreceli alt-uzaylara bazı örnekler verelim. Her $\sigma \in \mathbf{R}$ için, iki açık düzlem tanımlansın: $\mathbf{C}_\sigma^+ = \{s \in \mathbf{C} : \text{Re}(s) > \sigma\}$ ve $\mathbf{C}_\sigma^- = \{s \in \mathbf{C} : \text{Re}(s) < \sigma\}$. Böylece, $\mathbf{C}_\sigma^+ \cap \mathbf{C}_{-\sigma}^-$ ($\sigma < 0$), sanal eksenini içeren düşey dar bir yarıktır. $\phi(\Omega)$, \mathbf{R} üzerinde asimtotik olarak sönümlenen sürekli bir fonksiyon olsun, mesela, $|\Omega| \rightarrow \infty$ iken $\phi(\Omega) \rightarrow 0$. $\mathcal{H}_\infty(\mathbf{C}_\sigma^+, M, \phi)$, analitik ve \mathbf{C}_σ^+ ($\sigma < 0$) üzerinde M ile sınırlı ve $|G(j\Omega)| \leq \phi(\Omega)$ özelliğine sahip $G(s)$ transfer fonksiyonlarının setini gösterebilir.

$$\mathcal{A}(\sigma, M, \phi) = \{G(\psi(z)) : G \in \mathcal{H}_\infty(\mathbf{C}_\sigma^+, M, \phi)\} \quad (4.67)$$

olsun.

(4.67) ile tanımlanan $\mathcal{A}(\sigma, M, \phi)$ seti \mathcal{A} 'nın göreceli kompakt setidir [36].

Bu ifadeye göre

$$\mathcal{S}(\sigma, M, \phi) = \left\{ G(\psi(z))G(-\psi(z)) : G \in \mathcal{H}_\infty(\mathbf{C}_\sigma^+, M, \phi) \right\} \quad (4.68)$$

şeklinde tanımlanmış bir set $(\mathcal{L}_\infty(\mathbf{T})$ 'nin göreceli kompakt bir alt setidir. (4.68) ile tanımlanmış bir set oldukça geniştir; bu tezde ele alınan tüm güç spektral yoğunlukları içerir. Yakınsama analizimizdeki göreceli kompakt olma durumunun en önemli özelliği norm yakınsamasının göreceli kompakt setlerde *düzgün* olduğu gerçeğidir.

$f(e^{j\theta})$, $[0, 2\pi]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğu zaman,

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(e^{jx}) - f(e^{jy})| \quad (4.69)$$

ifadesi $f(e^{j\theta})$ 'nin *genlik sürekliliği* için yazılır. $f(e^{j\theta})$ fonksiyonu

$$\omega_f(\delta) \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (4.70)$$

ise *Dini-Lipschitz süreklidir*.

Teorem 4.4.1 $S_R(\Omega) = G_R(j\Omega)G_R(-j\Omega)$ olsun. $G_R \in \mathcal{H}_\infty(\mathbf{C}_\sigma^+, M, \phi)$ ve

$$S_R(\Omega) \ln \Omega \rightarrow 0 \quad (\Omega \rightarrow \infty) \quad (4.71)$$

olduğunu varsayalım. O zaman, $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ Dini-Lipschitz süreklidir.

İspat. $F(s) = G(s)G(-s)$ olsun ve $\tilde{\sigma}$, σ 'dan daha küçük pozitif bir sayı olsun. $F(s)$ analitik ve $\{s \in \mathbf{C} : |\operatorname{Re}(s)| < \sigma\}$ dar yarığı üzerinde M^2 tarafından sınırlı olduğu için, türevi Cauchy'nin integral formülü kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$F'(j\Omega) = \frac{1}{\pi i} \oint_{|s-j\Omega|=\tilde{\sigma}} \frac{F(s)}{(s-j\Omega)^2} ds. \quad (4.72)$$

Böylece, (4.72)'den elde edilen aşağıdaki eşitsizlikte $\tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ olmasına izin verilsin:

$$|F'(j\Omega)| \leq \frac{2M^2}{\tilde{\sigma}},$$

$|F'(j\Omega)| \leq 2M^2/\sigma$ elde edilir. $f(\theta) = F(\psi(e^{j\theta}))$ olsun. Daha sonra, türevin zincir kuralının uygulanmasıyla:

$$f'(\theta) = F'(j\Omega) \frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{\lambda F'(j\Omega)}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.73)$$

$\theta = \pi - \nu$ değişken değişimi yapılınsın. Böylece,

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

(4.73)'den

$$|f'(\theta)| \leq \frac{\pi^2 \lambda}{4\nu^2} |F'(j\Omega)| \leq \frac{\pi^2 \lambda M^2}{\sigma \nu^2} \quad (4.74)$$

elde edilir. Bunu izleyen sonuç

$$\sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta, \nu \geq \nu_0} |f(\theta + \tilde{\theta}) - f(\theta)| \leq \frac{\pi^2 \lambda M^2}{\sigma \nu_0^2} \delta \quad (4.75)$$

olur.

$\nu < \nu_0$ olduğunu farzedilsin. O zaman,

$$\sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta, \nu < \nu_0} |f(\theta + \tilde{\theta}) - f(\theta)| \leq 2 \sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta, \nu < \nu_0} f(\theta + \tilde{\theta}) \quad (4.76)$$

bulunur. (4.75) ve (4.76) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$\sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta} |f(\theta + \tilde{\theta}) - f(\theta)| \leq \max \left\{ 2 \sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta, \nu < \nu_0} f(\theta + \tilde{\theta}), \frac{\pi^2 \lambda M^2}{\sigma \nu_0^2} \delta \right\} \quad (4.77)$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \omega_f(\delta) \leq \max \left\{ 2 \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta, \nu < \nu_0} f(\theta + \tilde{\theta}), \frac{\pi^2 \lambda M^2}{\sigma} \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \frac{\delta}{\nu_0^2} \right\} \quad (4.78)$$

olur. (4.78)'de $\nu_0 = \delta^{\frac{1}{3}}$ değeri atansın. Böylece, tüm yeterince küçük δ 'lar için,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \omega_f(\delta) &\leq \max \left\{ 2 \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \sup_{|\tilde{\theta}| \leq \delta, \theta > \pi - \delta^{\frac{1}{3}}} f(\theta + \tilde{\theta}), \frac{\pi^2 \lambda M^2}{\sigma} \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \delta^{\frac{1}{3}} \right\} \\ &\leq \max \left\{ 2 \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \sup_{\theta > \pi - 2\delta^{\frac{1}{3}}} f(\theta), \frac{\pi^2 \lambda M^2}{\sigma} \ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \delta^{\frac{1}{3}} \right\} \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \delta^{\frac{1}{3}} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0),$$

olduğundan dolayı (4.79)'deki ifadenin sağ tarafı

$$\ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \sup_{\theta > \pi - 2\delta^{\frac{1}{3}}} f(\theta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$$

ifadesinin sağlanması şartıyla 0'a yakınsar. Bu da aynı zamanda

$$\ln \left(\frac{\lambda}{\delta^{\frac{1}{3}}} \right) \sup_{\theta > \pi - 2\delta^{\frac{1}{3}}} f(\theta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (4.80)$$

ifadesine eşdeğerdir. $\Omega = \lambda \tan(\frac{\theta}{2})$ iken $f(\theta) = S(\Omega) \rightarrow 0$ ($\theta \rightarrow \pi$); ve $\tan x = x + O(x^3)$ olduğundan dolayı tüm küçük x 'ler için, (4.80) ifadesi

$$S(\Omega) \ln \Omega \rightarrow 0 \quad (\Omega \rightarrow \infty)$$

ifadesinin eşdeğeridir. ◇

Teorem 4.4.2 $S_R(\Omega)$ ve $\mathcal{S}_R^d(\theta; L)$, sırasıyla, Teorem 4.4.1 ve (4.48)'deki gibi tanımlanmış olsun. O zaman, $\mathcal{S}(\sigma, M, \phi)$ üzerinde düzgün bir biçimde

$$\max_{\theta} |S_R(\lambda \tan(\theta/2)) - \mathcal{S}_R^d(\theta; L)| \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty). \quad (4.81)$$

İspat. Teorem 4.4.1 $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ fonksiyonunun Dini-Lipschitz sürekli olduğunu söyler. Dini-Lipschitz sürekli bir fonksiyonun Fourier serisinin bu fonksiyona düzgün yakınsadığı [7] oldukça bilinen bir gerçektir. ◇

$S_R(\Omega)$ fonksiyonu (4.9) eşitliğini sağlarsa Teorem 4.4.1'in şartları yerine getirilmiş olur. Geriye (4.47) ile tanımlanmış serinin düzgün yakınsaklığını kanıtlamak kaldı. Gerçekten, bu durum [1, 2, 37]'de türetilmiş sonuçlardan anlaşılacağı gibi $S_R(\lambda \tan(\frac{\theta}{2}))$ fonksiyonunun Dini-Lipschitz sürekli olması nedeniyle doğru olur. Daha önce bahsedilen makalelerdeki sonuçlar sadece trigonometrik sistemler: $\{e^{jk\theta}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, için geçerli değildir, aynı zamanda, keyfi düzgün sınırlı tabanlar için de geçerlidir. Bu çalışmalarda, bozuk ölçümler durumu da incelenmiş ve çeşitli gürbüzlük (robustness) ve tutarlılık (consistency) özellikleri elde edilmiştir.

4.5 Özet

Bu bölümde, verilmiş skalar değerli spektral verilere, uygun rasyonel modeller üreten Fourier serisi tabanlı tanıyım algoritması sunuldu. Algoritmanın detaylı yakınsama analizi yapıldı. Algoritmanın başarılı uygulaması, tek-iz yol güç spektrumunun rasyonel fonksiyonlarla modellenmesi oldu.

4.6 Algoritma 4.2.1'in MatLab Programı

```
function [numc,denc]=spectrum(freqc,specdn)
% This program computes the spectral factor G(s) from G(jw)G(-jw)
% Inputs:
% freqc: continuous-time frequencies in Hz.
% specdn: power spectrum measurements
% Outputs:
% [numc,denc]: numerator and denominator polynomials.

freqc=freqc*2*pi; % frequencies are converted to rad/sec.
N=size(freqc,1);
'Bilinear map suggested for continuous/discrete conversion'

a=input(' Enter 1 for Tustin and 0 for ZOH: ');

if a==0;
    lambda=max(freqc)
    freqd=pi*freqc/lambda;
    ts=pi/lambda;
    specdata=specdn;
else
```

```

    lambda=input('Enter a frequency warping factor: ');
    freqd=2*atan(freqc/lambda);
    freqd(N+1)=pi;
    specdata=[specdn;0];
    ts=2/lambda;
end

% Impulse Response Estimation (by Fourier Series)
%
% Interpolation
m=input('Enter number of uniformly spaced frequencies: ');
xx=[0:pi/m:pi]';
spectden=interp1(freqd(1:N),specdata(1:N),xx,'linear','extrap');%

% Recovering causal part by FIR modeling followed by balanced
% truncation

S_y=flipud(spectden);
S_yy=[spectden;conj(S_y(2:m))];
foucf=real(iff(S_yy));
f=input('Enter number of impulse response coefficients: ');

Afr=[zeros(f-2,1) eye(f-2);zeros(1,f-1)];
Bfr=[zeros(f-2,1);1];
Cfr=[flipud(foucf(2:f))];
Dfr=[foucf(1)];

% Model reduction by balance truncation

[Afrc,Bfrc,Cfrc,Dfrc]=d2cm(Afr,Bfr,Cfr,Dfr/2,ts,'tustin');
[AM,BM,CM,DM,totbn,hsv]=balmr(Afrc,Bfrc,Cfrc,Dfrc,3);

```

```

[AMd,BMd,CMd,DMd]=c2dm(AM,BM,CM,DM,ts,'Tustin');
[numdc,dendc]=ss2tf(AMd,BMd,CMd,DMd);

% Re-define the denominator if dendc(0)=0;

co=size(AMd,1);
constant=dendc(1,co+1);
if abs(constant) <=1e-7;
    err=input('Enter a shifting factor, recommended 1e-4 : ');
    constant=constant+err;
else
    constant=constant;
end
dendc(1,co+1)=constant;

% Check if numd(0)=0, if so modify in the second loop

for r=1:2;

% Recovering anticausal part

numdac=fliplr(numdc);
dendac=fliplr(dendc);

%S=H(z)+H(z^-1)

[numd,dend]=parallel(numdc,dendc,numdac,dendac);

% Re-define the numerator of the power spectra

co2=size(numd',1);

```

```

constant2=numd(1,co2);
if abs(constant2) <=1e-7;
    err2=input('Enter a shifting factor, recommended 1e-4 : ');
    numdc=numdc+err2*dendc;
else
    numdc=numdc;
end
end

% Spectral Factorization
%

[z,p,gain]=tf2zp(numd,dend);
n=size(p,1)/2;
poles=sort(p);
poles=poles(1:n); % spectral poles
zeross=sort(z);
zeross=zeross(1:n); %spectral zeros
k=gain;

% Projection of non-minimum phase zeros into the unit circle
%
e=1e-5;
for m=1:n
    if abs(zeross(m))>1
        zeross(m)=zeross(m)*((2/abs(zeross(m)))-1);
    elseif abs(zeross(m))==1
        zeross(m)=(1-e)*zeross(m);
    end
end
end

```



```

for t=1:n
    k=k*poles(t)/zeross(t);
end
k=sqrt(abs(k));% the causal transfer fcn gain

[numca,denca]=zp2tf(zeross,poles,k);

% Transformation back-to-continuous time
%
if a==0
[numc,denc]=d2cm(numca,denca,ts,'zoh');
else
[numc,denc]=d2cm(numca,denca,ts,'tustin');
end

% Model and Error Frequency Responses
%
[magc,phasec,freqc]=bode(numc,denc,freqc);
dataes=magc.*exp(i*phasec*pi/180);

%Introducing a roll-off factor

delta=input('Enter delta : ');
n_r=input('Enter the order n_r : ');

% Forming denominator of the factor by binomial eqn
for u=0:n_r
dd(1,u+1)=nchoosek(n_r,u)*(delta)^u;
end
nn=[zeros(1,n_r) delta^n_r];

```

```
[magt,phaset,freqc]=bode(nn,dd,freqc);
dataest=magt.*exp(i*phaset*pi/180);

speces=conj(dataes.*dataest).*(dataes.*dataest);
error=abs(specdn-speces);
loglog(freqc/(2*pi),specdn,'*',freqc/(2*pi),speces,'o', ...
        freqc/(2*pi),error,'.');
xlabel('Wave number (cycle/m)');
ylabel('Spectral density (m^2/cycle/m)');
title('Power Spectrum of Model, Data, and Estimation Error');
legend('Data','Model','Error')
```

Bölüm 5

ALTUZAY-TABANLI SPEKTRUM TANIYIMI

Bazı uygulamalarda ortaya çıkan temel problemlerden biri ölçülmüş güç spektrumu kullanılarak elde edilen çok-girdili/çok-çıkıtlı sistemlerin tanıyımıdır; buna örnek olarak bozucu sinyallerin modellenmesi verilebilir. Pratiksel bir uygulama, Bölüm 3 'te incelenen ileriye doğru hareket eden bir araca etkileyen stokastik yol bozucu sinyallerin modellenmesi olabilir. Bu uygulamada, sağ ve sol izler ile ön ve arka tekerlekler arasındaki korelasyonların dikkate alınması gerektiği hatırlanmalı. Bu bölümde sunulan algoritma bu spektrumun durum-uzay gerçekleştirilmesini verir.

Verilmiş zaman bölgesi ölçümleri için [16, 54, 56, 32]'da birçok durum-uzay altuzayı tanıyım algoritması mevcuttur. Altuzay tanıyım algoritmalarının, klasik öngörü hatası yöntemleri [17] üzerine en büyük avantajı doğrusal olmayan parametrik optimizasyon problemlerinin bulunmamasıdır. Altuzay algoritmaları yinelemeli (iterative) değildir ve bu nedenle yakınsama problemlerinin getirdiği güçlüklerden etkilenmezler. Bu algoritmalar genellikle pratikte kullanılan veriler için iyi sonuçlar üretirler.

Frekans bölgesi verilerinin tanımında kullanılan altuzay tanıyım algoritmaları, zaten [48, 41, 40, 31]'deki literatürde verilmiştir. Bununla birlikte, bu algoritmalar frekans bölgesi güç spektrumu tanıyımı için direkt olarak uygulanabilir değildirler.

Bu bölümde ele alınacak olan problem, verilen ölçülmüş güç spektrumu örneklerine uygun, doğrusal bir kesikli-zaman güç spektrumu bulma problemidir. Bu probleme yapılan parametrik yaklaşım, parametre uzayında doğrusal olmayan bir araştırma ile optimize edilmiş, doğrusal olmayan en küçük kareler ölçütünü kullanır. Bu yaklaşımın dezavantajları, yakınsama problemleridir ve çok-girdili/çok-çıkıtlı sistemlerin parametrize edilmesindeki güçlüklerdir. [33]'ta, düzgün aralıklı frekanslarda elde edilmiş spektrum örneklerini kullanan altuzay algoritması sunulmuştur. [33]'taki algoritma [41]'ya dayanmaktadır; ve sistem matrislerinin fonksiyonları olarak ifade edilen yanlı (biased) sürekli darbe yanıtı katsayılarını kullanır.

Bu bölümdeki amaç frekanslar üzerindeki sınırlamaları kaldırmaktır. Bu bölümde, düzgün aralıklı olmayan frekanslarda ölçülmüş güç spektrumu örneklerinden çok-girdili/çok-çıkıtlı sistemleri tanımlayan altuzay-tabanlı bir algoritma geliştireceğiz. Bu algoritma [33, 55, 46]'teki sonuçlara dayanır. Bu bölümde ele alınan problemin uygulaması, stokastik yol modelleme problemini çözen bir örnek ile gösterilecektir.

5.1 Güç Spektrumu Tanıyımı

Girdi sayısı çıktı sayısına eşit, doğrusal-zamandan bağımsız bir kesikli-zaman sistemi düşünölsün. Bu sistemin durum-uzay denklemleri şöyle verilmiş olsun:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Burada $x(t) \in \mathbf{R}^n$ durum, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ ve $y(t) \in \mathbf{R}^m$ sırasıyla, sistemin girdi ve çıktılarıdır. (5.1)'deki sistemin $G(z)$ ile gösterilen transfer fonksiyonu

$$G(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B\tag{5.2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada I_n , n 'e n 'lik birim matrisidir. $G(z)$ üzerindeki gereklilikler aşağıda özetlenmiştir:

Varsayım 5.1.1 (5.1)'deki sistem kararlı ve kati minimum fazlıdır: A 'nın ve $A - BD^{-1}C$ 'nin tüm özdeğerleri kati bir biçimde birim çember içinde kalır. $\{A, B\}$ ve $\{A, C\}$ çiftleri, sırasıyla denetlenebilir ve gözlenebilirdir. A matrisi tekil değildir.

Böylece, (5.1)'deki sistem minimal stokastik bir sistemdir.

$S(z)$ ile gösterilen, (5.1) ile birleştirilmiş güç spektrumu

$$S(z) = G(z)G^T(z^{-1}) \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır.

(5.1)'deki sisteme yenilenme (innovation) formunda, birim varyanslı, minimum fazlı, $S(z)$ güç spektrumu ile birleştirilmiş spektral çarpım denir. (5.3)'ten ve Varsayım 5.1.1'den,

$$S(e^{j\theta}) > 0, \quad \text{tüm } \theta \text{ değerleri için} \quad (5.4)$$

olduğuna dikkat edilmeli. Bu pozitif gerçeklik şartıdır, ve verilmiş spektrum örnekleri S_k 'lar, yani, her k için $S_k > 0$, üzerinde tanımlanmış güç spektrumu $S(z)$ üzerinde olduğu gibi kısıtlama koyar.

Bu bölümde ele alınan problem şöyle ifade edilebilir:

Verilen: Birim çember üzerinde N noktada hesaplanan güç spektrumu $S(z)$ 'in N tane $S_k \in \mathbf{C}^{m \times m}$ örneği:

$$S_k = S(e^{j\theta_k}), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.5)$$

Bulunacak: (5.1)'deki spektral çarpımı tanımlayan (A, B, C, D) dörtlüsü.

Bu amaca yönelik olarak, $S(z)$ 'i spektral toplam terimleri olarak adlandırılan terimlerine aşağıdaki gibi ayrılın.

Teorem 5.1.1 (5.3)'teki güç spektrumu $S(z)$ düşünülün. Varsayım 5.1.1'in geçerli olduğu farzedilsin. P kesikli-zaman Lyapunov denkleminin çözümü

olsun:

$$P = APA^T + BB^T. \quad (5.6)$$

Ayrıca

$$E = CPC^T + DD^T, \quad (5.7)$$

$$F = APC^T + BD^T \quad (5.8)$$

olarak tanımlansın. O zaman, $S(z)$ iki sistem transfer fonksiyonu matrisinin toplamına şöyle ayrılabilir;

$$S(z) = H(z) + H^T(z^{-1}) \quad (5.9)$$

ve

$$H(z) = \frac{1}{2}E + C(zI_n - A)^{-1}F. \quad (5.10)$$

İspat. Bakınız, mesela, Caines [5].

$S(z)$ 'i nedensel transfer fonksiyonu $H(z)$ ve nedensel olmayan transfer fonksiyonu $H^T(z^{-1})$ 'in toplamına ayırmak altuzay-tabanlı algoritmanın birinci basamağıdır. Aynı zamanda [33]'teki altuzay algoritmasının da başlangıç noktasıdır. [33]'ta olduğu gibi, S_k örneklerini kullanarak spektral toplam terim $H(z)$ 'i tanımlayan $(A, F, C, \frac{1}{2}E)$ dörtlüsü belirlenir. [33]'ta önerilen algoritma, [41]'da olduğu gibi $S(z)$ 'in yanlı Markov parametrelerini kullanır; ve kesikli frekanslar θ_k 'ların, $k = 1, 2, \dots, N$ için $[0, \pi]$ aralığında düzgün aralıklı olmalarını gerektirir. Bu bölümün katkısı frekanslar üzerindeki sınırlamayı kaldırmak şeklinde olacaktır.

Daha sonra, (5.9 ve (5.10))'den $S(z)$ 'in durum-uzay gösterimi aşağıdaki gibi yazılır:

$$x^c(t+1) = Ax^c(t) + Fu(t) \quad (5.11)$$

$$x^{ac}(t-1) = A^T x^{ac}(t) + C^T u(t) \quad (5.12)$$

$$y^s(t) = Cx^c(t) + F^T x^{ac}(t) + Eu(t). \quad (5.13)$$

Bu denklemler, karışık nedensel ve nedensel olmayan doğrusal, zamandan bağımsız sistemlerin zaman bölgesi altuzay tanıyımı için [55]'te dikkate alınan denklemlerinin özel halleridir.

[46] izlenerek, (5.12).inci denklem zamanda $p - 1$ örnek ileri kaydırılarak (5.11)–(5.13) arası denklemlerin Fourier dönüşümleri alınır:

$$e^{j\theta} X^c(\theta) = AX^c(\theta) + FU(\theta) \quad (5.14)$$

$$e^{-j\theta} X^{\text{ac},p}(\theta) = A^T X^{\text{ac},p}(\theta) + C^T e^{j(p-1)\theta} U(\theta) \quad (5.15)$$

$$Y^s(\theta) = CX^c(\theta) + F^T e^{-j(p-1)\theta} X^{\text{ac},p}(\theta) + EU(\theta) \quad (5.16)$$

burada $X^c(\theta)$, $X^{\text{ac},p}(\theta)$, $U(\theta)$, ve $Y^s(\theta)$ sırasıyla, $x^c(t)$, $x^{\text{ac}}(t + p - 1)$, $u(t)$, ve $y(t)$ 'nin kesikli Fourier dönüşümlerini ve $p > 2n$ gösterir. $X_i^c(\theta)$, $U(\theta) = e_i$ olduğu zaman sonuçlanan durum dönüşümü olsun, burada e_i i .inci pozisyon-daki 1 değerli birim vektördür; ve $X_i^{\text{ac},p}(\theta)$ benzer şekilde tanımlanır. Bileşik durum matrislerini tanımlayarak:

$$X_C^c(\theta) = [X_1^c(\theta) \ X_2^c(\theta) \ \dots \ X_m^c(\theta)], \quad (5.17)$$

$$X_C^{\text{ac},p}(\theta) = [X_1^{\text{ac},p}(\theta) \ X_2^{\text{ac},p}(\theta) \ \dots \ X_m^{\text{ac},p}(\theta)],$$

$S(e^{j\theta})$ fonksiyonu

$$e^{j\theta} X_C^c(\theta) = AX_C^c(\theta) + F, \quad (5.18)$$

$$e^{-j\theta} X_C^{\text{ac},p}(\theta) = A^T X_C^{\text{ac},p}(\theta) + C^T e^{j(p-1)\theta}$$

denklemleri ile kapalı bir biçimde şöyle ifade edilebilir:

$$S(e^{j\theta}) = CX_C^c(\theta) + F^T e^{-j(p-1)\theta} X_C^{\text{ac},p}(\theta) + E.$$

Durum denklemlerini yinelemeli bir biçimde yerleştirerek

$$\begin{bmatrix} S(e^{j\theta}) \\ e^{j\theta} S(e^{j\theta}) \\ \vdots \\ e^{j(p-2)\theta} S(e^{j\theta}) \\ e^{j(p-1)\theta} S(e^{j\theta}) \end{bmatrix} = O_p \begin{bmatrix} X_C^c(\theta) \\ X_C^{\text{ac},p}(\theta) \end{bmatrix} + \Gamma_p \begin{bmatrix} I_m \\ e^{j\theta} I_m \\ \vdots \\ e^{j(p-2)\theta} I_m \\ e^{j(p-1)\theta} I_m \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

ilişkisi elde edilir. Burada

$$\mathcal{O}_p = \begin{bmatrix} C & F^T(A^T)^{p-1} \\ CA & F^T(A^T)^{p-2} \\ \vdots & \vdots \\ CA^{p-2} & F^T A^T \\ CA^{p-1} & F^T \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

ve

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} E & F^T C^T & \dots & F^T(A^T)^{p-2} C^T \\ CF & E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & F^T C^T \\ CA^{p-2} F & \dots & CF & E \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (5.19)'u θ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ için tekrar ederek

$$\mathcal{S}_C = \mathcal{O}_p \mathcal{X}_C + \Gamma_p \mathcal{W}_C \quad (5.22)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\mathcal{S}_C = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_N \\ e^{j\theta_1} S_1 & e^{j\theta_2} S_2 & \dots & e^{j\theta_N} S_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(p-1)\theta_1} S_1 & e^{j(p-1)\theta_2} S_2 & \dots & e^{j(p-1)\theta_N} S_N \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{W}_C = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} I_m & I_m & \dots & I_m \\ e^{j\theta_1} I_m & e^{j\theta_2} I_m & \dots & e^{j\theta_N} I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(p-1)\theta_1} I_m & e^{j(p-1)\theta_2} I_m & \dots & e^{j(p-1)\theta_N} I_m \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\mathcal{X}_C = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} X_C^c(\theta_1) & \dots & X_C^c(\theta_N) \\ X_C^{\text{ac},p}(\theta_1) & \dots & X_C^{\text{ac},p}(\theta_N) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

\mathcal{O}_p gerçekte bir matris olduğundan dolayı ve gerçekte açıklık uzayı ile ilişkilendirildiği için, (5.22) sadece gerçekte değerli matrisleri içeren bir ilişkiye dönüştürülür:

$$\mathcal{S} = \mathcal{O}_p \mathcal{X} + \Gamma_p \mathcal{W} \quad (5.26)$$

burada

$$\mathcal{S} = [\text{Re } \mathcal{S}_C \quad \text{Im } \mathcal{S}_C], \quad (5.27)$$

$$\mathcal{X} = [\text{Re } \mathcal{X}_C \quad \text{Im } \mathcal{X}_C], \quad (5.28)$$

$$\mathcal{W} = [\text{Re } \mathcal{W}_C \quad \text{Im } \mathcal{W}_C] \quad (5.29)$$

olarak tanımlanır.

\mathcal{W}^\perp , \mathcal{W} 'nin boşluk uzayı üzerindeki izdüşümü olsun ve

$$\mathcal{W}^\perp = I_{2N} - \mathcal{W}^H (\mathcal{W} \mathcal{W}^H)^{-1} \mathcal{W} \quad (5.30)$$

olarak verilsin. (5.26)'daki $\Gamma_p \mathcal{W}$ terimi sağdan \mathcal{W}^\perp ile çarpıldığında sadeleşir.

Böylece geriye

$$\mathcal{S} \mathcal{W}^\perp = \mathcal{O}_p \mathcal{X} \mathcal{W}^\perp \quad (5.31)$$

eşitliği kalır. Bunun sonucunda $\mathcal{S} \mathcal{W}^\perp$ 'nin açıklık uzayı ile \mathcal{O}_p 'nin açıklık uzayının eşit olduğu görülür. Bir önceki ifadenin açıklık uzayı tekil değer ayrışımından bulunur:

$$\mathcal{S} \mathcal{W}^\perp = U_{2n} \Sigma_{2n} V_{2n}^T. \quad (5.32)$$

Bu durumda, $\mathcal{S} \mathcal{W}^\perp$ 'nin açıklık uzayı U_{2n} 'nin sütun vektörleri tarafından gerilir. Bu nedenle, (5.31) ve (5.32)'den, tekil olmayan T matrisi için:

$$U_{2n} = \mathcal{O}_p T \quad (5.33)$$

eşitliği bulunur.

J_u ve J_d yukarıya ve aşağıya doğru öteleyen matrisler olsun ve

$$J_u \mathcal{O}_p = \begin{bmatrix} CA & F^T (A^T)^{p-2} \\ \vdots & \vdots \\ CA^{p-2} & F^T A^T \\ CA^{p-1} & F^T \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$J_d \mathcal{O}_p = \begin{bmatrix} C & F^T (A^T)^{p-1} \\ \vdots & \vdots \\ CA^{p-2} & F^T A^T \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$J_u \mathcal{O}_p = J_d \mathcal{O}_p A' \quad (5.36)$$

eşitliği bulunur ve burada

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

şeklinde tanımlanır. (5.36)'dan

$$A' = (J_d \mathcal{O}_p)^\dagger J_u \mathcal{O}_p = T A'' T^{-1} \quad (5.38)$$

olarak bulunur. Burada $M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$, tam sütun ranklı M matrisinin Moore-Penrose tersidir ve

$$A'' = (J_d U_{2n})^\dagger J_u U_{2n} \quad (5.39)$$

elde edilir. (5.38)'den, A' ve A'' 'nin benzer matrisler olduğu görülür. Bu da, bu iki matrisin *Jordan* kanonik gösterimlerinde aynı *Jordan* blokların bulunduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, (5.20) ve (5.33)'ten,

$$C' = [C \ F^T (A^T)^{p-1}] = J_f \mathcal{O}_p = C'' T^{-1} \quad (5.40)$$

elde edilir. Burada,

$$J_f = [I_m \ 0_{m \times (p-1)}], \quad (5.41)$$

$$C'' = J_f U_{2n} \quad (5.42)$$

olarak tanımlanmıştır.

A'' aşağıdaki *Jordan* kanonik formda gösterilsin:

$$A'' = [\Pi_c \ \Pi_{ac}] \begin{bmatrix} \Sigma_c & 0 \\ 0 & \Sigma_{ac} \end{bmatrix} [\Pi_c \ \Pi_{ac}]^{-1} \quad (5.43)$$

burada Σ_c 'nin özdeğerleri birim çember içinde kalır. $H(z)$ benzeşim dönüşümlerine karşı değişmez kaldığı için, (5.1)'de $A = \Sigma_c$ olmasına izin verilebilir. O

zaman, $\Sigma_{ac} = (\Sigma_c^T)^{-1}$. Bu, beklendiği gibi, T 'yi kesin bir yapıda olmaya zorlar.

$$\Pi = [\Pi_c \ \Pi_{ac}] \quad (5.44)$$

olsun. O zaman, (5.43)

$$A' = \Pi^{-1} A'' \Pi \quad (5.45)$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece (5.38) ve (5.45)'ten

$$A' = T A'' T^{-1} = \Pi^{-1} A'' \Pi \quad (5.46)$$

ifadesi bulunur. Bu ifade, T^{-1} 'in sütun vektörlerinin A'' 'nin özvektörleri olduğunu gösterir. $2n$ serbest elemanlı blok-diyagonal matrisi Λ için:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_c & 0 \\ 0 & \Lambda_{ac} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

aşağıda belirtilen Π ve T arasındaki ilişki geçerlidir:

$$\Pi = T^{-1} \Lambda. \quad (5.48)$$

Şimdi, (5.33) sağdan Π ile çarpılarak,

$$U_{2n} \Pi = \mathcal{O}_p \Lambda \quad (5.49)$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle, (5.20), (5.44), ve (5.47)'den

$$U_{2n} \Pi_c = \begin{bmatrix} C \Lambda_c \\ C \Sigma_c \Lambda_c \\ \vdots \\ C \Sigma_c^{p-2} \Lambda_c \\ C \Sigma_c^{p-1} \Lambda_c \end{bmatrix}, \quad U_{2n} \Pi_{ac} = \begin{bmatrix} F^T (\Sigma_c^T)^{p-1} \Lambda_{ac} \\ F^T (\Sigma_c^T)^{p-2} \Lambda_{ac} \\ \vdots \\ F^T \Sigma_c^T \Lambda_{ac} \\ F^T \Lambda_{ac} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

matrisleri elde edilir ve böylece

$$C \Lambda_c = J_f U_{2n} \Pi_c, \quad F^T \Lambda_{ac} = J_1 U_{2n} \Pi_{ac} \quad (5.51)$$

eşitlikleri bulunur. Burada

$$J_1 = [0_{m \times (p-1)} \quad I_m] \quad (5.52)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece C , F , ve E durum-uzay matrislerini bulma problemi şimdi, (5.9)'daki spektral verilerden E , Λ_c , ve Λ_{ac} matrislerini kestirme problemine indirgenmiş olur.

Geri kalan kısım için, A 'nın özdeğerlerinin farklı olduğu basitleştirici varsayımını yaparız. Jordan kanonik formu sayısal olarak kararlı olmadığı için, A 'ya uygulanacak küçük bir düzensiz etki ile bu şart yerine getirilmiş olacak. Bu varsayımın anlamı Σ_c , Σ_{ac} , Λ_c , ve Λ_{ac} 'nin blok-diyagonal matrisler oldukları ve bloklarının uyumlu boyutlarda ve iki farklı formda bulunabileceğidir:

$$\mu \in \mathbf{R}, \quad \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}. \quad (5.53)$$

Eğer $X \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ve $Y \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ yukarıdaki ikinci formda bulunan iki matris ise, o zaman X^T , XY ve X^{-1} 'nin de ikinci formda bulunduğunu ve $XY = YX$ eşitliğini doğrulamak oldukça kolaydır. Bu nedenle, (5.9) daki $S(z)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} S(z) &= E + C\Lambda_c \left\{ \Lambda_c^{-1}(z\Lambda_{ac}^T - \Lambda_{ac}^T\Sigma_c)^{-1} \right\} \Lambda_{ac}^T F \\ &\quad + F^T \Lambda_{ac} \left\{ (z^{-1}\Lambda_{ac} - \Sigma_c^T \Lambda_{ac})^{-1} (\Lambda_c^T)^{-1} \right\} \Lambda_c^T C^T \\ &= E + J_f U_{2n} \Pi_c \left\{ \Lambda_c^{-1}(z\Lambda_{ac}^T - \Sigma_c \Lambda_{ac}^T)^{-1} \right\} [J_1 U_{2n} \Pi_{ac}]^T \\ &\quad + J_1 U_{2n} \Pi_{ac} \left\{ (z^{-1}\Lambda_{ac} - \Lambda_{ac} \Sigma_c^T)^{-1} (\Lambda_c^T)^{-1} \right\} [J_f U_{2n} \Pi_c]^T \\ &= E + J_f U_{2n} \Pi_c \left[\Lambda_{ac}^T \Lambda_c \right]^{-1} (zI_n - \Sigma_c)^{-1} [J_1 U_{2n} \Pi_{ac}]^T \\ &\quad + J_1 U_{2n} \Pi_{ac} (z^{-1}I_n - \Sigma_c^T)^{-1} \left[\Lambda_c^T \Lambda_{ac} \right]^{-1} [J_f U_{2n} \Pi_c]^T. \end{aligned}$$

$\hat{A} = \Sigma_c$ ve

$$\Lambda_{c|ac} = \left[\Lambda_{ac}^T \Lambda_c \right]^{-1}; \quad (5.54)$$

$$\chi = J_f U_{2n} \Pi_c; \quad (5.55)$$

$$V_k = \left(e^{j\theta_k} I_n - \hat{A} \right)^{-1} [J_1 U_{2n} \Pi_{ac}]^T, \quad k = 1, \dots, N; \quad (5.56)$$

olsun. $\Lambda_{c|ac}$ 'nin blokları ile Σ_c 'nin bloklarının uyumlu olduğuna dikkat edilmeli. O zaman,

$$S_k = E + \chi \Lambda_{c|ac} V_k + V_k^H \Lambda_{c|ac}^T \chi^T, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.57)$$

ifadesi E ve $\Lambda_{c|ac}$ 'ye göre doğrusal bir denklemdir. Böylece, E ve $\Lambda_{c|ac}$ 'nin n -bilinmeyeni aşağıda gösterilen doğrusal en küçük-kareler probleminin çözülmesiyle bulunabilir:

$$\hat{E}, \hat{\Lambda}_{c|ac} = \arg \min_{E, \Lambda_{c|ac}} \sum_{k=1}^N \|S_k - E - \chi \Lambda_{c|ac} V_k - V_k^H \Lambda_{c|ac}^T \chi^T\|_F^2. \quad (5.58)$$

Burada V_k^H , V_k 'nin transpozesi alınmış kompleks eşleniğidir ve $\|A\|_F = [\text{Tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$, A 'nın Frobenius normudur. A 'nın izi $\text{Tr}(A) = \sum_k A_{kk}$ ile tanımlanır.

En küçük-kareler minimizasyon probleminde, $C\Lambda_c$ ve $F^T\Lambda_{ac}$ hesaplamalarında olduğu gibi, verilmiş gürültü kovaryans bilgisini de dahil etmek mümkündür. Detaylar [41]'da bulunabilir.

$\hat{\Lambda}_{c|ac}$ bulunduktan sonra, \hat{C} ve \hat{F} (5.51)'den şöyle hesaplanır:

$$\hat{C} = J_f U_{2n} \Pi_c, \quad \hat{F} = \hat{\Lambda}_{c|ac} [J_1 U_{2n} \Pi_{ac}]^T. \quad (5.59)$$

Bu ifade (5.10) ile tanımlanmış $H(z)$ 'in, Λ_c ile sondan çarpılmış C 'ye ve Λ_c^{-1} ile baştan çarpılmış F 'ye göre değişmez olduğu gerçeğine uygundur.

Şimdi, B ve D sistem matrislerinin belirlenmesi ile ilgilenilecektir. Önce, aşağıdaki *Riccati* denklemi P için çözülsün:

$$P = \hat{A}P\hat{A}^T + (\hat{F} - \hat{A}P\hat{C}^T)(\hat{E} - \hat{C}P\hat{C}^T)^{-1}(\hat{F} - \hat{A}P\hat{C}^T)^T. \quad (5.60)$$

Daha sonra, \hat{B} ve \hat{D} şöyle elde edilir:

$$\hat{B} = (\hat{F} - \hat{A}P\hat{C}^T)(\hat{E} - \hat{C}P\hat{C}^T)^{-\frac{1}{2}}; \quad (5.61)$$

$$\hat{D} = (\hat{E} - \hat{C}P\hat{C}^T)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.62)$$

Algoritmanın son şekli aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Algoritma 5.1.1 *Düzgün aralanmamış spektrum örnekleri ile altuzay algoritması:*

1. SW^\perp 'yi (5.30), (5.29), (5.27), (5.24), ve (5.23)'den hesaplayın.
2. U_{2n} 'i (5.32)'deki tekil değer ayrışımından bulun.
3. (5.34) ve (5.35) ile tanımlanmış J_u ve J_d ile (5.39)'teki A'' 'i tanımlayın.
4. A'' 'yi (5.43)'teki gibi blok-diagonal hale getirin ve $\hat{A} = \Sigma_c$ olarak kabul edin.
5. Doğrusal en küçük-kareler problemi (5.58)'i, \hat{E} ve $\hat{\Lambda}_{c|ac}$ için çözün, burada χ ve $V(z)$ (5.55), (5.56), (5.43), (5.41), ve (5.52) aracılığı ile tanımlanmıştır; ve \hat{E} ve $\hat{\Lambda}_{c|ac}$ 'deki bilinmeyenler \mathbf{R}^{m^2+n} 'deki bir vektöre yığılmıştır.
6. \hat{C} ve \hat{F} 'yi (5.59)'den hesaplayın.
7. Riccati denklemi (5.60)'i çözün ve \hat{B} ve \hat{D} 'yi (5.61) ve (5.62)'den belirleyin.

(5.1)'deki spektral çarpım şöyle verilmiştir:

$$\hat{G}(z) = \hat{D} + \hat{C}(zI_n - \hat{A})^{-1}\hat{B}. \quad (5.63)$$

Yukarıdaki analiz, $S(z) = \hat{G}(z)\hat{G}(z)^T$ ölçümlerinin gürültü ile bozulmamış olmasını ve sistemin bilinen dereceden sonlu-boyutlu olması gerektiğini göstermiştir. Gürültünün varlığı ve modellenemeyen dinamik Σ_c 'deki bazı özdeğerlerin birim çembere doğru kaymasına ve Σ_c ile Σ_{ac} arasındaki simetrisinin bozulmasına neden olabilir.

Şimdi S_k spektral verilerinin

$$S_k = S(e^{j\theta_k}) + \eta_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.64)$$

şeklinde bozulduğu farzedilsin. Burada η_k uygun dereceden momentleri olan sıfır-ortalama değerli kompleks beyaz-gürültü sürecidir. [41]'daki sonuçlara göre, yukarıda verilen algoritma *kuvvetli bir biçimde tutarlıdır*. Buna [33]'ta düzgün aralıklı frekanslar için işaret edilmişti. Benzer bir yargıya sonsuz-boyutlu sistemler için, [40]'te elde edilmiş sonuçlar kullanılarak ulaşılabilir.

Değinilmesi gereken başka bir nokta ise, güç spektrumunun pozitif olması gerektiğidir. Fiziksel anlamlı herhangi bir güç spektrumu pozitif gerçek olmalıdır. Yukarıda verilen algoritma ile kestirilen güç spektrumu gürültü ve modellenemeyen dinamiğe bağlı olarak bu gereği yerine getiremeyebilir. Bu gereklilik kendini (5.60).ıncı denklemin pozitif belirli bir çözümünün var olması ile gösterir. Eğer pozitif-belirli bir çözüm yoksa, spektrumun pozitif olma gereği sonradan yerine getirilir. Bunu sağlayan birçok yöntem vardır. Pozitivite şartı (5.4)'ü yerine getiren iki yöntem, [33]'ta özetlenmiştir. Bu yöntemler, hiçbir değişiklik yapılmadan Algoritma 5.1.1 ile bütünleştirilebilirler.

5.2 Stokastik Yol Modelleme Örneği

Bu bölümde, Algoritma 5.1.1, yol spektrumunun düşük dereceli rasyonel bir spektrum ile modellenmesinde [43] kullanılacaktır. Bölüm 3'te olduğu gibi, sürekli-zaman kestirim problemi, kesikli-zaman problemine (4.27)'deki çift doğrusal haritalama yöntemi kullanılarak dönüştürülür.

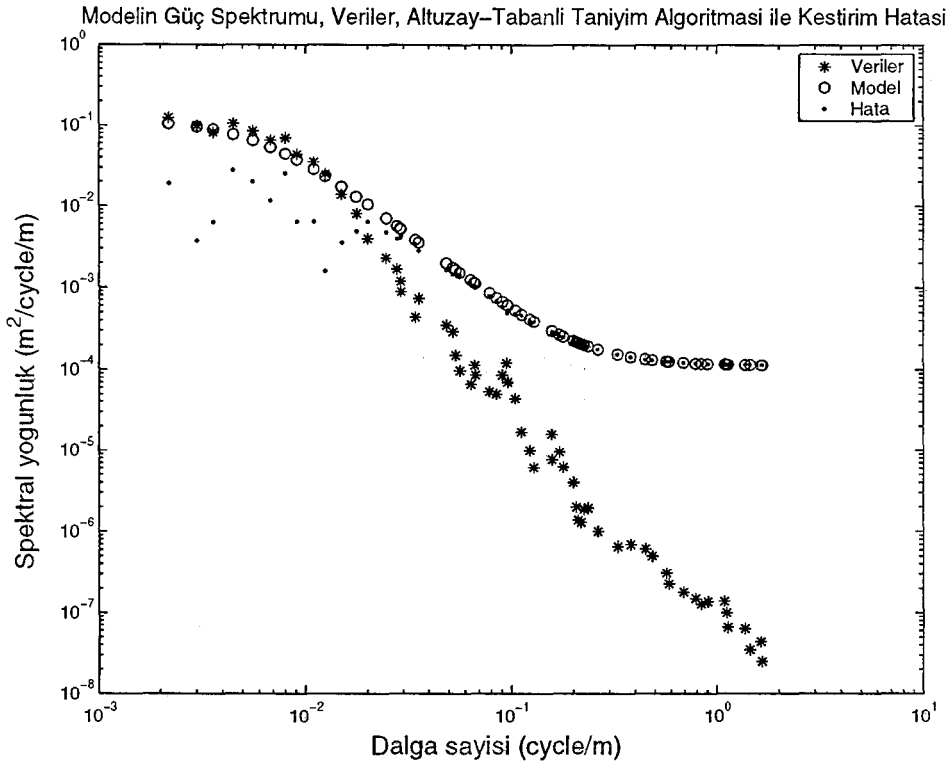
Veri sayısı $N = 63$ 'tür. Algoritma 5.1.1'de, $\lambda = 0.2$ ve $p = 32$ değerleri alındı. Model derecesi $n = 1$ olarak seçilmiştir. Bu seçim $\Sigma_c = 0.6752$ ve $\Sigma_{ac} = 1.4667$ ile sonuçlandı. $(\Sigma_c^T)^{-1} = 1.4810 \simeq 1.4667$ olduğuna dikkat edilmeli. Bu durum nedensel ve nedensel olmayan özdeğerlerin birim çembere göre simetrisini yansıtır. Daha yüksek model derecelerinde bu simetrisinin kaybolduğu gözlemlendi. Sürekli-zaman spektral çarpımı, kesikli-zaman spektral

çarpımında z yerine $z = \psi^{-1}(s)$ yazılarak geri elde edilir. Böylece

$$\hat{G}(s) = 0.0106 \frac{s + 1.2613}{s + 0.0387} \quad (5.65)$$

olarak bulunur.

Şekil 5.1’de, (5.65)’in çıktı spektrumu ve kestirim hatası yol verileri ile karşılaştırılmıştır. Bu şekil bize Algoritma 5.1.1 ile üretilen birinci dereceden rasyonel filtrenin 0.02 cycles/m’ye kadar doğru olduğunu gösterir.



Şekil 5.1: $\hat{S}_R(\tilde{\omega})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 5.1.1’den elde edilen 1.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi

Bu sonucu yorumlamak için, aracın süspansiyon band genişliğinin 10 Hz ve aracın ileri hızının 30 m/s olduğu varsayalım. (Aracın frekans yanıtı en az 20 dB/dec ile sönümlenir). Bu da Şekil 4.1’deki 1/3 cycles/m spektral band genişliğine karşılık gelir. Yol güç spektrumu hızlı bir biçimde azaldığı için, (5.65)’teki birinci derece modelinin iyi bir birinci derece yaklaşımı olduğu

sonucuna varılabilir. (5.65)'teki güç spektrumu integralinin alınabilir olmadığına dikkat edilmeli. Yüksek frekanslarda frekans yanıtını azaltan bir yakınsama faktörü tanımlanabilir. Kestirilmiş güç spektrumu, band-sınırlı frekans yanıtına sahip aracın yanıtını önceden tahmin etmede kullanılacağı için, bu değişiklik pratikte gerekli değildir.

5.3 Özet

Bu bölümde, düzgün aralıklı olmayan frekanslarda ölçülmüş güç spektrumu verilerinden, çok-girdili/çok-çıkıtlı, kesikli-zaman, doğrusal, zamandan bağımsız sistemlerin tanıyımı için kullanılan bir altuzay algoritması sunuldu. Algoritma uygulamalı bir örnekte kullanıldı.

5.4 Algoritma 5.1.1'in MatLab Programı

```
function [numc,denc]=sbspace(freqc,specdn)
% This program computes the spectral factor G(s) from G(jw)G(-jw) using
% subspace-based identification algorithm
% Inputs:
% freqc: continuous-time frequencies in Hz.
% specdn: power spectrum
% Outputs:
% [numc,denc]: numerator and denominator polynomials.

freqc=freqc*2*pi; % cycle/m is converted to units in Hz.
spec=specdn; % power spectrum samples
N=size(freqc,1);
'We use a bilinear map for continuous-to-discrete-time conversion '

% Continuous-to-discrete-conversion
lambda=input('Enter a frequency warping factor for bilinear map: ');
freqd=2*atan(freqc/lambda);
ts=2/lambda; % sampling period

p=input('Enter the row size of the Hankel matrix: ');

frdvec=exp(j*freqd);
Wv=vander(frdvec);
WcN=(1/sqrt(N))*rot90(Wv);
Wc=WcN(1:p,:); % scaled block Vandermonde matrix W_C

Sr=kron(ones(p,1),spec');
% matrix S_C
```

```

Sc=Sr.*Wc;

W=[real(Wc) imag(Wc)];
S=[real(Sc) imag(Sc)];

Wperp=eye(2*N)-W'*inv(W*W')*W;
SWperp=S*Wperp;

% Singular value decomposition of Hankel matrix

[U,S,V]=svd(SWperp);
plot(diag(S),'x'); title('Singular values');
'Halved index of the most significant singular value indicates
model order'
n=input('Enter model order: ');

U2n=U(:,1:2*n);

% Shift matrices
Ju=[zeros(p-1,1) eye(p-1)];
Jd=[eye(p-1) zeros(p-1,1)];
Jf=[1 zeros(1,p-1)];
Jl=[zeros(1,p-1) 1];

Aprpr=pinv(Jd*U2n)*(Ju*U2n); % matrix A''
[Pi,Sigma]=eig(Aprpr);
xso=diag(Sigma);
[So,ix]=sort(xso);

% Increase model order to split complex eigenvalue pairs

```

```

while abs(So(n)) == abs(So(n+1))
    n=n+1; %
    U2n=U(:,1:2*n);
    Ju=[zeros(p-1,1) eye(p-1)];
    Jd=[eye(p-1) zeros(p-1,1)];
    Jf=[1 zeros(1,p-1)];
    Jl=[zeros(1,p-1) 1];
    Aprpr=pinv(Jd*U2n)*(Ju*U2n);
    [Pi,Sigma]=eig(Aprpr);
    xso=diag(Sigma);
    [So,ix]=sort(xso);
end

% Ordered complex-diagonal form of A''

Pcx=Pi(:,ix(1:n)); % causal eigenvectors
Scx=So(1:n); % causal eigenvalues
Sacx=So(2*n:-1:n+1); % anticausal eigenvalues
Pacx=Pi(:,ix(n+1:2*n)); % anticausal eigenvectors

%Guaranteeing stability for the poles of A

for m=1:n
    if abs(Scx(m,1))>1&abs(Scx(m,1))<=2
        Scx(m,1)=Scx(m,1)*((2/abs(Scx(m,1)))-1);
    else if abs(Scx(m,1))==1
        Scx(m,1)=0.999*Scx(m,1);
    end
end
end
end

```

```
% Ordered block-diagonal form of A''
```

```
indxc=[];
```

```
k=1;
```

```
% Block sizes stored in indxc
```

```
while k <= n
```

```
    if imag(Scx(k)) == 0
```

```
        indxc=[indxc 1];
```

```
        k=k+1;
```

```
    else
```

```
        indxc=[indxc 2];
```

```
        k=k+2;
```

```
    end
```

```
end
```

```
nbc=size(indxc,2);
```

```
indxac=[];
```

```
k=1;
```

```
% Block sizes stored in indxac
```

```
while k <= n
```

```
    if imag(Sacx(k)) == 0
```

```
        indxac=[indxac 1];
```

```
        k=k+1;
```

```
    else
```

```
        indxac=[indxac 2];
```

```
        k=k+2;
```

```

    end
end

nbac=size(indxac,2);

% Forming A
l=0;
for k=1:nbc,
    if indxc(k) == 1
        Sigmac(l+1,l+1)=Scx(l+1);
        Pic(:,l+1)=Pcx(:,l+1);
        l=l+1;
    else
        Sigmac(l+1,l+1)=real(Scx(l+1));
        Sigmac(l+1,l+2)=-imag(Scx(l+1));
        Sigmac(l+2,l+1)=imag(Scx(l+1));
        Sigmac(l+2,l+2)=Sigmac(l+1,l+1);
        Pic(:,l+1)=real(Pcx(:,l+1));
        Pic(:,l+2)=imag(Pcx(:,l+2));
        l=l+2;
    end
end

% Forming A^-T
l=0;
for k=1:nbac,
    if indxac(k) == 1
        Sigmaac(l+1,l+1)=Sacx(l+1);
        Piac(:,l+1)=Pacx(:,l+1);
        l=l+1;
    else

```

```

        Sigmaac(l+1,l+1)=real(Sacx(l+1));
        Sigmaac(l+1,l+2)=-imag(Sacx(l+1));
        Sigmaac(l+2,l+1)=imag(Sacx(l+1));
        Sigmaac(l+2,l+2)=Sigmaac(l+1,l+1);
        Piac(:,l+1)=real(Pacx(:,l+1));
        Piac(:,l+2)=imag(Pacx(:,l+2));
        l=l+2;
    end
end

C=Jf*U2n*Pic;
F=(Jl*U2n*Piac)';
A=Sigmac;

for k=1:N,
    Vz(:,k)=inv(frdvec(k)*eye(n)-Sigmac)*F;
end

l=0;

% Least squares solution
for q=1:N,

    for k=1:nbc,
        if indxc(k) == 1
            ALS(q,l+1)=C(l+1)*Vz(l+1,q);
            l=l+1;
        else
            ALS(q,l+1)=C(l+1:l+2)*eye(2)*Vz(l+1:l+2,q);
            ALS(q,l+2)=C(l+1:l+2)*[0 -1;1 0]*Vz(l+1:l+2,q);
        end
    end
end

```

```

        l=l+2;
    end
end
l=0;
end

ALS=2*real(ALS);

Aes=[ALS ones(N,1)];

xes=pinv(Aes)*spec;

E=xes(n+1);

l=0;

for k=1:nbc,
    if indxc(k) == 1
        Sigp(l+1,l+1)=xes(l+1);
        l=l+1;
    else
        Sigp(l+1,l+1)=xes(l+1);
        Sigp(l+1,l+2)=-xes(l+2);
        Sigp(l+2,l+1)=xes(l+2);
        Sigp(l+2,l+2)=xes(l+1);
        l=l+2;
    end
end
end

F=Sigp*F;

```



```

%Recovering causal part
[numdc,dendc]=ss2tf(A,F,C,E/2);

%Recovering anticausal part
numdac=fliplr(numdc);
dendac=fliplr(dendc);

%S=H(z)+H(z^-1)
[numd,dend]=parallel(numdc,dendc,numdac,dendac);

[z,po,gain]=tf2zp(numd,dend);
nn=size(po,1)/2;
poles=sort(po);
poles=poles(1:nn);
zeross=sort(z);
zeross=zeross(1:nn);
kk=gain;
e=1e-5;

%Projecting nonminimum phase zeros into unit circle
for m=1:nn
    if abs(zeross(m))>1
        zeross(m)=zeross(m)*((2/abs(zeross(m)))-1);
    elseif abs(zeross(m))==1
        zeross(m)=(1-e)*zeross(m);
    end
end

for t=1:nn
    kk=kk*poles(t)/zeross(t);
end

```

```

% the causal transfer fcn gain
kk=sqrt(abs(kk));

[numca,denca]=zp2tf(zeros,poles,kk);

% Transformation back-to-continuous time
[numc,denc]=d2cm(numca,denca,ts,'tustin');

% Model and Error Frequency Responses
%
[magc,phasec,freqc]=bode(numc,denc,freqc);
dataes=magc.*exp(i*phasec*pi/180);
speces=conj(dataes).*dataes;
error=abs(spec-speces);
loglog(freqc/(2*pi),spec,'*',freqc/(2*pi),speces,'o',
        freqc/(2*pi),error,'.');
xlabel('Wave number (cycle/m)');
ylabel('Spectral density (m^2/cycle/m)');
title('Power Spectrum of Model, Data,
        Estimation Error by Subspace-Based Id Algorithm');
legend('Data','Model','Error')

```

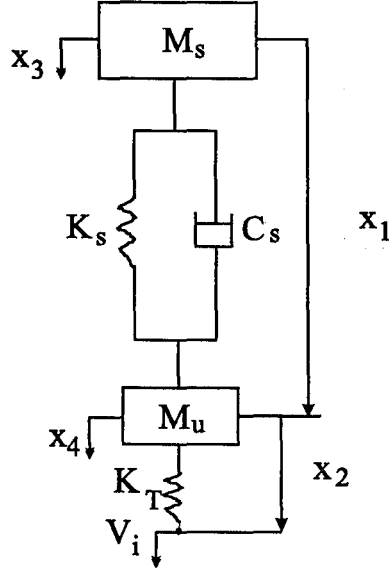
Bölüm 6

ÇEYREK-ARAÇ MODELİ

Bu bölümde, rassal yol girdilerine karşı aracın yanıtını inceleyen, çeyrek-arac modelini kullanılacak. İlk olarak, doğrusal iki serbestlik derecesine sahip araç modeli gözden geçirilecektir. Daha sonra aracın, beyaz-gürültü veya renkli-gürültü hız girdileri olarak ele alınacak olan rassal yol bozucu etkenlere karşı yanıtı analiz edilecektir. Çeyrek-arac gösteriminin, aracın sürüş hareketlerinin kapsamlı analizini gerçekleştirmede çok basit kaldığı görülmektedir. Bununla birlikte, bu basitleştirilmiş gösterim ile analizi çok karmaşık hale getirmeden probleme karşı belli bir bakış açısı kazanılabilir.

6.1 Durum-Uzay Formundaki Hareket Denklemleri

İki serbestlik derecesine sahip çeyrek-arac modeli Şekil.6.1'de gösterilmiştir. Bu modelde, aracın bir köşesine ait salınabilen kütle (sprung mass) ve salınmayan kütle (unsprung mass), m_s ve m_u ile gösterilir. Süspansiyon sistemi, K_s sertliğine sahip doğrusal bir yay ve sönümleme katsayısı C_s olan doğrusal bir sönümleyici ile gösterilirken, lastik K_T sertliğine sahip doğrusal bir yay ile modellenir. Lastikteki sönümleme genelde çok küçük olduğu için



Şekil 6.1: Bir taşıtın çeyrek-araç modeli

bu çalışmada ihmal edilecektir. Bu çalışmada seçilen parametre değerleri Tablo 6.1'de [6] gösterilmiştir. Bu parametreler hafif sönümlü yolcu araçları için genel değerlerdir.

Çizelge 6.1: Çeyrek-araç modeli için araç parametre değerleri

Salmabilen kütle	m_s	240 kg
Salmamayan kütle	m_u	36 kg
Sönümlenme katsayısı	C_s	980 Ns/m
İkincil süspansiyon sertlik katsayısı	K_s	16,000 N/m
Birincil süspansiyon sertlik katsayısı	K_T	160,000 N/m

Aracın rassal bir yol yüzeyi üzerinde sabit ileri bir hızla yol aldığı varsayılır. Aynı zamanda lastiğin, yol ile daima temas halinde bulunan nokta-temas izleyicisi olarak davrandığı varsayılır. O zaman durum-uzay formunda yazılmış hareket denklemleri şöyle gösterilir:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_s}{m_s} & 0 & -\frac{C_s}{m_s} & \frac{C_s}{m_s} \\ \frac{K_s}{m_u} & -\frac{K_T}{m_u} & \frac{C_s}{m_u} & -\frac{C_s}{m_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_i \\
&= Ax + BV_i.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Burada V_i hız girdisidir ve durum değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

- x_1 : salınabilen ve salınamayan kütleler arasındaki uzaklık (süspansiyon deformasyonu);
- x_2 : salınamayan kütle ve yol yüzeyi arasındaki uzaklık (lastik deformasyonu);
- x_3 : salınabilen kütlelerin mutlak hızı;
- x_4 : salınamayan kütlelerin mutlak hızı.

Temel olarak titreşim yalıtımı, süspansiyon deformasyonu ve aracın yol tutuş karakteristikleri ile ilgilenilir. Buradan, incelenmesi gereken araç yanıt değişkenleri şöyle tanımlanabilir:

- \dot{x}_3 : salınabilen kütlelerin düşey ivmesi;
- x_1 : süspansiyon deformasyonu;
- x_2 : lastik deformasyonu.

Böylece çıktı, durum vektörü cinsinden şöyle ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
y &= \begin{bmatrix} -\frac{K_s}{m_s} & 0 & -\frac{C_s}{m_s} & \frac{C_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
&= Cx.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Yolcu konforu, \dot{x}_3 'ün mümkün olduğu kadar küçük olmasını gerektirir.

Sönümleyici ve yay ünitesinin yerleştirilmesi için ihtiyaç duyulan dingil ve şase arasındaki mesafeyi küçük tutma isteği, direksiyon manevraları sırasında gerekli olan iyi kullanım özellikleri ve iyileştirilmiş yol tutuş kalitesi x_1 ve x_2 'nin küçük değerler almasını gerektirir. Şekil 6.1'deki yolcu süspansiyon konfigürasyonu ile bu hedeflere aynı anda ulaşılamayacağı bilinen bir gerçektir. Viraj alma sırasında araç santrifüj kuvvetlerinin etkisinde kalır. Santrifüj kuvvetleri aracın yalpalamasına neden olur. Yalpalamayı kabul edilebilir seviyelerde tutabilmek için, K_s yeterince büyük seçilmelidir. Böylece, bir optimizasyon çalışmasında değiştirilebilecek tek parametre olarak C_s kalır: C_s 'i azaltmak, x_1 ve x_2 'yi artırırken, x_3 'ü azaltır. Bununla birlikte Şekil 6.1'deki pasif süspansiyon yerine aktif veya yarı-aktif süspansiyon kullanılarak çatışan bu üç hedefe belli bir dereceye kadar ulaşılabilir.

6.2 Frekans Yanıtı Çizimleri

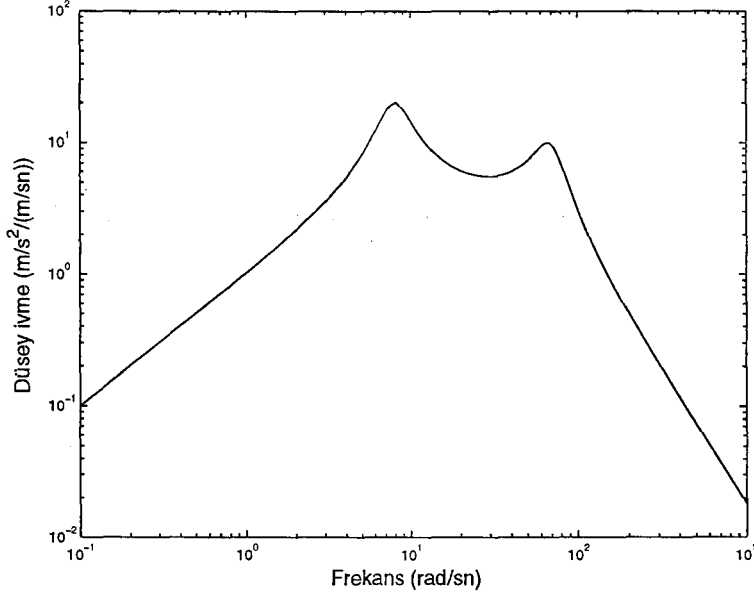
Düşey ivmenin, süspansiyon deformasyonu ve lastik deformasyonunun genlik frekans yanıtları Şekil 6.2–6.4'te çizilmiştir. (6.1)'den, birinci ve ikinci modların doğal frekansları sırasıyla 7.85 ve 69.27 rad/s olarak hesaplanır; ve sönümleme oranları da 0.2178 ve 0.2012 olarak bulunur.

Süspansiyonun, salınabilen kütlede, yaydan ve sönümleyici'den oluşan bölümüne *ikincil süspansiyon* denir. İkincil süspansiyonun karakteristik denklemi şöyledir:

$$m_s s^2 + C_s + K_s = 0 \quad (6.3)$$

Bu sürme hareketinin *yukarı çekme (heave)* modudur. (6.3)'ten, sönümleme oranını ve yukarı çekme modunun doğal frekansını sırasıyla 0.25 ve 8.16 rad/s olarak kestirilir.

Salınamayan kütle ve lastikten oluşan bölüme ise *birincil süspansiyon*



Şekil 6.2: Aracın düşey ivme genlik-frekans yanıtı

denir. Birincil süspansiyonun karakteristik denklemini şöyle gösterilir:

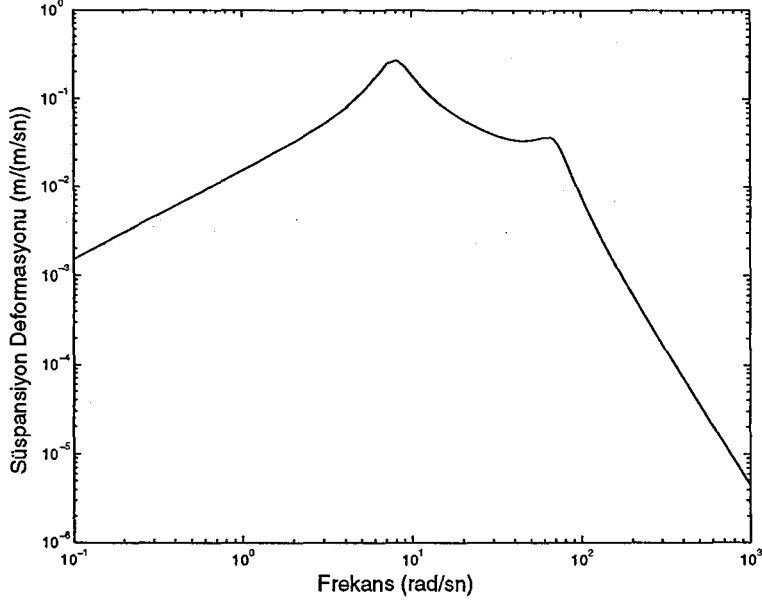
$$m_u s^2 + K_T = 0. \quad (6.4)$$

Bu sürme hareketinin *tekerlek sıçrama (wheel hop)* modudur. (6.4)'ten, tekerlek sıçrama modunun doğal frekansı 66.67 rad/sec olarak kestirilir.

Bu kestirim değerleri, araç süspansiyon tasarımının ilk aşamalarında oldukça faydalı olurlar. Yukarıdaki hesaplamalardan görüldüğü gibi, modlar arasındaki kuplaj'ın (coupling) mod şekilleri üzerinde çok az bir etkisi vardır. Yine de, en son hesaplamalarda tüm kuplajlar dikkate alınmalıdır.

6.3 Aracın Rassal Titreşimleri

Bu bölümde, aracın rassal yol girdilerine karşı yanıtı incelenecektir. Bunun için iki durum göz önüne alınacaktır. Birinci durumda, (6.1)'deki hız girdisi beyaz gürültü olarak düşünülecektir. Daha sonra, renkli gürültü girdileri ele alınacaktır. Geniş anlamda durağan skalar $y(t)$ rassal süreci için, $E\{y^2(t)\}$ 'nin



Şekil 6.3: Aracın süspansiyon deformasyonu genlik-frekans yanıtı

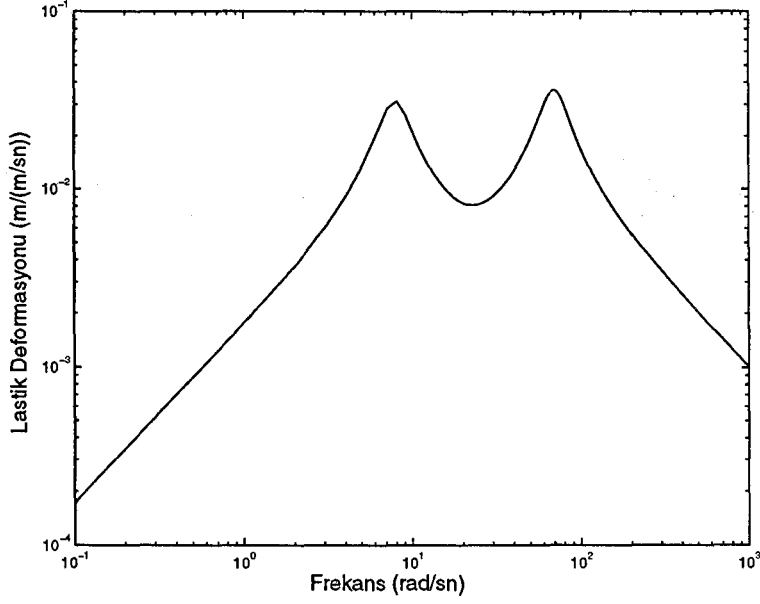
t 'ye bağlı olmadığı ve $R_{yy}(0)$ 'a eşit olduğunu hatırlanmalı. $R_{yy}(0)$ 'nin kare köküne $y(t)$ 'nin *kök-ortalama karesi (root-mean square)* (RMS) değeri denir. Bu değer aynı zamanda araca etkiyen titreşim seviyesinin de bir ölçüsüdür. Eğer, mesela, V_i sıfır ortalama değerine sahip, geniş anlamda durağan rassal bir süreç olarak düşünülürse, o zaman $y(t)$ 'de sıfır ortalama değerine sahip, geniş anlamda durağan ve sabit standart sapması $y(t)$ 'nin RMS değerine eşit olan rassal bir süreç olur.

6.3.1 Beyaz Gürültü Hız Girdisi

[6]'da, tipik yol profili spektral yoğunluğuna yapılan

$$S_R(j2\pi\tilde{n}) = \kappa \left(\frac{\tilde{n}_0}{\tilde{n}} \right)^2 \quad (6.5)$$

yaklaşımı, çeyrek-araç modelinin rassal sürüş hareketlerinin incelenmesinde kullanıldı. Bölüm 4 te, [43]'teki yol datasının κ ve \tilde{n}_0 değerleri sırasıyla 0.76×10^{-5} ve 0.15708 cycle/m olarak kestirildi. $S_R(\Omega)$ 'nın, modeldeki $\xi_R(x)$



Şekil 6.4: Aracın lastik deformasyonu genlik-frekans yanıtı

yerdeğiştirmesinin güç spektral yoğunluğu olduğuna dikkat edilmeli:

$$\frac{d}{dx}\xi_R(x) = 2\pi\tilde{n}_0\sqrt{\kappa}\nu(x). \quad (6.6)$$

Burada $\nu(x)$ sıfır ortalama değerine sahip, birim varyanslı uzaysal beyaz gürültü girdisidir. Böylece, yol yerdeğiştirmesi $\xi_R(x)$, integrali alınmış beyaz gürültü süreci olarak modellenir. Bu modelde, yol profili, (6.5)'teki κ ve n_0 değerleri değiştirilerek elde edilir. (6.6)'de $x = vt$, $\eta(t) = \nu(vt)$, ve $\zeta_R(t) = \xi(vt)$ yazılarak ve türevin zincir kuralı uygulanarak, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$V_i = \frac{d}{dt}\zeta_R(t) = 2\pi\tilde{n}_0v\sqrt{\kappa}\eta(t) \quad (6.7)$$

Burada, v aracın m/s cinsinden ölçülmüş ileri hızıdır ve $\eta(t)$,

$$R_{\eta\eta}(t, t') = \frac{1}{v}\delta(t - t'). \quad (6.8)$$

otokorelasyon fonksiyonuna sahip (bakınız (3.25)) beyaz gürültü sürecidir.

O zaman, aracın durum-uzay formundaki hareket denklemleri şöyle verilebilir:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + 2\pi\tilde{n}_0\sqrt{v\kappa}B\tilde{\eta}(t)$$

(6.9)

$$y(t) = Cx(t).$$

Burada $\tilde{\eta}(t)$ sıfır ortalama değerine sahip, birim varyanslı, zamanlı beyaz gürültü sürecidir.

Durum kovaryans matrisi P_x Lyapunov denklemini çözmek suretiyle elde edilir (bakınız Teorem 3.4.1):

$$AP_x + P_xA^T + BB^T = 0. \quad (6.10)$$

O zaman, çıktı kovaryans matrisi şöyle bulunur:

$$P_y = CP_xC^T. \quad (6.11)$$

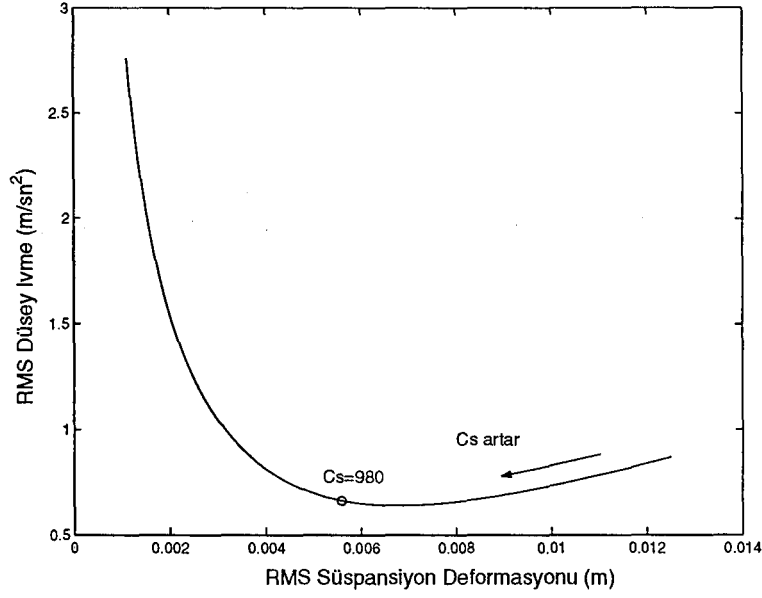
Şekil 6.5–6.7’de, RMS düşey ivme, RMS süspansiyon deformasyonu, ve RMS lastik deformasyonu arasındaki ilişkiler, yukarıdaki yol modelinde $\kappa = 0.76 \times 10^{-5}$ ve $\tilde{n}_0 = 0.15708$ cycle/m ile, $v = 108$ km/sa için gösterilmiştir. Bu şekillerde, C_s 196 Ns/m’den 24696 Ns/m’ye kadar değiştirilmiştir. Bu eğriler, araç dinamiği literatüründe (bakınız, mesela, [6, 11, 15]) iyi bilinen uzlaşmaları (trade-off) destekler. Integrali alınmış beyaz gürültü modelinde aracın ileri hızının eğrilerin şeklini etkilemediğine dikkat edilmeli.

6.3.2 Renkli Gürültü Hız Girdisi

Bölüm 4 ve Bölüm 5’te, verilmiş spektral verilere uygun rasyonel modeller bulunan iki tanıyım algoritması sunuldu. Aynı zamanda, Bölüm 5’te, Fourier serisi tabanlı algoritmanın özellikle yüksek model dereceleri için altuzay tanıyım algoritmasına göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlendi. Böylece, aşağıda verilen ifade,

$$\dot{\gamma}_R(x) = A_\Omega \gamma_R(x) + B_\Omega \nu(x) \quad (6.12)$$

$$\xi_R(x) = C_\Omega \gamma_R(x)$$



Şekil 6.5: Beyaz-gürültü hız girdisi ile uyarılan aracın RMS düşey ivmesi ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki

Algoritma 4.2.1 ile verilen $G_R(s)$ 'in durum-uzay realizasyonu olsun. Zaman bölgesinde, $x = vt$ 'ye türevin zincir kuralı uygulanarak, (6.12) şöyle yazılabilir:

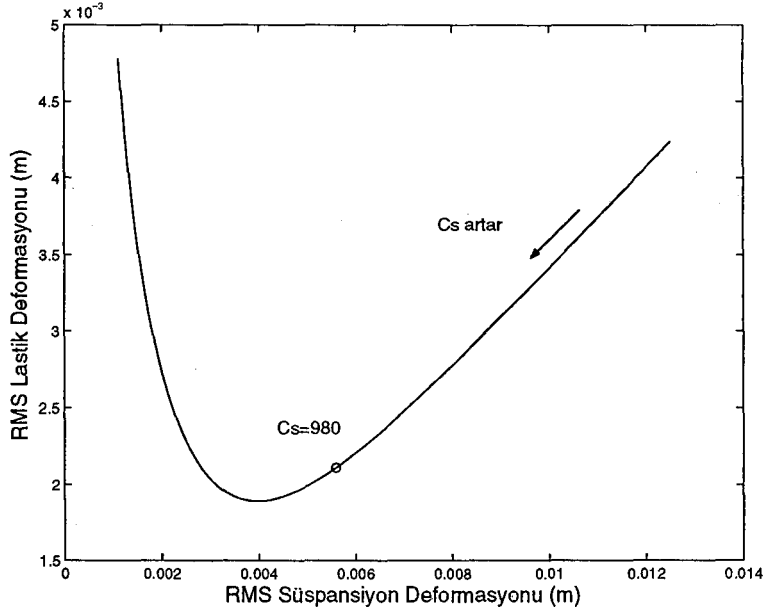
$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_R(t) &= vA_\Omega \zeta_R(t) + \sqrt{v} B_\Omega \eta(t) \\ w(t) &= C_\Omega \zeta_R(t).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Burada $\eta(t)$ sıfır ortalama değerine sahip, birim varyanslı beyaz-gürültü sürecidir (bakınız (3.24) ve (3.25)). (6.13)'teki zaman bölgesi biçimlendirici filtrenin $w(t)$ çıktısı V_i 'ye aşağıdaki denklem ile ilişkilendirilir:

$$V_i = \dot{w}(t) = vC_\Omega A_\Omega \zeta_R(t) + \sqrt{v} C_\Omega B_\Omega \eta(t).\tag{6.14}$$

Böylece, (6.1), (6.2), (6.13), ve (6.14)'ten aracın hareket denklemleri durum-uzay formunda şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} \eta(t) \\ y(t) &= \hat{C} \hat{x}(t).\end{aligned}\tag{6.15}$$



Şekil 6.6: Beyaz-gürültü hız girdisi ile uyarılan aracın RMS lastik deformasyonu ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki

Burada

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \zeta_R \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & vBC_\Omega A_\Omega \\ 0 & vA_\Omega \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

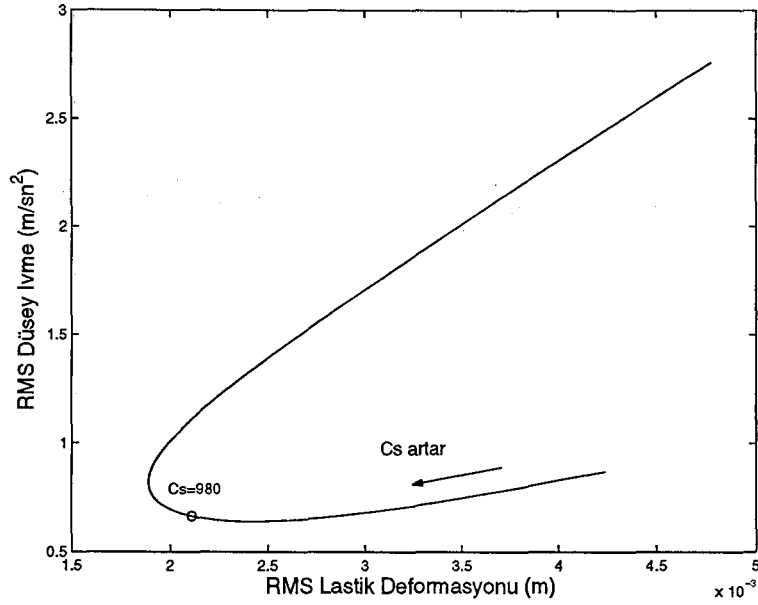
$$\hat{B} = \sqrt{v} \begin{bmatrix} BC_\Omega B_\Omega \\ B_\Omega \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C \ 0]$$

olarak tanımlanmıştır. (6.10) ve (6.11)'de olduğu gibi, durum ve çıktı kovaryans matrisleri $P_{\hat{x}}$ ve P_y

$$\hat{A}P_{\hat{x}} + P_{\hat{x}}\hat{A}^T + \hat{B}\hat{B}^T = 0, \quad P_y = \hat{C}P_{\hat{x}}\hat{C}^T \quad (6.17)$$

ifadelerinden elde edilirler.

Algoritma 4.2.1 ile elde edilen ve aynı azalma faktörüne: $0.3/(s + 0.3)$ sahip sekizinci ve birinci dereceden spektral çarpımlar Şekil 6.8 ve Şekil 6.9'da çizilmiştir. Bu spektral çarpımlar (4.63) ve (4.64)'teki transfer fonksiyonlarının $0.3/(s + 0.3)$ ile çarpılmasıyla elde edilmişlerdir. (Azalma faktörü ile

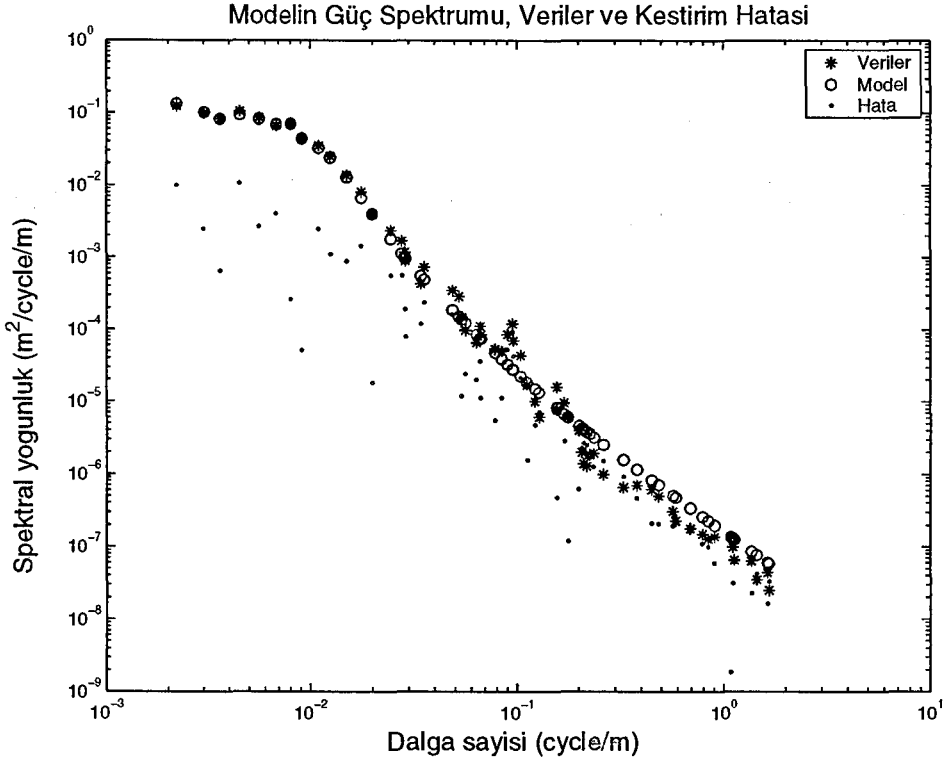


Şekil 6.7: Beyaz-gürültü hız girdisi ile uyarılan aracın RMS düşey ivmesi ve RMS lastik deformasyonu arasındaki ilişki

çarpmanın spektral çarpımın kare-integrallenebilirliğini garantiye almak için gerekli olduğunu hatırlayın).

Şekil 6.10–6.12’de, $n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için, tekerleklerde renkli gürültü hız girdisi tarafından uyarılan aracın RMS düşey ivme, RMS süspansiyon deformasyonu, ve RMS lastik deformasyonu sistem yanıtlarına karşı, tekerleklerde beyaz-gürültü hız girdisi tarafından uyarılan aracın adı geçen sistem yanıtları, 3.6–216 km/sa arasında değişen araç ileri hızları için çizilmiştir. Bu şekillerden, yol spektrumuna en iyi eşleşen ikinci derece modeli karşılaştırmada temel alındığında, birinci derece modelin araç rassal titreşimlerini incelemede uygun olmadığı görülür. İlginç bir biçimde, yol yer değiştirme spektrumuna yapılan integrali alınmış beyaz gürültü yaklaşımı, birinci derece model uyumundan daha doğru sonuçlar verir. Fakat yüksek hızlarda, özellikle $v \geq 100$ km/sa için, bu yaklaşım geçerliliğini kaybeder.

Şekil 6.13–6.15’de, $v = 108$ km/sa hızı için uzlaşım eğrileri, renkli-gürültü hız girdisi ve integrali alınmış beyaz gürültü hız girdisi için gösterilmiştir.

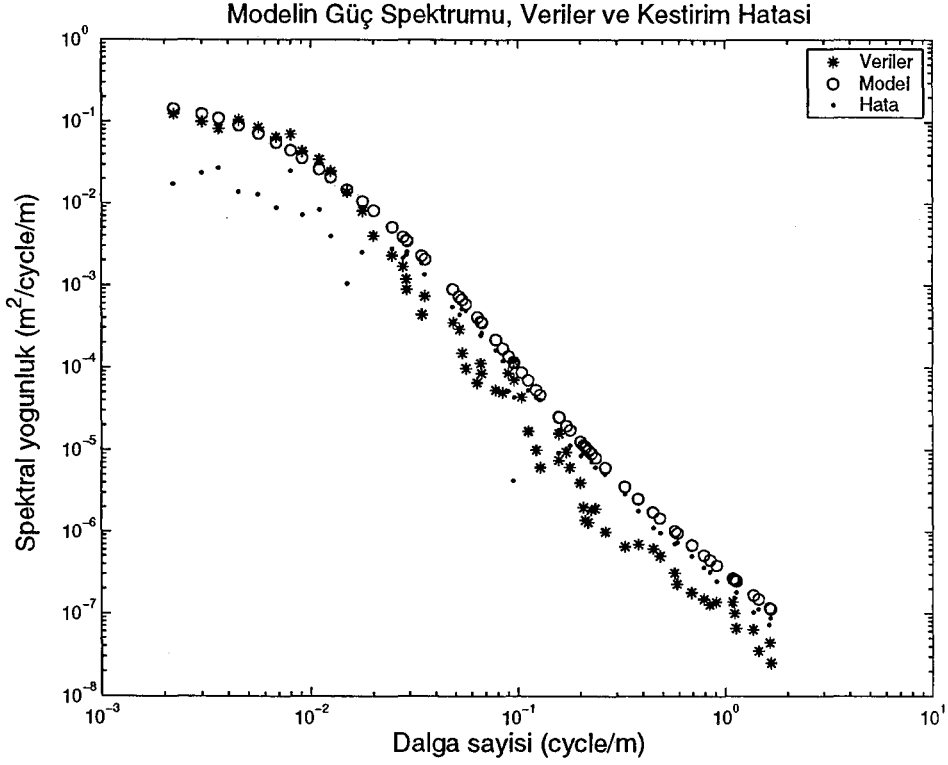


Şekil 6.8: Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 8.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi. Basamak 10'da, azalma faktörü $0.3/(s + 0.3)$ olarak alınmıştır

Birkez daha, yol spektrumuna ait birinci derece modelinin uygun olmadığı ve integrali alınmış beyaz gürültü modelinin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

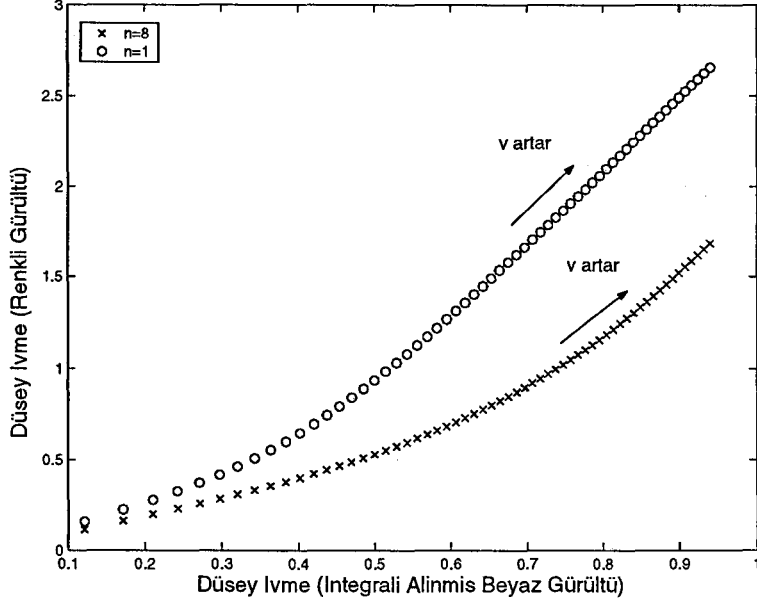
6.4 Özet

Bu bölümde, çeyrek-araç modeli bir aracın rassal yol uyarıcılarına karşı yanıtını incelemek için kullanıldı. Aracın rassal yol bozucularına karşı yanıtı, bu bozucular beyaz-gürültü hız girdileri veya renkli-gürültü girdileri olarak düşünülerek analiz edildi. Analiz birinci-derece yol yerdeğiştirme modelinin, rassal uyarıcılara maruz kalan aracın davranışlarını önceden tahmin etmede çok basit kaldığını

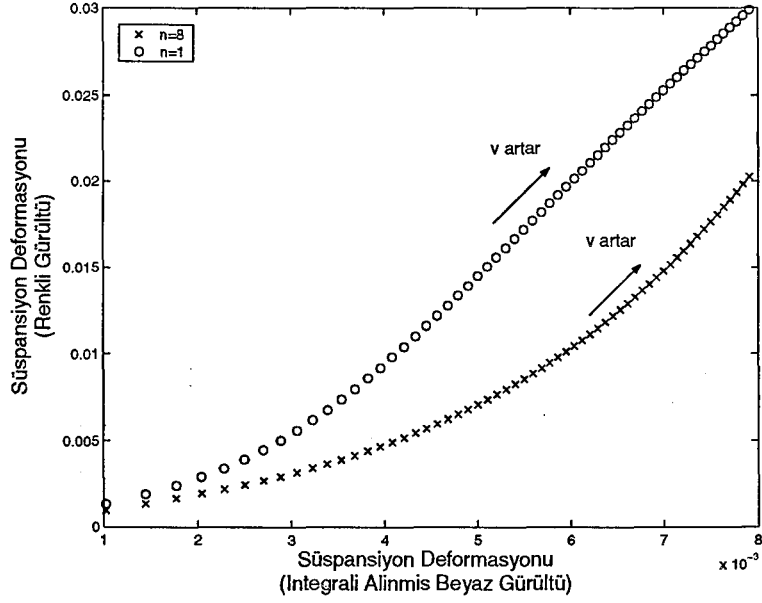


Şekil 6.9: Şekil 3.6'daki $\hat{S}_R(\tilde{n})$ spektral verileri ile bu verilerin Algoritma 4.2.1'den elde edilen 1.inci derece rasyonel bir spektrum ile modellenmesi. Basamak 10'da, azalma faktörü $0.3/(s + 0.3)$ olarak alınmıştır

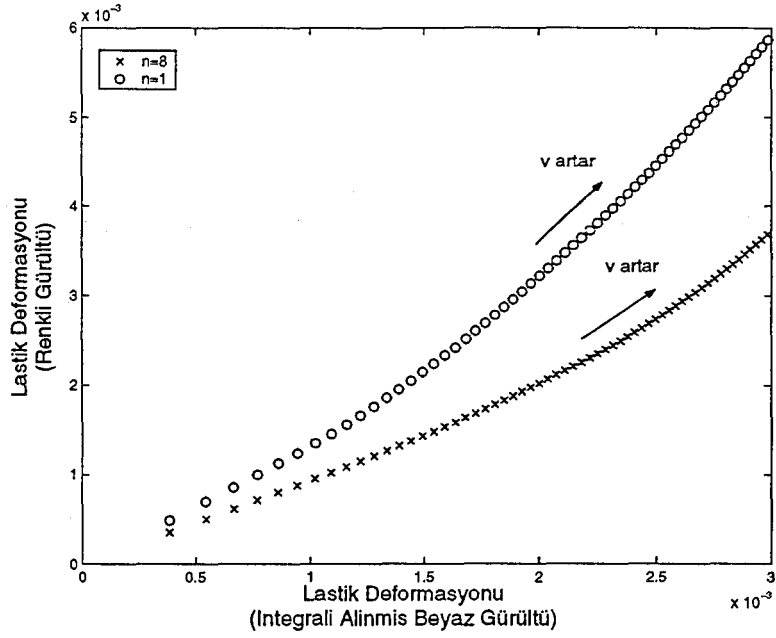
gösterdi. İlgilenilen değişkenler arasındaki uzlaşımın bir dizi yol modeli ve araç ileri hızları için gösterildi. En iyi sonuçlar yol yerdeğiştirme spektrumunun yüksek dereceli rasyonel modeli için elde edildi. Yol yerdeğiştirme spektrumunun integrali alınmış beyaz gürültü yaklaşımı birinci derece rasyonel model yaklaşımından daha doğru sonuçlar verdi. Fakat yüksek hızlarda, özellikle $v \geq 100$ km/sa için, bu yaklaşımın geçerliliğini yitirdiği görüldü.



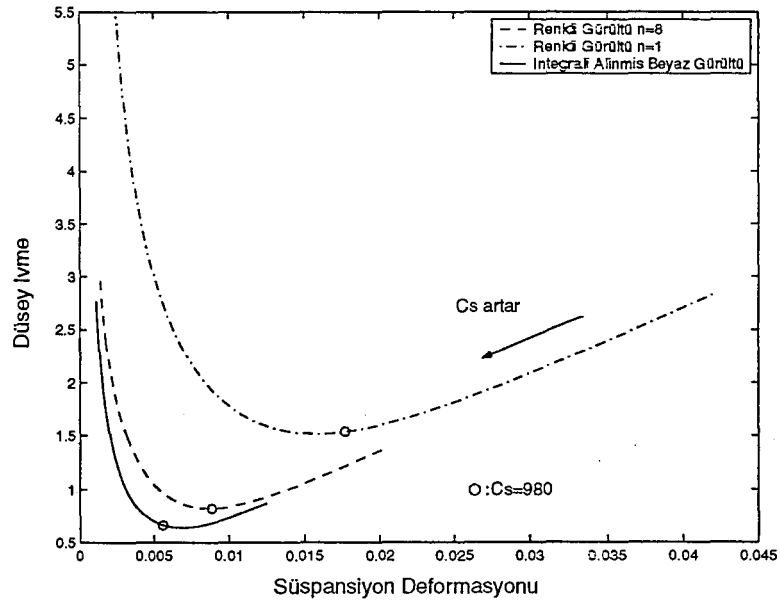
Şekil 6.10: Beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS düşey ivmeleri arasındaki ilişki



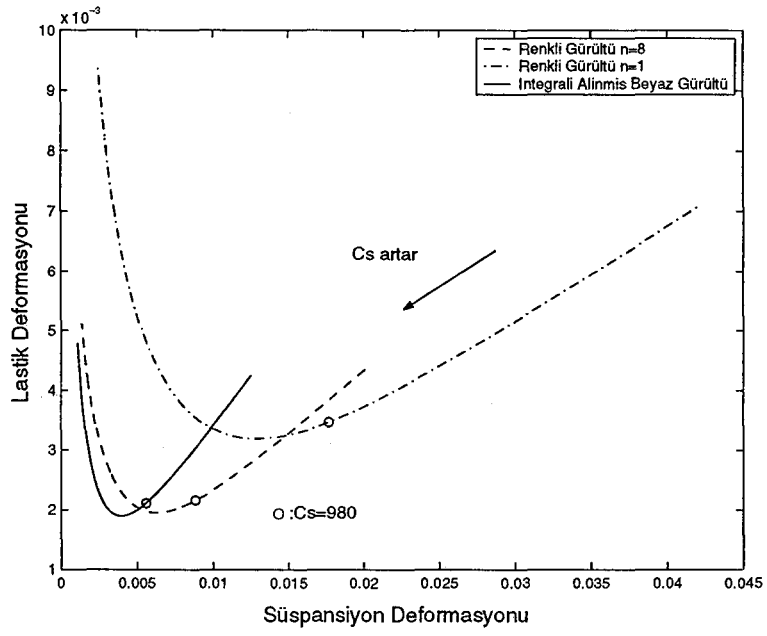
Şekil 6.11: Beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS süspansiyon deformasyonları arasındaki ilişki



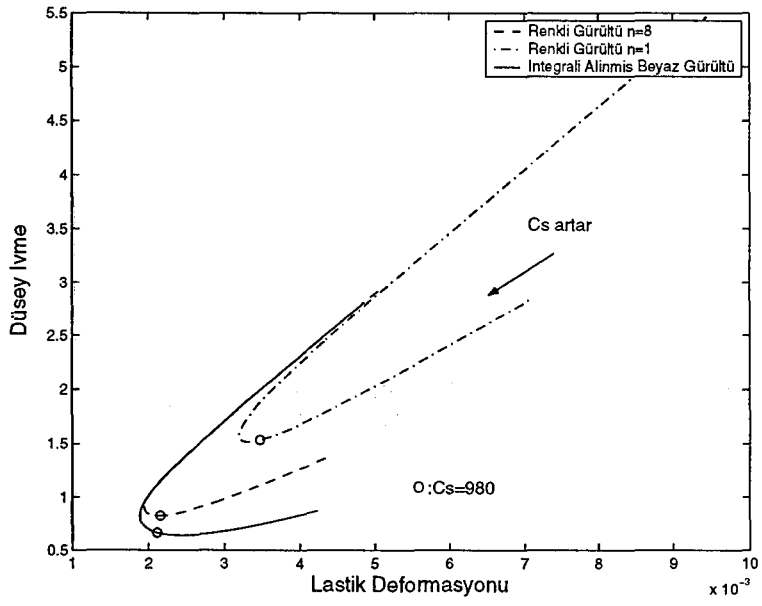
Şekil 6.12: Beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS lastik deformasyonları arasındaki ilişki



Şekil 6.13: $v = 108$ km/sa hızında, beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS düşey ivme ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki



Şekil 6.14: $v = 108$ km/sa hızında, beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS lastik deformasyonu ve RMS süspansiyon deformasyonu arasındaki ilişki



Şekil 6.15: $v = 108$ km/sa hızında, beyaz ve renkli gürültü hız girdileri ile ($n = 8$ ve $n = 1$ model dereceleri için) uyarılan aracın RMS düşey ivme ve RMS lastik deformasyonu arasındaki ilişki

Bölüm 7

SONUÇ

7.1 Son Açıklamalar

Bu tezde, spektral çarpımlara ayırma yönteminin yol spektrumlarının kestirimi için uygulanabilirliği araştırıldı. Düzgün aralıklı olmayan spektrum ölçümleri kullanılarak çok-girdili/çok-çıkıtlı, doğrusal-zamandan bağımsız sistemlerin tanıyımı için iki algoritma geliştirildi. Birinci algoritma Fourier serisi tabanlı tanıyım algoritmasıdır. Bu algoritmanın yakınsama analizi sunuldu. İkinci algoritma altuzay-tabanlı algoritmadır. Bu algoritmanın amacı [33]'ta verilen çalışmada kabul edilen frekansların düzgün olma şartını ortadan kaldırmaktır. Son olarak, çeyrek araç modeli kullanarak bir aracın, beyaz-gürültü veya renkli-gürültü hız girdileri olarak ele alınan rassal yol bozucu etkenlere karşı yanıtı incelendi.

Önerilen algoritmalar yinelemeli değildirler ve direkt olarak hesaplanabilirler. Bu nedenle bu algoritmalar çok çeşitli durumlara kolayca uygulanabilirler.

7.2 Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler

- Aracın tekerlekleri arasında ilişkilendirilmiş olan uyarımlarının neden olduğu rassal titreşimlerini önceden tahmin etmek için § 3.3.3'de formüle

edilmiş spektral çarpımlara ayırma problemi çözülmelidir.

- Değişken araç hızları ve yol tipleri için, tam araç (full-car) modeli uzlaşmalarının (trade-off) çalışmaları yapılabilir. Bu analizin başarısı, büyük ölçüde incelediğimiz spektral çarpımlarına ayırma sonuçlarının doğruluğuna bağlıdır. Bu yüzden, güç spektrumu tanıyım yöntemlerinin geliştirilmesi gerekir. Bu çalışmada geliştirilen algoritmalar bunun için adaydır, fakat gerçek yol datası üzerinde denenmeleri gerekir.
- Tanıyım algoritmalarından elde edilen yol spektrumu modellerine bağlı aktif süspansiyon sistemlerinin tasarımları yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] H. Akçay. On the uniform approximation of discrete-time systems by generalized Fourier series. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49:1461–1467, 2001.
- [2] H. Akçay. A stochastic analysis of robust estimation algorithms in H_∞ with rational basis functions. *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 12:71–86, 2002.
- [3] G. K. Batchelor. *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge University Press, 1960.
- [4] E. K. Bender. *Optimization of the random vibration characteristics of vehicle suspensions using random process theory*. MIT, MA, Cambridge, 1967. ScD Thesis.
- [5] P. Caines. *Linear Stochastic Systems*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York, 1988.
- [6] R. M. Chalasani. Ride performance potential of active suspension systems - part ii: Comprehensive analysis based on a full car model. *ASME-AMD*, 80:187–204, 1986.
- [7] E. W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [8] A. N. Heath. Application of the isotropic road roughness assumption. *Journal of Sound and Vibration*, 115(1):131–144, 1987.

- [9] F. B. Hildebrand. *Advanced Calculus for Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [10] D. Hrovat. A class of active LQG optimal actuators. *Automatica*, 18(1):117–119, 1982.
- [11] D. Hrovat. Influence of unsprung weight on vehicle ride quality. *Journal of Sound and Vibration*, 124(3):497–516, 1988.
- [12] D. Hrovat. Optimal active suspension structures for quarter-car vehicle models. *Automatica*, 26:845–860, 1990.
- [13] D. Hrovat. Application of optimal control to advanced automotive suspension design. *Trans. ASME, J. Dyn. Syst., Measurement, Contr.*, 115:328–342, 1993.
- [14] International Standards Organization. *Road Surface Profiles—Reporting Measured Data*, 1984. Draft Proposal ISO/DP 8608 for Mechanical Vibration.
- [15] D. Karnopp. Theoretical limitations in active suspensions. *Vehicle System Dynamics*, 15:41–54, 1986.
- [16] W. E. Larimore. Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control. In *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, 596–604, Hawai, USA, 1990.
- [17] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2.inci baskı, 2000.
- [18] M. S. Lonquet-Higgins. The statistical analysis of a randomly moving surface. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 249:321–387, 1957.
- [19] D. B. Macvean. Response of vehicles accelerating over random profile. *Ingenieur-Archiv*, 49:375–380, 1980.

- [20] M. Mitschke. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Band B: Schwingungen.
- [21] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Singapur, 3.üncü baskı, 1991.
- [22] I. G. Parkhilovskii. A study of the probability characteristics of widely used types of road surface. *Automobil'naya, Promyshlennost*, 8:18–22, 1968.
- [23] K. Popp. Stochastic ve elastic guideway models. *Dynamics of High Speed Vehicles*, 13–38, 1982. W. O. Schiehlen tarafından derlenmiştir.
- [24] G. Rill. The influence of correlated random excitation processes on dynamics of vehicles. In *Proceedings of the 8th IAVSD Symposium on the Dynamics of Vehicles on Roads and on Railway Tracks*, 449–459, 1983. J. K. Hedrick tarafından derlenmiştir.
- [25] C. L. Rino. Factorization of spectra by discrete Fourier transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 484–485, 1970.
- [26] M. C. Smith. Achievable dynamic response for automotive active suspensions. *Veh. Syst. Dyn*, 24:1–34, 1995.
- [27] N. E. Sussman. Statistical ground excitation model for high speed vehicle dynamic analysis. *High Speed Ground Transportation Journal*, 8:145–154, 1974.
- [28] A. G. Thompson. An active suspension with optimal linear state feedback. *Vehicle System Dynamics*, 5:187–192, 1976.
- [29] B. R. Davis ve A. G. Thompson. Power spectral density of road profiles. *Vehicle System Dynamics*, 35:409–415, 2001.
- [30] T. Kailath, A. H. Sayed ve B. Hassibi. *Linear Estimation*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2000.

- [31] P. Van Overschee ve B. De Moor. Continuous-time frequency domain subspace identification. *Signal Processing*, 52:179–194, 1996. Special Issue on Subspace Methods for Detection and Estimation.
- [32] P. Van Overschee ve B. De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems: Theory–Implementation–Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [33] P. Van Overschee, B. De Moor ve W. Dehandschutter ve J. Swevers. A subspace algorithm for the identification of discrete time frequency domain power spectra. *Automatica*, 33:2147–2157, 1997.
- [34] E. M. Elbeheiry, D. C. Karnopp ve M. E. Elaraby ve A. M. Abdelraaouf. Advanced ground vehicle suspension systems – a classified bibliography. *Vehicle System Dynamics*, 24:231–258, 1995.
- [35] J. Snyder ve D. Wormley. Dynamic interaction between vehicles and elevated, flexible, randomly irregular guideways. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 99:23–33, 1977.
- [36] H. Akçay, G. Gu ve P. P. Khargonekar. A class of algorithms for identification in \mathcal{H}_∞ : Continuous-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):289–294, 1993.
- [37] H. Akçay, G. Gu ve P. P. Khargonekar. Identification in \mathcal{H}_∞ with nonuniformly spaced frequency response measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:613–629, 1994.
- [38] S. Türkay ve H. Akçay. A study of random vibration characteristics of the quarter-car model. *Journal of Sound and Vibration*, 2003. Yayınlanmak üzere gönderilmiştir.
- [39] S. Türkay ve H. Akçay. A study of random vibration characteristics of the quarter-car model. In *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on*

Advances in Automotive Control, Salerno, Italy, 2003. Yayınlanmak üzere gönderilmiştir.

- [40] T. McKelvey, H. Akçay ve L. Ljung. Subspace-based identification of infinite-dimensional multivariable systems from frequency response data. *Automatica*, 32:885–902, 1996.
- [41] T. McKelvey, H. Akçay ve L. Ljung. Subspace-based multivariable system identification from frequency response data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:960–979, 1996.
- [42] K. Zhou, J. C. Doyle ve K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [43] C. J. Dodds ve J. D. Robson. The description of road surface roughness. *J. Sound & Vibration*, 31(2):175–183, 1973.
- [44] K. M. A. Kamash ve J. D. Robson. Implications of isotropy in random surface. *J. Sound & Vibration*, 54(1):1–13, 1977.
- [45] R. F. Harrison ve J. K. Hammond. A systems approach to the characterization of rough ground. *Journal of Sound and Vibration*, 99:437–447, 1985.
- [46] R. Fraanje, M. Verhaegen, V. Verdult ve R. Pintelon. A frequency domain subspace algorithm for mixed causal, anti-causal LTI systems. In *Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification*, Rotterdam, Hollanda, Ağustos 2003.
- [47] F. Frühauf, R. Kasper ve J. Lückel. Design of an active suspension for a passenger vehicle model using input processes with time delays. *Vehicle System Dynamics*, 14(1–3):115–120, 1985.
- [48] K. Liu, R. N. Jacques ve D. W. Miller. Frequency domain structural system identification by observability range space extraction. In *Pro-*

ceedings of the American Control Conference, 1:107–111 Baltimore, MD, 1994.

- [49] D. A. Wilson, R. S. Sharp ve S. A. Hassan. The application of linear optimal control to the design of active automotive suspensions. *Vehicle System Dynamics*, 15:105–118, 1986.
- [50] H. Akçay ve S. Türkay. On the factorization of continuous-time spectra by generalized Fourier series. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003. Yayınlanmak üzere gönderilmiştir.
- [51] H. Akçay ve S. Türkay. Subspace-based identification of multivariable systems from nonuniformly spaced power spectrum measurements. *Automatica*, 2003. Yayınlanmak üzere gönderilmiştir.
- [52] J. K. Hedrick ve T. Batsuen. Invariant properties of automotive suspensions. In *Proceedings Inst. Mech. Eng*, 204:21–27, 1990.
- [53] L. Ljung ve T. Glad. *Modeling of Dynamic Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [54] M. Verhaegen. Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, 30:61–74, 1994. Special Issue on Statistical Signal Processing and Control.
- [55] M. Verhaegen. A subspace model identification solution to the identification of mixed causal, anti-causal LTI systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 17:1835–1852, 1996.
- [56] M. Viberg. Subspace methods in system identification. *Automatica*, 31:1835–1852, 1995. Special Issue on Trends in System Identification.