YÜKSEK HIZLI VERİ İLETİŞİM AĞLARINDA AKIŞ KONTROLÜ

ENİS BİBEROVİÇ

Yüksek Lisans Tezi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği
Anabilim Dalı
Mart 2001

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Enis BİBEROVİÇ'in "Yüksek Hızlı Veri İletişim Ağlarında Akış Kontrolü" başlıklı Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 02/3/2001 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı):	Prof. Dr. Altuğ İFTAR	
Üye:	Doç. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU	
Üye:	Doç. Dr. Hüseyin AKÇAY	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14.03.2001 tarih ve 9/12 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜKSEK HIZLI VERİ İLETİŞİM AĞLARINDA AKIŞ KONTROLÜ

ENİS BİBEROVİÇ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Altuğ İFTAR
2001

Bu tezin konusu veri iletişim ağlarındaki trafiğin modellenmesi ve denetlenmesidir. Yüksek hızlı veri iletişim ağlarında kaynak-hedef çifti arasında mevcut olan gecikmeler zamanın bilinmeyen bir fonksiyonu olarak kabul edilmiş ve hem tek tıkalı geçit hem de birden fazla tıkalı geçit olduğu durumlar için model çıkarılmıştır. Bu modeller göz önünde bulundurularak, gürbüz denetim araçları kullanılarak denetleyicinin formülü bulunmuştur. Tek tıkalı düğüme sahip ağlar için çeşitli senaryolar altında MATLAB paket programı kullanılarak simülasyonlar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Veri İletişim Ağları, Gürbüz Denetim, Gecikmeli Sistemler, J-spektral Ayrıştırma

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FLOW CONTROL IN HIGH-SPEED DATA COMMUNICATION NETWORKS

ENIS BIBEROVIĆ

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Program

Supervisor: Prof. Dr. Altuğ İFTAR
2001

The subject of this thesis is modelling and control of the traffic in data communication networks. The delay existing between the source and destination in high-speed networks is assumed to be an unknown function of time and the network model is formed both for the single and for multiple bottleneck cases. Under consideration of these models, the formulae for the controller is obtained by using robust control tools. Using MATLAB, several scenarios for networks consisting of a single bottleneck node are simulated.

Keywords: Data Communication Networks, Robust Control,
Systems With Delays, J-spectral Factorization

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda beni yönlediren ve benden yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Altuğ İFTAR'a ve Doç. Dr. Hitay ÖZBAY'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen Banu ATAŞLAR, Özen YELBAŞI, İnci MUNYAS, Yavuz DOĞAN, Selçuk AKÇAM ve Hakkı Ulaş ÜNAL'a teşekkür ederim.

Bu çalışma TÜBİTAK ve A.B.D. Ulusal Bilim Vakfı (National Science Foundation - NSF) tarafından ortaklaşa desteklenen "Routing and flow control for high-speed communication networks" başlıklı araştırma projesi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Çağdaş teknolojinin gelişimiyle veri iletişim teknolojileri önem kazanmaktadır. Bilindiği gibi bugün bilgisayar teknolojisi oldukça ileri bir düzey yakaladığından, kitlenin önemli bir kısmının bu teknolojiden faydalanması olanaklı kılınmıştır. Bilgisayar teknolojisine paralel olarak gelişen internet teknolojisi dünyayı sanal olarak küçültmektedir. İnternet teknolojisi giderek insan hayatındaki her alana girmektedir, yani alış-veriş, haberleşme, uzaktan kontrol v.b. aktivitleri görülmektedir. Kullanıcı sayısı hızlı bir şekilde artığından mevcut olan kapasiteler giderek zorlanmaktadır. Bundan dolayı mevcut olan iletim hatlarının en verimli şekilde nasıl kullanılabileceği problemi çözümü önem taşımaktadır.

Bilgisayar ağlarında veri iletim kontrolü hem donanım hem de yazılım ile sağlanmaktadır. Yazılım kurulan donanımın dilidir, dolayısıyla donanımsal olarak ne kadar güçlü bir sistem kurulursa o kadar yazılımla daha fazla müdahale edilebilir. Fakat burada bir sorun meydana gelmektedir: yüksek hızlı veri iletişim ağlarında ağ içindeki mevcut olan belirsizliklere rağmen sistem en iyi şekilde nasıl kontrol edilebilir? Yani denetim mekanizması hangi matematiksel işlevlerle ve optimizasyon teknikleriyle en iyi sonucu verecektir?

1.1 Veri İletişim Ağları

Veri iletişim ağı bir servistir ve bu servisin amacı ağa bağlı olan tüm kullanıcılara kendi istekleri doğrultusunda ağa gönderilen verileri kayıpsız bir şekilde istenilen yere ulaştırılması ve bu verinin transferinin en kısa zaman içerisinde gerçekleştirilmesidir.

Kullanıcıların verileri transfer edebilmeleri için bir yola ihtiyaçları vardır. Bu yola *link* denilmektedir. Linklerin birim zamanda en fazla iletilebileceği veri miktarına *link kapasitesi* denir. Diğer yandan birim zaman içinde kullanılan link kapasitesine *iletim oranı* denmektedir. Kapasitesi sonlu olduğundan dolayı her an her bir kullanıcının maksimum iletim oranıyla linkten faydalanması genelde mümkün değildir. Bu yüzden veri iletişim ağı, fazladan gönderilen bilgileri depolama özelliğine sahiptir. Bellek fiziksel bir büyüklük olduğundan dolayı sınırlıdır, dolayısıyla kullanıcılara ne kadar veri gönderebileceğinin bildirilmesinin zorunluluğu vardır. Linkler ve kullanıcılar arasındaki haberleşmeyi sağlayan birime *anahtarlama düğümü* veya kısaca *anahtar* veya *geçit* denilir. Link kapasitesi aşıldığında anahtar tarafından gelen bilgiler bellekte bekletilmektedir. Kullanılan bellek boyutuna *kuyruk uzunluğu* denir. Girilen veri miktarı link kapasitesinden daha fazla olan düğüme *tıkanmış* veya *boğazlanmış düğüm* veya *tıkalı geçit* denir. Tıkanmış düğümlerde veri kaybı meydana gelebilir, böylece veri iletişim ağı temel görevini yerine getirmemiş olur. Bu tür olaylar meydana geldikleri zaman, veri kaybı olmaksızın ve iletişim ağının düzgün çalışması için, veri iletişim ağı düğümlerinde denetim yapılması gerekir. Dahası düğümler arasında veri akışını denetleyen modüle de gereksinim vardır.

Her düğüme hem ağın içinden hem de ağın dışından veri iletilebilir. Ağın içine veri gönderen düğüm, *kaynak* olarak isimlendirilir. Verinin ulaşılacağı düğüm ise *hedef* düğüm olarak isimlendirilir. Ağa gönderilen veri *mesaj* olarak tanımlanır. Mesaj kaynaktan gönderilip hedefe ulaşmalı. Ulaşabilmek için ağda kuyruğa girer. Mesaj gönderildiğinden kuyruğa girene kadar geçen zaman *işleme gecikmesi* olarak tanımlanır. Öte yandan, mesaj gönderilmek üzere kuyrukta da bekletilebilir. Bu durumda *kuyruklama gecikmesi* söz konusudur. Sonunda link boyunca mesajın iletilmesi için belli bir zaman gecikmesi söz konusudur. Bu gecikmeye *iletim gecikmesi* denir. Tüm gecikmelerin toplamı bir mesajın *ulaşım gecikmesi* olarak tanımlanabilir. Öte yandan iki düğüm arasında kontrol işaretlerin gönderilmesi ve alınması için de belli bir zamana ihtiyacı vardır. Bu ise *geri besleme gecikmesi*dir. Şimdi, bütün bu gecikmelerin kesin bir değeri olmazsa da, gecikmelerin bir üst sınırı tanımlanabilir. Ağ içinde verilerin akışı *ağ trafiği* olarak tanımlanır. Maksimum iletim oranı *bandgenişiği* olarak tanımlanır.

Veri akışı çeşitli protokollerle düzenlenmektedir. Farklı protokoller, farklı yapıda denetleyicilerin tasarlanmasını olanaklı kılar. Akış kontrolü ağ tarafından (asenkron iletim modu (Asynchronous Transfer Mode, ATM) ağlarında olduğu gibi) veya kullanıcı tarafından (internette olduğu gibi, TCP/IP protokolü) denetlenebilir [4]. Servis kalitesini yükseltmek amacı ile kullanıcıların veri akışı denetlenir. Çeşitli maliyet fonksiyonları düzenlenerek oluşabilecek veri kaybı ortadan kaldırılmak üzere denetleyiciler tasarlanır. Bir başka dikkat edilen husus, ağ kullanıcılarına olabildiği kadar en yüksek iletim oranıyla servis yapmaktır. Akış kontrolü genel olarak dinamik bir değişkendir. Tıkanıklık durumu ve ileri-geri gecikmesi (toplam gecikmesi) hakkında geri besleme yoluyla bilgiler tazelenir. Örnek vermek gerekirse, TCP/IP'nin Tahoe versiyonda tıkanıklık, verilerin kaybıyla veya zaman aşımı mekanizmalarıyla tespit edilir. TCP/IP Vegas versiyonda ise geçerli bandgenişliği geribesleme verisi olarak gönderilir ve olabilecek gecikmenin tahmini için kullanılır [2]. Diğer yanda ATM ağlarında geçerli bit oranı (Available Bit Rate, ABR) protokolü ile hem iletim kapasitesi hem de kuyruk uzunluğu bilgileri kaynak yönetici (Resource Management, RM) hücreleri kullanılarak denetleyiciye gönderilir. Denetleyici ise bu bilgilerin ışığında, kaynakların iletim oranlarını düzenler. İletişim ağlarında veri akış kontrolü çoğu zaman dışmerkezli olarak yapılır, yani her kullanıcı tarafından kendi iletim oranı kontrol edilir. Bu duruma, tipik olarak internette ve bazı ATM trafik tiplerinde (belirsiz bit oranı iletim kapasitesi) rastlanır. Dışmerkezli kontrolün bir avantajı ise, olabilecek bozulmalardan dolayı yalnızca ilgilenilen düğümün etkilenmesidir.

Akış kontrolünde kullanılan geri besleme algoritmaları iki gruba ayrılır: *oran-tabanlı* ve *pencere-* veya *kredi-tabanlı* denetim. Oran-tabanlı denetimde, kaynaklar, geribesleme yoluyla denetleyiciye oran bilgileri gönderir. Diğer yandan pencere-tabanlı denetimde kaynaklardan denetleyiciye pencere boyutu bilgi olarak gönderilir. Pencere-tabanlı algoritmalar yaygın olarak internette kullanılır. Oran-tabanlı algoritmalar ise ATM ağlarında uygulama yeri bulur.

İlk oran algoritmaları, ARPANET ve TYMNET'te uygulandığı gibi, kaynak hedef arasında "en kısa" yolu tahmin eder. Burada yolun uzunluğunu veri akış oranı belirlemektedir [20]. Diğer algoritmalar belli bir maliyet fonksiyonunu minimize edecek şekilde tasarlanmıştır.

TCP protokollerinde kullanıcılar kendi iletim oranlarını yavaş yavaş arttırır. Veri kaybı başlandığı andan itibaren bu oran azaltılmaktadır [1]. ATM ABR servisi ışığında düğümler kaynaklara iletim oranını bildirmektedir.

Veri iletişim ağlarında tıkanlık denetimi şu ana kadar pek çok kişi tarafından ele alınmıştır [33, 9, 8, 2, 4, 3, 1, 6, 7]. Bu çalışmalarda birbirinden farklı yöntemler ele alınmıştır. Sistemi çözmede hem kesikli zaman bölgesinde hem de sürekli zaman bölgesinde çalışmalar yapılmıştır. Klasik PID denetimi, adaptif denetim ve filtreleme teknikleri uygulayanlar kesikli zaman bölgesinde çözüm aramışlar [33, 9, 8, 2, 3], gürbüz, operatör kontrol mekanizmaları ve Smith belirleyici uygulayanlar ise sürekli zaman bölgesinde çözüm arayışlarını benimsemiştir [6, 7, 13]. Diğer yandan bu çalışmalar zaman bölgesinde [9, 8, 2, 3, 1, 7] ve frekans bölgesinde [33, 6, 13] görülmektedir. En basit olarak sisteme klasik PID denetimi uyguyalanlardan [33] başlayarak sistem cevabı, belirsizliklere karşın daha iyi bir çözüm elde etmek için oldukça iyi adaptif teknikler kullanılarak çözümler elde edilmiştir [8, 2]. Fakat [8, 2]'de elde edilen denetleyici oldukça karmaşık gerçekleşmesine sahip olduğundan dolayı bunun basitleştirmek amacıyla [13]'de [8, 2]'de verilen mantıkla Smith belirleyicisi tasarlanmıştır. [24] makalesinde PI artı Smith belirleyici denetimi uygulanmıştır. Bunun dışında sistemdeki belirsizlikler ve sistemdeki gecikmeler beyaz gürültü ile süren bir AR (ARMA) prosesi olarak kabul edilirse sistemi kararlılaştıran denetleyici tasarlanabilir [2, 4, 3]. Ayrıca şu ana kadar yapılan çalışmalarda denetleyici mertebesini düşürmek amacıyla ve gerçeklenmesinin daha kolay sağlanması amacıyla denetleyici yapısında gecikme operatörleri yer almaktadır. İnternet veya bazı ATM trafik tiplerinde denetleyici dışmerkezli olarak tasarlanmaktadır, ve bu denetleyiciler büyük ölçüde örneğin TCP/IP altında tecrübe esaslı buluşsal (heuristic) tekniklerle gerçekleşmektedir, dolayısıyla çoğu kez optimize olmayabilirler [1].

Yüksek hızlı ağlarda ATM protokolleri kullanılmaktadır. ATM protokolü gereğince verileri kısa sabit boyutlu hücrelerle (esas bilgi (payload) taşıyan 48 byte ve 5 byte başlık (header) olarak) kaynak-hedef çifti arasında gönderilmektedir [21]. Bu hücrelerin sabit oluşu ses, video veya veri iletimdeki oluşan gecikmeleri en aza indirmek amacıyla düşünülmüştür. [21] makalesinde geniş bir şekilde ATM ağları ve kullanılan protokolleri hakkında bilgi verilmiştir. Benzer olarak [12] makalesinde Unicast SP-EPRCA algoritmasına ([13] çalışmada yer alan) yer verilmiştir.

Temel olarak ATM ağlarının ne şekilde gelişmekte olduğunu ve mevcut algoritmaların daha iyi bir şekilde oluşturabilmesi için gelişim kriterilerini gözden geçirelim [21]:

1. Ölçeklenebilirlik (scalability): Kullanılan algoritma uzaklığa, anahtar sayısına, kaynakların sayısına, her bir kaynak hızına bağlı olmamalıdır.

2. En iyilik (optimality): mevcut olan band genişliği en uygun şekilde paylaşılmalıdır. Linklerdeki paylaşım linklerin kapasitesinin en uygun şekilde kullanılması için "şanslı" ve "şanssız" kullanıcılar tespit edilmeli ve şanslı kullanıcılar arasında paylaştırılmalıdır. Şanssız kullanıcılar kuyrukta bekletilmelidir.

3. Eşitlik indisi (fairness index): Her verilen en iyilik kriterine göre kullanıcılar arasında en iyi yol paylaşılması yapılabilir. Eğer mevcut yol paylaşılması optimal yol paylaşılmasından farklı ise eşitsizlik söz konusudur. Numerik olarak, mevcut ayırma $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$ ve optimal ayırma $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n\}$ olsun. Bu durumda $x_i := \bar{x}_i/\hat{x}_i$ olarak tanımlanırsa eşitlik indisi

$$\text{Eşitlik indisi} = \frac{(\sum_i x_i)^2}{n \sum_i x_i^2}$$

ifadesi ile verilmektedir. Eşitlik indisi genelde zamanın fonksiyonu olup zamana göre değişimi çizilebilir.

4. Gürbüzlük (robustness): Kullanılan algoritma belirsizliklere karşın duyarsız olmalıdır.

5. Gerçekleştirilebilirlik (implementability): Kullanılan algoritma özel anahtar mimarısı istememelidir.

Verilen algoritmanın geçerliğini incelenmek için aşağıdaki senaryolar genelde kullanılmaktadır:

1. Simulasyon yapısı (simulation configuration): Çeşitli durumları simule etmek için değişik senaryolar kullanılmaktadır. Genel olarak anahtarlar seri bağlanmış kabul edilir ve eşitliği test etmek için "parking lot" diye isimlendiren bir yapı incelenir [21].

2. Trafik örüntüleri (traffic patterns): Çeşitli senaryoların simulasyonu yapmak amacıyla çeşitli trafik örüntüleri kullanılmaktadır:

   (a) Sürekli kaynaklar (persistent sources): Bu kaynaklar her zaman gönderilecek verilere sahiptir. Böylece ağ sürekli tıkalıdır.

   (b) Sekmeli kaynaklar (staggered sources): Bu kaynaklar farklı zaman dilimlerinde bilgi göndermektedir. Ramp-up (ramp-down) zaman incelemelerine uygundur.

   (c) Patlamalı kaynaklar (bursty sources): Bu kaynaklar aktif durum (active state) ile boş durum (idle state) arasında osilasyon yapar. Aktif durum boyunca hücrelerde patlama vardır. Bu durum sürekli kaynaklardan daha gerçekçidir. Eğer patlamalar sabit oranla kabul ediliyorsa bu durum "açık çevrim" aksine "kapalı çevrim" trafik modeli elde edilir [21].

Tıkanıklık süresi	Tıkanıklık önleme mekanizması
Uzun	
	Kapasite planlanması ve ağ tasarımı
	Tıkanıklık kabul denetimi
	Dinamik yönlendirme
	Dinamik sıkıştırma
	Uç-uca geribesleme
	Link ile link geribesleme
	Tanponlama
Kısa	

Şekil 1.1: Farklı tıkanma süreleri için tıkanıklık önleme teknikleri

Genelleştirilmiş akış denetimi	Gerçek Yol ID'si	Gerçek Devre ID'si	Esas bilgi Tipi	Kayıp hücre Önceliği	Başlık Hata Denetimi	
4	8	16	3	1	8	← Boyut (Bit)

Şekil 1.2: ATM hücrelerin başlık formatı

1.2 Tıkanlık Önleme Yöntemleri

Link kapasiteleri aşıldığında tıkanlık meydana gelir. Tıkanlığı önlemek amacıyla Şekil 1.1'de gösterilen teknikler kullanılmaktadır.

Şekilden de görüldüğü gibi, kullanılacak teknikler, genel olarak tıkanıklık süresine bağlıdır. Bu yüzden tıkanıklık süresini azaltmak ve mevcut olan kapasiteyi en iyi şekilde kullanmak önem kazanmaktadır.

Şekil 1.2'de ATM hücrelerde genel olarak bir başlık formatı gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi başlık içerisinde ağ durumunu belirleyen bilgileri taşımaktadır. Tabii ki bu bilgiler kullanılan algoritmaya bağlı olarak değişebilir. ATM ağları bağlantı yönlendirilmiş ağlardır. ATM ağlarında iki lider yaklaşımı söz konusudur: Pencere (kredi) tabanlı yaklaşım (window (credit) based approach) ve oran tabanlı yaklaşımı (rate based approach). Kredi tabanlı yaklaşımda kaynağın ne kadar hücre transfer edilebileceği denetleyici tarafından belirlenir. Transfer edilebilecek hücre sayısına kredi (credit) denilmektedir. Oran tabanlı yaklaşımda ise, kaynağın hangi oranla hücreleri transfer edilebileceği denetleyici tarafından tespit edilir. Kredi tabanlı yaklaşımda iki önemli problem vardır: Birincisi, kredi sayısı kayıp ise kaynak ne yapacağını bilmez, ikinci ise her kaynak tamponlarda gidiş-geliş değeri rezerve edilmelidir. Bu problemleri aşmak için kredi algoritmaları, eşzamanlama algoritmaları ve adaptif versiyonları olarak yeniden tasarlanmıştır.

ATM ağlarında oran tabanlı yaklaşım ile kredi tabanlı yaklaşım kıyaslaması aşağıda verilmiştir.

1. Kredi tabanlı yaklaşımda anahtarlarda her bir kaynak için ayrı ayrı kuyruk oluşması gerekmektedir, oran tabanlı yaklaşım bunu gerektirmez. Büyük ölçekli anahtarlar kredi tabanlı yaklaşım kullanıldığında oran tabanlı yaklaşım kullanıldığından daha karmaşıktır.

2. Kredi tabanlı yaklaşım hücre kaybını önleyebilir, oran tabanlı yaklaşımda ise hücre kaybı olabilir.

3. Statik kredi tabanlı yaklaşımda ramp-up zamanı çok kısadır, yani herhangi bir boş kapasite hemen kullanılabilir. Buna karşın bazı oran tabanlı yaklaşımlarda ve adaptif kredi tabanlı yaklaşımda gidiş-geliş gecikmeler meydana gelmektedir.

4. Statik kredi tabanlı algoritmalarda terbiyesiz (misbehaving) kullanıcılar iyi kullanıcıların işlemlerini bölmezler. Fakat adaptif kredi tabanlı algoritmalarda terbiyesiz kullanıcılar kendi oranını arttırarak terbiyeli kullanıcılar etkileyebilirler. Her iki yaklaşım (kredi ve oran tabanlı) kullanıcıları izole edebilirler.

5. Kredi (özellikle adaptif) tabanlı algoritmalarda tampon gereksinimleri düşüktür ve linklerdeki gecikmelerle orantılıdır. Oran tabanlı algoritmalarda tampon gereksinimi uç-uca gecikme ile orantılıdır.

6. Kredi tabanlı algoritmalarda gecikme tahmini link uzunluğunun ve hızlarının bilinmesi gerekmektedir, öte yandan oran tabanlı algoritmalarda bu tür bilgilere ihtiyaç yoktur.

7. Oran tabanlı algoritmalarda anahtar tasarımında serbestlik vardır, yani bazı anahtarlar kuyruk uzunluğu bazı anahtarlar ise optimal yolları bulunacak şekilde tasarlanmıştır. Kredi tabanlı algoritmalara uyarlanan anahtarlar talep üzerinde çalışmaktadır.

8. Kredi tabanlı yaklaşımlı anahtarlar oldukça karmaşıktır, fakat kullanımı açısından son derecede rahattır. Diğer yandan oran tabanlı yaklaşımlarda kullanılan anahtarların yapısı kredi tabanlı yaklaşımlarda kullanılan anahtarlar yapısına nazaran hayli basittir.

Bir olayın denetiminin yapabilmesi için, olayın tanımlanması gerekir; yani müdahale edilebilecek parametrelerin tespit edilmesi gerekir. Bunların yapılabilmesi için olayın bir modeli olması lazımdır. Modelin olaya etkili olan değişimleri (parametreleri) içermesi gerekir. ATM ağında kullanılan anahtarlar ATM standartlarla tanımlı değildir, bu yüzden çeşitli maliyet fonksiyonları minimize edilecek şekilde imal edilmektedir.

2 GÜRBÜZ DENETİM

Bu bölümde gürbüz denetim araçları ele alınacaktır. Bölümde verilecek sonuçlar daha sonraki bölümlerde veri iletişim ağlarında tıkanlık denetimine uygulanacaktır.

Gürbüz denetimin temelleri Zames tarafından 1979'da ortaya atılmıştır. Gürbüz denetimde büyük gelişme 80'li yıllarda meydana gelmiştir [23]. $\mathcal{H}_\infty$ teorisi terimi, $\mathcal{H}_\infty$ uzayının Hardy uzayların bir üyesi olduğundan dolayı ortaya çıkmıştır. Zames SISO sistemlerde duyarlılık fonksiyonunu minimize etmeye çalışmıştır. Aynı zamanda Doyle $\mathcal{H}_\infty$ norm ile gürbüzlük arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

$\mathcal{H}_\infty$ uzayı kompleks düzlemin kapalı sağ yarısında analitik olan fonksiyonlardan gerilen uzaydır. Başka bir deyişle $\mathcal{H}_\infty$ uzayı kompleks düzlemin sağ yarısında tekil noktaları olmayan ve kararlı (Lebesgue integral alınabilen) fonksiyonlardan oluşmaktadır. $\mathcal{H}_\infty$ minimizasyon kararlı olmayan fakat kararlılaştırılabilir bir sistemi, kendine en yakın kararlı sisteme taşıyacak dönüşümün bulunmasından ibarettir. $\mathcal{H}_\infty$ minimizasyon hem zaman hem de frekans bölgesinde yapılmaktadır. Zaman bölgesindeki teknikler belirli Riccati denklemlerinin çözülmesine dayalıdır. Diğer yandan frekans bölgesindeki çözümler spektral ayrıştırma teknikleri üzerine kurulmuştur.

2.1 Norm

Bu alt bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan norm ve diğer tanımlar verilecektir.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &: \text{ gerçek sayılar kümesi,} \\
\mathbb{C} &: \text{ karmaşık sayılar kümesi,} \\
\mathbb{C}_+ &= \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 0\}, \qquad \mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s < 0\}, \\
\mathbb{C}_0 &= \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = 0\}, \qquad \mathbb{C}_+^0 = \mathbb{C}_0 \cup \mathbb{C}_+
\end{aligned}
$$

olsun. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \left\{ F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m\times n} \mid \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{trace}\left[F^*(j\omega)\, F(j\omega)\right] d\omega < \infty \right\}, \\
\mathcal{L}_\infty &= \Big\{ F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m\times n} \mid \operatorname*{esssup}_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma_{\max}\left[F(j\omega)\right] < \infty \\
&\qquad \text{ve } F \text{ sanal eksen üzerinde analitik } \Big\},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 &= \left\{ F:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}^{m\times n} \mid \sup_{\sigma>0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\text{trace}\left[F^*\left(\sigma+j\omega\right)F\left(\sigma+j\omega\right)\right]d\omega<\infty\right\}\right. \\
&\quad \text{ve } F \;\; \mathbb{C}_+\text{'da analitik } \Big\}, \; (\mathcal{H}_2\subset\mathcal{L}_2), \\
\mathcal{H}_2^{\perp} &= \left\{ F:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}^{m\times n} \mid \sup_{\sigma<0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\text{trace}\left[F^*\left(\sigma+j\omega\right)F\left(\sigma+j\omega\right)\right]d\omega<\infty\right\}\right. \\
&\quad \text{ve } F \;\; \mathbb{C}_-\text{'de analitik } \Big\}, \; \left(\mathcal{H}_2^{\perp}\subset\mathcal{L}_2\right) \\
\mathcal{H}_\infty &= \left\{ F:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}^{m\times n} \mid \sup_{\mathrm{Re}\, s>0}\sigma_{\max}\left[F\left(s\right)\right]=\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\sigma_{\max}\left[F\left(j\omega\right)\right]<\infty\right. \\
&\quad \text{ve } F \;\; \mathbb{C}_+^0\text{'da analitik } \Big\}
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Yukarıdaki tanımlar frekans bölgesinde olup Parseval ilişkileri kullanılarak zaman bölgesindeki eşdeğer ifadeleri elde edilebilir. Yukarıda $\mathbb{C}^{m\times n}$ ile $m\times n$ boyutlu karmaşık değerli matris fonksiyonları, $\sigma_{\max}(\cdot)$ ile $(\cdot)$'nın en büyük tekil değeri simgelenmektedir.

Bilindiği gibi X vektör uzayı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan gerçek değerli $\|\cdot\|$ fonksiyona (operatöre) *norm* denilmektedir:

(1) $\|x\|\geq 0 \;\forall x\in X$,
(2) $\|x\|=0$ eğer ve yalnızca eğer $x=0$,
(3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ her α skaler ve $x\in X$ için,
(4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, her x ve $y\in X$ için.

Görüldüğü gibi yukarıdaki 4 özelliği sağlayan her operatör normdur. Bu yüzden $\mathcal{H}_\infty$ normu veya ∞-normu denildiğinde hangi normdan bahsedildiğinin bilinmesi gerekmektedir. ∞-normuna 2-normu yardımıyla ile tanımlanıyorsa *endüklenmiş* (induced) ∞-*normu* denmektedir.

$x\in\mathbb{C}^n$ n-boyutlu vektör olsun. Bu durumda x'in p-normu

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \qquad 1\leq p<\infty \\
\|x\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n}|x_i|
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Matris normları vektör normları yardımıyla tanımlanabilir:

$$\|A\|_p=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Bu şekilde tanımlanan matris normlara *endüklenmiş (induced) norm* denir. $U^*U=I$ eşitliği sağlayan tüm U matrisleri için $\|x\|_2=\|Ux\|_2$ eşitliği geçerlidir. Dahası endüklenmiş normlar için şayet $\|\Delta\|_p\leq 1$ ise $\|\Delta x\|_p\leq\|x\|_p$ eşitsizliği de yazılabilir. A matrisinin endüklenmiş 2-normunun

$$\|A\|_2=\sigma_{\max}\left(A\right)$$

A'nın en büyük tekil değerine eşit olduğu gösterilebilir. Kimi zaman aşağıda tanımlanan Frobenius normu kullanılır:

$$\|A\|_F=\sqrt{\text{trace}\left(A^*A\right)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2}.$$

Diğer yandan $\mathcal{L}_2$ norm diye adlandırılan norm

$$\|A\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{trace}\left[A^*(j\omega)\,A(j\omega)\right]d\omega}$$

olarak tanımlanır.

G'nin $\mathcal{H}_\infty$-normu

$$\|G\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} s>0} \sigma_{\max}\left[G(s)\right] = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma_{\max}\left[G(j\omega)\right]$$

olarak tanımlanır. Bu normun endüklenmiş $\mathcal{L}_2$-normuna eşit olduğu gösterilebilir:

$$\|G\|_\infty = \sup_{u\in\mathcal{L}_2,\quad u\neq 0} \frac{\|Gu\|_{\mathcal{L}_2}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2}}.$$

Bunun dışında kimi zaman $\mathcal{H}_\infty$-normu ile minimize edilmiş sistem $\mathcal{L}_2$-normuna göre minimize edilmiş değildir [19]. $\mathcal{H}_\infty$ normu endüklenmiş $\mathcal{L}_2$ normu olduğundan $U^*U = I$ eşitliğini sağlayan ve boyutu uygun olan her U matrisi için $\|UG\|_\infty = \|G\|_\infty$ eşitliği ve $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ise $\|\Delta G\|_\infty \leq \|G\|_\infty$ eşitsizliği geçerlidir. $\|G\|_\infty \leq \gamma$ ifadesine $G^\sim G \leq \gamma^2 I$ ifadesi denktir. Burada $G^\sim$ ile G'nin eşlenik transpozunu göstermektedir ve

$$G^\sim(s) = G^*(-\bar{s})$$

olarak tanımlanır. Eğer $G(s)$ dönüşümünün tüm katsayılar gerçek ise

$$G^\sim(s) = G^T(-s)$$

olarak ifade edilebilir.

2.2 Göreceli Asal Ayrıştırma

Bu kısımda $\mathcal{H}_\infty$ üzerinde bir dönüşümün göreceli asal ayrıştırması ele alınacaktır.

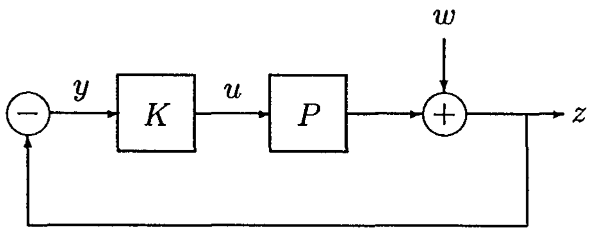
$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}, \qquad N, M, \tilde{N}, \tilde{M} \in \mathcal{H}_\infty$$

ve N ile M sağdan göreceli asal, $\tilde{N}$ ile $\tilde{M}$ soldan göreceli asal olacak şekilde G'nin ayrıştırmasına, G'nin $\mathcal{H}_\infty$'da *göreceli asal ayrıştırması* denir.

$$G(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \doteq C(sI - A)^{-1}B + D$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Eğer $(A,\ B)$ ikili denetlenebilir ve $(C,\ A)$ ikili gözlenebilir ise sözkonusu gerçeklenme $G(s)$ dönüşümünün minimal gerçeklenmesidir. Yukarıdaki gerçeklenme minimal olsun. Bu durumda aşağıdaki Bezout eşitliği sağlanıyorsa G'nin $\mathcal{H}_\infty$'da göreceli asal ayrıştırması vardır,

$$NY + MX = I, \qquad \tilde{Y}\tilde{N} + \tilde{X}\tilde{M} = I, \qquad N, Y, M, X, \tilde{Y}, \tilde{N}, \tilde{X}, \tilde{M} \in \mathcal{H}_\infty.$$



Şekil 2.1: Geri besleme sistemi

$A + BF$ kararlı olacak şekilde F matrisi ve $A + LC$ kararlı olacak şekilde L matrisi seçilir ise, aranan göreceli asal ayrıştırma aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabilir [38, Theorem 5.6],

$$\begin{bmatrix} M & -\tilde{Y} \\ N & \tilde{X} \end{bmatrix} \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A+BF & B & -L \\ \hline F & I & 0 \\ C+DF & D & I \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A+LC & -(B+LD) & L \\ \hline F & I & 0 \\ C & -D & I \end{array}\right].$$

2.3 $\mathcal{H}_\infty$'da Kararlılık ve Belirsizlikler

Şekil 2.1'deki sistem verilmiş olsun. Şekilde, P planti, K denetleyiciyi, w dışsal (referans sinyalleri, ölçme gürültüsü, bozukluk profil filtrelerinin sürme sinyalleri) sonlu enerjiye sahip işaretleri, z denetim hatasını, u denetlenebilir işaretleri ve y geri besleme için ölçülebilen çıkış işaretleri temsil etmektedir [23]. Şekilde w'dan z'ye olan transfer matrisine *duyarlılık fonksiyonu* denir ve $z = (I + PK)^{-1} w$ eşitliğinden

$$S = (I + PK)^{-1}$$

ifadesi duyarlılık fonksiyonunu temsil etmektedir. Örnek bir $L = PK$ kazancının Şekil 2.2'de (SISO durum için) Nyquist çizimi verilmiştir. L_o (nominal olarak adlandırılacak) kararlı olan bir açık çevrim kazancı olsun. Bu durumda L_o ile L arasındaki ilişkiyi kararlılık açısından inceleyelim. Nyquist kararlılık kriterine göre L'nin Nyquist çiziminde $-1 + i0$ noktası çevrilmemelidir. Bu durumda şekilden de görüldüğü gibi bu koşul sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

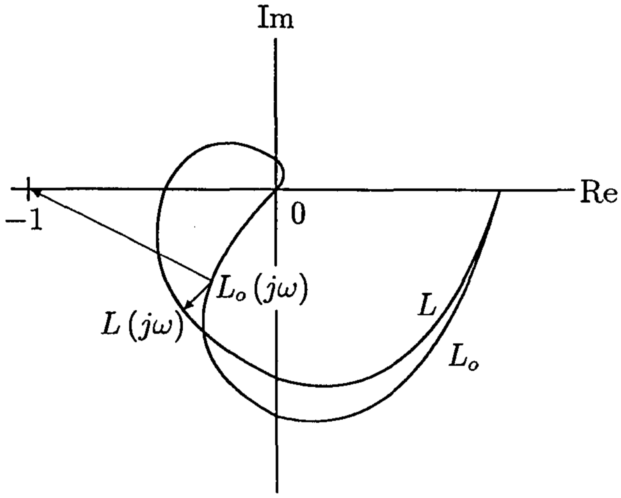
$$|L(j\omega) - L_o(j\omega)| < |L_o(j\omega) + 1|, \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{|L(j\omega) - L_o(j\omega)|}{|L_o(j\omega)|} \frac{|L_o(j\omega)|}{|L_o(j\omega) + 1|} < 1, \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$T_o = 1 - \frac{1}{L_o + 1} = \frac{L_o}{L_o + 1}$$



Şekil 2.2: Pertürbasyonla kararlılık

olarak tanımlanan ifadeye *tamamlayıcı duyarlılık fonksiyonu* denilmektedir. Diğer yandan, dikkat edilirse

$$\frac{|L(j\omega) - L_o(j\omega)|}{|L_o(j\omega)|} \leq |W(j\omega)|, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

frekansa bağlı belli bir W ağırlık fonksiyonundan yazılabileceğinden

$$\frac{|L(j\omega) - L_o(j\omega)|}{|L_o(j\omega)|}\frac{|L_o(j\omega)|}{|L_o(j\omega)+1|} \leq |W(j\omega)\,T_o(j\omega)|, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

olduğundan

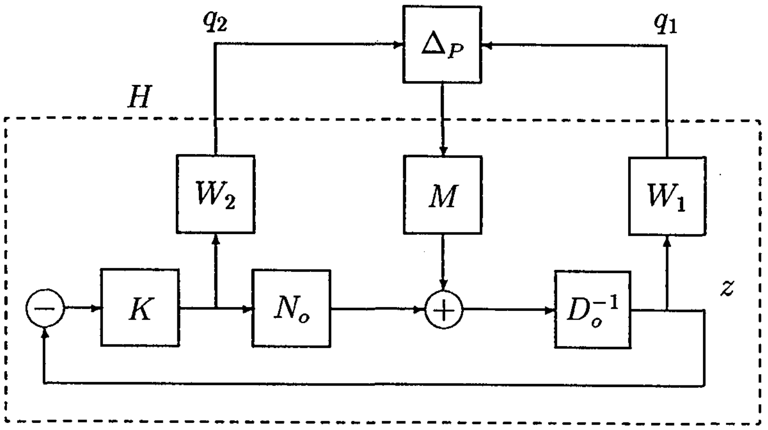
$$|W(j\omega)\,T_o(j\omega)| < 1, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

sağlanıyorsa L de kararlıdır. Son yazılan eşitsizlik aslında

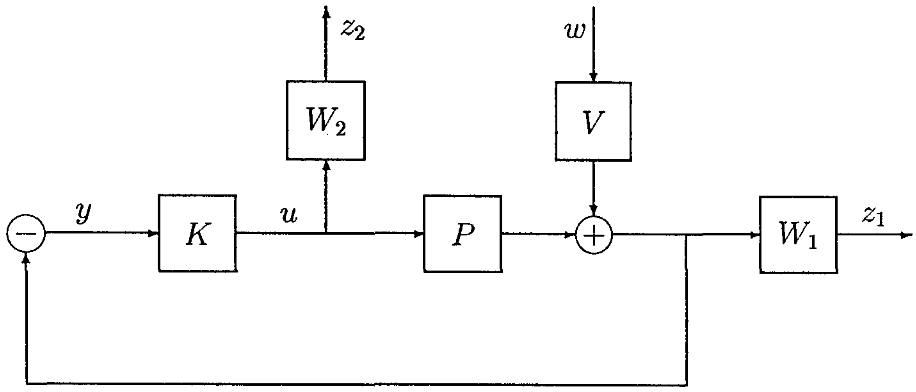
$$\|WT_o\|_\infty < 1$$

ifadesine denktir. Plantteki çeşitli nedenlerden değişikler meydana gelebilmektedir. Nominal plant P_o olsun. P_o planti kararlılaştırabilir ve sezinlenebilir olmalı ki K_o gibi bir denetleyiciyle kararlı kılınsın. Bundan sonra bu koşulların sağlandığı kabul edilecektir. Eğer $L_o = P_oK_o$ kararlı ise ve sanal eksenin kararlılık sınırı olduğu kabul edilirse, ve $L = PK$'nın kutup sayısı sabit olursa (McMillan derecesi sabit ise) bütün kutupların değişimi sürekli fonksiyon olacağından kararlı L_o'ın kutuplarından yola çıkarak L'ye ait tüm kutupların sanal ekseni kesip kesmediği kontrol edilebilir. Çeşitli nedenlerden dolayı (sistem modellenmesinden, fiziksel yapımından v.b. kaynaklanan) bozuklular sistemde mevcuttur. Nominal plante bozukluklar (pertürbasyonları, perturbation) toplamsal (additive), çarpımsal (multiplicative) ve göreceli asal (coprime) matematiksel olarak ihtiva edilir:

$P = P_o + \Delta_a W_a$	toplamsal,
$P = P_o(I + \Delta_m W_m)$	çarpımsal,
$P_o = ND^{-1},\ P = (N + M\Delta_N W_1)(D + M\Delta_D W_2)^{-1}$	sağdan göreceli asal,
$P_o = \bar{D}^{-1}\bar{N},\ P = \left(\bar{D} + \bar{M}\Delta_{\bar{D}}\bar{W}_2\right)^{-1}\left(\bar{N} + \bar{M}\Delta_{\bar{N}}\bar{W}_1\right)$	soldan göreceli asal



Şekil 2.3: Geri besleme döngüde pay-payda pertürbasyon modeli

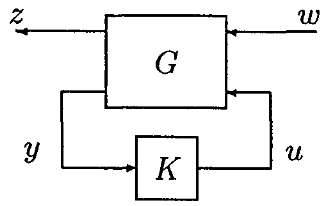


Şekil 2.4: Karma duyarlılık problemi

öyle ki belirsizlikler normları $\|\Delta_a\|_\infty < 1$, $\|\Delta_m\|_\infty < 1$, $\|\Delta_N\|_\infty < 1/\sqrt{2}$, $\|\Delta_D\|_\infty < 1/\sqrt{2}$, $\|\Delta_{\bar{N}}\|_\infty < 1/\sqrt{2}$, $\|\Delta_{\bar{D}}\|_\infty < 1/\sqrt{2}$ olacak şekilde W_a, W_m, W_1, W_2, $\bar{W}_1$ ve $\bar{W}_2$ ağırlık matrisleri sırasıyla seçilmelidir. M ve $\bar{M}$ ise kutupların uygun bir şekilde atanabilmesi için yardımcı birer matristir [23]. Çarpımsal bozukluklar için sistemin modellenmesi Şekil 2.3'te verilmiştir. Şekilde $\Delta_P := \begin{bmatrix} -\Delta_D & \Delta_N \end{bmatrix}$ olarak tanımlanmıştır ve $\|\Delta_P\|_\infty < 1$ koşullu sağlanmaktadır. Bu durumda Δ_P sistemden çıkartılırsa ve sistem üzerinde uygun değişiklikler yapılırsa Şekil 2.4'te gösterildiği gibi *iki blok* veya *karma duyarlılık problemi* tanımlanabilir. Şekilde $V := D_o^{-1}M$ olarak tanımlanmıştır. Karma duyarlılık problemi $\mathcal{H}_\infty$-optimal regülatör probleminin özel bir halidir. w'dan $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$'ye olan transfer matrisi

$$H = \begin{bmatrix} W_1SV \\ -W_2KSV \end{bmatrix}$$

ile ifade edilebilir. Dikkat edilirse karma duyarlılık problemi w'dan z'ye olan transfer matrisinin $\mathcal{H}_\infty$-normu minimizasyonu problemidir. K sistemden izole edildiğinde eşdeğer sistem Şekil 2.5'teki gibi olmaktadır. Burada G $\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$'dan



Şekil 2.5: Standart $\mathcal{H}_\infty$ problemi

$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$'ye olan transfer matrisidir:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} W_1 V & W_1 P \\ 0 & W_2 \\ \hline -V & -P \end{array}\right].$$

Birçok kontrol problemi standart iki blok probleminin özel hali olarak düşünülebilir.

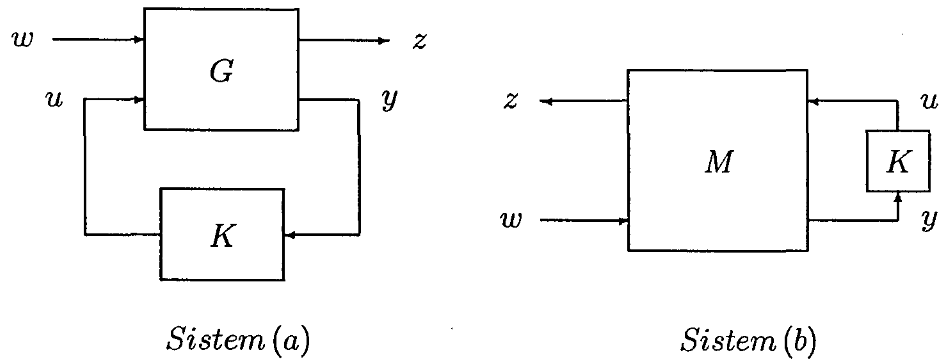
2.4 İki Blok Probleminin Çözümü

Bu kısımda bir önceki kısımda tanımlanmış olan iki blok probleminin çözümü verilecektir. İlk olarak kullanılacak olan bazı terimler hakkında bilgi sunulacaktır.

$G(s)$ verilen bir sistemi temsil eden transfer matrisi olsun. Bu durumda eğer $G^{\sim}(s)\,G(s) = I$ ise $G(s)$'ye iç (inner) matris denilmektedir. Başka bir deyişle eğer $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ ve eğer $\|G(s)\,u\| = \|u\|$ her $u \in \mathcal{H}_2$ için sağlanıyorsa $G(s)$'ye *iç matris* denir. Diğer yandan eğer $G(s) \in \mathcal{H}_\infty$ ise ve kararlı sağ tersine sahip ise $G(s)$'ye *dış (outer) matris* denir. Verilen J matrisine eğer $J = J^* = J^{-1}$ eşitliğini sağlıyorsa *işaret (signature) matrisi* denilir. Verilen J işaret matrisi ve $G(s)$ matrisi için eğer $G^{\sim}JG = J$ ise G matrisine J-*iç* (veya J-*üniter* (J-inner or J-unitary)) matris denilir. Eğer $s \in \mathbb{C}_+$ için J-iç G matrisi $G^*JG \leq J$ sağlanıyorsa G matrisine J-*kayıpsız* denilmektedir [37]. $\mathcal{H}_\infty^{g\times m}$'de matrisler kararlı matrisleri simgelemektedir. $\mathcal{GH}_\infty^{m\times m}$, $\mathcal{H}_\infty^{m\times m}$'de tersi alınabilir matrislerin kümesini simgeler; ($G \in \mathcal{GH}_\infty^{m\times m} \Longleftrightarrow G,\ G^{-1} \in \mathcal{H}_\infty^{m\times m}$). $G \in \mathcal{H}_\infty^{g\times m}$ (veya $\in \mathcal{L}_\infty^{g\times m}$) matrisi için eğer $\|G\|_\infty \leq 1$ ise, G matrisi *büzülmedir*, eğer $\|G\|_\infty < 1$ ise *kesin büzülmedir*. Dikkat edilirse $\mathbb{C}_+$'da eğer ve yalnızca eğer $G^*G - I \leq 0$ ise $G \in \mathcal{H}_\infty^{g\times m}$ büzülmedir. Burada $G^*(s) = [G(s)]^*$ olarak tanımlanmıştır.

$\mathcal{RH}_\infty^{g\times m}$ ile $\mathcal{H}_\infty^{g\times m}$'de gerçek rasyonel matrisler kümesi, $\mathcal{RL}_\infty^{g\times m}$ ile $\mathcal{L}_\infty^{g\times m}$'deki gerçek rasyonel matrisleri, $\mathcal{GRH}_\infty^{m\times m}$ ile de $\mathcal{GH}_\infty^{m\times m}$'deki gerçek rasyonel matrisler kümesi belirtilmektedir.

Sav 2.1 *[25, Lemma A.0.15]* (***Redheffer savı***)*: Kapalı çevrim w girdili ve z çıktılı bindirim sistemleri Şekil 2.6'daki gibi verilmiş olsun. Bu durumda*



Şekil 2.6: Genelleştirilmiş sistem: (a) LFT form, (b) RMM form

genelleştirilmiş sistemin transfer matrisleri

$$(a) \;:\; \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \\ u = Ky \end{array} \right.$$

$$(b) \;:\; \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \\ u = Ky \end{array} \right.$$

şekilde gösterildiği gibi sırasıyla (a) ve (b) sistemleri için verilsin. M ve G sinyallere uygun olarak bölünmüş olsun, yani

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(r+p)\times(q+p)} \;\; ve \;\; G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(r+p)\times(p+q)}$$

Bu durumda

1. *Eğer gerçek rasyonel G matrisi iç matris ise ve $p \times p$ sol alt G_{21} bloğu $\mathcal{GRH}_{\infty}^{p\times p}$'de bulunuyorsa (a) sisteminde ω'dan z'ye olan*

$$H := G_{11} + G_{12}K\left(I - G_{22}K\right)^{-1} G_{21}$$

kapalı çevrim transfer matrisi büzülmedir ve $\mathcal{L}_2$-kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart K rasyonel transfer matrisinin büzülme olmasıdır ($K \in \mathcal{RH}_{\infty}^{q\times p}$ ve $\|K\|_{\infty} \leq 1$). Ayrıca eğer ve yalnızca eğer $\|K\|_{\infty} < 1$ ise $\|H\|_{\infty} < 1$.

2. *Eğer gerçek rasyonel M matrisi $J_{q,p} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}$-kayıpsız ise (b) sisteminde ω'dan z'ye olan*

$$H := \left(M_{11}K + M_{12}\right)\left(M_{21}K + M_{22}\right)^{-1}$$

kapalı çevrim transfer matrisi büzülmedir ve $\mathcal{L}_2$-kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart K rasyonel transfer matrisinin büzülme olmasıdır ($K \in \mathcal{RH}_{\infty}^{q\times p}$ ve $\|K\|_{\infty} \leq 1$). Ayrıca eğer ve yalnızca eğer $\|K\|_{\infty} < 1$ ise $\|H\|_{\infty} < 1$.

w'dan z'ye transfer fonksiyonu olan H'nin

$$H = G_{11} + G_{12}K\left(I - G_{22}K\right)^{-1}G_{21}$$

G genelleştirilmiş plant cinsinden ifade edilen dönüşümü *doğrusal kesirli dönüşüm* (linear fractional transformation, LFT),

$$H = \left(M_{11}K + M_{12}\right)\left(M_{21}K + M_{22}\right)^{-1}$$

M genelleştirilmiş plant cinsinden ifade edilen dönüşümü de *sağ Möbius dönüşüm* (right Möbius map, RMM) olarak adlandırılır. Yukarıdaki savdan genelleştirilmiş sistem ya LFT formunda ya da RMM formunda kabul edip inf $\|H\|_{\infty}$ minimizasyon problemi çözülebilir. Transfer matrisler rasyonel olduğu taktirde her iki durumda çözümün ne olduğu iyi bilinmektedir [18, 38, 39, 27, 25, 26, 23]. Burada kısaca RMM teknikleri kullanılan J-spektral ayrıştırma tekniğine dayalı yönteme değinilecektir. J-spektral ayrıştırma teknikleri [26, 37, 18] çalışmalarında detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Adi spektral ayrıştırma problemi [18]'de detayli bir biçiminde ele alınmıştır. [37] çalışmasında ise J-sprektral ayrıştırma üzerinde çeşitli teknikler ele alınmıştır.

2.4.1 Adi Spektral Ayrıştırma

Adi spektral ayrıştırma problemi verilen G transfer matrisi için

$$G = Q^{\sim}Q, \qquad Q \in \mathcal{H}_{\infty},\ Q^{-1} \in \mathcal{H}_{\infty}$$

koşullarını sağlayan Q matrisinin bulunması problemidir. G transfer matrisinin spektral ayrıştırmaya sahip olabilmesi için hangi koşulların sağlanması gerektiğini araştıralım.

$$G \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \doteq C\left(sI - A\right)^{-1}B + D$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Diğer yandan

$$Q \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline C_q & D_q \end{array}\right]$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Bu durumda

$$Q^{\sim}Q = \left[\begin{array}{c|c} -A_q^* & -C_q^* \\ \hline B_q^* & D_q^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline C_q & D_q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_q & 0 & B_q \\ -C_q^*C_q & -A_q^* & -C_q^*D_q \\ \hline D_q^*C_q & B_q^* & D_q^*D_q \end{array}\right]$$

olarak yazılabileceğinden dolayı $D_q^*D_q = D$ olmalıdır. Bu durum ise G transfer matrisinin kare olması gerektiğini göstermektedir. Dahası $D_q^*D_q = D$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $D > 0$ olmalıdır (D tersi alınabilir bir matris olmalıdır zira $Q^{-1} \in \mathcal{H}_{\infty}$). Ayrıca

$$Q^{-1} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_q - B_qD_q^{-1}C_q & -B_qD_q^{-1} \\ \hline D_q^{-1}C_q & D_q^{-1} \end{array}\right]$$

kararlı olabilmesi için $A_q - B_q D_q^{-1} C_q$'nun tüm özdeğerleri kompleks düzleminin sol yarısında bulunmalıdır. D^{-1} var olabilmesi için G'nin çift düzgün[1] (biproper) olması şartı getirilmektedir. Diğer yandan $G^{\sim} = Q^{\sim}Q$ olacağından $G = G^{\sim}$ şartı da ortaya çıkmaktadır (bu koşulla G'nin kare olduğu garantilenir). Dikkat edilirse A_q kararlı olduğu için sanal eksen üzerinde özdeğerlere sahip değildir bu yüzden A'nın sanal eksen üzerinde özdeğerleri olmamalıdır. Öyleyse G sanal eksen üzerinde tam ranklı olmalıdır. Özetlemek gerekirse, G sanal eksen üzerinde tam ranklı ise, kompleks eşleniğine eşit ise ve çift kesin ise G'nin adi spektral ayrıştırması vardır. Dikkat edilirse $Q^{\sim}Q$ çarpımında hem kararlı hem de kararsız modlar vardır, bu yüzden G'nin gerçeklenmesinde A dinamik matrisinin modlarının ayrıştırması gereklidir. O halde uygun bir T benzerlik dönüşümü uygulandığında

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix},$$

A_1 kararlı ve A_2 karşı kararlı[2] (antistable) olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} G \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & 0 \end{array}\right] + D = G_1 + G_2 + D \end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve $D_q = D^{\frac{1}{2}}$ olarak seçilebilir. $G^{\sim} = G$ olduğundan

$$G_1^{\sim} + G_2^{\sim} = G_1 + G_2$$

eşitliği yazılabileceğinden

$$G_1^{\sim} - G_2 = G_1 - G_2^{\sim}$$

eşitliği yazılabilir. Dikkat edilirse G_1 ve $G_2^{\sim}$ kararlı, $G_1^{\sim}$ ve G_2 karşı kararlı (analitik bölgeleri farklı) oldukları için yukarıdaki eşitliğin sağlanabilmesi için Liouville teoremine göre her iki taraf sıfıra eşit olmalıdır, dolayısıyla $G_1 = G_2^{\sim}$ eşitliği elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_1^{\sim} + D = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} -A_1^* & -C_1^* \\ \hline B_1^* & 0 \end{array}\right] + D \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_1^* & -C_1^* \\ \hline C_1 & B_1^* & D \end{array}\right] \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. O halde

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_1^* & -C_1^* \\ \hline C_1 & B_1^* & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_q & 0 & B_q \\ -C_q^* C_q & -A_q^* & -C_q^* D_q \\ \hline D_q^* C_q & B_q^* & D_q^* D_q \end{array}\right]$$

[1] Eğer $\det D \neq 0$ ise $G = C(sI - A)^{-1} B + D$'ye çift düzgün denilir.

[2] $-A$ matrisi kararlı ise A matrisine karşı kararlı denir.

eşitliğinin sağlanması için, $D_q = D^{1/2}$ ve

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}, \; T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix}$$

seçildiğinde ve bu durumda

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -XA_1 - A_1^*X & -A_1^* \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$XA_1 + A_1^*X = C_q^*C_q \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} T^{-1}B &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ -C_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ -XB_1 - C_1^* \end{bmatrix}, \\ CT &= \begin{bmatrix} C_1 & B_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + B_1^*X & B_1^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanıldığında

$$C_q = D^{-\frac{1}{2}}\left(C_1 + B_1^*X\right), \qquad B_q = B_1$$

eşitliği elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} C_q^*C_q &= \left(C_1^* + XB_1\right) D^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 + B_1^*X\right) \\ &= C_1^*D^{-1}C_1 + XB_1D^{-1}C_1 + C_1^*D^{-1}B_1^*X + XB_1D^{-1}B_1^*X \end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak ve (2.1) Lyapunov denkleminden

$$X\left(A_1 - B_1D^{-1}C_1\right) - \left(A_1 - B_1D^{-1}C_1\right)^* X - XB_1D^{-1}B_1^*X - C_1^*D^{-1}C_1 = 0 \tag{2.2}$$

Riccati denklemi elde edilir. Bu durumda yukarıdaki denklemden $A_1 - B_1D^{-1}B_1^*X$ matrisini kararlı kılan X'i çözüp Q'nun gerçeklenmesi

$$Q \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline D^{-\frac{1}{2}}\left(C_1 + B_1^*X\right) & D^{\frac{1}{2}} \end{array}\right]$$

olarak elde edilir.

2.4.2 J-spektral Ayrıştırma

G transfer matrisinin J-spektral ayrıştırma problemi

$$G = Q^{\sim}JQ, \qquad Q \in \mathcal{H}_\infty, \; Q^{-1} \in \mathcal{H}_\infty, \qquad J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

verilen J işaret (signature) matrisi için çift kararlı[3] (bistable) Q'nun bulunmasıdır. Dikkat edilirse burada

$$Q^{\sim}JQ = \left[\begin{array}{c|c} -A_q^* & -C_q^* \\ \hline B_q^* & D_q^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline JC_q & JD_q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_q & 0 & B_q \\ -C_q^*JC_q & -A_q^* & -C_q^*JD_q \\ \hline D_q^*JC_q & B_q^* & D_q^*JD_q \end{array}\right]$$

[3] $Q \in \mathcal{H}_\infty$ ve $Q^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$ (kendi ve tersi kararlı) ise Q'ye çift kararlı denir.

eşitliğinden yukarıdaki işlemlerin benzerini izleyerek J-spektral ayrıştırması bulunabilir.

$$\begin{aligned} D &= D_q^* J D_q, \qquad \det D_q \neq 0, \\ D &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \qquad \exists D_{22}^{-1} \text{ olsun}, \\ D_q &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yapısında olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_q^* J D_q &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}^* & \Phi_{21}^* \\ 0 & \Phi_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}^* & \Phi_{21}^* \\ 0 & \Phi_{22}^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ -\Phi_{21} & -\Phi_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}^*\Phi_{11} - \Phi_{21}^*\Phi_{21} & -\Phi_{21}^*\Phi_{22} \\ -\Phi_{22}^*\Phi_{21} & -\Phi_{22}^*\Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğinden ve $D_{12}^* = D_{21}$ göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} D_{22} &= -\Phi_{22}^*\Phi_{22} \Rightarrow \Phi_{22} = (-D_{22})^{\frac{1}{2}}, \\ D_{21} &= -\Phi_{22}^*\Phi_{21} \Rightarrow \Phi_{21} = (-D_{22})^{-\frac{1}{2}} D_{21}, \\ D_{11} &= \Phi_{11}^*\Phi_{11} - \Phi_{21}^*\Phi_{21} \Rightarrow \Phi_{11}^*\Phi_{11} = D_{11} + D_{12}(-D_{22})^{-1} D_{21} \\ \Phi_{11} &= \left(D_{11} + D_{12}(-D_{22})^{-1} D_{21}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde

$$D_q = \begin{bmatrix} \left(D_{11} + D_{12}(-D_{22})^{-1} D_{21}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ (-D_{22})^{-\frac{1}{2}} D_{21} & (-D_{22})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada D'nin parçalanması J işaret matrisinin parçalanması gibidir. Daha önce yazılan eşitlikten

$$C_q = J D_q^{-1} (C_1 + B_1^* X)$$

olarak seçildiğinden (2.2) Riccati eşitliği

$$X\left(A_1 - B_1 D_q^{-2} C_1\right) + \left(A_1 - B_1 D_q^{-2} C_1\right)^* X - X B_1 D_q^{-2} B_1^* X - C_1^* D_q^{-2} C_1 = 0$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $A_1 - B_1 D_q^{-2} B_1^* X$ matrisini kararlı kılan ve yukarıdaki Riccati denklemini sağlayan X bulunduğunda Q'nun gerçeklenmesi

$$Q \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline J D_q^{-*}(C_1 + B_1^* X) & D_q \end{array}\right]$$

olarak ifade edilebilir. Not olarak yukarıdaki işlemleri sorunsuz yapabilmek için G transfer matrisi sanal ekseni üzerinde tam ranklı olmalı, diğer yandan $D_{22} < 0$ olmalıdır. Tabii ki $G = G^{\sim}$ de sağlanmalıdır ve G çift düzgün olmalıdır. Bu dört koşul sağlandığı taktirde G J-spektral ayrıştırmaya sahiptir.

2.4.3 Denetleyicinin Bulunması

Bu durumda kapalı çevrim sistemini kararlılaştıran K denetleyicisinin ne olması gerektiğini araştıralım. İki blok problemi verilsin:

$$\inf_K \|H\|_\infty = \inf_K \left\| \begin{matrix} W_1 (I+PK)^{-1} \\ W_2 K (I+PK)^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty =: \gamma^{opt}, \qquad \gamma > \gamma^{opt}.$$

Bu durumda

$$H^\sim H < \gamma^2 I, \qquad \text{sanal eksen üzerinde}$$

eşitsizliğinden yolla çıkarak ve varsayalım ki H RMM formunda, yani

$$H = (G_{11}K + G_{12})(G_{21}K + G_{22})^{-1} =: RMM(G,K)$$

şeklindedir. Burada G kolayca Şekil 2.4'ten elde edilebilir:

$$G = \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -W_1 \\ W_2 & 0 \\ \hline -V^{-1}P & -V^{-1} \end{array}\right].$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} H^\sim H &= \left[(G_{11}K + G_{12})(G_{21}K + G_{22})^{-1}\right]^\sim \left[(G_{11}K + G_{12})(G_{21}K + G_{22})^{-1}\right] \\ &= (G_{21}K + G_{22})^{-\sim} (K^\sim G_{11}^\sim + G_{12}^\sim)(G_{11}K + G_{12})(G_{21}K + G_{22})^{-1} \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. O halde eğer

$$K := YX^{-1}, \qquad Y \in \mathcal{H}_\infty,\ X \in \mathcal{H}_\infty$$

olarak yazılabileceği kabul edilirse ve

$$\begin{aligned} (G_{21}K + G_{22})^{-1} &= \left(G_{21}YX^{-1} + G_{22}\right)^{-1} = X(G_{21}Y + G_{22}X)^{-1} \\ &= X\left(\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ G_{11}K + G_{12} &= G_{11}YX^{-1} + G_{12} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} X^{-1} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} X^{-1} X \left(\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}\right)^{-1} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} H^\sim H = &\left(\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}\right)^{-\sim} \begin{bmatrix} Y^\sim & X^\sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^\sim \\ G_{12}^\sim \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}\right)^{-1} < \gamma^2 I \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Son eşitsizlikten

$$\begin{bmatrix} Y^{\sim} & X^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^{\sim}G_{11} & G_{11}^{\sim}G_{12} \\ G_{12}^{\sim}G_{11} & G_{12}^{\sim}G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} < \gamma^2 I \begin{bmatrix} Y^{\sim} & X^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{21}^{\sim}G_{21} & G_{21}^{\sim}G_{22} \\ G_{22}^{\sim}G_{21} & G_{22}^{\sim}G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} Y^{\sim} & X^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^{\sim}G_{11} - \gamma^2 G_{21}^{\sim}G_{21} & G_{11}^{\sim}G_{12} - \gamma^2 G_{21}^{\sim}G_{22} \\ G_{12}^{\sim}G_{11} - \gamma^2 G_{22}^{\sim}G_{21} & G_{12}^{\sim}G_{12} - \gamma^2 G_{22}^{\sim}G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} < 0$$

olarak yazılabilir. Dikkat edilirse

$$\begin{bmatrix} G_{11}^{\sim}G_{11} - \gamma^2 G_{21}^{\sim}G_{21} & G_{11}^{\sim}G_{12} - \gamma^2 G_{21}^{\sim}G_{22} \\ G_{12}^{\sim}G_{11} - \gamma^2 G_{22}^{\sim}G_{21} & G_{12}^{\sim}G_{12} - \gamma^2 G_{22}^{\sim}G_{22} \end{bmatrix} = G^{\sim} J_{\gamma} G$$

olarak yazılabilir. Burada

$$J_{\gamma} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır ve J_{γ}'ya işaret (signature) matrisi denilmektedir. O halde

$$H^{\sim}H < \gamma^2 I \qquad \text{sanal ekseni üzerinde}$$

koşuluna denk olan

$$\begin{bmatrix} Y^{\sim} & X^{\sim} \end{bmatrix} G^{\sim} J_{\gamma} G \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{sanal ekseni üzerinde}$$

koşulu yazılabilir. Şimdi eğer $Z = G^{\sim} J_{\gamma} G$ sanal ekseni üzerinde tam ranklı ise ve $D^* J_{\gamma} D$ matrisinin tersi alınabilir ise Z J-spektral ayrıştırmaya sahiptir ve $Z = Q^{\sim} J Q$, $Q \in \mathcal{H}_{\infty}$, $Q^{-1} \in \mathcal{H}_{\infty}$ olacak şekilde Q daha önce bahsedildiği gibi bulunabilir. Burada J işaret matrisidir, $J := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ ve $G :\overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ gerçeklenmesine sahip olduğu kabul edilmiştir. O halde yukarıdaki eşitliksizlikten

$$\begin{bmatrix} Y^{\sim} & X^{\sim} \end{bmatrix} Q^{\sim} J Q \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{sanal ekseni üzerinde}$$

yazılabileceğinden ve

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}, \qquad U_1 \in \mathcal{H}_{\infty},\ U_2 \in \mathcal{H}_{\infty}$$

olarak tanımlanırsa ve Q tersi alınabilir bir matris olduğu için

$$\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \qquad K = YX^{-1}$$

olarak bulunur. Burada U_1 ve U_2 üzerinde kısıtlama

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^{\sim} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_1^{\sim} & U_2^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix} < 0 \\ U_1^{\sim} U_1 &< U_2^{\sim} U_2\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Eğer $U_1 = 0$ ve $U_2 = I$ olarak seçilirse elde edilen çözüme *merkezi çözüm* denilir [23]. Diğer yandan eğer $U_2 = I$ ve $U_1 = U$ öyle ki $\|U\|_{\infty} < 1$ sağlanıyor ise K denetleyicisi U matrisi ile parametrize edilmiş olur. Böyle bir parametrizasyona Youla parametrizasyonu denilmektedir.

$$\begin{aligned}Q^{-1} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}, \quad \|U\|_{\infty} < 1, \\ \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}U + Z_{12} \\ Z_{21}U + Z_{22} \end{bmatrix}, \\ K &= YX^{-1} = (Z_{11}U + Z_{12})(Z_{21}U + Z_{22})^{-1} =: RMM\left(Q^{-1}, U\right)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Eğer genelleştirilmiş plant kararsız ve düzgün değilse [27] makalesindeki sonuç kullanılabilir:

Teorem 2.1 *[27, Theorem 3.1]: G $(r+p) \times (q+p)$ boyutlu rasyonel bir matris olsun (kararsız ve düzgün olmayabilir) ve N_G ve D_G düzgün rasyonel matrisler olmak üzere $G = N_G D_G^{-1}$ olsun. N_G ve D_G'nin ortak geçeklenmesi*

$$\begin{bmatrix} N_G \\ D_G \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \\ E & F \end{array}\right]$$

kararlılaştırılabilir olsun ve $\mathbb{C}_0^+$'da sıfırlara sahip olmasın. $N_G \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$'nin gerçeklenmesi sanal eksen üzerinde sıfırlara sahip olmasın ve $N_G(\infty) = D$ tam sütun ranklı olsun.

$$J_{r,p}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix}, \qquad J_{q,p} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda eğer ve yalnızca eğer $D^* J_{r,p}(\gamma) D = W_{\infty}^* J_{q,p} W_{\infty}$ singüler olmayan W_{∞} çözümüne sahip ise ve

$$\begin{aligned}XA + A^*X - (XB + C^* J_{r,p}(\gamma) D)(D^* J_{r,p}(\gamma) D)^{-1}(D^* J_{r,p}(\gamma) C + B^* X) \\ + C^* J_{r,p}(\gamma) C = 0\end{aligned}$$

kararlılaştıran $X \geq 0$ çözümüne sahip ise $(q \times p)$ boyutlu $\|H\|_{\infty} < \gamma$ eşitsizliğini sağlayan K denetleyicisi vardır. Dahası, eğer ve yalnızca eğer,

$$K = RMM\left(D_G W^{-1}, U\right)$$

şeklinde ise $\|H\|_\infty < \gamma$ *eşitsizliği sağlanmaktadır. Burada* U *boyutu* K*'nin boyutuna eşit olan ve* $\|U\|_\infty < 1$ *sağlayan keyfi kararlı matristir ve*

$$W \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline J_{q,p}W_\infty^{-*}\left(D^*J_{r,p}\left(\gamma\right)C + B^*P\right) & W_\infty \end{array}\right]$$

ile tanımlanmıştır. Dahası D_GW^{-1}*'nin gerçeklenmesinin boyutu* $\begin{bmatrix} N_G \\ D_G \end{bmatrix}$ *matrisinin gerçeklenmesinin boyutuna eşittir ve*

$$\begin{aligned} D_GW^{-1} &\overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & F \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline J_{q,p}W_\infty^{-*}\left(D^*J_{r,p}\left(\gamma\right)C + B^*P\right) & W_\infty \end{array}\right]^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A - BW_\infty^{-1}J_{q,p}W_\infty^{-*}\left(D^*J_{r,p}\left(\gamma\right)C + B^*P\right) & BW_\infty^{-1} \\ \hline E - FW_\infty^{-1}J_{q,p}W_\infty^{-*}\left(D^*J_{r,p}\left(\gamma\right)C + B^*P\right) & FW_\infty^{-1} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

2.5 Gecikmeli Sistemlerde $\mathcal{H}_\infty$ Denetimi

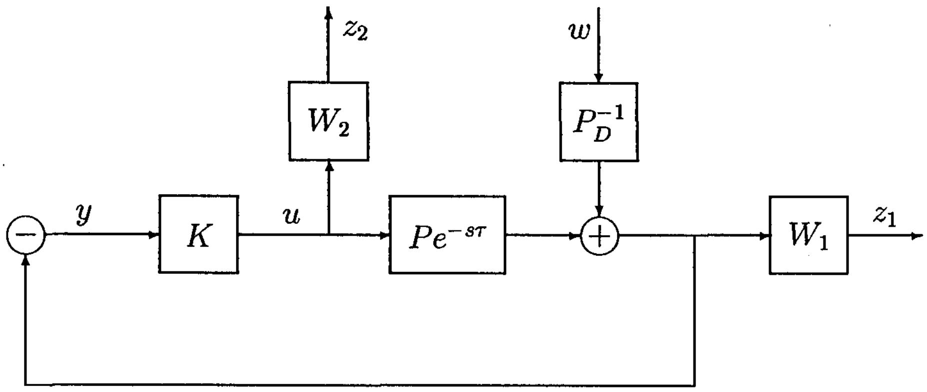
$\mathcal{H}_\infty$ kontrolün uygulandığı alanlarından biri de gecikmeli sistemlerin denetimidir. Gecikmeli sistemler sonsuz boyutlu sistemlerdir (örneğin $e^{-s\tau}$'nun Taylor açılımı alınırsa $e^{-s\tau}$'nun sonsuz sayıda sıfırı olduğu kolayca görünmektedir). Bu bakımdan gecikmeli sistemlerin analizi oldukça zordur. Çeşitli yöntemler izlenebilir, bunlardan biri $e^{-s\tau}$ irrasyonel ifadesini belli bir rasyonel ifade ile yakınlaştırarak rasyonel fonksiyonlar için bilinen yöntemlerle denetleyici tasarlamaktır. Fakat böyle bir yaklaşım ile tasarlanan denetleyicinin boyutu yüksektir. Bu yüzden bellekli denetleyicileri tasarlamak denetleyicinin maliyetini düşürmektedir.

Bu konuda, $P_r\left(s\right)e^{-s\tau}$ şeklindeki transfer fonksiyonları için ve denetleyici tasarımı için literatürde birden fazla çözüm yöntemi vardır [17, 28, 15, 14, 16, 35, 36, 22, 34, 32, 31, 30, 29, ve içindeki referanslar]. Gecikmeli sistemlerde kararlılığın incelenmesi için [10] makalesi referans olarak gösterilebilir. [15] makalesinde SISO gecikmeli sistemler için gap-metric teknikleri kullanılarak gürbüz denetleyici tasarlanmıştır. [34] makalesinde ise operatör teorisi yardımı ile zaman bölgesinde tek gecikme ile gecikmeli sistemler için denetleyici tasarlanmıştır. Diğer yandan [36] makalesinde, frekans bölgesinde iç-dış ayrıştırma teknikleri ve Hankel artı Toeplitz operatörleri yardımıyla Nehari probleminden esinlenerek SISO gecikmeli sistemler için denetleyici tasarlanmıştır. [28] makalesinde oldukça şık ve kolay bir şekilde J-spektral ayrıştırma teknikleri yardımıyla tek gecikme içeren sistemler için denetleyici tasarlanmıştır.

Gecikmeli sistemlerde bellekli sistemlerin kullanılmasına Smith belirleyisi (Smith predictor) ile başlanmıştır. Doğal olarak denetleyicinin gecikmesiz durumda plantı kararlılaştırması koşulu öne sürülmektedir. Şekil 2.7'deki iki blok optimizasyon problemi verilsin. Burada

$$P = P_D^{-1}P_N, \qquad P_D \in \mathcal{H}_\infty, \qquad P_N \in \mathcal{H}_\infty$$

verilen rasyonel transfer matrisidir, τ ise gecikmedir. w'dan $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$'ye



Şekil 2.7: Gecikmeli sistemler için karma duyarlılık problemi

olan transfer matrisi

$$H = \begin{bmatrix} W_1 \left(I + e^{-s\tau}PK\right)^{-1} P_D^{-1} \\ W_2 K \left(I + e^{-s\tau}PK\right)^{-1} P_D^{-1} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. İki blok optimizasyon problemi

$$\inf_{K \; Pe^{-s\tau}\text{'yu kararlılaştırıyor}} \left\| \begin{bmatrix} W_1 \left(I + e^{-s\tau}PK\right)^{-1} P_D^{-1} \\ W_2 K \left(I + e^{-s\tau}PK\right)^{-1} P_D^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

olarak tanımlanır. Bu durumda genelleştirilmiş plant RMM formunda kabul edilirse

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ W_2 & 0 \\ -e^{-s\tau}P_N & -P_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \qquad G := \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ W_2 & 0 \\ -e^{-s\tau}P_N & -P_D \end{bmatrix}$$

daha önce bahsedilen J-spektral ayrıştırma teknikleri kullanılarak

$$G^{\sim} J_\gamma G = Q^{\sim} J Q, \qquad Q \in \mathcal{H}_\infty, \qquad Q^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$$

eşitliğini sağlayan Q matrisinin bulunması gerekir. Burada

$$J_\gamma := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \qquad J := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

boyutları girdi ve çıktı vektörlerine uygun olacak şekilde seçilmiş işaret matrisleridir. G genelleştirilmiş plantı J-spektral ayrıştırmaya sahip olsun. Bu durumda

$$G^{\sim} J_\gamma G = \begin{bmatrix} 0 & W_2^{\sim} & -e^{s\tau}P_N^{\sim} \\ -W_1^{\sim} & 0 & -P_D^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ W_2 & 0 \\ -e^{-s\tau}P_N & -P_D \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
G^{\sim}J_{\gamma}G &= \begin{bmatrix} 0 & W_2^{\sim} & -e^{s\tau}P_N^{\sim} \\ -W_1^{\sim} & 0 & -P_D^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ W_2 & 0 \\ e^{-s\tau}\gamma^2 P_N & \gamma^2 P_D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W_2^{\sim}W_2 - \gamma^2 P_N^{\sim}P_N & -e^{s\tau}\gamma^2 P_N^{\sim}P_D \\ -e^{-s\tau}\gamma^2 P_D^{\sim}P_N & W_1^{\sim}W_1 - \gamma^2 P_D^{\sim}P_D \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir.

$$
\Pi = G^{\sim}J_{\gamma}G = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & e^{s\tau}\Pi_{12} \\ e^{-s\tau}\Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}
$$

olarak tanımlansın. O halde

$$
\Pi = Q^{\sim}JQ, \qquad Q \in \mathcal{H}_{\infty}, \qquad Q^{-1} \in \mathcal{H}_{\infty}
$$

sağlanacak şekilde rasyonel olmayan bir Q bulunmalıdır, ancak bu oldukça zordur. Genel olarak gecikmeli sistemlerde J-spektral ayrıştırma problemi nasıl çözülebileceği belirli bir algoritma olmamasına rağmen, [11] makalesinde sistemin özel bir hali ele alınmıştır. Fakat, yukarıdaki problem uygun bir dönüşümle rasyonel probleme dönüştürülebilir [28]. O halde,

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \begin{bmatrix} I & -F_s^{\sim} \\ 0 & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_s & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & -F_s^{\sim} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} & e^{s\tau}\Pi_{12} \\ e^{-s\tau}\Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_s & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & -F_s^{\sim} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} - e^{s\tau}\Pi_{12}F_s & e^{s\tau}\Pi_{12} \\ e^{-s\tau}\Pi_{21} - \Pi_{22}F_s & \Pi_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Pi_{11} - e^{s\tau}\Pi_{12}F_s - F_s^{\sim}e^{-s\tau}\Pi_{21} + F_s^{\sim}\Pi_{22}F_s & e^{s\tau}\Pi_{12} - F_s^{\sim}\Pi_{22} \\ e^{-s\tau}\Pi_{21} - \Pi_{22}F_s & \Pi_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Şekil 2.7'den w'dan z_1'e olan açık çevrim transfer matrisi $W_1 P_D^{-1}$ olmakta ve her nedensel denetleyici için tüm $0 \leq \varepsilon < \tau$ zaman dilimi için geribesleme çevrim kazancından etkilenmemektedir. Dolayısıyla, $H(\infty) = W_1(\infty) P_D^{-1}(\infty)$ ve $\gamma > \|H(s)\|_{\infty} \geq \sigma_{\max}(H(\infty))$ eşitsizliğinden

$$
P_D^{-\sim}(\infty) W_1^{\sim}(\infty) W_1(\infty) P_D^{-1}(\infty) < \gamma^2 I
$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$
W_1^{\sim}(\infty) W_1(\infty) - \gamma^2 P_D^{\sim}(\infty) P_D(\infty) < 0
$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan $\Pi_{22}^{\sim} = \Pi_{22}$, $\Pi_{12}^{\sim} = \Pi_{21}$ ve $\Pi_{22} = W_1^{\sim}W_1 - \gamma^2 P_D^{\sim}P_D$ olduğundan

$$
\Pi_{22}(\infty) = W_1^{\sim}(\infty) W_1(\infty) - \gamma^2 P_D^{\sim}(\infty) P_D(\infty) < 0
$$

eşitsizliği yazılabilir, dolayısıyla Π_{22}'nin tersi vardır.

$$
F_s + R := e^{-s\tau}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21}, \qquad F_s \in \mathcal{H}_{\infty}, \qquad R : \text{rasyonel}
$$

olarak tanımlansın. Böylece $F_s = e^{-s\tau}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} - R$ eşitliği kullanılarak

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} + R^{\sim}\Pi_{22}R & R^{\sim}\Pi_{22} \\ \Pi_{22}R & \Pi_{22} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$\Theta = Q_r^{\sim} J Q_r, \qquad Q_r \in \mathcal{H}_\infty, \qquad Q_r^{-1} \in \mathcal{H}_\infty$$

J-spektral ayrıştırmaya sahiptir. Bu durumda

$$Q = Q_r \begin{bmatrix} I & 0 \\ F_s & I \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Şimdi, F_s ve R'nin gerçeklenmesinin ne olması gerektiğini araştıralım. G_r, G'nin rasyonel kısmını simgelesin. Ayrıca G_r'nin gerçeklenmesi

$$G_r \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

ile verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} G_r^{\sim} J_\gamma G_r &= \left[\begin{array}{c|c} -A^* & -C^* \\ \hline B^* & D^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline J_\gamma C & J_\gamma D \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ -C^* J_\gamma C & -A^* & -C^* J_\gamma D \\ \hline D^* J_\gamma C & B^* & D^* J_\gamma D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} = \Pi \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

olsun, o halde

$$\begin{aligned} y_2 &= \Pi_{21}u_1 + \Pi_{22}u_2 \Rightarrow -u_2 = \Pi_{22}^{-1}\Pi_{21}u_1 - \Pi_{22}^{-1}y_2 \\ y_1 &= \Pi_{11}u_1 + \Pi_{12}u_2 = \Pi_{11}u_1 + \Pi_{12}\left(-\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21}u_1 + \Pi_{22}^{-1}y_2\right) \\ &= \left(\Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21}\right)u_1 + \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}y_2 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1} \\ \Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & -\Pi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Gerçeklenmesi ise,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}x + \hat{B}_1u_1 + \hat{B}_2u_2, \\ y_1 &= \hat{C}_1x + \hat{D}_{11}u_1 + \hat{D}_{12}u_2, \\ y_2 &= \hat{C}_2x + \hat{D}_{21}u_1 + \hat{D}_{22}u_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-u_2 &= \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 x + \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}u_1 - \hat{D}_{22}^{-1}y_2, \\
y_1 &= \hat{C}_1 x + \hat{D}_{11}u_1 + \hat{D}_{12}\left(-\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 x - \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}u_1 + \hat{D}_{22}^{-1}y_2\right) \\
&= \left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)x + \left(\hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right)u_1 + \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}y_2, \\
\dot{x} &= \hat{A}x + \hat{B}_1 u_1 + \hat{B}_2\left(-\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 x - \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}u_1 + \hat{D}_{22}^{-1}y_2\right) \\
&= \left(\hat{A} - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)x + \left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right)u_1 + \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}y_2
\end{aligned}
$$

eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1} \\ \Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & -\Pi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hline \hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & -\hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir.

$$
A_H = \hat{A} - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 \tag{2.4}
$$

olarak tanımlansın. Diğer yandan

$$
G = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \\ e^{-\tau s}P_n & P_d \end{bmatrix}, \qquad G_r = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \\ P_n & P_d \end{bmatrix}
$$

eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
G_r^{\sim} J_\gamma G_r &= \begin{bmatrix} 0 & W_2^{\sim} & P_n^{\sim} \\ W_1^{\sim} & 0 & P_d^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \\ -\gamma^2 P_n & -\gamma^2 P_d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W_2^{\sim}W_2 - \gamma^2 P_n^{\sim}P_n & -\gamma^2 P_n^{\sim}P_d \\ -\gamma^2 P_d^{\sim}P_n & W_1^{\sim}W_1 - \gamma^2 P_d^{\sim}P_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılabilir, dolayısıyla

$$
G^{\sim} J_\gamma G = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & e^{\tau s}\Pi_{12} \\ e^{-\tau s}\Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}
$$

sistemin "gerçeklenmesi"

$$
G^{\sim} J_\gamma G \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & e^{-\tau s}\hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline e^{\tau s}\hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & e^{hs}\hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & e^{-hs}\hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right]
$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & e^{\tau s}\Pi_{12} \\ e^{-\tau s}\Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
$$

eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & e^{\tau s}\Pi_{12}\Pi_{22}^{-1} \\ e^{-\tau s}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & -\Pi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir ve "gerçeklenmesi"

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & e^{\tau s}\Pi_{12}\Pi_{22}^{-1} \\ e^{-\tau s}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & -\Pi_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & e^{-\tau s}\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hline e^{\tau s}\left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right) & \hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & e^{\tau s}\hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & e^{-\tau s}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & -\hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir. Daha önce seçilen $(F_s + R)$'nin gerçeklenmesi ise

$$F_s + R = e^{-\tau s}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & e^{-\tau s}\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) \\ \hline \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & e^{-\tau s}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} \end{array}\right]$$

olarak ifade edilir, bu yüzden

$$F_s \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & \left(e^{-\tau s}I - e^{-\tau A_H}\right)\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) \\ \hline \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \left(e^{-\tau s} - 1\right)\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} \end{array}\right], \qquad (2.5)$$

$$R \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & e^{-\tau A_H}\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) \\ \hline \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} \end{array}\right]$$

şeklinde seçilebilir, ([28] makalesindeki gibi). Benzer olarak

$$F_s^{\sim} + R^{\sim} = e^{\tau s}\Pi_{12}\Pi_{22}^{-1} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hline e^{\tau s}\left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right) & e^{\tau s}\hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right]$$

eşitliğinden

$$F_s^{\sim} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hline \left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)\left(e^{\tau s}I - e^{\tau A_H}\right) & \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\left(e^{\tau s} - 1\right) \end{array}\right],$$

$$R^{\sim} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hline \left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)e^{\tau A_H} & \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right]$$

şeklinde seçilebilir. Bu durumda

$$\Theta = \begin{bmatrix} I & -F_s^{\sim} \\ 0 & I \end{bmatrix} G^{\sim} J_\gamma G \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_s & I \end{bmatrix}$$

yukarıdaki F_s'nin seçimi için

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} + R^{\sim}\Pi_{22}R & R^{\sim}\Pi_{22} \\ \Pi_{22}R & \Pi_{22} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabileceğini daha önce gördük. O halde Θ'nın gerçeklenmesinin ne olduğunu araştıralım:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & R^{\sim} \\ R & -\Pi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

sistemi verilsin. Yukarıdaki eşitlikten yararlanılarak

$$\begin{aligned} y_2 &= Ru_1 - \Pi_{22}^{-1}u_2 \Rightarrow u_2 = \Pi_{22}Ru_1 - \Pi_{22}y_2, \\ y_1 &= \left(\Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21}\right)u_1 + R^{\sim}u_2 \\ &= \left(\Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21}\right)u_1 + R^{\sim}\left(\Pi_{22}Ru_1 - \Pi_{22}y_2\right) \\ &= \left(\Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} + R^{\sim}\Pi_{22}R\right)u_1 - R^{\sim}\Pi_{22}y_2 \end{aligned}$$

veya matris formülasyonunda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} + R^{\sim}\Pi_{22}R & R^{\sim}\Pi_{22} \\ \Pi_{22}R & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} \\ &= \Theta \begin{bmatrix} u_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde Θ'nın gerçeklenmesini bulmak için

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Pi_{11} - \Pi_{12}\Pi_{22}^{-1}\Pi_{21} & R^{\sim} \\ R & -\Pi_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A_H & e^{-\tau A_H}\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hline \left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)e^{\tau A_H} & \hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1} \\ \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & -\hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right] \end{aligned}$$

gerçeklenmesinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_H x + e^{-\tau A_H}\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right)u_1 + \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}u_2, \\ y_1 &= \left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)e^{\tau A_H}x + \left(\hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right)u_1 + \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}u_2, \\ y_2 &= \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 x + \hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}u_1 - \hat{D}_{22}^{-1}u_2 \Rightarrow \\ u_2 &= \hat{C}_2 x + \hat{D}_{21}u_1 - \hat{D}_{22}y_2, \\ y_1 &= \left(\hat{C}_1 - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right)e^{\tau A_H}x + \left(\hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right)u_1 \\ &\quad + \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\left(\hat{C}_2 x + \hat{D}_{21}u_1 - \hat{D}_{22}y_2\right) \\ &= \left[\hat{C}_1 e^{\tau A_H} + \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\left(I - e^{\tau A_H}\right)\right]x + \hat{D}_{11}u_1 - \hat{D}_{12}y_2, \\ \dot{x} &= A_H x + e^{-\tau A_H}\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right)u_1 + \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\left(\hat{C}_2 x + \hat{D}_{21}u_1 - \hat{D}_{22}y_2\right) \\ &= \hat{A}x + \left[e^{-\tau A_H}\hat{B}_1 + \left(I - e^{-\tau A_H}\right)\hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right]u_1 - \hat{B}_2 y_2 \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir ve Θ'nın gerçeklenmesi

$$
\begin{aligned}
\Theta &\overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_\Theta & B_\Theta \\ \hline C_\Theta & D_\Theta \end{array}\right], \\
A_\Theta &= \hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^*JC & -A^* \end{bmatrix}, \\
B_\Theta &= \begin{bmatrix} e^{-\tau A_H}\hat{B}_1 + \left(I - e^{-\tau A_H}\right)\hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \\
C_\Theta &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 e^{\tau A_H} + \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\left(I - e^{\tau A_H}\right) \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix}, \\
D_\Theta &= D^*JD = \begin{bmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ifadesi ile verilebilir. Hamiltonian matrisi transfer matrisi Θ^{-1} olan sistemin dinamik matrisidir, yani

$$H_\gamma = A_\Theta - B_\Theta D_\Theta^{-1} C_\Theta. \tag{2.6}$$

olarak ifade edilir.

$$\Theta = Q_r^{\sim} J Q_r, \qquad Q_r : \text{çift kararlı},$$

J-spektral ayrıştırma probleminin çözümünü araştıralım: Q_r'nin gerçeklenmesi

$$Q_r \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline C_q & D_q \end{array}\right]$$

olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
Q_r^{\sim}\hat{J}Q_r &= \left[\begin{array}{c|c} -A_q^* & -C_q^* \\ \hline B_q^* & D_q^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline JC_q & JD_q \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|c} A_q & 0 & B_q \\ -C_q^*JC_q & -A_q^* & -C_q^*JD_q \\ \hline D_q^*JC_q & B_q^* & D_q^*JD_q \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği kullanılarak,

$$D_q^*JD_q = D_\Theta = D^*J_\gamma D$$

sağlayan D_q nasıl bulunacağı bir önceki kısımda gösterildi,

$$D_q = \begin{bmatrix} \left(\hat{D}_{11} + \hat{D}_{12}\left(-\hat{D}_{22}\right)^{-1}\hat{D}_{21}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \left(-\hat{D}_{22}\right)^{-\frac{1}{2}}\hat{D}_{21} & \left(-\hat{D}_{22}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

$$X = \operatorname{Ric} H_\gamma$$

kararlılaştırılan çözüm olsun, yani (2.6) ifadesiyle tanımlanan Hamiltonian matrisine denk gelen Riccati denkleminin kararlılaştıran çözüm olsun. Burada

$$A^*X + XA + XRX + Q = 0 \tag{2.7}$$

Riccati denklemine ait Hamiltonian matrisi

$$\begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

ifadesi ile tanımlanır ve tersine: (2.8) ile tanımlanan Hamiltonian matrisine karşılık (2.7) ile tanımlanan Riccati denklemidir. Ayrıca (2.7) Riccati denkleminin kararlılaştıran X çözümünün bulunması, $A + RX$ matrisini kararlı kılan ve (2.7) denklemini sağlayan X matrisinin bulunmasıdır. Burada Ric H_γ ile Hamiltonian matrisine karşılık tanımlanan Riccati denklemin kararlılaştıran çözümü göstermektedir.

Bu durumda

$$\begin{aligned} B_\Theta &= \begin{bmatrix} B_{\Theta,1} \\ B_{\Theta,2} \end{bmatrix}, \qquad B_{\Theta,2} = -C^*_{\Theta,1}, \\ C_\Theta &= \begin{bmatrix} C_{\Theta,1} & C_{\Theta,2} \end{bmatrix}, \qquad C_{\Theta,2} = B^*_{\Theta,1} \end{aligned}$$

eşitliklerinin Θ'nın hesaplanmasından geçerli olduğu bilinir (bir önceki kısımda bu özellik açık bir şekilde gösterilmiştir).

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan matrisi ile benzerlik dönüşümleri altında

$$\begin{aligned} T^{-1}\hat{A}T &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A^*X - XA - C^*JC & -A^* \end{bmatrix}, \\ C_\Theta T &= \begin{bmatrix} C_{\Theta,1} & B^*_{\Theta,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\Theta,1} + B^*_{\Theta,1}X & B^*_{\Theta,1} \end{bmatrix} \\ T^{-1}B_\Theta &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\Theta,1} \\ -C^*_{\Theta,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\Theta,1} \\ -\left(XB_{\Theta,1} + C^*_{\Theta,1}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} D_q^*\hat{J}C_q &= C_{\Theta,1} + B^*_{\Theta,1}X = C_\Theta \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Rightarrow \\ C_q &= \hat{J}D_q^{-*}C_\Theta \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}, \\ B_q &= B_{\Theta,1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} B_\Theta \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. O halde Q_r'nin gerçeklenmesi

$$Q_r \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} B_\Theta \\ \hline \hat{J}D_q^{-*}C_\Theta \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} & D_q \end{array}\right] \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir. Eğer $(A,\ B)$ çifti kararlılaştırılabilir ise Q_r'nin çift kararlı olduğu gösterilebilir [39].

Yukarıda ifade edilen işlemler [28] makalesindeki teorem ile özetlenebilir:

Teorem 2.2 *[28, Theorem 5.3]: P_r düzgün, rasyonel ve $P_r = P_{r,d}^{-1}P_{r,n}$ $\mathcal{H}_\infty$ üzerinde göreceli asal ayrıştırma, ayrıca W_1 ve W_2 kararlı rasyonel ağırlıklar olsun. $\tau = 0$ durumu için sanal eksen üzerinde (sonsuz dahil) G tam sütun ranklı sistem olsun.*

$$\mathbb{F}_\infty^{n\times m} := \left\{H^{-1}G : G \in \mathcal{H}_\infty^{n\times m},\ H \in \mathcal{H}_\infty^{n\times n},\ \det H \neq 0\right\}.$$

transfer matrisleri kümesini temsil etsin.

$$G_r = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \\ P_{r,n} & P_{r,d} \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C & D_1 & D_2 \end{array}\right]$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Burada $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}$ bölünmeleri G_r'nin bölünmesine denktir. Bu durumda eğer ve yalnızca eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\|H\|_\infty < \gamma$ sağlayan $K \in \mathbb{F}_\infty$'da denetleyici vardır.

1. *$D^T J_\gamma D$ singüler olmayan matristir ve pozitif ve negatif özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $\hat{J}$ matrisinin pozitif ve negatif özdeğerlerinin sayısına eşittir. Bu durumda*

$$H_\gamma := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^T J_\gamma C & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \left(D^T J_\gamma D\right)^{-1} \begin{bmatrix} -L_2^T & L_1^T \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan Hamiltonian matrisi pür imajiner özdeğerlere sahip değildir. Burada

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B \\ -C^T J_\gamma D \end{bmatrix} \\ &+ \left(e^{-\tau A_H} - I\right) \begin{bmatrix} B_1 - B_2 \hat{D}_{22}^{-1} \hat{D}_{21} & 0_{n\times n_y} \\ -C^T J_\gamma \left(D_1 - D_2 \hat{D}_{22}^{-1} \hat{D}_{21}\right) & 0_{n\times n_y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$A_H := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^T J_\gamma C & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C^T J_\gamma D_2 \end{bmatrix} \hat{D}_{22}^{-1} \begin{bmatrix} D_2^T J_\gamma C & B_2^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} := D^T J_\gamma D$$

2. *1. maddede tanımlanan $H_\gamma \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ Hamiltonian matrisinde γ yerine λ konularak elde edilen H_λ n boyutlu kararlı özuzayına sahiptir, $\mathcal{X}_-(H_\lambda) = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} X_1(\lambda) \\ X_2(\lambda) \end{bmatrix}$, (burada $X_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,2$, $\mathcal{X}_-(H_\lambda)$ ise H_λ'nın $\mathbb{C}_-$'da olan özdeğerlerine karşın özvektörlerinin gerdiği uzaydır) ve $X_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bütün $\lambda \geq \gamma$ için singüler olmayan matristir.*

3. *$\hat{D}_{22} < 0$.*

Eğer yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa, öyle Y ve S singüler olmayan matrisleri vardır ki $\hat{D}_{22} = -Y^T Y$ ve $\hat{D}_{11} - \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} = S^T S$. O zaman

$$Q_{r,\infty} := \begin{bmatrix} S & 0 \\ -Y^{-T}\hat{D}_{21} & Y \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan $Q_{r,\infty}$ için $D^T J_\gamma D = Q_{r,\infty}^T J Q_{r,\infty}$ koşulu sağlanır. Bu durumda Q_r ve F_s

$$Q_r \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & L_1 \\ \hline JQ_\infty^{-T}\left(D^T J_\gamma C + B^T X_2(\gamma) X_1^{-1}(\gamma)\right) & Q_{r,\infty} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} F_s &= \hat{D}_{22}^{-1} \begin{bmatrix} D_2^T J_\gamma C & B_2^T \end{bmatrix} \left(e^{-s\tau} I - e^{-\tau A_H}\right) \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} B_1 - B_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} \\ -C^T J_\gamma \left(D_1 - D_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) \end{bmatrix} + \left(e^{-s\tau} - 1\right)\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa Q_r'nin sağ-üst bloğu $Q_{r,12}$ şu koşulu sağlar: $Q_{r,12}(\infty) = 0$, ve eğer

$$Z = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_s & I \end{bmatrix} Q_r^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_\infty^{(n_u+n_y)\times(n_u+n_y)}$$

olarak tanımlanırsa K denetleyicisi

$$K = (Z_{11}U + Z_{12})(Z_{21}U + Z_{22})^{-1}$$

olarak parametrize edilebilir. Eğer U kesin düzgün ise K denetleyicisi nedenseldir. Dahası, eğer ve yalnızca eğer $\|U\|_\infty < 1$ ise $\|H\|_\infty < \gamma$.

Yukarıdaki teoremde, H_λ'nın kararlılaştıran çözümü

$$X(\lambda) = X_2(\lambda) X_1^{-1}(\lambda)$$

$$\begin{bmatrix} X(\lambda) & -I \end{bmatrix} H_\lambda \begin{bmatrix} I \\ X(\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

Riccati denkleminin çözümü $\lambda \geq \gamma$ değerler için vardır. Eğer gecikme yoksa $\left(e^{-\tau A_H} - I\right)$ terimi sıfır olur, böylece Riccati denklemi standart Riccati denklemine dönüştürülür.

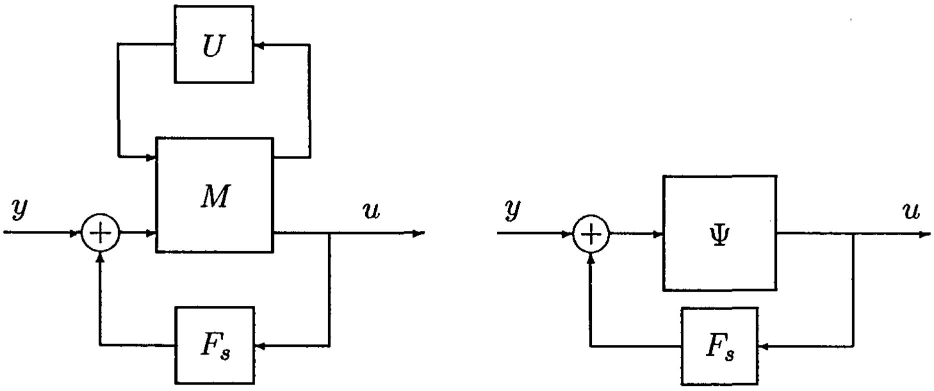
$$\gamma > \left\| W_1(\infty) P_{r,d}^{-1}(\infty) \right\|$$

koşulu gecikmesiz sistemlerde denetleyici hesaplamalarda gerekmiyor, fakat gecikmeli sistemlerde gerekmektedir. Bu koşul belirli Hankel artı Toeplitz operatorün özül spektral yarıçapı ile ilişkilidir.

Denetleyici parametrizasyon ifadesinde $U = 0$ olarak seçildiğinde

$$K = Z_{12} Z_{22}^{-1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde tanımlanan denetleyici çoğu kez *merkezi denetleyici* olarak isimlendirilir. Verilen Q_r ve F_s için denetleyicinin nasıl gerçeklenebildiği ilgi odağı olmaktadır:



(a) (b)

Şekil 2.8: (a) Denetleyicinin LFT formu, (b) merkezi denetleyici

$$K = (Z_{11}U + Z_{12})(Z_{21}U + Z_{22})^{-1}$$

tanımı ile verilen denetleyici Şekil 2.8.a'da gösterildiği gibi ifade edilebilir. Şekilde

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} -Z_{r,22}^{-1}Z_{r,21} & Z_{r,22}^{-1} \\ Z_{r,11} - Z_{r,12}Z_{r,22}^{-1}Z_{r,21} & Z_{r,12}Z_{r,22}^{-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{r,11} & Z_{r,12} \\ Z_{r,21} & Z_{r,22} \end{bmatrix} &= Q_r^{-1} \in \mathcal{H}_\infty^{(n_u+n_y)\times(n_u+n_y)} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer $U = 0$ olarak seçilirse

$$K = (I - \Psi F_s)^{-1}\Psi, \ \Psi = Z_{r,12}Z_{r,22}^{-1}$$

olarak ifade edilebilir. Bu durum Şekil 2.8.b'de gösterilmiştir. Burada sonsuz boyutlu yalnızca F_s'dir. Yukarıdaki teoremde tasarlanan F_s

$$F_s(s) = \tilde{C}(sI - A_H)^{-1}\left(e^{-s\tau}I - e^{-\tau A_H}\right)\tilde{B} + \left(e^{-s\tau} - 1\right)\tilde{D}$$

şeklindedir. F_s'nin ters Laplace dönüşümü

$$f(t) := \begin{cases} -\tilde{C}e^{(t-\tau)A_H}\tilde{B} + (\delta(t-\tau) - \delta(t))\tilde{D} & , t \in [0, \tau) \\ 0 & , t \notin [0, \tau) \end{cases}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla transfer matrisi F_s olan sistem bir sonlu darbe yanıtı (finite impulse response - FIR) filtresidir.

3 TEK TIKALI GEÇİT DURUMUNDA VERİ İLETİŞİM AĞININ MODELLENMESİ VE GÜRBÜZ DENETLEYİCİNİN TASARIMI

Bu bölümde ağ modelinde zamanla değişen gecikmelere karşın gürbüz kontrol araçları kullanılarak nasıl denetleyici tasarlanabileceği incelenecektir [6]. Ağ trafiği dinamiği deterministik akışkanlar teorisi ile ifade edilebilir [8].

3.1 Veri İletişim Ağının Modeli, Tek Tıkalı Geçit Durumu

Şekil 3.1'deki sistem verilsin. Sistemde denetlenecek değişken kuyruk uzunluğudur. Kuyruk uzunluğunun dinamiği

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i^b(t) - c(t)$$

denklemi ile verilir. Burada $q(t)$, t anındaki kuyruk uzunluğu, $r_i^b(t)$ ise i. kaynaktan tıkalı düğüme t anında ulaşan veri iletim oranıdır. $c(t)$, tıkalı geçitin link kapasitesi veya *çıkış akış oranı*dır. Şekil 3.1'de gidiş-geliş gecikmesi $\tau_i(t)$

$$\tau_i(t) = \tau_i^b(t) + \tau_i^f(t)$$

denklemi ile tanımlanır. Burada

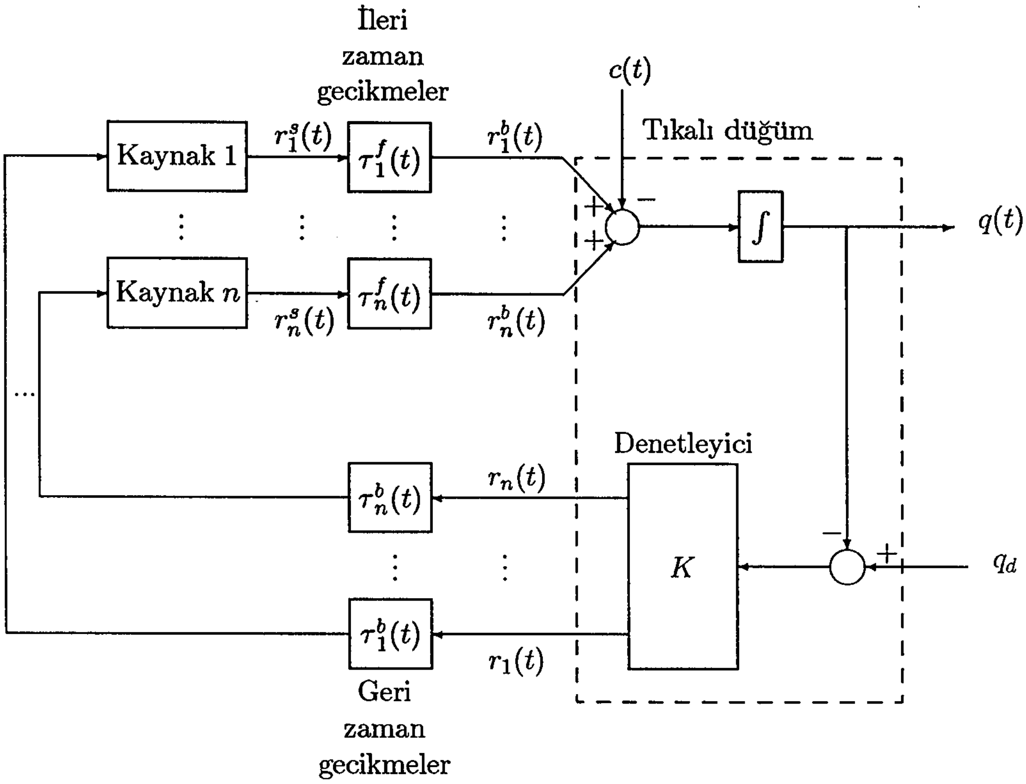
> $\tau_i^b(t) := h_i^b + \delta_i^b(t)$ ile tanımlanan geri zaman gecikmesidir: denetleyici ile i. kaynak arasındaki veri iletimindeki gecikmedir. h_i^b bilinen nominal zamanla değişmeyen geri gecikmesidir, $\delta_i^b(t)$ ise geri gecikmenin zamanla değişen fakat bilinmeyen kısmıdır. Başka bir deyişle $\delta_i^b(t)$ $\tau_i^b(t)$'nin değişimindeki belirsizliği temsil eder.
>
> $\tau_i^f(t) := h_i^f + \delta_i^f(t)$ ile tanımlanan ileri zaman gecikmesidir: i. kaynak ile tıkalı düğüm arasındaki veri akışındaki gecikmedir. h_i^f bilinen nominal zamanla değişmeyen ileri gecikmesidir. $\delta_i^f(t)$ ise ileri gecikmenin bilinmeyen zamanla değişen kısmıdır.

Gidiş-geliş gecikmesi tanımında $h_i := h_i^b + h_i^f$ ile nominal bilinen gecikmeyi tanımlamak mümkündür; $\delta_i(t) := \delta_i^b(t) + \delta_i^f(t)$ ise gecikmedeki belirsizliği temsil etmektedir.

Bu tanımlar altında

$$\int_0^t r_i^b(\varphi)\,d\varphi = \begin{cases} \int_0^{t-\tau_i^f(t)} r_i^s(\varphi)\,d\varphi, & t-\tau_i^f(t) \geq 0 \\ 0, & t-\tau_i^f(t) < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

olarak yazılabilir. Burada



Şekil 3.1: Geri besleme kontrol sistemi

$r_i^s(t) := r_i\left(t - \tau_i^b(t)\right)$ i. kaynaktan t anındaki iletim oranıdır
$r_i(t)$ t anındaki denetleyici tarafından öngörülen iletim oranı komutudur.

Denklem (3.1)'deki ifadenin her iki yanının türevinin alınmasıyla

$$r_i^b(t) = \begin{cases} \left(1 - \dot{\delta}_i^f(t)\right) r_i(t - \tau_i(t)), & t - \tau_i^f(t) \geq 0 \\ 0, & t - \tau_i^f(t) < 0 \end{cases}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $r_i^s\left(t - \tau_i^f(t)\right) = r_i(t - \tau_i(t))$ ve $\dot{\tau}_i^f(t) = \dot{\delta}_i^f(t)$ için özdeş ifadeler kullanılmıştır.

$\frac{d}{dt}\left(t - \tau_i^f(t)\right) > 0$ varsayımı altında $\dot{\tau}_i^f(t) < 1$ veya eşdeğer olarak $\dot{\delta}_i^f(t) < 1$ eşitsizlikleri geçerlidir. Böyle bir eşitsizlik yoksa veri akışında kopukluklar olacaktır. Ayrıca, negatif gecikmeyi önlemek amacı ile

$$|\delta_i(t)| < \delta_i^+ \leq h_i$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu varsayılır. Bunun dışında kuyruk uzunluğunun mevcut olan bellek kapasitesinden daha küçük olduğu ve negatif olmadığı varsayılacaktır. Bu varsayımlar zaten sistemin dinamiğinin yazılmasında da yer almıştır; zira saturasyonu temsil eden ifadeler denklemde yer almamıştır.

Bu durumda, yazılan eşitlikleri göz önünde bulundurarak kuyruk uzunluğu

$$q(t) = \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \dot{\delta}_i^f(\nu)\right) r_i(\nu - \tau_i(\nu)) - c(\nu) \right] d\nu + q(0)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$q_0(t) := \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} r_i(\nu - h_i) - c(\nu) \right] d\nu + q(0),$$

$$\delta_q(t) := q(t) - q_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \left[\left(1 - \dot{\delta}_i^f(\nu)\right) r_i(\nu - \tau_i(\nu)) - r_i(\nu - h_i) \right] d\nu \tag{3.2}$$

ve

$$\lambda_i := \nu - \tau_i(\nu) = \nu - h_i - \delta_i(\nu) =: f_i(\nu)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{d\lambda_i}{d\nu} = 1 - \frac{d\delta_i}{d\nu} = 1 - g_i(\lambda) \tag{3.3}$$

olarak yazılabilir. Burada $g_i(\lambda) := \frac{d\delta_i}{d\nu}\Big|_{\nu = f_i^{-1}(\lambda)}$ olarak ifade edilir. Negatif gecikmeleri sözkonusu olamayacağından $\nu = f_i^{-1}(\lambda)$ vardır. Bu eşitliklerden $\frac{d\lambda_i}{d\nu} > 0$ veya $g_i(\lambda) < 1$ ifadeleri meydana gelmektedir. $g_i(\lambda)$ alttan ve üstten sınırlı olsun, yani

$$|g_i(\lambda)| < \beta_i \quad \forall \lambda \geq -h_i$$

geçerli olsun. Ayrıca $g_i(\lambda) < 1$ eşitsizliğini göz önünde bulundurarak β_i'nin bir ile sınırlı olduğunu kabul etmek doğaldır, yani $0 < \beta_i < 1$. Benzer olarak

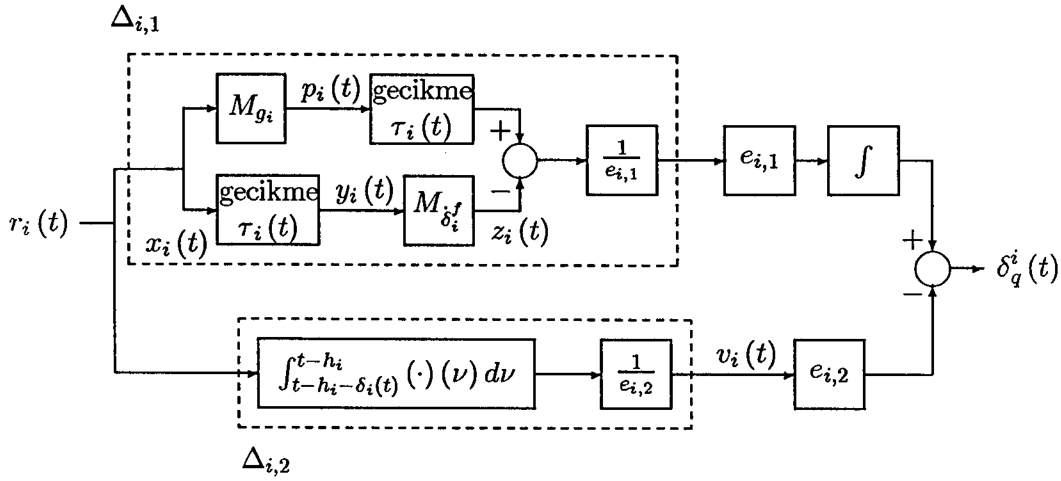
$$\left|\dot{\delta}_i^f\right| < \beta_i^f < \beta_i < 1$$

eşitsizliği de varsayılacaktır. (3.3) denkleminden

$$d\nu = \frac{d\lambda_i}{1 - g_i(\lambda_i)}$$

olarak yazılabilir. $\delta_i(0) = 0$ kabul edilerek (3.2) denklemi

$$\begin{aligned}
\delta_q(t) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^t (1 - \dot{\delta}_i^f(\nu)) r_i(\nu - \tau_i(\nu))\, d\nu - \int_{-h_i}^{t-h_i} r_i(\sigma)\, d\sigma \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^t (1 - \dot{\delta}_i^f(\nu)) r_i(\nu - \tau_i(\nu))\, d\nu - \int_{-h_i}^{t-h_i} r_i(\sigma)\, d\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_{-h_i}^{t-h_i-\delta_i(t)} r_i(\sigma)\, d\sigma - \int_{-h_i}^{t-h_i-\delta_i(t)} r_i(\lambda_i)\, d\lambda_i \right]
\end{aligned}$$



Şekil 3.2: Sistemin belirsizlikler modeli

$$\begin{aligned}\delta_q(t) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^t (1-\dot{\delta}_i^f(\nu))r_i(\nu-\tau_i(\nu))\,d\nu - \int_{t-h_i-\delta_i(t)}^{t-h_i} r_i(\nu)\,d\nu\right.\\ &\qquad \left. - \int_0^t r_i(\nu-\tau_i(\nu))\left[1-g_i(\nu-\tau_i(\nu))\right]d\nu\right]\end{aligned}$$

$$\delta_q(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^t \left[g_i(\nu-\tau_i(\nu)) - \dot{\delta}_i^f(\nu)\right] r_i(\nu-\tau_i(\nu))\,d\nu - \int_{t-h_i-\delta_i(t)}^{t-h_i} r_i(\nu)\,d\nu\right] \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\delta_q(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta_q^i(t)$ olarak yazılabilir. Burada $\delta_q^i(t)$ Şekil 3.2'de gösterilmiş olan sistemin çıkışıdır. Sistemde $\Delta_{i,1}$ ve $\Delta_{i,2}$ doğrusal zamanla değişen sistemlerdir. M_{g_i} ve $M_{\dot{\delta}_i^f}$ sistemler ise $p_i(t) = g_i(t)\, r_i(t)$ ve $z_i(t) = \dot{\delta}_i^f(t)\, y_i(t)$ sırasıyla tanımlanan zamanla değişen doğrusal sistemlerdir. $e_{i,j}$ ise daha sonra belirlenecek sabitlerdir. Eğer $t < 0$ için $r_i(t) = 0$ olarak kabul edilirse

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |y_i(t)|^2\,dt &= \int_0^\infty |x_i(t-\tau_i(t))|^2\,dt = \int_{-\tau_i(t)}^\infty |x_i(\lambda_i)|^2 \frac{d\lambda_i}{1-g_i(\lambda_i)}\\ &= \int_0^\infty |x_i(\lambda_i)|^2 \frac{d\lambda_i}{1-g_i(\lambda_i)} < \frac{1}{1-\beta_i}\int_0^\infty |x_i(\lambda_i)|^2\,d\lambda_i\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikten gecikme bloklarının ($\Delta_{i,1}$'de bulunan) $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{1-\beta_i}}$'den daha küçüktür. Bundan dolayı $\Delta_{i,1}$'nin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\left(\frac{\beta_i+\beta_i^f}{\sqrt{1-\beta_i}}\right)\frac{1}{e_{i,1}}$'den daha küçüktür. Bu durumda eğer $e_{i,1} = \frac{\beta_i+\beta_i^f}{\sqrt{1-\beta_i}}$ olarak seçilirse $\Delta_{i,1}$'nin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu 1'den daha küçük olacaktır. Benzer olarak $r_i(t) \geq 0$ ve $|\delta_i(t)| < \delta_i^+$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \int_{t-h_i-\delta_i(t)}^{t-h_i} r_i(\nu)\, d\nu \right\|_2 \leq \left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \int_{t-h_i-\delta_i^+}^{t-h_i+\delta_i^+} r_i(\nu)\, d\nu \right\|_2 \tag{3.5}$$

ifadesi elde edilebilir. Bu durumda

$$\hat{v}_i(s) = \frac{1}{2\delta_i^+} \left(\frac{e^{-\left(h_i-\delta_i^+\right)s} - e^{-\left(h_i+\delta_i^+\right)s}}{s} \right) r_i(s)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\|\hat{v}_i\|_2 \leq \left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \left(\frac{e^{-\left(h_i-\delta_i^+\right)s} - e^{-\left(h_i+\delta_i^+\right)s}}{s} \right) \right\|_\infty \|r_i\|_2 \tag{3.6}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\hat{v}_i(s)$ ve $r_i(s)$ ile $\hat{v}_i(t)$ ve $r_i(t)$'nin sırasıyla Laplace dönüşümleri gösterilmektedir. Yukarıdaki ifadede yer alan norm için

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \left(\frac{e^{-\left(h_i-\delta_i^+\right)s} - e^{-\left(h_i+\delta_i^+\right)s}}{s} \right) \right\|_\infty &= \left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \frac{1-e^{-2\delta_i^+ s}}{s} e^{-\left(h_i-\delta_i^+\right)s} \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \frac{1-e^{-2\delta_i^+ s}}{s} \right\|_\infty \left\| e^{-\left(h_i-\delta_i^+\right)s} \right\|_\infty = \left\| \frac{1}{2\delta_i^+} \frac{1-e^{-2\delta_i^+ s}}{s} \right\|_\infty \\ &= \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma_{\max} \left(\frac{1}{2\delta_i^+} \frac{1-e^{-2\delta_i^+ s}}{s} \right) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\delta_i^+} \frac{1-e^{-2\delta_i^+ s}}{s} \right| < 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada son eşitsizlik, Şekil 3.3'te gösterildiği gibi $\left|1-e^{-2\delta_i^+ j\omega}\right|$'nin uzunluğu $\left|2\delta_i^+\omega\right|$ olan yayın kirişi olmasından kaynaklanmaktadır. Buradan, (3.6) eşitsizliği $\|\hat{v}_i\|_2 < \|r_i\|_2$ şeklini almaktadır. Dolayısıyla, $e_{i,2} = 2\delta_i^+$ seçildiğinde (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden

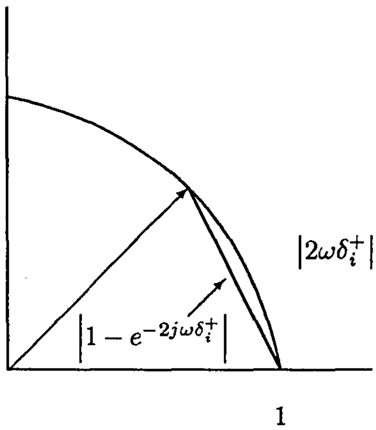
$$\|v_i\|_2 \leq \|\hat{v}_i\|_2 < \|r_i\|_2$$

bulunmaktadır. Böylece $\Delta_{i,2}$'nin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu 1'den küçük olacaktır.

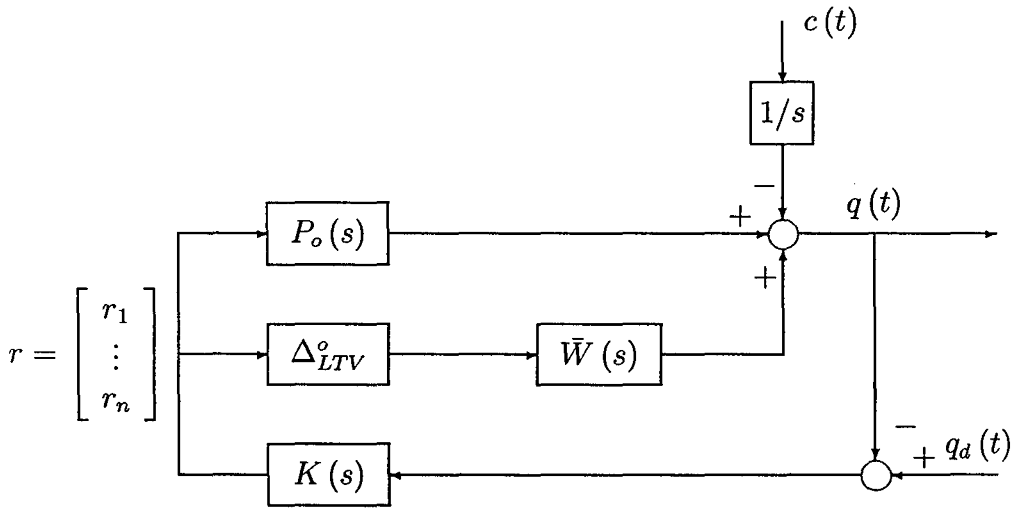
Bu durumda orijinal sistem Şekil 3.4'te gösterildiği gibi olacaktır. Şekilde

$$\Delta_{LTV}^o = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1,1}^o \\ \Delta_{1,2}^o \end{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{bmatrix} \Delta_{n,1}^o \\ \Delta_{n,2}^o \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \begin{bmatrix} \bar{W}_1(s) & \cdots & \bar{W}_n(s) \end{bmatrix} \\ \bar{W}_i(s) &= \begin{bmatrix} \frac{e_{i,1}}{s} & e_{i,2} \end{bmatrix} \\ P_o(s) &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} e^{-h_1 s} & \cdots & e^{-h_n s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Şekil 3.3: (3.7)'deki ifadesinin grafiksel yorumu



Şekil 3.4: Suni sistem

olarak tanımlanmıştır. Bu durumda Δ^o_{LTV}'nun $\mathcal{L}_2$-endüklenmiş normu $\sqrt{2}$'den daha küçüktür. Küçük kazanç teoremi[1] kullanılarak Şekil 3.4'teki sistemde bütün $\|\Delta^o_{LTV}\| < \sqrt{2}$ olan değerler için, eğer K denetleyicisi P_o'yu kararlılaştırıyor ve

$$\left\|K(1+P_oK)^{-1}\bar{W}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.8}$$

ifadesini sağlıyorsa K P_o'yu gürbüz kararlı kılar.

[6] makalesinde gösterildiği gibi

$$\left\|W_2K(1+P_oK)^{-1}\right\|_\infty \leq 1$$

[1]Eğer $H \in \mathcal{H}_\infty^{m\times m}$ ve $\|H\|_\infty < 1$ ise $(I-H)^{-1} \in \mathcal{H}_\infty^{m\times m}$, [25, Theorem A.0.7]

eşitsizliği sağlanıyorsa (3.8) eşitsizliği sağlanır.. Burada

$$
\begin{aligned}
W_2 &:= \sqrt{2}\left(\frac{1}{s}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_{i,1}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_{i,2}^2}\right) I_n =: \xi(s) I_n = \left(\frac{1}{s}\xi_1 + \xi_2\right) I_n, \\
\xi_1 &:= \sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_{i,1}^2}, \qquad \xi_2 := \sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_{i,2}^2}
\end{aligned}
$$

ve I_n n-boyutlu birim matris olarak tanımlanmıştır. Dikkat edilirse

$$
\begin{aligned}
\|W_2\|_\infty &= \max_{\omega\in\mathbb{R}} \left(\sqrt{2}\frac{1}{\omega}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_{i,1}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_{i,2}^2}\right) \\
&> \|\bar{W}\|_\infty = \max_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\omega^2}e_{i,1}^2 + e_{i,2}^2\right)}
\end{aligned}
$$

eşitlisizliği sağlanmaktadır.

3.2 Optimizasyon Problemi: Tek Tıkalı Geçit Durumu

Bu kısımda ilk olarak en basit durum ele alınacaktır. Daha sonra genelleştirme yapılacaktır.

3.2.1 SISO Gecikmeli Sistem İçin Denetleyici Tasarlanması

$$
P = \frac{1}{s}e^{-hs}, \qquad W_1 = \frac{1}{s^2}, \qquad W_2 = \frac{\eta_1}{s} + \eta_2
$$

verilsin. Burada η_1 ve η_2'nin değeri $\sqrt{2e_1}$ ve $\sqrt{2e_2}$ olarak tanımlanmıştır. Optimizasyon problemi

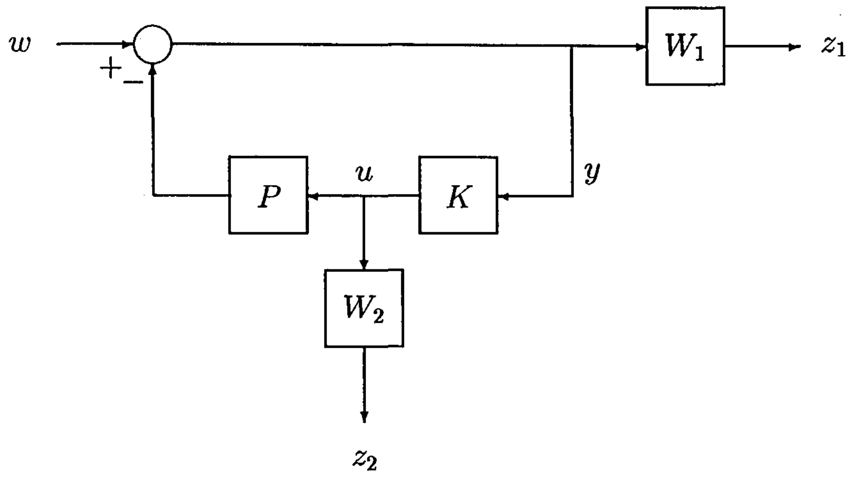
$$
\inf_{K\ P\text{'yi kararlılaştırıyor}} \left\| \begin{matrix} W_1(1+PK)^{-1} \\ W_2K(1+PK)^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty =: \gamma^{opt}, \qquad \gamma \geq \gamma^{opt} > 0
$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda yukarıdaki optimizasyon probleminin minimizasyonu,

$$
H = \begin{bmatrix} W_1(1+PK)^{-1} \\ W_2K(1+PK)^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Hw
$$

ile tanımlanan sistemin w'dan $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$'ye olan transfer fonksiyonunun minimizasyonu anlamına gelmektedir. H ile simgelenen transfer matrisinin blok diyagramının gösterimi Şekil 3.5'da verilmiştir. Şekil 3.5'daki gösteriminden yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
z_1 &= W_1 y, \qquad z_2 = W_2 u, \\
y &= w - Pu \Rightarrow w = Pu + y
\end{aligned}
$$



Şekil 3.5: İki blok optimizasyon problemi, standart yapısı

yazılabilir. Right Möbius map kullanıldığında genelleştirilmiş plant

$$G = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \\ P & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} \\ \frac{\eta_1}{s} & 0 \\ \eta_2 & 0 \\ \frac{1}{s}e^{-hs} & 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Kolayca görünür ki $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$'den $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{bmatrix}$'ya olan transfer matrisi G'dir. Bu durumda [28]'teki makalenin sonucunu uygulayabilmek için W_1 ve W_2 kararlı ağırlık fonksiyonları olması gerekir. Bu durumda birden fazla yöntem uygulanabilir, ancak probleme en uygun olan [27] makalesindeki sonuçlardır.

$$G = G_N G_D^{-1}, \qquad G_N \in \mathcal{H}_\infty,\ G_D \in \mathcal{H}_\infty$$

$\mathcal{H}_\infty$'üzerindeki göreceli asal ayrıştırma olsun. Bu durumda aranan denetleyici

$$K = RMM\left(D_G,\ \bar{K}\right)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\bar{K}$, G_N'ye karşılık gelen denetleyicidir.

$$\begin{aligned}
G_N &= \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1}{s+\varepsilon}\right)^2 \\ \eta_1\frac{1}{s+\varepsilon} + \eta_2\frac{s}{s+\varepsilon} & 0 \\ \frac{1}{s+\varepsilon}e^{-hs} & \left(\frac{s}{s+\varepsilon}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 & 0 \\ \bar{P}e^{-hs} & V \end{bmatrix}, \\
\bar{P} &= \frac{1}{s+\varepsilon},\ V = \left(\frac{s}{s+\varepsilon}\right)^2,\ \hat{W}_1 = \left(\frac{1}{s+\varepsilon}\right)^2,\ \hat{W}_2 = \eta_1\frac{1}{s+\varepsilon} + \eta_2\frac{s}{s+\varepsilon} \\
G_D &= \begin{bmatrix} \frac{s}{s+\varepsilon} & 0 \\ 0 & \left(\frac{s}{s+\varepsilon}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ 0 & G_{D2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. G_N'ye ait optimizasyon problemi

$$\inf_{\bar{K}\ \bar{P}e^{-hs}\text{'i kararlılaştırıyor}} \left\| \begin{array}{c} \hat{W}_1\left(1+\bar{P}e^{-hs}\bar{K}\right)^{-1} \\ \hat{W}_2\bar{K}\left(1+\bar{P}e^{-hs}\bar{K}\right)^{-1} \end{array} \right\|_{\infty} =: \gamma^{opt} \qquad (3.9)$$

ifadesi ile verilmektedir. Bu durumda [28] makalesindeki sonuç (3.9)'deki optimizasyon probleminin çözümüne uygulanabilir. $\gamma \geq \gamma^{opt}$ için

$$J_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlandığında

$$G_N^{\sim} J_\gamma G_N = W^{\sim}\hat{J}W, \qquad W : \text{çift kararlı}$$

J-spektral ayrıştırma probleminin çözülmesi gerekir. Bu problem 2.5 kısmında incelenen probleme denktir. O halde G_r G_N'nin rasyonel kısmı olsun. G_r

$$G_r \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon^2 & -2\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta_1 & 0 & 0 \\ -\eta_2\varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & -\varepsilon^2 & -2\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \eta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Sistemler üzerinde standart işlemler yaparak [18, section 3.4]

$$G_r^{\sim} J_\gamma G_r \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ -C^*J_\gamma C & -A^* & -C^*J_\gamma D \\ \hline D^*J_\gamma C & B^* & D^*J_\gamma D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan (2.4) denklemi gereğince

$$A_H = \hat{A} - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2$$

olarak tanımlanır. F_s'nin "gerçeklenmesi" (2.5) ifadesinden

$$F_s \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_H & \left(e^{-hs}I - e^{-hA_H}\right)\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21}\right) \\ \hline \hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2 & \left(e^{-hs}-1\right)\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (2.3) denkleminde tanımlanan Θ'nın gerçeklenmesi

$$\Theta \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & B_\Theta \\ \hline C_\Theta & D_\Theta \end{array}\right],$$

$$\begin{aligned} B_\Theta &= \left[\begin{array}{cc} e^{-hA_H}\hat{B}_1 + \left(I - e^{-hA_H}\right)\hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{D}_{21} & \hat{B}_2 \end{array}\right], \\ C_\Theta &= \left[\begin{array}{c} \hat{C}_1 e^{hA_H} + \hat{D}_{12}\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\left(I - e^{hA_H}\right) \\ \hat{C}_2 \end{array}\right], \\ D_\Theta &= \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right] \end{aligned}$$

olarak verilir. Hamiltonian matrisi transfer matrisi Θ^{-1} olan sistemin dinamik matrisidir, yani

$$H_\gamma = \hat{A} - B_\Theta D_\Theta^{-1} C_\Theta. \tag{3.10}$$

Verilen problemde

$$D = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \eta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \qquad D^* J_\gamma D = \left[\begin{array}{cc} \eta_2^2 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{array}\right]$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right]^{-1} &= \left[\begin{array}{cc} \eta_2^2 & 0 \\ 0 & -\gamma_i^2 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\eta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\gamma_i^2} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right] \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$\hat{D}_{12} = \hat{D}_{21} = 0$$

olduğundan

$$\Theta \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & e^{-hA_H}\hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 e^{hA_H} & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array}\right],$$

$$\begin{aligned} H_\gamma &= \hat{A} - \left[\begin{array}{cc} e^{-hA_H}\hat{B}_1 & \hat{B}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{C}_1 e^{hA_H} \\ \hat{C}_2 \end{array}\right] \\ &= \hat{A} - \left[\begin{array}{cc} e^{-hA_H}\hat{B}_1\hat{D}_{11}^{-1} & \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{C}_1 e^{hA_H} \\ \hat{C}_2 \end{array}\right] \\ &= \hat{A} - \left(e^{-hA_H}\hat{B}_1\hat{D}_{11}^{-1}\hat{C}_1 e^{hA_H} + \hat{B}_2\hat{D}_{22}^{-1}\hat{C}_2\right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir.

$$\Theta = W_r^{\sim}\hat{J}W_r, \qquad W_r : \text{çift kararlı}, \qquad \hat{J} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right]$$

J-spekral ayrıştırma probleminin çözümü (2.9) eşitliği göz önünde bulundurularak ve

$$W_r \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & D_w \end{array}\right]$$

notasyondan faydalanarak,

$$D_w^* \hat{J} D_w = D_\Theta = D^* J_\gamma D$$

sağlayan D_w,

$$D_w = \begin{bmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^* J C & -A^* \end{bmatrix}, \qquad A : \textit{kararlı}$$

eşitliği daha önce verilmiştir. (3.10) eşitliği ile tanımlanan H_γ Hamiltonian matrisine ait Riccati denklemin kararlılaştırılan çözümü

$$X = \mathrm{Ric}\,(H_\gamma)$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} B_\Theta &= \begin{bmatrix} B_{\Theta,1} \\ B_{\Theta,2} \end{bmatrix}, \qquad B_{\Theta,2} = -C_{\Theta,1}^*, \\ C_\Theta &= \begin{bmatrix} C_{\Theta,1} & C_{\Theta,2} \end{bmatrix}, \qquad C_{\Theta,2} = B_{\Theta,1}^* \end{aligned}$$

eşitlikleri Θ'nın hesaplanmasından dolayı geçerli olduğu bilinir. O halde W_r'nin gerçeklenmesi

$$W_r \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} B_\Theta \\ \hline \hat{J} D_w^{-*} C_\Theta \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} & D_w \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir.

$\bar{K}$ denetleyicisi J-spektral ayrıştırma teorisi sonucu olarak

$$\bar{K} = RMM\left(W^{-1},\, U\right), \qquad \|U\|_\infty < 1$$

olarak parametrize edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} W^{-1} \quad &: = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \\ RMM\left(W^{-1},\, U\right) &= \left(Z_{11}U + Z_{12}\right)\left(Z_{21}U + Z_{22}\right)^{-1} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Merkezi denetleyici için $U \equiv 0$ olarak seçilir. Bu durumda

$$\bar{K} = Z_{12} Z_{22}^{-1}$$

olarak ifade edilir. Dikkat edilirse

$$W = W_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ F_s & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_s & 1 \end{bmatrix} W_r^{-1}$$

eşitliği geçerlidir. O halde eğer

$$W_r^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_s & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} - F_s\Psi_{11} & \Psi_{22} - F_s\Psi_{12} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir, dolayısıyla merkezi denetleyici için

$$\bar{K} = \Psi_{12}\left(\Psi_{22} - F_s\Psi_{12}\right)^{-1} = \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\left(I - F_s\Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\right)^{-1}$$

formülü elde edilir. Burada dikkat edilirse

$$\hat{K} = \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}$$

ile gösterilen denetleyici, gecikme olmadığı zaman ki denetleyicidir, yani $h = 0$ olduğunda ortaya çıkan denetleyicidir, zira $F_s \equiv 0$ olacaktır. Bu durumda

$$\bar{K} = \hat{K}\left(1 - F_s\hat{K}\right)^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$K = RMM\left(G_D,\ \bar{K}\right) = G_{D1}\bar{K}G_{D2}^{-1} = \frac{s+\varepsilon}{s}\bar{K}$$

ifadesi ile yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \bar{K} &= RMM\left(W^{-1},\ U\right) = RMM\left(TW_r^{-1},\ U\right) \\ &= RMM\left(T,\ RMM\left(W_r^{-1},\ U\right)\right) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} K &= RMM\left(G_D,\ \bar{K}\right) = RMM\left(G_D,\ RMM\left(T,\ RMM\left(W_r^{-1},\ U\right)\right)\right) \\ &= RMM\left(G_DT,\ RMM\left(W_r^{-1},\ U\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_s & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_D = \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ 0 & G_{D2} \end{bmatrix},$$

G_{D2} : skaler rasyonel fonksiyon

eşitlikleri gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} G_DT &= \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ 0 & G_{D2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ -G_{D2}F_s & G_{D2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ -F_sG_{D2} & G_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ 0 & G_{D2} \end{bmatrix} = TG_D \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned}
K &= RMM\left(G_D T,\ RMM\left(W_r^{-1},\ U\right)\right) \\
&= RMM\left(T G_D,\ RMM\left(W_r^{-1},\ U\right)\right) \\
&= RMM\left(T,\ RMM\left(G_D W_r^{-1},\ U\right)\right) \\
&= RMM\left(T,\ \tilde{K}\right) \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edilirse

$$\tilde{K} = RMM\left(G_D W_r^{-1},\ U\right)$$

ile tanımlanan denetleyici $h = 0$ olduğunda [27, Theorem 3.1]'de verilen denetleyiciye denktir, zira H_γ Hamiltonian matrisleri birbirine denktir. O halde denetleyici (3.11) eşitliğinden

$$K = \tilde{K}\left(1 - F_s\tilde{K}\right)^{-1} \qquad (3.12)$$

olarak yazılabilir. (3.12) denkleminde $h = 0$ ise $F_s \equiv 0$ olacağından, gecikme olmadığında denetleyicinin plantı kararlılaştırması sağlanmış olur.

Örnek Çözüm:

Örnek vermek gerekirse, $h = 1.5$, $\eta_1 = \sqrt{2}\sqrt{0.166}$, $\eta_2 = 2$ ve $\varepsilon = 1.2$ için $\gamma = 4.872$ olarak bulunur. Gecikmenin zamana göre değişimi

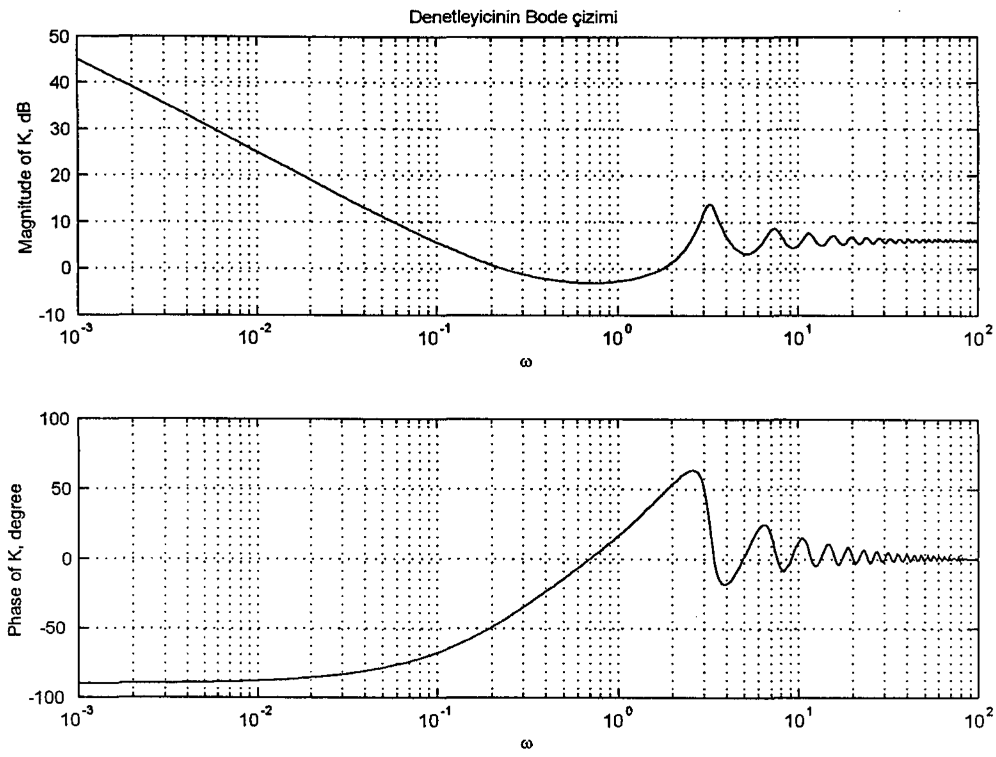
$$\begin{aligned}
h^b &= 0.9h, \qquad h^f = 0.1h, \\
\delta^b(t) &= 0.1 + 0.5\sin\frac{2\pi}{50}t, \qquad \delta^f(t) = 0.1h\sin\frac{\pi}{50}t
\end{aligned}$$

olarak seçilmiştir. Denetleyicinin Bode çizimi Şekil 3.6'da verilmiştir. Daha geniş frekans aralığı için aynı denetleyicinin Bode çizimi Şekil 3.7'de verilmiştir.

Matlab Simulink programı kullanılarak bu durum için tasarlanan kuyruk uzunluğu, $q_d = 30$ paket ve $c(t) = 60$ paket/s, için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.8'de verilmiştir. Karşılaştırma maksadı ile gecikme sabit iken ($\delta(t) = 0$) kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.9'da verilmiştir.

$c(t)$, link kapasitesinin etkisini incelemek için $c = 25$ ve $c = 5$ paket/s olduğunda simulasyon sonuçları Şekil 3.10 ve 3.11'de verilmiştir. Gecikmenin zamanla değiştiği kabul edilmiştir.

Şekillerden açıkça görülür ki $c(t)$'nin farklı değerler için, kapalı çevrim sistemin yatışkın duruma ulaşabilmesi için aynı zamana ihtiyacı vardır. Öte yandan, c'nin daha küçük değerler daha büyük üst taşmasına neden olabilmektedir. Gecikme zamana göre sabit olduğu durumlarda sistem küçük üst taşmasına sahip olmakta ve daha hızlı yatışkın duruma ulaşılmaktadır.



Şekil 3.6: Denetleyicinin Bode çizimi

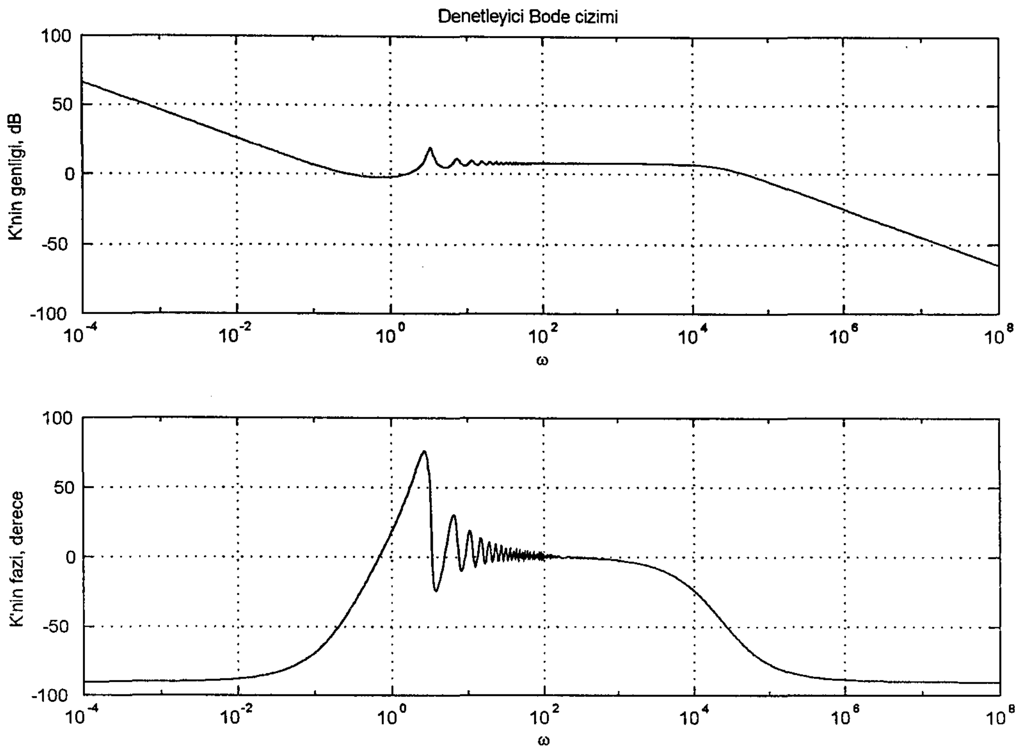
F_s'nin birim darbe yanıtı Şekil 3.12'de, Teorem 2.2'de tanımlanan X_1'nin en küçük tekil değerinin değişimi Şekil 3.13'te verilmiştir[2]. Daha küçük aralıkta X_1'nin en küçük tekil değerinin değişimi Şekil 3.14'te verilmiştir. γ'nin ve denetleyicinin hesaplanması Ek-2'de ve Ek-1'de sırasıyla verilen makrolar yardımı ile yapılabilir. Optimal γ, γ^{opt},

$$\gamma^{opt} = \inf\{\gamma^* \mid \text{bütün } \gamma \geq \gamma^* \text{ için } X_1 \text{ singüler değil}\}$$

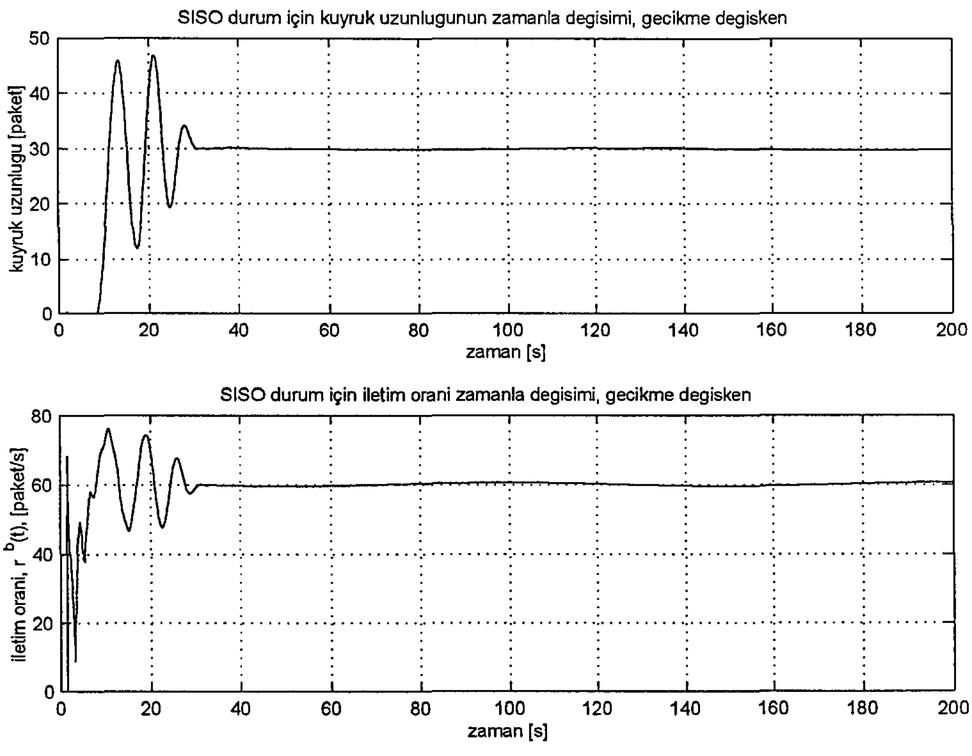
olarak hesaplanır.

ε'un etkisini incelemek için $q_d = 30$ paket, $c = 60$ paket/s, ve $\varepsilon = 0.5$ için F_s'nin birim darbe yanıtı, kuyruk uzunluğunun ve iletim oranın değişimi sırasıyla Şekil 3.15 ve 3.16'da verilmiştir.ve $q_d = 30$ paket, $c = 60$ paket/s, ve $\varepsilon = 2.5$ için F_s'nin birim darbe yanıtı, kuyruk uzunluğunun ve iletim oranın değişimi sırasıyla Şekil 3.17 ve 3.18'de verilmiştir. Büyük ε değerleri için X_1'in en küçük tekil değerinin hesaplanması zorlaşmaktadır. $\varepsilon = 5$ seçildiğinde X_1'nin en küçük tekil değerinin değişimi Şekil 3.19'da gösterilmiştir. Bu örnekte, $\varepsilon > 3$ için X_1'nin en küçük tekil değerinin hesaplanması güç olduğu için uygun bir γ değeri bulmak mümkün değildir. Ayrıca, bu örnekte $\varepsilon < 0.5$ için kapalı çevrim sisteminin simulasyonları problemli olmaktadır. Fakat,

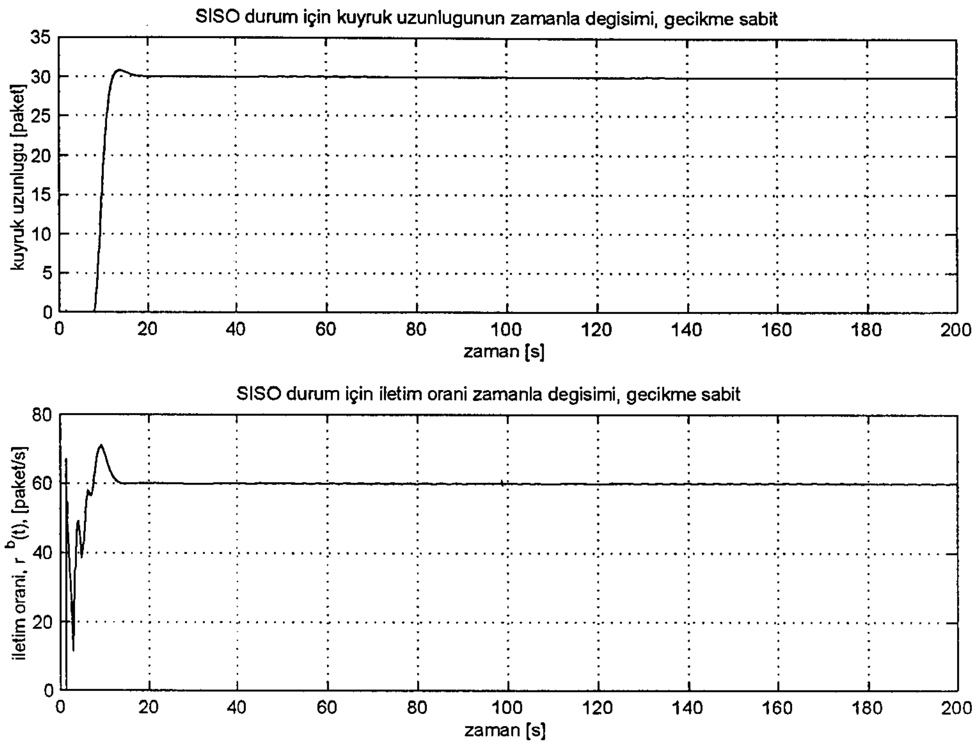
[2] X_1, $H_\gamma := L \begin{bmatrix} X_1 & \bar{T}_{12} \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} L^*$, $L^*L = I$, Schur ayrıştırması yoluyla hesaplanabilir. Bu ayrıştırma için Matlab'ta **ric_schr** komutu kullanılabilir. Detaylı bilgi için [38, Section 12.1] ve [18, Section 7.2] bakınız.



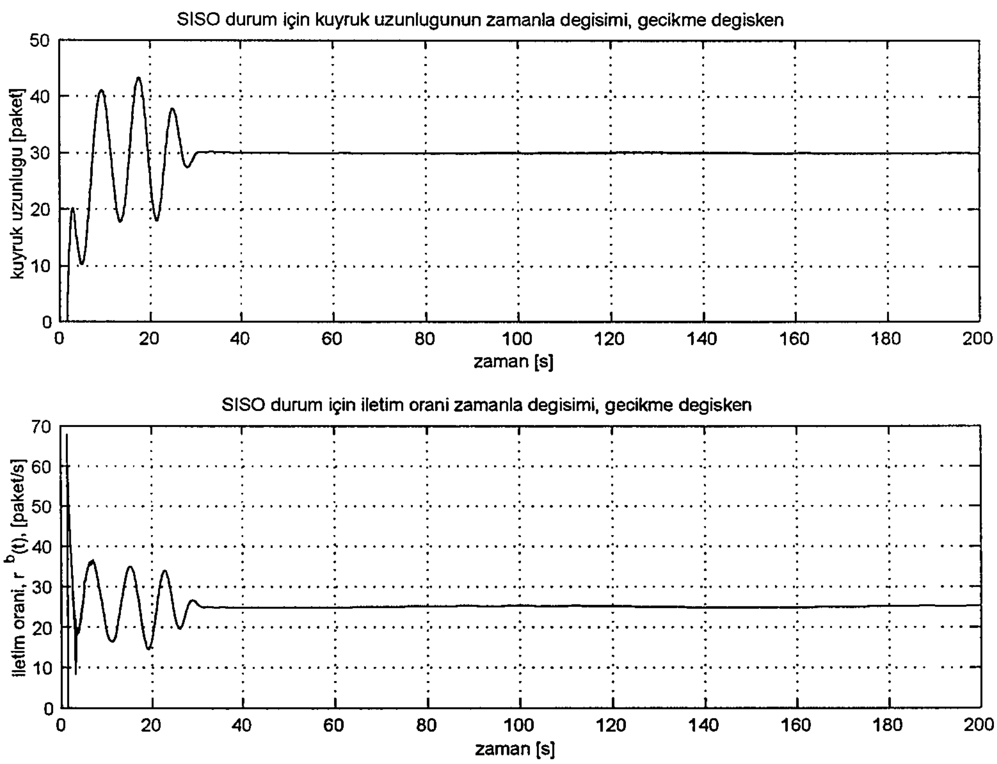
Şekil 3.7: Denetleyicinin daha geniş frekans aralığı için Bode çizimi



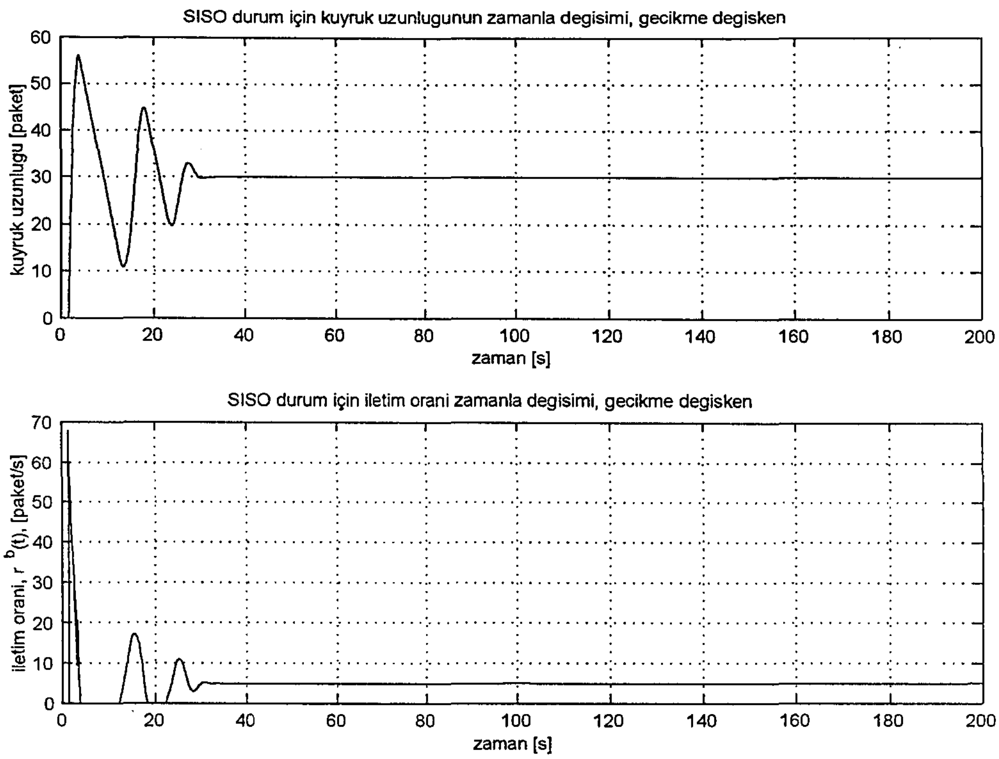
Şekil 3.8: $c = 60$ paket/s için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



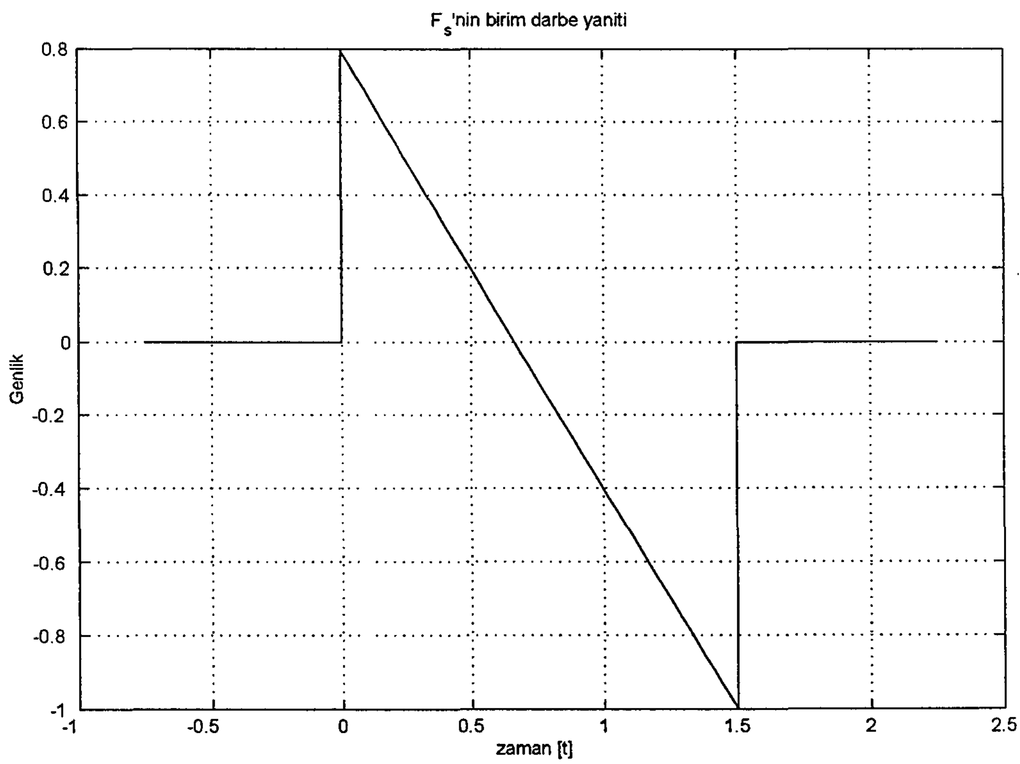
Şekil 3.9: $c = 60$ paket/s için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi, gecikme sabit



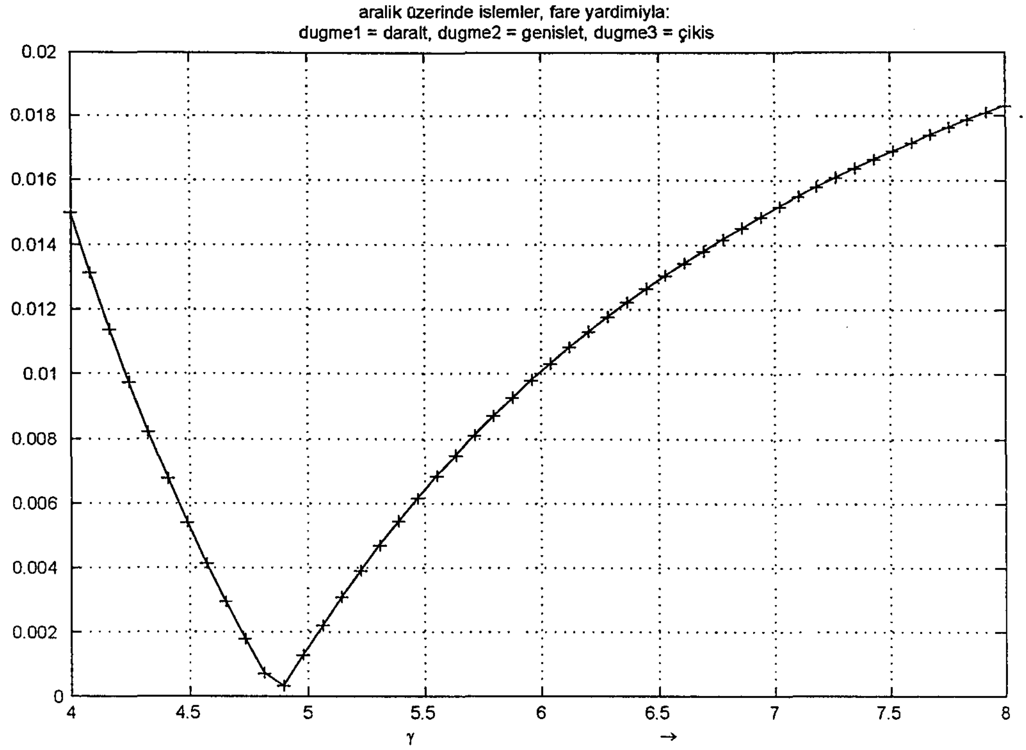
Şekil 3.10: $c = 25$ paket/s için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



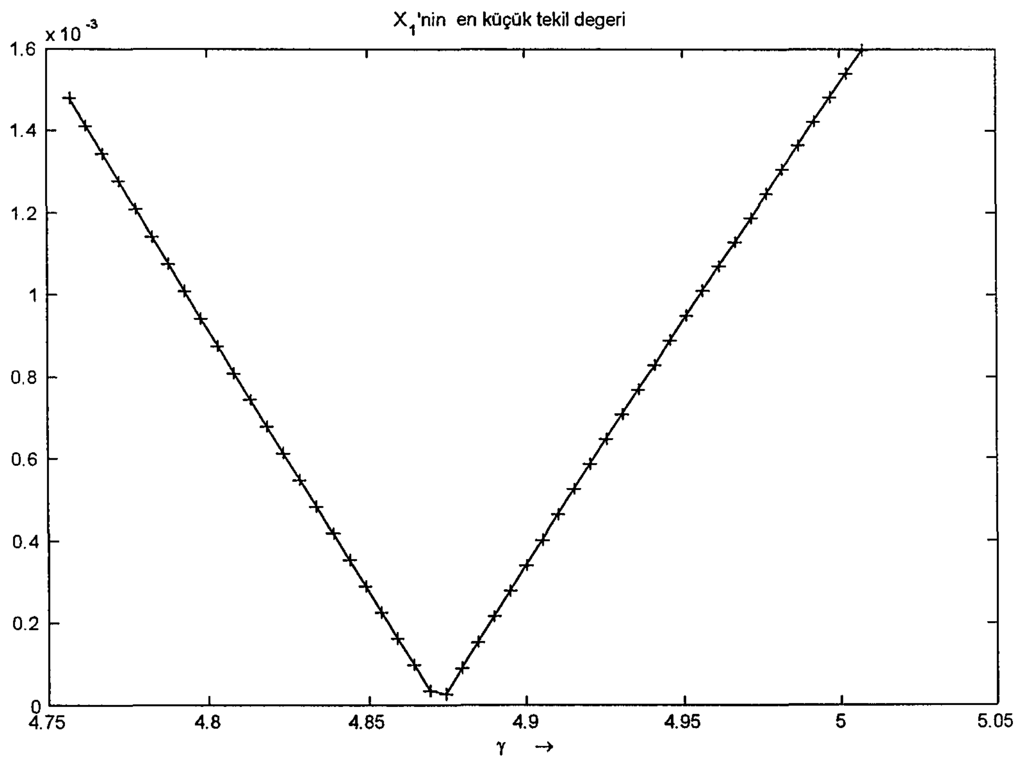
Şekil 3.11: $c = 5$ paket/s için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



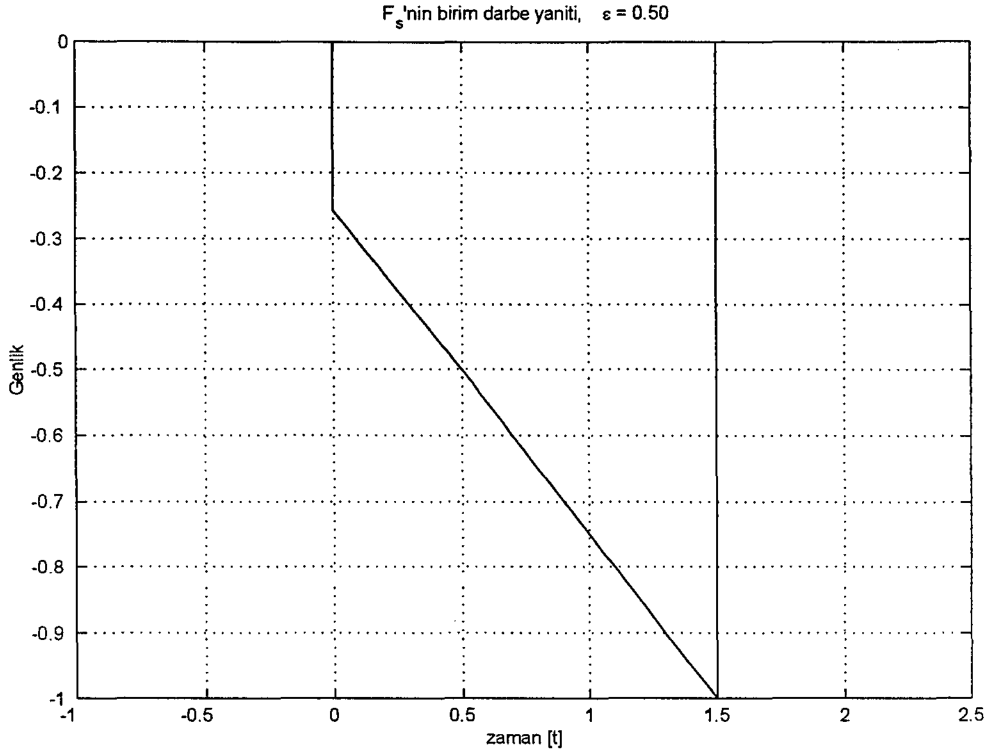
Şekil 3.12: F_s'nin birim darbe yanıtı



Şekil 3.13: X_1'nin en küçük tekil değerinin değişimi

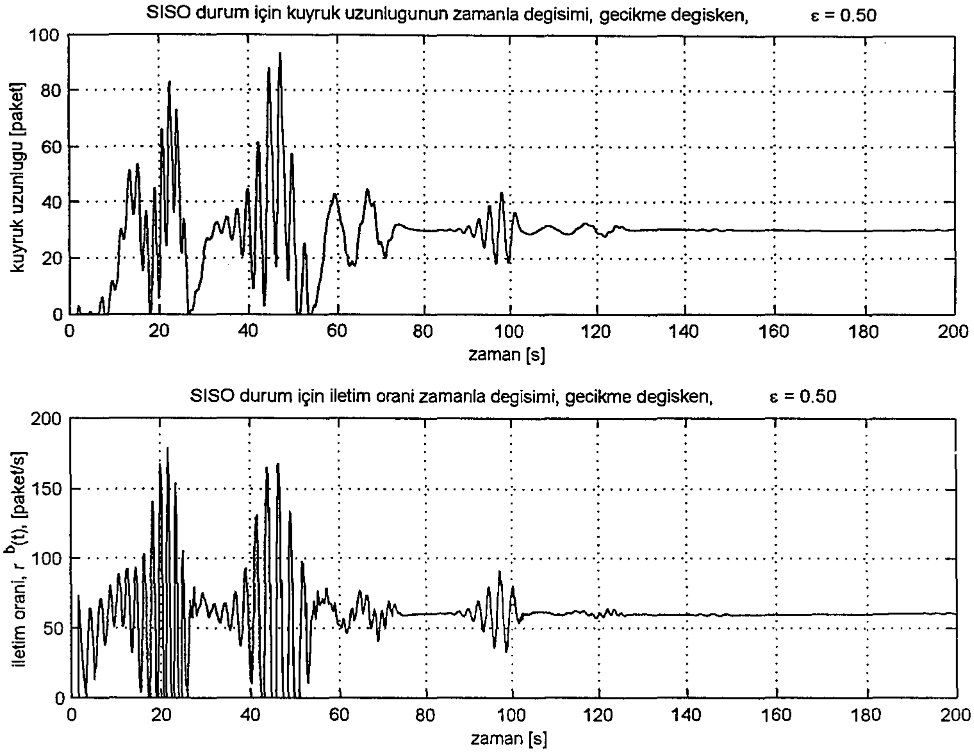


Şekil 3.14: Daha küçük aralıkta X_1'nin en küçük tekil değerinin değişimi

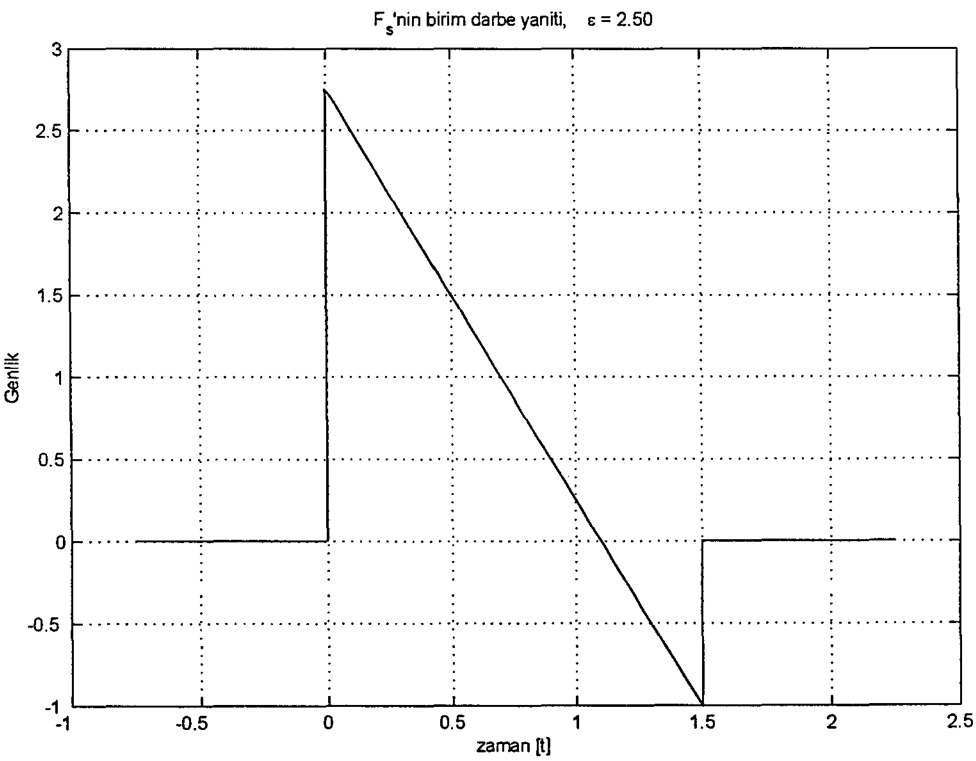


Şekil 3.15: $\epsilon = 0.5$ için F_s'nin birim darbe yanıtı

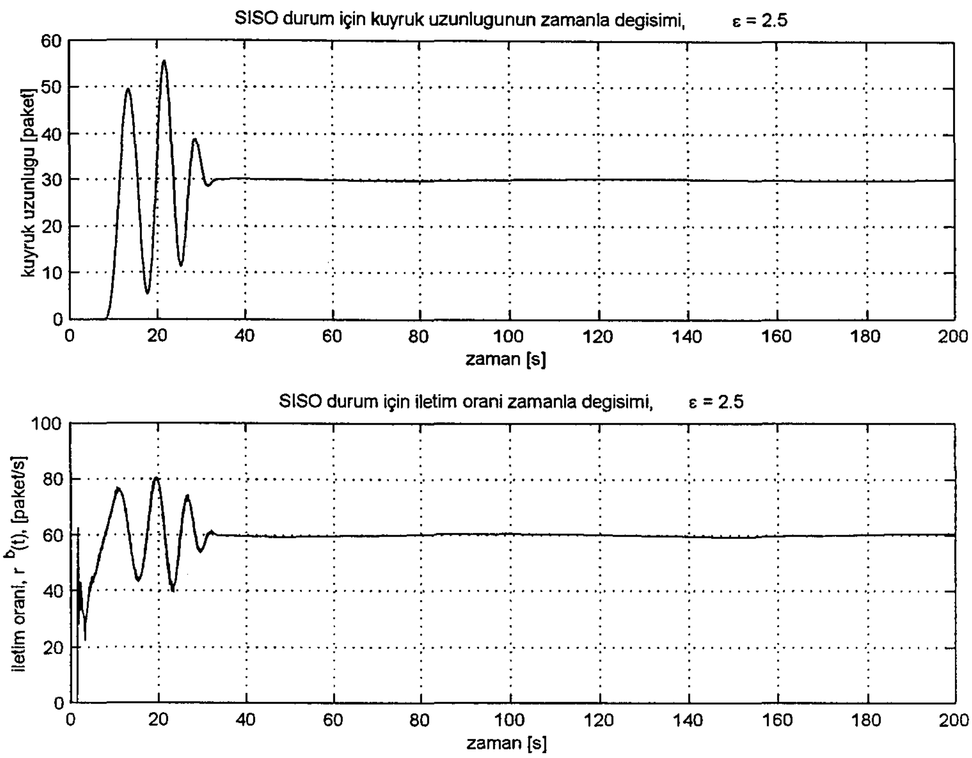
farklı ε'lar için, denetleyicinin Bode çizimlerinde, $\omega \in (10^{-3},\ 10^{2})$ frekans aralığı için her hangi bir değişiklik olmadığı görülmektedir. Şekil 3.20, 3.21, ve 3.22'de $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $\varepsilon = 10^{-9}$ için sırasıyla denetleyicinin Bode çizimi verilmiştir. Şekil 3.23'te F_s'nin $\varepsilon = 10^{-9}$ için birim darbe yanıtı verilmiştir.



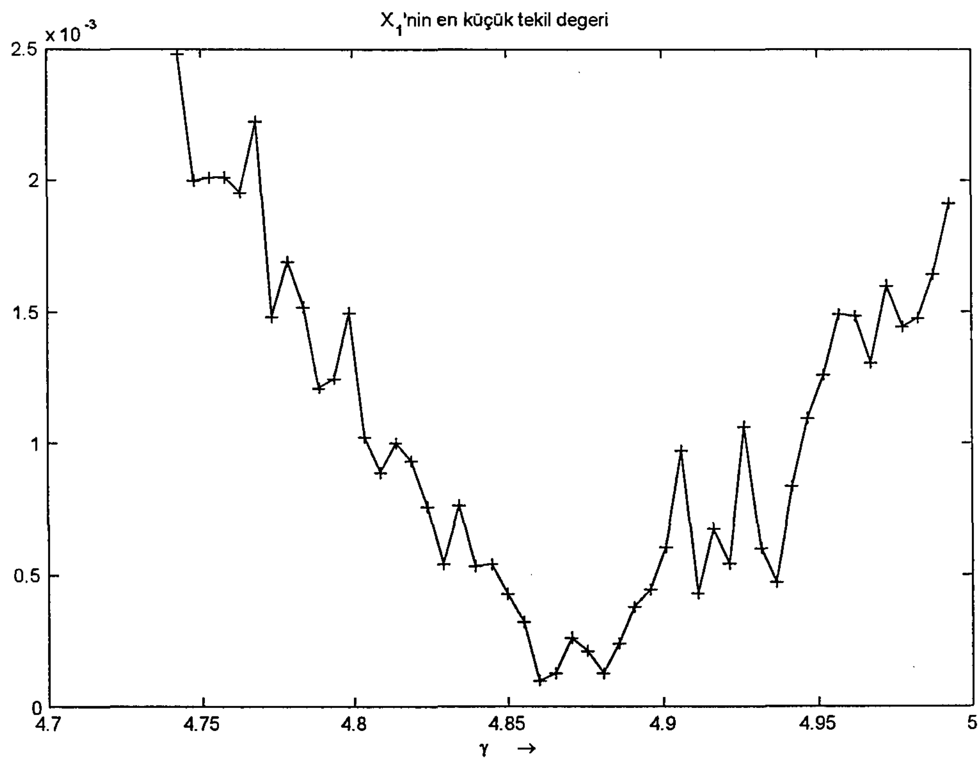
Şekil 3.16: $\epsilon = 0.5$ için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



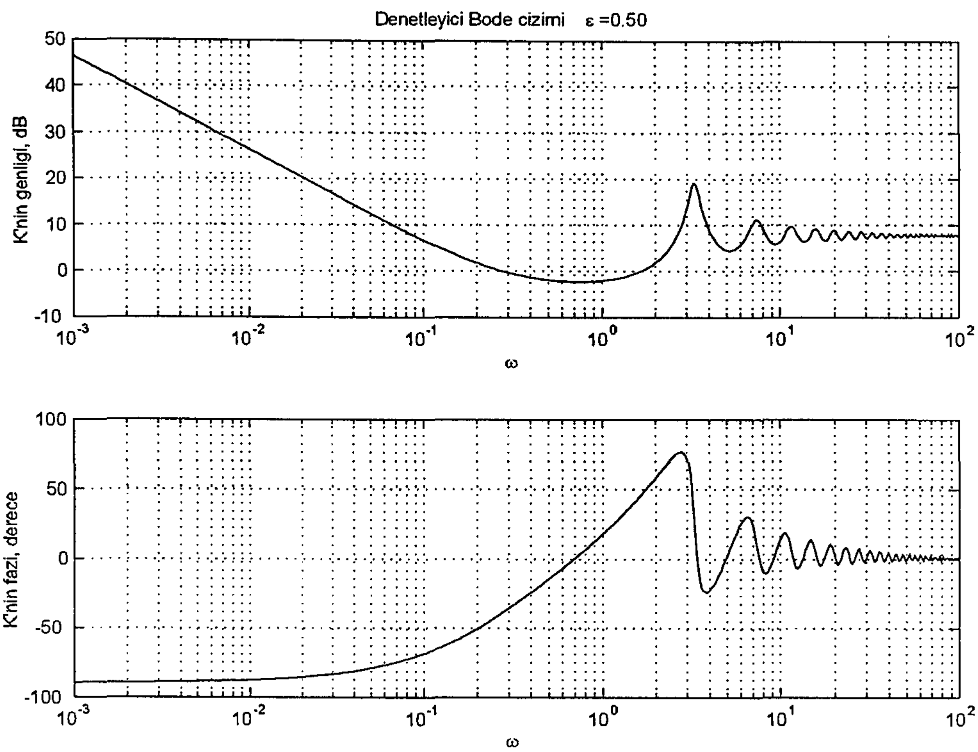
Şekil 3.17: $\epsilon = 2.5$ için F_s'nin birim darbe yanıtı



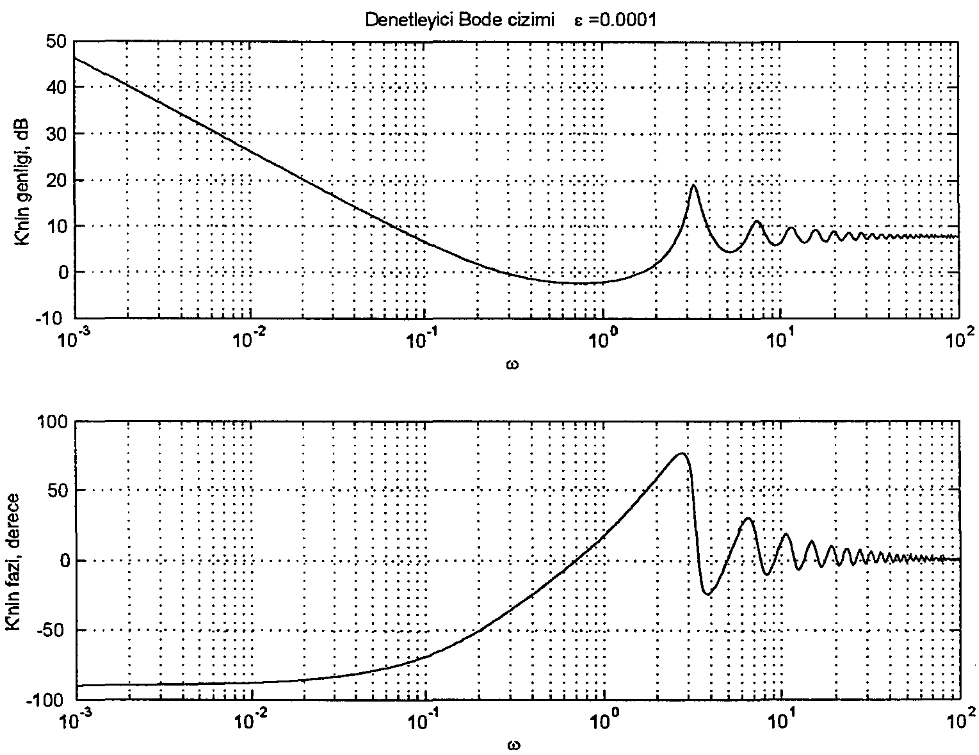
Şekil 3.18: $\epsilon = 2.5$ için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



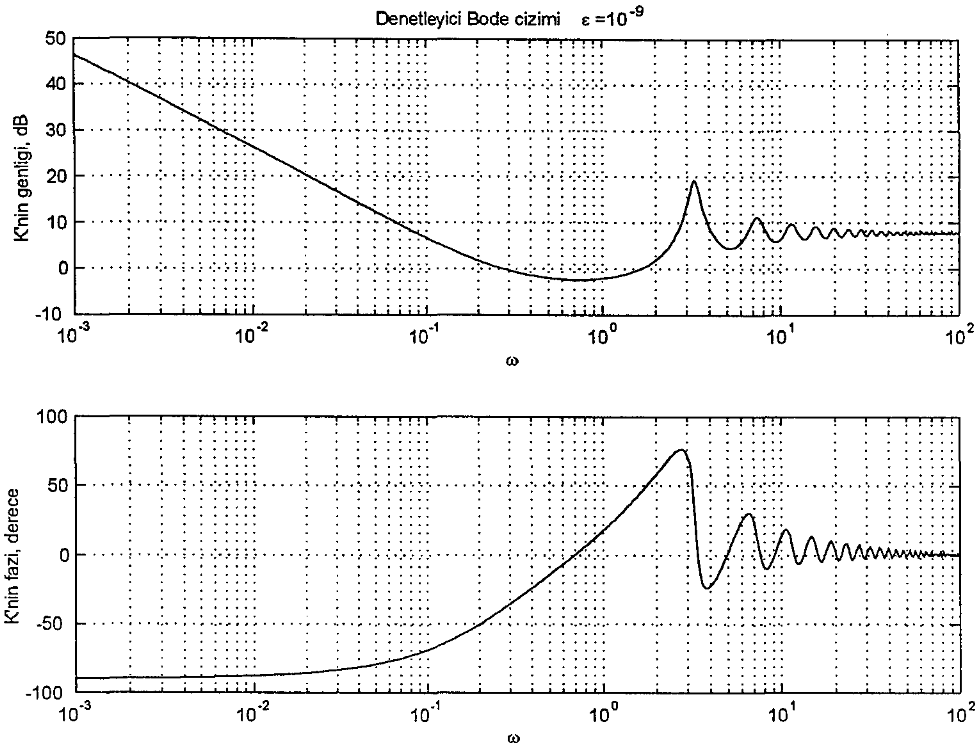
Şekil 3.19: $\epsilon = 5$ için X_1'nin en küçük tekil değerinin değişimi



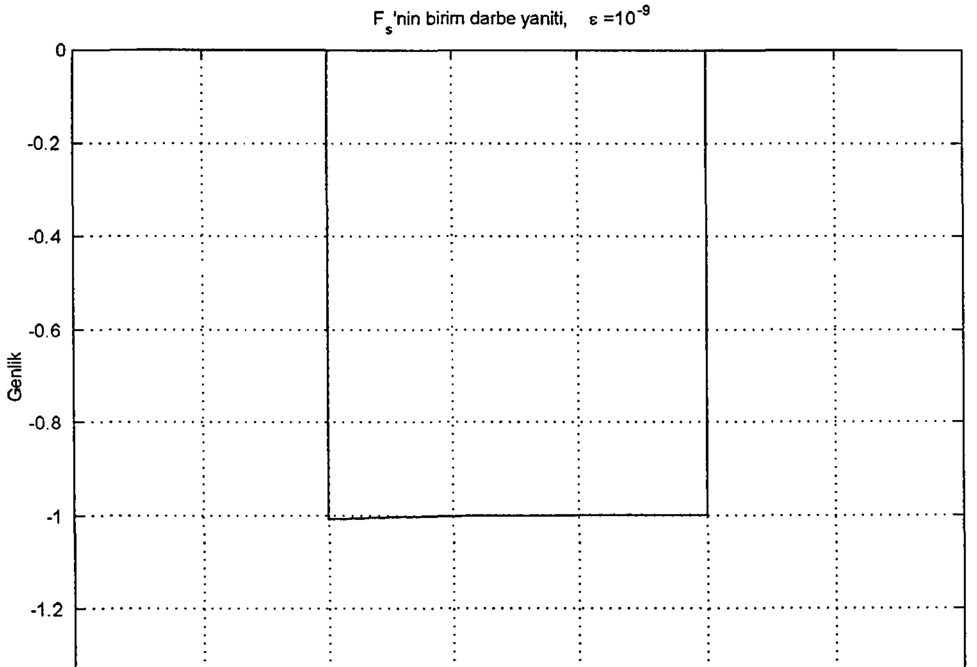
Şekil 3.20: $\epsilon = 0.5$ için denetleyicinin Bode çizimi



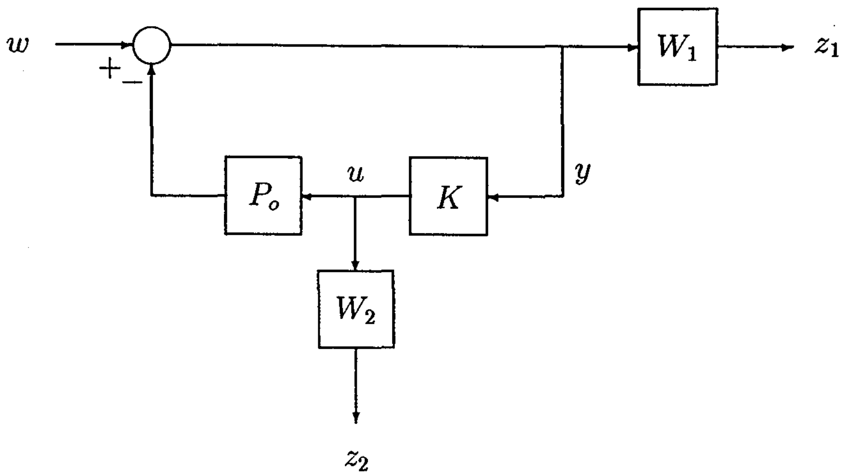
Şekil 3.21: $\epsilon = 10^{-4}$ için denetleyicinin Bode çizimi



Şekil 3.22: $\epsilon = 10^{-9}$ için denetleyicinin Bode çizimi



Şekil 3.23: $\epsilon = 10^{-9}$ için F_s'nin birim darbe yanıtı



Şekil 3.24: İki blok optimizasyon problemi, standart yapısı

3.2.2 MISO Gecikmeli Sistem İçin Denetleyici Tasarlanması

Daha iyi yatışkın durum ve geçici durum performansları elde etmek için

$$\left\| W_1 (1 + P_o K)^{-1} \right\|_\infty$$

normu minimize edilmeye çalışabilir [6]. Burada, [6] makalesinde oluğu gibi

$$W_1 := \frac{1}{s^2}$$

seçilebilir.

Bu durumda iki blok optimizasyon problemi

$$\inf_{K \quad P_o\text{'yu kararlılaştırıyor}} \left\| \begin{array}{c} W_1 (1 + P_o K)^{-1} \\ W_2 K (1 + P_o K)^{-1} \end{array} \right\|_\infty =: \gamma^{opt}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda yukarıdaki optimizasyon probleminin minimizasyonu,

$$H = \begin{bmatrix} W_1 (1 + P_o K)^{-1} \\ W_2 K (1 + P_o K)^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Hw$$

ile tanımlanan sistemin w'dan $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$'ye olan transfer fonksiyonunun minimizasyonu anlamına gelmektedir. H ile simgelenen transfer matrisinin blok diyagramının gösterimi Şekil 3.24'te verilmiştir. Şekil 3.24'teki gösteriminden yararlanılarak

$$\begin{aligned} z_1 &= W_1 y, \qquad z_2 = W_2 u, \\ y &= w - P_o u \Rightarrow w = P_o u + y \end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ Möbius gösterimi kullanıldığında genelleştirilmiş plant

$$G = \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_2 & 0 \\ P_o & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} \\ \left(\frac{1}{s}\xi_1 + \xi_2\right) I_n & 0 \\ \frac{1}{s}\mathbf{1}_n e^{-Fs} & 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$F := \begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{1}_n := \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1\times n}$$

olarak tanımlanmıştır. Kolayca görünür ki $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$'den $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{bmatrix}$'ya olan transfer matrisi G'dir. $P := \frac{1}{s}\mathbf{1}_n$ olsun.

$$Q = K\left(1 + Pe^{-Fs}K\right)^{-1}$$

olarak seçildiğinde,

$$\begin{aligned} K &= Q\left(1 - Pe^{-Fs}Q\right)^{-1}, \\ \left(1 + Pe^{-Fs}K\right)^{-1} &= 1 - Pe^{-Fs}Q \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Dolayısıyla optimizasyon problemi

$$\inf_{Q\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1\left(1 - Pe^{-Fs}Q\right) \\ W_2 Q \end{array} \right\|_\infty = \gamma^{opt} \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi

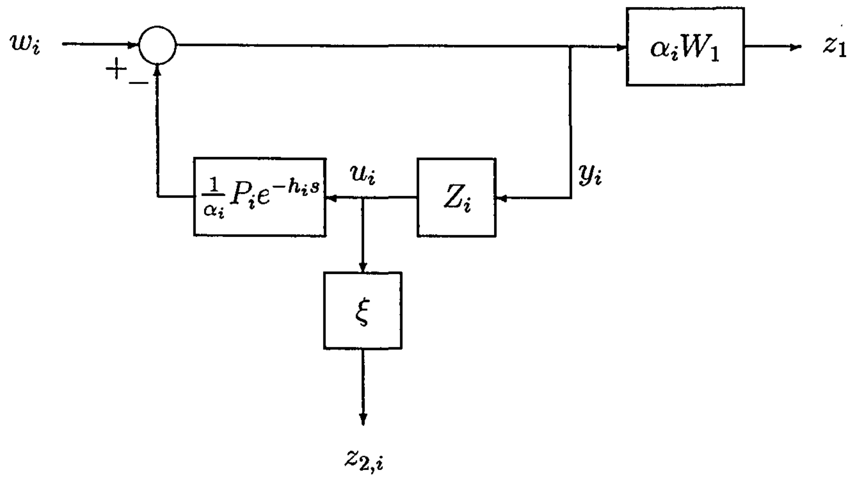
$$\begin{aligned} Pe^{-Fs} &= \begin{bmatrix} P_1 e^{-h_1 s} & \cdots & P_n e^{-h_n s} \end{bmatrix}, \\ W_2 &= \begin{bmatrix} W_{2,1} & \cdots & W_{2,n} \end{bmatrix}, \qquad Q^T = \begin{bmatrix} Q_1^T & \cdots & Q_n^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak seçilirse yukarıda yazılan optimizasyon problemi

$$\inf_{Q\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1\left(1 - \sum_{i=1}^n P_i e^{-h_i s} Q_i\right) \\ \sum_{i=1}^n W_{2,i} Q_i \end{array} \right\|_\infty = \gamma^{opt}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} & \inf_{Q\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1\left(1 - \sum_{i=1}^n P_i e^{-h_i s} Q_i\right) \\ \sum_{i=1}^n W_{2,i} Q_i \end{array} \right\|_\infty \\ = & \inf_{Q\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n W_1\left(\alpha_i - P_i e^{-h_i s} Q_i\right) \\ \sum_{i=1}^n W_{2,i} Q_i \end{array} \right\|_\infty \\ = & \inf_{Q\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n \alpha_i W_1\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} P_i e^{-h_i s} Q_i\right) \\ \sum_{i=1}^n W_{2,i} Q_i \end{array} \right\|_\infty \\ \leq & \inf_{Q\in\mathcal{H}_\infty} \sum_{i=1}^n \left\| \begin{array}{c} \alpha_i W_1\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} P_i e^{-h_i s} Q_i\right) \\ \xi Q_i \end{array} \right\|_\infty \\ = & \sum_{i=1}^n \inf_{Q_i\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \alpha_i W_1\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} P_i e^{-h_i s} Q_i\right) \\ \xi Q_i \end{array} \right\|_\infty \\ = & \gamma_1^{opt} + \gamma_2^{opt} + \cdots + \gamma_n^{opt} =: \hat{\gamma} \geq \gamma^{opt} \end{aligned}$$



Şekil 3.25: İki blok optimizasyon problemi

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ ve her i için $\alpha_i > 0$ paylama (öncelik) katsayılardır.

$$Q_i = Z_i\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s} Z_i\right)^{-1}$$

olarak tanımlanırsa, i. optimizasyon problemi

$$\inf_{Z_i,\ \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s}\text{'yi kararlılaştırıyor}} \left\| \begin{array}{c} \alpha_i W_1\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s} Z_i\right)^{-1} \\ \xi Z_i\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s} Z_i\right)^{-1} \end{array} \right\|_{\infty} =: \gamma_i^{opt} \qquad (3.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda (3.14) optimizasyon probleminin çözülmesinde [28] makalesindeki sonucun uygulanabilmesi için [27] makalesindeki sonucun uygulanması gerekmektedir. Şekil 3.25'te gösterilen sistemden

$$\begin{aligned} z_{1,i} &= \alpha_i W_1 y_i \qquad z_{2,i} = \xi u_i, \\ y_i &= w_i - \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s} u_i \Rightarrow w_i = y_i + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s} u_i \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir ve sistemin genelleştirlmiş plantı sağ Möbius gösterimde

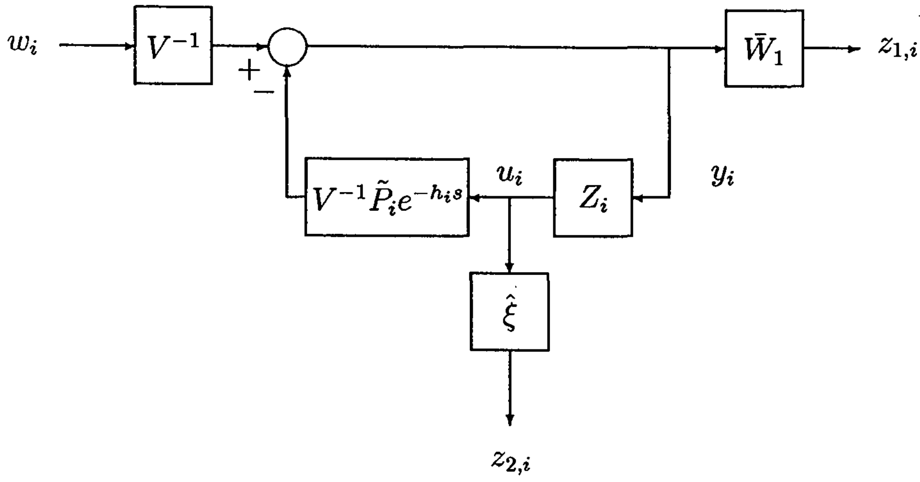
$$\begin{bmatrix} z_{1,i} \\ z_{2,i} \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_i W_1 \\ \xi & 0 \\ \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ y_i \end{bmatrix} = G_i \begin{bmatrix} u_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

$$G_i = G_{N,i} G_{D,i}^{-1}, \qquad G_{N,i} \in \mathcal{H}_\infty,\ G_{D,i} \in \mathcal{H}_\infty$$

$\mathcal{H}_\infty$'üzerindeki göreceli asal ayrıştırması olsun. Bu durumda aranan denetleyici

$$Z_i = RMM\left(G_{D,i},\ \bar{Z}_i\right)$$



Şekil 3.26: Değiştirilmiş iki blok optimizasyon problemi

olarak ifade edilebilir. Burada $\bar{Z}_i$, $G_{N,i}$'ye karşılık tasarlanan denetleyicidir.

$$G_{N,i} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{W}_i \\ \hat{\xi} & 0 \\ \tilde{P}_i e^{-h_i s} & V \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada

$$\bar{W}_i = \frac{\alpha_i}{(s+\varepsilon)^2}, \quad \tilde{P}_i = \frac{1}{\alpha_i}\frac{1}{s+\varepsilon}, \quad V = \frac{s^2}{(s+\varepsilon)^2}, \quad \hat{\xi} = \frac{\xi_1 + s\xi_2}{s+\varepsilon}$$

$$G_{D,i} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+\varepsilon} & 0 \\ 0 & (\frac{s}{s+\varepsilon})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{D1} & 0 \\ 0 & G_{D2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda sistem Şekil 3.26'da blok diyagramlarla gösterilmiştir.

$$J_{\gamma_i} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -\gamma_i^2 \end{bmatrix}, \qquad \hat{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlandığında denetleyici ifadesinin bulunması için

$$G_{N,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{N,i} = W_i^{\sim} \hat{J} W_i, \qquad W_i : \text{çift kararlı}$$

J-spektral ayrıştırması probleminin çözülmesi gerekir. Ancak, yukarıdaki J-spektral ayrıştırma probleminde yer alan G transfer matrisi irrasyonel ifadeleri içerdiğinden söz konusu problemin çözümü oldukça güçtür. [28] makalesinde gösterildiği gibi,

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ F_{s,i} & 1 \end{bmatrix}, \qquad F_{s,i} : \text{irrasyonel ve kararlı}$$

olarak tanımlanırsa

$$G_{N,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{N,i} = W_i^{\sim} \hat{J} W_i, \qquad W_i : \text{çift kararlı}$$

J-spektral ayrıştırma probleminde

$$W_i = W_{r,i}T_i, \qquad W_{r,i} : \text{çift kararlı}$$

olarak seçilebilir. Bu durumda $W_{r,i}$

$$\Theta_i := T_i^{-\sim} G_{N,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{N,i} T_i^{-1} = W_{r,i}^{\sim} \hat{J} W_{r,i}, \qquad W_{r,i} : \text{çift kararlı} \tag{3.15}$$

probleminin çözümüdür. Burada T_i'deki $F_{s,i}$ kararlı ve Θ_i, gerçek rasyonel transfer matrisi olacak şekilde seçilmelidir. [28] makalesinde böyle bir $F_{s,i}$'nin nasıl seçilebileceği gösterilmiştir. $G_{r,i}$, $G_{N,i}$'nin rasyonel kısmı olsun.

$$G_{r,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{r,i} =: \begin{bmatrix} \Pi_{11,i} & \Pi_{12,i} \\ \Pi_{21,i} & \Pi_{22,i} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa, basit matris işlemleri sonucunda

$$G_{N,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{N,i} = \begin{bmatrix} \Pi_{11,i} & e^{h_i s}\Pi_{12,i} \\ e^{-h_i s}\Pi_{21,i} & \Pi_{22,i} \end{bmatrix}$$

ifadesi yazılabilir. [28] makalesinde gösterilmiştir ki, eğer

$$F_{s,i} + R = e^{-h_i s}\Pi_{22,i}^{-1}\Pi_{21,i}, \qquad R : \text{rasyonel}$$

olarak seçilirse Θ_i

$$\Theta_i = T_i^{-\sim} G_{N,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{N,i} T_i^{-1} = \begin{bmatrix} \Pi_{11,i} - \Pi_{12,i}\Pi_{22,i}^{-1}\Pi_{21,i} + R^{\sim}\Pi_{22,i}R & R^{\sim}\Pi_{22,i} \\ \Pi_{22,i}R & \Pi_{22,i} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile verilen rasyonel transfer matrisiyle ifade edilebilir.

Θ_i'nin gerçeklenmesi yardımı ile $W_{r,i}$'nin gerçeklenmesi bulunabilir. $G_{r,i}$

$$G_{r,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right]$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Bu durumda

$$G_{r,i}^{\sim} J_{\gamma_i} G_{r,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{cc|c} A_i & 0 & B_i \\ -C_i^* J_{\gamma_i} C_i & -A_i^* & -C_i^* J_{\gamma_i} D_i \\ \hline D_i^* J_{\gamma_i} C_i & B_i^* & D_i^* J_{\gamma_i} D_i \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_i & \hat{B}_{1,i} & \hat{B}_{2,i} \\ \hline \hat{C}_{1,i} & \hat{D}_{11,i} & \hat{D}_{12,i} \\ \hat{C}_{2,i} & \hat{D}_{21,i} & \hat{D}_{22,i} \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir. Transfer matrisi $\Pi_{22,i}^{-1}\Pi_{21,i}$ olan sistemin dinamik matrisi

$$A_{H,i} = \hat{A}_i - \hat{B}_{2,i}\hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{C}_{2,i}$$

ifadesi ile verilir. Bu durumda $F_{s,i}$'nin gerçeklenmesi

$$F_{s,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{H,i} & \left(e^{-h_i s}I - e^{-h_i A_{H,i}}\right)\left(\hat{B}_{1,i} - \hat{B}_{2,i}\hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{D}_{21,i}\right) \\ \hline \hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{C}_{2,i} & \left(e^{-h_i s} - 1\right)\hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{D}_{21,i} \end{array}\right], \tag{3.16}$$

olarak seçilebilir ([28] makalesindeki gibi). O halde Θ_i'nin gerçeklenmesi

$$
\begin{aligned}
\Theta_i &\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_i & B_{\Theta,i} \\ \hline C_{\Theta,i} & D_{\Theta,i} \end{array}\right], \\
B_{\Theta,i} &= \left[\begin{array}{cc} e^{-h_i A_{H,i}} \hat{B}_{1,i} + \left(I - e^{-h_i A_{H,i}}\right) \hat{B}_{2,i} \hat{D}_{22,i}^{-1} \hat{D}_{21,i} & \hat{B}_{2,i} \end{array}\right], \\
C_{\Theta,i} &= \left[\begin{array}{c} \hat{C}_{1,i} e^{h_i A_{H,i}} + \hat{D}_{12,i} \hat{D}_{22,i}^{-1} \hat{C}_{2,i} \left(I - e^{h_i A_{H,i}}\right) \\ \hat{C}_{2,i} \end{array}\right], \\
D_{\Theta,i} &= D_i^* J_{\gamma_i} D_i = \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11,i} & \hat{D}_{12,i} \\ \hat{D}_{21,i} & \hat{D}_{22,i} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Hamiltonian matrisi transfer matrisi Θ_i^{-1} olan sistemin dinamik matrisidir, yani

$$
H_{\gamma,i} = \hat{A}_i - B_{\Theta,i} D_{\Theta,i}^{-1} C_{\Theta,i}.
$$

Verilen örnek problem için

$$
D_i = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \qquad D_i^* J_{\gamma_i} D_i = \left[\begin{array}{cc} \xi_2^2 & 0 \\ 0 & -\gamma_i^2 \end{array}\right]
$$

eşitliğinden

$$
\left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11,i} & \hat{D}_{12,i} \\ \hat{D}_{21,i} & \hat{D}_{22,i} \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \xi_2^2 & 0 \\ 0 & -\gamma_i^2 \end{array}\right]^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11,i} & \hat{D}_{12,i} \\ \hat{D}_{21,i} & \hat{D}_{22,i} \end{array}\right]^{-1} &= \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\xi_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\gamma_i^2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11,i}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{D}_{22,i}^{-1} \end{array}\right], \\
\hat{D}_{11,i} &= \xi_2^2, \qquad \hat{D}_{22,i} = -\gamma_i^2
\end{aligned}
$$

olduğunda ve

$$
\hat{D}_{12,i} = \hat{D}_{21,i}^T = 0
$$

eşitliği gözönünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
\Theta_i &\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_i & e^{-h_i A_{H,i}} \hat{B}_{1,i} & \hat{B}_{2,i} \\ \hline \hat{C}_{1,i} e^{h_i A_{H,i}} & \hat{D}_{11,i} & 0 \\ \hat{C}_{2,i} & 0 & \hat{D}_{22,i} \end{array}\right], \\
H_{\gamma,i} &= \hat{A}_i - \left[\begin{array}{cc} e^{-h_i A_{H,i}} \hat{B}_{1,i} & \hat{B}_{2,i} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \hat{D}_{11,i}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{D}_{22,i}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{C}_{1,i} e^{h_i A_{H,i}} \\ \hat{C}_{2,i} \end{array}\right] \\
&= \hat{A}_i - \left[\begin{array}{cc} e^{-h_i A_{H,i}} \hat{B}_{1,i} \hat{D}_{11,i}^{-1} & \hat{B}_{2,i} \hat{D}_{22,i}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{C}_{1,i} e^{h_i A_{H,i}} \\ \hat{C}_{2,i} \end{array}\right] \\
&= \hat{A}_i - e^{-h_i A_{H,i}} \hat{B}_{1,i} \hat{D}_{11,i}^{-1} \hat{C}_{1,i} e^{h_i A_{H,i}} - \hat{B}_{2,i} \hat{D}_{22,i}^{-1} \hat{C}_{2,i} \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$W_{r,i}$'nin hesabı:

$$\Theta_i = W_{r,i}^{\sim}\hat{J}W_{r,i}, \qquad W_{r,i} : \text{çift kararlı}, \qquad \hat{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu durumda,

$$W_{r,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{w,i} & B_{w,i} \\ \hline C_{w,i} & D_{w,i} \end{array}\right],$$

eşitliği kullanılarak,

$$D_{w,i}^{*}\hat{J}D_{w,i} = D_{\Theta,i} = D_i^{*}J_{\gamma_i}D_i$$

ifadesini sağlayan $D_{w,i}$,

$$D_{w,i} = \begin{bmatrix} \xi_2 & 0 \\ 0 & \gamma_i \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir. (3.17) ile verilen $H_{\gamma,i}$ Hamiltonian matrisine denk gelen Riccati denklemin kararlılaştırılan X_i çözümü

$$X_i := \mathrm{Ric}\,(H_{\gamma,i})$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_{\Theta,i} &= \begin{bmatrix} B_{\Theta,1,i} \\ B_{\Theta,2,i} \end{bmatrix}, \qquad B_{\Theta,2,i} = -C_{\Theta,1,i}^{*}, \\ C_{\Theta,i} &= \begin{bmatrix} C_{\Theta,1,i} & C_{\Theta,2,i} \end{bmatrix}, \qquad C_{\Theta,2,i} = B_{\Theta,1,i}^{*} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} D_{w,i}^{*}\hat{J}C_{w,i} &= C_{\Theta,1,i} + B_{\Theta,1,i}^{*}X_i = C_{\Theta,i}\begin{bmatrix} I \\ X_i \end{bmatrix} \Rightarrow \\ C_{w,i} &= \hat{J}D_{w,i}^{-*}C_{\Theta,i}\begin{bmatrix} I \\ X_i \end{bmatrix}, \\ B_{w,i} &= B_{\Theta,1,i} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} B_{\Theta,i} \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. O halde $W_{r,i}$'nin gerçeklenmesi

$$W_{r,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_i & \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} B_{\Theta,i} \\ \hline \hat{J}D_{w,i}^{-*}C_{\Theta,i}\begin{bmatrix} I \\ X_i \end{bmatrix} & D_{w,i} \end{array}\right]$$

şeklinde yazılır.

Denetleyici tasarımı:

Bu durumda $\bar{Z}_i$ denetleyicisi bulunabilir.

$$\bar{Z}_i = RMM\left(W_i^{-1},\, U_i\right), \qquad \|U_i\|_{\infty} < 1$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} W_i^{-1} &= \begin{bmatrix} \Xi_{11,i} & \Xi_{12,i} \\ \Xi_{21,i} & \Xi_{22,i} \end{bmatrix} \\ RMM\left(W_i^{-1},\, U_i\right) &= \left(\Xi_{11,i}U_i + \Xi_{12,i}\right)\left(\Xi_{21,i}U_i + \Xi_{22,i}\right)^{-1} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Merkezi denetleyici için $U_i \equiv 0$ olarak seçilir. Bu durumda

$$\bar{Z}_i = \Xi_{11,i}\Xi_{22,i}^{-1}$$

olarak ifade edilir.

$$W_i = W_{r,i}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ F_{s,i} & 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$W_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_{s,i} & 1 \end{bmatrix} W_{r,i}^{-1}$$

eşitliği yazılabilir. O halde

$$W_{r,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & \Psi_{12,i} \\ \Psi_{21,i} & \Psi_{22,i} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$W_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_{s,i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & \Psi_{12,i} \\ \Psi_{21,i} & \Psi_{22,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & \Psi_{12,i} \\ \Psi_{21,i} - F_{s,i}\Psi_{11,i} & \Psi_{22,i} - F_{s,i}\Psi_{12,i} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir, dolayısıyla merkezi denetleyici

$$\bar{Z}_i = \Psi_{12,i}\left(\Psi_{22,i} - F_{s,i}\Psi_{12,i}\right)^{-1} = \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1}\left(1 - F_{s,i}\Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1}\right)^{-1}$$

olarak yazılabilir. Burada dikkat edilirse

$$\hat{Z}_i = \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1}$$

ile gösteren denetleyici gecikme olmadığı zamandaki denetleyicidir, yani $h_i = 0$ olduğundaki denetleyicidir, zira $F_{s,i} \equiv 0$ olacaktır. Bu durumda

$$\bar{Z}_i = \hat{Z}_i\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)^{-1}$$

olarak yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} Z_i &= RMM\left(G_{D,i},\, \bar{Z}_i\right) = \frac{s+\varepsilon}{s}\bar{Z}_i = \frac{s+\varepsilon}{s}\hat{Z}_i\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)^{-1} \\ &= L\hat{Z}_i\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)^{-1}, \qquad L = \frac{s+\varepsilon}{s} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q_i &= Z_i\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s}Z_i\right)^{-1} \\ &= L\hat{Z}_i\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s}L\hat{Z}_i\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)^{-1}\right)^{-1} \\ & L\hat{Z}_i\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s}L\hat{Z}_i\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)^{-1}\right)\left(1 - F_{s,i}\hat{Z}_i\right)\right]^{-1} \\ &= L\hat{Z}_i\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha_i}P_i e^{-h_i s}L - F_{s,i}\right)\hat{Z}_i\right]^{-1} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\hat{Z}_1 \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha_1} P_1 e^{-h_1 s} L - F_{s,1}\right) \hat{Z}_1\right]^{-1} \\ \vdots \\ L\hat{Z}_n \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha_n} P_n e^{-h_n s} L - F_{s,n}\right) \hat{Z}_n\right]^{-1} \end{bmatrix} \\
&= L\hat{Z}\left(I_n + \left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - F_s\right)\hat{Z}\right)^{-1} \mathbf{1}_n^* \\
&= \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1} \hat{Z}\mathbf{1}_n^* L
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
\hat{Z} &= \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{Z}_n \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix}, \\
\bar{L} &= LP_i = \frac{s+\varepsilon}{s^2}, \qquad F_s = \begin{bmatrix} F_{s,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_{s,n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu eşitlikler gözönünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}
K &= Q\left(1 - Pe^{-\Delta s}Q\right)^{-1} = \left(I_n - QPe^{-\Delta s}\right)^{-1} Q \\
&= \left(I_n - \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1} \hat{Z}\mathbf{1}_n^* LPe^{-\Delta s}\right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1} \hat{Z}\mathbf{1}_n^* L \\
&= \left(\left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)\left[I_n - \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. \cdot \hat{Z}\mathbf{1}_n^* LPe^{-\Delta s}\right]\right)^{-1} \hat{Z}\mathbf{1}_n^* L \\
&= \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\Lambda_\alpha e^{-\Delta s} - \mathbf{1}_n^* LPe^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1} \hat{Z}\mathbf{1}_n^* L \\
&= \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\left(\Lambda_\alpha - \mathbf{1}_n^*\mathbf{1}_n\right)e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1} \hat{Z}\mathbf{1}_n^* L = \left(I_k + \hat{Z}\Phi\right)^{-1} \hat{Z}\tilde{L}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\Phi = \bar{L}\left(\Lambda_\alpha - \mathbf{1}_n^*\mathbf{1}_n\right)e^{-\Delta s} - F_s, \qquad \tilde{L} = \mathbf{1}_n^* L$$

olarak tanımlanmıştır.

$G_{r,i}$'nin gerçeklenmesi:

$$G_{r,i} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{W}_i \\ \hat{\xi} & 0 \\ \tilde{P}_i & V \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada

$$\bar{W}_i = \frac{\alpha_i}{(s+\varepsilon)^2}, \quad \tilde{P}_i = \frac{1}{\alpha_i}\frac{1}{s+\varepsilon}, \quad V = \frac{s^2}{(s+\varepsilon)^2}, \quad \hat{\xi} = \frac{\xi_1 + s\xi_2}{s+\varepsilon}$$

olarak verilir. $G_{r,i}$,

$$G_{r,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right]$$

gerçeklenmesine sahip olsun. Bu durumda

$$A_i = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon^2 & -2\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_i & 0 \\ \xi_1 - \xi_2\varepsilon & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha_i} & -\varepsilon^2 & -2\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad D_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

$\hat{Z}_i$'nin gerçeklenmesi:

$W_{r,i}^{-1}$'nin gerçeklenmesini $W_{r,i}$'nin gerçeklenmesinden faydalanarak yazalım:

$$W_{r,i} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{w,i} & B_{w,i} \\ \hline C_{w,i} & D_{w,i} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_i & \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} B_{\Theta,i} \\ \hline \hat{J} D_{w,i}^{-*} C_{\Theta,i} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} & D_{w,i} \end{array}\right]$$

eşitliğinden

$$W_{r,i}^{-1} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{w,i} - B_{w,i} D_{w,i}^{-1} C_{w,i} & -B_{w,i} D_{w,i}^{-1} \\ \hline D_{w,i}^{-1} C_{w,i} & D_{w,i}^{-1} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{w,i} & \bar{B}_{w,i} \\ \hline \bar{C}_{w,i} & \bar{D}_{w,i} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \bar{A}_{w,i} & \bar{B}_{w,i,1} & \bar{B}_{w,i,2} \\ \hline \bar{C}_{w,i,1} & \bar{D}_{w,i,1} & 0 \\ \bar{C}_{w,i,2} & 0 & \bar{D}_{w,i,2} \end{array}\right] \stackrel{s}{=} \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & \Psi_{12,i} \\ \Psi_{21,i} & \Psi_{22,i} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Dikkat edilirse $D_{w,i}$ matrisi 2×2 boyutlu matristir. Bu yüzden $\bar{C}_{w,i}$ matrisi 2×3, $\bar{B}_{w,i}$ ise 3×2 boyutlu matrislerdir, dolayısıyla $\bar{C}_{w,i}$'yi satır satır, $\bar{B}_{w,i}$ ise sütun sütun bölünüp yukarıdaki gerçeklenmesi yazılabilir. O halde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} & \Psi_{12,i} \\ \Psi_{21,i} & \Psi_{22,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

ise

$$\begin{aligned} y_2 &= \Psi_{21,i} u_1 + \Psi_{22,i} u_2 \Rightarrow -u_2 = \Psi_{22,i}^{-1} \Psi_{21,i} u_1 - \Psi_{22,i}^{-1} y_2, \\ y_1 &= \Psi_{11,i} u_1 + \Psi_{12,i} u_2 = \Psi_{11,i} u_1 - \Psi_{12,i} \left(\Psi_{22,i}^{-1} \Psi_{21,i} u_1 - \Psi_{22,i}^{-1} y_2 \right) \\ &= \left(\Psi_{11,i} - \Psi_{12,i} \Psi_{22,i}^{-1} \Psi_{21,i} \right) u_1 + \Psi_{12,i} \Psi_{22,i}^{-1} y_2 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11,i} - \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1}\Psi_{21,i} & \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1} \\ \Psi_{22,i}^{-1}\Psi_{21,i} & -\Psi_{22,i}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

sisteminden yararlanarak $\Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1}$'nin gerçeklenmesi bulunabilir.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \bar{A}_{w,i}x + \bar{B}_{w,i,1}u_1 + \bar{B}_{w,i,2}u_2, \\
y_1 &= \bar{C}_{w,i,1}x + \bar{D}_{w,i,1}u_1, \\
y_2 &= \bar{C}_{w,i,2}x + \bar{D}_{w,i,2}u_2 \Rightarrow -u_2 = \bar{D}_{w,i,2}^{-1}\bar{C}_{w,i,2}x - \bar{D}_{w,i,2}^{-1}y_2, \\
\dot{x} &= \bar{A}_{w,i}x + \bar{B}_{w,i,1}u_1 - \bar{B}_{w,i,2}\left(\bar{D}_{w,i,2}^{-1}\bar{C}_{w,i,2}x - \bar{D}_{w,i,2}^{-1}y_2\right) \\
&= \left(\bar{A}_{w,i} - \bar{B}_{w,i,2}\bar{D}_{w,i,2}^{-1}\bar{C}_{w,i,2}\right)x + \bar{B}_{w,i,1}u_1 + \bar{B}_{w,i,2}\bar{D}_{w,i,2}^{-1}y_2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \Psi_{11,i} - \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1}\Psi_{21,i} & \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1} \\ \Psi_{22,i}^{-1}\Psi_{21,i} & -\Psi_{22,i}^{-1} \end{bmatrix} \\
&\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \bar{A}_{w,i} - \bar{B}_{w,i,2}\bar{D}_{w,i,2}^{-1}\bar{C}_{w,i,2} & \bar{B}_{w,i,1} & \bar{B}_{w,i,2}\bar{D}_{w,i,2}^{-1} \\ \hline \bar{C}_{w,i,1} & \bar{D}_{w,i,1} & 0 \\ \bar{D}_{w,i,2}^{-1}\bar{C}_{w,i,2} & 0 & -\bar{D}_{w,i,2}^{-1} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir, dolayısıyla $\hat{Z}_i$'nin gerçeklenmesi

$$\hat{Z}_i = \Psi_{12,i}\Psi_{22,i}^{-1} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_{w,i} - \bar{B}_{w,i,2}\bar{D}_{w,i,2}^{-1}\bar{C}_{w,i,2} & \bar{B}_{w,i,2}\bar{D}_{w,i,2}^{-1} \\ \hline \bar{C}_{w,i,1} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{z,i} & B_{z,i} \\ \hline C_{z,i} & 0 \end{array}\right]$$

olarak hesaplanır.

F_s **ve** $\hat{Z}$**'nin gerçeklenmesi:**

$$F_s = \begin{bmatrix} F_{s,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_{s,n} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer

$$\begin{aligned}
F_{s,i} &\stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_{H,i} & \left(e^{-h_i s}I - e^{-h_i A_{H,i}}\right)\left(\hat{B}_{1,i} - \hat{B}_{2,i}\hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{D}_{21,i}\right) \\ \hline \hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{C}_{2,i} & \left(e^{-h_i s} - 1\right)\hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{D}_{21,i} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_{H,i} & \left(e^{-h_i s}I - e^{-h_i A_{H,i}}\right)\hat{B}_{1,i} \\ \hline \hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{C}_{2,i} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{F,i} & B_{F,i} \\ \hline C_{F,i} & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_{H,i} & e^{-h_i s}\hat{B}_{1,i} \\ \hline \hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{C}_{2,i} & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} A_{H,i} & e^{-h_i A_{H,i}}\hat{B}_{1,i} \\ \hline \hat{D}_{22,i}^{-1}\hat{C}_{2,i} & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_{F,i} & B_{F,i,1} \\ \hline C_{F,i} & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} A_{F,i} & B_{F,i,2} \\ \hline C_{F,i} & 0 \end{array}\right] =: F_{s,i,1} - F_{s,i,2}
\end{aligned}$$

gerçeklenmesine sahip ise F_s'nin gerçeklenmesi

$$F_s \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array}\right]$$

olur. Burada

$$A_F = \begin{bmatrix} A_{F,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{F,n} \end{bmatrix}, \quad B_F = \begin{bmatrix} B_{F,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{F,n} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$C_F = \begin{bmatrix} C_{F,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{F,n} \end{bmatrix}, \quad D_F = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Diğer yandan

$$B_{F,i} = \left(e^{-h_i s} I - e^{-h_i A_{H,i}}\right) \hat{B}_{1,i} = e^{-h_i s}\hat{B}_{1,i} - e^{-h_i A_{H,i}}\hat{B}_{1,i} = B_{F,i,1} - B_{F,i,2}$$

olarak yazılabileceğinden $B_F = B_{F,1} - B_{F,2}$ yazılabilir. Burada

$$B_{F,1} = \begin{bmatrix} e^{-h_1 s} B_{F,1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-h_n s} B_{F,n,1} \end{bmatrix}, \quad B_{F,2} = \begin{bmatrix} B_{F,1,2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{F,n,2} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde

$$F_s = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_{F,1} \\ \hline C_F & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_{F,2} \\ \hline C_F & 0 \end{array}\right] = F_{s,1} - F_{s,2}$$

olarak yazılabilir. Transfer matrisi F_s olan sistem FIR (finite impulse response) filtresidir, dolayısıyla F_s'nin FIR filtresi olarak gerçeklenmesi de gerekmektedir. Simulasyonlarda F_s ayrık zamanlı sistem olarak seçilmiştir. Örneklenme zamanı seçilmesinde $F_{s,i}$'nin birim darbe yanıtında yalnızca $[0,\ h_i]$ zaman aralığında olduğundan

$$T_s = \frac{\min\{h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n\}}{10}$$

olarak seçilebilir. Matlab'ta F_s sıfır mertebeli tutucu (zero order hold) teknikleri kullanılarak F_s'nin ayrık zamanlı sistemine dönüştürülmüştür.

Benzer olarak $\hat{Z}$'nin gerçeklenmesi de yapılabilir:

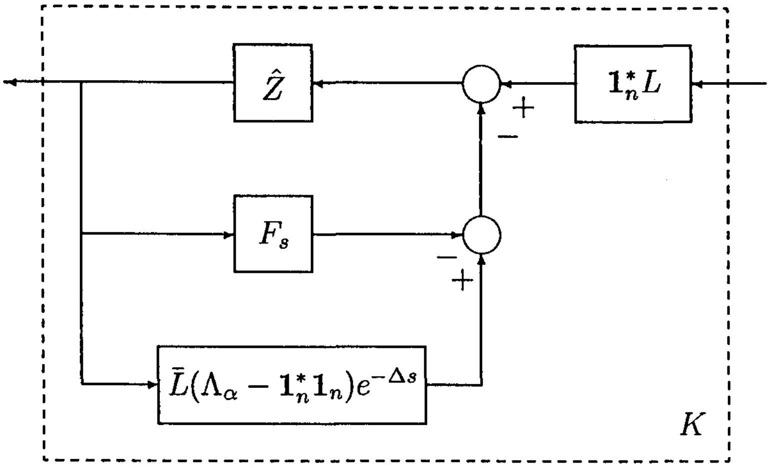
$$\hat{Z} = \left[\begin{array}{c|c} A_z & B_z \\ \hline C_z & D_z \end{array}\right]$$

öyle ki

$$A_z = \begin{bmatrix} A_{z,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{z,n} \end{bmatrix}, \quad B_z = \begin{bmatrix} B_{z,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{z,n} \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} C_{z,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{z,n} \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 3.27: Denetleyicinin gerçekleştirmesi

K'nın gerçeklenmesi:

Yukarıda verilen bilgiler ışığında K denetleyicisinin kesin düzgün olduğu görülmektedir, yani $\lim_{s\to\infty} K(s) = 0$.

Daha önce K'nın

$$K = \left(I_n + \hat{Z}\left(\bar{L}\left(\Lambda_\alpha - \mathbf{1}_n^* \mathbf{1}_n\right) e^{-\Delta s} - F_s\right)\right)^{-1} \hat{Z} \mathbf{1}_n^* L$$

olarak yazılabileceğini gösterilmiştir. Bu durumda K'nın gerçeklenmesi Şekil 3.27'de gösterildiği gibi olacaktır. Dikkat edilirse K'nın ifadesinde hem F_s hem de

$$\bar{L}\left(\Lambda_\alpha - \mathbf{1}_n^* \mathbf{1}_n\right) e^{-\Delta s}$$

ifadesinde gecikmeler vardır. F_s sonlu darbe yanıtı filtresi olduğundan, gerçeklenmesinde ayrık zamanlı sistem olarak yapılmasından fayda vardır.

3.3 Simulasyon Örnekleri

Yukarıda elde edilen denetleyici için bütün kaynaklar her zaman veri göndermeye hazır iken simulasyonu için MATLAB'ta makroları yazılmıştır. Burada hem [5] hem de [6] çalışmalarında örnek olarak alınan durumlar ele alınacaktır ve sonuçları tartışılacaktır. Bu durumlar Çizelge 3.1'de verilmiştir. Durum 1–3 için gecikmenin zamana göre değişimini şu şekilde kabul edilmiştir:

$$\begin{aligned} h_i^b &= \frac{9}{10} h_i, \qquad h_i^f = \frac{1}{10} h_i, \\ \delta_i^b &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right), \qquad \delta_i^f = \frac{1}{10}\sin\left(\frac{\pi}{50}t\right), \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Çizelge 3.1: Durum $1-3$ için simulasyon parametreleri

	h_1	h_2	δ_1^+	δ_2^+	α_1	α_2	η_1	η_2
Durum 1 :	1	3	1	1	1/2	1/2	0.116	0.116
Durum 2 :	2	2	4	1	1/3	2/3	0.116	0.116
Durum 3 :	2	2	1	1	1/2	1/2	0.116	2.906

Burada h_i Çizelge 3.1'deki değerleri almaktadır. Aşağıda verilen bütün Bode çizimlerinde frekans rad/s cinsindedir. c aksi belirtmediği taktirde 60 paket/s ve $q_d = 30$ paket olarak alınmıştır.

Durum 1. Şekil 3.28'de denetleyicinin Bode çizimi verilmiştir. Örnek alınan sistem iki kanallı olduğundan her kanala ait denetleyicinin Bode çizimi verilmiştir. Bu durumda her iki kanal için gecikme dışında, bütün parametreler aynıdır. [5] makalesinde yer alan denetleyici yapısı $\omega \in (10^{-3}$ ile $10^2)$ değerler için birbirine denktir.

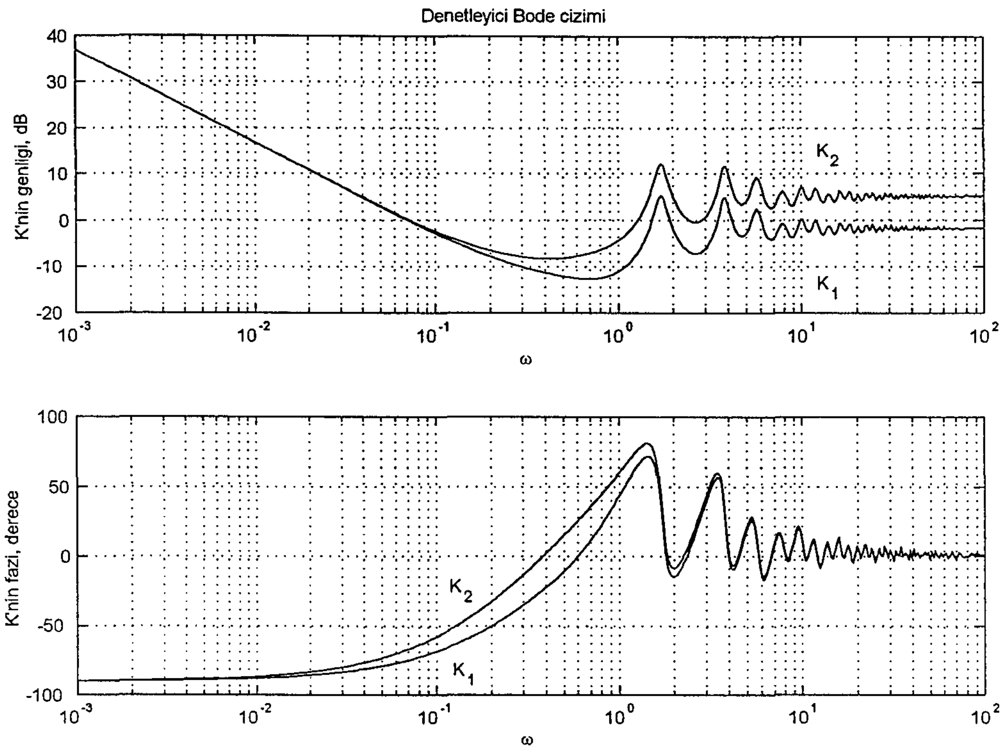
$$\gamma_1 = 2.29, \qquad \gamma_2 = 5.50$$

olarak hesaplanmıştır. Gecikmesi daha yüksek olan kanala ait denetleyicinin genliği orta ve yüksek frekanslarda daha yüksektir. Bunun nedenlerinden biri, gürbüzlük ağırlıkları aynı seçildiğinden dolayı gecikmesi daha yüksek olan kanala ait denetleyicinin genliğinin daha yüksek olmasıdır. Bu durum aynı zamanda γ hesabında da yansıtılmıştır. Daha büyük gecikme olan kanalın γ değeri de daha büyüktür. Simulink'te gecikme sabit iken ($\delta_i = 0,\ i = 1,2$) simülasyon sonuçları kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.29'da verilmiştir. Gecikme zamanla değişken iken kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.30'da verilmiştir. Kapalı çevrim sistemin tepkisinde gecikme sabit iken üst taşması, gecikme sabit olmadığı duruma göre daha azdır.

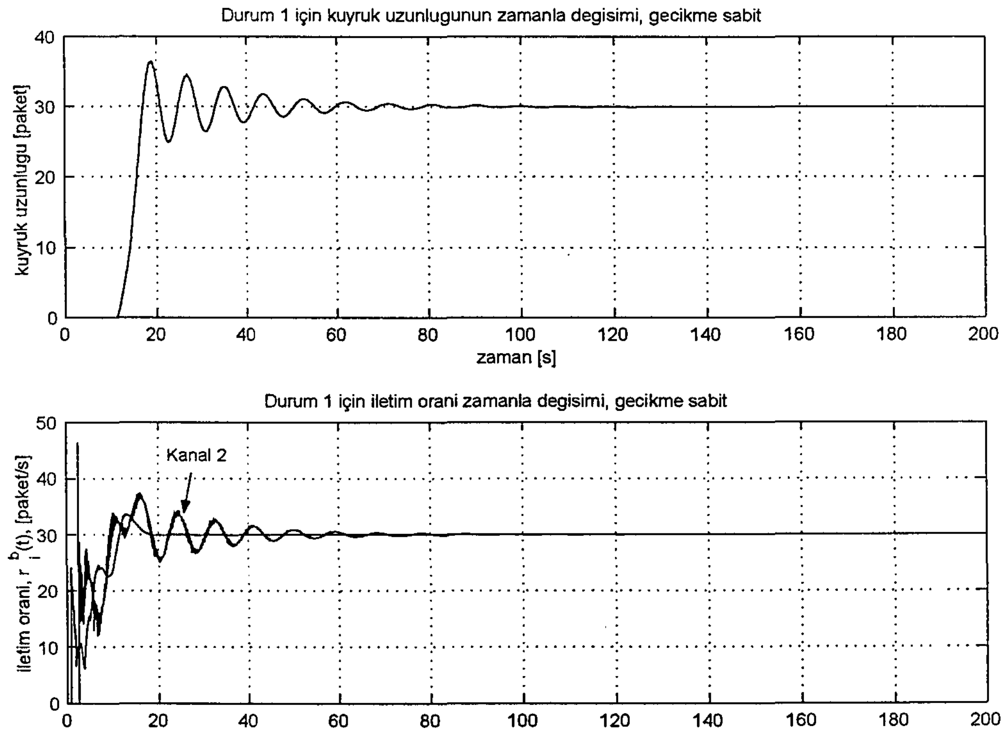
Durum 2. Denetleyicinin Bode çizimi Şekil 3.31'de verilmiştir. Sistemde gecikme sabit iken, ($\delta_i = 0,\ i = 1,2$), kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.32'de verilmiştir. Diğer yandan gecikme sabit olmadığında kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının değişimi Şekil 3.33'te verilmiştir. [5] makalesindeki sonuçlarla karşılaştırıldığında 1. kanala ait (K_1 ile simgelenen) denetleyicinin daha yüksek genliğine sahip olmasıdır.

$$\gamma_1 = 2.80, \qquad \gamma_2 = 5.60$$

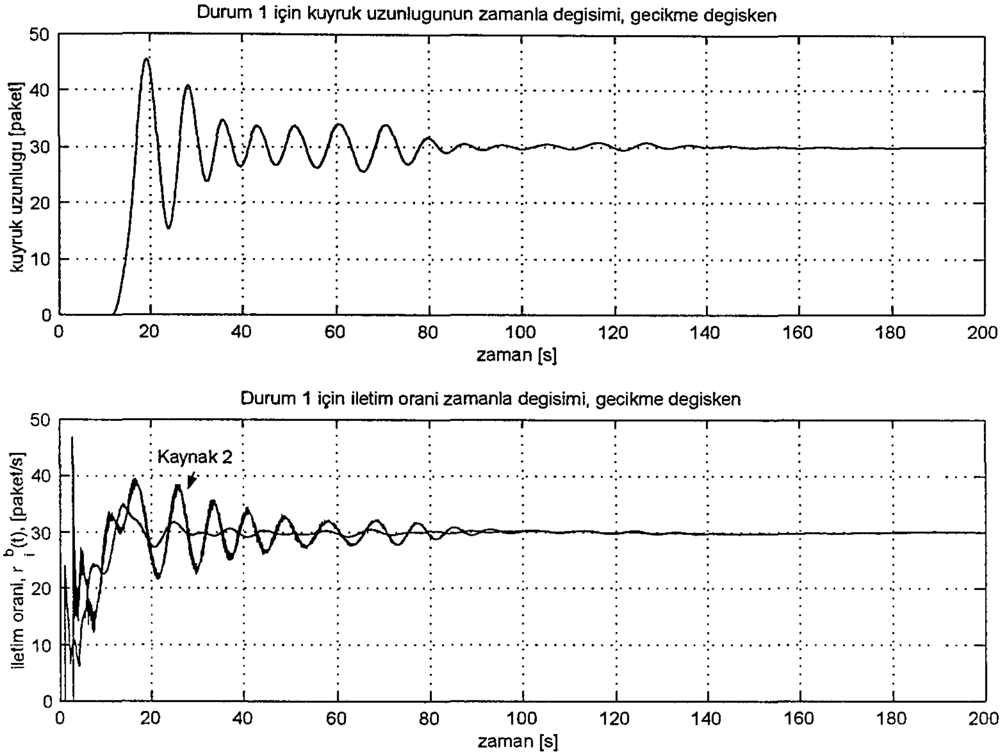
olarak hesaplanmıştır. Bu durumda kanallara ait ağırlıklar fonksiyonları (düşük frekanslarda) ve paylamalar farklı olduğu durumdur. Her iki kanalın gecikmesi eşittir. Paylamada daha yüksek olan 2. kanalın genliği birinci kanala nazaran daha yüksektir. Bu durum [5] makalesinde de kendini göstermiştir. Dikkat edilirse üst taşma



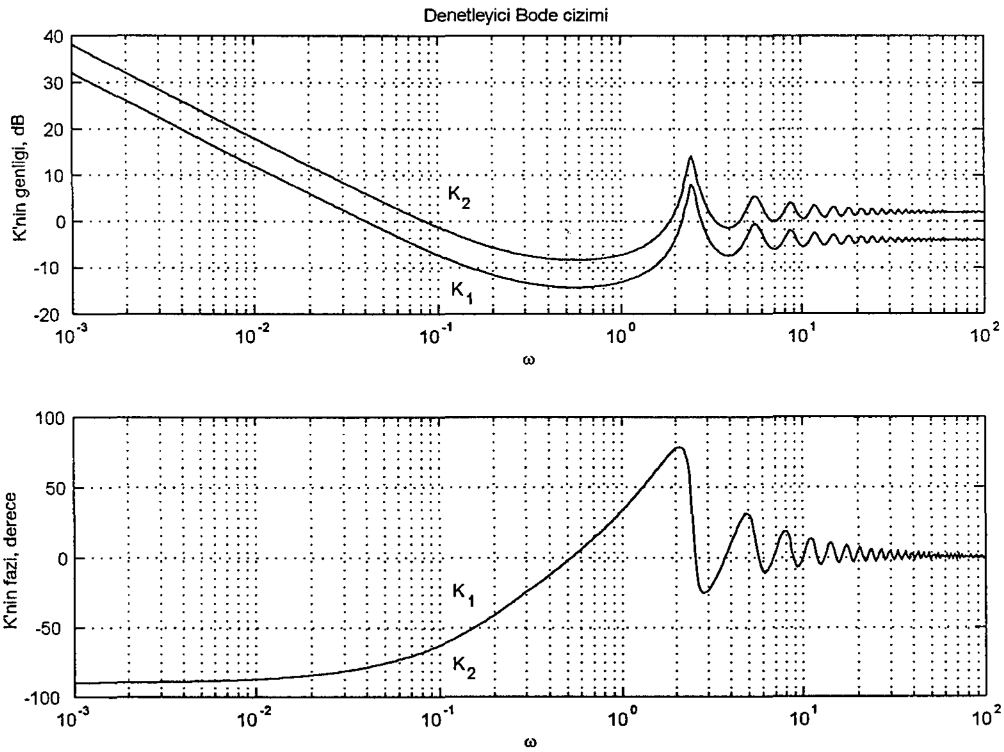
Şekil 3.28: Durum 1 için denetleyicinin Bode çizimi



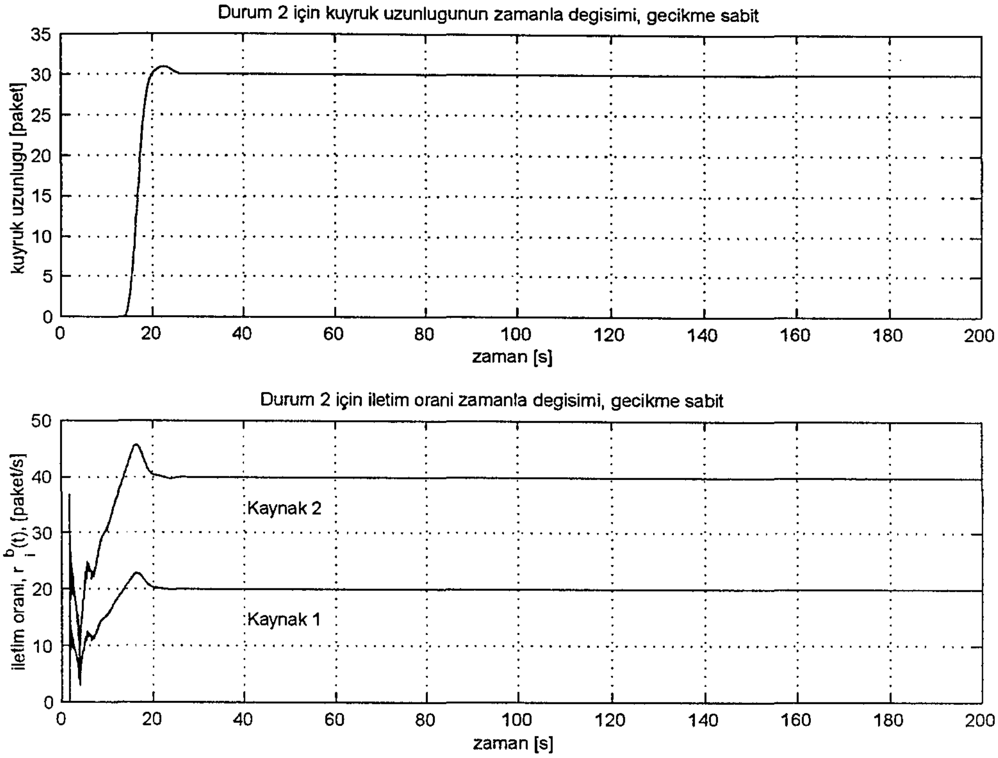
Şekil 3.29: Durum 1 için gecikme sabit iken kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



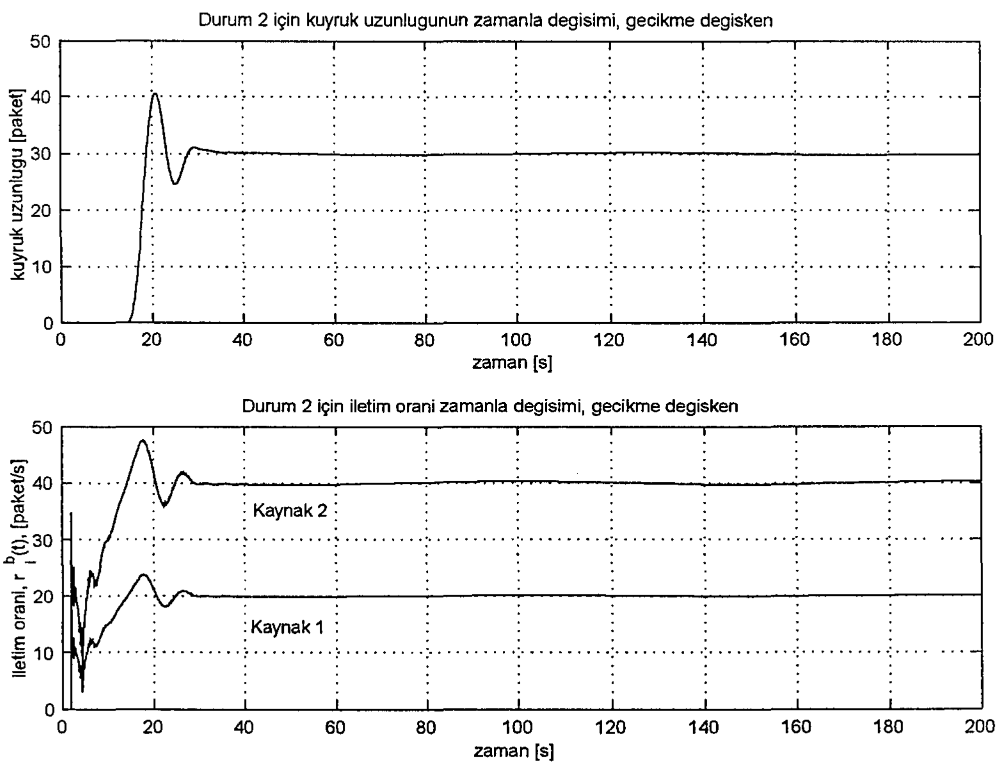
Şekil 3.30: Durum 1 için gecikme sabit olmadığında kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



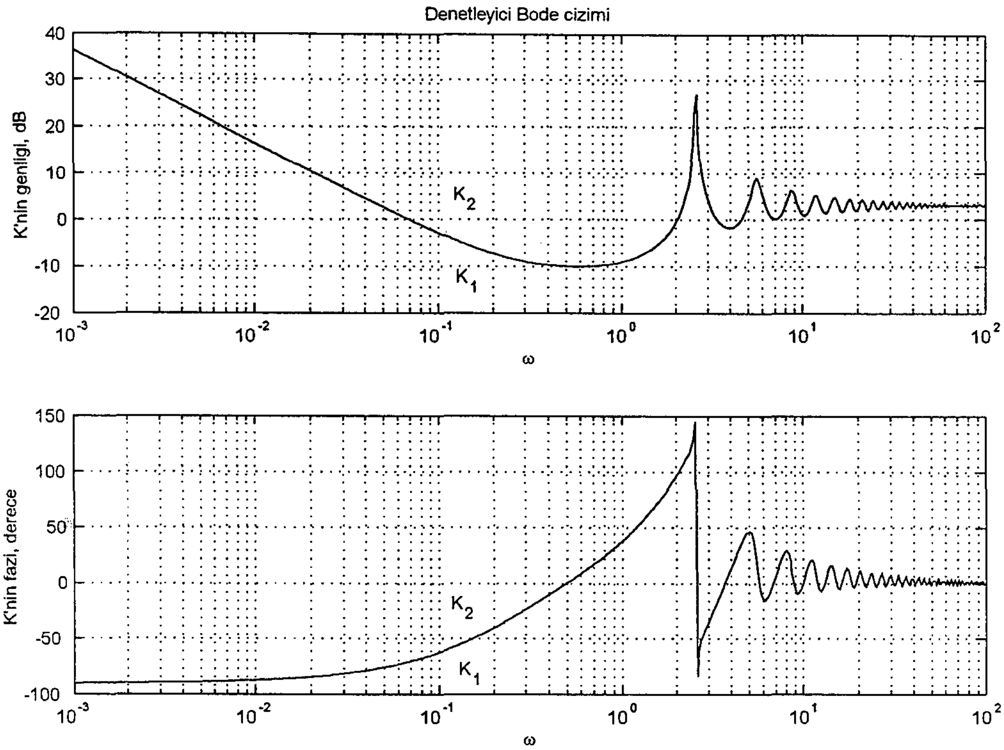
Şekil 3.31: Durum 2 için denetleyicinin Bode çizimi



Şekil 3.32: Durum 2 için gecikme sabit iken kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



Şekil 3.33: Durum 2 için gecikme sabit olmadığında kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



Şekil 3.34: Durum 3 için denetleyicinin Bode çizimi

sistemde gecikme zamanla değişken iken daha azdır. Dahası mevcut band genişliği kanallar arasında verilen oranla paylaşılmıştır.

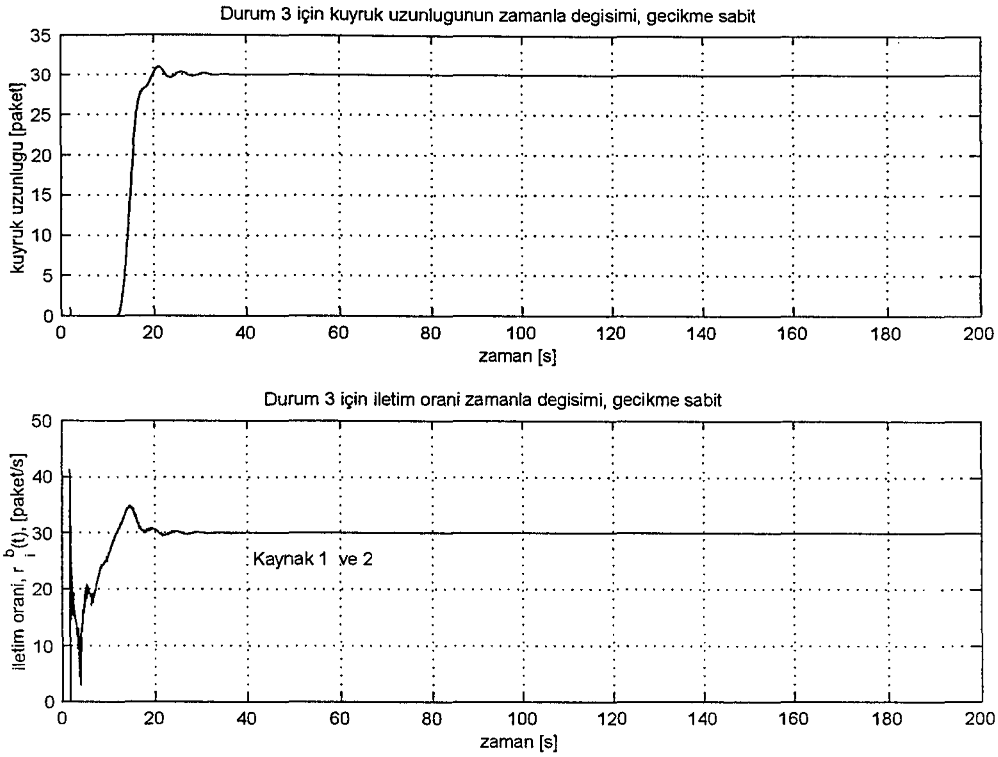
Durum 3. Denetleyicinin Bode çizimi Şekil 3.34'te verilmiştir. Gecikme sabit iken ($\delta_i = 0,\ i = 1,2$) ve sabit olmadığında kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamanla değişimi Şekil 3.35 ve 3.36'da sırasıyla verilmiştir. [5] makalesinde her kanalın eşit genliklere sahip olduğu gibi burada bu durum sözkonusudur.

$$\gamma_1 = 3.98, \qquad \gamma_2 = 3.98$$

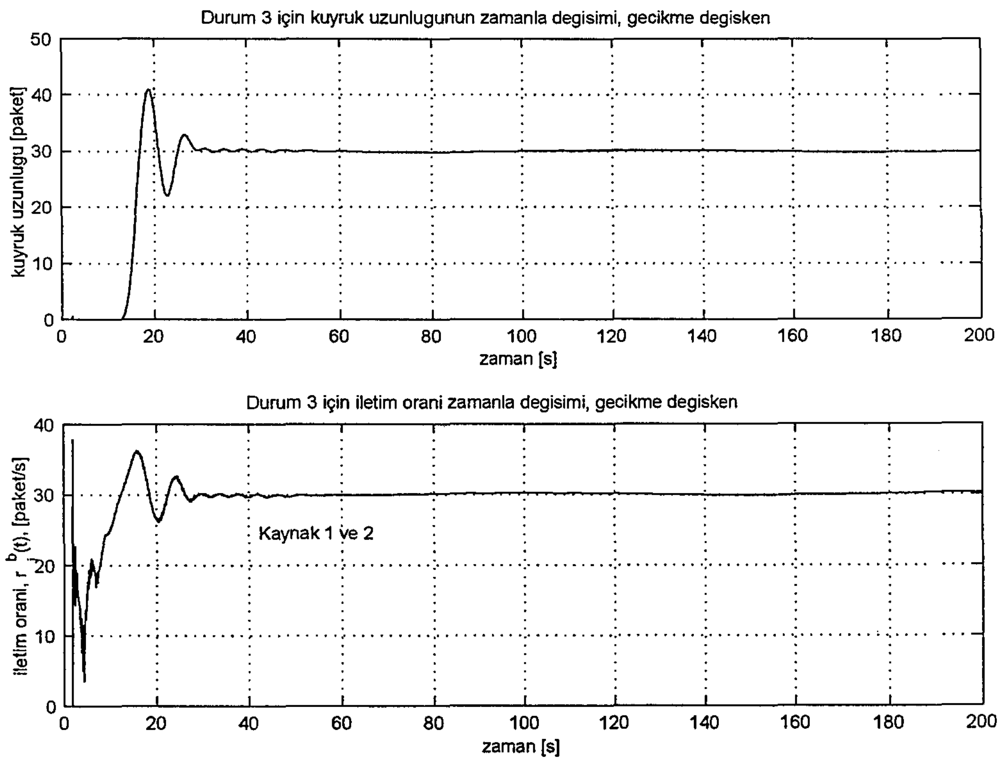
olarak hesaplanmıştır. Her kanala ait ağırlık fonksiyonunun skaler bir fonksiyona indirmesinden dolayı her iki kaynağa ait denetleyiciler aynıdır, γ değerler de aynıdır.

Simulink'te diferansiyel denklemlerin çözümlenmesi için "ode23tb" yöntemi kullanılmıştır. Denetleyici hesaplanmak için kullanılan makro Ek-1'de verilmiştir. Bütün durumlar içim $\varepsilon = 1$ olarak seçilmiştir. $P_r = 1_n$ olarak alınmıştır, zira ağ modelinde alınan integral sınırlı integral söz konusudur, iletim oranının ve kuyruk uzunluğunun negatif olmayışı kabul edilmiştir.

[6] makalesinde farklı yöntem uygulanarak denetleyici tasarlanmıştır. [6] makalesinde W_2 ağırlık matrisindeki ağırlık fonksiyonu bütün kanallar için aynı seçilmiştir. Bu çalışma [6] makalesindeki yaklaşıma alternatif bir yaklaşım sunmaktadır. Burada tasarlanan denetleyici ile



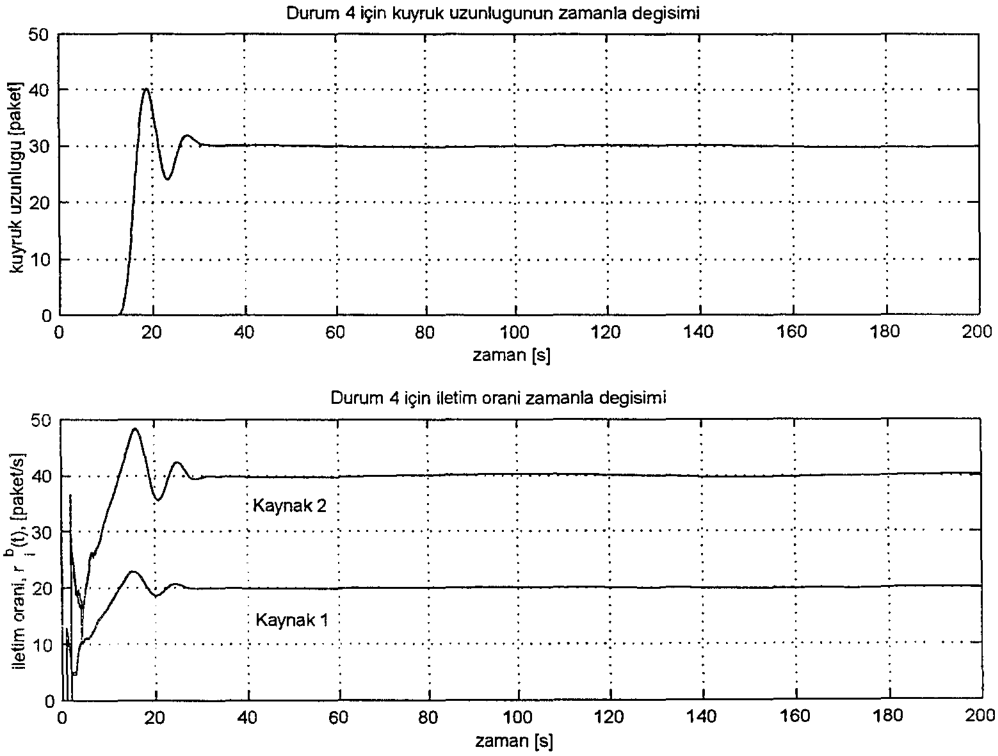
Şekil 3.35: Durum 3 için gecikme sabit iken kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



Şekil 3.36: Durum 3 için gecikme sabit olmadığında kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi

Çizelge 3.2: Durum 4 için simulasyon parametreleri

i	h_i^b	δ_i^b	h_i^f	δ_i^f	α_i	δ_i^+	β_i	β_i^f	γ_i
1	0.9	$0.1 + 0.5\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.1	$0.1\sin\left(\frac{\pi}{50}t\right)$	$\frac{1}{3}$	2	0.1	0.01	1.91
2	1.9	$0.1 + 0.5\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.1	$0.1\sin\left(\frac{\pi}{50}t\right)$	$\frac{2}{3}$	3	0.1	0.01	5.58



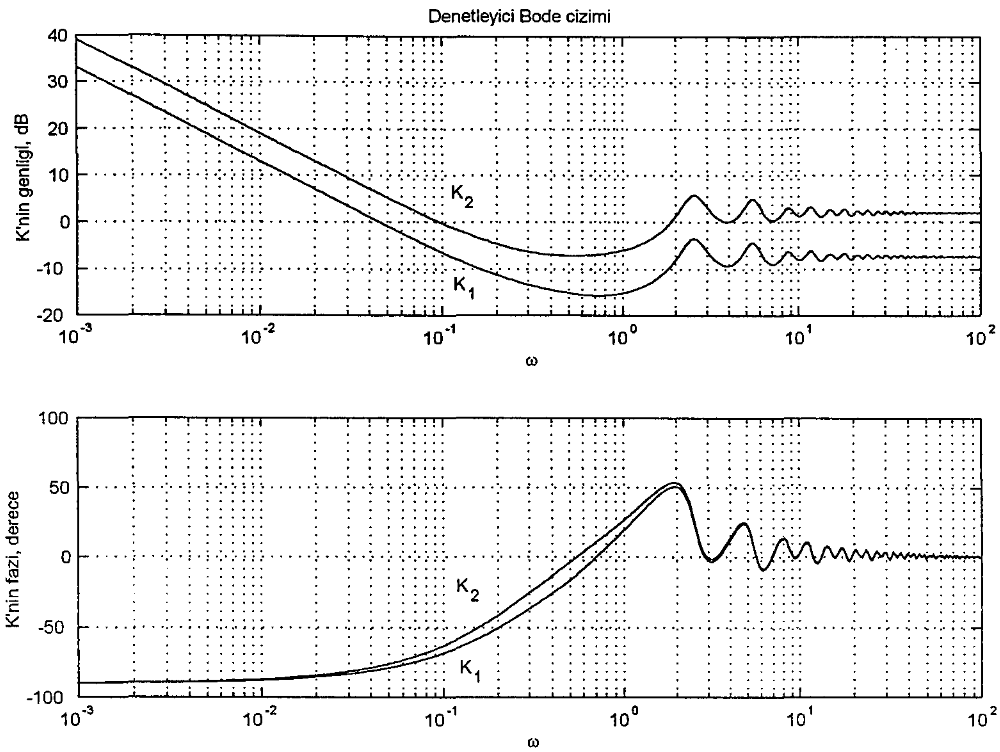
Şekil 3.37: Durum 4 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi

[6] makalesinde verilmiş yöntemle tasarlanan denetleyici karşılaştırılması amacıyla [6]'da verilmiş durumlar için simulasyon sonuçları aşağıda verilmiştir.

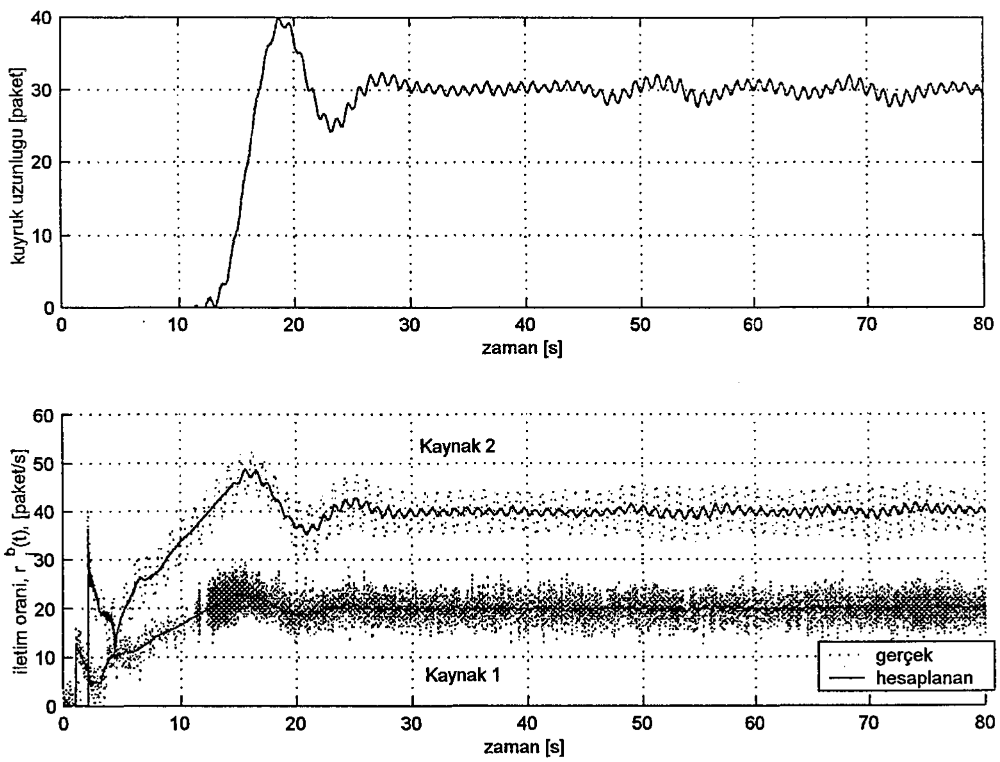
Durum 4. Çizelge 3.2'de denetleyici parametreleri verilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimini Şekil 3.37'de verilmiştir. Denetleyicinin Bode çizimi Şekil 3.38'de verilmiştir.

Durum 5. Denetleyici parametreleri Durum 4'te olduğu gibidir. Yalnızca kaynak 1'e rastgele ortalaması 0 ve variyansı 5 olan Gaussian sinyali, kaynak 2'ye genliği 5 ve sıklığı 1Hz olan sinüsoidal işaret ilave edilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.39'da verilmiştir. Bu sistemi simule etmek için Şekil 3.40'ta verilen sistem Simulink'te kurulmuştur.

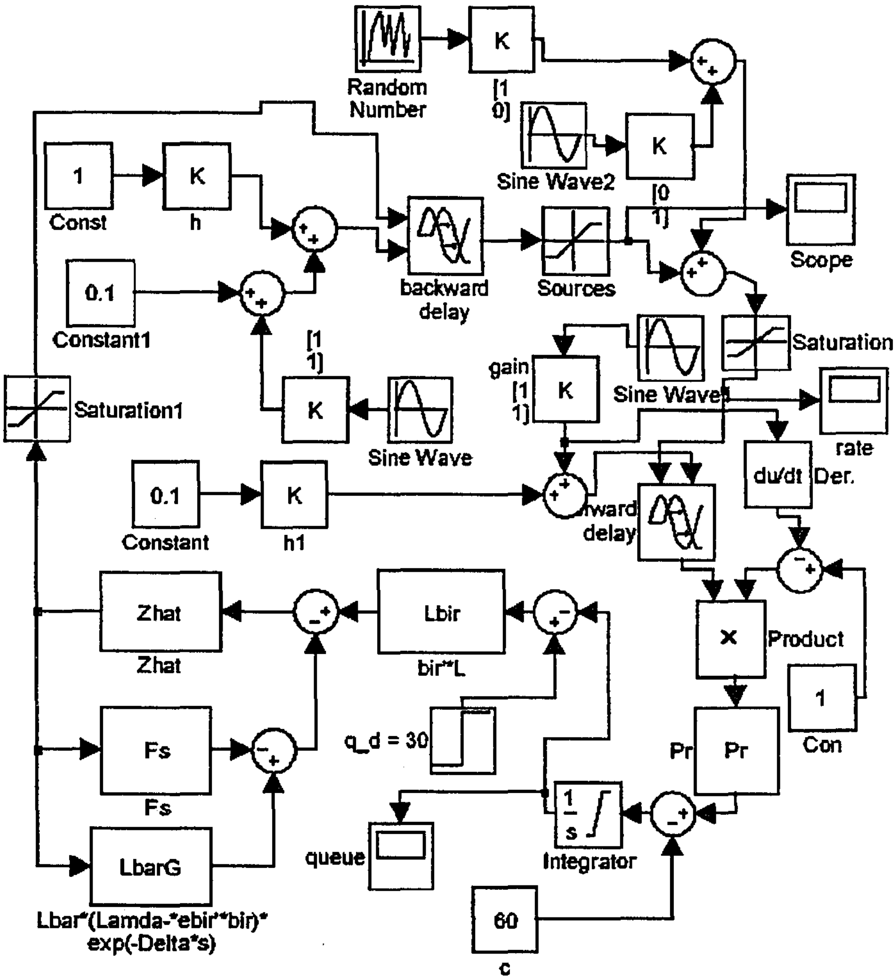
Durum 6. Gecikmeler Durum 4'te olduğu gibidir. Değiştirilmiş denetleyici parametreler Çizelge 3.3'de verilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.41'de verilmiştir.



Şekil 3.38: Durum 4 için denetleyicinin Bode çizimi



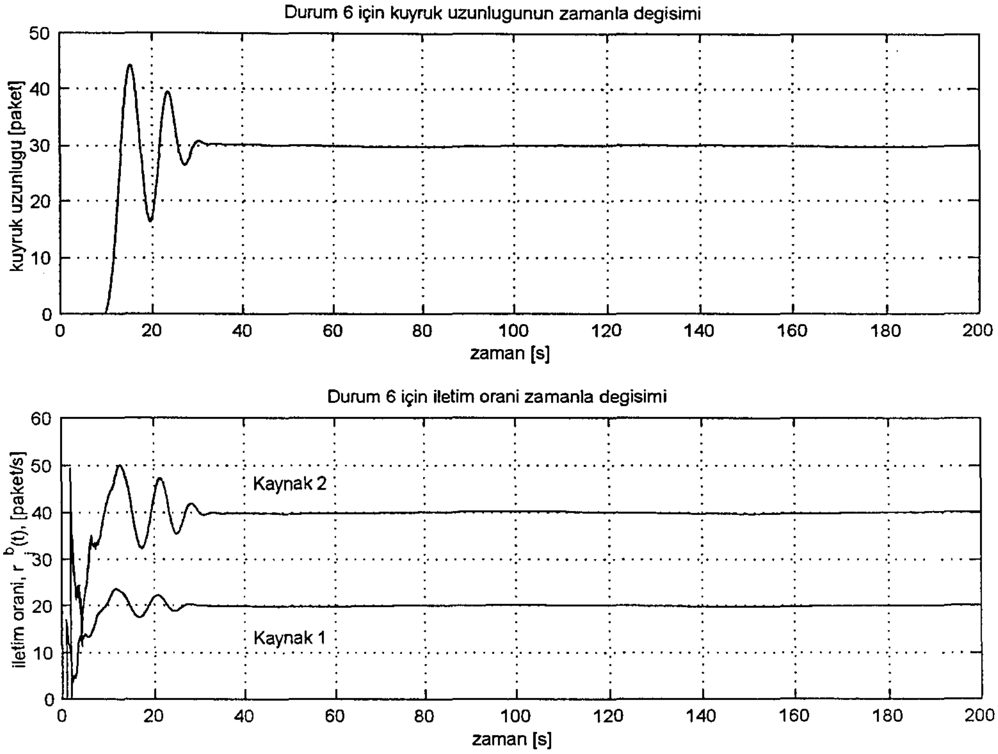
Şekil 3.39: Durum 5 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



Şekil 3.40: Durum 5 için Simulink'te kurulan model

Çizelge 3.3: Durum 6 için simulasyon parametreleri

i	δ_i^+	β_i	β_i^f	γ_i
1	2	0.05	0.005	1.40
2	3	0.05	0.005	4.35



Şekil 3.41: Durum 6 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi

Çizelge 3.4: Durum 7 için simulasyon parametreleri

i	δ_i^+	β_i	β_i^f	γ_i
1	8	0.7	0.2	2.85
2	10	0.7	0.2	7.77

Durum 7. Gecikmeler Durum 4'teki gibidir. Değiştirilmiş denetleyici parametreleri Çizelge 3.4'te verilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi şekil 3.42'de verilmiştir.

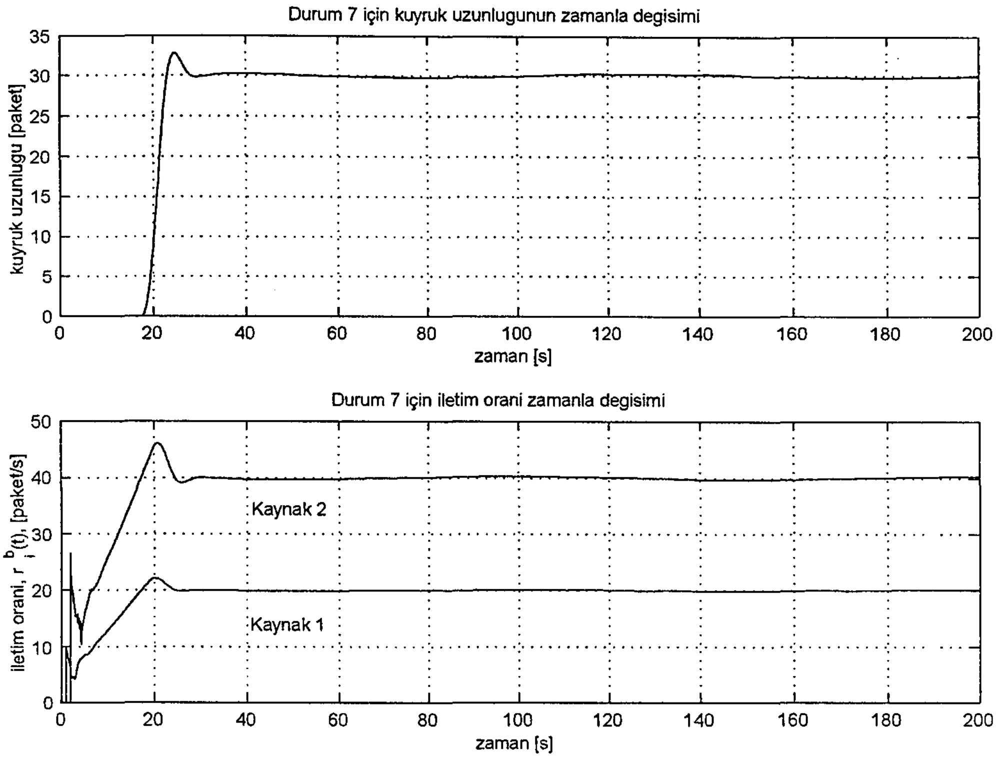
Durum 8. Durum 4'teki parametreler aynen seçilmiştir, yalnızca ileri yöndeki zaman gecikmesi

$$\tau_i^f(t) = 0.5 + 0.5 \sin\left(\frac{\pi}{50}t\right), \qquad i = 1, 2$$

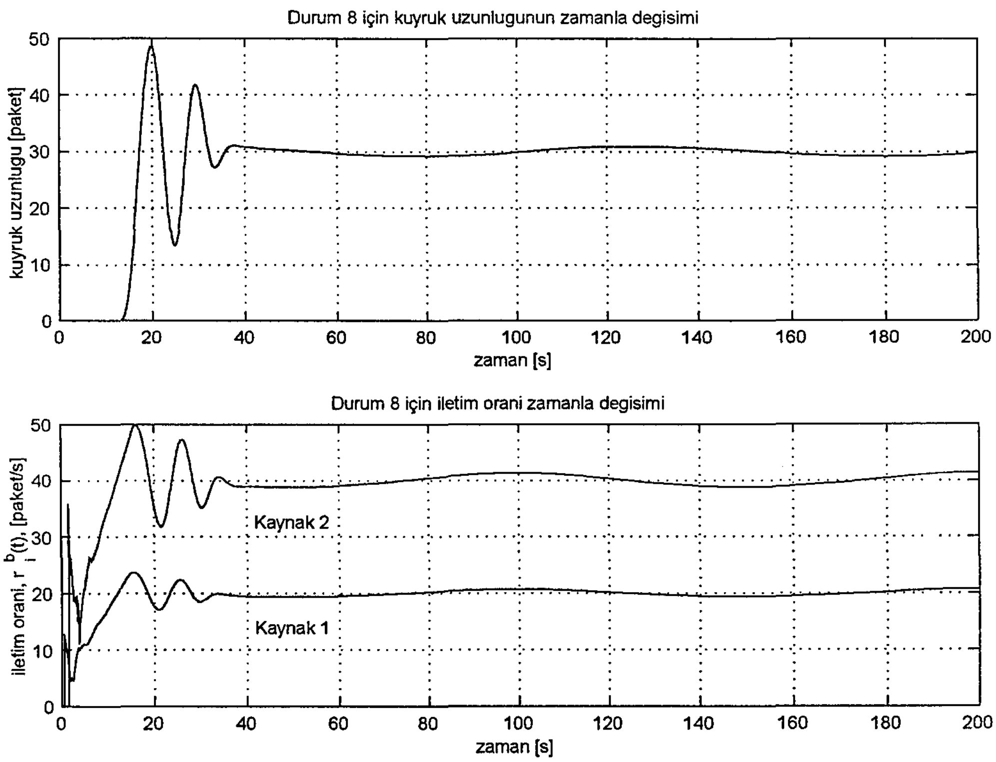
olarak seçilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.43'te verilmiştir.

Durum 9. Durum 4'teki parametreler aynen seçilmiştir, yalnızca $c(t)$ 60 ile 40 paket/s arasında Şekil 3.44'te gösterildiği gibi değişmektedir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.45'te verilmiştir.

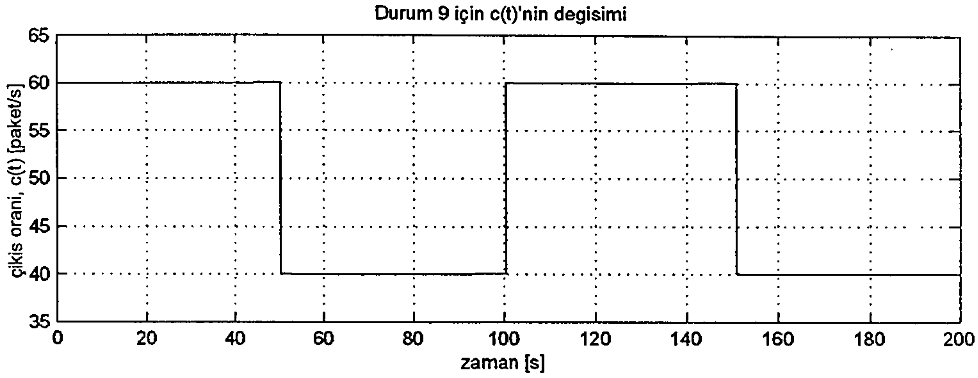
Durum 10. 5 kaynaklı sistem ele alınmıştır. Parametreler Çizelge 3.5'te verilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre



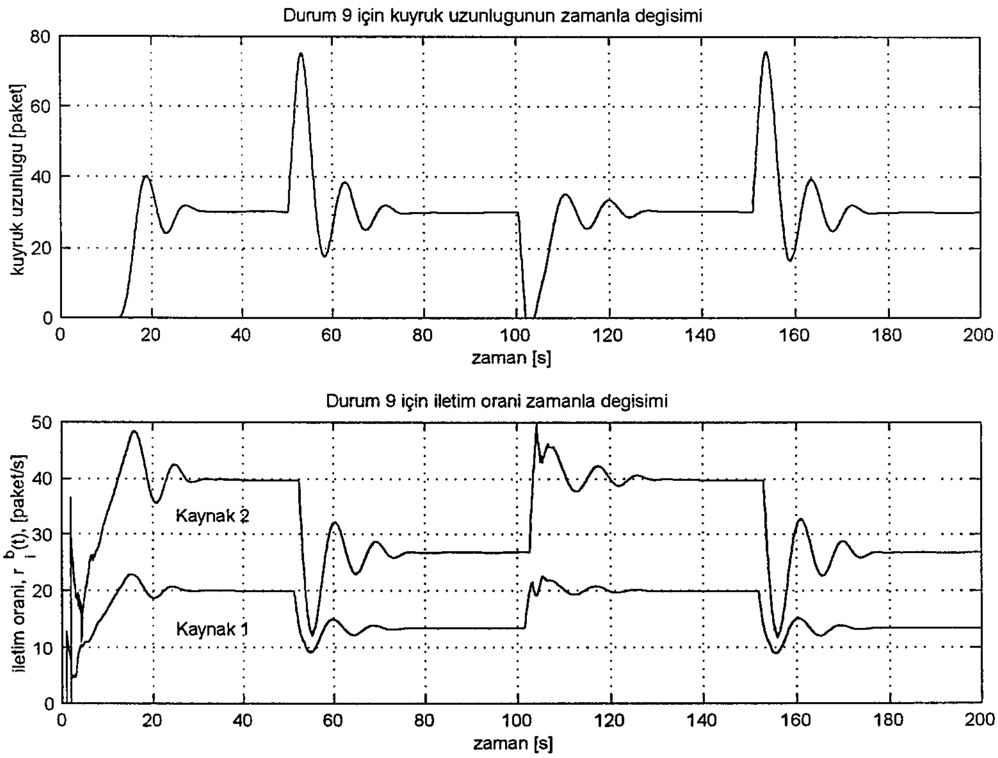
Şekil 3.42: Durum 7 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



Şekil 3.43: Durum 8 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



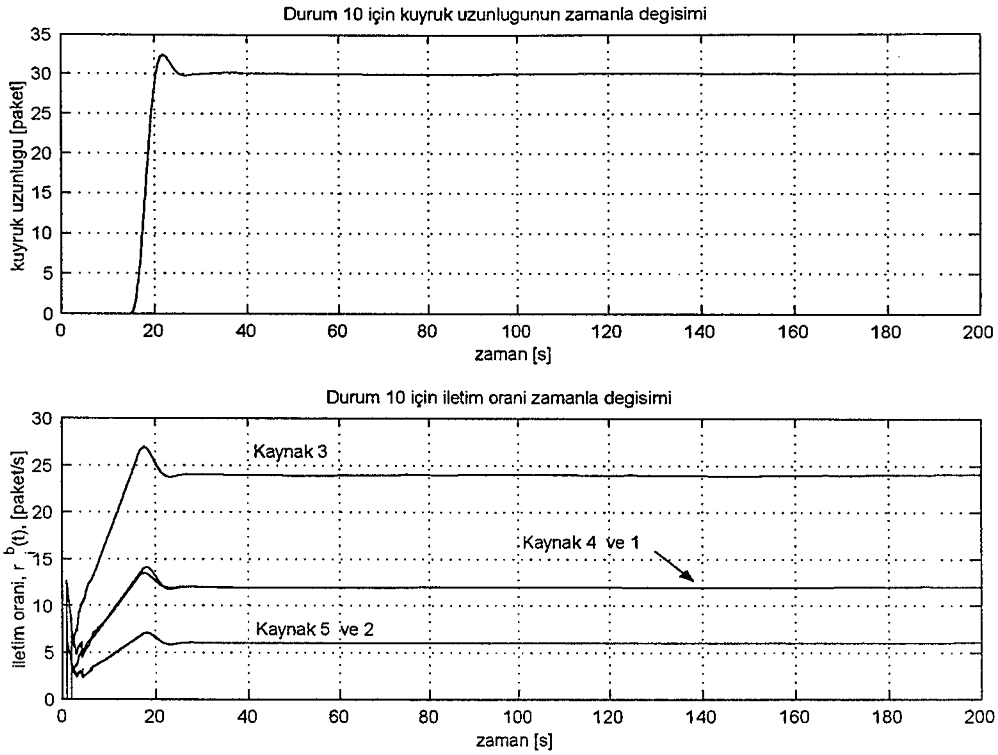
Şekil 3.44: Durum 9 için $c(t)$'nin zamana göre değişimi



Şekil 3.45: Durum 9 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi

Çizelge 3.5: Durum 10 için simulasyon parametreleri

i	h_i^b	δ_i^b	h_i^f	δ_i^f	α_i	δ_i^+	β_i	β_i^f	γ_i
1	1	$0.5\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.1	$0.1\sin\left(\frac{\pi}{50}t\right)$	0.2	2	0.1	0.01	2.06
2	2	$0.2\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.15	$0.1\sin\left(\frac{\pi}{50}t\right)$	0.1	3	0.2	0.02	1.69
3	1	$0.5\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.1	$0.05\sin\left(\frac{\pi}{100}t\right)$	0.4	2	0.1	0.01	4.13
4	2	$0.3\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.12	$0.05\sin\left(\frac{\pi}{100}t\right)$	0.2	3	0.2	0.02	3.62
5	2	$0.4\sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$	0.2	$0.05\sin\left(\frac{\pi}{50}t\right)$	0.1	3	0.2	0.02	1.72



Şekil 3.46: Durum 10 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi

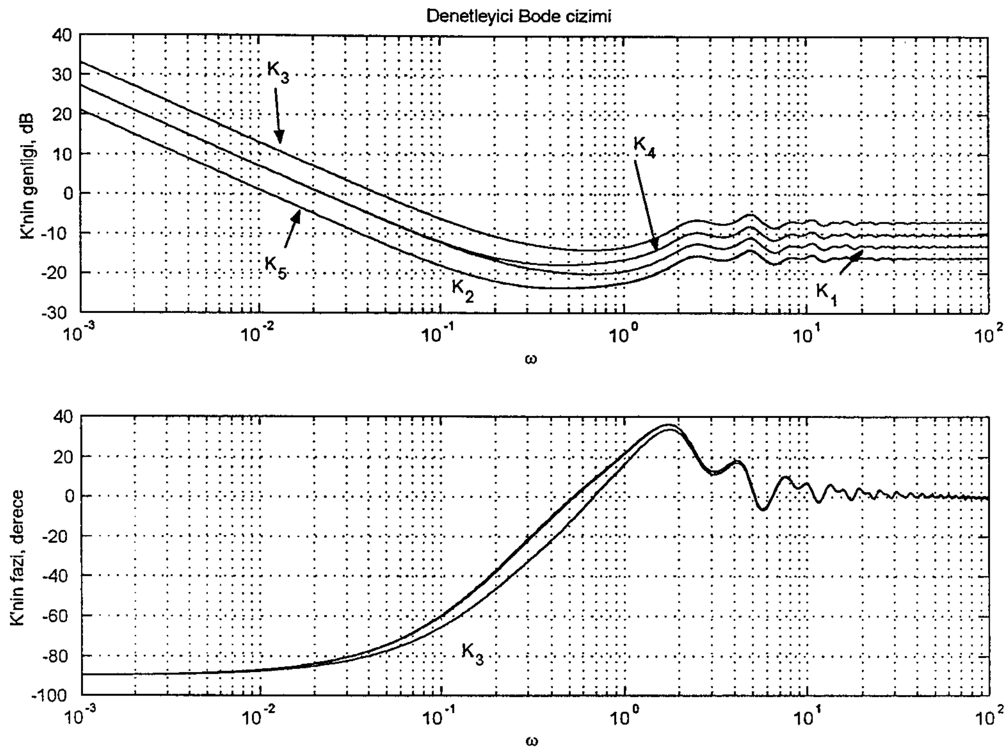
Çizelge 3.6: Durum 11 için simulasyon parametreleri

i	1	2	3	4	5
d_i [paket/s]	10	20	20	20	5

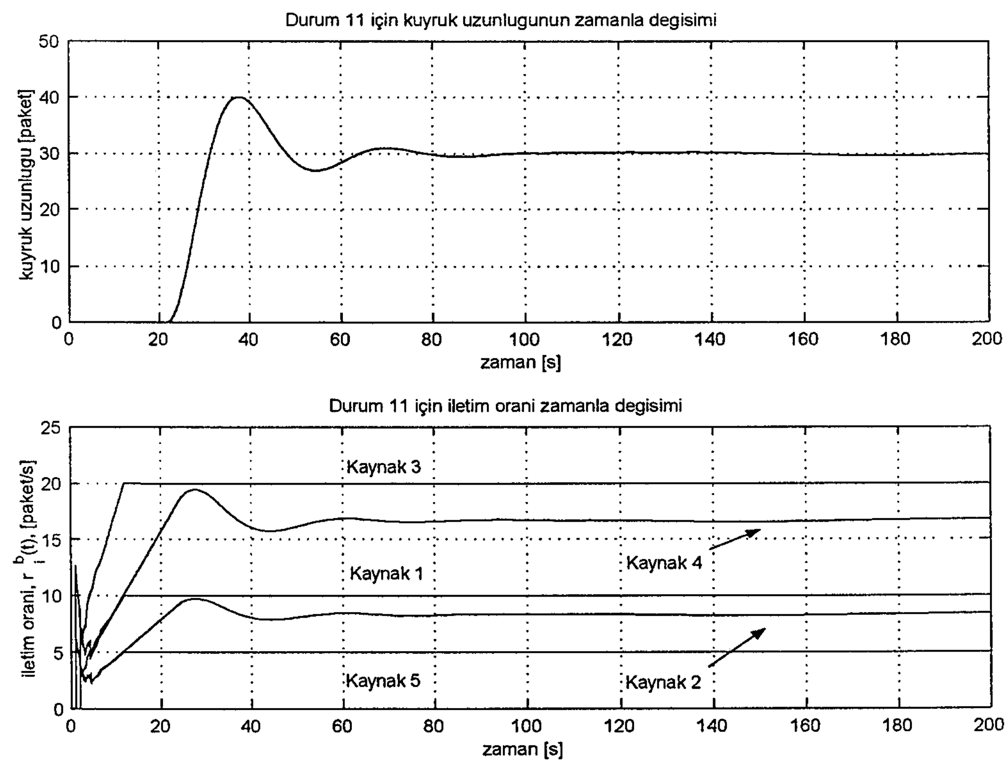
değişimi Şekil 3.46'da verilmiştir. Denetleyicinin Bode çizimi Şekil 3.47'de verilmiştir.

Durum 11. Durum 10'daki sistem ele alınmıştır, yalnızca kaynaklarda saturasyon var olduğu kabul edilmiştir. Kaynaklardaki saturasyon Çizelge 3.6'da verilmiştir. Kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi Şekil 3.48'de verilmiştir.

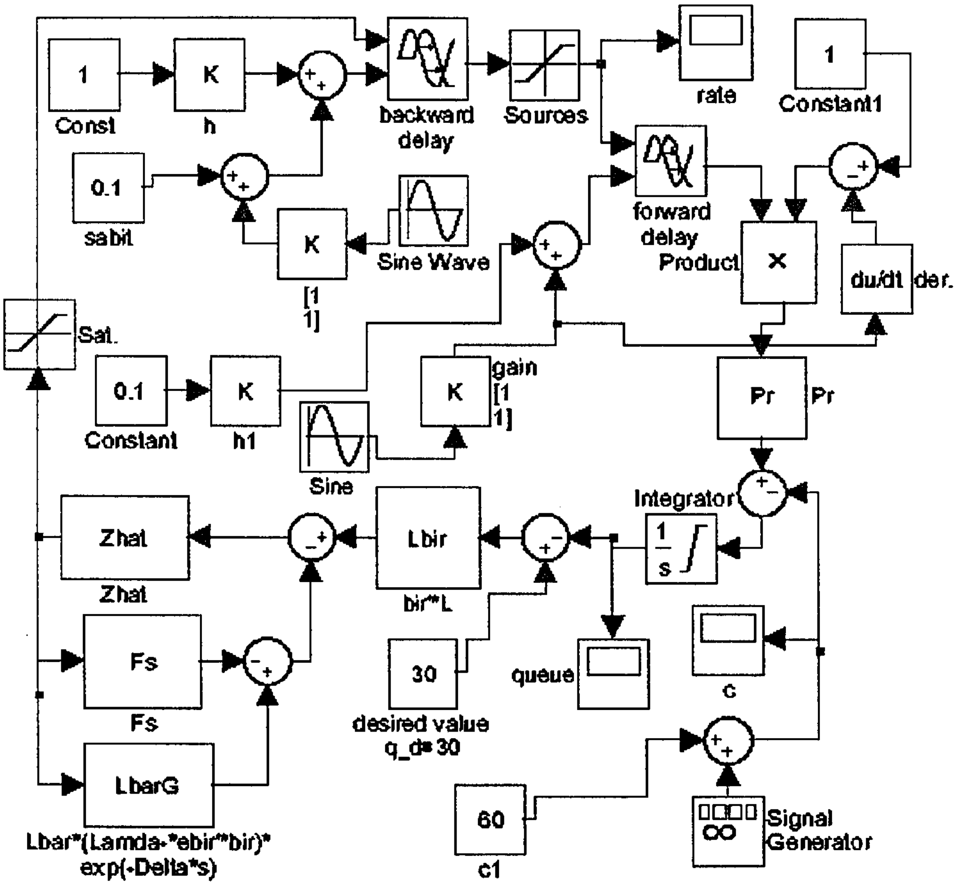
Not olarak Şekil 3.49'de verilen sistemde $c1 = 60$ paket/s olarak seçildiğinde ve "Signal Generator"un üretiği kare dalganın genliği sıfır alındığında özel olarak gösterilmeyen durumlar için Simulink modeli elde edilmektedir. Denetleyici hesaplanmak için kullanılan makro Ek-1'de verilmiştir. Ek-1'deki makroda kullanılan diğer yardımcı makrolar Ek-2 - 5'te verilmiştir. [6] makalesindeki sonuçlarla karşılaştırıldığında tasaralanan denetleyici bütün durumlar için daha hızlı cevap vermektedir. Bunun dışında tüm γ'lar farklı değerler almaktadır. Şekil 3.49'da verilmiş olan Simulink modeli farklı gecikme değerleri girerek simulasyonlar yapılmıştır. Aynı şekil bir önceki kısımda incelenmiş olan problemin simulasyonu için de kullanılmıştır.



Şekil 3.47: Durum 10 için denetleyicinin Bode çizimi



Şekil 3.48: Durum 11 için kuyruk uzunluğunun ve iletim oranının zamana göre değişimi



Şekil 3.49: Simulink'te kullanılan blok diyagram modeli

4 ÇOK TIKALI GEÇİT DURUMUNDA VERİ İLETİŞİM AĞININ MODELLENMESİ VE GÜRBÜZ DENETLEYİCİNİN TASARIMI

Bu alt bölümde bir önceki bölümde konu alınan tek tıkalı geçit veri iletişim ağının modellenmesinden ve denetleyicinin tasarım yönteminden faydalanarak çok tıkalı geçit için denetleyici tasarlanacaktır.

4.1 Modelleme

Şekil 4.1'de $n = 2$ tıkalı geçit için ağ kontrol modeli verilmiştir. Şekilde ve bu bölüm boyunca

$S_{i,j}$: i. geçide ait j. kaynak; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$r_{i,j}(t)$: i. geçidin j. kaynağının t anında denetleyici tarafından belirlenen iletim oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$r^s_{i,j}(t)$: i. geçidin j. kaynağının t anında iletim oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$r^b_{i,j}(t)$: i. geçitten gönderilen ve j. kaynakta t anında kabul edilen iletim oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$\tau^f_{i,j}(t)$: i. geçidin j. kaynağının t anında ileri yönde zaman gecikmesi; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$\tau^b_{i,j}(t)$: i. geçidin j. kaynağının t anında geri yönde zaman gecikmesi; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i)$

$\rho_{i,j}(t)$: i. ile j. geçit arasında t anında denetleyici tarafından belirlenen iletim oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$

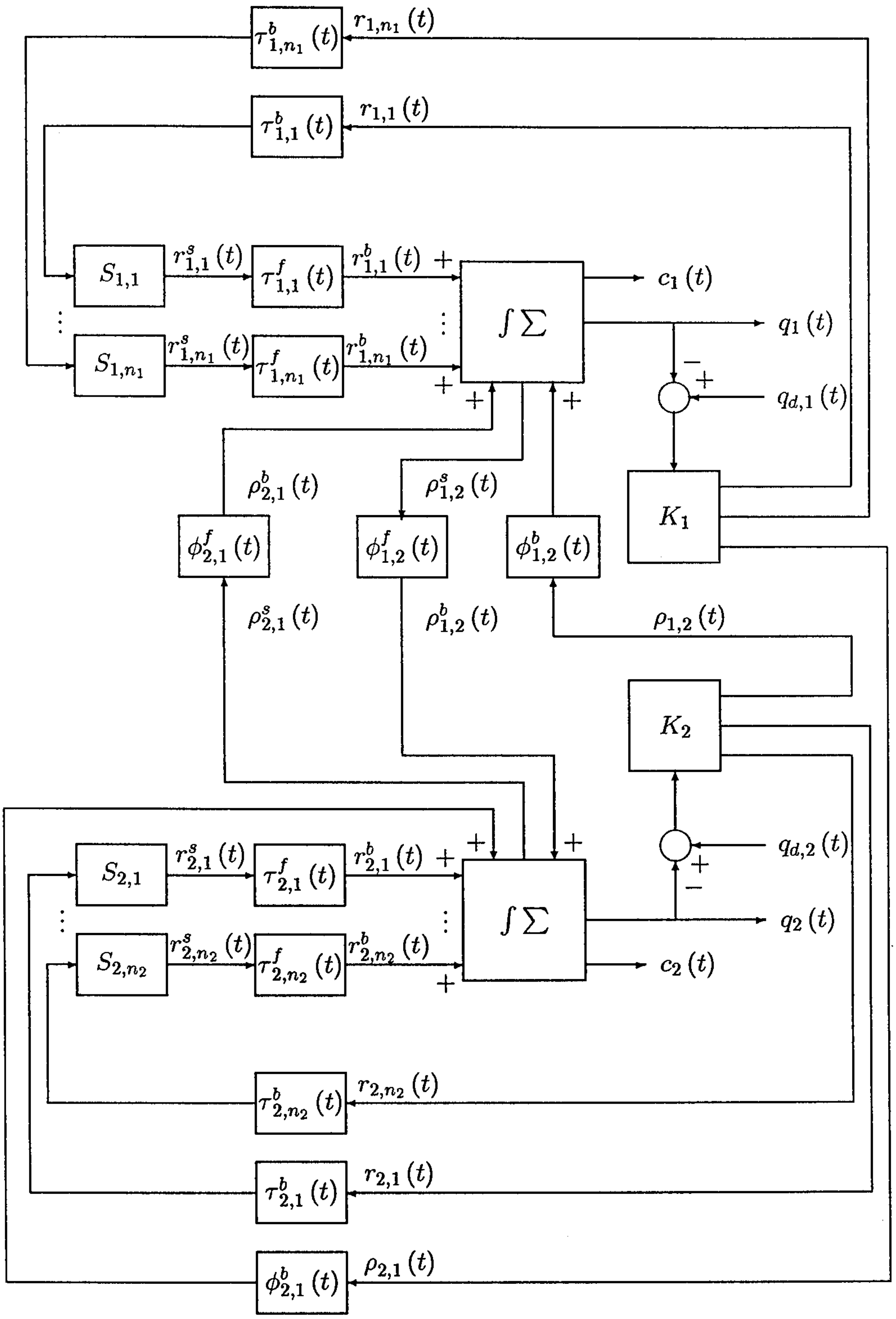
$\rho^s_{i,j}(t)$: i. geçitten j. geçide t anında gönderilen iletim oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$

$\rho^b_{i,j}(t)$: i. geçitten gönderilen ve j. geçitte t anında kabul edilen iletim oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$

$\phi^f_{i,j}(t)$: i. geçitten j. geçide t anında ileri yöndeki zaman gecikmesi; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$

$\phi^b_{i,j}(t)$: i. geçitten j. geçide t anında geri yöndeki zaman gecikmesi; $(i = 1, 2, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, n)$

$q_i(t)$: i. geçide ait t anında kuyruk uzunluğu; $(i = 1, 2, \cdots, n)$



Şekil 4.1: İki tıkalı düğüm ağı için denetim modeli

$q_{d,i}(t)$: i. geçide ait t anında kuyruk uzunluğunun tasarım değeri; $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$c_i(t)$: i. geçitten t anında çıkış akış oranı; $(i = 1, 2, \cdots, n)$

anlamlarını taşıyan semboller kullanılacaktır. Geçitteki kuyruk uzunluğunun dinamiği deterministik akışkanlar kanununa göre ifade edilebilir:

$$\dot{q}_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} r_{i,k}^{b}(t) + \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \rho_{k,i}^{b}(t) - c_i(t) - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \rho_{i,k}^{s}(t),\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{4.1}$$

Şekil 4.1'deki gösterimden yararlanılarak

$$\begin{aligned} r_{i,k}^{s}(t) &= r_{i,k}\left(t - \tau_{i,k}^{b}(t)\right), \\ \rho_{i,k}^{s} &= \rho_{i,k}\left(t - \phi_{i,k}^{b}(t)\right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan (4.1) denkleminden

$$q_i(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{n_i} r_{i,k}^{b}(\nu) + \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \left(\rho_{k,i}^{b}(\nu) - \rho_{i,k}^{s}(\nu)\right) - c_i(\nu) \right] d\nu + q_i(0)$$

$$\begin{aligned} q_i(t) = {} & \sum_{k=1}^{n_i} \int_0^t r_{i,k}^{b}(\nu)\, d\nu + \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \int_0^t \rho_{k,i}^{b}(\nu)\, d\nu - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{n} \int_0^t \rho_{i,k}^{s}(\nu)\, d\nu \\ & - \int_0^t c_i(\nu)\, d\nu + q_i(0),\ i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{4.2}$$

ifadesi elde edilir.

Hem $\tau_{i,k}^{\cdot}(t)$ hem de $\phi_{i,k}^{\cdot}(t)$'nin zamanla değişen, fakat bilinmeyen değerler aldığı kabul edilir, ancak değişim aralığı bilindiğini varsayılır, yani

$$\begin{aligned} \tau_{i,k}^{\cdot}(t) &= h_{i,k}^{r\cdot} + \delta_{i,k}^{r\cdot}(t),\ i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, n_i, \\ \phi_{i,k}^{\cdot}(t) &= h_{i,k}^{\rho\cdot} + \delta_{i,k}^{\rho\cdot}(t),\ i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

geçerli olduğu kabul edilir. Burada " $\cdot$ " işareti ile b veya f temsil edilmiştir. Ayrıca

$h_{i,k}^{r\cdot} > 0$ $\left(h_{i,k}^{\rho\cdot} > 0\right)$ $(i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, n_i)$ bilinen zamanla değişmeyen kısım,

$\delta_{i,k}^{r\cdot}(t)$ $\left(\delta_{i,k}^{\rho\cdot}(t)\right)$ $(i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, n_i)$ zamanla değişen ve bilinmeyen kısım, negatif gecikmeleri önleyebilmek için (sistem nedensel olmalı) $\delta_{i,k}^{r\cdot}(t)$ $\left(\delta_{i,k}^{\rho\cdot}(t)\right)$ üzerinde kısıtlanmalar getirilmesi gerek: $\left|\delta_{i,k}^{r\cdot}(t)\right| < \delta_{i,k}^{r\cdot +} \leq h_{i,k}^{r\cdot}$ $\left(\left|\delta_{i,k}^{\rho\cdot}(t)\right| < \delta_{i,k}^{\rho\cdot +} \leq h_{i,k}^{\rho\cdot}\right)$ geçerli olduğu varsayılır,

olarak tanımlanmıştır.

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\int_0^t r_{i,j}^b(\nu)\,d\nu &= \begin{cases} \int_0^{t-\tau_{i,j}^f(t)} r_{i,j}^s(\varphi)\,d\varphi, & t-\tau_{i,j}^f(t)\geq 0 \\ 0, & t-\tau_{i,j}^f(t)<0 \end{cases} \\
\int_0^t \rho_{i,j}^b(\nu)\,d\nu &= \begin{cases} \int_0^{t-\phi_{i,j}^f(t)} \rho_{i,j}^s(\varphi)\,d\varphi, & t-\phi_{i,j}^f(t)\geq 0 \\ 0, & t-\phi_{i,j}^f(t)<0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

olarak ifade edilebilir. Diğer yandan eğer (4.3) ifadelerinin türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
r_{i,j}^b(t) &= \begin{cases} \left(1-\dot{\delta}_{i,j}^{rf}(t)\right) r_{i,j}\left(t-\tau_{i,j}(t)\right), & t-\tau_{i,j}^f(t)\geq 0 \\ 0, & t-\tau_{i,j}^f(t)<0 \end{cases} \\
\rho_{i,j}^b(t) &= \begin{cases} \left(1-\dot{\delta}_{i,j}^{\rho f}(t)\right) \rho_{i,j}\left(t-\phi_{i,j}(t)\right), & t-\phi_{i,j}^f(t)\geq 0 \\ 0, & t-\phi_{i,j}^f(t)<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

ifadelerini yazmak mümkündür. O halde denklem (4.2)

$$
\begin{aligned}
q_i(t) &= \sum_{j=1}^{n_i}\left[\int_0^t \left(1-\dot{\delta}_{i,j}^{rf}(\nu)\right) r_{i,j}\left(\nu-\tau_{i,j}(\nu)\right)d\nu\right] - \int_0^t c_i(\nu)\,d\nu + q_i(0) \\
&\quad + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\int_0^t \left[\left(1-\dot{\delta}_{j,i}^{\rho f}(\nu)\right)\rho_{j,i}\left(\nu-\phi_{j,i}(\nu)\right) - \rho_{i,j}\left(\nu-\phi_{i,j}^b(\nu)\right)\right]d\nu
\end{aligned}
$$

olarak ifade edilebilir.

$$
\begin{aligned}
q_{o,i}(t) &= \sum_{j=1}^{n_i}\int_0^t r_{i,j}\left(\nu-h^r{}_{i,j}\right)d\nu - \int_0^t c_i(\nu)\,d\nu + q_i(0) \\
&\quad + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\int_0^t \left[\rho_{j,i}\left(\nu-h_{j,i}^{\rho}\right) - \rho_{i,j}\left(\nu-h_{i,j}^{\rho b}\right)\right]d\nu
\end{aligned}
$$

olarak tanımlansın. $\delta_{q_i}(t) := q_i(t) - q_{o,i}(t)$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
\delta_{q_i}(t) &= \sum_{j=1}^{n_i}\int_0^t \left[\left(1-\dot{\delta}_{i,j}^{rf}(\nu)\right) r_{i,j}\left(\nu-\tau_{i,j}(\nu)\right) - r_{i,j}\left(\nu-h^r{}_{i,j}\right)\right]d\nu \\
&\quad + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\int_0^t \left[\left(1-\dot{\delta}_{j,i}^{\rho f}(\nu)\right)\rho_{j,i}\left(\nu-\phi_{j,i}(\nu)\right) - \rho_{j,i}\left(\nu-h_{j,i}^{\rho}\right)\right]d\nu \\
&\quad - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\int_0^t \left[\rho_{i,j}\left(\nu-\phi_{i,j}^b(\nu)\right) - \rho_{i,j}\left(\nu-h_{i,j}^{\rho b}\right)\right]d\nu
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi

$$
\begin{aligned}
\lambda_{i,j}^r &= \nu - h_{i,j}^r - \delta_{i,j}^r(\nu) =: f_{i,j}^r(\nu), \\
\lambda_{i,j}^{\rho b} &= \nu - h_{i,j}^{\rho b} - \delta_{i,j}^{\rho b}(\nu) =: f_{i,j}^{\rho b}(\nu), \\
\lambda_{j,i}^{\rho} &= \nu - h_{j,i}^{\rho} - \delta_{j,i}^{\rho}(\nu) =: f_{j,i}^{\rho}(\nu)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda^{r}_{i,j}}{d\nu} &= 1-\frac{d\delta^{r}_{i,j}(\nu)}{d\nu}=1-g^{r}_{i,j}\left(\lambda^{r}_{i,j}\right), \\
\frac{d\lambda^{\rho b}_{i,j}}{d\nu} &= 1-\frac{d\delta^{\rho b}_{i,j}(\nu)}{d\nu}=1-g^{\rho b}_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right), \\
\frac{d\lambda^{\rho}_{j,i}}{d\nu} &= 1-\frac{d\delta^{\rho}_{j,i}(\nu)}{d\nu}=1-g^{\rho}_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{j,i}\right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ifadeleri yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
g^{r}_{i,j}\left(\lambda^{r}_{i,j}\right) &= \left.\frac{d\delta^{r}_{i,j}(\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\left(f^{r}_{i,j}\left(\lambda^{r}_{i,j}\right)\right)^{-1}}, \\
g^{\rho b}_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right) &= \left.\frac{d\delta^{\rho b}_{i,j}(\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\left(f^{\rho b}_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right)\right)^{-1}}, \\
g^{\rho}_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{j,i}\right) &= \left.\frac{d\delta^{\rho}_{j,i}(\nu)}{d\nu}\right|_{\nu=\left(f^{\rho}_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{j,i}\right)\right)^{-1}}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. $f^{r}_{i,j}\left(\lambda^{r}_{i,j}\right)$, $f^{\rho b}_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right)$ ve $f^{\rho}_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{j,i}\right)$'nin ters fonksiyonlarının var olduğu kabul edilmiştir, zira böyle olmazsa kaynaktan hedefe veri göndermeden önce gelmiş olacaktır oysa bu gerçek sistemlere aykırıdır. Bu durumda

$$\frac{d\delta^{r}_{i,j}(\nu)}{d\nu}>0, \qquad \frac{d\delta^{\rho b}_{i,j}(\nu)}{d\nu}>0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{d\delta^{\rho}_{j,i}(\nu)}{d\nu}>0$$

sağlanmalıdır. O halde

$$\begin{aligned}
\left|g^{r}_{i,j}\left(\lambda^{r}_{i,j}\right)\right| &< \beta^{r}_{i,j},\ \forall\lambda^{r}_{i,j}\geq -h^{r}_{i,j}, && 0<\beta^{rf}_{i,j}<1 \\
\left|g^{\rho b}_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right)\right| &< \beta^{\rho b}_{i,j},\ \forall\lambda^{\rho b}_{i,j}\geq -h^{\rho b}_{i,j}, && 0<\beta^{\rho b}_{i,j}<1 \\
\left|g^{\rho}_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{j,i}\right)\right| &< \beta^{\rho}_{j,i},\ \forall\lambda^{\rho}_{j,i}\geq -h^{\rho}_{j,i}, && 0<\beta^{\rho f}_{j,i}<1
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu varsayılacaktır. Benzer bir şekilde ileri gecikmesine ait belirsizliklerin sınırının tanımlanması mümkündür:

$$\begin{aligned}
\left|\dot{\delta}^{rf}_{i,j}\right| &< \beta^{rf}_{i,j}<\beta^{r}_{i,j}<1 \\
\left|\dot{\delta}^{\rho f}_{i,j}\right| &< \beta^{\rho f}_{i,j}<\beta^{\rho}_{i,j}<1\,.
\end{aligned}$$

(4.5)'teki eşitlikten

$$\begin{aligned}
d\nu &= \frac{d\lambda^{r}_{i,j}}{1-g^{r}_{i,j}\left(\lambda^{r}_{i,j}\right)} && \text{veya} \\
d\nu &= \frac{d\lambda^{\rho b}_{i,j}}{1-g^{\rho b}_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right)} && \text{veya} \\
d\nu &= \frac{d\lambda^{\rho}_{j,i}}{1-g^{\rho}_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{j,i}\right)}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. $\delta^{r}_{i,j}(0) = \delta^{\rho b}_{i,j}(0) = \delta^{\rho}_{j,i}(0) = 0$ olsun. Bu durumda (4.4)'teki eşitliği

$$
\begin{aligned}
\delta_{q_i}(t) = & \sum_{j=1}^{n_i}\left[\int_0^t\left(1-\dot{\delta}^{rf}_{i,j}(\nu)\right) r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\,d\nu - \int_{-h^r_{i,j}}^{t-h^r_{i,j}} r_{i,j}(\sigma)\,d\sigma\right] \\
& + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left[\int_0^t\left(1-\dot{\delta}^{\rho f}_{j,i}(\nu)\right)\rho_{j,i}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))\,d\nu - \int_{-h^{\rho}_{j,i}}^{t-h^{\rho}_{j,i}}\rho_{j,i}(\sigma)\,d\sigma\right] \\
& + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left[-\int_0^t \rho_{i,j}\left(\nu-\phi^b_{i,j}(\nu)\right)d\nu + \int_{-h^{\rho b}_{i,j}}^{t-h^{\rho b}_{i,j}}\rho_{i,j}(\sigma)\,d\sigma\right] \\
= & \sum_{j=1}^{n_i}\left[\int_0^t\left(1-\dot{\delta}^{rf}_{i,j}(\nu)\right) r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\,d\nu - \int_{-h^r_{i,j}}^{t-h^r_{i,j}} r_{i,j}(\sigma)\,d\sigma\right. \\
& \left. + \int_{-h^r_{i,j}}^{t-h^r_{i,j}-\delta^r_{i,j}(t)} r_{i,j}(\sigma)\,d\sigma - \int_{-h^r_{i,j}}^{t-h^r_{i,j}-\delta^r_{i,j}(t)} r_{i,j}\left(\lambda^r_{i,j}\right)d\lambda^r_{i,j}\right] \\
& + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left[\int_0^t\left(1-\dot{\delta}^{\rho f}_{j,i}(\nu)\right)\rho_{j,i}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))\,d\nu - \int_{-h^{\rho}_{j,i}}^{t-h^{\rho}_{j,i}}\rho_{j,i}(\sigma)\,d\sigma\right. \\
& \left. + \int_{-h^{\rho}_{j,i}}^{t-h^{\rho}_{j,i}-\delta^{\rho}_{j,i}(t)}\rho_{j,i}(\sigma)\,d\sigma - \int_{-h^{\rho}_{j,i}}^{t-h^{\rho}_{j,i}-\delta^{\rho}_{j,i}(t)}\rho_{j,i}\left(\lambda^{\rho}_{i,j}\right)d\lambda^{\rho}_{i,j}\right] \\
& + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left[-\int_0^t \rho_{i,j}\left(\nu-\phi^b_{i,j}(\nu)\right)d\nu + \int_{-h^{\rho b}_{i,j}}^{t-h^{\rho b}_{i,j}}\rho_{i,j}(\sigma)\,d\sigma\right. \\
& \left. - \int_{-h^{\rho b}_{i,j}}^{t-h^{\rho b}_{i,j}-\delta^{\rho b}_{i,j}(t)}\rho_{i,j}(\sigma)\,d\sigma + \int_{-h^{\rho b}_{i,j}}^{t-h^{\rho b}_{i,j}-\delta^{\rho b}_{i,j}(t)}\rho_{i,j}\left(\lambda^{\rho b}_{i,j}\right)d\lambda^{\rho b}_{i,j}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{q_i}(t) = & \sum_{j=1}^{n_i}\left[\int_0^t\left(1-\dot{\delta}^{rf}_{i,j}(\nu)\right) r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\,d\nu - \int_{t-h^r_{i,j}-\delta^r_{i,j}(t)}^{t-h^r_{i,j}} r_{i,j}(\nu)\,d\nu\right. \\
& \left. - \int_0^t r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\left[1-g^r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\right]d\nu\right] \\
& + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left[\int_0^t\left(1-\dot{\delta}^{\rho f}_{j,i}(\nu)\right)\rho_{j,i}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))\,d\nu - \int_{t-h^{\rho}_{j,i}-\delta^{\rho}_{j,i}(t)}^{t-h^{\rho}_{j,i}}\rho_{j,i}(\nu)\,d\nu\right. \\
& \left. - \int_0^t \rho_{j,i}\left(\nu-\phi^b_{j,i}(\nu)\right)\left[1-g^{\rho}_{j,i}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))\right]d\nu\right] \\
& + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left[-\int_0^t \rho_{i,j}\left(\nu-\phi^b_{i,j}(\nu)\right)d\nu + \int_{t-h^{\rho b}_{i,j}-\delta^{\rho b}_{i,j}(t)}^{t-h^{\rho b}_{i,j}}\rho_{i,j}(\nu)\,d\nu\right. \\
& \left. + \int_0^t \rho_{i,j}\left(\nu-\phi^b_{i,j}(\nu)\right)\left[1-g^{\rho b}_{i,j}\left(\nu-\phi^b_{i,j}(\nu)\right)\right]d\nu\right]
\end{aligned}
$$

$$\delta_{q_i}(t)=\sum_{j=1}^{n_i}\left[\int_0^t\left(g_{i,j}^r(\nu-\tau_{i,j}(\nu))-\dot{\delta}_{i,j}^{rf}(\nu)\right)r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\,d\nu\right.$$
$$\left.-\int_{t-h_{i,j}^r-\delta_{i,j}^r(t)}^{t-h_{i,j}^r}r_{i,j}(\nu)\,d\nu\right]+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\left[\int_0^t\left(g_{j,i}^{\rho}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))-\dot{\delta}_{j,i}^{\rho f}(\nu)\right)\right.$$
$$\cdot\,\rho_{j,i}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))\,d\nu-\int_{t-h_{j,i}^{\rho}-\delta_{i,j}^{\rho}(t)}^{t-h_{j,i}^{\rho}}\rho_{j,i}(\nu)\,d\nu$$
$$\left.+\int_0^t-g_{i,j}^{\rho b}\left(\nu-\phi_{i,j}^b(\nu)\right)\rho_{i,j}\left(\nu-\phi_{i,j}^b(\nu)\right)d\nu+\int_{t-h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b}(t)}^{t-h_{i,j}^{\rho b}}\rho_{i,j}(\nu)\,d\nu\right]$$

olarak düzenlenebilir. Bu durumda

$$\delta_{q_i}(t)=\sum_{j=1}^{n_i}\bar{\delta}_{q_i}^{j}(t)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\hat{\delta}_{q_i}^{j}(t)+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\tilde{\delta}_{q_i}^{j}(t)\tag{4.6}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\bar{\delta}_{q_i}^{j}(t)=\int_0^t\left(g_{i,j}^r(\nu-\tau_{i,j}(\nu))-\dot{\delta}_{i,j}^{rf}(\nu)\right)r_{i,j}(\nu-\tau_{i,j}(\nu))\,d\nu$$
$$-\int_{t-h_{i,j}^r-\delta_{i,j}^r(t)}^{t-h_{i,j}^r}r_{i,j}(\nu)\,d\nu$$

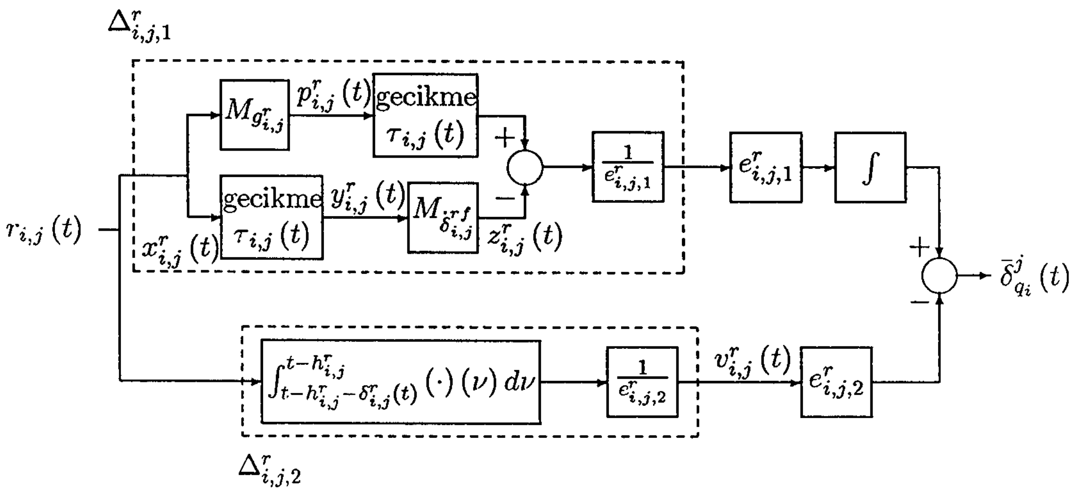
$$\hat{\delta}_{q_i}^{j}(t)=\int_0^t\left(g_{j,i}^{\rho}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))-\dot{\delta}_{j,i}^{\rho f}(\nu)\right)\rho_{j,i}(\nu-\phi_{j,i}(\nu))\,d\nu$$
$$-\int_{t-h_{j,i}^{\rho}-\delta_{j,i}^{\rho}(t)}^{t-h_{j,i}^{\rho}}\rho_{j,i}(\nu)\,d\nu$$

$$\tilde{\delta}_{q_i}^{j}(t)=-\int_0^t g_{i,j}^{\rho b}\left(\nu-\phi_{i,j}^b(\nu)\right)\rho_{i,j}\left(\nu-\phi_{i,j}^b(\nu)\right)d\nu+\int_{t-h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b}(t)}^{t-h_{i,j}^{\rho b}}\rho_{i,j}(\nu)\,d\nu$$

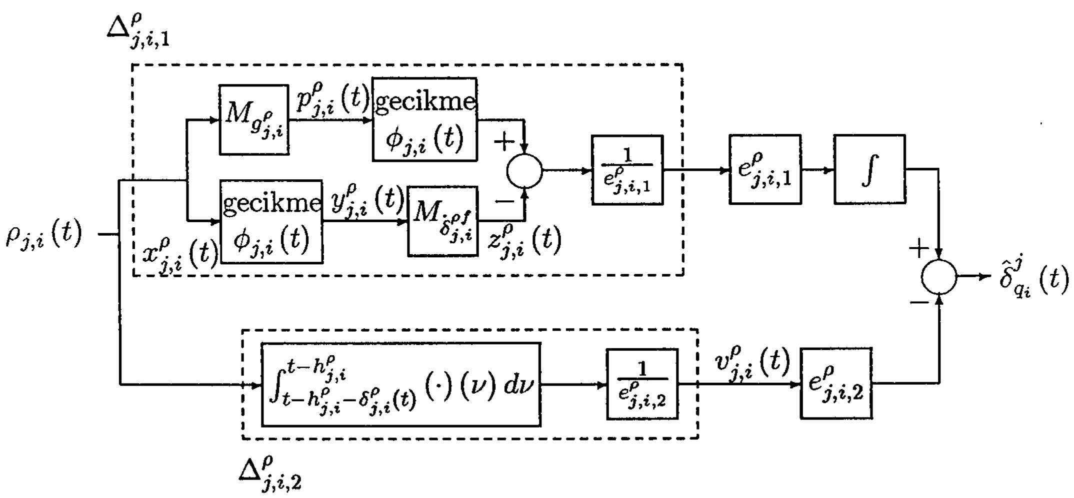
olarak tanımlanmıştır. $\bar{\delta}_{q_i}^{j}(t)$ Şekil 4.2'de, $\hat{\delta}_{q_i}^{j}(t)$ ise Şekil 4.3'te ve $\tilde{\delta}_{q_i}^{j}(t)$ Şekil 4.4'te verilmiştir. Şekillerde $\Delta_{i,j,1}^r$, $\Delta_{i,j,2}^r$, $\Delta_{i,j,1}^{\rho b}$, $\Delta_{i,j,2}^{\rho b}$, $\Delta_{j,i,1}^{\rho}$ ve $\Delta_{j,i,2}^{\rho}$ ile doğrusal zamanla değişen sistemler gösterilmiştir. $M_{g_{i,j}^r}$, $M_{g_{i,j}^{\rho b}}$, $M_{g_{j,i}^{\rho}}$, $M_{\dot{\delta}_{i,j}^{rf}}$, ve $M_{\dot{\delta}_{j,i}^{\rho f}}$ ile sırasıyla $p_{i,j}^r(t)=g_{i,j}^r(t)\,r_{i,j}(t)$, $p_{i,j}^{\rho b}(t)=g_{i,j}^{\rho b}(t)\,\rho_{i,j}(t)$, $p_{j,i}^{\rho}(t)=g_{j,i}^{\rho}(t)\,\rho_{j,i}(t)$, $z_{i,j}^r(t)=\dot{\delta}_{i,j}^r(t)\,y_{i,j}^r(t)$, $z_{j,i}^{\rho}(t)=\dot{\delta}_{j,i}^{\rho}(t)\,y_{j,i}^{\rho}(t)$ ifadeleriyle tanımlanan zamana bağlı doğrusal sistemleri simgelemektedir. $e_{i,j,1}^r$, $e_{i,j,2}^r$, $e_{i,j,1}^{\rho b}$, $e_{i,j,2}^{\rho b}$, $e_{j,i,1}^{\rho}$ ve $e_{j,i,2}^{\rho}$ daha sonra belirlenecek sabitleri simgeler.

Eğer $t<0$ değerler için $r_{i,j}(t)=0$ olarak kabul edilirse

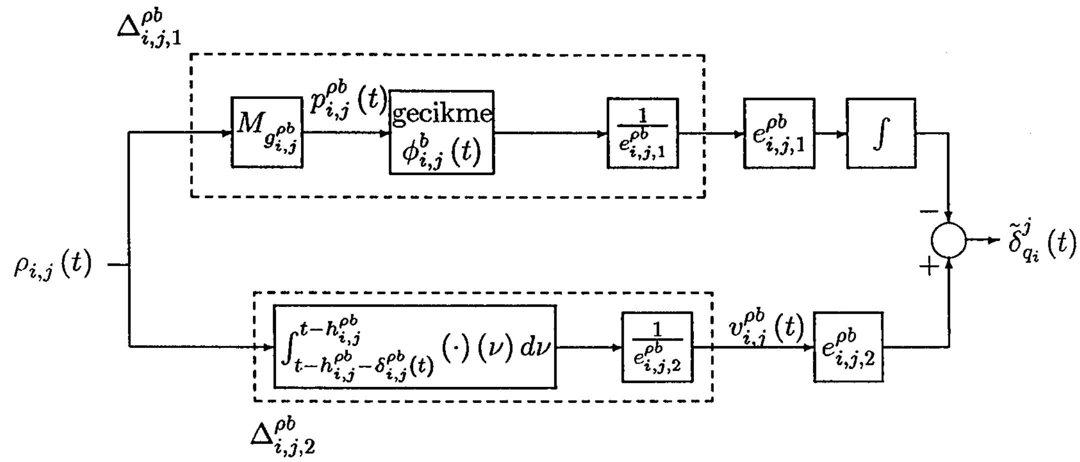
$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left|y_{i,j}^r(t)\right|^2dt&=\int_0^\infty\left|x_{i,j}^r(t-\tau_{i,j}(t))\right|^2dt\\&=\int_{-\tau_{i,j}(0)}^\infty\left|x_{i,j}^r\left(\lambda_{i,j}^r\right)\right|^2\frac{d\lambda_{i,j}^r}{1-g_{i,j}^r\left(\lambda_{i,j}^r\right)}\end{aligned}$$



Şekil 4.2: Sistemde belirsizlikler, $\bar{\delta}^j_{q_i}(t)$



Şekil 4.3: Sistemde belirsizlikler, $\hat{\delta}^j_{q_i}(t)$



Şekil 4.4: Sistemde belirsizlikler, $\tilde{\delta}^{j}_{q_i}(t)$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|y^r_{i,j}(t)\right|^2 dt &= \int_0^\infty \left|x^r_{i,j}\left(\lambda^r_{i,j}\right)\right|^2 \frac{d\lambda^r_{i,j}}{1-g^r_{i,j}\left(\lambda^r_{i,j}\right)} \\
&< \frac{1}{1-\beta^r_{i,j}} \int_0^\infty \left|x^r_{i,j}\left(\lambda^r_{i,j}\right)\right|^2 d\lambda^r_{i,j}
\end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir.

Benzer olarak eğer $t<0$ için $\rho_{j,i}(t)=0$ olarak kabul edilirse

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|y^\rho_{j,i}(t)\right|^2 dt &= \int_0^\infty \left|x^\rho_{j,i}\left(t-\phi_{j,i}(t)\right)\right|^2 dt \\
&= \int_{-\phi_{j,i}(0)}^\infty \left|x^\rho_{j,i}\left(\lambda^\rho_{j,i}\right)\right|^2 \frac{d\lambda^\rho_{j,i}}{1-g^\rho_{j,i}\left(\lambda^\rho_{j,i}\right)} \\
&= \int_0^\infty \left|x^\rho_{j,i}\left(\lambda^\rho_{j,i}\right)\right|^2 \frac{d\lambda^\rho_{j,i}}{1-g^\rho_{j,i}\left(\lambda^\rho_{j,i}\right)} \\
&< \frac{1}{1-\beta^\rho_{j,i}} \int_0^\infty \left|x^\rho_{j,i}\left(\lambda^\rho_{j,i}\right)\right|^2 d\lambda^\rho_{j,i}
\end{aligned}$$

ifadeler yazılabilir. Bu durumda $\Delta^r_{i,j,1}$'de ve $\Delta^\rho_{j,i,1}$'de bulunan gecikme blokların $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu sırasıyla $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^r_{i,j}}}$ ve $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^\rho_{j,i}}}$'den daha küçüktür. Bu durumda $\Delta^r_{i,j,1}$ ve $\Delta^\rho_{j,i,1}$'nin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu sırasıyla $\left(\frac{\beta^r_{i,j}+\beta^{rf}_{i,j}}{\sqrt{1-\beta^r_{i,j}}}\right)\frac{1}{e^r_{i,j,1}}$ ve $\left(\frac{\beta^\rho_{j,i}+\beta^{\rho f}_{j,i}}{\sqrt{1-\beta^\rho_{j,i}}}\right)\frac{1}{e^\rho_{j,i,1}}$'den küçüktür. O halde eğer $e^r_{i,j,1}=\frac{\sqrt{2}\left(\beta^r_{i,j}+\beta^{rf}_{i,j}\right)}{\sqrt{1-\beta^r_{i,j}}}$ ve $e^\rho_{j,i,1}=\frac{\sqrt{2}\left(\beta^\rho_{j,i}+\beta^{\rho f}_{j,i}\right)}{\sqrt{1-\beta^\rho_{j,i}}}$ olarak seçilirse $\Delta^r_{i,j,1}$ ve $\Delta^\rho_{j,i,1}$ blokların $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçük olacaktır.

Diğer yandan $r_{i,j}(t)\geq 0$ $(t>0)$ ifadesi kullanılarak

$$\left\|\frac{1}{e^r_{i,j,2}}\int_{t-h^r_{i,j}-\delta^r_{i,j}(t)}^{t-h^r_{i,j}} r_{i,j}(\nu)\,d\nu\right\|_2 \leq \left\|\frac{1}{e^r_{i,j,2}}\int_{t-h^r_{i,j}-\delta^{r+}_{i,j}}^{t-h^r_{i,j}+\delta^{r+}_{i,j}} r_{i,j}(\nu)\,d\nu\right\|_2$$

ifadesini yazmak mümkündür, zira $\left|\delta^r_{i,j}(t)\right| < \delta^{r+}_{i,j}$. Bu durumda

$$\hat{v}^r_{i,j}(s) = \frac{1}{e^r_{i,j,2}}\left(\frac{e^{-\left(h^r_{i,j}-\delta^{r+}_{i,j}\right)s} - e^{-\left(h^r_{i,j}+\delta^{r+}_{i,j}\right)s}}{s}\right) r_{i,j}(s)$$

olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
\left\|v^r_{i,j}\right\|_2 &\le \left\|\hat{v}^r_{i,j}\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{e^r_{i,j,2}}\left(\frac{e^{-\left(h^r_{i,j}-\delta^{r+}_{i,j}\right)s} - e^{-\left(h^r_{i,j}+\delta^{r+}_{i,j}\right)s}}{s}\right)\right\|_\infty \left\|r_{i,j}\right\|_2 \\
&= \left\|\frac{1}{e^r_{i,j,2}}\frac{1-e^{-2\delta^{r+}_{i,j}s}}{s}e^{-\left(h^r_{i,j}-\delta^{r+}_{i,j}\right)s}\right\|_\infty \left\|r_{i,j}\right\|_2 \\
&= \left\|\frac{2\delta^{r+}_{i,j}}{e^r_{i,j,2}}\frac{1}{2\delta^{r+}_{i,j}}\frac{1-e^{-2\delta^{r+}_{i,j}s}}{s}\right\|_\infty \left\|r_{i,j}\right\|_2 < \frac{2\delta^{r+}_{i,j}}{e^r_{i,j,2}}\left\|r_{i,j}\right\|_2
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir zira $\left\|\frac{1}{2\delta^{r+}_{i,j}}\frac{1-e^{-2\delta^{r+}_{i,j}s}}{s}\right\|_\infty < 1$ (norm içindeki ifade (3.7)'deki ifadeye benzerdir). Bu yüzden eğer $e^r_{i,j,2} = 2\sqrt{2}\delta^{r+}_{i,j}$ olarak tanımlanırsa $\Delta^r_{i,j,2}$ doğrusal zamanla değişen sisteminin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçük olacaktır.

Benzer olarak $\rho_{j,i}(t) \ge 0$ $(t > 0)$ kabul edilerek

$$\left\|\frac{1}{e^\rho_{j,i,2}}\int_{t-h^\rho_{j,i}-\delta^\rho_{j,i}(t)}^{t-h^\rho_{j,i}} \rho_{j,i}(\nu)\,d\nu\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{e^\rho_{j,i,2}}\int_{t-h^\rho_{j,i}-\delta^{\rho+}_{j,i}}^{t-h^\rho_{j,i}+\delta^{\rho+}_{j,i}} \rho_{j,i}(\nu)\,d\nu\right\|_2$$

ifadesinin yazılması mümkündür, zira $\left|\delta^\rho_{j,i}(t)\right| < \delta^{\rho+}_{j,i}$. Bu durumda

$$\hat{v}^\rho_{j,i}(s) = \frac{1}{e^\rho_{j,i,2}}\left(\frac{e^{-\left(h^\rho_{j,i}-\delta^{\rho+}_{j,i}\right)s} - e^{-\left(h^\rho_{j,i}+\delta^{\rho+}_{j,i}\right)s}}{s}\right) \rho_{j,i}(s)$$

olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
\left\|v^\rho_{j,i}\right\|_2 &\le \left\|\hat{v}^\rho_{j,i}\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{e^\rho_{j,i,2}}\left(\frac{e^{-\left(h^\rho_{j,i}-\delta^{\rho+}_{j,i}\right)s} - e^{-\left(h^\rho_{j,i}+\delta^{\rho+}_{j,i}\right)s}}{s}\right)\right\|_\infty \left\|\rho_{j,i}\right\|_2 \\
&= \left\|\frac{2\delta^{\rho+}_{j,i}}{e^\rho_{j,i,2}}\frac{1}{2\delta^{\rho+}_{j,i}}\left(\frac{1-e^{-2\delta^{\rho+}_{j,i}s}}{s}e^{-\left(h^\rho_{j,i}-\delta^{\rho+}_{j,i}\right)s}\right)\right\|_\infty \left\|\rho_{j,i}\right\|_2 < \frac{2\delta^{\rho+}_{j,i}}{e^\rho_{j,i,2}}\left\|\rho_{j,i}\right\|_2
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu yüzden eğer $e^\rho_{j,i,2} = 2\sqrt{2}\delta^{\rho+}_{j,i}$ olarak tanımlanırsa $\Delta^\rho_{j,i,2}$ doğrusal zamanla değişen sistemin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçük olacaktır.

$\rho_{i,j}(t) \ge 0$ $(t \ge 0)$ olduğu kabul edilerek

$$\int_0^{\infty}\left|g_{i,j}^{\rho b}\left(\nu-\phi_{i,j}^{b}(\nu)\right)\rho_{i,j}\left(\nu-\phi_{i,j}^{b}(\nu)\right)\right|^2 d\nu$$
$$=\int_{-\phi_{i,j}^{b}(0)}^{\infty}\left|g_{i,j}^{\rho b}\left(\lambda_{i,j}^{\rho b}\right)\rho_{i,j}\left(\lambda_{i,j}^{\rho b}\right)\right|^2\frac{d\lambda_{i,j}^{\rho b}}{1-g_{i,j}^{\rho b}\left(\lambda_{i,j}^{\rho b}\right)}$$
$$<\frac{\left(\beta_{i,j}^{\rho b}\right)^2}{1-\beta_{i,j}^{\rho b}}\int_0^{\infty}\left|\rho_{i,j}\left(\lambda_{i,j}^{\rho b}\right)\right|^2 d\lambda_{i,j}^{\rho b}$$

eşitsizliğinin yazılması mümkündür. Bu durumda $e_{i,j,1}^{\rho b}=\frac{\sqrt{2}\beta_{i,j}^{\rho b}}{\sqrt{1-\beta_{i,j}^{\rho b}}}$ olarak seçilirse $\Delta_{i,j,1}^{\rho b}$'nin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçük olacaktır.

Ayrıca

$$\left\|\frac{1}{e_{i,j,2}^{\rho b}}\int_{t-h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b}(t)}^{t-h_{i,j}^{\rho b}}\rho_{i,j}(\nu)\,d\nu\right\|_2\leq\left\|\frac{1}{e_{i,j,2}^{\rho b}}\int_{t-h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b+}}^{t-h_{i,j}^{\rho b}+\delta_{i,j}^{\rho b+}}\rho_{i,j}(\nu)\,d\nu\right\|_2$$

ifadesini yazmak mümkündür, zira $\left|\delta_{i,j}^{\rho b}(t)\right|<\delta_{i,j}^{\rho b+}$. Bu durumda

$$\hat{v}_{i,j}^{\rho b}(s)=\frac{1}{e_{i,j,2}^{\rho b}}\left(\frac{e^{-\left(h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b+}\right)s}-e^{-\left(h_{i,j}^{\rho b}+\delta_{i,j}^{\rho b+}\right)s}}{s}\right)\rho_{i,j}(s)$$

olarak tanımlandığında

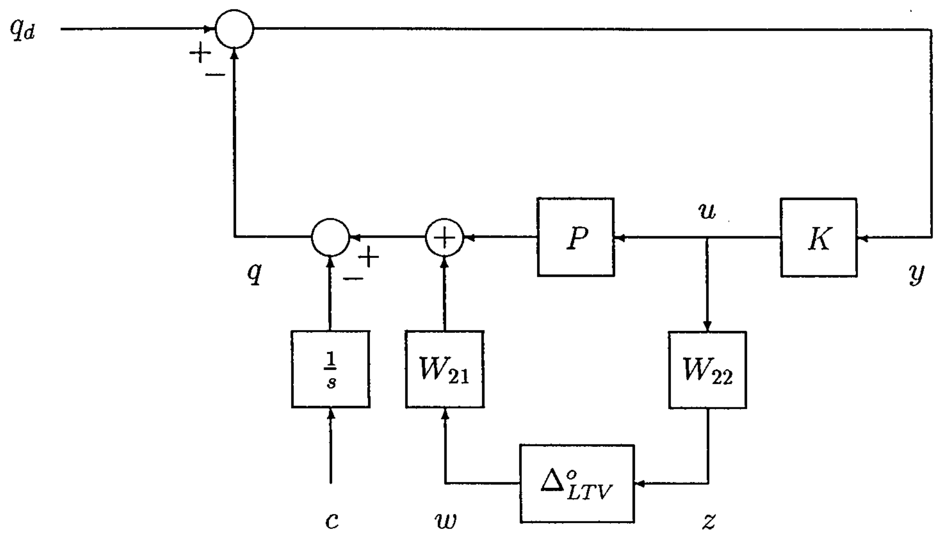
$$\begin{aligned}\left\|v_{i,j}^{\rho b}\right\|_2 &\leq \left\|\hat{v}_{i,j}^{\rho b}\right\|_2\leq\left\|\frac{1}{e_{i,j,2}^{\rho b}}\left(\frac{e^{-\left(h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b+}\right)s}-e^{-\left(h_{i,j}^{\rho b}+\delta_{i,j}^{\rho b+}\right)s}}{s}\right)\right\|_\infty\left\|\rho_{i,j}\right\|_2\\ &= \left\|\frac{2\delta_{i,j}^{\rho b+}}{e_{i,j,2}^{\rho b}}\frac{1}{2\delta_{i,j}^{\rho b+}}\left(\frac{1-e^{-2\delta_{i,j}^{\rho b+}s}}{s}e^{-\left(h_{i,j}^{\rho b}-\delta_{i,j}^{\rho b+}\right)s}\right)\right\|_\infty\left\|\rho_{i,j}\right\|_2\\ &< \frac{2\delta_{i,j}^{\rho b+}}{e_{i,j,2}^{\rho b}}\left\|\rho_{i,j}\right\|_2\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu yüzden eğer $e_{i,j,2}^{\rho b}=2\sqrt{2}\delta_{i,j}^{\rho b+}$ olarak tanımlanırsa $\Delta_{i,j,2}^{\rho b}$ doğrusal zamanla değişen sisteminin $\mathcal{L}_2$ endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçük olacaktır.

İncelenmekte olan sistem Şekil 4.5'te verilmiştir. Şekilde

$$q:=\begin{bmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix},\quad q_d:=\begin{bmatrix}q_{d_1}\\ \vdots\\ q_{d_n}\end{bmatrix},\quad c:=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix},\quad u:=\begin{bmatrix}r\\ \rho\end{bmatrix}$$

$$r:=\begin{bmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{bmatrix},\quad r_i:=\begin{bmatrix}r_{i,1}\\ \vdots\\ r_{i,n_i}\end{bmatrix},\quad \rho:=\begin{bmatrix}\rho_1\\ \vdots\\ \rho_n\end{bmatrix},\quad \rho_i:=\begin{bmatrix}\rho_{1,i}\\ \vdots\\ \rho_{i-1,i}\\ \rho_{i+1,i}\\ \vdots\\ \rho_{n,i}\end{bmatrix}$$



Şekil 4.5: Ağ: suni model

$$P(s) := \frac{1}{s}\bar{P}e^{-Hs}\hat{P}, \quad \mathbf{1}_i := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1\times n_i}, \quad \hat{P} := \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I_{n(n-1)} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}I_{n(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_r := \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1}_{n_n} \end{bmatrix}, \qquad \bar{P}_\rho := I_n \otimes \mathbf{1}_{n-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$J_i := \begin{bmatrix} 0_{1\times(i-1)} & 1 & 0_{1\times(n-i-1)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_{\rho_b} := \begin{bmatrix} 0 & J_1 & J_1 & J_1 & \cdots & J_1 & J_1 \\ J_1 & 0 & J_2 & J_2 & \cdots & J_2 & J_2 \\ J_2 & J_2 & 0 & J_3 & \cdots & J_3 & J_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ J_{n-1} & J_{n-1} & J_{n-1} & J_{n-1} & \cdots & J_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

tanımları altında

$$\bar{P} := \begin{bmatrix} \bar{P}_r & \bar{P}_\rho & \bar{P}_{\rho b} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada "$\otimes$" Kronecker çarpım sembolüdür.

$$h_i^r := \begin{bmatrix} h_{i,1}^r & h_{i,2} & \cdots & h_{i,n_i}^r \end{bmatrix}, \qquad h^r := \begin{bmatrix} h_1^r & h_2^r & \cdots & h_n^r \end{bmatrix},$$

$$h_i^\rho := \begin{bmatrix} h_{1,i}^\rho & h_{2,i}^\rho & \cdots & h_{i-1,i}^\rho & h_{i+1,i}^\rho & \cdots & h_{n,i}^\rho \end{bmatrix},$$

$$h^\rho := \begin{bmatrix} h_1^\rho & h_2^\rho & \cdots & h_n^\rho \end{bmatrix},$$

$$h_i^{\rho b} := \begin{bmatrix} h_{1,i}^{\rho b} & h_{2,i}^{\rho b} & \cdots & h_{i-1,i}^{\rho b} & h_{i+1,i}^{\rho b} & \cdots & h_{n,i}^{\rho b} \end{bmatrix},$$

$$h^{\rho b} := \begin{bmatrix} h_1^{\rho b} & h_2^{\rho b} & \cdots & h_n^{\rho b} \end{bmatrix},$$

$$\bar{h} := \begin{bmatrix} h^r & h^\rho & h^{\rho b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_m & h_{m+1} & \cdots & h_{\bar{m}} \end{bmatrix},$$

$$m := \sum_{i=1}^{n} n_i + n(n-1), \qquad \bar{m} := m + n(n-1)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$H := \operatorname{diag}\left\{\bar{h}\right\} = \begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{\bar{m}} \end{bmatrix},$$

$$H^r := \operatorname{diag}(h^r), \quad H^\rho := \operatorname{diag}(h^\rho), \quad H^{\rho b} := \operatorname{diag}\left(h^{\rho b}\right)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$\Delta_i^r := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{i,1,1}^r \\ \hat{\Delta}_{i,1,2}^r \end{bmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{i,n_i,1}^r \\ \hat{\Delta}_{i,n_i,2}^r \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \Delta^r := \begin{bmatrix} \Delta_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_n^r \end{bmatrix},$$

$$\Delta_i^\rho := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{1,i,1}^\rho \\ \hat{\Delta}_{1,i,2}^\rho \end{bmatrix} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{i-1,i,1}^\rho \\ \hat{\Delta}_{i-1,i,2}^\rho \end{bmatrix} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{i+1,i,1}^\rho \\ \hat{\Delta}_{i+1,i,2}^\rho \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{n,i,1}^\rho \\ \hat{\Delta}_{n,i,2}^\rho \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_i^{\rho b} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{1,i,1}^{\rho b} \\ \hat{\Delta}_{1,i,2}^{\rho b} \end{bmatrix} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{i-1,i,1}^{\rho b} \\ \hat{\Delta}_{i-1,i,2}^{\rho b} \end{bmatrix} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{i+1,i,1}^{\rho b} \\ \hat{\Delta}_{i+1,i,2}^{\rho b} \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_{n,i,1}^{\rho b} \\ \hat{\Delta}_{n,i,2}^{\rho b} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\Delta^\rho := \begin{bmatrix} \Delta_1^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_n^\rho \end{bmatrix}, \qquad \Delta^{\rho b} := \begin{bmatrix} \Delta_1^{\rho b} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_n^{\rho b} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın.

$$\hat{J} := J_i \otimes \mathbf{1}_2, \qquad L_r := \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1}_{2n_n} \end{bmatrix}, \qquad L_\rho := I_n \otimes \mathbf{1}_{2(n-1)}$$

$$L_{\rho b} := \begin{bmatrix} 0 & \hat{J}_1 & \hat{J}_1 & \hat{J}_1 & \cdots & \hat{J}_1 & \hat{J}_1 \\ \hat{J}_1 & 0 & \hat{J}_2 & \hat{J}_2 & \cdots & \hat{J}_2 & \hat{J}_2 \\ \hat{J}_2 & \hat{J}_2 & 0 & \hat{J}_3 & \cdots & \hat{J}_3 & \hat{J}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{J}_{n-1} & \hat{J}_{n-1} & \hat{J}_{n-1} & \hat{J}_{n-1} & \cdots & \hat{J}_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n(n-1)},$$

$$L := \begin{bmatrix} L_r & L_\rho & L_{\rho b} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın.

$$U^r_{i,j} := \begin{bmatrix} \frac{1}{s} e^r_{i,j,1} & e^r_{i,j,2} \end{bmatrix}, \quad U^r_i := \begin{bmatrix} U^r_{i,1} & U^r_{i,2} & \cdots & U^r_{i,n_i} \end{bmatrix},$$

$$U^r := \begin{bmatrix} U^r_1 & U^r_2 & \cdots & U^r_n \end{bmatrix}, \quad U^\rho_{i,j} := \begin{bmatrix} \frac{1}{s} e^\rho_{i,j,1} & e^\rho_{i,j,2} \end{bmatrix},$$

$$U^\rho_i := \begin{bmatrix} U^\rho_{1,i} & U^\rho_{2,i} & \cdots & U^\rho_{i-1,i} & U^\rho_{i+1,i} & \cdots & U^\rho_{n,i} \end{bmatrix},$$

$$U^\rho := \begin{bmatrix} U^\rho_1 & U^\rho_2 & \cdots & U^\rho_n \end{bmatrix}, \quad U^{\rho b}_{i,j} := \begin{bmatrix} \frac{1}{s} e^{\rho b}_{i,j,1} & e^{\rho b}_{i,j,2} \end{bmatrix},$$

$$U^{\rho b}_i := \begin{bmatrix} U^{\rho b}_{1,i} & U^{\rho b}_{2,i} & \cdots & U^{\rho b}_{i-1,i} & U^{\rho b}_{i+1,i} & \cdots & U^{\rho b}_{n,i} \end{bmatrix},$$

$$U^{\rho b} := \begin{bmatrix} U^{\rho b}_1 & U^{\rho b}_2 & \cdots & U^{\rho b}_n \end{bmatrix}, \quad U := \begin{bmatrix} U^r & \sqrt{2}U^\rho & \sqrt{2}U^{\rho b} \end{bmatrix},$$

$$W_{21} := L\,\mathrm{diag}(U), \quad W_{22} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix}, \quad \Delta^o_{LTV} := \begin{bmatrix} \Delta^r & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^\rho & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{\rho b} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada $\hat{\Delta}$'lar $\mathcal{L}_2$-endüklenmiş normu $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçük olan keyfi doğrusal zamanla değişen sistemlerdir. Bu durumda Şekil 4.5'te gösterilmiş Δ^o_{LTV}'nın endüklenmiş $\mathcal{L}_2$-normu

$$\|\Delta^o_{LTV}\|_\infty < 1$$

olarak ifade edilebilir.

Şimdi, Şekil 4.5'te verilen sistemin bütün $\|\Delta^o_{LTV}\|_\infty < 1$ için gürbüz kararlı olabilmesi için K P'yi kararlılaştırmalı ve

$$\left\|W_{22}K(I+PK)^{-1}W_{21}\right\|_\infty \leq 1$$

koşullu sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} \left\|W_{22}K(I+PK)^{-1}W_{21}\right\|_\infty &= \left\|K(I+PK)^{-1}W_{21}\right\|_\infty \\ &= \left\|\hat{P}K(I+PK)^{-1}W_{21}\right\|_\infty \end{aligned}$$

$W_{22}^T W_{22} = \hat{P}^T \hat{P} = I$ olduğundan geçerlidir. Diğer yandan,

$$W_{21}(j\omega)\left[W_{21}(j\omega)\right]^* = \begin{bmatrix} d_1(\omega) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n(\omega) \end{bmatrix}$$

öyle ki

$$\begin{aligned} d_i(j\omega) \;=\; & \frac{1}{\omega^2}\left(\sum_{k=1}^{n_i}\left(e_{i,k,1}^r\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{k,i,1}^{\rho}\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{i,k,1}^{\rho b}\right)^2\right) \\ & + \left(\sum_{k=1}^{n_i}\left(e_{i,k,2}^r\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{k,i,2}^{\rho}\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{i,k,2}^{\rho b}\right)^2\right) \end{aligned}$$

bütün $i = 1, 2, \cdots, n$ sağlanıyor.

$$f_i(s) := \frac{1}{s}\zeta_{i,1} + \zeta_{i,2}$$

olsun. Burada

$$\zeta_{i,1} := \sqrt{\sum_{k=1}^{n_i}\left(e_{i,k,1}^r\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{k,i,1}^{\rho}\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{i,k,1}^{\rho b}\right)^2},$$

$$\zeta_{i,2} := \sqrt{\sum_{k=1}^{n_i}\left(e_{i,k,2}^r\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{k,i,2}^{\rho}\right)^2 + 2\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left(e_{i,k,2}^{\rho b}\right)^2}.$$

olarak tanımlanmıştır. Bu durumda

$$\zeta_1 := \max_i\left(\zeta_{i,1}\right), \qquad \zeta_2 := \max_i\left(\zeta_{i,2}\right), \qquad f(s) := \frac{1}{s}\zeta_1 + \zeta_2.$$

olarak tanımlanırsa

$$\left\|\hat{P}K(I + PK)^{-1}W_{21}\right\|_\infty \leq \left\|f(s)\hat{P}K(I + PK)^{-1}\right\|_\infty.$$

ifadesi yazmak mümkündür. Bu durumda kararlılık kriteri (konservatif olarak)

$$\left\|f(s)\hat{P}K(I + PK)^{-1}\right\|_\infty \leq 1 \tag{4.7}$$

olarak yazılabilir.

4.2 $\mathcal{H}_\infty$ Optimizasyon Problemi

Yatışkın ve geçici durum performansları iyileştirmek için [6] makalesinde alındığı gibi $W_1 := \frac{1}{s^2}I_n$ ağırlık matrisi için

$$\left\|W_1(I + PK)^{-1}\right\|_\infty \tag{4.8}$$

normunun minimizasyonu istenebilir. (4.7) ve (4.8)'ten

$$\inf_{K \text{ kararlılaştırıyor } P} \left\| \begin{array}{c} W_1 (I+PK)^{-1} \\ f\hat{P}K(I+PK)^{-1} \end{array} \right\|_\infty \tag{4.9}$$

$$= \inf_{K \text{ kararlılaştırıyor } P} \left\| \begin{array}{c} W_1 \left(I + \frac{1}{s}\bar{P}e^{-Hs}\hat{P}K\right)^{-1} \\ f\hat{P}K\left(I + \frac{1}{s}\bar{P}e^{-Hs}\hat{P}K\right)^{-1} \end{array} \right\|_\infty = \gamma_{opt} \tag{4.10}$$

yazılabilir. $\hat{P}^\dagger$ öyle bir matris olsun ki $\hat{P}^\dagger\hat{P} = I$. Örnek olarak (tek değil)

$$\hat{P}^\dagger = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}I & 0 \end{bmatrix} \text{ veya } \hat{P}^\dagger = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}$$

olarak alınabilir. Bu durumda

$$\hat{K} := \hat{P}K, \qquad \breve{P} := \frac{1}{s}\bar{P}e^{-Hs},$$

olarak tanımlandığında optimizasyon problemi

$$\inf_{\hat{K} \text{ kararlılaştırıyor } \breve{P}} \left\| \begin{array}{c} W_1 \left(I + \breve{P}\hat{K}\right)^{-1} \\ f\hat{K}\left(I + \breve{P}\hat{K}\right)^{-1} \end{array} \right\|_\infty = \gamma_{opt} \tag{4.11}$$

şeklinde yazılabilir.

$\hat{K}\left(I + \breve{P}\hat{K}\right)^{-1} =: Q$ olsun, o halde (4.11) optimizasyon problemi

$$\inf_{Q \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1 \left(I - \breve{P}Q\right) \\ fQ \end{array} \right\|_\infty = \gamma_{opt} \tag{4.12}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \breve{P} &= \frac{1}{s}\left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_r & \bar{P}_\rho & \bar{P}_{\rho b} \end{array}\right] e^{-Hs} = \frac{1}{s}\left[\begin{array}{ccc} \bar{P}_r e^{-H^r s} & \bar{P}_\rho e^{-H^\rho s} & \bar{P}_{\rho b} e^{-H^{\rho b} s} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} P^r & P^\rho & P^{\rho b} \end{array}\right], \end{aligned}$$

$$P^r := \bar{P}_r e^{-H^r s}, \quad P^\rho := \bar{P}_\rho e^{-H^\rho s}, \quad P^{\rho b} := \bar{P}_{\rho b} e^{-H^{\rho b} s}$$

yazılabileceğinden

$$Q =: \begin{bmatrix} Q^r \\ Q^\rho \\ Q^{\rho b} \end{bmatrix}$$

$\breve{P}$'nin bölünmesine boyutları uyuyacak şekilde bölünsün. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\inf_{Q \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} W_1 \left(I - P^r Q^r - P^\rho Q^\rho - P^{\rho b} Q^{\rho b}\right) \\ fQ \end{array} \right\|_\infty \\ &\leq \inf_{Q^r \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{3} W_1 (I - 3P^r Q^r) \\ fQ^r \end{array} \right\|_\infty + \inf_{Q^\rho \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{3} W_1 (I - 3P^\rho Q^\rho) \\ fQ^\rho \end{array} \right\|_\infty \\ &\quad + \inf_{Q^{\rho b} \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{3} W_1 \left(I - 3P^{\rho b} Q^{\rho b}\right) \\ fQ^{\rho b} \end{array} \right\|_\infty \end{aligned} \tag{4.13}$$

yazılabilir. Burada

$$fQ = f\begin{bmatrix} Q^r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 \\ Q^\rho \\ 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q^{\rho b} \end{bmatrix}$$

eşitliği kullanılmıştır. Sıfır satırları optimizasyon problemini etkilemediği için kaldırılmıştır. P^r ve P^ρ blok köşegen yapısında olduklarından Q^r ve Q^ρ blok köşegen yapısında oldukları varsayımı altında, yani

$$P^r := \begin{bmatrix} P_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n^r \end{bmatrix}, \quad P^\rho := \begin{bmatrix} P_1^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n^\rho \end{bmatrix},$$

$$Q^r := \begin{bmatrix} Q_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_n^r \end{bmatrix}, \quad Q^\rho := \begin{bmatrix} Q_1^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_n^\rho \end{bmatrix},$$

$$P_i^r := \frac{1}{s}\mathbf{1}_{n_i}, \qquad P_i^\rho := \frac{1}{s}\mathbf{1}_{n-1},$$

(4.13) optimizasyon probleminde

$$\begin{aligned} \inf_{Q^r \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}W_1 (I - 3P^r Q^r) \\ fQ^r \end{matrix} \right\|_\infty &= \max_i \inf_{Q_i^r \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}w_1 (1 - 3P_i^r Q_i^r) \\ fQ_i^r \end{matrix} \right\|_\infty \\ &= \max_i \gamma_{r,i}^{opt}, \qquad \gamma_r^{opt} := \max_i \left\{\gamma_{r,i}^{opt}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf_{Q^\rho \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}W_1 (I - 3P^\rho Q^\rho) \\ fQ^\rho \end{matrix} \right\|_\infty &= \max_i \inf_{Q_i^\rho \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}w_1 (1 - 3P_i^\rho Q_i^\rho) \\ fQ_i^\rho \end{matrix} \right\|_\infty \\ &= \max_i \gamma_{\rho,i}^{opt}, \qquad \gamma_\rho^{opt} := \max_i \left\{\gamma_{\rho,i}^{opt}\right\} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $w_1 := \frac{1}{s^2}$ olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki optimizasyon problemleri (3.13) problemine denktir. Dolayısıyla bu problemlerin çözümü bir önceki bölümde ele alınan yöntemle yapılabilir.

Dikkat edilirse $P^{\rho b} = \hat{P}^{\rho b} T$ olarak yazılabilir, öyle ki $\hat{P}^{\rho b}$ blok köşegen yapısında. Burada T, $I_{n(n-1)}$ birim matrisinin sütunların permutasyonlardan oluşan matrisidir, dolayısıyla, $T^T T = T T^T = I$ ve T'nin $\mathcal{H}_\infty$ normuna etkisi yoktur. $\hat{Q}^{\rho b} := T Q^{\rho b}$ olsun. Bu durumda

$$\inf_{Q^{\rho b} \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}W_1 \left(I - 3P^{\rho b} Q^{\rho b}\right) \\ fQ^{\rho b} \end{matrix} \right\|_\infty = \inf_{\hat{Q}^{\rho b} \in \mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3}W_1 \left(I - 3\hat{P}^{\rho b} \hat{Q}^{\rho b}\right) \\ f\hat{Q}^{\rho b} \end{matrix} \right\|_\infty$$

olarak yazılabilir. $\hat{P}^{\rho b}$ blok köşegen yapısında olduğundan, yukarıda yapılan işlemlere benzer olarak

$$\hat{P}^{\rho b} := \begin{bmatrix} \hat{P}_1^{\rho b} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{P}_n^{\rho b} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}^{\rho b} := \begin{bmatrix} \hat{Q}_1^{\rho b} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{Q}_n^{\rho b} \end{bmatrix}$$

olarak tanmlanabilir ve

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\hat{Q}^{\rho b}\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{3}W_1\left(I-3\hat{P}^{\rho b}\hat{Q}^{\rho b}\right) \\ f\hat{Q}^{\rho b} \end{array} \right\|_\infty \\
&= \max_i \inf_{\hat{Q}_i^{\rho b}\in\mathcal{H}_\infty} \left\| \begin{array}{c} \frac{1}{3}w_1\left(1-3\hat{P}_i^{\rho b}\hat{Q}_i^{\rho b}\right) \\ f\hat{Q}_i^{\rho b} \end{array} \right\|_\infty \\
&= \max_i \gamma_{\rho b,i}^{opt}, \qquad \gamma_\rho^{opt} := \max_i \left\{\gamma_{\rho,i}^{opt}\right\}
\end{aligned}
$$

optimizasyon problemlerine dönüştürülebilir. Bu problemlerin çözüm yolu (3.13) problemdekine denktir.

$$
\hat{K} = Q\left(I-\check{P}Q\right)^{-1} =: \begin{bmatrix} \hat{K}^r \\ \hat{K}^\rho \\ \hat{K}^{\rho b} \end{bmatrix}
$$

olarak tanımlansın.

$$
\check{P}Q = P^rQ^r + P^\rho Q^\rho + P^{\rho b}Q^{\rho b} = P^rQ^r + P^\rho Q^\rho + \hat{P}^{\rho b}\hat{Q}^{\rho b}
$$

köşegen yapısındadır, dolayısıyla $I-\check{P}Q$ da köşegen yapısındadır. Bu yüzden $\hat{K}$'nin yapısı Q'nun yapısına denktir, yani

$$
\hat{K}^r = \begin{bmatrix} \hat{K}_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{K}_n^r \end{bmatrix}, \qquad \hat{K}^\rho = \begin{bmatrix} \hat{K}_1^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{K}_n^\rho \end{bmatrix}.
$$

Burada $\hat{K}_i^r$, $n_i \times 1$ ve $\hat{K}_i^\rho$ $(n-1)\times 1$ boyutlu vektörlerdir.

$$
\hat{P}^\dagger = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}I_{n(n-1)} & 0 \end{bmatrix}
$$

seçimi için

$$
K = \hat{P}^\dagger\hat{K} = \begin{bmatrix} K^r \\ K^\rho \end{bmatrix}, \quad K^r = \begin{bmatrix} K_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_n^r \end{bmatrix}, \quad K^\rho = \begin{bmatrix} K_1^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_n^\rho \end{bmatrix}
$$

yapısındadır, bu durumda

$$
K^r = \hat{K}^r, \qquad K^\rho = \sqrt{2}\hat{K}^\rho
$$

olarak yazılabilir. Böyle bir denetleyici seçimi bütün gecikme belirsizliklere karşın plantı gürbüz kararlılaştırıyor ve blok köşegen yapısından dolayı Şekil 4.1'de gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir. Denetleyici $r_{i,j}$ ve $\rho_{k,i}$ $(i = 1,2,\cdots n,$ $k = 1,2,\cdots n,$ $k \neq i,$ $j = 1,2,\cdots n_i)$ hesaplanması için q_i bilgisine ihtiyaç duymaktadır. Şekil 4.1'de tanımlanan K_i, $K_i := \begin{bmatrix} K_i^r \\ K_i^\rho \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır.

Bir önceki bölümde benzer hesplamaları yapılırsa

$$Q = \Phi \left(I + Z \left(\bar{L} \left(\Lambda_\alpha - \Phi^T \Omega^T \Omega \Phi\right) e^{-Hs} - F_s\right)\right)^{-1} Z \Phi^T \bar{P}^T L,$$

$$\begin{aligned} K &= \hat{P}^\dagger \Phi \left[I + Z \left(\bar{L} \left(\Lambda_\alpha - \Phi^T \Omega^T \Omega \Phi\right) e^{-Hs} \right.\right. \\ &\left.\left. -\frac{1}{s} \Phi^T \bar{P}^T \bar{P} \Phi e^{-\Phi^T H \Phi s} - F_s\right)\right]^{-1} Z \Phi^T \bar{P}^T L \end{aligned}$$

olarak bulunabilir. Burada

$$\Phi := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & T^T \end{bmatrix}, \qquad \Omega := \begin{bmatrix} \bar{P}_r & 0 & 0 \\ 0 & \bar{P}_\rho & 0 \\ 0 & 0 & P_{\rho b} \end{bmatrix}, \qquad \bar{L} := \frac{s+\varepsilon}{s^2} I_{\bar{m}}$$

$$Z := \begin{bmatrix} Z^r & 0 & 0 \\ 0 & Z^\rho & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}^{\rho b} \end{bmatrix}, \qquad Z^r := \begin{bmatrix} Z_1^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_n^r \end{bmatrix},$$

$$Z_i^r := \begin{bmatrix} Z_{i,1}^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_{i,n_i}^r \end{bmatrix}, \qquad Z_{i,k}^r := \Psi_{i,12,k}^r \left(\Psi_{i,22,k}^r\right)^{-1},$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i,11,k}^r & \Psi_{i,12,k}^r \\ \Psi_{i,21,k}^r & \Psi_{i,22,k}^r \end{bmatrix} := W_{i,r,k}^{-1}, \qquad L := \frac{s+\varepsilon}{s}$$

ve $W_{i,r,k}$, (3.15) problemine benzer kurulacak J-spektral probleminin çözümüdür.

$$Z^\rho := \begin{bmatrix} Z_1^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_n^\rho \end{bmatrix}, \qquad Z_i^\rho := \begin{bmatrix} Z_{i,1}^\rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_{i,n}^\rho \end{bmatrix},$$

$$Z_{i,k}^\rho := \Psi_{i,12,k}^\rho \left(\Psi_{i,22,k}^\rho\right)^{-1}, \qquad \begin{bmatrix} \Psi_{i,11,k}^\rho & \Psi_{i,12,k}^\rho \\ \Psi_{i,21,k}^\rho & \Psi_{i,22,k}^\rho \end{bmatrix} := W_{i,\rho,k}^{-1}$$

ve $W_{i,\rho,k}$, (3.15) problemine benzer kurulacak J-spektral probleminin çözümüdür. Benzer olarak,

$$\hat{Z}^{\rho b} := \begin{bmatrix} \hat{Z}_1^{\rho b} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{Z}_n^{\rho b} \end{bmatrix}, \qquad \hat{Z}_i^{\rho b} := \begin{bmatrix} \hat{Z}_{i,1}^{\rho b} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{Z}_{i,n}^{\rho b} \end{bmatrix},$$

$$\hat{Z}_{i,k}^{\rho b} := \Psi_{i,12,k}^{\rho b} \left(\Psi_{i,22,k}^{\rho b}\right)^{-1}, \qquad \begin{bmatrix} \Psi_{i,11,k}^{\rho b} & \Psi_{i,12,k}^{\rho b} \\ \Psi_{i,21,k}^{\rho b} & \Psi_{i,22,k}^{\rho b} \end{bmatrix} := W_{i,\rho b,k}^{-1}$$

ve $W_{i,\rho b,k}$, (3.15) problemine benzer kurulacak J-spektral probleminin çözümüdür.

$$F_s := \begin{bmatrix} F_s^r & 0 & 0 \\ 0 & F_s^\rho & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F}_s^{\rho b} \end{bmatrix}, \qquad F_s^r := \begin{bmatrix} F_{s,1}^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_{s,n}^r \end{bmatrix},$$

$F^{r}_{s,k}$ ise k. kurulacak problemine ait birim darbe yanıtı sonlu olan transfer matrisidir ve (3.16) ifadesi ile tanımlanan gerçeklenmesine sahiptir. Benzer olarak F^{ρ}_{s} ve $\hat{F}^{\rho b}_{s}$ için de söylenebilir.

$$F^{\rho}_{s} := \begin{bmatrix} F^{\rho}_{s,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F^{\rho}_{s,n} \end{bmatrix}, \qquad \hat{F}^{\rho b}_{s} := \begin{bmatrix} \hat{F}^{\rho b}_{s,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{F}^{\rho b}_{s,n} \end{bmatrix}$$

ve burada $F^{\rho}_{s,k}$ ve $\hat{F}^{\rho b}_{s,k}$ kurulacak olan k. problemine ait birim darbe yanıtı sonlu olan transfer matrisidir ve (3.16) ifadesi ile tanımlanan gerçeklenmesine sahiptir.

$$\Lambda_{\alpha} := \begin{bmatrix} \Lambda^{r}_{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^{\rho}_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Lambda}^{\rho b}_{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \Lambda^{r}_{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha^{r}_{1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{r}_{n} \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{r}_{i} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^{r}_{i,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha^{r}_{i,n_i}} \end{bmatrix}, \qquad \Lambda^{\rho}_{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha^{\rho}_{1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{\rho}_{n} \end{bmatrix}$$

$$\alpha^{\rho}_{i} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^{\rho}_{i,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha^{\rho}_{i,n}} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\Lambda}^{\rho b}_{\alpha} := \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^{\rho b}_{1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{\alpha}^{\rho b}_{n} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}^{\rho b}_{i} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\alpha}^{\rho b}_{i,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\hat{\alpha}^{\rho b}_{i,n}} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır burada α ve $\hat{\alpha}$'lar öncelik (paylama) katsayılarıdır. Burada notasyonda "$\hat{}$" sembölü $\hat{Q}^{\rho b}$'ye ait olduğunu göstermek amacıyla kullanılmıştır.

5 SONUÇ

Bu çalışmada, yüksek hızlı veri iletişim ağının denetimi için, denetlenen değişken olarak kuyruk uzunluğu seçilmiştir. Bu seçimle veri iletim oranının denetimi de sağlanmaktadır. İlk alınan sistem ile matematiksel olarak gecikme içeren sistemlerde $\mathcal{H}_\infty$ denetim teorisinin nasıl uygulanabileceği gösterilmektedir. Daha sonra tek tıkalı düğümden (geçitten) oluşan ağ yapısı ele alınmıştır. Böyle bir yapı [6] makalesinde de yer almıştır. Burada 3. bölümde ele alınan problem J-spektral ayrıştırma tekniği kullanılarak çözülmüştür. Aynı problem, [6] makalesinde [36]'deki teknikler kullanılarak çözülmüştür.

Daha sonra çok tıkalı geçit durumu ele alınmıştır. Bir çok çalışmada tek tıkalı geçit içeren ağlar için tasarlanan denetleyicinin çok tıkalı geçit olduğu durumlarda da kullanılabileceği söylenmektedir (örnek olarak [9, 24] çalışmaları verilebilir). Bu çalışmada, dışmerkezli denetim taban olarak alındığında, matematiksel olarak tek tıkalı geçit olduğu durumdaki çözümden çok tıkalı geçit durumlarına nasıl geçebileceği incelenmiştir. Tek tıkalı geçit içeren ağ modeline benzer bir model kurulmuştur. Böyle bir model için $\mathcal{H}_\infty$ denetim mekanizmalarının nasıl uygulanabileceği gösterilmiştir ve meydana gelen denetleyicinin ifadesi verilmiştir.

Bu çalışmada, her zaman kaynak-hedef çifti arasındaki yolun optimal yol olduğu kabul edilmiştir. Son bölümde çok tıkalı geçit problemi, n (tıkalı geçit sayısı) adet tek tıkalı geçit içeren probleme dönüştürülmüştür. Böyle bir yapıyı elde etmek amacıyla $\hat{P}$ kare olmayan matrisi, denetleyicinin bir parçası gibi işlemlere konulmuştur. $\hat{P}$'nin sol tersi tek olmadığından, tersinin belli bir seçim için dışmerkezli denetleyici tasarlanmıştır.

Diğer yandan, çok tıkalı geçit olması durumunda, her kanala ait ağırlık fonksiyonlarındaki parametrelerin nasıl seçilebileceği, dönüştürülmüş her problemin, 3.2.2 kısmındaki gibi nasıl parçalanacağı ve 3.2.1 kısmında ele alınan problem yapısına nasıl dönüştürüleceği de gösterilmiştir.

J-spektral tekniği kullanıldığında, tek gecikme (bütün girdiler eşit gecikmeye sahiptir) içeren sistemlere ait optimizasyon problemi, rasyonel transfer matrislere sahip olan probleme RMM teknikleri ile dönüştürebilmektedir. Ancak, bu teknik kullanıldığında sonlu darbe yanıtı olan F_s'nin seçiminin birden fazla farklı gecikmeye sahip sistemlerde genel olarak nasıl yapılabileceği halen bilinmemektedir.

Burada verilen algoritma için denetleyici tasarlanırken anahtar sayısının bilinmesi gerekliliği bir dezavantajdır.

Bölüm 4'te tanımlanan çok tıkalı geçit durumunda, veri iletişim ağının modeline ait gürbüz denetim araçları kullanılarak alt optimizasyon problemi, çözülebilen optimizasyon problemlerine dönüştürülerek çözülmüştür. Bu parçalama tekniği Bölüm 3'te de yapılmış ve iyi sonuçlar verdiğini simulasyon örnekleriyle göstermiştir. Bölüm 4'te tasarlanan denetleyici için simulasyonlar yapılabilir. Ayrıca daha değişik protokol algoritmaları düzenlenerek ([9] makalesinde olduğu gibi) Bölüm 4'te tasarlanan denetleyicinin daha basit bir yapısı elde edilebilir. Optimal yolun nasıl seçileceği ve bunun denetleyici tasarımında nasıl etkisi olabileceği (optimizasyon probleminde hangi kriterler baz olarak alınmalıdır ki tasarlananan denetleyici hem mevcut belirsizliklere karşın gürbüz hem de optimal yol seçilmiş olsun) incelemeleri yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] ALTMAN, E., AND BAŞAR, T. Multi-user rate-based flow control: Distributed game-theoretic algorithms. *Proc. of 36th Conference on Decision and Control, San Diego* (1997), 2916–2921.

[2] ALTMAN, E., AND BAŞAR, T. Multi-user rate-based flow control. *Research report UILU-ENG-96-2227, DC-176, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign* (Oct. 1996).

[3] ALTMAN, E., BAŞAR, T., AND HOVAKIMYAN, N. Worst-case rate-based flow control with an ARMA model of the available bandwidth. *Analysis of Dynamic Games 6* (2000), 3–29.

[4] ALTMAN, E., BAŞAR, T., AND SRIKANT, R. Congestion control as a stochastic control problem with action delays. *Automatica* (December 1999), 1937–1950.

[5] ATAŞLAR, B., ÖZBAY, H., AND İFTAR, A. Comparison of $\mathcal{H}^\infty$ and μ-synthesis based flow controllers for high-speed networks with multiple time delays. *to appear in 2001 American Control Conference* (2001).

[6] ATAŞLAR, B., QUET, P.-F., İFTAR, A., ÖZBAY, H., KANG, T., AND KALYANARAMAN, S. Robust rate-based flow controllers for high-speed networks: The case of uncertain time-varying multiple time-delays. *Proc. of the American Control Conference, Chicago,IL* (June 2000), 2804–2808.

[7] BALL, J. A., DAY, M. V., AND KACHROO, P. Robust feedback control of single server queueing system. *Mathematics of Control, Signal and Systems 12* (1999), 307–345.

[8] BENMOHAMED, L., AND MEERKOV, S. Feedback control of congestion in store-and-forward datagram networks: The case of a single congested node. Tech. Rep. CGR-92-12, Systems Science and Engineering Division, Department of Electrical Engineering and Computer Science, The University of Michigan, August 1992.

[9] BENMOHAMED, L., AND MEERKOV, S. Feedback control of congestion in packet switching networks: The case of multiple congestion nodes. *in Proceedings of the American Control Conference, Baltimore MD* (June 1994), 1104–1108.

[10] Bliman, P. A. Extension of Popov absolute stability criterion to non-autonomous systems with delays. *International Journal of Control 73* (2000), 1349–1361.

[11] Callier, F. M., and Winkin, J. J. The spectral factorization problem for multivariable distributed parameter systems. *Journal of Integral Equations and Operator Theory 34* (1999), 270–292.

[12] Cavendish, D., Mascolo, S., and Gerla, M. Rate based congestion control for multicast ABR traffic. *Proceedings of Globecom96* (November 1996), 1114–1118. England.

[13] Cavendish, D., Mascolo, S., and Gerla, M. SP-EPRCA: an ATM rate based congestion control scheme based on a Smith predictor. Tech. rep., UCLA, 1997.

[14] Curtain, R. F., and Zhou, Y. A weighted mixed-sensitivity $\mathcal{H}_\infty$-control design for irrational transfer matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control 41*, 9 (1996), 1312–1320.

[15] Dym, H., Georgiou, T., and Smith, M. Explicit formulas for optimally robust controllers for delay systems. *IEEE Trans. Aut. Control 40* (1995), 656–669.

[16] Feron, E., Balakrishnan, V., and Boyd, S. Design of stabilizing state feedback for delay systems via convex optimization. *Proceedings of 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona* (December 1992), 147–148.

[17] Foias, C., Özbay, H., and Tannenbaum, A. *Robust Control of Infinite Dimension Systems Frequency Domain Methods.* Springer-Verlag, 1996.

[18] Francis, B. *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory.* Springer-Verlag, 1987.

[19] Holohan, A. M., and Meinsma, G. On inverse problems in 2-norm and infinity-norm controller synthesis. *Proceedings of the CDC99* (1999), 3627–3632.

[20] İftar, A., and Davison, E. A decentralized discrete-time controller for dynamic routing. *International Journal of Control, Vol 69. No. 5* (1998), 599–632.

[21] Jain, R. Congestion control and traffic management in ATM networks: Recent advances and survey. *Computer Networks and ISDN Systems 28*, 13 (October 1996), 1723–1738. ftp://ftp.netlab.ohio-state.edu/pub/jain/papers/cnis.ps.

[22] Kojima, A., and Ishijima, S. Explicit formulas for operator Riccati equations arising in $\mathcal{H}^\infty$ control with delays. *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control, New Orleans, LA* (December 1995), 4175–4181.

[23] KWAKERNAAK, H. Robust control and $\mathcal{H}_\infty$-optimization — tutorial paper. *Automatica, Vol. 29 No. 2,* (1993), 255–273.

[24] MASCOLO, S. Smith's principle for congestion control in high-speed data networks. *IEEE Transactions on Automatic Control 45*, 2 (February 2000), 358–346.

[25] MEINSMA, G. *Frequency Domain Methods in $\mathcal{H}_\infty$ Control.* PhD thesis, Department of Applied Mathematics, University of Twente, The Netherlands, 1993.

[26] MEINSMA, G. J-spectral factorization and equalizing vectors—the extended remix. Tech. Rep. EE9404, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Newcastle, NSW 2308, Australia, 1994.

[27] MEINSMA, G. Unstable and nonproper weights in $\mathcal{H}_\infty$ control. *Automatica 31*, 11 (1995), 1655–1658.

[28] MEINSMA, G., AND ZWART, H. On $\mathcal{H}_\infty$ control for dead-time systems. *IEEE Trans. Aut. Control 45* (2000), 272–285.

[29] MIRKIN, L. On the extraction of dead-time controllers from delay-free parametrizations. *in Proc. LTDS'2000 (Ancona, Italy)*, 157–162.

[30] MIRKIN, L., AND RASKIN, N. State-space parametrization of all stabilizing dead-time controllers. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ* (1999), 221–226.

[31] OUCHERIAH, S. Decentralized stabilization of large scale systems with multiple delays in the interconnections. *International Journal of Control 73* (2000), 1213–1223.

[32] RODRIGUES, A. A. $\mathcal{H}^\infty$ sensitivity and mixed-sensitivity optimization for stable multivariable infinite-dimensional systems. *Proceedings of 34th Conference on Decision and Control, New Orleans, LA* (December 1995), 4169–4174.

[33] ROHRS, C., AND BERRY, R. A linear control approach to explicit rate feedback in ATM networks. *INFOCOM'97. Sixteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Driving the Information Revolution* (April, 1997), 277–282. Kobe, Japan.

[34] TADMOR, G. The standard $\mathcal{H}_\infty$ problem in system with a single input delay. *IEEE Transactions on Automatic Control 45*, 3 (2000), 382–397.

[35] TOKER, O., AND ÖZBAY, H. Gap metric problem for MIMO delay systems: Parametrization of all suboptimal controllers. *Automatica 31*, 7 (1995), 931–940.

[36] Toker, O., and Özbay, H. $\mathcal{H}_\infty$ optimal and suboptimal controllers for infinite dimensional SISO plants. *IEEE Transactions on Automatic Control 40*, 4 (1995), 751–755.

[37] Varga, A., and Katayama, T. Computation of J-inner-outer factorization of rational matrices. *International Journal of Robust and Nonlinear Control 8* (1998), 245–263.

[38] Zhou, K., and Doyle, J. *Essentials of Robust Control.* Prentice Hall Inc., 1998.

[39] Zhou, K., J.C.Doyle, and Glover, K. *Robust and Optimal Control.* Prentice Hall Inc., 1995.

EKLER:

Ek-1: SISO ve Durum 1-11 İçin Denetleyici Parametrelerini Hesaplayan Makro

Ek-2: Optimal γ'yı Hesaplayan Makro

Ek-3: Hamiltonian Matrisini Hesaplayan Makro

Ek-4: Verilen Frekansta Transfer Fonksiyonunun Değerini Hesaplayan Makro

Ek-5: LTI Sistemin Gerçeklenmesini Bulan Makro

Ek-1: SISO ve Durum 1-11 İçin Denetleyici Parametrelerini Hesaplayan Makro

function [Pr,Zhat,Fs,Lbir,LbarG,h] = misosim11,

```
% enter parameters,
choice = menu('Simulations','Case 1','Case 2','Case 3','Case 4','Case 5',...
'Case 6','Case 7','Case 8','Case 9','Case 10','Case 11',...
'Case SISO','Cancel');
switch choice
case 1
sun = {'h','eta','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 3]','[0.166 0.166]','[1 1]','[2,8]','logspace(-3,2,500)','1',...
'1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/2 1/2]'};
case 2
sun = {'h','eta','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[2 2]','[0.166 0.166]','[4 1]','[2,8]','logspace(-3,2,500)','1',...
'1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
case 3
sun = {'h','eta','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[2 2]','[0.166 2.906]','[1 1]','[2,8]','logspace(-3,2,500)','1',...
'1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/2 1/2]'};
case 4
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 2]','[0.1 0.1]','[0.01 0.01]','[2 3]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1','1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
case 5
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 2]','[0.1 0.1]','[0.01 0.01]','[2 3]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1','1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
case 6
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 2]','[0.05 0.05]','[0.005 0.005]','[0.5 1]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1','1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
case 7
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 2]','[0.7 0.7]','[0.2 0.2]','[8 10]','[1,15]',...
'logspace(-3,2,500)','1','1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
```

```
case 8
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 2]','[0.1 0.1]','[0.01 0.01]','[2 3]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1','1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
case 9
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1 2]','[0.1 0.1]','[0.01 0.01]','[2 3]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1','1e-14' '1e-4','min(h)/10','[1/3 2/3]'};
case 10
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1.1 2.15 1.1 2.12 2.2]','[0.1 0.2 0.1 0.2 0.2]',...
'[0.01 0.02 0.01 0.02 0.02]','[2 3 2 3 3]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1',...
'1e-14' '1e-4','min(h)/10','[0.2 0.1 0.4 0.2 0.1]'};
case 11
sun = {'h','beta','betaf','deltaplus','interval','frequency range','epsilon',...
'tolerans','add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'[1.1 2.15 1.1 2.12 2.2]','[0.1 0.2 0.1 0.2 0.2]',...
'[0.01 0.02 0.01 0.02 0.02]','[2 3 2 3 3]','[1,10]',...
'logspace(-3,2,500)','1',...
'1e-14' '1e-4','min(h)/10','[0.2 0.1 0.4 0.2 0.1]'};
case 12
sun = {'h','eta','deltaplus','interval','frequency range','epsilon','tolerans',...
'add to gamma','Sampling time','fair'};
defval = {'1.5','0.166','1','[4,8]','logspace(-3,2,500)','1.2','1e-14',...
'1e-4','0.1','1'};
otherwise
break
end
mes = 'Enter the initial parameters';
quest = inputdlg(sun,mes,1,defval,'on');
% check << cancel >> preset
if isempty(quest),break,end
if or(choice == 1, or(choice == 2, or(choice == 3, choice == 12))),
% set values
h = eval(quest{1});
k = length(h);
eta = eval(quest{2});
deltaplus = eval(quest{3});
interval = eval(quest{4});
freqrang = eval(quest{5});
epsilon = eval(quest{6});
tol = eval(quest{7});
gadd = eval(quest{8});
```

```
Ts = eval(quest{9});
alpha = eval(quest{10});
% calculate weights ( for W2 )
e1 = eta;
e2 = 2*deltaplus;
else
% set values
h = eval(quest{1});
k = length(h);
beta = eval(quest{2});
betaf = eval(quest{3});
deltaplus = eval(quest{4});
interval = eval(quest{5});
freqrang = eval(quest{6});
epsilon = eval(quest{7});
tol = eval(quest{8});
gadd = eval(quest{9});
Ts = eval(quest{10});
alpha = eval(quest{11});
% calculate weights ( for W2 )
eta = (beta+betaf)./sqrt(1-beta);
e1 = eta;
e2 = 2*deltaplus;
end
% set weight
xi1 = sqrt(2*sum(e1));
xi2 = sqrt(2*sum(e2));
% set Jhat
Jhat = [1 0; 0 -1];
% realization of rational part of G_N
%
A = [ -epsilon, 0, 0;...
0, 0, 1;...
0, -epsilon^2, -2*epsilon ];
B = [ 1 0;...
0 0;...
0 1];
% initialize AF, BF1, BF2, CF, AZ, BZ, CZ, Dta
AF = [ ]; BF1 = [ ]; BF2 = [ ]; CF = [ ]; AZ = [ ]; BZ = [ ]; CZ = [ ];
Dta = [ ];
for n = 1:k,
C = [ 0 alpha(n) 0;...
xi1-epsilon*xi2, 0 0;...
1/alpha(n), -epsilon^2, -2*epsilon];
D = [ 0, 0;...
xi2, 0;...
0 1];
```

```
% calculate gamma
g = gsearch0(A,B,C,D,h(n),interval);
g = g+gadd; %set new gamma,
% calculate new hamiltonian matrix
[Hg,Ah,D11hat,D22hat,Ct,Bt,M,iM,B1hat,C2hat] =...
                                    hamilton0(A,B,C,D,g,h(n));
% calculate X
[X1,X2] = ric_schr(Hg);
X = X2/X1;
% calculate realization of Wr,i
Aw = A;
Bw = [eye(3), zeros(3)]*Bt;
Dw = [sqrt(D11hat),0;...
0,sqrt(-D22hat)];
Cw = Jhat*inv(Dw.')*Ct*[eye(3);X];
% calculate realization of Fs,i
% Fs = exp(-h*s)*F1s - F2s;
Af = Ah;
Bf1 = B1hat;
Bf2 = iM*B1hat;
Cf = inv(D22hat)*C2hat;
Df = 0;
AF = mdiag(AF,Af);
BF1 = mdiag(BF1,Bf1);
BF2 = mdiag(BF2,Bf2);
CF = mdiag(CF,Cf);
% calculate realization of inverse of Wr, let Wr^-1 =iWr
Diw = inv(Dw);
Aiw = Aw - Bw*Diw*Cw;
Biw = -Bw*Diw;
Ciw = Diw*Cw;
% calculate partition of inverse of Wr
B1iw = Biw(:,1);
B2iw = Biw(:,2);
C1iw = Ciw(1,:);
C2iw = Ciw(2,:);
D11iw = Diw(1,1);
% D12iw = 0;
% D21iw = 0;
D22iw = Diw(2,2);
% calculate realization of Psi12*Psi22^-1,
% where iWr = [Psi11,Psi12; Psi21,Psi22]
% let Zibar = Psi12*Psi22^-1, then realization of Zibar is
Az = Aiw - B2iw*inv(D22iw)*C2iw;
Bz = B2iw*inv(D22iw);
Cz = C1iw;
Dz = 0;
```

```
AZ = mdiag(AZ,Az);
BZ = mdiag(BZ,Bz);
CZ = mdiag(CZ,Cz);
Dta = mdiag(Dta,h(n)*eye(6));
end
DZ = zeros(k);
DF = zeros(k);
% set Gd1*Gd2^-1 = (s+epsilon)/s = 1+epsilon/s;
% let L = Gd1*Gd2^-1, then realizatin of L is
Al = 0;
Bl = 1;
Cl = epsilon;
Dl = 1;
% LL = (s+epsilon)/s^2*I_k, Lbar
All = kron(eye(k),[0 1; 0 0]);
Bll = kron(eye(k),[0;1]);
Cll = kron(eye(k),[epsilon 1]);
Dll = zeros(k);
% set same LTI systems needs for simulation in Simulink
% set plant, P = 1/s*ones(1,k), rational part
Ap = 0;
Dp = ones(1,k);
Cp = 1;
Bp = zeros(1,k);
% set
Lam = diag(1./alpha);
bir = ones(1,k);
% set variables for Simulink
Zhat = ss(AZ,BZ,CZ,DZ);
Pr = ss(Ap,Bp,Cp,Dp);
Lbir = bir'*ss(Al,Bl,Cl,Dl);
LbarG = ss(All,Bll,Cll,Dll)*(Lam-bir'*bir);
LbarG.inputdelay = h';
Fs1 = ss(AF,BF1,CF,DF);
Fs1.inputdelay = h';
Fs2 = ss(AF,BF2,CF,DF);
Fs = c2d(Fs1,Ts)-c2d(Fs2,Ts);
Fs = minreal(Fs);
if or(choice == 2, choice == 3)
Fs = minreal(Fs,1e-4);
end
if k == 5, Fs = minreal(Fs,1e-5);end
% initialize controller K
K = [ ];
% set frequency range,
% now we may be compute the frequency responce of Controller,
% K = L*Khat*(1-Fs*Khat)^-1
```

```
% Fs = exp(-h*s)*F1s - F2s;
for s = j*freqrang,
ZBAR = tfeval(AZ,BZ,CZ,zeros(k),s);
FS = tfeval(AF,expm(-s*Dta)*BF1-BF2,CF,zeros(k),s);
LL = tfeval(Al,Bl,Cl,Dl,s);
LBAR = tfeval(All,Bll,Cll,Dll,s);
%L01 = tfeval(-epsilon,1,1,0,s);
K1 = inv(eye(k)+ZBAR*(LBAR*(Lam-bir'*bir)*expm(-s*diag(h))-FS...
                         ))*ZBAR*bir'*LL;
K = [K, K1];
end
% plotting Bode of Controller
figure('name' , 'Controller K','numbertitle','off');
subplot(2,1,1);
semilogx(freqrang,20*log10(abs(K)))
title('Denetleyici Bode cizimi');
xlabel('\omega');
ylabel('K''nin genligi, dB');
grid on;
subplot(2,1,2);
semilogx(freqrang,phase(K)*180/pi)
xlabel('\omega');
ylabel('K''nin fazi, derece');
grid on;
```

Ek-2: Optimal γ'yı Hesaplayan Makro

```
function g = gsearch0(A,B,C,D,h,interval),
lint = length(interval);
g_low = interval(1);
g_high = interval(lint);
telmax = 50;
button = 0;
while button ~= 3
subplot(1,1,1);
plot([g_low g_high],[0 0],'g');
title(' Mouse: button1 = zoom in, button2 = zoom out, button3 = exit');
hold on;
dataplot = zeros(1,telmax);
datax = zeros(1,telmax);
for tel = 1:telmax;
g = g_low+(tel-1)*(g_high-g_low)/(telmax-1);
[Hg,Ah,D11hat,D22hat,Ct,Bt,M,iM,B1hat,C2hat] =...
                    hamilton0(A,B,C,D,g,h);
if max(eig(D22hat)) >= 0; % then D22 has wrong signature
plot(g,0,'rx');
dataplot(tel) = 0;
datax(tel) = g;
%pause;
else
epp = 1e-40;
[X1,X2,ricfail,reig_min] = ric_schr(Hg,epp);
if ricfail == 0
Cc = chol(X1'*X1+X2'*X2);
X1 = X1/Cc; % normalized
plot(g,min(svd(X1)),'g+');
dataplot(tel) = min(svd(X1));
datax(tel) = g;
else
plot(g,0,'r*');
dataplot(tel) = 0;
datax(tel) = g;
%pause;
end
end
end
plot(datax,dataplot);
[xx,yy,button] = ginput(1);
if button == 3 % then exit
```

Ek-3: Hamiltonian Matrisini Hesaplayan Makro

```
function [Hg,Ah,D11hat,D22hat,Ct,Bt,M,iM,B1hat,C2hat] =...
                  hamilton0(A,B,C,D,g,h),
% set J_gamma or simple J
[nc,mc] = size(C);
J = eye(nc);
J(nc,nc) = -g^2;
% get the realization of rational part of G_N~*J*G_N
Ahat = [A zeros(3);...
-C.'*J*C, -A.'];
Bhat = [B;...
-C.'*J*D];
Chat = [D.'*J*C, B.'];
Dhat = D.'*J*D;
% set partition of Bhat, Chat and Dhat
B1hat = Bhat(:,1);
B2hat = Bhat(:,2);
C1hat = Chat(1,:);
C2hat = Chat(2,:);
D11hat = Dhat(1,1);
% D12hat = 0;
% D21hat = 0;
D22hat = Dhat(2,2);
% calculate Ah = Ahat-B2hat*inv(D22hat)*C2hat
Ah = Ahat - (B2hat/D22hat)*C2hat;
% find realization of Theta or simple Th
M = expm(h*Ah);
S = [zeros(3), -eye(3);...
eye(3), zeros(3)];
iM = -S*M.'*S;
At = Ahat;
Bt = [iM*B1hat, B2hat];
Ct = [C1hat*M; C2hat];
Dt = Dhat;
% calculate H_gamma or simple Hg
% Hg is "A matrix" of inverse of Theta
Hg = At - Bt*inv(Dt)*Ct;
```

Ek-4: Verilen Frekansta Transfer Fonksiyonunun Değerini Hesaplayan Makro

```
function y = tfeval(a,b,c,d,s),
% y = C*inv(sI-A)*B+D
% use
% Y = tfeval(A,B,C,D,s) or Y = tfeval(SYS,s);
if nargin == 2,
[A,B,C,D] = ss2abcd(a);
s = b;
else
A = a; B = b; C = c; D = d; s = s;
end
n = length(A);
birm = eye(n);
y = C*inv(s*birm-A)*B+D;
```

Ek-5: LTI Sistemin Gerçeklenmesini Bulan Makro

```
function [a,b,c,d]=ss2abcd(sys),
%find A,B,C and D matrices from ss form
% use
% [A,B,C,D]=ss2abcd(SYS)
% Enis, 9.1.2001
sys=ss(sys,'min');
a=sys.a;
b=sys.b;
c=sys.c;
d=sys.d;
```