

**ESNEK ROBOT KOLLARININ
MODELLENMESİ VE KONTROLÜ**

KORAY ÖZEL
Yüksek Lisans Tezi

Elektrik Elektronik Mühendisliği
Anabilim Dalı
Haziran 1997

**ESNEK ROBOT KOLLARININ
MODELLENMESİ VE KONTROLÜ,**

KORAY ÖZEL

**Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Elektronik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.**

Danışman: Prof. Dr. Altuğ İFTAR

HAZİRAN 1997

Koray Özel 'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Esnek Robot Kollarının Modellenmesi ve Kontrolü” başlıklı tez ~~26/6/1997~~ tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı) :Prof. Dr. Altuğ İFTAR

Üye :Yrd. Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA

Üye :Yrd. Doç. Dr. Can ÖZDEMİR

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
04.07.1997... tarih ve .11/3... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ersan PÜTÜN
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

ESNEK ROBOT KOLLARININ MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

KORAY ÖZEL

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Altuğ İFTAR
1997

Bu tezde, ilk olarak tek linkli bir esnek robot kolu, ikinci olarak da ilk linki katı ikinci linki ise esnek olan ve uç kısmındaki kütlesi tam olarak bilinmeyen iki linkli bir robot kolu Hamilton prensibi kullanarak modellenmiştir. Tek linkli esnek robot kolu için, durum uzayı denklemlerini oluşturan matris değerlerini istenilen mod sayısı için bulan bir bilgisayar programı MATLAB dilinde hazırlanmıştır. Katı-Esnek robot kolu için de sistemin katı ve esnek hal dinamiğini ifade eden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemleri istenilen mod sayısı için çözerek sistemin tepkisini bulan bir bilgisayar programı MATLAB dilinde hazırlanmıştır. Katı-Esnek robot kolu için eklem açılarının istenilen açıları takip edebilmesi ve uç sapmasının kısa sürede sönmülenebilmesini sağlayacak PD kontrolör tasarlanmıştır. Son olarak da bu kontrolör için simülasyon çıktıları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek Robot Kolları, Modelleme, PD Kontrol

ABSTRACT
Master of Science Thesis

MODELING AND CONTROL OF FLEXIBLE
ROBOT MANIPULATORS

KORAY ÖZEL

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Electrical and Electronics Engineering Program

Supervisor: Prof. Altuğ İFTAR
1997

In this thesis, a one link flexible robot manipulator and a rigid-flexible robot manipulator with an end-effector of unknown mass are modelled using the Hamilton's principle. A program is developed in MATLAB language for the one-link flexible manipulator to calculate the matrix values in the state space equations for any given number of modes. Another program is also developed in MATLAB language for the rigid-flexible robot manipulator to solve the nonlinear ordinary differential equations describing the rigid and flexible dynamics of the system for any desired number of modes. A PD controller is designed for the rigid-flexible manipulator to achieve tracking of desired joint angles and damping tip position oscillations. Finally the system is simulated under the proposed controller.

Keywords: Flexible Robot Manipulators, Modeling, PD Control

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımnda beni yönlendiren ve benden yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Altuğ İFTAR'a ve değerli fikirleriyle destek olan arkadaşım Atakan DOĐAN'a teşekkür ederim. Ayrıca çalıőmam boyunca yanımda olan aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
1. GİRİŞ	1
1.1 Esnek Yapıların Modellenmesi ve Kontrolü Üzerine Yapılan Çalışmalara Genel Bakış	1
1.2 Tezde Yapılan Çalışmalar	3
2. TEK EKLEMLİ ESNEK ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ VE DİNAMİK MODELİN MATLAB PROGRAMIYLA OLUŞTURULMASI	4
2.1 Sistemin Modellenmesi	4
2.1.1 Hamilton prensibi	5
2.1.2 Sistemde oluşan toplam kinetik enerji	7
2.1.3 Sistemde oluşan toplam potansiyel enerjiler	8
2.1.4 Sistemde korunmayan kuvvetler tarafından yapılan görünen işler	8
2.1.5 Sistemin dinamik denklemlerinin ve sınır koşullarının bulunması	8
2.2 Dinamik Modelin MATLAB Programıyla Elde Edilmesi	15
3. KATI-ESNEK ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ VE BENZETİM PROGRAMININ OLUŞTURULMASI	16
3.1 Sistemin Modellenmesi	16
3.1.1 Sistemde oluşan toplam kinetik enerji	17
3.1.2 Sistemde oluşan toplam potansiyel enerjiler	19
3.1.3 Sistemde korunmayan kuvvetler tarafından yapılan görünen işler	19
3.1.4 Sistemin dinamik denklemlerinin ve sınır koşullarının bulunması	19
3.2 Sistemin Benzetim Programının Oluşturulması	29
4. ÖNERİLEN KONTROL YÖNTEMİ	31
5. SONUÇ	41
KAYNAKÇA	42

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
EKLER	43
Ek.1 (Dinamik Modeli Veren MATLAB Programı).....	44
Ek.2 (Katı -Esnek Robot Kolu Benzetim Programı)	48

1. GİRİŞ

Günümüzdeki çoğu robotik uygulamalarında hızlı tepki alınması, az enerji tüketimi ve geniş bir çalışma aralığı istenmektedir. Bu istenilenleri karşılamak ise uzun ve hafif robot kollarının kullanılmasıyla sağlanabilir. Robot kollarının uzun ve hafif olması bu tür robot kollarının esnekliğinin artmasına sebep olur. Özellikle ağır yüklerin hızlı bir şekilde taşınmasını sağlayan kolların kullanıldığı yerlerde katı kol analizi pek uygun olmayabilir ve bunun için parçanın doğasından kaynaklanan elastik bozulmaların da hesaba katıldığı daha doğru bir matematiksel model gereklidir. Esnek robot kollarının kullanılmasıyla robot kollarının hareketi hızlanabilir malzeme gereksinimi ve güç tüketimi azalır ve bu şekilde toplam maliyet azaltılabilir.

Esnek yapıların en önemli özelliği, bu tür sistemlerin sadece çok büyük modellerle gösterilebilmesidir. Bu gibi büyük boyutlu modeller sistem içerisinde iki türlü belirsizliğe neden olabilmektedir. Bunlardan birincisi sistem parametrelerinin bilinmeyen değerleridir ki buna örnek olarak sistemimizin kütlelerini ve eylemsizlik momentini verebiliriz. İkincisi ise modellenemeyen dinamiktir ki buna örnek olarak da esnek yapının yüksek frekans modlarını verebiliriz. Bunların dışında, esnek yapıyı oluşturan dinamik denklemlerin karmaşık ve doğrusal olmamasından dolayı çözümleri zahmetli zor hesaplamaları gerektirmektedir. Esnek robot kollarının kullanılmasıyla birlikte esnek robot kolu kontrolü de önemli bir konu haline gelmiştir. Esnemenin dolayı oluşan sapsmaları bastırmak için gerekli kontrol yöntemleri de karmaşıktır. Bununla birlikte, yüksek performanslı robotlara olan talebin artması esnek robot kol dinamiği üzerindeki çalışmalara önem verilmesine neden olmuştur. Bu çalışmaların uygulanması, mikroişlemcilerin hesaplama yeteneklerindeki gelişmelerle hızlanmıştır.

1.1 Esnek Yapıların Modellenmesi ve Kontrolü Üzerine Yapılan Çalışmalara Genel Bakış

Esnek robot kollarının modellenmesi ve kontrolü birçok araştırmacıya konu olmuştur. Robot kollarının dinamik eşitliklerinin elde edilmesinde kullanılan iki temel yaklaşım vardır. Bunlar Newton-Euler ve Lagrange yaklaşımları olarak bilinmektedir. Özellikle esnek yapılar için hareket eşitliklerini Lagrange metodu ile türetmek, Newton-Euler ile türetmekten daha kolaydır. Katı robot kollarının dinamik eşitliklerinin formülasyonu için literatürde birçok araştırma mevcuttur. Esnek robot kolları için dinamik eşitliklerin formülasyonu üzerine araştırmalar devam etmektedir.

Low [1] esnek robot kollarındaki dinamik eşitliklerin formülasyonu için sistematik bir yöntem geliştirmiştir. Formülasyon Hamilton prensibi ve Lagrange metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Dinamik eşitlikler merkezkaç (centrifugal), yerçekimi, eylemsizlik ve

etki eden kuvvetler cinsinden ifade edilerek genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden yazılmışlardır. Bu yöntem klasik değişimsel metoduna göre esnek yapıyı oluşturan kompakt sembolik eşitliklerin etkin ve sembolik bir şekilde oluşturulması açısından kolaylık sağlamaktadır.

Sakawa vd. [2] tek linkli esnek robot kolunu modellemişler sonra da titreşimleri hisseden gerilme ölçerlerin çıkışlarını kullanarak dinamik bir kompensatör içeren geri beslemeli kontrol ile sistemi kontrol etmişlerdir.

İftar ve Özgüner [3] belirsiz dinamiğin gürbüz kontrol tasarımı için durum uzayı formunda modellenmesi üzerinde çalışmışlardır. Belirsiz dinamiği göstermek için parametre vektörü sınırlı bir set içerisinde tanımlanmış, rasyonel Transfer Fonksiyon Matrisi kullanılmıştır. Bu şekilde gerçek sistem üzerinde kontrol tasarlamak yerine bu transfer fonksiyon matrisi üzerinde kontrol tasarlanmıştır.

İftar [4] tarafından tek linkli esnek robot kolunun modellenmesi ve kontrolü gerçekleştirilmiştir. İlk olarak yapısal olmayan belirsiz dinamik küçük dereceden yapısal bir formda gösterilmiştir. Bu amaçla esnek dinamik ikinci dereceden bir transfer fonksiyonu ile ifade edilmiştir. Son olarak bu transfer fonksiyonu için tüm parametre değerlerinde istenilen kararlılığı ve performansı sağlayan bir kontrol tasarlanılmaya çalışılmıştır. Kontrol yöntemi olarak optimal çıktı geri besleme kontrol yöntemi kullanılmıştır.

Matsuna vd. [5] uzay ve endüstri alanlarında kullanılan robot kollarının hafif ve esnek olması ve uzaydaki yapıların inşasında kullanılan uzaysal robot kollarına gereksinim duyulduğu yerlerde, sadece robot kolunun pozisyonunun ve uç sapmasının kontrolünün yeterli olmadığı, aynı zamanda robot ucunda oluşan temas kuvvetinin (contact force) kontrolünün de gerekli olduğunu belirtmiştir.

Geometrik değişimden dolayı oluşan frekans değişimini ve coriolis, merkezkaç etkisinden dolayı oluşan doğrusal olmayan ifadelerin etkisini azaltmak için Khorrami vd. [6] Katı hal dinamiğini doğrusallaştırarak ve doğrusal olmayan geri besleme kontrolü uygulayarak, geometrik değişimden dolayı oluşan frekans değişimini azaltıp coriolis ve merkezkaç etkisinden dolayı oluşan doğrusal olmayan ifadelerin etkisini yoketmişlerdir. Bununla birlikte geliştirilen bu kontrol eklem tabanlı bir kontrol olduğu için önemli titreşimler robot kolunun ucunda görülmekte, bunu ortadan kaldırmak için girdi biçimlendirme (input preshaping) tekniği kullanılarak robotun ucundaki titreşimlerin azaltılması sağlanmıştır.

Liu ve Kujath [7] tarafından esnek robot kolları için yörünge optimizasyon yöntemi önerilmiştir. Bu araştırmada ilk olarak esnek robot kolunun hareketi global hareketin ve lokal titreşimlerin toplamı olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmadaki amaç etkiyen lokal titreşimleri azaltacak global hareketlerdeki optimal yörüngenin bulunmasıdır. Lokal titreşimlerin karesinin integrali performans ölçeği olarak seçilmiştir. Araştırmanın sonucunda optimal yörüngeli global hareketlerin minimum lokal titreşimlere neden olduğu görülmüştür.

1.2 Tezde Yapılan Çalışmalar

Bu yüksek lisans tezinde ilk olarak **Bölüm 2**'de tek linkli ucundaki kütle değeri tam olarak bilinmeyen esnek robot kolu için sistemin dinamik denklemleri Lagrange metodu ve Hamilton prensibi kullanılarak bulunmuştur. Daha sonra tek linkli esnek robot kolu için istenilen mod sayısında dinamik denklemleri oluşturan matrislerin değerlerini bulan bir bilgisayar programı gerçekleştirilmiştir.

Bölüm 3'de ise ilk linki katı ikinci linki ise esnek olan robot kolu ele alınmıştır. Lagrange denklemi ve Hamilton prensibi kullanılarak sistemin doğrusal olmayan zamanla değişen dinamik denklemleri elde edilmiştir. Sistemi simüle edebilmek için MATLAB dilinde bir simülasyon programı yazılmıştır. Doğrusal olmayan zamanla değişen dinamik denklemlerin çözümü Runge-Kutta algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Simülasyonu esnek yapı için istenilen mod sayısında yapmak mümkündür.

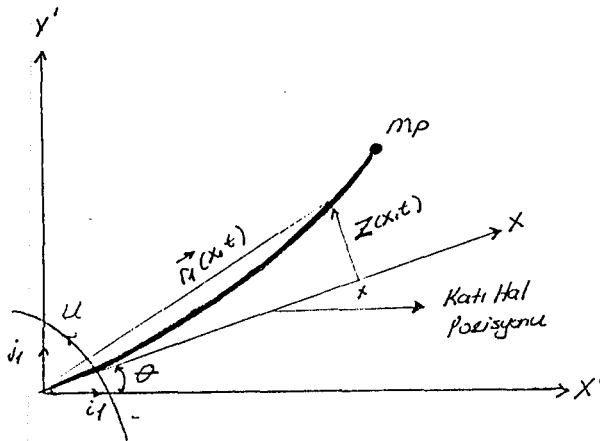
Bölüm 4'de PD kontrolör kullanılarak 3.Bölüm'de modellenen Katı-Esnek robot kolu kontrol edilmeye çalışılmıştır.

Bölüm 5'da Elde edilen sonuçlarla ilgili yorumlar ve öneriler bulunmaktadır.

2. TEK EKLEMLİ ESNEK ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ VE DİNAMİK MODELİN MATLAB PROGRAMIYLA ELDE EDİLMESİ

2.1 Sistemin Modellenmesi

Tek eklemlili esnek bir robot kolu Şekil 2-1 'de görülmektedir. Esnek robot kolunun bir ucuna "u" torku uygulanmaktadır. Kolun diğeri ucuna ise kütleli tam olarak bilinmeyen "mp" kütleli konulmuştur.



Şekil 2.1

Kabullenmeler:

- Kollar uniform kütle ve kesite sahiptir.
- Euler-Bernoulli teoremine göre, esnek kolun bükülmesinden kaynaklanan dönme momenti ve kesme etkisi ihmal edilmiştir.
- Sistemin hareketi sadece yatay düzlem üzerinde olduğu için yerçekimi etkisi gözönüne alınmamıştır.
- Esnek kolun katı hal pozisyonundan olan sapmalarının kolun boyuna göre küçük olduğu kabul edilmiştir.
- Sürtünme etkisi ihmal edilmiştir.

Kolun uzunluğu L , çizgisel kütle yoğunluğu ρ , Young esneklik modülü E , ekleme noktasının eylemsizlik momenti I_h , esnek kolun yüzey atalet momenti I_a , ekleme uygulanan tork u , esnek robot kolunun x noktasında t zamanında katı hal pozisyonundan esnemesinden dolayı oluşan katı hal pozisyonuna olan dik sapma $Z(x,t)$,

esnek robot kolunun katı hal pozisyonu ile referans arasındaki açı θ , açısal hız $\dot{\theta}$, açısal ivme $\ddot{\theta}$, robotun ucundaki kütle ise m_p 'dır.

(i_1, j_1) ortogonal birim vektör çiftidir. $\vec{r}_1(x, t)$, esnek parça üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü olmak üzere konum vektörü,

$$\vec{r}_1(x, t) = (x \cos \theta - Z(x, t) \sin \theta)j_1 + (x \sin \theta + Z(x, t) \cos \theta)j_1$$

olarak elde edilir.

2.1.1 Hamilton prensibi

Hamilton prensibini açıklmadan önce görünen iş kavramından söz edersek; ilk olarak N parçacıktan oluşan bir sistem düşünelim. R_i ($i= 1, 2, \dots, N$) i. Parçaya etki eden bileşke kuvvet olmak üzere dengedeki bir sistem için $R_i=0$ dır.

$$R_i \delta r_i$$

R_i tarafından δr_i görünen yerdeğiştirme boyunca yapılan görünen işi göstermektedir. Görünen iş temelde bir sistemin statik denge durumuyla ilgilidir. Tüm sistem için görünen iş ifadesini yazarsak,

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N R_i \delta r_i = 0 \quad (1)$$

olur. Eğer sistem üzerine etkileyen sınırlayıcı bir kuvvet var ise ,

$$R_i = F_i + F_i' , \quad i= 1, 2, \dots, N$$

olur. F_i uygulanan kuvvetleri, F_i' ise sınırlayıcı kuvvetleri göstermektedir. Sınırlayıcı kuvvetler iş yapmazlar. Bu nedenle eşitlik,

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N F_i' \delta r_i = 0 \quad (2)$$

olur. Bu görünen iş prensibi olarak kabul edilir. Dinamik durum için yukarıdaki denklem sifıra eşit değildir. Aşağıdaki eşitliğe bakarsak,

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta r_i) = \ddot{r}_i \delta r_i + \dot{r}_i \delta \dot{r}_i = \ddot{r}_i \delta r_i + \delta \left(\frac{1}{2} \dot{r}_i^2 \right)$$

olur. Bu şekilde,

$$\ddot{r}_i \delta r_i = \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta r_i) - \delta\left(\frac{1}{2} \dot{r}_i \dot{r}_i\right)$$

durumuna gelir. Bu eşitliğin her iki tarafını m_i ile çarpıp tüm sistem için yazarsak,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta r_i) - \delta T \quad (3)$$

T burada sistemin kinetik enerjisidir. Newton'un ikinci kanununu tüm sistem parçacıkları için yazarsak,

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i \ddot{r}_i) \delta r_i = 0$$

olur. (2) ve (3) numaralı denklemleri yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$\delta T + \delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta r_i) \quad (4)$$

olarak elde edilir. Burada $r_i = r_i(t)$ ($i=1,2, \dots, N$) gerçek yolu göstermektedir. Sistemin izlediği yolda değişimin olduğunu düşünürsek, sistem $r_i(t) + \delta r_i(t)$ yolu üzerinde hareket edecektir. $t = t_1$ ve $t = t_2$ anlarında değişen yolu gerçek yol ile aynı olacak şekilde seçersek; $\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$ olacak şekilde (4) numaralı denklemin her iki tarafını dt ile çarpıp t_1 'den t_2 'ye integralini alırsak,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta \bar{W}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\dot{r}_i \delta r_i) dt = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \delta r_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

olur. Buradan,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta \bar{W}) dt = 0 \quad \delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0, \quad i=1,2,3, \dots, N \quad (5)$$

elde edilir. Bu eşitlik Hamilton prensibi olarak bilinir. Hamilton ifadesindeki $\delta \bar{W}$ ifadesini

$$\delta \bar{W} = \delta \bar{W}_c + \delta \bar{W}_{nc}$$

olarak şekilde korunumlu ve korunumsuz kuvvetler tarafından yapılan işlerin toplamı olarak yazabiliriz.

Korunumlu kuvvetler tarafından yapılan işler, V potansiyel enerjii göstermek üzere

$$\delta\bar{W}_c = -\delta V$$

şeklinde yazabiliriz.

$$L = T - V \quad (6)$$

olacak şekilde Lagrange değişkenini tanımlarsak, (5) nolu Hamilton prensibi ,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta\bar{W}_{nc}) dt = 0 \quad \delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0 \quad i=1,2,3,\dots,N \quad (7)$$

olarak yazılır. Dinamik denklemleri analitik mekanik kullanarak Hamilton prensibi ve Lagrange denklemleri yardımıyla bulacak olursak; ilk olarak sistemdeki potansiyel, kinetik ve korunumsuz kuvvetler tarafından yapılan işler bulunur.

2.1.2 Sistemde oluşan toplam kinetik enerji :

a.) Eklemin dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji,

$$T_1 = \frac{1}{2} I h \dot{\theta}^2$$

b.) Esnek kolun yerdeğiştirmesinden dolayı oluşan kinetik enerji,

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho |\dot{\vec{r}}_1(x,t)|^2 dx$$

olarak bulunur. Konum vektörünün türevini yazarsak,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_1(x,t) &= (-x \sin \theta \dot{\theta} - Z_t(x,t) \sin \theta - Z(x,t) \cos \theta \dot{\theta}) i_1 \\ &+ (x \cos \theta \dot{\theta} + Z_t(x,t) \cos \theta - Z(x,t) \sin \theta \dot{\theta}) j_1 \end{aligned}$$

olur. Esnek kolun katı hal pozisyonundan olan sapmalarının kolun boyuna göre küçük olduğu kabul edildiğinde,

$$\begin{aligned} (x^2 + Z^2(x,t)) \dot{\theta}^2 &\cong x^2 \dot{\theta}^2 \\ |\dot{\vec{r}}_1(x,t)|^2 &= x^2 \dot{\theta}^2 + Z_t^2(x,t) + 2x \dot{\theta} Z_t(x,t) \end{aligned}$$

durumuna gelir.

c.) Esnek kolun ucundaki kütle için yer değiştirmesinden dolayı oluşan kinetik enerji, $\delta_0(x)$: Dirac-Delta fonksiyonu olmak üzere,

$$T_3 = \frac{1}{2} m_p |\dot{\tilde{r}}_1(L)|^2 = \frac{1}{2} \int_0^L m_p \delta_0(x-L) |\dot{\tilde{r}}_1(x)|^2 dx$$

olarak bulunur.

2.1.3 Sistemde oluşan toplam potansiyel enerjiler :

yerçekimi gözönüne alınmadığı için sadece esnek kolun esnemesinden dolayı bir potansiyel oluşur,

$$V_1 = \frac{1}{2} EI_a \int_0^L [Z_{xx}(x,t)]^2 dx$$

2.1.4 Sistemde korunmayan kuvvetler tarafından yapılan görünen işler :

$\delta\theta$: θ 'nın değişimini göstermektedir.

$$\delta W_1 = u \delta\theta$$

2.1.5 Sistemin dinamik denklemlerinin ve sınır koşullarının bulunması :

Hamilton prensibi (7) ve Lagrange denklemini (6) kullanırsak,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[I h \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \frac{1}{2} \int_0^L (\rho + m_p \delta_0(x-L)) (2x^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + 2Z_t(x,t) \delta Z_t(x,t) + 2x Z_t(x,t) \delta \dot{\theta} + 2x \dot{\theta} \delta Z_t(x,t)) dx - \frac{1}{2} EI_a \int_0^L 2Z_{xx}(x,t) \delta Z_{xx}(x,t) dx + u \delta\theta \right] dt = 0$$

durumuna gelir. Kısmi integrasyonu uygularsak;

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[(-I h \ddot{\theta} - (\rho + m_p \delta_0(x-L))) \int_0^L (x^2 \ddot{\theta} + x Z_{tt}(x,t)) dx + u \right] \delta\theta - \\ & \int_0^L ((\rho + m_p \delta_0(x-L)) (Z_{tt}(x,t) + x \ddot{\theta}) + EI_a Z_{xxxx}(x,t)) \delta Z(x,t) \\ & - EI_a Z_{xx}(L,t) \delta Z_x(L,t) + EI_a Z_{xx}(0,t) \delta Z_x(0,t) \\ & + EI_a Z_{xxx}(L,t) \delta Z(L,t) - EI_a Z_{xxx}(0,t) \delta Z(0,t) \Big] dt = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. θ açısı değeri değiştiği için $\delta\theta$ (θ 'nin değişimi) serbesttir. Bir önceki eşitliğin sifira eşit olabilmesi için $\delta\theta$ 'yi çarpan ifadenin sifira eşit olması gerekir.

$$I_h \ddot{\theta} + \int_0^L \rho x^2 \ddot{\theta} dx + \int_0^L \rho x Z_{xx}(x,t) dx + m_p L^2 \ddot{\theta} + m_p L Z_{xx}(L,t) = u \quad (8.a)$$

Sistemde esneme olduğu için katı hal pozisyonundan olan sapmalar değişmektedir bu nedenle $\delta Z(x,t)$ ($Z(x,t)$ 'nin değişimi) serbesttir. Dolayısıyla $\delta Z(x,t)$ 'i çarpan ifadenin sifira eşit olması gerekir.

$$Z_{xx}(x,t) + x \ddot{\theta} = \frac{-EI_a}{\rho} Z_{xxxx}(x,t) \quad (8.b)$$

Bu şekilde dinamik denklemler elde edilir. Sınır koşullarını bulursak; Robotun eklem kısmı sabitlendiği için $x=0$ konumunda esneme olmayacaktır. Bu nedenle,

$$Z(0,t) = Z_x(0,t) = 0$$

olacaktır.

$\delta Z_x(L,t)$ serbest olduğu için, $\delta Z_x(L,t)$ 'i çarpan ifadenin sifira eşit olması gerekir.

$$Z_{xx}(L,t) = 0$$

olacaktır. $x = L$ konumunda esneme olabildiği için $\delta Z(L,t)$ serbest ve $\delta Z(L,t)$ 'i çarpan ifadeler sifira eşit olmalıdır. Buradan,

$$EI_a Z_{xxxx}(L,t) = m_p Z_{xx}(L,t) + m_p L \ddot{\theta}$$

olarak bulunur.

Sınır koşullarını toplu olarak yazarsak,

$$Z(0,t) = Z_x(0,t) = Z_{xx}(L,t) = 0 \quad (9.a)$$

$$EI_a Z_{xxxx}(L,t) = m_p Z_{xx}(L,t) + m_p L \ddot{\theta} \quad (9.b)$$

olarak bulunur. Bu çalışmada $Z_x(x,t)$, $Z_{xx}(x,t)$, $Z_{xxx}(x,t)$, $Z_{xxxx}(x,t)$ sırasıyla $Z(x,t)$ fonksiyonunun x 'e göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü kısmi türevidir. Ayrıca $Z_t(x,t)$, $Z_{tt}(x,t)$ ise sırasıyla $Z(x,t)$ fonksiyonunun t 'ye göre birinci ve ikinci kısmi türevleridir. Üst (n) x 'e göre n. dereceden adi türevi göstermekte, üst nokta (•)

ise t 'ye göre adi türevi göstermektedir. (8.b) denkleminde Z_{tt} çekilip (8.a) denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
 (I_h + m_p L^2 + \int_0^L \rho x^2 dx) \ddot{\theta} &= u + \int_0^L \rho x^2 \ddot{\theta} dx + \int_0^L E I_a x Z_{xxxx} dx - m_p L Z_{tt}(L, t) \\
 (I_h + m_p L^2) \ddot{\theta} &= u - m_p L Z_{tt}(L, t) + E I_a L Z_{xxx}(L, t) - E I_a Z_{xx}(L, t) + E I_a Z_{xx}(0, t) \\
 (I_h + m_p L^2) \ddot{\theta} &= u - m_p L Z_{tt}(L, t) + m_p L (L \ddot{\theta} + Z_{tt}(L, t)) + E I_a Z_{xx}(0, t) \\
 (I_h + m_p L^2) \ddot{\theta} &= u - m_p L Z_{tt}(L, t) + m_p L^2 \ddot{\theta} + m_p L Z_{tt}(L, t) + E I_a Z_{xx}(0, t) \\
 I_h \ddot{\theta} &= u + E I_a Z_{xx}(0, t) \tag{10}
 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$y = E I_a Z_{xx}(0, t) \tag{11}$$

eşitliği esnek kısmın katı hal üzerindeki etkisi olmak üzere,

$$I_h \ddot{\theta} = u + y \tag{12}$$

şeklinde sistemin katı halini tanımlayan denklem elde edilir. $\ddot{\theta}$ ifadesi,

$$\ddot{\theta} = \frac{(u + y)}{I_h}$$

olacaktır. $\ddot{\theta}$ ifadesi (8.b) denkleminde yerine konursa,

$$Z_{tt} + \frac{E I_a}{\rho} Z_{xxxx} = - \frac{x(u + y)}{I_h} \tag{13}$$

ifadesi elde edilir. yukarıdaki diferansiyel denkleminin çözümünün $0 < x < L$ aralığında x 'e ve t 'ye bağlı fonksiyonların çarpımlarının sonsuz toplamları olarak bulunabileceği kabul edildiğinde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$Z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \tag{14}$$

Bu $Z(x, t)$ ifadesi (13) denkleminde yerine konulup sonra her iki taraf belli bir "j" için $\phi_j(x)$ fonksiyonu ile çarpılıp 0 ' dan L ' ye integrali alındığında,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) \ddot{\eta}_i(t) + \frac{E I_a}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \phi_i^{(4)}(x) \phi_j(x) dx \eta_i(t) = - \left(\int_0^L x \phi_j(x) dx \right) \frac{(u + y)}{I_h} \tag{15}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü için diferansiyel özdeğer problemi yaklaşımını kullanırsak,

$$\varphi = \frac{EI_a}{\rho} \partial^4$$

olarak φ 'yu Z 'nin üzerine etkiyen bir operatör olarak düşünebiliriz.

$$\varphi\phi_i(x) = \lambda_i\phi_i(x)$$

$$\phi_i^{(4)}(x) = \frac{\rho}{EI_a} \lambda_i\phi_i(x)$$

$$\phi_i^{(4)}(x) - \frac{\rho}{EI_a} \lambda_i\phi_i(x)$$

$\frac{\rho}{EI_a} \lambda_i = k_i^4$ olarak alınırsa dördüncü dereceden bu denklemin çözümü,

$$\phi_i(x) = A_i \cos(k_i x) + B_i \sin(k_i x) + C_i \sinh(k_i x) + D_i \cosh(k_i x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu fonksiyon (9.a) 'deki sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçildiğinde

$$\phi_i(x) = \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - H_i [\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \quad (16)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki H_i değeri,

$$H_i = \frac{\cosh(k_i L) + \cos(k_i L)}{\sinh(k_i L) + \sin(k_i L)}$$

şeklinde ($i=1,2,\dots$) sistemin modlarını gösterir. [8]

(8.b) denklemini $x=L$ noktasında yazarsak,

$$Z_u(L,t) = -L\ddot{\theta} - \frac{EI_a}{\rho} Z_{xxxx}(L,t)$$

elde edilir. $Z_u(L,t)$ ifadesi (9.b) denkleminde yerine konulursa;

$$EI_a Z_{xxx}(L, t) = \frac{-m_p}{\rho} EI_a Z_{xxxx}(L, t)$$

olarak bulunur. (14) denklemini kullanarak yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi_i^{(3)}(L) = \frac{-m_p}{\rho} \phi_i^{(4)}(L) \quad (17)$$

(16) numaralı denklemi yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} & k_i^3 \left[\sinh(k_i x) - \sin(k_i x) - H_i k_i^3 [\cosh(k_i x) + \cos(k_i x)] \right] \\ &= -\frac{m_p}{\rho} k_i^4 \left[\cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - H_i k_i^4 [\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünden frekans denklemi,

$$1 + \cosh(k_i L) \cos(k_i L) + \frac{m_p}{m} k_i L [\sinh(k_i L) \cos(k_i L) - \cosh(k_i L) \sin(k_i L)] = 0 \quad (18)$$

olarak bulunur. k_i ($i=1,2,3,\dots$) bu frekans denkleminin çözümleridir.

$\phi_i^{(4)}(x) = k_i^4 \phi_i(x)$ ifadesi (15) denkleminde yerine konulursa,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) \ddot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) \eta_i(t) \frac{EI_a}{\rho} k_i^4 = - \int_0^L x \phi_j(x) dx \frac{(u+y)}{I_h}$$

Eğer $i \neq j$ ise,

$$\int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx = -\frac{m_p}{\rho} \phi_i(L) \phi_j(L) \quad (19)$$

Eğer $i=j$ ise,

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx &= L + \frac{(H_i^2 - 1)}{k_i} \cos(k_i L) \sinh(k_i L) - \frac{H_i}{2k_i} \cosh(2k_i L) \\ &- \frac{(H_i^2 + 1)}{k_i} \sin(k_i L) \cosh(k_i L) + \frac{(H_i^2 + 1)}{4k_i} \sinh(2k_i L) + \frac{2H_i}{k_i} \sin(k_i L) \sinh(k_i L) \\ &+ \frac{H_i}{2k_i} \cos(2k_i L) + \frac{(1 - H_i^2)}{4k_i} \sin(2k_i L) \end{aligned}$$

şeklinde bulunacaktır.

(20)

$$a_{ji} = \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

$$\lambda_i = \frac{EI_a}{\rho} k_i^4 \quad (21)$$

$$b_j = -\frac{\int_0^l x \phi_j(x) dx}{I_h} = \frac{2[k_j L(1 + \cos(k_j L) \cosh(k_j L)) - (\sinh(k_j L) + \sin(k_j L))]}{I_h k_j^2 (\sinh(k_j L) + \sin(k_j L))}$$

(22)

olarak tanımlandığında, dinamik modelimiz aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{ji} \ddot{\eta}_i(t) + a_{ji} \lambda_i \eta_i(t)) = b_j (u + y) \quad (23)$$

$y(t) = EI_a Z_{xx}(0, t)$ ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$y(t) = EI_a \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^{(2)}(0) \eta_i(t)$$

olarak bulunur.

$$\phi_i^{(2)}(0) = 2 k_i^2$$

Olduğu bilindiğinden

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2EI_a k_i^2 \eta_i(t)$$

$$c_i = 2EI_a k_i^2 \quad (24)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i(t)$$

şekline gelir.

$$a_{ji} \lambda_i = \beta_{ji} \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{ji} \ddot{\eta}_i(t) + \beta_{ji} \eta_i(t)) = b_j (u + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i)$$

şekline gelir. Bu bulduğumuz terimleri vektör matris formunda gösterirsek,

$$a\ddot{\eta} + \beta\eta = b(u + c\eta)$$

$n = (n_1, n_2, \dots)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots)^T$, $c = (c_1, c_2, \dots)$ sonsuz boyutlu vektörlerdir.

$\ddot{\eta}$ matris formunda,

$$\ddot{\eta} = -a^{-1}(\beta - bc)\eta + a^{-1}bu$$

şeklinde bulunur.

Bu denklemde $\Omega^2 = -a^{-1}(\beta - bc)$ ve $\alpha = a^{-1}b$ olarak tanımlanırsa,

$$\ddot{\eta} = \Omega^2 \eta + \alpha u \quad (26)$$

M , Ω^2 matrisinin modal matrisi olmak üzere,

$$\eta = M^{-1} \bar{\eta} \quad (27)$$

dönüşümü yapılırsa (19) denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\ddot{\bar{\eta}} = M^{-1} \Omega^2 M \bar{\eta} + M^{-1} \alpha u$$

$A^2 = -M^{-1} \Omega^2 M$ ve $b = M^{-1} \alpha$ olarak yazarsak,

$$\ddot{\bar{\eta}} = -A^2 \bar{\eta} + bu$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $cM = \bar{c}$ olarak tanımlandığında

$$y = c\eta = \bar{c} \bar{\eta}$$

olarak bulunur. Bu dinamik modelde sönümlenmeler dikkate alınmamıştır. Ancak pratikte sönümlenme katsayısı katılmalıdır.

\bar{A} ile aynı boyutta bir sönümlenme matrisi ζ ilave edildiğinde dinamik model,

$$\ddot{\bar{\eta}} = -\bar{A}^2 \bar{\eta} - 2\zeta \bar{A} \dot{\bar{\eta}} + \bar{b} u \quad (28)$$

$$y = \bar{c} \bar{\eta} \quad (29)$$

olur.

Bu şekilde esnek yapıyı oluşturan denklemler elde edilmiş olur. Bu denklemler kontrol tasarımı için gereklidir. (28) ve (29) numaralı denklemler sonsuz boyutlu sistemi göstermektedir. Esnek yapıların dinamik modelleri sonsuz boyutlu olduğundan ve bu sonsuz boyutlu sistemle kontrol tasarlamak uygun olmadığından bu sonsuz boyutlu ikinci derece denklemi, sonlu boyutlu ikinci dereceden bir denklemle ifade ederek, bu transfer fonksiyonu üzerinde tüm parametre değerlerinde kararlılığı ve istenilen performansı sağlayan bir kontrol tasarlanmaya çalışılabilir. Bu tür bir çalışma Özel [10] tarafından tek linkli bir esnek robot kolu için sunulmuştur.

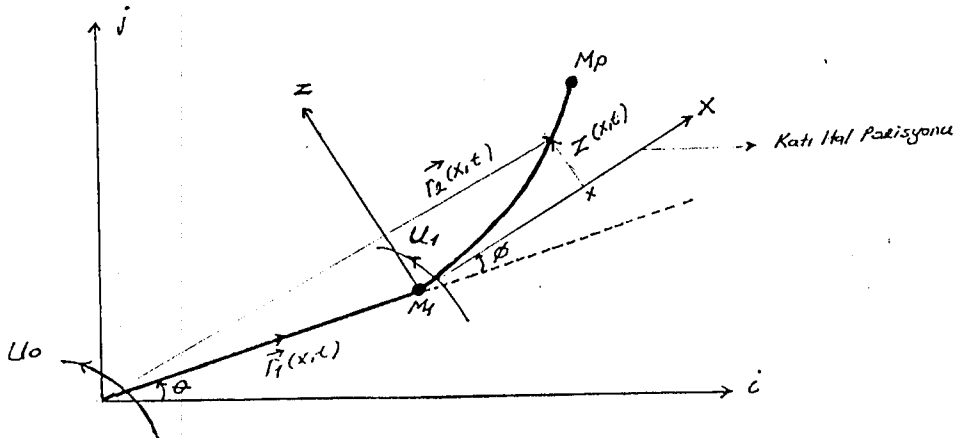
2.2 Dinamik Modelin MATLAB Programıyla Elde Edilmesi

Esnek yapıyı oluşturan dinamik denklemler ile ilgili değerler, MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir. Programda ilk olarak esnek robot kolunun dinamiğini oluşturan parametreler ile ilgili değerler girilir. Bu değerler sırasıyla **E** (young esneklik modülü), **I** (Esnek kolun yüzey atalet momenti), **rho** (1.Linkin çizgisel kütle yoğunluğu), **L** (Esnek kolun uzunluğu), **Ih** (Eklem noktasının eylemsizlik momenti), **mp** (Robotun ucundaki kütle) olarak dışarıdan girilir. Daha sonra sonsuz boyutlu dinamik denklemlerin sonlu boyutlu olarak hangi mod sayısına kadar hesaplanacağı, **n** mod sayısı girilerek belirlenir. İlk olarak (18) nolu **k** frekans denklemi NEWTON metodu kullanılarak nümerik olarak çözülür. Bu denklemin çözümü 10^{-12} 'lik hassasiyet ile gerçekleştirilmiştir. Frekans denkleminin çözümü elde edildikten sonra $(n \times n)$ 'lik a_{ij} matrisinin değeri $i \neq j$, $i=j$ durumları için (19) ve (20) denklemleri yardımıyla elde edilir. Ayrıca (23) nolu denklemi oluşturan matris değerleri; (21) numaralı diagonal **Lmd**, (22) numaralı $(n \times 1)$ 'lik **b** ve (24) numaralı $(1 \times n)$ 'lik **c** matris değerleri elde edilmiş olur. (25) numaralı denklem yardımıyla **Bbar** değeri hesaplanır. Bu şekilde (26) numaralı denklemi oluşturan tüm matris değerleri elde edilmiş olur. Jordan formunda göstermek için (27) nolu denklemdeki $\bar{\eta} = M^{-1} \eta$ ifadesini kullanarak modal dönüşüm yaparsak. Son olarak sönümlenme ifadesini de katarak **n**. moda kadar (28) ve (29) nolu dinamik denklemlere ait matris değerleri elde edilmiş olur. Bu hesaplamaları yapan program Ek-1'de verilmiştir.

3. KATI - ESNEK ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ VE BENZETİM PROGRAMININ OLUŞTURULMASI

3.1 Sistemin Modellenmesi:

İlk linki katı ikinci linki ise esnek olan bir robot kolu Şekil 3.1'de görülmektedir. Katı-Esnek robot kolunun ilk eklemine u_0 torku, esnek parçanın bağlandığı ekleme ise u_1 torku uygulanmaktadır. Robotun ucunda ise M_p kütlesi bulunmaktadır.



Şekil 3.1

Kabullenmeler:

- Kollar uniform kütle ve kesite sahiptir.
- Euler-Bernoulli teoremine göre, esnek kolun bükülmesinden kaynaklanan dönme momenti ve kesme etkisi ihmal edilmiştir.
- Sistemin hareketi sadece yatay düzlem üzerinde olduğu için yerçekimi etkisi gözönüne alınmamıştır.
- Esnek kolun katı hal pozisyonundan olan sapmalarının kolun boyuna göre küçük olduğu kabul edilmiştir.

Sistemde kullanılan parametreler:

- I_{h_i} : i . Eklemin dönme eksenine etrafındaki eylemsizlik momenti (I_{h_1}, I_{h_2})
 I_0 : Katı linkin ağırlık merkezine göre eylemsizlik momenti
 I_a : Esnek linkin yüzey atalet momenti

L_1	:	Katı linkin uzunluğu
L_2	:	Esnek linkin uzunluğu
m_1	:	Katı linkin kütlesi
m_2	:	Esnek linkin kütlesi
M_1	:	Birinci ekleme ikinci ekleme bağlayan noktadaki motorun kütlesi
M_p	:	Kolun ucundaki kütle
ρ_i	:	i. linkin birim uzunluk başına kütlesi ($\rho_1 = \frac{m_1}{L_1}, \rho_2 = \frac{m_2}{L_2}$)
E	:	Esnek linkin Young esneklik modülü
$Z(x,t)$:	Esnek linkin x noktasında, t anında katı hal pozisyonundan esnemesinden dolayı oluşan katı hal pozisyonuna olan dik sapma
U_0	:	1. Ekleme uygulanan tork
U_1	:	2. Ekleme uygulanan tork
β_0	:	1. Eklemde oluşan sürtünme katsayısı
β_1	:	2. Eklemde oluşan sürtünme katsayısı

(i,j) ortogonal birim vektör çifti, $\vec{r}_1(x,t)$ katı parça üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü, $\vec{r}_2(x,t)$ esnek parça üzerindeki x noktasının pozisyon vektörü olmak üzere, dinamik denklemleri Bölüm 2.1.1 'de anlatılan Hamilton prensibi ve Lagrange denklemi kullanarak elde etmeye çalışırsak; ilk olarak sistemdeki potansiyel, kinetik ve korunmayan kuvvetler tarafından yapılan görünen işler bulunur.

3.1.1 Sistemde oluşan toplam kinetik enerji :

a.) 1.Eklemin dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji, dönme ekseninde oluşan kinetik enerji,

$$T_1 = \frac{1}{2} I h_1 \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

olarak bulunur.

b.) Katı linkin yerdeğiştirmesinden dolayı oluşan kinetik enerji,

$$\vec{r}_1(x,t) = x(\cos\theta i + \sin\theta j) \quad (2)$$

olmak üzere

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \rho_1 |\dot{\vec{r}}_1(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m_1}{L_1} \int_0^{L_1} x^2 \dot{\theta}^2 dx = \frac{1}{6} m_1 L_1^2 \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

olarak bulunur.

c.) 1.Linki, 2.Linke bağlayan noktadaki motorun yer değiştirmesinden dolayı oluşan kinetik enerji;

$$T_3 = \frac{1}{2} M_1 |\dot{\vec{r}}_1(L_1)|^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} M_1 L_1^2 \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

d.) 2.Eklemin dönme hareketinden kaynaklanan kinetik enerji;

$$T_4 = \frac{1}{2} I h_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \quad (5)$$

$\vec{r}_2(x, t)$ konum vektörü ile ilgili ifadeyi yazarsak,

$$\begin{aligned} \vec{r}_2(x, t) &= \vec{r}_1(x, t) + x \cos(\theta + \phi) \vec{i} + x \sin(\theta + \phi) \vec{j} \\ &\quad - z(x, t) \sin(\theta + \phi) \vec{i} + z(x, t) \cos(\theta + \phi) \vec{j} \\ \vec{r}_2(x, t) &= (L_1 \cos \theta + x \cos(\theta + \phi) - z(x, t) \sin(\theta + \phi)) \vec{i} \\ &\quad + (L_1 \sin \theta + x \sin(\theta + \phi) + z(x, t) \cos(\theta + \phi)) \vec{j} \end{aligned} \quad (6)$$

olarak bulunur. Bu ifadenin türevinin karesini alırsak,

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}_2(x, t)|^2 &= L_1^2 \dot{\theta}^2 + x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + z_t^2(x, t) + z^2(x, t) (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + 2x(\dot{\theta} + \dot{\phi})z_t(x, t) \\ &\quad + 2L_1 \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\phi})x \cos \phi + 2L_1 \dot{\theta}z_t(x, t) \cos \phi - 2L_1 \dot{\theta}z(x, t)(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \phi \end{aligned}$$

Esnek kolun katı hal pozisyonundan olan sapmalarının kolun boyuna göre küçük olduğu kabul edildiğinden,

$$(x^2 + z^2(x, t))(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \cong x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2$$

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}_2(x)|^2 &= L_1^2 \dot{\theta}^2 + x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + z_t^2(x, t) + 2x(\dot{\theta} + \dot{\phi})z_t(x, t) + 2L_1 \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\phi})x \cos \phi \\ &\quad + 2L_1 \dot{\theta}z_t(x, t) \cos \phi - 2L_1 \dot{\theta}z(x, t)(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \phi \end{aligned}$$

durumuna gelir.

e.) Esnek kolun yer değiştirmesinden dolayı oluşan kinetik enerji ,

$$T_5 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho_2 |\dot{\vec{r}}_2(x, t)|^2 dx \quad (7)$$

olarak bulunur.

f.) Esnek linkin ucundaki kütlenin yerdeğiştirmesinden dolayı oluşan kinetik enerji, $\delta_0(x)$: Dirac-Delta fonksiyonu olmak üzere,

$$T_5 = \frac{1}{2} M_p |\dot{\vec{r}}_2(L_2)|^2$$

$$T_5 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} M_p \delta_0(x - L_2) |\dot{\vec{r}}_2(x)|^2 dx \quad (8)$$

3.1.2 Sistemde oluşan toplam potansiyel enerjiler:

Yerçekiminin etkisi gözönüne alınmadığı için sadece esnek kolun esnemesinden dolayı bir potansiyel oluşur.

$$V_1 = \frac{1}{2} EI_a \int_0^{L_2} [z_{xx}(x, t)]^2 dx \quad (9)$$

3.1.3 Sistemde korunmayan kuvvetler tarafından yapılan görünen işler :

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= u_0 \delta \theta \\ \delta W_2 &= -\beta_0 \dot{\theta} \delta \theta \\ \delta W_3 &= u_1 \delta \phi \\ \delta W_4 &= -\beta_1 \dot{\phi} \delta \phi \\ \delta W_{nc} &= \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \delta W_4 \end{aligned} \quad (10)$$

3.1.4 Sistemin dinamik denklemlerinin ve sınır koşullarının bulunması :

Lagrange ifadesini yazarsak,

$$L = \sum_{i=1}^5 T_i - V_1$$

$$L = \frac{1}{2} I h_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m_1 L_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_1 L_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I h_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} ((\rho_2 + M_p \delta_0(x - L_2))) |\dot{\vec{r}}_2(x)|^2 dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{L_2} EI_a Z_{xx}^2(x, t) dx \quad (11)$$

Hamilton prensibini kullanırsak,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_2} \left((\rho_2 + M_p \delta_0 (x - L_2)) \left[(L_1^2 \dot{\theta} + x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + x Z_t(x, t) + L_1 Z_t(x, t) \cos \phi \right. \right. \\
& + L_1 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x \cos \phi + L_1 \dot{\theta} x \cos \phi - L_1 Z(x, t) (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \phi - L_1 \dot{\theta} Z(x, t) \sin \phi \delta \dot{\theta} \\
& + (x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + x Z_t(x, t) + L_1 \dot{\theta} x \cos \phi - L_1 \dot{\theta} Z(x, t) \sin \phi) \delta \dot{\phi} \\
& + (Z_t(x, t) + x (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + L_1 \dot{\theta} \cos \phi) \delta Z_t(x, t) - L_1 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \phi \delta Z(x, t) \\
& \left. - (L_1 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x \sin \phi + L_1 \dot{\theta} Z_t(x, t) \sin \phi + L_1 \dot{\theta} Z(x, t) (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos \phi) \delta \phi \right] dx dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_2} EI_\alpha Z_{xx}(x, t) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(Ih_1 \dot{\theta} + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \dot{\theta} + M_1 L_1^2 \dot{\theta} + Ih_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \right) \delta \dot{\theta} dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} (u_0 - \beta_0 \dot{\theta}) \delta \dot{\theta} dt + \int_{t_1}^{t_2} (u_1 - \beta_1 \dot{\phi}) \delta \dot{\phi} dt + \int_{t_1}^{t_2} Ih_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \delta \dot{\phi} dt = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. İşlemleri kolaylaştırmak için ifadelere isim verirsek;

$$E_{\dot{\theta}} = L_1^2 \dot{\theta} + x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + x Z_t(x, t) + L_1 Z_t(x, t) \cos \phi$$

$$+ L_1 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x \cos \phi + L_1 \dot{\theta} x \cos \phi - L_1 Z(x, t) (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \phi - L_1 \dot{\theta} Z(x, t) \sin \phi$$

$$E_{\dot{\phi}} = x^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + x Z_t(x, t) + L_1 \dot{\theta} x \cos \phi - L_1 \dot{\theta} Z(x, t) \sin \phi \delta \dot{\phi} + (Z_t(x, t) + x (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + L_1 \dot{\theta} \cos \phi$$

$$E_{Z_t} = Z_t(x, t) + x (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + L_1 \dot{\theta} \cos \phi$$

$$E_{\sin \phi} = -L_1 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin \phi$$

$$E_{\cos \phi} = -(L_1 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x \sin \phi + L_1 \dot{\theta} Z_t(x, t) \sin \phi + L_1 \dot{\theta} Z(x, t) (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos \phi)$$

olur.

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_2} \left((\rho_2 + M_p \delta_0 (x - L_2)) \left(E_{\dot{\theta}} \delta \dot{\theta} + E_{\dot{\phi}} \delta \dot{\phi} + E_{Z_t} \delta Z_t(x, t) + E_{\sin \phi} \delta \sin \phi + E_{\cos \phi} \delta \cos \phi \right) \right. \\
& \left. - EI_\alpha Z_{xx}(x, t) \delta Z_{xx}(x, t) \right) dx + \left(Ih_1 \dot{\theta} + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \dot{\theta} + M_1 L_1^2 \dot{\theta} + Ih_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \right) \delta \dot{\theta} \\
& + (u_0 - \beta_0 \dot{\theta}) \delta \dot{\theta} + (u_1 - \beta_1 \dot{\phi}) \delta \dot{\phi} + Ih_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \delta \dot{\phi} \Big] dt = 0 \tag{12}
\end{aligned}$$

Kısmi integrasyonu uygularsak,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{L_2} (\rho_2 + M_p \delta_0(x - L_2)) \left(\frac{-dE_{\dot{\theta}}}{dt} \right) dx - \frac{d}{dt} \left[I h_1 \dot{\theta} + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \dot{\theta} + M_1 L_1^2 \dot{\theta} + I h_2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \right] + u_0 - \beta_0 \dot{\theta} \right] \delta \theta dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{L_2} (\rho_2 + M_p \delta_0(x - L_2)) \left(\frac{-dE_{\dot{\phi}}}{dt} + E_{\phi} \right) dx + u_1 - \beta_1 \dot{\phi} - I h_2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) \right] \delta \phi dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{L_2} (\rho_2 + M_p \delta_0(x - L_2)) \left(\frac{-dE_{z_t}}{dt} + E_z \right) dx - EI_a Z_{xxxx}(x, t) \right] \delta Z(x, t) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{L_2} M_p \delta_0(x - L_2) \left(\frac{-dE_{z_t}}{dt} + E_z \right) dx + EI_a Z_{xxx}(L_2, t) \right] \delta Z(L_2, t) dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} EI_a Z_{xx}(L_2, t) \delta Z_x(L_2, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} EI_a Z_{xx}(0, t) \delta Z_x(0, t) dt
\end{aligned} \tag{13}$$

denklemini elde edilir.

İlk olarak esnek robot kolu için sınır koşullarını bulursak,

Robotun 1. Eklem kısmı sabitlendiği için $x=0$ konumunda esneme olmayacaktır bu nedenle,

$$Z(0, t) = Z_x(0, t) = 0$$

olur. $x = L_2$ konumunda esneme olduğu için $\delta Z(L_2, t)$ serbest ve $\delta Z(L_2, t)$ 'i çarpan ifadeler sıfıra eşit olmalıdır.

$$\int_0^{L_2} M_p \delta_0(x - L_2) \left(\frac{-dE_{z_t}}{dt} + E_z \right) dx + EI_a Z_{xxx}(L_2, t) = 0$$

olur.

$\delta Z_x(L_2, t)$ serbest olduğu için $\delta Z_x(L_2, t)$ 'i çarpan ifadenin sıfıra eşit olması gerekir.

$$Z_{xx}(L_2, t) = 0$$

olacaktır. Bu şekilde sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
Z(0,t) &= 0 \\
Z_x(0,t) &= 0 \\
Z_{xx}(L_2,t) &= 0 \\
Z_{xxx}(L_2,t) &= \frac{M_p}{EI_a} \left(Z_{xx}(L_2,t) + L_2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + L_1\dot{\theta}^2 \sin \phi + L_1\ddot{\theta} \cos \phi \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

olarak bulunur. Robot kolunun dinamiğini veren denklemleri bulursak, θ açısı değeri değiştiği için $\delta\theta$ (θ 'nin değişimi) serbesttir. Bir önceki eşitliğin sıfıra eşit olabilmesi için $\delta\theta$ 'i çarpan ifadenin sıfıra eşit olması gerekir.

$$\int_0^{L_2} (\rho_2 + M_p \delta_0(x - L_2)) \left(\frac{-dE_\theta}{dt} \right) dx - \frac{d}{dt} \left[Ih_1\dot{\theta} + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \dot{\theta} + M_1 L_1^2 \dot{\theta} + Ih_2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \right] + u_0 - \beta_0 \dot{\theta} = 0$$

ilgili ifadeler yerlerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}
& \left[\rho_2(L_1^2 L_2 + \frac{L_2^3}{3} + L_1 L_2^2 \cos \phi) + M_p(L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \phi + 2L_1 Z(L_2,t) \sin \phi) \right. \\
& \left. + (Ih_1 + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 + M_1 L_1^2 + Ih_2) \right] \ddot{\theta} + \\
& \left[\rho_2 \left(\frac{L_2^3}{3} + \frac{L_1 L_2^2}{2} \cos \phi \right) + M_p(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \phi + L_1 Z(L_2,t) \sin \phi) + Ih_2 \right] \ddot{\phi} \\
& - \left[\rho_2 L_1 L_2^2 \sin \phi + 2M_p L_1 L_2 \sin \phi + 2M_p L_1 Z(L_2,t) \cos \phi \right] \dot{\phi} \dot{\theta} \\
& - \left[\rho_2 \frac{L_1 L_2^2}{2} \dot{\phi} \sin \phi + 2M_p L_1 \sin \phi Z_t(L_2,t) + M_p L_1 L_2 \dot{\phi} \sin \phi + M_p L_1 \dot{\phi} \cos \phi Z(L_2,t) \right] \dot{\phi} \\
& M_p(L_2 + L_1 \cos \phi) Z_{xx}(L_2,t) - \left[\beta_0 - 2M_p L_1 \sin \phi Z_t(L_2,t) \right] \dot{\theta} - u_0 \\
& + \rho_2 \int_0^{L_2} \left[(x + L_1 \cos \phi) Z_{xx}(x,t) - (2L_1 \sin \phi \dot{\phi} - 2L_1 \dot{\theta} \sin \phi) Z_t(x,t) \right. \\
& \left. - (2L_1 \ddot{\theta} \sin \phi + L_1 \ddot{\phi} \sin \phi + 2L_1 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi + L_1 \dot{\phi}^2 \cos \phi) Z(x,t) \right] dx = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

olarak bulunur.

ϕ açısı değeri değiştiği için $\delta\phi$ (ϕ 'nin değişimi) serbesttir. (13) numaralı eşitliğin sıfıra eşit olabilmesi için $\delta\phi$ 'i çarpan ifadenin sıfıra eşit olması gerekir.

$$\int_0^{L_2} (\rho_2 + M_p \delta_0(x - L_2)) \left(\frac{-dE_{\dot{\phi}}}{dt} + E_{\phi} \right) dx + u_1 - \beta_1 \dot{\phi} - Ih_2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = 0$$

olarak bulunur. İlgili eşitlikleri yukarıdaki formülde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} & \left[\rho_2 \left(\frac{L_2^3}{3} + \frac{L_1 L_2^2}{2} \cos \phi \right) + M_p (L_2^2 + L_1 L_2 \cos \phi - L_1 Z(L_2, t) \sin \phi) + Ih_2 \right] \ddot{\theta} \\ & + \left[\frac{\rho_2 L_2^3}{3} + M_p L_2^2 + Ih_2 \right] \ddot{\phi} + \left[\frac{\rho_2 L_1 L_2^2}{2} \dot{\theta} \sin \phi + M_p L_1 L_2 \dot{\theta} \sin \phi \right. \\ & \left. + M_p L_1 \dot{\theta} \cos \phi Z(L_2, t) \right] \dot{\theta} + \beta_1 \dot{\phi} - u_1 + M_p L_2 Z_{tt}(L_2, t) \\ & + \int_0^{L_2} \rho_2 \left[x Z_{tt}(x, t) - (L_1 \ddot{\theta} \sin \phi - L_1 \dot{\theta}^2 \cos \phi) Z(x, t) \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

denklemini elde edilir. Sistemde esneme olduğu için katı hal pozisyonundan olan sapmalar değişmektedir bu nedenle $\delta Z(x, t)$ ($Z(x, t)$ 'nin değişimi) serbesttir. $\delta Z(x, t)$ 'i çarpan ifadenin sıfıra eşit olması gerekir.

$$\left[\int_0^{L_2} \rho_2 \left(\frac{-dE_{z,t}}{dt} + E_z \right) dx - EI_a Z_{xxxx}(x, t) \right] = 0$$

$$\frac{EI_a}{\rho_2} Z_{xxxx}(x, t) + Z_{tt}(x, t) = -x(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - L_1 \ddot{\theta} \cos \phi - L_1 \dot{\theta}^2 \sin \phi \quad (17)$$

olarak bulunur.

(17) numaralı denklemini $x=L_2$ için yazarak, $Z_{tt}(L_2, t)$ ifadesini (14) numaralı denklem ile belirtilmiş sınır koşulu ifadesinde yerine koyarsak

$$Z_{xxx}(L_2, t) = \frac{-M_p}{\rho_2} Z_{xxxx}(L_2, t) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& \left[-M_p L_1^2 \sin^2 \phi + 2M_p L_1 \sin \phi Z(L_2, t) - I h_1 - \frac{1}{3} m_1 L_1^2 - M_1 L_1^2 - I h_2 \right. \\
& \left. - \rho_2 L_1^2 L_2 \sin^2 \phi + \int_0^{L_2} 2\rho_2 L_1 \sin \phi Z(x, t) dx \right] \ddot{\theta} + \left[M_p L_1 \sin \phi Z(L_2, t) - I h_2 \right. \\
& \left. + \int_0^{L_2} \rho_2 L_1 \sin \phi Z(x, t) dx \right] \ddot{\phi} + \left[\rho_2 L_1 L_2^2 \sin \phi + 2M_p L_1 L_2 \sin \phi + 2M_p L_1 \cos \phi Z(L_2, t) \right. \\
& \left. + \int_0^{L_2} 2\rho_2 L_1 \cos \phi Z(x, t) dx \right] \dot{\theta} \dot{\phi} + \left[\frac{\rho_2 L_1 L_2^2}{2} \sin \phi \dot{\phi} + 2M_p L_1 \sin \phi Z_t(L_2, t) + M_p L_1 L_2 \sin \phi \dot{\phi} \right. \\
& \left. + M_p L_1 \dot{\phi} \cos \phi Z(L_2, t) + \int_0^{L_2} \rho_2 L_1 (2 \sin \phi Z_t(x, t) + \dot{\phi} \cos \phi Z(x, t)) dx \right] \dot{\phi} \\
& + \left[2M_p L_1 \sin \phi Z_t(L_2, t) - \beta_0 + \frac{\rho_2 L_1 L_2^2}{2} \sin \phi \dot{\phi} + \rho_2 L_1 L_2 \dot{\theta} \sin \phi \cos \phi \right. \\
& \left. + M_p L_1 L_2 \dot{\theta} \sin \phi + M_p L_1^2 \cos \phi \dot{\theta} \sin \phi + \int_0^{L_2} 2\rho_2 L_1 \sin \phi Z_t(x, t) dx \right] \dot{\theta} \\
& + EI_a Z_{xx}(0, t) - EI_a L_1 \cos \phi Z_{xxx}(0, t) + u_0 = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

$Z_u(x, t)$ ve $Z_u(L_2, t)$ ile ilgili ifadeleri (16) numaralı denklemde yerine koyarsak ;

$$\begin{aligned}
& \left[M_p L_1 \sin \phi Z(L_2, t) - I h_2 + \int_0^{L_2} \rho_2 L_1 \sin \phi Z(x, t) dx \right] \ddot{\theta} - I h_2 \ddot{\phi} \\
& - \left[M_p L_1 \dot{\theta} \cos \phi Z(L_2, t) + \int_0^{L_2} \rho_2 L_1 \dot{\theta} \cos \phi Z(x, t) dx \right] \dot{\theta} - \beta_1 \dot{\phi} + u_1 + EI_a Z_{xx}(0, t) = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

denklemini elde edilir.

$$Z_{uu}(x, t) + \frac{EI_a}{\rho_2} Z_{xxxx}(x, t) = -x(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - L_1 \ddot{\theta} \cos \phi - L_1 \dot{\theta}^2 \sin \phi$$

diferansiyel denkleminin çözümünün $0 < x < L_2$ aralığında x 'e ve t 'ye bağlı fonksiyonların çarpımlarının sonsuz toplamları olarak bulunabileceği kabul edildiğinde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz,

$$Z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i(x) \eta_i(t) \tag{21}$$

Bu $Z(x, t)$ ifadesini (17) numaralı kısmi diferansiyel denklemde yerine koyarsak;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i(x) \ddot{\eta}_i(t) + \frac{EI_a}{\rho_2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{(4)}(x) \eta_i(t) = -x(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - L_1 \ddot{\theta} \cos \phi - L_1 \dot{\theta}^2 \sin \phi \quad (22)$$

elde edilir.

$\mathcal{G}_i(x)$ dördüncü dereceden bir denklemin çözümü olmak üzere ilk olarak,

$$\varphi = \frac{EI_a}{\rho_2} \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

φ 'yu Z 'nin üzerine etkileyen bir operatör olarak düşünebiliriz. Burada λ_i 'ler φ operatörünün özdeğerleri, $\mathcal{G}_i(x)$ 'ler ise bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi \mathcal{G}_i(x) = \lambda_i \mathcal{G}_i(x)$$

$$\mathcal{G}_i^{(4)}(x) = \frac{\rho_2}{EI_a} \lambda_i \mathcal{G}_i(x)$$

$$\mathcal{G}_i^{(4)}(x) - \frac{\rho_2}{EI_a} \lambda_i \mathcal{G}_i(x)$$

$\frac{\rho_2}{EI_a} \lambda_i = k_i^4$ olarak alınırsa dördüncü dereceden bu denklemin çözümü,

$$\mathcal{G}_i(x) = a \cos(k_i x) + b \sin(k_i x) + c \sinh(k_i x) + d \cosh(k_i x) \quad (23)$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonu (14) 'deki sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçtiğimizde,

$$Z(0,t) = Z_x(0,t) = Z_{xx}(L_2,t) = 0$$

$$\mathcal{G}_i(x) = \cosh(k_i x) - \cos(k_i x) - H_i [\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)] \quad (24)$$

bulunur. Buradaki H_i değeri,

$$H_i = \frac{\cosh(k_i L_2) + \cos(k_i L_2)}{\sinh(k_i L_2) + \sin(k_i L_2)} \quad (25)$$

(21) nolu denklemi (18) numaralı denklemde $Z(x,t)$ yerine koyarsak,

$$\mathcal{G}_i^{(3)}(L_2) = \frac{-M_p}{\rho_2} \mathcal{G}_i^{(4)}(L_2)$$

elde edilir. (24) numaralı denklemi yukarıdaki eşitlikte yerine koyarsak, frekans denklemi;

$$1 + \cosh(k_i L_2) \cos(k_i L_2) + \frac{M_p}{m_2} k_i L_2 [\sinh(k_i L_2) \cos(k_i L_2) - \cosh \sin(k_i L_2)] = 0 \quad (26)$$

olarak bulunur. k_i ($i=1,2,\dots$) bu frekans denkleminin çözümleridir

$\mathcal{G}_i^{(4)}(x) = k_i^4 \mathcal{G}_i(x)$ ifadesini (22) numaralı denklemde yerine koyup her iki tarafı, belli bir j için $\mathcal{G}_j(x)$ fonksiyonu ile çarptığımızda,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{L_2} \mathcal{G}_i(x) \mathcal{G}_j(x) dx \right) \ddot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{L_2} \mathcal{G}_i(x) \mathcal{G}_j(x) dx \right) \eta_i(t) \frac{EI_a}{\rho_2} k_i^4 = \\ - \left(\int_0^{L_2} x \mathcal{G}_j(x) dx \right) (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - \left(\int_0^{L_2} \mathcal{G}_j(x) dx \right) (L_1 \ddot{\theta} \cos \phi + L_1 \dot{\theta}^2 \sin \phi) \end{aligned} \quad (27)$$

elde edilir.

Eğer $i \neq j$ ise ;

$$\int_0^{L_2} \mathcal{G}_i(x) \mathcal{G}_j(x) dx = \frac{-M_p}{\rho_2} \mathcal{G}_i(L_2) \mathcal{G}_j(L_2) \quad (28)$$

Eğer $i = j$ ise ;

$$\begin{aligned} \int_0^{L_2} \mathcal{G}_i(x) \mathcal{G}_j(x) dx = L_2 + \frac{(H_i^2 - 1)}{k_i} \cos(k_i L_2) \sinh(k_i L_2) - \frac{H_i}{2k_i} \cosh(2k_i L_2) \\ - \frac{(H_i^2 + 1)}{k_i} \sin(k_i L_2) \cosh(k_i L_2) + \frac{(H_i^2 + 1)}{4k_i} \sinh(2k_i L_2) \\ + \frac{2H_i}{k_i} \sin(k_i L_2) \sinh(k_i L_2) + \frac{H_i}{2k_i} \cos(2k_i L_2) + \frac{(1 - H_i^2)}{4k_i} \sin(2k_i L_2) \end{aligned} \quad (29)$$

denklemleri elde edilir. φ operatörlerinin özdeğerleri,

$$\lambda_i = \frac{EI_a}{\rho_2} k_i^4 \quad (30)$$

olmak üzere (27) numaralı denklemi oluşturan integralli ifadelerin değerlerini hesaplırsak

$$b_j = -\int_0^{L_2} x \mathcal{G}_j(x) dx$$

$$b_j = 2 \frac{[k_j L_2 (1 + \cos(k_j L_2) \cosh(k_j L_2)) - (\sinh(k_j L_2) + \sin(k_j L_2))]}{k_j^2 (\sinh(k_j L_2) + \sin(k_j L_2))} \quad (31)$$

$$c_j = \int_0^{L_2} \mathcal{G}_j(x) dx = \frac{[\sinh(k_j L_2) - \sin(k_j L_2) - H_j (\cosh(k_j L_2) + \cos(k_j L_2) - 2)]}{k_j} \quad (32)$$

olarak bulunur.

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_{ji} \ddot{\eta}_i(t) + \alpha_{ji} \lambda_i \eta_i(t)) = b_j (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + c_j (-L_1 \theta^2 \sin \phi - L_1 \ddot{\theta} \cos \phi) \quad (33)$$

$Z(x,t)$ ile ilgili ifadeleri açık şekilde yazarsak,

$$\int_0^{L_2} Z(x,t) dx = \int_0^{L_2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i(x) \eta_i(t) dx$$

$$\int_0^{L_2} Z(x,t) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \int_0^{L_2} \mathcal{G}_i(x) dx$$

$$\int_0^{L_2} Z(x,t) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i c_i$$

$$\int_0^{L_2} Z_t(x,t) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\eta}_i \int_0^{L_2} \mathcal{G}_i(x) dx$$

$$\int_0^{L_2} Z_t(x,t) dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \dot{\eta}_i$$

$$Z_{,xx}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{(2)}(0) \eta_i(t)$$

$$Z_{,xx}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2k_i^2 \eta_i$$

$$Z_{,xxx}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i^{(3)}(0) \eta_i(t)$$

$$Z_{,xxx}(0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} -2H_i k_i^3 \eta_i$$

olarak elde edilirler.

Yukarıdaki $Z(x,t)$ ile ilgili ifadeleri kullanarak (20) numaralı denklemden $\ddot{\phi}$ ifadesini çekersek;

$$\ddot{\phi} = \left[\left(L_1 \sin \phi \sum_{i=1}^{\infty} (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \eta_i - I h_2 \right) \ddot{\theta} - L_1 \dot{\theta}^2 \cos \phi \sum_{i=1}^{\infty} (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \eta_i + 2EI_a \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 \eta_i - \beta_1 \dot{\phi} + u_1 \right] / I h_2 \quad (34)$$

elde edilir.

$Z(x,t)$ ile ilgili ifadeleri kullanarak $\ddot{\theta}$ ifadesini (18) numaralı denklemden yerine koyarsak;

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left[(\rho_2 L_1 L_2^2 \sin \phi + 2M_p L_1 L_2 \sin \phi) \dot{\theta} \dot{\phi} + \left(\frac{\rho_2 L_1 L_2^2 \sin \phi \dot{\phi}}{2} + M_p L_1 L_2 \sin \phi \dot{\phi} + \beta_1 \right) \dot{\phi} \right. \\ & + (-\beta_0 + \frac{\rho_2 L_1 L_2^2 \sin \phi \dot{\theta}}{2} + \rho_2 L_1^2 L_2 \sin \phi \cos \phi \dot{\theta} + M_p L_1 L_2 \sin \phi \dot{\theta} + M_p L_1^2 \cos \phi \sin \phi \dot{\theta}) \dot{\phi} \\ & \left. - u_1 + u_0 \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(L_1 \cos \phi (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - \frac{\beta_1}{I h_2} L_1 \sin \phi \dot{\phi} + \frac{u_1 L_1 \sin \phi}{I h_2}) (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \right. \\ & + 2EI_a L_1 \cos \phi H_i k_i^3 \eta + 2L_1 \sin \phi (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sum_{i=1}^{\infty} (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \dot{\eta} \\ & - \frac{L_1^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2}{I h_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \eta_i (M_p \mathcal{G}_j(L_2) + \rho_2 c_j) \eta_j \\ & \left. + \frac{2EI_a L_1 \sin \phi}{I h_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \eta_i k_j^2 \eta_j \right] / \left[M_p L_1^2 \sin^2 \phi + I h_1 + \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \right. \\ & \left. + M_1 L_1^2 + \rho_2 L_1^2 L_2 \sin^2 \phi - \frac{L_1^2 \sin^2 \phi}{I h_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i) \eta_i (M_p \mathcal{G}_j(L_2) + \rho_2 c_j) \eta_j \right] \quad (35) \end{aligned}$$

olur.

(33) Numaralı denklemin vektör matris formunda gösterirsek;

$$a \ddot{\eta} + \beta \eta = b(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + c(-L_1 \dot{\theta}^2 - L_1 \ddot{\theta} \cos \phi) \quad (36)$$

$\beta_{\mu} = a_{\mu} \lambda_i$ olmak üzere

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)^T, b = (b_1, b_2, \dots)^T, c = (c_1, c_2, \dots)^T$ sonsuz boyutlu vektörlerdir.

$\ddot{\eta}$ matris formunda,

$$\ddot{\eta} = -a^{-1}\beta\eta + a^{-1}b(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + a^{-1}c(-L_1\dot{\theta}^2 - L_1\ddot{\theta}\cos\phi) \quad (37)$$

olarak gösterilir

3.2 Sistemin Benzetim Programının Oluşturulması:

Benzetim programı MATLAB kullanılarak oluşturulmuştur. Programda ilk olarak yeni parametre değerleri bilgisayara girilmekte veya mevcut parametre değerleri kullanılmaktadır.

Eğer yeni parametre değerlerinin girilmesi isteniyorsa sırasıyla **Ih1,Ih2** (1 ve 2. Eklem dönm eksen i etrafındaki eylemsizlik momenti), **Ia** (Esnek kolun yüzey atalet momenti), **rho1** ve **rho2** (1 ve 2. Linkin birim uzunluk başına kütlesi), **beta0**, **beta1** (1 ve 2. Eklemde oluşan sürtünme katsayısı), **L1**(Katı kolun uzunluğu), **L2** (Esnek kolun uzunluğu), **mp** (Robotun ucundaki kütle) ve **n** mod sayısı değerleri girilir. Ayrıca simülasyonun başladığı t_0 ve sonlandığı t_{final} değerleri girilir.

Newton metodunu kullanarak nümerik olarak (26) numaralı frekans denkleminin çözümü gerçekleştirilir. Bu frekans denkleminin çözümü $(n \times 1)$ 'lik k vektörün elemanları olacak şekilde değer almaktadır.

Elde edilen k vektörünün yardımıyla (25) numaralı h_i değeri ve $i = j$ için (28) numaralı denklem, $i \neq j$ için (29) numaralı denklemdeki ifadeler $(n \times n)$ 'lik a matrisin elemanları olacak şekilde değer alır.

(27) nolu denklemdeki integralli ifadelerin çözümleri bulunursa, (30) nolu denklemin değeri $(1 \times n)$ 'lik Lmd 'nin elemanı, (31) nolu denklemin değeri $(n \times 1)$ 'lik b 'nin elemanı, (32) nolu denklemin değeri c $(n \times 1)$ 'lik c 'nin elemanı olacak şekilde (27) nolu denklemdeki tüm katsayı değerleri bulunmuş olur.

Bunun dışında

$$\begin{aligned} R1 (n \times 1) & \quad R1(i) = M_p \mathcal{G}_i(L_2) + \rho_2 c_i \\ R2 (n \times 1) & \quad R2(i) = k(i)^2 \\ R3 (n \times 1) & \quad R3(i) = h_i * k(i)^3 \end{aligned}$$

olarak şekilde eşitliklerde sıkça kullanılan $R1$, $R2$, $R3$ vektör değerleri elde edilir.

$R1_{kare}$, $R12$, $R13$ $(1 \times n(n+1)/2)$ 'lik vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned} i = j \text{ için,} \\ R1_{kare} &= R1(i)^2 \\ R12 &= R1(i)R2(i) \\ R13 &= R1(i)R3(i) \end{aligned}$$

$i \neq j$ için

$$\begin{aligned} R1_{kare} &= 2R1(i)R1(j) \\ R12 &= R1(i)R2(j) + R1(j)R2(i) \\ R13 &= R1(i)R3(j) + R1(j)R3(i) \end{aligned}$$

olacak şekilde elde edilirler.

Daha sonra sistemin simülasyonunun yapılacağı aralık ve durum değişkenlerinin ilk değerleri belirlenir. Şu ana kadarki tüm parametre değerleri ve hesaplanan değerler kullanılmak üzere kode23.m altprogramına gönderilir. kode23.m altprogramı bu değerleri ve ayrıca re12.m adlı altprogramda bulunan denklemler ile ilgili ifadeleri de kullanarak Runge-Kutta algoritması yardımıyla doğrusal olmayan zamanla değişen (34), (35) ve (36) nolu dinamik denklemleri çözer. Denklemler ile ilgili ifadeleri içeren re12.m altprogramında çağrılan parametre ve değişken değerleri kullanılarak ϕ , θ ve η ile ilgili ifadeler elde edilir. Ayrıca sisteme uygulanacak kontrol girdisi de (u_0, u_1) bu bölümde yer almaktadır. Dinamik denklemlerle ilgili ifadeler elde edildikten sonra

$yd = [\dot{\theta}; \ddot{\theta}; \dot{\phi}; \ddot{\phi}; \dot{\eta}; \ddot{\eta}]$ matris değeri şeklinde çağrılan programa geri döner.

Son olarak re11.m ana programına kode23.m altprogramında hesaplanan zaman ve zamana bağlı hesaplanan nümerik değerleri içeren t ve X değerleri çağrılır. Bu iki matrisin satır sayısı dinamik denklemlerin Runge-Kutta ile çözümündeki gerekli adım sayısına eşittir. $X = [\theta; \dot{\theta}; \phi; \dot{\phi}; \eta; \dot{\eta}]$ olmak üzere teta ve fi'ye ait grafikler çizdirilir.

Robotun ucundaki sapmalar ile ilgili grafikler ise (21) numaralı denklemden yararlanılarak çizdirilmiştir. Benzetim programı Ek-2'de verilmiştir.

kode23.m altprogramı, MATLAB'de bulunan ode23.m isimli 2. ve 3. dereceden kısmi differansiyel denklemleri çözmeyi sağlayan programın üzerinde bazı değişiklikler yapılarak elde edilmiştir. Yapılan değişiklikler ise, ilk olarak kullanılan parametre değerleri re12.m isimli programda bulunmadığı için ana programdan çağrılmıştır. İşlemlerde istenilen doğruluk için tolerans değeri 10^{-6} olarak alınmıştır.

4. ÖNERİLEN KONTROL YÖNTEMİ

Bu bölümde 3. Bölümde dinamik denklemleri bulunan ve modellenen Katı-Esnek robot kolu için kontrol yöntemi geliştirilmeye çalışılmıştır. Sistemi oluşturan dinamik denklemler zamana bağlı ve doğrusal olmadıkları için analitik yöntemler kullanarak çözümlerini bulmak zordur. Bunun için Runge-Kutta algoritması kullanılarak Ek-2' deki program yardımıyla nümerik olarak çözülür. Sistemi oluşturan dinamik yapı doğrusal olmayan zamanla değişen denklemleri içermesinden dolayı kontrol tasarımı zordur.

Katı-Esnek robot kolu için yerel PD kontrolör tasarlanılmaya çalışılmıştır. Sistemin u_0 ve u_1 olmak üzere iki tane kontrol girdisi vardır.

θ_{ref} ve ϕ_{ref} : θ ve ϕ açıları için istenilen referans açı değerleri olmak üzere

$$\begin{aligned} u_0(t) &= K_{p1}(\theta - \theta_{ref}) + K_{D1}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_{ref}) \\ u_1(t) &= K_{p2}(\phi - \phi_{ref}) + K_{D2}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_{ref}) \end{aligned}$$

şeklinde PD kontrol kullanılabilir.

Burada PD kontrolörlerle yörünge izleme işlemini gerçekleştirmeyip noktadan-noktaya kontrol şeklinde kullanırsak;

bu kontrolde θ_{ref} ve ϕ_{ref} sabit olduğundan dolayı türevleri sıfıra eşit olacaktır.

Bu nedenle kullanılacak kontrol

$$\begin{aligned} u_0(t) &= K_{p1}(\theta - \theta_{ref}) + K_{D1}\dot{\theta} \\ u_1(t) &= K_{p2}(\phi - \phi_{ref}) + K_{D2}\dot{\phi} \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Geliştirilen PD kontrolör uygulanarak Ek-2' deki program yardımıyla sistemin tepkisi bulunmuştur. u_0 ve u_1 kontrolörleri ile ilgili ifadeler sistemi oluşturan dinamik denklemlerin yer aldığı re12.m adlı program içerisinde yer almaktadır. Simülasyonlar yapılırken aşağıdaki parametre değerleri kullanılmıştır [10].

$$\begin{aligned} E &= 6.90559 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ I_a &= 5.29256 \times 10^{-12} \text{ m}^4 \\ \rho_1 &= 0.5 \text{ kg/m} \\ \rho_2 &= 0.2696 \text{ kg/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= 0.6\text{m} \\
L_2 &= 0.6\text{m} \\
Ih_1 &= 10.714 \times 10^{-4} \text{kg/m}^2 \\
Ih_2 &= 5.357 \times 10^{-4} \text{kg/m}^2 \\
\beta_1 &= 0.02 \text{Nms/rad} \\
\beta_2 &= 0.01 \text{Nms/rad} \\
M_1 &= 0.25 \text{kg} \\
m_p &= 0.25 \text{kg}
\end{aligned}$$

Buradaki K_{p1} , K_{p2} , K_{D1} ve K_{D2} katsayıları, eklerde belirtilen programların çalıştırılmasıyla oluşan simülasyon grafiklerinin sonuçlarına göre sistemi kararlı yapacak ve performansını iyileştirecek en uygun değerler olarak seçilmişlerdir. Simülasyon değerleri ilk 3 mod gözönüne alınarak hesaplanmıştır. Uygun kontrol katsayı değerlerini bulmak için başlangıçta, katsayı değerleri rastgele seçilmiştir.

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= -0.1(\theta - \pi/4) - 0.9\dot{\theta} \\
u_1(t) &= -0.1(\phi - \pi/6) - 0.9\dot{\phi}
\end{aligned} \tag{1}$$

kontrolü uygulanmıştır. Elde edilen açı ve uç sapması değerleri Şekil 4.1'de görülmektedir. Bu kontrol değerleri ile θ ve ϕ yaklaşık olarak 35 saniyede referans açı değerine ulaşmış, uç sapması ise 25 saniyede sönümlenmiştir. Katsayılardaki değişim ile performanstaki değişimi görmek için ilk olarak teta ve fi'ye ait katsayıların değerlerini arttırsak ;

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= -0.2(\theta - \pi/4) - 0.9\dot{\theta} \\
u_1(t) &= -0.2(\phi - \pi/6) - 0.9\dot{\phi}
\end{aligned} \tag{2}$$

uygulandığında sistemin performansında bir iyileşme görülmüştür (Şekil 4.2). Teta ve fi yaklaşık olarak 20 saniyede istenilen açı değerlerine ulaşmıştır. Uç sapması ise 15 saniyede sönümlenmiştir. Katsayıları bir miktar daha artırdığımızda,

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= -0.45(\theta - \pi/4) - 0.9\dot{\theta} \\
u_1(t) &= -0.55(\phi - \pi/6) - 0.9\dot{\phi}
\end{aligned} \tag{3}$$

Teta ve fi açıları sıçrama olmadan 10 saniye gibi kısa bir sürede referans açı değerlerine ulaşmışlardır (Şekil 4.3). Uç sapması da yaklaşık olarak 7 saniyede sönümlenmiştir. $\dot{\theta}$ ve $\dot{\phi}$ 'e bağlı katsayı değerlerini arttırdığımızda,

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= -0.45(\theta - \pi/4) - 5\dot{\theta} \\
u_1(t) &= -0.55(\phi - \pi/6) - 10\dot{\phi}
\end{aligned} \tag{4}$$

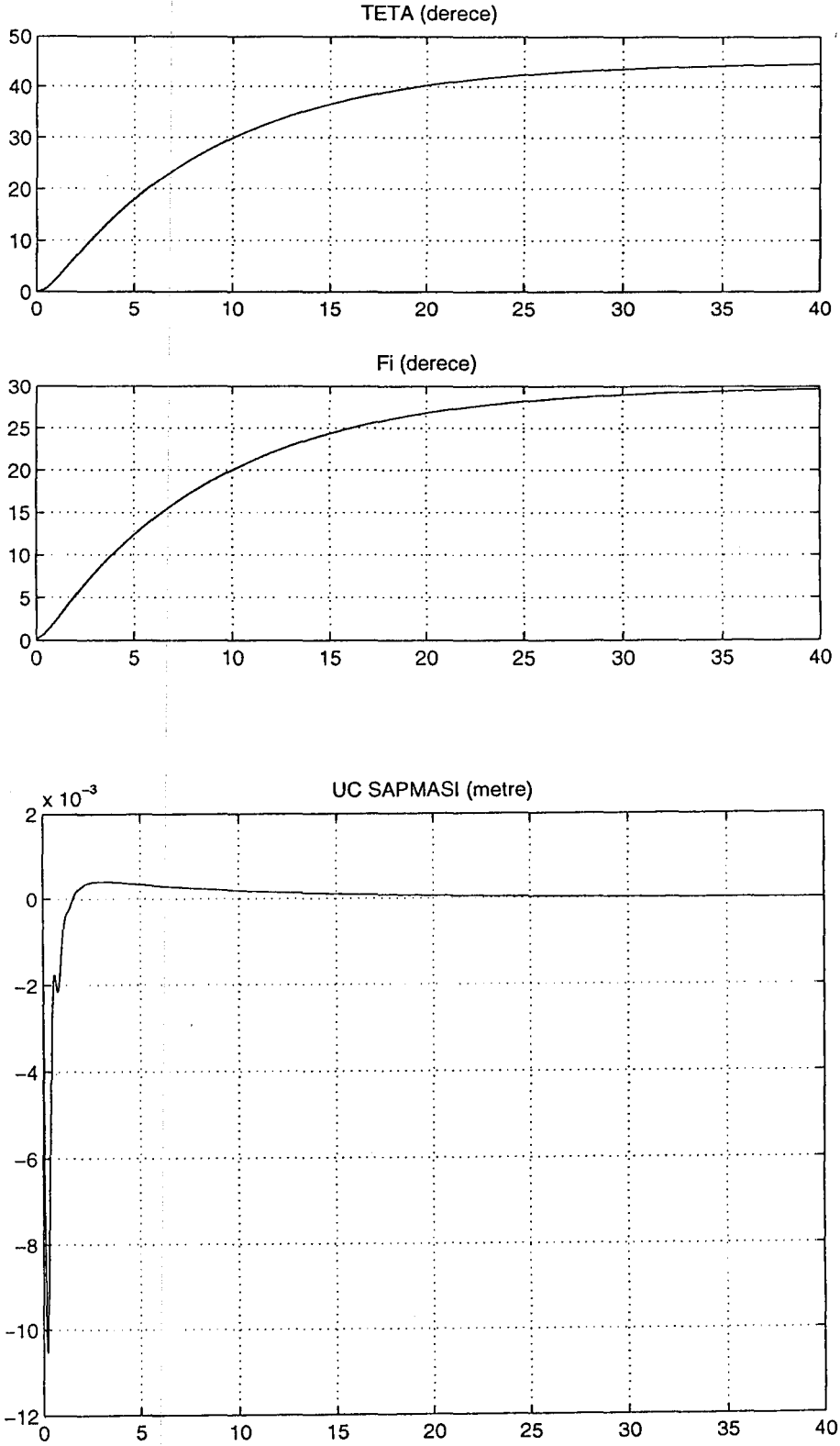
Teta ve fi açılarının referans açı değerlerine ulaşmaları gecikmiştir (Şekil 4.4). Uç sapması ise 5 saniyede sönümlenmiştir. (3). denklemdaki kontrol girdisindeki fi'nin katsayısını azaltarak kontrol uyguladığımızda,

$$\begin{aligned} u_0(t) &= -0.45(\theta - \pi/4) - 0.9\dot{\theta} \\ u_1(t) &= -0.2(\phi - \pi/6) - 0.9\dot{\phi} \end{aligned} \quad (5)$$

Sistemin performansında bir kötüleşme gözlenmiştir Şekil (4.5). teta ve fi'nin katsayılarını 1 değerine yakın seçtiğimizde,

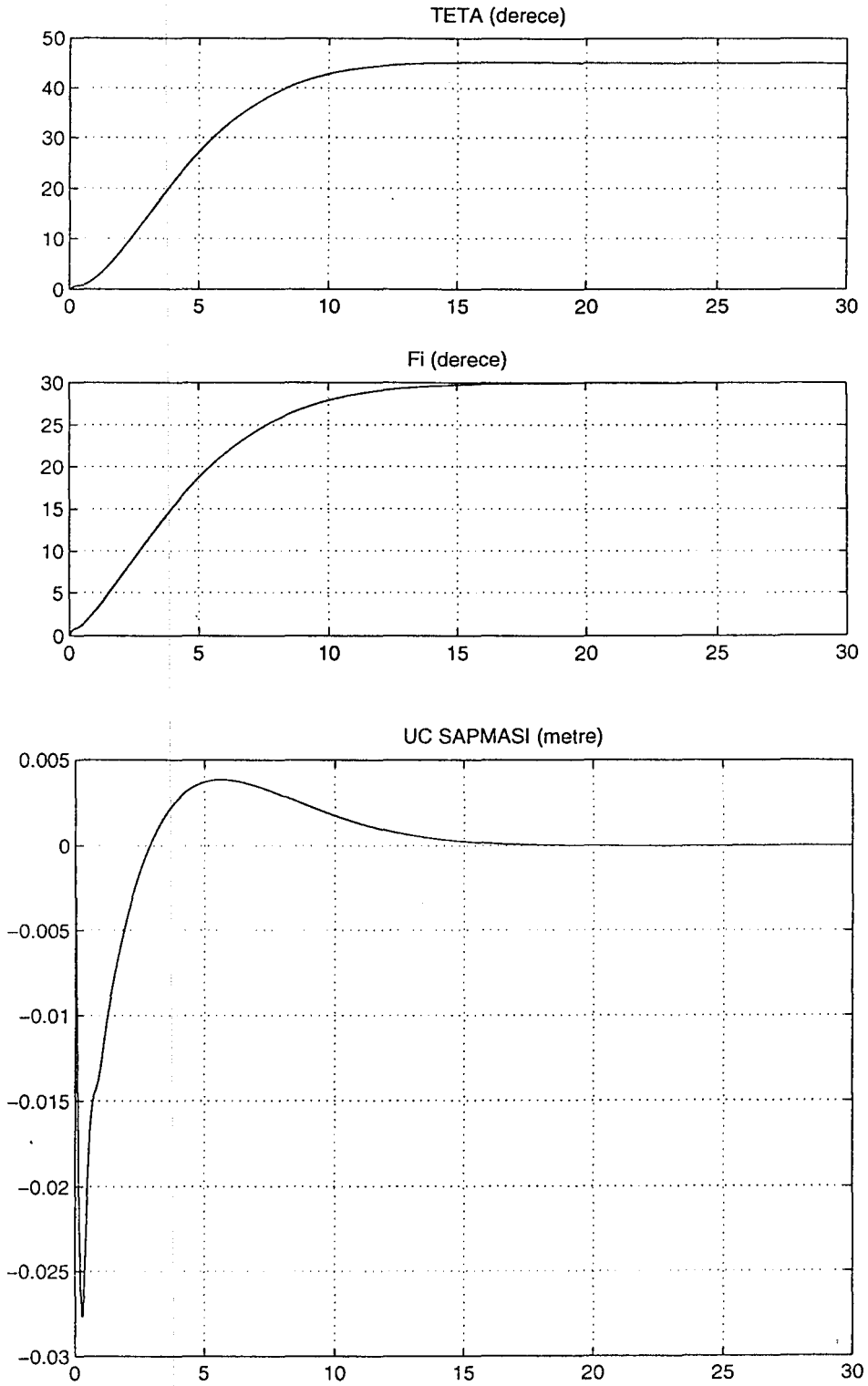
$$\begin{aligned} u_0(t) &= -0.8(\theta - \pi/4) - 0.9\dot{\theta} \\ u_1(t) &= -0.9(\phi - \pi/6) - 0.9\dot{\phi} \end{aligned} \quad (6)$$

için teta ve fi yaklaşık olarak 3 saniyede istenilen açı değerlerine ulaşmıştır (Şekil 4.6). Uç sapması ise 4 saniyede sönümlenmiştir. Bu elde edilen en iyi performans değeridir. $M_p=0.5\text{kg}$ kütle değeri için yukarıdaki kontrol uyguladığında elde edilen açı ve uç sapması ile ilgili grafikler şekil 4.7'de görülmektedir. Görüldüğü gibi kütle arttırıldığında sistemin performansında bir kötüleşme görülmektedir. Bu şekilde katsayılardaki küçük değişmelerle performanstaki değişim karşılaştırılarak uygun katsayı değerleri bulunmuş olur.



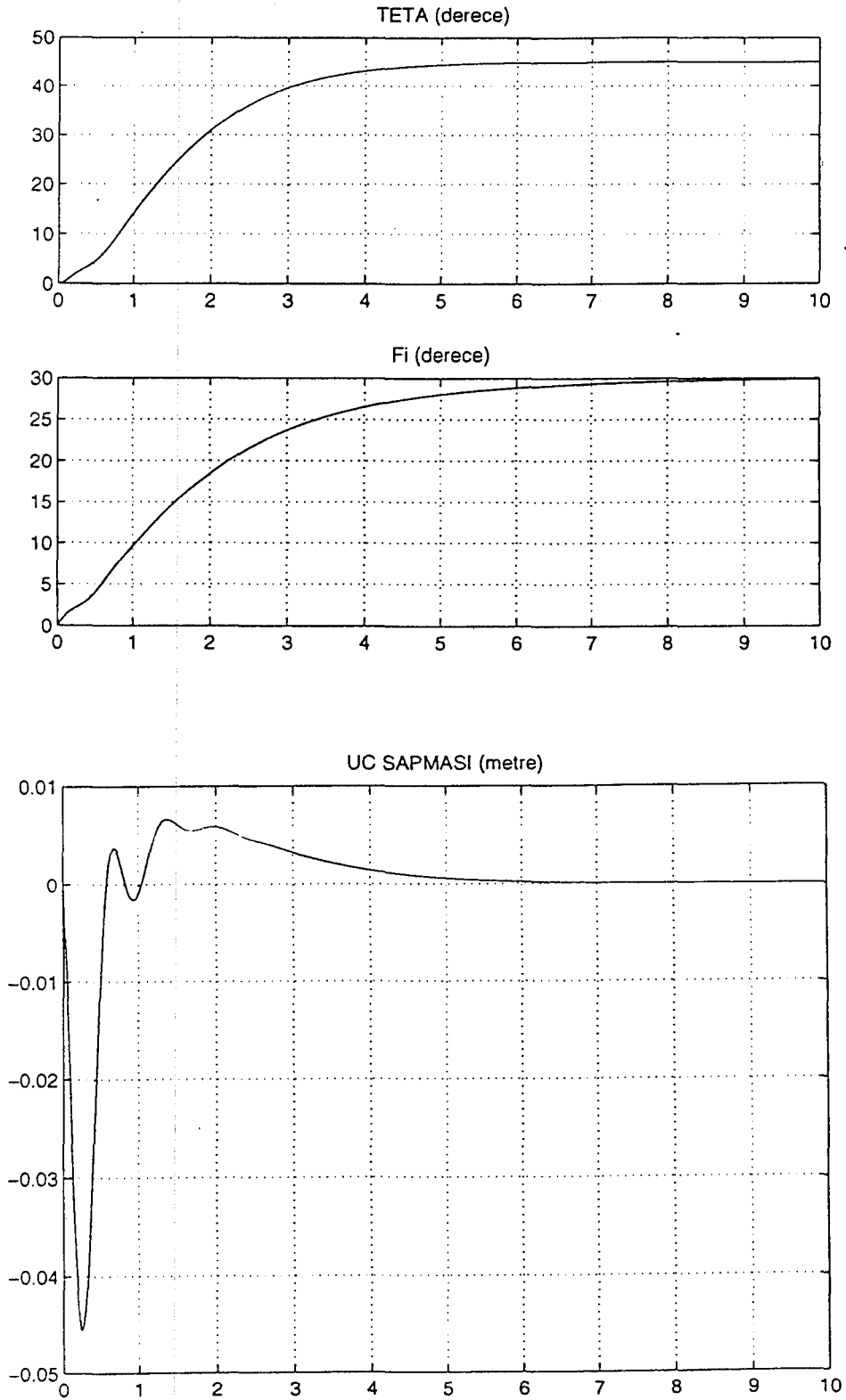
Şekil 4.1

$K_{p1} = -0.1, K_{D1} = -0.9, K_{p2} = -0.1, K_{D2} = -0.9, m_p = 0.25 \text{ kg}$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)



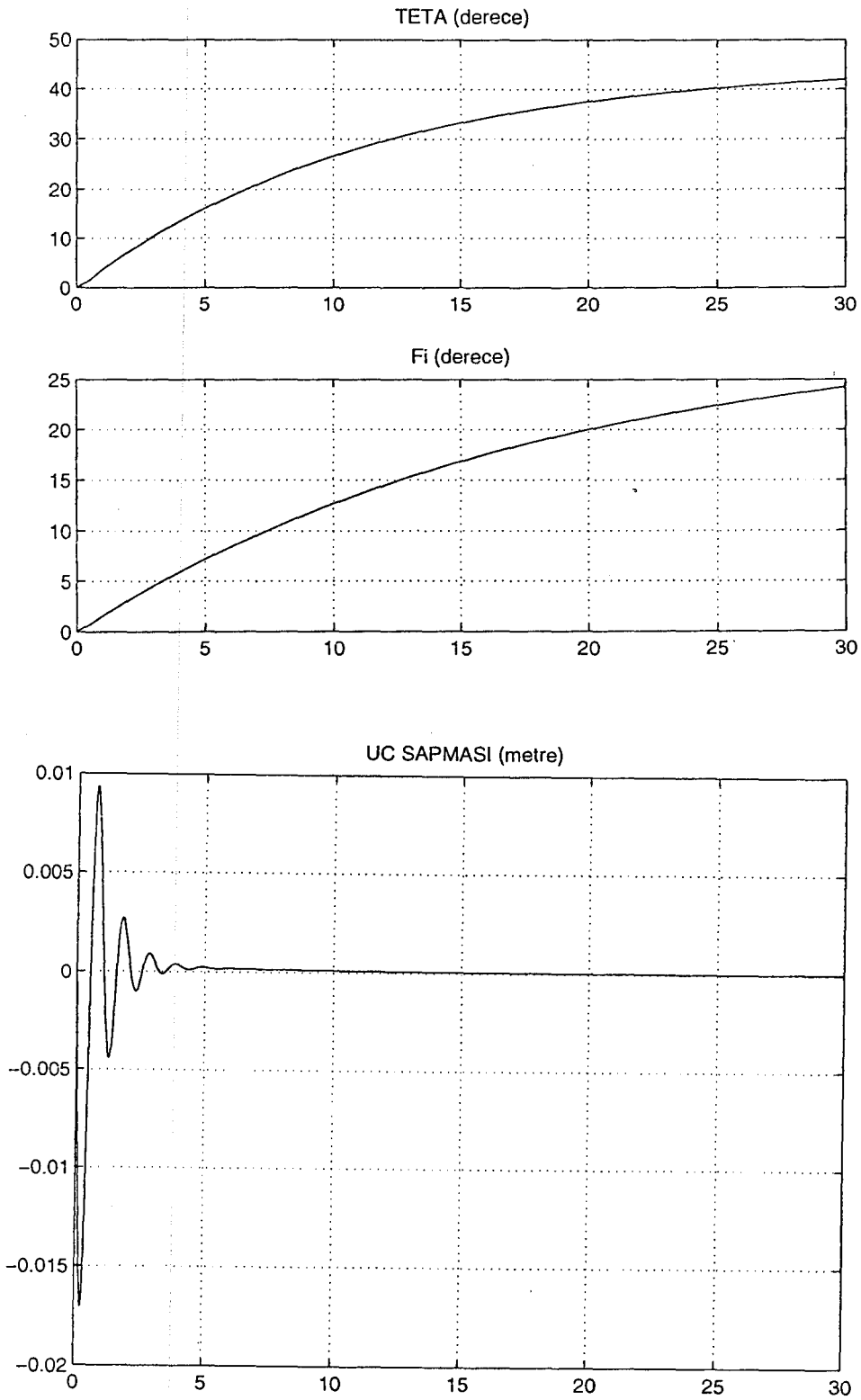
Şekil 4.2

$K_{p1} = -0.2, K_{D1} = -0.9, K_{p2} = -0.2, K_{D2} = -0.9, m_p = 0.25\text{kg}$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)



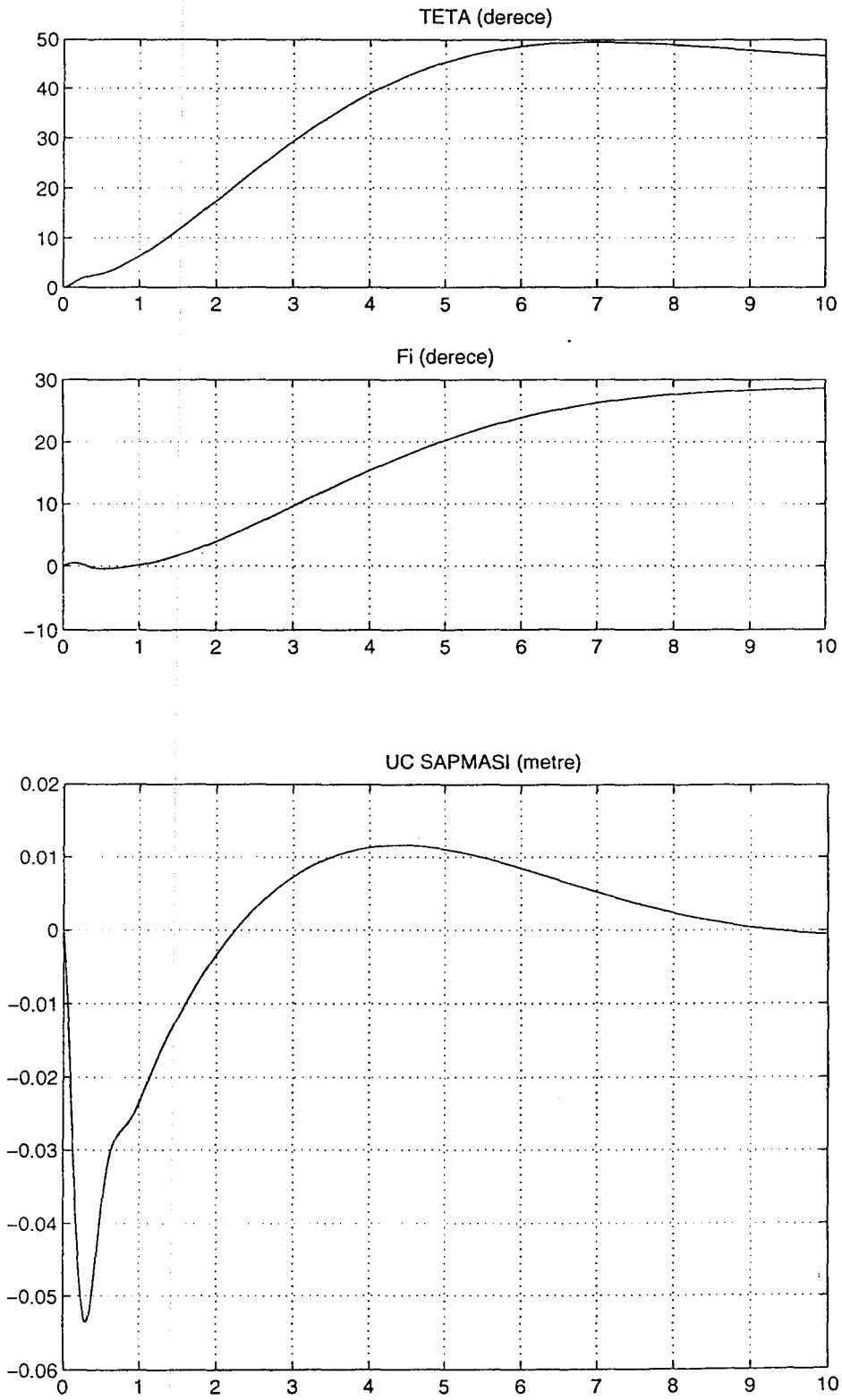
Şekil 4.3

$K_{p1} = -0.45, K_{D1} = -0.9, K_{p2} = -0.55, K_{D2} = -0.9, m_p = 0.25kg$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)



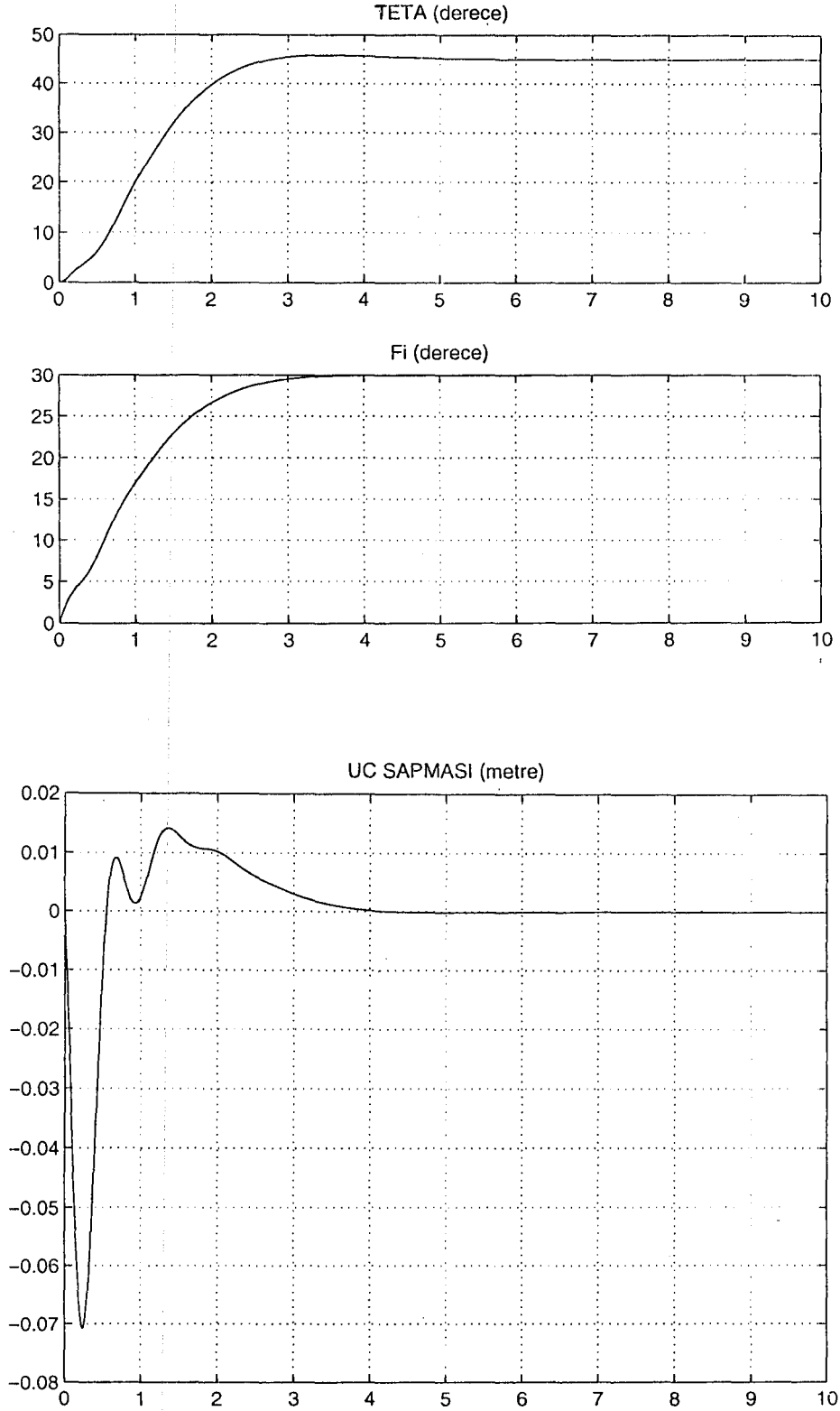
Şekil 4.4

$K_{p1} = -0.45, K_{D1} = -5, K_{p2} = -0.55, K_{D2} = -10, m_p = 0.25\text{kg}$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)



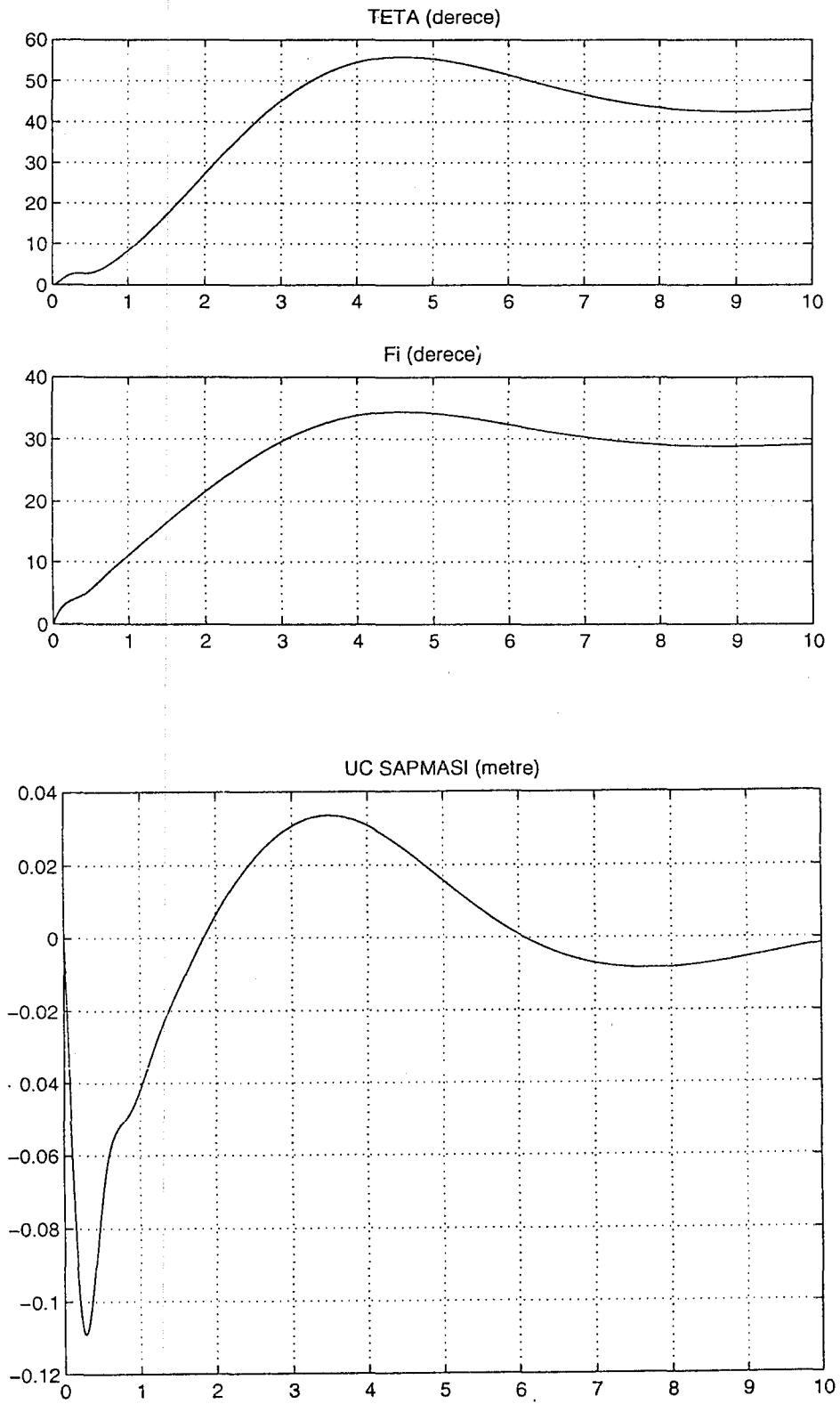
Şekil 4.5

$K_{p1} = -0.45, K_{D1} = -0.9, K_{p2} = -0.2, K_{D2} = -0.9, mp = 0.25kg$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)



Şekil 4.6

$K_{p1} = -0.8, K_{D1} = -0.9, K_{p2} = -0.9, K_{D2} = -0.9, mp = 0.25kg$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)



Şekil 4.7

$K_{p1} = -0.8, K_{D1} = -0.9, K_{p2} = -0.9, K_{D2} = -0.9, m_p = 0.5\text{kg}$
 (yatay eksen saniye cinsinden zamanı göstermektedir)

5. SONUÇ

Bu Yüksek lisans tezi çalışmasında ilk olarak tek linkli esnek yapının modellenmesi gerçekleştirilmiştir. Dinamik denklemlerin nasıl ortaya çıktığı açık bir şekilde belirtilmiş ayrıca dinamik denklemlerin MATLAB programı yardımıyla istenilen mod sayısı için oluşturulması sağlanmıştır. Bir sonraki bölümde ilk linki katı ikinci linki ise esnek olan yapının dinamik denklemleri çıkarılıp modellenmesi oluşturulmuştur.

Aynı şekilde katı-esnek robot kolu için de dinamik denklemlerin MATLAB programıyla istenilen mod sayısı için oluşturulması sağlanmış ve uygun kontrol girdisi için benzetim programı oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde ise Katı-Esnek robot koluna PD kontrol yöntemi uygulanmıştır. Burada PD kontrol belirli bir yörünge izlemek yerine, noktadan noktaya kontrol şeklinde kullanılmıştır. u_0 ve u_1 kontrolünü oluşturan katsayılar eklerde belirtilen benzetim programlarının çalıştırılması suretiyle sistemi kararlı yapacak ve performansını iyileştirecek en uygun değerler olarak seçilmişlerdir. Farklı kontrol girdileri için simülasyon sonuçları verilmiştir. Oluşturulan grafiklerin hepsinde θ 'nın 45° , ϕ 'nin ise 30° açı değerine ulaşması istenmektedir. 3. Bölümde bahsedilen Ek-2 'deki programın çalıştırılmasıyla simülasyon grafikleri elde edilmiştir. Bu benzetim programlarında sistemin dinamik yapısını oluşturun doğrusal olmayan zamanla değişen denklemler Runge-Kutta metodu kullanılarak çözülmüştür. Bu simülasyonları istenilen mod sayısında yapmak mümkündür. Uygun katsayıların bulunması katsayılarından bazılarının değerleri sabit tutulup diğer katsayı değerlerinin değiştirilmesiyle uygun performansa sahip değerler elde edilmesi şeklinde gerçekleştirilmiştir. Uygun performans ile θ ve ϕ açılarının çok kısa bir sürede istenilen referans açılara ulaşmaları ve robotun ucundaki sapsmaların çok çabuk sönmülenererek sıfıra ulaşması amaçlanmaktadır.

Bu simülasyon grafiklerine bakıldığında, $K_{p1}=-0.8$, $K_{p2}=-0.9$ ve K_{D1} , $K_{D2}=-0.9$ katsayı değerleri ve $m_p=0.25\text{kg}$ kütle değeri için iyi sonuçlar alınmıştır.

Parametre değerlerindeki değişimler tasarlanan kontrolün performansını etkilemektedir. Tasarlanan kontrolün parametre değerlerine olan bağımlılığı bir dezavantaj olmasına rağmen tasarlanan kontrolün gerçekleştirme açısından kolay olması gerçek zamanda kazanç değerleri üzerindeki küçük oynamalarla istenilen performansın sağlanmasını mümkün kılmaktadır. Sistemi oluşturan dinamik yapı, doğrusal olmayan zamana bağlı denklemlerden oluştuğu için klasik kutup ataması veya LQ dizayn gibi kontrol stratejilerinin kullanılmasına izin vermez. Bu sistemin kontrolünde uygulanabilecek yaklaşımlardan birisi de doğrusal olmayan dinamik denklemlerin belirli bir yörünge etrafında doğrusallaştırılması olabilir fakat bu durumda sistem yalnızca tanımlanan yörünge için iyi sonuçlar verecektir.

Sonuç olarak sistemi oluşturan yapının karmaşıklığından ve sistem parametre değerlerinin tam olarak bilinmemesinden dolayı sistem üzerinde birçok belirsizlik mevcuttur. Bu da sistemin tam olarak gürbüz bir şekilde kontrol edilmesini zorlaştırmaktadır. Bunun yanında sistemi simüle eden programların çalışma sürelerinin uzun olması sistem üzerindeki kontrol çalışmalarını zorlaştırmaktadır.

KAYNAKÇA

- [1]. LOW, K.H., "A Systematic Formulation of Dynamic Equations For Robot Manipulators with Elastic Links", *Int. J. Robotics*, vol. 4, pp. 435-456, 1987.
- [2]. SAKAWA, Y., MATSUNO, F., and FUKUSHIMA, S., "Modelling and Feedback Control of a Flexible Arm", *Int. J. Robotics*, vol.2, pp.453-472, 1985 .
- [3]. İFTAR, A., and ÖZGÜNER, Ü., "Modelling of Uncertain Dynamics for Robust Controller Design in State Space", *Automatica*, vol.27, pp.141-146, 1991.
- [4]. İFTAR, A., "Robust Controller Design for Flexible Robot Manipulators: An Optimal Output Feedback Controller Design Approach", in *Proceedings of 3rd IEEE Conference on Control Applications*, Glasgow, Scotland, August 1994.
- [5]. MATSUNO, F., ASANO, T and SAKAWA, Y., "Modelling and Quasi-Static Hybrid Position/Force Control of Constrained Planar Two-Link Flexible Manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.10, no.3, 1994.
- [6]. KHORRAMİ, F., JAIN, S., and TZES, A., "Experiments on Rigid Body-Based Controllers with Input Preshaping for a Two-Link Flexible Manipulator", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.10, no.3, 1994 .
- [7]. LIU, K., KUJATH, M.R., "Trajectory Optimization For a Two Link Flexible Manipulator", *Int. J. Robotics and Automation*, vol.11, no.2, 1996.
- [8]. TIMESHENKO, S., YOUNG, D.H., and WEAWER, W., *Vibration Problems in Engineering*. Wiley, New York 1974.
- [9]. MEIROVITCH, L., *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York 1990.
- [10]. ÖZEL, K., *Esnek Bir Robot Kolunun Modellenmesi ve Kontrolü*, Bitirme ödevi, Osmangazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü., Eskişehir, 1995.

EKLER

EK-1**DİNAMİK MODELİ VEREN MATLAB PROGRAMI**

```
clear all

format long e

clc

E=input('E degerini giriniz..?')

l=input('l degerin giriniz...?')

rho=input('rho degerini giriniz....?')

L=input('L degerini giriniz....?')

lh=input('lh degerini giriniz....?')

mp=input('please enter mp value (kg)....?');

m=rho*L;

k=input('mod sayisini giriniz...?');

kn=k;

da=input('sonumleme degerini giriniz.....?');

f=zeros(1,k);

x1=0;
s=1;

while s<=k,

y1=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));

x1=x1+0.5;
y2=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));
```

```

while (y1*y2)>0,

y1=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));
x1=x1+0.5;
y2=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));

end

f(1,s)=x1;

s=s+1;

end

k=zeros(kn,1);

% ***** Determination of the K from the frequency equation
% ***** by helping NEWTON method

for j=1:kn,

x=f(j);

a1=1+cosh(x)*cos(x)+(mp/m)*x*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));

b=sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x)+(mp/m)*(sinh(x)*cos(x) ...
-cosh(x)*sin(x)-2*x*sinh(x)*sin(x));

t=x-a1/b;
while abs(t-x)>=1e-12,

x=t;

a1=1+cosh(x)*cos(x)+(mp/m)*x*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));

b=sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x)+(mp/m)*(sinh(x)*cos(x) ...
-cosh(x)*sin(x)-2*x*sinh(x)*sin(x));

t=x-a1/b;
end
k(j)=x
end

k=k/L;

```

```

for i=1:kn;
for j=1:kn;

x=k(i)*L;
y=k(j)*L;

hi=(cosh(x)+cos(x))/(sinh(x)+sin(x));

mj=(cosh(y)+cos(y))/(sinh(y)+sin(y));

if i==j;

a(i,j)=L+(1/k(i))*(2*hi*sinh(x)*sin(x) ...
-((hi)^2+1)*sin(x)*cosh(x) ...
+((hi)^2-1)*sinh(x)*cos(x) ...
+sinh(2*x)*(hi^2+1)/4 ...
+sin(2*x)*(1-hi^2)/4 ...
+hi*cos(2*x)/2 ...
-hi*cosh(2*x)/2);

else

qi=cosh(x)-cos(x)-hi*(sinh(x)-sin(x));
qj=cosh(y)-cos(y)-mj*(sinh(y)-sin(y));

a(i,j)=-mp*qi*qj/rho;

end
end
end

k=k';

[one,n]=size(k);lmd=zeros(one,n);w=lmd;c=w;b=c;

for i=1:n,x=k(i)*L,lmd(i)=(E*I/rho)*k(i)^4;

w(i)=sqrt(lmd(i));

c(i)=2*E*I*k(i)^2;
b(i)=(2*x*(1+cosh(x)*cos(x))- ...
2*(sin(x)+sinh(x)))/(Ih*k(i)^2*(sin(x)+sinh(x)));

end

```

```

Lmd=diag(lmd);
Omg=diag(w);

damp=da*eye(n);

Bbar=a*Lmd;

P2=inv(a)*(Bbar-b'*c);

n1=inv(a)*b';

[v,d]=eig(P2);

Abar=inv(v)*P2*v;

aaa=diag(Abar);

Abar=diag(aaa);

bbar=inv(v)*n1;

cbar=c*v;

T=-2*damp*sqrt(Abar);

A=[zeros(n,n) eye(n);-Abar T];
eigA=eig(A);

B=[zeros(n,one);bbar];

C=[cbar zeros(one,n)];

D=[0];

tzeros=tzero(A,B,C,D);

W=logspace(0,4,1000);

[mg,ph]=bode(A,B,C,D,1,W);

figure(1),subplot(211),loglog(W,mg);
title('Amplitude from U to Y'),grid
figure(1),subplot(212),semilogx(W,ph);
xlabel('frekans w(r/s)')
title('Phase from U to Y'),grid

```

EK-2

KATI -ESNEK ROBOT KOLU BENZETİM PROGRAMI

RE11. M programı

```
clear all

format long e
clc

secim=input('yeni parametre degerleri icin "0", mevcut paremetre degerleri icin "1"
giriniz..? ');

if secim==0,

E=input('E degerini giriniz (N/m^2)...?')

Ih1=input('1.Eklemin donme ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti (kg/m)...?')
Ih2=input('2.Eklemin donme ekseni etrafındaki eylemsizlik momenti (kg/m)...?')

Ia=input('Esnek kolun yuzey atalet momenti (m^4)...?')

rho1=input('1.linkin birim uzunluk basina kutlesi (kg/m)...?')
rho2=input('2.linkin birim uzunluk basina kutlesi (kg/m)...?')

beta0=input('1.eklemde olusan surtunme kuvveti...?')
beta1=input('2.eklemde olusan surtunme kuvveti...?')

L1=input('Rigid kolun uzunlugu (m)...?')
L2=input('Esnek kolun uzunlugu (m)...?')

to=input(' Simülasyon aralığının ilk değerini giriniz...?')
tfinal= input(' Simülasyon aralığının son değerini giriniz...?')

M1=input('1.Ekleme 2.Ekleme baglayan noktadaki motorun kutlesi (kg)...?')

mp=input('Robotun ucundaki kute degerini giriniz (kg).....');
```



```
else
```

```
% *****PARAMETRELER*****
```

```
E=6.90559*1e10;Ia=5.292656*1e-12;
```

```
rho1=0.5;rho2=0.2696;L1=0.6;L2=0.6;m1=rho1*L1;m2=rho2*L2;
```

```
mp=0.25;
```

```
Ih2=5.357*1e-4;beta0=0.01*2;beta1=0.01;Ih1=Ih2*2;M1=0.25;
```

```
to=0; tfinal=15;
```

```
end
```

```
k=input('mod sayisini giriniz...');
```

```
kn=k;
```

```
f=zeros(1,k);
```

```
x1=0;
```

```
s=1;
```

```
while s<=k,
```

```
y1=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m2)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));
```

```
x1=x1+0.5;
```

```
y2=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m2)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));
```

```
while (y1*y2)>0,
```

```
y1=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m2)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));
```

```
x1=x1+0.5;
```

```
y2=1+cosh(x1)*cos(x1)+(mp/m2)*x1*(sinh(x1)*cos(x1)-cosh(x1)*sin(x1));
```

```
end
```

```
f(1,s)=x1;
```

```
s=s+1;
```

```
end
```

```

k=zeros(kn,1);

% ***** Determination of the K from the frequency equation
% ***** by helping NEWTON method

for j=1:kn,

x=f(j);

a1=1+cosh(x)*cos(x)+(mp/m2)*x*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));

b=sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x)+(mp/m2)*(sinh(x)*cos(x) ...
-cosh(x)*sin(x)-2*x*sinh(x)*sin(x));

t=x-a1/b;

while abs(t-x)>=1e-12,

x=t;

a1=1+cosh(x)*cos(x)+(mp/m2)*x*(sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x));

b=sinh(x)*cos(x)-cosh(x)*sin(x)+(mp/m2)*(sinh(x)*cos(x) ...
-cosh(x)*sin(x)-2*x*sinh(x)*sin(x));

t=x-a1/b;

end

k(j)=x

end

k=k/L2;

for i=1:kn;

for j=1:kn;

x=k(i)*L2;

y=k(j)*L2;

hi=(cosh(x)+cos(x))/(sinh(x)+sin(x));

```

```
mj=(cosh(y)+cos(y))/(sinh(y)+sin(y));
```

```
if i==j;
```

```
a(i,j)=L2+(1/k(i))*(2*hi*sinh(x)*sin(x) ...
-((hi)^2+1)*sin(x)*cosh(x) ...
+((hi)^2-1)*sinh(x)*cos(x) ...
+sinh(2*x)*(hi^2+1)/4 ...
+sin(2*x)*(1-hi^2)/4 ...
+hi*cos(2*x)/2 ...
-hi*cosh(2*x)/2);
```

```
else
```

```
qi=cosh(x)-cos(x)-hi*(sinh(x)-sin(x));
```

```
qj=cosh(y)-cos(y)-mj*(sinh(y)-sin(y));
```

```
a(i,j)=-mp*qi*qj/rho2;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
k=k';
```

```
[one,n]=size(k);
```

```
lmd=zeros(one,n);w=-lmd;
```

```
b=zeros(n,one);c=b;R1=b;R2=R1;R3=R1;
```

```
for i=1:n,
```

```
x=k(i)*L2;
```

```
hi=(cosh(x)+cos(x))/(sinh(x)+sin(x));
```

```
b(i)=2*[x*(1+cos(x)*cosh(x))-(sinh(x)+sin(x))]/[k(i)^2*(sinh(x)+sin(x))];
```

```
c(i)=[sinh(x)-sin(x)-hi*(cosh(x)+cos(x)-2)]/k(i);
```

```

ct(i)=cosh(x)-cos(x)-hi*(sinh(x)-sin(x))
qi=cosh(x)-cos(x)-hi*(sinh(x)-sin(x));
R1(i)=mp*qi+rho2*c(i);
R2(i)=k(i)^2;
R3(i)=hi*k(i)^3;
lmd(i)=(E*Ia/rho2)*k(i)^4;
end
invab=inv(a)*b;
invac=inv(a)*c;
invabar=diag(lmd);
%*** R1^2, R12 ,R13 vektorlerinin hesaplanmasi
R1kare=zeros(1,n*(n+1)/2);
R12=R1kare;
R13=R1kare;
s=1;
for i=1:n,
    for j=i:n,
        if i==j,
R1kare(s)=R1(i)^2;
R12(s)=R1(i)*R2(i);
R13(s)=R1(i)*R3(i);
else
R1kare(s)=2*R1(i)*R1(j);

```

```

R12(s)=R1(i)*R2(j)+R1(j)*R2(i);
R13(s)=R1(i)*R3(j)+R1(j)*R3(i);
    end

s=s+1;
    end

end

x0=[0;0;0;0;zeros(n,1);zeros(n,1)];

[t,x]=kode23(t0,tfinal,x0,E,lh1,lh2,la,rho2,beta0, ...
    beta1,L1,L2,M1,mp,m1,n,R1,R2,R3,invab,invac,invabar, ...
    R1kare,R12,R13);

figure(1),subplot(211),plot(t,x(:,1)),grid,title('TETA (derece)');
subplot(212),plot(t,x(:,3)),grid,title('Fi (derece)');

print t1tf.ps

tdd=0;

for i=1:n,

tdd= tdd+ct(i)*x(:,i+4);

end

figure(2),plot(t,tdd),grid,title('TIP DEVIATION (metre)');

print t1td.ps

```

kode23.m Programı

```
function [tout,yout]=kode23(t0,tfinal,y0,E,Ih1,Ih2,Ia,rho2,beta0, ...
    beta1,L1,L2,M1,mp,m1,n,R1,R2,R3,invab,invac,invabar, ...
    R1kare,R12,R13)
```

```
% Initialization
```

```
pow = 1/3;
tol = 1.e-6;
trace = 0;
t = t0;
```

```
hmax = (tfinal - t)/16;
```

```
h = hmax/8;
```

```
y = y0(:);
chunk = 128;
```

```
tout = zeros(chunk,1);
```

```
yout = zeros(chunk,length(y));
```

```
kk= 1;
```

```
tout(kk) = t;
```

```
yout(kk,:) = y.');
```

```
if trace
    clc, t, h, y
end
```

```
% The main loop
```

```
while (t < tfinal) & (t + h > t)
```

```
    if t + h > tfinal, h = tfinal - t; end
```

```
% Compute the slopes
```

```

s11=re12(t, y,E,lh1,lh2,la,rho2,beta0, ...
beta1,L1,L2,M1,mp,m1,n,R1,R2,R3,invab,invac,invabar, ...
R1kare,R12,R13);

s11= s11(:);

s2=re12(t+h, y+h*s11,E,lh1,lh2,la,rho2,beta0, ...
beta1,L1,L2,M1,mp,m1,n,R1,R2,R3,invab,invac,invabar, ...
R1kare,R12,R13);

s2 = s2(:);

s3=re12(t+h/2, y+h*(s11+s2)/4,E,lh1,lh2,la,rho2,beta0, ...
beta1,L1,L2,M1,mp,m1,n,R1,R2,R3,invab,invac,invabar, ...
R1kare,R12,R13);

s3 = s3(:);

% Estimate the error and the acceptable error

delta = norm(h*(s11 - 2*s3 + s2)/3,'inf');

tau = tol*max(norm(y,'inf'),1.0);

% Update the solution only if the error is acceptable

if delta <= tau

    t = t + h;

    y = y + h*(s11 + 4*s3 + s2)/6;

    kk = kk+1;

    if kk > length(tout)

        tout = [tout; zeros(chunk,1)];

        yout = [yout; zeros(chunk,length(y))];

    end

    tout(kk) = t;

```

```
yout(kk,:) = y.>';
end
if trace
    home, t, h, y
end
% Update the step size
if delta ~= 0.0
    h = min(hmax, 0.9*h*(tau/delta)^pow);
end
end
if (t < tfinal)
    disp('Singularity likely.')
    t
end
tout = tout(1:kk);
yout = yout(1:kk,:);
```


RE12.M programı

```

function yd=re12(t,x,E,lh1,lh2,la,rho2,beta0, ...
    beta1,L1,L2,M1,mp,m1,n,R1,R2,R3,invab,invac,invabar, ...
    R1kare,R12,R13)

% *****TETA double dot ifadesi
% TETA double dat=[A10+B10*R1n+C10*Hi*ki^3*n+D10*R1*ndot ...
% +E10*(R1n)^2+F10*R1*n*ki^2*n]/[G10-H10*[R1n]^2];

u0=-0.5*(x(1)-pi/4)-10*x(2);

u1=-0.5*(x(3)-pi/6)-10*x(4);

A10=(rho2*L2+2*mp)*L1*L2*sin(x(3))*x(2)*x(4)+(rho2*L1*L2^2*sin(x(3))*x(4)/2
...
+mp*L1*L2*sin(x(3))*x(4)+beta1)*x(4)+(-beta0+rho2*L1*L2^2*sin(x(3))*x(2)/2 ...
+rho2*L1^2*L2*sin(x(3))*cos(x(3))*x(2)+mp*L1*L2*sin(x(3))*x(2) ...
+mp*L1^2*cos(x(3))*sin(x(3))*x(2))*x(2)-u1+u0;

B10=L1*cos(x(3))*(x(2)+x(4))^2-beta1*L1*sin(x(3))*x(4)/lh2 ...
+u1*L1*sin(x(3))/lh2;

C10=2*E*la*L1*cos(x(3));

D10=2*L1*sin(x(3))*(x(2)+x(4));

E10=-L1^2*sin(x(3))*cos(x(3))*x(2)^2/lh2;

F10=2*E*la*L1*sin(x(3))/lh2;

G10=mp*L1^2*(sin(x(3)))^2+lh1+m1*L1^2/3+M1*L1^2+rho2*L1^2*L2*(sin(x(3)))^2

H10=L1^2*(sin(x(3)))^2/lh2;

tdd=0;

nu1=0;nu2=0;nu3=0;nu4=0;nu5=0;

for i=1:n,

nu1=nu1+(B10*R1(i)+C10*R3(i))*x(i+4);

```

```

nu2=nu2+D10*R1(i)*x(n+i+4);
end
s=1;

for i=1:n,
for j=i:n,

nu3=nu3+(E10*R1kare(s)+F10*R12(s))*x(i+4)*x(j+4);

nu4=nu4+H10*R1kare(s)*x(i+4)*x(j+4);

s=s+1;

end
end

tdd=(A10+nu1+nu2+nu3)/(G10-nu4);

fdd=0;
for i=1:n,

fdd=fdd+((L1*sin(x(3))*tdd-L1*cos(x(3))*x(2)^2)*R1(i)+2*E*la*R2(i))/lh2*x(i+4);

end

fdd=fdd-tdd-beta1*x(4)/lh2+u1/lh2;

nnd=zeros(n,1);

nd=nnd;

for i=1:n,
for j=1:n,

nnd(i)=nnd(i)-invabar(i,j)*x(4+j);

end
end

nnd=nnd+invab*(tdd+fdd)+invac*(-L1*x(2)^2*sin(x(3))-L1*tdd*cos(x(3)));

for i=1:n,
nd(i)=x(4+i+n);
end
yd=[x(2);tdd;x(4);fdd;nd;nnd];

```