ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Doktora Tezi

Başak BARAK

Eskişehir 2018

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Başak BARAK

DOKTORA TEZİ

Matematik Eğitimi Doktora Programı

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman Prof. Dr. Tangül KABAEL

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Mart 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Başak BARAK'ın "Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı tezi 26.02.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof.Dr. Tangül KABAEL	
Üye	: Prof.Dr. Yüksel DEDE	
Üye	: Doç.Dr. Tuba ADA	
Üye	: Yard.Doç.Dr. Serap CAVKAYTAR	
Üye	: Yard.Doç.Dr. Figen UYSAL	

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Başak BARAK
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mart 2018
Danışman: Prof. Dr. Tangül KABAEL

Bu araştırmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının fonksiyon ve sayılar konusu bağlamında ispat yapma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda nitel olarak desenlenen araştırmada maksimum çeşitleme örnekleme yöntemi kullanılarak ilköğretim matematik öğretmenliği programında okumakta olan tüm sınıf düzeylerinden ve ilköğretim matematik öğretmenliği programına yeni başlamış öğretmen adayları arasından her sınıf düzeyinde altı katılımcı olmak üzere toplam otuz katılımcı seçilmiştir. Klinik görüşmelerde katılımcılardan fonksiyonlar ve sayılar konusu bağlamında verilen önermeleri ispatlamaları istenmiştir. Ayrıca katılımcıların sayılar konusundaki ispat soruları üzerinden ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri de araştırılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre katılımcıların sınıf düzeyi arttıkça katılımcıların ispatın formal-retorik kısmını oluşturmada ve problem merkezli kısmını çözmede daha başarılı oldukları ve ispatlama becerilerinin geliştiği görülmüştür. Ancak katılımcıların temel kavramlara ilişkin önermeleri ispatlama süreçlerinin istenen düzeyde olmadığı ortaya çıkmıştır. Her sınıf düzeyindeki katılımcıların akademik başarıları ile ispatlama süreçleri arasında bir ilişki olmadığı bulunmuştur. Ayrıca katılımcıların ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri sınıf düzeyi arttıkça gelişim göstermiş ancak her sınıf düzeyinde ortaokul düzeyinde ispat yapılamayacağını ifade eden katılımcı olduğu görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: İspat, İspatlama, İspatın formal-retorik kısmı, İspatın problem-merkezli kısmı, Ortaokul matematik öğretmen adayı.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF PRE-SERVICE MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' PROVING PROCESSES

Başak BARAK
Department of Mathematics Education
Anadolu University, Institute of Educational Sciences, March 2018
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tangül KABAEL

In this research, it was aimed to examine pre-service middle school mathematics teachers' proving processes in the context of function and numbers. For this purpose, the research designed qualitatively and using maximum variation sampling method, six participants totaly thirty were selected from all grades of elementary school mathematics teacher education program and new beginners to this program. Clinical interviews were conducted with thirty participants in the context of function concept and numbers. In addition, the participants' views about proving in the middle school grades in the context of clinical interviews' proof tasks on numbers were examined. The results of the research showed that the proving processes of the participants was developing through the first grades to last grades and the participants were successful composing the proof's formal-rhetorical part of proof and solving the proof's problem-centered part. However, the research revealed that the participants proving processes on propositions about basic concepts were not at desired level. In addition, there is no relationship between the participants' academic success and proving processes in each grades of elementary teacher education program. Moreover, it was seen that the participants' views about proving in the middle school grades developed through the first grades to last grades. Nevertheless, it was found that there were at least one participant who stated that proof was not appropiate for middle grade students.

Keywords: Proof, Proving, Formal-rhetorical part of a proof, Problem-centered part of a proof, Pre-service middle school mathematics teacher.

TEŞEKKÜR

Matematiksel düşünmenin gelişimi için oldukça önemli olan ispatlama, okulöncesinden üniversiteye kadar her düzeyde kişilerin yaşadıkları deneyimlerle geliştirdikleri oldukça önemli bir beceridir. Bu becerinin geliştirilmesinde en büyük katkıyı getirecek olan da şüphesiz ki matematik öğretmenleridir. Her düzeydeki matematik öğretmeninin ispatlama becerisinin gelişmiş olması ve öğretim yaptığı düzeyde de bu beceriyi nasıl geliştireceğine ilişkin bilgi sahibi olması beklenmektedir. Bu çalışmada ilköğetim matematik öğretmen adaylarının ispatlama süreçleri incelenmiştir.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında pek çok kişinin desteği ve katkısı olmuştur. Öncelikle Anadolu Üniversitesi'ne çalışmaya başladığımdan bugüne kadar üzerimde büyük emeği olan, engin bilgisinden faydalandığım, her konuda ve her zaman bana yardımcı olan, yol gösteren, çok kıymetli tez danışmanım sayın Prof. Dr. Tangül KABAEL'e akademik ve manevi desteğini benden esirgemediği için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora ders dönemi ve doktora tez izleme sürecim boyunca değerli görüş ve önerileriyle tezime katkıda bulunan ve her zaman tüm içtenliği ile yardımcı olan değerli hocam sayın Doç. Dr. Tuba ADA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora tez izleme sürecim boyunca ilgisi, anlayışı, yapıcı eleştirileri ve önerileri ile çalışmama katkı sağlayan değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Serap CAVKAYTAR'a tezime olan katkıları için çok teşekkür ederim.

Tezimi savunma sürecinde yer alan tezimin daha açık ve anlaşılır hale gelmesine değerli görüş ve önerileri ile katkıda bulunan değerli hocam sayın Prof. Dr. Yüksel DEDE'ye tezime olan katkıları için çok teşekkür ederim.

Katıldığım kongrelerde tanışma fırsatı bulduğum ve akademik deneyimlerini tüm samimiyetiyle her zaman paylaşan, tez savunma sürecinde yer alan, değerli önerileri ile tezime katkıda bulunan değerli hocam sayın Yard. Doç. Dr. Figen UYSAL'a çok teşekkür ederim.

Tez çalışmama kıymetli zamanlarını ayırarak katılan ve içtenlikle çalışmamda yer alan ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerine çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca üzerimde emeği olan Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalında görev yapan değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan ve benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Arş. Gör. Dr. Ayşegül ERYILMAZ ÇEVİRGEN ve Arş. Gör. Dr. Betül BARUT'a, değerli arkadaşlarım Arş. Gör. Ümran ALAN, Yard. Doç. Dr. Kibar Evren BOLAT AYDOĞAN ve Yard. Doç. Dr. Hıdır KARADUMAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, maddi manevi her türlü desteği sağlayan, ama en önemlisi her koşulda candan sevgilerini ve ilgilerini hissettiğim canım ailem; annem, babam ve kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Başak BARAK

Eskişehir 2018

15.03.2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve kukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Başak BARAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

LYS **:** Lisans Yerleştirme Sınavı

MEB **:** Milli Eğitim Bakanlığı

MYP **:** Merkezi Yerleştirme Puanı

NCTM **:** National Council Teacher of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

ÖSYM **:** Ölçme Seçme Yerleştirme Merkezi

1. GİRİŞ

Bu bölümde bu araştırma ile ilgili ispat, Selden ve Selden'in (2007) ispat yapmaya ilişkin geliştirmiş oldukları çerçeve, davranışsal şemalar, ispatın okulöncesinden üniversite düzeyine gelişimi, ortaokul matematik dersi programında ispat, ortaöğretim matematk dersi programında ispat, okul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşler, amaç ve araştırma soruları, araştırmanın önemi, araştırmanın sınırlılıkları ve araştırmanın sayıltıları yer almaktadır.

1.1. İspat

Matematik eğitiminin en önemli çalışma alanlarından biri olan ispat üzerine, okulöncesinden üniversiteye kadar tüm düzeylerde ve farklı pek çok perspektiften çalışmalar yapılmıştır. En genel anlamda ispat, bir önermeyi geçerli kılmak için gereken ve ikna ettiği sürece birkaç farklı şekilde yapılabilecek olan bir tartışmadır (Davis, 1986'dan aktaran Hanna, 1991, s. 56). İspatın "belli bir tarafsızlığa ve esnekliğe" sahip olması (Tymoczko, 1986) ve geçerliğinin "akla uygun sosyal bir uygulamaya" dayanması (Kitcher, 1984) gerekir (Aktaran, Hanna 1991).

Bell (1976, s. 24) ispatın, matematiksel olarak üç anlam taşıdığını ifade etmiştir. Bunlardan ilki bir önermenin doğruluğu ile ilişkili olan *doğrulama*, ikincisi önermenin niçin doğru olduğunu *açıklığa kavuşturma* ve üçüncüsü de temel aksiyomlar, tanımlar ve teoremlerin tümdengelimli sistemi içinde bunlardan çıkarılan sonuçların *sistematikleştirilme*sidir. De Villiers (1990) ise matematiksel bir önermenin ispatının;

- önermenin doğrulanması,
- önermenin açıklanması,
- önermenin doğrulanması ve cümlenin açıklanmasının diğer kişilerle paylaşımı
- tümdengelimli bir sistem içinde önermenin sistematikleştirilmesi

olmak üzere dört fonksiyonu olduğunu ifade etmiştir (Aktaran Almeida, 2000, s. 869).

Genel anlamda ispatlama ise mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutları olan karmaşık bir matematiksel aktivitedir (Weber, 2005, s.351).

Selden, McKee ve Selden (2010, s. 204) genel olarak ispatlama sürecini; ispatın bir satırının düşünülmesi ya da yazılması, bir diyagram çizilmesi, önceki eylemlerin sonuçlarının yansıtılması veya bir örneği hatırlamaya çalışmak gibi bir dizi zihinsel ve fiziksel eylemler serisi olarak ifade etmiştir. Selden vd. (2010) kişi deneyim kazandıkça ispat oluşturmanın büyük bir bölümünün, durumu fark etme ve buna ilişkin zihinsel veya fiziksel bir eylem gerçekleştirmeden oluşan daha küçük parçalara ayrıldığını belirtmiştir.

İspatın ve ispatlamanın pek çok tanımı yapılmasına karşın, ispat ve buna karşılık gelen aktivite olan ispatlamanın (Stylianides, 2007, s. 289), ne olduğuna ilişkin tek bir yanıt vermek oldukça güçtür. Bunun nedeni "ispatı ne oluşturur?" sorusunun cevabının bu sorunun sorulduğu kişiye bağlı olmasıdır (Stylianou, Blanton ve Knuth, 2009, s.112). Stylianides'in (2007) de belirttiği gibi çoğu matematik eğitimi araştırmacısı ve program çerçeveleri ispatın ve ispatlama aktivitesinin, öğrencilerin okul yaşantıları boyunca yaşadıkları matematiksel deneyimlerin bir parçası olduğunu ifade eder (s. 289). Öğrencilerin ispata ilişkin yaşayacağı deneyimler, bilişsel gelişimlerine paralel olarak değişeceğinden, ispatın ve ispatlama aktivitesinin ne olduğuna ilişkin yapılacak tanımların, okulöncesi dönemden üniversite düzeyine kadar her düzeyde değişiklik göstermesi ve öğrencilerden beklenenlerin değişmesi kaçınılmazdır.

1.1.1. Öğrencilerin ispat yapmaya ilişkin kavramsallaştırmaları

Alan yazın incelendiğinde, matematiğin çeşitli alanlarına yönelik öğrencilerin ispata bakış açıları ve ispat yapma süreçlerini inceleyen çok sayıda çalışma yapıldığı görülmüştür (Bell, 1976; Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998; Weber, 2004; Weber ve Alcock, 2004; Stylianides, 2007). Bu çalışmalardan bazıları aşağıda kısaca ifade edilmiştir.

Bell (1976, s. 23), yaşları 14 ile 18 arasında değişen ilköğretim ve lise öğrencilerine, genelleme yapabilecekleri sayısal ya da geometrik basit matematiksel durumlar sunmuş ve öğrencilerin bu matematiksel durumları nasıl açıkladıkları ve buna yönelik nasıl ispatlar oluşturduklarını araştırmıştır. Çalışmasının sonucunda Bell, öğrencilerin ispat yaparken deneysel ve tümdengelimsel olmak üzere iki tür doğrulama yaptıklarını belirtmiştir. Öğrenciler deneysel doğrulamada, sistematik ya da sistematik olmadan belli sayısal ya da geometrik örnekler üzerinden genelleme yapmaya çalışmıştır. Tümdengelimsel doğrulamada ise öğrenciler matematiksel tanım, teorem ya da belli kurallardan yararlanarak doğrulamalar yapmışlardır.

Balacheff (1988, s. 216-225), ilköğretim öğrencilerinin matematiksel ifadelerin doğruluğunu savunurken kullandıkları gerekçeleri araştırdığı bir öğretim deneyi araştırmasında, öğrencilerin ispatlarını acemi deneycilik (naive empricism), önemli deneycilik (crucial empricism), genelleyici örnekler (generic examples), düşünce deneyimi (thought experiment) olmak üzere dört sınıfa ayırmıştır. Acemi deneycilikte öğrenciler keyfi olarak seçtikleri birkaç örnek üzerinden matematiksel bir ifadenin doğruluğunu savunmaya çalışma eğilimindedirler. Örneğin öğrenci n kenarlı konveks bir çokgenin iç açıları toplamının "(n-2).180^0" olduğunu bir üçgen ya da bir dikdörtgen alarak dener. Önemli deneycilikte ise öğrenciler özel olarak seçtikleri belli örnekler üzerinden matematiksel bir ifadenin doğruluğunu araştırmaktadırlar. Örneğin öğrenci bir konveks çokgen için deneme yapar. Genelleyici örnekler sınıfındaki öğrenciler ise matematiksel bir ifadeyi, örnekler üzerinde yaptıkları özel analizler ve işlemlere dayanarak doğrularlar. Örneğin öğrenci bir dikdörtgenin iç açıları toplamını, dikdörtgenin köşegenlerini çizerek, köşegenlerin ayırdığı üçgenlerin iç açıları toplamından köşegenlerin kesişim noktasının oluşturduğu açıyı çıkararak yani "(180.4) - 360" şeklinde hesaplar. Düşünce deneyimi sınıfındaki öğrenciler de matematiksel bir ifadeyi genel semboller ve tümdengelimli akıl yürütme ile doğrulamaktadır. Örneğin öğrenci kenar sayısını n olarak isimlendirir ve nasıl bir ilişki olduğunu nedenleriyle ifade eder.

Harel ve Sowder (1998), matematiksel veya matematiksel kabul edilemeyecek ispatları "ispat şemaları" adı altında sınıflandırmıştır. Başka bir ifadeyle Harel ve Sowder (2007), üniversite öğrencilerinin matematiksel bir ifadenin doğruluğuna ilişkin kendisini ve başkasını ikna ederken yaptığı muhakemelerin ve argümanlarında kullandığı gerekçelerin matematiksel geçerlik düzeyini sınıflandıran bir model olarak ispat şeması kavramını geliştirmişlerdir. Harel ve Sowder'ın (2007, s. 7-8) tanımladıkları ispat şeması kavramı; "varsayıma karşı gerçek", "ispatlama" ve "kendini ve başkasını ikna etme" olmak üzere üç tanıma dayanmaktadır. "Varsayıma karşı gerçek", matematiksel bir önermenin doğruluğundan emin olunmadığında varsayım, doğruluğundan emin olunduğunda gerçek olarak ele alınmasıdır. "İspatlama" kişi ya da toplum tarafından bir varsayımın doğruluğu hakkındaki şüphelerin kaldırılması sürecidir. "Kendini ve başkasını ikna etme" de ise kendini ikna etme, kişinin bir varsayımın doğruluğu hakkındaki şüphelerini kaldırma süreci, başkasını ikna etme de bir kişinin ya da bir toplumun diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırması sürecidir. Harel ve Sowder (2007) çalışmalarında üniversite öğrencilerinin ispat şemalarının nasıl olduğunu ortaya çıkarmaya çalışmış ve öğrencilerin ispat şemalarını

- Dışsal ispat şeması,
- Deneysel ispat şeması ve
- Analitik ispat şeması

olmak üzere üç başlık altında toplamışlardır.

Dışsal şemasına sahip öğrenciler matematiksel ifadenin doğruluğunu daha önceden yapılan benzer ispatlara, öğretmenin ya da kitapların ifadelerine ya da sembollerin amaçsız ve ezbere bir şekilde kullanımına dayanarak savunmaktadırlar. Dışsal ispat şeması kendi içinde *ritüel, otoriter* ve *sembolik şema* olmak üzere üçe ayrılmaktadır. Ritüel ispat şemasındaki öğrenci bir matematiksel ifadenin doğruluğunu yargılarken, geçerli argümanlar kullanmak yerine bu ifadenin sadece görünümünden etkilenerek bir yargıya varır. Örnek olarak lisedeki geometri ispatlarında öğrencilerin şeklin görüntüsünü kullanmaları verilebilir. Otoriter ispat şemasındaki öğrenciler, matematiksel ifadenin doğruluğunu yargılarken kullandıkları argümanların gerekçelerini kitapta geçen bir ifadeye ya da öğretmenlerinin söylemlerine dayandırmaktadırlar. Sembolik ispat şemasına sahip öğrenciler ise yaptıkları ispatlarda matematiksel sembolleri yüzeysel olarak ve amaçsız bir şekilde kullanma eğilimindedirler. Öğrenci matematiksel sembollerin içerdiği anlamları bilmemektedir.

Deneysel ispat şemasına sahip öğrenciler ise matematiksel bir ifadenin doğruluğunu sayısal örnekler vererek ya da çizimler yaparak genellemeye ulaşarak savunurlar. Deneysel ispat şeması *tümevarımsal ispat şeması* ve *algısal ispat şeması* olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Tümevarımsal ispat şemasına sahip öğrenciler rastgele ya da özel olarak seçilmiş sayısal örnekler üzerinden genellemeye ulaşarak ifadenin doğruluğunu savunma eğilimindedirler. Algısal ispat şeması ise daha çok geometrik ispatlarda ortaya çıkar ve öğrenciler doğrulama sürecinde geometrik yapıların sınırlı sayıdaki temsilleri üzerinden yargıya varma yolunu seçerler. İspat bir ya da birkaç çizim üzerinden yapılır.

Analitik ispat şemasına sahip öğrenciler, matematiksel ifadeleri tümdengelimli akıl yürütmeyle doğrulama eğilimindedirler. Bu ispat şeması daha formal yapıdaki akıl yürütmeleri içerir ve *dönüşümlü ispat şeması* ile *aksiyomatik ispat şeması* olmak üzere ikiye ayrılır. Dönüşümlü ispat şemasındaki öğrenciler, doğrulama sürecinde teoremler ve semboller arasında geçişler yaparak sonuca ulaşmaya çalışırlar. Deneysel ispat şemasından farkı, özel sayısal işlemler yerine matematiksel semboller ve kurallar üzerinden genellemelerin yapılmasıdır. Dönüşümlü ispat şemasında genellik, işlemsel düşünce ve mantıksal çıkarım olmak üzere üç önemli özellik söz konusudur. Genellik, matematiksel ifadenin içerdiği tüm durumlara yönelik bir argüman geliştirmeyi gerektirir. İşlemsel düşünce, belli bir hedefi ve alt hedefleri belirlemeyi, ispat sürecinde işlemlerin sonuçlarını öngörmeyi içermektedir. Mantıksal çıkarım ise doğrulama sürecinin mantıksal çıkarımlara dayanmasını ifade etmektedir. Örneğin "tüm n değişkenleri için, log (a_1 . a_2 . a_3…….a_n) = log a_1 + log a_2 + ……+ log a_n" olduğunu tanımdan yararlanarak önce,

"log (a_1 . a_2) = log a_1 + log a_2"

şeklinde, sonrasında bunu üç sayı için,

"log (a_1 . a_2 . a_3) = log a_1 + log (a_2 . a_3) = log a_1 + log a_2 + log a"

şeklinde ve bunlardan hareketle,

"log (a_1.a_2.a_3…..a_n) = log a_1 + log a_2 + …+ log an"

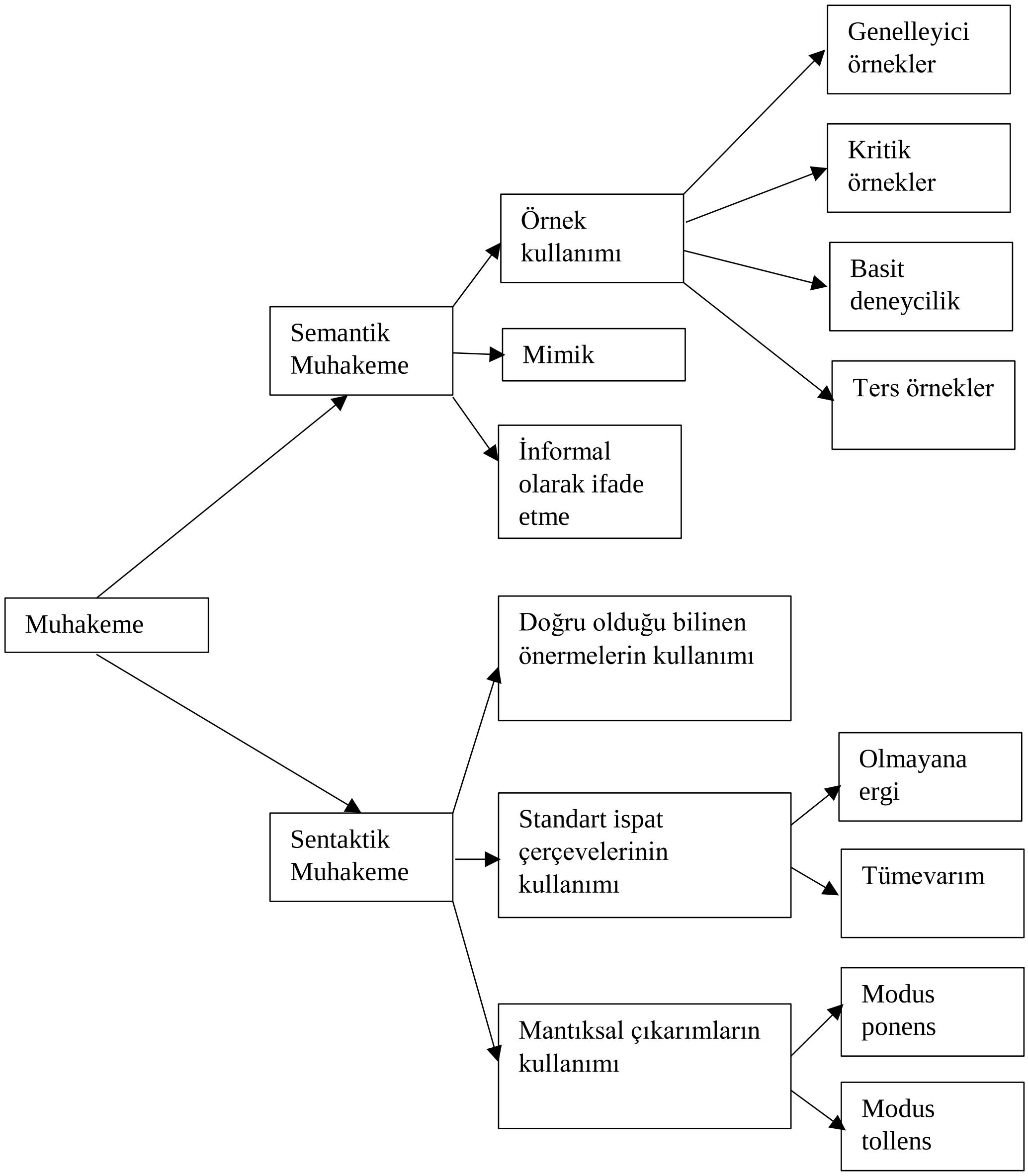
olduğunu göstermek verilebilir.

Aksiyomatik ispat şemasına sahip öğrenciler ise matematiksel doğrulamanın aksiyomlar ve ispatlanmış teoremler üzerinden başlaması gerektiğini benimsemişlerdir. Bu şema dönüşümlü ispat şemasının da özelliklerini içerir ve en formal yapıdaki ispat şemasıdır. Buna örnek olarak yukarıda verilen "log (a_1 . a_2 . a_3…….a_n) = log a_1 + log a_2 + ……+ log a_n" eşitliğini tümevarım yöntemini kullanarak göstermek verilebilir.

Weber (2004, s. 425-429), üniversite düzeyindeki öğrencilerin soyut cebir ve analiz derslerinde yaptıkları ispatları analiz etmiş ve araştırma sonuçlarına dayanarak öğrencilerin ispatlarını yöntemsel (procedurel), sentaktik (syntactic) ve semantik (semantic) olarak üç sınıfta toplamıştır. Yöntemsel ispatta öğrenciler, geçerli bir ispat oluşturacağına inandıkları özel adımları takip ederek ve belli bir yöntemi uygulayarak ispat yaparlar. Uygulanan yöntem, ispatı yapan için anlamlı olabileceği gibi anlamlandırılmadan ezbere de kullanılabilir. Yöntemsel ispata örnek olarak tümevarım yönteminin kullanılması verilebilir. Sentaktik ispatta ise öğrenciler, tanımları ve kuralları kullanarak, mantıksal olarak geçerli işlemlerle ispat yaparlar. Sentatik ispata örnek olarak "AU(BUC) = (AUB)UC" eşitliğinin gösterilmesi için eşitliğin bir tarafından eleman alıp, birleşim işleminin özelliğini kullanarak bu elemanın diğer tarafta olduğunu gösterme ve benzer işlemleri eşitliğin diğer tarafından eleman alarak yapma verilebilir. Semantik ispatta öğrenciler, ispat yapmadan önce söz konusu matematiksel ifadenin neden doğru olduğunu anlamak için matematiksel yapıların temsillerini ya da diyagramlarını inceleyerek sezgisel olarak öne sürdükleri varsayımları göz önünde bulundurarak ispat yaparlar. Semantik ispata örnek olarak bir öğrencinin bir dizinin süreksiz olduğunu göstermek için önce dizinin grafiğini çizmesi ve buna dayanarak formal ispat yapması verilebilir.

Weber ve Alcock (2004, s. 209-211) ise grup teorisi ve analiz derslerini alan üniversite öğrencileriyle yaptıkları çalışmalarında formal bir ispatın, semantik ve sentaktik olmak üzere iki şekilde oluşturulabileceğini ifade etmişlerdir. Semantik ispat, ispatlayanın formal çıkarsamalara rehber olması için matematiksel kavram örneklerini kullanmasıdır. Bu örnekler kişi için anlamlı ve sistematik olarak tekrarlanabilirdir. Sentaktik ispat oluşumunda ise kişi mantıksal olarak uygun şekilde sembolik formülleri manipüle ederek çıkarsamalar yapar. Sentaktik ispatlarda kişi matematiksel kavramların sezgisel ve formal olmayan temsillerini veya diyagramlarını kullanmaz.

Weber ve Alcock (2009, s. 323-329), Goldin'in (1998) temsil sisteminden yararlanarak ispata ilişkin bir temsil sistemi tanımlamışlardır. İspat temsil sistemi adını verdikleri bu sistemde harfler ve mantıksal semboller ($\equiv$, $\Rightarrow$) karakterleri oluştururken, belli kurallarla bu karakterler bir araya gelerek yapılanmalar (iyi oluşturulmuş formüller) meydana gelir. İyi oluşturulmuş bir formülden diğer bir formüle geçişi sağlayan bazı kurallar vardır. Örneğin temsil sistemi "önermesel kalkulus" olmak üzere bir önermeden diğer bir önermeye geçerken "ise" karakteri kullanılır ve bu geçiş çıkarsama kurallarından "modus ponens" aracılığı ile gerçekleşir. Goldin (1998), bir temsil sistemi içindeki yapılanma ve karakterler hakkında muhakeme yapabilme ve bunlara anlam verebilmenin sentaktik anlama ve semantik anlama olmak üzere iki yolu olduğunu ifade etmiştir. Örneğin önermesel kalkulusta değil alma sembolü, $(P')' \equiv P$ ifadesinin anlaşılmasını gerektirirken bu tür anlamalara "sentaktik anlama" denir. Kişi eğer temsil sistemindeki bir yapılanmayı, farklı bir temsil sistemindeki yapılanmayla temsil ederek ifade ederse buna da semantik anlama denir. Örneğin,"P'" İngilizcedeki "değil" kelimesiyle temsil edilerek ifade edilebilir. Burada "P'" ifadesi "ifade ancak ve ancak P yanlış olduğunda doğrudur" şeklinde düşünülebilir. Öğrencilerden matematiksel bir görevi tamamlamaları istendiğinde öğrencilerden genellikle belirli bir temsil sistemi içindeki görevi ilk yapılanmadan başlayarak istenen yapılanmaya doğru giderek tamamlamaları istenir. Örneğin cebirsel bir denklemin çözümünde "$x = n$" cümlesi üretilene kadar bu denklem üstünde cebirsel işlemlerin uygulanması istenir. Böyle durumlarda kişi sistemin içinde kalır, başka bir deyişle çalışılan yapılanmaları başka sistemdeki yapılanmalarla ilişkilendirmeden o sistem içindeki kuralları uygular. Weber ve Alcock (2009) bunu "sentaktik muhakeme" olarak ifade etmiştir. Fakat bu durumun tersine, kişi devam etmek için ilişkili yapılanmanın semantik anlamasını da kullanabilir.



Şekil 1.1. *Semantik ve sentaktik muhakemelerin karşılaştırılması (Alcock ve Inglis, 2008, s.117)*

Cebirsel bir denklemin çözümü durumunda kişi denklemin grafiğinin x-eksenini kaç yerde kestiğini anlamak için denklemin grafiğini çizerek kaç çözüm olduğunu belirleyebilir. Weber ve Alcock (2009) bunu da "semantik muhakeme" olarak ifade etmiştir. Weber ve Alcock (2009) sentaktik muhakemenin de semantik muhakemenin de birbirlerine göre güçlü ve zayıf yanları olduğunu belirtmiştir. Örneğin her ispatta semantik muhakeme yapması zor olabilir. Bu durumda kişinin ispata devam etmesi için sentaktik muhakeme yapması yeterli olabilir. Bazı durumlarda da yapılan sentaktik muhakeme, kişiye yüzeysel bir bakış açısı verdiği için kişinin anlamlandırmasında engel olabilir. Alcock ve Inglis (2008) ise semantik ve sentaktik muhakemeleri karşılaştırarak bu muhakeme türlerine ilişkin gözlemlenecek davranışları yukarıdaki Şekil 1.1'de özetlemiştir.

Stylianides (2007), okul matematiğinde ispatın ne anlama geldiğinin, özellikle de ilk sınıflarda öğretmenin öğrencilerinin ispat ve ispatlamalarını geliştirmedeki rolünün ne olduğunun hala açık olmadığını ifade etmiştir (s. 290). Stylianides (2007), okul matematiğinde ispatı, matematiksel bir iddiaya yönelik ya da karşı olarak ilişkili bir dizi varsayımlar olup aşağıdaki özelliklere sahip olan matematiksel bir argüman olarak kavramsallaştırmıştır (s. 291):

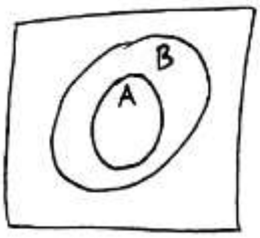
> 1) Daha fazla doğrulama yapmaksızın sınıf tarafından kabul edilen doğru ve uygun önermeleri kullanır.
> 2) Sınıfın kavramsal olarak ulaştığı, geçerli ve bilinen muhakeme formlarını (argümantasyon türlerini) kullanır.
> 3) Sınıfın kavramsal olarak ulaştığı, bilinen ve uygun ifade formları (argüman temsil formları) ile iletişim sağlanır.

1.1.2. Öğrencilerin ispat yapma sürecinde karşılaştıkları zorluklar

Öğrencilerin gerek lise gerekse üniversite düzeyinde ispat yaparken zorluklar yaşadıkları bilinmektedir. Bu zorluk kaynaklarını çeşitli açılardan ele almak mümkündür. Alan yazın incelendiğinde, öğrencilerin ispat yaparken yaşadıkları zorlukların genel olarak söz konusu ispata ilişkin matematiksel kavramlardan, ispatlanacak matematiksel önermenin mantıksal yapısına ilişkin gerekli çözümlemelerin yapılamamasından, mantıktan gelen bağlaç ve niceleyicilerin hatalı kullanımlarından ya da bağlaç ve niceleyicilerin günlük dildeki kullanımlarının matematik dilindeki kullanımları ile çelişmesinden kaynaklandığı görülmektedir (Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Epp, 2003; Selden ve Selden, 2007). Aşağıda öğrencilerin ispat yaparken yaşadıkları zorluklar, "matematiksel kavramların kullanımından kaynaklanan zorluklar", "mantık alanından kaynaklanan zorluklar" olarak iki başlık altında, "mantıktan kaynaklanan zorluklar" ise kendi içinde "matematiksel bir önermenin mantıksal yapısının anlaşılması", "ise bağlacının kullanımı" ve "niceleyici kullanımı" alt başlıkları altında ele alınmıştır.

1.1.2.1. Matematiksel kavramların kullanımından kaynaklanan zorluklar

Moore (1994, s. 251-261) öğrencilerin ispatlarında kullandıkları matematiksel kavramları nasıl anladıklarının ortaya çıkarılmasının, öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin araştırılmasında önemli olduğunu ve öğrencilerin genellikle teoremde geçen kavramı anlamadıkları için ispat yapmakta başarısız olduklarını ifade etmiştir. Moore (1994) ispata başlamadan önce öğrencilerin söz konusu teoreme ilişkin kavramları sezgisel olarak anlamalarının gerektiğini fakat sadece teoreme ilişkin kavramların sezgisel olarak anlaşılmasının ispat süreci için yeterli olmadığını ifade etmiştir. Örneğin "Eğer A ve B kümeleri $A \cap B=A$ özelliğini sağlıyorsa o zaman $A \cup B=B$'dir" önermesinin ispatlanması istendiğinde öğrencinin aşağıdaki gibi bir şema çizdiği görülmüştür (Şekil 1.2.).



Şekil 1.2. *Moore'un (1994) öğrencisinin ispatı (s. 258)*

Böyle bir açıklama yapan öğrenci, yalnızca tanımlarda eksik değil aynı zamanda bir ispatta tanımların nasıl kullanıldığı bilgisine de sahip değildir. Öğrencilerin zengin bir kavram imajına sahip olmaları onların doğru bir şekilde formal bir ispat yapmalarını sağlayamayabileceği gibi öğrencilerin ispat yapmaları için gerekli olan bir kavramın formal tanımını bilmeleri de onların doğru bir şekilde formal bir ispat yapacakları anlamına gelmemektedir. Moore (1994) bazı öğrencilerin kavram imajına dayalı informal açıklamalarla formal bir tanım arasındaki ayrımı anlayamadıklarını ve öğrencilerin imajlarını yazılı sembollere dökemediklerini ifade etmiştir. Öğrencilerin formal bir ispat yapabilmelerinde kavram kullanımının önemli olduğunu belirten Moore (1994), öğrencilerin doğru bir şekilde formal bir ispat yapabilmeleri için kavrama ilişkin

- örnekler oluşturmaları ve bunları kullanabilmeleri,
- ispatlarda tanımları kullanabilmeleri ve
- ispatın tamamını oluşturmak için bir tanımdan yararlanabilmeleri

gerektiğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Weber (2001) de stratejik bilgi olarak da ele aldığı ispat için gerekli olan kavramın tanımını bilmekten çok o kavramın ne zaman ve nasıl kullanılacağı bilgisinin önemli olduğunu ifade etmiştir. Örneğin bir fonksiyonun birebirliğinin gösterilmesi istendiğinde öğrencinin "Bir f fonksiyonu birebirdir ancak ve ancak f fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm x ve y'ler için $f(x)=f(y)$ ise $x=y$'dir" şeklindeki bir fonksiyonun birebir olma tanımını göz önünde bulundurması gerekir. Bu tanım bir fonksiyonun birebir olduğunu ispatlamada bir strateji sunmaktadır. Burada x ve y, f fonksiyonunun tanım kümesinin belli fakat keyfi iki elemanı olsun, varsayalım ki "f(x)=f(y)" olsun denir; bu varsayımlar ve diğer uygun bilgiler kullanılarak "x=y" olduğu gösterilir. Bu durumda bu tanımın formu ispatın yani f'nin birebir olmasının yapısını ve mantığını (başka bir ifadeyle evrensel niceleyiciler ve gerektirmeyi) sağlar. Ayrıca tanım böyle bir ispatın nasıl başlaması (f(x)=f(y)) ve nasıl bitmesi (x=y) gerektiğini göstermektedir.

1.1.2.2. Mantık alanından kaynaklanan zorluklar

Öğrencilerin ispat yaparken zorluk yaşamalarının en önemli nedenlerinden birisi de öğrencilerin mantık alanında yaşadıkları zorluklardır. Mantık alanında yaşanan zorluklara geçmeden önce mantığın ne olduğu ve matematik mantık ilişkisi kısaca ele alınacaktır.

Doğru ve düzgün düşünme formlarını inceleyen bilim dalı olarak tanımlanan mantık (Çüçen, 1999, s. 18), doğru akıl yürütmeyi yanlış akıl yürütmeden ayırmada kullanılan ilke ve usullerin sistemli olarak tartışılmasını konu edinir (Altun, 2011, s. 97). Akıl yürütme ise yargılar arasındaki ilişkilere dayanmaktadır (Yıldırım, 1999, s. 48). Çüçen'in (1999) doğru ve düzgün düşünme olarak ele aldığı akıl yürütme, yargıda bulunarak ve usa vurarak çıkarım yapmak anlamına gelmekte olup en az iki düşünce arasında bir ilişki ifade ederek, birini diğerinin ispatlayanı yaparak yeni bir yargı öne sürmektir. Örneğin "11 sayısı 2'ye tam bölünemez, çünkü 11 bir tek sayıdır" önermesinde 11'in 2'ye tam bölünememesi yargısı, 11'in bir tek sayı olması yargısına dayandırılarak yeni bir yargı ileri sürülmüştür.

Herhangi bir dil ele alındığında o dilin sözlüğü; *betimleyici sözcüklerden* yani nesne adlarını, özelliklerini veya ilişkilerini belirleyen sözcüklerden ("masa", "insan", "büyük", "kütle", "hız" gibi) ve *mantık bağlaçları ile niceleyicilerden* ("değil", "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" bağlaçları ve evrensel niceleyici "tüm", varlık niceleyicisi "bazı") oluşmaktadır (Yıldırım, 1999, s. 113). Sözlü veya yazılı dil, sözcüklerin belli kurallara uygun olarak sıralanmasını gerektirirken, bu sıralamalar bazen "Ayşe yemeğini bitirdin mi?" şeklinde soru kipinde, "Ayşe yemeğini bitir." şeklinde emir kipinde, "Keşke Ayşe yemeğini bitirseydi." şeklinde dilek kipinde ya da "Ayşe yemeğini bitirdi." şeklinde bildiri türünde bir cümle şeklinde olabilir (Yıldırım, 1999, s. 114). Doğru veya yanlış olan fakat aynı anda hem doğru hem yanlış olmayan, bildiri cümlelerine önerme denir

(Margaris, 1990, s. 2). Bu cümlelerden sadece bildiri cümlesi olan "Ayşe yemeğini bitirdi." cümlesi bir önermedir. Matematiksel olarak önermeleri ele alacak olursak "2 + 2 = 4" doğru bir önerme iken "3 < 2" yanlış bir önermedir. Yıldırım'ın (1999) da belirttiği gibi cümle ve önerme aynı şey olmayıp, cümle bir dilbilgisi terimi iken önerme bir mantık terimidir ve mantık, bu önermeler arası ilişkilerle ilgilenir. Mantıkta niceleme içeren cümleler ise tekil, tikel ve tümel önermeler olmak üzere üç şekilde karşımıza çıkar (Yıldırım, 1999). Örneğin "Ahmet bir öğrencidir" tekil bir önerme iken, "Bazı kimseler öğrencidir" tikel (varlık niceleyicisi içeren), "Herkes öğrencidir" ise tümel (evrensel niceleyici içeren) bir önermedir. Burada "biri öğrencidir" cümlesini değerlendirecek olursak Yıldırım'ın (1999) da belirttiği gibi "biri öğrencidir" ifadesi önerme değil, önerme fonksiyonudur başka bir ifade ile açık önermedir. Açık önerme, değişkenin aldığı her değer için doğruluğu ayrı ayrı değerlendirilen önermeye denir (Esty, 2004, s.211). Burada "biri" kelimesi tıpkı cebirde bir denklemde yer alan "x" gibi bir değişkendir, yani tanımlandığı kümedeki elemanlardan birini temsil etmektedir. "Biri öğrencidir" cümlesi, "biri" diye işaret edilen kişinin kim olduğuna göre doğru ya da yanlış bir önerme ifade eder.

Matematik irdelendiğinde, mantıktan gelen sözcük bilgisinin matematiksel önermelerde kullanıldığı, mantıktan gelen çıkarımların da matematiksel metinleri organize etmek amacıyla kullanıldığı görülmektedir (Esty, 2004, s. 146). Mantık ile matematik ve dolayısıyla mantık ile ispat ise birbiriyle iç içe geçmiş alanlar olup matematik eğitimi alan yazınındaki çalışmalar, öğrencilerin ileri düzey matematik kavramlarında gelişim göstermeleri ve özellikle de kendi ispatlarını oluşturmalarında öğrencilerin mantıksal becerilerini geliştirmeleri gerektiğini ifade etmektedir (Savic, 2012, s. 4).

1.1.2.2.1. Matematiksel bir önermenin mantıksal yapısının anlaşılması

İspat yapma sürecinde öğrencilerin zorluk yaşadıkları diğer bir durum da ispatlanacak olan matematiksel önermenin mantıksal yapısının anlaşılmasıdır. Selden ve Selden (1995, s. 127), "ise", "ancak ve ancak" gibi mantık bağlaçları ile "her" ve "en az bir" niceleyicilerinin açıkça ifade edilmediği önermeleri informal, mantık bağlaçları ve niceleyicilerin açıkça ifade edildiği önermeleri de formal önermeler olarak ifade etmiştir. İnformal bir önermenin, bu önermenin mantıksal olarak eşdeğeri olan formal bir önermeyle ilişkilendirilmesini, bu informal önermenin çözülmesi (unpacking) olarak tanımlanmıştır (Selden ve Selden, s. 128). Örneğin “bir fonksiyon her ne zaman türevlenebilirse o zaman o fonksiyon süreklidir” informal önermesi, “her f fonksiyonu için, eğer f türevlenebilirse o zaman f fonksiyonu süreklidir” şeklinde formal bir önermeye dönüştürülebilir. “Türevlenebilen fonksiyonlar süreklidir” önermesi informaldir; çünkü evrensel niceleyici tam olarak ifade edilmemesine rağmen uzlaşıyla anlaşılmaktadır. “Bir fonksiyon her ne zaman türevlenebilirse o fonksiyon o zaman süreklidir” önermesi de informaldir; çünkü bu önerme alışıla gelen “Eğer… ise …” formunda değildir. Bu tür önermeler matematiksel söylemlerde sıklıkla kullanılmakta olup genel bir uzlaşı ile anlaşılır olduklarından hatalı ya da belirsiz önermeler olmayıp, informal cümlelerin formal önermelere göre daha kolay anlaşıldığı, hatırlandığı, uygulamalarda ve muhakeme etmede kullanıldığı söylenebilir (Selden ve Selden, 1995). Selden ve Selden’in (1995) çalışmalarında tanımladıkları bir diğer önemli kavram da “ispat çerçevesi”dir (proof framework). Selden ve Selden (1995), ispat çerçevesini, bir ispatın en üst düzey mantıksal yapısının bir temsili olarak tanımlamışlardır (s. 129). Selden ve Selden ispat çerçevesinin, söz konusu matematiksel kavramların detaylı bilgisine bağlı olmadığını; fakat ispatlanan önermenin yeniden oluşturulmasına ya da o önermenin eşdeğerinin oluşturulmasına izin verecek zenginlikte olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Selden ve Selden (1995) ispat çerçevesini daha iyi anlatmak için bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığının ispatını ele almışlardır (s.129):

$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 \Leftrightarrow her\ \varepsilon > 0,\ bir\ \delta > 0\ vardır\ öyle\ ki\ her\ x,\ eğer\ 0 < |x-3| < \delta\ iken\ |x^2-9| < \varepsilon\ olur.$

$İspat: \varepsilon\ sıfırdan\ büyük\ bir\ sayı\ olsun. \delta = \cdots varsayalım. \ldots öyleyse\ \delta > 0'dır. x\ bir\ sayı\ olsun. 0 < |x-3| < \delta\ olduğunu\ varsayalım. \ldots Bu\ nedenle\ |x^2 - 9| < \varepsilon\ olur.$

$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 \Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki her x için eğer $0 < |x-3| < \delta$iken $|x^2-9| < \varepsilon$ olur.

İspat: ε sıfırdan büyük bir sayı olsun. $\delta =$… varsayalım … öyleyse $\delta > 0$’dır. x bir sayı olsun. $0 < |x-3| < \delta$ olduğunu varsayalım. … Bu nedenle $|x^2-9| < \varepsilon$ olur.

İspatta bırakılan boşluklar, ispatı tamamlamak için gereken matematiksel argümanlar içindir. Selden ve Selden (1995)’e göre ispatları doğrulayabilen öğrenciler, informal olarak ifade edilen teoremlerin mantıksal yapısını çözebilirler. Selden ve Selden (1995) çalışmalarında bu durumun karşıt tersini başka bir deyişle informal olarak ifade edilen teoremlerin mantıksal yapısını çözemeyen öğrencilerin, ispatları doğrulayamayacaklarını savunmuşlardır. Selden ve Selden'e (1995) göre ileri düzey matematiksel kavramların anlaşılması ve öğrenilmesi, kişinin bu kavramlara ilişkin zihinsel oluşumları aracılığıyla incelenebilir. Fakat çözme, ispat çerçeveleri oluşturma ve doğrulama işlemsel bir niteliğe sahiptir, Selden ve Selden (1995) bunları zihinsel beceriler olarak ele almış ve bunların en iyi incelenebilecek beceriler olduklarını ifade etmişlerdir. Selden ve Selden'e (1995) göre bu beceriler başlı başına kavramsal öğrenmenin ve anlamanın bir parçası olmayıp; kişinin işlemsel becerisine katkı sağlamaktadır.

1.1.2.2.2. "İse" bağlacının kullanımı

Öğrencilerin matematiksel bir önermenin bütün mantıksal yapısının anlaşılmasının yanı sıra bu mantıksal yapıyı oluşturan elemanlardan biri olan bağlaçların anlaşılması da ispat yapmada zorluklara neden olmaktadır. Özellikle "ise" bağlacının kullanıldığı önermelerin, matematiksel muhakemenin merkezinde olduğunu belirten Durand-Guerrier (2003, s.5), yaşanılan bu zorlukların kavramın karmaşıklığı ile ilişkili olduğunu ifade etmiştir. Matematiksel bir önermenin ya da bir teoremin mantıksal yapısında en çok kullanılan bağlaçlardan biri olan "ise" bağlacı genellikle öğrenciler tarafından yanlış değerlendirilebilmektedir. Epp (2003, s.889) öğrencilerin "ise" bağlacı kullanılarak oluşturulan önermelere ilişkin aşağıda belirtilen;

- "$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge q$"dan "p"yi çıkarsama
- "$\left(p \Rightarrow q\right)$"dan "$\left(q \Rightarrow p\right)$"yi çıkarsama
- "$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge p'$"den "$q'$"yu çıkarsama

şeklinde hatalı çıkarsamalar yaptıklarını belirtmiştir. "İse" bağlacının kullanıldığı önermelerin ispatında, ispat yöntemlerine ilişkin en çok karşılaşılan hata türlerinden biri yukarıda Epp'in (2003) ifade ettiği "$\left(p \Rightarrow q\right)$"dan "$\left(q \Rightarrow p\right)$"yi çıkarsamadır. Alan yazında "converse error" olarak adlandırılan bu hatada (Epp, 2010, s.37), "$p \Rightarrow q$" şeklinde bir koşullu önermenin ispatının yapılması için "q" varsayılıp "p" gösterilmeye çalışılır. "$p \Rightarrow q$" şeklinde bir koşullu önermenin ispatının yapılması için bu önermenin karşıt tersini almak yerine sadece tersinin alınarak "$p' \Rightarrow q'$" önermesinin ispatlanmaya çalışılması ise alan yazında "inverse error" olarak adlandırılmıştır (Epp, 2010, s.38).

Bu hatalı çıkarsamalarda ve “ise” bağlacı ile kurulan önermelerin değilini alırken öğrencilerin zorlanmasında günlük hayatta kullanılan dilin de etkisi vardır (Epp, 2003, s. 890). Örneğin “Yemeğini yersen dışarıya oyun oynamaya çıkabilirsin” gibi bir önermeye, “yemeğini yemezsen dışarıya oyun oynamaya çıkamazsın” gibi yanlış anlamlar yüklenebilmekte, “Ben Fatma olsaydım onun yaptığını yapmazdım” şeklindeki bir önermenin değili “Hayır, sen Fatma olsaydın, tam olarak onun yaptığını yapardın” şeklinde alınabilmektedir.

1.1.2.2.3. Niceleyici kullanımı

Öğrencilerin ispat yaparken güçlük yaşadıkları bir diğer mantık konusu da niceleyici kullanımıdır. Matematikte evrensel (her) ve varlık niceleyicisi (bazı) olmak üzere iki niceleyici türü de sıklıkla kullanılmaktadır. Dubinsky, Elterman ve Gong’un (1988, s.45) da belirttiği gibi matematiksel olarak “$\forall$” sembolü ile temsil edilen evrensel ve matematiksel olarak “$\exists$” sembolü ile temsil edilen varlık niceleyicileriyle çalışma becerisi birçok matematiksel fikre ulaşmak için önemli ve gerekli araçlardır. Matematiksel söylemlerin temelinde, miktar için kullanılan “her”, “birkaç” ya da “her bir”, “herhangi bir” gibi kelimeler olup çoğu önemli matematiksel olguların, bu kelimelerden en az birini içerdiği söylenebilir (Epp, 1999). Örnek olarak limitin formal tanımı verilebilir:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ olur (Formal limit tanımı)

Yapılan pek çok çalışma, öğrencilerin ileri düzey matematikte yer alan limit ve süreklilik gibi kavramlarda yaşadıkları zorluk kaynaklarından biri olarak niceleyicileri göstermektedir (Tall ve Vinner 1981; Cottrill vd. 1996; Juter, 2005).

Niceleyicilerin sadece belli matematiksel kavramların üzerinde etkisi yoktur. Genel olarak matematiksel muhakeme ve ispat yaparken de niceleyicilerin kullanımı oldukça önemlidir. Epp (2003) bir önermenin “her” veya “en az bir” ile başlamasının, bu önermenin doğru olup olmadığının nasıl değerlendireceğini ve ondan ne çıkarsanacağını belirlediğini ifade etmiştir.

İnformal bir ortamda kişi “Tüm A’lar B’dir” bilgisine sahipse ve sadece “Bazı A’lar B’dir” derse çoğu insan bu kişinin dürüst olmadığını düşünecektir (Epp, 2003). Diğer bir ifadeyle “Bazı A’lar B’dir” cümlesi normal olarak “Bazı A’ların B olmadığını” gerektirir.

Fakat matematikte bu gerektirme geçersizdir. Ayrıca öğrenciler niceleme yapılan önermelerin değillerini almakta da zorlanmaktadırlar (Dubinsky vd., 1988; Epp 2003, Bardelle, 2011).

Epp (2003), İngilizce'de kişinin bir varlık ya da genelleme cümlesinin değilini birkaç farklı şekilde alabildiğini ifade etmiştir. Bunlardan biri basit olarak "değil" kelimesini cümleye eklemektir. Örneğin "Tüm çimenler yeşildir" cümlesinin değilini almak için "Bazı çimenler yeşil değildir", "Tüm çimenler yeşil değildir" ve "Tüm çimenler yeşildir değildir" diyebiliriz. Epp, bazı gramercilerin "Tüm çimenler yeşil değildir" cümlesinden kaçınılması gerektiğini ifade ettiklerini belirtmiştir. Çünkü bu cümle belirsizdir.

Niceleme ile ilgili bir diğer zorluk da pek çok araştırmacının da belirttiği gibi birden fazla niceleyicinin kullanıldığı önermelerdir (Dubinsky vd., 1988; Dubinsky, 1997; Dubinsky ve Yiparaki, 2000; Epp, 2003; Piatek-Jimenez, 2010). Öğrenciler, sırasıyla "en az bir" ve "her" ya da tam tersi sıralamada niceleyicilerin kullanıldığı önermelerin doğruluklarını değerlendirmede zorlanmaktadırlar. Dubinsky vd. (1988) ve Dubinsky (1997), öğrencilerin iki ve daha fazla niceleme içeren karmaşık İngilizce önrmeleri anlamalarını APOS Teorisi çerçevesinde araştırmış ve öğrencilerin niceleme şemalarını nasıl oluşturduklarına ilişkin genetik çözümleme yapmışlardır. Dubinsky vd. (1988), öğrencilerin iki niceleyici içeren, anadilde verilen böyle karmaşık cümlelerin doğruluk ve yanlışlık değerlerini belirleme ile doğruluk ve yanlışlık değerlerini belirleyebilmek için bu önermelerin değilini almada zorlandıklarını bulmuşlardır. Ayrıca söz konusu karmaşık önermelerin anlamından giderek değilini alan öğrencilerin, değilini alma kurallarını uygulayan (De Morgan Kuralları) ya da önermelerin değilini önermenin her bir parçasının ayrı ayrı değilini alıp sonrasında bu parçaları birlikte ele alan öğrencilere göre daha az başarılı oldukları görülmüştür.

Mantığın ispat yapmadaki önemli rolü pek çok matematik eğitimcisi tarafından ifade edilmesine rağmen (Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Epp, 2003) mantığın tahmin edildiği kadar ispatlama sürecinde etkisi olmadığı da ifade edilmektedir.

1.1.2.3. İspat yöntemleri

Öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelenmesinde göz önünde bulundurulması gereken bir diğer durum da ispat yöntemleri bilgisidir. İspat yöntemlerine ilişkin alan yazında pek çok sınıflama yapıldığı görülmektedir (Milli Eğitim Bakalığı [MEB], 2011;

Özer, Çoker ve Taş, 2010; Epp, 2010). Alan yazın incelendiğinde ispat yöntemlerinin farklı şekillerde sınıflandırıldığı görülmektedir. Özer, Çoker ve Taş (2010) ispat yöntemlerini:

1) Doğruluk çizelgeleri
2) Doğrudan ispat
3) Dolaylı ispat
4) Olmayana ispat
5) Tümevarım

olmak üzere beş başlık altında toplamıştır. Ortaöğretim programında ise ispat yöntemleri:

1) Tümevarım
2) Tümdengelim
    - Doğrudan ispat
    - Dolaylı ispat
        - Olmayana ergi yöntemi ile ispat
        - Çelişki yöntemi ile ispat
        - Deneme yöntemi ile ispat
        - Aksine örnek vererek ispat

şeklinde sınıflandırılmıştır (MEB, 2011). Epp (2010) ispat yöntemlerini yedi başlık altında toplamıştır:

1) Doğrudan ispat
2) Karşıt ters ile dolaylı ispat
3) Çelişki ile dolaylı ispat
4) Durumlarla ispat
5) Aksine örnek ile ispat
6) Tüketerek ispat
7) Varlık ispatı

İspat yöntemlerinin bir sınıflandırmasında belli bir isimle ifade edilen bir ispat yöntemi başka bir sınıflandırmada başka bir isimle ifade edilebilmektedir. Örneğin Özer, Çoker ve Taş'ın (2010) ispat yöntemi sınıflandırmasında "olmayana ergi" şeklinde adlandırılan ispat yöntemi, MEB (2011) tarafından "çelişki yöntemi ile ispat" şeklinde adlandırılmıştır. MEB'in (2011) "olmayana ergi yöntemi ile ispat" şeklinde isimlendirdiği ispat yöntemini ise Özer, Çoker ve Taş'ın (2010) "dolaylı ispat", Epp'in (2010) ise "karşıt ters ile dolaylı ispat" şeklinde adlandırmıştır. Burada önemli olan ispat yöntemlerinin nasıl isimlendirildiği değil ispat yönteminin dayandığı esaslardır. Araştırmada bu sınıflamalardan Epp'in (2010) sınıflaması kullanılacak olup bu ispat yöntemlerinden "doğrudan ispat", "karşıt ters ile ispat", "çelişki ile ispat", "aksine örnek ile ispat" ve "varlık ile ispat" yöntemleri ele alınacaktır. Aşağıda bu ispat yöntemlerinin dayandığı esaslar kısaca özetlenmiştir:

Doğrudan İspat: Bu ispat yönteminde "$p \Rightarrow q$" şeklinde bir koşullu önerme verildiğinde "p" önermesinin doğru olduğu varsayılarak bilinenlerden ("p" önermesi, tanım, teorem, özellik, vb.) hareketle "q" önermesinin doğru olduğu çıkarsanmaya çalışılır.

Karşıt Ters ile İspat: Karşıt ters ile ispat yöntemi, "$p \Rightarrow q$" koşullu önermesi verildiğinde bu koşullu önermeye denk olan "$q' \Rightarrow p'$" koşullu önermesinin ispatlanması esasına dayanır. Bunun için doğrudan ispat yöntemi kullanılarak "q'" önermesinin doğru olduğu varsayılarak bilinenlerden (tanım, teorem, özellik, vb.) hareketle "p'" önermesinin doğru olduğu çıkarsanmaya çalışılır.

Çelişki ile İspat (Olmayana Ergi ile İspat): Çelişki ile ispat yöntemi, ispatlanması istenen önermenin değilinin doğru olduğunun kabul edilmesi durumunda bir çelişki elde edilmesi ve buradan da önermenin değili yanlış olduğundan önermenin kendisinin doğru olması sonucuna ulaşılması esasına dayanır. Örneğin "$p \Rightarrow q$" şeklinde bir koşullu önerme verilmesi durumunda bu önermenin değili olan "$p \wedge q'$" önermesinin doğru olduğu kabul edilir. "p", "q'" önermeleri ve bilinenlerden (tanım, teorem, özellik, vb.) hareketle bir çelişkiye ulaşılır. Dolayısıyla "$p \Rightarrow q$" koşullu önermesinin değili olan "$p \wedge q'$" önermesi yanlış olduğundan "$p \Rightarrow q$" koşullu önermesi doğru olur.

Aksine Örnek ile İspat: Bu ispat yöntemi, evrensel niceleyici içeren bir önerme için önermenin tanım kümesinde önermeyi sağlamayan bir elemanın bulunması ile önermenin yanlışlığının ispatlanmış olması esasına dayanır.

Varlık İspatı: Bu yöntemde, varlık niceleyicisi içeren bir önerme için önermenin tanım kümesinden bir elemanın önermeyi sağladığının gösterilmesi, önermenin doğru olduğunun gösterilmesi için yeterlidir.

Öğrenciler bu ispat yöntemlerini uygularken çeşitli hatalar yapmaktadırlar. Epp (2010) öğrencilerin matematiksel ispatları yazarken genel olarak yaptıkları hataların bazılarını aşağıdaki şekilde özetlemiştir (s. 135-137).

Örnekler üzerinden tartışma: Örneklere bakmak problem çözücüye yardımcı olan en yararlı uygulamalardan biri olup matematik öğretmenleri tarafından da teşvik edilen bir uygulamadır. Fakat bir önermenin birkaç özel örnek için doğru olduğunu göstererek ispat yapmak hatalıdır. Verilen önerme için bir özellik genelde doğru olmayıp pek çok örnek için doğru olabilir. Aşağıda herhangi iki çift sayının toplamının çift olmasına ilişkin hatalı bir ispat sunulmuştur:

"Bu önerme doğrudur çünkü eğer m=14 ve n=6 ise ki bu sayıların her ikisi de çifttir o zaman m+n=20'dir ki bu sayı çifttir."

Bazı kişiler bu tür bir argümanı ikna edici bulabilirler, çünkü durum sağlanır ve sonucun doğru olduğunu destekleyen bir delil vardır. Ancak bir argüman doğru bir sonuca sahip olsa bile geçersiz olabilir. Örneklerden elde edilen argüman doğru bir önermenin ispatı için hatalı bir şekilde kullanılabilir. Örnekten de görüldüğü gibi "m+n çifttir" sonucunun "m=14" ve "n=6" için doğru olduğunu göstermek yeterli değildir. Sonucun herhangi bir m ve n çift tam sayısı için doğru olduğunu gösteren bir argüman verilmelidir.

Farklı iki şeyi ifade etmek için aynı harfin kullanılması: İspat yapmaya yeni başlayan bazı kişiler yeni bir değişkene daha önceden tanıtılan değişkenle aynı harfi verebilir. Aşağıda buna ilişkin bir örnek verilmiştir:

"m ve n'nin tek tam sayılar olduğunu varsayalım. O zaman teklik tanımı ile belli bir k tam sayısı için m=2k+1 ve n=2k+1'dir."

Bu ifade biçimi yanlıştır. Hem m hem de n için verilen ifadelerde aynı "k" sembolünü kullanmak "m=2k+1=n" olmasını gerektirir. O zaman ispatın geri kalanı sadece birbirine eşit "m" ve "n" tam sayıları için geçerli olacaktır. Bu durum "m" ve "n"'nin keyfi seçilen tek tam sayılar olması varsayımına aykırıdır. Yapılan ispat "3" ve "5"'in toplamının çift olmasını göstermeyecektir.

Sonuca atlama: Kişiler, yeterli bir neden vermeksizin bir şeyin doğru olduğunu ileri sürebilirler. Örneğin "herhangi iki çift tam sayının toplamı çifttir" önermesinin ispatını ele alalım:

"m ve n'nin herhangi çift tam sayılar olduğunu varsayalım. Tekliğin tanımına göre, r ve s belli tam sayılar olmak üzere m=2r ve n=2s'dir. O zaman m+n=2r+2s'dir. Böylece m+n çifttir."

Bu ispattaki problem oldukça önemli olan "2r+2s=2(r+s)" hesaplamasının eksikliğidir. İspatın yazarı zamanından önce sonuca geçmiştir.

Döngüsel muhakeme: Döngüsel muhakeme ile uğraşmak ispatlanan şeyi varsaymak anlamına gelmektedir. Bu durum sonuca atlamanın başka bir çeşidi olarak da görülebilir. Örnek olarak aşağıda “iki tek tam sayının çarpımı tektir” önermesinin ispatı ele alınmıştır. “m ve n’nin herhangi bir tek tamsayı olduğunu varsayalım. Tek tamsayılar çarpıldığında çarpım tektir. Bu nedenle m.n tektir.”

Bilinen ve gösterilmek istenen şeyler arasındaki karmaşa: Döngüsel muhakemeden daha zor algılanan bir diğer durum da gösterilmek istenen sonuç, değişken kullanılarak ifade edildiğinde meydana gelmektedir. Aşağıda buna ilişkin “herhangi iki tek tamsayının çarpımı tektir” önermesinin ispatı verilmiştir:

“m ve n’nin herhangi iki tek tam sayı olduğunu varsayalım. m.n’nin tek olduğunu göstermeliyiz. Bu bir s tam sayısının var olduğu öyle ki m.n=2s+1 olduğu anlamına gelir. Teklik tanımı aracılığıyla da a ve b tamsayıları vardır öyle ki m=2a+1 ve n=2b+1’dir. O zaman m.n=(2a+1)(2b+1)=2s+1’dir. Böylece s bir tam sayı olduğu için teklik tanımına göre m.n tektir.”

Bu örnekte ispatı yazan kişi gösterilmek istenen sonucu (m.n tektir) tekrar ifade etmiştir. Yazar “bir s tamsayısı vardır öyle ki m.n=2s+1” yazmıştır. Yazar daha henüz yokken ya da oluşturulmamışken s’nin varlığını varsayarak doğrulanmamış olan sonuca atlamıştır. Bu hata, eğer yazar “bu durum bir s tam sayısı vardır öyle ki mn=2s+1 olduğunu göstermeliyiz anlamına gelir” şeklinde yazarsa kaçınılmazdır. Bu tür bir hatadan kaçınmanın en iyi yolu hipotezin bir parçası ya da hipotezden çıkarsanan bir şey olmadıkça ispatta bir değişken tanıtmamaktır.

Yukarıda ifade edilen ispatlama sürecini etkileyen durumları da göz önünde bulundurarak Selden ve Selden (2007) ispatlama becerisinin analizi için bir çerçeve geliştirmiştir. Üniversite öğrencilerinin ispatlama becerilerini analiz etmek için geliştirilen bu çerçevede, öğrencilerin sahip olması gereken pek çok beceri ele alınmış ve öğrencilerin ispat yaparken sıklıkla kullandıkları davranışsal bilgiden (behavioral knowledge) bahsedilmiştir. Aşağıda Selden ve Selden’in (2007) üniversite öğrencilerinin ispat yazımını analiz etmek için geliştirdiği bu teorik çerçeve ve bu çerçevede ele aldığı, ispat sürecinde önemli bir rolü olan davranışsal bilginin ne olduğuna ilişkin Selden ve Selden’in (2008) geliştirmiş olduğu davranışsal şemalar (behavioral schemas) açıklanmıştır.

1.2. Selden ve Selden'in (2007) Teorik Çerçevesi

Selden ve Selden (2007), çeşitli yapıları olan ispatları ve lisansüstüne yeni başlayan öğrenciler ile lisans öğrencilerinin ispatlama becerilerini analiz etmek için zengin bir çerçevenin gerektiğini ifade etmiştir. Bu nedenle bir lisans ya da lisansüstü öğrencisinin ispatının, ispat yapmaya katkıda bulunan ve öğrenci gelişiminin farklı dönemlerinde ve farklı şekillerde öğrenilebilen çeşitli daha küçük becerileri içeren daha detaylı bir çerçeve (finer-grained framework) aracılığıyla açıklamanın daha yararlı olduğunu vurgulamışlardır (Selden ve Selden, 2007, s. 1).

Selden ve Selden (2007, s. 3) çalışmasında ispatların üç yapısı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu yapılar:

1) Alt ispatlar ve alt yapılarla ilgilenilen *hiyerarşik yapı* (örneğin $\varepsilon - \delta$ ispatında bir δ bulma durumunda birden fazla aşamanın yapılması gerekir)

2) İdealize edilen bir ispatlayıcı tarafından (hata yapmayan, yaptıkları hataya yol açmayan ve her bir adımı mümkün olduğunca yazan) oluşturulan bir ispat boyunca aşamaların sıralanmasının açıklandığı bir lineer yol olan *yapılış yolu (construction path)*

3) İspatların *formal-retorik* ve *problem merkezli* kısımlara ayrımı

şeklindedir.

Selden ve Selden (2007) bu yapıları, tek değişkenli analizde yer alan "f ve g fonksiyonları a noktasında sürekli olmak şartıyla, f+g a noktasında süreklidir" teoreminin ispatı üzerinden açıklamışlardır. Öncelikle bu teoremin ispatı sunulmuş, sonrasında ispat analiz edilmiş, teoreme ilişkin alt ispatlar ve alt yapılar oluşturularak hiyerarşik olarak ispat inşa edilmiştir. Eş zamanlı olarak idealize edilmiş ispatlayan tarafından yazılan cümlelerdeki sıra verilerek, yapılış yolu inşa edilmiştir. Bu teoremin ispatının aşamaları, ispat sırasındaki yerlerine göre numaralandırılarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir (Selden ve Selden, 2007, s. 5):

İspat: [1] a bir sayı ve f ve g a'da sürekli fonksiyonlar olsunlar. [2] ε sıfırdan büyük bir sayı olsun. [3] $\varepsilon/2 > 0$ olduğuna dikkat edelim. [4] Şimdi f a'da sürekli olduğu için bir $\delta_1 > 0$ vardır öyle ki herhangi bir x_1 için eğer $|x_1 - a| < \delta_1$ ise o zaman $|f(x_1) - f(a)| < \varepsilon/2$'dir. [5] Aynı zamanda g a'da sürekli olduğu için, bir $\delta_2 > 0$ vardır öyle ki herhangi bir x_2 için eğer $|x_2 - a| < \delta_2$ ise o zaman $|g(x_2) - g(a)| < \varepsilon/2$'dir. [6] $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ olsun. [7] $\delta > 0$ olduğuna dikkat edelim. [8] x bir sayı olsun. [9] $|x - a| < \delta$ olduğunu varsayalım. [10] O zaman $|x - a| < \delta_1$, böylece $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$. [11] Aynı zamanda $|x - a| < \delta_2$, böylece $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ olur. [12, 13, 14, 15] Şimdi

$|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| = |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \leq |(f(x) - f(a))| + |(g(x) - g(a))| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

[16] Bu nedenle $|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$. [17] Bu durumda f+g a'da süreklidir.

Yapılış yolunun ilk aşaması ispatta ya da ispatın hiyerarşik yapısında olmayan, teorem cümlesinin açıklığa kavuşturulmasıyla elde edilen [H1] cümlesidir. Bu cümle, standart mantık bağlaçlarını kullanarak ve niceleyici ile değişkenlerden açıkça bahsederek daha formal bir şekilde cümlenin tekrar yazılmasıyla elde edilir. Bu durumda aşağıdaki cümle elde edilir:

H1: "Her reel değerli f fonksiyonu, her reel değerli g fonksiyonu ve her a reel sayısı için, eğer f fonksiyonu ve g fonksiyonu a noktasında sürekli ise o zaman f+g fonksiyonu a noktasında süreklidir."

Teorem cümlesinin bu yorumu, cümlenin mantıksal yapısını ortaya çıkarır. Yapılan ispatın başka bir teoremi değil de bu teoremi ispatladığından emin olmak için bu mantıksal yapının anlaşılması gerekir. Mantıksal yapı, "fonksiyon", "+" ve "süreklilik" kavramlarının anlamından bağımsız olup, bu yapı ispatın ilk ve son cümlesini açığa çıkarır. Bunların hepsi Selden ve Selden (1995)'in "ispat çerçevesi" olarak adlandırdıkları yapıyı, başka bir ifadeyle ispata ilişkin matematiksel kavramların detaylı bilgisine bağlı olmayan, bir ispatın en üst düzey mantıksal yapısını oluşturur.

Bu durumda idealize edilen ispatlayanın elde ettiği yapılış yolunun bir kısmı [H1], [1], [17] şeklindedir ve sonuçta oluşan hiyerarşik yapının bir bölümü aşağıda Şekil 1.3.'te gösterildiği gibidir.

İspat: [1] a bir sayı ve f ve g a'da sürekli fonksiyonlar olsunlar.
…
[17] Bu durumda f+g a'da süreklidir.

Şekil 1.3. *Hiyerarşik yapının en üst düzeyi (Selden ve Selden, 2007, s.6)*

Sonrasında f+g fonksiyonunun a noktasında sürekli olması tanımını uygulayarak [17] satırı açıklığa kavuşturulur ve bu açıklığa kavuşturma işlemi yeni bir cümle olan [H2]: "Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki her x için eğer $|x - a| < \delta$ ise o zaman $|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$."

şeklindeki cümleyi verir; bu cümle bir alt ispat yapmayı gerektirir. Bu alt ispat için bir ispat çerçevesi yazarak [H1], [1], [17], [H2], [2], [7], [8], [9], [16] şeklinde bir yapılış yolu elde edilir ve bu durumda elde edilen hiyerarşik yapı aşağıdaki gibi olur:

İspat: [1] a bir sayı ve f ve g a'da sürekli fonksiyonlar olsunlar.

[2] ε sıfırdan büyük bir sayı olsun. $\delta = \cdots$

[7] $\delta > 0$'dır. [8] x bir sayı olsun. [9] $|x - a| < \delta$ olduğunu varsayalım.

[16] Bu nedenle $|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$.

[17] Bu durumda f+g a'da süreklidir.

Şekil 1.4. *Hiyerarşik yapıya ikinci bir düzey eklemek (Selden ve Selden, 2007, s.6)*

Sonra δ'nın elde edilmesi kısmı eklenir ve ispat bitirilir. Böylece aşağıdaki hiyerarşik yapıya ulaşılır:

İspat: [1] a bir sayı ve f ve g a'da sürekli fonksiyonlar olsunlar.

[2] ε sıfırdan büyük bir sayı olsun.

[3] $\varepsilon/2 > 0$ olduğuna dikkat edelim. [4] Şimdi f a'da sürekli olduğu için bir $\delta_1 > 0$ vardır öyle ki herhangi bir x_1 için eğer $|x_1 - a| < \delta_1$ ise o zaman $|f(x_1) - f(a)| < \varepsilon/2$'dir. [5] Aynı zamanda g a'da sürekli olduğu için, bir $\delta_2 > 0$ vardır öyle ki herhangi bir x_2 için eğer $|x_2 - a| < \delta_2$ ise o zaman $|g(x_2) - g(a)| < \varepsilon/2$'dir. [6] $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ olsun.

[7] $\delta > 0$'dır. [8] x bir sayı olsun. [9] $|x - a| < \delta$ olduğunu varsayalım. [10] O zaman $|x - a| < \delta_1$, böylece $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$. [11] Aynı zamanda $|x - a| < \delta_2$, böylece $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ olur. [12, 13, 14, 15] Şimdi $|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| = |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \leq |(f(x) - f(a))| + |(g(x) - g(a))| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

[16] Bu nedenle $|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$.

[17] Bu durumda f+g a'da süreklidir.

Şekil 1.5. *Hiyerarşik yapının üçüncü kısmını ekleme ve ispatı bitirme (Selden ve Selden, 2007, s.7)*

Şekil 1.5'te önce yapılış yolunun [3]-[6] satırları, sonrasında [10]-[15] satırları eklenmiştir. İlk eklenen [3]-[6] satırları hiyerarşik yapıda yeni bir düzey olarak düşünülebilir; fakat yapılan ikinci ekleme olan [10]-[15] satırları için aynı şey geçerli değildir. Çünkü [3]-[6] satırları tek başına δ'nın oluşumu içindir; fakat [10]-[15] satırları tek başına bir alt ispat değildir. Bu satırlar [H2] ispatının yani [2]-[16] satırlarının bir bölümünü oluştururlar.

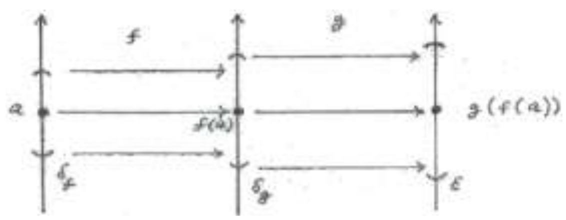
Bu durumda idealize edilen ispatlayanın yapılış yolu; [H1], [1], [17], [H2], [2], [7], [8], [9], [16], [3], [4], [5], [6], [10], [11], [12], [13], [14], [15] şeklindedir.

Burada idealize edilen ispatlayanın yapılış yolundaki [H1], [1], [17], [H2], [2], [7], [8], [9], [16] aşamaları, ispatlanacak teoremin mantıksal yapılarını anlamayı ve bir noktada sürekli olma tanımını bilmeyi gerektirir. Ayrıca kişinin, teoremin bölümleri ile onun ispatının nasıl ilişkilendirileceğini bilmesi gerekir; bu bilgiyi Selden ve Selden (2007) "davranışsal bilgi" (behavioral knowledge) olarak adlandırmıştır. Örneğin bir teoremin formal versiyonu "Her x reel sayısı için" diye başlıyorsa, o zaman doğrudan ispatta kişi ispata x değişkenini tanıtmayla yani "x bir reel sayı olsun" gibi bir cümle ile başlayabilir. İspat yapmak için bu şekilde pek çok davranışsal bilgiye ihtiyaç vardır. Burada öğrencinin böyle bir davranışsal bilgiyi açıkça ifade edebilmesi çok önemli değildir; önemli olan ispatın devamını yazarak, konuşmayla ya da içinden de olsa devamını getirme eğilimidir. İspata ilişkin uygun davranışsal bilgiye sahip bir öğrenci için ispatın hiyerarşik yapısını oluşturmak oldukça açık olabilir. Böyle bir hiyerarşik yapıyı yazmak, lisedeki bir cebir denklemini çözmek gibi bir şemaya başvurmak şeklinde düşünülebilir. Bu yazım, teoreme ilişkin kavramların derinlemesine anlaşılmasına, sezgisine ya da Schoenfeld'in (1985) belirttiği anlamda özgün bir problem çözmeye bağlı değildir. Selden ve Selden (2007) ispatın [1], [2], [7], [16] şeklindeki kısmını formal-retorik kısım, geriye kalan idealize edilen ispatlayanın [3], [4], [5], [6], [10], [11], [12], [13], [14], [15] şeklindeki yapılış yolunu ise problem-merkezli kısım olarak adlandırmışlardır. Bir ispatın problem merkezli bu kısmı problem çözmeyi gerektirir. Problem-merkezli kısımdaki aşamalar için kavramsal bilgi, matematiksel sezgi ve doğru zamanda doğru kaynakların zihne getirilmesi becerisine başvurulur. Bir ispatın formal-retorik kısmını oluşturan teoremler ispatın geri kalanının yapılması için "gerçek problem"in ortaya çıkarılmasında yararlı olurlar. Yukarıdaki örnekte kişi sürekli fonksiyonlara ilişkin olarak fonksiyonlarla ilgili görsel uzamsal bir sezgiye sahip olabilir ve bu sezgi ispatın yapılmasında kişiye yardımcı olabilir. Ayrıca ispatın [1], [2], [7], [16] şeklindeki formal-retorik kısmı,$|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir δ bulunması problemini açığa çıkarır. Burada fonksiyonlara ilişkin sezgiler yardımıyla çözüme ulaşılamaz; onun yerine f ve g fonksiyonlarının sürekli olması tanımında $\varepsilon/_2$'yi kullanmak, elde edilen iki δ'dan küçük olanı seçmek, üçgen eşitsizliğini kullanmak ve cebirsel bazı işlemler yapmak gerekir. Bu ispat örneğindeki yapılış yolunda diğer çoğu ispatta olduğu gibi ispatın tüm formal-retorik kısmı önce gelir ve sonrasında problem-merkezli kısım yapılır. Ayrıca uzun ispatlarda, her alt ispatın kendi formal retorik kısmı ve problem-merkezli kısmı olabilir.

Selden ve Selden (2007), üniversite öğrencilerinin ispat yazma becerilerini araştırabilmek için geliştirdikleri çerçevelerinin yanı sıra çerçevelerine katmadıkları, fakat ispat yapma sürecinde oldukça önemli olduğunu düşündükleri üç informal gözlemlerine yer vermişlerdir. Bunlar "ispat biçimi", "kendini ikna etme" ve "mantık"tır.

Selden ve Selden (2007) öğrencilerin ilk olarak ispat yapmaya başladıklarında ispatın ne olduğunu sorgulayabileceklerini ifade etmişlerdir. Öğrencilerden öğrenim hayatları boyunca zaman zaman sadece ikna edici bir argüman yazmaları istenmesine rağmen aslında ispatlar sadece ikna edici tümdengelimsel argümanlar değildir; ispatlar özel bir biçimde yazılan metinlerden oluşmaktadır. Eğer ispat yapmaya yeni başlayan öğrenciler, ispatı özel bir biçimde yazmanın gerekliliğini fark etmezlerse, çok kolay ispatlarda bile hatalar yapabilirler. Selden ve Selden (2007) bu durumu aşikarlık engeli (obviousness obstacle) olarak adlandırmıştır. Bu duruma örnek olarak Selden ve Selden (2007), Moore (1994)'un çalışmasındaki, üniversite öğrencisinin "A ve B kümeleri $A \cap B = A$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman $A \cup B = B$'dir" cümlesini bir Venn diyagramı çizerek ve küme eşitliği, alt küme, kesişim, birleşim kavramlarına ilişkin anlamasına dayanan sezgisel argümanını, informal bir dil kullanarak ifade eden öğrencisini vermişlerdir (Şekil 1). Selden ve Selden, bu öğrencinin ispatın bir biçimi olduğuna ilişkin bir anlayış geliştirmediğini ve bu şekildeki oldukça açık teoremlerin ispatının öğrenciye zor gelebileceğini ifade etmişlerdir.

Selden ve Selden (2007) kendini ikna etme olarak ise öğrencinin ilk önce sezgisel olarak kendisini ikna etmesi olarak ele almış ve bunun ispat yapmada öğrenciye yardımcı olacağını ifade etmişlerdir. Örneğin "Her tek değişkenli reel değerli fonksiyon için eğer f a'da sürekli ve g f(a)'da sürekli ise o zaman gof a'da süreklidir" teoremi için aşağıda verildiği gibi bir görsel-uzamsal sezgi geliştirebilir.



Şekil 1.6. *gof'un a'da sürekli olduğuna ilişkin geliştirilen bir temsil (Selden ve Selden, 2007, s.16)*

Şekil 1. 6’daki gösterim, söz konusu teoremin doğru olduğunu gösterecek ve $\varepsilon - \delta$ komşuluk argümanının genişletilmesi ispatın yapılmasını sağlayacaktır. Fakat her teorem için kişinin kendisini sezgisel olarak ikna etmesi mümkün değildir.

Selden ve Selden (2007), bir önermenin değilinin nasıl alındığını anlama gibi mantığın bazı kısımlarının bazı ispatları oluşturmada oldukça önemli olduğunu belirtmelerine rağmen, ispat yapmaya yeni başlayan öğrencilerin tipik olarak yaptıkları ispatlarda formal mantığın önemli bir rolü olduğu konusunda şüphelerinin olduğunu ifade etmişlerdir. Selden ve Selden, iki sürekli fonksiyonun toplamının sürekli olması teoreminde öğrencilerin çok fazla formal mantığı çağırdıklarını düşünmediklerini belirtmişlerdir. Söz konusu teoremin ispatında üç yerde mantıksal argüman kullanıldığını ([2]’den [3]’e geçerken, [4], [5], [6]’dan [7]’ye geçerken [9]’dan [10]’a geçerken) örneğin [4], [5], [6]’dan [7]’ye geçerken $(P \wedge Q) \Rightarrow R, P, Q \therefore R$ mantıksal argümanının kullanıldığını ifade etmişlerdir. Selden ve Selden, öğrencilerin çok azının bu şekilde mantık argümanlarını kullandıklarını, çünkü bu tür bir teoremin ispatında pek çok doğrudan ispat yapılabileceğini, bu ispatlarda da mantığa çok az başvurulduğunu ve mantığın ispatları anlamada bir önkoşul olmadığını düşündüklerini söylemişlerdir. Ayrıca ispatlar bağlamında mantığın öğretiminin yararlı olabileceğini belirtmişlerdir.

Selden ve Selden (2007) bir öğrencinin ispat yapma becerisine sahip olma durumu ile bir ispat yapabilmek için gerekenleri tartışmış ve bunları koordine etmeye çalışmıştır. Selden ve Selden bunun için “ispat çeşitleri”, “problem-merkezli muhakemeye karşı formal-retorik muhakeme”, “ispatların zorluklarının karşılaştırılması”, “kümeler ve fonksiyonlar”, “mantık” ve “problem-merkezli muhakeme” başlıkları altında bazı önerilerde bulunmuşlardır.

Selden ve Selden (2007) ispata geçiş kitaplarının yazarları tarafından ispatların doğrudan ispat, çelişki ile ispat, tümevarımla ispat gibi türlere ayrıldığını ve bir öğrencinin belli bir teoremin ispatında bu yollardan birinin daha uygun veya daha kolay olduğunu fark etmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Fakat böyle ayrımların öğrencilerin gelişiminde yeterli olmadığını, bazı ispatların karmaşık yapısı ve birkaç niceleyici içermesi nedeniyle kolaylıkla yapılamadığını, bunun için de öğretmenlerin öğrencilerine karmaşık teoremler sunabileceğini belirtmişlerdir.

Selden ve Selden (2007) ispatın formal-retorik kısmı ile problem-merkezli kısmının oluşturulmasında farklı tür bilgilere ihtiyaç olduğunu ve bu nedenle bunların öğretiminin de farklı olacağını ifade etmişlerdir. Selden ve Selden, bu iki kısmı yazma becerilerini formal-retorik muhakeme ve problem-merkezli muhakeme olarak adlandırmışlardır. Bazı ispatlarda problem-merkezli muhakeme önce yapılabilir. Örneğin “Bir kümedeki eleman sayısı n ise, bu kümenin alt küme sayısı 2^n’dir.” şeklindeki bir teoremin ispatında öğrenciler tek tek iki elemanlı, üç elemanlı, dört elemanlı kümelerin alt küme sayılarını bulabilir ve ancak yönlendirme ile tümevarım yöntemini kullanarak bu cümleyi ispatlayabileceklerini fark edebilirler.

Selden ve Selden’in (2007) dikkate aldığı bir diğer durum da ispatların farklı zorluk derecelerinde olmaları ve en önemli zorluk kaynağının ispatı yapacak kişinin bilgisi ve zihin alışkanlıkları olduğunu belirtmişlerdir. Selden ve Selden, bu zorlukların bazen de kişiye özgü olmadığını, ispatın kendi doğasından kaynaklandığını, bir noktada sürekli iki fonksiyonun toplamının da aynı noktada sürekli olması teoremindeki gibi bazı ispatların daha karmaşık bir yapısı olduğunu ifade etmişlerdir.

Selden ve Selden’in (2007) üzerinde durduğu bir diğer konu da kümeler ve fonksiyonlardır. Selden ve Selden, kümeler ve fonksiyonların ispatlarda sıklıkla kullanıldığını belirtmişlerdir. Ayrıca Selden ve Selden, Moore (1994)’un da belirttiği gibi bir tanımın yapılabilmesinden çok bir tanımın ispatta kullanılabilmesinin daha önemli olduğunu ve özellikle problem-merkezli kısımlarda bu durumun oldukça önemli olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bunu yaparken davranışsal bilgi olarak adlandırılan neyin nerede yapılacağı bilgisine ihtiyaçları olacaktır ve Selden ve Selden, bu durumun ispat yaparken soyut tanımlardan öğrenilebileceğini düşünmektedir. Selden ve Selden, bu duruma örnek olarak iki kümenin eşitliğini vermişlerdir. “A = B” olduğunun gösterilmesi için “A ⊆ B” ve “B ⊆ A”nın gösterilmesi gereklidir. Bu durum, A ve B kümelerinin aynı elemanlara sahip olduğu anlamına gelir. Fakat iki kümenin eşitliği ispatlanırken, akla gelmesi gereken bir kümeden keyfi bir eleman alıp o elemanın diğer kümede de olduğunu ve tam tersini göstermektir. Bu ispat için, iki alt ispat gereklidir. Bunlar “varsayalım ki $x \in$ A … o zaman $x \in$ B” ve “varsayalım ki $x \in$ B … o zaman $x \in$ A” olduğunun gösterilmesidir. Selden ve Selden, gözlemlerine dayanarak öğrencilerin ispata hipotezden başladığını ve doğrudan “A = B” olduğu sonucuna vardıklarını, kümelerin elemanlarını göz önünde bulundurmadıklarını belirtmişlerdir.

Selden ve Selden (2007), mantığın ise ispatlarda tahmin edildiği gibi çok fazla kullanılmadığını, mantığın daha çok önermesel kalkulustaki ispatlarda kullanıldığını ve ispatlarda değişken ve niceleyicilerden mümkün olduğunca kaçınma eğilimi olduğunu ifade etmişlerdir. Tipik olarak yapılan ispatlar, tüm x elemanları için yapılan argümanları içermez, onun yerine sabit fakat keyfi bir eleman için yapılan argümanları içerir. Fakat Selden ve Selden, ispatlarda kullanılan mantığın önemine de değinmişlerdir. Örneğin öğrencilerin "$(p \wedge q)'$" ifadesini "$(p' \vee q')$" olarak, "$p \Rightarrow q$" ifadesini "$p' \vee q$" olarak ya da "$q' \Rightarrow p'$" "eğer p olarak almaları, "p" ve "$p \Rightarrow q$" verildiğinde bunlardan "q"yu çıkarsamaları gerekir. Ayrıca Selden ve Selden (1995, 2007), öğrencilerin bir teoremin ispatını yazmaya başlamadan önce teoremin değişkenleri ve niceleyicilerini açık hale getirerek ve "ise" gibi standart mantık bağlaçlarını kullanarak, teoremin mantıksal yapısını açabilmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Öğrencinin, ispatlayacağı teoremin mantıksal yapısına uygun bir ispat çerçevesi oluşturması gerekir. Örneğin çelişki ile ispatta öğrencinin nicelenmiş önermelerin değillerini alabilmesi gerekir. Öğrenci, "Her x için P(x)" cümlesinin değilini "Bir x vardır öyle ki P(x) değildir" şeklinde otomatik olarak alabilmelidir. Kısacası bir öğrencinin bir ispatı yaparken bir teorem veya bir tanımla ilişki kurabilmesi, bunu yaparken de teoremin veya tanımın mantıksal yapısını açması, bir örnek alarak uygun sembolleri de kullanarak öncüllerin ispatta sağlandığını görmesi ve sonucu yazması gerekir.

Selden ve Selden (2007) son olarak problem-merkezli muhakemeyi ele almış ve bu muhakemedeki becerilerin ispat için gereken diğer becerilere göre gözlenmesinin ve ayırt edilmesinin daha zor olduğunu ifade etmişlerdir. Selden ve Selden, problem-merkezli muhakemenin, ispat oluşturmada büyük ve önemli bir rol oynadığı belirtmişlerdir. Selden ve Selden, Schoenfeld'in (1985) problem çözmedeki yaklaşımını baz alarak problem çözmede olduğu gibi ispat yapmada da öğrencilerin kendi çalışmalarını takip etmede başarısız olduklarını ve stratejik bilginin ispat yapmada önemli olduğunu ifade etmişlerdir. Ayrıca ispat yapmada en önemli faktörlerden biri de öğrencilerin sahip oldukları bilgileri akıllarına getirme durumlarıdır. Uygun bilgiyi çağırma, öğrenciler için oldukça zordur. Uygun bilgiyi akla getirme, hem duruma hem de öğrencinin kendi bilgisinin doğasındaki ilişkilere bağlıdır. Örneğin yukarıda da bahsedilen n elemanlı bir kümenin alt küme sayısının 2^n olduğunun ispatında öğrenciler tümevarım bilgisine sahip olmalarına rağmen yönlendirme ile bu bilgiyi akıllarına getirebilmişlerdir.

Selden ve Selden (2007), problem-merkezli muhakemede sezginin önemli bir rolü olduğunu ve sezginin de görsel-uzamsal ve teknik-cebirsel olarak adlandırdıkları iki türe ayrılmasının yararlı olacağını ifade etmişlerdir. Görsel-uzamsal sezgi ile kastedilen; çizilebilen, görselleştirilebilen diyagramlara, resimlere dayanan sezgidir. Bu bir grafik gibi gerçekçi olabileceği gibi metaforik de olabilir. Teknik-cebirsel sezgi ise teoremler ya da tanımlardaki ilişkilere olan aşinalığa bağlıdır. Örnek olarak ispatta yer alan eşitsizliğin manipüle edilmesi verilebilir.

Selden ve Selden ilerleyen yıllarda bu çerçevelerini daha da geliştirmiştir. Selden ve Selden (2015) çalışmasında ispatı iki şekilde ele almıştır. Bunlar ispat metnini oluşturma ve ispat oluşturmanın psikolojik özellikleridir. İspat metnini oluşturma başlığı altında "ispat metni", "ispattaki yapı", "durum-eylem ilişkileri, otomatikleşme ve davranış şemaları" ele alınmıştır. İspat metni bir şiir gibi ispatın da yazımının bir formu olduğunu, ispatta ispat sürecinin tamamının yazılmadığını hatta bazen ispatlayanın niceleyicileri özellikle evrensel niceleyici yazmaktan kaçındığı ifade edilmiştir. İspattaki yapı ise Selden'lerin 2007 yılında da bahsettikleri gibi ispatın formal-retorik ve problem-merkezli olma üzere iki kısımdan oluşmasıdır. Formal-retorik kısımdan kasıt ispatlanacak durumun mantıksal yapısının ortaya çıkarılmasıdır. Bu kısım ispata ilişkin kavramların anlaşılması ya da problem çözmeye bağlı değildir. Hatta bu kısım teknik bir beceri olarak görülmektedir. Problem-merkezli kısım ise problem çözmeye, sezgiye, stratejilere söz konusu kavramlara ilişkin daha derinlemesine bir anlamaya bağlıdır. Birazdan ispat çerçevelerini daha detaylı olarak anlatacağım. Durum-eylem ilişkileri ise birey ispat yaparken belli durumlarla karşılaştığında karşılaştığı durumlara ilişkin bir eylem sergilendikçe durum ve eylem arasında bir ilişki kurulması şeklinde ele alınır. Selden ve Selden (2008), kişinin bir durumla bir eylemi ilişkilendirmesine izin veren kalıcı zihinsel yapıları ise yani bu ilişkinin otomatik hale getirilmesini "davranış şeması" olarak adlandırmışlar. Seldenler davranış şemalarının otomatik olarak harekete geçirilmesinin de kısa süreli belleğin yükünü azaltacağını ifade etmişlerdir. Burada duygulardan kasıt bir şeyi bilme hissidir ve bu ispat oluşturma sürecinde oldukça önemlidir. Örneğin kişi ispat oluşturma sürecinde bir teoremin kullanışlılığını görebilir ve buna ilişkin bir his deneyimleyebilir. Bu da kişinin ispat sürecine devam edip etmemesini etkileyebildiğinden bilişsel eylemlere rehberlik edebilir. Bu tür hisler bilişi etkiler ve bu bilişsel hisler olarak tanımlanır. Öz-yeterlik ise kişinin ispat sürecine devam etmedeki istek ve kararlığı olarak ele alınmış olup bunun da ispat oluşturma sürecini etkilediği ifade edilmiştir. Aşağıda davranışsal şemalar daha ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

1.3. Davranışsal Şemalar

Selden ve Selden (2008), bir çeşit işlemsel bilgi türünün harekete geçirilmesi (enactment) ve bu harekete geçirmenin bilinçle nasıl bir ilişkisinin olduğunu inceledikleri bir perspektif geliştirmiştir. Bu perspektifte, ispat yaparken eylemlerin (action) çoğunun sadece yapıldığını, sonradan bu eylemin doğrulaması yapılsa bile eylemden hemen önceki kavramsal muhakemenin genellikle farkında olunmadığını ifade etmiştir. Örneğin bir teorem "Her x reel sayısı için" şeklinde başlıyorsa o zaman ispatın başında kişi "x bir reel sayı olsun" şeklinde yazabilir ve bunun anlamı, x'in bir değişken olmadığı, belli fakat keyfi bir reel sayı olduğudur (Selden ve Selden, 2008, s. 2). Selden ve Selden, ispat yazımındaki böyle eylemler için eylemin yazımından hemen önce neyin farkında olunduğunu kendilerine sormuş ve eylemi çağıran durumun haricinde, evrensel niceleme yapılan bir teoremi ispatlamada bu soruya verdikleri cevap "hiçbir şey" olmuştur. Selden ve Selden (2008), kavramsal bilgi denilen herhangi bir muhakeme mekanizmasının bilincinde ya da farkında olunmadığını ifade etmiştir. Böyle bir kavramsal muhakemenin, örneğin iç konuşma olarak kolaylıkla yapılabileceğini, fakat bunun yapılmadığını ifade eden Selden ve Selden, yapılan eylemler değişken olmadığı için bir şeyin onlara rehberlik ettiğini belirtmişlerdir. Selden ve Selden verdikleri bu örneği, bir tür işlemsel bilginin harekete geçirilmesi olarak açıklamışlardır. Selden ve Selden (2008)'e göre, kavramsal muhakeme ya da anlamanın, belli bir durumun belli bir eylemi çağırmasını ve eylemin uygulanmasını, tüm bu sürecin birkaç ispatta tekrarlanmasını sağladığında, bu bilgi tümevarımsal olarak ortaya çıkmaktadır. Selden ve Selden, böyle bir eyleme rehberlik eden bu tür bir işlemsel bilginin kullanımının, eylemi doğrularken ki kavramsal bilgiye dayanan muhakeme ile karşılaştırıldığında, zihnin yükünü azaltmada daha yararlı olduğunu düşünmektedir. Ayrıca Selden ve Selden, bu tür işlemsel bir bilginin kullanımının oldukça yaygın olduğunu ve kavramsal bilginin belli bir parçasını hatırlamaya çalışma veya zihne getirilen bir bilgiden bir çıkarsamayı yazma gibi zihinsel eylemleri tetiklediğini ya da bu eylemlere rehberlik ettiğini ifade etmişlerdir. Selden ve Selden (2008); ispatta, muhakemede ve problem çözmede kullanılan kavramsal bilginin çoğunun, bahsedilen şekilde, bir tür işlemsel bilginin harekete geçirilmesiyle kontrol edilebileceğini ifade etmişlerdir. Selden ve Selden, ispat oluşturmada bu şekildeki bir işlemsel bilginin nasıl kullanıldığını anlamak için bir çerçeve geliştirmeye çalışmış ve bunun için matematik eğitimi, psikoloji, nöroloji ve felsefeden yararlanmışlardır. Selden ve Selden (2008), kişinin bir durumla bir eylemi ilişkilendirmesine izin veren kalıcı zihinsel yapıları "davranışsal şema" (behavioral schema) olarak adlandırmışlar. Davranışsal şemalar, bir şeyin neden doğru olduğu veya bir şeyi bilmek değil, işlemsel bilgi örnekleri olup nasıl hareket edileceğini bilmektir (Selden, McKee ve Selden, 2010). Ayrıca davranışsal şemalar, Mason ve Spence'in (1999) "zamanında hareket etmeyi bilmek" (knowing-to-act in the moment) olarak isimlendirdikleri özelliğe de sahiptir (Aktaran Selden ve Selden, 2008). Burada kastedilen ispat oluşturmada gereken özgün problem çözme, sezgi, analiz ve kavramların derinlemesine anlaşılması değil; davranışsal şemaların doğası gereği işlemsel olmasıdır.

Bir kere bilinçli bir gerekçe gerektiren eylemler, tetikleyici durumlarla bağlanarak otomatik hale gelebilir. Üçüncü bir kişi tarafından ya da dışarıdan bakan bir gözle, devamlı bir şekilde <durum, eylem> (<situation, action>) çiftlerinin bağlanması perspektifi, küçük zihin alışkanlıkları (habits of mind) olarak görülebilir. Diğer taraftan bu küçük zihin alışkanlıkları; kişinin iç dünyası ele alındığında veya psikolojik bir bakış açısıyla Selden ve Selden (2008)'in davranışsal şemalar olarak (behavioral schemas) adlandırdıkları kalıcı zihinsel yapılardır (Selden, McKee ve Selden, 2010). Davranışsal şemalar benzer ispat oluşturma deneyimleriyle kazanılır veya öğrenilirler ve bu şemaları otomatik olarak harekete geçirmek (enactment), ispatlayanın işler belleğinin yükünü azaltabilir (Selden, McKee ve Selden, 2010). Bazı şemalar yararlıdır ve doğru ispatlar oluşturmaya katkı sağlarlar, Selden, McKee ve Selden (2010) bunların beceriler olarak da ele alınabileceğini ifade etmişlerdir. Davranışsal bir şema, bir durumla eylem arasında doğru bir şekilde ilişki kurmayabilir (Selden ve Selden, 2008). Selden ve Selden (2008) buna örnek olarak, bir davranışsal şemanın bir öğrencinin "(2a+3)/2b" (durum) şeklindeki bir sadeleştirmeyi "(a+3)/b" (eylem) şeklinde yazması gibi bir kısaltma hatasına yol açmasını vermişlerdir.

Selden, McKee ve Selden (2010), Mary isimli bir lisansüstü öğrencisinin *"*IR^n*'nin tıkız (kompakt) bir A alt kümesi sınırlıdır"* teoreminin ispatındaki <durum, eylem> çiftini açıklayarak, yararlı bir davranışsal şema örneği vermişlerdir. Mary ve lisansüstü öğrencisi olan iki arkadaşı, A kümesinin sınırlı olmadığını varsaymışlar ve sınırlı bir alt kapanışa sahip olmayan A'nın açık bir kapanışını oluşturabilmişlerdir. Öğrenciler hemen bunun A'nın tıkızlığıyla çeliştiğini ve teoremin ispatlandığını görmüşlerdir. Daha önce formal mantık almamış olan Mary, sonlu bir alt kapanışı olmayan bir kapanış bularak teoremin ispatlandığını hemen gördüğünü ifade etmiştir. Mary, ispatın tamamlanması için ihtiyaç duyulan gerekçeyi (warrant) açık olarak ortaya çıkaran mantıksal yapıyı yansıtmamıştır.

Diğer iki öğrencinin de yansıtmaya (reflect) ya da bir gerekçeye ihtiyaç duymadıkları görülmüştür. Buradan Selden, McKee ve Selden (2010), durumu fark eden her bir öğrencinin daha önceden hipotezin kabul edildiği, sonucun yanlış olduğunun varsayıldığı ve sonunda bir çelişkinin elde edildiği pek çok deneyime sahip olduğunu çıkarsadıklarını ifade etmişlerdir. Zihinsel eylem, basit olarak teoremin ispatına karar vermektir. Durum ve zihinsel eylem arasındaki bağın otomatik olduğu ve yansıtma veya bir gerekçeye ihtiyaç duyulmadığı görülmüştür. Selden, McKee ve Selden (2010) bunun öğrencilerin kapsamlı ispat oluşturma deneyimlerinden dolayı gerçekleştiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca daha az deneyim sahibi olan öğrenciler, büyük ölçüde yansıtmaya ihtiyaç duyarlar ve gereksiz yere çelişkiye düşülen şeyi merak ederler. Selden, McKee ve Selden (2010) böyle <durum, eylem> çiftlerinin ispat süreçlerinde önemli bir rolü olduğunu ve yaygın olarak kullanıldığını ifade etmişlerdir.

Selden ve Selden (2009), Moore'un (1994) çalışmasında lisans öğrencilerinin final sınavında yer alan "f ve g, A'dan A'ya fonksiyonlar ve fog 1-1 ise o zaman g 1-1'dir" önermesinin ispatına "g(x)=g(y)"yi varsaymak yerine yanlış yerden, hipotezden başlamalarını zararlı bir davranışsal şema olarak ele almışlardır. Selden ve Selden (2009), pek çok öğrencinin sonucu açmak ve onu ispatlamaya çalışmak yerine alışkanlıkla hemen hipoteze odaklandığını belirtmiştir. Selden ve Selden (2009) öğrencileri sabırla öncelikle ispatların formal-retorik kısımlarını yazmaya yönlendirmeyle bu zararlı şemanın ya da alışkanlığın üstesinden gelinebileceğini ifade etmişlerdir.

1.4. İspatın Okulöncesinden Üniversite Düzeyine Gelişimi

İspatın ileri düzey matematikte yer alacağı ve öğrencilerin lise ve üstü seviyede ispata ilişkin anlamlı bir öğrenme geliştirebileceğini savunan geleneksel bir eğilim vardır (Cooper vd., 2011; Knuth, 2002). Ancak bu eğilim oldukça yanlıştır. National Council Teacher of Mathematics [NCTM] (2000) öğretim programlarının muhakeme ve ispatı okulöncesi dönemden 12. sınıfa kadar geliştirmesi gerektiğini vurgulayarak, tüm sınıf düzeylerindeki öğrencilerin

- muhakeme ve ispatın matematiğin temel yönleri olarak farkında olma
- matematiksel varsayımları araştırma ve oluşturma
- matematiksel argüman ve ispatları geliştirme ve değerlendirme
- çeşitli muhakeme türleri ve ispat yöntemlerini seçme ve kullanma

becerilerine sahip olmaları gerektiğini belirtmiştir (s. 56). Aktaş'ın (2002) da ifade ettiği gibi bilişsel gelişim süreci içerisinde, ispat kavramının gelişimi okulöncesi dönemde başlamaktadır. Piaget'nin sezgisel dönem olarak isimlendirdiği okulöncesi dönem, ispat kavramının gelişimi açısından son derece önemli olup, bu dönemde kişi sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma gibi ispat için temel becerilerini geliştirerek mantıksal düşünmeye geçer (Altıparmak ve Öziş, 2005, s. 27). Piaget'nin somut işlemler dönemi olarak isimlendirdiği ilkokul döneminde ise kişi, somut nesne ve durumlar üzerinden akıl yürütme ve varsayımda bulunmaya başlarlar. İlkokul 3. sınıftan itibaren kişi ulaştığı genellemeleri ve varsayımları test etmeye ve savunmaya başlar ve varsayımlarını sınamak veya varsayımlarının doğruluğunu göstermek için birkaç örneğin yeterli olmadığını bilebilir, karşı örnekleri varsayımlarını çürütebilmek için kullanabilir (Altıparmak ve Öziş, 2005, s.30). Böylelikle kişide matematiksel iddia kavramı oluşmaya başlar.

Ortaokul döneminde öğrencilerde soyut düşüncenin gelişimi söz konusudur. Öğrenciler bu dönemde matematiksel ifadeleri sembolik dil kullanarak ifade etmeye başlarlar. Öğrenciler matematiksel iddiaları tümdengelim ve tümevarım yöntemlerini kullanarak sınayabilir, yanlış olan ifadelere karşı örnekler sunabilirler (NCTM, 2000). Dede ve Karakuş'un (2014, s.65) da belirttiği gibi bu dönemde yapılan ispatlarda formal anlamda eksiklikler olabilmesine rağmen, uygun bir fikir sunma, sunulan fikri test etme ve başkalarının değerlendirmesi için mantıksal açıklamalar yapma gibi önemli özellikler gösterilir.

Lise döneminde ise öğrenciler artık soyut düşünebilmektedir. Öğrenciler tümdegelimsel ispatlar yapabilirler. Öğrencilerden bir önermenin yanlışlığını göstermeleri için bir aksine örnek vermenin yeterli olduğunu fakat doğruluğunu göstermek için örnekler vermenin yeterli olmadığını bilmeleri beklenir (Altıparmak ve Öziş, 2005, s.33). Ülkemizde de ortaöğretim programında tümevarım ve tümdengelimli ispatlar olarak da doğrudan ispat, olmayana ergi yöntemi ile ispat, çelişki yöntemi ile ispat, deneme yöntemi ile ispat ve aksine örnek vererek ispat yöntemleri ele alınmış ve uygun bağlamlarda öğrencilerin bu ispat yöntemlerini kullanarak ispatlama becerilerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır (MEB, 2011).

Üniversite düzeyinde ise artık ispatların, gerekli teoremlerin, tanımların (Dede ve Karakuş, 2014, s.67) ve çeşitli ispat yöntemlerinin kullanılarak formal dille ifade edilmesi beklenmektedir. Üniversitedeki programlarda yer alan çeşitli matematik derslerinde ispatlama becerileri geliştirilmeye çalışılmakta ve genel olarak her ülkede birinci sınıfta ispata geçiş dersleri yer almaktadır (Moore, 1994).

1.5. Ortaokul Matematik Dersi Programında İspat

Ülkemizde 2013 yılında hazırlanan Ortaokul Matematik Dersi Programı incelendiğinde ispata bir kavram ya da bir beceri olarak yer verilmediği görülmektedir (Aylar, 2014, s.354). Programda öğrencilere kazandırılması gereken beceriler "problem çözme", "matematiksel süreç becerileri", "duyuşsal beceriler", "psikomotor beceriler" ve "bilgi ve iletişim teknolojileri" olarak ele alınmıştır (MEB, 2013). "Matematiksel süreç becerileri" de kendi içinde "iletişim", "akıl yürütme" ve "ilişkilendirme" olmak üzere üç başlıkta ifade edilmiştir. Ortaokul Matematik Dersi Programı'nda, akıl yürütme becerisi ise "eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme yöntemlerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci" olarak tanımlanmıştır (MEB, 2013, s.5). Bu nedenle, Aylar'ın (2014, s. 355) da belirtiği gibi programda ispat ile akıl yürütme becerisi arasında dolaylı olarak bir ilişki kurulduğu söylenebilir. Programda öğrencilere akıl yürütme becerisinin kazandırılmasında dikkate alınması gereken göstergeler arasında "çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma", "mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma" ve "bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma "'ya yer verilmesi bu düşünceyi doğrulamaktadır.

1.6. Ortaöğretim Matematik Dersi Programında İspat

2011-2012 Öğretim Yılı'nda uygulamaya konan Ortaöğretim Matematik Programı'nda "Mantık", "Cebir", "Trigonometri", "Lineer Cebir", "Olasılık-İstatistik" ve "Temel Matematik" olmak üzere toplam altı öğrenme alanı bulunmaktaydı. Bu programda öğrenme alanlarından biri olarak ele alınan "Mantık"; önermeler, bileşik önermeler, açık önermeler ve ispat yöntemleri olmak üzere dört alt öğrenme alanından oluşmakta ve 9. Sınıfta matematik öğretimine ilk olarak Mantık ünitesi ile başlanmaktaydı. Aşağıda bu programda yer alan alt "ispat yöntemleri" öğrenme alanındaki kazanımlar verilmiştir (MEB, 2011, s.67):

İspat Yöntemleri

1. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir.

2. İspat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar.

Ortaöğretim Matematik Programı'nın Mantık ünitesi ile başlamasının haklı bir nedeni olduğunu savunan Altun (2011), mantık ünitesi aracılığı ile mantık-matematik ilişkisinin ortaya konulduğunu, mantık biliminin matematiğin gelişmesine olan katkısının tanıtıldığını belirtmiş ve mantık ünitesinin tam olarak kavranamaması durumunda öğrenilen matematiğin temelinde eksiklikler olacağını ve bazı bilgilerin açıklanmasında zorluklarla karşılaşılacağını ifade etmiştir (s.97). Ancak 2013-2014 Öğretim Yılı'nda uygulamaya konulan yeni Ortaöğretim Matematik Programı'nda bir önceki programdan farklı olarak "Sayılar ve Cebir", "Geometri" ve "Veri Sayma ve Olasılık" olmak üzere üç öğrenme alanı tanımlanmıştır. Önceki programda temel öğrenme alanlarından biri olarak alınan Mantık, hazırlanan bu yeni programla birlikte "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanının içinde ele alınmıştır. Ayrıca Mantık, "önermeler ve bileşik önermeler", "açık önermeler ve ispat yöntemleri" olmak üzere iki kısma ayrılmış ve mantık ünitesinin programda veriliş yeri değiştirilerek 11. sınıfın ilk ünitesi olmuştur. Aşağıda yeni Ortaöğretim Matematik Programı'nın Mantık Öğrenme alanına ilişkin "açık önermeler ve ispat yöntemleri" alt öğrenme alanında yer alan kazanımlar verilmiştir (MEB, 2013, s.34-35):

Açık Önermeler ve İspat Teknikleri

1. Her (∀) ve bazı (∃) niceleyicilerini örneklerle açıklar.

- Sözel olarak verilen ve niceleyici içeren açık önermeler sembolik mantık diliyle; sembolik mantık diliyle verilen ve niceleyici içeren açık önermeler de sözel olarak ifade edilir.

2. Açık önermeyi ve doğruluk kümesini örneklerle açıklar.

- Denklem ve eşitsizliklerin açık önerme olduğu vurgulanır.

3. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir.

4. Mantık kurallarını basit teoremlerin ispatlarında kullanır.

- Aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat ve çelişki yoluyla ispat teknikleri verilir.

5. Tümevarım yöntemi ile ispat yapar.

Görüldüğü gibi yeni programda, mantık ünitesinin programda veriliş sırasının değiştiği ancak, ispata yönelik kazanımlarda çok fazla bir değişiklik yapılmadığı görülmektedir.

1.7. Okul Matematiğinde İspat Yapmaya İlişkin Görüşler

Bugüne kadar hem öğrencilerin hem öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin tutumları, geliştirilen ölçekler aracılığıyla incelenmiştir. Bu da öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin görüşleri olarak ifade edilmiştir. Örneğin Moralı vd. (2006), İskenderoğlu (2010) yaptıkları çalışmada, matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğunu araştırmışlardır. Bu çalışmalarda geliştirilen ölçekler kullanılmıştır. Sarı ise (2011) açık uçlu sorular ile öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerini almıştır. Sonuç olarak yapılan bu çalışmalarda, öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı, öğretmen adaylarının ispat yapmanın, matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri ve üzerine düşünmedikleri ifade edilmiştir.

Knuth (2002) ise yaptığı çalışmalarda lise matematik öğretmenlerinin ispata ilişkin kavramsallaştırmalarını incelemiştir. Katılımcıların lise matematik öğretmeni olduğu çalışmada veriler yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla iki aşamada toplanmıştır. Birinci aşamada öğretmenlerin matematik disiplininde ispatı kavramsallaştırmalarına odaklanılmış (başka bir deyişle öğretmenlerin matematik hakkında bilgi sahibi kişiler olarak kavramsallaştırmalarına bakılmış), ikinci aşamada ise lise matematiği bağlamında kavramsallaştırmalarına odaklanılmıştır (öğretmenlerin lise matematik öğretmeni olarak kavramsallaştırmaları). Görüşme boyunca öğretmenlere araştırmacı tarafından oluşturulan farklı argümanlar (geçerlilikleri açısından) verilmiş ve öğretmenlerin bunları değerlendirmeleri istenmiştir. Sonuç olarak öğretmenlerin ispatın rolüne ilişkin istenen düzeyde bir kavramsallaştırmalarının olmadığı görülmüştür. İkinci aşamada ise ilk aşamaya benzer şekilde araştırmacı tarafından oluşturulan argümanlar verilmiş ve her bir argümanın öğretime uygunluğu açısından değerlendirilmesi yani öğretmenin önermenin doğruluğuna öğrencileri ikna etmede bunları kullanma durumları sorgulanmıştır. Öğretmenlerin çoğunluğu, okul matematiğinde ispatın bir önermenin doğruluğunu gösteren tümdengelimsel veya mantıksal bir argüman olduğunu ifade etmiştir. Lise matematiği bağlamında ispatın anlamına ilişkin ise öğretmenlerin cevapları farklı formallik derecelerine göre formal ispatlar, daha az formal ispatlar, informal ispatlar olarak şeklinde üçe ayrılmıştır. Öğretmenler formal ispatla diğer ispatlar arasındaki farkı ortaya koyabilmişlerdir. Fakat öğretmenlerin okul matematiğinde ispatın rolünü tam olarak açıklayamadıkları görülmüştür. Öğretmenlerin çoğu okul matematiğinde ispatın rolünü mantıksal düşünme ve muhakeme becerilerini geliştirmek olarak ifade etmiştir. Öğretmenler genel olarak ispatı, alt sınıflardaki öğrenciler için uygun bulmadıklarını ve alt sınıflar için informal ispatları uygun bulduklarını ifade etmişlerdir.

Schwarz vd. (2008, s. 791, s. 807-808) ise yaptıkları kapsamlı çalışmada, Almanya, Hong Kong ve Avustralya'daki üniversitelerden seçilen öğretmen adaylarının ispat ve argümantasyon alanındaki mesleki bilgileri hakkında yürütülen bir durum çalışmasının sonuçlarını açıklamıştır. Açık uçlu ölçek sorularına dayanarak öğretmen adaylarının matematiksel bilgi ve pedagoji alanlarında sahip oldukları beceriler incelenmiştir. Sonuç olarak üç ülkenin de aday öğretmenlerinin çoğunun ortaokul matematik içeriği gerektiren formal ispatları uygun ve matematiksel olarak doğru bir şekilde yapamadıkları görülmüştür. Bunun aksine tüm ülkelerde öğretmen adaylarının matematik öğretiminde preformal ve formal ispat hakkında pedagojik içeriği yansıtmada en azından ortalama bir beceriye sahip oldukları görülmüştür. Sonuçta üç ülkedeki aday öğretmenlerin de okul düzeyinde ispat yapamadığı ya da uygun bir şekilde ispat yapamadığı görülmüştür. Öğretmen adayları çok ciddi hatalar yapmış, ispatı tamamlayamamış ya da pre-formal ispatı yeniden ifade etmiştir. Çalışmada, öğretmen adaylarının üniversite düzeyinde oldukça güçlü bir matematiksel alt yapıya sahip olsalar bile bunun onların ortaokul düzeyinde ispatlamaya ilişkin tam bir imaj aktarabilecekleri anlamına gelmediği belirtilmiştir.

1.8. Amaç ve Araştırma Soruları

Bu tez çalışmasında ortaokul matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar ve sayılar konusu bağlamında, ispatlama süreçlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Çalışmanın amacı bağlamında aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranacaktır:

1. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçleri nasıldır?
2. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının farklı sınıf düzeylerine göre ispat yapma süreçleri nasıldır?
3. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının almış oldukları matematik derslerindeki başarılarına göre ispat yapma süreçleri nasıldır?
4. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri nasıldır?

1.9. Araştırmanın Önemi

İspatlama oldukça karmaşık bir süreç olup bireylerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle ilkokuldan üniversiteye kadar öğretimin her kademesinde matematik öğretmenlerinin ispatlama becerilerinin gelişmiş olması beklenmektedir. Matematik öğretmenlerinin ispatlama becerileri gelişmediği sürece, matematik öğretmenlerinin öğrencilerini ispatlama sürecinde etkili bir şekilde destekleyemeyeceği açıktır (Stylianides ve Ball, 2008, s.309).

Selden ve Selden'in (2007) de belirttiği gibi öğrencilerin ispatlama becerilerini analiz etmek için matematiksel kavramların ispat sürecinde kullanılmasından, ispatların matematiksel bir dilde ifade edilmesine kadar pek çok becerinin göz önünde bulundurulduğu zengin bir çerçeve gerekmektedir. Bu analiz için öğrencinin tümevarım veya çelişki ile ispat gibi çeşitli yöntemlerle teoremleri ya da belli teorilerdeki teoremleri ispatlayabilme durumlarının belirlenmesinden daha fazlasının bilinmesi gerekmektedir (Selden ve Selden, 2007, s.1). Alanyazın incelendiğinde öğretmen adaylarının ispatlama becerileri üzerine yapılan çalışmaların genel olarak üniversiteye yeni başlayan ya da son sınıfta olan öğretmen adayları ile daha çok bu öğretmen adaylarının ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik bir ders kapsamında yürütüldüğü görülmüştür (örn. İskenderoğlu, 2010; Sarı, 2011). Öğretmen adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmek için nasıl bir öğretim yapılabileceğinin belirlenmesi oldukça önemlidir. Ancak öğretmen adaylarının niçin ispat yapamadıkları ve ispatlama süreçlerinde hangi nedenlerle zorlandıklarının incelenmesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programı derslerinin tasarlanması için fayda olacağı düşünülmektedir. Bugüne kadar yapılan pek çok çalışmada öğretmen adaylarının neden ispatlamada zorlandıklarına ilişkin çeşitli sonuçlar ortaya konmasına rağmen yapılan bu araştırma ile kavram bilgisi, ispat yöntemi ve bunların organizasyonunun temel matematiksel kavramların kullanılmasının beklendiği ispat yapma süreçleri üzerinden daha iyi ortaya çıkarılacağı düşünülmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının daha çok hakim olduklarının düşünüldüğü temel matematiksel kavramlar üzerinden ispat yapma süreçlerinin incelenmesi, öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerindeki zayıf ve güçlü yanları daha iyi ortaya koyacaktır. Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin belli bir bağlama odaklanılarak araştırılması önemli olduğundan çalışmada her sınıf düzeyindeki ortaokul matematik öğretmen adayı göz önünde bulundurularak öğretmen adaylarının fonksiyonlar ve sayılar konusu bağlamında ispat yapma süreçleri incelenmiştir. Matematik programlarında önemli bir yeri olan ve matematiğin en temel kavramlardan biri olan fonksiyon kavramının (Clement, 2001) bağlam olarak seçilmesi oldukça önemlidir. Çünkü fonksiyon kavramı ortaokul programında yer almamasına karşın bu kavramın gelişiminde ortaokul yılları oldukça kritiktir. Sayılar ise öğretmen adaylarının ilkokuldan itibaren aşina oldukları bir kavramdır. Ayrıca fonksiyon ve sayı kavramı seçilerek ispat yapma sürecinde en önemli zorluk kaynaklarından biri olan kavram bilgisine ilişkin zorlukların da en aza indirilmesi amaçlanmıştır.

Öğretmenlerin ispatı anlaması oldukça önemli olmasına rağmen alan yazında aday öğretmenlerin ya da öğretmenlerin ispatı anlamalarına ilişkin yapılmış az sayıda çalışma vardır (Goetting, 1995; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007). Ayrıca ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerinin incelendiği az sayıda çalışma olduğu görülmüştür. Çalışmada ortaokul matematik öğretmen adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri klinik görüşmelerde kullanılan sayılarla ilgili önermeler üzerinden araştırılmıştır.

1.10. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmanın sınırlılıkları aşağıda belirtildiği şekildedir:

1. Araştırma, katılımcılarla yapılan klinik görüşmelerden elde edilen verilere dayanmaktadır.

2. Araştırma, 2014-2015 öğretim yılının sonlarına doğru Eskişehir’deki bir devlet üniversitesinin 1., 2., 3., 4. sınıflarında ve 2015-2016 öğretim yılının başında olan 1. sınıftaki ilköğretim matematik öğretmen adayları ile sınırlıdır.

3. Araştırma, devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliğine kayıtlı tüm öğretmen adayları arasından ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak her sınıf düzeyinde seçilen 6 katılımcı olmak üzere toplam 30 katılımcı ile sınırlıdır.

2. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmanın örneklemini oluşturan katılımcılar, veri toplama araçları ve elde edilen verilerin analizine yer verilmiştir.

2. 1. Araştırma Modeli

Birinci sınıfa yeni başlayan, birinci sınıf, ikinci sınıf, üçüncü sınıf ve dördüncü sınıf olmak üzere tüm sınıf düzeylerindeki ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin derinlemesine incelenmesinin amaçlandığı bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir.

2.1.1. Nitel araştırma yaklaşımı

Her ne kadar nitel araştırmanın tanımının yapılması zor olsa da Yıldırım ve Şimşek (2005) nitel araştırmayı; gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konması için nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlamışlardır (s.39). Başka bir tanımda ise nitel araştırmanın; şemsiye bir terim olarak, tanımlama, çözme, yorumlama ve anlamla ilgili terimlere ulaşmada kullanılan teknikleri kapsadığı (Van Maanen, 1979'dan aktaran Merriam, 2013) ifade edilmiştir. En kapsamlı nitel araştırma tanımlarından biri de Denzin ve Lincoln (1998) tarafından, araştırmacıların araştırılacak konu ya da konuları doğal ortamında inceledikleri, araştırılan insanların getirdikleri anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisinde oldukları şeklinde yapılmıştır (Aktaran Ekiz, 2009). Kısacası Merriam'ın (2013) da belirttiği gibi nitel araştırmalarda, insanların dünyayı nasıl algıladıkları ve dünyada ne gibi deneyimler yaşadıkları ile ilgilenilir.

Nitel araştırmaların olay ve olguları doğal ortamında ele aldığı için "doğallık", elde edilen veriler sayısaldan daha çok kelimeler ve resimler biçiminde olduğundan "betimleyici", çıktı ve sonuç ile değil süreçle ilgilendiği için "süreç odaklı", elde edilen veriler bir hipotezi çürütmek ya da kanıtlamak için değil bütünü ortaya çıkarmak için gerçekleştirildiğinden "tümevarımsal" ve ortaya çıkan anlamla uğraşıldığından ve özellikle bu anlamı ortaya koyan araştırmacının olayları nasıl ele aldığına verilen önem nedeniyle "anlam" olmak üzere beş temel özelliği vardır (Bogdan ve Biklen, 2007, s. 4-6).

Araştırmada tüm sınıf düzeylerinde ortaokul matematik öğretmeni adaylarının bilişsel bir süreç olan ispat yapma süreçlerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığından bu araştırmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir.

2.2. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları, İç Anadolu'da bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği programında okumakta olan ortaokul matematik öğretmeni adaylarıdır. Araştırmanın amacı doğrultusunda tüm sınıf düzeylerinde ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçleri derinlemesine araştırılmak istendiğinden sınırlı sayıda öğretmen adayı, klinik görüşme yapmak üzere seçilmiştir. Klinik görüşme, matematik eğitimi araştırmalarında sıklıkla kullanılan veri toplama tekniklerinden birisidir. Klinik görüşmelerde amaç, görüşülen kişinin bilgi yapılarını ve muhakeme süreçlerini ortaya çıkartmaktır (Clement, 2000). Klinik görüşme yapılacak öğretmen adaylarını seçmek için amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Maksimum çeşitlilik örnekleme yönteminde küçük bir örneklem oluşturarak, bu örneklemde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum düzeyde sağlamak amaçlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 108). Burada amaç genellemeye ulaşmak değil, farklı durumlar ele alındığında bu çok çeşitliliğin ortaya konması ve farklılıklarda birleşen önemli ortak örüntülerin ortaya çıkarılmasıdır (Patton, 2014, s. 243).

Araştırmaya katılacak öğretmen adaylarının seçiminde gönüllülük esasına dikkat edilmiştir. Klinik görüşme yapılacak katılımcıları seçmek için öğretmen adaylarının o zamana kadar almış oldukları matematik derslerinin not ortalamaları göz önünde bulundurularak öğretmen adayları çok başarılı, orta derecede başarılı ve başarısız olmak üzere üç gruba ayrılmıştır. Maksimum çeşitliliğin sağlanması için her gruptan grubu temsilen iki öğretmen adayı alınarak her sınıf düzeyinden toplam altı katılımcı seçilmiştir. Lisans eğitimine yeni başlayan ve ilk döneminde olan öğretmen adayları ise Lisans Yerleştirme Sınavı (LYS) puanlarına göre üç gruba ayrılmış ve benzer şekilde her gruptan grubu temsilen ikişer öğretmen adayı olmak üzere toplam altı katılımcı seçilmiştir. Bu seçim, öğretmen adaylarının lisans eğitimlerinin başladığı ilk dönemin başında olmuştur. Klinik görüşme için belirlenen ölçütler ve hangi sınıf düzeyinde kaç öğretmen adayı ile ne zaman klinik görüşme yapıldığına ilişkin aşağıda Tablo 2.1. verilmiştir.

Araştırmaya başlamadan önce katılımcılara hem araştırmanın amacı hakkında hem de elde edilen verilerin sadece araştırma kapsamında kullanılacağına dair bilgilendirme yapılmış (EK II) ve katılımcılardan araştırmaya katılımlarına ilişkin gerekli izinler alınmıştır (EK III). Araştırmada katılımcıların isimleri kodlanarak gizli tutulmuştur.

Çalışmaya katılacak ortaokul matematik öğretmeni adaylarının seçimi yapılırken, aşağıdaki Tablo 2.1.'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının o zamana kadar almış oldukları matematik dersi başarı notları ile eğer dersin final sınavına henüz girmemişlerse, o dersin ara sınav notları alınarak Excel programı yardımıyla her bir öğretmen adayının not ortalaması bulunmuştur. Ayrıca Excel programı yardımıyla her sınıf düzeyinde öğretmen adaylarının not ortalamalarının ortalaması yani sınıf ortalaması ve not ortalamalarının standart sapması hesaplanmıştır. Her sınıf düzeyinde öğretmen adaylarını; çok başarılı, orta derecede başarılı ve başarısız olmak üzere üç gruba ayırmak için öncelikle sınıf bazında öğretmen adaylarının ders notlarının ortalaması büyükten küçüğe doğru sıralanmıştır. Sonra sınıf ortalamasından bir standart sapma yukarıya gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grubun sınırı, bir standart sapma aşağıya gidilerek de orta derecede başarılı grup ile başarısız grup arasındaki sınır bulunmuştur (Tekin, 1991). Genel olarak öğretmen adaylarının seçiminde bir ya da birkaç dersten başarı notu ya da ara sınav notu bulunmayan, af, farabi değişim programı, üniversite içi ya da üniversiteler arası yatay geçiş ve merkezi yerleştirme puanı (MYP) ile yatay geçiş öğrencisi olan öğretmen adayları, öğretmen adayı seçiminin yapılacağı sınıf listelerinden çıkarılmıştır. Öğretmen adaylarının seçiminde ise her sınıf düzeyinde oluşan çok başarılı, orta derecede başarılı ve başarısız grupları en çok temsil ettiği düşünülen ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan öğretmen adaylarının seçilmesine dikkat edilmiştir. Ayrıca her sınıf düzeyinde belirlenen gruplardan öğretmen adayları seçilirken, grubun özelliklerini yansıtacak şekilde o zamana kadar aldığı tüm matematik derslerinden geçen ya da pek çok dersten kalan, birbirlerinden farklı durumda olan öğretmen adayları seçilmeye çalışılmıştır. Aşağıda her sınıf düzeyinde öğretmen adayının seçiminin nasıl yapıldığı ve seçilen öğretmen adaylarına ilişkin bilgiler ayrıntılı olarak ifade edilecektir.

Tablo 2.1. *Klinik görüşme için katılımcı seçiminde dikkat edilecek kriterler ve görüşme zamanları*

	Başarısız (n)	Orta Derecede Başarılı (n)	Başarılı (n)	Klinik Görüşme Kriterleri	Görüşme Zamanı
Yeni 1. Sınıf	2	2	2	- LYS puanları	1. yarıyılın başında
1. Sınıf	2	2	2	- Genel Matematik - Soyut Matematik - Geometri derslerinin not ortalamaları	2. yarıyılda
2. Sınıf	2	2	2	- Genel Matematik - Soyut Matematik - Geometri - Analiz I - Lineer Cebir I - Analiz II - Lineer Cebir II derslerinin not ortalamaları	4. yarıyılda
3. Sınıf	2	2	2	- Genel Matematik - Soyut Matematik - Geometri - Analiz I - Lineer Cebir I - Analiz II - Lineer Cebir II - Analiz III - Analitik Geometri I - Cebire Giriş - Diferansiyel Denklemler - Analitik Geometri II derslerinin not ortalamaları	6. yarıyılda
4. Sınıf	2	2	2	- Genel Matematik - Soyut Matematik - Geometri - Analiz I - Lineer Cebir I - Analiz II - Lineer Cebir II - Analiz III - Analitik Geometri I - Cebire Giriş - Diferansiyel Denklemler - Analitik Geometri II - Elementer Sayı Kuramı derslerinin not ortalamaları	8. yarıyılda

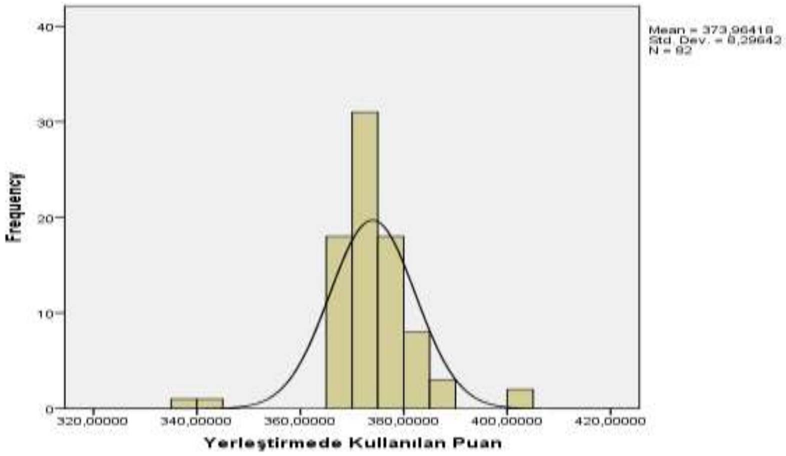
Birinci sınıfta okumakta olan öğretmen adayları; genel matematik dersini almış, soyut matematik ile geometri dersinin ise ders aşamasını bitirmiş, fakat henüz bu derslerden final sınavına girmemiştir. Birinci sınıfta kayıtlı olan 83 öğretmen adayı bulunmaktadır. Bu öğretmen adaylarından biri af öğrencisi olup kaydını dondurmuş, bir diğeri MYP ile bahar döneminde yatay geçiş yapmış, bir öğretmen adayı da geometri dersinin ara sınavına girmemiştir. Böylece bu üç öğretmen adayı, seçim listesinden çıkarılmıştır. Kalan 80 öğretmen adayının her birinin bu üç dersten aldıkları notların not ortalaması bulunmuş ve bu not ortalamaların da sınıf bazında ortalaması 62,95 olarak hesaplanmıştır. Bu not ortalamalarının standart sapması ise 10,82 olarak bulunmuştur. Öğretmen adaylarının not ortalamalarından bir standart sapma yukarıya gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grup arasındaki sınır 73,60, not ortalamalarından bir standart sapma aşağıya gidilerek ise orta derecede başarılı grup ile başarısız grup arasındaki sınır 53,33 olarak bulunmuştur. Buna göre çok başarılı grupta 11, orta derecede başarılı grupta 60, başarısız grupta dokuz öğretmen adayı vardır. Çok başarılı gruptaki öğretmen adaylarının hepsinin, ilk dönem aldıkları genel matematik dersinden geçtikleri görülmüştür. Ayrıca bu gruptaki öğretmen adaylarının bu dönem almakta oldukları soyut matematik ve geometri derslerinin ara sınav notlarının da diğer gruplardaki öğrencilere göre yüksek olduğu görülmüştür. Bu nedenle bu gruptan öğretmen adayı seçerken, grubu en çok yansıttığı düşünülen Esra ve Neşe görüşme yapmak üzere seçilmiştir. Esra'nın not ortalaması 85,67'dir. Esra'nın not ortalaması, tüm birinci sınıfta okumakta olan öğretmen adayları içinde en iyi ikinci not ortalamasıdır. Neşe'nin not ortalaması ise 79,53 olup, bu not ortalaması ile öğretmen adayı çok başarılı grup içerisinde orta sıralarda yer almaktadır. Orta derecede başarılı grupta ise sadece bir öğretmen adayının genel matematik dersinden kaldığı görülmüştür. Bu nedenle bu grubu en çok yansıttığı düşünülen ve genel matematik dersinden kalmamış olan Eda ve Umut seçilmiştir. Eda'nın not ortalaması 67,07 olup, bu not ortalaması ile öğretmen adayı, orta derecede başarılı grubun üst sıralarında yer almaktadır. Umut'un ise not ortalaması 59,33 olup grubun alt sıralarında yer almaktadır. Orta derecede başarılı grubu temsilen seçilen bu iki öğretmen adayı da genel matematik dersinden kalmamıştır. Eda not ortalamasına göre grubun daha üst sıralarında yer alırken Umut, grubun daha alt sıralarında yer almaktadır. Birinci sınıfların başarısız grubu ise genel olarak genel matematik dersinden kalan ve almış oldukları soyut matematik ve geometri ara sınav notları diğer gruplardaki öğretmen adaylarına göre düşük olan öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Bunun için grubu en çok temsil ettiği düşünülen, biri genel matematik dersinden kalan ve not ortalaması 43,93 olan Nalan ve diğeri ise genel matematik dersinden geçen ve not ortalaması 42,67 olan Naz seçilmiştir.

İkinci sınıfta okumakta olan öğretmen adayları; genel matematik, soyut matematik, analiz I, lineer cebir I derslerini almış, analiz II ve lineer cebir II derslerinin ise ders aşamasını bitirmiş, fakat henüz bu derslerden final sınavına girmemişlerdir. İkinci sınıfta toplam 86 öğretmen adayı kayıtlıdır. İkinci sınıftaki öğretmen adaylarının üçü üniversiteler arası yatay geçiş öğrencisi olup ikinci sınıfa yatay geçiş yapmıştır. İki öğretmen adayının birden fazla dersten, dört öğretmen adayının ise bir dersten notu bulunmamaktadır. Bu nedenle başka bir üniversiteden geçiş yapan ya da bir ya da fazla dersten notu bulunmayan bu dokuz öğrenci seçim listesinin dışında tutulmuştur. Kalan 77 öğretmen adayının her birinin bu yedi dersten not ortalamaları bulunmuş ve bu not ortalamalarının sınıf bazında ortalaması ise 58,92 olarak hesaplanmıştır. Bu not ortalamalarının standart sapması ise 9,55 olarak hesaplanmıştır. Öğretmen adaylarının not ortalamalarından bir standart sapma yukarıya gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grup arasındaki sınır 69,09, not ortalamalarından bir standart sapma aşağıya gidilerek ise orta derecede başarılı grup ile başarısız grup arasındaki sınır 49,37 olarak bulunmuştur. Buna göre çok başarılı grupta 16, orta derecede başarılı grupta 48, başarısız grupta 13 öğretmen adayı vardır. Çok başarılı gruptaki öğretmen adaylarının hepsinin almış oldukları genel matematik, soyut matematik, geometri, analiz I, lineer cebir I derslerinden geçtikleri görülmüştür. Gruptaki öğretmen adaylarının bu dönem almakta oldukları analiz II ve lineer cebir II derslerinin ara sınav notlarının da diğer gruplardaki öğrencilere göre yüksek olduğu görülmüştür. İkinci sınıfların çok başarılı grubu için grubu en iyi şekilde temsil ettiği düşünülen iki öğretmen adayı Sevgi ve Ayşe seçilmiştir. Sevgi, not ortalaması 76,57 olan ve tüm ikinci sınıflar içerisinde en iyi ikinci ortalamaya sahip olan öğretmen adayıdır. Ayrıca Sevgi bugüne kadar aldığı matematik derslerinden kalmamıştır. Ayşe ise 71,29 not ortalaması ile grubun orta sıralarında yer almaktadır. Ayşe sadece soyut matematik dersinden kalmış, fakat yaz okulunda dersi tekrar alarak geçmiştir. Orta derecede başarılı grubu temsilen ise not ortalaması 62,77 olan Melih ve not ortalaması 56,76 olan Betül seçilmiştir. Melih orta derecede başarılı grubun üst sıralarında yer almaktadır. Melih geometriyi ikinci alışında geçmiş ve bu gruptaki çoğu öğrenci gibi soyut matematik dersinden kalmış olup ikinci sınıfın bahar döneminde bu tersi tekrar almaktadır. Betül ise grubunun daha alt sıralarında yer almaktadır. Ayrıca Betül bugüne kadar aldığı hiçbir dersten kalmamıştır. İkinci sınıfların başarısız grubunu temsilen ise not ortalaması 47,17 olan Selda ve not ortalaması 40,69 olan Can seçilmiştir. Selda başarısız grubun daha üst sıralarında yer almaktadır. Selda soyut matematik dersinden kalmış ve bu dersi tekrar almaktadır. Can ise grubun daha alt sıralarında yer almakta olup bugüne kadar Analiz I dersinden kalmıştır. İkinci sınıfların başarısız grubunda söz konusu tüm matematik derslerini geçen öğrenci bulunmamaktadır.

Üçüncü sınıfta okumakta olan öğretmen adayları, genel matematik, soyut matematik, geometri, analiz I, lineer cebir I, analiz II, lineer cebir II, analiz III, analitik geometri I ve cebire giriş derslerini almış, diferansiyel denklemler ve analitik geometri II derslerinin ise ders aşamasını bitirmiş ve bu derslerin final sınavına henüz girmemişlerdir. Üçüncü sınıfta kayıtlı olan toplam 87 öğretmen adayı bulunmaktadır. Öğretmen adaylarından biri MYP ile üçüncü sınıfın ikinci dönemi yatay geçiş yapmış, üç öğretmen adayı üçüncü sınıfın güz dönemi, iki öğretmen adayı ise ikinci sınıfın güz döneminde üniversiteler arası yatay geçiş yapmıştır. Üç öğrencinin tek dersten, sekiz öğrencinin ise iki ve ikiden fazla dersten notu bulunmamaktadır. Bu nedenle on yedi öğretmen adayı, öğretmen adayı seçim listesinden çıkarılmıştır. Kalan 70 öğretmen adayının her birinin on iki dersten not ortalaması alınmış ve bu not ortalamalarının sınıf bazında not ortalaması 60,74 olarak bulunmuştur. Öğretmen adaylarının ortalamalarının standart sapması ise 8,15 olarak hesaplanmıştır. Sınıf ortalamasından bir standart sapma yukarıya gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grup arasındaki sınır 68,55, sınıf ortalamasından bir standart sapma aşağıya gidilerek ise orta derecede başarılı grup ile başarısız grup arasındaki sınır 53,22 olarak bulunmuştur. Buna göre çok başarılı grupta on, orta derecede başarılı grupta 48, başarısız grupta 12 öğretmen adayı vardır. Çok başarılı gruptaki öğretmen adaylarının hepsinin almış oldukları genel matematik, soyut matematik, geometri, analiz I, lineer cebir I, analiz II, lineer cebir II, analiz III, analitik geometri I, cebire giriş derslerinden geçtikleri görülmüştür. Gruptaki öğretmen adaylarının bu dönem almakta oldukları diferansiyel denklemler ve analitik geometri II derslerinin ara sınav notlarının da diğer gruplardaki öğrencilere göre yüksek olduğu görülmüştür. Bu grupta yer alan öğretmen adaylarının hiçbiri söz konusu matematik derslerinden kalmamıştır. Üçüncü sınıfların çok başarılı grubunu temsil etmek için grubu en iyi yansıttığı düşünülen iki öğretmen adayı Nihal ve Emel seçilmiştir. Nihal, not ortalaması 76,48 olan ve tüm üçüncü sınıflar içerisinde en iyi üçüncü ortalamaya sahip olan öğretmen adayıdır. Emel'in not ortalaması ise 73,32 ortalama olup grubun orta sıralarında yer almaktadır. Orta derecede başarılı grubu temsilen ise not ortalaması 63,66 olan Kübra ve not ortalaması 59,71 olan Hale seçilmiştir. Kübra, orta derecede başarılı grubun üst sıralarında yer almakta olup bugüne kadar aldığı matematik derslerinden kalmamıştır. Hale Yıldız ise Kübra'ya göre grubun daha alt sıralarında yer almakta olup bu gruptaki çoğu öğrenci gibi soyut matematiği ikinci alışında geçmiştir. Üçüncü sınıfların başarısız grubunu temsilen ise not ortalaması 50,60 olan Miray ve not ortalaması 45,75 olan Ruhi seçilmiştir. Miray, Ruhi'ye göre başarısız grubun daha üst sıralarında yer almış ve bugüne kadar aldığı matematik derslerinin hepsini geçmiştir. Ruhi ise başarısız grubun alt sıralarında yer almıştır. Ruhi, soyut matematik dersini üçüncü, analiz I, analiz II derslerini ise ikinci alışında geçmiş, Analiz III dersinden ise kalmıştır.

Dördüncü sınıfta okumakta olan öğretmen adayları soyut matematik, genel matematik, analiz I, lineer cebir I, analiz II, lineer cebir II, analiz III, analitik geometri I, cebire giriş, diferansiyel denklemler, analitik geometri II ve elementer sayı kuramı olmak üzere öğrenci seçimi için belirlenen tüm matematik derslerini almışlardır. Dördüncü sınıfta kayıtlı olan toplam 79 öğretmen adayı bulunmaktadır. Öğretmen adaylarından biri af, biri ise Farabi Değişim Programı öğrencisidir. Öğretmen adaylarından ikisi ikinci sınıfın güz döneminde, biri ise üçüncü sınıfın güz döneminde üniversiteler arası yatay geçiş yapmıştır. Bir öğretmen adayı da ikinci sınıfın güz döneminde üniversite içi yatay geçiş yapmıştır. Öğretmen adaylarının beşinin tek dersten, dördünün ise iki ve ikiden fazla dersten notu bulunmamaktadır. Bu nedenle on beş öğretmen adayı, öğretmen adayı seçim listesinden çıkarılmıştır. Kalan 64 öğretmen adayının her birinin on üç dersten not ortalaması alınmış ve bu not ortalamalarının sınıf bazında ortalaması 60,69 olarak bulunmuştur. Öğretmen adaylarının not ortalamalarının standart sapması ise 6,40 olarak hesaplanmıştır. Sınıf ortalamasından bir standart sapma yukarıya gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grup arasındaki sınır 67,68, sınıf ortalamasından bir standart sapma aşağıya gidilerek ise orta derecede başarılı grup ile başarısız grup arasındaki sınır 54,86 olarak bulunmuştur. Buna göre çok başarılı grupta dokuz, orta derecede başarılı grupta 45, başarısız grupta on öğretmen adayı vardır. Çok başarılı gruptaki öğretmen adaylarının biri hariç hepsinin almış oldukları genel matematik, soyut matematik, geometri, analiz I, lineer cebir I, analiz II, lineer cebir II, analiz III, analitik geometri I, cebire giriş, elementer sayı kuramı derslerinden geçtikleri görülmüştür. Sadece bir öğretmen adayı diferansiyel denklemler dersinden kalmış ve dördüncü sınıfın bahar döneminde bu dersi tekrar almıştır. Gruptaki öğretmen adaylarının tüm bu derslerden aldıkları notlar, genel olarak diğer gruplardaki öğretmen adaylarına göre yüksek olup grubun tüm öğrencileri aldıkları matematik derslerinin hepsinden geçmişlerdir. Dördüncü sınıfların çok başarılı grubu için grubu en iyi şekilde temsil ettiği düşünülen iki öğretmen adayı Burcu ve Gizem seçilmiştir. Burcu'nun not ortalaması 72,58'tir. Bu ortalama, tüm dördüncü sınıflar içerisinde en iyi üçüncü ortalamadır. Gizem'in not ortalaması ise 70,27 olup, bu ortalama ile öğretmen adayı çok başarılı grubun orta sıralarında yer almaktadır. Orta derecede başarılı grubu temsilen ise Metin ve Deniz seçilmiştir. Metin'in not ortalaması 62,71 olup, bu not ortalaması ile öğretmen adayı, orta derecede başarılı grubun bu gruptan seçilen diğer öğretmen adayına göre daha üst sıralarda yer almaktadır. Metin, bugüne kadar aldığı derslerden kalmamıştır. Deniz'in not ortalaması ise 58,62 olup, bu not ortalaması ile grubunun daha alt sıralarında yer almaktadır. Deniz, soyut matematik, analiz I, analiz II, analiz III, lineer cebir II, cebire giriş derslerinden kalmış ve bu dersleri ikinci alışında geçmiştir. Dördüncü sınıfların başarısız grubunu temsilen ise Ayla ve Leyla seçilmiştir. Ayla'nın not ortalaması 52,29 olup bu not ortalaması ile grubunun orta sıralarında yer almaktadır. Ayla, tüm dersleri ilk alışında geçmiştir. Leyla'nın not ortalaması ise 51,87'dir. Leyla, soyut matematik dersini ikinci alışında geçmiş, Analiz II dersinden iki kere kalmış ve cebire giriş dersini ise ikinci alışında geçmiştir. Leyla Analiz II dersini dördüncü sınıfın bahar döneminde üçüncü kere almaktadır. Diğer deslerden ise ikinci alışında geçmiştir. Leyla diğer öğretmen adayına göre bir alt sırada yer almaktadır. Fakat Ayla gibi grubun orta sıralarında yer almaktadır.

İlköğretim matematik öğretmenliği programına yeni başlayan öğretmen adaylarının seçimi için ise yeni kayıt yaptıran ikisi okul birincisi olmak üzere toplam 82 öğretmen adayının LYS puanları kullanılmıştır. LYS puanı, öğretmen adaylarının programa yerleştirilmelerinde kullanılan puan olup bu puanın içinde okul başarı puanı da bulunmaktadır. Sonra Excel programı yardımıyla öğretmen adaylarının LYS puanlarının ortalaması ve bu puanların standart sapması hesaplanmıştır. LYS puanlarının ortalaması 373,96, LYS puanlarının standart sapması ise 8,30 olarak bulunmuştur. Ardından diğer katılımcı seçimlerinde olduğu gibi ortalamanın bir standart sapma yukarısına gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grup arasındaki sınır 380,87 olarak bulunmuştur. Fakat aynı şey orta derece başarılı grup ile başarısız grup arasındaki sınırı bulmak için yapılamamıştır. Çünkü ortalamadan bir standart sapma aşağıya inilememiştir. Ortalamadan bir standart sapma aşağıya inildiğinde 365,66 bulunmaktadır; fakat sıralı puan listesini yaklaşık olarak böyle bir puandan bölecek puan yoktur. Bu durumdan LYS puanlarının normal dağılım göstermediği sonucu çıkmaktadır. Bunun için LYS puanlarının çarpıklık ve basık değerleri hesaplanmıştır. Normal dağılımda 0 olan çarpıklık değeri, LYS puanlarının dağılımında -0,38 olarak hesaplanırken yine normal dağılımda 0 olan basıklık değeri, LYS puanlarının dağılımında 6,91 olarak bulunmuştur. Buradan çarpıklık negatif olduğu için LYS puanlarının dağılımının sağa çarpık ve basıklık değeri pozitif olduğu için de LYS puanlarının dağılımının sivri olduğu ortaya çıkmıştır (Tekin, 1991). Aşağıda verilen Şekil 2.1.'de SPSS 19 yardımıyla çizilen grafikten de görüldüğü gibi yaklaşık 340 puan civarında dağılımda kopma olduğu ve puanların sağ tarafa doğru yaklaşık 370 puan civarında yığıldığı görülmektedir.



Şekil 2.1. *Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların LYS puanlarının dağılımı*

Ölçme Seçme ve Yerleştirme Merkezi (ÖSYM) tarafından yapılan puanlamanın dağılımının bu şekilde çıkması beklenen bir durumdur. Bu nedenle katılımcılar seçilirken ortalamadan bir standart sapma yukarıya gidilerek çok başarılı grup ile orta derecede başarılı grup arasındaki sınır belirlenmiştir. Buna göre çok başarılı grupta 10 öğretmen adayı yer almıştır. Aslında bu grubun en başarılı öğretmen adayları olan Engin ve Samet ile de görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Ancak Engin'in ikinci üniversitesi olması sebebiyle Engin katılımcı olarak seçilmemiştir. Hem Engin hem de Samet'in puanları, çok başarılı gruptaki diğer sekiz öğretmen adayından oldukça yüksek olduğu için çok başarılı grubu temsilen puanı 385,86 olan Hacer ve puanı 383,43 olan Ece seçilmiştir. Dağılımın sağa çarpık ve sivri olmasından dolayı orta derecede başarılı grup ile başarısız grup, dağılımın kopma gösterdiği okul birincilerinin puanlarının başladığı yerden ayrılmıştır. Buna göre orta derecede 69 öğretmen adayı yer almıştır. Bu öğretmen adaylarından puanı 377,09 olan Melis ve puanı 371,05 olan Yonca katılımcı olarak seçilmiştir. Başarısız grubu temsilen iki okul birincisi Zehra ve Seda seçilmiştir. Ancak Zehra önce görüşme yapmayı kabul etmesine rağmen sonrasında yapılacak olan kamera çekiminden rahatsız olacağını dile getirerek görüşme yapmak istemediğini belirtmiştir. Bu nedenle başarısız grubu temsilen Zehra yerine puanı Zehra'ya en yakın olan 368,54 puanlı Fatmagül görüşme yapmak üzere seçilmiştir.

Araştırmanın tüm sınıf düzeylerindeki katılımcılarının demografik bilgilerine (yaşları, hangi liseden mezun oldukları ve varsa hangi matematik ve matematik eğitimi ağırlıklı seçmeli dersleri aldıkları) ilişkin olarak aşağıda Tablo 2.2 verilmiştir. Tablo 2.2'den görüldüğü gibi katılımcıların 5'i erkek, geriye kalan 25'i kızdır. Katılımcıların yaş aralığı 17 ile 22 arasında değişmektedir. Katılımcıların çoğu Anadolu Lisesi ya da Anadolu Öğretmen Lisesi mezunudur. Katılımcıların 14'ü Anadolu Lisesi, 12'si Anadolu Öğretmen Lisesi, 2'si Düz Lise, 1'i Fen Lisesi ve 1'i de Özel Lise mezunudur. Katılımcıların sınıf düzeyleri arttıkça daha çok matematik ya da matematik eğitimi ağırlıklı seçmeli dersler aldıkları görülmüştür. Tablo 2.2'de katılımcıların aldıkları matematik ve matematik eğitimi dışındaki seçmeli dersler göz ardı edilmiştir.

Tablo 2.2. *Katılımcıların Demografik Bilgileri*

	Gruplar	**Katılımcılar**	**Yaş**	**Lise Türü**	**Alınan Seçmeli Dersler**
Yeni 1. Sınıf	Başarılı	Hacer	19	Anadolu Lisesi	-
		Ece	18	Anadolu Lisesi	-
	Orta Derecede Başarılı	Melis	18	Anadolu Lisesi	-
		Yonca	19	Anadolu Lisesi	-
	Başarısız	Fatmagül	17	Düz Lise	-
		Seda	18	Anadolu Öğretmen Lisesi	-
1. Sınıf	Başarılı	Esra	19	Anadolu Öğretmen Lisesi	-
		Neşe	20	Anadolu Lisesi	-
	Orta Derecede Başarılı	Eda	21	Anadolu Öğretmen Lisesi	
		Umut	20	Anadolu Öğretmen Lisesi	-
	Başarısız	Nalan	19	Fen Lisesi	-
		Naz	19	Anadolu Öğretmen Lisesi	-
2. Sınıf	Başarılı	Sevgi	19	Anadolu Lisesi	- Metrik Uzaylara Giriş - Sentetik Geometri
		Ayşe	20	Anadolu Öğretmen Lisesi	- Metrik Uzaylar
	Orta Derecede Başarılı	Melih	20	Anadolu Öğretmen Lisesi	- Sentetik Geometri
		Betül	20	Anadolu Lisesi	- Metrik Uzaylara Giriş
	Başarısız	Selda	19	Anadolu Lisesi	- Metrik Uzaylara Giriş - Sentetik Geometri
		Can	20	Anadolu Öğretmen Lisesi	-
3. Sınıf	Başarılı	Nihal	20	Özel Lise	- Matematik Dili - Cebirsel Kavramlar ve Öğretimi - Geometrik Düşünme ve Gelişimi - Günlük Hayatta Matematik - Teknoloji Destekli Geometri Öğretimi
		Emel	21	Anadolu Lisesi	- Matematik Dili - Sentetik Geometri - Cebirsel Kavramlar ve Öğretimi - Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları

Tablo 2.3. *(Devam) Katılımcıların Demografik Bilgileri*

3. Sınıf	Orta Derecede Başarılı	Kübra	20	Anadolu Öğretmen Lisesi	- Matematik Dili - Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları - Sentetik Geometri - Cebirsel Kavramlar ve Öğretimi
		Hale	21	Anadolu Öğretmen Lisesi	- İlköğretimde Cebirsel Düşünmenin Gelişimi - Teknoloji Destekli Geometri Öğretimi - Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları - Metrik Uzaylara Giriş - Sentetik Geometri
	Başarısız	Miray	21	Düz Lise	-Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları - Günlük Hayatta Matematik - Farklı Problem Türleri ile Matematik Öğretimi - İlköğretimde Cebirsel Düşünmenin Gelişimi
		Ruhi	21	Anadolu Lisesi	- Web Destekli Proje Tasarımı - Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları - Matematik Dili
4. Sınıf	Başarılı	Burcu	22	Anadolu Lisesi	- Matematik Dili - Farklı Problem Türleri ile Matematik Öğretimi - Günlük Hayatta Matematik - Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları
		Gizem	22	Anadolu Öğretmen Lisesi	-Sentetik Geometri - İlköğretimde Cebirsel Düşünmenin Gelişimi - Farklı Problem Türleri ile Matematik Öğretimi
	Orta Derecede Başarılı	Metin	22	Anadolu Lisesi	- İlköğretimde Cebirsel Düşünmenin Gelişimi - Sentetik Geometri - Farklı Problem Türleri ile Matematik Öğretimi - Matematik Eğitiminde Problem Çözme Yaklaşımları
		Deniz	22	Anadolu Öğretmen Lisesi	- Geometrik Düşünme ve Gelişimi - Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi
	Başarısız	Ayla	22	Anadolu Lisesi	-Sentetik Geometri - Matematik Dili
		Leyla	22	Anadolu Lisesi	- Geometrik Düşünme ve Gelişimi - Sentetik Geometri - Metrik Uzaylara Giriş

2.3. Verilerin Toplanması

Araştırmada ortaokul matematik öğretmen adaylarının bilişsel bir süreç olan ispat yapma süreçleri derinlemesine incelenmek istendiğinden veri toplama yöntemi olarak klinik görüşme seçilmiştir. Ayrıca klinik görüşmeler boyunca araştırmacı günlüğü tutularak da veri toplanmıştır. Araştırmanın verilerinin toplanma süresi yaklaşık olarak dört ay sürmüştür. Aşağıda Tablo 2.3'te araştırma verilerinin toplanmasına ilişkin takvim verilmiştir.

Tablo 2.3. *Araştırma Verileri Toplama Takvimi*

	Gruplar	Katılımcılar	Tarih	Süre
Yeni 1. Sınıf	Başarılı	Hacer	17.10.2015	90 dak.
		Ece	19.10.2015	54 dak.
	Orta Derecede Başarılı	Melis	18.10.2015	81 dak.
		Yonca	22.10.2015	65 dak.
	Başarısız	Fatmagül	17.10.2015	98 dak.
		Seda	22.10.2015	56 dak.
1. Sınıf	Başarılı	Esra	08.06.2015	65 dak.
		Neşe	07.06.2015	164 dak.
	Orta Derecede Başarılı	Eda	05.06.2015	97 dak.
		Umut	17.06.2015	114 dak.
	Başarısız	Nalan	04.06.2015	86 dak.
		Naz	06.06.2015	102 dak.
2. Sınıf	Başarılı	Sevgi	06.06.2015	159 dak.
		Ayşe	11.06.2015	110 dak.
	Orta Derecede Başarılı	Melih	13.06.2015	114 dak.
		Betül	08.06.2015	75 dak.
	Başarısız	Selda	03.06.2015	135 dak.
		Can	18.06.2015	157 dak.
3. Sınıf	Başarılı	Nihal	07.06.2015	65 dak.
		Emel	05.06.2015	142 dak.
	Orta Derecede Başarılı	Kübra	09.06.2015	85 dak.
		Hale	07.06.2015	95 dak.
	Başarısız	Miray	12.06.2015	89 dak.
		Ruhi	09.06.2015	90 dak.
4. Sınıf	Başarılı	Burcu	19.06.2015	106 dak.
		Gizem	13.07.2015	74 dak.
	Orta Derecede Başarılı	Metin	21.06.2015	119 dak.
		Deniz	20.06.2015	179 dak.
	Başarısız	Ayla	11.08.2015	94 dak.
		Leyla	19.08.2015	125 dak.

Tablo 2.3'ten görüldüğü gibi 4. sınıflarla yapılan klinik görüşmeler seçilen katılımcılardan bazılarının istekleri doğrultusunda Temmuz ayında yapılan Kamu Personel Seçme Sınavı (KPSS) sonrasında gerçekleştirilmiştir. 1. Sınıfa yeni başlayan katılımcılarla ise klinik görüşmeler derslerin başlamasından en fazla bir ay sonrasına kadar tamamlanmıştır. Klinik görüşmeler minimum 54 ile maksimum 179 dakika olmak üzere her bir görüşme ortalama 102 dakika sürmüştür. Klinik görüşmeciler araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiş ve elde edilen veriler video kamera ve ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Aşağıda Şekil 2.2'de araştırma sürecinde izlenen yol verilmiştir.

Şekil 2.2. *Veri Toplama Süreci*

Şekil 2.2'den de görüldüğü gibi önce araştırmanın katılımcılarını belirleyebilmek için ölçütler belirlenmiş ardından programa yeni başlayan katılımcılar dışında diğer sınıf düzeylerinden birer katılımcı ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Klinik görüşmelerde yapılan sorgulamaları değerlendirmek üzere matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesinin görüşleri alınmış ve araştırmacı klinik görüşmede dikkat etmesi gereken noktaları belirlemiştir. Ardından ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak her sınıf düzeyinden belirlenen ölçütlere göre seçilen 6 katılımcı olmak üzere toplam 30 katılımcı klinik görüşme yapmak üzere seçilmiştir. Katılımcılar ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş ve bu süreç boyunca araştırmacı günlükler tutmuştur. Son olarak elde edilen veriler Miles ve Huberman'ın (1994) üç aşamalı nitel veri analizi kullanılarak analiz edilmiş ve sonuçlar raporlaştırılmıştır.

2.4. Veri Toplama Araçları

Araştırmanın tasarlandığı nitel araştırma desenine bağlı olarak araştırmada veri toplamak için klinik görüşme ve araştırmacı günlükleri kullanılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

2.4.1. Klinik görüşmeler

Klinik görüşme, matematik eğitimi araştırmalarında sıklıkla kullanılan veri toplama tekniklerinden biridir. Klinik görüşmede amaç, görüşülen kişinin bilgi yapılarını ve muhakeme süreçlerini ortaya çıkartmaktır (Clement, 2000). Klinik görüşmedeki "klinik" kelimesi kapsamlı bir gözlem yapılması ve görüşmenin genellikle klinik olarak adlandırılan bir ofiste ya da görüşülen kişilerin doğal ortamları olan sınıf gibi ortamlarda yapıldığını vurgulamaktadır (Zazkis ve Hazzan, 1998).

Klinik görüşmenin temeli Piaget'nin bilişsel gelişim teorisine dayanır (Gingsburg, 1981). Gingsburg, Piaget'nin teorisinden hareketle klinik görüşmelerin *keşfetme, tanımlama* ve *yeterlik* olmak üzere üç amacı olduğunu ifade etmiştir.

- *Keşfetme*, öğrenenin problem durumlarına yaklaşımlarındaki bilişsel olguyu ortaya çıkarma
- *Tanımlama*, bilişsel süreçlerin altında yatan şeyleri açıklama
- *Yeterlik* ise öğrenenin belli bir görevi yerine getirmedeki kapasitesini değerlendirme olarak ele alınmıştır.

Gingsburg'a (1981) göre yeterlik; motivasyonun değerlendirilmesini, verilen görevin anlaşılmasını ve inancı gerektirmektedir. Zazkis ve Hazzan (1998) inancın öğrenenin duruma ilişkin cevabının keyfi bir seçim mi yoksa kendi yaklaşımı içinde devamlı ve dirençli mi olup olmadığının anlaşılması açısından önemli olduğunu ifade etmiştir. Yapılacak olan klinik görüşmelerde öğretmen adaylarının yaptıkları ispatları bilinçli bir şekilde yapıp yapmadıkları da ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Araştırmanın amacı üniversiteye yeni başlamış ortaokul matematik öğretmen adaylarının, belirlenen matematik derslerini almış birinci, ikinci, üçüncü ve son sınıfta okumakta olan ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerini incelemek olduğundan, araştırma belli bir kavram ya da ders kapsamında gerçekleştirilmemiştir. Bunun için yapılacak olan klinik görüşmelerde, her sınıf düzeyindeki ortaokul matematik öğretmeni adayının bilgi sahibi olduğu düşünülen fonksiyon ve sayı kavramına ilişkin önermeler verilmiş ve bu önermelerin doğrulukları ya da yanlışlıklarının ispatlanması istenmiştir. Fonksiyon kavramı ile ilgili sadece fonksiyon olma tanımının kullanılacağı önermeler ele alınmıştır. Bunun için hem sonlu elemanlı küme hem de sonsuz elemanlı küme üzerinde tanımlanan cebirsel olarak verilen bir eşitliğin fonksiyon olup olmadığının ispatlanması istenmiştir. Klinik görüşmede fonksiyon olma durumu dışında fonksiyon kavramına ilişkin diğer önermelere özellikle yer verilmemiştir (fonksiyonun bire birliği, örtenliği, artanlığı vb.). Çünkü alan yazında da belirtildiği üzere ispatlama sürecinde, ispatlanacak önermeye ilişkin tanım, teorem ve özelliklerin bilinmesi oldukça önemlidir (Moore, 1994). Söz konusu önermeye ilişkin tanım, teorem ve özelliklerin bilinmemesi durumunda, öğrencilerden önermenin ispatını yapmalarını beklemek olanaksızdır. Bunun için klinik görüşmede fonksiyon olmaya ilişkin önermelerin yanı sıra yine temel matematiksel kavramlardan doğal sayı ve tamsayıların tekliği ve çiftliği ve reel sayılar kümesi ile ilgili önermeler verilmiştir. Öğrenciler önermenin yapısına ilişkin bir imaja sahip olup ispat yöntemlerine ilişkin bilgi ve becerileri varsa verilen önermenin ispatına ilişkin hangi yöntem ya da yöntemlerin kullanılabileceğini belirtebilirler. Ancak öğrenciler, ispatlanacak önermeye ilişkin tanım, teorem ve özellikleri bilmemeleri durumunda ispat yapamayacaklardır. Kısacası araştırmanın amacı her sınıf düzeydeki ortaokul matematik öğretmen adayının ispat yapma süreçlerini incelemek olduğundan klinik görüşmelerde öğretmen adaylarının tümünün bilgi sahibi olduğu düşünülen fonksiyon ve sayı kavramlarına yönelik basit önermelerin ispatlanması istenmiştir (EK IV). Gerekli görülen durumlarda klinik görüşmenin doğası gereği araştırmayı açıklığa kavuşturmak ve genişletmek için yeni sorular da sorulmuştur (Clement, 2000).

Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesinde göz önünde bulundurulması gereken bir diğer durum da ispat yöntemleri bilgisidir. İspat yöntemlerine ilişkin alan yazında pek çok sınıflama yapıldığı görülmektedir (MEB, 2011; Özer, Çoker ve Taş, 2010; Epp, 2010). Araştırmada bu sınıflamalardan Epp'in (2010) sınıflaması kullanılacaktır. Epp (2010) ispat yöntemlerini "doğrudan ispat", "karşıt ters ile ispat", "çelişki ile ispat", "durumlarla ispat", "aksine örnek ile ispat", "tüketerek ispat", "varlık ispatı" olmak üzere yedi başlık altında toplamıştır. Araştırmada bu ispat yöntemlerinden "doğrudan ispat", "karşıt ters ile ispat", "çelişki ile ispat (olmayana ergi ile ispat)", "tüketerek ispat", "aksine örnek ile ispat" ve "varlık ile ispat" yöntemleri ele alınmıştır. Katılımcılara klinik görüşmede tüketerek, doğrudan, karşıt ters, aksine örnek verme, olmayana ergi ve varlık ispat yöntemlerini kullanmalarının beklendiği altı ispatlama sorusu sorulmuştur. İspatlanacak önermeler seçilirken, bu önermelerin daha çok tek bir ispat yöntemi kullanılarak ispatlanabilir olmasına dikkat edilmiştir. Aşağıda verilen Tablo 2.4'te klinik görüşmede sorulan sorularda katılımcıların kullanmalarının beklendiği ispat yöntemleri verilmiştir.

Tablo 2.4. *Klinik görüşme sorularında kullanılması beklenen ispat yöntemleri*

	1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	5. Soru	6. Soru
Kullanılması beklenen ispat yöntemi	Tüketerek	Doğrudan	Karşıt ters / Olmayana ergi	Aksine örnek verme	Olmayana ergi	Varlık

Ancak Tablo 2.4'ten de görüldüğü gibi 3. soruda önermenin mantıksal yapısı gereği olmayana ergi yöntemi de kullanılabilmektedir. Bunun için 3. soruda olmayana ergi ispat yöntemini kullanmayı seçen katılımcıları karşıt ters ispat yöntemini kullanmaya yönlendirmek için verilen önermeye denk olan bir önerme yazmaları istenmiştir. Ayrıca tüketerek ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği 1. soruda diğer sorularda olduğu gibi önerme doğrudan verilmemiş, katılımcılardan öncelikle verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek hipotezi kendilerinin ortaya atması beklenmiştir. Burada amaç öğretmen adaylarının fonksiyon kavram bilgilerini değerlendirmektir. Ayrıca klinik görüşmelerde ispatlama sürecinin sonunda katılımcılardan yaptıklarının ispat olma durumunu değerlendirmeleri de istenmiştir. Bunun amacı katılımcıların ispatlama süreçleri hakkında daha detaylı bilgi sahibi olmak ve ispat yöntemlerini farkındalık durumlarını ortaya çıkartmaktır.

Öğretmen adaylarının ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerini incelemek için ise klinik görüşmede öğretmen adaylarına:

- Sence ispat yapmak hangi sınıf düzeyinde başlıyor?
- Ortaokulda ispat nedir?
- Az önce konuştuğumuz sayılara ilişin önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygunluğu konusunda ne düşünüyorsun?
- Sen böyle önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencilerine göstermek için ne yaparsın?
- Ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik neler yaparsın?

soruları yöneltilmiştir. Burada amaç öğretmen adaylarının ortaokul düzeyinde görülen ve kendilerine de yöneltilen sayıların tekliği ve çiftliği üzerine olan önermelerin ortaokul düzeyinde ispatına ilişkin ne düşündüklerini, ispatlamanın ilköğretim yıllarında başladığının ve ileride öğretmen olduklarında öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmekten sorumlu olduklarının farkında olma durumlarını araştırmaktır.

2.4.2. Araştırmacı günlükleri

Araştırmanın bir diğer veri toplama aracı da araştırmacının araştırma süreci boyunca, yapacağı klinik görüşme öncesi ve sonrasında tuttuğu araştırmacı günlükleridir. Araştırmacı katılımcılarla ilgili gözlemlerini, yapılan klinik görüşmelerle ilgili ilk değerlendirmelerini ve süreçte yaşananları günlüğüne not tutmuştur. Ayrıca katılımcılardan klinik görüşme dışında alınan bilgiler de günlüğe kaydedilmiştir. Bu günlükler özellikle klinik görüşme öncesi ve sonrasında tutularak öğretmen adayları hakkında daha fazla bilgi sahibi olmada, süreçte elde edilen verileri organize etmede ve verilerin analizinde yarar sağlamıştır.

2.5. Verilerin Analizi ve Yorumlanması

Klinik görüşmelerden elde edilen veriler Selden ve Selden'in (2007) teorik çerçevesine göre Miles ve Huberman'ın (1994) *verilerin azaltılması, verilerin gösterimi* ve *sonuçları ortaya koyma ve doğrulama* olmak üzere üç aşaması olan nitel veri analizi yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Verilerin azaltılması aşamasında elde edilen veri çalışmanın amacı doğrultusunda ayıklanmış, bu veriler kodlanarak ilişkili kodların bir araya getirilmesiyle temalar oluşturulmuştur.

Araştırmada Selden ve Selden'in (2007) teorik çerçevesinde yer alan ispatın formal-retorik kısmının nasıl oluşturulduğu ve ispatlama sürecinde ortaya çıkan problem-merkezli kısmın nasıl çözüldüğü analiz edilmiştir. Selden ve Selden'in teorik çerçevesinde yer alan ispatın alt ispatlar ile nasıl organize edildiğinin ele alındığı hiyerarşik yapı ve idealize edilen bir ispatlayıcı tarafından oluşturulan ispat boyunca aşamaların yapılış yolu, ispatın formal-retorik kısmının oluşturulması sürecinde değerlendirilmiş, ayrıca ele alınmamıştır. Çünkü araştırmada herhangi bir alt ispat gerektirmeyen basit önermelerin ispatlanması istenmiş, dolayısıyla da hiyerarşik yapı ve yapılış yolu da ispatın kendi içinde değerlendirilmiştir. Selden ve Selden (2007) ispatlama becerisini analiz etmek için geliştirdiği teorik çerçevede ispatı kendi içinde formal-retorik ve problem merkezli kısım olmak üzere ikiye ayırmıştır. Bir önermenin ispatındaki formal-retorik kısım, bu önermenin ve bu önermenin ispatı için gerekli olan tanım ya da önermelerin mantıksal yapısının matematik dilinde ifade edilmesi (unpacking) ve bu mantıksal yapının ispat için kullanılmasıdır (Selden ve Selden, 2013). İspat çerçevesi (proof framework) olarak da ifade edilen formal-retorik kısımda (Selden ve Selden, 2013), ispatın yapılması için gerekli olan ispat yöntemi bilgisi kullanılır. Formal-retorik kısmın oluşturulması için ispata ilişkin kavramların derinlemesine anlaşılması ya da problem çözme becerisinin kullanılması gerekli değildir (Selden ve Selden, 2007). Bu nedenle formal-retorik kısmın oluşturulması yöntem bir beceri olarak görülmektedir (Selden ve Selden, 2015). İspatın problem merkezli kısmı ise ispatlanacak olan önermenin mantıksal yapısı matematik dili ile ifade edildikten sonra gerekli olan kavramsal ve işlemsel bilgilerin kullanılarak ispatın tamamlanmasıdır. Problem-merkezli kısım için ispatlanacak önermeye ilişkin kavramsal bilginin derinlemesine anlaşılması ve problem çözme becerisi gereklidir (Selden ve Selden, 2013). Selden ve Selden'in (2007) teorik çerçevesinde bahsettiği davranış şemaları da ispatlama süreci için oldukça önemlidir. İspatlama sürecinde Selden ve Selden'in (2009) de ifade ettiği gibi ispatlama deneyimi kazanıldıkça karşılaşılan durumlar ve bu durumlara karşılık yapılan eylemler zaman içinde ilişkilendirilir ve böylece davranış şemaları oluşur. Örneğin "$\forall x \in$ IR için …" şeklindeki bir önermenin ispatına "Keyfi bir $x \in$ IR alalım" biçiminde başlamak yararlı bir davranış şemasıdır (Selden ve Selden, 2007).

Klinik görüşmede ilk soruda sonlu elemanlı küme üzerinde tanımlı bağıntı cebirsel temsil ile verilerek bu bağıntının fonksiyon olup olmama durumunun belirlenmesi ve bu belirleme sonucunda fonksiyon olma durumuna ilişkin ortaya atılan hipotezin ispatlanması istenmiştir (EK IV). Selden ve Selden'in teorik çerçevesinin kullanıldığı çalışmalarda (Selden vd., 2010; Selden vd., 2014; Savic, 2015) genel olarak "$p \Rightarrow q$" (p ve q bir önerme) formundaki önermelerin ispatlanması istenmektedir. Böyle önermelerin ispatlanması süreci, eğer önerme matematik dilinde ifade edilmemişse önermenin matematik dilinde ifade edilmesi ile başlar. Ardından formal retorik kısım oluşturulur ve formal-retorik kısmın ortaya çıkarttığı problemin çözülmesi ile problem-merkezli kısım çözülerek ispatlama süreci tamamlanır. Klinik görüşmede yalnızca bu soruda ispatlanacak olan önerme doğrudan verilmemiş, katılımcılardan öncelikle verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmalarının beklendiği aşağıdaki soru sorulmuştur:

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{matrix} f: A \to A \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?"*

Burada katılımcıların ispatlama sürecine geçmeden önce bir hipotez ortaya atmak için fonksiyon kavramı bilgilerini kullanma durumları incelenmiştir. Sonrasında katılımcılara ortaya attıkları doğru hipotez doğrultusunda aşağıdaki soru yöneltilmiştir.

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{matrix} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız."*

Katılımcıların ispatlama sürecine geçmeden önce bir hipotez ortaya atmak için fonksiyon kavramı bilgilerini kullanmaları gerekmektedir. Fonksiyon olma ya da olmama durumuna göre ortaya hipotezin atılmasından sonra Selden ve Selden'in (2007) teorik çerçevesinde ifade edilen ispatlama süreci (formal ispat) başlamaktadır. Ayrıca burada katılımcıların sonlu elemanlı bir küme üzerinde tanımlı olarak verilen bağıntının fonksiyon belirttiğini ispatlamak için tüketerek ispat yöntemini kullanması beklenmektedir. Aşağıda Tablo 2.5'te 1. soruya ilişkin kodlama tablosu verilmiştir.

Tablo 2.5. *Tüketerek ispat yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Tüketerek İspat)	KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden (2007)	KODLAR
Bağıntının fonksiyon olup olmadığına karar verme	Hipotezin ortaya atılması	• Doğru hipotezi ortaya atma • Fonksiyon kavram bilgisine sahip olma • Fonksiyon kavram bilgisini doğru kullanma • Eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olma • Eksik fonksiyon kavram bilgisini kullanma • Hatalı fonksiyon kavram bilgisine sahip olma • Hatalı fonksiyon kavram bilgisini kullanma • İşlem bilgisini doğru kullanma • Grafikle fonksiyon olma durumunu araştırma

Tablo 2.5. *(Devam) Tüketerek ispat yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Tüketerek İspat)	**KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden (2007)**	**KODLAR**
Fonksiyon olma koşulunun matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Fonksiyon olma koşulunu matematik dilinde uygun bir şekilde ifade etme • Fonksiyon olma koşulunu matematik dilinde eksik bir şekilde ifade etme • Fonksiyon olma koşulunu anadilde ifade etme • Fonksiyon olma koşulunu anadilde eksik bir şekilde ifade etme • Fonksiyon olma koşulunu ifade etmeme
Fonksiyon olma durumunu ispat yolu (Fonksiyon ise tanım kümesinin sınırlı olması durumunda tüketerek ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal–Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Kümenin sınırlı sayıda elemanı olduğunu fark etme • Tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olma • Tüketerek ispat yöntemini kullanma • Tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmama • Uygun olmayan ispat yöntemini kullanma • Olmayana ergi ile ispat yöntemini kullanma • Herhangi bir ispat girişiminde bulunmama
Fonksiyon kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgilerle fonksiyon olma durumunun gösterilmesi	İspatın Problem-Merkezli Kısmı	• Eksik olan fonksiyon kavram bilgisini kullanarak fonksiyon olma durumunu gösterme • Fonksiyon kavram bilgisini kullanarak fonksiyon olma durumunu gösterme • Hatalı fonksiyon kavram bilgisini kullanarak fonksiyon olma durumunu gösterme • Gerekli işlemsel bilgiyi kullanarak fonksiyon olma durumunu gösterme

Katılımcılara sonsuz elemanlı bir küme üzerinde tanımlı bir bağıntının fonksiyon olma durumunu ispatlamak için doğrudan ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği aşağıdaki soru sorulmuştur.

"$y = x + 1$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.*"

Bu soruda katılımcılardan hipotez ortaya atmaları beklenmeden doğrudan verilen önermenin doğruluğunu ispatlamaları beklenmiştir. Burada katılımcıların fonksiyon kavram bilgilerini kullanmaları ve bağıntı sonsuz elemanlı bir küme üzerinde tanımlandığı için tanım kümesinden keyfi bir eleman seçerek verilen bağıntının fonksiyon olma koşullarını sağladığını doğrudan ispat yöntemini kullanarak göstermesi gerekmektedir. Bu soruya ilişkin kodlama tablosu aşağıda Tablo 2.6'da verilmiştir.

Tablo 2.6. *Doğrudan ispat yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Doğrudan İspat)	KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden, 2007)	KODLAR
Önermenin matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Fonksiyon kavramını matematik dilinde ifade etme • Fonksiyon kavramını anadilde ifade etme • Fonksiyon kavramını ifade etmeme • Matematik dilinde "her" niceleyicisini doğru kullanma • "Her" niceleyicisini kullanmama
Önermenin doğru olma durumunu ispat yolu (Önermenin yapısına göre doğrudan ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal–Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olma • Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmama • Doğrudan ispat yöntemi bilgisini uygun şekilde kullanamama • Doğrudan ispat yöntemi bilgisini uygun şekilde kullanma • Uygun olmayan ispat yöntemini kullanma • Herhangi bir ispat girişiminde bulunmama
Fonksiyon kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgilerle önermenin doğru olduğunu gösterme	İspatın problem-merkezli kısmı	• Fonksiyon kavramını doğru kullanma • Eksik fonksiyon kavram bilgisini kullanma • Hatalı fonksiyon kavram bilgisini kullanma • Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma

Karşıt ters ya da olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği klinik görüşmenin 3. sorusu olan "*n bir doğal sayı olmak üzere* n^2 *tek sayı ise n tek sayıdır.*" önermesinin ispatında ise katılımcıların öncelikle önermenin mantıksal yapısını çözmeleri başka bir ifade ile "ise" bağlacının kullanıldığı bu önermede hipotez ve hüküm kısımlarını ayırt ederek uygun ispat yöntemlerinden birini seçmeleri beklenmiştir. Bu önermenin ispatı için doğrudan ispat yöntemi uygun değildir. Katılımcıların karşıt ters ispat yöntemi yerine olmayana ergi ispat yöntemini seçmeleri durumunda karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları için yönlendirme yapılmıştır. Bu önermenin ispatına ilişkin kodlama tablosu aşağıda Tablo 2.7'de verilmiştir.

Tablo 2.7. *Karşıt ters / olmayana ergi ispatı yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Karşıt ters / Olmayana ergi ispatı)	**KURAMSAL KARŞILIK Selden ve Selden (2007)**	**KODLAR**
Önermenin matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Önermenin mantıksal yapısını çözme • Önermenin mantıksal yapısını çözememe • Önermeyi matematik dilinde ifade etme • Önermeyi anadilde ifade etme • Tek tam sayıyı doğru bir şekilde ifade etme • Matematik dilinde "her" niceleyicisini doğru kullanma • "İse" bağlacını doğru kullanma • "Her" niceleyicisini kullanmama • "İse" bağlacını kullanmama
Önermenin doğru olma durumunu ispat yolu (Önermenin doğru olması durumunda önermenin yapısına göre aksine örnek verme ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal–Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Uygun ispat yöntemini seçme (karşıt ters ya da olmayana ergi) • Olmayana ergi ve aksine örnek verme ispat yöntemlerini karıştırma • Eksik varsayımda bulunma (hükmün değilini ve hipotezi aynı anda kabul etmesi gerekirken yalnızca hükmün değilini kabul etme) • Hükmü varsayıp hipotezi gösterme (converse error) • Hipotesin değilini varsayıp hükmün değilini gösterme (inverse error) • Uygun olmayan ispat yöntemini seçme (Doğrudan ispat yöntemi) • İspat yöntemini hatalı kullanma • Herhangi bir ispat girişiminde bulunmama
Tek ve çift tamsayı kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgilerle önermenin doğru olduğunu gösterme	İspatın Problem-Merkezli Kısmı	• Tek ve çift tamsayı kavramlarını doğru kullanma • Tek ve çift tamsayı kavramlarını matematik dilinde doğru bir şekilde temsil etmeme • Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma

Klinik görüşmenin 4. sorusunda katılımcılardan "Her $x \in IR$ için $x < x^2$'dir." önermesinin doğru olduğunu ya da yanlış olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Evrensel niceleyicinin kullanıldığı bu önermenin yanlış olduğunu ispatlamak için katılımcılardan aksine örnek verme ispat yöntemini ve reel sayı kavram bilgisini kullanmaları beklenmektedir. Aşağıda Tablo 2.8'de bu soruya ilişkin kodlama tablosu verilmiştir.

Tablo 2.8. *Aksine örnek verme ispatı yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Aksine örnek verme ispatı)	**KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden, 2007)**	**KODLAR**
Önermenin matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Önermenin mantıksal yapısını çözme • Önermenin mantıksal yapısını çözememe • Önermeyi matematik dilinde ifade etme • Matematik dilinde “her” niceleyicisini doğru kullanma • “Her” niceleyicisini kullanmama
Önermenin doğru olma durumunu ispat yolu (Önermenin yanlış olması durumunda önermenin yapısına göre aksine örnek verme ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal–Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Aksine örnek verme ispat yöntemini bilgisine sahip olma • Aksine örnek verme ispat yöntemini kullanma • Aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmama • Uygun olmayan ispat yöntemini kullanma
Reel sayı kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgilerle önermenin doğru olduğunu gösterme	İspatın Problem-Merkezli Kısmı	• Reel sayı kavramını doğru kullanma • Reel sayı kavram bilgisi eksikliği • Reel sayı kavram bilgisini yanlış kullanma • Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma

Klinik görüşmenin 5. sorusu olarak katılımcılardan “*Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur.*” önermesinin doğruluğunu ispatlamaları istenmiştir. Bunun için katılımcıların tamsayı kavram bilgilerini ve olmayana ergi ispat yöntemini kullanmaları beklnemektedir. Aşağıda Tablo 2.9’da bu soruya ilişkin kodlama tablosu verilmiştir.

Tablo 2.9. *Olmayana ergi ispatı yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Olmayana ergi ispatı)	**KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden, 2007)**	**KODLAR**
Önermenin matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Önermenin mantıksal yapısını çözme • Önermenin mantıksal yapısını çözememe
Önermenin doğru olma durumunu ispat yolu (Önermenin doğru olması durumunda önermenin yapısına göre olmayana ergi ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal–Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olma • Olmayana ergi ispat yöntemini kullanma • Olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olmama • Uygun olmayan ispat yöntemini kullanma

Tablo 2.9. *(Devam) Olmayana ergi ispatı yapılmasının beklendiği soruyu ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Olmayana ergi ispatı)	KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden, 2007)	KODLAR
Önermenin doğru olma durumunu ispat yolu (Önermenin doğru olması durumunda önermenin yapısına göre olmayana ergi ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal-Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Herhangi bir ispat girişiminde bulunmama
Çift-tek tamsayı ve değişken kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgilerle önermenin doğru olduğunu gösterme	İspatın Problem-Merkezli Kısmı	• Çift tamsayı kavramını matematik dilinde temsil etme • Çift tamsayı kavramını matematik dilinde temsil edememe • Çift tamsayı kavramını doğru kullanma • Tek tamsayı kavramını matematik dilinde temsil etme • Tek tamsayı kavramını matematik dilinde temsil edememe • Tek tamsayı kavramını doğru kullanma • Değişken kavramını doğru kullanma • Değişken kavramını yanlış kullanma • Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma

Klinik görüşmenin 6. sorusu olarak katılımcılardan "*Bir* $x > 5$ *reel sayısı vardır öyle ki* $x^2 < 26$*'dır.*" önermesinin doğruluğunu ispatlamaları istenmiştir. Bunun için katılımcıların önermede kullanılan varlık niceleyicini fark ederek önermenin mantıksal yapısını çözmeleri, reel sayı kavram bilgisi, varlık ispat yöntemini kullanmaları ve gerekli işlemleri yapmaları beklenmektedir. Aşağıda Tablo 2.11'de bu soruya ilişkin kodlama tablosu verilmiştir.

Tablo 2.10. *Varlık ispatı yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Varlık ispatı)	KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden, 2007)	KODLAR
Önermenin matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Önermenin mantıksal yapısını çözme • Önermenin mantıksal yapısını çözememe • Önermeyi matematik dilinde ifade etme

Tablo 2.10. *(Devam) Varlık ispatı yapılmasının beklendiği soruya ilişkin kod, kategori ve tema tablosu*

TEMA (Varlık ispatı)	KURAMSAL KARŞILIK (Selden ve Selden, 2007)	KODLAR
Önermenin matematik dilinde ifadesi	Önermenin mantıksal yapısını çözme (Unpack)	• Matematik dilinde "varlık" niceleyicisini doğru kullanma • "Varlık" niceleyicisini kullanmama
Önermenin doğru olma durumunu ispat yolu (Önermenin doğru olması durumunda önermenin yapısına göre varlık ispat yöntemini kullanma)	İspatın Formal–Retorik Kısmı (İspat çerçevesi)	• Varlık ispat yöntemini bilgisine sahip olma • Varlık ispat yöntemini kullanma • Varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmama • Uygun olmayan ispat yöntemini kullanma • Herhangi bir ispat girişiminde bulunmama
Reel sayı kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgilerle önermenin doğru olduğunu gösterme	İspatın Problem-Merkezli Kısmı	• Reel sayı kavramını doğru kullanma • Reel sayı kavram bilgisi eksikliği • Reel sayı kavram bilgisini yanlış kullanma • Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma • Gerekli işlemleri yapmama

Kısaca özetlemek gerekirse katılımcıların ispatlama süreci ispatın formal-retorik ve problem-merkezli kısımlarına göre incelenmiş ve ispatlama sürecinde gerekli olan kavram bilgisi, işlemsel bilgi ve ispat yöntemi bilgisini kullanma durumları analiz edilmiştir. Katılımcıların verilen önermelerin mantıksal yapısının farkında olma durumları ve ispatlarını matematik dili ya da anadilde ifade etme biçimleri de ele alınmıştır.

Katılımcıların ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri ise klinik görüşmede sorulan sorular doğrultusunda "ispat yapmaya hangi sınıf düzeyinde başlanacağı", "ortaokulda ispatın ne olduğu", "sayılarla ilgili görüşmedeki önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygunluğu", "sayılarla ilgili görüşmedeki önermelerin doğruluklarının nasıl gösterileceği" ve "ortaokulda ispat becerilerini geliştirmek için yapılacaklar" biçiminde kategorilere ayrılarak Tablo 2.11'de verildiği gibi kodlanmıştır.

Tablo 2.11. *Ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerin kod ve kategorileri*

Ortaokul Düzeyinde İspat Yapmaya İlişkin Görüşlerin Kategorileri	Kodlar
İspat yapmaya hangi sınıf düzeyinde başlanacağı	• İlköğretim düzeyinde başlar. • Lise düzeyinde başlar. • Üniversite düzeyinde başlar.
Ortaokulda ispatın ne olduğu	• Ortaokulda basit düzeyde ispat yapılır. • Ortaokul düzeyinde ispat yapılmaz. • Seviyeye uygun olarak cebirsel ispatlar da yapılır.
Sayılarla ilgili görüşmedeki önermelerin doğrululuklarını ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygunluğu	• Uygundur. • Uygun değildir.
Sayılarla ilgili görüşmedeki önermelerin doğruluklarının nasıl gösterileceği	• Uygun olmadığı için göstermeme • Nasıl gösterileceğini bilmeme • Örneklerle denemeler yapma • Önce ispatlamaya ilişkin kendi eksiklerini giderme • Yalnızca sözel olarak doğru olduğunu söyleme • Cebirsel olarak gösterme
Ortaokulda ispat becerilerini geliştirmek için yapılacaklar	• Öğrencilere ispat yaptırma • Öğrencilere yaptıklarını sorgulatma • Ne yapılacağını bilmeme • Somut materyallerle etkinlikler yapma

2.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Araştırmada veri toplama aracı olarak klinik görüşme yöntemi ve araştırmacı günlükleri kullanılmıştır. Hazırlanan klinik görüşme soruları iki matematik eğitimi ve bir Türkçe eğitimi alanlarında uzman öğretim üyelerine gösterilmiş ve öğretim üyelerinden soruları araştırmanın amacına uygunluğu ve dil bakımından anlaşılırlığı açısından değerlendirmeleri istenerek görüşleri alınmıştır. Alınan dönütler doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra hazırlanan sorularla 1., 2., 3. ve 4. sınıfta okumakta olan birer öğretmen adayı ile pilot klinik görüşmeler yapılmıştır. Pilot klinik görüşmeler ile ilgili matematik eğimi alanında uzman bir öğretim üyesinden dönütler alınmıştır. Katılımcılarla klinik görüşmeler yapıldıktan sonra elde edilen veriler, konu alanında uzman bir kişi ile araştırmacı tarafından birbirlerinden bağımsız olarak değerlendirilerek güvenirlik çalışması yapılmış ve yapılan değerlendirmeler arasında uyum sağlanmıştır. (Miles ve Huberman, 1994). Verilerin gösterimi aşamasında tablo ya da görsel kullanılarak veriler görsel hale getirilmiş, sonuçları ortaya koyma ve doğrulama aşamasında ise ortaya çıkan ilişkiler yorumlanarak elde edilen sonuçlar alan yazınla karşılaştırılmıştır.

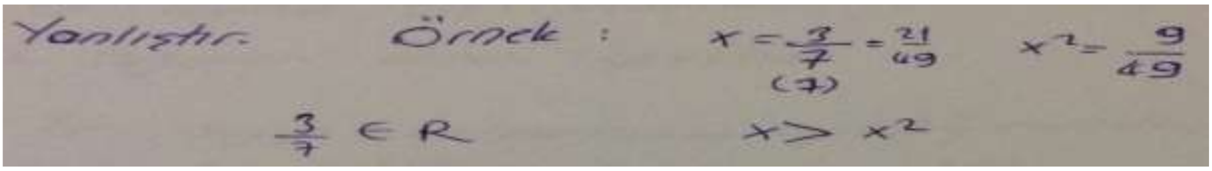
3. BULGULAR VE YORUM

3.1. Katılımcıların İspatlama Süreçlerine İlişkin Bulgular

3.1.1. Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların ispatlama süreçleri

Sorulan sorulardaki ispatlama süreçlerinin tümünü başarı ile tamamlayan katılımcı olmamıştır. Katılımcıların ispat yöntemi ve ispat için gerekli olan kavram bilgilerinin eksik olduğu görülmüştür. Altı katılımcıdan ikisi (Fatmagül ve Seda) hiçbir ispatlama sürecinde başarılı olamazken, üçü (Hacer, Ece ve Melis) yalnızca bir soruda, biri ise (Yonca) iki soruda ispatlama süreçlerini başarı ile tamamlamıştır. Katılımcıların en çok aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatlama sürecinde başarılı oldukları, tüketerek, doğrudan, karşıt ters olmayana ergi ispat yöntemlerinin kullanılmasının beklendiği önermelerin ispatlama süreçlerinde ise başarısız oldukları görülmüştür. Katılımcılardan üçü aksine örnek verme ispatlama sürecinde başarılı olmuş, tüketerek, doğrudan, karşıt ters ve olmayana ergi ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlayan katılımcı ise olmamıştır. Genellikle katılımcıların uygun ispat yöntemi bilgisine ya da ispat için gerekli olan kavram bilgisine sahip olmadıklarından ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür.

İspatlama süreçlerinde diğer katılımcılara göre daha başarılı olan Yonca, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemini kullanmasının beklendiği sorularda başarılı bir şekilde ispat yapmıştır. Fatmagül ve Seda ise hiçbir ispatlama sürecini başarılıyla tamamlayamamıştır. Hacer ve Ece yalnızca aksine örnek verme, Melis ise yalnızca varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeleri doğru bir şekilde ispatlamıştır.
Katılımcılar, sorulan sorular içinde en çok aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "$Her\ x \in IR\ için\ x < x^2$*'dir*" önermesinin ispatında başarılı olmuşlardır. Altı katılımcıdan üçü (Hacer, Ece ve Yonca) önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını ve aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, reel sayı kavram bilgisini de kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Bu üç katılımcı verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmuş ve yaptıklarının bir ispat olduğunu ifade etmiştir. Geriye kalan üç katılımcıdan ikisi (Melis ve Seda) önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmalarına rağmen yaptıklarının önermenin yanlış olduğunu göstermek olduğunu belirterek aksine örnek verme kant yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını göstermişlerdir. Aşağıda aksine örnek verme ispatlama sürecinde başarılı olan üç katılımcıdan biri olan Yonca'nın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.1. *Yonca'nın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yonca: Bu yanlıştır, çünkü reel sayılar içerisinde kesirli ifadelerde vardır. Mesela basit kesirler vardır onlarda böyle bir şey sağlanmıyor (yazıyor…). Reel sayılar için yanlış olduğunu şöyle ispatladım. Sadece bir örnek yetti. x yerine 3/7 yazdım, 3/7 bir reel sayıdır. Onun karesini aldım, 9/49 buldum. Şimdi ben bunu 7 ile genişlettim 21/49 oldu. Yani x, x^2'den daha büyük oldu. O yüzden bu önerme yanlıştır.

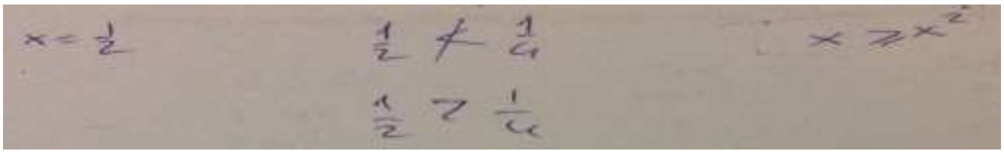
Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?

Yonca: İspattır, kimse bunun üstüne konuşamaz

Görüşmeci: Neden?

Yonca: Çünkü bunu yanlış yaptı burada. x de zaten şu 3/7, şuraya yazayım 3/7 ϵ R (yazıyor…) ondan sonra evet ispattır.

Katılımcılardan ikisi (Melis ve Seda) ise aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatlama sürecinde önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmasına rağmen bu yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmemiştir. Aşağıda bu katılımcılardan Melis'in aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.2. *Melis'in aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Peki bu bir ispat oldu mu?

Melis: Hayır. Düşünemiyorum ya ne desem, ne yapsam mesela bir x eklemektir, ne bileyim 2'ye bölmektir öyle şeyler yapıyorlar ya her iki tarafa da

Görüşmeci: x yerine ½ verdin. Bu şekilde sen ne yapmış oldun?

Melis: Ben burada hep deniyorum. ½ verdim, 1 verdim, sonra dedim ki, bu böyle değildir.

Görüşmeci: Peki doğruluğu için ne diyorsun?

Melis: Bu yanlıştır diyorum.

Görüşmeci: Yanlıştır diyorsun. Peki, bu şekilde bir tane örnek verdin ½ dedin. Bu bir ispat olur mu?

Melis: Çürüttüm ben bunu, hani kendi dediğimi ispatlayamıyorum ama bunu çürüttüm bence.

…

Melis: Çünkü düşünemediğim yani çok şey var, ne desem, ne yazsam

Görüşmeci: Yani bu bir ispat oldu mu dediğimde ne dedin?

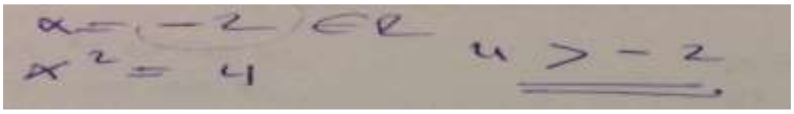
Melis: Bu bir ispat değil.

Görüşmeci: Peki ne bu yaptığın ne?

Melis: Denemek.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Melis, önermeyi sağlamayan bir reel sayı bulmasına ve önermenin yanlış olduğunu belirtmesine rağmen yaptığının bir ispat olmadığını deneme olduğunu ifade ederek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir.

Katılımcılardan Fatmagül ise reel sayı kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanamamış ve önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Ancak Fatmagül önermenin ispatı için önermenin mantıksal yapısına uygun bir ispat yöntemi seçmemiş, yalnızca bir örnek üzerinden önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda Fatmagül'ün aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeye ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.3. *Fatmagül'ün aksine örnek verme ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatına ilişkin yaptıkları*

Fatmagül: Yani elimde öyle ispatlayabileceğim bir şey yok ama sayı veririm. Mesela (yazıyor…) x'e -2 verdim, x^2 o zaman 4'tür ve 4, -2'den büyüktür. Bu durumda da bunu ispatlamış oluyorum. Yani -2'de zaten reel sayıdır, her reel sayı için bunu söyleyebiliriz.

Görüşmeci: Her reel sayı için olduğunu nasıl düşünüyorsun?

Fatmagül: Sonuçta bir sayıdan iki tane çarpıyoruz, bu sayının değerini arttıracağız. O da işte negatif olsun o sayı. İşaretini pozitif yapacağız, değerini arttıracağız. Mutlaka doğru olmak zorunda, böyle düşünüyorum.

Görüşmeci: Ne diyorsun doğruluğu için?

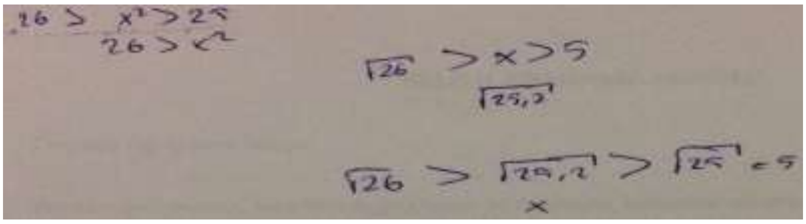
Fatmagül: Bence doğru. Ama ispat şu an bilmiyorum.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Fatmagül yaptıklarını ispat olarak değerlendirmemiştir. Fatmagül'ün aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olma durumunu sorgulamak için önerme yanlış olsaydı ne yapacağı sorulduğunda ise Fatmagül önermeyi sağlayan bir değer bulsa bile bunun bir ispat olmayacağını ifade ederek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır. Aşağıda bu duruma ilişkin Fatmagül'ün görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Peki önermenin yanlış için ne olması gerekiyor?
>
> Fatmagül: Yanlış olması için yani ben x'e bir reel sayı verdiğimde onun karesinin bir sonucu çıkacak ve o kare o x'den küçük olacak ki doğru olmayacak.
>
> Görüşmeci: O zaman böyle bir sayı bulabilseydin bu ispat olur muydu?
>
> Fatmagül: Öyle bir sayı bulabilseydim eğer yani o zaman onun yanlış olduğunu bulurdum ama o yine yanlış olduğunun ispatı olmazdı bence.
>
> …
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Fatmagül: Yani bir tane değer vererek olacak bir şey değil, çünkü birçok değer verebiliriz. Hemen onun doğru olduğunu söyleyemeyiz, söyleyebiliriz de ispatlayamayız.

Katılımcıların aksine örnek vermeden sonra diğer ispatlama süreçlerine göre daha başarılı oldukları ispatlama süreci varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Bir* $x > 5$ *reel sayısı vardır öyle ki* $x^2 < 26$*'dır.*" önermesinin ispatında olmuştur. Altı katılımcının tümü önermenin mantıksal yapısını herhangi bir yönlendirme olmaksızın doğru bir şekilde anladığını göstermiş ve önermede ifade edildiği şekilde bir sayı bulunabileceğini ifade ederek önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Ancak buna rağmen katılımcılardan yalnızca ikisi (Melis ve Yonca) başarılı bir şekilde ispatlama sürecini tamamlamıştır. Geriye kalan dört katılımcı önermenin doğru olduğunu ifade etmelerine rağmen önermenin neden doğru olduğunu açık bir şekilde ifade etmemişlerdir. Bu dört katılımcı varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak önermeyi sağlayan bir reel sayı bulmamışlardır.

Katılımcılardan yalnızca ikisi (Melis ve Yonca) varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduklarını göstererek reel sayı kavram bilgilerini ve gerekli işlemsel bilgilerini kullanarak başarılı bir şekilde ispatlama süreçlerini tamamlamışlardır. Aşağıda bu katılımcılardan Yonca'nın görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.4. *Yonca'nın varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?

Yonca: Evet ispattır

Görüşmeci: Neden?

Yonca: Çünkü gerekli işlemleri yaptığımı düşünüyorum. x²'yi elde ettim 25'den büyük olduğunu gördüm. 26'dan da küçük olduğunu gördüm. Öyle de doğru olmuş oldu.

Görüşmeci: Peki burada neyi ispatlamaya çalışıyorsun?

Yonca: x'in 5'den büyük olup, bir x, böyle bir sayı var galiba x sayısı var bir tane. Yani bütün reel sayılar için geçerli olmayan 5'ten büyükmüş karesinin 26'dan küçük olduğunu ispatladım. 5'den büyük olup karesinin 26 dan küçük olduğunu ispatladım.

…

Görüşmeci: Peki bu önermedeki bir ne anlama geliyor?

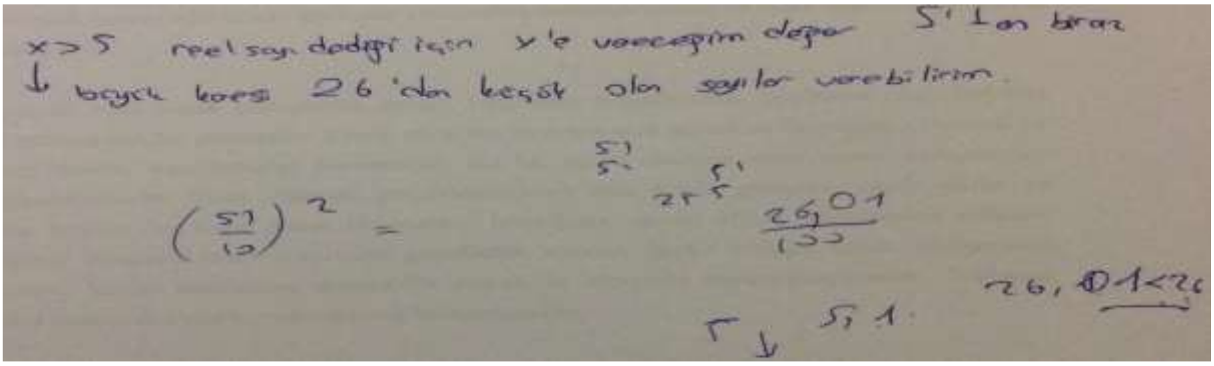
Yonca: Sadece bir x değeri için, belirli bir x değeri varmış. Onun için söylüyor. Yoksa yani bir yazmasaydı bütün 5'ten büyük reel sayılar için geçerli olsaydı yanlış olurdu.

Görüşmeci: Neden?

Yonca: Mesela 6 diyelim. 6'yı yazalım oraya, 6'nın karesi 36 oluyor. 36, 26'dan küçük işte bu böyle yanlış oluyor.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi Yonca varlık niceleyicisine dikkat etmiş, gerekli işlemleri yaparak önermeyi sağlayan bir reel sayı bulmuş ve bunu bir ispat olarak değerlendirmiştir.

Varlık ispat yöntemini kullanarak başarılı bir şekilde ispat yapan iki katılımcı Melis ve Yonca dışında kalan dört katılımcı Hacer, Ece, Fatmagül ve Seda da önermenin mantıksal yapısını anladığını yansıtarak varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduklarını göstermiş ve önermeyi sağlayan bir reel sayı bulunabileceğini ifade etmişlerdir. Ancak bu katılımcılar böyle bir sayının nasıl bulunacağına ilişkin yeterli açıklamayı yapmamışlardır. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Ece'nin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.5. *Ece'nin varlık ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

Ece: Ama büyük oldu, daha küçüğünü de alabilirim. Ben şu an aradaki sayılara çok fazla yorum yapamıyorum bilemediğim için. 5,1'i verdiğim zaman bu sayı 26,01 oluyor. Tamam 26'dan küçük değil ama 5,1 ile 5 arasında bir sürü reel sayı var. Verdiğim zaman 26'dan küçük olacak demektir.

Görüşmeci: Nasıl biliyorsun onu?

Ece: Daha önce bunun hatasını çok yaptım. Reel sayı kısmına dikkat etmeyip direkt tamsayı doğal sayıyı alıp soruyu yanlış çözdüğüm için aklımda kaldı. Buraya çok çok çok 5'den büyük ama çok minik bir sayı yazabilirim ve karesini aldığım zaman da aslında şöyle de bir şey var her zaman doğru olur mu bir de öyle düşündüm şimdi reel sayı diyor. Bir $x > 5$ reel sayısı vardır öyle bir değer ver ki diyor x^2 yani verdiğin değerin karesi 26'dan küçük olsun ya ben bu değeri verebilirim. Ben veremesem de veren illaki olur yani.

Görüşmeci: Peki verebilirim dedin yani veren illaki olur dedin, öyle bir değer olsa ne olur?

Ece: Bunun doğruluğu ispatlanmış olur.

Görüşmeci: Yeterli mi bir tane örnek?

Ece: Yeterli

Görüşmeci: Neden?

Ece: Çünkü zaten bize bir tane reel sayı diyor. Bir tane x'e orada değer verip bunu ispatlamamız için yeterli.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi Ece önermeyi sağlayan bir reel sayı bulabildiğini açıkça gerekçelendirmeyerek ispatını tamamlamasa da varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtmıştır.

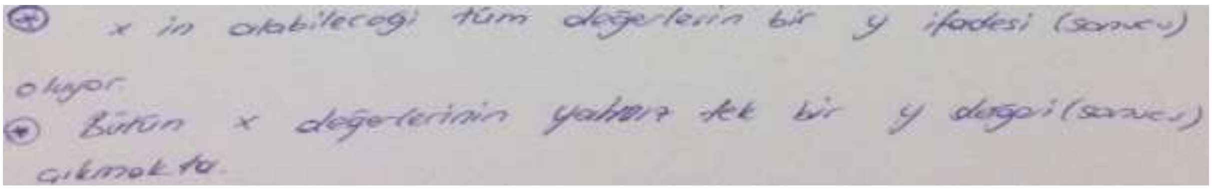
Katılımcılardan tüketerek, doğrudan, karşıt ters ve olmayana ergi ispatlarını doğru bir şekilde yapan ise olmamıştır. Karşıt ters ve olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip katılımcı olmazken, doğrudan ispat yöntemi bilgisine sadece bir, tüketerek ispat yöntemi bilgisine ise sadece iki katılımcı sahiptir. Ayrıca tüm katılımcıların tüketerek ve doğrudan ispat yapılmasının beklendiği sorularda ispat için gerekli olan fonksiyon kavram bilgisini ve karşıt ters ve olmayana ergi ispatı yapılmasının beklendiği sorularda ise ispat için gerekli olan tek ve çift doğal sayı ya da tamsayı kavram bilgisini kullanmakta zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Katılımcılardan tümü tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği soruda ispatlama sürecini başarıyla tamamlayamamıştır. Katılımcılardan verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmalarının beklendiği

“$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{l} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?”*

sorusunda tüm katılımcıların fonksiyon kavram bilgilerini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği doğru hipotezi ortaya attıkları görülmüştür. Ancak katılımcılardan bir katılımcı hariç (Yonca) diğer tüm katılımcılar eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olduklarını göstermişlerdir. Katılımcıların verilen eşitliğin fonksiyon belirtme durumunu araştırırken, tanım kümesinden alınan bir elemanın görüntüsünün değer kümesinde olmasını ifade ettikleri ancak tanım kümesinden alınan her bir eleman için değer kümesinden tek bir eleman karşılık gelmesini ifade etmedikleri görülmüştür.

Fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğu görülen Yonca’nın görüşme kağıdından bir alıntı aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.6. *Yonca’nın fonksiyon kavram bilgisine ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Alıntıdan da görüldüğü gibi Yonca, fonksiyonun iki küme arasında nasıl bir eşleme olduğunu açıkça ifade etmiştir.

Aşağıda eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğu görülen beş katılımcıdan biri olan Fatmagül’ün fonksiyon kavram bilgisini verilen eşitliğin fonksiyon belirtme durumunu araştırırken nasıl kullandığı ve fonksiyonu nasıl tanımladığına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Fatmagül: Şimdi A’dan A’ya olduğuna göre x yerine kümedeki elemanları yazsak mesela (yazıyor…) y=3-0’dan 3, y=3-1’den 2, y=3-3’den 0. Yani 3, 2, 1 A’dan A’ya ise yine elemanları aynı olduğuna göre o zaman fonksiyon belirtir bence.
>
> Görüşmeci: Neden belirtir dedin?

Fatmagül: Şimdi şöyle düşündüm, fonksiyonu A'dan A'ya düşünmüştük. Şimdi A kümesinin elemanları 0, 1, 2, 3'tü, x yerine 0, 1, 2, 3 yazdığımız takdirde yine sonuç elemanları aynı oluyordu, yine 0, 1, 2, 3 çıkıyordu y sonucu da. Bu durumda yine A'dan A'ya ikisinin de elemanları aynı olduğuna göre bence belirtir.

Görüşmeci: Peki, fonksiyon neydi?

Fatmagül: Yani fonksiyon neydi şu an yani, şu an açıklayamıyorum ama yani kümelerle alakalı yani

Görüşmeci: Sen burada fonksiyon belirtir mi diye sorduğumda, nasıl bir araştırma yaptın?

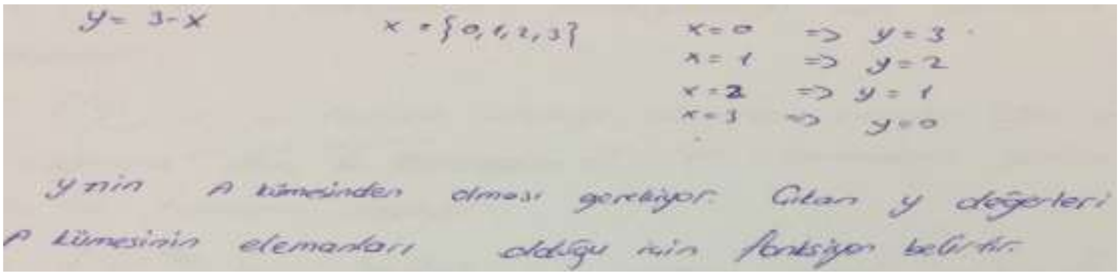
Fatmagül: Yani kümedeki elemanları x'in yerine koydum, sonuç olarak yani y sonucunu elde etmeye çalıştım ve y'nin sonuçlarına göre de onun fonksiyon olduğunu düşündüm.

Burada Fatmagül, tanım kümesinden alınan bir elemanın görüntüsünün değer kümesinde olma durumunu ifade etmiş ancak tanım kümesinden alınan her bir eleman için değer kümesinden tek bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmemiştir. Fatmagül'ün fonksiyon kavram bilgisini kullanımında ve fonksiyonun ne olduğuna ilişkin yaptığı açıklamada, tanım kümesi ile değer kümesi arasında nasıl bir eşleme yaptığını açıkça ifade etmediği görülmektedir.

Eksik kavram bilgisini kullanarak tüm katılımcılar verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği doğru hipotezini ortaya atmıştır. Katılımcıların doğru hipotezi ortaya atmalarından sonra sorulan tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız."*

sorusunda katılımcılardan doğru bir şekilde ispat yapan olmamıştır. Katılımcılardan yalnızca ikisi (Yonca ve Seda) tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Ancak bu katılımcılar da fonksiyon kavramlarındaki eksiklik nedeniyle ispatlama süreçlerinde yalnızca görüntülerin değer kümesinde olma durumunu göstererek başarılı bir şekilde ispatlama süreçlerini tamamlamamışlardır. Geriye kalan dört katılımcı (Hacer, Ece, Melis ve Fatmagül) ise eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olup tüketerek ispat yöntemi bilgisine de sahip olmadıklarını göstermişlerdir. Tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olan iki katılımcıdan biri olan Yonca'nın yaptığı ispata ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar aşağıda verilmiştir.

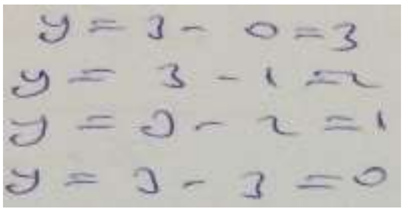


Görsel 3.7. *Yonca'nın tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Yonca: Zaten A'dan A'ya tanımlı olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız. A'dan A'ya bakıyoruz. x değerlerini A kümesinden seçtik mi seçtik. Çıkan y değerleri A kümesinden mi evet, A kümesinden. O yüzden tamamdır, sağlıyor yani bu.
>
> Görüşmeci: Bu bir ispat oldu mu?
>
> Yonca: Evet oldu.

Alıntılardan da görüldüğü gibi Yonca fonksiyon kavram bilgisine sahip olmasına rağmen kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanamamış ancak tüketerek ispat yöntemini kullanarak bir ispat yapmıştır. Yonca tanım kümesinden alınan her bir elemanın değer kümesinden tek bir elemana gittiğini ispatında vurgulamamıştır.

Hem fonksiyon kavram bilgisi eksik olan hem de tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtan dört katılımcıdan biri olan Fatmagül'ün verilen eşitliğin fonksiyon olma durumunu ispatına ilişkin yaptıklarından alıntılar aşağıda verilmiştir.



Görsel 3. 8. *Fatmagül'ün tüketerek ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

> Görüşmeci: Ne yaptın şimdi, neyi göstermeye çalışıyorsun?
>
> Fatmagül: Ben fonksiyon olduğunu göstermeye çalışıyorum az önceki yaptığım gibi ama böyle bir ispat yapmış olamıyorum tabi nasıl devam edeceğim bilmiyorum
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Fatmagül: Şu an sadece fonksiyon olduğunu gösterdim ya da gösterdiğimi zannediyorum işte ama fonksiyon belirttiğini yani gösterdiğini ispatlamış mıyım zannetmiyorum.
>
> Görüşmeci: Yani bu yaptıkların bir ispat mıdır desem ne dersin?
>
> Fatmagül: Bence değil.

Görüşmeci: Neden değil?

Fatmagül: İspat olduğuna ulaşmadım bence.

Görüşmeci: Ne olması gerekiyor ispat için, neden öyle düşünüyorsun?

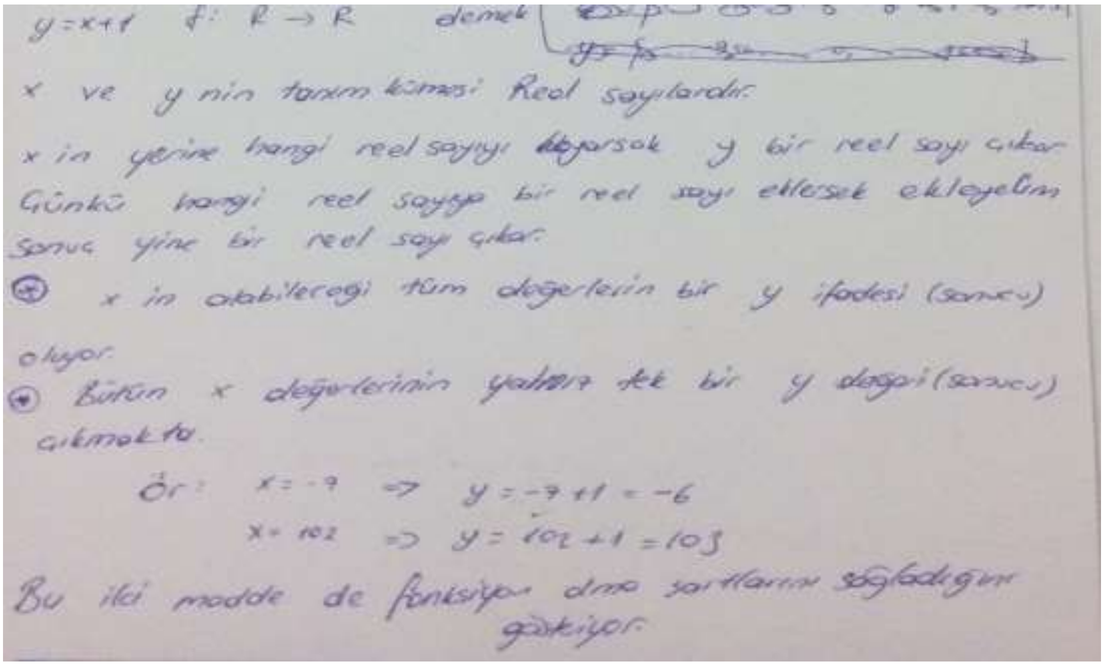
Fatmagül: Yani az önce de söylediğim gibi mesela tersinden giderek hani onun fonksiyon belirtmediğini düşüneceğim. Ama sonra en sonunda bulduğum sonuca göre mesela belirttiği sonucuna ulaşmam gerekiyormuş, demek ki diyeceğim ki o zaman tersi çıktığına göre, bu fonksiyon belirtiyor diyeceğim. Ama şu an nasıl yapacağım konusunda çok bir fikrim yok.

Fatmagül'ün alıntılarından görüldüğü gibi Fatmagül'ün tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı hatta aksine örnek verme ispat yöntemini kullanabilse bunun ispat olacağını değerlendirdiği görülmektedir.

Katılımcıların tümünün başarısız olduğu bir diğer ispatlama süreci doğrudan ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermede olmuştur.

"$y = x + 1$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.*"

sorusu sorulduğunda katılımcılardan doğrudan ispat yöntemini ve fonksiyon kavram bilgisini başarılı bir şekilde kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini doğru bir şekilde ispatlayan olmadığı görülmüştür. Katılımcılardan yalnızca biri (Yonca), doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak bu katılımcı da fonksiyon kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanmayarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Geriye kalan beş katılımcıdan ikisi (Fatmagül ve Seda) ispat için herhangi bir girişimde bulunmamış ve bir ispat yapamayacaklarını ifade etmiş, üçü ise her ne kadar yaptıklarının bir ispat olmadığını ifade etseler de reel sayılar kümesinden belli elemanlar alarak bunları verilen eşitlikte yerine koymuştur. Aşağıda doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu gösteren Yonca'nın doğrudan ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi nasıl ispatladığına ilişkin görüşme kağıdından alıntı verilmiştir.



$y=x+1$ $f: R \to R$ demek

x ve y nin tanım kümesi Reel sayılardır.

x in yerine hangi reel sayıyı koyarsak y bir reel sayı çıkar

Çünkü hangi reel sayıya bir reel sayı eklersek ekleyelim

sonuç yine bir reel sayı çıkar.

x in alabileceği tüm değerlerin bir y ifadesi (sonucu)

oluyor.

Bütün x değerlerinin yalnız tek bir y değeri (sonucu)

çıkmakta.

Ör: $x=-7 \Rightarrow y=-7+1=-6$

$x=102 \Rightarrow y=102+1=103$

Bu iki madde de fonksiyon olma şartlarını sağladığını

gösteriyor.

Görsel 3.9.*Yonca'nın doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Alıntıdan da görüldüğü gibi Yonca, fonksiyon kavram bilgisine sahiptir. Ancak Yonca'nın ispatını anadilde ifade ettiği görülmektedir. Ayrıca tanım kümesinde alınan bir elemana karşılık değer kümesinde tek bir görüntünün karşılık geldiğini aldığı iki eleman ile göstermiştir. Tüm sayılar için bu durumun nasıl sağlandığı sorulduğunda ise Yonca'nın deneyerek bunun gösterilemeyeceğini fark ettiği görülmüştür. Aşağıda buna ilişkin Yonca'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Bunun hepsi için olduğunu nasıl söylüyorsun?
>
> Yonca: Nasıl söylüyorum tabi ki de bu iki tanesi yetersiz kalır ama yani sonuçta nasıl anlatayım hocam size? Hangi sayıya bir, işte dediğimiz gibi mesela bu bir reel sayı. Bir reel sayı sonucu ne çıktı -6 çıktı, -6'da bir reel sayı mesela o yüzden bu bütün reel sayılarda sağlar bu kural bence.

Doğrudan ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatına ilişkin herhangi bir girişimde bulunmayan iki katılımcıdan biri olan Fatmagül'ün görüşmesinden bir kesit aşağıda verilmiştir.

> Fatmagül: Düşündüm öyle ispatlamaya çalıştım. Ama şimdi reel sayıların tersi olarak düşünebileceğim sayı kümesinin ne olduğunu bilmediğim için bu şekilde de ispat yapabileceğimi zannetmiyorum.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Fatmagül: Yani işte hani yine tersinden gideceğimi düşündüm. Ama ben yine reel sayı vermekle olay çözülmez. Çünkü o kadar çok var ki yani bilmiyoruz ne kadar olduğunu. Yani

demek ki bir yöntem bulmamız gerekiyor mesela tersinden giderek ama reel sayıların tersi olarak hani nasıl bir sayı vereceğimi şu an bilmiyorum. O yüzden nasıl ispatlayacağımı da bilmiyorum yani ispatlayamam şu an.

Verilen alıntıdan da görüldüğü gibi Fatmagül önermenin ispatı için uygun olmayan aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmak istediğini ama bunu da kullanamadığı görülmektedir. Deneyerek de ispat olmayacağının farkında olan Fatmagül ispata ilişkin bir girişimde bulunamamıştır. Fatmagül gibi ispata ilişkin bir girişimde bulunmayan bir diğer katılımcı olan Seda ise verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini bildiğini ama nasıl bir ispat yapacağını bilmediğini ifade ettiği görülmüştür. Aşağıda Seda'nın doğrudan ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşmesinden alıntı verilmiştir.

Seda: f reel sayılardan reel sayılara tanımlı demiş, bir fonksiyon bu çünkü ben buraya değer verdiğimde reel sayı olduğuna göre hangi değeri verirsem vereyim ikisinin de reel sayılarda bir karşılığı olacak sonuçta, fonksiyondur. Bunu nasıl ispatlayayım ben. …… (düşünüyor)

Seda: Nasıl ispatlayacağımı bilmiyorum. Fonksiyon eminim

Görüşmeci: Neden?

Seda: Çünkü reel sayılardan reel sayılara demiş ve denkleme göre ben y'ye hangi değeri verirsem sonuçta x'ten y'ye demiş ya da x'e hangi değeri verirsem y bir değer alacak sonuçta reel sayı olduğu için. x bağımsız değişken y bağımlı değişken demiştik. x'i nasıl değiştirirsem y de o şekilde değişecek ve bir karşılığı olacak.

Görüşmeci: Nereden biliyorsun?

Seda: Çünkü reel sayılardan reel sayılara demiş, bütün sayıları denediğimde olabilir yani reel sayıları.

Görüşmeci: Bütün reel sayıları deneyebilir misin?

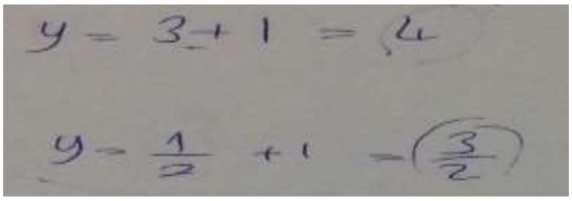
Seda: Tek tek deneyemeyiz

Görüşmeci: Neden?

Seda: Çünkü reel sayılar kümesi geniş bir küme yani o yüzden birçok doğal sayıları, tamsayıları kapsıyor. Sonuçta büyük bir küme. O yüzden tek tek deneyerek yapamam ama nasıl ispatlayacağımı bilmiyorum, ispatlayınız diyor ya ama fonksiyon olduğunu biliyorum.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Seda verilen eşitliğin fonksiyon olduğunu ifade etse de bunu herhangi bir şekilde gösterememiştir. Seda'nın doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülmektedir.

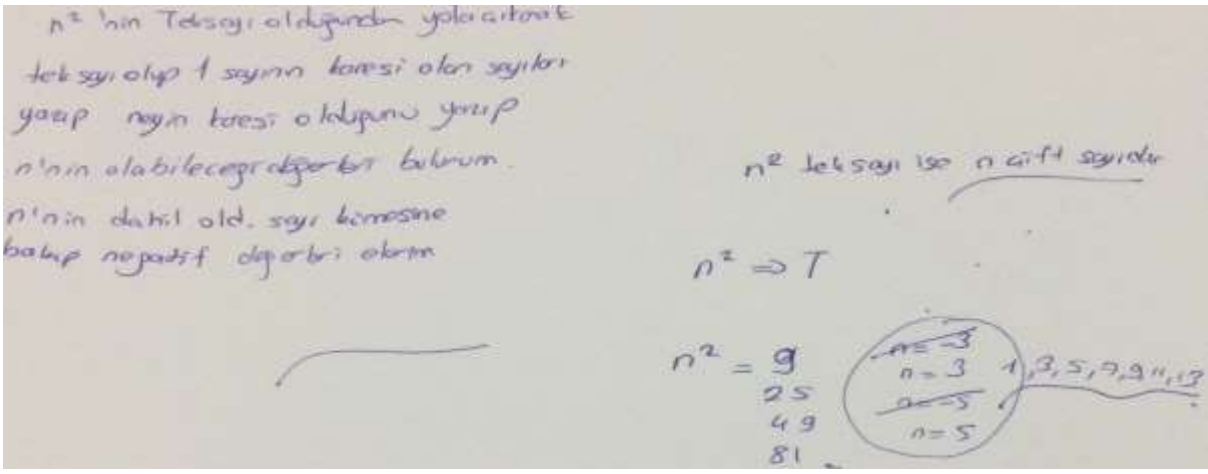
Geriye kalan üç katılımcının (Hacer, Ece ve Melis) ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı ve yaptıklarının ispat olarak değerlendirmeseler de tanım kümesinden aldıkları birkaç elemanın görüntüsünü inceledikleri görülmüştür. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Ece'nin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.10. *Ece'nin doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Ece: Burada fonksiyon olur çünkü reel sayılar demiş. Sayılar arasında biz bir işte şu küme olur bu küme olur demediği için benim buraya x'e yazacağım bütün değerlere reel yazdığım sayılar sonucu yine bir reel sayı çıkacak. Yine değer vererek.
> Görüşmeci: İspatlar mısın?
> Ece: (x'e 3 ve ½ değerlerini veriyor) En basiti bu yani şu an geldi aklıma. Reel bir sayı, sonucu yine reel bir sayı oldu ya da rasyonel bir sayı ile topladığım zaman da yine bir reel sayı çıkıyor.
> Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?
> Ece: Değildir
> Görüşmeci: Neden?
> Ece: Çünkü ben sadece örnek verdim, bu tam bir ispat değil çünkü aksini ispat eden aksi bir örnek mesela aksi bir sayı verdiğim zaman benim bu ispatım boşa gidebilir.

Katılımcılardan başarılı bir şekilde ispat yapan olmadığı bir diğer ispat sorusu "*n bir doğal sayı olmak üzere* n^2 *tek sayı ise n tek sayıdır.*" önermesinin ispatının istendiği soru olmuştur. Katılımcıların tümü önermenin ispatına uygun bir ispat yöntemi seçmemiş ve yapılan yönlendirmelere rağmen katılımcıların karşıt ters ispat yöntemi bilgisine de sahip olmadıkları görülmüştür. Katılımcılardan ikisi (Ece ve Fatmagül), verilen önermenin mantıksal yapısını anladığını gösterse de önermenin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini kullanmıştır. Geriye kalan dört katılımcının (Hacer, Melis, Yonca ve Seda) ise önermenin mantıksal yapısını anlamadığını yansıttıkları ve hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalıştıkları görülmüştür. Ayrıca tüm katılımcılar, karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermenin ispatlama sürecinde tek ve çift tamsayıları matematiksel olarak temsil etmemiştir. Aşağıda önermenin mantıksal yapısını anladığını yansıtan ancak önermenin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini kullanmaya çalışan iki katılımcıdan biri olan Ece'nin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.11. *Ece'nin karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeye ilişkin ispatı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Ece doğrudan ispat yöntemini kullanmaya çalışmış ancak bunu kullanırken de değerler vermiştir. Tek sayıları matematiksel olarak temsil de edemediği görülen Ece, yaptıklarını da bir ispat olarak değerlendirmiştir. Aşağıda Ece'nin değer vererek verilen önermenin doğruluğunu göstermeye çalışmasını nasıl ispat olarak değerlendirdiğine ilişkin görüşmesinden alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Yani örnek vererek ispat yapabilir misin?

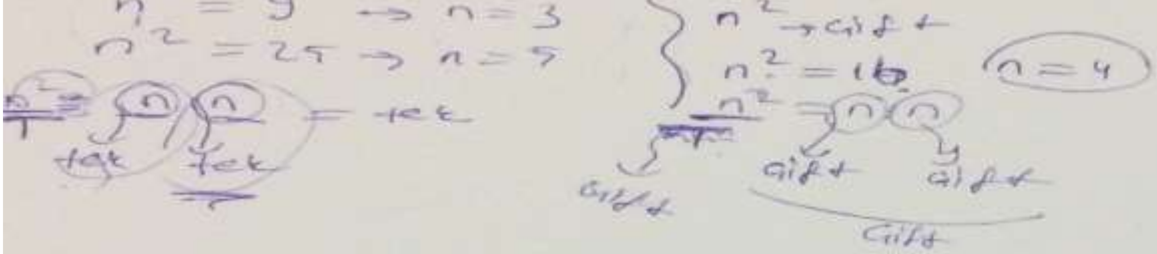
Ece: Bütün sorular için geçerli değil.

Görüşmeci: Neden öyle dedin?

Ece: Çünkü mesela az önce emin olamadığım sorular vardı. Benim verdiğim örneğe zıt düşecek bir örnek verilir benim ispatım çürüyebilirdi. Ama ben burada emin olduğum için örneklerimle ispatlarım, ispattır bu.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Ece verilen önerenin doğruluğundan emin olduğu için değer vererek bir ispat yapmış olduğunu ifade etmiştir.

Verilen önermenin ispatı için doğrudan ispat yöntemini kullanmaya çalıştığı görülen bir diğer katılımcı Fatmagül'ün ispatına ilişkin aşağıda görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.12. *Fatmagül'ün karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeye ilişkin ispatı*

Görüşmeci: Bu bir ispat oldu mu?

Fatmagül: Yani bence olacaktır.

Görüşmeci: Neyi göstermeye çalışıyorsun burada?

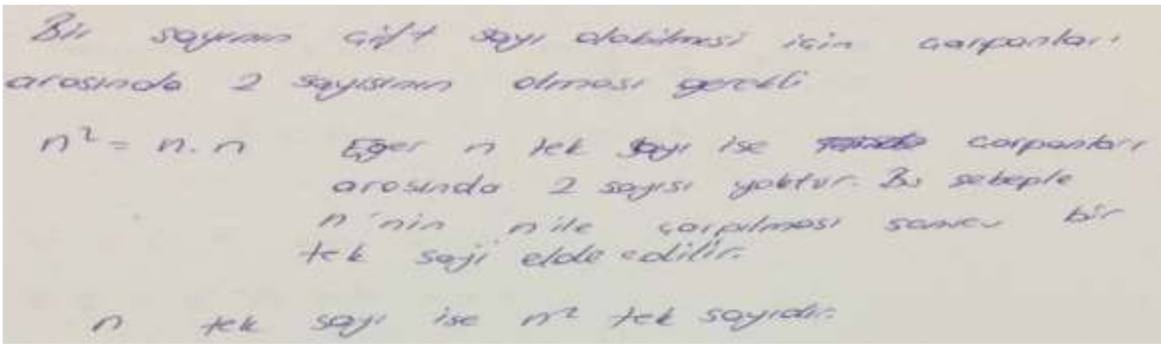
Fatmagül: Burada göstermeye çalıştığım şey, n in tek sayı olduğu.

Görüşmeci: Nasıl gösterdin?

Fatmagül: Yani bize n^2'nin tek sayı olması gerektiği söylenmiş soruda. Şimdi n^2 tek sayı ise n^2 sonuç olarak iki tane n sayısının çarpımı. Yani iki sayının çarpımının tek olabilmesi için de çarptığım iki sayının da tek olması gerekiyor. Çünkü başka türlü o iki çarpımı tek olamaz. Herhangi bir çift ya da ikisi de çift olduğu takdirde sonucun çift çıkması lazım ama ikisinin de çarpımının n^2 olduğu söylenmiş yani tek sayı olduğu söylenmiş. Bu durumda diğer iki sayının da ki bunlar aynı sayılar, tek olması gerekiyor. O yüzden de n bir tektir.

Alıntılardan görüldüğü gibi Fatmagül'ün de önermenin mantıksal yapısını anladığı ama ispat için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini kullandığı ve yaptıklarını da ispat olarak değerlendirdiği görülmüştür. Ayrıca Fatmagül de tek sayıları matematiksel olarak temsil edememiştir.

Bu iki katılımcı dışında geriye kalan dört katılımcı (Hacer, Melis, Yonca ve Seda) ise önermenin mantıksal yapısını anlamadıklarını yansıtarak önermedeki hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışmışlardır. Fatmagül ve Ece gibi bu dört katılımcı da tek ve çift tamsayıları matematiksel olarak temsil edememiştir. Bu dört katılımcıdan ikisi Yonca ve Seda yaptıklarının ispat olarak değerlendirirken, ikisi Hacer ve Melis ise yaptıklarını ispat olarak değerlendirmemiş ve başka bir ispatlama girişiminde de bulunmamışlardır. Aşağıda yaptıklarını ispat olarak da değerlendiren iki katılımcıdan biri olan Yonca'nın görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.13. *Yonca'nın karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeye ilişkin ispatı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Yonca tek sayıları matematiksel olarak temsil edememiş ve hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışmıştır. Yapılan yönlendirmeye rağmen Yonca yaptığı hatayı fark etmemiş ve yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmiştir.

Görüşmeci: Peki önermedeki ise ne anlama geliyor?

Yonca: n^2 tek sayı ise n tek sayıdır ya n^2'den başlamış aslında ben tersten başladım. Ben n tek sayı ise n^2 tek sayıdır diye yaptım. Böyleyse böyledir bu bir şart galiba şart koşmuş.

Görüşmeci: Neyi şart koşmuş?

Yonca: n^2 tek sayı ise n tek sayıdır bir koşuldur.

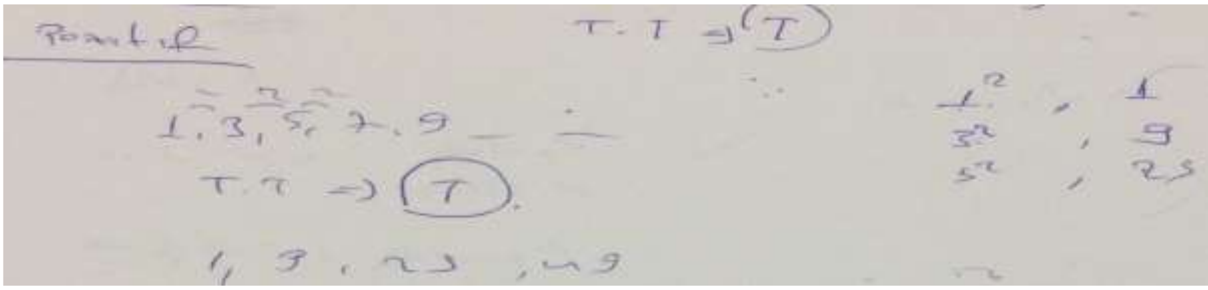
Görüşmeci: Peki sen tersten başlamışım galiba dedin

Yonca: Evet

Görüşmeci: Ne demek istedin?

Yonca: Yani dedim ki n tek sayı ise n^2 tek sayıdır yani takla attırdım. Aynı kapıya denk geliyor. Aynı şeyler onlar.

Hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışan ancak yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmeyen iki katılımcıdan biri olan Hacer'in ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar ise aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.14. *Hacer'in karşıt ters kanı yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin yaptıkları*

Hacer: Mesela, biliyoruz ya 1'in karesinin 1 olduğunu, iki tek sayı. Önermenin doğruluğunu ispatlayın. Doğru olarak kabul ediyorum, oradan tek tek yerine n'in yerine tek sayı vererek ilerliyorum, şu şekilde

Görüşmeci: Sen önce tek sayı mı alıyorsun?

Hacer: Evet, ondan sonra n^2 yerinde yazıyorum. Eğer tek sayı elde ediyorsam doğrudur diyorum.

Görüşmeci: Peki, bu yaptığın şey bu önermenin ispatı olur mu?

Hacer: Tam bir ispatı olmaz.

Görüşmeci: Neden?

Hacer: Dediğim gibi tam bir anlam ifade edemediğim için.

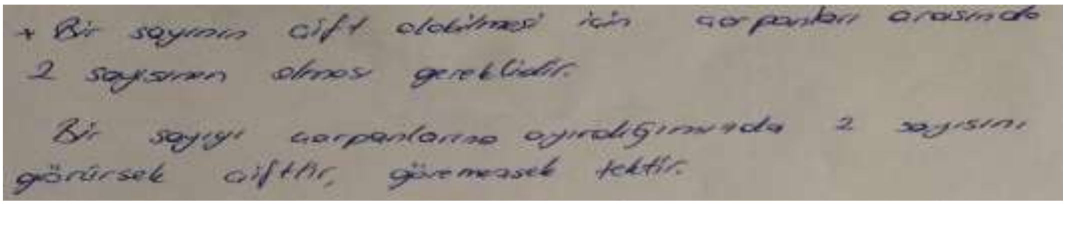
Görüşmeci: Anlam derken neyi kastediyorsun?

Hacer: Yani şey nasıl diyeyim, mesela şu yoldan gidersek hani şuna bağlı olarak şöyle olabilir falan diye ama bunu ispatlayamayacağım hocam.

Katılımcılardan başarılı bir şekilde ispatlama sürecini tamamlayanın olmadığı bir soru da olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği “*Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur.*” önermesinin ispatının sorulduğu soru olmuştur. Katılımcılardan bu önermeyi doğru bir şekilde ispatlayan olmamıştır. Katılımcılardan üçü (Hacer, Ece ve Fatmagül) ispata ilişkin herhangi bir girişimde bulunamayarak ispat yapamayacağını ifade etmiş, geriye kalan üç katılımcı (Melis, Yonca ve Seda) ise olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını göstererek yalnızca önermenin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeye ilişkin herhangi bir ispat girişiminde bulunmayan üç katılımcıdan biri olan Ece’nin görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

> Ece: Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur. Yok, gibi geliyor çünkü sayılar ya tektir ya da çifttir, ikisini bir arada bulunduran bir tamsayı yoktur. Ama hani ben bunun doğruluğunu sadece bunu yazabilirim. Çünkü hani 0, 2, 4, 6, 8 çift, 1, 3, 5, 7, 9 tek deyip, bilmem çok enteresan geldi bu soru. Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur. İkisini bir arada zaten barındıramaz ki üstünde, ya tektir ya da çifttir. Doğruluğunu ispatlayın, hani bunu ben biliyorum tamam ama ben bunu nasıl ispatlayayım ki hani bunu kime sorsanız söyler zaten. Hem çift hem tek olamaz ya tektir ya çifttir ama bunu nasıl ispatlarım… Hiçbir fikrim yok gerçekten hiçbir şey gelmedi aklıma.
>
> Görüşmeci: Nasıl?
>
> Ece: Çünkü hani bilmem, bunu ben biliyorum bu bana birinci sınıftan beri öğretilmiş bir şey. Ama neden böyle, hani bunu ispatla diye kesinlikle bir şeyle karşılaşmadım. İspatlama gereği duymadığım için herhalde sadece biliyorum onun öyle olduğunu, ama neden öyle olduğunu bilmiyorum.

Bu üç katılımcı dışından diğer üç katılımcı Melis, Yonca ve Seda’nın ise herhangi bir kant yöntemi seçmedikleri, yalnızca tamsayıların ya tek ya da çift olacağını ifade ettikleri ancak bunu da bir ispat olarak değerlendirdikleri görülmüştür. Aşağıda bu katılımcılardan Yonca’nın yaptığı ispata ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.


+ Bir sayının çift olabilmesi için çarpanları arasında
2 sayısının olması gereklidir.
Bir sayıyı çarpanlarına ayırdığımızda 2 sayısını
görürsek çifttir, göremessek tektir.

Görsel 3.15. *Yonca’nın olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeye ilişkin ispatı*

Yonca: Bir sayının çift olabilmesi için 2 olması gereklidir, bir sayıyı çarpanlarına ayırdığımızda 2 sayısını görmüyorsak direkt o tek sayıdır, tam tersi içinde çift sayıdır. Çünkü başka yolu yok bence bunun, bu kadar. Bir sayının çift olabilmesi için çarpanları arsında 2 sayısının olması gerekir, bunu bilmemiz gerekiyor. Bir sayıyı çarpanlarına ayırdığımızda 2 sayısını görürsek çift görmezsek tektir. Aynı şeyi yazdım ama sonuçta budur yani hem tek hem çift tamsayı olması imkânsız. 2'yi gördük çift görmedik tek bitti.

Görüşmeci: Peki bu yaptığın bir ispat mıdır?

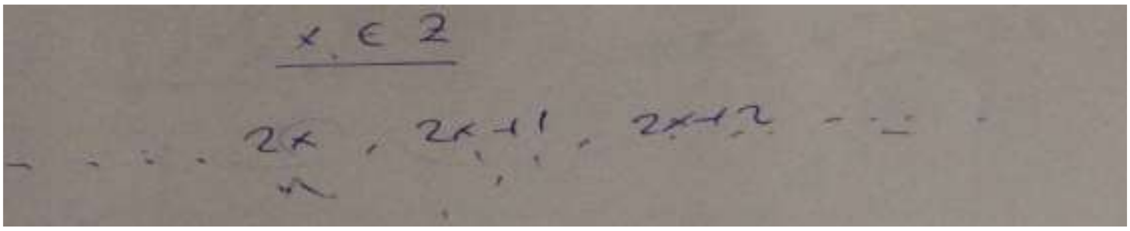
Yonca: Şu an ne geldi aklıma biliyor musunuz sıfır geldi, sıfırın çarpanları arasında 2 yok ama o neden çift bilmiyorum, evet sıfırı unuttum ben.

Görüşmeci: Ne düşünüyorsun?

Yonca: Sıfır neden çiftti hiçbir fikrim yok ama sıfır dışındaki tüm tamsayılar içerisinde bu söylediklerim ispattır.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi Yonca tek tamsayıları matematiksel olarak temsil etmemiş, ispat olarak da herhangi bir ispat yöntemi seçmeksizin sadece tek tamsayıların tekliğini ifade etmiştir. Ayrıca görüşmeden yapılan alıntıdan Yonca'nın 0'ın niçin bir çift tamsayı olduğunu ifade edemeyerek tamsayı kavram bilgisinin de eksik olduğu görülmüştür.

Bu üç katılımcıdan biri olan Seda'nın da benzer şekilde bir ispat yöntemi seçmeksizin ispat olarak sadece sayıların tek ya da çift olacağını ifade ettiği görülmüştür. Ancak diğer katılımcılardan farklı olarak Seda'nın bu soruda tek ve çift sayıları matematiksel olarak temsil edebildiği görülmüştür. Aşağıda Seda'nın olmayana ergi ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.16. *Seda'nın olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeye ilişkin ispatı*

Seda: Nasıl ispatlayacağım x'e ben bir tamsayı dersem çiftler 2x'dir, teklerde yani 2x+1'dir. Bu şekilde devam eder. x bir tamsayı, buraya tamsayı getirdiğim zaman bunun çift olduğunu görürüm. Buraya bir tamsayı getirdiğimde bunun tek olduğunu görürüm. Bunun bir aksi yoktur. Bir bir artarak gidiyor yani böyle de gider mesela. Aksini bulamadım aksini bulamadığıma göre de doğru bir önermedir.

Görüşmeci: Peki bu bir ispat mıdır?

Seda: Bu bir ispat mıdır ispattır.

Görüşmeci: Neden?

Seda: Çünkü ben bunun aksini bulamadım, aksini bulamadığıma göre bunun doğruluğunun bir göstergesidir bu.

Görüşmeci: Peki aksini bulamadığını burada nasıl gösterdin?

Seda: Yani tamsayı. Tamsayı koyduğum zaman değer verdiğim zaman, ben bunun tek ya da çift olduğunu bulabilirim. Ortası olduğunu bulamam yani hem tek hem de çift olduğunu bulamam. Çünkü hem tek hem de çift olan sayı tamsayı yoktur.

Görüşmeci: Peki hepsini deneyecek misin?

Seda: Yok, hepsini denemek olmaz. Hepsini deneyemem ama aksini de böyle düşündüğüm zaman bulamam.

Görüşmeci: Neden bulamazsın?

Seda: Tamsayı yani hem tek hem de çift olan bir sayı yoktur ki yani öyle bir sayı yok bana göre.

Alıntılardan da görüldüğü gibi Seda herhangi bir ispat yöntemi kullanmamış, yalnızca tek ve çift tamsayıları matematiksel olarak temsil ederek ispat yaptığını ifade etmiştir. Ayrıca Seda'nın her ne kadar yazılı olarak vermese de tüm sayıları denemeyeceğini belirtmesine rağmen tek ve çift sayıları alarak aksi bir örneğe ulaşamadığını ifade ettiği görülmektedir.

3.1.2. Birinci sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçleri

Tüm sorularda ispatlama sürecini güçlük yaşamaksızın başarı ile tamamlayan katılımcı olmadığı görülmüştür. Altı katılımcıdan biri (Naz) hiçbir ispatlama sürecinde başarılı olamazken, üçü (Neşe, Eda ve Nalan) yalnızca bir soruda, biri (Esra) iki soruda, biri (Umut) ise üç soruda ispatlama süreçlerini başarı ile tamamlamıştır. Katılımcıların en çok aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatlama süreçlerinde başarılı oldukları, doğrudan, olmayana ergi ve varlık ispat yöntemlerinin kullanılmasının beklendiği önermelerin ispatlama süreçlerinde ise başarısız oldukları görülmüştür. Katılımcılardan dördü aksine örnek verme ispatlama sürecinde başarılı olmuş, doğrudan, olmayana ergi ve varlık ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlayan katılımcı ise olmamıştır. Katılımcılar varlık ispat yöntemini kullanmaları beklenen önerme haricinde verilen diğer önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu doğru bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Genellikle katılımcılar uygun ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından ya da ispat için gerekli olan kavram bilgisine sahip olmadıklarından ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür.

İspatlama süreçlerinde diğer katılımcılara göre daha başarılı olan Umut, tüketerek, karşıt ters ve aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmasının beklendiği sorularda başarılı bir şekilde ispat yapmıştır. Naz ise hiçbir ispatlama sürecini başarılıyla tamamlayamamış, herhangi bir ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir. Esra tüketerek ve karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeleri doğru bir şekilde ispatlarken, üç katılımcı Neşe, Eda ve Nalan yalnızca aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeleri doğru bir şekilde ispatlamışlardır.

Katılımcılar en çok aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Her* $x \in IR$ *için* $x < x^2$ *'dir*" önermesinin ispatında başarılı olmuşlardır. Altı katılımcıdan dördü (Neşe, Eda, Umut, Nalan) önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını ve aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, reel sayı kavram bilgisini de kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Dört katılımcı da verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmuş ve yaptıklarının bir ispat olduğunu ifade etmiştir. Geriye kalan iki katılımcı ise (Kübra ve Naz) önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmalarına rağmen yaptıklarının sadece önermenin yanlış olduğunu göstermek olduğunu belirterek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını yansıtmışlardır. Aşağıda aksine örnek verme ispatlama sürecinde başarılı olan dört katılımcıdan biri olan Eda'nın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.

Görsel 3.17. *Eda'nın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Eda: Bu yanlış bilerek yanlış. Şimdi bunun yanlış olduğunu göstermem için bir örnek vermemin yeterli olacağını düşünüyorum, o da şu örneği veriyorum. x=½ diyorum, ½<¼ değildir. Yanlış yani bu ifade, yanlış olduğundan dolayı hemencecik şey yaptığımı düşünüyorum, yanlış olduğunu gösterdiğimi düşünüyorum.

Görüşmeci: Peki bu bir ispat oldu mu?

Eda: Oldu çünkü tersi bir örnek göstermek ispatı bozar zaten

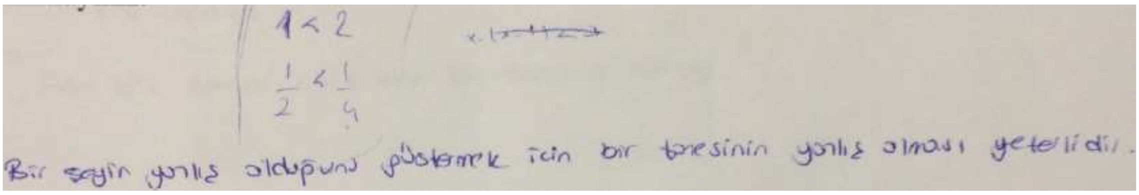
Görüşmeci: İspatı bozar derken neyi kastettin?

Eda: Yani aslında önermeyi bozar, önermenin doğru olduğunu bozar.

Görüşmeci: Neden bozar?

Eda: Aksi bir tane örnek varsa doğru diyemeyiz biz ona

Aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatlama sürecinde altı katılımcıdan Esra ve Naz önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmalarına rağmen bu yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmemişlerdir. Aşağıda Esra'nın aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.18. *Esra'nın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Esra: Yani yanlış olduğunu göstermek için bir şeyin yanlış olduğunu göstermek yeterli. Doğru olduğunu göstermek için hepsini göstermemiz şart ama yani arada bir tane yanlış varsa demek ki önerme yanlıştır. Ben burada rasyonel sayıları düşündüğüm zaman basit rasyonel sayılar düşündüğüm zaman ½ < ¼ oluyor mesela diyelim örnek olarak. Bu önermenin yanlışlığını gösteriyor, yani rasyonel sayılarda bir reel sayıdır sonuçta.
> Görüşmeci: Yazabilir misin bu söylediklerini?
> Esra: Sözel olarak yazarım da yani ispatlayamayabilirim, ispatlayamam yani.
> Görüşmeci: Peki bu söylediklerin bir ispat oluyor mu?
> Esra: Yok sadece düşüncelerim oluyor, ispat olmaz.
> Görüşmeci: Neden olmaz?
> Esra: Yani bunun neden böyle olduğunu değil de yine…… (düşünüyor) İspat olmaz, çünkü yani ben bunu mesela soyut sınavında yazsam hoca kabul etmez.
> Görüşmeci: Neden?
> Esra: Çünkü onu açıklamamızı ister daha böyle ayrıntılı olarak.
> Görüşmeci: Nasıl?
> Esra: Yani değer vererek soru aslında çözülmez ama bir şeyin yanlış olduğunu göstermemiz için bir tane yanlış örnek vererek onu çözümleyebiliriz ama yani ispatlamış olmayız.

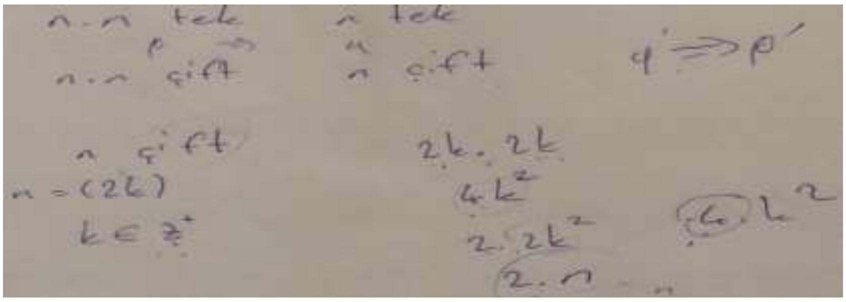
Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Esra, önermeyi sağlamayan bir reel sayı bulmasına ve önermenin yanlış olduğunu belirtmesine rağmen değer vermenin bir ispat olmadığını, böyle yapmasının sınavda ispat olarak kabul edilemeyeceğini ifade ederek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır. Naz da Esra gibi önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmuş ancak o da yaptığını bir ispat olarak değerlendirmeyerek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir. Önermenin ispatına ilişkin bir girişimde de bulunmayan Naz'ın önermenin ispatına ilişkin görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

> Naz: Şu an nasıl bir ispat yapabilirim diye düşünüyorum da hani değerler üzerinden hani sayısal değer üzerinden düşünürsek her zaman doğru… ama şey x reel sayıymış. Mesela 0 verdiğimizi düşünürsek burada eşitlik yok. 0'da çelişiyor mesela. Ama diğer tüm değerler için önerme doğru, tabi sayısal veriler üzerinden ispat olarak olmuyor.
>
> Görüşmeci: Nasıl dedin?
>
> Naz: Yani sayısal değerler kullanarak yapınca ispat olarak hani kabul edilmiyor.
>
> Görüşmeci: Neden kabul edilmiyor?
>
> Naz: Dediğim gibi herhangi değerler de verilebilir. Tüm sayıları veremiyoruz. Hepsini gösteremiyoruz sonuçta. Şu an ispat yöntemleri aklıma gelmiyor benim de. Ya ben bir ispat yapamıyorum ama yanlış olduğunu düşünüyorum. Çünkü eşitlik olsaydı eğer bu hani küçüktür simgesinde eşitlik olsaydı doğru kabul edilebilirdi. Dediğim gibi 0'da bir çelişki oluşuyor. Çünkü x değerine 0 verdiğimizde x^2 de 0 oluyor. Buradan eşitlik olması gerekiyordu.

Yukardaki alıntıdan görüldüğü gibi Naz, önermenin ispatına ilişkin herhangi bir girişimde bulunmamış yalnızca önermenin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca Naz'ın önermede eşitsizlik yerine küçük eşit olsaydı önermenin doğru olacağını ifade etmesi, reel sayı kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanmadığını göstermektedir.

Katılımcıların zorlandığı ispatlama sorularından biri "*n bir doğal sayı olmak üzere n^2 tek sayı ise n tek sayıdır.*" önermesinin ispatının istendiği soru olmuştur. Katılımcılardan yalnızca ikisi (Esra ve Umut) verilen önermenin mantıksal yapısına uygun ispatlama yöntemlerinden biri olan karşıt ters ispat yöntemini seçmiş, tek ve çift sayı kavram bilgilerini de doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarıyla tamamlamışlardır. Geriye kalan dört katılımcı (Neşe, Eda, Nalan ve Naz) ise hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak önermenin mantıksal yapısını anlamadıklarını göstermiş ve ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır.

Aşağıda karşıt ters ispat yöntemini kullanarak başarılı bir şekilde ispat yapan iki katılımcıdan biri olan Umut'un karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi nasıl ispatladığına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.19. *Umut'un karşıt ters ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Umut: Buradan n'nin çift olduğunu varsayalım. Burada n'e 2k diyelim. Çünkü çift olması için 2'ye bölünen bir sayı olması lazımdı. Çift olma kuralı. n'e 2k dersek, 2kx2k, buradan da k'ya tamsayı diyelim. Pozitif tam sayı. Ya da tam sayı desek de olur. 2kx2k'dan 4k gelir. 4k da 2'ye bölünen bir sayı olduğu için çarpımları çifttir. Yani burada 2kx2k şeklinde yazarız. Bu 2xn oluyor. Yani n, 2 ye bölünen bir sayıdır. O zaman çifttir. 2kx2k da $4k^2$ yani 2k x 2k'dan $4k^2$ de 2'ye bölünebilen sayıdır. O zaman nxn de çifttir. Eğer dolaylı yöntemden ispatladıysak zaten ispat olmuş oluyor.

Görüşmeci: İspat mı dediğimde ne diyorsun?

Umut: İspat diyorum.

…

Görüşmeci Sen burada neyi göstermeye çalışıyorsun?

Umut: Ben n çift ise n^2 de çifttiri gösterdim.

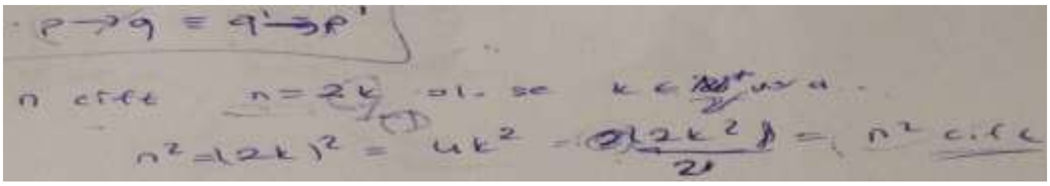
Görüşmeci: Bunu göstermekle bu verilen önermeyi ispatlamış oluyor musun?

Umut: Olurum

Görüşmeci: Neden?

Umut: Çünkü p ise q denktir q değilse p değildir.

Umut'un görüşmesinden yapılan alıntıdan da görüldüğü gibi Umut önermeye denk olan önermenin karşıt tersini ispatlayarak önermenin ispatını başarılı bir şekilde yapmıştır. Ancak Umut'un ispat yaparken eşitliklere ve neye ulaştığını ifade etmeye dikkat etmeyerek matematik dilini doğru bir şekilde kullanmadığı görülmektedir. Esra'da Umut gibi önermenin ispatını doğru bir şekilde yapmıştır. Aşağıda Esra'nın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.

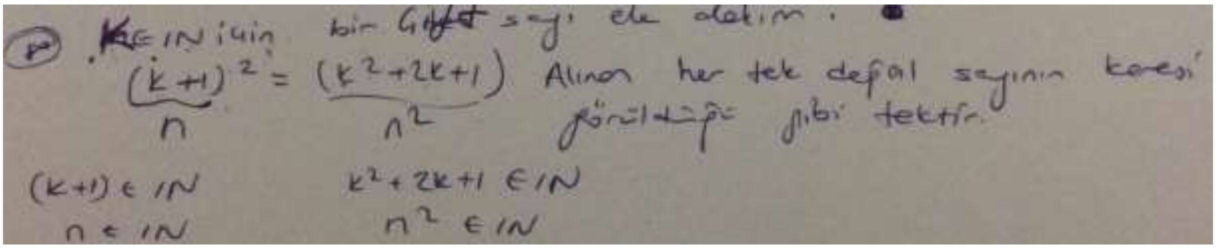


Görsel 3.20. *Esra'nın karşıt ters ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan Esra'nın eşitliklere ve neye ulaştığını ifade etmeye dikkat ederek matematik dilini doğru bir şekilde kullandığı görülmektedir.

Geriye kalan dört katılımcı (Neşe, Eda, Nalan ve Naz) ise tek ve çift doğal sayı kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiş, ancak önermenin mantıksal yapısına dikkat etmeyerek önermenin ispatını doğru bir şekilde yapamamıştır. Önermeyi ispatlarken dört katılımcı da hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışmış, ayrıca bu dört katılımcıdan biri (Eda) hükmü kabul edip hipotezi göstermenin yanı sıra her ne kadar karşıt ters ispat yöntemini de kullansa da doğrudan ispat yöntemini de kullanarak önermenin mantıksal yapısını anlamadığını yansıtmıştır. Katılımcılara yönlendirme yapıldığında ise bu dört katılımcıdan yalnızca Neşe hükmü kabul edip hipotezi göstermesinin hatalı olduğunu fark etmiş, diğer katılımcılar ise yaptıklarını ispat olarak kabul etmişlerdir. Ayrıca katılımcılardan yalnızca Eda ispatlama sürecinde tek ve çift sayıların gösterimlerini değişkenleri doğru bir şekilde kullanarak ifade etmiş, Neşe, Nalan ve Naz tek ve çift sayıları zaman zaman hatalı biçimlerde temsil etmişlerdir.

Aşağıda karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatlama sürecinde başarılı olamayan ancak yönlendirme ile önermenin mantıksal yapısına aykırı bir şekilde ispat yapmaya çalıştığını fark eden Neşe'nin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.

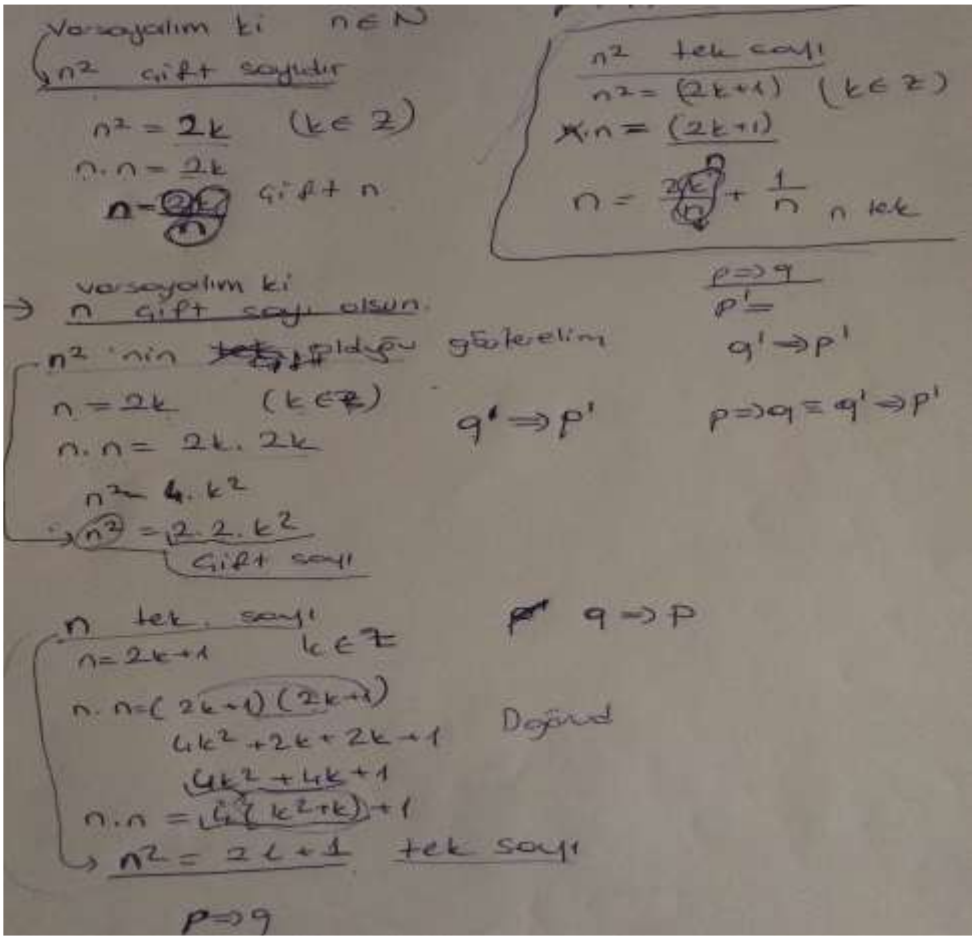


Görsel 3.21. *Neşe'nin karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Neşe: n bir tek sayı ama ondan önce ben bir çift sayı aldım, sonra o tek sayıyı oluşturmak için bir ekledim. Onun karesini kontrol ettim ve o da tek sayıdır dedim. Ama bunların sonucunu tekrardan doğal sayılarda olup olmadığını da gösterdim.
>
> Görüşmeci: Anladım peki bu bir ispat mı?
>
> Neşe: Hocam ya ben bunun biraz yanlış olduğunu düşünüyorum ama
>
> Görüşmeci: Ne açıdan yanlış olduğunu düşünüyorsun?
>
> Neşe: Bu taraftan gitmem gerektiğini düşünüyorum, ama onu da yapamıyorum şu an.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Neşe, hükmü kabul edip hipotezi göstermiş ancak yaptığının hatalı olduğunu fark etmesine rağmen başka bir ispatlama girişiminde bulunmamıştır.

Eda ise doğrudan, karşıt ters, hükmü kabul edip hipotezi gösterme şeklinde pek çok farklı şekilde ispat yapmaya çalışarak önermenin mantıksal yapısını anlamadığını göstermiştir. Eda'nın verilen önermenin ispatı için hükmü kabul edip hipotezi göstermesi sorgulandığında kolay olduğu için bu şekilde yaptığını ifade ettiği görülmüştür. Aşağıda Eda'nın karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve hükmü kabul edip hipotezi gösterme durumunun sorgulanmasına ilişkin görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.22. *Eda'nın karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi çeşitli biçimlerde ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Burada nasıl ispat yapıyorsun nereden başlıyorsun?

Eda: n tektir'den başlıyorum, yani bunu kabul edip bunu göstermeye çalışıyorum.

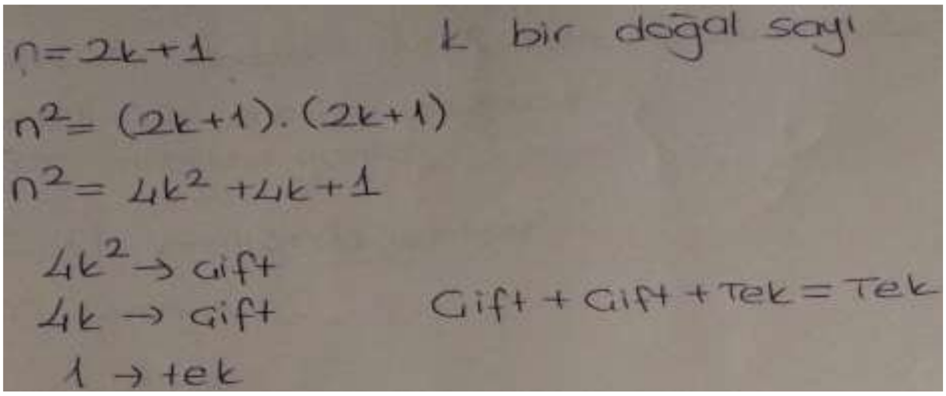
Görüşmeci: Neden onu kabul edip onu göstermeye çalışıyorsun?

Eda: Daha kolayıma geldi açıkçası

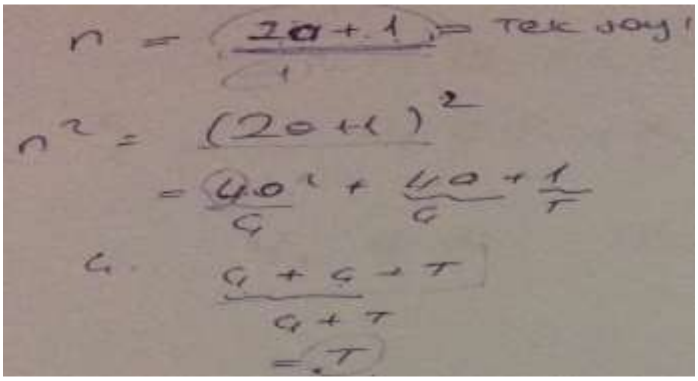
Görüşmeci: Peki önermede sana ne diyor?

Eda: Önermede bana n^2 tek sayı ise n tektir

Nalan ve Naz da karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatı için hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışmıştır. Aşağıda sırasıyla Nalan ve Naz'ın verilen önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıtlarından alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.23. *Nalan'ın karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*



Görsel 3.24. *Naz'ın karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki iki alıntıdan da görüldüğü gibi Nalan ve Naz tek ve çift tamsayıları cebirsel olarak ifade edebilmelerine rağmen elde ettikleri sonucun tekliğini gösterirken tek sayılar için "T" ya da "Tek" şeklinde gösterimler kullanmışlardır.

Katılımcıların zorlandığı bir diğer ispatlama süreci, tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği soruda olmuştur. Katılımcılardan verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmalarının beklendiği

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{matrix} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?"*

sorusunda tüm katılımcıların fonksiyon kavram bilgilerini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği doğru hipotezi ortaya attıkları görülmüştür. Katılımcılardan Naz hariç diğer tüm katılımcılar fonksiyon kavram bilgisine sahip olduklarını göstermişlerdir. Naz'ın fonksiyon kavram bilgisinin eksik olduğu görülmüştür. Aşağıda Naz'ın fonksiyon kavram bilgisine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Neden fonksiyon belirtir dedin?
>
> Naz: Çünkü A'nın değerleri aynı. Yani A'nın değerleri 0, 1, 2 ve 3. Buradan biz A'nın değerlerini x'in yerine kullandık. Buradan y'yi bulduk. y'nin değerleri de aynı şekilde 0, 1, 2, 3 olarak çıktı. Yani A ile aynı değerler. O yüzden A'dan A' ya fonksiyon belirtir, diye düşünüyorum.
>
> Görüşmeci: Tamam. Peki, fonksiyon neydi?
>
> Naz: Fonksiyonu tanım olarak diyorsunuz.
>
> Görüşmeci: Tanımlaya da bilirsin.
>
> Naz: Yani x'ten y'ye, şu an şey yapamıyorum toparlayamadım.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Naz: x değerlerinin işte onları yerine koyup işte belli bir y değeri bulmak gibi. Daha düzgün bir şekilde toparlayabiliriz. Şu an toparlayamıyorum.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Naz tanım kümesinden alınan bir elemanın görüntüsünün değer kümesinde olma durumunu ifade ederken tanım kümesinden alınan her bir eleman için değer kümesinden tek bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmemiştir. Naz'ın tanım kümesi ile değer kümesi arasında nasıl bir eşleme yapıldığını açıkça ifade etmediği görülmektedir.

Naz'ın dışında diğer katılımcılar (Esra, Neşe, Eda ve Nalan) doğru fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Nalan'ın fonksiyon kavram bilgisine ilişkin bir alıntı verilmiştir.

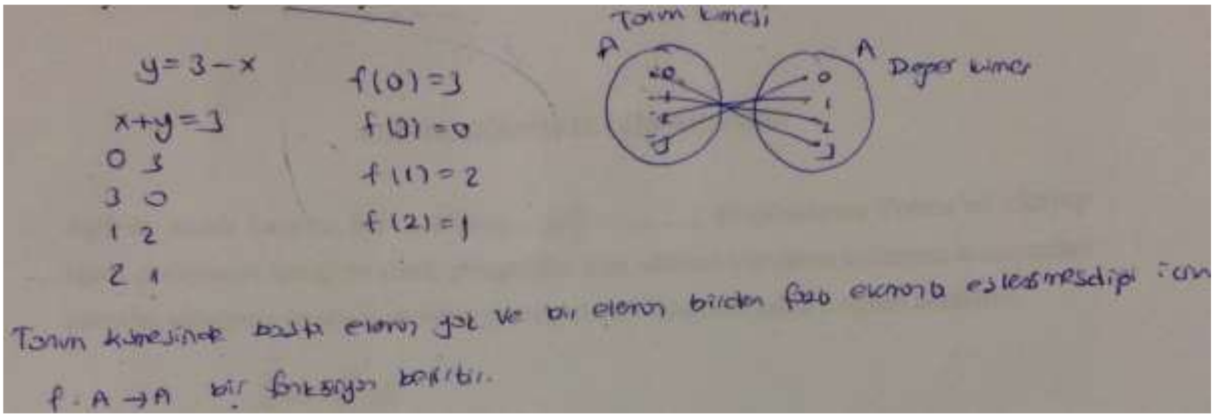
> Görüşmeci: Neden fonksiyon belirtir dedin?
>
> Nalan: Önce ilk aklıma gelen çok az sayıda olduğu için burada kümedeki eleman sayısı, direkt üzerinden gitmek istedim. A'dan A'ya olduğu için tek tek değerlendirdikten sonra tüm buradaki elemanların A kamesinde mevcut olduğunu fark ettim yani gördüm. Ve daha sonra baktığım zaman tüm elemanlar farklı bir elemana gitmiş, o yüzden fonksiyon belirtir diye düşünüyorum.
>
> Görüşmeci: Tamam, peki fonksiyon neydi?

> Nalan: Fonksiyon, A kümesi vardı B kümesi, A kümesinden B kümesine tanımlı olacak, A kümesinde boşta hiç eleman kalmayacak ve A kümesindeki her bir eleman B'de yalnız bir elemana gidecekti.

Eksik kavram bilgisini kullanarak Naz da dâhil olmak üzere tüm katılımcılar verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği doğru hipotezini ortaya atmışlardır. Ancak katılımcıların doğru hipotezi ortaya atmaları üzerine tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{aligned} f: IR &\to IR \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız."*

sorusunda yalnızca Esra ve Umut tüketerek ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanmış ve fonksiyon kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Esra ve Umut dışında geriye kalan dört katılımcı (Neşe, Eda, Nalan ve Naz) tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını yansıtmışlardır. Tüketerek ispat yöntemini ve fonksiyon kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak başarılı bir şekilde ispat yapan Esra'nın ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.25. *Esra'nın tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Esra ve Umut dışında Neşe, Eda, Nalan ve Naz fonksiyon bilgilerini kullanarak verilen eşitliğin fonksiyon belirttiğini göstermeye çalışmış ancak yaptıklarının bir ispat olmadığını değerlendirerek tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını yansıtmışlardır. Aşağıda fonksiyon kavram bilgisi de eksik olan Naz'ın ispat için yaptıklarına ve bunu değerlendirme durumuna ilişkin görüşmesinden bir kesit verilmiştir.

Naz: 0 koyuyorduk ilk başta 3, şimdi buna A diyorum bunda B diyorum. A'yı vermiş bize. Bulduklarıma da B diyorum. A elemanlarını, şöyle daha büyük çizeyim. Ben 3'ü x yerine 0 verdiğimde bulmuştum. Hani o zaman x B de 3' e gidiyor. 1, 2'ye gidiyor. A'daki 1 B'de 2'ye gidiyor.2, 1' e gidiyor. 3'de 0 gidiyor. Yani hepsi eşleşti. A'da herhangi bir boşlukta bir eleman kalmadı. O yüzden bu fonksiyon belirtiyor. Şu an böyle yapabildim.

Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?

Naz: Değil gibi.

Görüşmeci: Neden?

Naz: Çünkü örnek üzerinden gittik gibi oluyor biraz. Yani bir bakıma ispat aslında ama şey olarak kabul edilemeyebilir.

Görüşmeci: Ne olarak?

Naz: İspat olarak hani daha çok sözel ve şey formüller daha çok belirgin olduğu için. Burada örnek üzerinden gitmiş olduk biraz.

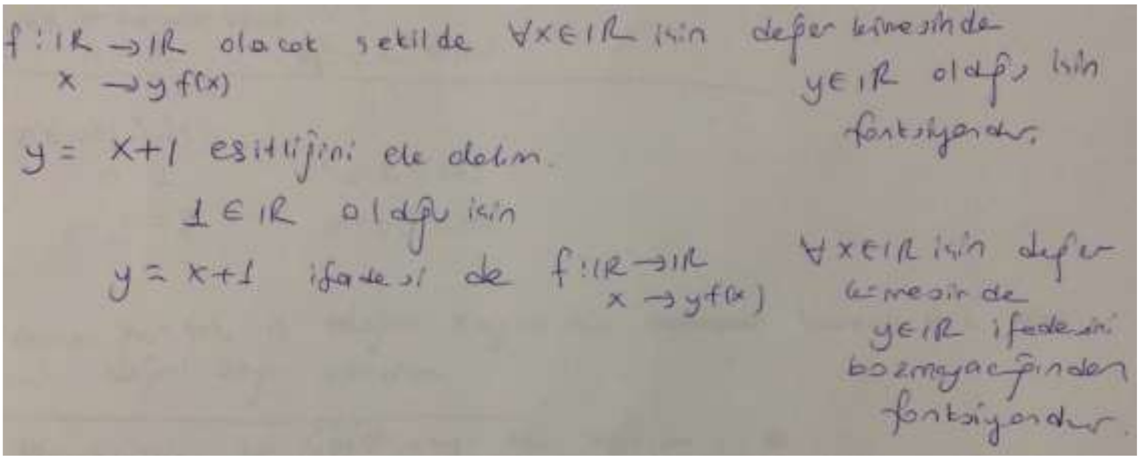
Görüşmeci: Örnek üzerinden neyi kastediyorsun?

Naz: Yani sayısal veriler kullanarak biraz daha onun üzerinden gittiğimiz için kabul edilemeyebilir.

Yukarıda verilen alıntıdan da görüldüğü gibi Naz, tanım kümesindeki tüm elemanları eşitlikte yerine koymasına rağmen bunu örnek vermek olarak değerlendirmiş ve ispat olmadığını ifade ederek tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir.

Katılımcıların en çok zorlandıkları ispatlardan biri doğrudan ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği "*$y = x + 1$ eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.*" sorusunda olmuştur. Katılımcılardan doğrudan ispat yöntemini ve fonksiyon kavram bilgisini başarılı bir şekilde kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini doğru bir şekilde ispatlayan olmamıştır. Katılımcılardan yalnızca ikisi (Neşe ve Eda) doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak bu katılımcılar da fonksiyon kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanmayarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Geriye kalan dört katılımcı (Esra, Umut, Nalan ve Naz) ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtarak ispatlama sürecinde başarılı olmadıkları görülmüştür.

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olan, fonksiyon kavram bilgisi de doğru olan iki katılımcı (Neşe ve Eda), ispatlama süreçlerinde fonksiyon kavram bilgilerini doğru bir şekilde kullanamamışlardır. Her iki katılımcının da tanım kümesinden alınan elemanın görüntüsünün değer kümesinde olma durumunu değerlendirdiği ancak tanım kümesinden alınan elemana karşılık, değer kümesinden tek bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmedikleri görülmüştür. Bu katılımcılardan Neşe'nin ispatlama sürecine ilişkin görüşme kağıdından alıntı aşağıda verilmiştir.



f : IR → IR olacak şekilde ∀x∈IR için değer kümesinde
x → y f(x)
y∈IR olduğu için fonksiyondur.

y = x+1 eşitliğini ele alalım.
1 ∈ IR olduğu için
y = x+1 ifadesi de f : IR → IR
x → y f(x)
∀x∈IR için değer kümesinde y∈IR ifadesini bozmayacağından fonksiyondur.

Görsel 3.26. *Neşe'nin doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Neşe, tanım kümesinden alınan bir elemana değer kümesinden tek bir eleman karşılık geldiğini ifade etmemiştir.

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülen dört katılımcıdan Nalan verilen eşitliğin fonksiyon belirtmesine ilişkin herhangi bir ispatlama girişiminde bulunmazken, Umut fonksiyonun bire-birliğini ve tersinin olduğunu göstermeye çalışmış, başka bir ispatlama girişiminde bulunmamıştır. Esra ve Naz ise reel sayılar kümesinden aldıkları bazı değerlerin fonksiyon altındaki görüntülerini araştırmışlardır.

Doğrudan ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği soruda herhangi bir ispatlama girişiminde bulunmayan Nalan'ın görüşmesinden alıntı aşağıda verilmiştir.

Nalan: Bu durumda ne yapayım, yapamıyorum mu yazayım?

Görüşmeci: İspatlayamayacak mısın?

Nalan: I ııh (Başını olumsuz anlamında sallıyor)

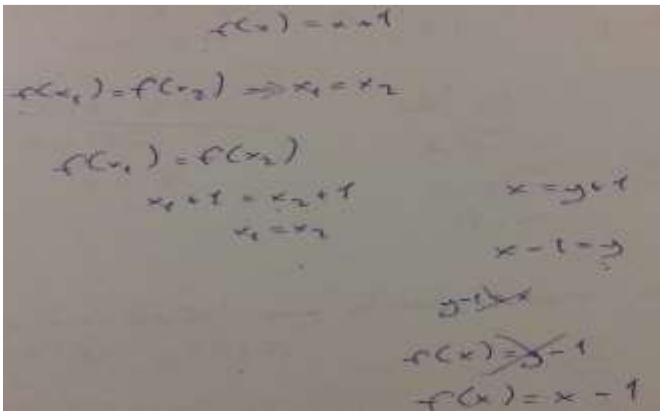
Görüşmeci: Neden ispatlayamadığını söylüyorsun?

Nalan: Çünkü hatırlamıyorum.

Görüşmeci: Neyi hatırlamıyorsun?

Nalan: Bu genel matematik konusuydu, hatırlamıyorum yani ispatını nasıl yaptığımızı.

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını gösteren bir diğer katılımcı Umut ise verilen eşitliğin fonksiyon belirttiğini ispatlamak için anlamsız bir şekilde verilen eşitliği fonksiyon kabul ederek bire-birliğini göstermeye ve sonrasında da tersini almaya çalışmıştır. Yaptıklarının bir ispat olmadığını değerlendiren Umut'un ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.27. *Umut'un doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Sen burada neyi göstermeye çalışıyorsun?

Umut: Şimdi bu fonksiyonun tersini aldım.

Görüşmeci: Neden?

Umut: Ben de bilmiyorum aslında. Fonksiyonun tersini aldım da, fonksiyon olsa dedim öyle tersini aldım.

Görüşmeci: Neden tersini aldın?

Umut: Tersi fonksiyon ise kendisi de fonksiyondur dedim.

Görüşmeci: Fonksiyon olmasıyla tersinin olması arasında bir ilişki var mı?

Umut: Yani fonksiyon birebir ve örtense tersi de fonksiyondur.

Görüşmeci: Peki birebir örten olmasıyla, fonksiyon olma arasında bir ilişki var mı?

Umut: Hani birebir ve örtense fonksiyondur demek anlamında mı soruyorsunuz?

Görüşmeci: Nasıl düşünüyorsun?

Umut: Şimdi birebir ve fonksiyon olması için birebir ve örtenliğe gerek yok. Ama fonksiyon birebir ve örtense tersi fonksiyondur.

…

Görüşmeci: Peki sen nasıl gösterdin bunu?

Umut: Bire birliğine baktım ilk önce. Sonra da tersini aldım da ıı bir dakika … tersini aldım da

Görüşmeci: Niçin tersini almıştın?

Umut: Tersinin de fonksiyon olduğunu göstermek için. Tersi fonksiyonsa kendisi de fonksiyondur diyebilmek için.

Görüşmeci: Ne düşünüyorsun peki?

Umut: Tersinin fonksiyon olduğunu düşündüm. Zaten tersi de fonksiyonsa kendisi de fonksiyondur. Ama ispatlayın dediği için burada da zaten demiş bir fonksiyon belirttiğini ispatlayın. Zaten fonksiyon olduğunu söylemiş. Yani bu şekil ispat olmaz.

Görüşmeci: Neden?

Umut: Çünkü baktığımız zaman mesela dolaylı ispat veya doğrudan ispat. Hiç birine girmiyor bence bu.

Görüşmeci: Girmediği için mi ispat değil diyorsun?

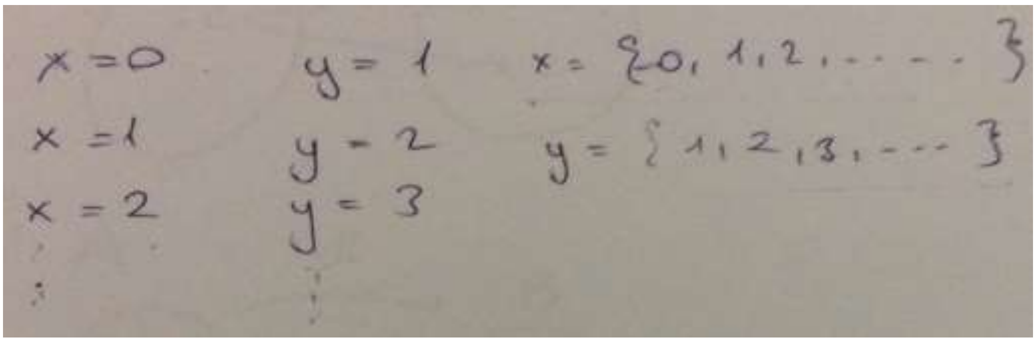
Umut: Evet…. Bir şey diyemem (başını olumsuz anlamda sağa ve sola sallıyor).

Görüşmeci: Peki, göstermeye çalıştığın şey ne?

Umut: Tersi fonksiyonsa kendisi de fonksiyondur. Bunu gösterdim

Burada Umut'un verilen eşitliği fonksiyon kabul etmiş, x_1 ve x_2'leri nereden aldığını ifade etmeyerek eksik de olsa fonksiyonun bire birliğini göstermiştir. Fonksiyonun da tersini alan Umut anlamsız bir şekilde verilen eşitliğin fonksiyon olduğunu göstermeye çalışmıştır. Sonra verilen eşitliği başta kendisinin fonksiyon kabul ettiğini fark eden Umut, herhangi bir ispat yöntemi de kullanmadığı için yaptıklarının bir ispat olmadığını ifade etmiştir. Umut verilen eşitliğin fonksiyon belirtmesine ilişkin başka bir ispatlama girişiminde de bulunmamıştır.

Esra ve Naz ise yaptıklarını ispat olarak değerlendirmeseler de yalnızca aldıkları bazı reel sayıların fonksiyon altındaki görüntülerinin reel sayılarda olma durumunu araştırmışlar, başka bir ispatlama girişiminde bulunmamışlardır. Aşağıda bu katılımcılardan Naz'ın görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.28. *Naz'ın doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Naz: Ya bunda sayı koysak yerine mesela x yerine 0 versek buradan y 1 çıkıyor. Biraz daha verebiliriz. x yerine 1 verince y 2 çıkıyor. x yerine 2 verince y 3 oluyor. Reel sayılardan reel sayılara demiş. Yani bizim burada x değerlerimiz şöyle 0 dan başlıyoruz ki sonsuza kadar gidebilir. Bu x şöyle, belirtelim. y de yine aynı şekilde. Bunlar hep reel sayılar çıkıyor. Yani x yerine reel sayılar verdiğimizde y de hep reel sayılar çıkıyor. Tabi x'e reel sayılar vermemiz gerekiyor bunun için. Ben şu an böyle düşündüm ama. Yani x'e reel sayılar verdikten sonra y de daima reel sayı çıkıyor. Bu da reel sayılardan reel sayılara bir fonksiyon olduğunu ispatlar. Daha fazla ne diyebiliriz. Şu an böyle düşündüm ama.

Görüşmeci: Peki, bu yaptığın bir ispat mıdır?

Naz: Yok, değil tabi.

Görüşmeci: Neden?

Naz: Çünkü biz bunları veriyoruz ama tabi bunlar ispat olarak kabul edilmeyebilir, yani kabul edilmez.

Görüşmeci: Neden?

Naz: Çünkü biz bunu kendimize göre bireysel olarak verdik. Bir ispat olarak kullanamayız.

Görüşmeci: İspat olması için ne olması lazım?

Naz: Yine dediğim gibi belli hani o tanımlara göre. Şu an reel sayılardan reel sayılara olsa. Ya mesela bir öncekinde yaptığımız gibi fonksiyon tanımından hani, bu x deki 0 boşta kalıyor orası. Ya boşta kalmıyor evet boşta kalmıyor 1'e gidiyor. Mesela onu ispatlıyor.

Görüşmeci: Nasıl?

Naz: Fonksiyon olduğu bire bir veya örtenlik konusundan nasıl olabilir? Bir şey var hani bire birliği ispatlamak ama burada bire birlikle ilgili bir şey yok

Görüşmeci: Bire birlikle, fonksiyon olma arasında bir ilişki var mı?

Naz: Var yani sonuçta bire bir fonksiyonda buradaki tüm elemanlar A'daki tüm elemanlar B deki elemanla eşleşmesi gerekiyor. B' de de bir boş boşta eleman kalmaması gerekiyor. Yani bir bakıma var.

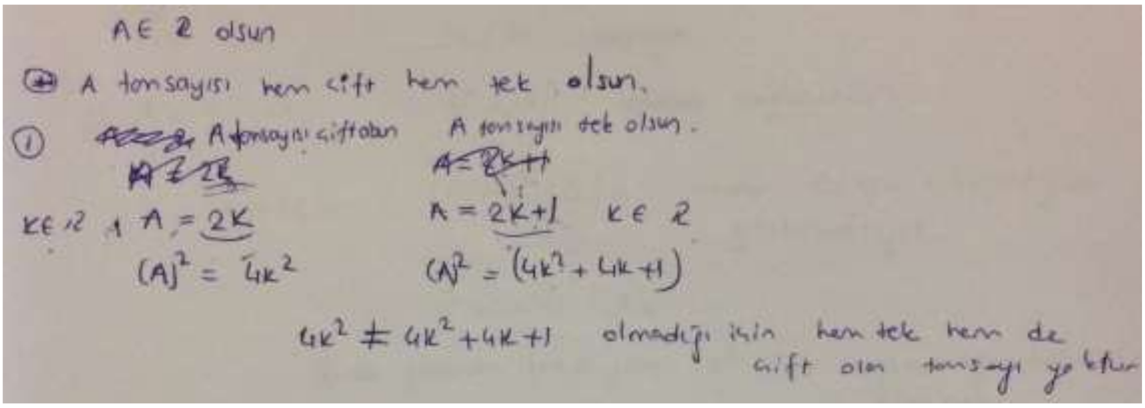
Görüşmeci: Peki, fonksiyon olması için birebir olması gerekiyor mu?

Naz: Hayır. Mesela birebir fonksiyonun tanımı onunla hani aklımda kalmış. Onun için f(x1)= f(x2), x1 = x2 olunca birebir fonksiyon oluyordu. Mesela onun gibi belli bir kalıp olması gerekiyor ispatlamamız için. Şu an o benim aklıma gelmiyor. Yani bu mesela ispat açısından kabul olmaz. Dediğim gibi hani öyle bir kalıplaşmış veriler olacak, şey gibi formül gibi onlar üzerinden ispat yapmamız gerekiyor. Yani bu da kabul olmuyor aslında.

Yukarıdaki alıntılardan görüldüğü gibi Naz, ispat yapmak için doğrudan ispat yöntemini kullanamamış ve eksik olan fonksiyon kavram bilgisini kullanmaya çalışmasına rağmen fonksiyon kavramını tam olarak kullanamayarak ispat yapamamıştır.

Katılımcıların başarısız oldukları bir diğer soru, olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur.*" önermesinin ispatının sorulduğu soru olmuştur. Katılımcılardan bu önermeyi doğru bir şekilde ispatlayan olmamıştır. Katılımcılardan dördü (Neşe, Eda, Umut ve Nalan) verilen önermesini ispatlama sürecinde olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu ve bu yöntemi kullanabildiğini göstermiştir. Bu dört katılımcı tek ve çift tamsayı kavram bilgisine de sahip olduğunu göstermiş ancak ispatlama süreçlerinde çelişkiye ulaşmakta zorlandıkları ve doğru bir şekilde çelişkiye ulaşamadıkları görülmüştür. Esra ve Naz ise tek ve çift tamsayı kavram bilgisine sahip olduklarını göstermelerine rağmen olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından herhangi bir ispatlama girişiminde bulunamamışlardır.

Olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olan dört katılımcıdan Neşe ve Nalan çelişkiye ulaşmak için aldıkları tek ve çift tamsayıların karesini almışlardır. Aşağıda bu katılımcılardan Neşe'nin olmayana ergi anıt yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.29. *Neşe'nin olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Neşe: Hani a'yı çift sayı aldım 2k, sonra bir de tek sayı kabul ettim. Bu ifadelerin eşit olmadığı ya da birbirinden farklı olduğunu söyleyip bitecek mi ki? Ya bunu yazmam ispatsa bilmiyorum ama buradan giriş yapacağım başka aklıma gelmiyor. Hem tek hem çift olan bir tam sayı yoktur, o zaman ben hem tek hem çift olan bir tam sayı vardır diyeceğim, sonra yanlış olduğuna nasıl geçeceğim? Çok eksiğim varmış hocam.

Görüşmeci: Neden öyle düşündün?

Neşe: Hocam nasıl giriş yapacağımı bilsem sonuçlandıramıyorum, sonuçlandırsam başını tutturamıyorum. Hocam herhalde bu kadar başka aklıma hiçbir şey gelmiyor. Olamaz, şuradan bir böyle bir şey olamaz falan mı demeliyim? Çelişkiye düşemiyorum zaten soru çelişki gibi.

Görüşmeci: Çelişkiye düşemiyorum demekle neyi kastettin?

Neşe: Hocam şimdi hem tek hem çift tam sayı yoktur. Ben şimdi vardır deyip çelişkiye düşeceğim ama sonra bunlar doğruymuş diyeceğim ama düşemiyorum ki, nasıl düşeceğim.

Görüşmeci: Neden düşemiyorsun?

Neşe: Zaten hocam 2k 2k+1 dedim ama burada zaten belli oluyor, ben nasıl düşeceğim, yapamadım zor matematik sorusu.

Görüşmeci: Sen a'yı tam sayı mı aldım demiştin.

Neşe: Evet hocam. Böyle mi devam etsem, bir de karesini alayım ben. Niye karesini alıyorum, çünkü $a^2=4$ yaparım, sonra bunlar eşit değildir desem, hocam böyle çelişkiye düştüm ben anca. Yani daha farklı yapamıyorum.

Görüşmeci: Neden karesini aldın peki?

Neşe: Neden karesi, zaten burada açık

Görüşmeci: Yani karesini alma ile bu önerme arasında nasıl bir ilişki var?

Neşe: Hocam ben de bilmiyorum, yani nedense öyle yapasım geldi. Yani aslında şurada zaten çok belli oluyor 2k, 2k+1

Görüşmeci: Neden belli oluyor diyorsun?

Neşe: Hani burası tek burası çift ama zaten bana onu soruyor. Ya hocam ben aslında burası çift burası tek hani çiftin karesi tekin karesi ve zaten ikisini de a kabul etmiştim, ikisi birbirine eşit olmak zorunda gibi ama değil. Başka bir çelişki yok gibi ya da var da göremiyorum. Hem tek hem çift olan hocam başka bir şey düşünemedim ya.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi Neşe olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak çelişki elde etmekte zorlanmış ve önerme ile ilgisi olmayan bir şekilde aldığı tamsayıların karesini alarak hatalı bir şekilde çelişkiye ulaşmıştır. Ayrıca Neşe'nin aldığı tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olduğunu ifade ederken hatalı bir şekilde aynı değişkeni kullandığı görülmüştür. Ancak Neşe, yaptıklarının bir ispat olmadığını değerlendirmiş, ispata doğru şekilde başladığını ancak çelişkiye ulaşamadığı ifade etmiştir. Aşağıda Neşe'nin önermenin ispatına yönelik yaptıklarını değerlendirmesine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Peki bu yaptığın bir ispat oldu mu?

Neşe: İspat olmadı.

Görüşmeci: Neden?

Neşe: Çünkü ben şurada bazı şeyler yazmalıyım. a'yı bir çift sayı alalım, a burada tek sayı olsun gibi eklemeler yapmalıyım, sonra $k \epsilon Z$ diyeceğim daha bir sürü eksiğim var. a tam sayısı çift olsun, a tam sayısı tek olsun. Hocam bu şekilde mi? k eleman hem çift hem tek sayı ama hocam bu giriş doğru sanki.

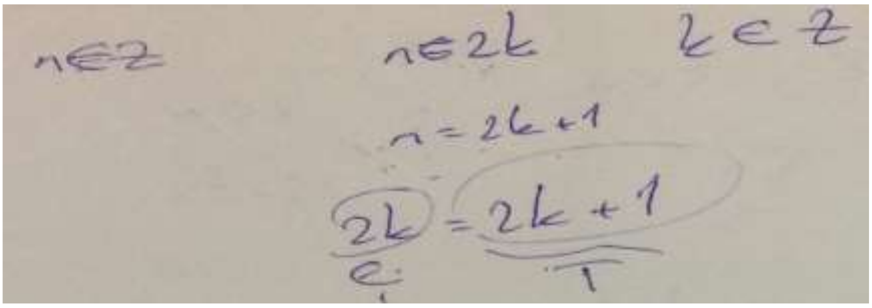
Görüşmeci: Öyle mi düşünüyorsun?

Neşe: Evet ama sonra devam edemedim.

Görüşmeci: Anladım, peki sen burada neyi göstermeye çalıştın?

Neşe: Hocam bize verileni hem çift hem tek sayı olan bir tam sayı yoktur diyor, ben de olsun diyorum. Sonra çelişkiye düşüp bunun doğruluğunu göstermeye çalıştım

Umut ve Eda de olmayan ergi ispat yöntemi ve tek ve çift tamsayı kavram bilgisine sahip olduklarını göstermiş ancak bu iki katılımcı da herhangi bir çelişkiye ulaşamamıştır. Aşağıda Umut'un olmayan ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı verilmiştir.



Görsel 3.30. *Umut'un olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Alıntıdan da görüldüğü gibi Umut herhangi bir çelişki elde etmemiştir. Ayrıca Umut'un aldığı tamsayıyı aynı anda hem tek hem de çift olduğunu gösterirken aynı değişkeni kullanarak hatalı bir şekilde ifade ettiği görülmektedir. Görüşmeci değişken kullanımındaki bu hatayı sorguladığında, Umut yaptığı hatayı fark etmemiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin Umut'un görüşmesinden bir alıntı yer almaktadır.

Görüşmeci: Peki n'ye 2k dedin n'ye bir de 2k artı 1 dedin. 2k 2k+1'e eşit olabilir mi?

Umut: Olamaz. Çünkü 2k'yı diğer tarafa attığımızda 0 eşit değildir 1 olur.

Görüşmeci: Peki bu n ile bu n aynı mı?

Umut: Aynı çünkü hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur demiş. Bir tamsayı dediği için hem tek hem de çift olacak, yani n tek bir tamsayı ama işte bu durumda aynı olmuyor. Çünkü birbirlerine eşit olmadıkları için

Görüşmeci: 2k 2k+1'e eşit olabilir mi?

Umut: Olamaz

Naz ve Esra ise tek ve çift tamsayı kavram bilgisine sahip olduklarını göstermelerine rağmen olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından verilen önermeyi ispatlamaya yönelik herhangi bir ispatlama girişiminde bulunmamışlardır. Aşağıda Naz'ın olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatlayamayacağını ifade etmesine ilişkin görüşmesinden alıntı verilmiştir.

Naz: Aklıma bir şey gelmiyor ama şu an. Dediğim gibi tam sayılarda ya tek ya çift sayılar hani onun arasında hem tek hem çift sayı olan bir sayı yok. Şuan ispat yapamıyorum.

Naz'a benzer şekilde Esra da verilen önermenin ispatını yapamayacağını belirtmiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin Esra'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

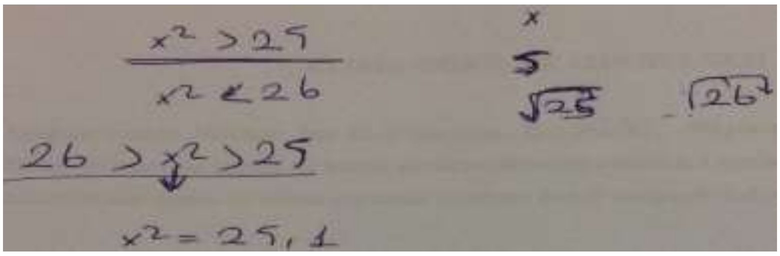
Esra: Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur, doğruluğunu ispatlayınız, ben bunu nasıl ispatlayacağım. ….. Yoktur da, tek sayıları 2n+1 diye tanımlıyoruz, çift sayıları da 2n diye tanımlıyoruz, 2n+1 olan 2n olamaz. Ben ispat olarak yapamıyorum ama düşünerek yapabiliyorum hocam.

Görüşmeci: Ne düşünüyorsun?

Esra: Tek sayıları biz 2n+1 diye tanımlıyoruz çift sayıları da 2n diye, 2n+1 olan 2n olamaz. ………………. Düşünemiyorum.

Katılımcıların başarısız oldukları bir diğer ispatlama süreci ise varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği “*Bir* $x > 5$ *reel sayısı vardır öyle ki* $x^2 < 26$*’dır.*” önermesinin ispatı olmuştur. Katılımcılardan varlık ispatını başarılı bir şekilde tamamlayan olmamıştır. Katılımcılardan yalnızca ikisi (Eda ve Umut) herhangi bir yönlendirme olmaksızın önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anlamıştır. Geriye kalan dört katılımcıdan ise yalnızca Nalan yapılan yönlendirme ile önermenin mantıksal yapısını anladığını, diğer üç katılımcı (Esra, Neşe ve Naz) ise yapılan yönlendirmeye rağmen önermenin mantıksal yapısını anlamadıklarını göstermişlerdir. Ancak bu iki katılımcı da dâhil olmak üzere katılımcıların tümü varlık ispatını yapamamışlardır.

Eda önermenin mantıksal yapısını anladığını göstermiş ve önermeyi sağlayan bir reel sayı da bulmuştur. Ancak Eda, önermeyi sağlayan bir sayı bulmanın ispat olmayacağını ifade ederek varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir. Aşağıda Eda’nın varlık yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.31. *Eda’nın varlık ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

Görüşmeci: Bu bir ispat olacak mı?

Eda: Yok olmaz

Görüşmeci: Neden olmaz?

Eda: Örnek olurdu gene. x’e bir örnek vermiş olurdum.

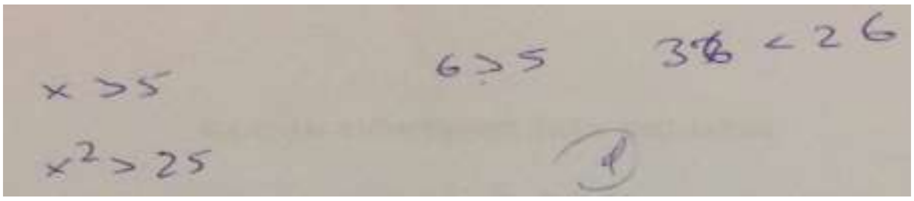
Görüşmeci: Peki önerme sana neyi söylüyor, ne diyor?

Eda: x’den büyük bir reel sayı öyle ki yani bir reel sayı var 5’den büyük bir reel sayı var ve karesi de 26’dan küçükmüş bu sayının.

Görüşmeci: Sen ispat yapmak için ne olması gerektiğini düşünüyorsun burada, ne yapman gerektiğini düşünüyorsun?

Eda: Ya aslında bilemiyorum hiç bilemiyorum şu anda ispat yapmam için ne yapmam gerektiğini, ispat konusunda kendimi baştan beri çok yetersiz görüyorum.

Umut ise önermenin mantıksal yapısını anladığını ve varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, ancak önermeyi sağlayan bir reel sayı bulmamış ya da böyle bir reel sayının bulunabileceğini gösterememiştir. Aşağıda Umut'un varlık kanı yöntemini kullanmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.32. *Umut'un varlık ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

Umut: Burada bir x sayısı dediği için orada kafam takıldı.

Görüşmeci: Neden takıldı?

Umut: Hani bir sayı için sağlıyorsa o zaman önermeye doğru diyebiliriz gibime geldi bana.

Görüşmeci: Nasıl düşünüyorsun?

Umut: Çünkü bir x reel sayısı demiş. Hani herhangi bir x reel sayısı için sağlıyorsa sağlıyordur gibime geldi. Bir x

Görüşmeci: Gibime geldi diyorsun, şu an ne düşünüyorsun?

Umut: Yani bir $x > 5$ reel sayısı varsa öyle ki demiş $x^2 < 26$ hani bir sayı için sağlıyorsa, bu önerme doğrudur anlamına geliyor.

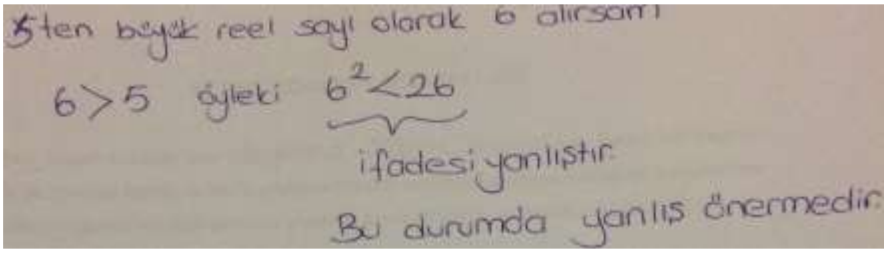
Görüşmeci: Peki, öyle bir sayıyı bulsaydın, bulsan o zaman ne olur?

Umut: Önermeye doğru derim.

Görüşmeci: Peki ispatı için ne dersin?

Umut: Sayıyı bulduysam, bir x sayısı dediği için ispat yapmama gerek kalmaz bence.

Geriye kalan dört katılımcıdan yalnızca Nalan yönlendirme ile varlık niceleyicisini fark etmiş ve varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtmıştır. Aşağıda Nalan'ın görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.33. *Nalan'ın varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Nalan: Önerme doğru olmaz çünkü sonuçta bunun yanlış olduğu yerlerde var. O zaman önerme direkt yanlıştır.

Görüşmeci: Yanlış olduğu yerler derken ne demek istedin?

Nalan: Şimdi demek istediğim şu, x'ten büyük sayıların karesinin hepsi 26 dan küçük değildir o yüzden bu önerme yanlıştır.

...

Görüşmeci: Şimdi buradaki birin ne anlama geldiğini söylüyorsun?

Nalan: Bir yani bir bildiğimiz bir, bir tane böyle bir sayı olabilir.

Görüşmeci: Peki bir tane öyle bir sayı bulsan ne olur?

Nalan: Doğru olur.

Görüşmeci: Gösterebilir misin?

Nalan: Hayır.

Dört katılımcıdan üçü (Esra, Neşe ve Naz) ise yönlendirme yapılmasına rağmen önermenin mantıksal yapısını anlamadığını göstermiş, önermede kullanılan varlık niceleyicisini evrensel niceleyici gibi ele alarak önermenin yanlış olduğunu göstermişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Esra'nın görüşmesinden alıntı verilmiştir.

Esra: Bir şey yapamadım yani x 5'lerden büyük olacak. $x^2<26$ ise 5'ten büyük bir sayı verdiğimiz zaman 36<26 oluyor mesela. Bu yanlış bir ifade oluyor demek ki yanlıştır. Önerme doğru değildir, yanlıştır o zaman. Bir x>5 reel sayısı vardır öyle ki $x^2 < 26$'dır demiş yani 5'ten büyük sayılar için x>5 olduğu takdirde x>5 ise demiş. Yerine verdiğin zaman $x^2<26$'dır demiş. Bunun için bu sağlanıyor demiş yani.

Görüşmeci: Peki önermedeki "bir" kelimesi ne anlama geliyor?

Esra: "Bir" kelimesi ne anlama geliyor, bilmiyorum. Fikir yürütemeyeceğim onun için.

Görüşmeci: Tamam, peki bu yaptığın ispat mıdır dediğimde ne dedin, x e 6 verdin galiba.

Esra: Evet 6 verdim yani ispat değildir dedim.

Görüşmeci: neden değildir dedin?

Esra: Çünkü açıklayamadım yani direkt söyledim.

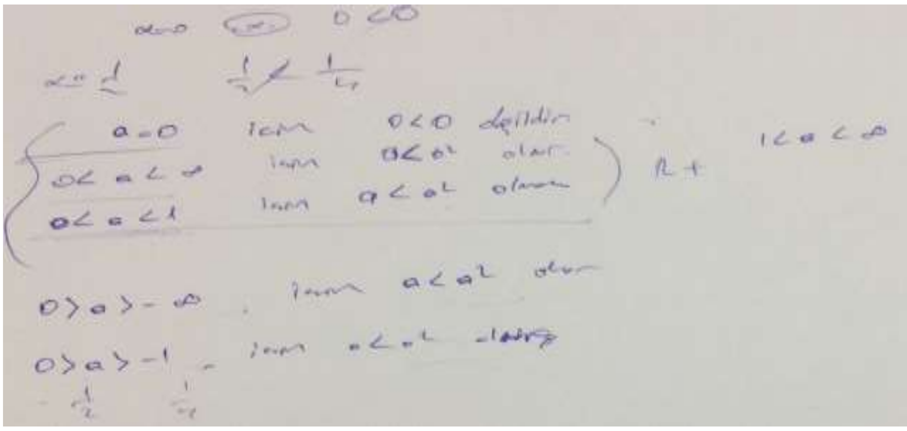
3.1.3. İkinci sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçleri

Katılımcılara görüşmelerde sırasıyla tüketerek, doğrudan, karşıt ters, aksine örnek verme, olmayana ergi ve varlık ispat yöntemlerini kullanmalarının beklendiği altı ispatlama sorusu sorulmuştur. Soruların tamamında ispatlama sürecini güçlük yaşamaksızın başarı ile tamamlayan katılımcı olmamıştır. Altı katılımcıdan ikisi (Betül ve Melih) üç soruda, ikisi (Ayşe ve Selda) iki soruda, ikisi de (Sevgi ve Can) yalnızca bir soruda ispatlama süreçlerini başarı ile tamamlamıştır. Katılımcıların genel olarak aksine örnek verme ve olmayana ergi ispat yöntemlerini kullanmaları beklenen sorularda ispatlama süreçlerinde başarı gösterdikleri, en çok da doğrudan, karşıt ters ve varlık ispat yöntemlerini kullanmaları beklenen ispatlama sorularında güçlük yaşadıkları görülmüştür. Katılımcıların tümü özellikle karşıt ters ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını, çoğu (altı katılımcıdan beşi) ise olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtmıştır. Katılımcılar tüm sorularda verilen önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ifade edebilmelerine rağmen genellikle uygun ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından, uygun ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanamadıklarından ya da ispat için gerekli olan kavram bilgisine sahip olmadıklarından ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür.

İspatlama süreçlerinde diğer katılımcılara göre daha başarılı olan iki katılımcıdan Melih ve Betül karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen soruda karşıt ters ispat yöntemini kullanmamış ancak olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak başarılı bir şekilde ispat yapmışlardır. Karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği sorunun dışında Melih, aksine örnek verme ve varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği sorularda, Betül ise tüketerek ve aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği sorularda ispatlama süreçlerini başarılı bir şekilde tamamlamıştır.

Katılımcıların en başarılı olduğu ispatlama süreci, aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "$Her\ \ x \in IR\ \ için\ \ x < x^2$*'dir*" önermesinin ispatında olmuştur. Altı katılımcıdan beşi (Sevgi, Ayşe, Melih, Betül ve Selda) önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını ve aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, reel sayı kavram bilgisini de kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Beş katılımcı da verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren bir örnek bulmuş ve yaptıklarının bir ispat olduğunu ifade etmiştir.

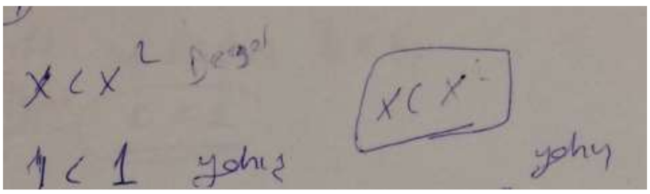
Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Betül'ün aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.34. *Betül'ün aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Betül: 0 ile 1 arasındaki her sayı küçük oluyor zaten ½ mesela onların kareleri kendilerinden daha küçük sayılar oluyor o yüzden olmuyor. Şunda da ne dedim sayının karesi hep pozitif o yüzden olur ("$0 < a < \infty$" aralığına işaret ediyor), şunda da aynı şey geçerli ("$0 > a > -\infty$" aralığına işaret ediyor).
>
> Görüşmeci: Peki bu bir ispat mıdır dediğimde ne diyorsun?
>
> Betül: İspattır diyorum.
>
> Görüşmeci: Peki burada sen neyi göstermeye çalışıyorsun?
>
> Betül: Yani her x için geçerli olmadığını gösteriyorum bu kuralın.

Aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatlama sürecinde altı katılımcıdan yalnızca Can verilen önermeyi sağlamayan aksine bir örnek bulmasına rağmen, yaptığının bir ispat olmadığını ifade ederek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır. Aşağıda Can'ın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.35. *Can'ın aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Can: Ama hani doğrudan x'e 1 vererek 1<1'den verilen önermenin yanlış olduğunu, yanlış olduğundan dolayı da bu önermenin tamamen yanlış olduğunu düşünüyorum sadece bir tanesi bozduğu için.

Görüşmeci: Bu yaptığın bir ispat mıdır?

Can: Değildir bu şekilde

Görüşmeci: Neden?

Can: Aslında bilmiyorum yanlışı bularak ispatladığımı düşünüyorum. Ama mesela bu şekilde bir ispat bana çok sıcak gelmiyor.

Görüşmeci: Ne gelmiyor?

Can: Çok şey gelmiyor mutlaka bunun farklı bir şekilde gerçekten her $x \in R$ için $x < x^2$'nin bir ispatı vardır farklı. Ama bu şekilde değer vererek ispatladığımı düşünüyorum ama çok da emin değilim.

Görüşmeci: Neden emin değilsin?

Can: Hani sonuçta değer vererek yanlış olduğunu buluyorum. İspatladığımı düşünüyorum aslında ama bunun gerçekte ispatının farklı bir şekilde olduğunu düşünüyorum. Dediğim gibi şu an şu soru sınavda karşıma çıksa ben bu önermenin yanlış olduğunu bu şekilde göstersem bilmiyorum hani soruyu çözdüm tamam diyemem.

Görüşmeci: Neden diyemezsin?

Can: Çünkü sonuçta değer verme yöntemiyle bir şeyin yanlış olduğunu gösteriyorum ama onun doğru olmadığını yanlış olduğunu hani ne bileyim ispat gibi gelmiyor bana değer vererek yapmak.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Can, önermeyi sağlamayan bir değer bulmasına ve önermenin yanlış olduğunu belirtmesine rağmen değer vermenin bir ispat olmadığını ifade etmiştir. Yaptığının bir ispat olmadığını ifade eden Can'ın verilen önermenin başka bir şekilde ispatlanacağını belirttiği görülmüştür. Verilen önermenin nasıl ispatlanacağını düşündüğü sorgulandığında ise Can, ispat için kendisinin yaptığı gibi değer verme ile değil cebirsel olarak bir takım işlemler sonucu verilen önermenin yanlışlığını göstermesi gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda Can'ın verilen önermenin ispatının nasıl olması gerektiğini düşündüğüne ve kendi yaptıklarını nasıl değerlendirdiğine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: O dediğin ispat nasıl peki?

Can: Hani yine matematiksel ifadelerle her $x \in R$ için $x < x^2$'nin mesela bilmiyorum x^2'nin mesela bunun üzerinde işlemler yaparak bunu farklı şekillere dönüştürerek, bunu her $x \in R$ için yanlış olduğu, bir dizi işlemden sonra yanlış olduğu kendiliğinden ortaya çıkabilir. Ben burada direkt işlem üzerinden değer verip yanlış olduğunu gösteriyorum. Ama bunu farklı şekillere dönüştürerek direkt hani $x \in R$ için $x < x^2$'nin değil de mesela $x > x^2$'nin bir dizi işlemler sonucunda bunu bulabilir mesela biri. Ya da $x > x$ bulur ya da $x < x$ bulur. Bir dizi işlemler sonucunda bunun yanlış olduğu buluNaz. Bu şekilde ispat olur aslında, ispatın bu şekilde böyle bir şey olduğunu düşünüyorum. Ne kadar bunun yanlış olduğunu göstererek ispatlamış da olsam hani çok emin değilim. Asıl ispatın farklı olduğunu düşünüyorum.

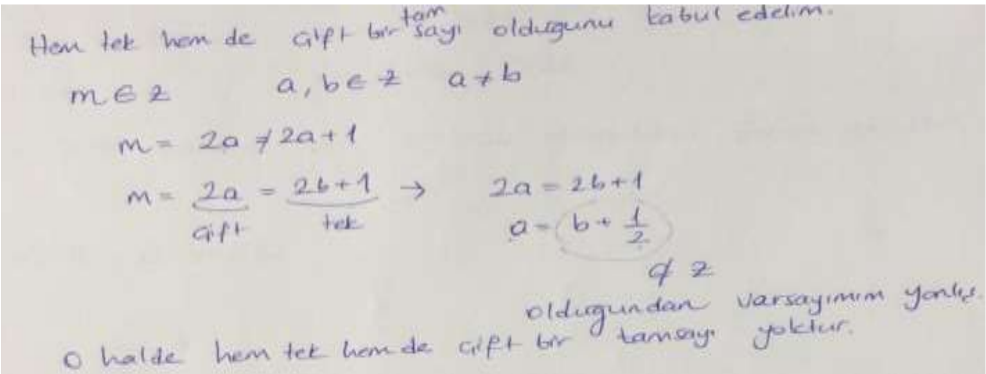
Görüşmeci: Peki bu yaptığın ne?

Can: Bu sanırım değer verme yöntemiyle hani değer verme yöntemiyle bir şeyin yanlış olduğunu bulmak.

Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır dediğimde ne diyorsun?

Can: Aslında ispat olduğunu düşünüyorum ama bunun ispatının farklı bir şey olduğunu düşünüyorum. Bunun dediğim gibi asıl ispatın bu şekilde bir şey olduğunu düşünüyorum. Bu yaptığım ne kadar doğru olursa olsun hani bir dizi işlemler sonucunda bunun yanlış olduğunun kendiliğinden işlemler sonucunda ortaya çıkmasının asıl ispat olduğunu düşünüyorum.

Katılımcıların aksine örnek verme ispat yönteminden sonra kullanmada en başarılı oldukları ispat yöntemi olmayana ergi ispat yöntemi olmuştur. Olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur.*" önermesini ispatlama sürecinde altı katılımcıdan beşi olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu ve bu yöntemi kullanabildiğini göstermiştir. Ancak bu beş katılımcıdan yalnızca ikisinin (Ayşe ve Selda) ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamladığı görülmüştür. Bu katılımcılardan da Ayşe herhangi bir yönlendirme olmaksızın ispatlama sürecini başarıyla tamamlarken, Selda görüşmecinin yönlendirmesi ile ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Aşağıda Ayşe'nin olmayana ergi ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önemenin ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.36. *Ayşe'nin olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Bu bir ispat oldu mu?

Ece: Evet çok içime sindi.

Görüşmeci: Neden öyle dedin?

Ece: Bundan eminim bu şekilde söyleyebilirim.

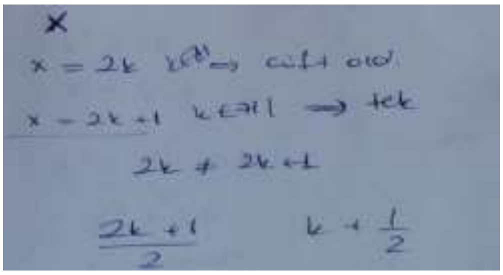
Görüşmeci: Peki bu yaptığının bir adı var mı?

Ece: Evet dilimin ucunda ama bilmiyorum hani şey verilenin tam tersini kabul edip onun da yanlış olduğunu gösterdiğim için verilen doğru oluyor.

Görüşmeci: Peki verilenin tersi dediğin şey ne?

Ece: Burada tamsayı yoktur demiş ben öyle bir tamsayı olduğunu kabul ettim.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Ayşe önermenin mantıksal yapısını çözerek uygun ispat yöntemi olan olmayana ergi ispat yöntemini seçmiş ve bu ispat yöntemi ile tek ve çift tamsayı kavramlarını ve işlem bilgisini kullanarak doğru bir ispat yapmıştır. Ayrıca Ayşe yaptığının bir ispat olduğunu da değerlendirmiştir. Selda ise olmayana ergi ispat yöntemini doğru kullanmasına rağmen önermeyi ispatlarken aldığı bir tamsayının tekliğini ve çiftliğini aynı değişkeni kullanarak ($n \in Z$ için $n=2k$ ve $n=2k+1$ olsun) yanlış bir şekilde göstermiştir. Aşağıda Selda'nın olmayana ergi ispatına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.37. *Selda'nın olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Ancak görüşmecinin yaptığı yönlendirme ile Selda, aldığı tamsayıyı ifade ederken sayının tekliğini ve çiftliğini aynı değişkeni kullanarak ifade etmesinin hatalı olduğunu fark etmiş ve aynı tamsayıyı ifade ederken farklı değişkenler kullanarak aşağıdaki biçimde ispatını doğru bir şekilde tamamlamıştır. Yaptığının bir ispat olduğunu da değerlendiren Selda'nın yapmış olduğu değişken hatasını yönlendirme ile fark etmesine ve yaptığını bir ispat olarak değerlendirmesine ilişkin olarak aşağıda görüşmesinden ve görüşme kağıdından alıntılar verilmiştir.

Görüşmeci: Peki x'i 2k aldın bir de 2k + 1 aldın.

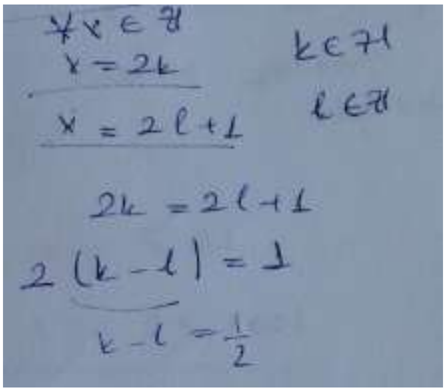
Selda: Evet.

Görüşmeci: Bu x'leri sen baştan aynı mı kabul etmiş oldun böyle yaparak?

Selda: Aynı kabul etmeye çalıştım. Yani birinde çift kabul ettim, diğerinde tek olabilmesi için kabul etmeye çalıştım. Ama… İkisinde de k yazmam mı doğru değil diye düşünüyorum.

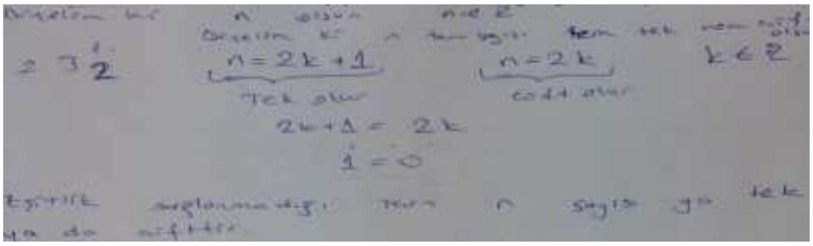
Görüşmeci: Neden?

Selda: Mesela x'i 2k kabul ederken aynı zamanda x'i 2l + 1 kabul etmeliydim diye düşünüyorum.
Görüşmeci: Neden öyle düşündün?
Selda: Çünkü hem x'ler aynı hem k'lar ikisinde de ortak ama k'nın alacağı hiçbir değer için bu sağlanmaz zaten. l olarak kabul etsem değişir miydi?
Görüşmeci: Ne düşünüyorsun?
Selda: x, 2k olsa ve x, 2l +1 olsa ki bu durumda yine çift yine tekler. Ve bunları birbirine eşitlemeye kalksam ben. 2l +1 çünkü ikisi de x'ler, 2 parantezinde k-l = 1/2 çıkacak. Ama ben k ve l'yi tam sayı kabul ediyorum ve hiçbir tamsayıyla 2'nin çarpımı 1 olamaz. k-l'nin kesinlikle paylı paydalı bir sayı olması gerekir.
Görüşmeci: Nasıl?
Selda: Rasyonel sayı olması gerekir. Ve olmuyor, sağlamıyor. Bu yüzden sağlanamıyor. Yukardaki sebepten dolayı değil de şu şekilde kabul ettiğimde daha doğru bir ifade şekli olacak.
Görüşmeci: Neden?
Selda: Yani 2 k ile 2k +1 birbirine eşit olamaz zaten.
…
Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır dediğimde ne diyorsun?
Selda: İspattır diyorum. Yani ispatladım şu an. Öyle olmadığını ispatladım.

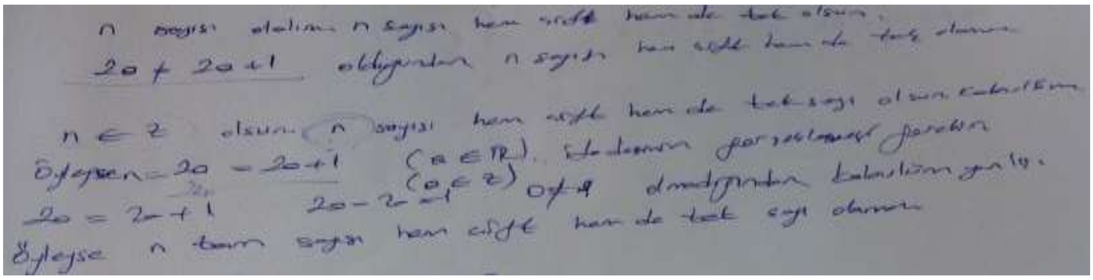


Görsel 3.38. *Selda'nın yapılan yönlendirmeden sonra olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

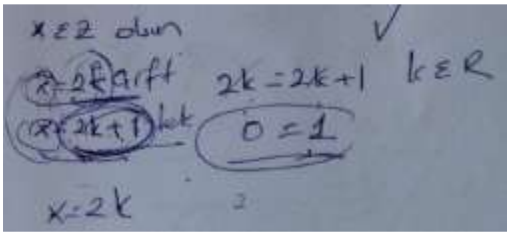
Ayşe ve Selda haricinde geriye kalan dört katılımcıdan üçü ise (Melih, Betül ve Can) olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ve bu yöntemi doğru bir şekilde kullanmıştır. Ancak bu üç katılımcı da aldıkları tamsayının ayrı ayrı tek ve çift olduğunu gösterirken aynı değişkeni kullanmıştır. Aşağıda bu üç katılımcının olmayana ergi ispatlarından alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.39. *Melih'in olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*



Görsel 3.40. *Betül'ün olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*



Görsel 3.41. *Can'ın olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yapılan yönlendirmelere rağmen bu üç katılımcı da aynı sayıyı farklı değişkenlerle ifade etme yanlışını fark edememiş ve bu yanlışa dayanarak hatalı bir şekilde çelişkiye ulaşmıştır. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Can'ın yapılan yönlendirmeye rağmen yaptığı yanlışı fark etmemesine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: x'e 2k ve 2k+1 dedin. Bunlar birbirine eşit olabilir mi?

Can: İşte x hem 2k hem de 2k+1 olamaz. Yani 2k, 2k+1'e eşit olamayacağı için x hem çift hem tek olamaz. Bu sayı bu sayıya eşit olamayacağından dolayı x hem çift hem tek olamaz.

Görüşmeci: 2k, 2k+1'e eşit olabilir mi?

Can: Eşit olamaz o yüzden çift olamaz.

Görüşmeci: x'e 2k dedin burada da x'e 2k+1 dedin.

Can: Evet, çünkü burada diyor hem tek hem de çift sayı olacak diyor. x hem tek olacak diyor hem de çift olacak diyor.

Görüşmeci: Bunlar aynı x'ler mi?

Can: Yani aynı x olsun mesela x 2k, k'lar da aynı k'lar, x'ler de aynı x'ler ama işte x=2k diğeri de 2k+1 dir.

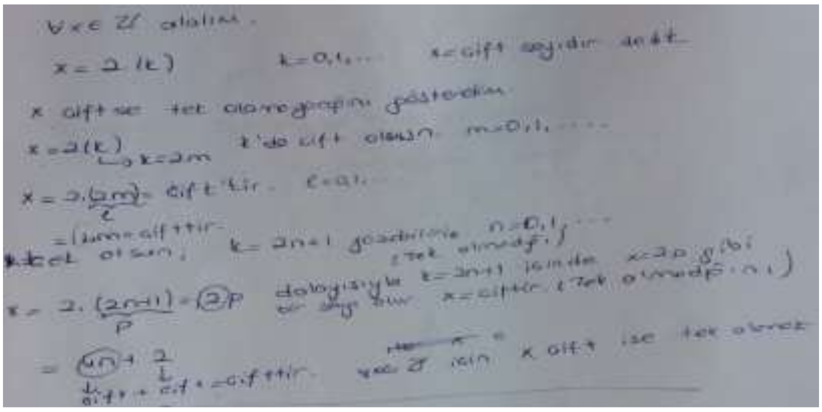
Görüşmeci: Neden öyledir?

Can: Çünkü 2k, 2k+1'e eşit olamayacağından dolayı x'ler birbirine eşit 2k da 2k+1'e eşit olması gerekiyor. Ama olamayacağından dolayı yani x ya 2k'dır ya da 2k+1'dir. Yani x ya tektir ya çifttir.

Katılımcılardan yalnızca Sevgi, olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin mantıksal yapısını çözememiş ve önermenin doğru olduğunu ifade etmesine rağmen önermeyi doğru bir şekilde ispatlayamamıştır. Aşağıda Sevgi'nin önermenin mantıksal yapısını nasıl ele aldığına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Sevgi: Şimdi düşünüyorum, tam sayı yoktur diyor. Hem çift hem tek tamsayı yoktur. Ben tam sayılardan alıyorum. Çift alıyorum, çift tam sayı çift çıkıyor. Çift tam sayı tek çıkamıyor. Yani tek tam sayı da çift çıkamıyor. İkisi bir arada olmuyor demek ki. Demek ki böyle bir şey yok, çiftse çift çıkıyor. Hem çift hem tek olan tam sayı bulamadım ben. Mesela şu an nasıl söyleyeyim, tam sayılardan eleman aldım hem tek hem çift olan sayı bulamadım, öyle düşünüyorum.

Tek ve çift tamsayı kavram bilgisine sahip olduğunu görülen Sevgi, verilen önermenin ispatlama sürecinde çift sayının çift, tek sayının ise tek olduğunu göstermiştir. Aşağıda Sevgi'nin olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak ispatlaması beklenen önermeyi nasıl ispatladığına ilişkin görüşme kağıdından ve alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.42. *Sevgi'nin olmayana ergi ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatı*

Önermenin ispatı için herhangi bir ispat yöntemi seçmediği görülen Sevgi'nin yaptıklarını ispat olarak değerlendirme durumuna ilişkin aşağıda görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Hım, bu bir ispat mıdır?

Sevgi: Evet öyle düşünüyorum.

Ayrıca verilen önermenin ispatı için uygun olan olmayana ergi ispat yöntemini seçmeyen Sevgi, görüşme sürecinde olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu aşağıdaki biçimde göstermiştir.

Sevgi: Ama böyle yaptığım zaman şunda tersini bulduğum zaman, bunun doğru olduğunu gösterebiliyorum. Bu yanlış bir şey ise tersi kesinlikle doğrudur diyebiliyorum. Tersi dediğim varsaydığımız yanlış ise diğeri kesin doğrudur diyebiliyoruz.

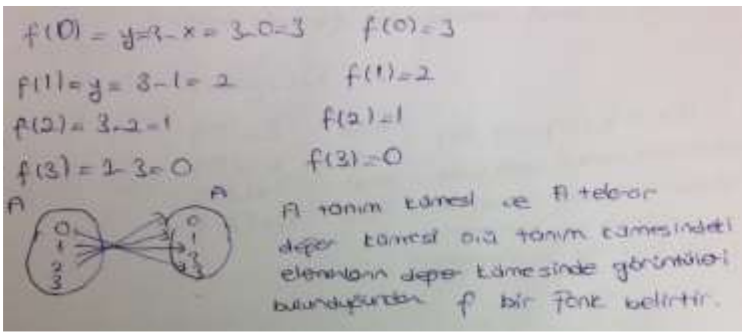
Olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğu görülen Sevgi, önermenin ispatında bu ispat yöntemini kullanamamıştır.

Katılımcıların güçlük yaşadığı bir diğer ispatlama süreci, tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği soruda olmuştur. Katılımcılardan verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmalarının beklendiği

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{r} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?"*

sorusunda tüm katılımcıların fonksiyon kavram bilgilerini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini ifade ettiği ve doğru hipotezi ortaya attıkları görülmüştür. Katılımcılardan Sevgi ve Melih hariç diğer tüm katılımcılar fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu gösterirken Sevgi fonksiyon kavram bilgisinin doğru olmadığını, Melih ise eksik kavram bilgisine sahip olduğunu yansıtmıştır.

Sevgi fonksiyon kavram bilgisini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini ifade etmiş ve doğru hipotezi ortaya atmıştır. Aşağıda Sevgi'nin verilen eşitliğin fonksiyon belirttiği hipotezini nasıl ortaya attığına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.43. *Sevgi'nin verilen eşitliğin fonksiyon belirttiği hipotezini ortaya atmasına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Sevgi, verilen tanım kümesindeki elemanların görüntülerinin değer kümesinde olma durumunu değerlendirmiş ancak tanım ve değer kümesi arasında nasıl bir eşleşme olması gerektiğini açıkça ifade etmemiştir. Sevgi'nin fonksiyon kavram bilgisi sorgulandığında ise tanım kümesi ile değer kümesi arasında nasıl bir eşleşme olduğunu doğru bir şekilde ifade etmediği görülmüştür. Aşağıda Sevgi'nin fonksiyon kavram bilgisine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Sevgi: A ve B boştan farklı iki küme olsun. A'daki tanım kümesindeki elemanlar B kümesinde en az bir elemanla eşleşiyorsa elemanla eşleştiriliyorsa A'dan B'ye tanımlanan bağıntıya fonksiyon denir.
>
> Görüşmeci: Ne demek istiyorsun en az bir demekle?
>
> Sevgi: Yani bir tane değer kesinlikle olacak hani bunun gittiği bir tane değer kesinlikle olacak demek istiyorum.
>
> Görüşmeci: İki tane olabilir mi?
>
> Sevgi: İki tane en az bir, iki tane de olabilir

Melih de fonksiyon kavram bilgisini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini ifade etmiş ve doğru hipotezi ortaya atmıştır. Aşağıda Melih'in verilen eşitliğin fonksiyon belirttiği hipotezini nasıl ortaya attığına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Melih: Şimdi fonksiyon belirtir diyorum, çünkü bu görüntü kümesinde bulduğum elemanlar 3, 2, 1, 0 onlar da bu fonksiyon dediği gibi A kümesi şey A'dan A'ya dediği için A'daki elemanlar 0, 1, 2, 3 de A'da. Bu görüntü kümesinde 3, 2, 1, 0 buldum yerine koyduğumuzda, yani onlar da A kümesinin elemanları. O zaman fonksiyon belirtir.

Melih ise hipotezi ortaya atarken tanım kümesinden alınan bir elemana değer kümesinden yalnız bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmemiştir. Melih'in fonksiyon kavram bilgisi sorgulandığında, tanım kümesinden alınan elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin değer kümesinde olma durumunu ifade ettiği, ancak alınan elemanların değer kümesinden tek bir elemana karşılık gelmesi durumunu ifade etmediği görülmüştür. Aşağıda eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğu görülen Melih'in fonksiyon kavram bilgisine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Melih: Görüntü kümesindeki elemanları pardon tanım kümesindeki elemanları bir fonksiyon üzerinde hatta nasıl deyim denklem üzerinde karşıdaki görüntü kümesinde elemanların oluşmasıdır yani oluşturacak şekilde yapılan bir mekanizma gibi bir şey.

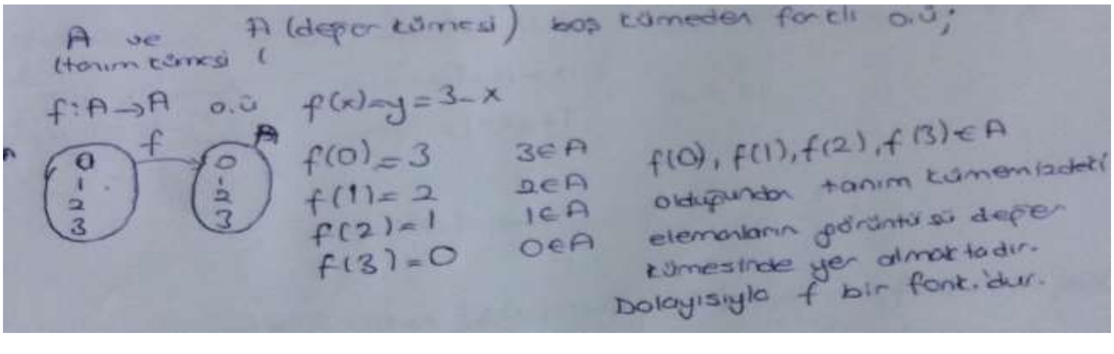
Sevgi ve Melih'in dışında diğer katılımcılar (Ayşe, Betül, Selda ve Can) doğru fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Ayşe'nin fonksiyon kavram bilgisine ilişkin bir alıntı verilmiştir.

> Ayşe: Hangi kümeden hangi kümeyeyse fonksiyon, o ilk küme dediğimiz kümenin elemanlarından hiç açıkta eleman kalmayacak. Bütün elemanlar karşıdaki kümeden bir yere gidecek ama sadece bir elemana gidecekler.

Doğru olmayan fonksiyon kavram bilgisini kullanarak Sevgi ve eksik kavram bilgisini kullanarak Melih de dahil olmak üzere tüm katılımcılar verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği doğru hipotezini ortaya atmışlardır. Ancak katılımcıların doğru hipotezi ortaya atmaları üzerine tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{l} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız."*

sorusunda yalnızca Betül ve Can tüketerek ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanmış ve fonksiyon kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Betül ve Can dışında Sevgi de tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Ancak Sevgi doğru olmayan fonksiyon kavram bilgisi nedeniyle ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Aşağıda Sevgi'nin tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.44. *Sevgi'nin tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Alıntıdan da görüldüğü gibi Sevgi fonksiyon kavram bilgisi doğru olmamasına rağmen tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ve kendi kavram bilgisini kullanarak bir ispat yapmıştır. Ayrıca Sevgi yaptıklarını bir ispat olarak da değerlendirmiştir. Aşağıda Sevgi'nin yaptıklarını değerlendirmesine ilişkin bir alıntı verilmiştir.

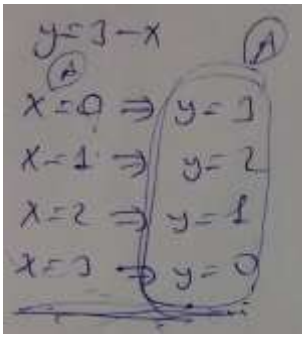
Görüşmeci: Peki o zaman bu yaptığın bir ispat mıdır?

Sevgi: Galiba öyle evet

Görüşmeci: Emin misin?

Sevgi: Yani, evet ispattır.

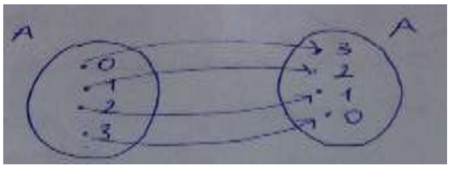
Tüketerek ispat yöntemini seçen ve fonksiyon kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak başarılı bir şekilde ispat yapan Betül ve Can'dan Can'ın ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve yaptığını bir ispat olarak değerlendirmesine ilişkin görüşmesinden alıntılar aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.45. *Can'ın tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Can: Hani tanımı baz aldığımda ben herhangi bir aykırı bir durum bulmadım. Tüm elemanlar bir elemanla eşleşti farklı elemanla eşleşti, bütün elemanlar eşleşti. Bunu gösterdiğim zaman ben bunu ispatladığımı düşünüyorum, fonksiyon olduğunu ispatladığımı düşünüyorum. Tanımı uyguladığımı düşünüyorum.

Geriye kalan üç katılımcıdan Ayşe, Selda ve Melih fonksiyon kavram bilgisine sahip oldukları ancak tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıkları görülmüştür. Ayşe verilen eşitliğin fonksiyon belirttiğini ifade etmesine rağmen fonksiyon kavramını tam olarak tanımlayamadığını ve nasıl bir ispat yapacağını bilmediğini ifade etmiştir. İlk önce verilen kümelerin venn şemasını ve elemanlar arası eşleşmeleri gösteren Ayşe bu yaptığının ispat olmadığını değerlendirmiş ancak başka bir ispatlama girişiminde bulunmamıştır. Aşağıda Ayşe'nin tüketerek ispata ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.46. *Ece'nin tüketerek ispat yöntemini kullanması beklendiği sorudaki çözümü*

Ece: Fonksiyon belirttiğini ispatlayınız. Ama ben fonksiyon belirttiğini söyledim, nasıl ispatlayabilirim. Kümeleri çizebilirim şu şekilde daha basit düşünüyorum sanırım.

Görüşmeci: Neden öyle dedin?

Ece: Yani görsel olarak düşünüyorum tanımsal değil de yani gözümde canlandığı şekilde. Elemanları yazarım sonra tekrar A kümesini yazarım, eşleştirme dediğimde hani şu şekilde düşünürüm. Buradaki her eleman bir elemana gittiği için ve burada hiç eleman açığı olmadığı için fonksiyondur diyebilirim fonksiyonun tanımı gereği hani tanımlayamadığım fonksiyonun gereği.

Görüşmeci: Peki bu bir ispat olur mu?

Ece: Olmaz sanki.

Görüşmeci: Neden?

Ece: Yani hani ispat daha çok tanıma yönelik olduğu için

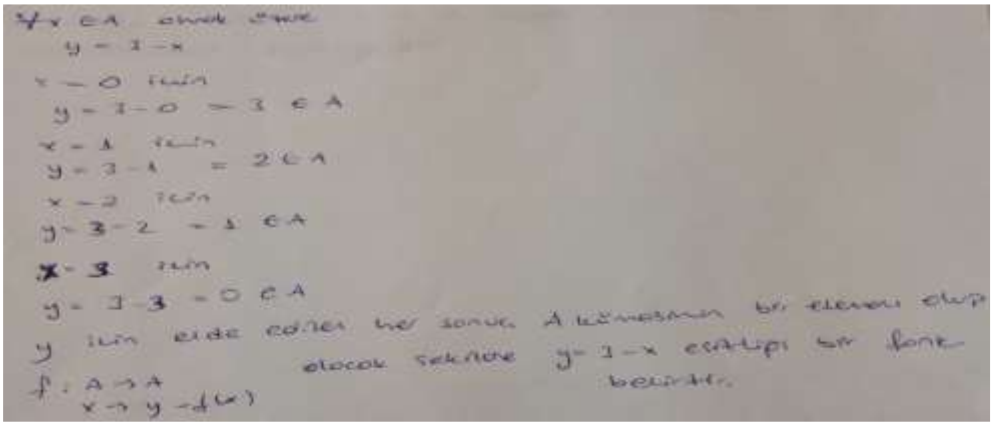
Görüşmeci: Nasıl?

Ece: Yani tanımda söylediğimiz başka bir şekilde tanımdakileri kullanarak hani elde etme olduğu için bende tanım konusunda eksik olduğum için olmadığını düşünüyorum.

Görüşmeci: Bu yaptıklarınla senin az önce ifade ettiğin fonksiyon olma şartları arasında nasıl bir ilişki var?

Ece: Aslında bu söylediklerim tanımda geçiyor ama hani tam cümle olarak ifade edemiyorum.

Selda da verilen eşitliğin fonksiyon belirttiğini ifade etmesine rağmen yaptıklarının matematiksel olmadığını kendisine göre bir ispat olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda Selda'nın tüketerek ispata ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden bir kesit sunulmuştur.



Görsel 3.47. *Selda'nın tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

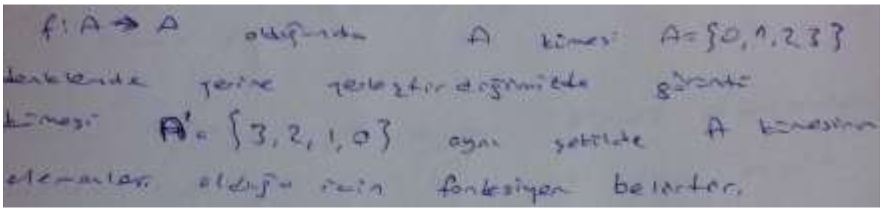
Görüşmeci: Hıı, tamam bu bir ispat mıdır?

Selda: Bence değil ama

Görüşmeci: Neden?

Selda: Aslında ispat yani aksini iddia efden bir durum yok. Kime göre ispat gerçekten şu an evet bana göre ispat. Bununla ikna olurum ama çok matematiksel böyle mi hani tam anlamıyla doğru mu zannetmiyorum çok doğru yazdığımı, bence bir ispat.

Melih'in ise yaptığının derslerdeki yaptıkları ispatlara benzemediğini bu nedenle bir ispat olmadığını değerlendirdiği görülmüştür. Aşağıda Melih'in tüketerek ispata ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.


$f: A \to A$ olduğunda A kümesi $A=\{0,1,2,3\}$ denklemde yerine yerleştirdiğimizde görüntü kümesi $A'=\{3,2,1,0\}$ aynı şekilde A kümesinin elemanları olduğu için fonksiyon belirtir.

Görsel 3.48. *Melih'in tüketerek ispat yöntemini kullanması beklendiği sorudaki çözümü*

Melih: Karışmasın diye 3, 2, 1, 0 buna da A diyeyim. Şöyle A kümesi olduğu için yani hocam bu şeyde denklemde yerine yerleştirdiğimizde 0, 1, 2, 3'ün dışında nasıl diyeyim bu görüntü kümesine 4, 5, 6, 7 daha farklı sayılar. Yani A kümesinin elemanı olmayan sayılar olmadığı için yani bu denkleme göre mesela bu f A'dan A'ya dediği için o yüzden ben belirtir.

Görüşmeci: Hım bu bir ispat oldu mu?

Melih: Olmadı

Görüşmeci: Neden?

Melih: Çünkü biz bunu yazdığımızda hocalar puan vermezdi.

Görüşmeci: Neden

Melih: Şimdi onda daha farklı şeylerde kullanıyoruz da işte benim bu fonksiyon belirtip belirtmediği aklıma gelmedi o yüzden yani o konu.

Görüşmeci: Ne aklına gelmedi?

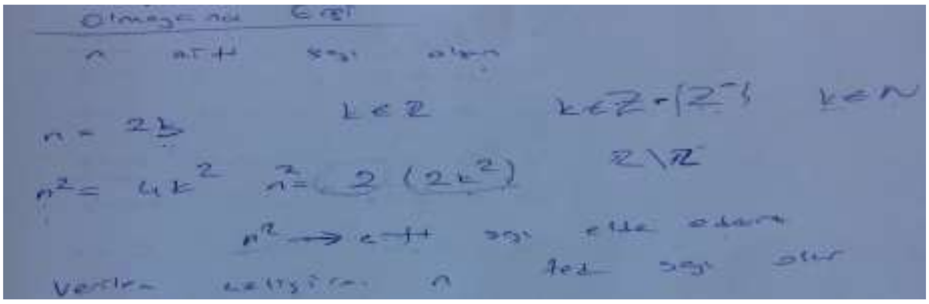
Melih: Şey fonksiyon belirtip belirtmediği, o konuda nasıl yaptıklarımız.

Görüşmeci: Hım anladım onları mı hatırlamaya çalışıyorsun şu anda?

Melih: Aynen

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Melih fonksiyon olma durumunu ispatlamak için derste yaptıklarını hatırlamaya çalışmış, kendi yaptığı derslerde yaptıklarından farklı olduğu için yaptığını bir ispat olarak değerlendirmemiştir. Bu üç katılımcının da (Ayşe, Selda ve Melih) verilen eşitliğin ispatının daha farklı bir şekilde yapılması gerektiğini belirtmeleri, katılımcıların tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarına işaret etmektedir.

Katılımcıların zorlandığı bir diğer ispatlama sorusu ise “*n bir doğal sayı olmak üzere* n^2 *tek sayı ise n tek sayıdır.*” önermesinin ispatının istendiği soru olmuştur. Verilen önermenin ispatı için katılımcılardan hiçbiri önermenin mantıksal yapısına uygun olan ispat yöntemlerinden biri olan karşıt ters ispat yöntemini kullanmayı seçmemiştir. Yapılan yönlendirmelere rağmen katılımcılar karşıt ters ispat yöntemini seçmemiş yalnızca iki katılımcı (Melih ve Betül) bu önermenin ispatı için uygun ispat yöntemlerinden biri olan olmayana ergi ispat yöntemini seçerek tek ve çift doğal sayı kavram bilgisini de doğru kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Aşağıda bu katılımcılardan Melih’in karşıt ters ispat yöntemi kullanmasının beklendiği önermeyi olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak ispatlamasına ilişkin görüşme kağıdında bir alıntı verilmiştir.



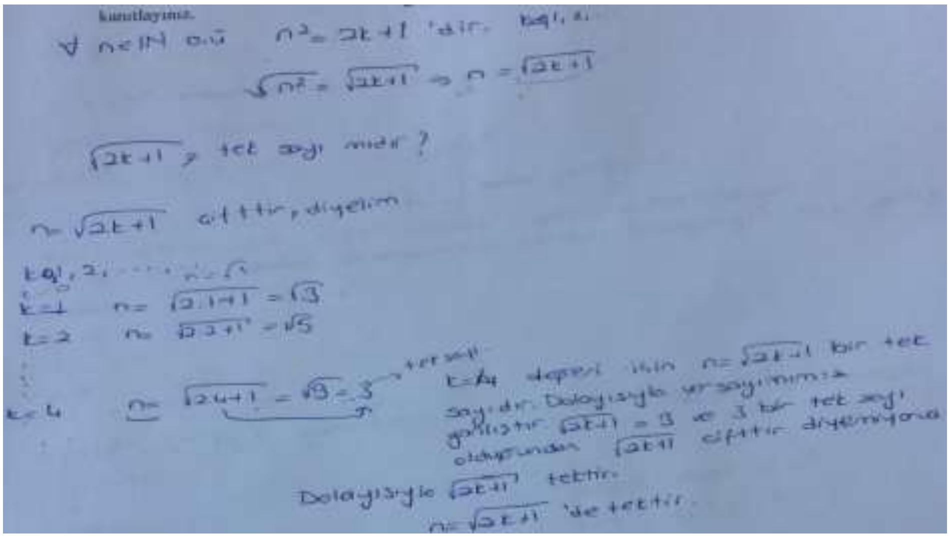
Görsel 3.49. *Melih’in karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak ispatı*

Melih görüşme esnasında k değişkenini önce tamsayı olarak almış sonra n’nin doğal sayı olduğunu fark ederek k’yı doğal sayı olarak almıştır. Aşağıda bu duruma ilişkin Melih’in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Bunun tam sayı olduğunu nasıl söylüyorsun?
>
> Melih: Onu da ya şurada demiştim ya k∈Z’den şey negatif tamsayıları çıkardım.
>
> Görüşmeci: Hım neden öyle yazdın?
>
> Melih: Çünkü doğal sayı hatta onu tam sayı değil de n bir doğal sayı olmak üzere diyor k’ya doğal sayı da diyebiliriz
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Melih: Zaten doğal sayılar sıfırdan başlıyor 1, 2, 3 devam ediyor. Ben burada tam sayılardan negatif tam sayıları çıkardığımda zaten yine doğal sayıları elde ederim, o yüzden yani direk k∈N diyebiliriz.

Geriye kalan dört katılımcı ise tek ve çift doğal sayı kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Ancak katılımcıların önermenin mantıksal yapısına uygun ispat yöntemlerini seçemedikleri görülmüştür. Katılımcılardan Sevgi verilen önermenin ispatlama sürecinde olmayana ergi ve aksine örnek verme ispat yöntemlerini karıştırmıştır. Ayşe hükmü kabul ederek hipotezi göstermeye çalışmış ve yönlendirme ile hatasını anlamasına rağmen bir ispat yapmamıştır. Selda doğrudan ispat yöntemini seçmiş ancak yönlendirmeye rağmen hatasını fark etmemiş, Can ise herhangi bir ispat yöntemi seçmemiş ve ispatlama sürecinde başarılı olamamıştır.

Sevgi doğal sayı ve tek ve çift tamsayı kavram bilgisine sahip olduğunu yansıtmış ve önce olmayana ergi ispat yöntemini kullandığı görülmüştür. Ancak bunu yaparken önce hipotez kısmından başlamış ve n^2'yi tek alarak n'yi buna göre n^2'nin karekökünü alarak seçmiştir. Seçtiği n'nin de tek sayı değil çift sayı olduğunu kabul eden Sevgi, sonra özel değerler vererek aksine bir örnek bulmaya çalışmıştır. Aşağıda Sevgi'nin karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.50. *Sevgi'nin karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Sevgi hem olmayana ergi hem de aksine örnek verme ispat yöntemlerini kullanmıştır. Yaptıklarını bir ispat olarak da değerlendiren Sevgi, yapılan yönlendirmeye karşıt ters ispat yöntemini kullanmamıştır. Aşağıda yaptıklarını bir ispat olarak değerlendiren Sevgi'nin yapılan yönlendirmeye rağmen karşıt ters ispat yöntemini seçmemesine ilişkin görüşmesinden alıntı verilmiştir.

> Sevgi: Böyle dediğimizde yani tüm n'lerin çift olduğunu düşünüyorum varsayıyorum diye başlayıp buraya geldiğimde tüm n'lerin çift olmadığını görüyorum çift değilse tekmiş gibi düşünüyoruz.

Görüşmeci: Bu yaptığın bir ispat mıdır?

Sevgi: İspattır.

…

Görüşmeci: Peki başka şekilde ispat yapabilir misin?

Sevgi: I ıı (hayır anlamında başını sallıyor) ben böyle yaparım yani şu teki tekin tek olmadığını düşünerek yani çifttir deyip tek olduğuna giderdim. Yani yanlışlayan bir örnek bulup tek olduğuna giderdim.

…

Görüşmeci: Peki bu önermeyi, bu önermeye denk olacak şekilde başka bir şekilde ifade edebilir misin?

Sevgi: Tek sayı ise n tek sayıdır yani p ise q'yu şey $p' \vee q$ diye yazmamız gerekiyor

Görüşmeci: bu şekilde mi ifade ediyorsun

Sevgi: Yani böyle yazardım ben n yani o zaman ne diyeceğiz n² çift bir sayı ise n tektir tek sayıdır olmuyor

Görüşmeci: Bu araya yazdığın ne?

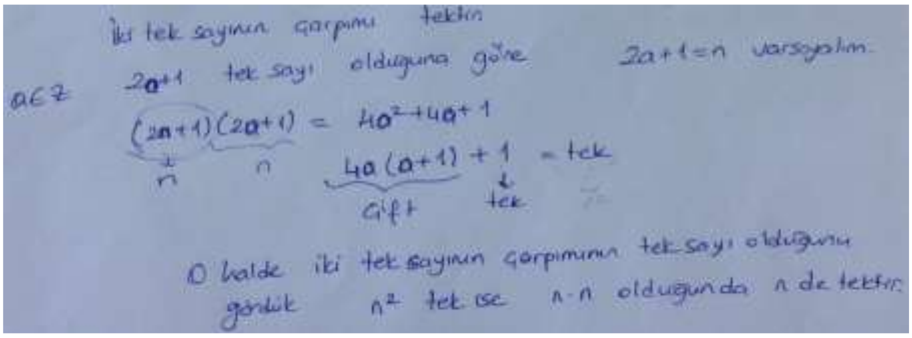
Sevgi: Veya şu veya hani şey deriz ama nasıl diyebilirim n² tek sayı değilse yani n² çift ise n² çift ise o zaman şey çift diyeceğiz n çift sayıdır deriz.

Görüşmeci: Hım, nasıl dedin?

Sevgi: Yani şimdi şunları şuna göre düşünüyorum da veyalı bir şey yazmam gerekiyor yani p'nin değili n²'nin tek olmaması n²'nin çift olması demek q dediğimiz şey de n'nin tek sayı olması

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Sevgi önermeye denk olan önermeyi veya bağlacını kullanarak doğru bir şekilde ifade etmiş ancak önermenin karşıt tersini ifade etmemiştir.

Ayşe ise önermeyi ispatlamak için hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak önermenin mantıksal yapısını yanlış anladığını yansıtmış ve önermenin ispatını doğru bir şekilde yapamamıştır.



Görsel 3.51. *Ece'nin karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Ece: Çünkü n zaten bir tane bir sayı hani buradaki 2a diyeyim ben buna karışmasın. 2a+1 in n'e eşit olduğunu varsaydım. Bu da o zaman n'dir dedim. O zaman sonuç tek ise tek de n^2 ise n de tektir düşüncesini varsaydım ya da hani 2a+1 = n varsayalım da diyebiliriz.

Görüşmeci: Peki sen burada neyi göstermeye çalışıyorsun?

Ece: n'in tek sayı olduğunu

Görüşmeci: Nasıl gösterdin?

Ece: n^2'nin tek sayı olduğunu biliyorum zaten. Bunu bana vermiş soruda. O zaman dedim ki n^2 iki n değerinin çarpımından oluşuyor. Ben tek bir sayının kendisi ile çarpımının tek olduğunu gösterirsem n'in de tek olduğunu göstermiş olurum dedim.

Görüşme sürecinde nasıl ispat yaptığı sorgulanan Ece, yapmış olduğu ispatın verilen önermenin ispatlanması için uygun olmadığını fark etmiş ve hipotezi kabul edip hükmü göstermek yerine tam tersini yaptığını ifade etmiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin Ece'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Önermede sana nasıl demiş ne demiş?

Ece: n bir doğal sayı olmak üzere n^2 tek ise n tek sayıdır. n^2'nin tek sayı olduğunu vermiş, istediği de n'in tek sayı olduğu.

Görüşmeci: Sen onun için ne yaptın burada?

Ece: Ben ters mi yaptım acaba?

Görüşmeci: Ne yaptın onu merak ediyorum.

Ece: Ben n'i tek sayı olarak yani bana verilen n^2 tek sayı ise n tek sayıdır demiş ben n tek sayı ise n^2 tek sayıdıra doğru gittim.

Görüşmeci: Anladım, ne oldu öyle yapınca?

Ece: Tersten düşünmüş oldum.

Görüşmeci: Nasıl?

Ece: Yani bana verilenden istenene gitmedim de istenenden verilene gittim.

Görüşmeci: Anladım, peki yapabilir misin o şekilde ispatı?

Ece: Bu şekilde n tek sayıdır n^2 tek sayı ise hani nasıl yapabilirim, n^2 tek bu da n.n'e eşit, yine aynı şekilde yaparım gibi.

Görüşmeci: Nasıl?

Ece: n^2 tek sayı ise bu da n.n'e eşit, n^2'nin tek olduğunu biliyorum, yani bunlar 2a+1 dersem bunu parçalayamam ki.

Görüşmeci: Neden?

Ece: Çünkü işler karışır.

Görüşmeci: Nasıl karışır?

Ece: 2a+1 dersem neden olmadı. n tek sayıdır, yok olmuyor.

Görüşmeci: Neden olmuyor?

Ece: Ya hani bu taraftan bu tarafa düşünüyorum ama n^2'den n'e gidemiyorum neden bilmiyorum.

Ece'nin başka bir ispat yapamayacağı ve verilen önermeyi başka şekilde ifade edip edemeyeceği de sorgulanmış ancak Ece başka bir ispatlama girişiminde bulunmamıştır.

Görüşmeci: Anladım, peki başka bir şekilde ispat yapabilir misin?

Ece: Yani şuan aklıma başka bir şey yok.

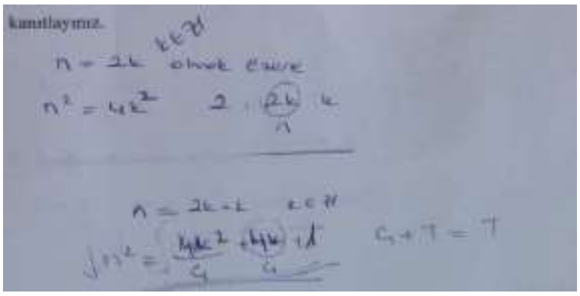
Görüşmeci: Anladım, peki n bir doğal sayı olmak üzere n^2 tek sayı ise n tek sayıdır önermesini bu önermeye denk olacak şekilde başka şekilde ifade edebilir misin?

Ece: Nasıl yani?

Görüşmeci: Yani sana aynı şeyi söyleyecek onu ispatladığında aslında bu önermeyi ispatlamış olacaksın.

Ece: Bir sayının kendisi ile çarpımı tek bir sayı ise o sayının kendisi de tek sayıdır diyebilirim. Bu da hani n yerine sadece bir sayı dememize neden olur farklı bir şekilde.

Selda ise önce karşıt ters ispat yöntemini ve çift tamsayı kavram bilgisini kullanarak önermenin mantıksal yapısını anladığını yansıtmasına rağmen sonrasında hükmü kabul edip hipoteze ulaşmaya çalışarak önermenin mantıksal yapısını anlamadığını göstermiş ve doğru bir şekilde ispat yapamamıştır.



Görsel 3.52. *Selda'nın karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Selda: n = 2k olmak üzere n^2 = 4k'dır. Ve bir dakika. Ben burada şey söylemek istedim. n eğer bir çift sayı olsaydı bunun herhangi bir kuvveti, n^2 olmak zorunda değil n^3 de olabilirdi, herhangi bir kuvveti çift sayı olacaktı. n bir tek sayıysa 2'ye bölünmüyor demektir. Ve hiç bir zaman hiçbir kuvvetiyle de bu ikiye bölünemez. Çünkü 2 tek çift asal sayıdır ve hiç bir çift sayının kuvveti tek olamaz. Bu durumda olmayan ergi yöntemiyle n' i 2k kabul edersek n^2 $4k^2$ olacağından ki bu da çift sayı, çift olmasını gerektirdiğinden dolayı yani 2x2, k x k olduğunu düşünürsek ve bunun da n olduğunu hatırlarsak ne olursa olsun bu elde edeceğimiz n^2 sayısı 2'nin bir katı olacak. O yüzden de çift sayı olacak yani. n, 2k değil. Buradan bunu çıkarıyoruz. Yani n eğer 2k değilse k'dır. Ve k ise tektir. Tekse n'nin herhangi bir kuvveti de tektir. Ya da n' in herhangi bir kuvveti tek ise n tektir.

Görüşmeci: Nasıl?

Selda: Şimdi düşündüğüm n karenin 2k'ya eşitleyip öyle mi, n^2 2k'ya eşitlersem n, √2k olur. n'i 2k kabul ederek $n^{2'}$nin $4k^2$ olduğunu söylersem eğer burada n'i çift kabul ettim. n^2 de çift çıktı ve eğer n^2 tek ise n tek olmak zorunda dedim. Buradan gidemez miyim? Gidebilirim sanki sonuçta yanlış bir şey kabul etmedim. n'i çift kabul ettim ve n^2'nin de çift çıktığını söyledim. n kare tek ise n tektir. n^2'nin tek olması demek sonucun 2k olmadığını gösterir ki k elemanıdır Z olmak üzere. n^2 tek ise evet n çift değildir. Peki nedir? Tektir. Bunu nasıl ifade edebilirim? Yazılı olarak nasıl ifade edebilirim? İfade etmem gereken şey tam olarak n eşittir 2k dan yola çıkması gerektiğini farkındayım. Ama tam olarak nasıl düzene sokabilirim. n^2 tek sayı ise n tek sayıdır. n^2 tek ise n çift sayı değildir. n çift sayı ise n^2 tek değildir. n, 2k ise n^2 $4k^2$'dir. Peki n^2 tek sayı ise n'nin tek sayı olması demek 2k + 1 demek. k elemanıdır Z demek. Doğal olarak bunun karesini almam demek. $4k^2 + 4k + 1$ demek. Burası 4'ten kaynaklı her türlü çift çıkacak. 4 den kaynaklı her türlü çift çıkacak yani Z, k' ya ne değer verirsek verelim tam sayılar kümesinden başındaki çarpı 4 ibaresi sebebiyle o sayı her türlü çift çıkacak ve bu +1 değeri onun tek olmasına sebep olacak. Yani, çift + tek = tek, evet.

Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?

Selda: Eğer daha düzgün ifade edersem bir ispat.

Görüşmeci: Tamam. Peki, burada neyi göstermeye çalıştın?

Selda: Ben burada n'nin tek sayı olduğunu göstermeye çalıştım ve tek sayı olması demek 2k + 1 demek. Yani k nasıl bir değer alırsa alsın bu 2 ile çarpıldığında her türlü bir çift sayı elde edilecek ve bir eklendiğinde ki bu bir olmak zorunda değil 3 ya da 5 de olabilirdi. Çift ile tek sayının toplamının tek olduğundan yola çıkarak n'nin 2k + 1 olması durumunda bunun karesinin $4k^2 + 4k + 1$ olduğunu gösterdim. Ve bu $4k^2 + 4k$ her ikisi de k'nın herhangi bir değeri için çift sonuç verecek. Çift + çift + tek tek sonuç verecek. Haliyle sonuç tek olacak. Önerme doğru olacak.

Selda'nın verilen önermeye denk önerme yazması istendiğinde ise mantık bilgisinde hatalar olduğu görülmüştür. Aşağıda bu duruma ilişkin Selda'nın görüşmesinden alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: n^2 tek sayı ise n tek sayıdır. Bu önermeyi başka şekilde ifade edebilir misin? Aynı şey yani, birbirinin dengi eşdeğeri olacak şekilde başka bir önerme ifade edebilir misin?

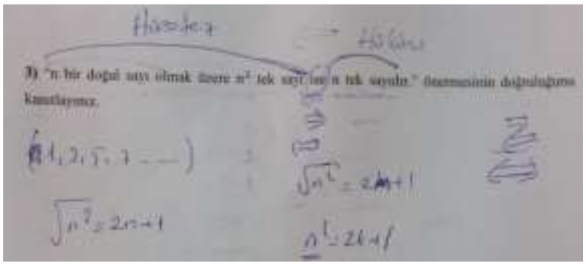
Selda: n tek sayı iken n2'nin de tek olduğunu ifade edebilirim. Ya da n çift iken n^2'nin de çift olmak zorunda olduğunu, n^2'nin çift iken n'nin çift çıkacağını, n^2'nin çift iken n'nin asla tek çıkamayacağı.

Görüşmeci: Bunlar eşdeğer önermeler mi, bu dediklerin?

Selda: Evet

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Selda önermenin karşıt tersi ile tersini birbirine denk olarak almıştır. Selda hem karşıt ters ispat yöntemini kullanarak bir ispat yapmış hem de hükmü kabul edip hipotezi göstererek hatalı bir ispat yapmıştır.

Can ise önermenin hipotez ve hüküm kısmını ifade ederek önermenin mantıksal yapısını anladığını göstermiş ancak önermenin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini seçmiştir. Doğrudan ispat yöntemini kullanamayacağını fark eden Can önermenin ispatını yapmamıştır. Aşağıda Can'ın önermenin yapısına ilişkin ve

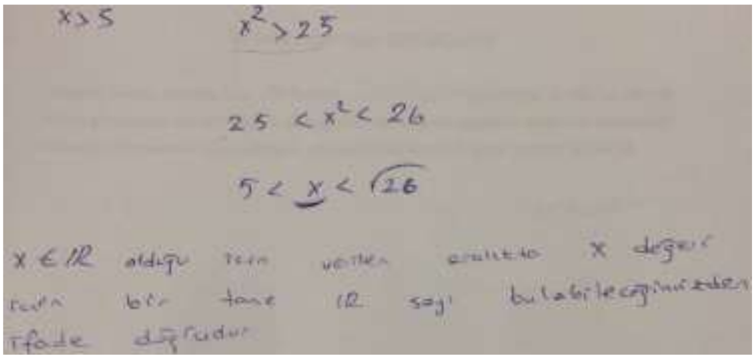


Görsel 3.53. *Can'ın karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Can: Doğruluğunu ispatlayınız. n bir doğal sayı olacak n^2 tek sayı ise n tek sayı, şuan aklıma bir şey gelmiyor hani düşünüyorum mesela n^2'nin tek sayı olduğu durumları düşünüyorum. Mesela 25 veya 9; 5, 1 kareköklerinin hepsi tek sayı. Ama bunun doğruluğunu nasıl ispatlayacağız. Bir fikrim $\sqrt{n^2}$'nin 2k+1 şeklinde bir sayı olması lazım. Yalnız $\sqrt{n^2}$ 2k+1 şeklinde bir sayı $\sqrt{n^2}$ nin de 2m+1 bir sayı olması lazım daha doğrusu öyle olduğunu göstermem lazım. Şu an aklıma bir şey gelmiyor n bir doğal sayı hani sayılar aklıma geliyor. n^2'nin tek sayı olduğu durumlarda n'in tek olduğunu düşünüyorum. Ama bunun doğruluğunu nasıl ispatlayacağımız konusunda hani pek bir şey gelmiyor aklıma.
>
> Görüşmeci: Peki sen burada neyi göstermeye çalışıyorsun?
>
> Can: Hani tek sayılar 2k+1 şeklinde gösteriliyor hani n^2 2k+1 şeklinde bir sayıymış, hipotez kısmında öyle diyor. n de tek sayıdır diyor, kök n^2 den 2k+1 şeklindedir ya da 2m+1, tek sayıdır. Soruyu biraz bu şekle dönüştürmeye çalışıyorum ama devamı aklıma gelmiyor. Ne yapabileceğim nasıl bir yoldan gidebileceğim aklıma gelmiyor.

Varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Bir* $x > 5$ *reel sayısı vardır öyle ki* $x^2 < 26$*'dır.*" önermesini ise altı katılımcıdan Melih herhangi bir yönlendirme olmaksızın Selda ise yönlendirme ile doğru bir şekilde ispatlamıştır. Geriye kalan dört katılımcı ise önermenin ispatını yapamamıştır. Bu dört katılımcılardan üçü (Sevgi, Betül ve Can) önermenin mantıksal yapısını anlamadığını göstermiş, bir katılımcı da (Ayşe) önermenin mantıksal yapısını anladığını göstermesine rağmen reel sayı kavram bilgisini kullanamayarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır.

İspatlama sürecinde başarılı olan iki katılımcıdan biri olan Melih, önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını göstermiş, varlık ispat yöntemini seçmiş, reel sayı kavram bilgisini ve işlemsel bilgisini kullanarak önermeyi doğru bir şekilde ispatlamıştır. Melih'in ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.54. *Melih'in varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

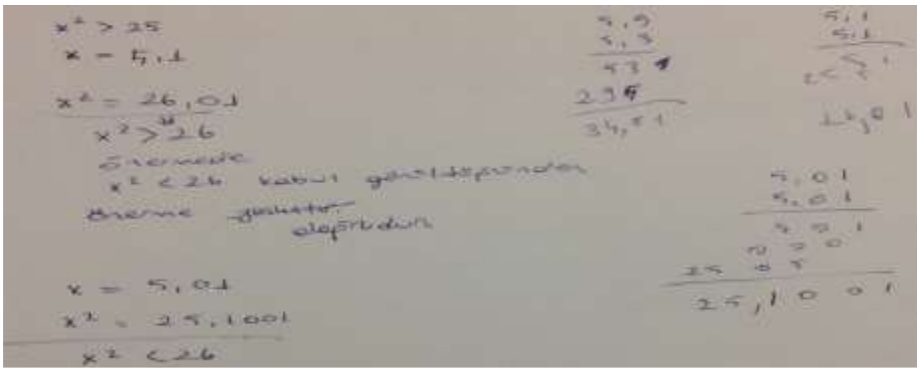
Görüşmeci: Ne düşünüyorsun?

Melih: Ne düşünüyorum, x∈R olduğu için bence ispattır ya.

Görüşmeci: Neden?

Melih: Çünkü x'in aralığını buldum, aralıkta x'in aralığında yani x 5 ile √26 arasında olduğu için, verilen ifade de reel sayı dediği için bize o x 5 ile √26 arasında herhangi bir tane reel sayı olabilir. Yani bu reel sayıyı da bulabileceğimiz için ifademiz doğrudur. İspatlamış oluruz.

Selda ise önce önermenin mantıksal yapısına dikkat etmeksizin önermenin yanlış olduğunu ifade etmiş ancak önermenin yapısı sorgulandığında önermenin yapısına uygun ispat yöntemi olan varlık ispat yöntemini ve reel sayı kavram bilgisini kullanarak doğru bir şekilde ispat yapmıştır. Aşağıda Selda'nın varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı verilmiştir.

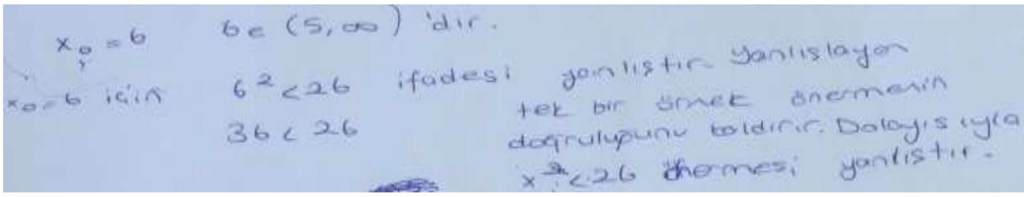


Görsel 3.55. *Selda'nın varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Selda önce önermenin mantıksal yapısına dikkat etmeyerek eşitsizliği sağlamayan bir reel sayı bulduğunda önermenin yanlış olduğunu ifade etmiş, sonra görüşmecinin önermenin yapısını sorgulamasının ardından önermedeki varlık niceleyicisine dikkat ederek önermeyi sağlayan bir reel sayı bulmuş ve ispatlama sürecin başarıyla tamamlamıştır. Aşağıda görüşmeci tarafından önermenin mantıksal yapısının sorgulanmasına ve Selda'nın varlık ispatına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Peki önermedeki "bir" kelimesi ne anlama geliyor?
>
> Selda: Göz ardı ettiğim bir durum o. Bir $x > 5$ reel sayısı vardır öyle ki $x^2 < 26$ diyor. Yani tüm x'in 5'ten büyük olma ihtimalleri değil de tek bir durumun var olabileceği ihtimalini sunuyor ki benim kesinlikle göz ardı ettiğim bir ihtimal. Her x 5'ten büyükken reel sayı vardır işte $x^2 < 26$ demiyor bana. Bir tane yani en az bir tane vardır diyor ve doğru en az bir tane vardır aslında. Bu önerme doğru, yanlış değil doğru.
>
> Görüşmeci: Sen az önce ne düşünmüştün?
>
> Selda: Ben her $x > 5$ reel sayısı için işlemlerimi yaptım ve her x için bunun sağlanmadığını gördüm. Ama o zaten her x için bunu iddia etmiyor. Şu an bunu fark ettim evet.
>
> Görüşmeci: Bu durumda ne diyorsun?
>
> Selda: Önerme doğrudur. Bu önerme doğrudur.
>
> Görüşmeci: Nasıl ispatlarsın?
>
> Selda: x'in 5,01 yani 5'in yakın komşuluğu olma durumunda x^2'nin 25,1001 olduğunu buldum işlemlerim sonucunda, eğer yanlış değilse ve elde ettiğim bu sonuç x^2'nin 26'dan küçük olduğunu kabul gören bir sonuç olmuştur ve o yüzden bu önerme doğrudur.
>
> Görüşmeci: Peki bu bir ispat oldu mu?
>
> Selda: Evet bu bir ispat. Yani doğru olduğunu gösteriyorum şu an. Herhangi bir, bir değer için doğru yani en azından ve zaten önerme de daha fazlasını iddia etmiyor.

Önermenin mantıksal yapısını anlamadığını gösteren üç katılımcı (Sevgi, Betül ve Can) yapılan yönlendirmelere rağmen ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. Sevgi önermede varlık niceleyicisi kullanıldığını anlamadığını göstermiştir. Önermede evrensel niceleyici kullanıldığını düşündüğü görülen Sevgi, önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bularak (aksine örnek) önermenin yanlış olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda Sevgi'nin varlık ispat yöntemi kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve önermenin mantıksal yapısının sorgulanmasına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.56. *Sevgi'nin varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Peki, önermedeki bir kelimesi ne anlama geliyor?

Sevgi: Oradan hani bir tane değer almamız gerek hain öyle bir sayı var ama zaten şurada ben hepsini ispatladım. O bir sayı da zaten onun içine girmiş olmuyor mu hani bir sayı demiş, bir X > 5 reel sayısı için demiş ama. Zaten ben burada genelleyince bir tanesi için de bunun doğru olduğunu ya da yanlış olduğunu göstermiş oluyorum. Burada kümesel olarak nasıl diyeyim ben şimdi burada yanlışladım ya bu ifade yanlıştır dedim. Bu ifade yanlışsa x>5 için yanlış ama x≤ 5 için doğru mesela diğer tüm şeyler için doğru, bir tanesi de zaten onun içine giriyor. Genel olarak doğrulayıp ya da yanlışladığımız zaman "bir" dediğinin bence önemi yok yani.

Görüşmeci: Neden önemi yok?

Sevgi: Çünkü hani bir tane almışsın reel sayısı varmış ya şimdi düşünüyorum şurası "bir" deyince 5,01 oluyor ya da 5,1 olsa o zaman belki doğru olacak.

Görüşmeci: Olursa ne olur?

Sevgi: O zaman bu ifade doğru olacak mesela 5,0001 onun için doğru mesela, o zaman doğru olabilir hani şu an karesini alamıyorum ama

Görüşmeci: O zaman ne olur bulabilsen?

Sevgi: O zaman bulabilsem bu ifade yanlış değil doğru olur. Şey "bir" demesi o yüzden önemli burada. Çünkü hani ben buradan bir tane alırım, öyle bir işte o dediğimiz sayıyı alırım ki o bunu doğrular. Ama şimdi "bir" diyor. Ben oradan şunu da alabilirim, bu da var bu kümenin içinde. O zaman bu yine doğru değildir.

Görüşmeci: Nasıl düşünüyorsun?

Sevgi: Şimdi mesela bir tane diyor tamam bir tane. 5,001 burayı doğruladı mesela. Ama ben buna yine doğru diyemem

Görüşmeci: Neden?

Sevgi: Çünkü 6 da var bu kümenin içinde. Yani ben bunu 5,001 dedim. Başkası gitti 5,1 dedi mesela. Buradan o alınan bir denen sayı hani bir tane diyor ama bu bir tane kime göre neye göre. Bir tane ve bu bir tane denilen bu sayı illa bunu kastetmiyor. Mesela burada hani bir sürü sayı var bunlardan herhangi biri olabilir hani sadece bunun için düşünemeyiz ya da burada bu nasıl yanlış diyorsa bu da sadece doğruladı diye bütün sayılar için doğrulamaz.

Görüşmeden yapılan alıntıdan da görüldüğü gibi Sevgi, varlık niceleyicisi ve dolayısıyla varlık ispat yöntemi bilgisine sahip değildir. Sevgi'nin varlık niceleyicisini evrensel niceleyici olarak değerlendirdiği görülmektedir.

Betül ise varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin yapısını çözmeksizin cebirsel bir takım işlemler yapmış, ancak önermenin ispatını yapmamıştır. Betül'ün verilen önermenin ispatı için yaptıklarına ilişkin görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

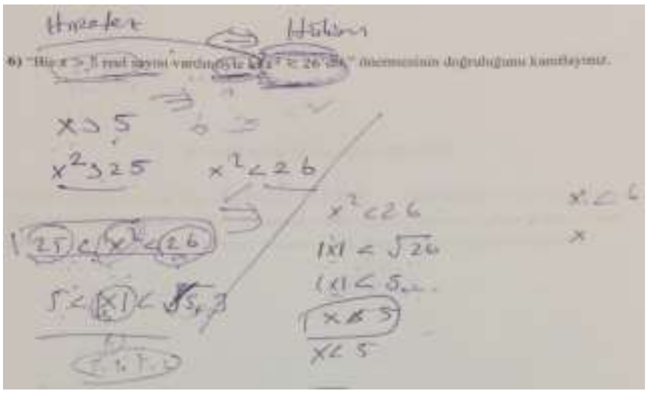
> Betül: Bir $x>5$ reel sayısı vardır, öyle ki $x^2<26$'dır önermesinin doğruluğunu ispatlayınız. Hım doğruluğunu ispatlayınız, şimdi iki tarafında karesini alayım $x>5$, $x^2>25$ yani şimdi 26'da 25'ten büyük. Şuradaki ifadeyi de yazayım $x^2<26$. Buraya yazdığım zaman da 26 x^2 25. x'in en büyük değeri ile ilgili bir şey yok ki ya da en küçük değeri. Tamam, 25'ten büyük olması lazım. Bunu da bu var doğruluğunu ispatlayınız bilmiyorum bunu. $x^2>25$ değerini bulabilirim ama 26'dan küçük olduğunu nasıl ispatlayacağımı bilmiyorum, yani verilen hani şunları yazabilirim bu kadar yani, ama 26'dan küçük olduğunu ı ı ispatlayamam (olumsuz anlamda başını sallıyor).
>
> Görüşmeci: Peki önermede neyi söylüyor sana?
>
> Betül: Yani x^2'nin 26'dan küçük olduğunu söylüyor ki öyle ki gerçekten yani varken $x>5$ reel sayısı varken $x^2<26$'dır diyor. Yok, gelmiyor aklıma.

Görsel 3.57. *Betül'ün varlık ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

Önermenin mantıksal yapısı sorgulandığında ise Betül'ün varlık niceleyicisini anlamlandıramadığı ve neyi ispatlaması gerektiğini ifade edemediği görülmüştür. Önermenin mantıksal yapısının sorgulanmasına ilişkin Betül'ün görüşmesinden alıntı aşağıda verilmiştir.

> Görüşmeci: Orada "bir" demiş, "bir" ne anlama geliyor orada?
>
> Betül: Bir x, bir bir tane x, bir x yani herhangi bir de olabilir bir tane de olabilir bilemedim şu anda. Belirsizlik var aslında ya belirsizlik derken
>
> Görüşmeci: Nasıl?
>
> Betül: Türkçede olur ya bir çocuk geldi falan onun gibi bir şey düşündüm şu anda. Bir çocuk kim olduğu bilinmeyen bir çocuk. Bir x, bilinmeyen bir x sayısı ı ı (başını olumsuz anlamında sağa sola sallıyor)

Can da önermenin mantıksal yapısını anlamadığını ve varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir. Can önermedeki "öyle ki" ifadesini "ancak ve ancak" bağlacı gibi almış ve önermede istendiği şekilde bir reel sayı bulunabileceğini ifade ederek önermenin doğru olduğunu belirtmesine rağmen yaptıklarının bir ispat olmayacağını ifade etmiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin Can'ın görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.58. *Can'ın varlık ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

Can: O sayıyı bulsam böyle bir sayının olduğunu göstermiş olurum ama ispat olmaz

Görüşmeci: Neden?

Can: İspat gibi gelmiyor bana bu şekilde

Görüşmeci: Neden gelmiyor?

Can: Dediğim gibi hani şuna bakarak ben mutlaka bir sayı vardır diyebilirim ama bu ispat değildir (yazdıklarını gösteriyor)

Görüşmeci: Ne olması lazım ispat için?

Can: Bence bunun ispat olması için iki tarafın da birbirini sağlaması lazım.

Görüşmeci: İki taraftan neyi kastediyorsun?

Can: Hipotez ve hüküm kısmını.

Görüşmeci: Hipotez dediğin ne?

Can: Yani bize verilen sonucun kendi, sonucu kendi söylemiş bize $x>5$ reel sayısı vardır demiş öyle ki bu $x>5$ reel sayısı $x^2<26$'yı sağlar. Hipotez kısmı $x>5$ reel sayısı vardır, hüküm kısmı da $x^2<26$. $x>5$ sayısı için hani sağlar, hüküm kısmı burası hipotez kısmı burası. Hani bir de $x^2<26$ için x, 5'ten büyük böyle bir sayı var mı hani iki taraflı da.

Görüşmeci: Peki iki taraflı olduğunu nasıl düşünüyorsun?

Can: Hani öyle ki.

Görüşmeci: Neden?

Can: $x>5$ reel sayısı vardır öyle ki $x^2<26$

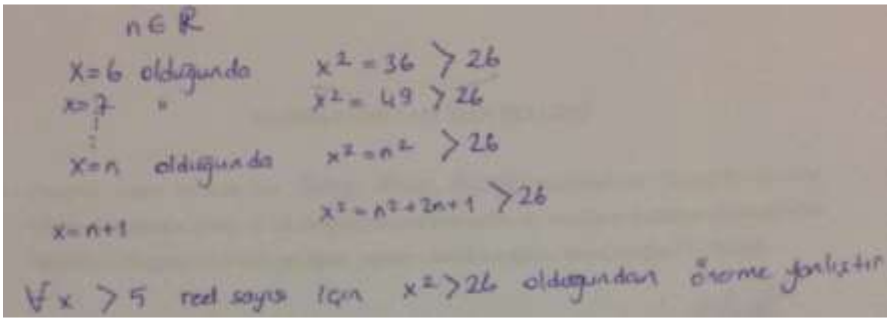
Görüşmeci: Öyle ki ne anlama geliyor orada?

Can: Sanırım ancak ve ancak

Can'ın önermenin ispatı için yaptıkları sorgulandığında önermeyi iki taraflı ispatlamaya çalıştığı görülmüştür. Can $x>5$ kabul ederek $x^2<26$ ifadesini elde ederek bu kısmın doğru olduğunu ancak $x^2<26$ kabul ederek $x>5$ ifadesini elde edemediğini ve önermenin ispatını yapamadığını belirtmiştir. Ayrıca $x>5$ için $x^2<26$ olacak şekilde bir reel sayı bulunabileceğini ancak bu sayıyı bulamadığı için bu kısım için yaptıklarının da bir ispat olamayacağını ifade etmiştir. Aşağıda Can'ın önermenin ispatını nasıl yapmaya çalıştığına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: O zaman bunun ispatı için ne diyorsun, bu önermenin ispatı için?
>
> Can: Bunun gibi çift taraflı bir ispat yapılıyordur illaki ama.
>
> Görüşmeci: Sen ne yaptın?
>
> Can: Ben bir tek taraflı yapmayı denedim $x>5$'in her iki tarafın karesini aldım, x^2 nin 25 ile 26 arasında olduğunu buldum ve böyle bir sayının mutlaka olacağını hani göstermiş oldum. Bir de tersinden gitmeye çalıştım $x^2<26$ iken $x>5$ olur mu diye $x<26$ oluyor buradan mutlak x 5 küsür bir sayı oluyor.
>
> Görüşmeci: O kısım için ne diyorsun?
>
> Can: Tersten olmuyor $x<5$ çıkıyor. Zaten tersten de doğruluğunu ispatlamış olsaydım bunun bir ispat olduğunu düşünürdüm ve sonuçta her iki taraftaki verilenlerden yola çıkarak şey yaptım.
>
> Görüşmeci: Peki şu anda yaptığın ne oldu?
>
> Can: Hani şu an tek taraflı doğru olduğunu göstermiş oldum diyelim ispatlamak değil de.
>
> Görüşmeci: Tek taraf dediğin neresi?
>
> Can: Bu kısım bu tarafa doğru, doğru olduğunu ($x>5$ alıp $x^2<26$ olduğunu gösteriyor)
>
> Görüşmeci: Peki o bir ispat oldu mu o kısım için?
>
> Can: Hani tam bir ispat olmadı.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Can: Hani sadece söyleyebiliyorum buradan itibaren x^2 25 ile 26 arasında. Ama böyle bir x sayısı var mutlaka var. Ama bunu gösteremiyorum işte x sayısını gösteremiyorum. 5 ile 6 işte 5 e yakın bir sayı olduğunu gösteremiyorum.

Varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermede Ece'nin ise varlık niceleyicisinin anlamını vererek önermenin mantıksal yapısını anladığı görülmüştür. Ayrıca Ece $x>5$ için $x^2<26$ olacak şekilde bir reel sayı bulabilse bunun bir ispat olacağını ifade ederek varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Ancak Ece, reel sayı kavram bilgisini kullanamamış ve önermenin ispatını doğru bir şekilde yapamamıştıAyşe önermenin yanlış olduğunu ifade etmiş ve bunun için de 6'dan büyük tüm reel sayılar için $x^2<26$ eşitsizliğinin sağlanmadığını göstermiştir. Yaptıklarının da bir ispat olduğunu değerlendiren Ece'nin varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmasına rağmen reel sayı kavram bilgisini kullanamadığı ve ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamadığı görülmüştür.



Görsel 3.59. *Ece'nin varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Ece: Bu önermeyi aldık, $x = 6$ olduğunda $x^2 = 36$ bu da büyüktür 26. Ama bize $x^2 < 26$ vermiş. Burada 26'dan büyük ama bir tane diyor. Her x reel sayısı için demiyor. Böyle bir x reel sayısının varlığını ispatlarsak önerme doğru olur. Ama öyle bir x reel sayısı yoktur. O zaman bu reel sayının olmadığını ispatlamamız gerekir. 26'dan büyük, 5'ten büyük bir reel sayı var. Karesi 26'dan küçük ama 5'ten büyük hangi reel sayıyı alırsam alayım 26'dan büyük olacak karesi.

Görüşmeci: Nasıl düşünüyorsun?

Ece: Sayıları koyuyorum yerine. Yani başka yapabileceğim bir yol yok gibi. Bir $x > 5$ reel sayısı vardır öyle ki $x^2 < 26$'dır. $x = 6$ olduğunda $x^2 = 36$ oluyor. Yine 26'dan büyük oluyor. Ben bunu devam ettirirsem $x = n$ olduğunda $x^2 = n^2$ olur, $x= n+1$ olduğunda $x^2 = n^2 + 2n+1$ olur. Bunların hepsi 26'dan büyük. Olmaz.

Görüşmeci: Sen neyi göstermeye çalışıyorsun burada?

Ece: Şu an 5'ten büyük reel sayıların hepsinin karesinin 26'dan büyük olduğunu göstermeye çalışıyorum. Eğer bunu gösterirsem hani böyle bir tane bile olsun 26'dan küçük x^2'nin varlığını ispatlamış olurum. Mesela şurada $x = 7$ olduğunda deseydim $x^2 = 49$ olacaktı. Bu da 26'dan büyük olacaktı. Burada x sayılarını büyüterek n'e ve n+1'e kadar giderim. Bunlar da 26'dan büyük olur. O zaman derim ki her $x > 5$ reel sayısı için $x^2 > 26$ olduğundan böyle bir reel sayı yoktur, önerme yanlıştır.

Görüşmeci: Az önce ne dedin bir tane olsaydı dedin 5'ten büyük ve karesi 26'dan küçük

Ece: Önermem doğru olurdu, çünkü bir $x > 5$ reel sayısı diyor.

Görüşmeci: "Bir" ne anlama geliyor orada?

Ece: Yani 5'ten büyük bütün reel sayıların kareleri 26'dan küçüktür demek istemiyor, 5'ten büyük öyle bir sayı vardır ki diyor onun karesi 26'dan küçüktür diyor. Ama ben 5'ten büyük bütün sayıların karesinin 26'dan büyük olduğunu gösterdiğim için öyle bir sayının olmadığını da göstermiş oluyorum.

Görüşmeci: 5'ten büyük tüm reel sayılar dedin. x nasıl bir sayı?

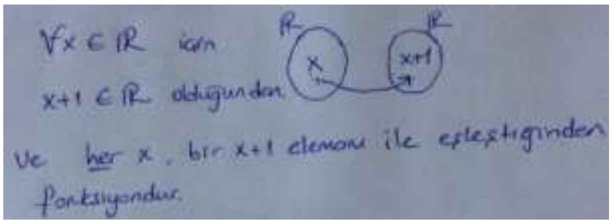
Ece: Reel 5'ten büyük reel bir sayı.

Görüşmeci: Peki, bu ispat oldu mu?

Ece: Evet oldu.

Katılımcıların en çok zorlandıkları ispatlama süreci, doğrudan ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği “$y = x + 1$ *eşitliği* $\begin{array}{l} f: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.*” sorusunda olmuştur. Katılımcılardan üçü (Ece, Sevgi ve Selda) doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermesine rağmen fonksiyon kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanamadığından ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Geriye kalan üç katılımcının (Melih, Betül ve Can) ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtarak ispatlama sürecinde başarılı olmadıkları görülmüştür.

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olan, fonksiyon kavram bilgisi de doğru olan üç katılımcıdan ikisinin (Ece ve Selda), ispatlama süreçlerinde fonksiyon kavram bilgilerini doğru bir şekilde kullanamadıkları görülmüştüAyşe ve Selda, tanım kümesinden alınan elemana karşılık gelen elemanın değer kümesinde olma durumunu değerlendirdikleri ancak bunu ispatlarında göstermeyip sorgulandığında neden değer kümesinde olduğunu sözel olarak ifade ettikleri görülmüştür. Ayrıca iki katılımcı da tanım kümesinden alınan elemana karşılık, değer kümesinden tek bir eleman karşılık gelmesi durumunu yalnızca ifade etmişlerdir. Bu katılımcılardan Ece’nin ispatlama sürecine ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.60. *Ece’nin doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Ece: Yani hani desem ki bu fonksiyon değilmiş gibi düşüyorum o zaman bunu bozan bir eleman olması gerekir diye düşünmem gerekir. Ama bozan bir eleman yok. Eksileri düşünüyorum artıları düşünüyorum. Tabi sonsuz sayı var hani bunu göremem ama x’ler reel sayı ise x+1’ler de reel sayıdır.

Görüşmeci: Neden x+1’ler de reel sayıdır?

Ece: x’lerin 1 fazlası, 1 de reel sayı çünkü. Reel sayılarla reel sayıları toplarsak da yine reel sayıları elde ederiz.

Görüşmeci: Peki bu yaptığın bir ispat oldu mu?

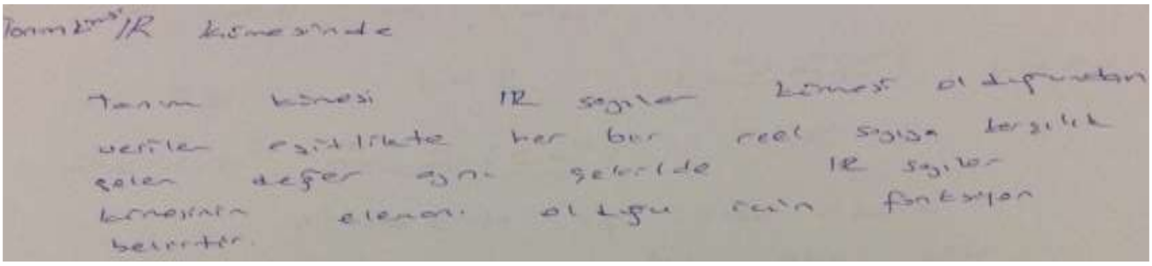
Ece: Tam değil yani hani sözlü olarak belki

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Ece, yaptığının tam olarak bir ispat olmadığını değerlendirmiştir.

Ece ve Selda gibi doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olan ancak fonksiyon kavram bilgisi hatalı olduğu Sevgi de fonksiyon kavram bilgisini kullanırken tanım kümesinden alınan her bir elemana karşılık gelen elemanın değer kümesinde olduğunu göstermiş ancak tanım kümesinden alınan bir elemana yalnız bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmemiştir. Aşağıda bu duruma yönelik Sevgi'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Sevgi: Düşündüğümüz zaman yani ispat yapman için verdiğin her şeyin karşılığının olduğunu göstermen lazım. Bir de x∈R için düşünüyorum bütün x'ler için düşünüyorum burada. Görüntülerde de aynı şekilde R için düşünüyorum bunları zaten. x elemanıdır R olduğunu yazdık. Sonra görüntülerinin neler olduğunu yazıp bunların da R'nin içinde olduğunu gösterdiğimiz zaman zaten hani ispatlamış olduğumuzu düşünüyorum.

Üç katılımcının (Melih, Betül ve Can) ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülmüştür. Bu katılımcılardan biri olan Melih'in ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.


Tanım kümesi IR sayılar kümesi olduğundan
verilen eşitlikte her bir reel sayıya karşılık
gelen değer aynı şekilde IR sayılar
kümesinin elemanı olduğu için fonksiyon
belirtir.

Görsel 3.61. *Melih'in doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

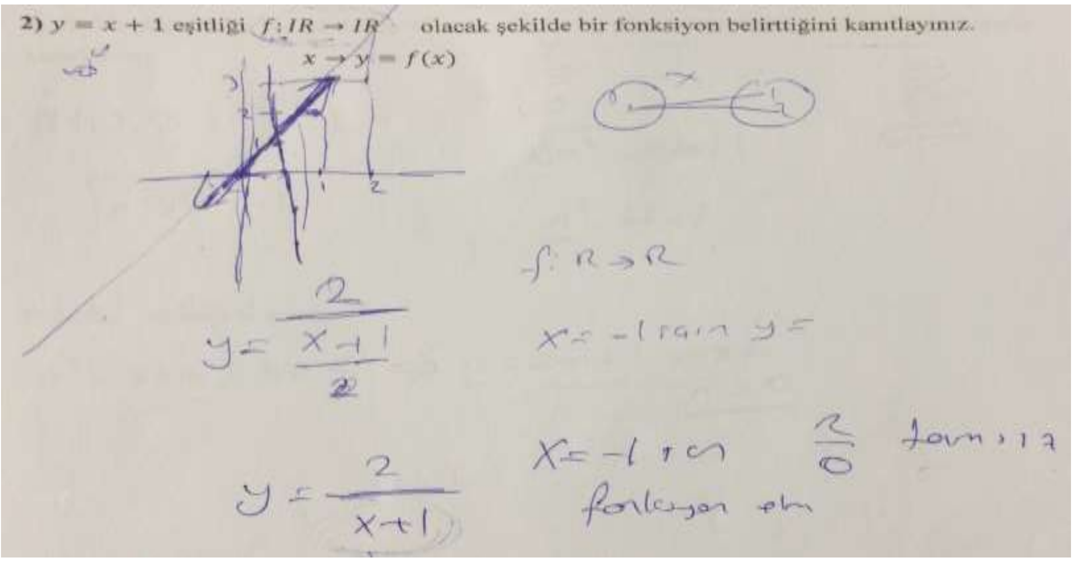
> Görüşmeci: Burada tanım kümesi reel sayılar kümesi olduğunda verilen eşitlikte her bir reel sayıya karşılık gelen demişsin her bir derken orada ne demek istedin?
> Melih: Yani bütün reel sayıları verilen eşitlikte denediğimizde diyorum o yüzden.
> Görüşmeci: Peki bütün reel sayıları denemeyi nasıl düşünüyorsun?
> Melih: İşte verilen eşitlikte mesela birkaç örnek veririm zaten o karşılar yani nasıl diyeyim 0 verdiğimizde 1 çıkıyor, ondan sonra 1 vereyim 2 çıkıyor, negatif vereyim mesela -1 vereyim 0 çıkıyor. Ya böyle denediğimizde mesela daha bu örnekleri çoğaltabiliriz yani böyle olunca ne bileyim bir yana doğru artıyor mesela bir yana doğru azalıyor. O yüzden yani aynı eleman çıkmayacak gibi, o yüzden yani o elde ettiğimiz elemanlar da reel sayı olduğu için o yüzden.
> Görüşmeci: Peki yaptığın bu denemeler yeterli olur mu hepsini söylemek için?
> Melih: Yok olmaz ya çünkü reel sayılar kümesi demiş, yani istisna da olabilir.

Görüşmeci: Onu nasıl düşünüyorsun?

Melih: Ya burada biz zaten fonksiyon belirtip belirtmediğine bakıyoruz, mesela aynı değer çıksa bile daha demin dediğimiz gibi birebir hani örten dediğimiz için öyle fonksiyon da var burada sadece bize mesela fonksiyonu yerine yerleştirdiğimizde reel sayı çıkacak mı ona bakıyoruz.

Yukarıda verilen alıntılardan da görüldüğü gibi Melih her ne kadar ispatında reel sayılar kümesinde alınan tüm elemanları göz önünde bulundurduğunu ifade ederek genelleme yapsa da bunu yaparken reel sayılar kümesinden elemanlar almış ve bu elemanların görüntülerini bularak ispat yapmıştır.

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülen bir diğer katılımcı Can ise önermenin ispatına ilişkin yalnızca grafik çizmiş ve derste gördüğü bilgileri çağırarak tanımsız yapan bir değer olsa fonksiyon belirtmeyeceğini ifade etmiştir. Can her ne kadar grafik çizmesinin bir ispat olmadığını belirtse de önermenin ispatına ilişkin başka bir ispatlama girişiminde bulunmamıştır. Aşağıda Can'ın doğrudan ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermenin ispatına ilişkin yaptıkları ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.62. *Can'ın varlık ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi ispatlamak için yaptıkları*

Görüşmeci: Grafik çizdin ama grafiğin ispat mı olduğunu sorduğumda ne diyorsun?

Can: Ya hani ispat olduğunu düşünmüyorum. Ama fonksiyon belirttiğini gösterdiğimi düşünüyorum.

Görüşmeci: Tamam, ispat yapabilir misin başka bir şekilde?

Can: Eğer ki soru mesela y=(x+1)/2 olsaydı ve f R den R ye olsaydı, hani kuralı bozacak bir mesela x=-1 için y buradan gerçi y buradan 0 çıkar. Bu şekilde değil de y=2/(x+1) mesela bu şekilde fonksiyon olmadığını ispatlayabilirim.

Alıntılardan da görüldüğü gibi Can aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermektedir.

3.1.4. Üçüncü sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçleri

Katılımcılara görüşmelerde sırasıyla tüketerek, doğrudan, karşıt ters, aksine örnek verme, olmayana ergi ve varlık ispat yöntemlerini kullanmalarının beklendiği altı ispatlama sorusu sorulmuştur. Tüm sorularda ispatlama sürecini güçlük yaşamaksızın başarı ile tamamlayan katılımcı olmadığı görülmüştür. Altı katılımcıdan yalnızca ikisi (Nihal ve Emel) ancak yönlendirme ile ya da çeşitli güçlükler yaşasa da genel altı sorudan beşinde ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlayabilmiştir. Bu katılımcıların genel olarak gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip oldukları, ispatlayacakları önermenin mantıksal yapısına göre uygun ispat yöntemini seçtikleri, gerekli kavramsal ve işlemsel bilgiyi kullanarak ispatlama sürecini tamamladıkları görülmüştür.

İspatlama süreçlerinde diğer katılımcılara göre daha başarılı olan bu iki katılımcıdan biri olan Nihal, olmayana ergi ispat yöntemini kullanması beklenen soru haricinde diğer sorulardaki ispatlama süreçlerini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Emel'in ise karşıt ters ispat yöntemi ve olmayana ergi ispat yöntemini kullanması beklenen sorular haricinde diğer sorulardaki ispatlama süreçlerinde başarılı olduğu görülmüştür. Her iki katılımcı da tüketerek, doğrudan, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerini kullanmaları beklenen sorularda ispatlama süreçlerinde başarılı olmuşlardır. Tüketerek ispat yöntemini kullanmaları beklenen soruda Nihal ve Emel'in başarılı bir şekilde ispatlama süreçlerini tamamladıkları görülmüştür. Ancak görüşmede katılımcılara tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önerme doğrudan verilmemiş, katılımcılardan öncelikle verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmaları beklenmiştir. Bu nedenle katılımcılara önce

"$A=\{0,1,2,3\}$ *olmak üzere* $y=3-x$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?"*

sorusu sorularak katılımcıların ispatlama sürecine geçmeden önce bir hipotez ortaya atmak için fonksiyon kavramı bilgilerini kullanma durumları incelenmiştir. Bu soruda hem Nihal hem de Emel fonksiyon kavram bilgisine sahip olduklarını göstererek doğru hipotezi ortaya atmışlardır.

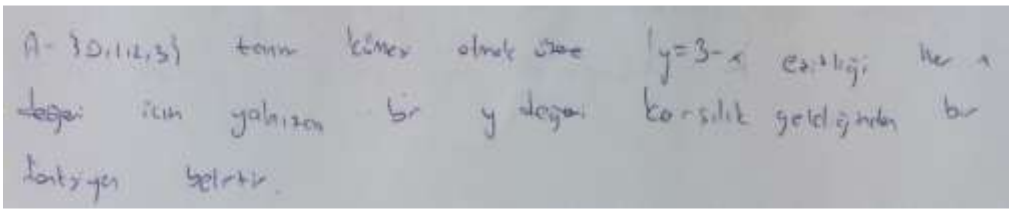
> Emel: Bir küme verilmiş. A kümesi olmak üzere y=3-x eşitliği A'dan A ya olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi demiş, x'ten y'ye gidiyor. Fonksiyon belirtir.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Emel: Bize bir tanım kümesi ve görüntü kümesi vermiş. Bir kural vermiş. Yani bulabiliriz mesela x yerine 0 koyarak, x yerine 1 koyarak, 2 koyarak, 3 koyarak y'nin değerlerini bulabiliriz.
>
> …
>
> Emel: Tanım kümesindeki tüm elemanlar görüntü kümesindeki bir elemanla eşlenmek zorunda. Tanım kümesindeki tüm elemanlar görüntü kümesindeki bir elemana gidiyor o yüzden fonksiyon belirtir.

Daha sonra katılımcılardan ortaya attıkları önermeyi ispatlamaları istenmiştir. Nihal ve Emel doğru hipotezi ortaya attıklarından kendilerine aşağıdaki soru yöneltilmiştir.

"$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{l} f: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız."*

Bu soruda Nihal ve Emel ortaya attıkları hipotezin ispatı için doğrudan ispat yöntemini kullanmayı seçmiş, fonksiyon ve reel sayı kavram bilgilerini de doğru bir şekilde kullanarak ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlamışlardır.

> Emel: Tanım kümesindeki her eleman görüntü kümesine gidiyor yani nasıl belirteyim onu görüntü kümesinde bir eleman gidiyor. Tanım kümesindeki eleman görüntü kümesindeki bir elemana gider diyeyim yani tanım kümesindeki elemanların hepsinin bir görüntüsü olmak zorunda, burada da var zaten, hepsinin görüntüsü var diyeyim (yazıyor).



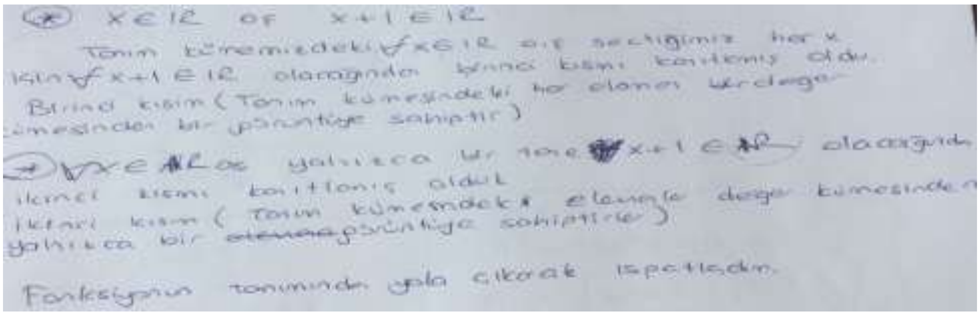
Görsel 3.63. *Nihal'in tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Katılımcılardan doğrudan ispat yöntemini kullanmaları beklenen

"$y = x + 1$ *eşitliği* $\begin{array}{l} f: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.*"

sorusunda ise Nihal ve Emel doğrudan ispat yöntemini kullanmayı seçmiş, fonksiyon kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarıyla tamamlamışlardır.

> Nihal: Reel sayılardan reel sayıya bunun bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız. Şimdi burada tanım kümesi reel sayılar. Yani x yerine koyacağımız sayılar reel sayı ve ben x yerine hangi reel sayıyı koyarsam koyayım bunun 1 ile toplamı da bir reel sayı olacağı için görüntü kümesi. Ve sadece yani her x değeri için yalnızca bir y değeri olacak. Bu yüzden bu bir fonksiyondur (dediklerini yazıyor).



Görsel 3.64. *Emel'in doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Nihal ve Emel'in doğrudan ispatlarına ilişkin yukarıda verilen alıntılarından da görüldüğü gibi hem görüntülerin reel sayı olmasını hem de tanım kümesinden bir elemana tek bir eleman karşılık gelmesini reel sayılar kümesinin özelliğine dayandırdıkları görülmektedir. Başka bir deyişle Nihal ve Emel, tanım kümesinden bir elemana değer kümesinden tek bir eleman karşılık geldiğini göstermek için ayrıca bir ispat yapmamış, bunu reel sayılar kümesinin özelliğine dayanarak ifade etmişlerdir.

Nihal ve Emel aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "Her $x \in IR$ için $x < x^2$'dir." önermesinin doğu olduğunu ya da yanlış olduğunu ispatlamalarının beklendiği soruda önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladıklarını göstererek aksine örnek verme ispat yöntemini seçmiş, bu ispat yöntemini reel sayı kavram bilgisini de kullanarak uygulamış ve ispatlama sürecinde başarılı olmuşladır. Aşağıda Emel'in aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşmesinden bir kesit verilmiştir.

> Emel: Ben bunu mesela tek şeyin varlığıyla ispatlayabilirim. Çünkü 1/2 reel sayıların elemanı olduğu için 1/2 1/4'ten küçük eşit olmadığı için (yazıyor). Dedim ki varsayalım önermemiz doğru olsun. O zaman önerme doğru ise benim seçtiğim her reel sayının kendisi karesinden küçük olacak. 1/2'yi seçtim 1/2, 1/4'ten küçük olmadığından varsayımımız yanlıştır dedim.

Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?

Emel: İspattır

Görüşmeci: Peki burada neyi göstermeye çalıştın?

Emel: Burada önermenin yanlış olduğunu.

Görüşmeci: Nasıl?

Emel: Doğru olsun diyerek.

Görüşmeci: Ne yaptın?

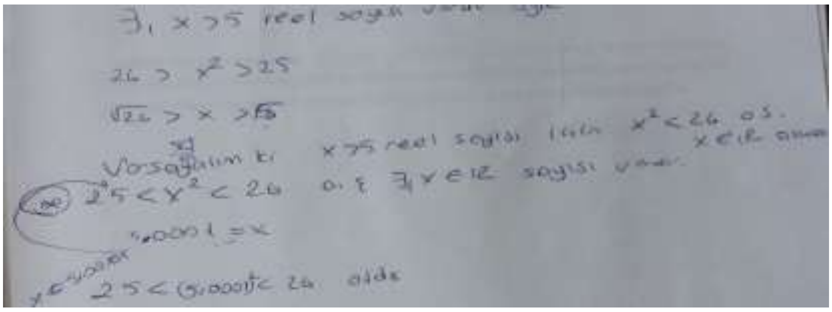
Emel: Doğru olsun dedim doğru olursa hepsi için doğru olması gerekir, ama ben bir tane buldum. O zaman dedim ki 1/2'yi alayım dedim. Ama bunun için yanlış oldu, o yüzden varsayımım yanlış dedim. Varsayımımda doğru olsun dediği için önermemiz yanlıştır.

Varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Bir* $x > 5$ *reel sayısı vardır öyle ki* $x^2 < 26$*'dır.*" önermesini hem Nihal hem de Emel doğru bir şekilde ispatlamıştır. İki katılımcı da önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladıklarını göstererek uygun ispat yöntemini seçmiş, reel sayı kavram bilgilerini ve işlemsel bilgilerini doğru bir şekilde kullanarak ispatlarını yapmışlardır. Nihal ve Emel ispatlama sürecinde önermede belirtildiği şekilde bir sayının var olduğunu cebirsel işlemlerle göstermiş ve önermede verilen koşulları sağlayan bir sayıyı da bulmuşlardır.

Emel: Bir tane x var evet. Hani tüm x'leri alamam. En az bir tane x var demek istiyor. Öyle ki tamam böyle de diyebilirim. Öyle ki x kare küçüktür 26'dır ("∃Ix>5 reel sayısı vardır öyle ki x^2<26'dır." yazıyor) Burada bunu demek istiyor o zaman bu şekilde olur. Bir x derken en az bir demek istiyor. Vardır o da yani doğrudur. Mesela 5,1'i alsak doğru mudur acaba, 5 ile 6 arasında bir şey olacak yani şöyle olacak bu x'im. $\sqrt{26}$ ile $\sqrt{25}$ yani 5 arasında olacak. $\sqrt{26}$'dan küçük hani ne olabilir diye düşünüyorum da 5,1 falan hani o civarlarda bir şey olacak herhalde.

Görüşmeci: Bulabilir misin?

Emel: Bulabilirim.



Görsel 3.65. *Emel'in varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Tüketerek, doğrudan, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerinin kullanılmasının beklendiği sorularda ispatlama süreçlerinde başarılı olan Nihal ve Emel, olmayana ergi ispat yöntemini kullanmaları beklenen soruda ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Nihal görüşme sürecinde olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtmasına rağmen olmayana ergi ispat yöntemini kullanmasının beklendiği ispatlama sorusunda bu ispat yöntemini kullanamamıştır. Başka bir soruda ise Nihal olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu ancak bu yöntemi kullanamadığını aşağıdaki şekilde göstermiştir:

Nihal: Yani şu anda nasıl yapacağımı bilmiyorum ama bu önermenin değilini doğru kabul edip onun yanlışlığını ispatlamak lazım

Görüşmeci: Yapabilir misin?

Nihal: Yapamam galiba.

Görüşmeci: Değilini kabul edeceksin sonra ne yapacaksın?

Nihal: Onun yanlışlığını ispatlayacağım.

Görüşmeci: Sonra ne olacak?

Nihal: Sonra bu önermenin doğruluğu kabul olmuş olacak.

Katılımcılardan olmayana ergi ispat yöntemi bilgisini kullanmalarının beklendiği "*Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur.*" önermesini ispatlamak için Nihal, olmayana ergi ispat yöntemi bilgisini kullanamamış ve herhangi bir ispat yöntemi de seçmeden yalnızca tek ve çift sayı kavram bilgisini kullanarak önermenin doğruluğuna ilişkin gerekçeler sunmuştur. Ayrıca Nihal'in yaptığı bu açıklamaları ispat olarak değerlendirdiği görülmüştür.

Nihal: Bir sayıyı 2'ye böldüğümde hem 0 hem de 1 kalanını veremez. Ya 0 kalanını verecek ya da 1 kalanını verecek 2'ye bölündüğünde. Bu yüzden hem tek hem de çift bir tamsayı yoktur. Yani doğru bir önerme. Evet bu şekilde ispatlayabiliriz galiba.

Görüşmeci: Nasıl?

Nihal: Yani daha sözel olarak. Çift tamsayıların, yani çift sayıların tanımı 2'ye bölündüğünde 0 kalanını vermesi. 2'ye bölündüğünde de 1 kalanını veriyorsa tektir. Bir sayı 2'ye bölündüğünde ya 0 kalanını verecek ya da 1 kalanını verecek. Yani sayı ya tek ya çift olacak. Hem tek hem çift olamaz. Bu şekilde ispatını yapmış oluruz herhalde (yazıyor).

Görüşmeci: Bu bir ispat oldu mu?

Nihal: Oldu.

Görüşmeci: Neyi göstermeye çalıştın burada?

Nihal: Yani hem tek hem çift bir sayı olmadığını.

Görüşmeci: Nasıl?

Nihal: Çünkü bir sayı 2'ye bölündüğünde iki seçenek var kalan için. Ya 0 olacak ya 1 olacak. Eğer 0 olursa çifttir, 1 olursa tektir. Bu şekilde ispatlamış olduk.

Nihal'in başka bir şekilde ispat yapıp yapamayacağı sorgulandığında ise her ne kadar tek ve çift sayıları cebirsel olarak temsil edebilse de başka bir ispat yöntemini kullanma girişiminde bulunmadığı görülmüştür.

Görüşmeci: Peki, başka şekilde ispat yapabilir miydin?

Nihal: Başka şekilde ispat yapamazdım. Hayır yapamazdım. Tek sayıya 2n+1 desek buna 2n desek. Buradan bir şey çıkartamıyorum yani yapamazdım.

Görüşmeci: Nasıl?

Nihal: Yani işte tek sayılara 2n+1 desek çift sayılara da 2n desek, buradan "hem tek hem çift olan bir sayı yoktur"un ispatını çıkartamıyorum.

Emel ise olmayana ergi ispat yönteminin kullanılması beklenen bu soruda, olmayana ergi ispat yöntemi bilgisi ile tek ve çift sayı kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Ancak Emel olmayana ergi ispat yöntemi bilgisini de doğru bir şekilde kullanmasına rağmen, aldığı bir tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olduğunu göstermek için aynı değişkeni kullandığı görülmüştür. Bir tamsayının aynı anda tek ve çift olması durumunu yanlış bir şekilde ifade eden Emel, bu yanlış ifadesine dayanarak çelişkiye ulaşmıştır. Görüşme esnasında yaptığı hatayı fark etmesi için yönlendirme yapılmasına rağmen, Emel yaptığı hatayı fark edememiştir.

Emel: 2n+1, 2n'e eşit olamaz

Görüşmeci: Peki 2n+1'in 2n'e eşit olamayacağını biliyorsan bu sana nasıl ispat yaptığını gösterdi?

Emel: Tanımından

Görüşmeci: 2n+1, 2n'e eşit mi?

Emel: Değil

Görüşmeci: Ama sen bunların eşit olmadığını kullanarak

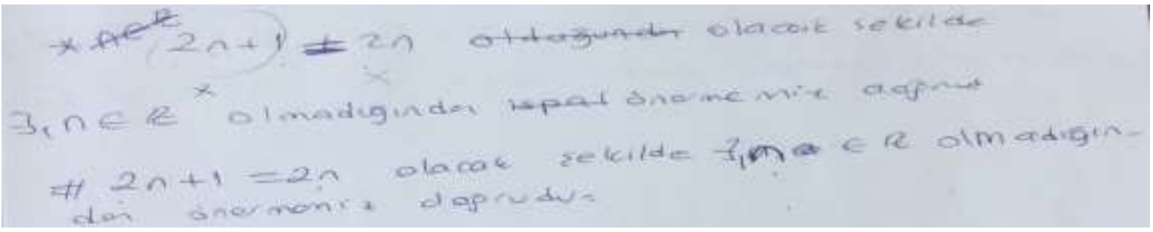
Emel: İspat yaptım evet

Görüşmeci: İspatlamış olduğunu söyledin, olur mu diyorum ben de?

Emel: Olur

…

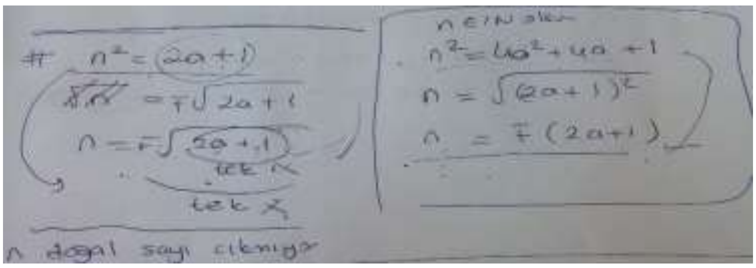
Emel: x demiş oldum aslında ama x değil (2n ve 2n+1'e x diyor), yani aradığım x değil. Aradığım x'in olması için bunun buna eşit olması gerekiyor. Hani x değil ama hani x olarak aldım ben bunu. Bu tek sayıların temsili (2n+1'i gösteriyor) bu da çift sayıların temsili (2n'i gösteriyor). Hiç böyle eşit olacak bir ifade bulamayacağım için önermeyi ispatlamış olabiliriz aslında. Ancak bu şekilde olur, başka türlü gelmiyor aklıma.



$*\ (2n+1) \neq 2n$ olduğundan olacak şekilde
3, $n \in R$ olmadığından ispat önermemiz doğru
$2n+1 = 2n$ olacak şekilde $\in R$ olmadığından önermemiz doğrudur

Görsel 3.66. *Emel'in olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Nihal'den farklı olarak Emel, olmayana ergi ispat yöntemini kullanması beklenen sorunun yanı sıra karşıt ters ispat yöntemini kullanması beklenen soruda da ispatlama sürecinde başarısız olmuştur. Emel, karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği "*n bir doğal sayı olmak üzere* n^2 *tek sayı ise n tek sayıdır.*" önermesinin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini seçmiş, tek ve çift sayı kavram bilgisine sahip olduğunu göstermesine rağmen uygun olmayan ispat yöntemini kullandığı için ispatlama sürecini doğru bir şekilde tamamlayamamıştır. Emel'in ispatlama sürecinde hipotezi kabul ederek hükme ulaşmaya çalıştığı için önermenin mantıksal yapısına dikkat ettiği, ancak bu önermenin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini kullanırken hipotezden hükme geçemeyeceğini yapılan yönlendirmelere rağmen fark etmediği görülmüştür. Emel hipotezden hükme geçişi sağlamak için hükmü elde edecek şekilde hipotez için özel bir ifade tanımlamıştır. Aşağıda Emel'in görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



$n^2 = (2a+1)$
$\sqrt{n^2} = \mp\sqrt{2a+1}$
$n = \mp\sqrt{2a+1}$
tek ✗
tek ✗
n doğal sayı çıkmıyor

$n \in \mathbb{N}$ ola
$n^2 = 4a^2 + 4a + 1$
$n = \sqrt{(2a+1)^2}$
$n = \mp(2a+1)$

Görsel 3.67. *Emel'in karşıt ters ispat yöntemini kullanması beklenen önermeyi doğrudan ispat yöntemini kullanarak ispatlamasına ilişkin görüşme kâğıdından alıntı*

> Görüşmeci: Peki n^2 yi öyle seçebilir misin ("$4a^2 + 4a + 1$" olarak seçmesini gösteriyor)?
>
> Emel: Seçebilirim.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Emel: Yani istediğim bir şeyi seçebilirim ispatlamak için. Hani gösterim olarak sadece bu da bir gösterimdir o da bir gösterimdir. Ben n'nin doğal sayı olması için doğal sayı hani kök

içinden çıkardığımda doğal sayı olabilecek bir şey seçmem gerekiyor o yüzden bunu seçebilirim.

Görüşme esnasında Emel'e önermeyi başka bir şekilde ispatlayıp ispatlayamayacağı ve verilen önermeyi bu önermeye denk olacak şekilde başka bir şekilde ifade edip edemeyeceği sorulmasına rağmen Emel'in karşı ters ispat yöntemi bilgisini çağırmadığı görülmüştür.

Görüşmeci: Tamam. Peki, bu tırnak içindeki önermeyi o önermeye denk olacak şekilde başka bir şekilde ifade edebilir miydin?

Emel: Şunun açılımı neydi onu hatırlamaya çalışıyorum ("$p \Rightarrow q$" yazdı). Şeklinde ifade edebiliriz. Ama karışık bir şekilde yani yine aynı şey olacak zaten de, n^2 tek ise n tek sayıdır. Ya mesela ise hani aradaki şeyleri değiştirmek açısından mesela "ise"yi. Ya sözel olarak hani şimdi n^2 tekse zaten n tektir dedik ama bir şey yapamayabilirim. Ama bu $p \Rightarrow q$'nun açılımı var "veya"lı. Aklıma şimdi gelmedi.

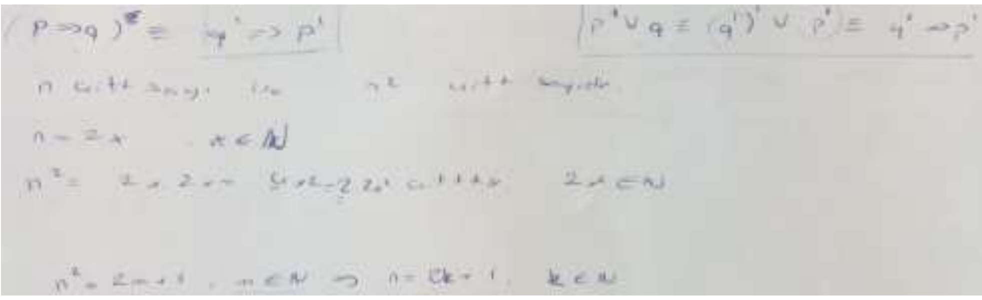
Nihal'in ise üçüncü sınıftaki tüm katılımcıların içinde karşıt ters ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanabilen tek katılımcı olduğu görülmüştür. Nihal, karşıt ters ispat yöntemini, tek ve çift sayı kavram bilgisi ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır.

Nihal: n bir doğal sayı olmak üzere bunu nasıl ispatlarız? n^2'yi tek kabul etsek nasıl yapabilirim? Mesela 2x+1 desem. Karekökünü alınca… Bunun tersini hangi yolla buluyorduk. Mesela bu p ise q, bunun değilini aldığım zaman bu kümenin değili ise p oluyor. p'nin değili oluyordu. Yani bu da n çift sayı ise n^2 çift sayıdır oluyor. Yani aslında kabul ettim bunu. Ben bunu ispatlamak yerine şunu ispatlayabilirim. n çift sayı ise n^2 çift sayıdır. Bunu ispatlarsam bunu da ispatlamış olurum. O zaman yine çift sayı kabul ederim. n= 2x olsun, x elemanıdır N olmak üzere o zaman n^2 yani 2x.2x de $4x^2$ olacak. Bu $4x^2$'de başındaki katsayıdan dolayı çifttir. Bunu ispatladığım için bunu da ispatlamış oldum.

…

Görüşmeci: Tamam. Peki, neyi göstermeye çalıştın burada?

Nihal: Burada n^2 nin tek sayı olması durumunda n'nin tek sayı olduğunu göstermeye çalıştım. Ama gösteremediğim için bu şekilde yaptım



Görsel 3.68. *Nihal'in karşıt ters ispatına ilişkin görüşme kâğıdından alıntı*

Nihal ve Emel haricinde geriye kalan dört katılımcının (Kübra, Hale, Miray ve Ruhi) ise ispatlama süreçlerini tamamlayamadıkları ve çeşitli güçlükler yaşadıkları görülmüştür. Genel olarak bu katılımcılar tüketerek, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerini kullanmaları beklenen sorularda ispatlama süreçlerinde daha başarılı olmuş, ispat yöntemlerinden özellikle doğrudan, karşıt ters ve olmayana ergi ispat yöntemlerini kullanmaları beklenen sorularda ise ispatlama süreçlerinde güçlükler yaşamış ve başarısız olmuşlardır. Bu katılımcılardan dördünün de ispatlama süreçlerinde tüketerek ispat yöntemini başarıyla kullandıkları, dört katılımcıdan üçünün ise ispatlama süreçlerinde aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerini başarıyla kullandıkları görülmüştür.

Bu dört katılımcının da tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğu ve tüketerek ispat yöntemini kullanmaları beklenen sorudaki ispatlama sürecinde bu yöntemi kullanabildikleri görülmüştür. Ancak dört katılımcıdan ikisinin (Kübra ve Hale) fonksiyon kavramı bilgilerinde eksiklik olduğu görülmüştür. Bu katılımcılar tanım kümesinden alınan bir elemana yalnız bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmemiş, yalnızca tanım kümesinden alınan bir elemanın görüntüsünün değer kümesinin bir elemanı olması durumunu araştırmışlardır. Katılımcılardan öncelikle verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmaları beklendiği soruda katılımcılar fonksiyon kavramı bilgilerindeki eksikliğe rağmen doğru hipotezi ortaya atmışlardır. Aşağıda Kübra'nın verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna ilişkin hipotez ortaya atarken fonksiyon kavram bilgisini nasıl kullandığına ilişkin bir alıntı verilmiştir:

> Kübra: Fonksiyon belirttiğini düşündüm, çünkü x'e A kümesinden değerler verdim. x'ten y'ye gitmesi isteniyor. Hepsi A kümesinden olacak şekilde seçtiğimde y'nin değerlerinin de A kümesi içinde olduğunu gördüm. Yani sağlamış oldu, fonksiyon belirtir diye düşündüm.

İki katılımcı da doğru hipotezi ortaya atmasına rağmen verilen bağıntının fonksiyon belirttiğini ispatlamaları istendiğinde fonksiyon kavramı bilgilerindeki eksiklikten dolayı ispatlama süreçlerinde tanım kümesinden alınan bir elemana değer kümesinden yalnız bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmedikleri görülmüştür:

> Kübra: Aynı işlemi düşündüm aslında ispatlamakta da. Çünkü yaptığım işlem aynı zamanda bir ispat. Değer veriyorum (yazıyor). x=0 için y 3 eksi x. 0'dan tekrar 3 oldu. x=1 için, x=2 için (x=2 ve x=3 için de görüntüleri buluyor)
>
> Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?
>
> Kübra: Bana göre ispattır.
>
> Görüşmeci: Neden bana göre dedin?

Kübra: Çünkü zaten sınırlı sayıda elemanımız var. Bunları deneyerek ben bunun ispatını gösterebilirim, çünkü ispat olması için bir tane olmaması yeterli ama şu anda hepsini gösterdim. Tanım kümesi zaten küçük, dört elemanı var onların hepsini gösterdiğim için ispatını yapmış oldum.

Katılımcılar en çok doğrudan, karşıt ters ve olmayana ergi ispat yöntemlerini kullanmaları beklenen sorulardaki ispatlama süreçlerinde zorluk yaşamışlardır. Katılımcıların tümünün doğrudan ispat yöntemini kullanmaları beklenen sorudaki ispatlama sürecinde başarısız olduğu görülmüştür. Dört katılımcı da (Kübra, Hale, Miray ve Ruhi) görüşme esnasında doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduklarını göstermelerine rağmen bu ispat yöntemini ispatlama sürecinde kullanamamıştır. Katılımcılar tanım kümesinin sonsuz elemanlı olması durumunu fark ederek tüketerek ispat yöntemini kullanmaları beklenen sorudaki ispatlama sürecindeki gibi tek tek elemanları bağıntıda yerine koyamayacaklarını ifade etmelerine rağmen yine de ispatlama sürecinde tanım kümesindeki elemanları bağıntıda yerine koydukları ve doğrudan ispat yöntemini kullanamadıkları görülmüştür. Aşağıda Ruhi’nin doğrudan ispatına ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Ruhi: Tanım kümesine bakarsak bayağı geniş bir küme aslında, o yüzden değer vererek yapamayız buradan

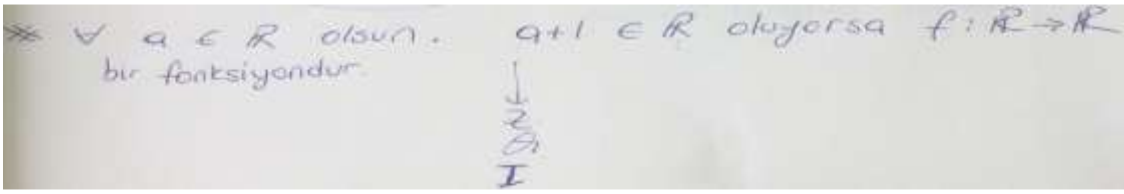
Görüşmeci: Neden?

Ruhi: Çünkü çok örnek var hani sonsuz sayıda örnek olduğu için hepsini tek tek yerine koyup bulmak çok zor bir şey olur hani imkânsız gibi bir şey. Buradan sadece hani akıl yürüterek bulabiliriz, hani bunu bir fonksiyon olarak kabul edersek tanımsız yapan bir değer yok. O yüzden vereceğimiz bütün değerlerde bir görüntü kümesine ulaşabileceğimizi düşünüyorum.

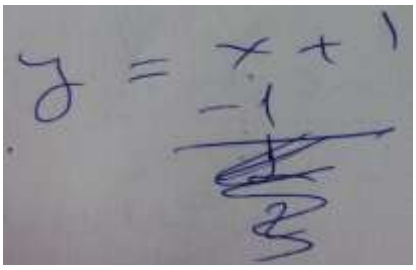
…

Ruhi: Mesela pozitif sayılara bakalım desem x yerine 1 verirsek y=2 çıkıyor, x yerine 2 dersek y’si 3 çıkıyor yani x yerine herhangi bir pozitif n değeri verdiğimiz zaman y=n+1 çıkıyor. Bu durumda hangi değeri verirsek verelim yine pozitif bir değer çıktığını görüyoruz, yani o da reel sayılar içerisindedir.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Ruhi her ne kadar kümenin sonsuz elemanlı olduğunu ifade etse de ispatlarken tanım kümesinden değerler vermiş ve sonra bu değer verme işlemini genelleyerek tanım kümesini temsilen bir n sayısı almasına rağmen tanım kümesinden alınan elemana karşılık gelen elemanın tekliğini vurgulamamıştır. Benzer şekilde Hale ve Miray da tanım kümesindeki elemanlar için bir temsilci seçmelerine rağmen yalnızca temsilciye değerler vermiş ve tanım kümesindeki elemana karşılık tek bir eleman karşılık geldiğini ifade etmemişlerdir.



Görsel 3.69. *Hale'nin doğrudan ispatına ilişkin görüşme kâğıdından alıntı*



Görsel 3.70. *Miray'ın doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Kübra ise tanım kümesindeki elemanlar için bir temsilci de seçmemiş ve sadece tanım kümesinden aldığı iki değer için görüntüleri bulmuştur. Aşağıda Kübra'nın görüşmesinden ve görüşme kağıdından alıntılar verilmiştir.

Görüşmeci: Peki bu yaptığın, değerler verdin bu bir ispat olur mu?

Kübra: Olur ama işim uzar biraz.

Görüşmeci: Nasıl?

Kübra: Yani bu da bir ispattır aslında, bir tane zaten olmayanı bulduğumda fonksiyon belirtmeyecek diyeceğim ama bu şekilde devam ettirdiğimde fonksiyon belirttiğini ispatlayabilirim.

Görüşmeci: Nasıl devam ettirdiğinde?

Kübra: Yani daha çok değerler verebilirim.

Görüşmeci: Nereye kadar verebilirsin?

Kübra: Sonsuz tane verebilirim çünkü reel sayı

Görüşmeci: Peki verebilir misin?

Kübra: Verebilirim, veremem

Görüşmeci: Neden?

Kübra: Ama mantıken düşündüğümde oluyor yani

Görsel 3.71. *Kübra'nın doğrudan ispatına ilişkin görüşme kâğıdından alıntı*

Yukarıda verilen alıntılardan da görüldüğü Kübra tanım kümesinden değerler alarak bu değerlerin reel sayı olup olmadığına bakmıştır. Kübra, tanım kümesini temsilen bir eleman seçmemiş ve tanım kümesine karşılık gelen elemanın tekliğine de vurgu yapmamıştır.

Dört katılımcıdan üçünün (Kübra, Hale ve Ruhi) karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen sorudaki ispatlama sürecinde, önermenin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini kullandığı görülmüştür. Bu katılımcılar hipotezi kabul edip hükmü göstermeye çalışarak önermenin mantıksal yapısına dikkat etmiş, ancak yönlendirme yapılmasına rağmen hipotezden hükme geçemeyeceklerini fark edememişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Hale'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Hale: Mesela $4a^2+4a+1$ tek olduğunu biliyorum değil mi, çünkü burası çift içinde iki var, burası da çift, çift ile çifti toplarsam çift yapar, artı bir, bu da tek. Ben bunun tek olduğunu kabul edeyim, n^2'dir diyeyim. Bunun tek olduğunu kabul edeyim. Sonra bunun $(2a+1)^2$ olduğunu biliyorum, o zaman n'de 2a+1 oluyor. Dolayısıyla burası çift olduğu için çiftle biri toplarsam n'de tek olmuş oluyor.
>
> Görüşmeci: Bu bir ispat oldu mu?
>
> Hale: Oldu bence
>
> …
>
> Görüşmeci: Peki n^2'yi burada sen $4a^2+4a+1$ olarak aldın.
>
> Hale: Evet
>
> Görüşmeci: Niye böyle aldın?
>
> Hale: Niye o da karekökünü aldığımda güzel kareli bir şey çıksın diye aldım.
>
> Görüşmeci: Peki o zaman hepsi için yapmış olacak mısın?
>
> Hale: Ama mesela a doğal sayı dedim ya o zaman a'ya her verdiğim değeri sağlar diye düşündüğüm için aslında.

Bu üç katılımcı Kübra, Hale ve Ruhi'den farklı olarak Miray'ın ise bu sorudaki ispatlama sürecinde doğrudan ispat yöntemini seçmediği, verilen önermenin mantıksal yapısına uygun olan karşıt ters ispat yöntemini kullanmaya çalışmasına rağmen karşıt ters ispat yöntemi ile olmayana ergi ispat yöntemini karıştırdığı görülmüştür. Miray olmayana ergi olarak da adlandırdığı karşıt ters ispat yöntemini uygularken önce önermenin karşıt tersini almış ve elde ettiği önermeyi ispatladığında bu önermenin yanlış olduğunu ve bu nedenle soruda verilen önermenin doğru olduğunu ispatlamış olduğunu ifade etmiştir.

> Miray: n bir doğal sayı olmak üzere n^2 tek sayı ise n tek sayıdır önermesinin doğruluğunu ispatlayınız. Olmayan ergi yöntemiyle yapmaya çalışalım ilk başta onu denemek istedim. n^2 tek sayı ise n tek sayıdır demiş tam tersini söylüyorum n^2 tek sayı ise n çift sayıdır dersem

eğer bu şu şekilde tam tersini n² tek sayı ise n tek sayıdır yerine n çift sayı ise n² tek sayıdır olmayana ergi yöntemi. Bakıyorum bu önermem doğru ise eğer benim bu ispatım yanlış ama bu yanlış ise bu önerme doğru. Şimdi bakıyorum n çift ise n² çift sayı mıdır? n çift ise şunu biliyoruz ki bir çift sayı ile bir çift sayının çarpımı mesela n=2a olsun, 2a.2a=4a'dan 4a daima bir çift sayı belirtir yani n² eşittir bir çift sayı belirtir yani bu önermem benim yanlış. Bu önerme yanlış olduğu için n² tek sayı ise n tek sayıdır önermesi doğrudur.

Miray'ın yaptığı ispat sorgulandığında eski bilgilerini çağırarak ezbere bir şekilde ispat yapmaya çalıştığı görülmüştür.

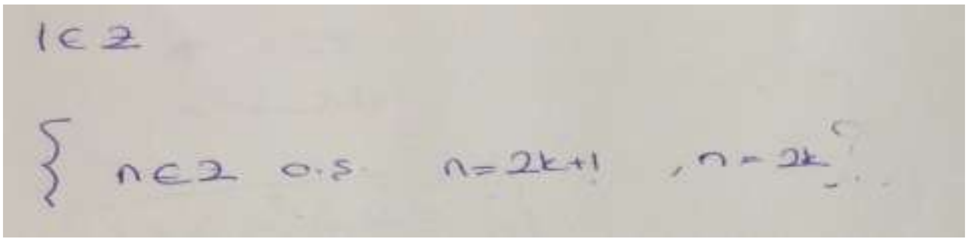
Görüşmeci: Nasıl düşünüyorsun?

Miray: Aklımda oturtturayım. n² tek sayı ise n tek sayıdır diyorum, n çift sayı ise n² tek sayıdır. Şunu tezat olarak n alıyorum, sadece bununla bunu yer değiştiriyorum mantık olarak.

Görüşmeci: Neden öyle yapıyorsun peki?

Miray: Olmayana ergi yönteminin kalıplaşmış mantığını uyguluyorum sanırım şu an sadece. Şuan o şekilde hatırlıyorum.

Katılımcıların olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak ispatlamaları beklenen sorudaki ispatlama sürecinde ise Hale ve Ruhi'nin ispat yöntemini, tek ve çift sayı kavramsal bilgisini ve işlem bilgisini doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamladıkları, Kübra ve Miray'ın ise ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlayamadıkları görülmüştür. Kübra'nın sadece önermenin yapısını doğru bir şekilde çözdüğü ancak aldığı tamsayının tek ve çift olma durumunu aynı değişkenle ifade etme yanılgısına düştüğü ve ispatını tamamlamadığı görülmüştür.



Görsel 3.72. *Kübra'nın olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Miray ise herhangi bir ispat yöntemi seçmemiş, bu sorudaki ispatlama sürecinde yalnızca bir sayının ya tek ya da çift olabileceğine ilişkin açıklama yapmıştır. Ayrıca katılımcının tek sayıları nasıl temsil edeceğini bilmediği de görülmüştür. Miray yaptıklarının bir ispat olmadığını da ifade etmiştir.

Miray: Hem tek hem de çift olan bir tam sayı yoktur. Bir tam sayı mesela çift olabilmesi için n bir çift sayı olsun (yazıyor). n bir tam sayı (yazıyor). n tam sayı ve bir çift sayı olmak üzere diyelim. n=2a diyorum (yazıyor). a eleman reel sayı için, zaten dediğim gibi bir çift sayı zaten çarpılıyorsa herhangi bir sayıyla daima bir çift sayı vereceğinden dolayı n tek sayı olma olasılığı 0'dır. Bu şekilde bir şey yapabilirim ama tekten gidemem yani gidemeyebilirim. Çünkü hani n tek ve tam sayı olsun diyelim, n=a ama a'nın içinde hani iki bulunmadığını tek sayının tanımından biliyoruz. Mantıklı bir açıklamaya dökemeyebilirim ama tam sayı yoktur derken buradan çıkabilir. Mesela n hem tam sayı hem bir çift sayı olmak üzere diyelim, n=2a'da a istediğimiz bir sayı olsun. İster tek ister çift için hiç fark etmez bizim için, buradaki öndeki 2 bana yetiyor, bunu her daim çift yaptığı için bu sayı hem çift hem tek olamaz. Sadece çift olabilir derim.

Görüşmeci: Peki bu yaptığın bir ispat oldu mu?

Miray: Bence yine oldu ama yine dediğim gibi bence diyorum hep. Bence terimini kullanmamın sebebi mantığıma yatkın bir ispat oluyor ancak sistemli bir ispat olmadığı için ben bunu matematik gözünde bir ispat olarak görmüyorum. Bunu bir ispat olarak görmem mesela.

Miray diğer katılımcılardan farklı olarak aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemini kullanması beklenen sorulardaki ispatlama süreçlerini de başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Altı katılımcının içinde yalnızca Miray aksine örnek verme ve varlık ispatlarını yapamamıştır. Aksine örnek verme ispat yöntemini kullanması beklenen soruda Miray, önermenin yanlış olduğunu ortaya koyan aksine bir örnek bulabilmesine rağmen örnek vermenin bir ispat olmadığını değerlendirerek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır.

Miray: Yani direkt değer vererek yaparsak eğer x=1 için 1>1 diyor önermeye göre ama 1=1 dir. Bu da bana önermenin yanlış oluğunu gösterir. Bu ispat yöntemi değil bu sadece gösterim yöntemi

…

Miray: x=1 dedim ama bu sadece sayıları yerine katarak olmayacak.

Görüşmeci: Peki bu bir ispat mıdır?

Miray: Bunun bir ispat olduğunu, yani zaten yanlışlığını direkt görüyorum ama bana her zaman bu kadar basit bir şekilde görebileceğim bir yanlışlık vermeyebilir, o zaman sıkıntı yaşayabilirim ispat konusunda.

…

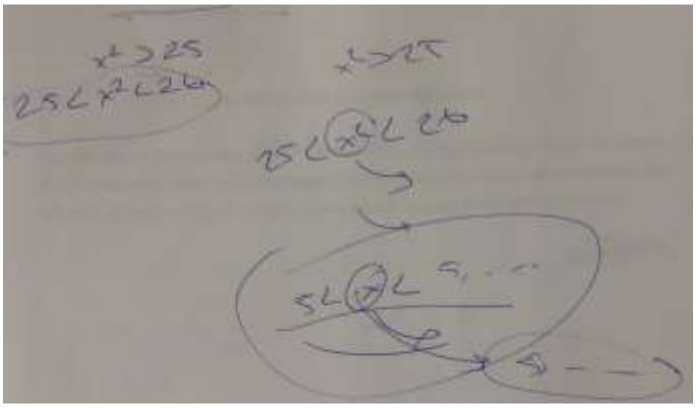
Miray: Burada ilk değerde zaten verdiğimiz sırada yanlışlığını görüyorum ama dediğim gibi doğru bir ispat yöntemi değil bence. Hani bu şekilde bir ispat yöntemi kullanılmaması gerekiyor bence.

Görüşmeci: Neden?

Miray: Yaa dediğim gibi sayıları yerine katarak yapılan bir ispat işlemi bana göre tam bir ispat değil. Hani yine bir şeyi ispatlamış oluyorsun ama ne derece doğru onu bilmiyorum.

Miray varlık ispatı yapması beklenen soruda da ispatlama sürecinde gerekli olan sayının bulunabileceğini yaptığı cebirsel işlemlere dayanarak belirtmiş ve önermenin doğru olduğunu ifade etmesine rağmen bunun bir ispat olmayacağını ifade ederek varlık ispatı yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır.

> Miray: Ya dediğim gibi zaten şurada şu işlemi yaptıktan sonra (yaptığı işlemi gösteriyor) reel sayılar kümesinin tanımını yanlış hatırlamıyorsam şuradan zaten bir 5 virgül küsuratlı bir değer geldiğini görüyoruz. Bu da zaten reel sayılar kümesine ait bir sayıdır.
>
> Görüşmeci: Peki bu bir ispat oluyor mu?
>
> Miray: Mantıken evet ama matematik dilinde hayır.
>
> Görüşmeci: Mantıken derken neyi kastediyorsun?
>
> Miray: Yani hani mantığıma yatkın, şu şekilde baktığımız zaman doğru derim. Bu önermeyi doğruladım derim ama şey değil matematik olarak değil.
>
> Görüşmeci: Matematik olarak neden değil dedin?
>
> Miray: Sistemli değil dedim, matematik dilini kullanmıyorum hiçbir şekilde. Açık ve net ifade etmiyorum.



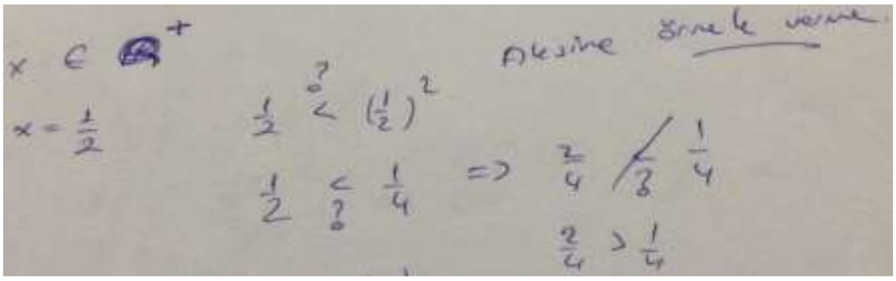
Görsel 3.73. *Miray'ın varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

3.1.5. Dördüncü sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçleri

Tüm sorularda ispatlama süreçlerinde başarılı olan katılımcı olmamıştır. Altı katılımcıdan bir katılımcı (Burcu) beş soruda, geriye kalan beş katılımcı ise (Gizem, Metin, Deniz, Ayla ve Leyla) üç soruda ispatlama süreçlerini başarı ile tamamlamıştır. Katılımcıların tümü aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmaları beklenen soruda, ispatlama sürecinde başarılı olmuştur. Katılımcıların en çok güçlük yaşadıkları ispatlama süreçleri ise karşıt ters, doğrudan ve olmayana ergi ispatları olmuştur. Katılımcıların tümü aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğu, çok azı (altı katılımcıdan ikisi) ise karşıt ters ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtmıştır. Katılımcılar tüm sorularda verilen önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ifade edebilmelerine rağmen genellikle uygun ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından, uygun ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanamadıklarından ya da ispat için gerekli olan kavram bilgisine sahip olmadıklarından ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür.

İspatlama süreçlerinde diğer katılımcılara göre daha başarılı olan Burcu, tüketerek, doğrudan, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerinin kullanılmasının beklendiği sorularda ispatlama süreçlerinde başarılı olmuştur. Gizem ve Metin karşıt ters, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerinin, Ayla ve Leyla ise tüketerek, aksine örnek verme ve varlık ispat yöntemlerinin kullanılmasının beklendiği sorularda ispatlama süreçlerini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Deniz ise tüketerek, doğrudan ve aksine örnek verme ispat yöntemlerinin kullanılmasının beklendiği sorularda ispatlama süreçlerinde başarılı olmuştur.

Katılımcıların en başarılı olduğu ispatlama süreci, aksine örnek verme ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "$Her\ \ x \in IR\ \ için\ \ x < x^2$*'dir*" önermesinin ispatında olmuştur. Altı katılımcının tümü önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını yansıtarak aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Katılımcılar reel sayı kavram bilgilerini de doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamlamıştır. Katılımcılar verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren bir reel sayı bulmuş ve yaptıklarının bir ispat olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Metin'in aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



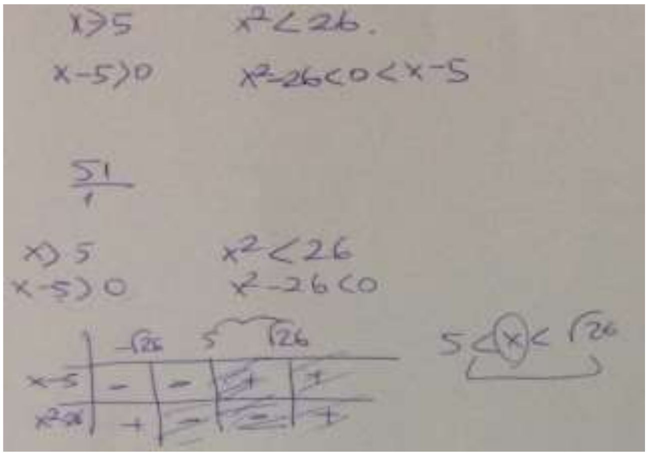
Görsel 3.74. *Metin'in aksine örnek verme ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Görüşmeci: Peki aksine örnek dedin, bir tane örnek aldın. Bir tane örnek yeterli mi ispat için?

Metin: Aksine örnek için evet yeterlidir.

Katılımcıların aksine örnek verme ispat yönteminden sonra kullanmada en başarılı oldukları ispat yöntemi varlık ispat yöntemi olmuştur. Varlık ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Bir* $x > 5$ *reel sayısı vardır öyle ki* $x^2 < 26$*'dır.*" önermesini altı katılımcıdan beşi (Burcu, Gizem, Metin, Ayla ve Leyla) herhangi bir yönlendirme olmaksızın doğru bir şekilde ispatlamıştır. Bir katılımcı ise (Deniz) önermede belirtildiği şekilde bir reel sayı bulunabileceğini ve önermenin doğru olduğunu ifade etmesine rağmen yaptıklarının bir ispat olmadığını değerlendirerek varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir. Bu katılımcı önermenin ispatına ilişkin başka bir girişimde de bulunmamıştır. Katılımcıların tümü önermede varlık niceleyicisi kullanıldığını fark ederek önermenin mantıksal yapısını anladıklarını yansıtmışlardır. Ayrıca katılımcılar reel sayı kavram bilgilerini doğru bir şekilde kullanmış ve gerekli cebirsel işlemleri yapmışlardır.

İspatlama sürecinde başarılı olan beş katılımcıdan biri olan Leyla, önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını yansıtmış ve işlemsel bilgisini kullanarak önermeyi sağlayan reel sayıların bir aralığını bulmuştur. Leyla'nın ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.75. *Leyla'nın varlık ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Leyla: Her denilmediği için denilseydi her x>5 reel sayısı için x^2<26'dır denilseydi ben bu önermeye yanlıştır derdim ama bu önerme doğrudur.

…

Leyla: Bir tane x>5 reel sayısı vardır, bu x^2<26'yı sağlayacak. Ben de öyle bir x sayısının var olduğunu ispatladım.

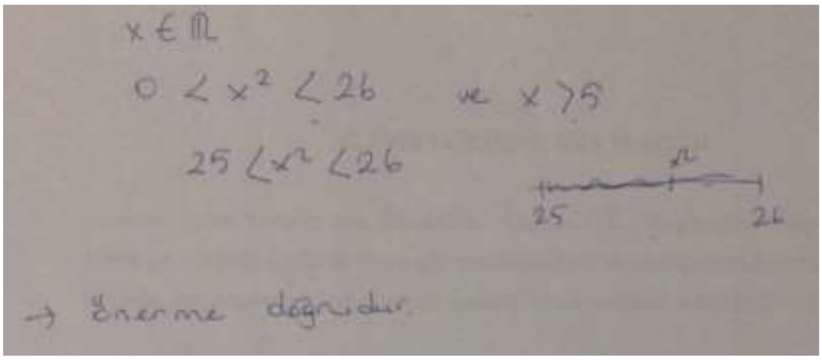
Görüşmeci: Nasıl ispatladın?

Leyla: Bu eşitsizlik sisteminden işte, x 5’ten büyük ama $\sqrt{26}$’dan küçük oldu. Onun için bu doğrudur, öyle bir sayı vardır.

Görüşmeci: Peki bir tane öyle bir sayı olması yeterli mi?

Leyla: Yeterli, bir dediğine göre yeterlidir.

Deniz de önermenin mantıksal yapısını doğru bir şekilde anladığını göstermiş ve önermeyi sağlayan bir reel sayı bulmasa da böyle bir reel sayının bulanabileceğini ifade etmiştir. Ancak Deniz yaptıklarının bir ispat olmayacağını ifade etmiştir. Aşağıda Deniz’in önermenin doğruluğunu nasıl gösterdiğine ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı ve yaptıklarını ispat olarak değerlendirmesine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.76. *Deniz’in varlık ispat yöntemini kullanması beklendiği sorudaki çözümü*

Deniz: Mesela ispatlarken biz sistematik olarak yazıyoruz ya ben hani bundan yakınıyorum. Şu an bunu yazamıyorum. Ben o noktayı bulmuş olsaydım yine böyle yazmayacaktım. Bence sistemli bir şekilde yazmazdım, direkt nokta budur derdim. Bu yine bence ispat sayılmazdı.

Görüşmeci: Neden?

Deniz: Eğer o nokta sağlamayan bir nokta ise ifade de ona göre bir şeyse evet orada bir sıkıntı olmuyor, sağlamayan bir şey bulduğumuzda. Ama sağlayan bir şey bulduğumuzda aynı derecede önemli değil bence. İspatta değil. Öyle çünkü direkt noktayı buldum bitti. Matematiksel olarak yazımını yapmayız muhtemelen, bulsam mesela yapmayacağım çünkü bilmiyorum zaten direkt onu ispatmış gibi göstereceğim ama doğru mu değil. Bu bir ispat sayılmaz. Şans eseri bulmuşmuş bir nokta çünkü 25 ile 26 arasında ben şu an bayağı uğraşmam gerek. Belki bulunamayacak bir nokta hani bulunsa bile çok zor bir nokta yani öyle bir noktayı bulmak şu an. Çok şansa bulunmuş olunur bulunsa da diye düşünüyorum o yüzden ispat sayılmaz.

Yukarıda verilen alıntıdan da görüldüğü gibi Deniz, önermeyi sağlayan bir reel sayı bulsa dahi bunun ispat olarak değerlendirilemeyeceğini ifade ederek varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir.

Katılımcıların güçlük yaşadığı bir diğer ispatlama süreci, tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği soruda olmuştur. Katılımcılardan verilen bağıntının fonksiyon olma durumuna karar vererek bir hipotez ortaya atmalarının beklendiği

“$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?”*

sorusunda tüm katılımcıların fonksiyon kavram bilgilerini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini ifade ettiği ve doğru hipotezi ortaya attıkları görülmüştür. Katılımcılardan Gizem hariç diğer tüm katılımcılar fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu gösterirken Gizem eksik kavram bilgisine sahip olduğunu yansıtmıştır. Gizem fonksiyon kavram bilgisini kullanarak verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiğini ifade etmiş ve doğru hipotezi ortaya atmıştır. Aşağıda Gizem’in verilen eşitliğin fonksiyon belirttiği hipotezini nasıl ortaya attığına ve fonksiyon kavram bilgisine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Gizem: Çünkü tanım kümemizden değer kümemize belirlenmiş. Bu A kümesinden A kümesine yani elemanlar onu kapsayacak şekilde, A dan aldığım elemanlar x burada tanım kümemi belirtir benim. y de burada değer kümemi belirttiği için tanım kümesinde elemanları yazdım, değer kümesinde de elemanları buldum. Bu tanım kümesine verdiğim elemanlar değer kümesinin de içerisinde yani şu f A dan A’ya yani tanım kümesi değer kümesini sağladı. Bu yüzden fonksiyon belirtir dedim.
>
> Görüşmeci: Peki fonksiyon neydi?
>
> Gizem: Yani herhangi bir tanım kümesinden alınan bir elemanın, değer kümesinde karşılığının olup olmadığı

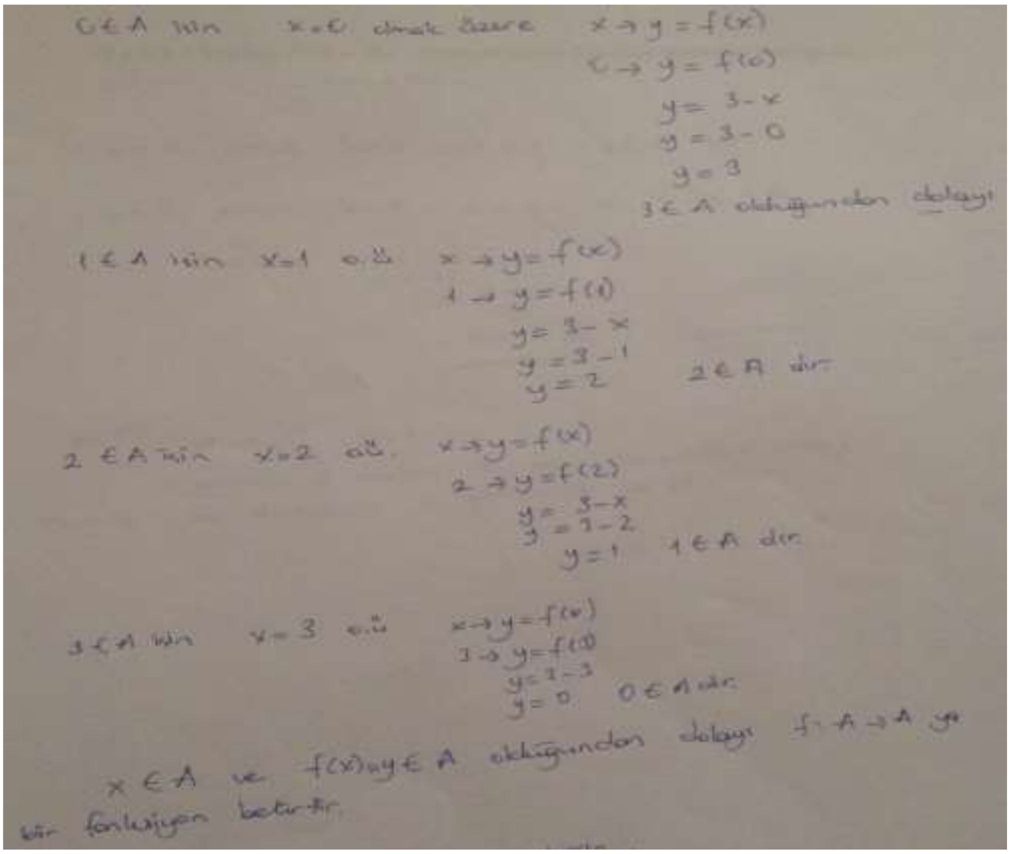
Gizem hipotezi ortaya atarken tanım kümesinden alınan bir elemana değer kümesinden yalnız bir eleman karşılık gelmesi durumunu ifade etmemiştir. Gizem’in fonksiyonu, tanım kümesinden alınan elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin değer kümesinde olma durumu olarak tanımladığı, ancak alınan elemanların değer kümesinden tek bir elemana karşılık gelmesi durumunu ifade etmediği görülmüştür.

Eksik kavram bilgisini kullanarak Gizem de dahil olmak üzere tüm katılımcılar verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği doğru hipotezini ortaya atmışlardır. Ancak katılımcıların doğru hipotezi ortaya atmaları üzerine tüketerek ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği

“$A = \{0, 1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $y = 3 - x$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.”*

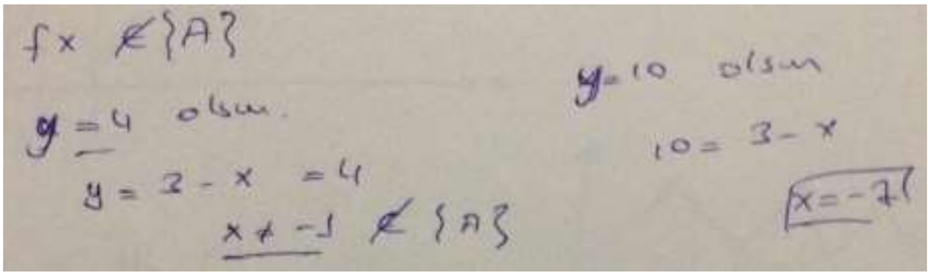
sorusunda Burcu, Deniz, Ayla ve Leyla olmak üzere dört katılımcının tüketerek ispat yöntemini ve fonksiyon kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarılı bir şekilde tamamladığı görülmüştür. Geriye kalan iki katılımcı Metin ve eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olan Gizem, tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını göstermişlerdir.

Tüketerek ispat yöntemini ve fonksiyon kavram bilgisini kullanarak ispatlama sürecinde başarılı olan dört katılımcıdan biri olan Deniz'in ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı aşağıda verilmiştir.


0 ∈ A için x=0 olmak üzere x → y = f(x)
0 → y = f(0)
y = 3 − x
y = 3 − 0
y = 3
3 ∈ A olduğundan dolayı
1 ∈ A için x=1 o.ü. x → y = f(x)
1 → y = f(1)
y = 3 − x
y = 3 − 1
y = 2 2 ∈ A dır
2 ∈ A için x=2 o.ü. x → y = f(x)
2 → y = f(2)
y = 3 − x
y = 3 − 2
y = 1 1 ∈ A dır
3 ∈ A için x = 3 o.ü. x → y = f(x)
3 → y = f(3)
y = 3 − 3
y = 0 0 ∈ A dır
x ∈ A ve f(x)=y ∈ A olduğundan dolayı f: A → A ye
bir fonksiyon belirtir.

Görsel 3.77. *Deniz'in tüketerek ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Metin fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak ortaya attığı verilen eşitliğin bir fonksiyon belirttiği hipotezini ispatlamak için olmayana ergi ispat yöntemini kullanmıştır. Ancak bu ispat yöntemini hatalı bir şekilde kullanmış ve yaptığının bir ispat olmadığını değerlendirmesine rağmen başka bir ispatlama girişiminde bulunmamıştır. Aşağıda Metin'in tüketerek ispat yöntemini kullanmasının beklendiğini önermenin ispatına ilişkin yaptıklarından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



Görsel 3.78. *Metin'in tüketerek ispat yöntemini kullanması beklendiği sorudaki çözümü*

Metin: A dediğim zaten tanım kümesi soruda verilmiş, bunun için olmayan ergiyi denedim. Pek bir sonuca ulaşamadım açıkçası.

Görüşmeci: Neden ulaşamadın?

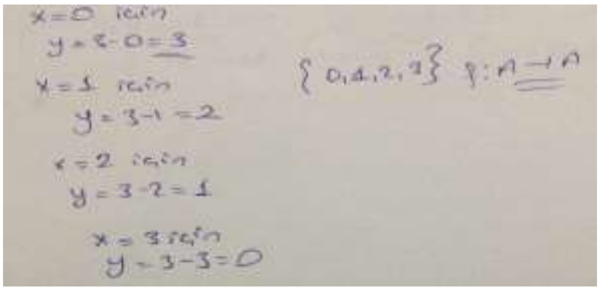
Metin: Yani evren geniş olduğu için sadece iki durum değerlendirmeyle genellemeye ulaşmak yani şu durumda zor.

Görüşmeci: Bunun ispatına ilişkin başka aklına gelen bir şey var mı?

Metin: Aklıma başka bir şey gelmedi

Görüşmeden verilen alıntıdan da görüldüğü gibi Metin görüntü kümesinde olmayan iki eleman için tanım kümesinde bir eleman karşılık gelmediğini göstermiş ve bunu olmayana ergi ispatı olarak ifade etmiştir. Yaptıklarının bir ispat olmamasını ise sadece iki değer için bunu göstermesinin bir genelleme olmayacağı şeklinde açıklamıştır. Metin olmayana ergi ispat yöntemini hatalı biçimde kullanmıştır.

Gizem ise tüketerek ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği soruyu aşağıdaki biçimde çözmüştür.



Görsel 3.79. *Gizem'in tüketerek ispat yöntemini kullanması beklendiği sorudaki çözümü*

Ancak Gizem'in yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmediği ve tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülmüştür. Aşağıda bu duruma ilişkin Gizem'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Bu yaptığın bir ispat oldu mu?

Gizem: Hayır.

Görüşmeci: Neden?

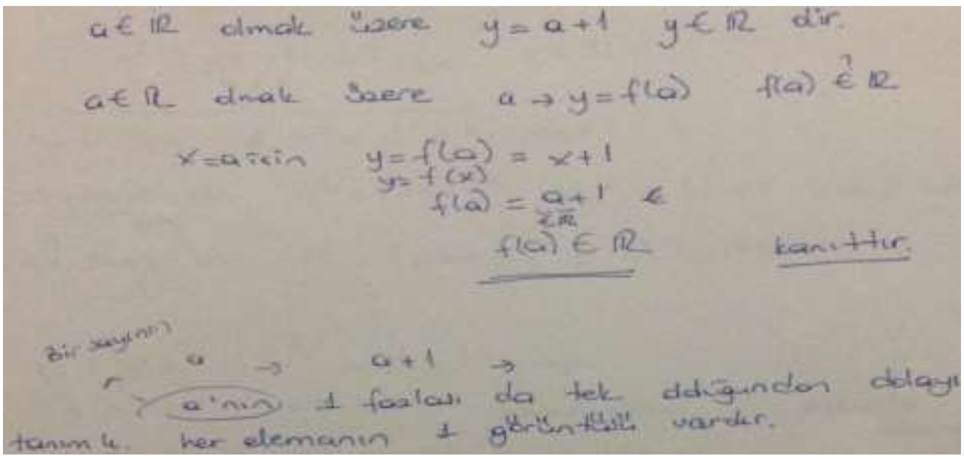
Gizem: Çünkü ispat dediğimiz şey yani mesela bir durumun bütün durumlara genellenebilmesidir aslında. Ama biz burada hani kısıtlı bir şey için yaptık. Değer verdik, eşitini bulduk aslında. Bu şekilde değil çünkü ispat dediğimiz şey, genellemelere ulaşmadır. Her şey için sağlamasıdır, sadece bunu küme için demiyorum hani bütün evrensel bir şey olduğu için bu yaptığım sadece yerine koyup sağlama işlemi aslında.

Görüşmeci: Peki bu yaptığının ne olduğunu düşünüyorsun?

Gizem: Yani sadece şu f A'dan A'ya sağlıyor mu hani bunu sağlama yöntemi gibi düşünebiliriz. Ama tam olarak bir ispat değil.

Katılımcıların zorlandıkları ispatlama süreçlerinden biri, doğrudan ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği "$y = x + 1$ *eşitliği* $\begin{array}{c} f: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow y = f(x) \end{array}$ *olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.*" sorusunda olmuştur. Katılımcılardan ikisi (Burcu ve Deniz) doğrudan ispat yöntemi ve fonksiyon kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanarak ispatlama süreçlerinde başarılı olmuştur. Geriye kalan dört katılımcıdan üçü Metin, Ayla ve Gizem doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduklarını göstermelerine rağmen Metin görüntülerin değer kümesinde olduğunu göstermemiş, Ayla görüntülerin tekliğini göstermede güçlük yaşamış, Gizem ise eksik fonksiyon kavram bilgisi nedeniyle görüntülerin tekliğini göstermeyerek ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlayamamışlardır. Leyla ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiş ve ispatlama sürecinde başarısız olmuştur.

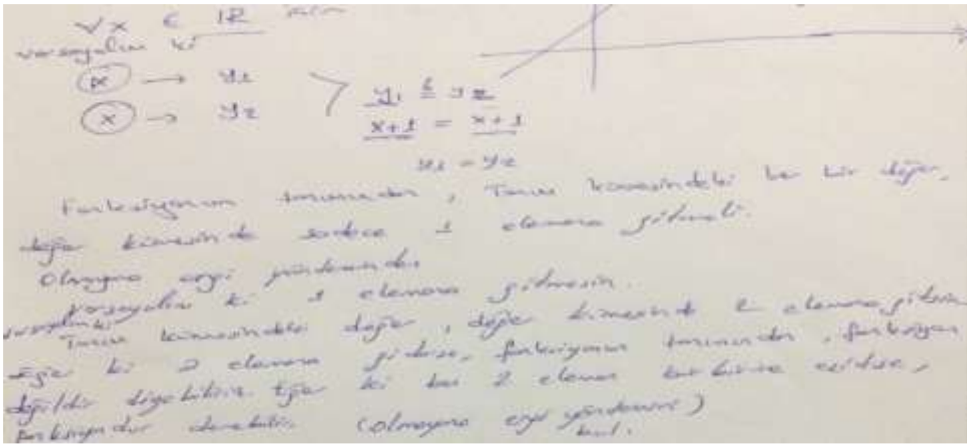
Aşağıda doğrudan ispatlama sürecinde başarılı olan iki katılımcıdan biri olan Deniz'in doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.80. *Deniz'in doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Deniz hem görüntülerin değer kümesinde olma durumunu hem de tekliğini araştırmış ve yaptıklarını da bir ispat olarak değerlendirmiştir.

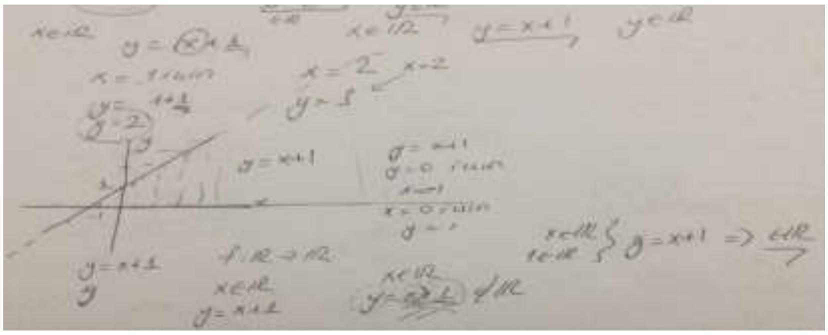
Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu gösteren Metin ise verilen eşitliğin fonksiyon olduğunu ispatlama sürecince görüntülerin tekliğini göstermeye çalışmış ancak görüntülerin değer kümesinde olma durumunu göstermemiştir. Aşağıda Metin'in doğrudan ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.81. *Metin'in doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıtı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Metin yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmiş ve yaptığının olmayana ergi ispatı olduğunu ifade etmiştir.

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğu görülen Ayla, görüntülerin tekliğini grafik üzerinden değerlendirmiştir. Aşağıda Ayla'nın doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden birer alıntı verilmiştir.



Görsel 3.82. *Ayla doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Ayla: Buradan da iki reel sayının toplamı reel sayıdır dedim.

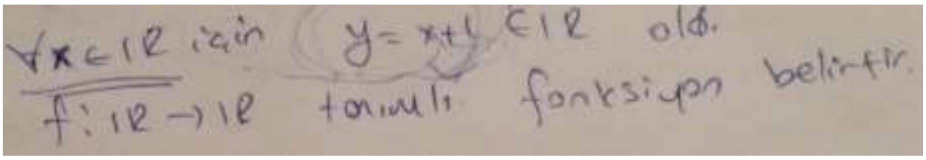
Görüşmeci: Şu grafik için ne diyorsun?

Ayla: Grafik dediğim gibi hani ispat olmayabilir diyorum.

Görüşmeci: Şuan tam olarak emin değil misin?

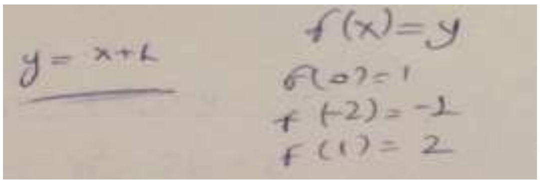
Ayla: Evet. Tam olarak emin değilim ondan.

Alıntılardan da görüldüğü gibi Ayla doğruda ispat yöntemi bilgisine sahip olduğu göstermiş ve görüntülerin değer kümesini araştırmıştır. Ancak görüntülerin tekliğini grafik çizerek göstermeye çalışan Ayla, grafik çizmenin bir ispat olmadığını belirtmiştir. Gizem ise doğrudan ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi görüntülerin tekliğini göstermeksizin aşağıdaki biçimde ispatlamıştır.



Görsel 3.83. *Gizem'in doğrudan ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülen iki katılımcıdan biri olan Leyla tanım kümesinden elemanlar alarak verilen eşitliğin fonksiyon olduğunu görmeye çalışmış ancak tanım kümesinde sonsuz tane eleman olduğu için hepsini deneyemeyeceğini ifade etmesine rağmen herhangi bir ispat yapamamıştır. Aşağıda Leyla'nın doğrudan ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatlamaya yönelik yaptıklarından ve görüşmesinden alıntılar verilmiştir.



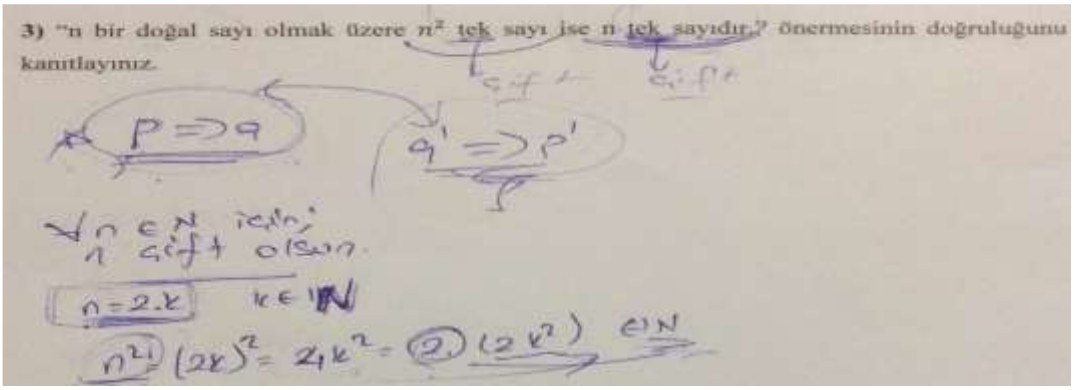
Görsel 3.84. *Leyla'nın doğrudan ispat yöntemini kullanması beklendiği sorudaki çözümü*

Görüşmeci: Sen burada neyi göstermeye çalışıyorsun?

Leyla: Fonksiyon şu ifadenin fonksiyon olup olmadığını göstermeye çalışıyorum. Daha önceki basitti çünkü neden kümemiz belliydi (tüketerek ispat yöntemini kullandığı soruya işaret ediyor), direk yerine koyuyordum. O bir ispattı yani. Ama hani burada ne kadar değer koyarsam koyayım sonsuza kadar değer vermem lazım fonksiyon olduğunu ispatlamam için. Bozan bir şey de yok. Yani öyle yapamam herhalde.

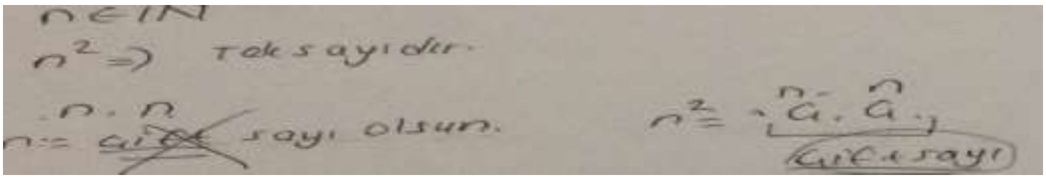
Katılımcıların zorlandığı bir diğer ispatlama sorusu ise "*n bir doğal sayı olmak üzere* n^2 *tek sayı ise n tek sayıdır.*" önermesinin ispatının istendiği soru olmuştur. Verilen önermenin ispatı için katılımcılardan yalnızca ikisi önermenin mantıksal yapısına uygun olan ispat yöntemlerinden biri olan karşıt ters ispat yöntemini kullanmayı seçmiş ve ispatlama süreçlerinde başarılı olmuştur. Geriye kalan dört katılımcıdan biri (Ayla) önermenin ispatı için uygun ispat yöntemlerinden olan olmayana ergi ispat yöntemini seçmiş ve bu yöntemi doğru bir şekilde kullanmasına rağmen tek ve çift tamsayıları ifade ederken değişken kullanmayarak ispatlama sürecinde başarısız olmuştur. Üç katılımcı (Burcu, Deniz ve Leyla) ise yapılan yönlendirmelere rağmen karşıt ters ispat yöntemini seçmemiş, hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır.

Başarılı bir şekilde karşıt ters ispatı yapan iki katılımcıdan biri olan Gizem'in ispatına ilişkin aşağıda görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.85. *Gizem'in karşıt ters ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

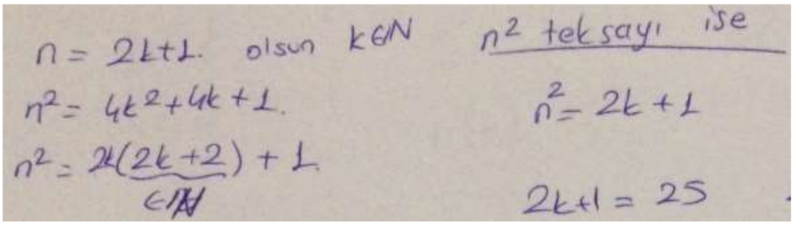
Karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi, önermenin yapısına uygun olarak olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak ispatlayan Ayla'nın ispatlama sürecine ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.86. *Ayla'nın karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi olmayana ergi yöntemi ile ispatı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Ayla, önermenin mantıksal yapısını göz önünde bulundurarak olmayana ergi ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanmıştır. Ancak Ayla, tek ve çift tamsayıları cebirsel olarak gösterememiştir.

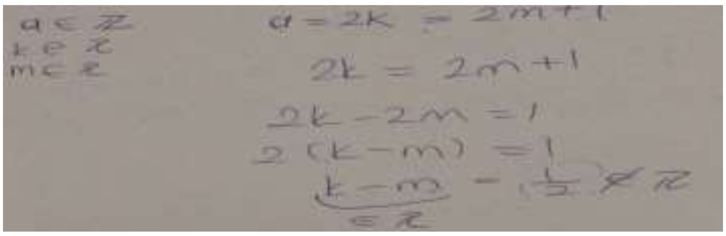
Karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi üç katılımcı ise hükmü kabul edip hipotezi göstererek ispatlamıştır. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Leyla'nın ispatına ilişkin görüşme kağıdından bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.87. *Leyla'nın karşıt ters ispat yöntemini kullanmasının beklendiği önermeyi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Katılımcıların en başarısız oldukları ispatlama süreci olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği "*Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur.*" önermesinin ispatında olmuştur. Katılımcılardan yalızca biri hem ispat yöntemi bilgisini hem de tek ve çift tamsayı bilgisini doğru bir şekilde kullanarak ispatlama sürecini başarıyla tamamlamıştır. Geriye kalan beş katılımcıdan dördü (Gizem, Metin, Deniz ve Leyla) olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak yapılan yönlendirmeye rağmen tek ve çift sayıları temsil ederken yaptıkları hataları fark etmeyerek ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. Bir katılımcı ise (Ayla) önermenin mantıksal yapısını çözememiş ve doğru bir şekilde ispat yapamamıştır.

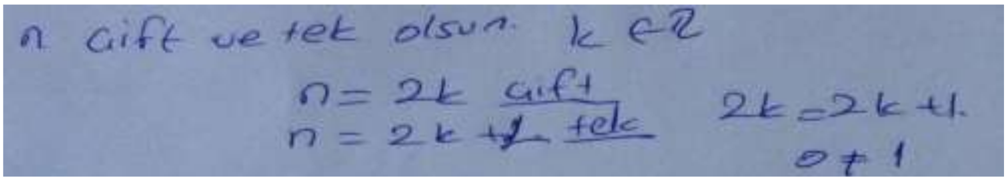
Aşağıda olmayana ergi ispat yöntemini doğru bir şekilde kullanan ve ispatlama sürecinde başarılı olan tek katılımcı Burcu'nun ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı verilmiştir.



Görsel 3.88. *Burcu'nun olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Burcu önermenin mantıksal yapısını çözerek uygun ispat yöntemi olan olmayana ergi ispat yöntemini seçmiş ve bu ispat yöntemi ile tek ve çift tamsayı kavramlarını ve işlem bilgisini kullanarak doğru bir ispat yapmıştır.

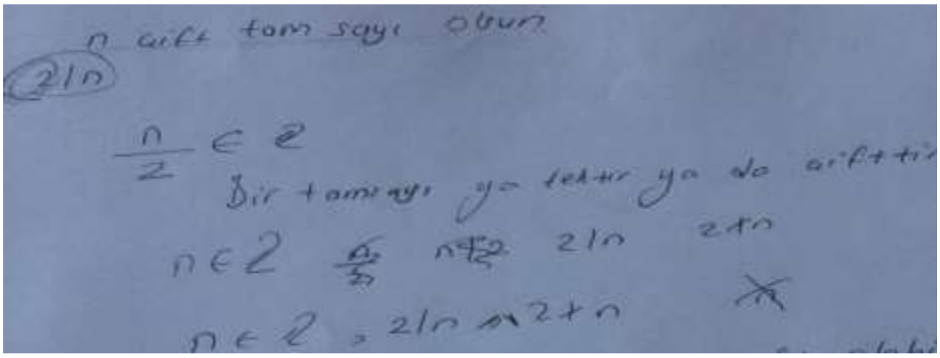
Olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu gösteren üç katılımcı (Metin, Deniz ve Leyla) ise yapılan yönlendirmelere rağmen aynı sayıyı farklı değişkenlerle ifade etme yanlışını fark edememiş ve bu yanlışa dayanarak hatalı bir şekilde çelişkiye ulaşmışlardır. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Leyla'nın yapmış olduğu ispata ilişkin görüşme kağıdından ve yapılan yönlendirmeye rağmen yaptığı yanlışı fark etmemesine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.



Görsel 3.89. *Leyla'nın olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

> Görüşmeci: Peki 2k 2k+1 eşit olabilir mi?
>
> Leyla: Olamaz zaten de hani sonuçta çift ve tek olsun demişsiniz hem tek ve hem çift olan bir tamsayı. Bilmiyorum sonuçta hani bizim bir sayının çift olması için 2'nin katları olması lazım, tek olabilmesi içinde hani 1, 3, 5, 7 hani 2k+1 formunda yazılabilmesi lazım. Ben böyle yapardım yani de sonra bu ikisini birbirine eşitledim. Tabi sonuçta şöyle bir şey var hani buradan bunun birbirine eşit olmadığı bariz belli. Hani ben zaten orada biraz tökezledim, ama başka bir şey mi demeliyim demeliydim onu tam kestiremedim. Sonuçta şurada hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur demişsiniz. Ben de olsun dedim öyle bir sayı olsun dedim yani. Böyle yapabilirim herhalde. Çift olabilmesi için 2k, tek olabilmesi için 2k+1 bu ikisinin birbirine tamam böyle yapardım hocam. Yani başka bir şey yapmazdım böyle yapardım

Önermenin mantıksal yapısını çözemediği görülen iki katılımcıdan biri olan Ayla'nın ispatına ilişkin görüşme kağıdından ve görüşmesinden alıntılar aşağıda verilmiştir.



Görsel 3.90. *Ayla'nın olmayana ergi ispatına ilişkin görüşme kağıdından alıntı*

Ayla: n'yi çift dedim. n çift tam sayı dedim. Yani 2/n. Zaten 2 ye bölünen bir sayı aynı zamanda tek olamaz. 2 ye bölünüyorsa mutlaka çift olmalıdır.

Görüşmeci: Bu bir ispat mıdır?

Ayla: Evet ispattır.

Görüşmeci: Neyi göstermeye çalışıyorsun burada?

Ayla: Burada örneğin n'yi çift tamsayı aldığınız zaman n mutlaka 2'ye bölünmelidir diyorum. 2'ye bölünen bir sayı da zaten tek olamaz. Yani n sadece çift sayı olabilir diyorum. Hem çift hem tek sayı olamaz diyorum.

Görüşmeci: Sen ne yaptın peki?

Ayla: n'yi çift sayı, çift tamsayı kabul ettim. 2/n dedim. Çift tamsayısının 2'ye bölünmesi lazım. Bölünüyorsa da tek olamaz dedim.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Ayla önermenin mantıksal yapısını anlamadığını göstermiş ve çift sayıların çift olduğunu ifade etmeye çalışmıştır. Ayrıca Ayla yaptıklarını da bir ispat olarak değerlendirmiştir.

3.2. Katılımcıların Ortaokul Matematiğinde İspat Yapmaya İlişkin Görüşleri

Katılımcıların ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri incelendiğinde, katılımcıların sınıf düzeyi arttıkça daha çok ispatın erken yaşlarda başlaması gerektiğini savundukları görülmüştür (Tablo 3.1.). İspatın erken yaşlarda başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için öncelikle kendi eksikliklerini gidermeleri gerektiğini belirtmiş, öğrencilere çeşitli ispatlama etkinlikleri yaptıracaklarını, matematiksel bilgileri ezbere bir şekilde vermeyeceklerini ve bu bilgileri sorgulatacaklarını ifade etmiştir. İspatın lisede ya da üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ise ispatın erken yaşlarda öğrenciler için zor olacağını ve öğrencilerin erken yaşlarda soyut düşünemeyeceklerini belirtmiştir. Bu katılımcılar ispatlama becerisinin geliştirilmesi için ne yapmaları gerektiği konusunda bilgi sahibi olmadıklarını ifade etmişlerdir.

Tablo 3. 1. *Katılımcıların ispat yapmaya başlama düzeyine ilişkin görüşleri*

Ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşler	1. Sınıfa Yeni Başlayanlar (n=6)	1. Sınıflar (n=6)	2. Sınıflar (n=6)	3. Sınıflar (n=6)	4. Sınıflar (n=6)
İlköğretim düzeyinde ispat öğretimine başlanmalı	2	3	5	5	4
Lise düzeyinde ispat öğretimine başlanmalı	3	2	1	-	1
Üniversite düzeyinde ispat öğretimine başlanmalı	1	1	-	1	1

3.2.1. Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri

İlköğretim matematik öğretmenliği programına yeni başlayan 1. sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri incelendiğinde katılımcılardan çok azının ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür.

Katılımcılardan yalnızca ikisi (Ece ve Seda) ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ederken üç katılımcı (Hacer, Melis ve Fatmagül) lise düzeyinde, bir katılımcı (Yonca) ise üniversitede başlanması gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda ispat yapmanın ilköğretim düzeyinde hatta ilkokula başlar başlamaz yapılmaya başlanması gerektiğini ifade eden Ece'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Peki, sence ispat yapmak hangi sınıf düzeyinde başlar?
>
> Ece: İspat yapmak ya bence daha erken yapılmalı. Çünkü ben gibi birçok öğrenci geliyor buraya ve hep hazıra alışmışız. Bir şeyleri biliyoruz orada sıkıntı yok, ama neyi bildiğimizi bilmiyoruz. Neden böyle denildiği zaman cevabımız olmuyor, bence bir şey öğretilirken önce onun ispatı yapılmalı ve o şekilde öğretilmeli. Ben şu an çok zorluk çekiyorum çünkü ben onu biliyorum zaten, ispatını görmek hoşuma gitmiyor. Keşke ilk başta ben onu ilk öğrenirken bana ispatı ile öğretilseymiş, daha küçük yaşlara indirgenmeli ispat.
>
> Görüşmeci: Hangi yaşlar?

> Ece: Bence benim gireceğim grup inşallah hani 1, 2, 3, 4'den sonra 5'den itibaren hatta daha erken bile olabilir. Çünkü bazı şeylerin temelleri çok küçük yaşlarda atılıyor. Bence ispat yöntemleri çok daha küçük yaşlara inmeli.

Alıntıdan görüldüğü gibi Ece, ispatın küçük yaşlardan itibaren öğretilmeye başlanması gerektiğini ve kendisinin şu anda ispatta zorlandığını ifade etmiştir.
İspat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden katılımcıların ise ilköğretim öğrencileri için ispatın zor olacağını ifade ettikleri görülmüştür. Aşağıda ispat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden üç katılımcıdan biri olan Fatmagül'ün görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Fatmagül: Bence yani lisede de en azından bize gösteriyorlar ama sadece probleme yönelik. Biraz daha böyle gösterseler belki daha iyi olabilir. Hocalar başta tanım yapardı, herkes böyle hiçbir şey anlamazdı. Hocalar da çok önemsemiyordu, sadece yazdırıp geçiyorlardı, bence birazcık soruya yönelik ders yapılıyordu sonuç olarak sınava giriyorduk. Ama en azından bizi biraz buraya hazırlamak için de birazcık daha böyle hani ispat yöntemlerini falan göstermeleri gerekirdi.

Altı katılımcıdan bir katılımcının (Yonca) ise ispat yapmaya üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür. Aşağıda bu katılımcının görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Sence ispat yapmak hangi sınıf düzeyinde başlar?
>
> Yonca: Galiba birinci sınıfın ikinci dönemi, çünkü soyut matematikte görecekmişiz ben öyle duydum. Soyut matematikte analiz diye bir ders var galiba bir konu mu var onda bildiğimiz şeyleri ispatlayacağız, o yöntemleri kullanacakmışız diye biliyorum, ben öyle duydum.
>
> Görüşmeci: Peki sence ispat hangi sınıf düzeyinde başlar?
>
> Yonca: Bence de birinci sınıftan başlamalı çünkü daha sonraki yıllarda kullanalım biz onu. Az önce sordunuz mesela bayağı eksik olduğumu fark ettim ya da bir kural var, o kurala ulaşıldığını da bilelim. Sonuçta biz öğrencilere anlatacağız onları.

Yukarıdaki alıntıdan Yonca'nın ilköğretim matematik öğretmenliği programının ikinci dönemindeki soyut matematik dersinde ispat görüleceğini duyduğunu ve kendisini de görüşme sürecinde ispatlamada eksik olduğunu fark ettiği için üniversite birinci sınıfta başlanması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür.

Katılımcılardan ispatın ilköğretim düzeyinde başlaması gerektiğini savunan katılımcıların tümü, görüşme sürecinde ispatlanması istenen önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılmasının uygun olduğunu ifade etmişlerdir. Ancak ispatın lise ya da üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden katılımcılardan biri hariç hepsi bu tür önermelerin doğruluğunun ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygun olmadığını ifade ettikleri görülmüştür. Aşağıda ispatın ilköğretim düzeyinde yapılmaya başlaması gerektiğini ifade eden katılımcılardan biri olan Seda'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Peki az önce senle konuştuğumuz sayıların tekliği ve çiftliğine ilişkin önermeler vardı. Teklik çiftlik zaten ortaokulda görülen kavramlar. Böyle önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygunlu konusunda ne düşünüyorsun?
>
> Seda: Tartışarak zaten onlara doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermek gerekir diye düşünüyorum. Çünkü öğrencinin aklında bir boşluk kalabilir. Yani öğrenci tam soyut olarak zaten düşünemez, somut olarak onun nereden geldiğini görmek bilmek ister.

İspat yapılmaya lise ya da üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini düşünen katılımcılardan yalnızca Yonca görüşme sürecinde ispat yapılması beklenen sayıların tekliği ve çiftliğine ilişkin önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılmasının uygun olduğunu ifade etmiştir.

> Yonca: Bizimle hiç tartışılmadı bu güne kadar, ama tartışılmalı tabi. Bence de hani öğrenci biraz düşünsün diye sorgulasın diye, ne olduğunu iyice anlasın, kavrasın soru sorsun, benden de öğrensin diye tabii ki de olmalı.
>
> Görüşmeci: Peki sen öğrencilerine bu tür önermelerin doğruluklarını göstermek için ne yaparsın?
>
> Yonca: Ne yaparım herhalde yine yöntemimi kullanırım benim öğretmenim gibi ezber yaptırmam herhalde. 2 ve katlarını çift sayı olarak gösteririm işte gerisini tek sayı olarak da gösterebilirim. Kafalarını karıştırmadan aslında, öyle.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Yonca her ne kadar görüşmede konuşulan önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılması gerektiğini ifade etse de önermelerin doğruluklarını göstermek için ispat yapmaktan çok gösterim olarak tekliği ve çiftliği ifade edeceğini belirtmiştir. İspat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden katılımcılar ise ispat yapmanın ortaokul düzeyine uygun olmadığını, öğrenciler için zor olacağını ve ispatın öğrencilerde matematiğe yönelik olumsuz tutumlar gelişmesine neden olacağını ifade ettikleri görülmüştür. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Fatmagül'ün görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Az önce konuştuğumuz sayılara ilişkin önermeleri düşündüğünde, o tür önermeleri ortaokul öğrencileri ile doğruluğunu tartışmanın uygunluğu konusunda ne düşünüyorsun?
>
> Fatmagül: Bence o yaşta biraz erken.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Fatmagül: Yani en azından hani lise 2, 2 değil hatta 3 4 olabilir. Bence yani ilkokulda da erken daha
>
> Görüşmeci: Peki sayıların tekliği çiftliği aslında ortaokulda görülen kavramlar

Fatmagül: Yani evet ama hani ispat olsun, gösterim olsun, hani tamam gösterim olabilir de ispatlar için daha erken bence. Yani sonuç olarak her zaman tekliği çiftliği görüyoruz

Görüşmeci: Gösterim için olabilir derken neyi kastettin?

Fatmagül: Yani nasıl gösteriliyor ya da işte anlamları falan onlar olabilir ama ispat için erken bence

Görüşmeci: Ortaokulda ispat için ne düşünüyorsun?

Fatmagül: Bence henüz gereği yok. Zaten o an öğrencilerin yani o seviyede onları çok anlayabileceğini de zannetmiyorum.

Görüşmeci: Az önce bahsettiğimiz şekilde sayıların tekliği çiftliği ile ilgili önermelerin doğruluğunu öğrencilerine göstermek için sen ne yaparsın?

Fatmagül: Yani ben, ben olsam öğrencilerim için hani tekrar söylediğim gibi henüz erken hani o kadar zaten yani genel olarak matematiğe karşı bir önyargıları oluyor ve hani bu daha da arttırır bu ispatlar, daha da bir sıkıcı hale getirir bence.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Fatmagül, ispat yapmanın ortaokul öğrencileri için uygun olmadığını ve ispat yapmanın öğrencilerin matematiğe ilişkin olumsuz tutumlar geliştirmesine neden olduğunu ifade etmiştir.

Katılımcılara ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini nasıl geliştirebilecekleri sorulduğunda ise genel olarak katılımcıların öğrencilerin ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabilecekleri hakkında bilgi sahibi olmadıkları görülmüştür. Özellikle ispat yapılmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini savunan katılımcılardan Melis, ispatlama becerisini geliştirmenin lise öğretmenlerinin görevi olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin Melis'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Peki sen ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için ne yaparsın?

Melis: Lise öğretmenlerine bırakırım yani

Görüşmeci: Nasıl?

Melis: Lise öğretmenlerine bırakırım, lise öğretmenleri yapsın.

Görüşmeci: Erken mi olduğunu düşünüyorsun ortaokul için?

Melis: Evet ortaokul yani daha çok küçükler, 6-7-8 hani o çocuklar daha küçük, daha matematiği hani problem falan çözüyorlar, matematikte kolay sorular. Direkt ispata geçerlerse matematikten soğuyabilirler hani, korkabilirler.

Alıntıdan görüldüğü gibi Melis, ispat yapmanın ortaokul öğrencilerini matematikten soğutacağını ifade etmiştir.

Fatmagül ise yalnızca kavramların tanımlarını ve anlamlarını vererek öğrencileri ileriki yıllarda ispat yapmaya hazırlayacağını belirtmiştir. Aşağıda Fatmagül'ün görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Fatmagül: Yani bilmiyorum ama hani ispattan önce tanımları olsun, anlamları olsun, onları en iyi şekilde öğretip hani ispat için onları hazırlamış olabiliriz. Daha ileriki sınıflar için.

3.2.2. Birinci sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri

1. sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri incelendiğinde katılımcılardan üçü (Eda, Nalan ve Naz) ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ederken iki katılımcı (Neşe ve Umut) lise düzeyinde, bir katılımcı (Esra) ise üniversitede başlanması gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda ispat yapmanın ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden Eda'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Eda: Aslında bana sorarsanız böyle her şeyin nedeni ile birlikte öğrenmek daha ilkokulun birinci seviyesinden başlamalı diye düşünüyorum. Ama şu anki eğitim sistemimize yerleştirecek olursak bunu lise on bir lise üç oluyor o da, ama yeni bir sistem yapacak olursak ilkokul birinci sınıftan başlamalı insanların nedenleriyle öğrenmesi bir şeyi.

Eda'nın ispat yapılmaya ilkokulda başlanması gerektiğini ifade ettiği ancak kendi öğrencilik yıllarını göz önünde bulundurduğunda lise 3. Sınıfta ispatla karşılaştığı görülmüştür.

İspat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden katılımcıların ise ortaokulda önermelerin doğruluklarının sezdirilmesi gerektiğini ama ispat yapılmaması gerektiğini belirttikleri görülmüştür. Aşağıda ispat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden iki katılımcıdan biri olan Neşe'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Neşe: İspat yapmak keşke daha önceden öğrenseydim şu an zorlanıyorum. Aslında olan bir şeyi olduramıyorum o anda. Daha önceden olsaydı güzel olabilirdi. Ben bu kadar zorlanmazdım.

Görüşmeci: Daha önceden derken neyi kastediyorsun?

Neşe: Lisede falan başlasaydık ama o zamanda sıkılabilirdik bilmiyorum.

Görüşmeci: Ortaokul?

Neşe: Ortaokula kadar inmesin bence lisede başlasın ama ortaokulda basit şeyler olabilir ama o "her"di falan lisede başlasın.

Görüşmeci: Ortaokulda ispat nedir o zaman?

Neşe: Hani böyle hocalar diyor ya sezdirerek öğretme falan hani böyle daha çok sezgisel olsa hani şu an zaten doğru olduğunu biliyoruz ama yapamıyoruz ya işte onun doğru olduğunu biz ortaokulda bilsek ve lisede yapmaya başlasak gibi.

Altı katılımcıdan bir katılımcının (Esra) ise ispat yapmaya üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür. Aşağıda bu katılımcının görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Esra: Bence ispat yapmak üniversite düzeyinde başlar. Yani en azından biz öyle gördük. Lisede falan direkt yani neyin ne olduğunu bilmeden direkt yapıyorduk. Şimdi onun neden öyle olduğunu araştırmaya yönelik yapıyoruz.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Esra da kendi öğrenciliğini göz önünde bulundurarak ispat yapılmaya üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini ifade etmiştir.

Katılımcılardan ispatın ilköğretim düzeyinde başlaması gerektiğini savunan katılımcılardan Eda ve Naz görüşme sürecinde ispatlanması istenen önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılmasının uygun olmadığını ifade ederken Nalan ise uygun olduğunu ifade etmiş ama bu tür önermelerin doğruluklarının nasıl gösterileceğini bilmediğini belirtmiştir. İspatın lise ya da üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden katılımcıların tümü bu tür önermelerin doğruluğunun ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygun olduğunu ifade etmesine rağmen bu katılımcıların da bu tür önermelerin doğruluklarını göstermek için neler yapacaklarını bilmedikleri görülmüştür. Aşağıda ispatın ilköğretim düzeyinde yapılmaya başlaması gerektiğini ifade eden katılımcılardan biri olan Eda'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Görüşmeci: Sayıların tekliği çiftliği ile ilgili konuştuğumuz önermelerin ortaokul öğrencileriyle doğruluklarını tartışmanın uygunluğu konusunda ne düşünüyorsun?
>
> Eda: Uygun değil.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Eda: Ama bu seviye bence on ikinci sınıfta uygulanabilir yani.
>
> Görüşmeci: Neden ortaokulda uygulanamaz diye düşündün?
>
> Eda: Ortaokulda gelişim düzeylerinden ötürü yani daha yeni soyut işlemlere geçmişken pek anlayamayabilirler diye düşünüyorum.
>
> Görüşmeci: Neden anlayamayacaklarını düşündün?
>
> Eda: Yani gelişim seviyelerinin uygun olmadığını düşündüm.

Nalan ise görüşme sürecinde bahsedilen önermelerin doğruluklarının tartışılmasının uygun olduğunu söylese de bunun nasıl yapılacağını bilmediğini yansıtmıştır.

> Görüşmeci: Önermelerden bahsettik sayıların tekliğiyle çiftliğiyle ilgili. Bu tür önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencileriyle tartışmanın uygunluğu konusunda ne düşünüyorsun?
>
> Nalan: Bu tek ya da çift sayılardan bahsediyoruz. Ama onların dünyasında kümeler bence sınırlı benim hatırladığım kadarıyla o şekilde.
>
> Görüşmeci: Sınırlı derken?

Nalan: Bazı şeyler değişiyor ya mesela evrensel küme benim hala kafamı karıştıran bir soru işareti. Evrensel küme nedir hani, evrensel kümeyi biz hatta uzay olarak falan algılıyorduk ortaokulda. Sonra buraya geldiğimde sanırım işte hani ondan sonraki küme şöyledir böyledir gibi işte tam net değil her şey şu anda

…

Görüşmeci: Sen böyle önermelerin doğruluklarını öğrencilerine göstermek için neler yaparsın?

Nalan: Yani örnekler vererek yapabilirim başka şekilde nasıl ispatlanır öğrenciye şu an bilemiyorum.

İspat yapılmaya lise ya da üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini düşünen katılımcıların tümü görüşme sürecinde ispat yapılması beklenen sayıların tekliği ve çiftliğine ilişkin önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılmasının uygun olduğunu ifade etmiştir. Ancak bu katılımcıların tümünün bu tür önermelerin doğruluklarını göstermek için neler yapılacağını bilmedikleri görülmüştür. Aşağıda ispat yapmaya üniversitede başlanması gerektiğini ifade eden Esra'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Esra: Yani onlar zaten tekin genel formülünü bileceklerdir sanırım 6 – 7 – 8'de, olabilir aslında yani kafalarını yormaları açısından, uygun olur.

Görüşmeci: Peki sen böyle önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencilerine göstermek için ne yaparsın?

Esra: Ya daha ona dair bir şey bilemiyorum daha ilk sınıfım ama ilerleyen zamanlarda öğrencilerim olursa öğreneceğim yani.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Esra görüşmede konuşulan önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılması gerektiğini ifade etse de önermelerin doğruluklarını göstermek için neler yapacağını bilmediğini belirtmiştir. İspat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden katılımcılardan biri olan Neşe de Esra'ya benzer şekilde görüşmedeki önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygun olduğunu ifade etmesine rağmen bunu göstermek için ne yapacağını bilmediğini yansıtmıştır. Aşağıda buna ilişkin Neşe'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Neşe: Sohbet etmesi aslında olabilir belki de öyle sezdirilebilir hani kağıda aktarmasın çocuk, ama düşünsün en azından.

Görüşmeci: Nasıl?

Neşe: Psikoloji dersinde de görüyoruz ya hocam öğrenmenin yollarından biri tam tersini sorun. O varsayım şeylerini biz de bu, bu olsun diye direkt verilenden yola çıkıyoruz ama çocuk tam tersinden düşünse hani, düşünme şeklini böyle biraz daha çoğaltsa daha kolay olur yani diğer zamanlardan

Görüşmeci: Bu tür önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencilerine sen nasıl gösterirsin?

Neşe: Ortaokul öğrencilerine ben ne yaparım, bilemedim şimdi. Ben şimdi kendim yapamıyorum ya nasıl anlatırım ki daha yani pek yapamadığım şeyi.

Alıntıdan Neşe'nin kendisinin de ispat yapamadığını değerlendirdiği ve ortaokul öğrencilerine bu tür önermelerin doğruluklarının nasıl göstereceğini bilmediği görülmektedir.

Katılımcılara ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini nasıl geliştirebilecekleri sorulduğunda ise katılımcılardan Esra ve Neşe soru sorarak, sorgulayarak, üç katılımcı Eda, Umut ve Naz ise seviyelerine uygun şekilde somut nesneler kullanarak geliştirebileceklerini ifade etmiştir. Nalan ise nasıl geliştireceğini bilmediğini ve ispatın kendisini matematikten soğuttuğunu belirtmiştir. Aşağıda ispat becerilerini geliştirmek için sorular soracağını, sorgulamalar yapacağını ifade eden katılımcılardan biri olan Esra'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Görüşmeci: Peki ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için ne yaparsın?

Esra: Yani sürekli sorular sorarım.

İspat becerisinin gelişimi için somut nesneler kullanacağını ifade eden katılımcılardan biri olan Eda'nın görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

Eda: Yani ilgilerini daha çok çekmeye çalışırım ve işte dediğim gibi böyle neden diye sorduklarında onlara somut şeylerle göstermeliyim yani soyut böyle, kafadan işlemlerle değil de daha çok nesnesel şeylerle

Nalan da ispat becerisinin geliştirilmesine yönelik neler yapması gerektiğini bilmediğini yansıtmış ve ispat yapmanın kendisinin matematiğe tutumunu olumsuz yönde etkilediğini ifade etmiştir. Aşağıda Nalan'ın bu duruma ilişkin görüşmesinden bir ispat verilmiştir.

Görüşmeci: Peki sen ispata ilişkin ortaokul öğrencilerini nasıl destekleyeceğini düşünüyorsun?

Nalan: Bilmiyorum. Zaten şu anda biz matematiğin temelinin ispatlarını görüyormuşuz. Ben matematik aşığı bir insan olarak hani büyüdüm ama matematiğin benim gördüğüm matematikten ibaret olmadığını burada gördüm.

Görüşmeci: Peki şuan ne düşünüyorsun?

Nalan: Şuan matematikten nefret ediyorum.

Görüşmeci: Neden?

Nalan: Yani şuradaki matematikten nefret ediyorum çünkü hem yapamıyorum hem de bana hitap etmiyormuş gibi geliyor. Geometri sınavında çıkan sayısal bir soru beni çok mutlu etmişti mesela.

3.2.3. İkinci sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri

İkinci sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri incelendiğinde katılımcılardan çoğunun (altı katılımcıdan beşi) ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ettiği görülmüştür. Katılımcılardan beşi (Sevgi, Ece, Betül, Selda ve Can) ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ederken bir katılımcı (Melih) lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade etmiştir. İspat yapmaya üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden katılımcı olmamıştır. Aşağıda ispat yapmanın ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden Selda'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Selda: Bence ilkokuldan ispatlanmalı bazı şeyler. İlkokul olmasa bile en azından bu konuda ışık yakılmalı yani böyle ezberlettirerek o şekilde kabul ettirilmemeli. Hani nereden gelip nereye gittiği çocuğa düşündürülmeli bence. İşine yaramayacak bir dünya şey öğretilmektense neyin nereden geldiğini bilerek az ama gerçek şeyler öğrenmesi bence daha iyi olur.

Altı katılımcıdan yalnızca Melih ispat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda buna ilişkin Melih'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Melih: İlkokul, üniversite ya şimdi biz ispat yapmaya üniversitede başladık, daha önceden yani lisede olsun, ilkokulda olsun hiç görmedik. Ama hani en azından nasıl diyeyim lisede olsun ufak basit bir ispat gösterseler daha verimli olur. Çünkü buraya gelince direk yani ispatlamaya başlayınca tamamen farklı bir şey olduğunu görüyoruz, yani fark ediyoruz. O yüzden zor geliyor, yani en azından ufak bir mesela hadi diyelim √2'nin irrasyonel olduğunu mesela lise 3'te veya 4. sınıfta bir gösterseler en azından üniversiteye gelince zorlanmayız diye düşünüyorum.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Melih kendi öğrenciliğini de göz önünde bulundurarak ispat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade etmiştir.

Katılımcılardan ikisi hariç diğer tüm katılımcılar görüşme sürecinde ispatlanması istenen önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılmasının uygun olduğunu ifade etmişlerdir. Katılımcılardan ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden Sevgi ise söz konusu önermelerin doğruluğunun ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygun olmadığını ifade etmiştir. Aşağıda görüşmedeki önermelerin doğruluklarının tartışılmasının uygun olduğunu ifade eden katılımcılardan biri olan Can'ın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Can: Bence belirli bir düzeyde tartışılmasının uygun olduğunu düşünüyorum.

Görüşmeci: Belirli düzeyden kastın nedir?

Can: Çocukların işte bilincine göre yani çocuklara göre belirli bir ispat hani kolay ispatlar veya da işte basit ispatlar

Görüşmeci: Kolay dediğin ne burada?

Can: Yani temel ispatlar işte iki tek sayının toplamı çifttir veya da hani böyle çok uçlara kaçmadan bu şekilde bazı basit ispatları en azından nasıl yapıldığını veya da ispatın ne demek olduğunu ispatlamanın nasıl olduğunu ne demek olduğunu en azından tartışılması gerektiğini veya da öğretilmesi gerektiğini düşünüyorum.

Katılımcılardan Sevgi, görüşme sürecinde ispat yapılması beklenen sayıların tekliği ve çiftliğine ilişkin önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışılmasının uygun olmadığını ifade etmiş hatta böyle bir tartışmayı yapamayacaklarını ve böyle bir tartışmanın gerekli olmadığını belirtmiştir. Sevgi'nin bu düşüncelerine ilişkin görüşmesinden bir kesit aşağıda verilmiştir.

Sevgi: Tartışmam uygun olur mu? Yok tabi ki olmaz yani

Görüşmeci: Neden?

Sevgi: Çünkü çocukların da belli bir seviyesi var, yani hani şu an biz bile bunlarda zorlanıyorsak gidip 6. sınıftaki 8. sınıftaki bir çocuğa ben bunları götürsem, bir de ne işimize yarar derler. Bilmiyorum çok onlar için gerekli değil bence bu.

Görüşmeci: Neden gerekli değil?

Sevgi: Ya çünkü onlar sınav odaklı. O işin detayını öğrenmek istemiyorlar. Yüzeysel öğreniyorlar, toplama ise toplama, çıkarma ise çıkarma. Onlar düşünmüyor tek sayı ile tek sayının çarpımı tektir, çifttir düşünmüyorlar sonuçta hani çarpma öğreniyorlar, toplama öğreniyorlar ama çarpımın sonucunun tek ya da çift olması bir genelleme yapmak onlar için önemli değil. O yüzden.

Görüşmeci: Sen ne düşünüyorsun peki?

Sevgi: Bence 6.sınıfta mesela bunu öğretmemiz doğru değil bence.

Görüşmeci: 8.sınıf için düşünecek olsan?

Sevgi: Yani nasıl söyleyeyim, ilerledikçe yaş olarak ilerledikçe hani biraz daha bence, keşke öğrenseler ki ileriye dönük bir şeyleri daha çabuk kavrarlar. Neyin nereden geldiğini bildiğin zaman daha çabuk kavrıyorsun, biz de şu an öyleyiz. Bazen hani formülü unutabiliyorsun ama nereden çıktığını bildiğin zaman faydası oluyor. Sınavda unutsan bile dönüp kendin ispatlayarak belki bir şeylerin nereden geldiğini kavrayabiliyorsun. Ama bunu küçük yaşlarda yapmak doğru değil bence. Onların bu kadar ince düşüneceğini sanmıyorum açıkçası.

Görüşmeci: Onlar düşünmeyeceği için mi diyorsun yoksa sen kendin

Sevgi: Onlar düşünemez ki o çocukları zorlamak da istemem yani.

Katılımcılara bu önermelerin doğruluklarını nasıl göstereceği sorulduğunda ise katılımcılardan Sevgi, Selda ve Can'ın öğrencilerinin seviyelerini dikkate alarak örnekler üzerinden verilen önermelerin doğruluğunu göstereceğini, Melih ve Selda'nın tek ve çift sayıları değişken de kullanarak temsillerini kullanacaklarını, Ece'nin ise kendi eksikleri olduğunu önce kendisinin öğrenmesi gerektiğini ifade ettiği görülmüştür. Örnekler üzerinden önermenin doğruluğunu göstermeye çalışacağını ifade eden katılımcılardan Sevgi'nin görüşmesinden bir ispat aşağıda verilmiştir.

> Sevgi: Daha basit düzeyde tek sayı çift sayının toplamı bakın işte çifttir tektir bunları daha basit düzeyde gösterebilirim.
>
> Görüşmeci: Basit düzey derken neyi kast ediyorsun?
>
> Sevgi: Mesela çift iki tane çift sayı alırım göstermek için. Genel olarak iki n'li l'li k'lı göstermem belki ama, konuyu anlatırım işte. Bakın çocuklar derim çift iki sayıyı topluyoruz derim örnek veririm mesela 2 ile 2'yi veririm ya da çift ile teki veririm 5 ile 2'yi veririm. Bunlar buradan geliyor, böyle bilin öyle derim. Genel olarak böyle n'li falan ispatlamam yani.

Melih ve Betül ise öğrencilerin seviyelerine uygun önermelerin doğruluğunu sayıların tekliği ve çiftliğini değişken ile temsil ederek göstereceklerini ifade etmişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan Melih'in görüşmesinden bir kesit verilmiştir.

> Melih: Göstermek için onların düzeyinde basit örnekler çözerim, gösteririm yani önermeleri.
>
> Görüşmeci: Örnek derken neyi kastettin?
>
> Melih: Ya işte daha basitini örnek dediğim daha basitini gösteririm o önermelerin. Yani onların seviyesine uygun onlara göstererek en azından bir altyapı gibi olur.
>
> Görüşmeci: Nasıl gösterirsin?
>
> Melih: Tek sayı mesela tek sayı diyeyim, tek sayı ile çift sayının toplamı ne olur tek olur, onun ispatını yani basit yolla gösterilebilir yani. Nasıl gösteririm ya işte o bize mesela tek sayı ifadesini ortaokulda olsun nasıl gördük, sadece dediğim gibi 0, 2, 4, 6, 8 dediler. Çift sayı 1, 3, 5, 7, 9 tek sayı direk böyle gösterdiler. Ama en azından böyle bu 2k+1 mesela o eşittir tek sayı, tek sayıları böyle gösteririz çift sayıları 2k şeklinde gösteririz. Öyle bir gösterme olmadığı için öğrenciler ne bileyim yani direk tek çift deyince rakamlara bakıyorlar. Matematiksel olarak bilmedikleri için onları yani dediğim gibi tek sayı ile çift sayının toplamı tektir dedim, onu mesela o şekilde gösteririm. 2k+1 ile 2k mesela. Onu o şekilde gösteririm öğrencinin matematikle göstermesini öğretmiş olurum.

Ece ise verilen önermenin doğruluklarını gösterebilmek için önce kendi eksiklerini tamamlaması gerektiğini ifade etmiştir. Aşağıda Ece'nin görüşmesinden bu duruma ilişkin bir alıntı verilmiştir.

> Ece: Önce kendim öğrenirim.
>
> Görüşmeci: Neden öyle dedin?

> Ece: Hala eksikliklerimin olduğunu düşünüyorum çünkü. Hani tereddütte kalıyorum, sürekli kendimle çelişiyorum. Onları önce bir aşmam gerekir. Sonra ona göre ben nerede takılıyorsam, onların takılabileceği noktaları önce bir düşünürüm ona göre öğretebilirim.

Katılımcıların öğrencilerin ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabilecekleri hakkında az da olsa bilgi sahibi oldukları görülmüştür. Katılımcılara ortaokul öğrencilerinin ispatlama becerilerini nasıl geliştirebilecekleri sorulduğunda Sevgi'nin öğrencilerini sadece problem çözümlerinde eşitliklerin iki tarafını da düşünmeye yönlendireceğini ifade ettiği, Melih ve Can'ın ispatlar yaptıracaklarını belirttiği, Selda ve Ece'nin ise kendilerini geliştirmeleri gerektiğini ifade ettikleri görülmüştür. Betül ise ispat becerisinin gelişimi için neler yapması gerektiğini bilmediğini ifade etmiştir. Aşağıda Sevgi'nin öğrencilerin ispatlama becerilerini nasıl destekleyeceğine ilişkin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Sevgi: Ne yaparım? Ya mesela problemler çözülüyor mesela. İspatlama becerisi derken bazen bir eşitlik yazıyorsun. Buradan da çözebilirsin, buradan da çözebilirsin. Sonuçta ikisi de eşitse hangi taraftan çözsen ona eşit olduğunu ispatlamış oluyorsun. Tek yönlü değil yani. Öğrenciyi iki yönlü düşünmeye yöneltirim. Biri buradan çözerse öbürü de karşı taraftan çözsün mesela. İkisinin eşit olduğunu görebilsinler, öyle düşünüyorum.

Öğrencilerine ispatlar yaptıracaklarını ifade eden katılımcılardan Melih'in görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

> Melih: İspatlama becerilerini geliştirmek için ya en azından işte dediğim gibi basit örnekler, onların seviyesine uygun. Çünkü yaşları nasıl diyeyim daha yeni öğreniyorlar. İspat neler yapabiliriz aslında yani dediğim gibi örneklerle olabilir ya
>
> Görüşmeci: Örnekler derken neyi kast ediyorsun?
>
> Melih: Ya işte örnek dediğim basit ispatlar yaptırırım.

Kendini geliştirmesi gerektiğini ifade eden katılımcılardan Selda'nın görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

> Selda: Tabi ki bildiğimi yeterli görmüyorum, çok daha iyisini bilmeliydim. Daha iyi açıklamalar yapmalıydım, kendimi geliştirmeliyim. Ondan sonra onları geliştiririm.

Betül ise öğrencilerinde ispatlama becerisini geliştirmek için neler yapacağını bilmediğini aşağıdaki biçimde ifade etmiştir.

> Betül: Bilmiyorum aslında tam da düşünmedim çok fazla.

3.2.4. Üçüncü sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri

Üçüncü sınıftaki katılımcılardan çoğu (altı katılımcıdan beşi) ispatın ilköğretim düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade ederken bir katılımcı ise ortaokul öğrencileri için ispat yapmanın uygun olmadığını belirterek ispatın üniversite düzeyinde yapılmaya başlanması gerektiğini belirtmiştir. Katılımcılardan Ruhi hariç tüm katılımcılar (Nihal, Emel, Kübra, Hale ve Miray) ispat yapmanın ilköğretim düzeyinde başladığını ifade etmiştir. Aşağıda bu katılımcılardan Nihal'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Nihal: Yani bir kere lisede var. Geometride falan ispatlar var. Ama acaba ortaokulda? Mesela 8. sınıfta da var. O olasılıkların kümelerle falan ispatı var. Gerçi kümeler konusu kaldırıldı ama yani 8. sınıfta da var. 7.sınıfta acaba cebirsel ifadelerde falan özdeşliklerde falan… Evet var. Mesela özdeşlikleri nerde görüyorlar? Özdeşlikleri de 8'de görüyorlar dimi? 8'de şey var mesela karelerle özdeşliklerin ispatı var. x^2-1'in ispatı karelerle falan. O var. Kaçıncı sınıfta? Geometriden düşünüyorum ama. Mesela alan konuları tam 6'dan başlıyor. Kaçıncı sınıftan başlıyor alan konuları onu bilmiyorum da, mesela dikdörtgen alanının yarısından dik üçgen alanını buluyorlar. Bu da aslında ispattan yapılabilir. Evet bu da ispatlanabilir. Dikdörtgenin alanını ne zaman görüyorlar? 4.sınıfta bile görüyorlar aslında. Mesela bir dikdörtgenin alanı axb'dir. Yani ortaokulda var aslında.

Yukarıdaki alıntıdan Nihal'in ortaokul müfredatına hakim olduğu ve buna göre ispat yapmanın ortaokul öğrencilerine uygunluğunu değerlendirdiği görülmektedir.

İspat yapmanın üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden Ruhi ise kendi öğrenciliğini de göz önünde bulundurarak ispat yapmanın ortaokul öğrencileri için gerekli olmadığını ifade etmiştir. Ruhi'nin bu duruma ilişkin görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

> Ruhi: Bence direkt üniversite
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Ruhi: Üniversite 1, ben o şekilde başladım. Daha önce çok ispatlar yapmadık, direkt sorgulamadan yapıyorduk daha öncesinde. Üniversitede başladık ispat yapmaya, genel matematik dersi ile beraber.
>
> Görüşmeci: Daha önce hiç ispat yaptın mı?
>
> Ruhi: Yapmışımdır illa ki, geometri sorularında falan ama çok da gerek olduğunu düşünmüyorum.
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Ruhi: Çünkü hani zaten ispatlanmış hani nasıl söyleyeyim, görmek gerekiyor ama yüzeysel olarak görmek gerekiyor bence.
>
> Görüşmeci: Yüzeysel derken neyi kastediyorsun?
>
> Ruhi: Hani gösterip geçmek manasında

İspatlamanın ilköğretim düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden beş katılımcının da görüşmede ifade edilen sayıların tekliği ve çiftliğine ilişkin önermelerin doğruluklarının tartışmanın uygun olacağını ifade etmelerinin yanı sıra bu önermelerin doğruluklarını gösterirken değişken kullanarak cebirsel olarak gösterimler yapacaklarını da ifade ettikleri görülmüştür. Aşağıda buna ilişkin Nihal'in görüşmesinden bir kesit verilmiştir.

> Nihal: Yani olur tabi ki. Sayılar kaçıncı sınıfta? Eğer 6.sınıftalarsa ya da 6, 7, 8.sınıflar için onlar cebirsel ifadelerle tanışıyorlar o zaman. Mesela neyi ispatlayabiliriz? İşte bir çift sayının karesi de çift sayıdır. Bunu öğrenciye ezberletmek yerine ya da bir değer koymak yerine hani 2n'dir. 2n'nin karesi $4n^2$ dir şeklinde ufak bir ispat yapılabilir. Hani daha akılda kalıcı olması için. Yani yapılabilir 6.sınıftan itibaren.

Görüşmedeki sayıların ve tekliği ve çiftliğine ilişin önermelerin doğruluklarını ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygun olmadığını ifade eden tek katılımcı, ispatın üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden Ruhi olmuştur. Ruhi ispat yapmanın ortaokul öğrencileri için zor olacağını, öğrencilerin soyut düşünemeyeceklerini ifade ettiği görülmüştür. Aşağıda Ruhi'nin bu duruma ilişkin görüşmesinden alıntı verilmiştir.

> Ruhi: Uygun değildir, olmaz bence
>
> Görüşmeci: Neden?
>
> Ruhi: Çünkü konuya hakim olmak gerekiyor. Ben bile yaparken sıkıntı çektim.
>
> Görüşmeci: Aslında sayıların tekliği çiftliği ortaokuldaki öğrencilerin bildiği bir şey
>
> Ruhi: Evet bildiğimiz bir şey aslında ama ispat yaparken biraz daha farklı oluyor.
>
> Görüşmeci: Nasıl oluyor?
>
> Ruhi: Biraz daha soyut düşünmek gerekiyor yaparken, o yüzden.
>
> Görüşmeci: Ortaokul soyut düşünebilir mi?
>
> Ruhi: Düşünemez o kadarını, evet düşünemez bence.

Ruhi'nin ortaokul düzeyinde görüşmede ifade edilen önermelerinin doğruluklarını göstermek için ispat yapılması gerekmediğini belirttiği de görülmüştür. Ruhi tek ve çift sayıları değişken kullanarak temsil etmenin yeterli olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda buna ilişkin Ruhi'nin görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Ruhi: Tekliğini çiftliğini göstermek yeterli olur bence hani çokta ispatlamaya gerek yok bence.
>
> Görüşmeci: Nasıl düşünüyorsun?
>
> Ruhi: Mesela tek sayı dediğimiz zaman 2k+1 şeklinde olduğunu bilmesi yeterli bence. Aynı şekilde çift olduğunu bilmesi için 2n şeklinde yazabileceğimizi düşünmeli. Yani ikiye bölünebilen, o şekilde bilmesi yeterli bence.
>
> Görüşmeci: İspat yapmaya gerek yok mudur diyorsun?
>
> Ruhi: Yoktur diyorum
>
> Görüşmeci: Neden yoktur?
>
> Ruhi: İspat yapsak bile aklında çok kalacağını zannetmiyorum o ispatın.

Görüşmeci: Neden öyle düşünüyorsun?

Ruhi: Ben mesela şimdiye kadar o ispatları bilmediğim halde çoğu şeyi yapabiliyorum.

Görüşmeci: Çoğu şeyi derken neyi kastediyorsun?

Ruhi: Problemlerin çoğunu yapabiliyorum

Görüşmeci: Problem dediğin şey ne?

Ruhi: Problem mesela hani bir problemde o sayının çift olduğunu bilmem yeterli. Çift sayıların sonsuz olduğunu falan çok da bilmeye gerek yok.

Alıntıdan da görüldüğü gibi Ruhi ispat yapmadan da problem çözebildiğini, ispatların zaten akılda kalmadığını ve ispat yapmanın gerekli olmadığını ifade etmiştir.

Ruhi hariç beş katılımcı da öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için çeşitli etkinlikler yapacaklarını ifade etmiş ve öğrencilerini verilen ifadelerin doğruluklarını sorgulamaya yönlendireceklerini belirtmişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan Kübra'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Kübra: Aslında tablo yapabilirim, en kafama yatan şey tablo. Mesela basit değerlerden çoğa yani tüme varmak istiyorum. Bunları gösteririm. Eğer bir yanılgıya düşerlerse de mesela değer vermelerini isteyebilirim. Onların doğruluğunu sağlıyor mu sağlamıyor mu bakmalarını isteyebilirim. Yine kendileri görmüş olur, öyle yapabilirim. Tablodan daha rahat görebileceklerini düşünüyorum. Çünkü hem görsellik katıyor, hem de orada deneyip de bakabilirler.

İspat öğretimine üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini savunan katılımcı ise öğrencilerinin ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabileceği hakkında bilgi sahibi olmadığını ifade etmiştir.

Görüşmeci: Peki sen ortaokul öğrencilerinin hani ispatlama becerilerini geliştirmek için neler yaparsın?

Ruhi: Bilemeyeceğim.

3.2.5. Dördüncü sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşleri

Katılımcılardan dördü (Metin, Deniz, Ayla ve Leyla) ispat yapmaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade ederken bir katılımcı (Gizem) lise, bir katılımcı (Burcu) ise üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini belirtmiştir. Aşağıda ispat yapamaya ilköğretim düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden Metin'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Metin: Bence ortaokul seviyesi uygundur, ama daha alt seviyelere de kademeli bir şekilde indirilmesi gerekiyor diye düşünüyorum.

Görüşmeci: Kademeli derken neyi kastediyorsun?

Metin: Yani öğrenciye hazır bulunuşluğu yeterli değilse ortaokulda, birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü sınıfta eğer yeterli bir bilişsel yapıya ulaşmamışsa ortaokul çocuğu anlayamıyor. Yani eğer alt kademelere indirgeyeceksek, çocuğa gerekli donanımın verilmesi gerekiyor.

Gizem, ispat yapmaya önce üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini ifade etmesine rağmen sonra kendi düşüncesinin lise düzeyinde başlanması gerektiğini belirtmiştir. Gizem'in görüşmesinden bir alıntı aşağıda verilmiştir.

Gizem: Bence üniversitede başlar

Görüşmeci: Neden?

Gizem: Ya çünkü lisede de verilen eğitim sınava yönelik bir eğitim olduğu için test sınavına hazırlanıyor. Sonuçta o yüzden de hani pek üzerinde öyle ispatın durulmuyor da direkt veriliyor hani bu budur diye.

Görüşmeci: Peki sen hangi düzeyde verilmesi gerektiğini düşünüyorsun

Gizem: Ben lisenin başında verilmesi gerektiğini düşünüyorum. Eğer normal bir eğitim sistemi, sınavsız, sınavların test şeklinde olmadığı bir eğitim sistemimiz olsaydı, ben bunun lisede verilmesi daha uygun derim.

Burcu ise ispat yapmanın üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini ifade etmiştir. Ortaokul öğrencileri için ispat yapmanın uygun olmadığını ifade eden Burcu, eğer iyi bir eğitim alınmışsa lise düzeyinde de ispata yapmaya başlanabileceğini belirtmiştir. Aşağıda Burcu'nun görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Burcu: Yani biz tümevarımı lisede görmüştük ama mesela benim için lisede çok anlamsız gelmişti. Anlayamamıştım, bence üniversite düzeyinde başlar diye düşünüyorum. Ya daha doğrusu görünen eğitimden de kaynaklı olabilir aslında. İspat yapabilecek ya da ispatı anlayabilecek düzeyde matematik görmediğinde o düzeyde çok zor gelebiliyor. Yani bir kişinin ispatı anlaması zor diye düşünüyorum ama iyi bir eğitim verilirse lisede de olabilir bence ama ortaokulda değil.

Görüşmeci: Neden?

Burcu: Ya ortaokul düzeyinde daha tam olarak mesela şey bile oturmuyor sanki tam sayı, rasyonel sayı, reel sayı kavramları. Çünkü ispat yaparken genellikle onlardan yararlanıyoruz. Ama onlar bile tam olarak hangi küme hangisini kapsıyor tam olarak oturmadığı için ispatta zor bence

İspat öğretimine lise ve üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini iki katılımcı (Burcu ve Gizem) ile ilköğretim düzeyinde yapılmaya başlanması gerektiğini ifade eden bir katılımcı (Metin), soyut düşünemediklerinden ortaokul öğrencileri için cebirsel olarak ispat yapmanın uygun olmadığını belirtmiştir. Bu katılımcılar ortaokul öğrencilerinin soyut düşünemedikleri için daha çok örnekler üzerinden önermelerin doğruluklarının gösterilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan biri olan Gizem'in görüşmesinden alıntı verilmiştir.

Gizem: Tartışma yapmak yani tartışma yapılmamalı ortaokul öğrencileri ile

Görüşmeci: Neden?

Gizem: Çünkü gelişimlerini tamamlamış olmaları gerekiyor. Daha biz ortaokul öğrencilerine basit anlamda ne bileyim tam sayılarda toplama, çıkarma, şunu bunu anlatırken bile modeller kullanıyoruz. Materyaller kullanıyoruz. Zihinsel gelişimleri çünkü daha uygun değil ispata, daha soyut düşünebilecek hale gelmeleri gerekiyor. Lisede bu soyut düşünmeyi gerçekleştirebilirler, ama henüz bir ortaokul öğrencisi daha tam o aşamada değil. Evet, doğrulukları yanlışlıkları söylenebilir. Hani böyle bir sayı yoktur örnek verir ama şu ispatlama aşaması olmaz yani ortaokulda.

Geriye kalan üç katılımcı (Deniz, Ayla ve Leyla) ise önermelerin doğruluklarının ortaokul öğrencileri ile tartışmanın uygun olduğunu ifade etmiş ve cebirsel olarak da ispatlar yapılabileceğini ifade etmişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan Deniz'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Deniz: Ortaokul öğrencileri ile tartışılabilir mi mesela n^2, n tek ise burada bunu yapabilirler çünkü biliyorlar. Ben de yazıyorum ya böyle yazdım ya $2k+1$'ler. Orada sayıların çift olma durumlarını tek olma durumlarını bir şekilde inceliyorlar diye biliyorum, hatırlıyorum stajdan da gördüğüm kadarıyla. O yüzden mesela 2 ile tek sayı ile çift sayı çarpılırsa ne olduğunu bunları bildikleri için yani bence yazamaz ama onlar da konuşarak bence verebilirlermiş gibi geliyor. Sonuçta bir sayının karesinin onun iki kez kendisi ile çarpılması olduğunu biliyorlar, e çift ile çifti çarparsan tek de tekdir bu şekilde konuşuyorlar diye hani biliyorum o yüzden konuşabilir çocuklarla diye düşünüyorum

İspatın ilköğretim düzeyinde başlaması gerektiğini belirten dört katılımcı da ortaokul öğrencilerinin düzeylerine uygun olarak ispatlar yaptırılması gerektiğini belirtmiştir. Bu dört katılımcı öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için Metin deneme yanılma, tablo oluşturma gibi çeşitli yöntemlerin kullanılabileceğini, Ayla, Deniz ve Leyla etkinlikler yapacaklarını belirtmiştir. Aşağıda Metin'in ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

Metin: Doğruluğunu göstermek için yani deneme çeşitli yöntemler var işte, tablo oluşturma gibi. Deneme yanılma, işte bu örüntü bulma. Bağıntı bulma ya da işte daha küçük parçalara ayırıp hani onların içerisinde irdeleme gibi hani çeşitli şeyler düşünülebilir. Mesela soruda da vardı n n^2 tek ise n tektir yanlış hatırlamıyorsam. Burada çocuk tek tek deneyecek mesela 1 diyecek, 3 diyecek, -1, -3 buradan genel bir yapıya ulaşmaya çalışacak, bu şekilde olabilir diye düşünüyorum.

Ayla, Deniz ve Leyla çeşitli etkinlikler yapacaklarını belirtmelerine rağmen açıkça neler yapılabileceğini ifade etmemişlerdir. Aşağıda bu katılımcılardan Ayla'nın görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Ayla: Materyaller hazırlarım. Daha görselleştiririm konuyu. İspat becerisini artırır mı şu an tam emin değilim. Ama en azından denerim hani.

İspat yapmaya üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden Burcu ise öğrencilerin ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabileceği hakkında bilgi sahibi olmadığını ifade etmiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin Burcu'nun görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Burcu: Genel olarak düşündüğümde yani bu açıdan hiç düşünmemiştim. Zaten böyle bir şey üzerine hiç üniversitede konuşmadık sanırım. Yani o yüzden hiç düşünmemiştim bu konuyu. Bilmiyorum.

İspat yapmaya lise düzeyinde başlanması gerektiğini ifade eden Gizem de kendi öğrenciliğini de göz önünde bulundurarak üniversitede ispatların ezberlendiğini ifade etmiş, ispatlama becerisinin geliştirilmesi için çeşitli ispat yöntemlerinin gösterilmesi gerektiğini belirtmiştir. Aşağıda buna ilişkin Gizem'in görüşmesinden bir alıntı verilmiştir.

> Gizem: İspatla ilgili, şöyle, mesela biz de üniversitede ispatlıyoruz şöyle böyle ama ben kendimden ve diğer arkadaşlarımdan da gördüğüm kadarıyla, bizim ispatlama becerimiz ezberden daha öteye geçmiyor.
>
> Görüşmeci: Neden öyle düşünüyorsun?
>
> Gizem: Çünkü mesela hocalar da tahtaya x eşittir şu için yazıyorlar. Oraya bir şey yazıyorlar, onu gerekçelendirerek yazıyorlar. Ama hani ben diyorum normalde benim aklıma nasıl gelsin hani onu oraya yazmak. Benim aklıma o anda nasıl gelsin. Tamam onu ispatlayan kişi evet onu yapmış. Birtakım bilinen şeylerden yola çıkıyor ama o bilinen şeyleri hani neyi nerede kullanacağımı aslında tam olarak bilemem. Bu sadece benim değil diğer bütün arkadaşlarımda da bu şekilde hani, sınavlara falan çalışırken de defterden ezbere genelde hani o şekilde oldu. Ve bunun geliştirilmesi gerekiyor bence. Daha fazla sorgulama becerisi hani neleri mesela direkt tahtaya hani n eşittir şudur işte bu yüzden bunu bunu kullandık değil de hani başka başka alternatiflerin de üretilmesi gerekiyor. Sorunun tek bir ispat yöntemi yerine bir sürü ispat yöntemlerinin gösterilmesi gerekiyor, bu şekilde ilerletilmelidir diye düşünüyorum ispatlama becerisini.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde katılımcılarla yapılan klinik görüşmelerden elde edilen bulgulara dayanarak ulaşılan sonuçlara, bu sonuçların alan yazındaki çalışmalarla karşılaştırılarak tartışılmasına ve gelecekte yapılacak olan araştırmalara ilişkin önerilere yer verilmiştir.

4.1. Sonuçlar

Burada tüm sınıf düzeyindeki katılımcıların ispat yapma süreçleri, katılımcıların sınıf düzeylerine göre ispatlama süreçleri, katılımcıların akademik başarılarına göre ispatlama süreçleri ve katılımcıların ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar verilmiştir.

4.1.1. Katılımcıların ispat yapma süreçlerine ilişkin sonuçlar

Bu bölümde sırasıyla birinci sınıfa yeni başlayan, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar verilmiştir.

4.1.1.1. Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcılardan klinik görüşmelerdeki ispatlama süreçlerinin tümünü başarılı bir şekilde tamamlayan olmamıştır. Katılımcılardan en başarılı olanlar altı ispatlama sorusundan yalnızca ikisinde ispatlama sürecinde başarılı olurken soruların tümünde ispatlama süreçlerinde başarı gösteremeyen katılımcılar da olmuştur. Katılımcıların genel olarak verilen önermeyi ispatlamak için gerekli ispat yöntemi (ispat çerçevesi) bilgisine sahip olmadıkları, ispata nasıl başlayıp nasıl bitireceklerini bilmedikleri görülmüştür. Katılımcılar verilen önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu doğru bir şekilde ifade edebilmelerine rağmen bunun nedenini açıkça ortaya koyamamışlardır. Ayrıca katılımcıların ispatlama süreçleri için gerekli olan kavramsal bilgilerinde de (fonksiyon, tek ve çift sayı) eksiklikler olduğu görülmüştür. Katılımcılar ispat yöntemi bilgisi ile ispat için gerekli olan kavramsal bilgiye sahip olmadıklarından hem ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamış hem de ispatın problem merkezli kısmını çözememişlerdir. Katılımcıların ispat yaparken matematik dili kullanmak yerine anadil kullandıkları ve özellikle tek ve çift sayıları temsil edemedikleri görülmüştür.

Katılımcıların ispat yöntemi bilgilerinin oldukça zayıf olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine üç, tüketerek ispat yöntemi bilgisine iki, doğrudan ispat yöntemi bilgisine bir katılımcının sahip olduğu görülmüştür. Katılımcıların tümü varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmasına rağmen bu yöntemi kullanamamış, ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamıştır. Katılımcıların karşıt ters ve olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine ise sahip olmadıkları görülmüştür. Katılımcıların özellikle doğrudan, karşıt ters ve olmayana ergi ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermelerin ispatlama süreçlerinde ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları görülmüştür. Aşağıda 1. sınıfa yeni başlayan katılımcıların klinik görüşmede soruluş sırasına göre her bir ispatlama sorusunda ispatın formal-retorik ve problem merkezli kısımlarına ilişkin yaptıkları kısaca özetlenmiştir.

- Katılımcılardan doğru bir şekilde tüketerek ispat yapabilen katılımcı olmamıştır. Katılımcıların fonksiyon kavram bilgilerinin genel olarak (altı katılımcıdan beşi) eksik olduğu görülmüştür. Katılımcılar tanım ve değer kümesi arasındaki eşleşmenin kuralını açık ve eksiksiz bir şekilde ifade edemediklerinden ispatın problem merkezli kısmını çözememişlerdir. Bunun yanı sıra yalnızca iki katılımcı tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Geriye kalan dört katılımcı tanım kümesinden tüm elemanları alarak bu elemanların görüntülerini eksik de olsa kendi fonksiyon kavram bilgilerine göre değerlendirmelerini bir ispat olarak değerlendirmediklerini ifade ederek tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını yansıtmıştır. Buradan katılımcıların ispatın formal-retorik kısmının nasıl oluşturulacağını bilmedikleri söylenebilir.
- Katılımcılardan başarılı bir şekilde doğrudan ispat yapan olmamıştır. Katılımcılardan yalnızca biri doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamış, ispatında anadil kullanmasının yanı sıra birkaç örnek üzerinden denemeler yapmıştır. Geriye kalan beş katılımcının ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları görülmüştür. Bu beş katılımcıdan ikisi ispat yapmak için herhangi bir girişimde bulunmazken, üçü ise yaptıklarını ispat olarak değerlendirmemesine rağmen yalnızca tanım kümesinden aldığı birkaç elemanın görüntüsünü incelemiştir. Katılımcıların tümü

keyfi bir eleman için fonksiyon olma koşulunun sağlandığını göstermeye çalışarak genelleme yapmaları gerektiğini ifade etmemiştir.

- Katılımcılardan karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermeyi başarı ile ispatlayan olmamıştır. Katılımcıların ispatın formal-retorik kısmını oluşturmaya çalıştıkları ancak verilen önermenin ispatı için uygun olan ispat yöntemini seçemedikleri görülmüştür. Katılımcılardan ikisi p ve q önerme olmak üzere $p \Rightarrow q$ biçiminde verilen önermenin mantıksal yapısına dikkat ederek hipotezi (p) kabul edip hükmü (q) göstermeye çalışarak ispat için doğrudan ispat yöntemini seçmiştir. Ancak verilen önermenin ispatı için bu ispat yönteminin kullanımı uygun değildir. Geriye kalan katılımcılar ise önermenin mantıksal yapısına da dikkat etmeyerek ispat için hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak (converse-error), hatalı bir şekilde ispatın formal-retorik kısmını oluşturmuşlardır. Ayrıca katılımcıların tümü problem merkezli kısmı çözmek için doğal sayının tekliği ve çiftliği kavram bilgilerini uygun bir şekilde kullanamamıştır.
- Katılımcıların en başarılı oldukları ispatlama süreci, aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatında olmuştur. Evrensel niceleyici kullanılarak ifade edilen önermenin yanlışlığını ispatlamak için altı katılımcıdan üçü önermeyi sağlamayan bir reel sayı bularak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüş ve bunun da bir ispat olduğunu değerlendirerek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduklarını göstermiştir. Geriye kalan üç katılımcıdan ikisi önermeyi sağlamayan bir örnek bularak ispatın problem merkezli kısmını çözse de değer vermenin ispat olmayacağını değerlendirmiştir. Bu katılımcıların aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip değildir. Ayrıca bir katılımcı da verdiği bir reel sayı örneği üzerinden önermenin doğru olduğunu ifade etmiştir. Bu katılımcı yaptığının bir ispat olmadığını değerlendirmiştir ancak bu katılımcının ispat yapmak için formal-retorik kısmı oluşturamadığı, problem merkezli kısmı da çözemediği görüşmüştür.
- Katılımcıların tümünün bir tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olamayacağını ispatlamalarının istendiği soruda olmayana ergi ispatını başarılı bir şekilde tamamlayamadığı görülmüştür. Katılımcılardan üçü ispat için herhangi bir girişimde bulunmazken üçü ise herhangi bir ispat yöntemi kullanmayarak yalnızca önermenin doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Katılımcıların bu önermenin ispatı

için formal-retorik kısmı oluşturamadıkları ve problem merkezli kısmı da çözemedikleri görülmüştür. Ayrıca katılımcılar karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi ispatlama süreçlerinde olduğu gibi bu önermenin ispatlama sürecinde de genel olarak tek ve çift tamsayıları matematiksel olarak temsil edememişlerdir. Katılımcılardan yalnızca biri matematiksel olarak tek ve çift tamsayıyı matematiksel olarak doğru bir şekilde temsil etmiş ama ispat yapamamıştır.

- Varlık ispatını başarılı bir şekilde tamamlayan iki katılımcı olmuştur. Katılımcıların tümünün varlık ispat yöntemi bilgisine sahip oldukları görülmüş ancak başarılı olan iki katılımcı dışında kalan dört katılımcının ispatın formal-retorik kısmını nasıl oluşturacaklarını, problem merkezli kısmı nasıl çözeceklerini bilmediklerinden varlık ispat yöntemini kullanmaları beklenen soruda başarılı olamadıkları görülmüştür. Bu katılımcılar önermenin neden doğru olduğuna ilişkin bir açıklama yapamamış, yalnızca önermeyi sağlayan bir sayı bulunabileceğini ve bu nedenle de önermenin doğru olduğunu ifade etmişlerdir. Katılımcıların tümünün önermede kullanılan varlık niceleyicine dikkat ettikleri ve reel sayı kavram bilgilerine dayanarak da önermeyi sağlayan bir sayının bulunabileceğini ifade ettikleri görülmüştür.

4.1.1.2. Birinci sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

Birinci sınıftaki katılımcılardan ispatlama süreçlerinin tümünde başarılı olan katılımcıya rastlanmamıştır. Katılımcılardan en başarılı olan katılımcı altı ispatlama sorusundan üçünde ispatlama sürecinde başarılı olurken soruların tümünde ispatlama süreçlerinde başarı gösteremeyen katılımcı da olmuştur. Katılımcıların verilen önermeyi ispatlamak için gerekli ispat yöntemi (ispat çerçevesi) bilgisine sahip olmadıkları ya da ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi kullanamayarak ispatın problem merkezli kısmını çözemedikleri görülmüştür. Katılımcılar genel olarak verilen önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu doğru bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Ayrıca katılımcıların ispatlama süreçleri için gerekli olan kavramsal bilgilerinde (fonksiyon, tek ve çift sayı) eksiklikler olduğu görülmüştür. Katılımcıların çoğu (altı katılımcıdan beşi) tek ve çift sayı kavram bilgisini genel olarak matematik dilinde doğru bir şekilde temsil edebilmiş ancak çok azı doğru fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmayan katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları için ispatın problem merkezli kısmını açığa çıkaramamışlar ve ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmasına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi doğru bir şekilde kullanamamaktan dolayı ispatlama sürecinde başarısız olan katılımcılar da olmuştur.

Katılımcıların ispat yöntemi bilgileri birinci sınıfa yeni başlayan katılımcılara göre daha iyi olmasına rağmen yine de ispat yöntemi bilgilerinin zayıf olduğu, verilen önermelerin ispatına ilişkin uygun ispat yöntemini seçemedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine dört, tüketerek ispat yöntemi bilgisine iki, doğrudan ispat yöntemi bilgisine iki, karşıt ters ispat yöntemi bilgisine iki, olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine üç katılımcının sahip olduğu görülmüştür. Katılımcıların yalnızca biri ise varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Katılımcıların ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen zaman zaman bu bilgiyi kullanamayarak ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları ya da ispat için gerekli olan kavramsal bilgiye sahip olmalarına rağmen formal-retorik kısmı doğru bir şekilde oluşturamadıklarından ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür. Aşağıda 1. Sınıftaki katılımcıların klinik görüşmede soruluş sırasına göre her bir ispatlama sorusunda ispatın formal-retorik ve problem merkezli kısımlarına ilişkin yaptıkları kısaca özetlenmiştir.

- Katılımcılardan ikisi tüketerek ispat yapmaları beklenen sonlu sayıda elemanı olan bir küme üzerinde tanımlı bağıntının fonksiyon belirttiğini doğru bir şekilde ifade etmiş ve tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüş, ispatlama sürecini başarı ile tamamlamıştır. Geriye kalan dört katılımcı ise verilen bağıntının fonksiyon belirttiğini ifade etmesine ve ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmelerine rağmen tanım kümesinden tüm elemanları verilen eşitlikte yerine koyarak görüntülerin değer kümesinde olma durumunu değerlendirmelerinin bir ispat olamayacağın ifade ederek tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını göstermişlerdir. Katılımcılardan yalnızca biri eksik fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiş ve bu katılımcı da eksik kavram bilgisi doğrultusunda verilen eşitliğin fonksiyon olduğunu belirtmiş ama yaptıklarını bir ispat olarak değerlendirmeyerek tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır. Buradan katılımcıların genel olarak tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından ispatın formal-retorik kısmının nasıl oluşturulacağını bilmedikleri görülmüştür.

- Katılımcılardan doğrudan ispat yapmalarının beklendiği sonsuz elemanlı bir küme üzerinde tanımlı bağıntının fonksiyon olduğunu göstermeleri istenen soruda başarılı bir şekilde ispat yapan katılımcı olmamıştır. Katılımcılardan yalnızca ikisi doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, ancak bu katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturmalarına rağmen problem merkezli kısmı tam olarak çözememişlerdir. Katılımcılar yalnızca tanım kümesinden aldıkları keyfi elemana karşılık gelen görüntünün değer kümesinde olma durumunu değerlendirmiş, görüntünün tek olduğuna ilişkin bir açıklamada bulunmamışlardır. Geriye kalan dört katılımcı ise ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamış ve dolayısıyla ispatın problem merkezli kısmını açığa çıkaramayarak ispatlama sürecinde başarısız olmuşlardır.
- Katılımcılardan karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermeyi başarı ile ispatlayan iki katılımcı olmuştur. Bu katılımcılar karşıt ters ispat yöntemi bilgisini kullanarak ispatın formal-retorik kısmını doğru bir şekilde oluşturmuşlar ve gerekli olan tek ve çift doğal sayı kavram bilgilerini de kullanarak ispatın problem merkezli kısmını da doğru bir şekilde çözmüşlerdir. Geriye kalan dört katılımcı ise önermenin mantıksal yapısına dikkat etmeyerek ispat için hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak (converse-error), hatalı bir şekilde ispatın formal-retorik kısmını oluşturmuşlardır. Bu dört katılımcıdan biri ise hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışmanın dışında doğrudan ispat yöntemini ve hatta karşıt ters ispat yöntemini de kullanmaya çalıştığı görülmüştür. Ancak katılımcının verilen önermenin ispatı için uygun olan ve olmayan ispat yöntemlerini seçmesi, ispatı bilinçli bir şekilde yapmadığını düşündürmüştür. Ayrıca katılımcıların genel olarak problem merkezli kısmı çözmek için doğal sayının tekliği ve çiftliği kavram bilgilerini uygun bir şekilde kullandıkları görülmüştür.
- Katılımcıların, 1. Sınıfa yeni başlayan katılımcılar da olduğu gibi en başarılı oldukları ispatlama süreci, aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatında olmuştur. Evrensel niceleyici kullanılarak ifade edilen önermenin yanlışlığını ispatlamak için altı katılımcıdan dördü önermeyi sağlamayan bir reel sayı bularak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüş ve bunun da bir ispat olduğunu değerlendirerek aksine örnek verme ispat

yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Geriye kalan iki katılımcı ise önermeyi sağlamayan bir örnek bularak ispatın problem merkezli kısmını çözse de yaptıklarının yalnızca önermenin yanlış olduğunu göstermek olduğunu ifade ederek, yaptıklarının ispat olmayacağını değerlendirmiştir. Bu katılımcıların aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülmektedir.

- Katılımcıların tümünün bir tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olamayacağını ispatlamalarının istendiği soruda olmayana ergi ispatını başarılı bir şekilde yapamadıkları görülmüştür. Katılımcılardan dördü olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın formal-retorik kısmını oluşturmuş ve tek ve çift sayı kavram bilgisine de sahip olduğunu göstermiştir. Ancak bu katılımcıların ispatlama süreçlerinde çelişkiye ulaşmakta güçlük yaşadıkları ve problem merkezli kısmı tam olarak çözemedikleri görülmüştür. Geriye kalan iki katılımcı ise tek ve çift tamsayı kavram bilgisine sahip olduklarını göstermelerine rağmen olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamış, ispat yapamamışlardır.
- Varlık ispatını başarılı bir şekilde tamamlayan katılımcı olmamıştır. Katılımcıların yalnızca ikisi önermenin mantıksal yapısını anladığını göstermesine rağmen biri ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığından diğeri ise problem merkezli kısmı çözemediğinden ispatlama sürecinde başarısız olmuşlardır. Geriye kalan dört katılımcı ise önermedeki varlık niceleyicisini evrensel niceleyici olarak ele alarak önermenin mantıksal yapısını anlamadığını yansıtmış ve önermenin yanlış olduğunu göstermişlerdir.

4.1.1.3. İkinci sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

İkinci sınıftaki katılımcılardan ispatlama süreçlerinin tümünde başarılı olan katılımcı olmadığı görülmüştür. Katılımcılardan en başarılı olan katılımcılar altı ispatlama sorusundan üçünde ispatlama sürecinde başarılı olurken en başarısız olan katılımcılar yalnızca bir soruda ispatlama süreçlerinde başarı göstermiştir. İspatlama süreçlerinin tümünde başarılı olamayan katılımcıya rastlanmamıştır. Katılımcıların verilen önermeyi ispatlamak için gerekli ispat yöntemi (ispat çerçevesi) bilgisine sahip olmadıkları ya da ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi kullanamayarak ispatın problem merkezli kısmını çözemedikleri ya da ispat için uygun olmayan ispat yöntemini seçtikleri görülmüştür. Katılımcılar genel olarak verilen önermelerin doğru ya da yanlışlığını doğru bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Katılımcıların ispatlama süreçleri için gerekli olan kavramsal bilgilerinde (fonksiyon) eksiklikler olduğu görülmüştür. Katılımcıların tümü tek ve çift sayı kavram bilgisini genel olarak matematik dilinde doğru bir şekilde temsil edebilmiş ve genel olarak çoğu (altı katılımcıdan beşi) doğru fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmayan katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları için ispatın problem merkezli kısmını açığa çıkaramamış ve ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmasına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi doğru bir şekilde kullanamamaktan dolayı ispatlama sürecinde başarısız olan katılımcılar olduğu gibi ispat için verilen önermenin mantıksal yapısına uygun olmayan ispat yöntemini seçen ya da mantıksal yapıya uygun görünmesine rağmen ispat için uygun olmayan ispat yöntemini seçen katılımcılar da olmuştur.

Katılımcıların ispat yöntemi ve ispat için gerekli olan kavramsal bilgileri 1. Sınıfa yeni başlayan katılımcılara ve birinci sınıftaki katılımcılara göre daha iyi olmasına rağmen yine de katılımcıların ispat yöntemi bilgilerinin zayıf olduğu ve kavram bilgilerini kullanmakta zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine beş, tüketerek ispat yöntemi bilgisine üç, doğrudan ispat yöntemi bilgisine üç, olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine beş, varlık ispat yöntemi bilgisine iki katılımcının sahip olduğu görülmüştür. Katılımcıların karşıt ters ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtan katılımcı ise olmamıştır. Katılımcıların ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen zaman zaman bu bilgiyi kullanamayarak ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları, ispat için gerekli olan kavramsal bilgiye sahip olmalarına rağmen formal-retorik kısmı doğru bir şekilde oluşturamadıkları ya da verilen önerme için uygun olmayan ispat yöntemlerini seçerek ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür. Aşağıda ikinci sınıftaki katılımcıların klinik görüşmede soruluş sırasına göre her bir ispatlama sorusunda ispatın formal-retorik ve problem merkezli kısımlarına ilişkin yaptıkları kısaca özetlenmiştir.

- İki katılımcı tüketerek ispatlama sürecini başarı ile tamamlamıştır. Bu katılımcılar tüketerek ispat yapmaları beklenen sonlu sayıda elemanı olan bir küme üzerinde tanımlı bağıntının fonksiyon belirttiğini doğru bir şekilde ifade etmiş ve tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüştür. Geriye kalan dört katılımcıdan biri de tüketerek ispat yöntemini bilgisine sahip olduğunu göstermiş ancak ispatın problem merkezli kısmını fonksiyon kavram bilgisindeki eksiklik nedeniyle tam olarak çözememiştir. Bu dört katılımcıdan üç katılımcı ise tanım kümesindeki tüm elemanları verilen eşitlikte yerine koyarak görüntülerin değer kümesinde olma durumunu değerlendirmelerinin bir ispat olamayacağını ifade ederek tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarını göstermişlerdir. Buradan bu katılımcıların genel olarak tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıklarından ispatın formal-retorik kısmının nasıl oluşturulacağını bilmedikleri görülmüştür.

- Katılımcılardan başarılı bir şekilde doğrudan ispat yapan katılımcı olmamıştır. Katılımcılardan üçü doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, ancak bu katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturmalarına rağmen problem merkezli kısmı tam olarak çözememişlerdir. Katılımcılar yalnızca tanım kümesinden aldıkları keyfi elemana karşılık gelen görüntünün değer kümesinde olma durumunu değerlendirmiş, görüntünün tek olduğuna ilişkin bir açıklamada bulunmamışlardır. Geriye kalan üç katılımcı ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir, ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamış ve dolayısıyla ispatın problem merkezli kısmını açığa çıkaramayarak ispatlama sürecinde başarısız olmuşlardır.
- Katılımcılardan karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermeyi başarı ile ispatlayan iki katılımcı olmuştur. Ancak bu katılımcılar önermeyi karşıt ters ispat yöntemini kullanarak değil yine önermenin ispatı için uygun olan bir diğer ispat yöntemi olan olmayana ergi ispat yöntemi ile ispatladıkları görülmüştür. Bu katılımcılar karşıt ters ispat yöntemi bilgisini kullanarak ispatın formal-retorik kısmını doğru bir şekilde oluşturmuşlar ve gerekli olan tek ve çift doğal sayı kavram bilgilerini de kullanarak ispatın problem merkezli kısmını da doğru bir şekilde çözmüşlerdir. Geriye kalan dört katılımcı ise önermeyi doğru bir şekilde ispatlayamamıştır. Bir katılımcı önermenin mantıksal yapısına dikkat etmeyerek ispat için hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak (converse-error), hatalı bir şekilde ispatın formal-retorik kısmını oluşturmuş, bir katılımcı önerme için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini seçmiş, bir katılımcı olmayana ergi ve aksine örnek verme ispat yöntemlerini birbirine karıştırarak ispat yapmaya çalışmış, bir katılımcı ise herhangi bir ispatlama girişiminde bulunamamıştır. Ancak

katılımcıların tümünün problem merkezli kısmı çözmek için doğal sayının tekliği ve çiftliği kavram bilgilerine sahip olduğu görülmüştür.

- İkinci sınıftaki katılımcıların da birinci sınıfa yeni başlayan ve birinci sınıftaki katılımcılarda olduğu gibi en başarılı oldukları ispatlama süreci, aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatında olmuştur. Evrensel niceleyici kullanılarak ifade edilen önermenin yanlışlığını ispatlamak için altı katılımcıdan beşi önermeyi sağlamayan bir reel sayı bularak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüş ve bunun da bir ispat olduğunu değerlendirerek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Geriye kalan bir katılımcı ise önermeyi sağlamayan bir örnek bularak ispatın problem merkezli kısmını çözse de yaptıklarının yalnızca önermenin yanlış olduğunu göstermek olduğunu ifade ederek, yaptıklarının ispat olmayacağını değerlendirmiştir. Bu katılımcıların aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülmektedir.
- Katılımcıların ikisinin bir tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olamayacağını ispatlamalarının istendiği soruda olmayana ergi ispatını başarılı bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Geriye kalan dört katılımcıdan üçü de olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın formal-retorik kısmını doğru bir şekilde oluşturmuş ancak aldıkları bir tamsayının aynı anda tekliği ve çiftliğini gösterirken aynı değişkeni kullanarak değişken kavramında yaptıkları hata nedeniyle problem merkezli kısmı doğru bir şekilde çözememişlerdir. Dolayısıyla hatalı bir şekilde çelişkiye ulaşan bu katılımcılar ispatlama süreçlerinde başarılı olamamışlardır. Katılımcılardan biri ise önermenin doğru olduğunu ifade etmesine rağmen herhangi bir ispat yöntemi seçmemiş ve ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamıştır.
- Varlık ispatını başarılı bir şekilde tamamlayan ise bir katılımcı olmuştur. Geriye kalan beş katılımcıdan biri verilen önermenin mantıksal yapısını anladığını yansıtmış ancak reel sayı kavram bilgisini doğru bir şekilde kullanamayarak ispatın problem merkezli kısmını çözememiştir. Dört katılımcı ise verilen önermenin mantıksal yapısını anlamadığını göstermiştir. Bu katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıklarından ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır.

4.1.1.4. Üçüncü sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

Üçüncü sınıftaki katılımcılardan ispatlama süreçlerinin tümünde başarılı olan katılımcı olmadığı görülmüştür. Katılımcılardan en başarılı olan katılımcılar altı ispatlama sorusundan beşinde ispatlama sürecinde başarılı olurken en başarısız olan katılımcılar iki soruda ispatlama süreçlerinde başarı göstermiştir. İspatlama süreçlerinin tümünde başarılı olamayan katılımcıya rastlanmamıştır. Katılımcıların verilen önermeyi ispatlamak için gerekli ispat yöntemi (ispat çerçevesi) bilgisine sahip olmadıkları ya da ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi kullanamayarak ispatın problem merkezli kısmını çözemedikleri görülmüştür. Katılımcılar genel olarak verilen önermelerin doğru ya da yanlışlığını doğru bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Katılımcıların ispatlama süreçleri için gerekli olan kavramsal bilgilerinde (fonksiyon) eksiklikler olduğu görülmüştür. Katılımcıların tümü tek ve çift sayı kavram bilgisini genel olarak matematik dilinde doğru bir şekilde temsil edebilmiş ve genel olarak çoğu (altı katılımcıdan beşi) doğru fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmayan katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları için ispatın problem merkezli kısmını açığa çıkaramamış ve ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmasına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi doğru bir şekilde kullanamamaktan dolayı ispatlama sürecinde başarısız olan katılımcılar olduğu ve ispat için verilen önermenin mantıksal yapısına uygun olmayan ispat yöntemini seçen ya da mantıksal yapıya uygun görünmesine rağmen ispat için uygun olmayan ispat yöntemini seçen katılımcılar da olmuştur.

Katılımcıların ispat yöntemi ve ispat için gerekli olan kavramsal bilgileri 1. Sınıfa yeni başlayan katılımcılara, 1. sınıftaki katılımcılara ve 2. Sınıftaki katılımcılara göre daha iyi olmasına rağmen yine de katılımcıların ispat yöntemi bilgilerinin zayıf olduğu ve kavram bilgilerini kullanmakta zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine beş, tüketerek ispat yöntemi bilgisine altı, doğrudan ispat yöntemi bilgisine üç, olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine dört, varlık ispat yöntemi bilgisine beş katılımcının sahip olduğu görülmüştür. Katılımcıların karşıt ters ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtan bir katılımcı olmuştur. Katılımcıların ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen zaman zaman bu bilgiyi kullanamayarak ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları, ispat için gerekli olan kavramsal bilgiye sahip olmalarına rağmen formal-retorik kısmı doğru bir şekilde oluşturamadıkları ya da verilen önerme için uygun olmayan ispat yöntemlerini seçerek ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür. Aşağıda üçüncü sınıftaki katılımcıların klinik görüşmede soruluş sırasına göre her bir ispatlama sorusunda ispatın formal-retorik ve problem merkezli kısımlarına ilişkin yaptıkları kısaca özetlenmiştir.

- Katılımcıların tümü tüketerek ispatlama sürecini başarı ile tamamlamıştır. Bu katılımcılar tüketerek ispat yapmaları beklenen sonlu sayıda elemanı olan bir küme üzerinde tanımlı bağıntının fonksiyon belirttiğini doğru bir şekilde ifade etmiş ve tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüştür.
- Katılımcılardan başarılı bir şekilde doğrudan ispat yapan iki katılımcı olmuştur. Geriye kalan dört katılımcı ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstermiştir. Bu katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıklarından ispatın problem merkezli kısmını çözememişlerdir.
- Katılımcılardan karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermeyi başarı ile ispatlayan bir katılımcı olmuştur. Bu katılımcı ispat için karşıt ters ispat yöntemini seçmiş ve tek ve çift doğal sayı kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüştür. Geriye kalan beş katılımcıdan dördü verilen önermenin mantıksal yapısına uygun ancak önermenin ispatı için uygun olmayan doğrudan ispat yöntemini seçtiği görülmüştür. Bu katılımcılar oluşturdukları formal-retorik kısma göre hipotezden hükme geçemeyeceklerini, verilen önermenin ispatlanamayacağını fark edememiştir. Ancak katılımcılar yaptıklarını ispat olarak değerlendirmişlerdir. Bir katılımcı da olmayana ergi ve karşıt ters ispat yöntemlerini birbirine karıştırmış ve formal retorik kısmı ezbere bir şekilde oluşturduğunu yansıtmıştır.
- Üçüncü sınıftaki katılımcılardan beşi aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatında başarılı olmuştur. Evrensel niceleyici kullanılarak ifade edilen önermenin yanlışlığını ispatlamak için altı katılımcıdan beşi önermeyi sağlamayan bir reel sayı bularak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüş ve bunun da bir ispat olduğunu değerlendirerek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Geriye kalan bir katılımcı ise önermeyi sağlamayan bir örnek bularak ispatın problem merkezli kısmını çözse de yaptıklarının yalnızca önermenin yanlış olduğunu göstermek olduğunu ifade ederek, yaptıklarının ispat olmayacağını

değerlendirmiştir. Bu katılımcıların aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığı görülmektedir.

- Katılımcıların ikisinin bir tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olamayacağını ispatlamalarının istendiği soruda olmayana ergi ispatını başarılı bir şekilde yaptıkları görülmüştür. Geriye kalan dört katılımcıdan üçü de olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın formal-retorik kısmını doğru bir şekilde oluşturmuş ancak aldıkları bir tamsayının aynı anda tekliği ve çiftliğini gösterirken aynı değişkeni kullanarak değişken kavramında yaptıkları hata nedeniyle problem merkezli kısmı doğru bir şekilde çözememişlerdir. Dolayısıyla hatalı bir şekilde çelişkiye ulaşan bu katılımcılar ispatlama süreçlerinde başarılı olamamışlardır. Katılımcılardan biri ise önermenin doğru olduğunu ifade etmesine rağmen herhangi bir ispat yöntemi seçmemiş ve ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamıştır.
- Varlık ispatını başarılı bir şekilde tamamlayan ise beş katılımcı olmuştur. Geriye kalan bir katılımcı verilen önermenin mantıksal yapısını anladığını yansıtmış ayrıca önermeyi sağlayan bir reel sayı bularak ispat için gerekli olan problem merkezli kısmı da çözmüştür. Ancak bu katılımcı değer vererek ispat olmayacağını ifade ederek varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır.

4.1.1.5. Dördüncü sınıftaki katılımcıların ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

Dördüncü sınıftaki katılımcılardan ispatlama süreçlerinin tümünde başarılı olan katılımcı olmadığı görülmüştür. Katılımcılardan en başarılı olan katılımcılar altı ispatlama sorusundan beşinde ispatlama sürecinde başarılı olurken en başarısız olan katılımcılar ise üç soruda ispatlama süreçlerinde başarı göstermiştir. İspatlama süreçlerinin tümünde başarılı olamayan katılımcıya rastlanmamıştır. Katılımcıların verilen önermeyi ispatlamak için gerekli ispat yöntemi (ispat çerçevesi) bilgisine sahip olmadıkları ya da ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi kullanamayarak ispatın problem merkezli kısmını çözemedikleri görülmüştür. Katılımcılar genel olarak verilen önermelerin doğru ya da yanlışlığını doğru bir şekilde ifade edebilmişlerdir. Katılımcıların ispatlama süreçleri için gerekli olan kavramsal bilgilerinde (fonksiyon) eksiklikler olduğu görülmüştür. Katılımcıların tümü tek ve çift sayı kavram bilgisini genel olarak matematik dilinde doğru bir şekilde temsil edebilmiş ve genel olarak çoğu (altı katılımcıdan beşi) doğru fonksiyon kavram bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmayan katılımcılar ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadıkları için ispatın problem merkezli kısmını açığa çıkaramamış ve ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. İspat için gerekli ispat yöntemi bilgisine sahip olmasına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi doğru bir şekilde kullanamamaktan dolayı ispatlama sürecinde başarısız olan katılımcılar olduğu ve ispat için verilen önermenin mantıksal yapısına uygun olmayan ispat yöntemini seçen ya da mantıksal yapıya uygun görünmesine rağmen ispat için uygun olmayan ispat yöntemini seçen katılımcılar da olmuştur.

Katılımcıların ispat yöntemi ve ispat için gerekli olan kavramsal bilgileri birinci sınıfa yeni başlayan katılımcılara, birinci sınıftaki katılımcılara, ikinci sınıftaki katılımcılara ve üçüncü sınıftaki katılımcılara göre daha iyi olmasına rağmen yine de katılımcıların ispat yöntemi bilgilerinin istenen düzeyde olmadığı ve katılımcıların kavram bilgilerini kullanmakta zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine altı, tüketerek ispat yöntemi bilgisine beş, doğrudan ispat yöntemi bilgisine beş, olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine beş, varlık ispat yöntemi bilgisine beş katılımcının sahip olduğu görülmüştür. Katılımcıların karşıt ters ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu yansıtan iki katılımcı olmuştur. Katılımcıların ispat yöntemi bilgisine sahip olmalarına rağmen ispat için gerekli olan kavramsal bilgiye sahip olmadıklarından ispatın problem merkezli kısmını çözemedikleri ya da verilen önerme için uygun olmayan ispat yöntemlerini seçerek ispatlama süreçlerinde başarısız oldukları görülmüştür. Aşağıda dördüncü sınıftaki katılımcıların klinik görüşmede soruluş sırasına göre her bir ispatlama sorusunda ispatın formal-retorik ve problem merkezli kısımlarına ilişkin yaptıkları kısaca özetlenmiştir.

- Katılımcıların dördü tüketerek ispatlama sürecini başarı ile tamamlamıştır. Bu katılımcılar tüketerek ispat yapmaları beklenen sonlu sayıda elemanı olan bir küme üzerinde tanımlı bağıntının fonksiyon belirttiğini doğru bir şekilde ifade etmiş ve tüketerek ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüştür. Ancak iki katılımcıdan biri eksik fonksiyon kavram bilgisi nedeniyle ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözememiştir. Bir katılımcı ise fonksiyon kavram bilgisine sahip olmasına rağmen ispat için uygun olmayan olmayana ergi ispat yöntemini kullanmaya çalışmış ancak yaptıklarının ispat olmadığını değerlendirerek başka bir ispatlama girişiminde de bulunmamıştır.

- Katılımcılardan başarılı bir şekilde doğrudan ispat yapan iki katılımcı olmuştur. Geriye kalan dört katılımcıdan üçü ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiş, ancak problem merkezli kısmı tam olarak çözemediklerinden ispatlama süreçlerinde başarısız olmuşlardır. Bir katılımcı ise doğrudan ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını göstererek ispatın formal-retorik kısmını oluşturamadığından ispatın problem merkezli kısmını çözememiştir.
- Katılımcılardan karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermeyi başarı ile ispatlayan iki katılımcı olmuştur. Bu katılımcılar ispat için karşıt ters ispat yöntemini seçmiş ve tek ve çift doğal sayı kavram bilgisini de doğru bir şekilde kullanarak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüştür. Geriye kalan dört katılımcıdan biri ispat için uygun olan olmayana ergi ispat yöntemi seçmiş ancak problem merkezli kısmı çözerken tek ve çift sayıları temsil edemediği için ispatını başarılı bir şekilde tamamlayamamıştır. Bu dört katılımcıdan üçü ise hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışarak formal-retorik kısmı doğru bir şekilde oluşturamayarak ispatlama sürecinde başarısız olmuşlardır.
- Dördüncü sınıftaki katılımcıların tümü aksine örnek verme ispat yöntemini kullanmalarının beklendiği önermenin ispatında başarılı olmuştur. Evrensel niceleyici kullanılarak ifade edilen önermenin yanlışlığını ispatlamak için altı katılımcıdan beşi önermeyi sağlamayan bir reel sayı bularak ispatın problem merkezli kısmını doğru bir şekilde çözmüş ve bunun da bir ispat olduğunu değerlendirerek aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstermiştir.
- Katılımcılardan yalnızca biri bir tamsayının aynı anda hem tek hem de çift olamayacağını ispatlamalarının istendiği soruda olmayana ergi ispatını başarılı bir şekilde yapmıştır. Geriye kalan beş katılımcıdan dördü de olmayana ergi ispat yöntemi bilgisine sahip olduğunu göstererek ispatın formal-retorik kısmını doğru bir şekilde oluşturmuş ancak aldıkları bir tamsayının aynı anda tekliği ve çiftliğini gösterirken aynı değişkeni kullanarak değişken kavramında yaptıkları hata nedeniyle problem merkezli kısmı doğru bir şekilde çözememişlerdir. Dolayısıyla hatalı bir şekilde çelişkiye ulaşan bu katılımcılar ispatlama süreçlerinde başarılı olamamışlardır. Katılımcılardan biri ise önermenin doğru olduğunu ifade etmesine rağmen herhangi bir ispat yöntemi seçmemiş ve ispatın formal-retorik kısmını oluşturamamıştır.

- Varlık ispatını başarılı bir şekilde tamamlayan ise beş katılımcı olmuştur. Geriye kalan bir katılımcı verilen önermenin mantıksal yapısını anladığını yansıtmış ayrıca önermeyi sağlayan bir reel sayı bularak ispat için gerekli olan problem merkezli kısmı da çözmüştür. Ancak bu katılımcı değer vererek ispat olmayacağını ifade ederek varlık ispat yöntemi bilgisine sahip olmadığını yansıtmıştır.

4.1.2. Katılımcıların sınıf düzeylerine göre ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

Katılımcıların genel olarak sınıf düzeyi arttıkça hem ispatın formal-retorik kısmını oluşturmada hem de problem merkezli kısmını gerekli olan kavramsal ve işlemsel bilgiyi kullanarak çözmede daha başarılı olmuşlardır. Katılımcıların ispat yöntemi bilgilerinin ilköğretim matematik öğretmenliği programına başladıklarında oldukça zayıf olduğu, ancak sınıf düzeyi arttıkça katılımcıların daha çok ispat yöntemi bilgisine sahip oldukları görülmüştür. Katılımcıların programa yeni başladıklarında matematik dilini kullanamadıkları, ispatlama süreçlerinde anadili kullandıkları ancak sınıf düzeyi arttıkça matematik dilini kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcılar karşıt ters ve olmayana ergi ispat yöntemleri bilgisine sahip değilken katılımcılar son sınıfa doğru tüm ispat yöntemleri bilgisine sahip olduklarını göstermişlerdir. Ancak katılımcıların ilkokuldan beri aşina oldukları aksine örnek verme ispatında 1., 2. ve 3. sınıflardan başarılı olamayan katılımcılar olması beklenmeyen bir sonuç olmuştur. Bu katılımcıların değer vermeyi ispat olarak kabul etmemelerinden dolayı aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olmadıkları görülmüştür. Her sınıf düzeyindeki katılımcıların çoğunun aksine örnek verme ispat yöntemi bilgisine sahip olduğu görülmesine rağmen bu sınıflarda aksine örnek verme ispatını yapamayan katılımcıların olması oldukça düşündürücüdür.

3. ve 4. sınıftaki katılımcıların bir kısmı karşıt ters ispat yönteminin kullanılması beklenen soruda karşıt ters ispat yöntemine sahip olmasa da olmayana ergi ispat yöntemi bilgilerini kullanarak ispatı yaptığı ya da önermenin yapısına uygun fakat önermenin ispatının mümkün olmadığı doğrudan ispat yöntemi bilgisini kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. Ancak 1. Sınıfa yeni başlayan, 1. Sınıftaki ve 2. Sınıftaki katılımcılar karşıt ters ispat yöntemi bilgisine sahip olmayıp önermenin mantıksal yapısını yanlış çözmüş, hükmü kabul edip hipoteze ulaşmaya çalışmışlardır.

İspat yöntemlerinde olduğu gibi katılımcıların sınıf düzeyleri arttıkça ispat yapmaları için gerekli olan kavram bilgisine sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca katılımcıların bu kavram bilgilerini kullanma becerileri de gelişmiştir. Örneğin verilen bir bağıntının fonksiyon olma durumunun ispatlanmasının istendiği sorularda birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların çok azı fonksiyon kavramını doğru bir şekilde kullanabilirken son sınıflarda katılımcıların genel olarak fonksiyon kavram bilgilerini kullanabildiği görülmektedir.

Dikkat çekici bir diğer önemli sonuç da katılımcıların ortaokul yıllarından beri gördüğü bir tamsayının tekliği ve çiftliği kavramlarını 1. sınıfa yeni başlayan katılımcıların tümünün kullanamaması olmuştur. 1. sınıfa yeni başlayan katılımcılar tek ve çift sayıları matematiksel olarak temsil edemediklerinden hem karşıt ters hem de olmayana ergi ile ispat yapılması beklenen önermelerin problem merkezli kısımlarını çözememiştir. Sınıf düzeyi arttıkça katılımcıların tamsayıların tekliği ve çiftliği kavramlarını kullanabildikleri görülmüştür.

Sayıların tekliği ve çiftliği kavramlarında olduğu gibi değişken kavramı da hem 1. sınıfa yeni başlayan hem de 1. sınıftaki katılımcıların kullanamadıkları kavram olmuştur. 1. sınıftaki katılımcılar tamsayıların tekliği ve çiftliği kavramlarını ifade edebilmelerine rağmen ispat için bunu kullanamamış ya da hatalı bir şekilde bir sayıyı hem tek hem çift olarak ifade ederken aynı değişkeni kullandıkları görülmüştür. Bu yanılgı son sınıflara kadar devam etmiş, bir sayıyı hem tek hem çift olarak gösterirken farklı değişkenler kullanarak 3. ve 4. sınıflardan yalnızca iki katılımcı olmuştur. Özellikle bu önermenin ispatında katılımcıların ispat yöntemi bilgisine sahip olsalar bile problem merkezli kısmı çözmek için yeterli bilgi ve beceriye sahip olmamalarının ispatlama süreçlerini başarılı bir şekilde tamamlayamamalarına yol açtığı görülmektedir. Ayrıca katılımcıların tüm sınıf düzeylerinde gerekli işlemsel bilgiye sahip oldukları görülmüştür. Sonuç olarak sınıf düzeyi arttıkça doğru bir şekilde yapılan ispat sayısında artış olmuştur.

4.1.3. Katılımcıların akademik başarılarına göre ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar

Bu bölümde sırasıyla birinci sınıfa yeni başlayan, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü sınıftaki katılımcıların akademik başarıları ve ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar ele alınmıştır.

4.1.3.1. Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların akademik başarılarına göre ispatlama süreçleri

Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların akademik başarıya göre en başarılı olanları Hacer ve Ece, orta derecede başarılı olanları Melis ve Yonca, başarısız olanları ise Fatmagül ve Seda'dır. Bu katılımcıların ispatlama süreçleri incelendiğinde en başarılı katılımcının akademik başarıya göre orta derecede başarılı olan katılımcılardan Yonca olduğu görülmüştür. Yonca aksine örnek verme ve varlık ispatlarında başarılı olmuştur. Akademik başarıya göre başarılı olan iki katılımcı Hacer ve Ece ile diğer orta derecede başarılı olan katılımcıların benzer performansa sahip oldukları görülmüştür. Hacer ve Ece aksine örnek verme, Melis ise varlık ispatında başarılı olmuştur. Akademik başarıya göre başarısız grupta yer alan iki katılımcı ise hiçbir ispatlama sürecinde başarılı olamayarak ispatlama becerilerine göre de grubun altında yer almıştır. Buradan akademik olarak en başarısız katılımcıların ispatlama süreçlerinde de en başarısız olan katılımcılar olduğu görülse de diğer katılımcılar arasında bir fark olmadığı görülmektedir.

4.1.3.2. Birinci sınıftaki katılımcıların akademik başarılarına göre ispatlama süreçleri

Birinci sınıftaki katılımcıların akademik başarıya göre en başarılı olan katılımcıları Esra ve Neşe, orta derecede başarılı olan Eda ve Umut, başarısız olan ise Nalan ve Naz'dır. Bu katılımcıların ispatlama süreçleri incelendiğinde en başarılı katılımcının akademik başarıya göre orta derecede başarılı olan katılımcı Umut olduğu görülmektedir. Umut tüketerek, karşıt ters ve aksine örnek verme ispatlarında başarılı olmuştur. Akademik başarıya göre başarılı olan Esra tüketerek ve karşıt ters ispatları olmak üzere iki ispatlama sürecinde başarılı olmuştur. Akademik olarak başarılı olan Neşe ve orta derecede başarılı olan Eda ve başarısız grupta yer alan Nalan ise yalnızca aksine örnek verme ispatında başarılı olmuşlardır. Akademik olarak başarısız olan Naz ise ispatlama süreçlerinde de başarısız olmuş, başarıyla tamamladığı bir ispatlama süreci olmamıştır. Buradan katılımcılar arasında akademik başarıya göre ispatlama süreçleri arasında bir fark olmadığı görülmektedir.

4.1.3.3. İkinci sınıftaki katılımcıların akademik başarılarına göre ispatlama süreçleri

İkinci sınıftaki katılımcıların akademik başarıya göre en başarılı olanları Sevgi ve Ece, orta derecede başarılı olanları Melih ve Betül, başarısız olanları ise Selda ve Can'dır.

Bu katılımcıların ispatlama süreçleri incelendiğinde en başarılı katılımcıların akademik başarıya göre orta derecede başarılı olan Melih ve Betül olduğu görülmüştür. Melih karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi olmayana ergi yöntemini kullanarak doğru bir şekilde ispatlamış, aksine örnek verme ve varlık ispatlarını doğru bir şekilde yapmıştır. Betül ise karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermeyi Melih gibi olmayana ergi ispat yöntemini kullanarak doğru bir şekilde yapmış, onun dışında tüketerek ve aksine örnek verme ispatlarında başarılı olmuştur. Akademik olarak başarılı olan Ece aksine örnek erme ve olmayana ergi ispatlarında başarılı olurken akademik olarak başarılı Sevgi yalnızca aksine örnek verme, akademik olarak başarısız olan Selda aksine örnek verme ve akademik olarak başarısız olan Can ise tüketerek ispat olmak üzere yalnızca bir ispatlama sürecinde başarılı olmuşlardır. Buradan katılımcıların akademik başarıya göre ispatlama süreçleri arasında bir fark olmadığı görülmektedir.

4.1.3.4. Üçüncü sınıftaki katılımcıların akademik başarılarına göre ispatlama süreçleri

Üçüncü sınıftaki katılımcıların akademik başarıya göre en başarılı olan katılımcıları Nihal ve Emel, orta derecede başarılı olan Kübra ve Hale, başarısız olan ise Miray ve Ruhi'dır. Bu katılımcıların ispatlama süreçleri incelendiğinde en başarılı katılımcının akademik başarıya göre de en başarılı olan katılımcı Nihal olduğu görülmüştür. Nihal yalnızca olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatını yapamamış geriye kalan tüm sorularda ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlamıştır. Başarılı grupta yer alan Emel tüketerek, doğrudan, aksine örnek verme ve varlık ispatı olmak üzere dört ispatlama sürecinde başarılı olurken, akademik olarak orta derecede başarılı olan Hale ve akademik olarak başarısız olan Ruhi de tüketerek, aksine örnek verme, olmayana ergi ve varlık ispatlarında başarılı olmuşlardır. Akademik olarak orta derecede başarılı olan Kübra ise tüketerek, aksine örnek verme ve varlık ispatı olmak üzere üç ispatlama sürecinde başarılı olmuştur. Akademik olarak başarısız olan Miray ise ispatla süreçlerinde de başarısız olarak yalnızca tüketerek ispatta başarılı olmuştur. Buradan akademik başarıya göre katılımcıların ispatlama süreçleri arasında bir fark olmadığı görülmüştür.

4.1.3.5. Dördüncü sınıftaki katılımcıların akademik başarılarına göre **ispatlama** *süreçleri*

Dördüncü sınıftaki katılımcıların akademik başarıya göre en başarılı olan katılımcıları Burcu ve Gizem, orta derecede başarılı olan Metin ve Deniz, başarısız olan ise Ayla ve Leyla'dır. Bu katılımcıların ispatlama süreçleri incelendiğinde en başarılı katılımcının akademik başarıya göre de en başarılı olan katılımcı Burcu olduğu görülmektedir. Burcu yalnızca karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatını yapamamış geriye kalan tüm sorularda ispatlama süreçlerini başarıyla tamamlamıştır. Geriye kalan beş katılımcının tümü ise altı ispatlama sorusundan üçünde başarılı olmuştur. Bu katılımcılardan Gizem ve Metin karşıt ters, aksine örnek verme, varlık ispatlarında, Ayla ve Leyla tüketerek, aksine örnek verme ve varlık ispatlarında, Deniz ise tüketerek, doğrudan ve aksine örnek verme ispatlarında başarılı olmuştur. Buradan akademik olarak en başarılı katılımcı ispatlama süreçlerinde de en başarılı olan katılımcı olsa da diğer katılımcılar arasında bir fark olmadığı görülmüştür.

4.1.4. Katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar

Bu bölümde sırasıyla birinci sınıfa yeni başlayan, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü sınıftaki katılımcıların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar verilmiştir.

4.1.4.1. Birinci sınıfa yeni başlayan katılımcıların **ortaokul** *matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar*

Katılımcılardan yalnızca ikisi ispatın ilköğretim düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade ederken geriye kalan altı katılımcıdan üçü lise düzeyinde biri ise üniversitede öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade etmiştir. Katılımcılardan ispatın erken yıllarda başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ortaokul öğrencilerine ispat yaptıracaklarını belirtmelerine rağmen ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabilecekleri hakkında bilgi sahibi olmadıklarını belirtmişlerdir. İspatın lise ve üniversite düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ise ortaokul yıllarının ispatın öğretilmesi için erken olduğunu, öğrencilerin ispatta zorlanacaklarını bu nedenle belli kavramlar kazanıldıktan sonra öğretilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir.

4.1.4.2. Birinci sınıfların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar

Katılımcılardan üçü ispatın ilköğretim düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade ederken geriye kalan altı katılımcıdan ikisi lise düzeyinde biri ise üniversitede öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade etmiştir. Katılımcılardan ispatın erken yıllarda başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ortaokul öğrencilerine ispat yaptıracaklarını belirtmelerine rağmen ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabilecekleri hakkında bilgi sahibi olmadıklarını belirtmişlerdir. İspatın lise ve üniversite düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ise ortaokul yıllarının ispatın öğretilmesi için erken olduğunu, öğrencilerin ispatta zorlanacaklarını bu nedenle belli kavramlar kazanıldıktan sonra öğretilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir.

4.1.4.3. İkinci sınıfların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar

Katılımcılardan ikisi ispatın ilköğretim düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade ederken dört katılımcı lise düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini belirtmiştir. İspatın lise düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden katılımcılar ispat yapmanın ortaokul öğrencileri için zor olacağını bu nedenle lisede öğretimine başlanması gerektiğini ifade etmişlerdir. Katılımcıların tümü öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için önce kendi eksikliklerini gidermeleri gerektiğini belirtmiştir. İlköğretim düzeyinde ispat öğretimine başlanması gerektiğini savunan iki katılımcı öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için öğrencilerine öğretecekleri bilgilerin nedenini sorgulatacağını belirtirken lise düzeyinde başlaması gerektiğini savunan katılımcılar ise ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabilecekleri hakkında bilgi sahibi olmadıklarını ifade etmiştir.

4.1.4.4. Üçüncü sınıfların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar

Katılımcılardan çoğu (altı katılımcıdan beşi) ispatın ilköğretim düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade ederken bir katılımcı ise ortaokul öğrencileri için ispat yapmanın uygun olmadığını belirterek ispatın üniversite düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini belirtmiştir. İspatın üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini ifade eden bu katılımcı ispat yapmanın ortaokul öğrencileri için zor olacağını, öğrencilerin soyut düşünemeyeceklerini ifade etmiştir. Bu katılımcı hariç diğer beş katılımcı öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için önce kendi eksikliklerini gidermeleri gerektiğini belirtmiş ve öğrencilerine çeşitli ispatlama etkinlikleri yaptıracaklarını ve öğrencilerini verilen ifadelerin doğruluklarını sorgulamaya yönlendireceklerini belirtmişlerdir. İspat öğretimine üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini savunan katılımcı ise öğrencilerinin ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabileceği hakkında bilgi sahibi olmadığını ifade etmiştir.

4.1.4.5. Dördüncü sınıfların ortaokul matematiğinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerine yönelik sonuçlar

Katılımcılardan dördü ispatın ilköğretim düzeyinde öğretilmeye başlaması gerektiğini ifade ederken bir katılımcı lise, bir katılımcı ise üniversite düzeyinde başlaması gerektiğini belirtmiştir. İspat öğretimine lise ve üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini savunan katılımcılar ortaokul öğrencileri için ispat yapmanın uygun olmadığını belirtmiştir. Bu iki katılımcı ortaokul öğrencilerinin soyut düşünemeyeceklerini ifade etmiş ve öğrencilerin cebirsel ispatlar yapamayacağını savunmuştur. İspatın ilköğretim düzeyinde başlaması gerektiğini belirten dört katılımcı ise ortaokul öğrencilerinin düzeylerine uygun olarak ispatlar yaptırılması gerektiğini belirtmiştir. Bu dört katılımcı öğrencilerinin ispatlama becerilerini geliştirmek için önce kendi eksikliklerini gidermeleri gerektiğini belirtmiş ve öğrencilerine çeşitli ispatlama etkinlikleri yaptıracaklarını ve öğrencilerini verilen ifadelerin doğruluklarını sorgulamaya yönlendireceklerini belirtmişlerdir. İspat öğretimine lise ve üniversite düzeyinde başlanması gerektiğini savunan iki katılımcı ise öğrencilerinin ispatlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yapabileceği hakkında bilgi sahibi olmadığını ifade etmiştir.

4.2. Tartışma

Çalışmadan elde edilen sonuçlar, her bir sınıf düzeyinde tüm ispatlama görevlerini başarıyla tamamlayan katılımcı olmadığını göstermiştir. Katılımcıların programın başından programın sonuna doğru hem ispatın formal-retorik kısmını oluşturmada hem de ispat için gerekli olan kavramsal bilgiyi kullanmada geliştikleri görülmüştür. Ancak klinik görüşmelerde sorulan ispatlama sorularının temel kavramları (fonksiyonlar, reel sayılar, tamsayılar, sayıların tekliği ve çiftliği) kullanmayı gerektirmesi ve her sınıf düzeyinde katılımcıların istenen performansı gösterememeleri, öğretmen eğitimi programında ispatlama süreçlerinin geliştirilmesine yönelik reformlar yapılması gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Çalışmadan elde edilen sonuçlara göre katılımcıların ispatlama süreçlerinde başarısız olmalarının başlıca sebepleri Moore (1994) ve Selden ve Selden'in (2007) de çalışmalarında belirttikleri gibi ispat için gerekli olan kavramsal bilgideki eksiklikler ya da bu bilgilerin doğru bir şekilde kullanılamaması olduğu görülmüştür. Tüm sınıf düzeylerinde katılımcıların en çok zorlandıkları ispatlama süreçleri doğrudan ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatında olmuştur. Bu sorudaki önermenin ispatı için katılımcıların fonksiyon kavram bilgileri oldukça önemli olmuştur. Katılımcıların eksik ya da hatalı fonksiyon kavramı bilgileri ispatlama süreçlerinde başarısız olmalarına yol açmıştır. Ayrıca katılımcılar fonksiyon kavram bilgisine sahip olsalar da bunu ispatlama süreçlerinde kullanamadıkları da olmuştur (Weber, 2001). Katılımcıların ispatlama süreçlerini etkileyen bir diğer önemli faktör de önermenin mantıksal yapısının anlaşılması olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Selden vd., 2014; Moore, 1994). Katılımcıların özellikle karşıt ters ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği önermenin ispatında hükmü kabul edip hipotezi göstermeye çalışma şeklindeki mantık bilgilerindeki eksikler, katılımcıların ispatlama süreçlerinde başarısız olmalarına neden olmuştur (Epp, 2003). Ayrıca mantık bilgisinin doğru olmasının da ispatlama sürecinde başarılı olmak için yeterli olmadığı görülmüştür (Selden ve Selden, 2007). Katılımcılar karşıt ters ispat yöntemini kullanmaları beklenen önermenin ispatında önermenin mantıksal yapısına uygun bir şekilde hipotezi kabul edip hükmü göstermeye çalışmış, ancak bunun önermenin ispatı için uygun bir yöntem olmadığını fark edememişlerdir. Katılımcıların varlık niceleyicisinin kullanıldığı önermenin ispatında da niceleyiciye dikkat etmedikleri genel olarak varlık niceleyicisini evrensel niceleyici gibi ele aldıkları görülmüştür (Epp, 2004). Bu durum da katılımcıların ispatlama süreçlerinde başarısız olmalarına yol açmıştır. Katılımcıların tüm sınıf düzeylerinde en çok zorlandıkları ispatlama süreçlerinden bir diğeri ise olmayana ergi ispat yönteminin kullanılmasının beklendiği soru olmuştur Bu soruda 4. sınıftaki katılımcıların dahi bir sayının aynı anda tekliğini ve çiftliğini göstermek için aynı değişkeni kullanma (Epp, 2010) yanılgısına sahip oldukları görülmüştür. 1. sınıfa yeni başlayan katılımcıların genel olarak ispata nasıl başlayacaklarını bilmedikleri görülmüştür. Bu sonuç Moore'un (1994) çalışmasıyla tutarlıdır.

Tüm sınıf düzeylerindeki katılımcıların genel olarak Selden ve Selden'in (2008) belirttiği biçimde yararlı davranış şemaları geliştiremedikleri görülmüştür. Ancak katılımcılardan bazılarının koşullu önermelerde kanıta hükümden başlama gibi zararlı davranış şemalarına sahip oldukları ortaya çıkmıştır (Selden ve Selden, 2009).

Katılımcıların ortaokul düzeyinde ispat yapma görüşlerinin ise istenen düzeyde olmadığı görülmüştür. Katılımcıların genel olarak ortaokul düzeyinde daha basit düzeyde ispatlar yapılacağını ifade ettikleri ancak ortaokul matematiğinde nasıl ispatlar yapılabileceği açıkça ortaya koyamadıkları hatta ortaokul öğrencileri için ispatı uygun bulmadıkları ortaya çıkmıştır. Elde edilen bu sonuç Knuth'un (2002) çalışmasında elde ettiği sonucu desteklemektedir. Ayrıca Schwarz vd. (2008) çalışmasında olduğu gibi katılımcıların ortaokul düzeyinde uygun bir şekilde ispat yapamadıkları da görülmüştür. Oysaki ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerinin gelişmiş olması beklenmektedir. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının hem okul matematiğinde hem de daha ileri düzeyde matematikte ispatlar yapabilmesi ve öğrencilerinin ispatlama becerilerini desteklemesi gerekmektedir. Çalışmanın sonucunda Shwarz vd. (2008) de ifade ettiği gibi öğretmen adaylarının üniversite düzeyinde oldukça güçlü bir matematiksel alt yapıya sahip olmaları onların ortaokul düzeyinde ispatlamaya ilişkin tam bir imaj aktarabilecekleri anlamına gelmediği görülmüştür.

4.3. Öneriler

Araştırmanın sonuçlarına göre öneriler, gelecekte yapılacak çalışmalara ve öğretmen eğitimi programlarına yönelik öneriler olmak üzere iki bölümde verilmiştir.

4.3.1. Gelecekte Yapılacak Çalışmalara Yönelik Öneriler

- Araştırmada fonksiyonlar ve sayılar bağlamında ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçleri incelenirken başka araştırmalarda başka bağlamlar seçilerek ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma süreçleri incelenebilir.

- Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının yanı sıra ilkokul öğretmen adaylarının ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının uygun bağlamlar seçilerek bu araştırmada olduğu gibi her sınıf düzeyinde ispat yapma süreçleri incelenebilir.
- Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının öğretim yapacakları sınıf düzeyinde ispat yapma sürecine ilişkin görüşlerini incelemek için durum çalışması yapılabilir.

4.3.2. Öğretmen Eğitimi Programlarına Yönelik Öneriler

- Araştırmanın sonucunda ortaokul matematik öğretmeni adaylarının temel kavramları kullanmaları beklenen ispatlama süreçlerinde dahi başarısız oldukları sonucuna ulaşıldığından öğretmen eğitimi programlarının ispat yapma becerilerinin gelişimine yönelik birinci sınıftan itibaren gerek zorunlu gerekse seçmeli dersler aracılığıyla desteklenmesi önerilmektedir.
- Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ortaokul düzeyinde ispat yapmaya ilişkin görüşlerinin istenen seviyede olmadığı görülmüştür. Bu nedenle öğretmen adaylarının ispatlama becerilerinin geliştirilmesinin yanı sıra öğretim yapacakları sınıf düzeyinde öğrencilerinin ispatlama becerilerini nasıl destekleyebileceklerine yönelik öğretmen eğitimi programına dersler konulması önerilmektedir.
- Öğretmen adaylarının ispat yöntemlerinin hepsinden haberdar olmadıkları görüldüğünden pür matematik derslerinde mümkün olduğunca çeşitli önermelere yer verilerek dengeli bir şekilde her tür ispat yönteminin kullanılması sağlanmalıdır.

KAYNAKÇA

Altun, M. (2011). *Liselerde Matematik Öğretimi*. (4. Baskı). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Aylar, E. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik becerilerinin irdelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty Educational Sciences*, 47(1), 351-376.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children (pp. 216-230).* London: Hodder & Stoughton.

Bardelle, C. (2011). Student understanding of the negation of statements with universal quantifier. *Proceedings of the 35th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* 2, 97-104.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 23-40.

Bogdan, R. and Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods*. Boston, MA: Pearson Allyn & Bacon.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Clement, L.L. (2001). What do students really know about functions? Mathematics Teacher, 94, 745-748.

Cooper, J., Walkington, C., Williams, C., Akinsiku, O., Kalish, C. and Ellis, A. (2011). Adolescent Reasoning İn Mathematics: Exploring Middle School Students' Strategic Approaches To Empirical-Based Justifications. *In Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 17-192.

Çüçen, A. K. (1999). *Mantık*. (2. Baskı). Bursa: Asa Kitabevi.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 5-34.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(7), 47-71.

Dubinsky, E., Elterman, F. and Gong, C. (1988). The students' construction of quantification. *For the Learning of Mathematics,* 8(2), 44-51.

Dubinsky, E. (1997). On learning quantification. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(2/3), 335-362.

Dubinsky, E. and Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *CBMS Issues in Mathematics Education*. Vol. 8., 239-289.

Ekiz, D. (2009). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The Mathematical Association of America Monthly*, 110, 886-899.

Epp, S. S. (2010). *Discrete Mathematics with Applications* (3rd edition). Brooks/Cole Cengage Learning.

Esty, W. W. (2004). *The language of mathematics.* Unpublished manuscript.

Ginsburg, H.P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics.* 1(3), 4-11.

Goetting, M. M. (1995). *The College Student's Understanding of Mathematical Proof*. Doctoral dissertation, The University of Maryland.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. And Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds), *Issues in mathematics education: Vol.7. Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.*), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *National Council of Teachers of Mathematics,* 805-842.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları ispat şemaları*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Juter, K. (2005). Limits of functions – how do students handle them? *Pythagoras*, 61, 11-20.

Margaris, A. (1990). *First Order Mathematical Logic*. New York: Dover Publications Inc.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379–405.

Martin, W. G. and Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, pp.41–51.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel Araştırma: Desen ve Uygulama için Bir Rehber*, Turan, S. (Çev. Edt.). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Miles, M. and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2011). Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2013). Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Moralı, S., Uğurel I., Türnüklü E. ve Yeşildere S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 14(1), 147-160.

Morris, A. K. (2002) Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive-deductive distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79-118.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Özer, O., Çoker, D. ve Taş K. (2010). *Soyut Matematik* (7.baskı). Ankara: Bilim Yayınları.

Patton, M. Q. (2014). Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri. (M. Bütün ve S. B. Demir Çev. Ed). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Piatek-Jimenez, K. (2010). Students' interpretations of mathematical statements involving quantification, *Mathematics Education Research Journal*. 22(3), 41-56.

Sarı, M. (2011). *Üniversite Öğrencilerinin Matematiksel İspat İle İlgili Güçlükleri ve İspat Öğretimi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Ankara: Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Savic, M. (2012). *Proof and proving: Logic, impasses, and the relationship to problem solving*. Unpublished doctoral dissertation. Las Cruces: New Mexico State University.

Schwarz, B., Leung, I. K. C., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J. and Vale, C. (2008). Future Teachers' Professional Knowledge on Argumentation and Proof: A Case Study from Three Countries. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education,* 40(5), 791 - 811.

Selden, A., McKee, K. and Selden, J. (2010). Affect, behavioral schemas, and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 199-215.

Selden, J. and Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(*2*), 123-151.

Selden, A. and Selden, J. (2007). *Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students'abilities*. (Technical Report), Tennesse Technological University, Mathematics Department.

Selden, J. and Selden, A. (2008). Consciousness in enacting procedural knowledge. *Proceedings Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Selden, J. and Selden, A. (2009). Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. In Stylianou, D.A, Blanton M. L., &. Knuth E. J (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective*, (pp. 339-354), New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics.

Selden, J. and Selden, A. (2015). A Perspective for University Students' Proof Construction. *Proceedings of the 18th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp.45-59)*. Pittsburg, PA.

Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal of Research in Mathematics Education*, *38*, 289-321.

Stylianides, A. J. and Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 307-332.

Stylianou, D., Blanton, M. and Knuth, E. (2009). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. New York, NY: Routledge.

Tall, D. O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Tekin, H. (1991). *Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme*. Ankara: Yargı Yayınları.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119.

Weber, K. (2004). A Framework for Describing the Processes that Undergraduates Use to Construct Proofs. In M. J.Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 28th, Bergen, Norway, 14–18.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.

Weber, K. and Alcock, L. J. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209–234.

Yıldırım, C. (1999). *Mantık: Doğru Düşünme Yöntemi*. Ankara: Bilgi Yayınevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zazkis, R. and Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(4), 429-239.

EKLER

EK I Anadolu Üniversitesi Etik Kurulu Kararı

T.C.
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Etik Kurulu

Sayı : 22576088-050.99-**01** **Tarih :** 29.01.2015

Konu: 29.01.2015 tarihli 2/14 sayılı Etik Kurul kararı hk

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 18.12.2014 tarih ve 312 sayılı yazınız.

İlgi yazınız ekinde Rektörlüğümüze gönderilen Doç. Dr. Tangül KABAEL'in danışmanlığını yaptığı Doktora Programı öğrencisi Başak BARAK'ın "Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Kanıtlama Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı doktora tezine ilişkin Üniversitemiz Etik Kurulu Kararı, yazımız ekinde gönderilmektedir.

Bilgilerinizi ve uygulama dosyasının hazırlanmasında, ilgili kurumun, bulunması halinde Etik Kurulu Yönergesinin dikkate alınması konusunda gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Aydın AYBAR
Etik Kurul Başkanı
Rektör Yardımcısı

30.01.2015
202

Danışman
İlgili

EKLER:
1. Etik Kurulu Kararı

Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü Yunus Emre Kampusu 26470 ESKİŞEHİR
Tel +90 222 335 05 80-4412, **Faks** +90 222 335 36 16, **E-Posta** etik@anadolu.edu.tr,
Web http://www.anadolu.edu.tr/kurullar/etik.aspx

EK I (Devam) Anadolu Üniversitesi Etik Kurulu Kararı

Kayıt Tarihi: 19.12.2014 Protokol No: 26544

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ETİK KURULU KARARI

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Kanıtlama Becerilerinin İncelenmesi
~~PROJE~~/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Doç. Dr. Tangül KABAEL
TEZ YAZARI:	Başak BARAK
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	–
KARAR:	Olumlu

ETİK KURUL ÜYELERİ **İMZA/ TARİH**
29.01.2015

Prof. Dr. Aydın AYBAR
Rektör Yardımcısı / Etik Kurul Başkanı

Prof. Dr. Hayrettin TÜRK
Fen Bil.(Fen Fak.)

Prof. Dr. Yusuf ÖZTÜRK
Sağlık Bil.(Ecz. Fak.)

Prof. Dr. Esra CEYHAN
Eğitim Bil. (Eğitim Bil. Ens.)

Prof. Dr. Kemal YILDIRIM
Sos. Bil.(İkt. ve İd. Bil. Fak.)

Doç. Dr. Münevver ÇAKI
Güz. San. (Güz. San. Fak.)

EK II

BİLGİLENDİRME FORMU

Değerli öğretmen adayı,

Bu formun amacı, sizi klinik görüşme sürecinden haberdar etmek ve buna bağlı olarak sizden izin almaktır.

Yapılacak olan klinik görüşmenin amacı, ispatlama becerilerinizi incelemek olup Doktora Tez çalışmamın bir parçasıdır. Klinik görüşme boyunca size bir takım önermeler verilecek ve sizden bunları ispatlamanız istenecektir. Bu bir sınav olmayıp sizin başarı durumunuzu belirlemeyecektir. Sizin izninizle gerçekleştirilecek olan klinik görüşme, yazılı olarak ve video kamera ile kayıt altına alınacaktır. İstediğiniz zaman klinik görüşmeden çekilme hakkınız bulunmaktadır. Katılımın gönüllülük esasına dayalı olduğu klinik görüşmenin kayıtları, benim tarafımdan ulaşılabilir olacak ve kimseyle paylaşılmayacaktır. Toplanan veriler sadece doktora tez çalışmamda kullanılacaktır.

Katılımınız için çok teşekkür ederim.

Arş. Gör. Başak BARAK

TARİH

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Fakültesi

İlköğretim Bölümü

Matematik Eğitimi ABD

0222 335 0580-3412

EK III

KLİNİK GÖRÜŞME İZİN BELGESİ

Aşağıda imzası bulunan ben ……………………………, Bilgilendirme Formu'nu okuyup klinik görüşmenin içeriği ve klinik görüşmeden elde edilecek kayıtların kullanımı konusundan haberdar olduğumu ve klinik görüşme yapmayı kendi isteğimle kabul ettiğimi bildiririm.

İMZA

TARİH

EK IV

İspatlama Sürecini İncelemeye İlişkin Klinik Görüşme Soruları

1) a) $A = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere $y = x + 1$ eşitliği $\begin{matrix} f: A \to A \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ olacak şekilde bir fonksiyon belirtir mi?

b) $A = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere $y = x + 1$ eşitliği $\begin{matrix} f: A \to A \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ olacak şekilde bir fonksiyon belirtmediğini ispatlayınız.

2) $y = x + 1$ eşitliği $\begin{matrix} f: IR \to IR \\ x \to y = f(x) \end{matrix}$ olacak şekilde bir fonksiyon belirttiğini ispatlayınız.

3) "n bir doğal sayı olmak üzere n^2 tek sayı ise n tek sayıdır." önermesinin doğruluğunu ispatlayınız.

4) "Her $x \in IR$ için $x < x^2$'dir." önermesinin doğru olduğunu ya da yanlış olduğunu ispatlayınız.

5) "Hem tek hem de çift olan bir tamsayı yoktur." önermesinin doğruluğunu ispatlayınız.

6) "Bir $x > 5$ reel sayısı vardır öyle ki $x^2 < 26$'dır." önermesinin doğruluğunu ispatlayınız.