ORTAOKULDA İSPATA GİRİŞ: GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ ÇERÇEVESİNDE SÖZSÜZ İSPATLARIN KULLANIMI

Yüksek Lisans Tezi

Emre ÜLKER

Eskişehir 2018

ORTAOKULDA İSPATA GİRİŞ: GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ ÇERÇEVESİNDE SÖZSÜZ İSPATLARIN KULLANIMI

EMRE ÜLKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ocak 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Emre ÜLKER'in "Ortaokulda İspata Giriş: Gerçekçi Matematik Eğitimi Çerçevesinde Sözsüz İspatların Kullanımı" başlıklı tezi 02.01.2018 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi programı yüksek lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. Abdulkadir ERDOĞAN	....
Üye	: Doç.Dr. Tuba ADA	....
Üye	: Yard.Doç.Dr. Emre EV ÇİMEN	....

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

ORTAOKULDA İSPATA GİRİŞ: GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ ÇERÇEVESİNDE SÖZSÜZ İSPATLARIN KULLANIMI

Emre ÜLKER

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2018

Danışman: Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN

Matematiğin temel yapı taşlarından birisi olan ispat matematiksel bilginin gelişimi, kurulumu ve iletimi için vazgeçilmezdir. Günümüzde pek çok ülkede, ortaokul matematik öğretiminde, aritmetik kavramlar, hesaplamalar ve algoritmalar üzerinde durulmakta ve ispat kavramına yönelik sınırlı çalışma yapılmaktadır. Fakat öğrencilerden liseye başladıklarında yapılan bir ispatı anlayabilmeleri ve bazı temel ispatları yapabilmeleri beklenmektedir. Bu durum ortaokuldan liseye geçişte programlar tarafından oluşturulan bir "didaktik boşluk" olarak adlandırılabilir.

Sözsüz ispatlar, belli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğinin ve bunun ispatına nasıl başlanacağının anlaşılması için okuyucuya yardımcı olan şekil ve diyagramlardır. Çeşitli araştırmalarda sözsüz ispatların bir varsayımı tanımlama, temsil etme, doğrulama ve genelleme gibi matematiksel süreç becerilerini geliştirdiği ortaya konmuştur. Bu çalışmanın amacı, sözsüz ispatların formel ispata geçişi kolaylaştıracak ve söz konusu didaktik boşluğu dolduracak bir araç olarak nasıl kullanılabileceğini incelemektir. Çalışmada gerçekçi matematik eğitiminin sunduğu teorik çerçeveden yararlanılmış ve nitel bir araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılmıştır. Bu bağlamda ortaokul 7. sınıf seviyesine uygun altı tane sözsüz ispat seçilmiş ve teorinin sunduğu etkinlik tasarımı yaklaşımı bağlamında birer sözel problem durumu şeklinde öğretimleri planlanmıştır. Uygulamalar 30 öğrencinin katılımıyla seçmeli matematik uygulamaları dersinde gerçekleştirilmiştir. Her etkinliğe bir hafta yani yaklaşık iki ders saati ayrılmış ve uygulama toplamda altı hafta sürmüştür. Çalışmanın verileri öğrenci defterleri, araştırmacı gözlem notları ve bir öğrenci grubunun çalışmalarının video kaydı ile toplanmıştır. Veriler teorinin belirlediği aşamalara göre hem tüm sınıfın çalışmasını hem de odak grubun çalışmasını yansıtacak şekilde analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin ispatla ilişkili pek çok matematiksel süreci yaşadığını, alanlar arası ilişkilendirmeler gerçekleştirdiklerini ve yaşadıkları süreçlerde bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel ispat, Sözsüz ispat, Gerçekçi matematik eğitimi, Öğretim deneyi.

ABSTRACT

INTRODUCTION TO PROOF IN THE SECONDARY SCHOOL: THE USE OF PROOFS WITHOUT WORDS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION

Emre ÜLKER

Department of Mathematics Education

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, January 2018

Supervisor: Assoc. Prof. Abdulkadir ERDOĞAN

Proof, one of the basic building blocks of mathematics, is indispensable for the development, construction and transmission of mathematical knowledge. In many countries today, arithmetic concepts, calculations and algorithms are emphasized but a limited number of studies is done about the concept of proof in elementary mathematics teaching. However, it is expected that students will be able to understand some of the formal proofs and to do some basic proofs when secondary education starts. This can be termed as a "didactic void" created by curricula in transition from primary to secondary education.

Proofs without words are images and diagrams that help the reader to understand why a certain mathematical statement might be right and how to get it started. It has been shown in various studies that mathematical process skills such as defining, representing, verifying and generalizing of an assumption have been developed by proofs without words. The purpose of this study is to investigate how proofs without words can be used as a means to facilitate the transition to formal proof and to fill the didactic void. In the study, the teaching experiment, which is a qualitative research method, was used within the theoretical framework provided by Realistic Mathematics Education. In this regard, six proofs without words suitable for the seventh-graders were selected and their introduction was planned in the form of word problems in the context of the activity design approach presented by the theory. The study was carried out in an optional mathematics course with the participation of 30 students. Approximately two lessons per week were reserved for each proof and the implementation lasted six weeks in total. The study's data were collected from student notebooks, researcher observation notes and video recording of one student group. The data were analyzed in accordance with the steps determined by the theory in a way that it reflects the work of both the whole class and the focus group. The results of the study show that students experienced many mathematical processes of proof, made connexions between mathematical areas and progressed in their own processes.

Key Words: Mathematical proof, Proof without words, Realistic mathematics ducation, Teaching experiment.

TEŞEKKÜR

Bu araştırman her aşamasında bana yardımcı olan, olumsuzluklara karşı beni yüreklendiren, rehberlik eden, engin bilgi ve tecrubesinden yararlandığım ve öğrencisi olduğum için kendimi şanslı saydığım hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez jurimde olmayı kabul edip görüş ve önerileriyle tezime önemli katkıda bulunan değerli hocalarım Doç. Dr. Tuba ADA'ya ve Yard. Doç. Dr. Emre EV ÇİMEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman olduğu gibi bu zor süreçte de beni yalnız bırakmayan ve bana hep destek olan, hayat arkadaşım ve sevgili eşim Zehra ESEN ÜLKER'e teşekkür ederim.

24/01/2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Emre ÜLKER

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

GME **:** Gerçekçi Matematik Eğitimi

MEB **:** Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM **:** National Council of Teachers of Mathematics

TDK **:** Türk Dil Kurumu

1. GİRİŞ

1.1. Problem

1.1.1. İspatın tarihsel gelişimi

Matematiğin doğuşu, insanın evreni ve çevresini nicel özellikleriyle anlama yeteneğinden kaynaklanmaktadır (Baki, 2014). Matematik, insanlık deneyiminin bir parçası olup, yaşamın pratik ihtiyaçlarından doğmuştur (Yıldırım, 1996). Bu nedenle matematik, insanlık tarihindeki en eski bilimlerinden biridir (Ülger, 2003). Sayı ve biçime ilişkin kavramlarla tanışılması Yontma Taş Devri'ne kadar uzanmaktadır (Struik, 2011). Bununla beraber bilimsel etkinliklerin ortaya çıkması, Dicle-Fırat, Nil, İndüs gibi büyük nehir vadilerinde kurulmuş, bilimin doğuşu için elverişli koşullara sahip olan ilk uygarlıklarla başlamıştır (Yıldırım, 2011).

Yıldırım (1996)'a göre; Antik Yunan öncesi matematikteki gelişmenin tümü Sümer, Babil, Mısır, Hint ve Çin gibi doğu kültürlerinin bir ürünüdür. Mezopotamya'daki tarımsal yerleşmeyle birlikte şehirleşmeye de başlanması, günlük ticari hesaplamaları gerektiren etkinliklere yol açmıştır. Ayrıca Sümerler ve Babillerin sulama kanalları ve asma bahçeleri gibi ileri mühendislik becerisi gerektiren yapıları inşa etmesi, Mezopotamya'daki bu uygarlıkların matematikte oldukça ileri olduklarının göstergesidir (Baki, 2014). Mısır'da ise Nil Nehri'nin her yıl taşması sonucu bozulan arazi sınırlarının planını çizmek için ölçüm yapmak çok önemli olmuştur (Barker, 2003). Toprak sahipleri, devlete toprakları oranında vergi ödedikleri için devletin bu işlerle görevli memurlarının bu ölçümleri yapıp, toprak sahiplerine bir önceki yılda sahip oldukları kadar toprak vermeleri gerekmekteydi. Heredot (M.Ö. 485-415) yer ölçümü anlamına gelen geometrinin bu ölçüm ve hesaplamaların sonucu olarak ortaya çıktığını söylemektedir (Ülger, 2003).

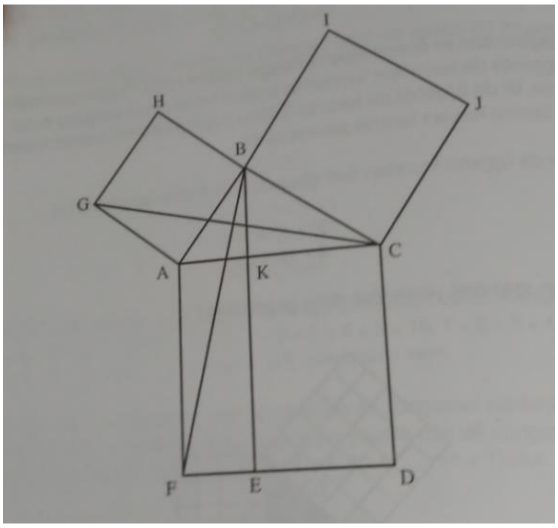
Mısır matematiği ile ilgili bilgiler temelde iki kaynağa dayanmaktadır. Bunlardan ilki Ahmes (ya da Rhind) diğeri ise Moskova papirüsüdür. Bunlardan elde edilen bilgilere göre; matematiğin başlangıç dönemi olarak sayılabilecek bu dönemde, kuramsal bir çalışma yoktur, matematik tarım, ticaret ve mühendislik işlerinin yarattığı ihtiyacı karşılamak için yapılmaktadır (Yıldırım, 1996). Ülger (2003)'e göre; bu dönemde matematik simgesel olarak değil, sözel olarak ifade edildiği için, bulgular empirik veya deneysel, işlemler de sayısaldır. Bugüne kadar okunan belgelerde bu dönemde ispat anlayışının varlığına veya mantıksal çıkarım yöntemlerinin kullanıldığına ilişkin bir bilgiye rastlanmamıştır. Verilen örnekler genel bir tümdengelimsel düşünme yöntemini değil, özel nitelikte sayısal çözümlere ilişkin kazanılmış bilgileri ve becerileri aktarmaktadır.

Mevcut belge ve kaynaklar Antik Yunan matematiğinde, Babil ve Mısır matematiğinin etkilerini ortaya koymuştur ancak Antik Yunanlılar matematiği doğruluğu deneyime dayanan empirik önermeler yığını olmaktan çıkarıp, doğruluğu mantıksal yöntemlerle ispatlanan bir sistem niteliği kazandırmışlardır. Başka bir ifadeyle matematiğe kuramsal bilim niteliği kazandıran Antik Yunanlılardır.

Antik Yunan matematiğinin temel amacı insanın evrendeki yerini akılcı bir biçimde açıklamak olduğu için, Antik Yunan matematiğinde, doğu matematiğinin sorduğu ‘nasıl’ sorusuna ek olarak, modern bilimsel ‘niye’ sorusunun da yanıtı aranmıştır (Struik, 2011). Yıldırım (1996)’a göre; böyle bir değişime hangi koşulların yol açtığı hala açıklığa kavuşmamasına rağmen, o dönemde Yunanlılar varlık ve bilgi konularında bir tartışma ve arayış içine girmişler ve birtakım kuramsal sorunları akılcı yoldan incelemişlerdir.

Bir konuyu, kuramsal düzeyde tartışma, özünde bir akıl yürütme olup, doğru diye bilinen ya da inanılan yargıları ispatlama çabasını içerir. Yunanlıların empirik gözlemlere dayalı deneme yanılma düşünce biçiminden, ispata yönelten nedenlerden bir başkası da tümdengelimsel çıkarımın içerdiği, aynı zamanda Yunanlıların entelektüel güzellik anlayışını oluşturan öğelerin başında gelen, düzen, uyum ve tutarlılıktır. O dönemki Yunan toplumunun filozofları, matematikçileri, devlet adamlarını, şair ve heykeltıraşları içine alan küçük bir ‘efendi’ sınıfı ile el becerisi ve alın terine dayanan üretim, kazanç ve diğer pratik işleri yapan geniş bir ‘köleler’ sınıfı olarak ikiye ayrılması, kuram ve uygulama ayırımına ortam yaratmıştır. Bu toplumsal yapının etkileri geometride ölçme yerine, salt düşünceye dayanan ispat yönteminin benimsenmesi olarak ortaya çıkmıştır.

Şekil 1.1’de Öklid’in Elementler kitabında yer alan Pisagor teoreminin bilinen ilk yazılı ispatı verilmiştir. Bu çalışma günlük ihtiyaçları karşılamak için değil, entelektüel deneyimi ve kuramsal düşünceyi öne çıkarmak için yapılmıştır. Bu ispatta, modern bilimsel 'niye' sorusuna bir cevap aranmış ve doğru diye bilinen ya da inanılan yargı, tümdengelimsel çıkarımın içerdiği düzen, uyum ve tutarlılıkla doyurucu ispatlara ulaştırılmıştır.



Şekil 1.1. *Pisagor Teoremi'nin ilk yazılı ispatı*[1] *(Dönmez, 2002, s.107)*

Tarihte kaydedilen ilk ispat Babillilere aittir. Babilliler (Çinliler ile beraber) Pisagor'dan en az 500 sene önce Pisagor Teoremi'nin farkına varmışlar ve teoremin doğruluğunu gösteren şekiller yapmışlardır. Fakat bu şekiller formel ispatın doğasına ve Pisagor'un matematik anlayışına sahip değildir.

Formel anlamda ilk defa matematiksel ispatı Thales geometride uygulamıştır (Baki, 2014). İsa'dan önce yaşayan yedi büyük bilginden en eskisi ve en ünlülerinden olan Thales, bugünkü Milas'ta doğmuştur. Yunanlı büyük bir matematik bilgini ve filozofu olan Thales aynı zamanda batı felsefesinin kurucusu sayılır (Dönmez, 2002). Ayrıca Thales'e atfedilen teoremlerin, Matematiğin kesin ve mantığa dayanan kuruluşunun başlangıcına ait olduğu göze çarpmaktadır (Van Der Waerden, 1994). Thales'in ispatladığı bazı önermeler şunlardır (Baki, 2014, s.30):

[1] ABF üçgeni ile ACG üçgeni eş üçgenlerdir. ABF üçgeninin alanı, AKEF dikdörtgeninin alanının yarısı, ACG üçgeninin alanı ABHG karesinin alanının yarısıdır. Buna göre AKEF dikdörtgeninin alanı, ABHG karesinin alanına eşittir. Benzer şekilde CKED dikdörtgeninin alanı CBIJ karesinin alanına eşittir. Sonuç olarak $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ olur.

1. Çap daireyi iki eş parçaya böler.
2. İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir.
3. İki doğru kesiştiği zaman iç-ters açılar eşittir.
4. Yarım dairede çapı gören açı dik açıdır.
5. Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır.
6. İkişer açısı ve birer kenarları eşit olan iki üçgen özdeştir.

Thales'ten sonra, Thales'in öğrencisi olduğu bilinen Pisagor, kendi adıyla anılan ünlü teoremi ortaya koymakla ispat yöntemine kazandırdığı saygı ve gücün yanında büyük bir açıklık da getirmiştir. Öte yandan Pisagor, bu teoremin ispatı sırasında matematiğin yaşamış olduğu ilk kriz olan irrasyonel sayıları keşfetmiş, her şeyin sayılarla ifade edebileceğini düşünen Pisagorcular bu durumu bir türlü kabul edememiş ve bunu uzun bir süre sır gibi saklamışlardır (Baki, 2014). Pisagorcuların içine sindiremedikleri bu beklenmedik sonuç, irrasyonel sayıların ortaya çıkmasıyla başlayan bunalımın giderilmesi için yapılan çalışmalar, mantıksal ispat yönteminin belirginlik kazanmasında başlıca etkenlerden biri olmuştur. Eudoxus'un $\sqrt{2}$'nin rasyonel olamayacağına ilişkin verdiği ispatla bu bunalım giderilmiştir.

Yıldırım (1996)'a göre Pisagorcular, Thales'in çalışmalarında ilk örnekleri görülen tümdengelimsel çıkarsamayı içeren ispat yöntemini ileri düzeyde kullanmışlar, böylece doğruluğu varsayılan önermeler arasında mantıksal ilişkilerin kurulabileceği ve seçilmiş kimi ilkelerden diğerlerinin mantıksal olarak çıkarsanabileceği düşüncesini zihinlere kazandırmışlardır. Thales ile başlayan matematiği mantıksallaştırma süreci, Pisagorcular ve Eudoxus'un önemli katkılarıyla ve Euclid'in elementler adlı eseriyle büyük bir aşama atlamıştır.

İskenderiye Müzesi'ndeki Yunan kökenli öğretim görevlilerinden biri olan Euclid'in 'Elementler' adıyla bilinen eseri, geometride doruğa ulaşan Yunan matematik düşüncesini örneklemektedir. Euclid'in matematiğin bazı alt dallarının da doğmasına neden olan 13 ciltlik bu eserinde, 1-4. ciltlerinde düzlem geometrisi, 5. cildinde oran, 6. cildinde düzlemsel şekillerde benzerlik, 7-9. ciltlerinde sayılar teorisi, 10. cildinde ölçülebilirlik ve 11-13. ciltlerinde 3-boyutlu cisimlerin geometrisinden bahsedilmektedir (Baki, 2014). XIX. yüzyılın sonlarına dek tüm yüksek öğrenim kurumlarında temel ders kitabı olarak okutulan bu eser (Yıldırım, 1996), günümüzde en çok basılan ve okunan kitaplar arasında bulunmaktadır (Dönmez, 2002).

Yıldırım (2011)'a göre Euclid'in geometriye katkısı özgün bilgiler ortaya koymasında değil, daha önceden bilinen ispatları tümdengelimsel bir sistem içinde sunmasında yatmaktadır. Bu sunumda, öncül diye seçilen az sayıda aksiyom, postulat ve tanımlardan, tümdengelimsel çıkarımla, geriye kalan tüm önermelerin ispatı verilmektedir. Bu aksiyomatik sistemde ispatlanan önermeler sistemin teoremlerini oluşturmaktadır. Euclid'in ispatları yaparken, kendisinden bir dönem önce yaşayan Aristoteles'in, ispat yapılırken en az sayıda varsayıma başvurularak yapılması gereğine de bağlı kaldığı görülmüştür (Yıldırım, 1996). On temel ilke ve 465 önermeye dayanan Euclid'in bu eseri, yalnızca ders kitabı olarak değil, aynı zamanda bilimsel düşüncenin ne olması gerektiğine dair bir model olarak da hizmet etmiştir (Barker, 2003).

Yıldırım (1996)'a göre, Euclid'ten sonra batı dünyasında matematik, uzun süren bir durgunluğa girmiştir. Bu dönemde, mekanik alandaki çalışmalarını Euclid geleneğine uygun olarak, aksiyomatik biçimde sunan Archimedes'in yanı sıra Apollonius, Erastothenes, Claudius, Ptolemy, Heron, Diophantus ve Pappus gibi güçlü matematikçiler yaşamasına rağmen, bunların matematiksel yöntemin gelişmesinde rol oynadıkları pek söylenemez. Roma egemenliğindeki sonraki dönemde ise, matematiğe olan ilgi pratik nitelik olup, yaratıcı düşünme ve araştırma tutkusu önemini yitirmiştir.

Antik uygarlığın sona ermesiyle İtalyan Rönesans'ının başlaması arasındaki bin yıllık dönem Avrupa'nın karanlık çağıdır (Yıldırım, 2011). Roma İmparatorluğu'nun çöküşüyle birlikte, matematiğin gelişmesi önce Hindistan'da devam etmiş, sonra yeniden Mezopotamya'ya kaymıştır (Struik, 2011). Ancak Hintli matematikçilerin, hesaplama ve cebirsel tekniklerdeki gösterdikleri başarı ve konumsal sayı sisteminin gelişmesindeki katkıları çok önemli olmasına rağmen, Yunanlıların ispat yöntemine yabancı kalmışlardır.

Mezopotamya'da, birçok değerli eski Yunan ve Hint eserler Arapçaya çevrilmiş, kaybolmaya yüz tutmuş ve Rönesans'ın oluşumunda başlıca etken olan bu eserler Arapça çevirileriyle Avrupa'ya iletilmişlerdir. Arap matematikçilerinin matematiğe olan katkısı küçümsenmeyecek ölçüde (Ülger, 2003) olmasına rağmen, Euclid'in çalışmalarına özellikle de ispat kavramına gözle görünür bir katkı yapmamışlardır (Dönmez, 2002).

1.1.2. İspatın tanımı ve ispat türleri

Türk Dil Kurumu (TDK) (2005, s.984-985) ispatı: "Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt" şeklinde tanımlamıştır. Oxford Amerikan Sözlüğünde (1980, s.535) ise: "Herhangi bir şeyin doğruluğunun gösterimi" olarak tanımlanmıştır. İspatın günlük dilde kullanılan bazı anlamları Argün ve arkadaşları (2014, s. 239-240) tarafından aşağıdaki gibi listelemiştir:

- Tanık ve delil göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, doğrulama veya yanlışlama.
- Delil olarak hizmet eden her şey.
- Gösteri, bir şeyin doğruluğunu kurgulama.
- Bir şeyi test etme veya sınama.
- Bir şeyin doğru olduğunu göstermede kullanılan yeterli delil veya bir şeyin doğruluğuna veya yanlışlığına inandırma.

Yıldırım (1996, s.102) ise ispatlamayı "bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabası" olarak tanımlamıştır.

Matematiksel ispatın herkesin kabul ettiği bir tanımı hala yapılamamıştır ve bu konuda tartışmalar devam etmektedir (Dede ve Karakuş, 2014) ve alanyazında matematiksel ispatın ne olduğuna dair farklı tanımlar vardır (CadwalladerOlsker, 2011). Matematiksel ispatın ne olduğuna yönelik olan bu tanımlar ispatın *formel boyutu* ve *sosyal veya kültürel boyutu* olarak iki grupta toplanabilir (Arsac, 2007).

İspatın *formel* boyutu, bazı kesin kurallara dayalı olarak her bir önermenin doğrulanmasıyla istenilen nihai sonuca ulaşmayı ifade etmektedir (Greenberg, 1993). Bu bağlamda ispatın formel boyutu ile ilgili bir tanım "p_1, p_2, …, $p_{n,}$ q önermeler olmak üzere,her $1\leq i \leq n$ için p_i doğru iken q önermesinin doğru olduğunun gösterilmesine $p_1 \wedge$ p_2, …, $\wedge p_{n,} \rightarrow q$ önermesinin ispatı denir" (Argün vd., 2014, s. 235) şeklinde verilebilir. Bu tanıma göre ispat; bir teoremin hükmünün doğruluğunu göstermek için izlenen mantıksal yolların topluluğudur (Argün vd., 2014). Aşağıdaki tanımlar da ispatın formel boyutuna örnek olabilecek tanımlardır:

- Ortaya atılan iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesi durumudur (Baki, 2008).
- İspat, bir sonucun doğru olduğu zaten bilinen öncüllerden mantıksal olarak çıktığını göstermekle, o sonucu kurma yönünde ilerleyen bir uslamlama zinciridir (Barker, 2003, s. 36).
- İspat, aksiyomlardan ve önceden ispatlanmış cümlelerin mantıksal adımlarından üretilen reddedilemez bir cümleler dizidir (Wolf, 1998, s.8).

- Matematiksel bir ispat, belirli akıl yürütme ve gerekçeleme türlerini ifade etmenin resmi bir yoludur (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000, s.56)

Dede (2013, s. 17) ispatın *sosyal veya kültürel* boyutunu "matematikçiler tarafından ispatın geçerliği için kullanılan süreç, işlem ve yöntemler yönünden nitelendirilebileceğini" belirtmiştir. Buna göre, matematiksel bilginin doğruluğunun gösterildiği bir içeriğin matematiksel ispat olarak kabul edilmesi için, matematikçiler tarafından geçerli olarak tanımlanması gerekir (Arsac, 2007). Benzer bir tanım da Gossett (2009, s.86) tarafından "Bir ispat bazı kesin matematiksel ifadelerin doğruluğunun gösterimidir. Bu gösterim, hedef kitlesini gösterimin doğruluğuna ikna edebilecek yeterli detayları içermelidir" şeklinde vermiştir. Bu bağlamda, bir teoremin kabulünde bu teoremin öneminin ve altındaki kavramların anlaşılması formel ispatının varlığından daha etkilidir (Dede ve Karakuş, 2014). Bu durum aşağıdaki örnek ile açıklanmaya çalışılmıştır.

Teorem: 1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların toplamı S(n) olsun. S(n)=$\frac{n.(n+1)}{2}$'dir.

İspat 1: n=1 için; S(1)=$\frac{1.(1+1)}{2}$ = 1 teorem doğrudur.

n=k için; S(k)= $\frac{k.(k+1)}{2}$ doğru olduğu kabul edilir.

n=k+1 için; S(k+1)= $\frac{(k+1).(k+2)}{2}$ doğru olup olmadığı kontrol edilir.

n=k+1 için; S(k+1)=1+2+3+…+k+(k+1) = $\frac{k.(k+1)}{2}$ +(k+1) = $\frac{(k+1).(k+2)}{2}$'dir.

Böylece ifade k için doğruysa k+1 için de doğru olduğundan, tümevarım ilkesiyle her n∈ N^+ için de doğru olur.

İspat 2:

S(n) = 1 + 2 + … + n

<u>+S(n) = n + n-1+ … + 1</u>

2S(n) = n+1+n+1+…+n+1

→ S(n)=$\frac{n.(n+1)}{2}$'dir.

Buradaki iki ispat da aynı teoremin ispatı olarak yapılmıştır. Birinci ispat, ispatın formel boyutunda ele alınabilecek bir ispattır. Bu ispat, mantık kurallarının cebirsel bir dizgesine dayanmaktadır. İkinci ispat, birinci ispatla benzer ifadeler içermekle birlikte, önermenin neden doğru olduğunu da göstermektedir. Bunun için bu ispat, ispatın sosyal veya kültürel boyutunda ele alınabilecek bir ispattır ve bu ispatta teoremin altındaki kavramların anlaşılması durumu, teoremin kabulü noktasında, Dede ve Karakuş (2014)'a göre birinci ispattan daha fazla rol oynamaktadır.

Hersch (1993) ispat kavramının matematikte iki farklı anlama sahip olduğunu ifade etmiştir. Hersch (1993)'e göre, ispatın ortak bir uygulamaya yönelik matematiksel anlamı yani *işleyen* anlamı, nitelikli matematikçileri ikna eden delillerdir. Yukarıdaki teorem için yapılan ikinci ispat, ispatın işleyen anlamına bir örnek olabilir ve ispatın işleyen anlamı, ispatın sosyal veya kültürel boyutu içinde ele alınabilir. Matematiğin felsefesi ve matematiksel mantık üzerinde uzlaşmayla ilgili olan ikinci anlamı, yani *mantık* anlamı, cebir kurallarına göre mantıksal kurallara dayalı cümlelerin dönüşümlerinin dizisidir (Hersch, 1993). Yukarıdaki teorem için yapılan birinci ispat, ispatın mantık anlamına bir örnek olabilir ve ispatın mantık anlamı ispatın formel boyutu içinde ele alınabilir (Dede, 2013).

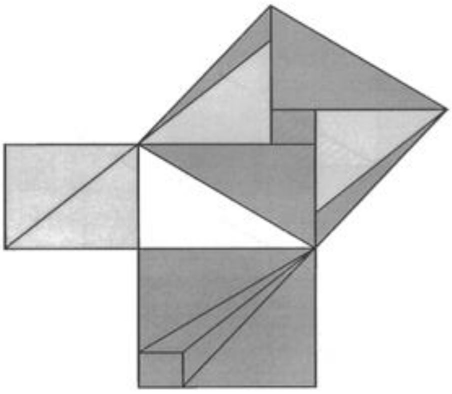
Hanna (1990) ise iki tür ispattan bahsetmektedir. Bunlardan birincisi *açıklayan ispatlar,* ikincisi ise *ispat eden ispatlardır*. Hanna (1990)'ya göre, bir teoremin neden doğru olduğunu gösterip olaydan türetilen gerekçelerin bir kümesini sunan ispatlar *açıklayan ispatlardır.* Yukarıdaki teorem için yapılan ikinci ispat açıklayan ispata örnek olarak gösterilebilir ve açıklayan ispatlar, ispatın sosyal veya kültürel boyutu içinde ele alınabilir. Bir teoremin sadece doğru olduğunu gösterip yalnızca delile dayalı gerekçeler sunan ispatlar ise *ispat eden ispatlardır* (Hanna, 1990). Yukarıdaki teorem için yapılan birinci ispat, ispat eden ispata örnek olarak gösterilebilir ve ispat eden ispatlar, ispatın formel boyutu içinde ele alınabilir (Dede, 2013).

Dede ve Karakuş (2014)'a göre, öğrencilerin ispatın ne olduğu ve niçin yapıldığını anlamaları önemlidir. Öğrencilere matematiksel ispata neden gerek duyulduğu, matematiksel ispatların matematiği öğrenme ve anlamada nasıl bir rolünün olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda Dede ve Karakuş (2014) matematiksel ispatların yapılış amacına göre 1) Sezgisel (heuristic) ispat, 2) Açıklayıcı ispat, 3) Keşfedici ispat ve 4) Görsel ispat olarak dört başlık altında toplamış ve açıklamıştır.

1) Sezgisel ispat: Dede ve Karakuş (2014)'a göre sezgisel ispat, sezgilere ve tahminlere dayanarak yapılan ispattır. Bazı matematikçilere göre sezgisel ispat öğrencilerin zihin yapısıyla oldukça uyumludur ve doğrulama sürecinde formel ispattan daha kullanışlıdır. Sezgisel ispatta ağırlıklı olarak yer alan; araştırma, keşfetme ve informel doğrulama süreçleri eğitsel açıdan formel ispattan daha önemli bir rol üstlenmektedir (Hanna, 2000a). Dede ve Karakuş (2014)'un, Reis ve Renkl (2002) tarafından yapılan araştırmasından verdiği aşağıdaki örnek sezgisel ispatın nasıl yapılabileceğine yöneliktir.

Örnek: Özgür ve Ege farklı üçgenler çizdiler ve bu üçgenlerin her birinin iç açı ölçülerinin toplamlarını ölçtüler. İkisi de çizdikleri tüm üçgenlerin iç açı ölçülerinin toplamının 180^0 olduğunu şaşırarak keşfettiler ve bunun bir rastlantı olamayacağından öğretim sürecinde öğretmeninin rehberliğiyle emin oldular. Böylece öğrenciler heuristik teknikler ile bir varsayım oluşturarak öğretmen rehberliğinde tüm üçgenlerin iç açı ölçüleri toplamının 180^0 olduğunu ispatladılar.

2) Açıklayıcı İspat: Hanna (2000b)'ya göre matematikte ispatın temel fonksiyonu önermelerin doğruluğunu göstermektir. Bunun yanında ispatın en önemli ek fonksiyonu önermeleri açıklamak veya açıklığa kavuşturmaktır. Matematikçilerin gözünde en iyi ispat, sadece teoremin doğruluğunu gösteren değil, aynı zamanda teoremin anlaşılmasına da yardım eden ispattır. Bu tür açıklayıcı ispatlar daha ikna edicidir ve matematikçiler tarafından daha çabuk kabul edilir. Geçmişi eski Çin matematikçilerine kadar uzanan açıklayıcı ispatlardan, parçalara ayrılmış kareleri kullanarak M.S. III. yüzyılda Liu Hui tarafından yapılan örnek, aşağıda verilmiştir (Şekil 1.2).



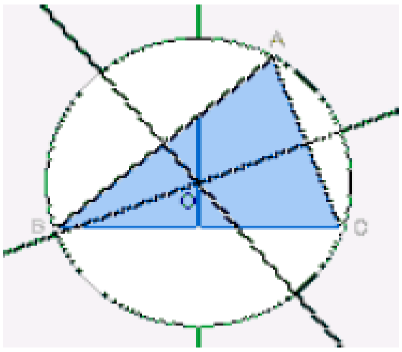
Şekil 1.2. *Pisagor Teoremi'nin ispatı*[2] *(Nelsen, 2000, s.4)*

3) Keşfedici İspat: Dinamik yazılımların sınıflarda kullanılmasıyla birlikte matematiksel keşifler, özellikle geometri öğretiminde yeni bir ivme kazanmıştır (Hanna, 2000a). Hanna (2000a)'ya göre; örneğin Sketchpad ve CabriGeometri öğrencilerin yüksek doğruluk derecesinde geometrik çizimler yapmasına olanak vererek önermeleri anlamalarını sağlamaktadır. Ayrıca öğrenciler bu programlar yardımıyla varsayımları uygun özelliklerde oluşturdukları çizimlerle test etme olanağı bulmakta hatta bu denemeler sayesinde yeni özellikler keşfetmektedirler. Ancak buradaki keşfin, ispatın yerini almaması gerekir. Keşif ve ispat birlikte kullanılabilir ve birbirlerinin tamamlayıcısı olabilirler. Çoğu matematik eğitimcisi öğrencilerin varsayım yapmada ve varsayımları test etmede kullanılan keşfi öğrenmesi gerektiğini ancak bunun bir ispat oluşturmadığını düşünmektedir. Dede ve Karakuş (2014) yapmış olduğu bu sınıflandırma için Hanna (2000a)'nın bir örneğini vermiştir.

Örnek: Bir öğrenci 'Herhangi bir üçgende, kenar orta dikmeler bir noktada kesişir' teoremini ispatlamak istemektedir. Dinamik yazılım programları sayesinde öğrenci birçok üçgende orta dikmeleri sürekli olarak doğru bir şekilde çizilebilir ve belli sayıda çizimden sonra orta dikmelerin tek bir noktada (çevrel çemberin merkezi) kesiştiğini görebilir (Şekil 1.3).

---

[2] Bir kenar uzunluğu açık renkli üçgenin bir kenar uzunluklarına eşit üç adet kare çizilmiştir. Üçgenin dik kenarlarına çizilen kareler, eşlik kurallarından yararlanılarak, hipotenüsüne çizilen karenin içine boş yer kalmayacak ve taşmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Bu da küçük karelerin alanları toplamı büyük karenin alanına eşittir demektir. Böylece üçgenin dik kenarlarının uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir anlamına gelir.

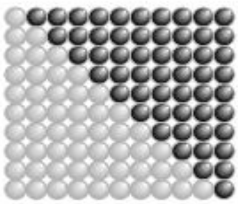


Şekil 1.3. *Çevrel çemberin merkezi (Hanna, 2000a, s.13)*

4) Görsel İspat: Hanna (2000b)'ya göre birçok matematikçi özellikle de matematiksel ispatlara potansiyel katkıları için görsel temsillerin kullanımını araştırmaktadır. Görsel temsiller, sadece matematiksel ifade ve önermeler için bir delil olarak değil aynı zamanda matematiksel ifade ve önermelerin doğrulanması için de kullanılabilirler. Buna göre; grafik ve görsel temsiller, bir matematiksel ifadenin ve önermenin temel bir öğesi olarak kabul edilebilir ve matematik öğretim programlarının temel bileşenleri olarak da düşünülebilir. Bugüne kadar geleneksel ispatın yerine geçmesi düşünülmese de bugün bu konuda çok sayıda tartışma vardır ve birçok araştırmacı bunu araştırmaktadır. Dede ve Karakuş (2014) yapmış olduğu bu sınıflandırmaya aşağıdaki örneği vermiştir.

Örnek: "Teorem: 1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların toplamı S(n) olsun.

S(n)=$\frac{n.(n+1)}{2}$'dir" teoreminin ispatı Şekil 1.4'teki görsel ispat ile gösterilebilir.



Şekil 1.4. *Birden n'ye kadar ardışık tam sayıların toplamının görsel ispatı*[3] *(Alsina ve Nelsen, 2010, s. 120)*

[3] Şekil 1.4'teki gri toplar birden n'ye kadar ilk n pozitif tam sayının toplamı olmak üzere, bu toplamın şekilde oluşturulan kenarları n ve (n+1) olan dikdörtgenin alanının yarısı olduğu yani n(n+1)/2 görülmektedir.

Dede ve Karakuş (2014)’un bu sınıflandırması incelendiğinde, belirtilen ispat türlerinin birbirinden kesin sınırlarla ayrılmadığı görülmektedir. Örneğin açıklayıcı ispat ve görsel ispatlara aşağıda detaylı şekilde ele alacağımız sözsüz ispatlardan örnekler vermiştir. Ayrıca sezgisel ispat ve keşfedici ispat arasındaki sınırlar da kesin değildir. Keşfedici ispatta kullanılan dinamik yazılımlar aynı zamanda sezgisel ispatların destekleyici araçları olarak da düşünülebilir.

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte bilgisayarlar matematiğin her alanında kullanılmaya başlandığı gibi uzun yıllar ispatlanamayan Dört-Renk Problemi ve Kepler Varsayımı gibi bazı varsayımların ispatlarında da kullanılmıştır.

Dört-Renk Problemi’nin öncülü oldukça basittir: Kâğıt sayfa üzerindeki bir haritanın ülkeleri, sınırdaş ülkeleri farklı renklerde olacak biçimde en az kaç renkle boyanabilir? 1852’den başlayarak içinde Augustus De Morgan, Arthur Cayley ve Arthur Bray’in da bulunduğu önemli matematikçiler, topoloji aksiyomlarını kullanarak bu problemi çözmeye çalışmışlar, bu şekilde yapılması gereken hesaplamaların çok kullanışsız olduğunu keşfetmişler ve geleneksel yöntemlerle problemi ispatlayamamışlardır (Miller, 2012). Fakat bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle, daha önceki matematikçiler için imkânlı olmayan hesaplamalar yapılmaya başlanmıştır. Kenneth Appel ve Wolfgang Haken 1976’da bu problemi ispatlamak için özel bir bilgisayar programı kullanmış ve temel olarak program, problemin öncüllerini doğrulamak için olası tüm harita konfigürasyonlarının dört renk kullanarak boyanabileceğini doğrulamıştır (Miller, 2012).

Kepler Varsayımı 17. yüzyılın başlarına dayanmaktadır. Kepler “Mevcut alan en ekonomik kullanmak üzere, küreler, manavların portakalları dizdiği şekilde -alt tabaka kare bir kafeste bulunmak üzere bir sonraki tabaka ise doğal yolla yerleştirilen şekilde- dizilmelidir” varsayımını yapmıştır (Mann, 2013). Mann (2013)’ın manav aranjmanı adını verdiği, portakalların yoğunluğunun maksimize ve birbirlerinin arasındaki boşluğu minimize ediyor görünen bu düzen gerçekten en iyisi midir? Newton ve Gauss bu problem üzerinde çalışmış ve Gauss 1831’de paketlemenin düzenli bir kafes şeklinde olması halinde manav aranjmanının en iyisi olduğunu göstermiştir. Yirminci yüzyıl matematikçilerinin gündemini oluşturan 23 çözümlenmemiş matematiksel problemlerin listesine, bu problem 1900 yılında David Hilbert tarafından, 18. problem olarak dâhil edilmiştir. László Tóth 1953’te problemin sınırlı (ama muazzam) hesaplamalara indirgenebileceğini göstermiştir. 1990'ların başında Thomas Hales, 150 değişkenli belirli bir fonksiyonu minimize ederek sorunun çözülebileceğini göstermiş daha sonra doğrusal programlama adı verilen özel matematiksel yazılımları ile kürelerin 5000 farklı konfigürasyonunu inceleyerek manav aranjmanının en iyisi olduğunu ispatlamıştır (Mann, 2013).

Bilgisayarların, yukarıdaki örneklerdeki gibi matematiksel ispatlarda kullanılması matematikçiler arasında teorik ve felsefi farklı görüş ayrılıklarının oluşmasına yol açmış ve bu tür tartışmalar, bilgisayarın matematiksel ispatlarda kullanılmasıyla ilgili olarak iki farklı yaklaşımın ortaya çıkmasına neden olmuştur (Dede ve Karakuş, 2014):

i. Bilgisayarlar yardımıyla matematiksel ispat yapılabilir: Kepler Varsayımı'nda olduğu gibi çoğu matematikçi Hales'in ispatının doğru olduğuna inanıyor olsa da, bu yöntem adım adım kontrol edilebilecek geleneksel bir matematiksel ispattan çok uzaktır (Mann, 2013). Fakat matematiksel önermelerin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verme noktasında matematik toplumuna hâkim olan Aristo mantığı, sürekli olarak takip edilmesi gereken bir yol olarak görülmemelidir. Dolayısıyla bu yaklaşıma göre, matematiksel önermelerin geçerliği ve yanlışlığı bilgisayarlar aracılığıyla kontrol edilebilir (Hersch, 1993). Bu görüşe göre, matematikteki deneysel akıl yürütme için çok uzun ve karmaşık ispatların varlığından etkilenilerek önerilen bu yeni rol bir alternatiftir ve bazı durumlarda da uygulanması zorunludur (Dede ve Karakuş, 2014).

ii. Bilgisayarlar, matematikte ispatın merkezi rolüne zarar verir: Sangalli (1991)'ye göre bir matematiksel ispat, mantıksal tümdengelim ile yeni bir doğruluğun açık olan veya daha önce ispatlanan doğru önermelerden eldesidir. Bir ispatın sunuluşu, yeterince sabırlı ve bilgili bir matematikçinin onu doğrulayabileceği şekilde olmalıdır. Bilgisayarlarla yapılan ispatlar matematiksel ispat için yaygın olarak kabul edilen adım adım ilerleme sürecini dışladığı için matematiksel doğrulama için benimsenen uygun standartların gerçekten bir ispat olup olmadığına ilişkin soruları da beraberinde getirmiştir (Detlefsen, 2008). Zira bilgisayarla yapılan bir ispatta, ispatın nasıl çalıştığını gösteren mantıksal süreçler ve bu süreçler içindeki uyum tespit edilememektedir (Tall, 2002). Ancak, yukarıdaki örneklerdeki gibi bazı teoremlerin ispatı oldukça uzun hesaplamalar gerektirmektedir ve bir insan tarafından doğrulanması mümkün değildir. Dolayısıyla matematikçiler, mevcut şartlara göre daha fazlası yapılamayan ve bu şekilde ispatlanan önermeleri kabul etmek zorunda kalmıştır (Hanna, 2007).

Sonuç olarak, alanyazında matematiksel ispatın ne olduğuna yönelik yapılan tanımlar farklı isimlerle adlandırılsa da iki grupta toplanmıştır. Birinci grupta değerlendirilen ispatlar, teoremin ispatı için okuyucuya neden doğru olduğuna ikna etme gerekliliği olmadan aksiyomlara dayalı olarak birbiri ardına yapılması gereken işlemler iken, diğer grupta değerlendirilen ispatlar ispatın sadece doğruluğunu değil neden doğru olduğunu da göstermektedir. Dolayısıyla başvurulan tanıma göre iki ispat türü de geçerli olup, matematiksel ispat gerekliliklerini sağlamaktadır. Bu çalışmada birinci grupta değerlendirilen ispatlar *formel ispatlar,* ikinci grupta değerlendirilen ispatlar ise *informel ispatlar* veya *diğer ispatlar* olarak adlandırılmıştır.

1.1.3. Formel ispat yöntemleri

Dede (2013)'ye göre matematikteki en önemli işlerden biri, verilen teoremleri ispatlamaktır. Bir teoremin doğrulanması için farklı ispat yöntemleri kullanılmaktadır. Bunlardan en çok kullanılanlara ilişkin açıklamalar ve örnekleri aşağıda verilmiştir.

1.1.3.1. Doğrudan ispat

$p \rightarrow q$ koşullu önermesinin doğrudan ispatı, nesnel kanunların bir veya daha fazla uygulamalarında p önermesi doğru ise q önermesi mutlaka doğrudur kabulüyle başlayan mantıksal olarak geçerli bir delildir. Böylece, $p \rightarrow q$ koşullu önermesinin doğrudan ispatında p önermesi doğrudur kabulü ile başlanır. Daha sonra $p \rightarrow q_1, q_1 \rightarrow q_2, \ldots, q_n \rightarrow q$ koşullu önermelerinin bir veya birkaç adımında q önermesinin doğru olduğu elde edilir (Mishra, 2004). Aşağıda bununla ilgili bir örnek verilmiştir.

Örnek: İki tek tam sayının toplamı çifttir.

İspat: a ve b iki tek tam sayı olsun.

Hipotez: p: a ve b tek tam sayılardır.

Hüküm: q: a + b çifttir.

a tek tam sayı ise $\exists m \in Z$ için $a = 2m + 1$ ve benzer bir şekilde

b tek tam sayı ise $\exists n \in Z$ için $b = 2n + 1$'dir. O halde;

$a + b = (2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2.(m + n + 1)$ olduğundan a + b ifadesi çifttir. Böylece $p \rightarrow q$ olduğu gösterilmiştir.

1.1.3.2. Dolaylı ispat

Teoremin kendisini ispatlamak yerine teoremin doğruluğunu gösteren başka bir önermenin doğruluğu ispatlanan (Akkaş vd., 1988) bu yöntemle ilgili iki durum vardır (Dede, 2013).

1.1.3.2.1. Olmayana ergi yöntemi

Bu yöntemde $p \rightarrow q$ koşullu önermesini ispatlamak için mantıksal doğruluk değeri aynı olan q önermesi yanlış ise p önermesinin yanlış ($\sim q \rightarrow \sim p$) olduğu gösterilir (Mishra, 2004). Başka bir ifadeyle teoremin kendisi yerine karşı tersi ispatlanır (Yılmaz, 2015).

Örnek: x bir doğal sayı olmak üzere x, 3'e tam bölünmüyorsa, x, 9'a tam bölünmez.

İspat: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

p: x, 3'e tam bölünmez. q: x, 9'a tam bölünmez.

~p: x, 3'e tam bölünür. ~q: x, 9'a tam bölünür.

"x, 3'e tam bölünmüyorsa, x, 9'a tam bölünmez" önermesini doğrulamak için doğruluk değeri aynı olan "x, 9'e tam bölünüyorsa, x, 3'e tam bölünür" önermesinin doğruluğu gösterilebilir.

x, 9'a tam olarak bölünüyorsa x sayısının rakamları toplamı 9'un katıdır. 9'un katı olan bir sayı 9=3.3 olduğundan aynı zamanda 3'ün de katıdır. Dolayısıyla x sayısının rakamları 3'ün de katı olur. Bu x sayısının 3'e bölünebildiği demektir. Dolayısıyla "x, 9'e tam bölünüyorsa, x, 3'e tam bölünür" önermesi doğru olur. Böylelikle bu önermeye denk olan "x, 3'e tam bölünmüyorsa, x, 9'a tam bölünmez" önermesi de doğru olur.

1.1.3.2.2. Çelişki bulma yöntemi

$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \equiv \sim (p \wedge \sim q)$'dur. Buna göre, $p \rightarrow q$ biçimindeki bir teoremi ispatlamak için $p \wedge \sim q$ önermesine denk olan $r \wedge \sim r$ çelişkisi elde edilir. Böylece $p \wedge \sim q$ önermesinin yanlış, $\sim (p \wedge \sim q)$ önermesinin doğru olduğu ispatlanmış olur ki bu da $p \rightarrow q$ önermesinin ispatlanması demektir (Dede, 2013).

Örnek: 1<2 ise 11<12'dir.

İspat: $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$'dur.

p: 1<2'dir. q: 11>12'dir.

~p: 1≥2'dir. ~q: 11≥12'dir.

$p \wedge \sim q \equiv (1<2 \wedge 11 \geq 12) \rightarrow (1<2 \wedge 11-10 \geq 12-10) \rightarrow (1<2 \wedge 1 \geq 2)$ olduğundan $(1<2 \wedge 11 \geq 12)$ önermesi yanlıştır. Dolayısıyla, bu önermenin tersi olan $\sim(1<2 \wedge 11 \geq 12) \equiv 1<2$ ise 11<12'dir önermesi doğru olur.

1.1.3.3. Aksine örnek verme

$(\forall x \in U)$ [P(x)→Q(x)] gibi niceliksel bir ifadenin P(x) doğru ve Q(x) yanlış olacak şekilde bir u∈U bulunmasıyla aksi ispatlanabilir. Buradaki x elemanı aksi örnektir (D'Angelo ve West, 2000). Yani, $\forall x \in S$, P(x) varsayımını ispatlamak için $x \in S$ için P(x)'in yanlış olduğu bir örnek yeterlidir (Hammack, 2013).

Örnek: A, B ve C kümeleri için A-(B∩C) = (A-B)∩(A-C)'dir.

İspat: Varsayımın yanlış olduğunu ispatlamak için önermenin yanlış olduğunu gösteren bir örnek yeterlidir. Bunun için A={1, 2, 3}, B={1,2} ve C={2,3} kümelerini alalım.

A-(B∩C)={1,3}'tür.

(A-B)∩(A-C)={}'dir. Dolayısıyla varsayımın yanlış olduğu ispatlanmış olur (Hammack, 2013, s.150).

1.1.3.4. Matematiksel tümevarım

Matematiksel tümevarım çok güçlü bir ispat tekniğidir (Dede, 2013) ve diğer ispat tekniklerinde olduğu gibi sistematik bir yapıya sahiptir (Doğan-Dunlap, Özdemir Erdoğan ve Kılıç, 2008). Tümevarımla ispat aşamaları aşağıdaki gibidir (Avital ve Libeskind, 1978, s.429):

> Her bir n doğal sayısı için P(n) bir önerme olsun.
>
> Eğer:
>
> i. P(1) önermesi doğru ve

ii. $k \geq 1$ olmak üzere tüm k'lar için P(k)'nın doğruluğu varsayılarak P(k+1)'in doğruluğu gösterilsin (sembolik olarak; tüm $k \geq 1$ için $P(k) \rightarrow P(k+1)$);

Burada (i) basamağı temel basamak, (2) basamağı ise tümevarım basamağı olarak adlandırılır. Tümevarım basamağında $P_k \rightarrow P_{k+1}$ koşullu önermesini ispatlamak için genellikle doğrudan ispat yöntemi kullanılır. Bunun için P_k önermesinin doğru olduğu kabul edilerek, P_{k+1} önermesinin doğruluğu gösterilir. S_k önermesinin doğruluğunun kabulüne tümevarım hipotezi denir (Hammack, 2013).

Örnek: Eğer $n \in N^+$ ise $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$'dir.

İspat:

i. Eğer n = 1 ise 2.1 = 1.(1+1) olduğu aşikardır.

ii. $\forall k \geq 1$ tam sayısı için $P_k \rightarrow P_{k+1}$ koşullu önermesinin doğru olduğu gösterilmelidir. Yani;

$2+4+6\ldots+2k = k(k+1)$ ise $2+4+6\ldots+2(k+1) = (k+1).(k+2)$ olduğu gösterilmelidir.

$2+4+6\ldots+2(k+1) = 2+4+6+\ldots+2k+2k+2= k(k+1)+ 2k+2= k^2+k+2k+2= k^2+3k+2= (k+1)(k+2)$ olur.

Böylece $2+4+6\ldots+2(k+1) = (k+1).(k+2)$ifadesinin doğruluğu gösterilmiş ve $P_k \rightarrow P_{k+1}$ koşullu önermesi ispatlanmıştır. Matematiksel tümevarımla da $n \in N^+$ ise $2+4+6+\ldots+2n= n(n+1)$sonucuna ulaşılmış olur.

1.1.3.5. Durumlara dayalı ispat

$p \rightarrow q$ koşullu önermesinde p önermesi durum sayısına göre $p_1 V p_2 V \ldots V p_k$ gibi parçalara ayrılabilir şekilde ifade edilmiş olabilir.Bu durumda ispatı kolaylaştırmak adına, her i=1, 2, …, k için $p_i \rightarrow q$ önermesinin doğruluğu ispat edilir (Argün vd., 2014).

Örnek: $n \in Z$ için $n^2 + n+1$ tektir.

İspat:

Durum 1: Kabul edelim ki n çift sayı olsun. O zaman $\exists a \in Z$ için $n = 2a$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır.

Buradan $n^2+n+1=(2a)^2+2a+1=4a^2+2a+1=2(2a^2+a)+1$*'dir.* $(2a^2+a) \in Z$ *ve* $2(2a^2+a)+1$ *tektir.*

Durum 2: Kabul edelim ki n tek sayı olsun. O zaman $\exists b \in Z$ için $n = 2b+1$ olacak şekilde bir b tamsayısı vardır.

Buradan $n^2+n+1=(2b+1)^2+(2b+1)+1=(4b^2+4b+1)+(2b+1)+1=4b^2+6b+2+1= 2(2b^2+3b+1)+1$'dir. Burada $(2b^2+3b+1) \in Z$ *ve* $2(2b^2+3b+1)+1$ tektir. Bundan dolayı $n \in Z$ için n^2+n+1 tektir.

1.1.3.6. Hipotezin doğası gereği bilinen ispat

$p \rightarrow q$ koşullu önermesinde, p önermesinin yanlış olduğu gösterilebilirse, q önermesinin doğruluğuna bakılmaksızın $p \rightarrow q$ koşullu önermesi doğrudur denir (Dede, 2013).

Örnek: $x \in R$ olmak üzere, $x^2+3<0$ise $x^3 >5$'tür.

İspat: $(\forall x^2 \geq 0$ olduğundan $x^2+3>x^2 \geq 0$'dır. Dolayısıyla $\forall \boldsymbol{x} \in R$ için $x^2+3<0$ önermesi yanlış olduğu için $x^3 >5$ önermesi doğru kabul edilir.

1.1.3.7. Aşikâr ispat

$p \rightarrow q$ koşullu önermesinde, q önermesinin doğruluğu gösterilebilirse p önermesinin doğruluğuna bakılmaksızın $p \rightarrow q$ koşullu önermesi doğrudur denir (Dede, 2013).

Örnek: $x \in R$ olmak üzere *x, 3'e* bölünüyorsa 4x, 2'ye bölünür.

İspat:

p:3, x'i böler. q: 2, 4x'i böler.

4x=2.2x olduğundan 2, 4x'i böler.

Burada q önermesinin doğruluğu p önermesine bakılmaksızın gösterilebildiği için $p \rightarrow q$ önermesi doğru olur.

Yukarıda en çok kullanılan formel ispat yöntemleri örnekleriyle beraber açıklanmaya çalışılmıştır. Çalışkan (2012)'a göre, matematiksel dili kullanma, akıl yürütme becerileri geliştirilmesi için geliştirilmesi hedeflenen genellemeler yapma, çıkarımlarda bulunma, çıkarımlarının geçerliğini sorgulama doğruluğunu savunma, örüntüleri ve ilişkileri analiz etme vb. gibi beceriler ispat yapmak için önemlidir. Ayrıca ifadeleri matematiksel olarak formüle etmek ispat sürecinde önemli bir rol oynamaktadır (Biehler & Kempen, 2013; Moore, 1994). Bununla birlikte Gierdien (2007) yapmış olduğu çalışmada, genelleştirme, inceleme, sonuç çıkarma, temsil etme, tahmin etme, tanımlama gibi becerileri matematiksel süreç becerileri olarak nitelendirmiştir. Buna paralel olarak, yukarıdaki açıklamalar ve örnekler incelendiğinde, herhangi bir formel ispat yapacak kişinin formel ispatla ilgili bu becerileri kazanmış olması gerekmektedir.

1.1.4. Sözsüz ispat

Sözsüz ispatın, basit, kısa ve öz bir tanımı yoktur ve bazı kaynaklarda sözsüz ispat kavramı yerine görsel ispat kavramının kullanıldığı da görülmektedir (Polat ve Demircioğlu, 2016). Delahaye (1998) sözsüz ispatı, matematiksel sonucu iyi bir şekilde gösterebilmeyi sağlayacak en fazla birkaç matematiksel ifadenin eşlik edebileceği şekiller olarak tanımlamıştır. Bell (2011)'e göre sözsüz ispat, kelimelerle formel bir argüman olmadan verilen, bir matematiksel ifadenin ispatını gösteren matematiksel bir çizimdir. Alsina ve Nelsen (2010) ise sözsüz ispatları, belli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini ve bunun ispatına nasıl başlayacağını anlaması için okuyucuya yardımcı olan şekil ve diyagramlar olarak tanımlamıştır.

Hanna (2000b)'ya göre; açıklayıcı ispatın özellikleri olan en iyi ispat, ispatın sadece doğruluğunu değil neden doğru olduğunu da göstererek teoremin anlamını (mantığını) anlamaya yardımcı olur. Böyle bir ispat daha inandırıcı ve keşfetmeye daha çok yol göstericidir. Doyle ve ark. (2014) sözsüz ispatları matematiksel düşünceyi ilerletmek ve uyarmak için önemli bir araç olarak nitelendirmiştir. Bu tarz ispatlar matematiksel bir bilginin sistematikleştirilmesine, formülleştirilmesine ve sonuçlarının aktarılmasına bir katkı yapabilir. Yukarıdaki tanımları ve özellikleri bağlamında ele alındığında sözsüz ispatlar, açıklayıcı ispatlar olarak da düşünülebilir.

Sözsüz ispatlar, Amerika Matematik Derneği tarafından yayımlanan iki derginin düzenli konularındandır. İlk olarak 1975'lerde *Mathematics Magazine (Matematik Dergisi)* dergisinde, bundan on yıl kadar sonra da *College Mathematics Journal*

(Üniversite Matematik Dergisi) dergisinde sözsüz ispatlar yayımlanmaya başlanmıştır (Alsina ve Nelsen, 2010). Martin Gardner, Ekim 1973'de *Scientific American (Bilimsel Amerikalı)* dergisindeki *Matematiksel Oyunlar* köşesinde sözsüz ispatı "bak-gör" diyagramları olarak isimlendirmiş, çoğu durumda sıkıcı bir ispatın geometrik modellerle desteklendiğinde daha basit ve ilgi çekici olup, bir teoremin doğruluğunun neredeyse tek bakışta anlaşılabileceğini söylemiştir (Nelsen, 1993).

Sözsüz ispatlar yeni bir metot değildir. Çok uzun zamandır bilinmektedir. Alsina ve Nelsen (2010)'e göre sözsüz ispatlar ilk kez Çin ve Eski Yunan uygarlıklarında, daha sonra ise 10. yüzyılda Arap medeniyetinde ve Rönesans İtalya'sında görülmüştür. Nelsen eski dönemlerdeki sözsüz ispatlardan başlayıp 2000'li yıllara kadar yapılan çeşitli sözsüz ispatları toplayarak 1993'te *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* (Nelsen, 1993) ve 2000'de bu kitabının devamı olan *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking* (Nelsen, 2000) kitaplarını yayımlamıştır. Bugün ise sözsüz ispatlar, dünyada ve internet üzerinde yayımlanan çeşitli makalelerde düzenli olarak görülmektedir.

Daha önce belirtildiği gibi, matematiksel ispatın ne olduğuna dair tartışmalar uzun süredir devam ettiği (Dede ve Karakuş, 2014) ve alanyazında matematiksel ispatın ne olduğuna dair farklı tanımlar olduğu için (CadwalladerOlsker, 2011) sözsüz ispatın, bir ispat olup olmadığı konusunun açıklığa kavuşması pek olanaklı görünmemektedir. Miller (2012)'a göre; tanımlar bağlamında ispat hakkında düşünmenin iki yolu vardır. Bir tarafta ispat, çürütülemez aksiyomları ve daha önceden ispatlanmış teoremleri kullanarak belirli bir ifadenin gerçekliğini ortaya koyan mantıksal ifadeler dizisidir. Diğer tarafta ispat, eğitimli bir kitleye göre ifadenin doğruluğu ikna edici olduğu sürece hemen hemen her formda olabilir. Başvurulan ispatın tanımı alanyazında farklılık gösterdiğinde, kriterleri neyin karşılayıp karşılamadığını hatta bu kriterlerin ne olduğunu belirlemek zorlaşmakta ve "Sözsüz ispatlar gerçekten bir ispat mıdır?" sorusunun cevabı yanıtsız kalmaktadır. Bu durumu açıklamak için aşağıda bir örnek verilmiştir.

Teorem: "1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların toplamı S(n) olsun. S(n)=$\frac{n.(n+1)}{2}$'dir" teoreminin sözsüz ispatı Şekil 4'teki görsel ispat ile gösterilmiştir. Bu sözsüz ispat n=10 durumunu resmetmektedir. Ancak Miller (2012)'a göre, bir matematikçi bu sözsüz ispata baktığında, resmin sadece o durumun eşitliğini vermediğini, noktaların sayısı değişse bile ilişkinin korunacağını ve bütün tamsayılar için formülün geçerli olacağını anlar. Bu inkâr edilemez bir şekilde ikna edicidir. Bir resim sadece özel bir durumu temsil etmesine rağmen, beynimiz kendimiz için genel gerçeği keşfetmemizi sağlamaktadır. Tam sayıların toplamı durumunda, özel durumu görünce beynimiz de tekrarlanma olasılığını görmektedir. Bu diyagram, beynimize olası bir tamsayı ile ilişkileri yayma (genişletme - genelleme) izni vermektedir. Bu resmin başarılı olma sebebi de budur.

Bununla birlikte resmin kendisi, herhangi bir şekilde belirli formel teoriler ve aksiyomatik yapıyla oluşmuş tümdengelimsel bir yöntem içermemektedir. Bundan dolayı bazı matematikçiler sözsüz ispatı, ispat olarak değerlendirmezler. Onlara göre bu ispatlarda, formel yapı ve mantıksal semantik dizilim olmadan, ne kadar aydınlatırsa aydınlatsınlar, doğruluğu garanti edemezler. Sözsüz ispatların ispat olduğuna inanmayan James Robert Brown'un bakış açısı aşağıda özetlemiştir:

> Matematikçiler hepimiz gibi zeki fikirlere değer verirler, özellikle ustaca resmedilmişlerden zevk alırlar. Ancak bu zevk yaygın şüpheci yaklaşımını bastırmaz. Sonuçta bu diyagram sadece özel bir durum için en iyisi olup genel teorem için kurulamaz. Daha da kötüsü bu düpedüz yanıltıcı olabilir. Evrensel olmasa da yaygın tutum, resimler sezgisel araçlardan fazlası değildir. Onlar psikolojik uyarcılardır ve pedagojik açıdan önemlidirler ancak hiçbir şey ispatlamazlar (Miller, 2012, s.21).

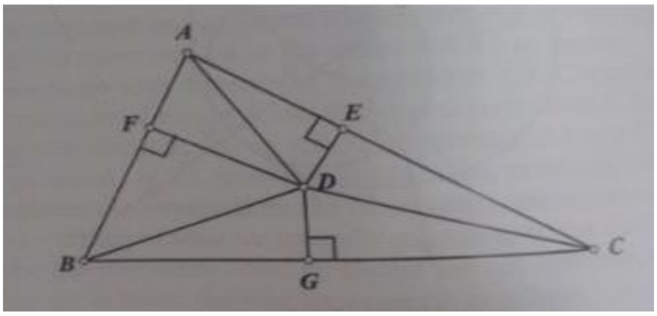
Aşağıda, James Robert Brown'ın bakış açısını, yani özel durumlardan yola çıkılarak yapılan ispatın okuyucuyu matematiksel yanılgılara götürebileceği düşüncesini destekleyen ve Wallece ve West (2004) tarafından yapılmış olan 'Bütün üçgenler ikizkenardır' teoreminin ispatı bulunmaktadır.

Teorem: Bütün üçgenler, ikizkenardır (!).

İspat:

- ∆ABC'de $\hat{A}$'ın açıortayı, $\overline{BC}$'nin orta dikmesini ($\overline{DG}$) D noktasında kessin.
- D noktasından $\overline{AB}$ ve $\overline{AC}\,'$ye $\overline{DF}$ ve $\overline{DE}$ dikmelerini çizelim.
- $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ ve $\overline{DC'}$yi çizelim. (Şekil 1.5).
- Eşlik bağıntılarından;
- ∆ADF ≅ ∆ADE (Açı-Açı-Kenar) ve ∆BGD ≅ ∆CGD (Kenar-Açı-Kenar)'dir.

- Dolayısıyla ΔBDF ≅ ΔCDE’dir.
- Eş üçgenlerin karşılıklı eş olan parçaları toplanırsa; │AB│=│AF│+│FB│=│AE│+│EC│=│AC│olur. Bu da ΔABC’nin ikizkenar olduğu (!) anlamına gelir.



Şekil 1.5. Bütün *üçgenler ikizkenardır teoreminin (!) ispatı (Wallece ve West, 2004; s. 42)*

Bu ispattaki hataya, şekle dayanarak yapılan kabuller neden olmuştur (Polat ve Demircioğlu, 2016). Bu ispat yukarıda bahsedilen özel durumlardan yola çıkılarak okuyucuyu matematiksel yanılgılara götürebilecek çıkarımlara bir örnek olabilir. Sözsüz ispatların diğer sınırlılıkları aşağıda verilmiştir:

- İspat olup olmadığı bile, ispatın kesin bir tanımı olmadığı için, tartışma konusudur (Miller, 2012).
- Sözsüz ispatlar formel ispatların yerine düşünülemezler (Delahaye, 1998).
- Sözsüz ispatlar bazen çok açık değildir, görülmesi zor olabilir (Delahaye, 1998).
- Sözsüz ispatlar teoremin neden doğru olduğunu gösterse de teoremin formel ispatına göre matematiksel olguları daha az sunabilir (Delahaye, 1998).
- Sözsüz ispata bakan kişinin bazı kavramlara hâkim olması gerekir (Delahaye, 1998).
- Görsel bir ispatla çalışmak resimlerin semiyotik boyutu, sözlü metin veya sembolik ifadeler arasında sürekli etkileşimi dikkate almayı gerektirebileceğinden öğrenciler için zorlayıcı olabilir (Bardelle, 2010).

- Görsel çıkarıma dayandıkları için üç boyutun ötesinde kullanılabilmeleri olanaksızdır (Delahaye, 1998).

Tüm bu matematiksel sınırlılıklarına rağmen sözsüz ispatlar eğitsel açıdan ve matematik öğretimi açısından önemli bir potansiyele sahiptir. Miller (2012)'a göre, ispat ya da değil sözsüz ispatlar, matematik için özellikle de öğretimde değerli araçlardır. İlk n pozitif tamsayının toplam formülü ele alındığında, lise seviyesindeki öğrencilerin çoğu bunu tümevarım kullanarak ispatlayabilir. $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{i} = \frac{n.(n+1)}{2}$'dir. Fakat bir tümevarım ispatı, sadece bu formülün doğru olduğunu ispatlar. Bu formülün neden doğru olduğunu göstermez. Bu durum, sözsüz ispatları kullanışlı hale getirir. Aynı toplam formülünün sözsüz ispatını düşünüldüğünde (Şekil 1.4) ilk n pozitif tamsayının toplamının, kenarları n ve (n+1) olan dikdörtgenin alanının yarısı olduğu yani n.(n+1)/2 bariz bir şekilde görülmektedir. Böylece formül rastlantısal olmaktan çıkıp, onun yerine somut görsel bir anlam almaktadır. Böylelikle, sadece formülün doğruluğunu ispatlamak yerine, onun neden doğru olduğunu da gösterilmektedir.

Mathematics Magazine (Matematik Dergisi) dergisi eş editörü Prof. Lynn Arthur Steen'in dergide sözsüz ispatlar yayımlanmaya başlandığındaki düşünceleri aşağıda özetlenmiştir:

> Çoğu insan için sözsüz ispatlar görülmeye başladığından beri ispatın basamakları görsel hafıza ile doğrusal hafızadan daha kalıcıdır. Ayrıca gerçek matematiksel temsiller iyi bir diyagram üzerine gömülü çeşitli ilişkilerle tanımlanmayı, farkına varılmayı ve sözelleştirilmeyi bekliyor. Böylece sözsüz ispatlar, öğrencilerin matematiği öğrenmesine ve hatırlamasına yardımcı olma konusunda sözlerden oluşan ancak yanlış hatırlanan ispatlardan daha uygundur (Miller, 2012, s.23).

Miller (2012)'a göre, insanların görsel kaynakları algılama yeteneği inanılmaz güçlüdür ve anlayış derecesini en üst düzeye çıkarmak için sözsüz ispatların kullanılmaması akıllıca olmaz. Genel olarak sözsüz ispatlar formal ispatlara ek olarak kullanılabilmeli ve kullanılmalıdır. Onlar, verilen aksiyomlardan teoremin mantıklı bir ispatı olmasa bile, monoton matematiksel tümevarım ispat serileri dışında bir başka somut anlayış ve netlik kazandırabilirler. Sözsüz ispatlar matematiksel düşünceyi canlandırır ve matematiksel merakı tetikler. Bu da kişilerin matematiksel ilerlemelerinde çok önemli sonuçlar doğurur.

Demircioğlu ve Polat (2015)'ın öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada, öğretmen adayları, sözsüz ispatların farklı birçok beceriyi kazandırmada etkili olabileceğini ifade etmişler, bu becerileri ispat, problem çözme, anlama, akıl yürütme, genelleme, işlem, analiz ve sentez yapabilme, görme ve düşünme becerileri şeklinde sıralamışlardır. Bununla birlikte sözsüz ispatların yeni bilgi ile önceden öğrenilen bilgi arasında bağ kurmada etkili bir araç olduğunu belirtmişler, sözsüz ispatları zevkli, merak uyandırıcı, güven kazandırıcı olarak nitelendirmişlerdir. İspat yapma sürecini etkileyen faktörlerden biri öğrencilerin sahip oldukları inanışlardır. İnanışların sadece tutumlarla ilişkili olmayıp aynı zamanda ispat yapma sürecini doğrudan etkilediği (Gökkurt vd., 2014) düşünülünce yukarıdaki çalışmadan sözsüz ispatların bu inanışları olumlu yönde etkileyeceği söylenebilir.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010) ise görsel şekillere dayalı ispatlar formüllerin nasıl oluştuğu ve nereden geldiği konusunda öğrencilere bilgi verirken, ezberden kaçarak kalıcı öğrenmelerine yardımcı olacağını vurgulamıştır.

Çiltaş (2013) model ile öğretim yönteminin ispat yapmaya olan tutumu pozitif yönde arttırarak matematik başarılarının daha yukarılara çıkabileceğini belirtmiştir. Güler ve Temizyürek (2015) uygun etkinlikler kullanıldığında öğretmen adaylarının modeller yardımıyla ispat yapmakta başarılı olabileceklerini ve bu sayede matematiksel muhakeme yeteneklerine katkı sağlanabileceği sonucuna ulaşmıştır.

Bardelle (2010) görsel ispatlarla ilgili çalışmasında, sözlü ve sembolik tasvirlerden şekilsel bir tabloya geçişin ve bunun tersinin izole kalan bazı matematiksel konularda çok verimli olacağını ve buna benzer etkinliklerin öğrencilerin ispat gibi konuların üstesinden gelmede çok yararlı olacağını belirtmiştir. Bell (2011) sözsüz ispatlar ile ilgili yaptığı çalışmada diyagramlardaki birbirinden ayrı parçaların üzerinde düşünerek diyagramları çözümlemenin öğrencilerin muhakemelerini geliştirmek için iyi bir yol olduğunu ve öğrencilerin, matematiksel bir ifadenin kendi görsel sunumunu oluşturarak, bir probleme karşı akıl yürütme yeteneklerini de geliştirdiğini söylemektedir. Gierdien (2007) yapmış olduğu çalışmada, sözsüz ispatların genelleme, inceleme, sonuç çıkarma, temsil etme, tahmin etme, tanımlama gibi matematiksel süreç becerilerini geliştirdiği ve sözsüz ispatların, ispatları açıklayıcı ispata çevirmede, hem süreç hem de ürün olarak görselleştirmenin epistemik rolü olduğunu söylemiştir. Gierdien (2007) ayrıca ispat öğretiminde ortaokul seviyesinde sözsüz ispatların kullanımının ‘didaktik dönüşümü (Chevallard, 1985)’nün yani bir öğretim nesnesine dönüştürülmelerinin kaçınılmaz olduğunu belirtmiştir.

Buraya kadar edinilen bilgiler ışığında formel ispat ile sözsüz ispatın özelliklerinin karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 1.1’de sunulmuştur.

Tablo 1.1. *Formel ispat ile sözsüz ispatın özelliklerinin karşılaştırılması*

Formel İspat	Sözsüz İspat
Aksiyomatik sistem geliştikten sonra yapılmaya başlanmıştır.	Tarihte ilk yapılan ispatlardır.
Formel mantık kurallara dayanır.	Görsel çıkarıma dayanır.
Tümdengelimsel bir yöntem içermektedir	Tümevarımsal bir yöntem içermektedir.
Tüm durumlar için ispat sunar.	Özel durumun mantıksal genellemesini amaçlar.
Kesinlik içerir, şüpheye yer bırakmaz.	Kesinliği, temsilin kuvvetine dayalıdır.
Teoremin doğruluğunu gösterir.	Teoremin sadece doğruluğunu değil neden doğru olduğunu da gösterir.
Mükemmel bir hassasiyetle yapılsa da anlamak için ekstra bir zekâya ihtiyaç duyulmaz[4] (Delahaye, 1998).	Bakarak keşfetmek çok zevkli olsa da sözsüz ispatlar çok açık olmayabilir, hemen görülemeyebilir.
Pek çok formül için mekanik olarak işler.	Çoğu formül için uygulamak kolay olmayabilir.
Tüm uzaylarda uygulanabilir.	Görsel çıkarıma dayandıkları için 3 boyuttan sonra bahsedilmeleri anlamsızdır.
Matematiksel doğruluğu göstermek için yapılırlar.	Matematiksel doğruluğu ortaya koyarken, matematiği sempatik hale getirip, matematiğin somut, estetik, sezgi ve zekâ ile ilgili boyutlarını da gösterirler
İspatladıkları formülün kalıcı olması amacıyla yapılmazlar.	İspatladıkları formülün daha kalıcı olmasını sağlarlar.
Farklı matematik alanındaki ifadeleri o alana uygun yöntemlerle yapar.	Cebir, kalkülüs, geometri gibi farklı matematik alanlarındaki ifadeleri ispatlamak adına şekiller ve diyagramlar kullandıkları için, okuyucuya bu alanlar ve geometri arasındaki ilişkileri oluşturma ve kurma şansı verir.
Genellikle daha monoton ve daha uzundur.	Çok daha kısa ve daha anlaşılırdır.

[4] Formel pek çok ispatı anlamak için de o alanda yeterince uzman kişiler arasında olmak gerektiği bilinmektedir. Bu konudaki bir tartışma için, bakınız. [4]P. J. Davis, R. Hersh ve E. A. Marchisotto (2015), *Matematiksel deneyim.* (Çev: S. Durmuş ve İ. O. Eruçar), Ankara: Nobel Yaşam, s. 44.

Yukarıdaki bilgiler ışığı altında sözsüz ispatların pedagojik ve öğretimsel potansiyeli şu şekilde sayılabilir:

- Görsel algıya hitap ettiği için daha akılda kalıcıdır.
- Matematiksel olgulara somut bir yaklaşım sunarlar.
- Matematiği gerçek hayattaki şekiller içine entegre ederek matematiği daha sempatik ve somut gösterirler (Delahaye, 1998)
- Farklı matematik alanlarındaki ifadeleri ispatlamak adına, şekiller ve diyagramlar kullanıldığı için, bu gösterimler ve daha genel olarak cebir, geometri gibi alanlar arasında okuyucuya ilişkileri görme ve oluşturma şansı verirler.
- Bir formülün sadece doğruluğunu değil neden doğru olduğunu da gösterdiği için daha motive edicidirler.
- Bir şekil hakkında zihinde düşünmeyi, şekli zihinsel olarak dönüştürme ve manipüle etmeyi içerdiğinden öğrencilerin görselleştirme becerilerinin gelişimine katkıda bulunurlar (Van De Walle, 2013).
- Çoğu zaman yanlış hatırlanan formel ispatlara oranla daha faydalı ve öğretilmesi açıdan daha uygundurlar (Miller, 2012).
- Öğrencilerin matematiğe yönelik tutum ve inanışlarını olumlu yönde etkileyebilirler.

1.1.5. Öğretim programlarında ispat ve sözsüz ispat

NCTM (2000)'e göre akıl yürütme (muhakeme) becerisi, matematiği anlayabilmek için esastır. Öğrenciler fikirler geliştirerek, olguları keşfederek, sonuçları doğrulayarak, matematiksel argümanları farklı beklentilerle ve çok yönlülükle matematiğin bütün alan içeriklerinde tüm düzeylerde kullanarak, matematiğin mantıklı olduğunu görmelidir. Öğretmenler de öğrencilere muhakeme becerilerinin edinmeleri için, neyi öğrenmeleri gerektiği konusunda yardımcı olmalıdır. Muhakeme ve ispat, öğrenciler için kolay olmayan bir alandır, dolayısıyla muhakeme ve ispat becerilerinin öğretimi öğrencilerin ana sınıfından 12. sınıfa kadar öğrenecekleri matematiğin bir parçası olmalıdır. Bir başka ifadeyle ispat süreci öğretim programlarının ayrılmaz bir parçası olmalıdır (Schoenfeld, 1994).

İspat öğretimi, bu kadar önemli olmasına rağmen, lise ve yoğunluklu olarak üniversitede ele alınmaktadır (Aylar, 2014). Türkiye'de 4+4+4 sistemine geçişle birlikte 2013 yılında yeniden düzenlenen İlkokul ve Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programları incelendiğinde ispata değinilmediği görülmüştür. Bununla birlikte, matematiksel süreç becerilerinden akıl yürütme becerisi şu şekilde tanımlanmıştır:

> Akıl Yürütme: Akıl yürütme (muhakeme), eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak tanımlanabilir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013a, s.5).

Ayrıca akıl yürütme becerilerinin öğrencilere kazandırılması için dikkate alınması gereken göstergelerden bazıları şu şekilde sıralanmıştır (MEB, 2013a, s. 5):

- Çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma,
- Mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma,
- Bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma.

Yukarıda sıralanan akıl yürütme becerileri ve ispat becerileri arasında dolaylı da olsa bir ilişki olduğunu söylemek mümkündür (Aylar, 2014). Ayrıca öğretim programı içinde yer alan diğer beceri başlıklarıyla kazandırılması hedeflenen bazı davranışları, ispat yapabilme yeterliliği ile ilişkilendirebilmek de mümkündür (Çalışkan, 2012). Örneğin problem çözme becerilerinde öğrencilerin kendi çözüm yollarını düşünmeleri ve uygulama evresi ispat yapma sürecinde de bulunduğu için ispat ve problem çözme süreçleri doğrudan birbiriyle bağlantılıdır (Çalışkan, 2012). Benzer şekilde öğrencilerin akıl yürütme becerilerini etkin ve verimli bir şekilde kullanarak, karşılaştıkları güçlüklere ve konulara ilişkin fikir yürütebilmeleri ve çıkarımlarda bulunabilmeleri için kazandırılacak davranışlar da ispatla doğrudan ilgilidir (Çalışkan, 2012). Bununla birlikte Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'ndaki "8.2.1.3. Özdeşlikleri modellerle açıklar. (MEB, 2013a, s. 36)" kazanımı, öğrencilerin, bazı matematikçilerce formel ispat olarak kabul edilmeyen sözsüz ispat da olsa, ispatla tanışabileceği ilk ve tek fırsatı sunmuştur. Bu kazanımla ilgili olarak modellenen özdeşlikler $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ve $a^2-b^2=(a-b).(a+b)$ özdeşlikleriyle sınırlı kalınmaktadır.

Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nın "Öğrencilere Kazandırmayı Hedeflediği Matematiksel Yeterlilik ve Beceriler" kısmında, geliştirilmesi istenen matematiksel süreç becerileri aşağıdaki şekilde açıklanmıştır (MEB, 2013b, s. IV):

> Matematiksel süreç becerileri: Matematiksel dili ve terminolojiyi doğru ve etkin kullanma(matematiksel iletişim), matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma, matematiğin kendi içindeki konular/kavramlar arasında ve başka alanlarla ilişkilendirme.

Yukarıdaki alıntıdan da anlaşılacağı üzere, akıl yürütme ve ispat yapabilme, öğretim programlarında öğrencilerden geliştirilmesi istenen becerilerdendir. Akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi için öğrencilerde aşağıdaki davranışların geliştirilmesi hedeflenmektedir (MEB, 2013b, s. VIII):

- Matematikte ve günlük yaşantısında mantığa dayalı genellemeler ve çıkarımlarda bulunma,
- Matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımlarının, duygu ve düşüncelerinin doğruluğunu/geçerliliğini savunma,
- Düşüncelerini açıklarken matematiksel modeller, kurallar ve ilişkileri kullanma,
- Bir (matematiksel) durumu analiz ederken matematiksel ilişkileri kullanma,
- Matematikteki ilişkileri açıklama,
- Farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunma ve bunu mantıksal gerekçelerle savunma (örneğin fonksiyonun türevinin grafiğinden fonksiyonun grafiğini tahmin etme),
- Genel ilişkileri özel durumlara uygulayabilme,
- Modelleri, önermeleri, özellikleri ve ilişkileri kullanarak yaptığı matematiksel çıkarımı açıklayabilme,
- Matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilme,
- Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme.

Buna ek olarak öğretim programında ispatla ilgili kazanımlar 9. ve 11. sınıflardaki kazanımlarda yer almaktadır. 9. sınıfta, $\sqrt{2}$'nin rasyonel olmadığının, Pisagor Teoremi'nin, sinüs ve kosinüs teoremlerinin ispatları yer almaktadır. 11. sınıfta ise 'aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat, çelişki ve tümevarım' gibi matematiksel ispat yöntemlerinin ele alınması, bu yöntemlerle ispatlar yapılarak, öğrencilere formel ispatlar yapabilme becerisinin kazandırılması hedeflenmektedir.

Sonuç olarak, ispat ortaokullarda öğretilmemektedir. Sözsüz ispatlar ise özdeşliklerin modellerle açıklanması kazanımında örtük bir şekilde yer almakta, başka hiçbir kısımda bulunmamaktadır. Bunun yerine ortaokulda öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesine vurgu yapılmaktadır. Akıl yürütme becerisine ise programın genel hedefleri arasında yer verilmekte, özel bir alan veya kazanımlar bağlamında bu becerinin nasıl geliştirilebileceğine yönelik somut adımlara rastlanmamaktadır. Lise matematik dersi öğretim programında ise akıl yürütme becerilerine daha detaylı ve somut bir şekilde yer verilmekte, örneğin tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakemenin etkin olarak kullanılması beklenmektedir. Yine lise programlarında 9. sınıfta bazı ispat örnekleri verilmekte, 11. sınıfta ise bazı formel ispat yöntemlerine somut örnekler üzerinden yer verilmesi öngörülmektedir. Lise programlarında sözsüz ispat örneklerine ise yine sadece özdeşlikler konusunda ve akıl yürütme becerileri bağlamında somut modellerin kullanımında karşılaşılmaktadır.

Sonuç olarak ortaokulda ispata yer verilmemesi, sözsüz ispatın kullanılabileceği tek bir alan varken, lisede bazı ispat türlerine yer verilmesi iki program arasında bir kopukluk olarak değerlendirilebilir. Bu durum ispatla ilgili ortaokul programlarında bir didaktik boşluk (Bronner, 1997; Balacheff, 1988; Sowder ve Harel, 1998) olduğu, yani sonrasında ele alınacak konuların öğretimi için önemli ve vazgeçilmez olan bir konuya program geliştiricilerin ve uzmanların yeterince önem vermediği veya bunu gözden kaçırdığı şeklinde yorumlanabilir.

Bu çalışmada sözsüz ispatların lise programındaki akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi ve ispat kavramına daha kademeli bir geçiş yapılabilmesini sağlayacak çıkarım ve genellemede bulunma, çıkarımların doğruluğunu savunma, ilişkileri açıklama gibi becerilerin geliştirilmesi için uygun öğretimsel araçlar olduğu düşünülmektedir. Ayrıca sözsüz ispatların yukarıdaki belirlendiği şekliyle görsel algıya hitap etmesi, matematiksel olgulara somut bir yaklaşım sunması, kalıcı olması, alanlar arası ilişki kurma fırsatı sunması gibi boyutları düşünüldüğünde, formel ispata geçiş öncesi var olan didaktik boşluğun doldurabilmesi için bir pedagojik araç olabilecekleri düşünülmektedir.

1.1.6. Çalışmanın amacı ve araştırma soruları

Bu çalışmanın amacı, ortaokulda sözsüz ispatların formel ispata geçiş aracı olarak nasıl kullanılabileceğini incelemektir. Bu bağlamda çalışmanın araştırma soruları şu şekilde belirlenmiştir:

Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatın kullanıldığı bir derste:

1. Öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı süreçler (çıkarımda bulunma, çıkarımı kontrol etme, matematiksel dili kullanma, genelleme vb.) nelerdir ve bu süreçler nasıl gerçekleşmektedir?
2. Geometri-cebir gibi alanlar arası ilişkilendirme nasıl kurulmaktadır?
3. Etkinlikler sürecinde, öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı süreçler nasıl değişmekte ve gelişmektedir?

1.1.7. Çalışmanın önemi

İspat matematik öğrenmede bir araçtır (Knuth, 2002). İspat matematik yapma ve bilmenin, matematiksel anlayışın temelidir ve matematiksel bilginin gelişimi, kurulumu ve iletimi için gereklidir (Kitcher, 1984; Polya, 1981).

Stylianides (2007)'e göre matematiksel araştırmalarda ispat merkeziyeti birçok ülkede okullarda matematiksel ispatın öneminin vurgulamasına sebep olmuştur. Günümüzde pek çok ülkede, ortaokul matematik öğretiminde, aritmetik kavramlar, hesaplamalar ve algoritmalar üzerinde durulmaktadır fakat bu öğrencilerin liseye başladıklarında özellikle geometride ispatı anlamaları ve yazmaları gerekmektedir. Birçok araştırmacı, lise öğrencilerinin ispat konusunda karşılaştıkları problemlerin olası açıklaması için, öğrencilerin ispata ortaöğrenimde birden giriş yapmalarına işaret etmektedir. Diğer bir deyişle öğrenciler ortaokuldan liseye geçtiklerinde matematiksel olarak ani bir değişim yaşamakta ve ispat için gerekli bilgi ve becerilerde bir didaktik boşluk ile karşı karşıya kalmaktadırlar (Balacheff, 1988; Sowder ve Harel, 1998). Bundan dolayı matematik eğitimcilerinin en önemli rollerinden birisi matematiksel anlamayı geliştiren ispatın rolünü öğrencilere aktarabilmek için sınıf içinde ispatın etkili kullanımını geliştirmektir. Bu çalışma bir anlamda sözsüz ispatların didaktik dönüşümlerinin (Chevallard, 1985; Gierdien2007) tasarlanmasına öncülük etmeyi amaçlamaktadır. Bu bağlamda, bu çalışmaya benzer çalışmaların alanyazında bulunmadığı göz önüne alındığında, çalışma konusunun oldukça özgün olduğu ve çalışma sonunda elde edilecek sonuçların alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Sözsüz ispatlar yeni bir metot değildir. Çok uzun zamandır bilinmektedir. Alsina ve Nelsen (2010)'e göre sözsüz ispatlar ilk kez Çin ve Eski Yunan uygarlıklarında, daha sonra ise 10. yüzyılda Arap medeniyetinde ve Rönesans İtalya'sında görülmüştür. Bu gün ise sözsüz ispatlar, dünyada ve internet üzerinde yayımlanan çeşitli makalelerde düzenli olarak görülmektedir. Bu bağlamda düşünüldüğünde sözsüz ispatlar matematiğin kültüründe önemli bir yere sahiptir. Buna rağmen sözsüz ispatlar öğretimsel açıdan yeterince ele alınmadığından çalışma önemli görülmüştür. Bununla birlikte yukarıda daha önce listelenen sözsüz ispatların pedagojik ve öğretimsel potansiyelini ortaya koyduğu düşünüldüğü için bu çalışma önemli görülmüştür.

1.1.8. Çalışmanın teorik çerçevesi: Gerçekçi matematik eğitimi

Yukarıdaki araştırma sorularını sistematik bir yaklaşımla ele alabilmek için bir teorik çerçeveye ihtiyaç duyulmuş ve Gerçekçi matematik eğitimi (GME) bunun için uygun görülmüştür. GME Hollandalı matematikçi, Hans Freudenthal ve öğrencileri tarafından ortaya atılmıştır. Freudenthal (1968; akt. Özdemir ve Üzel, 2011) matematiğin insan aktivitesi olduğunu, tarihte matematiğin gerçek hayat problemleri ile başladığını, gerçek hayatın matematikleştirilmesinden sonra formel matematiğe ulaşıldığını belirtmektedir.

Alacacı (2016)'ya göre, GME'nin temel görüşü, matematik öğretiminde gerçekçi problem durumlarının başlangıç noktası olarak kullanılmasıdır. Bu yaklaşım, matematik öğretiminde öğrencilerin kendi hayatlarındaki deneyimleri ile matematiksel kavramlar arasında bağ kurması gerektiğini öngörür. Öğrenciler problemlerdeki bilgileri önce diyagram, şekil, sayı tablosu ve benzeri kişisel matematiksel yöntemlerle işleyerek kendi zihinlerinde çözüm için gereken matematiksel zihinsel yapıyı oluşturacaklar, sonra bunları yine kendi zihinlerinde formül, teorem, genelleme ve benzeri matematiksel yapılara çevireceklerdir. Ana fikir matematikte öğrenilecek şeyin her durumda öğrencinin zihninde şekillendirilmesi ve oluşturulmasıdır. Dışarıdan yabancı ve bitmiş bilgi olarak verilmemesidir.

Freudenthal, GME'nin düzenleyici ana esası olarak *didaktik olgubilim* kavramını kullanmıştır. Buna göre matematik öğretimi öğretilecek matematiksel kavramın sıklıkla kullanıldığı bir bağlam veya bir "durum" üzerinden yürütülür. Eğitimcilerin ilk işi bu tür durumlar geliştirmektir veya eğitimciler daha önce hazırlanmış durumlar kullanabilirler. Bu durum öğrencilerin hedefteki matematiksel kavramı, kendi zihinlerinde bir matematiksel nesne olarak oluşturmasına ve şekillendirmesine aracılık eder (Freudenthal, 1983; akt. Alacacı, 2016).

GME'ye göre didaktik olgubilimin öğrencilerin yaşadığı süreçlere izdüşümü *yatay* ve *dikey matematikselleştirme* ile tarif edilir. Bir problem durumundaki verileri öğrencinin kişisel yöntemlerle ve problemin konusu ile ilintili olarak ifade etmesine *yatay matematikselleştirme* denir. Yatay matematikselleştirmede problem bağlamına özel bilgilerin matematiksel terimlerle tercümesi, matematiksel terimlerle ifadesi ve matematiksel terimlerle düzenlenmesi esastır. Yani hayattan sembollere geçiş söz konusudur. Daha sonra problem durumunun bazı bileşenleri daha genel kavramsal modellerle ifade edilir. Bu modeller önce duruma özeldir *(model of),* ancak daha sonra benzer problemlerin çözümünde de kullanılabilecek genellik kazanınca durumlar için model *(model for)* halini gelir. Bu yeni modeller yeni matematiksel nesnelerin oluşturulmasına aracılık eder. İlerleyen safhalarda matematiksel ifadelerin soyutlaşarak matematik dilinde anlatımı ve bu yeni matematiksel bilginin daha önce sahip olunan matematiksel bilgi içerisine yerleştirilmesine ise *dikey matematikselleştirme* denir. Önce yatay sonra dikey matematikselleştirmeye *kademeli ilerleyen matematikselleştirme* de denir. Dikey matematikselleştirmenin olması için yatay matematikselleştirmenin yaşanması gerekir. GME'de matematik öğretiminin amacı kademeli ilerleyen matematikselleştirme yoluyla öğrencinin matematik bilgisini geliştirmek, genişletmek ve zenginleştirmektir. GME'nin arzu ettiği bir değişim olan öğrencilerin giderek matematik dili, yapı ve sembollerini kullanır hale gelmelerine *kademeli tertip etme (progressives chematization)* de denir. Bu yatay matematikselleştirmeden dikey matematikselleştirme örneğidir.

Geliştirilen problem durumu üzerinde çalışırken bazı öğrenciler doğal olarak zorlanacaktır. Bu durumlarda grup arkadaşlarının veya öğretmenin onlara rehberlik etmesi gerekecektir. Ancak rehberlik alsa da çözümü öğrencinin kendisinin yapılandırması esastır. Buna GME yaklaşımında *rehberlik prensibi (guidance principle)* denmektedir.

Öğrencilerin kendilerine söylenen veya verilen bilgileri pasif olarak kaydetmesi yerine gerek somut modeller gerekse grup arkadaşları ile etkileşim içinde ve aktif olarak oluşturmasına *etkinlik prensibi (activity principle)*denmektedir.

Problem durumlarının matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlaması GME'de istenen bir özelliktir ve buna *iç içelik prensibi (intertwinement* *principle)* denmektedir. GME öğrencilerin matematiksel bilginin parçalarının ötesinde bütüncül ve esnek yapısını sezmelerini amaçlamaktadır.

Problem durumlarının basitten karmaşığa ve bir bütün oluşturacak şekilde sıralanması GME'nin *düzey prensibi (level principle)* ile ilgilidir. Burada önemli olan öğrencilerin matematiksel gelişimini sağlayacak olan problem durumlarının oluşturduğu kavramsal tutarlılıktır. Bunun hayata geçmesi ise öğretmenlerin sınıfta sağlayacağı rehberlik sayesinde olacaktır. Öğretmen problemler arasındaki geçişleri, basamakları ve kavramsal öğrenmeleri açığa çıkarmalıdır. Öğretmenin rehberliğindeki bu aktif sürece *GME'de rehberli yeniden oluşturma (guided reinvention*) denmektedir. Tekrar oluşturma denmesinin nedeni yetişkinlerin zaten bildiği bu matematiksel kuralların özgün durumları kullanarak öğrencinin de kendisi için yeniden oluşturmasıdır (Gravemeijer vd., 2000).

GME'ye göre tasarlanmış bir dersin öğrenim basamakları aşağıdaki gibidir (Sembring vd., 2008):

1. Problemin verilmesi veya dağıtılması,
2. Problemi öğrencilerin okuması ve anlaması,
3. Problem üzerinde grup çalışması,
4. Öğretmen rehberliğinde çözümlerin paylaşılması ve tartışılması,
5. Öğretmenin sorduğu özetleyici sorularla sonuçların matematiksel esaslarının tartışılması.

GME yaklaşımına göre hazırlanmış bir derste genellikle bir problem durumu üzerinde çalışılır. Öğretmen tarafından problem verildikten sonra okunur ve problem anlaşılıncaya kadar sınıfta tartışılır. Daha sonra grup çalışmasına geçilir. Çözümler grup ortamında geliştirilir ve problemin kademeli matematikselleştirilmesi değişik hızlarda da olsa gruplarda yaşanır. Grupların çoğu çözüm üzerinde yeterli gelişim gösterdiğinde farklı yaklaşımlar sınıf ortamında paylaşılır. Problem durumu hakkında öğretmenin rehberliğinde farklı çözümler karşılaştırılarak tartışılır ve dikey matematikleştirilmeye evrilecek şekilde sınıfın ortak anlayışı geliştirilir. Ders öğretmeninin öğrencilere genel kuralları ve yeni matematiksel bilgileri açıklaması, adını koyması ve daha önce öğrendikleri ile ilişkilendirmesi için fırsat oluşturması ve yardımcı olması ile son bulur. Bu tarz dersin geleneksel dersten en önemli farkı öğrencilerin matematik derslerinde merkezi bir durumda olması ve sınıf tartışmalarının bir öğretim yöntemi olarak belirgin kullanımıdır (Sembring vd., 2008).

Çalışmanın teorik çerçevesi olan GME'deki öğretim sürecine yönelik prensipler ve GME'ye dayalı olarak verilen öğretimde anahtar süreç olan matematikleştirme (Özdemir ve Uzel, 2011) ve GME'nin arzu ettiği değişim olan kademeli tertip etme, ortaokulda sözsüz ispatların formel ispata geçiş aracı olarak nasıl kullanılabileceğini ortaya koymada bir rehber olarak düşünülmüştür. Bu bağlamda GME'nin kavramlarının, araştırma sorularıyla ilişkisi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1.2. *Araştırma sorularının GME kavramlarıyla olan ilişkisi*

Araştırma Soruları	**GME Kavramları**
GME çerçevesinde sözsüz ispatın kullanıldığı bir derste, öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı süreçler nelerdir ve bu süreçler nasıl gerçekleşmektedir?	Matematikleştirme Süreci ('Model of'tan 'model for'a geçiş süreci)
Geometri-cebir gibi alanlar arası ilişkilendirme nasıl kurulmaktadır?	İç içelik Prensibi
Etkinlikler sürecinde, öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı süreçler nasıl değişmektedir?	Kademeli Tertip Etme Süreci

2. YÖNTEM

Ortaokul seviyesindeki ve GME çerçevesinde, sözsüz ispatların formel ispata geçiş aracı olarak nasıl kullanılabileceğini inceleyen bu çalışma, nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi (teaching experiment) yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Steffe ve Thompson (2000)'a göre Piaget'in klinik görüşme yönteminden yola çıkılarak türetilen öğretim deneyi, öğrencilerin matematiksel etkinliklerini keşfetmek ve anlamak için tasarlanmış dinamik bir yöntemdir. Araştırmacıların, kendi etkinliklerini düzenlemelerinde kullandıkları kavramsal bir araç olarak tanımlanabilecek öğretim deneyi yönteminin araştırmacılarca kullanılmasının temel amacı, öğrencilerin matematiksel öğrenme ve muhakemelerini ilk elden deneyimleyerek (Steffe ve Thompson, 2000) öğrencilerin daha önceki bilgileri ile öğrendikleri yeni bilgiyi nasıl bütünleştirdiklerini, bu yeni bilgiyi nasıl yapılandırdıklarını öğrenmektir (Steffe, 1991). Öğretim deneyleri, gerçek sınıf ortamını daha yakından taklit ettiği için, araştırmacılara, hangi tekniğin öğrenciler üzerinde nasıl bir değişikliğe yol açtığına dair daha çok ışık tutabilmektedir. (Engelhardt vd., 2003).

Steffe ve Thompson (2000)'a göre, bir öğretim bölümü, bir öğretim görevlisi (araştırmacı), bir veya daha fazla öğrenci, öğretim bölümlerinin tanıklarını ve bölüm boyunca ortaya çıkanları kaydetme yöntemini içerir. Bu kayıtlar, varsa, sonraki deneylerin hazırlanmasında ve öğretim deneyinin geriye dönük olarak kavramsal analizinde kullanılabilir. Bir öğretim deneyinde, etkileşimli matematiksel iletişimden elde edilen bu kayıtların geriye dönük (retrospektif) analizi, metodolojinin kritik bir parçasıdır. Bu analizlerle, araştırmacı, öğrencilerin matematiğini, geriye ve ileriye dönük analiz etme avantajına sahiptir ve bu perspektiflerin ikisi de, etkileşimler gerçekleştiğinde araştırmacının ulaşamadığı öğrencilerin etkileşimlerinin ve eylemlerinin anlaşılmasını sağlar.

Sonuç olarak, sözsüz ispatların formel ispata geçiş aracı olarak nasıl kullanılabileceğini sorusuna odaklanan ve araştırma soruları ışığında, öğrencilerin matematiksel bilgileri ile yeni bilgiyi bütünleştirme ve bu yeni bilgiyi yapılandırma süreçleri inceleyen bu çalışma için öğretim deneyinin uygun bir yöntem olduğu söylenebilir.

2.1. Çalışmanın Katılımcıları

Çalışma, 2016-2017 öğretim yılının bahar döneminde Kütahya ili Tavşanlı ilçesinin merkez bir ortaokulundaki yedinci sınıfların bir şubesindeki 17 erkek 13 kız toplam 30 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar, araştırmacının, araştırma konusuna uygun olan Matematik Uygulamaları dersine girdiği yedinci sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır.

2.2. Pilot Uygulama

Uygulama esnasında karşılaşılabilecek problemleri önceden fark etmek, gerekli önlemleri almak amacıyla, belirlenen yedi sözsüz ispata uygun tasarlanan problemler ile 2015-2016 öğretim yılında, araştırmacı tarafından aynı yöntemle yedinci sınıfta okuyan 28 öğrenci ile bir pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Yapılan pilot uygulamada

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$ sonsuz toplam yapmayı içeren etkinliğin öğrencilerin düzeyine uygun olmadığı görüldüğü için iptal edilmiştir. Ayrıca problem 2-b'de her adımda oluşan kare sayısı tek olduğu için öğrenciler adım sayısı ile oluşan kare sayısını karıştırdıklarından adım sayısının çift sayı olan 50 seçilmesine karar verilmiştir. Böylece esas uygulama için geriye kalan altı etkinlik ufak değişikliklerle hazır hale getirilmiştir.

2.3. Ortam ve Etkinlik Tasarımı

Öğretim deneyi yönteminin birebir, grupla ve tüm sınıfla yapılabildiği bilinmektedir. Ancak, grup çalışması hem GME'nin yaklaşımında benimsendiği için, hem sosyal ve ahlâkî gelişmeyi hem de herkesin kendi yetenek ve gayretine uygun bir çalışma ortamı sağladığı için (Güneş ve Asan, 2005), ayrıca öğrenmenin sosyal etkileşim içinde daha rahat gerçekleşmesini sağladığı ve alternatif fikirlerin ele alınmasına fırsat sunduğu için (Karakuş Yılmaz, Baydaş ve Kokoç, 2017) sınıf ortamındaki 30 öğrenci, beşerli altı gruba ayrılmıştır. Bununla birlikte, öğrencinin grup arkadaşlarını kendisinin seçmesi, grup içinde her öğrencinin rahat çalışmasını sağladığı (Güneş ve Asan, 2005) için gruplara ayrılma sürecinde öğrencilere müdahale edilmemiştir. Ayrılan gruplara bakıldığında benzer akademik başarılara sahip öğrencilerin genellikle aynı gruplarda yer aldığı görülmüştür. Bu nedenle gruplar arasında akademik başarı açısından farklılıklar oluşmuştur. Derslerde aldıkları notlara bakıldığında video kaydı alınan grubun (odak grup) ve ikinci grubun genel olarak akademik açıdan en iyi başarıya sahip olan öğrencilerden oluşan gruplar olduğu söylenebilir. Üçüncü grubu oluşturan öğrencilerin akademik başarı düzeyi, odak grubu ve ikinci grubu oluşturan öğrencilerin akademik başarı düzeyinden düşük olmakla birlikte diğer grupları oluşturan öğrencilerden yüksek olduğu söylenebilir. Dördüncü grup akademik başarı düzeyi ortalama olan öğrencilerden oluşurken beşinci ve altıncı grubu oluşturan öğrencilerin akademik başarı düzeyinin ortalamanın altında olduğu söylenebilir.

Tüm grupların bir adı vardır ve bir grup sözcüsü seçilmiştir. Grup sözcüsü sorumlulukları anlatıldıktan sonra gönüllüler arasından seçilmiştir. Grup sözcüsü, grubunun ulaştığı sonucu, araştırmacıya ve gerektiğinde diğer gruplardaki katılımcılara aktarmakla yükümlüdür, bir başka deyişle grubun iletişim sorumlusu olmuştur. Dersin akışı GME aşamalarına göre planlanmıştır. Uygulama araştırmacının derse girdiği sınıfta ve zamanda yapılmıştır.

GME'nin Gerçeklik Prensibine göre, etkinlikler öğrencilerin dünyasında onlar için anlamlı bir problem durumu ile başlamalıdır. Dolayısıyla etkinliklerdeki tüm problemlerin öğrencilerin dünyalarında onlar için anlamlı bir problem durumuyla başlaması için çaba gösterilmiştir. Bu anlamda, sözsüz ispat durumlarının öğrencilere doğrudan sunulması yerine bu durumlar sözel bir problem bağlamı içine gömülmüştür.

GME'nin Etkinlik Prensibine göre, öğrencilerin etkinliklerde kendilerine sunulan bilgiyi pasif olarak kaydetmek yerine gerek materyallerle birlikte gerekse arkadaşlarıyla etkileşim halinde bilgiyi oluşturmaları ve etkinliğin içinde aktif olmaları beklenmektedir. Öğrencilerin etkinlikte aktif olmalarını sağlamak adına aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır:

- Soru olabildiğince gerçek hayatla bağlantılı olarak hazırlanmış ve cazip hale getirilmeye çalışılmıştır.
- Öğrencilerin grup olarak arkadaşlarıyla birlikte çalışmasına olanak sağlanmıştır.
- Etkinliğin süresi iki ders saati olarak belirlenmiştir. Grup içi etkileşimin kopmaması ve öğrencilerin motivasyonunun düşmemesi adına etkinlik tamamlanana kadar etkinliğe ara verilmemiştir.
- Her gruba gerektiğinde kullanmak üzere somut materyaller verilmiştir.
- Etkinlik süresince grupların yaptığı çalışmalar takip edilmiş, bir yerde takılan grup olursa yine de bilgiyi kendileri oluşturmak kaydıyla gereken rehberlik yapılmıştır.
- Grup içi etkileşimi artıracağı düşünüldüğü için istenilen sonuçlara ulaşan gruplara artı puan verilmiştir.

Bu etkinlikler öğrencilerin grup çalışması ile birbirlerinden yararlanması ve çözümleri beraber oluşturmalarına uygun olarak hazırlanmaya çalışılmıştır. Her grubun bir sözcüsü vardır. Herhangi bir öğrencinin sormak istediği soru önce grup içinde tartışılmış, uygun görüldüğünde bu soru grup sözcüsü tarafından araştırmacıya sorulmuştur. Ayrıca gruplar, ortak alınmış kararları ve ulaştıkları sonuçları grup defterine yazmıştır. Böylece öğrenciler bu ortak kararları alırken karşılıklı konuşarak etkileşim içinde olmuştur.

2.3.1. Etkinliklerdeki problemlerin tanıtımı

Ortaokul öğrencileri için kullanılabilecek sözsüz ispatlar hâlihazırda sınırlı sayıdadır. Dolayısıyla araştırmacı tarafından önce bu sözsüz ispatlar belirlenmiş sonra GME çerçevesinde bu sözsüz ispatlara ulaşmayı gerektirecek problemler tasarlanmıştır.

Problemler önce yakın adımlar için sorulmaktadır. Sonra problem uzak adımlar için sorulup somut materyal yardımıyla sözsüz ispatlarla genel bir kuralın bulunması amaçlanmaktadır. İki ders saati ve toplam altı hafta süren çalışmadaki problemlerin uygulanış sırası, basitten karmaşığa doğru hazırlanmış ve GME'nin düzey prensibine uygun olmasına özen gösterilmiştir. Öğrencilerin etkinliklerdeki problemlerin çözümü için yapmaları istenenler, 2013 yılında yayımlanan Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programları (MEB, 2013a) ve yine 2013 yılında yayımlanan Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik Uygulamaları Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı (MEB, 2013c) kitapçıklarındaki kazanımlara uygundur. Etkinliklerdeki problemlerin öğrencilerin düzeyine uygun olduğu ve kazanımlarla ilişkisi Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1. *Etkinliklerdeki problemlerle ilgili kazanımlar*

<table>
<tr><th>HAFTA</th><th>SAAT</th><th>ETKİNLİK</th><th>PROBLEMLERİN MATEMATİK DERSİ KAZANIMLARI İLE İLİŞKİSİ</th><th>PROBLEMLERİNMATEMATİK UYGULAMALARI DERSİ KAZANIMLARI İLE İLİŞKİSİ</th></tr>
<tr><td>BİRİNCİ HAFTA</td><td>2</td><td>İşyeri Problemi</td><td rowspan="5">• 5.1.1.3. Kuralı verilen sayı ve şekil örüntülerinin istenen adımlarını oluşturur (s. 2).
• 5.1.2.10. Dört işlem içeren problemleri çözer (s. 4).
• 5.1.2.11. Bir doğal sayının karesi ve küpünü üslü olarak gösterir; değerini bulur (s. 4).
• 5.2.2.1. Çokgenleri isimlendirir, oluşturur ve temel elemanlarından kenar, iç açı, köşe ve köşegeni tanır (s. 8).
• 5.2.2.3. Dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen ve yamuğun temel özelliklerini anlar (s. 8).
• 5.2.4.1. Dikdörtgenin alanını hesaplar; santimetrekare ve metrekareyi kullanır (s. 9).
• 6.1.1.1. Bir doğal sayının kendisiyle tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder ve üslü</td><td rowspan="5">• 1. Doğal sayılar, kesirler, ondalık sayılar ve yüzdelerle hesaplamaları matematiksel problemlerin çözümünde kullanır (s. 9).
• 4. Oran ve orantıyı problemlerdeki sayısal ilişkilerin gösteriminde ve çözümünde kullanır (s. 9).
• 5. Doğrusal ilişkiler ve örüntüler içeren matematiksel problemleri cebirsel denklemler kurarak çözer (s. 9).
• 6. Problemlerdeki verilen ilişkileri düzlem ve uzay şekillerinin özelliklerini kullanarak çözer (s. 9).
• 7. Problemleri geometrik ilişkileri kullanarak çözer (s. 9).
• 12. Problem çözümünde hesap yöntem ve stratejilerinden uygun olanlarını seçerek kullanır (s. 9).
• 13. Problem çözümlerinde verileri uygun görsel temsil yöntemlerini seçerek gösterir (s. 9)
• 14. Problemlerdeki örüntülerin anlatımında değişkenleri, cebirsel terimleri ve uygun matematiksel sembolleri kullanır</td></tr>
<tr><td>İKİNCİ HAFTA</td><td>2</td><td>Örüntü Problemi</td></tr>
<tr><td>ÜÇÜNCÜ HAFTA</td><td>2</td><td>Asansör Problemi-1</td></tr>
<tr><td>DÖRDÜNCÜ HAFTA</td><td>2</td><td>Asansör Problemi-2</td></tr>
<tr><td>BEŞİNCİ HAFTA</td><td>2</td><td>Küp Problemi</td></tr>
</table>

ALTINCI HAFTA	2	Kaplama Problemi	niceliklerin değerini belirler (s. 18). • 6.1.1.4. Doğal sayılarla dört işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer (s. 13). • 6.2.1.1. Aritmetik dizilerin kuralını harfle ifade eder; kuralı harfle ifade edilen dizinin istenilen terimini bulur (s. 18) • 6.2.1.2. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar (s. 19). • 6.2.1.3. Cebirsel ifadenin değerlerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar (s. 19). • 6.2.1.4. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar (s.19). • 6.2.1.5. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar (s. 19). • 6.2.1.6. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar (s. 19). • 7.1.4.3. Gerçek yaşam durumlarını, tabloları veya doğru grafiklerini inceleyerek iki çokluğun orantılı olup olmadığına karar verir (s. 26). • 7.1.4.6. Gerçek yaşam durumlarını ve tabloları inceleyerek iki çokluğun ters orantılı olup olmadığına karar verir (s. 27).	(s. 9). • Problemlerin çözümünde uygun stratejileri seçer ve kullanır (s. 9). • 16. Matematiksel problemlerde gözlenen veya bulunan özel durumlardan genel kuralları çıkarmaya çalışır (s. 10). • 17. Problemlerde ulaşılan genel kuralların geçerliliğini uygun matematiksel yöntemlerle test eder (s.10) • 18. Problem çözümlerinde arkadaşlarının geliştirdiği yaklaşım ve yöntemleri analiz eder ve değerlendirir. • 19. Problem çözümlerini anlaşılır bir şekilde ifade eder ve sunar. • 20. Problem çözümlerinde olası farklı yöntemleri kullanır. • 21. Problem çözümlerini takiben yeni matematiksel problemler kurar.

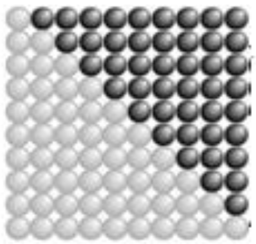
Çalışmada hazırlanan problemler ve öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispatlar aşağıda tanıtılmıştır.

Problem 1: İşyeri problemi

a) Bir iş yerinde bir aylığına (30 gün) tatil yapmadan çalışmak isteyen Ahmet, iki farklı iş yerinde kendine uygun iş bulmuştur. İlk işyerinde (A) patron bu şartlar altında (30 günlüğüne, tatil yapmadan) 450 TL vermeyi teklif etmiştir. İkinci iş yerinde (B) ise patron yine bu şartlar altında (30 günlüğüne, tatil yapmadan) ilk gün 1 TL'den başlayıp her gün bir önceki günün 1 TL fazlasını vermeyi teklif etmiştir. İki patron da parayı bir ay sonra verecektir. Sizce Ahmet bu tekliflerden hangisi kabul etmelidir? Neden?

b) Ahmet aynı koşullar altında birsene (365 gün, para yılsonunda toptan verilmek üzere) çalışmak isteseydi A işyerindeki patron Ahmet'e en az kaç TL teklif etmeliydi?

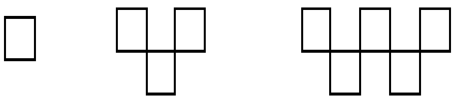
Öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispat: $1+2+3+\ldots+n=n.(n+1)/2$ (Şekil 2.1)



Şekil 2.1. *Birinci problemde ulaşılması istenen sözsüz ispat*

Problem 2: Örüntü problemi

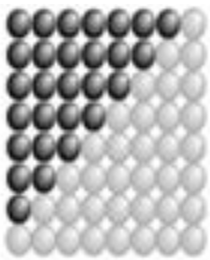
a) Ali, Teknoloji ve Tasarım dersinde, süsleme yapmak için eş karelerle aşağıdaki gibi (Şekil 2.2) bir şekil örüntüsü oluşturmuştur. Bu şekil örüntüsünde, Ali dördüncü adıma kadar toplam kaç tane kare oluşturur?



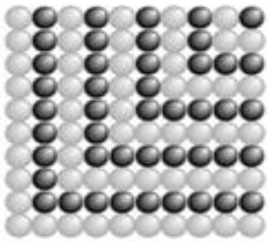
Şekil 2.2. *Şekil örüntüsü*

b) Eğer Ali 50. adıma kadar örüntü oluştursaydı kaç tane kare oluştururdu?

Öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispat: $1+3+5+\ldots(2n-1) = n^2$ (Şekil 2.3)



veya



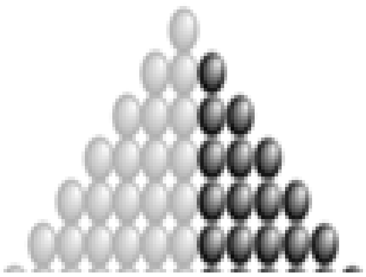
Şekil 2.3. *İkinci problemde ulaşılması istenen sözsüz ispat*

Problem 3: Asansör problemi-1

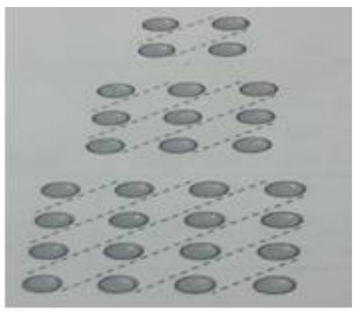
a) Bir gökdelendeki asansör bir gün zemin kattan beşinci kata kadar çıkıp tekrar zemin kata inmiş, çıkarken ve inerken her katta durmuştur. Asansör her durduğunda asansöre bulunduğu katın sayısı kadar yolcu binmiştir. Buna göre asansörden çıkışta ve inişte toplam kaç yolcu binmiştir?

b) Bu asansör 20. kaça çıksaydı toplam kaç yolcu binerdi?

Öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispat: $1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+2+1=n^2$ (Şekil 2.4)



veya



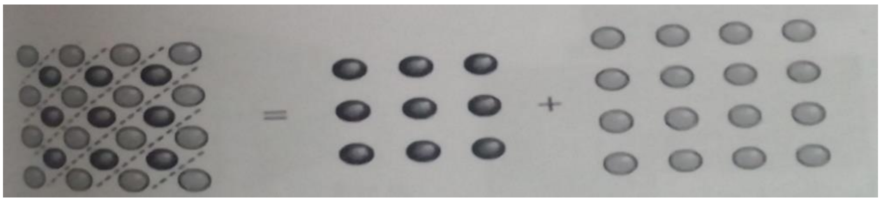
Şekil 2.4. *Üçüncü problemde ulaşılması istenen sözsüz ispat*

Problem 4: Asansör problemi-2

a) Bir gökdelende yalnızca tek katlara çıkan bir asansör vardır. Bu asansör bir gün zemin kattan beşinci kata kadar çıkıp tekrar zemin kata inmiş ve çıkarken ve inerken her tek katta durmuştur. Asansör her durduğunda asansöre bulunduğu katın sayısı kadar yolcu binmiştir. Buna göre asansörden çıkışta ve inişte toplam kaç yolcu binmiştir?

b) Bu asansör 25. kaça çıksaydı toplam kaç yolcu binerdi?

Öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispat:$1+3+5+\ldots+2n-1+\ldots+3+1=n^2+(n-1)^2$ (Şekil 2.5)



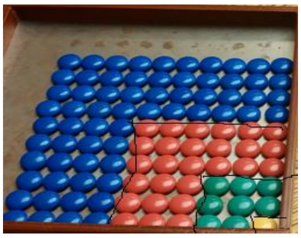
Şekil 2.5. *Dördüncü problemde ulaşılması istenen sözsüz ispat*

Problem 5: Küp problemi

a) Ali matematik projesi için yapacağı süslemede kullanacağı küpler oluşturacaktır. Bu küplerin ayrıt uzunluğu bir birimden başlayıp, her adımda bir birim artırılacak şekilde oluşturulacaktır. Ali üç tane küp oluşturacağına göre bu küplerin toplam hacmi ne olur?

b) Ali 20 tane küp yapsaydı bu küplerin toplam hacimleri kaç br^3 olurdu?

Öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispat:$1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$ (Şekil 2.6)



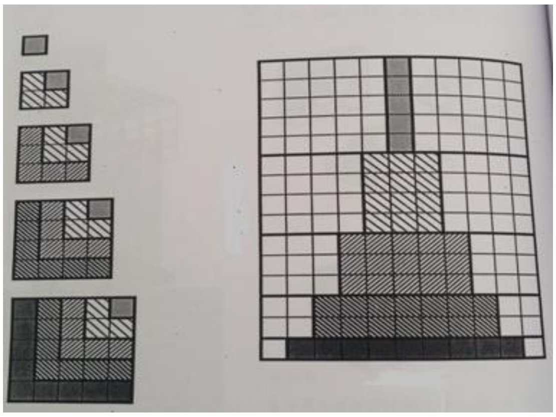
Şekil 2.6. *Beşinci problemde ulaşılması istenen sözsüz ispat*

Problem 6: Kaplama problemi

a) Ahmet Matematik projesi için kenar uzunlukları 1 cm'den başlayıp birer birer artan dört karesel bölge oluşturacaktır. Oluşturacağı bu karesel bölgelerin üst yüzeyini elişi kâğıtlarıyla kaplamak isteyen Ahmet'in en az kaç cm^2 elişi kâğıdına ihtiyacı vardır?

b) Ahmet proje için 29 tane karesel bölge oluştursaydı oluşturacağı karesel bölgelerin üst yüzeyine kaplamak için en az kaç cm^2 elişi kâğıdına ihtiyaç duyardı?

Öğrencilerin ulaşması istenen sözsüz ispat: $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n.(n+1).(2n+1)/6$ (Şekil 2.7)



Şekil 2.7. *Altıncı problemde ulaşılması istenen sözsüz ispat*

2.4. Veri Toplama Araçları

Uygulama boyunca her gruba bir not defteri verilmiş ve ulaştıkları sonuçları bu defterlere kaydetmeleri istenmiştir. Ayrıca daha detaylı bir veri analizi yapmak için bir grubun (odak grup) görüntü ve ses kaydı alınmıştır.

Öğrencilerin uygulama boyunca yazdığı, not aldığı defterler uygulama sonunda toplanmıştır. Uygulama boyunca araştırmacı gözlemler yapmış, gözlem notları tutmuş, fotoğraflar çekmiş, uygulama bitiminde de genel olarak uygulamanın nasıl geçtiğine ilişkin notlar almıştır.

2.5. Verilerin Analizi

Araştırmacı pilot çalışmadan elde ettiği bilgi ve deneyimle her etkinlikten önce öğrencilerin etkinliklerde sergileyecekleri olası davranışları hakkında tahminlerde bulunmuştur. Bu tahminler derslerde gözlemlenecek noktalara ve verilerin çözümlemesine ışık tutmuş, önemli olay ve olguların daha kolay tespit edilebilmesini sağlamıştır. Verilerin analizi öncelikle uygulama boyunca alınan ses ve video kayıtları derste tutulan notlar ışığında defalarca izlenerek ve gerekli görülen notlar alınarak yapılmıştır. Ses ve video kaydında odak gruba odaklanılmıştır ancak diğer grupların yaptığı çalışmalar da tuttukları not defterleri, çekilen fotoğraf ve gözlem notlarının yardımıyla değerlendirilmeye çalışılmıştır. Her bir etkinlik sonunda geriye dönük analizler yapılmıştır. Birinci etkinlik sonunda geriye yönelik yapılan analizde, artı puan vermenin, birbirinden kopya çekmeye çalışma, araştırmacının hep kendi gruplarıyla ilgilenmelerini bekleme gibi istenmeyen sonuçlara neden olduğu için bu uygulama diğer etkinliklerde uygulanmamıştır.

GME'nin prensiplerinden gerçeklik, etkinlik, etkileşim ve düzey prensipleri hakkında genel bir değerlendirme yapılmıştır. Bununla birlikte her etkinlik sonundaki incelemeler sonucunda elde edilen tüm veriler, GME'nin çalışmanın araştırma sorularıyla bağlantılı olduğu kavramları ışığında değerlendirilip analizi yapılmıştır. Değerlendirilen başlıklar şunlardır:

1. Rehberlik Prensibi
2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci
3. İç içelik Prensibi
4. Kademeli Tertip Etme Süreci

Bu başlıklardan son üçü doğrudan araştırma soruları ile ilgilidir (Tablo 1.2). Rehberlik prensibi ise öğretim deneyi yaklaşımı ile uyumlu olarak, öğretmenin ne tür bir rehberlikte bulunduğunun belirlenmesi ve bu rehberliğin öğrencilerin sürecine ne tür bir etkisinin olduğunun tartışılabilmesi için incelenmiştir.

3. BULGULAR

Bu bölümde öğretim deneyinin her etkinliğinden elde edilen bulgular yukarıda belirlenen başlıklara göre sunulmuştur.

3.1. Birinci Etkinlikle İlgili (İşyeri Problemi) Bulgular

3.1.1. Rehberlik prensibi

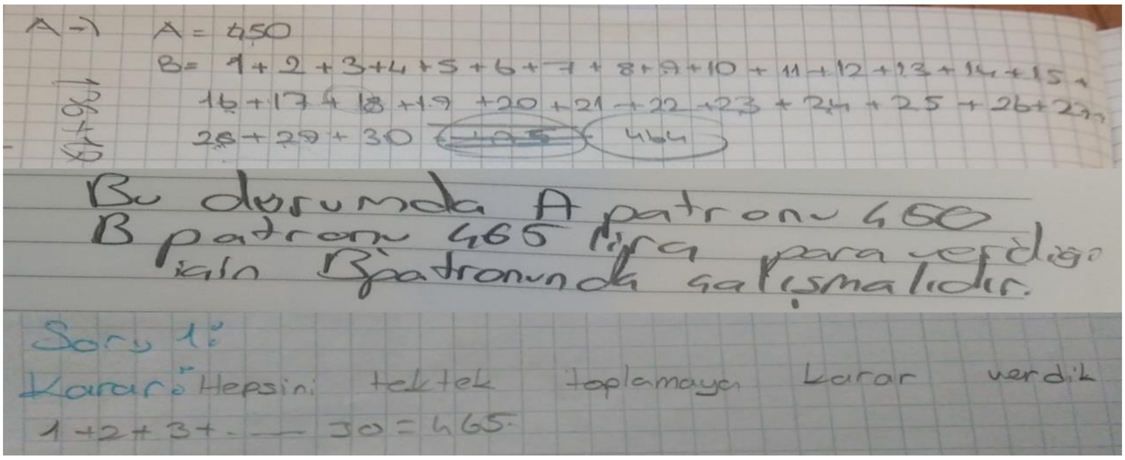
Bu ilk etkinlikte problem durumları üzerinde çalışırlarken bazı öğrenciler zorlanmıştır. Bu durum grup arkadaşlarının ve öğretmenin rehberliğiyle giderilmeye çalışılmıştır. Gruplardan biri problem 1-b için bir çözüm bulmaya çalışırken zorluk yaşamıştır. Bir grup B işyerindeki ücretin her yeni aybaşında ücretin ilk aydaki gibi tekrar 1 TL'ye düşeceğini düşünmüştür. Benzer şekilde bu düşünceyi belirtmeseler de bazı gruplar yıllık alınacak ücreti hesaplamak için ilk aylık ücreti hesapladıktan sonra doğru orantıyı kullanarak 12 aylık ücreti bulmak istemiştir. Sebebi sorulunca bir yılda 12 ay vardır cevabını vermişlerdir. Ayrıca grupların sayma pulları gibi materyalleri problemler için ilk defa kullanmaya çalışmaları tüm grupların bu konuda rehberlik ihtiyacı duymalarına neden olmuştur.

Özellikle odak grubun kamera karşısında böyle bir durumla ilk kez karşılaştıkları için çok utanıp sıkıldıkları görülmüştür. Araştırmacının sık sık uyarılarına rağmen kendi aralarındaki tartışmaları bile fısıldayarak yaptıkları görülmüştür.

Araştırmacının gruplara yapmış olduğu rehberlik aşağıda detaylandırılmıştır.

3.1.1.1. Araştırmacının problem 1-a için yaptığı rehberlik

Genel olarak tüm gruplar problem 1-a'yı okuduklarında birden 30'a kadar olan sayıların toplamını yapmaya çalışmışlardır. Dördüncü grup hariç diğer tüm gruplar toplamı yanlış bulmuşlardır. Araştırmacı tarafından toplamı kontrol etmeleri gerektiği söylendikten sonra altıncı grup hariç tüm gruplar bu toplamı bulabilmişler ve Ahmet'in, bir aylığına 450TL teklif eden A işyeri yerine toplamda 465 TL kazanacağı B işyerini seçmesi gerektiğini söylemişlerdir. Aşağıda problem 1-a için bazı örnek çözümler gösterilmiştir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. *Problem 1-a için örnek çözümler*

Odak grubun problem 1-a'nın çözümüne yönelik bir karara varıp bir çözüm üretmesi yaklaşık 6 dakika sürmüştür. Fakat grup toplamada küçük bir hata yaptığı için çözüm yolu doğru olsa bile doğru cevaba tam olarak ulaşamamıştır. Dördüncü gruba söz verilerek tahtada doğru çözümü yapmaları istenmiş, grup sözcüsü de tahtada problem 1-a için doğru çözümü yapıp cevaba ulaşmıştır. Tüm gruplar tahtada yapılan çözümün doğruluğunu kabul etmiştir. Odak gruptaki öğrencilerden biri tahtadaki çözümü görünce "Bir sayıyla kaçırmışız." şeklinde tepki vermiştir.

3.1.1.2. Araştırmacının problem 1-b için yaptığı rehberlik:

Problem 1-b gruplara araştırmacı tarafından dağıtılmıştır. İkinci ve dördüncü grup problem 1-b'yi okuduklarında etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi aylık alacağı ücreti 12 ile çarptıklarında yıllık alacağı ücreti bulacaklarını düşünmüşlerdir. Oran-orantı konusunun yedinci sınıf konusu olması ve yakın zamanda işlenmesi nedeniyle öğrencilerin problem1-b'nin çözümü için doğru orantıyı kullanabilecekleri etkinlik öncesinde tahmin edilmiştir. Araştırmacı bu grupların bu çoklukların doğru orantılı olmadığını aşağıdaki sorularla fark etmelerini sağlamıştır:

- Ahmet ilk ayın son iki gününde yani 29. ve 30. gününde kaçar TL ücret alır?
- Bu son iki günde toplam kaç TL ücret alır?

- Ahmet son ayın son iki gününde yani 364. ve 365. gününde kaçar TL ücret alır?
- Bu son iki günde toplam kaç TL almış olur?
- Bu şartlar altında ilk ay alacağı ücret ile son ay alacağı ücret eşit olur mu?
- O halde bir aylık ücreti hesaplayıp 12 ile çarparak yıllık ücreti bulabilir miyiz?

Bir grubun bu şekilde hesaplamasında 30. günün sonunda Ahmet'in alacağı ücretin tekrar 1 TL'ye düşeceğini düşünmesi etkili olmuştur.

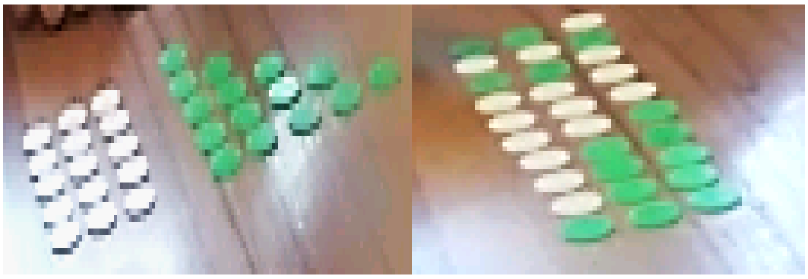
Araştırmacı etkinliği tüm gruplarla beraber sürdürmek adına "Problem 1-b'de A işyerindeki patronun Ahmet'i ikna edebilmesi için Ahmet'e en az B işyerinde kazanacağı kadar ücret vermeli, bunun için de Ahmet'in B işyerinde kazanacağı ücreti bilmelidir." diye bir açıklama yapmıştır. Dolayısıyla B işyerinde kazanacağı ücreti bulmak için ne yapılması gerektiği sorulunca, odak grubun sözcüsü: "Birden 365'e kadar olan sayıları toplamalıyız." diye cevap vermiştir. Ardından araştırmacı bunu hesaplamanın kolay olup olmayacağını sormuş, gruplar daha önce bu toplamın yapılmasını gerektiğini fark eden ikinci grubun söylediği gibi 1'den 365'e kadar olan sayıları teker teker yazarak toplamanın çok zaman alacağını belirtmiştir. Bunun üzerine araştırmacı, öğrencilerden, toplamı bulunmak istenen sayıları incelemeleri istemiş ve bu sayıların birden başlayarak birer birer artan ardışık doğal sayılar olduğunu görmelerini beklemiştir. Öğrenciler toplamı bulunacak sayıların sabit bir şekilde birer birer arttığını fark edebilmişlerdir.

Araştırmacı tüm grupları sayma pullarıyla model yapmaya yöneltmek için "Arkadaşlar bu sayıların sizin de söylediğiniz gibi belirli düzeni var. Bu düzenden yararlanarak bu sayıların toplamını bulabilir miyiz?" diye bir rehberlik yapıp, toplamı modellemek için birden beşe kadar model oluşturabilecek farklı renkli iki grup sayma pulu vermiş ve "Acaba bu sayıları, bir şekilde modelleyerek bu sayıların toplamını kolay bulabileceğimiz bir hale getirebilir miyiz?" sorusunu öğrencilere yöneltmiştir. Sayılar çok büyük olduğu için araştırmacı "Modelinizi isterseniz beş gün için yapınız, böylece oluşturduğunuz modelin doğruluğunu da kolayca test edebilirsiniz." şeklinde öneride bulunmuştur. Öğrenciler modelleyerek denildiğinde ne yapmaları gerektiğini tam olarak anlayamamıştır. Problem durumunun bu şekilde modele aktarılmaya çalışıldığı durumlara alışık olmayan öğrenciler, böyle bir durumla karşılaşınca rehberliğe ihtiyaç duymuşlardır. Ellerindeki birinci grup sayma pullarıyla çeşitli model oluşturan gruplar olmuştur. Ancak bunlar, ilk beş gün için istenen toplamı veren modeller olsa da, öğrencileri problem 1-b için genel kurala ulaştırabilecek bir model değildir (Şekil 3.2).

Şekil 3.2. *İkinci grubun oluşturduğu ilk model*

Araştırmacı ilk beş günün toplamını veren iki farklı renkteki sayma pulu grubunu öğrencilere dikdörtgen bir model oluşturarak buradaki sayma pullarını kolay bir şekilde hesaplayabilmeleri için vermiştir. Sonra da iki farklı renkte grup olduğundan bir gruptaki sayma pulu sayısını bulmak için dikdörtgen modelden hesapladığı sayma pulu sayısını ikiye bölmelerini isteyecektir. Sayma pullarıyla ne yapacaklarını tam anlayamayan öğrencilere araştırmacı kareli defterin bir sayfasını örnek gösterip "Bu sayfada kaç tane küçük birim kare vardır, bunu nasıl sayarsınız?" sorularını sormuştur. Dört grupta öğrenciler "Eni ve boyundaki kare sayılarını çarparız." şeklinde cevap vermiştir. Araştırmacının "Neden böyle sayıyorsunuz, bu sayfa daire şeklinde olsaydı yine böyle mi sayacaktınız?" sorusuna gruplar: "Dikdörtgen olduğu için." cevabını vermişlerdir. Böylece araştırmacı grupları ellerindeki sayma pullarıyla dikdörtgen bir model oluşturduklarında kullandıkları sayma pulu sayısını kolayca hesaplayabileceklerini fark ettirmiştir.

Odak grup ilk aşamada farklı renkteki sayma pulu ile grupları ayrı ayrı düşünerek aşağıdaki modeli oluşturmuştur. Modelde yeşil sayma pulları problemdeki modeller temel alınarak, beyaz sayma pulları ise araştırmacının rehberliğiyle dikdörtgen bir model oluşturmak için yapılmıştır (Şekil 3.3). Araştırmacı bu modeli gördükten sonra sayma pullarını ayrı ayrı değil birlikte kullanarak bir model oluşturmaya çalışmalarını önermiştir. Bu öneriden sonra grup aşağıdaki modeli oluşturmuştur (Şekil 3.3). Bunun üzerine araştırmacı problemde geçen sayıları modelde bozmayın, yani birinci gün bir, ikinci gün iki, üçüncü gün üçü gösteren modeli bozmayın önerisi yapmıştır.



Şekil 3.3. *Odak grubun oluşturduğu farklı modeller*

Araştırmacı odak grubun neden aynı sayıda iki farklı renkte sayma pulu verildiğini anlamadığını fark edince grupla bunun anlaşılmasına yönelik aşağıdaki gibi bir diyalog gerçekleştirmiştir.

A: Şu sayma pullarının tamamı bize neyi veriyordu problemde (yeşil sayma pullarını göstererek…)

Emir: Beş günün sonunda alacağı toplam ücreti.

A: Çok güzel. Bunları da verirsem (aynı sayıdaki beyaz pulları göstererek) elimizde ne olmuş olur?

Emir: 10. gün toplamı?

A: Öyle olur mu acaba? 10. günün toplamının ücreti mi olur yoksa? Bu da aynı sayıda değil mi? Bu da beşinci gün sonunda alacağı toplam ücreti göstermez mi?

Ahmet: Gösterir.

A: Beş günde toplam alacağı ücretten kaç tane olur?

Ahmet: İki tane olur.

A: İki tane olur değil mi? Bunları kolay sayabileceğimiz bir modele çevirebilir miyiz? Ne olursa kolay sayılabilecek bir model olacak?

Onur: Kare.

A: Veya?

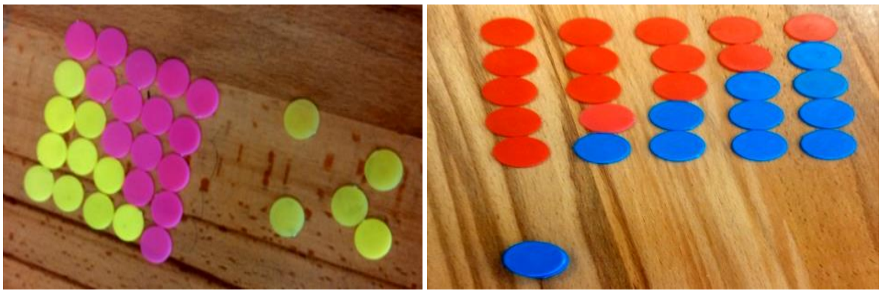
Mehmet: Dikdörtgen.

A: Tamam, şunu sizin dediğiniz geometrik nesneye yani kare veya dikdörtgene tamamlamaya çalışın.

Mehmet: Yapmıştık sanki.

A: Ama yapmıştık derken, modeli bozmadan tamamlamaya çalışın, hadi bakalım.

Beşinci ve altıncı grup hariç benzer etkileşimler diğer dört grupla da yaşanmıştır ve gruplar sayma pullarıyla bir dikdörtgen modeli oluşturmuştur (Şekil 3.4). Bu gruplardan üçüncü ve dördüncü grup etkinlik sürecinde, oluşturdukları dikdörtgen modelinde, toplam sayma pulu ve kenar uzunlukları arasında bir ilişki kuramamıştır.



a b

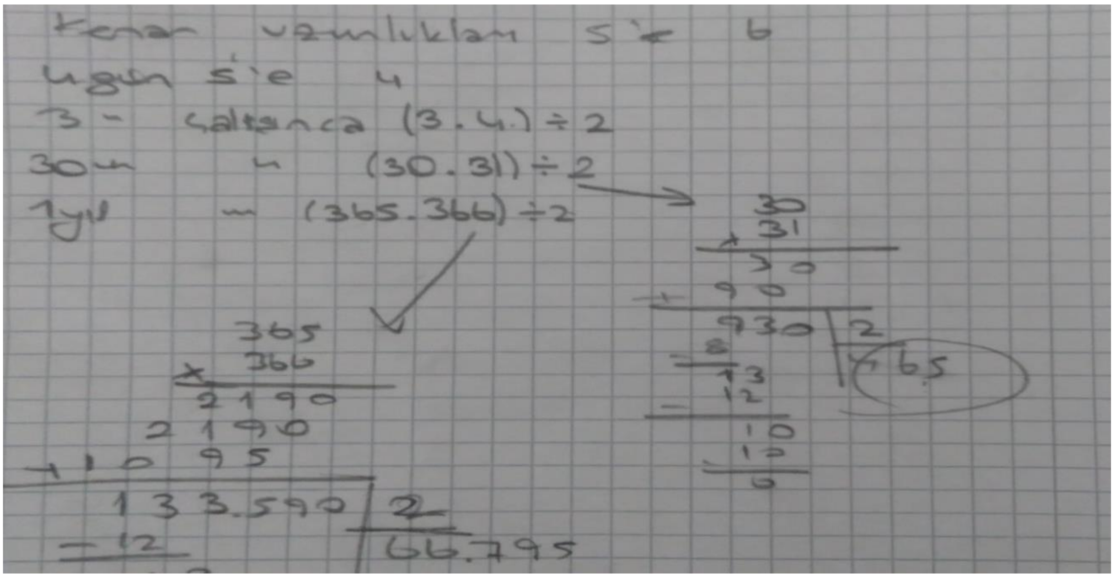
Şekil 3.4. *Üçüncü (a) ve dördüncü (b) grubun oluşturdukları farklı modeller*

Odak grup ve ikinci grup ise beklenen modeli oluşturmuştur. Araştırmacı bu gruplardan oluşturdukları modeldeki toplam sayma pulu ve dikdörtgen modelin enini ve boyunu oluşturan sayma pulları arasındaki ilişkileri incelemelerini istemiştir. Bu gruplardan modeli daha erken oluşturan odak grup daha önce bahsedilen araştırmacının önerileriyle oluşturdukları modelde iki tane beş günlük toplam ücret olduğunu ve modeldeki sayma pullarından beş günlük ücreti bulmak için modeldeki toplam sayma pulunun sayısını ikiye bölmeleri gerektiğini fark etmiştir. Araştırmacı modelin enini ve boyunu oluşturan sayma pulları arasındaki ilişkileri de fark etmeleri için dördüncü gün sonunda alacakları ücreti modellemelerini istemiştir (Şekil 3.5). Üçüncü ve dördüncü gün sonunda alacakları toplam ücreti sayma pullarıyla modelleyen grup oluşturdukları dikdörtgen modelin eninin gün sayısı ve boyunun ise gün sayısının bir fazlası olduğunu da fark etmiştir. Böylece alınacak ücretin, oluşturulan modelin eni ve boyundaki sayma pulu sayısının çarpımının yarısı yani çalışılan en son gün sayısı ve gün sayısının bir fazlasının çarpımının yarısı olduğunu keşfetmişlerdir.

a b

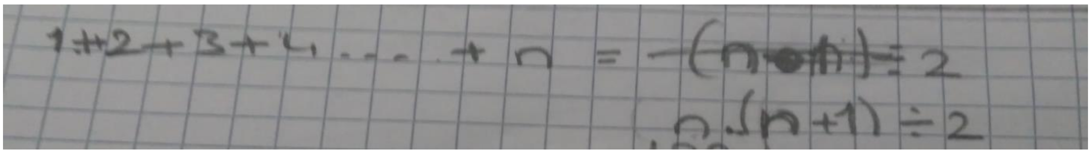
Şekil 3.5. *İkinci grubun (a) ve odak grubun (b) oluşturdukları modeller*

Modeli oluşturan toplam sayma pulu ve modelin kenar uzunluklarını oluşturan sayma pulu arasındaki ilişkiyi keşfeden odak grup, araştırmacının rehberliğiyle problem 1-a'daki çözümü, geliştirdikleri argüman ile yapmışlar, kontrol etmişler, doğruluğunu görmüşler ve problem 1-b için çözüm bulmuşlardır.



Şekil 3.6. *Grubun daha önce ulaştığı sonucu geliştirdikleri argüman ile kontrolü ve problem 1-b için çözümü*

Araştırmacı, grubun genel bir kurala ulaşması için "Son çalıştığı güne n dersek Ahmet kaç TL kazanır?" sorusunu sormuş, grup "n.(n+1)/2." cevabını vermiş ve aşağıdaki şekilde kuralı yazmıştır.



Şekil 3.7. *Odak grubun ulaştığı cebirsel sonuç*

Odak gruptan başka modeldeki toplam sayma pulu ve dikdörtgen modelin enini ve boyunu oluşturan sayma pulları arasındaki ilişkileri çözümleyebilen bir grup olmadığı için grup çözümü tahtada paylaşmıştır. İlk etkinlik olması dolayısıyla araştırmacı etkinlikteki anahtar noktaları ortaya çıkarmak için gruplara "Neden pullar dikdörtgen hale getirilmeye çalışıldı?", "Neden cevap için pul sayısı ikiye bölündü?", sorularını sormuştur. Gruplardan "Sayma pullarını kolay saymak için." ve "Aynı sayıda oldukları için, cevabın iki katı olduğu için vb." gibi cevapları alıp etkinlikle ilgili birkaç örnek çözerek etkinliği sonlandırmıştır.

3.1.2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci

Problem 1-a dağıtıldığında gruplardaki bir öğrenci problemi sesli olarak okumuş, diğerleri dinlemiştir. Gruplar problem 1-a'yı çözmek için yapılması gereken işlemleri matematiksel olarak ifade etmiş ve düzenlemiştir (Şekil 3.1). Gruptaki öğrenciler burada problem 1-a için duruma özgü bir cevap bulmaya çalışmışlar yani yatay matematikleştirme sürecine başlayıp, yatay matematikleştirme sürecinin ilk ürünü olan cevabı bulmuşlardır.

Öğrenciler problem 1-b'yi okuduklarında birden 365'e kadar olan ardışık tam sayıların toplamını bulmaları gerektiğini anlamışlar ve bunun çok zaman alacağını ve kolay olmayacağını düşünmüşlerdir.

İlk defa bu şekilde bir etkinlik yapan gruplara problem 1-b için genel bir çözüm üretmek üzere, somut materyaller olan sayma pulları verilmiş ve bu sayma pullarıyla problemin daha küçük adımlarına uygun olan bir model yapılması istenmiştir. Genel bir çözüme ulaşmak için somut materyalden daha önce hiç model oluşturmayan öğrenciler bu aşamada çok zorlanmışlardır. Gruplar tarafından sayma pullarıyla oluşturulan ilk modeller istenen modeller olmamıştır (Şekil 3.2).

Odak gruptaki öğrenciler araştırmacının rehberliğiyle elindeki diğer renkli sayma pullarını, oluşturdukları üçgen modeli dikdörtgen modele tamamlamak için kullanacaklarını fark etmiştir. Ayrıca grup, oluşturdukları dikdörtgen modelin kenar uzunluklarını problemin adımlarındaki gün sayılarıyla ilişkilendirebilmiştir. Benzer olarak problemin çeşitli adımlarındaki gün sayılarına uygun olan modelleri oluşturan grup, oluşturdukları dikdörtgen modellerin kısa kenarındaki sayma pulu sayısının toplanması gereken son sayı, uzun kenarındaki sayma pulu sayısının ise toplanması gereken son sayının bir fazlası olduğunu keşfetmiştir. Eşit sayıdaki iki farklı renk sayma pulu grubuyla oluşturdukları dikdörtgen modelde, o adımdaki problemin çözümünün iki katı olan toplam sayma pulu sayısının, uzun ve kısa kenarı oluşturan sayma pullarının çarpımı olduğunu fark eden grup, problemin çözümü için modeldeki dikdörtgenin uzun ve kısa kenarını oluşturan sayma pulu sayısını çarparak ikiye bölmeyi başarabilmiştir. Böylece odak grup, yatay matematikleştirme sürecinden dikey matematikleştirme sürecine geçiş aracı olacak ‘model of’u oluşturarak, problem için beklenen sözsüz ispatı yapmıştır. Problemin küçük adımlarındaki farklı gün sayıları için geliştirdikleri argümanı kullanıp sonuçları kontrol eden grup, Ahmet’in kazanacağı paranın, son çalıştığı gün sayısı ile son çalıştığı gün sayısının bir fazlasının çarpımının yarısı olduğunu keşfetmiştir. Grubun problemin genel bir çözüme yönelik yaptığı bu çalışmalar dikey matematikleştirme sürecine yönelik olarak değerlendirilebilir. Grup, daha sonra gün sayısı belli olmayan durumlar için son çalıştığı gün sayısına n, oluşturacakları dikdörtgenin kısa kenarının n, uzun kenarının da n+1 demek üzere, alınacak toplam ücretin n.(n+1)/2 olduğunu ifade etmiştir. Böylelikle dikey matematikleştirme sürecinde problemin matematiksel formülünü kurup, birden n’ye kadar olan tam sayılarının toplamının, 1+2+3+…+n=n.(n+1)/2 olduğunu görmüştür. Bu şekilde grup, matematiksel ifadelerin soyutlaşarak matematik dilinde anlatımının ve bu yeni matematiksel bilginin daha önce sahip olunan matematiksel bilgi içerisine yerleştirildiği dikey matematikselleştirme yapmış ve problem 1-b için ‘model for’u oluşturmuştur.

3.1.3. İç içelik prensibi:

Bu etkinliklerdeki problem durumları ve daha genel çözüme ulaşılması için yapılacak modeller ile bir argümana ulaşma durumu matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlamaktadır.

Bu etkinlikteki problem durumunda, öğrencilerin problem 1-a'da gerçek hayattan sembole ve aritmetiğe geçmeleri gerekmiştir. Bu bağlamda öğrenciler problem 1-a'nın çözümüne ulaşmak için problem cümlelerini matematiksel cümlelere ve aritmetiksel işlemlere çevirmişler ve problem 1-a için bir çözüme ulaşmışlardır (Şekil 3.1).

Problem 1-b'de ise öğrenciler, aritmetiksel yöntemle çözümün zor olduğunu ve uzun süreceğini araştırmacıya belirtmişlerdir. Öğrenciler birden 365'e kadar olan sayıların toplamını bulmak için genel bir kural aramak durumunda kalmışlardır. Bunun için araştırmacının rehberliğiyle birden beşe kadar olan çözümü bulup, daha önce verilen somut materyallerle bu durum için bir model oluşturmaya çalışmışlardır. Böylece oluşturdukları modelin doğruluğunu daha rahat kontrol etmişlerdir. Problem için verilen somut materyallerle yapılması gereken model için öğrenciler aritmetikten geometriye geçiş yapmışlardır. Problem durumundaki sayıları sayma pullarıyla göstermeye çalıştıklarında oluşan geometrik nesne bir üçgendir.

Odak gruptaki öğrenciler problem durumu için sayma pullarıyla inşa ettikleri üçgen modelini sayma pullarını kolay sayabilmek adına önce dik üçgen haline getirip, sonra bunu dikdörtgene tamamlamışlardır. Öğrenciler daha önce bahsedilen araştırmacının rehberliğiyle inşa ettikleri dikdörtgen modelin kısa kenarındaki sayma pulu sayısının toplanması gereken son sayı, uzun kenarındaki sayma pulu sayısının ise toplanması gereken son sayının bir fazlası olduğunu fark etmişlerdir. Öğrenciler genel bir kurala ulaşmak istedikleri için gün sayısını belirli bir gün yerine "n" alıp bu kuralı birden n'ye kadar yapma durumunda kalmışlar burada da öğrenciler aritmetikten cebire geçmişlerdir (Şekil 3.7).

Öğrenciler bu ilişkileri inceleme sürecinde sık sık aritmetikten geometriye, geometriden de aritmetiğe ve cebire geçiş yapmışlardır. Geliştirdikleri argümanın doğruluğunu kontrol etmek için problemin küçük adımlarının çözümlerini bulmuşlar, bu adımlar için sayma pullarıyla dikdörtgen modeller oluşturmuşlar ve bunları karşılaştırarak aritmetik ve geometri arasında geçişler yapmışlardır. Ayrıca cebirsel olarak ulaştıkları 1+2+3+…+n=n.(n+1)/2 formülünü yine problemin küçük adımları için kullanarak doğruluğunu test etmişlerdir. Genel kurala ulaştıklarını düşündüklerinde ise aritmetik, geometri ve cebir arasındaki geçişleri çok daha iyi fark edebilmişlerdir.

3.1.4. Kademeli tertip etme süreci

Öğrenciler bir problemden somut materyaller yardımıyla genel bir kurala ulaşma, ulaştığı sonucu kontrol etme gibi durumlarla daha önce karşılaşmamıştır. Dolayısıyla öğrenciler bu ilk etkinlikte istenilen kadar aktif olmamışlardır. Özellikle odak grubun kamera karşısında böyle bir durumla ilk kez karşılaştıkları için çok utanıp sıkıldıkları görülmüştür. Araştırmacının sık sık uyarılarına rağmen kendi aralarındaki tartışmaları bile fısıldayarak yaptıkları görülmüştür. Tüm bunlar göz önünde tutularak etkinlik boyunca aşağıdaki durumlar incelenmiştir.

İlk etkinlik olması açısından öğrenciler bu etkinlikte istenildiği kadar aktif olamamışlardır. Bir grup hariç genel kurala ulaşan bir grup olmamıştır. O grup da araştırmacının rehberliğiyle genel kuralı cebirsel olarak ifade etmeyi başarabilmiştir.

Tüm gruplar oluşturdukları modeldeki sayma pullarını kolay sayma adına modeli dikdörtgene tamamlayacaklarını fark etmişlerdir.

Öğrenciler problem 1-a'yı okuduklarında bir çözüm bulmuşlar ama problem1-b'yi çözmenin çok kolay olmayacağını ve çok uzun süreceğini düşünmüşlerdir. Araştırmacının rehberliğiyle uzun işlemleri yapmak yerine problemin küçük adımları için bir model oluşturabileceklerini ve buradan genel bir kural çıkarabileceklerini anlamışlardır. Bundan sonraki etkinliklerde buna benzer problem durumları için bu şekilde düşünecekleri beklenmektedir.

Bu etkinlikte öğrencilerin oluşturdukları modeldeki sayma pulları kolay yoldan sayabilmek için modeli dikdörtgen haline getirmeleri fark ettirilmiştir. Ayrıca oluşturdukları modelden genel bir kural çıkarmak adına bir önceki ve bir sonraki adımlardaki modeli oluşturup modeldeki toplam sayma pulu ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin analiz edilmesi gerektiği fark ettirilmeye çalışılmıştır.

Grupların karar defterlerine bakıldığında öğrencilerin problemin çözümü için problem 1-a için ardışık toplamları art alta yaptıkları görülmüştür.

Model oluşturup genel kuralı bulan grup ve grubun ulaştığı sonuçları paylaştığı diğer öğrenciler birden n'ye kadar olan sayıların toplamının neden n.(n+1)/2 olduğu anlamışlar ve formel ispata gerek olmadan grubun oluşturduğu model ve formül onları ikna etmiştir.

Etkinlik 1'deki öğrenci süreçleri Tablo 3.1'de özetlenmiştir.

Tablo 3.1. *Etkinlik 1'deki öğrenci süreçleri*

	Model of'tan model for'a geçiş	**İç içelik prensibi**	**Kademeli tertip süreci**
Odak grup	- Problem 1-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pulları ile model oluşturmuştur. - Model of'a ulaşmıştır.	- Problem 1-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmuştur.	- Eş sayıda iki renk sayma pulu verilmesinin mantığı anlamıştır. - Oluşturduğu modellerdeki ilişkileri analiz etme gereğinin farkına varmıştır. - Matematik dili kullanmaya başlamıştır.
Grup 2	- Problem 1-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pulları ile model oluşturmuştur. - Model of'a ulaşmıştır.	- Problem 1-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetikten geometriye geçiş yapmıştır. - Oluşturduğu modeli çözümleyememiştir.	- Dikdörtgen model oluşturmanın nedenini anlamıştır. - Oluşturduğu modellerdeki ilişkileri analiz etme gereğinin farkına varmıştır. - Etkinliğin amacının genel bir çözüm bulmak olduğunu anlamıştır.
Grup 3	- Problem 1-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla modeller oluşturmaya çalışmıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 1-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye geçiş yapmıştır.	- Dikdörtgen model oluşturmanın nedenini anlamıştır. - Oluşturduğu modellerdeki ilişkileri analiz etme gereğinin farkına varmıştır.
Grup 4	- Problem 1-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla modeller oluşturmaya çalışmıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 1-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye geçiş yapmıştır.	- Dikdörtgen model oluşturmanın nedenini anlamıştır. - Oluşturduğu modellerdeki ilişkileri analiz etme gereğinin farkına varmıştır.
Grup5	- Problem 1-a için bir çözüm bulmuştur. - Problem 1-a'dan bağımsız modeller	- Problem 1-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Problemden bağımsız bir modeller oluşturduğu için	- Dikdörtgen model oluşturmanın nedenini anlamıştır. - Problemden bağımsız bir

	oluşturmaya çalışmıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	aritmetik, geometri ve cebir arasında geçiş yapamamıştır.	model yaptığı için daha fazla ilerleyememiştir
Grup 6	- Problem 1-a için bir çözüme ulaşamamıştır. - Problem 1-a'dan bağımsız modeller oluşturmaya çalışmıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 1-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Problemden bağımsız bir modeller oluşturduğu için aritmetik, geometri ve cebir arasında geçiş yapamamıştır.	- Dikdörtgen model oluşturmanın nedenini anlamıştır. - Problemden bağımsız bir model yaptığı için daha fazla ilerleyememiştir.

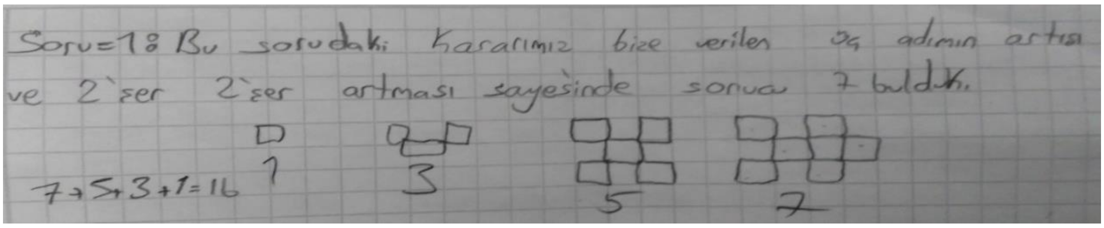
3.2. İkinci Etkinlikle İlgili (Örüntü Problemi) Bulgular

3.2.1. Rehberlik prensibi

Etkinlikte bazı gruplar ve öğrenciler problemin cebirsel kısmında, özellikle en son adım dâhil olmak üzere o adıma kadar oluşan toplam kare sayısı (n. adım dâhil olmak üzere n. adıma kadar oluşan toplam kare sayısı n^2) ile en son adımda oluşan kare sayısını (n. adımda oluşan kare sayısı 2n-1) karıştırmışlar ve bununla ilgili rehberliğe ihtiyaç duymuşlardır. Bu etkinlik öncesinde tahmin edilen bir durumdur ve bu konuda problem 2-a'da ne sorulduğuna dikkat edilmesi istenerek, problem 2-b'de ise problem 2-a'daki buldukları sonucun son adımdaki kare sayısı olmadığı fark ettirilerek rehberlik yapılmıştır. Modelleme kısmında yapılan rehberlik ise önceki haftaki etkinliklerde yapılanları hatırlatmak olmuştur.

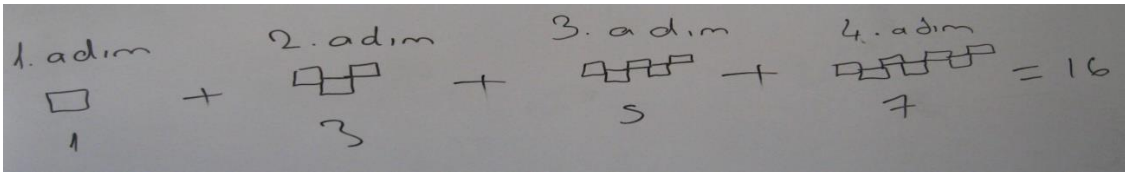
3.2.1.1. Araştırmacının problem 2-a için yaptığı rehberlik

Tüm gruplar problem 2-a'daki çözümü doğru olarak bulmuştur. Yalnız altıncı grup dördüncü adıma kadar (dördüncü adım dâhil) oluşan toplam kare sayısını değil, dördüncü adımda oluşan kare sayısını bulmuştur. O grup da, araştırmacının, "Problem 2-a'da ne sorulduğuna dikkat edin." önerisiyle doğru cevabı bulmuştur. Odak grup problem 2-a'yı 148 saniyede çözmüştür (Şekil 3.10). Ayrıca bu grup, her adımda oluşan kare sayısını da problem 2-a'yı çözerken 2n-1 olarak bulmuştur. Bu kuralı bulduktan sonra "Şimdi hangi adım çıkarsa çıksın yapabiliriz." demişlerdir. Burada dikkat çekici bir başka durum, beşinci grubun örüntüyü doğru şekilde ilerletememesidir (Şekil 3.8).



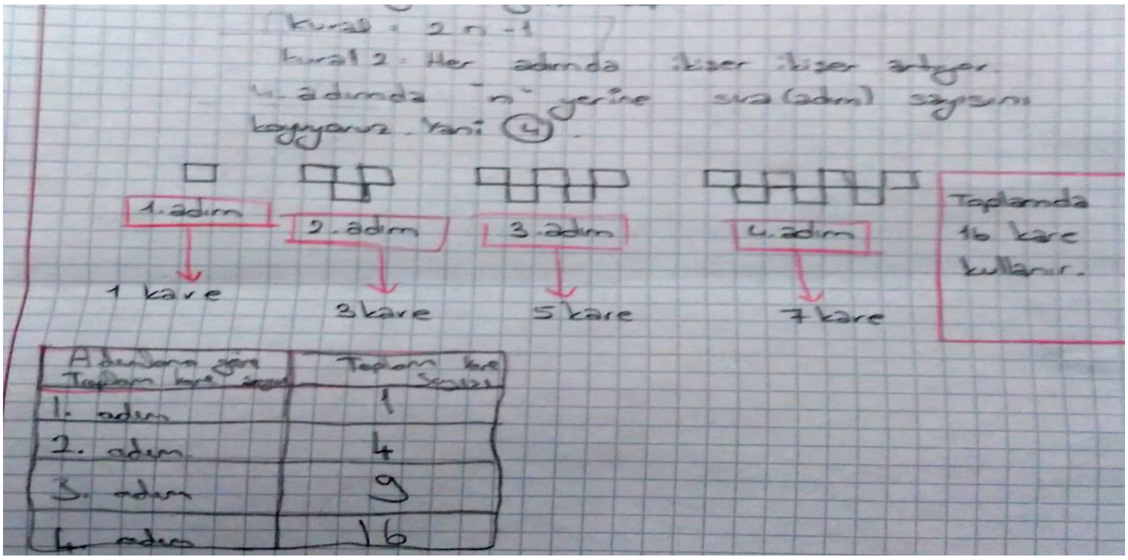
Şekil 3.8. *Yanlış devam ettirilen örüntü (Beşinci grup)*

Tüm gruplar doğru cevaba ulaşınca yapınca problemin çözümü ikinci grubun sözcüsüne tahtada yaptırılmıştır (Şekil 3.9).



Şekil 3.9. *Tahtada yapılan çözüm (İkinci grup)*

Beşinci grup tahtadaki çözümü görünce, araştırmacıya: “Biz de doğru çözdük ama şeklimiz yanlış olmuş” demiştir.



Şekil 3.10. *Odak grubun problem 2-a için çözümü*

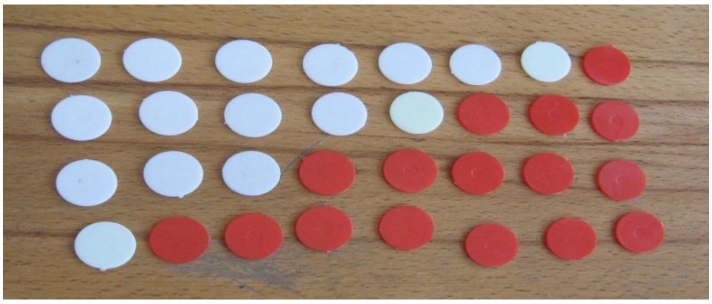
3.2.1.2. Araştırmacının problem 2-b için yaptığı rehberlik

Problem 2-b'de 50. adıma kadar Ali'nin oluşturduğu toplam kare sayısı sorulmaktadır. Dördüncü grup beşinci adıma kadar oluşan kare sayısını hesaplayıp 10 ile çarparak 50. adımda oluşan toplam kare sayısını bulabileceğini düşünmüştür. Araştırmacı bu gruba "Önce ikinci adıma kadar toplam kaç kare oluşmuştur bunu bulmaya çalışın. Daha sonra dördüncü adıma kadar toplam kaç kare oluşmuş bunu hatırlayın. Sizin düşündüğünüz gibi düşünürsek; dört, ikinin iki katı olduğuna göre, dördüncü adımda oluşan toplam kare sayısını bulmak için ikinci adımda oluşan toplam kare sayısını iki ile çarparsak doğru oluyor mu bir kontrol edin bakalım." şeklinde bir rehberlik yaparak, grubun bu çoklukların doğru orantılı olmadığını fark etmesini sağlamıştır. Odak grup da dördüncü grupla benzer olarak problemi ilk okuduklarında cevabı orantıyla bulabileceklerini düşünmüştür. Araştırmacı diğer gruba rehberlik yaptığı gibi bu gruba da: "Düşündüğünüz yolu küçük adımlar için uygulayın bakalım olacak mı?" sorusunu sormuştur. Bu grup da hesaplamaları sonucunda bu çoklukların doğru orantılı olmadığını görmüştür.

İkinci gruptaki bir öğrenci problem 2-b'yi okuduğunda "Hocam, bunların teker teker adımlarını yazmak çok zor olur, bunun bir kolay yolu olması lazım." demiştir. Araştırmacı "Var mı yok mu onu siz bulacaksınız." demiştir.

Problem 2-b gruplara dağıtıldıktan sonra öğrencilere sayma pulları da dağıtılmıştır. Geçen hafta sayma pullarını neden kullandıkları sorulmuştur. Bu hafta da sayma pullarını aynı amaç için kullanabilirsiniz denmiştir. Araştırmacı gruplara dördüncü adıma kadar oluşan kare sayısı olan 16 adet sayma pulu vermiştir. İstemeleri halinde istedikleri kadar sayma pulu verebileceğini söylemiştir.

Odak grup sayma pullarının verdikten sonra pulları etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi aşağıdaki şekilde dizmiş, sonra araştırmacıdan 16 adet sayma pulu daha istemiş ve bunu dikdörtgene tamamlamıştır (Şekil 3.11). Bu arada araştırmacı bu gruba, önceki hafta aralarında olmayan iki arkadaşına da ne yaptıklarını anlatmalarını istemiştir.



Şekil 3.11. *Odak grubun oluşturduğu ilk model*

Emir: Şimdi burada sekiz tane var. Burasının iki katı… Burası n, burası 2n… Burada iki tane beşinci adım var değil mi?

Ahmet: İki tane ne?

Emir: İki tane beşinci adımın toplamı var.

Ahmet: Evet.

Emir: Şimdi bunları çarpıp ikiye bölersek bir tanesini bulmuş oluyoruz.

Ahmet: Dördüncü adım değil mi?

Emir: Hıı, evet pardon dördüncü adım.

Gruptaki arkadaşları önceki hafta gelmeyen arkadaşlarına ne yaptıklarını yukarıdaki gibi anlatmıştır. Gruptakiler hep birlikte n.(2n)/2 formülüne çok zorlanmadan ulaşmışlardır. Ulaştıkları formülü daha küçük adımlar için denemişler ve formüllerinin doğru olduğunu görmüşlerdir. Problem 2-b'nin cevabı için, 50. adıma kadar toplam 50.(2.50)/2=2500 tane kare oluşturur cevabını vermişlerdir. Bu grup 14 dakika 10 saniyede modele ulaşıp problem için doğru cevabı vermiştir.

Etkinlik öncesinde bazı grupların sayma pullarını dikdörtgene tamamlayarak bir cevaba ulaşılabileceği tahmin edilmiştir. Diğer grupların da odak grubun kullandığına benzer bir yöntem kullanıp bir sonuca ulaşmaları için araştırmacı gruplara içeriği aşağıdaki gibi öneriler yapmıştır:

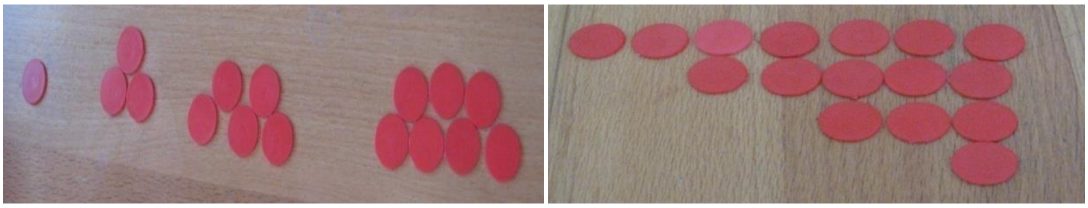
A: Geçen haftadaki etkinliği hatırlıyor musunuz, o etkinlikte ne yapmıştık?

Melek: Geçen hafta da bir problem vardı. Genel bir kural oluşturmak için sayma pullarını kullandık.

A: Peki sayma pullarını nasıl kullandınız?

Hilal: Dik üçgen oluşturup, dikdörtgene tamamlamıştık.

Altıncı grup hiç dikdörtgen oluşturamamıştır. Sayma pullarını kolay sayılabilecek bir hale getirememiştir (Şekil 3.12).



Şekil 3.12. *Altıncı grubun oluşturduğu bazı modeller*

İstenilen bir model oluşturamayan dördüncü grup etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi adımları teker teker hesaplayıp bunları alt alta toplamaya çalışmıştır.

İkinci, dördüncü ve beşinci grup beklenilen şekilde dikdörtgenleri oluşturmuştur yine de kenar uzunlukları arasındaki ilişki üç grup tarafından da fark edilememiştir. Bu gruplara araştırmacı tarafından "önceki ya da sonraki adımları modellemeye çalışın, belki aralarında bir ilişki bulabilirsiniz" diye bir rehberlik yapınca, ikinci grup dikdörtgen modelini oluştururken kırmızı renkli sayma pullarını birinci adıma göre alırken sayma pullarını ikinci adıma göre başlatmış, modeli oluştururken sayma pullarına dikkat etmemiştir (Şekil 3.13). Grup ile araştırmacı arasında aşağıdaki gibi bir diyalog gerçekleşmiştir:

Şekil 3.13. *Eşit sayıda alınmamış sayma pulları (İkinci grup)*

A: Sizce dikdörtgeni oluştururken neden eşit sayıda iki renk alıyoruz?

Melek: Dikdörtgen oluşturmak için…

A: Tek renkle oluşturamayız mı dikdörtgeni?

Melek: Oluştururuz.

A: Neden farklı iki renk alıyoruz? Peki, neden dikdörtgen oluşturuyoruz?

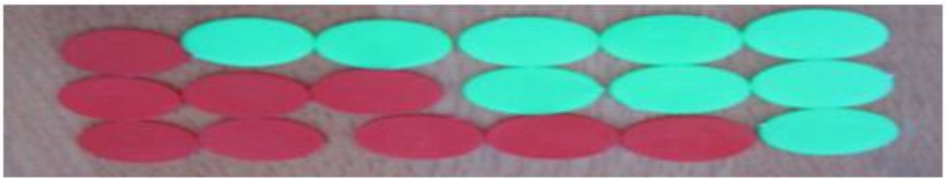
Hilal: Sayma pullarının sayısını kolay yoldan bulmak için…

A: Eşit sayıda iki renk olması neyi sağlar peki?

Melek: İkiye bölünce bir rengin sayısını buluruz.

A: Siz neden buna dikkat etmediniz?

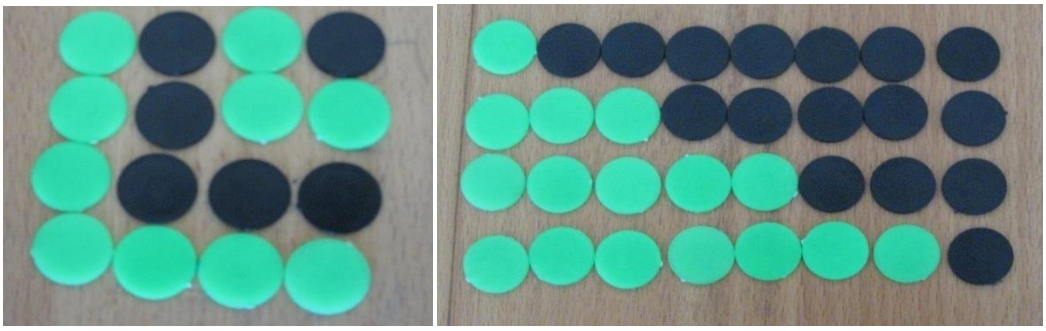
Melek: O zaman şunlar fazla…diyerek aşağıdaki model oluşturulmuştur (Şekil 3.14).



Şekil 3.14. *Eşit sayıda alınmış sayma pulları (İkinci grup)*

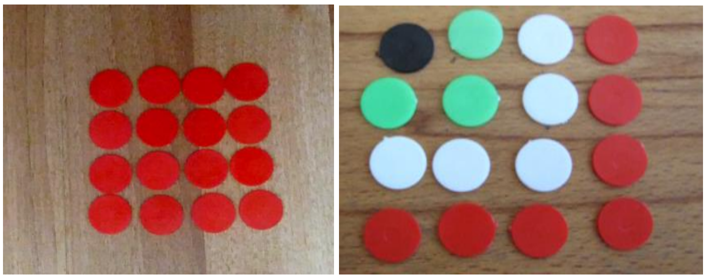
Üçüncü ve dördüncü adımdaki doğru modelleri oluşturan ikinci grup da bu modellerin kenar uzunluklarını inceleyerek n. adımda toplam oluşan kare sayısının n.(2n)/2 olduğunu görüp 50 adımda oluşan toplam kare sayısı için 50.(2.50)/2=2500 cevabını vermiştir.

Üçüncü grup sayma pullarıyla bir model oluşturmayı başaramamıştır ama önceki ve sonraki adımlarda oluşan toplam sayma pullarının sayısını bularak n. adımda n^2 tane sayma pulu vardır diyerek model yapmadan genel bir kurala ulaşmayı başarmıştır. Bu durum etkinlik öncesinde tahmin edilen bir durumdur. Bu gruba, araştırmacı tarafından “Acaba bundan nasıl emin olabilirsiniz, sayma pulları emin olmamız için yardımcı olabilir mi?” şeklinde bir rehberlik yapılarak, grup sayma pullarıyla model oluşturması için yönlendirilmiştir. Bu grup belli süre sonra aşağıdaki gibi bir model oluşturmuş ve genel kurala bu şekilde de ulaşmıştır (Şekil 3.15). Grup modeldeki kenar uzunlukları ve toplam sayma pulu sayısı arasındaki ilişkileri de açıklamıştır. Bu modeli oluşturduktan sonra grubun kendilerine olan güveninin arttığı görülmüştür. Grubun kendilerine olan güveni geldikten sonra geçen haftaki etkinlikler hatırlatılıp, önceki haftadakine benzer bir model oluşturmaları istenince o modeli de oluşturabilmişlerdir (Şekil 3.15).



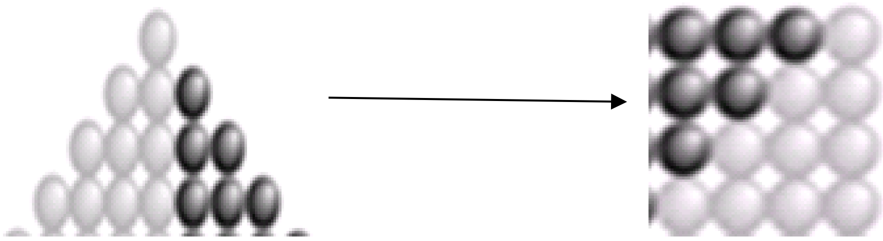
Şekil 3.15. *Üçüncü grubun ulaştığı modeller*

Odak gruba Şekil 3.15’teki oluşturamadıkları modele ulaşmaları için aynı kurala ulaşabilecekleri başka bir model yapabilecekler mi diye sorulmuştur. Kayıttan anlaşıldığı üzere grubun Şekil 3.16’daki şekle ulaştığı görülmüştür. Bu modele nasıl ulaştıkları sorulunca “Formülden…” diye cevap vermişlerdir. Daha önce yaptıkları modelden n.(2n)/2 formülüne ulaşan grubun ikileri sadeleştirerek $n.n=n^2$ formülünden şeklin bir kare olduğunu fark ettikleri görülmüştür. Araştırmacının “Yaptığınız modelde adımlardaki kare sayıları da gizli, onları bulabilecek misiniz?” şeklinde bir rehberlik yapılınca grup her adımda oluşan kare sayılarını da bulmuş ve Şekil. 3.16’daki diğer modeli oluşturmuşlardır.



Şekil 3.16. *Odak grubun ulaştığı diğer modeller*

Odak grup bu modele de ulaştığında etkinliğin bitmesi için biraz daha süre olduğundan ve diğer gruplar etkinliği daha tamamlamadığından bu gruba modeli kare hale getirmenin özel bir yöntemi daha olduğu belirtilmiştir. Çünkü grup modeli formülden oluşturmuştur. Aşağıdaki gibi (Şekil 3.17) bir modele ulaşmaları için önce 16 tane kırmızı sayma pulu verilmiştir. İstenen model oluşturulamayınca grubun işini biraz daha kolaylaştırmak için 16 kırmızı sayma pulu yerine 10 kırmızı altı beyaz sayma pulu verilmiştir. Ama grup Şekil 3.17'deki modeli oluşturmayı başaramamıştır.



Şekil 3.17. *Ulaşılması istenen bir başka model*

Etkinlik süresi bittiğinde ardışık tek sayıların toplamının genel kuralı yazılamamıştır. Dolayısıyla etkinlikte zaman sorunu yaşandığı söylenebilir. Odak grup ile ders zilinden sonra istedikleri için hem yapamadıkları yöntem açıklanmış hem de grupla birlikte problemde ulaşılması gereken ana sonucun matematiksel formülü kurulmuştur. Buna göre ardışık tek sayıların toplamı için $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$ genel kuralına ulaşılmıştır.

3.2.2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci

Gruplarda bir kişi problemi sesli olarak okumuş, diğerleri dinlemiş ve grup olarak problemdeki şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne (1-3-5) çevirmişlerdir. Sayı örüntüsünün ikişer ikişer attığını fark ederek şekil örüntüsünü bir adım daha çizmişler ve oluşan tüm kareleri sayarak dördüncü adıma kadar oluşan tüm kare sayılarını bulmuşlardır. Gruplar bu aşamada şekil örüntüsünün dördüncü adımını yapmışlar, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirmişler (1-3-5-7) ve dördüncü adıma kadar kullanılan kare sayısını bulmuşlardır. Gruplar bu aşamada yatay matematikleştirme sürecinde etkinlikler yapmışlar ve bu sürecin bir ürünü olarak dördüncü adıma kadar oluşan tüm karelerin toplamını bulmuşlardır (Şekil 3.8, Şekil 3.9, Şekil 3.10).

Gruplar problem 2-b'yi okuduklarında "Hocam, bunların teker teker adımlarını yazmak çok zor olur, bunun bir kolay yolu olması lazım." ve "Bu bizim geçen seferki olay…" şeklinde tepkiler vermişlerdir. Buradan öğrencilerin genel bir çözüm için hazırlandıkları anlaşılmaktadır. Tüm bunlara rağmen beşinci ve altıncı grup etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi adımları teker teker hesaplamayarak problemin çözümünü bulmaya çalışmıştır.

Genel bir kural bulunması için sayma pullarını dağıtan araştırmacı “Önceki hafta yaptıklarınızı da hatırlayın isterseniz.” diye bir öneride bulunmuştur. Dört grup etkinlik öncesi analizde tahmin edildiği sayma pullarıyla önce dik üçgen, daha sonra eşit sayıda sayma pulu alıp bir dikdörtgen oluşturmuşlardır. Ancak dördüncü grup oluşturduğu modeli çözümlemeyi başaramamıştır.

Odak grup yatay matematikleştirme sürecinin son ürünü sayılabilecek problemin ‘model of’u olan oluşturdukları dikdörtgende toplam sayma pulu ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi kolaylıkla fark etmişler ve herhangi bir adım için kullanılacak toplam sayma pulu sayısını n adım sayısı olmak üzere 2n-1 olarak ifade etmişlerdir. Bu sırada aralarında aşağıdaki gibi etkileşimler gerçekleşmiştir:

> Mehmet: O zaman 50. adım 50.100.
>
> Ahmet: 100.50 =500, 500/2= 250.
>
> Mehmet: 5000/2=2500, 2500 kare kullanılacak 50. adımda. Sadece 50. adımda 2500 ise kalanların toplamı nedir?
>
> Emir:50. adımda…
>
> Mehmet: 50. adımda 2500 kullanılıyormuş.
>
> Ahmet: Toplam 2500.
>
> Emir: Evet, toplam 2500. Mesela 50. adımda 99 oluyor.
>
> Mehmet: Evet, toplam 2500’müş.
>
> Emir: 50. adım 99. 50’yi koyarsak…
>
> Emir: (Başını sallayıp onaylayarak)…Oley be, işlemi seviyorum.

Değişken kullanımın başladığı bu aşamada grubun dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinlikler yapmaya başladığı söylenebilir. Grup oluşturdukları dikdörtgenin kenarlarını oluşturan sayma pulları arasındaki ilişkiyi çözümledikten sonra bu problem için genel çözüm sayılabilecek, n adım sayısı olmak üzere n. adıma kadar oluşan toplam kare sayısının matematiksel formülünü n.(2n)/2 olarak kurmuştur. Böylelikle grup dikey matematikleştirme sürecinin bir ürünü olan problemin matematiksel formülünü kurup, bunu çeşitli küçük adımlarda deneyip, oluşturdukları dikdörtgen modelin problemin diğer adımlarında da aynı düşünüş tarzıyla geçerli olacağına ikna olarak problem için bir ‘model for’ oluşturmuşlardır.

Üçüncü grup sayma pullarıyla istenen modeli ortaya çıkaramamıştır ancak sayısal ilişkileri inceleyerek 50. adıma kadar toplam 50^2=2500 tane kare kullanılacağını bulmuştur. Bunu cebirsel olarak ifade edemeseler de problemin genel çözümü için "herhangi bir adımda kendisiyle çarpımı kadar" şeklinde ifade kullanmışlar formel olarak olmasa bile dikey matematik süreci içerisinde değerlendirilebilecek bir sonuca varmışlardır. Daha sonra araştırmacının gruptan ulaştıkları sonucu sayma pullarıyla model yaparak desteklemeleri ve kendisini ikna etmelerini istediğinde grup problem için vardıkları sonucu sayma pullarıyla oluşturdukları model ile de gösterebilmişlerdir.

İkinci grup genel bir kurala ulaşmak için dikdörtgen oluşturabilmiştir ancak dikdörtgenin kenar uzunluklarını oluşturan sayma pulları ve problem arasındaki ilişkileri görmekte zorlanmıştır. Bu ilişkiyi göremedikleri için dikey matematikleştirme sürecine çeşitli adımlardaki modelleri oluşturabildikten sonra geçebilmişler ve etkinliğin sonuna doğru modeldeki toplam sayma pulu ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi fark edebilmişlerdir.

3.2.3. İç içelik prensibi

Bu etkinliklerdeki problem durumları ve daha genel çözüme ulaşılması için yapılacak modeller ile bir argümana ulaşma durumu matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlamaktadır.

Bu etkinlikte öğrenciler problemi okuduklarında verilen şekil örüntüsünü önce sayı örüntüsüne çevirmiştir. Sayı örüntüsünde, sayların ikişer ikişer arttığını görüp sonra tekrar şekil örüntüsünde dördüncü adımı çizmişlerdir. Dördüncü adımda oluşan kare sayısını diğer adımlardaki kare sayısı ile toplayıp problem 2-a için doğru cevabı bulmuşlardır. Gruplar burada problem durumundan şekil örüntüsüne geçmiş, şekil örüntüsünden de sayı örüntüsüne geçmişlerdir. Bu aşamada grupların geometri ve aritmetik arasında bir ilişki kurduğundan bahsedilebilir.

Odak grup ve ikinci grup problem 2-b'yi okuyup sayma pulları dağıtıldığında sayma pullarıyla problemdeki şekil örüntüsüne uygun olacak şekilde dik üçgen yapmış, daha sonra bu dik üçgeni sonradan verilen diğer eş sayma pulları grubuyla dikdörtgene tamamlamıştır. Tamamladıkları dikdörtgenin kısa ve uzun kenarları ile dikdörtgeni oluştururken kullandıkları sayma pulları arasındaki ilişkiyi incelerken, kısa kenarın adım sayısı, uzun kenarın adım sayısının iki katı olduğunu söylemişler ve bunu cebirsel olarak kısa kenar:n, uzun kenar:2n, toplam sayma pulu: n.2n, oluşan toplam kare sayısını da n.(2n)/2 olarak belirtmişlerdir. Bu aşamada grupların geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurduğu söylenebilir.

Üçüncü grubun ise model kullanmadan önce genel bir kurala ulaşarak "toplam kullanılacak kare sayısı adım sayısının kendisiyle çarpımıdır" diyerek aritmetik ve cebir arasında bir ilişki kurduğu söylenebilir. Grup daha sonra ulaştıkları sonuçtan yararlanarak sayma pullarıyla dörde dört bir kare oluşturmuş, oluşturduğu bu modelde ve dördüncü adımda oluşan toplam kare sayısını ve her adımdaki kare sayısını araştırmacıya göstererek ulaştıkları kuralı bu modelle desteklemişlerdir. Modeli araştırmacıya anlatırken dördüncü adımda oluşan toplam kare sayısının 4^2, n. adımda oluşan toplam kare sayısının n^2 olduğunu belirtmişler, bu şekilde geometri ile cebir arasında bir ilişki kurmuşlardır.

Araştırmacı ikinci grupla sayma pullarını dikdörtgene tamamlamak için neden iki renk kullandıklarını tartışırken grubun geometri ile aritmetik arasında ilişki kurmasını sağlamıştır. Bir önceki adıma ait oluşturdukları modelde eşit sayıda sayma pulu almayan bu grup araştırmacıyla yaptığı tartışma sonucunda "Sayma pullarını kolay saymak için dikdörtgen yapıp ikiye bölünce bir rengin sayısını buluyoruz." diye tepki vermiştir. Grubun bu aşamada geometri ile aritmetik arasında ilişki kurduğu söylenebilir.

3.2.4. Kademeli tertip etme süreci

Öğrenciler bir önceki etkinliğe göre daha aktiftir. Video kaydı alınan öğrenciler kamera karşısında daha rahatlamış gözükmektedir. Problemi çözerken cebirsel ifadeleri daha sık kullanmışlardır. Özellikle önceki hafta olmayan arkadaşlarına sayma pullarıyla ne yaptığını anlatırken cebirsel ifadeleri gayet iyi kullandıkları görülmüştür. Sonuca ulaşan diğer grupların da genel kuralı ifade ederken cebirsel bir dil kullanmaya başladıkları görülmüştür.

Bu etkinlikte önceki hafta oluşturdukları modeldeki sayma pullarını kısa yoldan saymak için dikdörtgene tamamlamayı fark eden odak ve ikinci grup problem 2-b'de yine sayma pullarını dikdörtgene tamamlamışlar ve oluşturdukları dikdörtgenin kenar uzunluklarının inceleyerek genel kurala ulaşmışlardır. Ayrıca bunu kontrol etmek için ulaştıkları formülü bir önceki ve sonraki adımlarda test etmişlerdir. Üçüncü gruptaki öğrenciler ise adımlarda oluşan toplam sayıları inceleyerek model oluşturmadan önce genel kurala ulaşabildikleri görülmüştür. Genel kurala ulaştıkları için modellerini ulaştıkları formülden oluşturabilmişlerdir. Dördüncü grup model oluşturabilmiş ancak modeli çözümleyememiş, bunun üzerine beşinci ve altıncı gruplar gibi problemin çözümü için adımlardaki sayıları teker teker hesaplamaya çalışmıştır.

Grupların karar defterlerine bakıldığında öğrencilerin problem 2-a için doğru çözümler yaptıkları görülmüştür. Önceki haftadaki matematiksel yazımlara göre özellikle problem 2-b için genel bir kural yazarken öğrencilerin cebirsel ifadeleri daha fazla kullandıkları görülmüştür.

Gruplar formel bir ispat yapmadan oluşturdukları modelle bir genel kurala ulaşmışlardır. Üçüncü grup ise adımlardaki sayılar arasındaki ilişkiyi inceleyerek bir genel kural oluşturmuşlar bu genel kuraldan yararlanarak bunu desteklemek için bir model oluşturabilmişlerdir. Bunlar öğrencilerin formel ispata başlamadan ispata adım adım başlamalarının göstergeleridir.

Etkinlik 2'deki öğrenci süreçleri Tablo 3.2'de özetlenmiştir.

Tablo 3.2. *Etkinlik 2'deki öğrenci süreçleri*

	Model of'tan model for'a geçiş	**İç içelik prensibi**	**Kademeli tertip süreci**
Odak grup	- Problem2-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pulları ile model oluşturmuştur. - Birden fazla Model of'a ulaşmıştır.	- Problem2-a'da aritmetiğe ve cebire geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmuştur.	- Daha aktiflerdir. - Cebirsel ifadeleri daha sık kullanmıştır. - Çıkarımlarını test etmişlerdir. - Kısa sürede problemin matematiksel formülünü kurmuştur.
Grup 2	- Problem 2-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pulları ile model oluşturmuştur. - Model of'a ulaşmıştır.	- Problem 2-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetikten geometriye geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve	- Genel bir çözüm uğraşındadır. - Genel çözüm için matematiksel dil kullanmaktadır.

		cebir arasında ilişki kurmuştur.	
Grup 3	- Problem 2-a için bir çözüm bulmuştur. - Önce model for'a ulaşmıştır. - Model for'dan iki farklı model of'u oluşturmuştur.	- Problem 2-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetikten cebire, cebirden geometriye geçiş yapmıştır.	- Sayısal ilişkilerden çıkarımlar yapmıştır. - Çıkarımlarını denemiş genel çözüme ulaşmıştır.. - Grubun güveninin arttığı görülmüştür.
Grup 4	- Problem 2-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla modeller oluşturmaya çalışmıştır. - Model of'a ulaşmıştır.	- Problem 2-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye geçiş yapmıştır. - Modeli çözümleyememiştir.	- Sayma pullarıyla modeli oluşturmuştur. - Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir.
Grup5	- Problem 2-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla yeterince çalışmamıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 2-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetik, geometri ve cebir arasında geçiş yapamamıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.
Grup 6	- Problem 2-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla yeterince çalışmamıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 2-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetik, geometri ve cebir arasında geçiş yapamamıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.

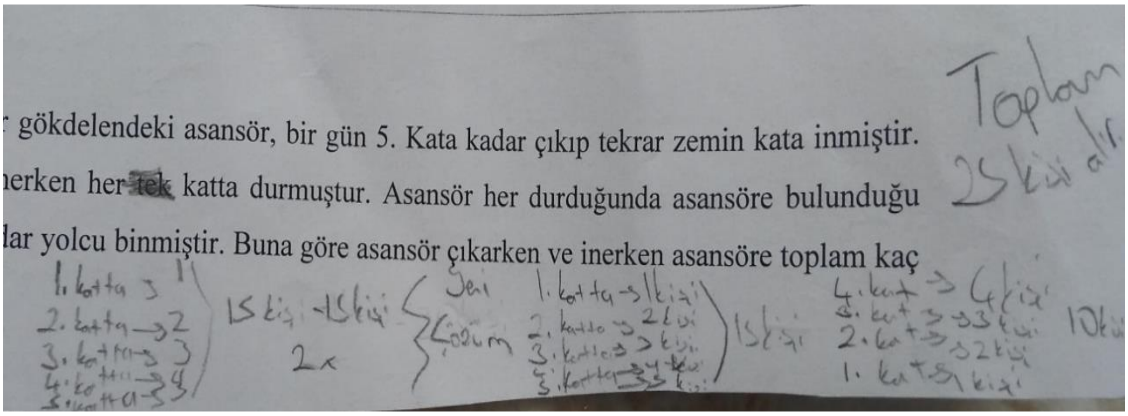
3.3. Üçüncü Etkinlikle İlgili (Asansör-1 Problemi) Bulgular

3.3.1. Rehberlik prensibi

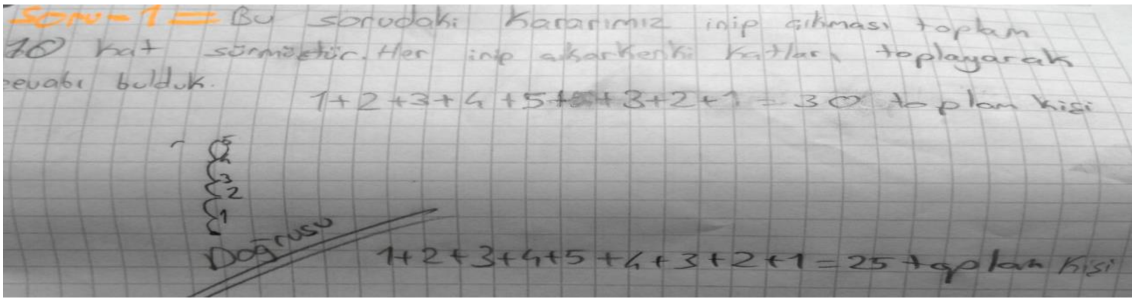
Etkinlikte tüm gruplar ve öğrenciler problemin asansörün en son çıktığı katta iki kez yolcu aldığını düşünmüşlerdir ve bununla ilgili rehberliğe ihtiyaç duymuşlardır. Bu etkinlik öncesinde tahmin edilen bir durumdur. Etkinlik sırasında yapılan rehberlikler aşağıda detaylandırılmıştır.

3.3.1.1. Araştırmacının problem 3-a için yaptığı rehberlik

Tüm gruplar problem 3-a'nın çözümüne ilk olarak 30 cevabını vermiştir. Üçüncü ve dördüncü grup çıkarken kaç kişi bindiğini hesaplayıp iki ile çarparak sonucu bulduğunu düşünmüştür. Grupların problem 3-a için yaptıkları çözümlerden bazıları aşağıdaki şekillerde verilmiştir (Şekil 3.18; Şekil 3.19). Tüm gruplara, çıkan ve inen asansörün aynı asansör olduğu bu asansörü iki farklı asansör gibi algılamamaları yani çıkan asansörün geri indiği açıklanmıştır. İlk açıklamadan sonra birinci, ikinci ve üçüncü gruplar bu durumu fark etmiştir. Fark edemeyen gruplara asansörün beşinci katta durduktan sonra kaçıncı katta durduğu sorulmuş buna ek olarak gerekirse problemin basit bir şeklini çizerek çözmeye çalışın diye önerilmiştir. Daha sonra diğer gruplar da beşinci katta bir defa yolcu bineceğini fark etmişler ve doğru çözüme ulaşmışlardır (Şekil 3.18).



Şekil 3.18. *Beşinci grubun problem 3-a için ilk çözümü*



Şekil 3.19. *Dördüncü grubun problem 3-a için çözümü*

Odak grubun problem 3-a’yı çözmesi yukarıdaki sebeplerden dolayı yaklaşık 12 dakika sürmüştür.

Araştırmacı her grubun problem 3-a için bir sonuca vardığını görünce beşinci grubun sözcüsüne problem 3-a’yı tahtada çözdürmüş ardından gruplara problem 3-b’yi dağıtmıştır.

3.3.1.2. Araştırmacının problem 3-b için yaptığı rehberlik

Problem 3-b'yi okuyan ikinci grup: "Hocam, bunu da geçen haftadaki gibi kolay bir yoldan yapacağız değil mi, bir kural bulmaya çalışacağız. O zaman bize sayma pulları verir misiniz?" deyince araştırmacı bu gruba problem 3-a'nın cevabı olan 25 tane sayma pulu vermiştir. Grup sözcüsü: "Başka renk vermeyecek misiniz?" deyince araştırmacı: "Bunlarla yapmaya çalışın, isterseniz verebilirim." demiştir.

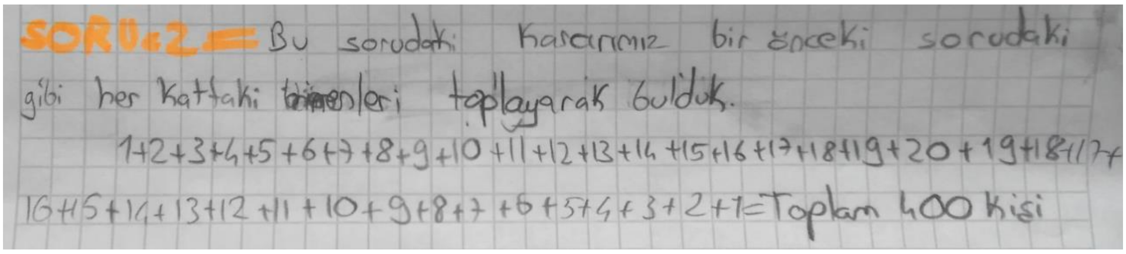
Odak grubun kayıt incelendiğinde problem 3-b'yi çözmek için orantı kullanma veya problem 3-a'nın çözümüne göre bir örüntü geliştirme arasında kalıp, orantıyla çözümü deneye karar vermişlerdir. Bu sırada aralarında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

> Mehmet: Ters orantıyla yapabilir miyiz bunu?
>
> Emir: Ters orantıyla yaparsak yanlış çıkabilir. Ters orantıyla yapamayız ki zaten bunu. Yaparsak doğru orantı yaparız. Yaparsak çok emin olabilir miyiz ki?
>
> Onur: 20. katta, 20. katta…
>
> Emir: Bence şeyi geliştirelim, birinci soruya göre bir örüntü geliştirelim. Sonra örüntüye göre bunu çok kolay yaparız bence.

Araştırmacının gruba "Çözüm hakkında ne düşünüyorsunuz?" sorusuna "Orantıyla…" cevabı gelince, araştırma "Bunun orantıyla çözülüp çözülemeyeceğini deneme imkânınız var mı?" önerisiyle grup onuncu kata çıksaydı kaç olurdu diye denemiş ve beşinci kat ile onuncu kat arasında orantı olmayacağını görmüştür.

Üçüncü ve dördüncü gruplarca da problem 3-b'nin çözümü için ilk düşünülen yine orantı kurmak yoluyla çözüme ulaşmaktır. Orantıyı kullanmaya çalışan gruplara bu çoklukların doğru orantılı olmadığının fark ettirilmesi için gruplara küçük adımlarda bu çoklukları karşılaştırmaları önerisinde bulunulmuştur.

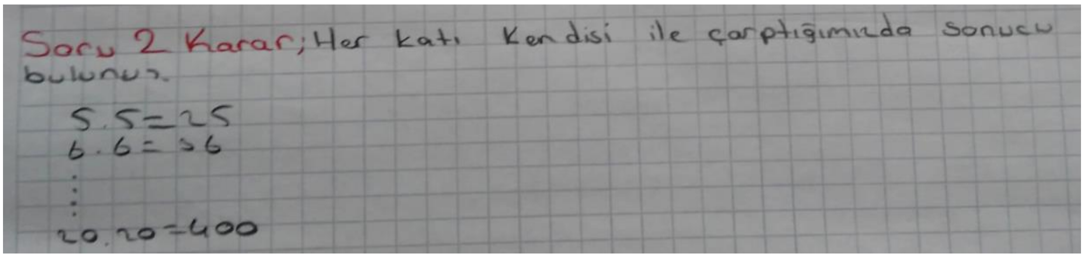
Orantıyı kullanarak sonuca ulaşamayacağını anlayan bu grupların geçen haftaki etkinlikleri hatırlayıp sayma pullarını isteyeceği etkinlik öncesinde tahmin edilmiştir. Ancak problem 3-b'yi okuduğunda ilk olarak sayma pulunu isteyen ikinci grup ve odak grup hariç diğer gruplar problemi katlarda binen kişileri teker teker hesaplayarak çözmeye çalışmışlardır (Şekil 3.20). Bu şekilde problem 3-b'yi çözebilen veya toplamalarda hata yaparak doğru cevaba ulaşamayan gruplar olmuştur.



Şekil 3.20. *Dördüncü grubun problem 3-b çözümü*

Bu şekilde çözüme ulaşan gruplara genel bir kural bulmaları istendiği için problem 50. adım için de sorulmuştur. Bu soru grubu genel bir kural bulmaya itmiş ve bunun için geçen haftaki yaptıklarını hatırlayarak araştırmacıdan sayma pulu istemişlerdir.

Adımlardaki sayıları teker teker toplayarak sonucu bulan üçüncü grup bulduğu sonuçları inceleyip asansöre binen toplam kişi sayısının en üstte çıkılan kat sayının karesi olduğunu fark edip, bunun için genel bir çözüme ulaşmıştır (Şekil 3.21). Bu durumun ortaya çıkma ihtimali etkinlik öncesinde tahmin edilmiştir. Dolayısıyla öğrencilere "Bunun doğru olduğundan emin misiniz, bu konuda beni nasıl ikna edersiniz?" diye bir soru yöneltilmiş öğrenciler buna rağmen sayma pullarını istememişlerdir. Araştırmacı bu noktada "Geçen hafta yaptıklarımızı hatırlıyor musunuz, neler yapmıştık?" deyince bu grup da sayma pullarını istemiştir.



Şekil 3.21. *Sayma pulları olmadan genel çözüme ulaşan grubun çözümü (Üçüncü grup)*

Beşinci ve altıncı gruplar ise ne uzak adımlardaki toplamları doğru yapmış ne de bir çözüm geliştirmek adına sayma pullarını istemiştir. Bu nedenlerle problem 3-b'nin çözümünü doğru yapamamışlardır. Bu gruplardan biri muhtemelen diğer gruplardan görerek araştırmacıdan sayma pulu istemiş, araştırmacı da sayma pullarını verirken

“Hadi bakalım, geçen hafta yaptıklarımızı da hatırlayın, bunları ona göre kullanmaya çalışın” şeklinde bir rehberlik yapmıştır.

Odak grup orantıyı kullanamayacağını anlayınca problem 3-b için bir çözüm geliştirememelerine rağmen alt alta bir toplama yapmaya çalışmamıştır. Bu etkinliğin amacı açısından olumlu bir durumdur. Ancak sayma pullarıyla problem 3-a’yı modelleyip buradan bir genel kural bulmaya da çalışamamışlardır. Bu grubun ilerleyemediğini gören araştırmacı onları sayma pullarını kullanarak problem 3-a’yı modelleyip bir genel kural bulmaları için rehberlik yapmıştır. Bu sırada odak grup ile araştırmacının aralarında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

A:Oluyor mu orantıyla?

Emir: Olmadı.

A: Ne yapalım, ne yapalım sizce, ne yapabiliriz?

Mehmet: n ile olmuyor mu?

A: n ile yapmak için neye ihtiyacınız var? Siz böyle mi gitmeyi düşünüyorsunuz?

Emir: Başka bir şey aklımıza gelmedi de bizim…

A:Geçen hafta ne yaptık?

Mehmet: Pullarla, adım adım…

Onur: Birin karşına bir gibi…

A: Böyle bir soru varsa, siz kural bulmaya çalışıyorsanız, size lazım olur mu onlar?

Onur: Olabilir.

A: Getireyim mi?

Onur: Fark etmez.

A: Fark etmez diyorsanız getirmeyeyim. Eğer bize yararı olur, belki bir şeyler yaparız diyorsan getireyim.

Onur: Getirin…

Araştırmacı odak gruba problem 3-a’nın çözümü olan 25 adet sayma pulu vermiştir. Bu arada gruptaki öğrencilerden biri çözümün kat sayısının karesi olduğunu fark etmiştir. Bu sırada grupla arkadaşları arasındaki diyalog aşağıdaki gibidir:

Ahmet: n.n oluyor.

Emir: Olabilir, evet ama o sadece bir kattakini gösteriyor. Bunu bütün katlara nasıl yayabiliriz? 20 katlı bina çünkü.

Ahmet: 20.20.

Emir: 400, toplam…

Onur: Bak mesela, dördüncü kata kadar, ilk katlar iki, ikinci katlar dört, üçüncü katlar altı, dördüncü dört toplam 16 çıkıyor. 4.4=16.

Odak grup bu aşamadan sonra modelden formülü değil, formülden modeli oluşturmaya çalışmıştır. Modeli oluşturmak için problemdeki sayılardan değil ulaştıkları formülden yararlanmıştır. Grubun formülden modeli oluşturması yaklaşık 13 dakika sürmüştür. Ancak modeldeki probleme ilişkin sayıları ilk aşamada fark edememişlerdir. Bunun üzerine araştırmacı "Bu modelin ve senin ulaştığın formülün doğruluğuna ikna olabilirim ama bana modelde problem 3-a'daki toplanan sayıların nerede olduğunu göstermeniz gerekir" demiştir.

Araştırmacının bu uyarısından kısa bir süre sonra öğrenciler modelde problem 3-a'daki toplanan sayıları fark etmişlerdir. Grubun genel bir kurala ulaşmasını isteyen araştırmacı çıkılan en son katı n olarak alırlarsa toplam kaç yolcu asansöre binecek sorusunu sormuştur. Grup sözcüsü: "Kendisinin iki üssü kadar." diye cevap vermiştir. Araştırmacı grubun ulaştıkları sonucu bir yere yazmalarını istemiştir ve grup ulaştıkları sonucu karar defterlerine yazmıştır (Şekil 3.22). Bu genel sonucu yazabilmeleri için araştırmacı çeşitli rehberlikler yapmıştır. Bu sırada geçen diyaloglar aşağıdaki gibidir:

A: Kaçıncı kattan asansöre binilmeye başlanıyor?

Can: Birden.

A: Evet, 1+2+3+…n'ye kadar. İnerken ne olacak? Bir alt kata inecek. Bir alt katın n cinsinden ifadesi nedir?

Emir: n-1.

A: Artı bir sonraki…

Emir: n-2.

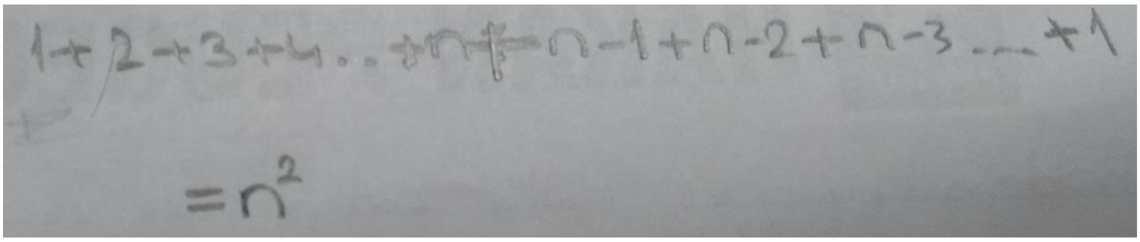
A: Artı… En son kaçıncı kata inecek?

Emir: Bir.

A: Kaça eşitmiş bu.

Emir: n'nin karesine.

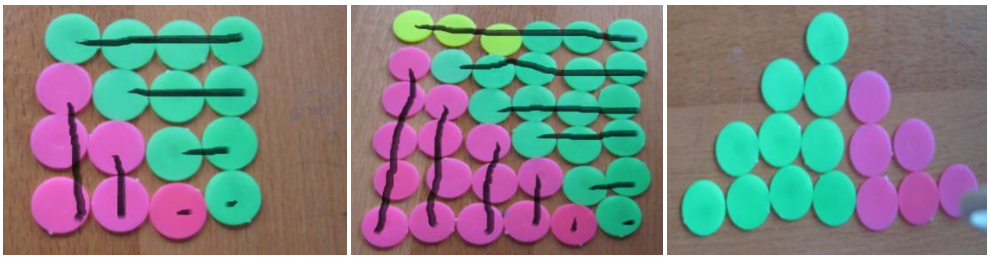
A: Güzel, bu kadar…



Şekil 3.22. *Odak grubun ulaştığı sonucun cebirsel ifadesi*

Araştırmacı, modele formülden ulaşan odak grubu, problemden de model ulaştırmak için grubun modeli problem 3-a'dan başlayarak tekrar oluşturmasını istemiştir. Burada amaç grubun problem 3-a'daki sayılardan, kare olan modeli nasıl oluşturduğunu fark etmesidir.

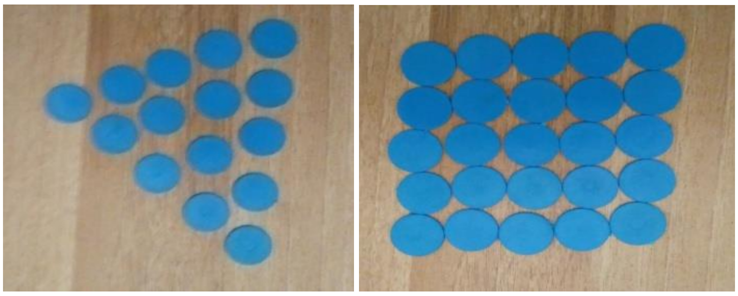
İkinci grup bu pullarla bir model oluşturamamıştır. Araştırmacıdan farklı renkte sayma pulu istemişlerdir. Aldıkları bu pullarla beşe beşlik bir kare oluşturmuştur ve onlar da problem 3-a'daki sayıları modellemeden bu pullarla kare oluşturmaya çalışmışlardır (Şekil 3.23). Bunu yapmalarında geçen iki haftada da bu pullarla dikdörtgen oluşturulması gereken etkinlik yapmaları olabilir. Oluşturdukları kare modelden toplam asansöre binen kişi sayısını 5.5=25 olarak bulmuşlar ve en son n. kata çıkılırsa asansöre binen toplam kişi sayısını $n.n=n^2$ olarak söyleyebilmişlerdir. Araştırmacının "Bundan nasıl emin olabilirsiniz?" sorusundan sonra, grup başka bir adımı da modelleyerek araştırmacıya söylediklerinin doğru olduğunu göstermişlerdir.



Şekil 3.23. *İkinci grubun oluşturduğu modeller*

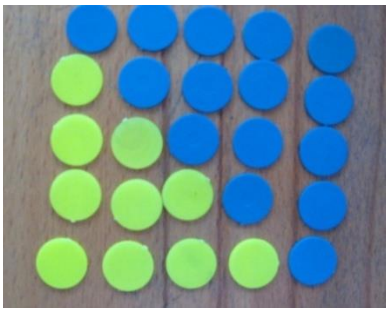
Araştırmacı bu grubun da modeli oluşturmadan önce problem 3-a'daki sayıları modelleyerek modele ulaşmasını istemiştir. Grup çeşitli denemelerden sonra ilk oluşturmaları gereken model biraz zorlukla da olsa oluşturabilmiştir. Oluşturdukları modelden kare modele nasıl geçmeleri gerektiğini fark etmişlerdir.

Odak grup problem 3-a'daki sayıları sayma pullarıyla modellemekte çok zorlanmıştır. Daha önceki etkinliklerde önce dik üçgen oluşturdukları için sadece asansöre çıkarken binen kişi sayılarını modelleyip yine dik üçgen oluşturmuşlardır. Araştırmacının modeli oluştururken problem 3-a'daki sayılara bağlı kalın ve sadece çıkarken binenlerin sayısını almayın, inenleri unutmayın rehberliğiyle sonucu aşağıdaki modeller oluşmuştur (Şekil 3.24).



Şekil 3.24. *Odak grubun problem 3-a'ya ait bazı modelleri*

Araştırmacı, grubun problem 3-a'dan modele daha kolay gidebilmeleri için asansör inerken binen kişi sayı kadar sayma pulunu başka renk verince öğrenciler sayma pullarını önce problem 3-a'daki gibi dizip, inerken binen kişi sayısı kadar farklı renkteki sayma pulunu kareyi tamamlamak için kullanabilmişlerdir. Grubun problem 3-a'daki sayılara bağlı kalarak modeli oluşturabilmesi ise yaklaşık yarım saat sürmüştür (Şekil 3.25).



Şekil 3.25. *Odak grubun oluşturduğu son model*

Bu etkinlik sonucunda genel bir formüle ulaşan üç grup olmuştur ama istenen modeli sadece iki grup oluşturabilmiştir. Modeli oluşturan gruplardan birine tahtada bu modeli oluşturup problem 3-b'yi çözmesi istenmiştir. Diğer grup da 1+2+3+…(n-1)+n+(n-1)+ …+3+2+1=n^2 ifadesini nasıl oluşturduklarını açıklamıştır.

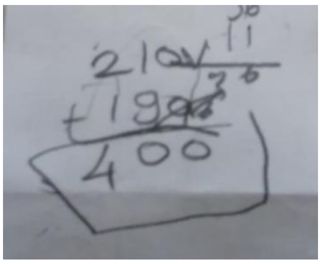
3.3.2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci

Gruplarda bir kişi problemi sesli olarak okumuş, diğerleri dinlemiştir. Tüm gruplar problem 3-a'nın çözümü olan 1+2+3+4+5+4+3+2+1=25 işlemini yapıp doğru çözümü bulmuşlardır. Gruplar bu aşamada yatay matematikleştirme sürecinde işlemler yaparak problem 3-a'ya özgü bir çözüm bulmuşlardır.

İkinci grup problem 3-b'yi okuduğunda araştırmacıdan ilk olarak sayma pullarını istemiştir. Buradan öğrencilerin genel bir çözüm için hazırlandıkları görülmektedir. Araştırmacı daha önceki uygulamasından farklı olarak sayma pullarını vermek için grupların istemelerini beklemiştir. Etkinlik öncesinde yapılan tahminlerde grupların problem 3-b'yi okuduktan hemen sonra sayma pullarını isteyecekleri düşünülürken sayma pullarını sadece ikinci grubun hemen istemesi dikkat çekici bir durumdur. Ayrıca en son 20. kata çıkan ve inen asansöre binen kişilerin sayısını teker teker toplayarak hesaplamaya çalışan gruplar veya kişiler de olmuştur.

Odak grup problem 3-b'yi çözmek için iki yol düşünmüştür. Bunlardan biri problem 3-a'dan bir örüntü geliştirip genel bir kural bulmak ve problemi orantı yoluyla çözmektir. Ancak denemelerinin sonucunda problemin orantıyla çözülemeyeceğini görmüşler ve araştırmacıdan sayma pullarını istemişlerdir.

Üçüncü grup problem 3-b'yi çıkarken ve inerken binen kişileri ayrı ayrı hesaplayıp sonra bunları toplayarak çözmüştür (Şekil 3.26).



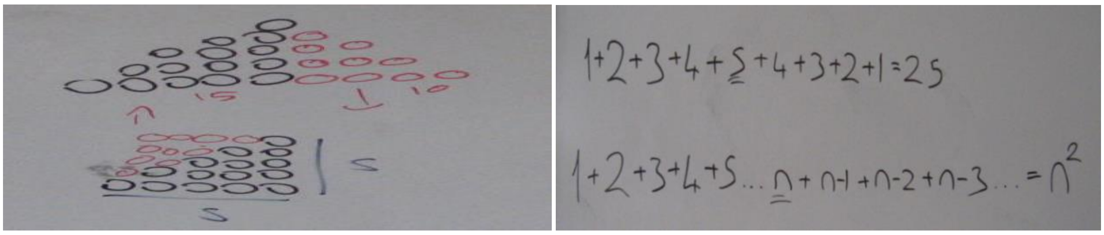
Şekil 3.26. *Problemi ayrı ayrı hesaplayan grubun çözümü (Üçüncü grup)*

Üçüncü grup daha sonra beşinci kata ve altıncı kata çıkıp inen asansöre binen kişilerin toplam sayısını incelediğinde bu toplamın asansörün çıktığı en son katın sayısının karesi olduğunu fark etmiş, bunu Şekil. 3.21'deki gibi ifade etmiştir. Bu ifade, problem 3-b için bir genel çözüm olarak düşünülebileceği için dikey matematikleştirme sürecine yönelik bir ifade olarak değerlendirilebilir.

İkinci gruba araştırmacı problem 3-a'nın çözümü olan sayı kadar sayma pulu vermiştir. Grup aldıkları pullarla önce bir dik üçgen oluşturduktan sonra pulları diğer renk sayma pullarıyla oluşturdukları üçgeni kareye tamamlamıştır. Bu stratejilerinde geçen hafta yapılan etkinliklerde sayma pullarını bu şekilde kullanmalarının etkili olduğu düşünülmektedir. Daha sonra grup bu pullarla problemdeki çeşitli adımların çözümü olan modelleri yaparak problem için yatay matematikleştirme sürecinin son adımı olan 'model of'u oluşturmuştur. Grup oluşturdukları kare modellerden toplam asansöre binen kişi sayısını bulmuşlar, en son n. kata çıkılırsa asansöre binen toplam kişi sayısını $n.n=n^2$ olarak söyleyebilmişler ve problem için matematiksel formülü kurup yaptıkları dikey matematikleştirme sürecinin son ürününü vermişlerdir.

Araştırmacı odak gruba sayma pullarını dağıtırken gruptaki öğrencilerden biri sayısal ilişkileri inceleyerek problem için genel bir çözüm olan $n.n=n^2$ formülüne ulaşmıştır. Böylece grup problem için bir 'model of'a ulaşmadan önce genel çözüme ulaşmıştır. Ulaştıkları formülü çeşitli adımlarda deneyerek bu adımlarda formüllerinin doğru olduğunu görmüşlerdir. Dolayısıyla sayma pullarıyla modeli oluştururken problem 3-a'daki toplanacak sayıları adım adım gösterip oluşturacakları modelden kare inşa etmek yerine direk kare inşa etmişler ve problem 3-a'daki sayıları modelden göstermişlerdir. Grup bu etkinlikte yatay matematikleştirme sürecini sayısal işlemlerle tamamlamış, bu süreci tamamlamak için bir 'model of' oluşturmaya gerek duymamıştır. Grubun modeli oluşturmadan çeşitli adımların toplamlarındaki sayısal ilişkileri inceleyerek bir genel çözüm oluşturması etkinlik öncesine tahmin edilen bir durumdur. Grubun oluşturdukları modelden problem 3-a'daki toplanması gereken sayıları sonradan model üzerinden çözümlemiştir. Bu adımdan sonra grup problem için dikey matematikleştirme sürecini tamamlayarak problemin genel çözümünün matematiksel formülü olan $1+2+3+\ldots(n-1) + n + (n-1) +\ldots+3+2+1 = n^2$ ifadesini cebirsel olarak ifade etmiştir.

Etkinliğin sonlarına doğru ikinci grup sınıfa modele nasıl ulaştıklarını açıklamıştır. Genel bir kural bulamayan ve model oluşturamayan üç grup, arkadaşlarının renkli kalemlerle şekil çizerek anlattıklarıyla tatmin olmuş ve genel kuralı anlamıştır. Odak grup arkadaşlarının anlatırken eksik bıraktığı modelden problem 3-a'daki sayıları çözümleme ve problemin genel çözümü olan cebirsel ifadesini yazma kısmını tahtada yapmışlardır (Şekil 3.27). Özellikle modelden problem 3-a'daki kısımları gösterirken sınıftan: 'Aaaa, evet' sesleri duyulmuştur.



a b

Şekil 3.27. *Odak grubun (a) ve ikinci grubun (b) tahtada yaptığı çözümler*

3.3.3. İç içelik prensibi

Bu etkinliklerdeki problem durumları ve daha genel çözüme ulaşılması için yapılacak modeller ile bir argümana ulaşma durumu matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlamaktadır.

Bu etkinlikte öğrenciler problem 3-a'yı okuduktan sonra problemlerdeki ifadeleri matematiksel cümlelere çevirmiş ve problem 3-a için doğru bir çözüm bulmuşlardır. Bu kısımda gerçek hayat durumundan Şekil 3.18 ve Şekil 3.19'da örnekleri görüldüğü gibi aritmetiğe ve sembole geçiş vardır.

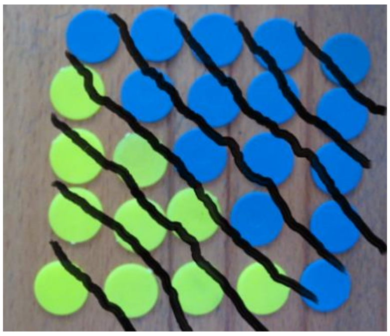
Gruplar problem 3-b'yi okuduktan sonra, araştırmacının sayma pullarını sadece isteyen gruplara verme kararından dolayı ilk aşamada sadece ikinci gruba sayma pulu dağıtılmıştır. Bazı gruplar adımları teker teker hesaplayarak problem 3-b'nin çözümü bulmaya çalışmış, bazı gruplar ise problem 3-a'daki ve problem 3-b'deki verileri kullanarak bir orantı kurmaya çalışmıştır. Araştırmacının rehberliğiyle farklı zaman aralıklarında beşincigrup hariç diğer tüm gruplara sayma pulu dağıtılmıştır.

Üçüncü grup sayma pullarını kullanmadan adımlardaki sayısal ilişkileri çözümleyerek problem için bir genel çözüm bulmuştur. Bu çözümde cebirsel bir ifade tam olarak kullanamasa da herhangi bir adım için kullanabileceği bir çözüm oluşturmuştur. Araştırmacının grubu sayma pullarına yönlendirmesine rağmen grup problem durumunu sayma pullarıyla bir model oluşturmadığı için aritmetik ve cebir ile geometri arasında sınırlı bir ilişki kurmuştur.

Sayma pullarını en son isteyen gruplardan altıncı grup beşinci kata çıkan asansör için beşe beşlik kare bir model oluşturmuştur ama problem durumunu model üzerinde çözümleyememiştir. Bununla birlikte bu grup problem 3-b için alt alta toplamla sonucu bulsa bile genel bir çözüm üretememiştir.

İkinci grup ilk aşamada problem 3-a'yı modele aktaramamışlardır. Daha sonra araştırmacıdan farklı renkte sayma pulu istemişler ve bu 25 tane pulla problem 3-a'daki sayıları dikkate almadan sadece sonucunu dikkate alarak beşe beşlik bir kare oluşturmuşlardır. Beşinci adımda sayma pullarıyla beşe beşlik bir kare oluşturdukları için formülün $n.n=n^2$ olduğunu söyleyerek problem 3-b'nin çözümünü $20.20=20^2=400$ olarak bulmuşlardır. Fakat ilk aşamada modeldeki problem 3-a'ya ait sayıları çözümleyememiş belli bir süre sonra Şekil. 3.23'te gösterilen şekilde modeldeki çözümlemeleri yapmışlar, araştırmacıya nasıl yaptığını anlatmışlardır. Grup modeli problem 3-a'daki sayılara bağlı olarak yeniden oluşturmuş ve bu modelden genel kuralı oluşturdukları modeli elde ederek geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi daha iyi kavramıştır.

Odak grup problem 3-b'yi önce orantıyla çözmeye çalışmıştır. Bunun olmayacağını anlayınca sayma pullarıyla bir model oluşturmaya çalışırken gruptaki öğrencilerden biri diğer gruba benzer olarak adımlardaki sayısal ilişkilerden yararlanarak problem 3-b için genel çözümün n.n olduğunu söylemiş ve arkadaşlarını buna ikna etmiştir. Bu aşamada gruptakiler aritmetikten cebire bir geçiş yapmışlardır. Bu grup da diğer gruba benzer olarak geometrik modeli cebirsel formülden oluşturmuştur. Araştırmacının oluşturdukları modelde problem 3-a'daki sayılarla model arasındaki ilişkiyi sormasıyla aşağıdaki şekildeki gibi bir açıklama yaparak modeli çözümleyebilmişlerdir (Şekil 3.28). Grup modeli çözümlerken aritmetik, cebir ve geometri arasında ilişki kurmuştur.



Şekil 3.28. *Odak grubun çözümlenmiş modeli*

3.3.4. Kademeli tertip etme süreci

Öğrencilerin etkinlikte daha aktif olduğu görülmüştür. Odak grup kamera karşısında artık rahattır. Problemi çözerken cebirsel ifadeleri daha sık kullanmışlardır. Problem 3-b'yi ilk okuduklarında artık genel bir kuraldan bahsetmeye başlamışlardır. Sonuca ulaşan diğer grupların da genel kuralı ifade ederken cebirsel bir dil kullanmaya başladıkları görülmüştür. Problem 3-b okunduğunda tüm grupların sayma pulu isteneceği düşünürken sadece bir grubun sayma pulunu araştırmacının rehberliği olmadan istemesi dikkat çekici bir durumdur. Sayma pullarını ilk isteyen grubun pullarla problem 3-a'daki sayıları dikkate almadan sadece sonucuna odaklanarak hemen kare bir model yapmaya çalışmaları pulların kullanım amacının tamamıyla oturmadığının göstergesi olabilir. Dördüncü, beşinci ve altıncı grup hala teker teker hesaplama yapma eğilimindedir. Bu etkinlikte sonuca ulaşan odak ve üçüncü grup sayısal ilişkileri inceleyerek genel çözüme ulaşmışlardır.

Odak grubun belli bir yerde takılmalarına rağmen problem 3-b'nin çözümünü bulmak için alt alta toplam yapmayı düşünmemesi etkinliğin amacı açısından olumlu bir durumdur. Yine ikinci grubun problem 3-b'yi okuduğunda hemen bir genel kural bulmaya çalışmaları grubun düşünsel olarak ilerlediğini göstermektedir.

Sayma pullarını alan grupların sayma pullarıyla kare bir model oluşturması sayma pullarının kolay sayımı açısından önemlidir. Birinci ve üçüncü grubun adımlarda oluşan toplam sayıları inceleyerek model oluşturmadan önce genel kurala ulaşabildikleri görülmüştür. Genel kurala ulaştıkları için modellerini ulaştıkları formülden oluşturabilmişlerdir.

Grupların karar defterlerine bakıldığında öğrencilerin problem 3-a için doğru çözümler yaptıkları görülmüştür. Geçen haftaki matematiksel yazımlara göre özellikle problem 3-b için genel bir kural yazarken öğrencilerin cebirsel ifadeleri daha fazla kullandıkları görülmüştür.

Etkinlik 3'teki öğrenci süreçleri Tablo 3.3'te özetlenmiştir.

Tablo 3.3. *Etkinlik 3'teki öğrenci süreçleri*

	Model of'tan model for'a geçiş	**İç içelik prensibi**	**Kademeli tertip süreci**
Odakgrup	- Problem3-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayısal ilişkilerden model for'a ulaşmıştır - Sayma pullarıyla model of'u oluşturmuştur.	- Problem 3-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmuştur.	- Problemi okuduklarında genel kuraldan bahsetmeye başlamıştır. - Cebirsel ifadeleri daha sık kullanmıştır. - Özel çözüm yapmayı düşünmemiştir.
Grup 2	- Problem 3-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pulları ile model oluşturmuştur. - Model of'a ulaşmıştır. - Model for'a ulaşmıştır.	- Problem 3-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmuştur.	- Genel bir çözüm uğraşındadır. - Sayma pullarını ilk isteyen gruptur. - Modeli kareye tamamlamıştır.
Grup 3	- Problem 3-a için bir çözüm bulmuştur. - Önce model for'a ulaşmıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 3-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetikten cebire geçiş yapabilmesine rağmen geometriye geçişi sınırlı olmuştur.	- Sayısal ilişkilerden çıkarımlar yapmıştır. - Çıkarımlarını denemiş genel çözüme ulaşmıştır. - Çıkarımlarını deneyerek problemin çözümü için genellemeye ulaşmıştır.
Grup 4	- Problem 3-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla modeller oluşturmaya çalışmıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 3-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Sayma pullarıyla çalışmaya yeterli vakit ayırmamıştır. - Problemin 20. adımı için özel çözüm bulmuştur. - 50. adım sorulunca sayma pullarıyla genel çözüm oluşturmaya çalışmıştır.
Grup5	- Problem 3-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla çalışmamıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 3-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Aritmetik, geometri ve cebir arasında geçiş yapamamıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.
Grup 6	- Problem 3-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla yeterince çalışmamıştır. - Model of'a ulaşamamıştır.	- Problem 3-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.

3.4. Dördüncü Etkinlikle İlgili (Asansör-2 Problemi) Bulgular

3.4.1. Rehberlik prensibi

Etkinliğin başında bazı gruplar ve öğrenciler rehberliğe ihtiyaç duymuşlardır. Dördüncü ve altıncı grup bu problemi geçen hafta yaptıklarını belirtmişlerdir. Araştırmacı bunu etkinlik öncesi analizde tahmin ettiği için problemde geçen "TEK" kelimesini büyük olarak yazmış ve bu gruplara büyük harfle yazılan yere dikkat etmeleri belirtmiştir. Etkinlik boyunca yapılan rehberlik aşağıda detaylandırılmıştır.

3.4.1.1. Araştırmacının problem 4-a için yaptığı rehberlik

Problem 4-a gruplar tarafından okunduğunda tüm gruplarda bunun geçen hafta yapılan problemle aynı olduğunu düşünen öğrenciler olmuştur. Beşinci ve altıncı grup hariç diğer gruplarda problem durumunu geçen haftaki problem durumuyla karıştıran öğrenciler bu problem durumunun farklı bir problem durumu olduğu konusunda gruplarındaki arkadaşları tarafından ikna edilmiştir. İki gruba ise araştırmacı tarafından problemdeki büyük harfle yazılan yere dikkatlerinin çekilerek rehberlik yapılmıştır.

Beşinci grup beşinci katta asansöre aynı katta iki kez yolcu bindirme hatası yapmıştır. Araştırmacı geçen haftayı hatırlatınca grup hatasını düzeltmiştir.

Problem 4-a için tüm gruplar çok uzun süre harcamadan doğru çözümü bulmuşlardır. Odak grup yaklaşık bir dakikada hem bu haftaki problemi geçen haftaki problemle karıştıran arkadaşını ikna etmiş hem de problem 4-a için doğru bir çözüm bulmuştur. Bu sırada aralarında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

> Emir: Böyle olacak değil mi?
>
> Mehmet: Başka bir fikri olan var mı?
>
> Emir: Başka fikri olan varsa söylesin, onu da yapalım. Sen ne düşünüyorsun?
>
> Mehmet: Şimdi şey yapalım ya. Bize ilk soru geldi değil mi? Onları pullarla yapabiliriz.
>
> Emir: 2. soruda ne sorabilir? 80. kata kadar çıkıyor?
>
> Mehmet: Evet. Kaç olabilir formülü lazım.
>
> Emir: Nasıl yapıcağız? Geçen yapmıştık ya hani… 1n+2n+3n+…n+n-1 gidecek, n'nin karesi. Adım sayısının karesi. 80. kata çıkıyor ya. 80.80. Ama işimizin zorluğu şu.

Mehmet: Tek katlarda…

Emir: Tek katlarda alması gerek, tek. O biraz bozabilir. Onu nasıl yapacağız? 80'e kadar kaç tane tek kat var?

Mehmet: Onu bir formülle yapmamız lazım. 1, 3, 5 öyle bir şey. Tek tek saymakla olmaz o iş. Bir formül vardır.

Emir: Saysak bile çok uzun sürer ki o.

3.4.1.2. Araştırmacının problem 4-b için yaptığı rehberlik

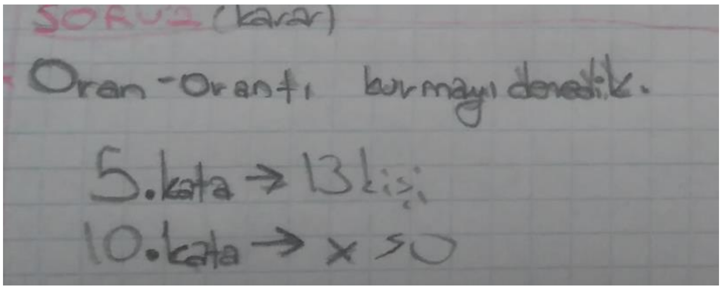
İkinci grup araştırmacıdan problem 4-b'yi dağıtmadan sayma pullarını istemiştir. Araştırmacı bu pulları ne yapacaksınız diye sorunca: "Daha büyük katlar sorulunca cevabı hemen bulmak için bir genel kural bulmak için kullanacağız." diye cevap vermiştir. Araştırmacı "Vereceğim, vereceğim." diye cevap vermiştir.

Tüm gruplar problem 4-a için doğru çözümü bulunca üçüncü grubun sözcüsü çözümü tahtada yapmıştır ve problem 4-b'nin gruplara dağıtılmasına geçilmiştir.

İkinci gruba problem 4-b'nin dağıtılmasından sonra pullar verilmiştir. Gruba kaç pul istendiği sorulmuş onlar da problem 4-a'nın çözümü olan 13 tane istediklerini söylemişlerdir. Gruba bilinçli olarak asansör inerken ve çıkarken binen kişi sayılarını gösteren dokuz siyah, dört kırmızı pul verilmiştir.

Problem 4-b dağıtıldığında araştırmacıya asansörün yine tek katlarda mı durduğu sorulmuş, bunun üzerine araştırmacı problem 4-b'deki asansörün problem 4-a'daki asansörle aynı özellikleri taşıdığını tüm sınıfa duyurmuştur.

Odak grubun kayıt incelendiğinde problem 4-b'yi çözmek için orantı kurmaya karar verdiği görülmüştür. Grup önce asansörün en son kat olarak beşinci kata çıktığında bindiği yolcu sayısı hesaplanmış, daha sonra en son kat olarak 10. kata çıktığında binen yolcu sayısı hesaplanmış ve bunlar arasında doğru orantı olmadığı görünce orantı kullanarak çözüm yapmaktan vazgeçilmiştir. Grup orantı kurmak için beşin iki katını alarak onuncu katı kullanmıştır ama asansörün onuncu katta durmadığını göz ardı etmiştir. Dolayısıyla asansörün 50 yolcu aldığını (asansörün onuncu kata çıktığını düşünüp dokuzuncu katta iki sefer yolcu bindirerek) bulmuşlardır (Şekil 3.29).

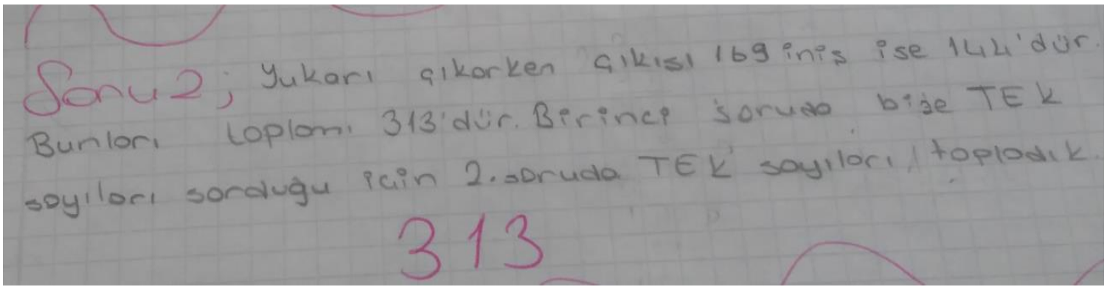


Şekil 3.29. *Odak grubun orantı kurma denemesi*

Odak grup orantı kurmayı denerken beşinci grup sayma pulu istemiştir. Araştırmacı kaç tane istediklerini sorunca grup kesin bir cevap vermemiştir. Araştırmacı gruba isterseniz rastgele bir sayı olmasın, problem 4-a'nın cevabı kadar vereyim deyip, gruba dokuz siyah dört beyaz sayma pulu vermiştir.

Odak grup da araştırmacıdan sayma pullarından istemiştir. Araştırmacı kaç tane istediklerini sormuş, grup da 13 diye cevap verince, bu gruba da dokuz yeşil dört siyah sayma pulu vermiştir.

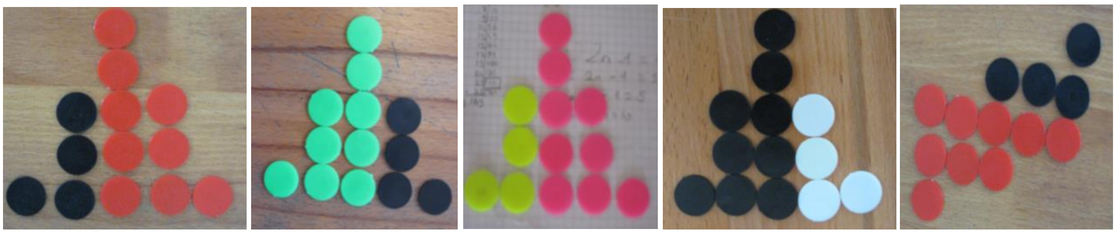
Sonradan da üçüncü ve dördüncü grup sayma pullarını istemiş, diğer grup problem 4-b'nin cevabına ulaşmak için asansöre binen yolcuları teker teker hesaplayarak doğru cevaba ulaşmaya çalışmıştır. Ayrıca üçüncü grup da problem 4-b'nin cevabını önce teker teker hesaplayarak bulmuştur (Şekil 3.30).



Şekil 3.30. *Problem 4-b'nin teker teker hesaplanarak yapılan çözümü (Üçüncü grup)*

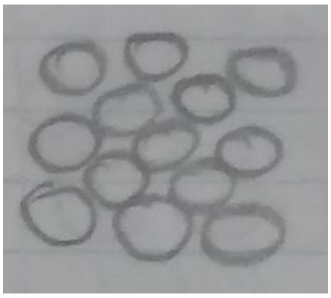
Etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi teker teker hesap yaparak problem 4-b'nin çözümünü yapan ve bu şekilde yapmaya uğraşan gruplara: "Asansörün çıktığı en son kat 75 olsun." denilerek grupların sayma pullarını kullanma ihtiyacı duymalarına çalışılmıştır. Fakat altıncı grubun hala en son 75. kata çıkan asansöre binen yolcu sayısını bulabilmek için teker teker hesap yapmaya çalıştığı görülmüştür.

Sayma pullarına yönelen gruplardan beşinci grup hariç hepsi problem 4-a'daki sayılara dikkat ederek bir model oluşturmaya çalışmışlardır. Ayrıca grupların asansöre inerken ve çıkarken binen kişi sayılarını farklı pullarla gösterdikleri görülmüştür (Şekil 3.31).



Şekil 3.31. *Grupların problem 4-a için modelleri*

Odak grup daha problem 4-a'daki cevabı bulmaya çalışırken aşağıdaki şekli de çizmiştir (Şekil 3.32). Sayma pullarını istemeden oluşturdukları bu şekli görünce araştırmacı neden böyle bir şekil oluşturma ihtiyacı duyduklarını sormuştur. Gruptaki öğrenciler: "Çünkü her problemde şekillerle, sayı pullarıyla yapıyoruz, önümüze geldiğini zaman direk bu şekli uygulayacağız." diye cevap vermişlerdir.



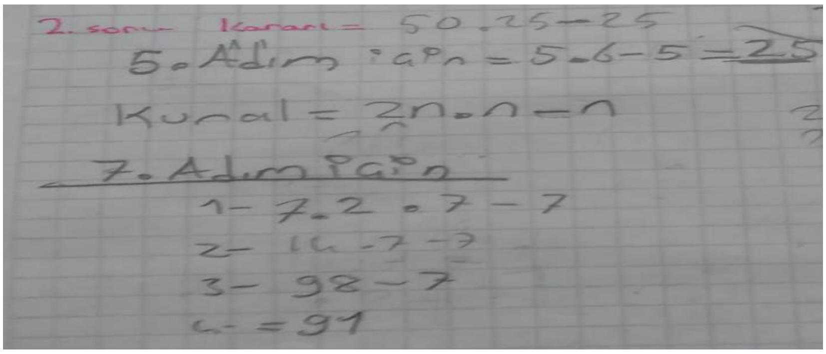
Şekil 3.32. *Odak grubun sayma pulları dağıtılmadan önce oluşturduğu şekil*

Odak grup sayma pullarını alınca önce yukarıdaki çizdiği şekli oluşturmuştur. Bunun bir kareye benzediğini ama kare olmadığını söylemiştir. Şekli üçe üç bir kare yapmaya çalışmışlar fakat pullar fazla gelince üçe üçlük karenin etrafına dört tane siyah pulu yerleştirmişler ama pulları kolay sayılacak bir hale getiremediklerini düşünmüşlerdir. Grup daha sonra asansörün çıkarken binen yolcuların 2n-1 formatında olduğunu fark etmiş fakat asansör inerken bunun geçerli olmadığını söylemişlerdir. Bu sırada toplam sayma pullarını hesaplamak için oluşturdukları çeşitli argümanları denemişler fakat bir sonuca ulaşamamıştır.

İkinci grup ekstradan sayma pulu alıp oluşturdukları şekli aşağıdaki gibi (2 tane 1, 2 tane 3 ve 1 tane 5) çözümlemiştir (Şekil 3.33). Araştırmacı güzel bir çözümleme yaptıklarını söylemiş ama bu çözümlemenin pulları kolay saymak için yararlı olup olmayacağını sorunca grup şekli dikdörtgene aşağıdaki gibi dikdörtgene tamamlamıştır.

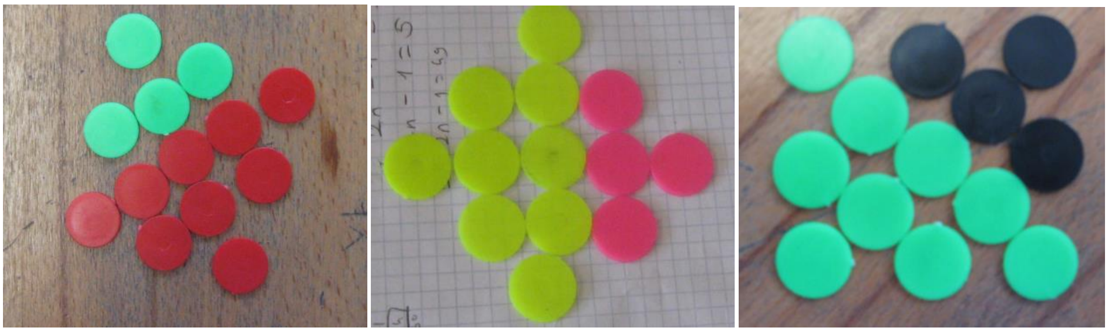
Şekil 3.33. *İkinci grubun oluşturduğu modeller*

Araştırmacı bu grubun oluşturdukları dikdörtgenin kenar uzunlukları ve toplam sayma pulu arasındaki ilişkiyi incelemelerini istemiştir. Grup beşinci kata çıkınca beş pul ekleneceğini keşfetmiştir. Dikdörtgenin uzun kenarının, kısa kenarının iki katı olduğunu da fark etmiştir. Fakat kısa kenarı n ve uzun kenarı 2n ile ifade ettiğinde çıkılan en son katı yani eklediği pul sayısını 2n-1 değil yine n ile ifade ettiği için genel bir sonuç bulamamış ve doğru sonuca ulaşamamıştır (Şekil 3.34). Yine de grubun alt alta toplam yapmaya çalışmaması etkinliğin amacı için olumlu bir durumdur.



Şekil 3.34. *İkinci grubun problem 4-b için ulaştığı yanlış çözüm*

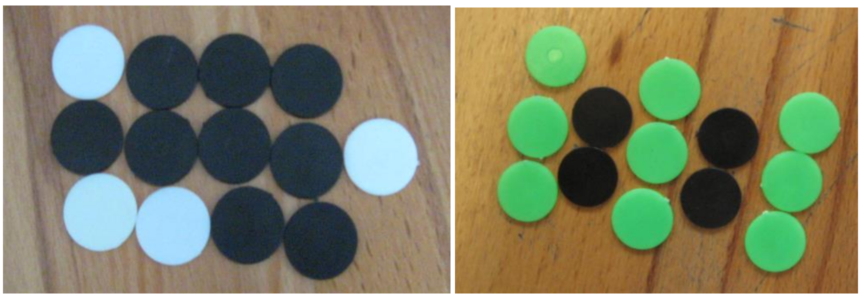
Üçüncü grup sayılarla işlemler yapmaktayken dördüncü ve beşinci grup da sayma pullarıyla probleme uygun modeller oluşturmaya çalışmaktadır. Araştırmacı tüm gruplara “Neden farklı iki renkte model verdiğimi düşündünüz mü?” diye bir soru sormuştur. Sayma pulları alan gruplar farklı renklerin biri çıkış, diğeri inişteki asansöre binen yolcuları göstermek için kullanılabileceğini ifade etmiştir. Ama çıkış ve inişteki pulların sayısını kolay yoldan saymak için ayrı ayrı model oluşturmayınca istenen modelin birinci aşamasını yapabilmişler fakat ikinci aşamasını yapamamışlardır (Şekil 3.35).



a b c

Şekil 3.35. *Dördüncü (a), beşinci (b) ve odak grubun (c) oluşturduğu modeller*

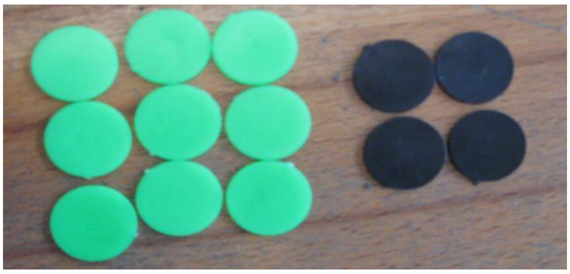
Odak grup ilk aşama yapılması gereken modeli daha problem 4-a’yı çözerken oluşturmuş ama modeldeki toplam pulları sayabilmek için değişik modeller oluşturmaya devam etmiştir. Diğer gruplar da sayma pullarını kolay sayabilmek adına bir dikdörtgen oluşturmaya çalışmışlar ama bunu başaramamışlardır. Bu şekilde oluşturulan bazı modeller aşağıdadır (Şekil 3.36).



a b

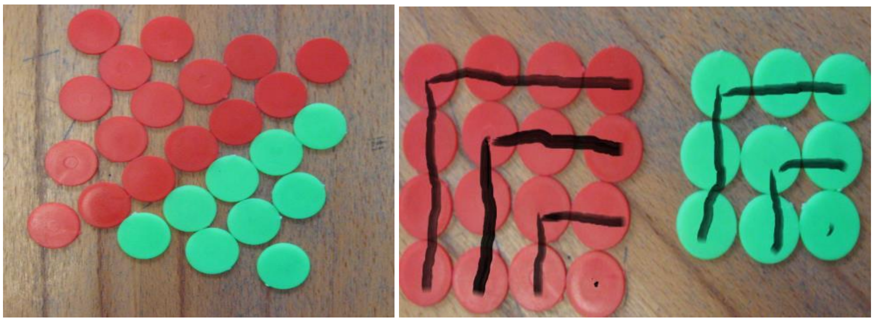
Şekil 3.36. *Üçüncü grubun (a) ve grubun odak (b) oluşturdukları bazı modeller*

Odak grup ilerleyememesine rağmen problem 4-b'yi çözmek için teker teker toplam yapmaya çalışmamıştır. Bu etkinliklerin amacı için olumlu bir yaklaşımdır. Grubun rehberliğe ihtiyacı olduğunu gören araştırmacı "Ben size neden farklı iki renk verdim?" diye sormuştur. Grup "Bir renk inişi, bir renk çıkışı gösteriyor." diye cevap vermiştir. Araştırmacı "O zaman toplamını bulmak istediğiniz pulların hepsini birlikte değil de ayrı ayrı düşünebilir misiniz?" diye bir rehberlik yapmıştır. Bu rehberlikten sonra siyah ve yeşil pulları ayıran grup, araştırmacının "Bunları kolay sayma imkânımız var mı?" sorusundan sonra aşağıdaki modeli oluşturmuştur (Bkz Şekil 3.37).



Şekil 3.37. *Odak grubun pulları kolay saymak için oluşturduğu model*

Araştırmacı grubun ilişkileri biraz daha görebilmesi için en son yedinci kata çıkan asansöre toplam kaç kişi biner, bence onu da hesaplayıp bir görün önerisi yapmış ve kaç pula ihtiyacı olacak bulmalarını istemiştir. Grup bu arada sayma pulları arasındaki ilişkiyi incelemektedir. Asansör çıkarken binen kişi sayısı için n^2 formülüne ulaşan grup, asansör inerken binen kişi sayısı için $(n-1)^2$ formülüne ulaşamamıştır. Grup daha sonra yedinci kata çıkılan modeli de oluşturmuştur. Bu modeldeki farklı renkleri ayırıp kare oluşturmuştur. Bu modelde çıkarken ve inerken binen yolcu sayılarını göstermiştir (Şekil 3.38).



Şekil 3.38. *Odak grubun oluşturduğu modeller*

Odak grup her ne kadar bu modeli oluşturabilse de kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi görmekte zorlanmıştır. Araştırmacı grubun bulduğu asansörün çıkarkenki genel kuralı gruba tekrar hatırlatmıştır. Ama grup bu formülde 2n-1'i yediye eşitlemektense 2n-1 ifadesinde n yerine yedi koymaya çalışmıştır. Araştırmacı: "Bu durumda n yerine yedi mi koyarsınız?" deyince öğrencilerden biri "2n-1'i yediye eşitleriz." demiştir. Buradan n'yi dört olarak bulmuşlardır ve dördü büyük karenin bir kenar uzunluğu ile ilişkilendirmişlerdir ancak küçük karenin kenar uzunluğunu büyük karenin kenar uzunluğu ile ilişkilendirememişlerdir. Bu ilişkiyi daha iyi görebilmeleri için araştırmacı gruba problem 4-a'daki modeli yeniden oluşturmalarını istemiştir. İki farklı model arasında tek sayılarla ilgili bir ilişki kural bulunmaya çalışıldığı için tüm öğrenciler bunda çok zorlanmışlardır. Bu durum etkinlik öncesinde tahmin edilen bir durumdur ve bu duruma karşı yapılacak rehberlikler de öğrencilerin ilişkiyi görmesinde çok yardımcı olmamıştır. Araştırmacının rehberliğiyle odak grup istenen modelleri oluşturabilmiştir ama bunların kenarları arasındaki ilişkiyi kurmakta çok da başarılı olamamıştır. Araştırmacının grubu aşağıdaki şekilde rehberliğiyle grup problem 4-b için bir çözüm oluşturmuştur.

> A: En üst katı veren formül neydi?
>
> Emir: 2n-1.
>
> A: 2n-1 buna eşitlerseniz (Beşinci kattaki binen kişi sayısını gösteren pulları işaret ederek) 2n-1=5 ise n;
>
> Emir: 3
>
> A: Gördünüz mü? Oluşacak neyi buluyorsunuz? Büyük karenin bir kenar uzunluğunu…
>
> Emir: Evet.
>
> A: 25 olsa demek ki kaça kaç iki tane kare oluşacak?
>
> Emir: 13, 13. Büyük karenin 13 olacak…
>
> A: Küçük kare?
>
> Emir: Küçük karenin de 12 mi?
>
> A: Evet…

Zaman kalmadığı için grubun ulaştığı sonuçlar diğer gruplara paylaşılamamış ve etkinlik sonlandırılmıştır. Etkinlikte zaman sorunu yaşanmıştır denilebilir. Odak grubun ısrarı üzerine etkinlik süresi sonrasında araştırmacının rehberliğiyle (oluşan küçük karenin bir kenar uzunluğunun, büyük karenin bir kenar uzunluğunun 1 eksiği olduğu fark ettirilerek) problemin matematiksel formülü olan 1+3+5+…+2n-1+…+3+1=n^2+(n-1)^2 ifadesi kurulup bir problem için bir ‘model for’ oluşturulmuştur.

3.4.2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci

Gruplarda bir kişi problem 4-a’yı sesli olarak okumuş, diğerleri dinlemiştir. Tüm gruplar problem 4-a’nın çözümü olan 1+3+5+3+1=13 işlemini yapıp doğru çözümü bulmuştur. Gruplar bu aşamada yatay matematikleştirme sürecinde etkinlikler yaparak problem 4-a’ya özgü bir çözüm bulmuşlardır.

İki grup problem 4-b’ye geçmeden önce dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerde bulunmuştur. İkinci grup araştırmacıdan problem 4-b’ye geçmeden önce sayma pullarını istemiştir. Grup sayma pullarıyla bir ‘model of’ oluşturup, dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerle problem 4-b’ye ait bir genel çözüme ulaşmak ve probleme ait ‘model for’u oluşturmak istemektedir. Problem 4-b’ye geçmeden önce dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerde bulunan diğer grup ise odak gruptur. Bu grup problem 4-b’ye geçmeden Şekil. 3.32’yi çizmiştir. Bu grubun amacı da yatay matematikleştirme süreci sonunda sayma pullarıyla bir ‘model of’ oluşturup, dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerle problem 4-b için bir genel çözüme ulaşmak ve probleme ait ‘model for’u oluşturmaktır. Bu konuyla ilgili ‘3.4.1.1. Araştırmacının problem 4-a için yaptığı rehberlik’ bölümünde grubun birbirleriyle olan etkileşimi ilgi çekicidir.

Grupların problem 4-b’yi çözme sürecinde altıncı grup sadece yatay matematikleştirme sürecinde etkinliklerde bulunmuştur. Araştırmacı bu grubu dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerde bulunması için en son çıkılan kat sayısını arttırsa bile grubu genel kural bulmak için etkinlikler yapmasını sağlayamamıştır.

Beşinci grup problem 4-b’ye özel bir çözüm bulmaya çalışmış ama işlemlerde hata yaptığı için problem 4-b’ye özel bir çözüme de ulaşamamıştır. Diğer iki grup problem 4-b için doğru cevabı bulmuştur. Bu iki grubun da problem 4-b için yatay matematikleştirme sürecinde etkinlikler yaptığı ve özel bir çözüme ulaştığı söylenebilir. Üçüncü grup genel kurala ulaşmak için aritmetiksel işlemlerle zaman harcamıştır. Grup problem 4-b için iniş ve çıkışta binen yolcu sayılarını ayrı ayrı hesap etseler de bu sayıların tam kare bir sayı olduğunu fark edememiştir. Dördüncü grup da aritmetiksel işlemlerle problem 4-b için doğru bir cevaba ulaşmış, genel bir çözüme ulaşmak için sayma pullarını kullanmayı denemişlerdir. Ama daha önce bahsedilen sebeplerden bu grup da bir sonuca ulaşamamıştır.

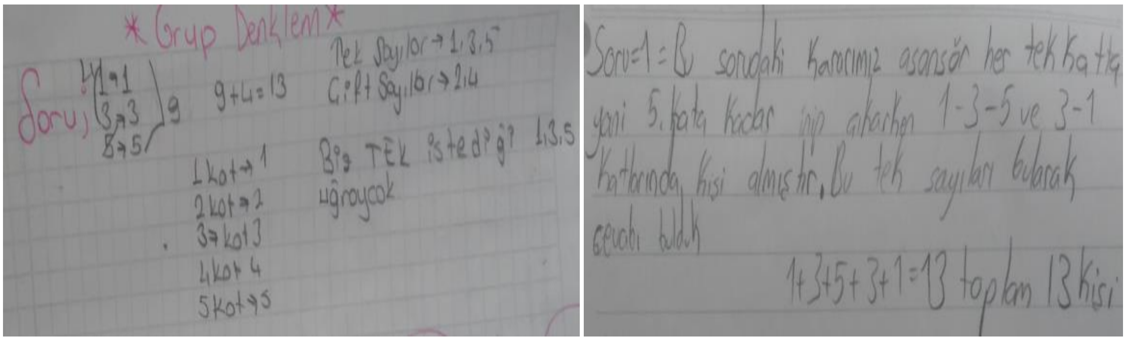
İkinci grup problem 4-b'yi okuyunca alt alta toplama işlemiyle çözüm yapmamıştır. Bu durum etkinliğin amaçları adına olumlu bir durumdur. Öncelikle problem 4-a'daki sayıları temel alarak sayma pullarıyla bir model oluşturmuşlardır. Önce pulları Şekil 3.33'teki gibi çözümlemiştir. Daha sonra sayma pullarını Şekil 3.33'teki gibi dikdörtgene tamamlamıştır. Araştırmacı gruba şekli dikdörtgene tamamlamak için kaç tane sayma pulu eklediklerini sormuş, grup en son kat sayısı (2n-1) kadar diyerek doğru bir cevap vermiştir. Grup genel bir çözüm için dikdörtgenin kısa kenarını n, uzun kenarını kısa kenarın iki kat 2n ile ifade etmiştir. Fakat dikdörtgene tamamlamak için kullandıkları sayma pulu sayısını 2n-1 ile değil n ile ifade ettiği için genel formül olarak $n.(2n)-(2n-1)=2n^2-2n+1$ yerine $n.(2n)-n$ olarak ifade ettiğinden için oluşturdukları dikdörtgen modelden yanlış bir argümana ulaşmıştır. Ulaştıkları argümanı bazı adımlar için denediklerinde argümanlarının doğru olmadığını anlamışlardır. Modeli dikdörtgene tamamlamak için kullandıkları sayma pulu sayısını cebirsel olarak doğru ifade edemedikleri için probleme ait yatay matematikleştirme sürecinin bir ürünü sayılabilecek 'model of'a ulaşabilseler bile problemin matematiksel formülünü kuramadıkları için dikey matematikleştirme sürecine ait bir ürün olan 'model for'a ulaşamamışlardır.

Odak grup sayma pullarını aldığında problem 4-a'yı çözerken çizdiği şekli (Şekil 3.32) oluşturmuşlardır. Bu model gruplardan oluşturması beklenen ve istenen modeldir. Bu problem için 'model for'u oluşturmanın zor olduğu bilindiği için sayma pulları daha önce planlanan şekilde dokuza dört toplam 13 tane olmak üzere iki farklı renkte verilmiştir. Grup bu sayıları dikkate almış ve asansör çıkarken ve inerken binen kişi sayılarını göstermek için farklı renkler kullanmıştır. Oluşturdukları modelin kareye benzer olduğunu söylemişler ancak kare olmadığını da fark etmişlerdir. Dolayısıyla sayma pullarıyla üçe üçlük bir kare oluşturmuşlar dört tane sayma pulunu ise oluşturdukları karenin kenarlarının etrafına koymuşlardır. Fakat modelden kullandıkları sayma pullarını kolay sayılabilecek bir yöntem geliştirememişlerdir. Bunu fark eden araştırmacı gruptan inerken ve çıkarken binenleri göstermek için kullanılan sayma pullarını birbirinden bağımsız olarak düşünüp kolay sayılabilecek bir hale getirmelerini istemiş, bunun üzerine grup sayma pullarından iki kare elde etmiştir. Bu kareleri ilk anda elde ettiklerinde kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri görememişler dolayısıyla 'model for'u oluşturamamışlardır. Araştırmacı modeldeki toplam sayma pulu ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri daha iyi görebilmeleri için asansörün son olarak yedinci kata çıkıp indiği modeli yapmalarını istemiştir. Grup modeli hemen oluşturmuştur ve bu modelden de iki tane kare elde edebilmişlerdir. Ancak oluşturdukları iki karedeki toplam sayma pulu sayısını da n^2 olarak belirtmişlerdir. Grup bu durumda da modelde ve daha sonra oluşturdukları iki karede kullanılan sayma pulları arasındaki ilişlileri göremediği için araştırmacı gruba problem 4-a için hem modeli hem de oluşacak kareleri tekrar oluşturmalarını istemiş ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri fark etmeleri için rehberlik yapmıştır. Grup aritmetiksel işlemler olarak ilişkileri fark etmesine ve yatay matematikleştirme sürecinin son ürünü sayılabilecek 'model of'u oluşturmasına rağmen modelin kenar uzunluklarını ve modeli oluşturan sayma pulu sayısı arasındaki ilişkileri cebirsel olarak bunu ifade edememiş, dikey matematikleştirme sürecine ait bir matematiksel formül kuramamıştır. Böylece bu problem için bir 'model for' oluşturamamıştır. Bu ilişkilerin grupça keşfedilmeye çalışılması zaman yetmediğinden araştırmacının rehberliğinde etkinlikten sonraya bırakılmış ve ders sonrası tamamlanmaya çalışılmıştır.

3.4.3. İç içelik prensibi

Bu etkinliklerdeki problem durumları ve daha genel çözüme ulaşılması için yapılacak modeller ile bir argümana ulaşma durumu matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlamaktadır.

Bu etkinlikte problem 4-a'da gerçek hayat durumunu aritmetiğe aktararak problem 4-a için doğru bir çözüm bulmuşlardır. Bu kısımda gerçek hayat durumundan aşağıdaki şekilde örnekleri görüldüğü gibi aritmetiğe ve sembole geçiş vardır (Şekil 3.39).



a b

Şekil 3.39. *Üçüncü (a) ve dördüncü (b) grubun problem 4-a için yaptıkları çözümler*

Problem 4-b’ye geçmeden önce odak grup Şekil 3.32’deki görseli çizmiştir. Odak grup çizdikleri şekil ile problem 4-a’daki sayılar arasında bir ilişki kurmuştur. Burada geometri ile aritmetik arasında bir ilişkiden söz edilebilir. Grup problem 4-b’yi okuduğunda ise problemi orantıyla çözmeyi denemiş ancak cevabı orantıyla bulamayacağını anlamıştır. Araştırmacıdan sayma pullarını isteyen grup Şekil 3.32’deki çizdikleri görseli sayma pullarıyla oluşturmuş ve problem 4-a’daki sayıları oluşturdukları modeldeki sayma pullarıyla ilişkilendirmiştir.

Sayma pullarını alan gruplar tarafından genelde oluşturulan model Şekil 3.31 ve Şekil 3.35’te gösterilen modellerdir. Tüm grupların istenildiği gibi inişte ve çıkışta binen yolcu sayılarını farklı renkteki sayma pullarıyla ilişkilendirmesi etkinliğin amacı açısından olumlu bir davranıştır. Gruplar gerçek hayat problemini önce sayılarla ifade etmiş, bu sayıları sayma pullarıyla ilişkilendirerek bir model oluşturarak aritmetik ve geometri arasında bir ilişki kurmuştur.

Odak grup asansöre çıkarken binen yolcu sayılarını 2n-1 ile ifade edebilmiş, cebirsel ifadenin, modeli asansöre çıkarken binen yolcu sayısıyla ilişkilendirdiği sayma pullarıyla uyumlu olduğunu göstermiştir. Burada grubun cebir ile aritmetik ve geometri arasında bir ilişki kurduğu görülmektedir.

Odak grup modelin birinci aşamasını oluştursa da ikinci aşamasını oluşturabilmek için araştırmacının rehberliğine ihtiyaç duymuştur. Araştırmacı rehberliğiyle grup farklı renkteki pullar ile iki tane kare oluşturup pulları kolay yoldan sayılabilecek hale getirmiştir. İki aşamalı modeli oluşturan bu grup kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi aritmetiksel olarak görmüş ve geometri ile aritmetik arasında bir ilişki kurmuştur. Fakat grup ulaştıkları aritmetik ve geometri arasındaki ilişkiyi cebire tam olarak aktaramamıştır.

İkinci grup da problem 4-a'daki sayısal ilişkileri kullanarak sayma pulları ile modeller oluşturmuştur. Model oluşturmak için kullandığı sayma pullarını kolay sayabilmek için modeli dikdörtgene tamamlamıştır. Dikdörtgene tamamlamak için kullandığı sayma pulu sayısının asansörün çıktığı en üst kat sayısı olduğunu keşfetmiştir. Dikdörtgenin kısa kenarını n, uzun kenarını 2n olacak şekilde cebirsel olarak ifade etmiştir. Fakat daha önce de bahsedildiği gibi dikdörtgeni oluşturmak için kullandığı sayma pullarını da n olarak ifade etmiş dolayısıyla asansöre binen toplam kişi sayısını cebirsel olarak n.(2n)-n olarak ifade etmiştir. Grup ulaştıkları formülü diğer adımlar için denediklerinde doğru çıkmadığını anlayınca başka modeller oluşturmaya çalışmış ama genel kuralı elde edecek bir model oluşturmayı başaramamıştır. Yine de burada grup gerçek hayat durumu probleminden aritmetiğe geçmiş, problem 4-a'daki sayısal ilişkileri kullanarak bir geometrik model oluşturmuş, bu geometrik modelin kenar uzunluklarını cebirsel olarak ifade etmiş ve bununla yanlış da olsa bir genel kurala ulaşmaya çalışmıştır. Bu grubun da etkinlikte aritmetik, geometri ve cebir arasında ilişki kurduğu söylenilebilir.

3.4.4. Kademeli tertip etme süreci

Öğrencilerin bu problemin yatay matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerde aktif olduğu ancak, problemin 'model of'unu oluşturma iki aşamalı bir süreç içerdiği için dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerde gruplarda etkinlik ve etkileşimin azaldığı görülmüştür.

Odak grup ve ikinci grup daha problem 4-b'ye geçmeden problem 4-b için hazırlık olabilecek etkinliklerde bulunmuştur. İkinci grup sayma pullarını istemiştir. Diğer grup problem 4-a'nın sayısal ilişkilerini kullanarak bir geometrik model oluşturmuştur. Bazı gruplar da model oluşturmaya çalışmalarına rağmen bunu başaramamışlar, üçüncü grup aritmetiksel işlemlerle bir kural oluşturmaya çalışmıştır. Altıncı grup ise sadece sorunun cevabına yönelik bir çözüm yapmaya çalışmıştır.

Diğer gruplar genel olarak problem 4-b'nin çözümünü hesaplamaya yönelik etkinlikler yapmalarına rağmen, ikinci grup ve odak grup problemin genel çözümüne ait bir kuralı bulmaya çalışırken problem 4-b'ye özel çözümü yapmayı göz ardı etmişlerdir. Bu durum iki grubun düşünsel olarak ilerlediğinin göstergesi olduğu söylenebilir.

Grupların karar defterlerine bakıldığında öğrencilerin problem 4-a için doğru çözümler yaptıkları görülmüştür. Geçen haftaki matematiksel yazımlara göre özellikle problem 4-b için genel bir kural yazmaya çalışırken öğrencilerin cebirsel ifadeleri daha fazla kullandıkları görülmüştür. Fakat bu etkinlikte cebirsel olarak genel bir kurala ulaşamayıp problemin matematiksel formülünün kurulamaması matematiksel yazımın gelişiminin kontrolü açısından araştırmacıyı zorlamıştır.

Gruplar etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi bu etkinlikte zorlanmışlardır. Modelin iki aşamalı oluşturulması ve farklı renkteki modellerin ayrı ayrı düşünülmesi gerekliliğinin ilk defa ortaya çıkması grupları zorlamıştır. Ama öğrencilerin geliştirdikleri argümanları çeşitli adımlarda deneyerek argümanlarını kontrol etmeleri formel yönteme doğru ilerlemeleri için önemlidir. Ayrıca kendi aralarında tartışırken gitgide daha cebirsel bir dil kullanmaları ve farklı farklı argüman geliştirmeye çalışmaları da formel yönteme doğru ilerlemeye başladıklarının göstergeleri olduğu söylenebilir.

Etkinlik 4'teki öğrenci süreçleri Tablo 3.4'te özetlenmiştir.

Tablo 3.4. *Etkinlik 4'teki öğrenci süreçleri*

	Model of'tan model for'a geçiş	**İç içelik prensibi**	**Kademeli tertip süreci**
Odak grup	- Problem 4-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşmıştır. - Model for'a etkinlik süresince ulaşamamıştır.	- Problem 4-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmuştur. - Matematiksel formülü etkinlikten sonra oluşturmuştur.	- Problemi okuduklarında genel kurala yönelik şekil çizmiştir. - Çıkarımlarını denemiştir. - Cebirsel dili daha sık kullanmıştır. - Matematiksel merakının arttığı gözlenmiştir.
Grup 2	- Problem 4-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşmıştır. - Model for'a ulaşamamıştır.	- Problem 4-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kurmuştur.	- Genel bir çözüm uğraşındadır. - Sayma pullarını ilk isteyen gruptur. - Çıkarımlarını denemiştir. - Cebirsel dili kullanmıştır.

Grup 3	- Problem 4-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'un ilk aşamasına ulaşmıştır. - Problem 4-b için özel çözüm bulmuştur.	- Problem 4-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Sayma pullarını almasına rağmen sayısal ilişkilerden çıkarım yapmaya çalıştığı için alanlar arası kurduğu ilişki sınırlıdır.	- Sayısal ilişkilerden çıkarımlar yapmaya çalışmıştır. - Çıkarımlarını denemiş ancak genel çözüme ulaşamamıştır.
Grup 4	- Problem 4-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'un ilk aşamasına ulaşmıştır. - Problem 4-b için özel çözüm bulmuştur.	- Problem 4-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Sayma pullarıyla modeli oluşturmaya yeterince vakit ayırmamıştır. - Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - 75. adım sorulunca sayma pullarıyla genel çözüm oluşturmaya çalışmıştır.
Grup5	- Problem 4-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'un ilk aşamasına ulaşmıştır. - Problem 4-b için özel çözüm bulamamıştır.	- Problem 4-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.
Grup 6	- Problem 4-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla çalışmamıştır.	- Problem 4-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kuramamıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.

3.5. Beşinci Etkinlikle İlgili (Küp Problemi) Bulgular

3.5.1. Rehberlik prensibi

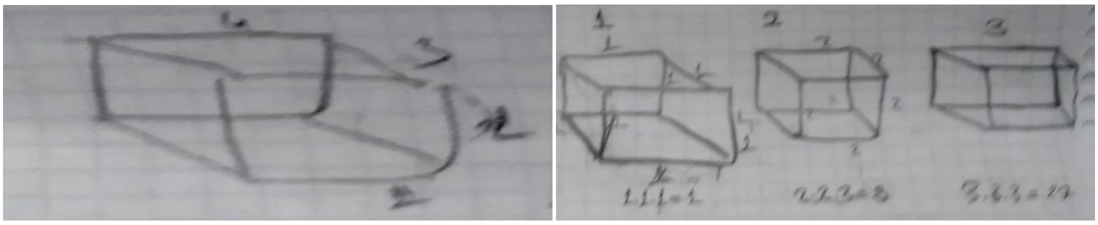
Bu etkinliğe geçmeden önce problem durumu bir küpün hacmini hesaplama ile doğrudan ilgili olduğu için araştırmacı önce öğrencilerin bu konudaki hazırbulunuşluğunu kontrol edip, küpün hacmini bulmayla ilgili bazı hatırlatmalar yapma gereğini duymuştur. Bu hatırlatmalardan sonra problem 5-a gruplara dağıtılmıştır.

Etkinliğin başında bazı gruplar ve öğrenciler rehberliğe ihtiyaç duymuşlardır. Yapılan bu rehberliklerden bazıları etkinlik öncesi tahmin edilebilse de bazıları tahmin edilememiştir. Bazılarının tahmin edilememesinin nedeni öğrencilerin küp ve hacim kavramlarıyla ilgili olması gereken bilgi seviyelerinin yeterli olmamasıdır. Etkinlik boyunca öğrencilere yapılan rehberlik aşağıda detaylandırılmıştır.

3.5.1.1. Araştırmacının problem 5-a için yaptığı rehberlik

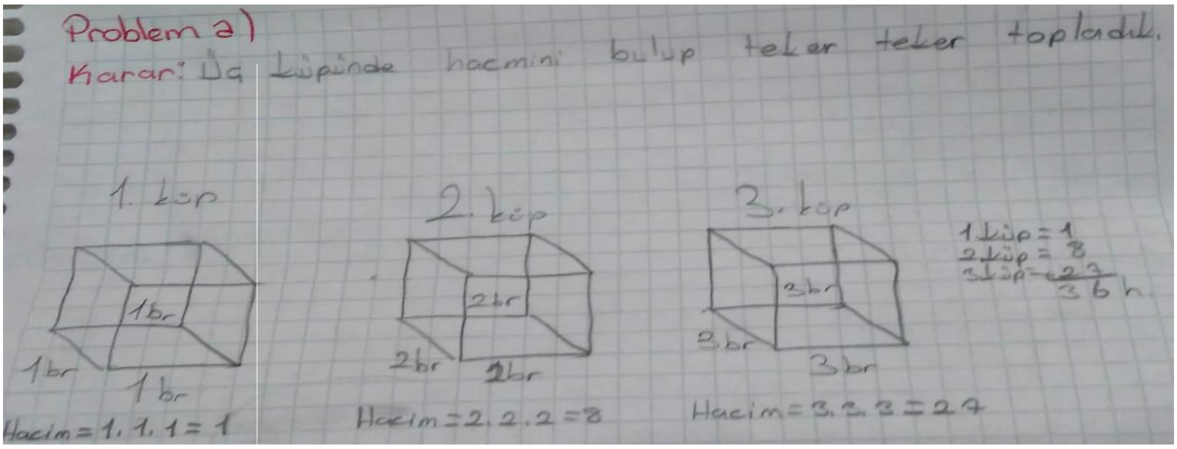
Odak grup, ikinci, üçüncü ve altıncı grup problem 5-a’nın çözümünü zorlanmadan yapmıştır. Dördüncü grup ise oluşturulan küplerin hacimlerini bulduktan sonra toplam hacmi bulmak için buldukları hacimleri toplamak yerine çarpmıştır. Araştırmacı gruba “Yaptığınızın doğruluğundan emin misiniz? İsterseniz bir kontrol edin.” deyince bu grup da doğru çözümü yapmıştır.

Beşinci grup bir küpü çizdikten sonra ayrıt uzunluklarını birer birer artırarak aşağıdaki şekildeki gibi farklı almıştır. Araştırmacının “Ayrıt uzunlukları farklı olan küp olabilir mi?” sorusundan sonra grup hem yanlışlarını düzeltmişler problem 5-a’ya uygun şekiller çizerek problem 5-a’nın çözümü için doğru bir cevap bulmuşlardır (Şekil 3.40).



Şekil 3.40. *Beşinci grubun rehberlik öncesi ve sonrası problem 5-a’ya yönelik çizimleri*

Odak grubun problem 5-a’nın çözümüne yönelik karar alıp, aldığı kararı uygulayıp, çözüme ulaşması yaklaşık 3,5 dakika sürmüştür.



Şekil 3.41. *Odak grubun problem 5-a için çözümü*

3.5.1.2. Araştırmacının problem 5-b için yaptığı rehberlik

Problem 5-a'yı diğer gruplardan önce çözen odak grup problem 5-b dağıtılmadan önce problem 5-b'nin ne olabileceğini tahmin etmeye çalışarak problem 5-b'nin çözümü hakkında fikirler üretmeye çalışmıştır. Bu sırada odak grubun kendi aralarındaki etkileşim aşağıdaki gibidir:

> Emir: Sayma pulu isteyelim mi?
>
> Mehmet: Soruyu görüp... İsteyelim.
>
> Emir: Kaç tane isteyeceğiz?
>
> Mehmet: 36 tane isteyebiliriz.
>
> Emir: Bunun ikinci sorusunu nasıl devam ettirebilir ki, bunun?
>
> Mehmet: Yine küp yapar. 15. adımda kaç tane…
>
> Onur: Aynen… Başka bir sayı daha verir küp sayısını onu isteyebilir.
>
> Mehmet: Geçen haftaki formüllerle bir şeyler yapabiliriz.
>
> …
>
> Emir: 25. adımdaki küpü soracak, toplamını soracak. Toplamdan sonra sayma pullarını isteriz. Onun için de toplamını nasıl bulacağız diye soracak öğretmen yine? Bunu nasıl sayı puluna dökebiliriz ki bunu? Kenar sayı uzunluğuna n dersek…

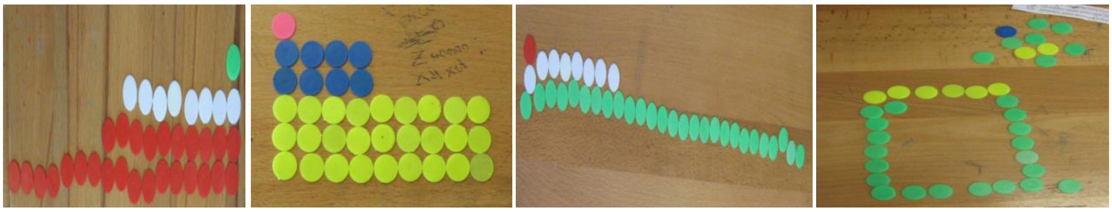
Tüm gruplar problem 5-a için doğru çözüme ulaşmıştır ve zaman kaybını önleme adına problem 5-a'nın çözümü tahtada bir öğrenciye yaptırılmamıştır.

Problem 5-a'yı çözen gruplara problem 5-b dağıtılmıştır. İkinci grup problem 5-b dağıtılmadan yine sayma pullarını istemiştir. Aynı zamanda odak grubun da problem 5-b dağıtılmadan sayma pullarını isteme düşüncesi olduğu kayıttan anlaşılmıştır.

Etkinlik öncesinde grupların genel bir kurala ulaşmasının kolay olmadığı, bazı grupların küplerin hacimlerinin teker teker toplayarak bir sonuca ulaşmaya çalışabileceği tahmin edilmiştir. Diğer etkinliklere göre zor olan bu etkinliği kolaylaştırmak adına her küpün hacmini göstermek için kullanılan sayma pullarını farklı renklerde verilmesi düşünülmüştür.

Beş grup problem 5-b dağıtıldıktan kısa bir süre önce veya sonra sayma pullarını istemiştir. Altıncı grup ise etkinliğin sonlarına doğru sayma pullarını istemiş ama sayma pullarıyla çok çalışamamıştır.

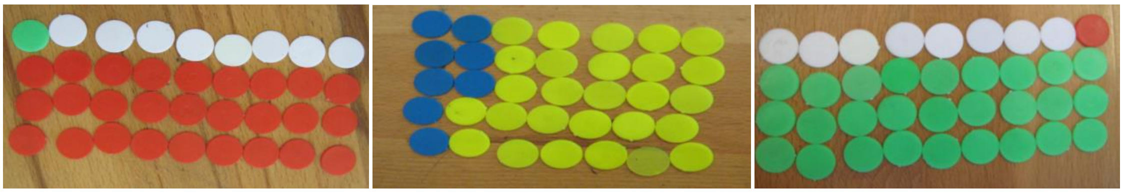
İkinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci gruplar sayma pullarını istemelerine rağmen adımları teker teker hesaplamaya çalışmıştır. Bir cevap bulduklarını düşündüklerinde araştırmacı adım sayısını fazlalaştırarak grupların sayma pullarıyla bir genel kurala ulaşmalarını sağlamak istemiştir ama problem 5-a için sayma pullarıyla oluşturdukları model istenen bir model olmadığı için bu aşamadan sonra ilerlemeleri kolay olmamıştır (Şekil 3.42).



a b c d

Şekil 3.42. *İkinci (a), üçüncü (b), dördüncü (c) ve beşinci (d) grubun oluşturdukları ilk modeller*

Araştırmacı bu modelleri oluşturan grupları: "Sayma pullarını kolay yoldan sayabilmek için ne yapıyorduk?" diye rehberlik yapınca gruplar sayma pullarını aşağıdaki şekillerdeki gibi dikdörtgen haline getirmeye çalışmışlardır (Şekil 3.43).



a b c

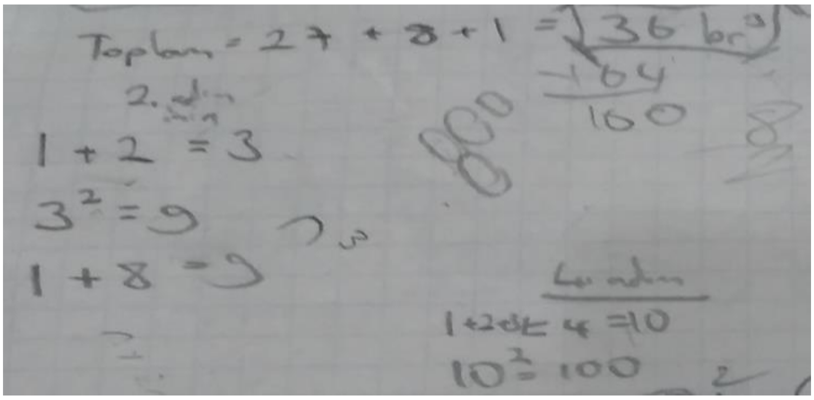
Şekil 3.43. *İkinci (a), üçüncü (b) ve dördüncü (c) grubun oluşturdukları dikdörtgen modeller*

Altıncı grup sayma pullarını kullanmadan oluşan küplerin hacimlerini adım adım hesaplarken diğer dört grup ilk oluşturdukları modelleri araştırmacının yönlendirmesiyle bir şekilde dikdörtgene tamamlamaya çalışmışlardır. Ancak tüm bu gruplarda oluşturulan dikdörtgenin kenar uzunluklarını problem 5-a ile ilişkilendirebilen grup olmamıştır. Odak grup ve ikinci grup model oluşturma çalışmalarına devam ederken diğer gruplar problem 5-b'nin cevabını teker teker hesaplamaya çalışmışlardır.

Teker teker hesaplamaya çalışan gruplardan doğru cevabı bulan gruplar olmuştur. Araştırmacı bu grupları tekrar sayma pullarına yönlendirmek için daha uzak adımlar sormuştur. Fakat gruplar her ne kadar uzun sürse de teker teker hesaplama eğilimine devam etmişlerdir.

Odak gruptaki öğrenciler problem 5-b'yi okuduklarında önce ne yapacaklarını tartışmışlardır. Gruptan biri küplerin hacimlerini teker teker hesaplamayı teklif etmiş, diğerleri bunun çok uzun süreceğini söyleyip sayma pullarını kullanmayı ve araştırmacıdan problem 5-a'nın çözümü olan 36 adet sayma pulu istemeyi kararlaştırmışlardır. Bu arada problem 5-a'daki sayısal ilişkileri inceleyen gruptaki öğrencilerden biri oluşturulan küplerin bir ayrıt uzunlukları toplamının karesinin oluşan küplerin hacimleri toplamına eşit olduğunu fark etmiş ve bunu arkadaşlarına açıklamıştır. Gruptakiler arkadaşının argümanını bir önceki ve sonraki adımlarda doğru olduğunu gördükten sonra araştırmacıya anlatmaya karar vermişlerdir. Bu sırada aralarında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

> Emir: Arkadaşımın şöyle bir şey aklına gelmiş de… Arkadaşım dedi ki küplerin kaçıncı sırada olduğu sıra sayısı toplamının karesi hacimlerinin toplamına eşit dedi.
>
> A: Nasıl mesela? Bir örnek gösterir misiniz?
>
> Ahmet: Mesela 1+2=3 çıkıyor, 3+3=6, 6'nın karesi 36 oluyor.
>
> Mehmet: Toplamı oluyor.
>
> Emir: Diğerinde de oluyor.
>
> A: Mesela ilk hangisinde denediniz? Bir önceki adımı deneyin mesela. Bir sayısal olarak göreyim ben onu.



Şekil 3.44. *Odak grubun argümanını denediği örnekler*

Araştırmacı gruba: "Peki bunun doğruluğuna beni nasıl ikna edersiniz, tamam böyle örnek gösterebiliyoruz ama hepsinin doğru olacağını söyleyebilir miyiz?" diyerek grubun sayma pullarıyla model yapma ihtiyacı duymasına çalışmıştır. Grup daha önce kararlaştırdıkları sayma pullarını araştırmacıdan istemiştir.

Araştırmacı odak gruba daha önce bahsedilen sebeplerden dolayı bir yeşil, sekiz pembe, 27 tane de siyah sayma pulu vermiştir. Araştırmacı gruba neden bu şekilde sayma pulları verdiğini sorunca grup, her farklı renk oluşan küpün hacimlerini temsil ediyor diye cevap vermiştir.

Video kayda göre gruptaki öğrenciler ulaştıkları argümandan oluşturacakları modelin kare olması gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Toplam 36 pul olduğuna göre altıya altı bir kare oluşturmaya çalışmışlar ve renkleri de göz önünde bulundurarak aşağıdaki modeli oluşturmayı başarmışlardır (Şekil 3.45).

Şekil 3.45. *Odak grubun oluşturduğu model*

Etkinlik öncesinde öğrencilerin sayısal ilişkilerden bir argümana ulaşmaları beklenmemektedir. Böyle bir argümana da hâlihazırda ulaşabilen sadece bir grup olmuştur. Araştırmacının bu aşamada gruptan beklediği argümanlarından oluşturdukları modeli çözümlemesidir. Dolayısıyla gruba modeli incelemesi ve çözümlemesi için zaman vermiştir. Çünkü araştırmacı, grubun önce bir argüman bulup sonra modele ulaştığı için oluşturdukları modelde kenar uzunlukları ve toplam sayma pulu arasındaki ilişkiyi daha keşfedememiş olabileceklerini düşünmektedir. Bunu anlamak için grupla araştırmacı arasında aşağıdaki gibi bir diyalog geçmiştir:

A: Pulları nasıl kolay sayıyoruz burada?

Emir: n^2.

A: n^2 diyorsunuz şimdi. Üçüncü küpte üçün karesini mi alacağız?

Emir: Adımların sayısının toplamının karesi…

A: Bu modelde onları nasıl görebiliriz?

Emir: Şu mesela birinci adım ya, birinci adım burada da birinci adım. 1.1=1, ikinci karede burası (pembe sayma pullarını işaret ederek) toplamı, birinci adım ve ikinci adım toplamı üç burada da üç, 3.3, 8+1= 9, o zaman burasının tamamı üçüncü küp, ikinci küp beş, altı, burası da altı (modelin tüm kenar uzunluğunu göstererek) altının karesi…

Araştırmacı grubun modelin kenar uzunluklarını altı olarak değil 1+2+3 olarak görmelerini istemektedir. Dolayısıyla grubu modeli incelemeleri ve çözümlemeleri için biraz daha zaman vermiştir. Grup video kayda göre kenar uzunluklarının toplamını ayrı ayrı ifade etmektedir ancak işlem olarak bunu 1+2+3 şeklinde ifade ederken çok zorlanmıştır. Araştırmacı modelin kenar uzunluklarını farklı renkteki pulların toplamıyla ifade etmelerini istediğinde grup kenar uzunluğunu 1+2+3 olarak ifade edebilmiştir.

Araştırmacı (grubun 1+2+3+…+n cevabını vermesini bekleyerek) gruba n. adımda modelin kenar uzunluğu ne olur diye sorunca grubun hemen cevap veremediği görüldüğünden kendi aralarında tartışmaları için gruba süre verilmiştir. Grup kendi aralarında tartışırken modelin bir kenar uzunluğunu 1+2+3+…+n şeklinde ifade edebilmiş fakat modeldeki toplam sayma pulu ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıkça ortaya koyamamıştır. Araştırmacı grubun bunu açıkça ortaya koyabilmesi için yaptığı rehberlik aşağıdaki gibidir:

A: Bu ifadeyi nasıl buldunuz?

Emir: Bunların çarpımı…

A: Bunların çarpımı bunu verir mi? Bu neye eşit? ((1+2+3+…n).(1+2+3+…+n) ifadesi bir kenar uzunluğu birden başlayıp n'ye kadar oluşan tüm küplerin hacimleri toplamı olan $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ ifadeye eşittir).

Emir: Bunların çarpımına eşit.

A: Şunun formülünü biliyor musunuz siz? (1+2+3+…+n) Hani ilk hafta yaptığımız etkinlik olabilir mi?

Mehmet: n.n/2 mi?

A: Emin misiniz? Gerçi o hafta siz yoktunuz, siz vardınız. İş size düşüyor birinci etkinlik…

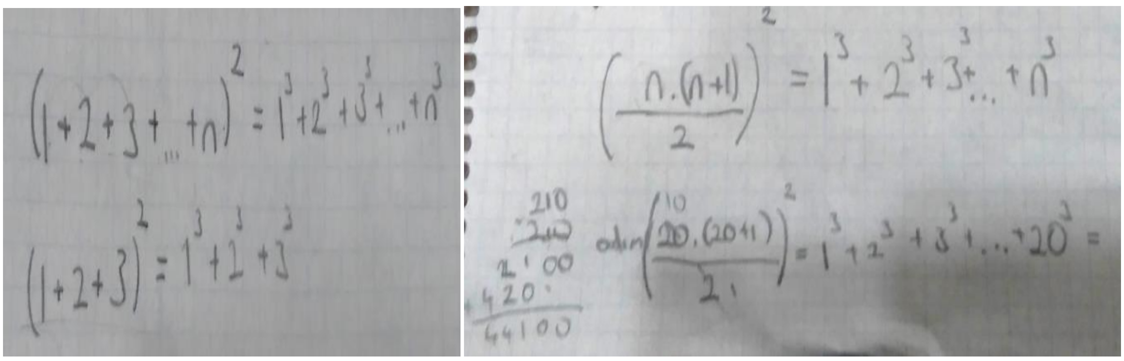
Onur: İlk hafta ne yapmıştık, ne yapmışlardı? Dikdörtgene tamamlamışlardı galiba…

A: Bir hatırlayın bakalım…

Öğrencilerin bunlarla ilgili alıştırma ve tekrar yapma fırsatı bulamadıkları ve bu tür etkinlikleri de haftada iki saat yaptıkları için daha haftalarda ulaştıkları genel sonuçları bazen unuttukları görülmüştür. Araştırmacı gruba ulaştıkları genel kuralı cebirsel formüle dökmeleri için rehberlik yapmaya devam etmiştir.

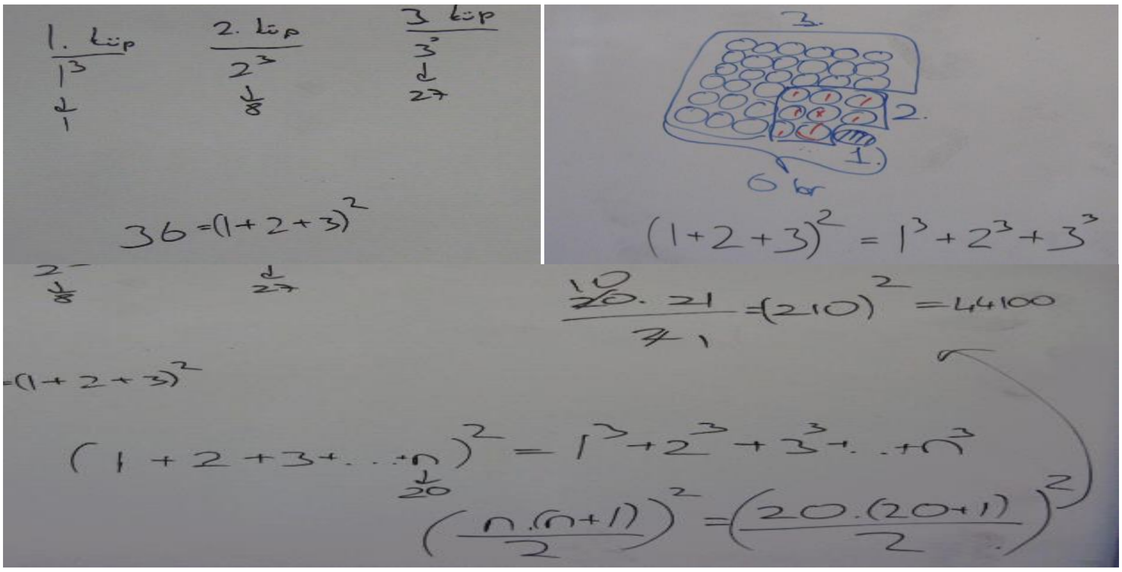
> A: Bir şeyin kendisiyle çarpımını nasıl ifade edebiliriz?
>
> Emir: n^2.
>
> A: n'yi kendisiyle çarparsak n^2, bunu (1+2+3+…+n)'i kendisiyle çarparsak… Bir şeyin kendisiyle çarpımını nasıl ifade edebiliriz?
>
> Ahmet: n^2.
>
> A: Ama hep neden n'ye gidiyorsunuz? x olsun mesela, x'i x'le çarparsak…
>
> Emir: x'in karesi olur.
>
> A: x+1'i x+1 ile çarparsak…
>
> Emir: x+1'in karesi olur.
>
> A: x+y+1'in kendisiyle çarpımını nasıl ifade edersiniz?
>
> Emir: $(x+y+1)^2$. (yazarak ifade etmiştir)
>
> A: Evet. Böyle ifade etmez miyiz? (Emir'in yazdığına işaret ederek). Peki, şunun kendisiyle çarpımını nasıl ifade edersiniz (1+2+3+…+n ifadesini işaret ederek…)? Altına yazalım, daha temiz bir yer olsun.

Bu etkinlikte bazı gruplar problem 5-b için aritmetiksel hesaplarla bir çözüme ulaşsalar da etkinliğin amacına uygun çözümlere araştırmacının da rehberliğiyle ulaşan sadece odak grup olmuştur (Şekil 3.46).



Şekil 3.46. *Odak grubun genel kuralı cebirsel ifadesi*

Grup ulaştığı genel kuralı sınıf içindeki diğer gruplara da anlatmış ve ulaştıkları genel kural ile problem 5-b'nin çözümünü yapmıştır (Şekil 3.47).



Şekil 3.47. *Odak grubun tahtada paylaştığı sonuçlar*

3.5.2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci

Gruplarda bir kişi problem 5-a'yı sesli olarak okumuş, diğerleri dinlemiştir. Hacim hesabının araştırmacı tarafından hatırlatılmasının da sağladığı tüm gruplar problem 5-a için bir çözüme ulaşmışlardır. Gruplar bu aşamada yatay matematikleştirme yapmış ve probleme özgü bir çözüm oluşturmuşlardır. Bu gruplardan ikinci grup sayma pulu istemeye karar vermiş, odak grup ise problem 5-b'nin ne olabileceği konusunda kendi aralarında tahminler bulunmuştur. Bu gruplar dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinlikler yapmaya hazırlanan gruplardır.

Etkinlik öncesinde tahmin edildiği üzere öğrenciler bu etkinlikte genel bir kurala ulaşmakta çok zorlanmışlardır. Sadece odak grup problem için genel bir kurala ulaşabilmiştir. Tüm gruplar problem 5-b'yi okuduktan sonra genel bir kurala ulaşmak için araştırmacıdan sayma pullarını istemişlerdir. Odak grup ve ikinci grup hariç diğer gruplar sayma pullarıyla istenilen şekilde bir model oluşturamadıkları için küplerin hacimlerini teker teker hesaplayıp bunları toplamaya çalışmışlardır. Altıncı grup ise problem 5-b'nin çözüm stratejisi olarak neredeyse etkinliğin sonuna kadar oluşturulan küplerin hacimlerini teker teker hesaplayıp bunları toplamayı seçmiş ve sadece yatay matematikleştirme sürecinde çalışmalar yapmıştır.

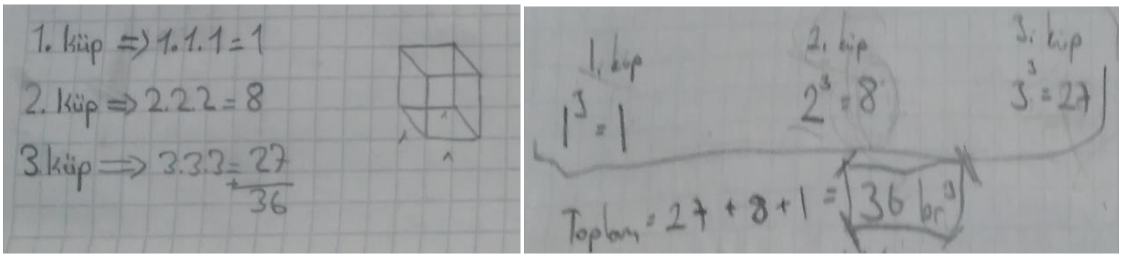
İkinci grup sayma pullarıyla çeşitli modeller oluşturmuştur. Bu pulları kolay sayabilmek için bu pullarla dikdörtgensel model de oluşturabilmiştir. Ancak bu grubun benzer modeli oluşturan gruplar gibi oluşturdukları modeli çözümleyemediği ve bu modelden problemin çözümü için kullanabilecekleri bir genel kurala ulaşamadıkları görülmüştür. Bu grup problemin genel çözümüne ait bazı argümanlar geliştirebilseler de argümanlarının doğru olup olmadığını denemişler ve yanlış bir argümana ulaştıklarını görmüşlerdir. Grubun bu süreçte dikey matematikleştirme sürecine yönelik etkinliklerde bulunmaya çalışmasına rağmen problem için bir 'model of'a da ulaşamadığı görülmüştür. Ancak yine de problem 5-b için çözümü için teker teker hacimlerini bulup bunları toplayarak doğru bir çözüme ulaştıkları görülmüştür. Bu grubun da problemi teker teker hesaplamaya çalışıp problem 5-b için doğru bir çözüme ulaşan grup gibi yatay matematikleştirme sürecine devam ederek problem 5-b için bir özel çözüm bulduğu söylenebilir.

Odak grubun problem 5-b'ye geçmeden önce kendi aralarında problem 5-b'nin ne olabileceğini tahmin etmeye çalışarak bunun çözümü hakkında tartışmalarının dikey matematikleştirme sürecine geçiş etkileşimi olarak değerlendirilebilir. Video kayda göre grubun problem 5-b'nin genel çözümü için sayma pullarını kullanacağı kararlaştırılmıştır. Fakat sayma pulları gruba ulaşmadan önce gruptaki öğrencilerden araştırmacının beklemediği bir şekilde problem 5-a'daki sayısal ilişkilerden yararlanarak (Şekil 3.44) problem için genel bir çözüme ulaşmayı başarmış ve problemin çözümünün oluşturulan küplerin bir ayrıt uzunlukların toplamının karesi olduğunu belirterek problem için bir genel çözüm bulabilmişlerdir. Sözel ve işlemsel olarak oluşturdukları argüman ile sayma pullarını kullanarak problem için bir 'model of' oluşturmuşlar oluşturdukları modelin kenar uzunlukları ve toplam sayma pulu arasındaki ilişkileri çözümleyerek problem için bir matematiksel formül kurmuşlar ve problemin 'model for'unu oluşturmuşlardır (Şekil 3.46). Grup, problem için ulaştıkları cebirsel olarak ifade ederken geçen haftalarda öğrendikleri birden n'ye kadar olan sayılan toplam formülünü de kullanarak bildikleriyle ulaştıkları arasında istenilen bir bilgi sıçraması olmuş, matematiksel bilginin daha önce sahip olunan matematiksel bilgi içerisine yerleştirildiği dikey matematikselleştirme süreci yaşamışlardır.

3.5.3. İç içelik prensibi

Bu etkinliklerdeki problem durumları ve daha genel çözüme ulaşılması için yapılacak modeller ile bir argümana ulaşma durumu matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlamaktadır.

Gruplar problem 5-a'yı okuduktan sonra gerçek hayat durumunu aritmetiğe aktararak problem 5-a için doğru bir çözüm bulmuşlardır. Bu kısımda gerçek hayat durumundan aşağıdaki aritmetiğe ve sembole geçiş vardır (Şekil 3.48).



a b

Şekil 3.48. *Üçüncü grubun (a) ve odak grubun (b) problem 5-a çözümü*

Bir grup hariç diğer beş grup da problem 5-b'nin çözüm aşamasının başında bir model oluşturup genel bir kural bulabilmek için sayma pulu istemiştir. Sayma pulunu etkinliğin sonlarına doğru isteyen altıncı grup ise problemin çözümünü sadece sayısal işlemlerle yapmayı tercih etmiştir. Gruplar problem 5-a'da gerçek hayat durumundan sembol ve aritmetiğe, problem 5-b'de sayma pullarıyla oluşturdukları modellerle ise aritmetikten geometriye geçiş yaptıkları söylenebilir. Ayrıca bu gruplar problem 5-a'yı temel alarak sayma pullarıyla oluşturdukları modelleri sayma pullarını daha kolay sayabilmek adına geometrik bir nesne olan dikdörtgene dönüştürmüşlerdir. Ancak oluşturdukları modeller istenilen model olmadığı ve oluşturdukları modellerdeki toplam sayma pulu ve kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri çözümleyemedikleri için bu gruplar genel kurala ulaşamamış ve bunu ifade edebilmek için aritmetikten veya geometriden cebire geçiş yapamamışlardır. Etkinlik öncesinde öğrencilerin istenilen modeli oluşturamadıkları takdirde bu geçişi yapmalarının çok zor olabileceği tahmin edilmiştir.

Odak grup problem 5-a için bir çözüm bulup sayma pullarını istemeye karar verdikten sonra, sayma pullarını almadan gruptaki öğrencilerden problem 5-a'daki sayısal ilişkilerden bu problem için genel bir çözüme ulaşmıştır. Dolayısıyla grup modelden genel kurala ulaşmak yerine, araştırmacının da rehberliğiyle genel kuraldan modele ulaşmıştır. Grup öncelikle gerçek hayat durumundan problem 5-a için bir çözüm üreterek sembol ve aritmetiğe geçiş yapmış, sonra bu sayısal ilişkileri kullanarak problem için bir genel çözüme ulaşmıştır. Grup ulaştıkları genel çözümü ilk başlarda sözel olarak ifade edebilmiş, cebirsel olarak ifade edebilmek için araştırmacının rehberliğine ihtiyaç duymuştur. Araştırmacı yaptığı rehberlikle grubun dikkatini oluşturdukları modeldeki toplam sayma pulu ve kenar uzunluklarına çekerek grubun modeli çözümlemesini sağlamıştır. Grup modeli çözümleyince oluşturdukları modelin kenar uzunluklarını ve modeldeki toplam sayma pulunu cebirsel olarak ifade etmiş ve problem için genel çözümü yazabilmiştir. Böylece grup geometrik bir nesne olan modelden problemin genel çözümü olan cebirsel kuralı ortaya koyarak geometri ile cebir arasında bir ilişki kurmuştur.

3.5.4. Kademeli tertip etme süreci

Etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi öğrenciler bu etkinlikte genel kuralı bulma ve ifade etme açısından zorlanmışlardır. Dolayısıyla kademeli tertip etme sürecinin incelemesinde bu durum göz önünde bulundurulmuştur.

Tüm grupların ve özellikle daha yakından takibi yapılabildiği için odak grubun birbirleri ile iletişimlerinde daha cebirsel bir dil kullandıkları gözlenmektedir. Grubun oluşturdukları modeldeki toplam sayma pullarını ve modelin kenar uzunluklarını cebirsel olarak ifade etme eğilimlerinin arttığı gözlenmektedir.

İki grup daha problem 5-b'ye geçmeden bu aşamaya hazırlık olabilecek etkinliklerde bulunmuştur. İkinci grup genel kuralı bulmak adına model oluşturabilmek için sayma pullarını istemişlerdir. Odak grup da sayma pulu istemeye karar vermiştir ve daha problem 5-b verilmeden problem 5-b'nin ne olabileceği ve sayma pullarıyla ne yapacakları hakkında kendi aralarında tartıştıkları gözlenmiştir. Altıncı grup sayma pullarını etkinliğin sonlarına doğru istemiş fakat sayısal işlemlerle problemi çözmeye çalışmıştır. Ancak bunda da başarılı olamamıştır. Diğer gruplar sayma pullarıyla çalışmalarına rağmen ilerleyebilecekleri bir model oluşturamadıkları için problem 5-b'nin cevabı için sayısal işlemler yapmaya çalışmıştır. İki grubun problem 5-b verilmeden önce genel çözüme yönelik çalışma yapması, odak problem 5-b'nin ne olabileceğine yönelik tahmini ve tahminleri üzerinden bir çözüm üretmeye çalışması, çözüme yönelik bir argüman geliştirerek bunu matematiksel yöntemlerle test etmeleri etkinliklerin amacı açısından önemlidir. Bunun aksine altıncı grup ise etkinliklerin başından itibaren sadece sayısal çözümlerle sonuca gitmeye ve sadece problemin o durumuna özgü çözümler bulmaya çalışmıştır.

Grupların sayma pullarını aldıktan sonra problem 5-a'daki sayıları temele alarak pulları dizmesi ve onları kolay sayabilmek için dikdörtgensel bir geometrik nesne oluşturması stratejik ilerleme açısından önemlidir. Ayrıca video kayıttan grubun bazı yanlış argümanlar oluşturdukları ve bunları geçerli matematiksel yöntemlerle test edip, oluşturdukları argümanlarla devam edip etmeyeceklerine karar vermeleri de stratejik ilerlemeleri açısından önemlidir.

Öğrencilerin en az ilerleme gösterdikleri maddelerden biri matematiksel yazımdır. Öğrencilerin soruların çözümlerini bile en kısa şekilde yazarak yapmaya çalıştıkları gözlenmektedir. Dolayısıyla genel bir kurala ulaşan grupların bile bunu matematiksel olarak ifade ederken zorlandıkları görülmektedir ve bu etkinlikte de genel kurala ulaşan grubun en çok rehberliğe ihtiyaç duyduğu kısım ulaştıkları genel kuralı cebirsel olarak ifade ederken olmuştur.

Öğrencilerin geliştirdikleri argümanları çeşitli adımlarda deneyerek argümanlarını kontrol etmeleri formel yönteme doğru ilerlemeleri için önemlidir. Ayrıca kendi aralarında tartışırken gitgide daha cebirsel bir dil kullanmaları ve farklı farklı argüman geliştirmeye çalışmaları da formel yönteme doğru ilerlemeye başladıklarının göstergeleridir. Formel yönteme doğru ilerlemede en büyük eksikliklerden biri matematiksel yazımda ilerlemedir.

Etkinlik 5'teki öğrenci süreçleri Tablo 3.5'te özetlenmiştir.

Tablo 3.5. *Etkinlik 5'teki öğrenci süreçleri*

	Model of'tan model for'a geçiş	**İç içelik prensibi**	**Kademeli tertip süreci**
Odak grup	- Problem 5-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayısal ilişkilerden model for'a ulaşmıştır.	- Problem 5-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve	- Problem 5-b'yi ve çözümü tahmin etmeye çalışmıştır. - Çözüme yönelik çıkarımlar yapmış ve çıkarımlarını

	- Model for'dan model of'u oluşturmuştur.	cebir arasında ilişki kurmuştur. - Problemin cebirsel formülünü oluşturmuştur.	denemiştir. - Matematiksel dili sözlü ve yazılı olarak kullanmıştır. - Çözüm için bir genellemeye ulaşabilmiştir.
Grup 2	- Problem 5-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Problem 5-b'nin özel çözümünü yapmıştır.	- Problem 5-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Genel bir çözüm uğraşındadır. - Sayma pullarını ilk isteyen gruptur. - Çıkarımlarını denemiş çıkarımlarının yanlış olduğunu görmüştür.
Grup 3	- Problem 5-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Problem 5-b'nin özel çözümünü yapmıştır.	- Problem 5-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Sayma pullarını almasına rağmen sayısal ilişkilerden çıkarım yapmaya çalıştığı için alanlar arası kurduğu ilişki sınırlıdır.	- Sayısal ilişkilerden çıkarımlar yapmaya çalışmıştır. - Çıkarımlarını denemiş ancak genel çözüme ulaşamamıştır.
Grup 4	- Problem 5-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Problem 5-b için özel çözüm bulmuştur.	- Problem 5-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Sayma pullarını istemiş ancak model oluşturmaya yeterince vakit ayırmamıştır. - Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir.
Grup5	- Problem 5-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Problem 5-b için özel çözüm yapmaya çalışmıştır.	- Problem 5-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Modeli oluşturmaya çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.
Grup 6	- Problem 5-a için bir çözüm bulmuştur. - Sayma pullarıyla çalışmamıştır.	- Problem 5-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Geometri, aritmetik ve cebir arasında ilişki kuramamıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.

3.6. Altıncı Etkinlikle İlgili (Kaplama Problemi) Bulgular

3.6.1. Rehberlik prensibi

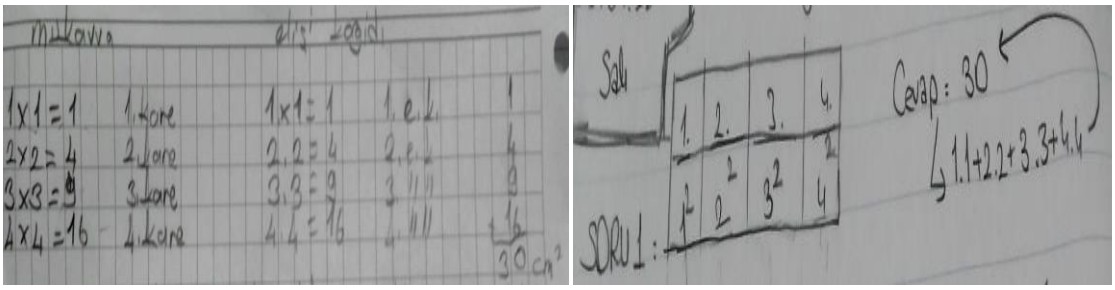
Bu etkinlikte genel kurala ulaşılması için sayma pullarından farklı bir materyal kullanılacağından öğrencilerin rehberliğe diğer etkinliklere göre daha çok ihtiyaç duyacakları tahmin edilmiştir. Etkinlik boyunca öğrencilere yapılan rehberlik aşağıda detaylandırılmıştır:

3.6.1.1. *Araştırmacının problem 6-a için yaptığı rehberlik*

Problem 6-a tüm gruplara dağıtılmıştır ve grup sözcüleri problemi gruplarına okumuşlardır. Altıncı grup problem 6-a'nın çözümü için ilk anda alan hesabı yapmak yerine çevre hesabı yapmış, araştırmacının 'Size problemde ne soruluyor, çevre mi alan mı?" sorusu üzerine o grup da problem 6-a için doğru cevabı yapmıştır. Bir önceki etkinlikteki problem durumu hacim hesaplaması ile alakalı iken bu etkinlikteki problem durumu alan hesaplaması ile alakalıdır. Öğrenciler alan hesabına daha aşina oldukları için problemi çözmede önceki haftakine göre daha başarılı olmuşlardır. Odak grubun problemi okuduktan sonra problem 6-a'yı anlama sürecindeki diyalogları aşağıdaki gibidir:

> Emir: Evet, şimdi ne demek istediğini anlamaya çalışalım. Ahmet'in matematik projesi varmış, projesi için mukavvadan kenar uzunlukları 1 cm'den başlayıp, mesela bire bir, birer birer artan dört kare oluşturacaktır.
>
> Mehmet: Geçen haftaki gibi…
>
> Emir: Hı hı…
>
> Onur: Oluşturdukları üst yüzeyler kaplanacakmış.
>
> Emir: Ama burada alanı soruyor bize, hacmini sormuyor. Bu karelerin üst yüzeylerini elişi kâğıtlarıyla kaplamak isteyen Ahmet…
>
> Mehmet: İki kenarının çarpımı…
>
> Emir: Evet, hı hı… İki kenarının çarpımı…

Grupların problem 5-a için yaptığı bazı çözüm örnekleri aşağıdadır (Şekil 3.49).



a b

Şekil 3.49. *Üçüncü grubun (a) ve odak grubun (b) problem 6-a için çözümleri*

Odak grup video kayda göre yaklaşık iki dakikada problem 6-a için doğru bir çözüm bulmuştur. Ayrıca bu grup problem 6-a için genel çözüm olabilecek bir kural geliştirmek adına kaç tane ve hangi renklerde sayma pulu isteyeceklerini tartışmışlar ve araştırmacıdan problem 6-b dağıtılmadan önce, sayma pulu istemiştir. Bu diyalog aşağıda detaylandırılmıştır:

… (Araştırmacı grubun problem 6-a çözümünü dinledikten sonra…)

A: Var mı bana soracağınız veya bu konu hakkında söyleyeceğiniz bir şey?

Emir: Biz sayma pulu alabilir miyiz?

A: Bugün ben sayma pulu vermeyeceğim size. Başka bir şey vereceğim. Başka bir materyal vereceğim. Biraz başka şeyler yapacağız bugün. Sayma pulu vermeyeceğim ama...

Emir: Acaba ne verecek öğretmen? Sayma pulu vermeyecekse..?

Mehmet: Çubuk verebilir mi?

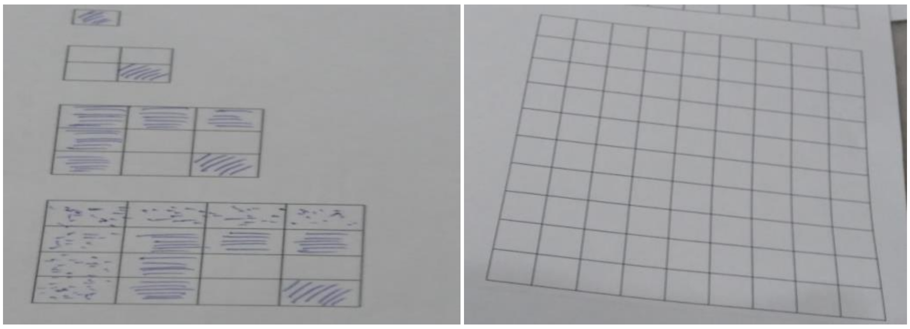
Emir: Çubuk ne işimize yarar? Çubuklardan kare mi yapacağız?

Ahmet: Belki de abaküs falan verir.

3.6.1.2. Araştırmacının problem 6-b için yaptığı rehberlik

Problem 6-a'nın doğru çözümü tüm gruplarca çok fazla zaman geçmeden yapılmıştır. Doğru çözüm yapan her grup araştırmacıdan problem 6-b ile birlikte sayma pulu istemiştir. Araştırmacı gruplara bu etkinlikte sayma pulu vermeyeceğini, bunun yerine başka bir materyal vereceğini söylemiştir.

Araştırmacı etkinliğin zorluğunu göz önünde bulundurarak modeli oluşturmalarına biraz daha yardımcı olabilmek için aşağıdaki hazırlanmış materyali problem 6-a'yı çözüp, problem 6-b'yi dağıttıktan sonra sayma pulu isteyen tüm gruplara hazırladığı materyali vermiştir (Bkz Şekil 3.50).

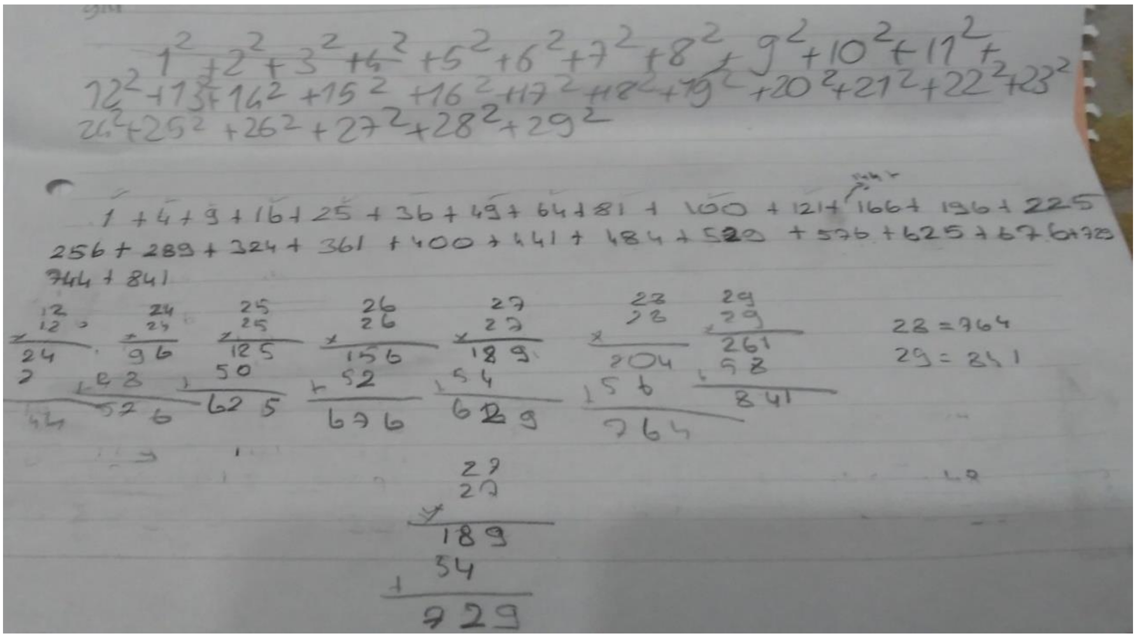


Şekil 3.50. *Araştırmacı tarafından hazırlanan materyaller*

Araştırmacı odak gruba Şekil 3.50’deki materyalleri vermiştir. Bu arada grup problemin genel bir çözümünü bulmak için problem 6-b’nin kendilerine verilmesi gereğini duymadan problem için bir genel çözüm aramaya başlamıştır. Gruba materyaller verilirken araştırmacı ile grup arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

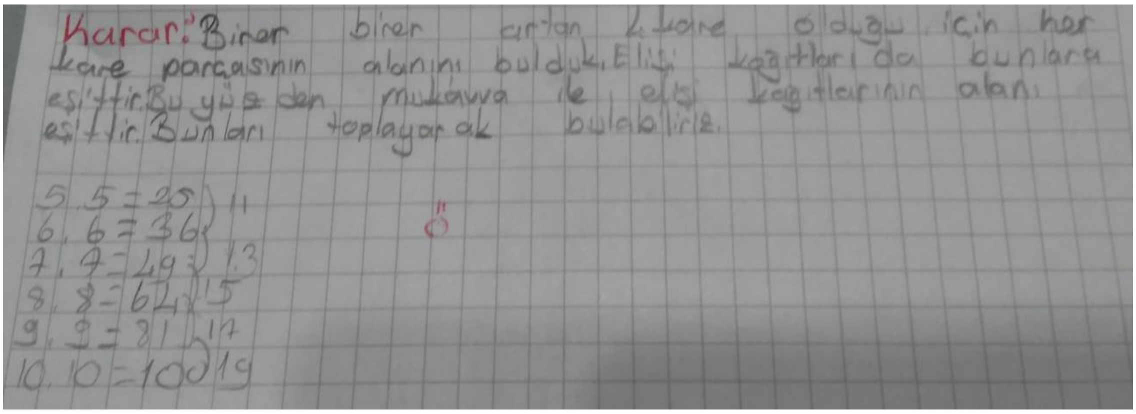
> A: Şunu inceleyin. Şu da başka bir şey... Biz bununla bir şeyler yapacağız. Tamam mı? Şunun ne olduğunu anladınız herhalde. Neyi gösteriyor?
>
> Emir: Birinci adımda, ikinci adımda, üçüncü adımda, dördüncü adımda…(Kareleri göstererek…)
>
> Ahmet: Kareleri...
>
> A: Biraz farklı desenlenmiş bunlar… Şunu bir inceleyin. Bu modelden bir şeyler çıkaracağız. Acaba bu modelden ne çıkarabiliriz? Üst taraf bu taraf, tamam mı? Modele bir bakın bakalım. Modeli çözümlemeye çalışın.

Araştırmacı diğer gruplarla ilgilenirken odak grup kendi aralarında tartışarak modelden bir şeyler çıkarmaya çalışmaktadır. Bu arada bazı gruplar da problem 6-a için bir çözüm bulmuştur. Bu gruplara problem 6-b dağıtılmıştır. Sayma pulu isteyen gruplara aynı açıklamalar yapılarak odak gruba verilen materyallerden verilmiştir. Fakat adım sayısı en son 29 olarak seçilse bile adımlarda oluşturulan mukavvadan kareleri kaplamak için gereken elişi kâğıdının alanını bulabilmek adına genel bir çözüm bulmak yerine teker teker hesaplayarak problem 6-b için bir çözüm bulmaya çalışan gruplar bu etkinlikte de olmuştur (Bkz Şekil 3.51).



Şekil 3.51. *Dördüncü grubun problem 6-b için özel çözümü*

Problem 6-a için doğru bir çözüm bulup, problem 6-b dağıtıldığında bunun için sayma pulu isteyen üçüncü gruba, odak gruba verilen materyallerden verilmesine rağmen grup problem 6-b'nin genel çözümü adına kareler oluşturmaya devam ederek, karelerin alanları arasında sayısal bir ilişki bulmaya çalışmış ama böyle bir ilişki bulmada başarılı olamamışlardır (Şekil 3.52).



Şekil 3.52. *Üçüncü grubun karelerin alanları arasındaki sayısal ilişkileri bulma çabası*

Odak grubun araştırmacının verdiği materyali incelerken aralarında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

Mehmet: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Emir: 90 tane. Buradan bir şey çıkarabilen var mı?

Ahmet: 1, 3, 5, 7.

Mehmet: Çıkardım bir şey.

Emir: Nasıl bir şey, söyle?

Mehmet: Bak! Adım sayısı buna uyuyor (Dikdörtgen modelin kenarını oluşturan kareleri göstererek…). 1, 2, 3, 4. Bu da n+9…

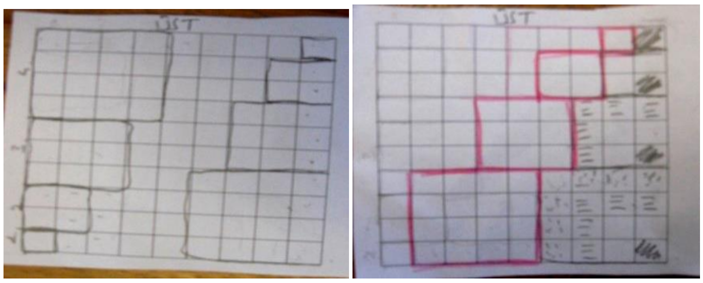
Onur: Bir de şey… Üç tane 30 var burada.

Emir: Üç tane 30 var.

Onur: Bir şeyi bir şey yapıp üçe bölüyoruz.

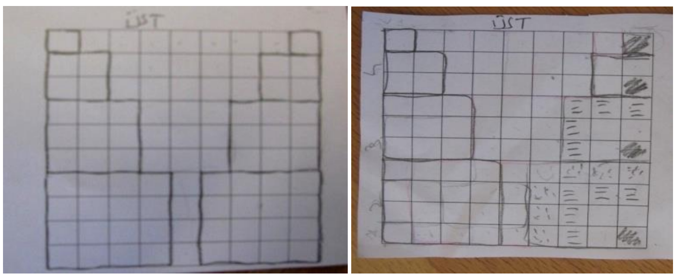
Emir: Üç tane 30 var. Bizim dördüncü adıma kadar toplam 30 tane oluyor. Üç tane 30… Üç tane 30 varsa o zaman…

Odak grup modeli inceledikten sonra modelde verilen toplam kare sayısının üç tane 30 yani 90 olduğunu fark etmiştir. Ayrıca dikdörtgensel modelin uzun kenarını oluşturan karelerin adım sayısı ile uyumlu olduğunu da fark etmiştir. Grubun modeldeki toplam kare sayısını genel olarak hesaplayabilmesi için fark etmesi gereken sadece modelin kısa kenarını oluşturan karelerin sayısının neye uyumlu olarak dizildiğini görmesi kalmıştır. Araştırmacı gruba neler bulabildiklerini sormuş, grup da ulaştıkları sonuçları araştırmacıya anlatmıştır. Grup problem 6-b için genel bir çözüm arama eğilimindedir. Bu sırada araştırmacının verdiği dikdörtgensel modelin içini problem 6-a'daki sayıları dikkate alarak aşağıdaki şekil gibi doldurmaya çalışmışlardır (Şekil. 3.53)



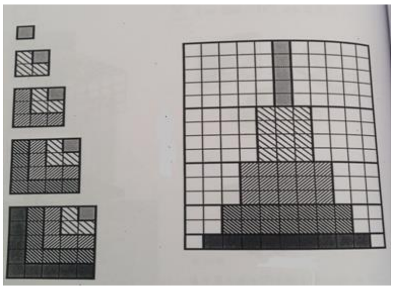
Şekil 3.53. *Odak grubun oluşturduğu ilk modeller*

Araştırmacı yukarıdaki şekildeki modelleri oluşturan odak gruba tam olarak istenen modele ulaşamasalar da en son oluşturdukları modelden bile bir sonuca ulaşabileceklerini söylemiştir. Ancak büyük dikdörtgendeki uzun kenarın ne olduğunu çözümlemelerine rağmen kısa kenarının ne olduğunu daha çözemediklerini, bunun genel çözüme ulaşmak adına önemli bir adım olduğunu ve bunun üzerine yoğunlaşmaları gerektiğini belirtmiştir. Araştırmacı belli bir süre sonra kısa kenar uzunluğunu çözümlemekte zorluk çeken gruba oluşturdukları model ile bu çözümlemeyi yapmakta zorlanabileceklerini, oluşturdukları modeli biraz farklılaştırabilme imkânları var mı diye sorulunca gruptaki öğrencilerden biri "Karşısına da aynısını yapalım" diyerek aşağıdaki şekli oluşturmuş ve daha sonra oluşturdukları şeklin desenlerini yapmışlardır (Şekil 3.54).



Şekil 3.54. *Odak grubun araştırmacının rehberliğiyle oluşturduğu model*

Odak grupla aynı materyal verilen gruplar da büyük dikdörtgenin içinde 90 tane yani üç adet 30 tane olduğunu fark etmişlerdir. Ancak buradan sonra ilerleyemeyen grupların bazıları problem 6-b genel çözüm bulmak yerine problem 6-b'nin özel çözümünü bulmayı tercih etmişlerdir. İkinci ve üçüncü grup problem için genel bir çözüme ulaşmak istemektedir ancak araştırmacının verdiği materyali yeterince çözümleyememişlerdir. Bu grupların ilerleyemediği araştırmacı tarafından fark edilince etkinliğin sonlarına doğru bu iki gruba oluşturmaları istenen model (Şekil 3.55) hazır olarak elden verilmiştir ve araştırmacı tarafından grupların bu modeli çözümlemeleri istenmiştir. Ancak iki grup da toplam kare sayısı hariç bir çözümlemeye ulaşamamıştır.



Şekil 3.55. *Gruplardan oluşturmaları beklenen* model

Araştırmacı odak grubun modeldeki toplam kare sayısını bulmak için modelin kısa kenar uzunluğunu oluşturan kare sayılarını problem 6-a'daki sayılarla ilişkisini hala kuramadığını gözlemlediği için bu konuda gruba aşağıdaki şekilde bir rehberlik yapmıştır:

A: Uzun kenar uzunluğunun ilişkisini buldunuz mu? Mesela, birden dörde kadar gidiyorsa…

Mehmet: 1+2+3+4.

A: Bizim için altı da önemli ama.

…

A: Alttaki kenar uzunluğu ne oluyor üsttekiler cinsinden? Mesela şurası kaç birim?

Emir: 4 br oluyor.

A: Süper, öteki taraf?

Emir: Burası da 4 br.

A: Çok güzel.

Emir: 1 br.

A: Çok güzel, mesela buradan n. adıma kadar gelsin. Bu kenar uzunluğu ne olacak? Dört değil de… 29. adımı sorsa mesela, kaçtan başlıyor?

Emir: Birden başlayacak.

A: Kaça kadar gidecek?

Emir: n. adıma kadar.

A: n=29. 29. adımda şurası ne olacak?

Emir: 29.

A: Şurası ne olacak?

Emir: 29 olacak.

A: Burası ne olacak?

Emir: Burası bir kalacak.

A: Şimdi n'ye gelelim. n'ya kadar gelince bu kaçtan başlıyor yine?

Emir: Birden.

A: Kaça kadar gidecek?

Emir: n'ye.

A: Bu kenar kaç olacak o zaman?

Emir: n.

A: Burası?

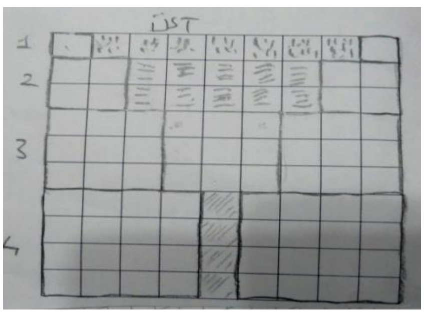
Emir: n.

A: Burada da?

Emir. Bir olacak.

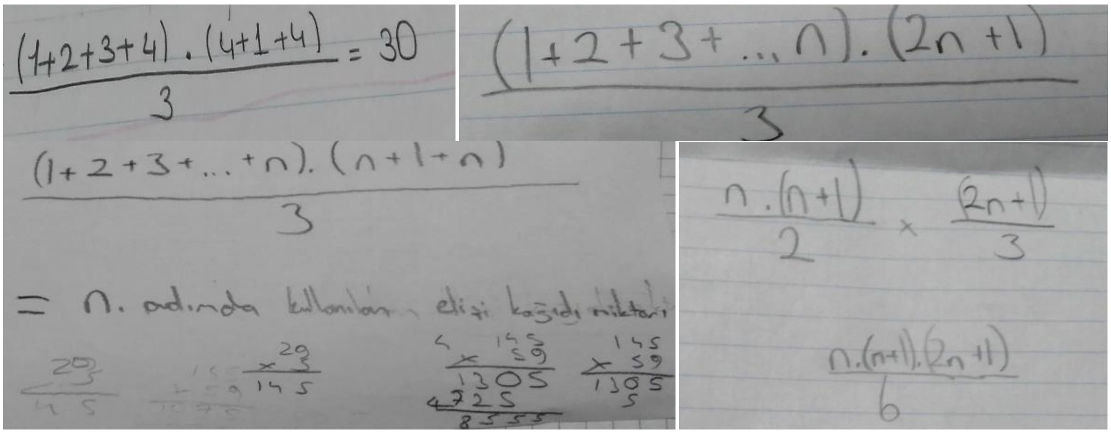
A: Süper. Şimdi çoğu bölümü atlattık. Şimdi de ortada kalan yeri nasıl ifade edilebilir? Ortada kalan yerin bizim modelimizle alakası ne? Bence şurayı biraz inceleyin artık. Oradaki desenlerin neden o şekilde yapıldığını bulmaya çalışın.

Odak grup araştırmacının rehberliğinde modeli incelemiştir ve ortadaki boşlukları aşağıdaki şekilde olduğu gibi doldurmuştur (Şekil 3.56).



Şekil 3.56. *Odak grubun oluşturduğu son model*

Araştırmacı modeli oluşturan odak grubun ulaştıkları sonuçları cebirsel olarak da ifade etmelerini istemiştir. Odak grup ulaştıkları sonuçları aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade etmiştir (Şekil 3.57).



Şekil 3.57. *Odak grubun ulaştığı cebirsel sonuçlar*

Etkinlik öncesinde bu etkinlikte öğrencilerin genel kurala ulaşmalarının çok kolay olmadığı ve grupların bu etkinlikte zorlanacağı tahmin edilmiştir. Etkinlikte de bu tahminin doğru olduğu görülmüştür. Sadece odak grubun problem için genel bir sonuca ulaştığı görülmüştür.

3.6.2. Yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş süreci

Gruplarda bir kişi problem 6-a'yı sesli olarak okumuş, diğerleri dinlemiştir. Öğrenciler alan hesabına aşina oldukları problem 6-a için bir çözüm bulurken zorlanmamıştır. Gruplar bu aşamada yatay matematikleştirme sürecinde etkinlikler yapmıştır.

Odak grup hariç diğer gruplar problem 6-a için özel bir çözüm oluşturduktan sonra problem 6-b'ye geçilmesini beklemiştir. Odak grup bu problem için bir 'model of' oluşturabilmek için araştırmacıdan sayma pulu istemiştir. Araştırmacı bu etkinlikte tüm gruplara sayma pulu yerine daha önce hazırladığı başka bir materyal vermiş (Şekil 3.50) ve gruplara aldıkları materyali incelemelerini istemiştir.

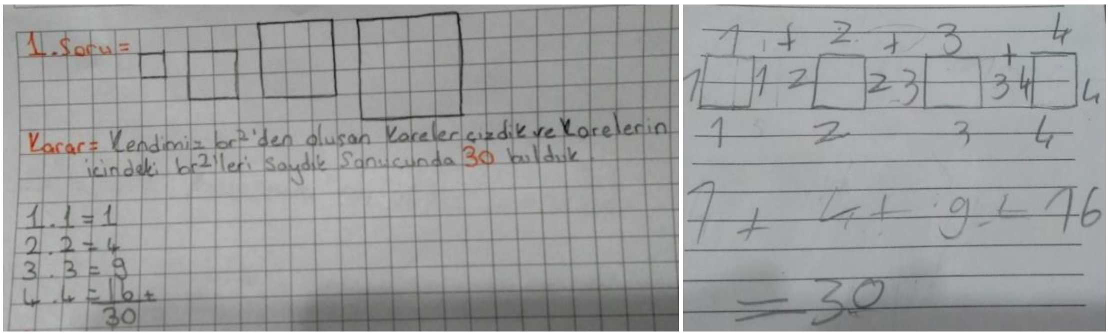
Altıncı grup hariç tüm gruplar araştırmacı tarafından verilen birinci materyalde problem 6-a'da oluşturulan kareler olduğunu, ikinci materyalde ise problem 6-a'nın cevabı olan 30'un üç katı kadar küçük karelerden oluşan dikdörtgen olduğunu söyleyebilmiştir. Fakat beş grup da materyallerin çözümünde bundan daha ileriye gidememişlerdir. Dördüncü ve beşinci grup problem 6-b için yatay matematikleştirme yapmaya devam etmiş ve problem 6-b için sayıları teker teker toplayarak bir özel çözüm bulmuştur. Bu grupların tekrar dikey matematikleştirme sürecine girmesi için araştırmacı tarafından adım sayısı verilen süre içerisinde hesaplanmaya mümkün olamayacak şekilde arttırılsa bile bu gruplar yatay matematikleştirme sürecinden çıkamamış ve adımları teker teker hesaplamaya devam etmişlerdir. Araştırmacının verdiği materyali inceleyip daha fazla ilerleyemeyen üçüncü grubun problem 6-b için bir 'model for' oluşturmak adına kareler oluşturmaya devam ederek, karelerin alanları arasında sayısal bir ilişki bulmaya çalışmışlar ama başarılı olamamışlardır (Şekil 3.52).

Odak grup problem için yatay matematikleştirme sürecinden dikey matematikleştirme sürecine geçişte araştırmacı tarafından verilen materyali incelemiş modeldeki dikdörtgenin uzun kenarını oluşturan kare sayılarının problem 6-a'daki oluşturulan karelerin kenar uzunluklarıyla uyumlu olduklarını görmüşlerdir. Grubun problem 6-b'de 'model for'a ulaşabilmesi için verilen modeldeki dikdörtgenin kısa kenarını oluşturan kare sayılarının problem 6-a ile sayısal olarak nasıl bir ilişkisi olduğunu görmesi gerekmektedir. Araştırmacının rehberliğiyle grup bu ilişkiyi keşfetmiştir ve grup modeldeki toplam kare sayısını Şekil 3.57'daki gibi cebirsel olarak ifade edebilmiştir. Bu süreç içerisinde grup dikey matematikleştirme sürecinde etkinlikler yaparak problem 6-b için genel bir çözüm bulmuş ve bu süreç sonucunda bu problem içim bir 'model for' oluşturmuştur.

3.6.3. İç içelik prensibi

Bu etkinliklerdeki problem durumları ve daha genel çözüme ulaşılması için yapılacak modeller ile bir argümana ulaşma durumu matematiğin birden fazla konu alanının ilişkilendirmesini sağlamaktadır.

Öğrenciler problem 6-a'yı okuduktan hemen sonra gerçek hayat durumunu aritmetiğe çevirmişler ve problem 6-a için doğru bir çözüm bulmuşlardır. Bu kısımda gerçek hayat durumundan aşağıdaki şekillerde örnekleri görüldüğü gibi aritmetiğe ve sembole geçiş vardır (Şekil 3.58).



a b

Şekil 3.58. *İkinci (a) ve dördüncü (b) grubun problem 6-a'da aritmetiğe ve sembole geçişi*

Üçüncü grup karesel bölgelerin alanlarını teker teker hesaplayıp aralarında sayısal bir ilişki bulmaya çalışmasına rağmen sayısal ilişkilerden yararlanarak bir genel sonuca ulaşmayı başaramamıştır.

Araştırmacının hazırladığı materyaller (Şekil 3.50) öğrencilerin aritmetikten geometriye geçiş yapmalarını zorunlu kılmaktadır. Gruplar, araştırmacının hazırladığı materyaldeki modeli oluşturan küçük karelerin toplamının problem 6-a'nın cevabı olan 30'un üç katı yani 90 tane olduğunu fark etmeleri gerekmektedir. Ayrıca modeldeki dikdörtgenin, uzun kenarını oluşturan kare sayılarının problem 6-a'daki oluşturulan karelerin kenar uzunluklarıyla uyumlu ve kısa kenarını oluşturan kare sayılarının problem 6-a'da oluşturulan en büyük karenin kenar uzunluğunun iki katının bir fazlasına eşit olduğunu fark etmeleri gerekmektedir.

Problem 6-a'yı çözüp araştırmacıdan materyalleri alan tüm gruplar materyaldeki modeli oluşturan küçük karelerin toplamının problem 6-a'nın cevabı olan 30'un üç katı yani 90 tane olduğunu fark etmişlerdir. Ancak odak grup hariç diğer gruplar materyali çözümlemede daha fazla ileriye gidememişler etkinliğe genel olarak aritmetiksel işlemlerle devam edebilmişlerdir.

Odak grup modeldeki dikdörtgenin, uzun kenarını oluşturan kare sayılarının problem 6-a'daki oluşturulan karelerin kenar uzunluklarıyla uyumlu olduğunu fark edebilmiştir. Grup modelin kısa kenarını oluşturan kare sayılarının problem 6-a'da oluşturulan en büyük karenin kenar uzunluğunun iki katının bir fazlasına eşit olduğunu fark edebilmiştir. Grup araştırmacın hazırladığı materyalde aritmetik ve geometri arasında geçişler yapmaktadır. Grubun ulaştıkları sonuçları belli bir adım için değil de n. adım için uyguladığında geometri ve aritmetikten cebire geçiş yaptığı söylenebilir. Grubun etkinlikteki problem için geometri ve aritmetikten cebire geçiş yaptığı sonuçlar Şekil 3.56'da gösterilmiştir.

3.6.4. Kademeli tertip etme süreci

Etkinlik öncesinde tahmin edildiği gibi öğrenciler bu etkinlikte genel kuralı bulma ve ifade etme açısından zorlanmışlardır. Dolayısıyla kademeli tertip etme sürecinin incelemesinde bu durum göz önünde bulundurulmuştur.

Özellikle daha yakından takibi yapılabildiği için odak grubun birbirleri ile iletişimlerinde yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi daha cebirsel bir dil kullandıkları söylenebilir. Ayrıca grubun kendi aralarındaki bir etkileşimde daha önce yaptıkları etkinliklerde ulaştıkları sonuçları daha rahat ifade ettikleri gözlenmiştir. Örnek olarak; önceki hafta ulaşılan sonuç için gruptaki öğrencilerden biri "Adım sayılarının toplamının karesi" olarak özetleyebilmiştir.

Odak grup problem 6-a'yı çözdükten sonra problem 6-b verilmeden bu tür problemlerin genel bir çözümüne ulaşabilmek adına araştırmacıdan sayma pullarını istemesi son etkinliklerde görülmeye alışılan durumlardan biridir. Araştırmacının, gruba bugüne kadar kullandığı materyalden farklı bir materyal vermesi dahi grubu problem 6-b için genel bir çözüm bulma yaklaşımından vazgeçirmemiştir.

Üçüncü grubun araştırmacının verdiği materyalden herhangi bir argüman geliştirememesine rağmen oluşturulan karelerin alanları arasında bir ilişki bulmaya çalışması problem 6-b için genel bir çözüm bulma amacını göstermektedir. Ayrıca odak grubun problem için genel bir çözüme ulaşmak adına araştırmacıdan sayma pullarını istemesi ve problem 6-b'nin verilmesini beklememesi grubun amacının problem için bir genel çözüm bulmak olduğunu göstermektedir.

Grupların genelinin problem 6-b'nin genel bir çözümüne ulaşmak için araştırmacıdan sayma pullarını istemesi etkinliklerin amacı açısından önemlidir. Ayrıca materyali inceleyen grupların araştırmacının verdiği materyaldeki modeli oluşturan küçük karelerin sayılarının problem 6-a'nın cevabı ile ilişkilendirmesi stratejik ilerleme açısından önemlidir. Geçen haftalardaki gibi grupların oluşturdukları argümanları geçerli matematiksel yöntemlerle test edip, oluşturdukları argümanlarla devam edip etmeyeceklerine karar vermeleri de stratejik ilerlemeleri açısından önemlidir. Ancak özellikle altıncı grubun hala problem 6-b'yi çözmek için teker teker oluşan karelerin alanlarını hesaplayıp çözüm için bunları topladıkları da görülmüştür.

Öğrencilerin en az ilerleme gösterdikleri maddelerden biri matematiksel yazımdır. Çoktan seçmeli sınavlara yönelik hazırlandırılan öğrencilerin soruların çözümlerini bile en kısa şekilde yazarak yapmaya çalıştıkları gözlenmektedir. Dolayısıyla genel bir kurala ulaşan grupların bile bunu matematiksel olarak ifade ederken zorlandıkları görülmektedir ve bu etkinlikte de genel kurala ulaşan grubun en çok rehberliğe ihtiyaç duyduğu kısım ulaştıkları genel kuralı cebirsel olarak ifade ederken olmuştur.

Gruplar özellikle ilk üç grup artık probleme özgü sonuçlar bulmak yerine o probleme ait genel çözümler bulmayı amaç edinmeye başlamıştır. Öğrencilerin geliştirdikleri argümanları çeşitli adımlarda deneyerek argümanlarını kontrol etmeleri formel yönteme doğru ilerlemeleri için önemlidir. Ayrıca kendi aralarında tartışırken gitgide daha cebirsel bir dil kullanmaları ve farklı farklı argüman geliştirmeye çalışmaları da formel yönteme doğru ilerlemeye başladıklarının göstergeleridir. Etkinliklerde edinilen izlenimlere göre formel yönteme doğru ilerlemede en büyük eksikliklerden biri matematiksel yazımda ilerlemedir.

Etkinlik 6'daki öğrenci süreçleri tablo 3.6'de özetlenmiştir.

Tablo 3.6. *Etkinlik 6'daki öğrenci süreçleri*

	Model of'tan model for'a geçiş	**İç içelik prensibi**	**Kademeli tertip süreci**
Odak grup	- Problem 6-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'u oluşturmuştur. - Model for'a ulaşmıştır.	- Problem 6-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Verilen materyalle geometri, aritmetik ve cebir arasında sürekli bir ilişki kurmuştur. - Problemin cebirsel formülünü oluşturmuştur.	- Farklı materyalle bile olsa genel çözüm arayışındadır. - Çözüme yönelik çıkarımlar yapmış ve çıkarımlarını denemiştir. - Matematiksel dili sözlü ve yazılı olarak kullanmıştır. - Çözüm için bir genellemeye ulaşabilmiştir.
Grup 2	- Problem 6-a için bir çözüm bulmuştur.	- Problem 6-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş	- Çıkarımlar yapmış, yaptığı çıkarımları denemiştir.

	- Model of'a ulaşamamıştır. - Hazır verilen model of'u çözümleyememiştir.	yapmıştır. - Aritmetik ve geometri arasında sınırlı bir ilişki kurmuştur.	- Genel çözüm arayışındadır. - Hazır verilen modeli çözümlerken zorlanmıştır.
Grup 3	- Problem 6-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Hazır verilen model of'u çözümleyememiştir.	- Problem 6-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Aritmetik ve geometri arasında sınırlı bir ilişki kurmuştur.	- Sayısal ilişkilerden çıkarımlar yapmaya çalışmıştır. - Çıkarımlarını denemiş ancak genel çözüme ulaşamamıştır.
Grup 4	- Problem 6-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Özel çözüm bulmaya çalışmıştır.	- Problem 6-a'da aritmetiğe ve geometriye geçiş yapmıştır. - Materyali çözümlemeye çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Hazırlanan materyali almış ancak model oluşturmaya yeterince vakit ayırmamıştır. - Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir.
Grup5	- Problem 6-a için bir çözüm bulmuştur. - Model of'a ulaşamamıştır. - Problem 6-b için özel çözüm yapmaya çalışmıştır.	- Problem 6-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Materyali çözümlemeye çalışırken aritmetikten geometriye sınırlı geçiş yapmıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.
Grup 6	- Problem 6-a için bir çözüm bulmuştur. - Hazırlanan materyali istememiştir.	- Problem 6-a'da aritmetiğe geçiş yapmıştır. - Alanlar arası ilişki kurmamıştır.	- Problem için özel çözüm bulma eğilimindedir. - Uzak adımlardaki yaptığı işlemlerde hata olduğu gözlenmektedir.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde; araştırma kapsamında elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuçlara, sonuçların ilgili araştırmalar ile tartışılmasına ve ileride yapılabilecek benzer nitelikteki araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

4.1. Sonuç

1. İlk etkinlikten son etkinliğe kadar öğrenciler gerçek hayat problemi bağlamında sözsüz ispatların kullanıldığı bir öğretim ortamında ispata yönelik bir takım süreçler (çıkarımda bulunma, çıkarımı kontrol etme, matematiksel dili kullanma, genelleme, vb.) yaşamışlardır.
2. Öğrenciler etkinliklerdeki problemlerin birinci kısmında gerçek hayat probleminden aritmetiğe, bazen cebire ve geometriye geçiş yapmışlar,

problemlerin ikinci kısmında ise sözsüz ispatları kullanarak aritmetik, cebir ve geometri arasında, alanlar arası ilişkiler kurmuşlardır.

3. Etkinlikler sürecinde öğrencilerin ispata yönelik yaşadığı süreçlerde olumlu bir gelişme olduğu gözlenmiştir.

Bu sonuçlar doğrultusunda ortaokul seviyesindeki öğrencilerin lise seviyesinde ispata ani geçişiyle oluşan ispat konusundaki didaktik boşluğu doldurmak için sözsüz ispatların yardımcı eğitici araçlar olabileceği sonucuna varılmıştır.

4. 2. Tartışma

Ulaşılan her bir sonuç ayrı başlıklar altında tartışılmıştır.

4.2.1. İspat süreçleri

Özel durumlardan genel durumlar için çıkarımda bulunma, bu çıkarımları test etmeve genelleme yapma matematiksel süreç becerilerinden olup matematiksel ispat yapma becerilerinin gelişmesi için büyük öneme sahiptir. Çalışmanın bu süreçlere yönelik bulguları şu şekilde özetlenebilir.

Çıkarımda bulunma:

Öğrencilerin etkinlikler boyunca gerçekleştirdikleri çıkarımlar aşağıda verilmiştir.

1. Etkinlik
   - Dikdörtgen şeklindeki kareli bir defterde toplam kare sayısını bulmak için defterin eni ve boyundaki kare sayısı çarpılır.
   - Yeşil sayma pulu sayısının beş günlük, aynı sayıdaki beyaz sayma puluyla birlikte toplam sayma pulu sayısı 10 günlük alınacak ücreti verir.
   - Eş sayıda iki renk sayma pulu sayısı iki tane beş günlük alınacak ücreti verir.
2. Etkinlik
   - 50. adımda oluşan kare sayısı 10. adımda oluşan kare sayısının beş katıdır.
   - Problemin kolay bir çözümü (kuralı) olması gerekir.

- Eş sayıda farklı iki renkten oluşan dikdörtgen modelin eni ve boyundaki sayma pulu sayısı çarpılıp ikiye bölünürse bir rengin sayısı bulunur.

3. Etkinlik
   - Asansöre binen toplam kişi sayısı asansör çıkarken binen kişi sayısının iki katıdır.
   - Problemin çözümü için sayma pullarıyla kolay bir yol (kural) bulunabilir.
   - Problem orantıyla çözülebilir.
4. Etkinlik
   - Problemi çözmek için bir formül vardır.
   - Bugüne kadar tüm problemler şekille, sayma pullarıyla çözüldüğüiçin bu probleminde bu şekilde çözülmesi gerekir.
   - Problem orantı ile çözülebilir.
   - Asansöre binen yolcuların sayısı çıkarken 2n-1 formatındadır ancak asansör inerken bu geçerli değildir.
   - Oluşturulan modelde sayma pullarını dikdörtgene tamamlamak için en son çıkılan kat sayısı kadar sayma pulu gerekir.
   - Çıkılan en son kat sayısı n ile ifade edildiğinde modeli dikdörtgene tamamlamak için eklenmesi gereken sayma pulu sayısı n'dir.
5. Etkinlik
   - Soruda 25. adımdaki küp sorulacak, toplamı sorulacak. Geçen haftaki formüllerle bir şeyler yapılabilir.
   - Problemin ikinci kısmını teker teker hesaplamak çok zor olur.
   - Her farklı renkteki sayma pulu oluşturulan küplerin hacmine eşittir.
6. Etkinlik
   - Her dikdörtgenin alanı için iki kenarçarpılır.
   - Problemin genel çözümü için sayma pulu gerekir.
   - Materyalde problem-a'daki karelerin alanlarını gösteren kareler vardır.
   - Materyalde problemin üç katı kadar kare vardır.

Yukarıdaki liste öğrencilerin yaptığı en temel çıkarımları içermektedir. Bu liste her etkinlikte, problemin çözümüne yönelik öğrencilerin en az üç veya dört çıkarımda bulunduklarını göstermektedir. Bu tabloda ayrıca, öğrenciler hem doğru hem de yanlış çıkarımlarda bulundukları görülmektedir. Yanlış çıkarımlar öğretmenin rehberliğinde bir süre sonra doğru çıkarımlarla değiştirilmiştir. Diğer yandan, öğrenciler yalnızca üzerinde çalıştıkları problem durumunun herhangi bir aşaması için çıkarımda bulunmamış, önceki etkinliklerden hareketle problemin çözümü için nasıl çalışmaları gerektiğine yönelik (tek tek hesaplamanın imkânsız olması, sayma pulu kullanılmasının gerekliliği gibi) çıkarımlarda da bulunmuşlardır. Bu durum öğrencilerin çıkarımlarında hem problemlerin çözüm aşamalarına yönelik hem de çözüm için genel strateji bulmaya yönelik bir gelişme olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Genellemeler yapma:

Öğrencilerin etkinlikler boyunca ortaya koydukları en temel genellemeler aşağıda verilmiştir.

1. Etkinlik
   - Eş sayıda iki renk sayma pulundan oluşan dikdörtgen modeldeki sayma pullarının bir renginin sayısını bulmak için toplam sayma pulu sayısı ikiye bölünür.
   - Oluşan dikdörtgenin kısa kenarındaki sayma pulu sayısı çalışılan en son gün sayısı, uzun kenarındaki sayma pulu sayısının çalışılan gün sayısının bir fazlasıdır.
   - Alınacak ücret çalışılan gün sayısı ve bir fazlasının çarpımının yarısıdır.
   - Problemin genel çözümü n.(n+1)/2'dir.
2. Etkinlik
   - Modelin kısa kenar uzunluğu n, uzun kenar uzunluğu 2n, beyaz renkli sayma pulu sayısı n.(2n)/2'dir
   - n. adımda toplam n^2 tane sayma pulu vardır.
   - Sayma pulu sayısı herhangi bir adımda kendisiyle çarpımı kadardır.
   - $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$
3. Etkinlik
   - Çıkılan katı kendisiyle çarpınca sonuç bulunur.
   - Çözüm n'nin iki üssü kadardır.
   - En son n. kata çıkılırsa çözüm $n.n=n^2$ olur.
   - $1+2+3+\ldots(n-1)+n+(n-1)+\ \ldots+3+2+1=n2$ *(odak grupla beraber öğretmen tarafından ifade edilmiştir)*

4. Etkinlik
    - Dikdörtgenin uzun kenar uzunluğu kısa kenar uzunluğunun iki katıdır.
    - Asansöre binen kişi sayısı n^2'dir.
    - Çözüm n.(2n)-n'dir.
    - Oluşan büyük karedeki sayma pulu n^2'dir.
5. Etkinlik
    - Oluşturulan küplerin ayrıt uzunluklarının toplamının karesi, küplerin hacimleri toplamına eşittir.
    - Modelde n^2 tane pul vardır.
    - Modeldeki adım sayılarının toplamının karesi küplerin hacimlerinin toplamını verir.
    - $(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$
6. Etkinlik
    - Problemdeki adım sayılarının toplamı materyaldeki dikdörtgen modelin uzun kenarıyla uyumludur.
    - Dikdörtgenin kısa kenarı adım sayısının iki katının bir fazlasıdır.
    - Toplam kare sayısı, birden adım sayısına kadar olan sayıların toplamının adım sayısının iki katının bir fazlasıyla çarpımının üçe bölümüdür.
    - $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n.(n+1).(2n+1)/6$dır.

Çoğu durumda, öğrenciler ilk olarak problem durumuna uygun modeli inşa etmişler, bu model üzerinde yürüttükleri çıkarımları genelleyerek problemin çözümüne ulaşmışlardır. Yukarıdaki listede öğrencilerin modelin geometrik özellikleri üzerinde (en, boy, alan, hacim, vb.) bir genelleme tespit etmeye çalıştıkları, bu genellemeyi ilk etapta sözel olarak ifade ettikleri, sonrasında modelin geometrik özelliklerini cebirsel olarak ifade ettikleri ve en sonunda genel çözümü cebirsel olarak inşa ettikleri görülmektedir.

Öğrencilerin ispat süreçleri genel olarak değerlendirilecek olursa, doğru ya da yanlış çıkarımlarda bulundukları, çıkarımları model üzerinde test ettikleri (Şekil 3.6, Şekil 3.29, Şekil 3.44, vb.), önce sözel sonra cebirsel genellemelere ulaştıkları söylenebilir. Miller (2012), bir matematikçi bir sözsüz ispata baktığında, resmin sadece o durumun eşitliğini vermediğini, noktaların sayısı değişse bile ilişkinin korunacağını ve bütün tam sayılar için formülün geçerli olacağını anladığını söylemiştir. Öğrencilerinde süreçte sözsüz ispatları bu yönde oluşturmaya başladıkları söylenebilir. Buna göre, sözsüz ispat etkinliklerininöğrencilerin çıkarım yapmada ve genellemede bulunmada oldukça etkisi olduğu söylenebilir. Bu sonuç, Demircioğlu ve Polat (2015)'ın öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmanın sonuçlarından, öğretmen adaylarının, sözsüz ispatların ispat yapma, problem çözme, anlama, akıl yürütme, genelleme, işlem becerisi, analiz ve sentez yapabilme, görme ve düşünme becerileri gibi farklı birçok beceriyi kazandırmada etkili olduğugörüşleriyle tutarlılık göstermektedir. Diğer yandan bu sonuç, Güler ve Temizyürek (2015)'in uygun etkinlikler kullanıldığında öğretmen adaylarının modeller yardımıyla ispat yapmakta başarılı olabilecekleri ve bu sayede matematiksel muhakeme yeteneklerine katkı sağlanabileceği görüşüyle tutarlılık göstermektedir.

Video kayıtlarından daha yakından incelenme fırsatı bulunan odak grubun matematiksel dili rahatça kullanmaya başladığı ve bu etkinlikler üzerine sadece haftada iki saat çalışmalarına rağmen gerektiğinde ulaştıkları sonuçları ve ispata nasıl başlayacaklarını çok zorlanmadan hatırlayabildikleri görülmüştür. Bu durum Alsina ve Nelsen (2010)'nin sözsüz ispatları belli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceği ve bunun ispatına nasıl başlanacağını anlaması için okuyucuya yardımcı olan şekil ve diyagramlar şeklindeki tanımlamasını desteklemektedir. Tekin ve Konyalıoğlu (2010) ise görsel şekillere dayalı ispatların formüllerin nasıl oluştuğu ve nereden geldiği konusunda öğrencilere bilgi verirken, ezberden kaçarak kalıcı öğrenmelerine yardımcı olacağını belirtmişlerdir. Bu çalışmada öğrencilerin formülleri kendilerinin inşa edebilmesi ve nereden geldiklerini takip edebilmeleri Tekin ve Konyalıoğlu'nun sonucunu desteklemektedir.

Yukarıdaki tartışılan bulgular bir bütün halinde düşünüldüğünde öğrencilerin ilk etkinlikten son etkinliğe kadar sözsüz ispatlara dayalı gerçek hayat problemi bağlamında ispata yönelik süreçleri (çıkarımda bulunma, çıkarımı kontrol etme, matematiksel dili kullanma, genelleme, vb.) yaşayabildikleri söylenilebilir.

4.2.2. Alanlar arası ilişkilendirme

Modele ve gerçek hayat problemi durumlarına dayalı sözsüz ispatların kullanıldığı bu çalışmada öğrenciler ilk etkinlikten son etkinliğe kadar önce problemlerin ilk aşamasının çözümü için gerçek hayat durumundan aritmetiğe geçiş yapmışlar, nadiren de geometri ve cebire geçiş yapmışlardır. Problemlerin ikinci aşaması içinse daha zengin bir ilişkilendirme ve alanlar arası geçiş gözlemlenmiştir. Bu ilişkilendirme ve geçişler aşağıda özetlenmiştir.

Etkinlik 1:

- Problem 1-a'nın çözümü için problem durumundan aritmetiğe geçiş.
- Problem 1-b'de, genel bir kural aramak içinmodel oluşturma ve aritmetikten geometriye geçiş.
- Dikdörtgen modelin kısa ve uzun kenarları arasındaki ilişkiyi fark ederek aritmetikten ve geometriden cebire geçiş yaparak 1+2+3+…+n=n.(n+1)/2 ifadesini elde etme.

Etkinlik 2.

- Problem 2-a'nın çözümü için problem durumundan şekil örüntüsüne, şekil örüntüsünden sayı örüntüsüne geçiş.
- Her adımda oluşan kare sayısını cebirsel olarak ifade etme.
- Oluşturulan dikdörtgen modelde kısa kenarı n, uzun kenarı 2n, toplam sayma pulunu n.2n, oluşan toplam kare sayısını (2n)/2 olarak ifade etme
- Model kullanmadan önce genel bir kuralı sözel olarak ifade etme.
- Sayma pullarıyla geometrik bir model oluşturup ulaşılan kuralı bu modelle destekleme.

Etkinlik 3.

- Problem 3-a'nın çözümü için problem durumundan aritmetiğe ve geometriye geçiş.
- Problem 3-b'nin çözümü için model oluşturup modelden genel kurala ulaşma.
- Problem 3-b'nin çözümü için sayısal ilişkilerden genel cebirsel ?kurala ulaşma.
- Ulaşılan cebirsel formülden problemin modelini oluşturma ve modeli çözümleme.

Etkinlik 4.

- Problem 4-a’nın çözümü için problem durumundan aritmetiğe ve geometriye geçiş.
- Problem 4-b’nin çözümü için sayma pullarıyla model oluşturmaya çalışma.
- Asansöre çıkarken binen yolcu sayılarını cebirsel olarak ifade etme.
- Oluşturulan modelin kenar uzunluklarını aritmetiksel olarak ifade etme.
- Oluşturulan dikdörtgen modelde kısa kenarı n, uzun kenarı 2n ve modeli dikdörtgene tamamlamak için gereken sayma pulu sayısını n olarak ifade etme.

Etkinlik 5.

- Problem 5-a’nın çözümü için problem durumundan aritmetiğe ve geometriye geçiş.
- Problem 5-b’nin çözümü için sayma pullarıyla dikdörtgen model oluşturma.
- Sayısal ilişkilerden genel kurala ulaşma.
- Ulaşılan genel kuraldan model oluşturma.
- Modeli çözümleyerek genel kuralı cebirsel olarak ifade etme.

Etkinlik 6.

- Problem 6-a’nın çözümü için problem durumundan aritmetiğe ve geometriye geçiş.
- Verilen dikdörtgen materyalde problem 6-a’nın aritmetiksel çözümünün üç katı kadar birim kare olduğunu fark etme.
- Dikdörtgen materyalin uzun kenarındaki birim kare sayısının toplamının problem 6-a’da oluşturulan karelerin kenar uzunlukları toplamı olduğunu fark etme.
- Dikdörtgen materyalin kısa kenarını oluşturan birim kare sayısının toplamının problem 6-a’da oluşturulan en büyük karenin kenar uzunluğuna bağlı olarak sözel şekilde ifade etme.
- Dikdörtgen materyalin kenarlarını oluşturan birim kare sayılarını n. adım için cebirsel olarak ifade etme.

Modele ve gerçek hayat problemi durumlarına dayalı sözsüz ispatların kullanıldığı bu çalışmada etkinliklere genel olarak bakıldığında öğrencilerin aritmetik, geometri ve cebir alanları arasında ilişki kurma fırsatları yakaladığı ve bazen tam olarak matematiksel formüller oluşturamasalar da öğrencilerin çoğunluğunun matematiksel alanların birbirinden tamamen kopuk olmadığı ve matematiğin bütüncül ve esnek yapısını sezmelerine olanak sağlandığı söylenebilir. Bu durum Knuth (2002)'un çeşitli argümanların sunumu ve tartışılması matematik alanındaki ilişkilerin fark edilmesine yardımcı olur görüşüyle ve Bardelle (2010)'nin sözsüz ispatlarla çalışmanın resimlerin semiyotik boyutu, sözlü metin veya sembolik ifadeler arasında sürekli etkileşimi dikkate almayı gerektirebileceği sonucuyla tutarlılık göstermektedir.

4.2.3. İspat süreçlerindeki gelişim

Modele ve gerçek hayat problemi durumlarına dayalı sözsüz ispatların kullanıldığı bu çalışmada öğrencilerin genelinin ispata yönelik süreçlerinde(çıkarımda bulunma, çıkarımı kontrol etme, matematiksel dili kullanma, genelleme, vb.) olumlu bir gelişme olduğu görülmüştür. Bulgular bölümünde bu gelişmelerle ilgili yer yer farklı gruplardan örnekler sunulmuştur. Burada, gelişimi daha iyi görebilmek için odak grubun ilk etkinlikten son etkinliğe kadar olan ilerlemesi aşağıda özetlenmiştir.

Etkinlik 1.

- Alınacak toplam ücretin, oluşturulan modelin eni ve boyundaki sayma pulu sayısının çarpımının yarısı, yani çalışılan en son gün sayısı ve gün sayısının bir fazlasının çarpımının yarısı olduğu genellemesine ulaşma.

Etkinlik 2.

- n adım sayısı olmak üzere oluşan kare sayısını 2n-1 olarak ifade etme.
- Genel çözümüne ulaşmadan önce çıkarımların kontrolü için problemin birkaç adım öncesini ve sonrasını deneme.
- Oluşturulan dikdörtgen modelde kısa kenarı n, uzun kenarı 2n, problemin genel çözümünü ise n.(2n)/2 olarak ifade etme.

Etkinlik 3.

- Çözüm stratejilerinin kullanılabilir olup olmadığını anlamak için stratejilerini problemin önceki ve sonraki adımları için deneme.
- Problemin ikinci kısımları için özel çözüm düşünmeyerek sayısal ilişkilerden problem için genel bir sonuca ulaşma ve bunu cebirsel olarak ifade etme.

Etkinlik 4.

- Problem 4-b'nin ne olabileceğini ve problem 4-b için nasıl bir çözüm geliştirebileceğini tartışma.
- Sayma pullarını almadan önce pullarla oluşturacağı modeli çizme.
- Genel çözüm için alacakları sayma pulu sayısını belirleme.
- Probleme ait iki aşamalı model oluşturma ve modeli çözümleme.

Etkinlik 5.

- Problem 5-b'nin ne olabileceğini ve problem 5-b için nasıl bir çözüm geliştirebileceğini tartışma.
- Sayısal ilişkilerden problemin genel sonucuna ulaşma.
- Ulaşılan sonuçtan modeli oluşturma ve modeli çözümleme.
- Problemin matematiksel formülünü kurma.

Etkinlik 6.

- Problem 6-a'nın çözümüne tablo yaparak ulaşma.
- Verilen farklı materyali problem-a ile ilişkilendirmeye çalışarak çözümleme.
- Çözümlemelerden problemin genel sonucuna ulaşma.
- Problemin genel sonucundan problemin matematiksel formülünü kurma.

Yukarıdaki listeden odak grubun daha önceki etkinlikte keşfettikleri çalışma biçimi veya çözüm yaklaşımlarını bir sonraki etkinliğe taşıyabildikleri ve böylelikle ispat süreçlerinde bir gelişme yaşadıkları görülmektedir. Bu durum Gierdien (2007)'in sözsüz ispatların genelleme, inceleme, sonuç çıkarma, temsil etme, tahmin etme, tanımlama gibi matematiksel süreç becerilerini geliştirdiği görüşüyle paralellik göstermektedir. Ayrıca bu durum Bardelle (2010)'in sözlü ve sembolik tasvirlerden şekilsel bir tabloya geçişin ve bunun tersinin, izole kalan bazı matematik konularında çok verimli olacağını ve buna benzer etkinliklerin öğrencilerin ispat gibi konuların üstesinden gelmede çok yararlı olacağı görüşüyle örtüşmektedir. Buna ek olarak, öğrencilerin etkinlikler sürecinde ispata yönelik yaşadığı süreçlerde olumlu bir gelişme olması sözsüz ispatların bir şekil hakkında zihinde düşünmeyi, şekli zihinsel olarak dönüştürme ve manipüle etmeyi içerdiğinden öğrencilerin görselleştirme becerilerinin gelişimine katkıda bulunurlar (Van De Walle, 2013) görüşüyle paralellik göstermektedir. Bu bağlamda bakıldığında sözsüz ispatların, Miller (2012)'ın belirttiği gibi matematik öğretiminde değerli bir araç olabileceği ve Doyle ve arkadaşlarının (2014) belirttiği gibi özellikle matematiksel düşünceyi ilerletmek ve uyarmak için kullanılabileceği anlaşılmaktadır.

Tüm bu sonuçlar doğrultusunda lisede ispata ani geçişle oluşan ispat konusundaki didaktik boşluğun ortaokulda sözsüz ispatlar üzerine yapılacak farklı çalışmalarla doldurulabileceği ve sözsüz ispatların ortaokul seviyesinde bir öğretim nesnesine dönüştürülebileceği söylenebilir.

4.3. Öneriler

Çalışmanın sonuçlarından birisi öğrencilerin modele ve gerçek hayat problemi durumlarına dayalı sözsüz ispatları kullanarak aritmetik, cebir ve geometri alanları arasında ilişki kurabilmeleridir. Böylece öğrencilere matematiksel bilginin parçalarının ötesinde bütüncül ve esnek yapısını sezmeleri için fırsatlar sağlanmıştır. Ortaokul matematik programında sadece özdeşlikler ve cebirsel ifadelerin çarpanlara ayrılması kısmında bahsedilen lise programında ise hiç bahsedilmeyen sözsüz ispatların bu programlara eklenmesi öğrencilere matematiğin birden fazla konu alanını ilişkilendirme fırsatı sunabilir.

Öğrencilerin ortaokuldan liseye geçtiklerinde matematiksel olarak yaşadıkları ani değişim öğretim programlarında oluşan didaktik boşlukla yakından ilişkilidir (Balacheff, 1988; Sowder ve Harel, 1998). Moore (1994) ispatın, lise ve üniversite matematik öğretimi programıyla bütünleştirilene kadar, ispata ani geçişin lisans öğrencileri ve öğretmenler için bir hayal kırıklığı kaynağı olmaya devam edeceğine inandığını belirtmiştir. Bundan dolayı matematik eğitimcilerinin en önemli rollerinden biri matematiksel anlamayı geliştiren ispatın rolünü öğrencilere aktarabilmek için sınıf içinde ispatın etkili kullanımını geliştirmektir. Yapılan çalışmada sözsüz ispatların ortaokulda sınıf içi kullanımının bu didaktik boşluğu doldurabileceğisonucuna varılmıştır. Dolayısıyla ortaokul seviyesindeki tüm öğrencilerin matematik derslerinde sözsüz ispatların sınıf içi kullanımına imkan sağlayacak bir modül oluşturulabilir.

Altıparmak ve Öziş (2005)'in ifade ettiği gibi öğrenciye ispat ve muhakeme becerisinin öğretimi ve öğrencide ispat becerisinin gelişimi öğretmene bağlıdır. Sözsüz ispatları kullanmak öğrencilerin ispat sürecini anlamada etkili olduğu için öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispatlarla ilgili deneyimler yaşayarak, onları öğrencilerine bir öğretim aracı olarak en iyi şekilde sunmaları önemlidir. Dolayısıyla daha önce sözsüz ispatlarla ilgi deneyim yaşamamış öğretmenlere bir hizmet içi eğitim verilebilir, öğretmen adaylarının eğitim programlarına sözsüz ispatlarla deneyim yaşayacak dersler konulabilir.

KAYNAKÇA

Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z. Sabuncuoğlu, A. (1988). *Soyut matematik* (2). Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.

Alacacı, C. (2016). Gerçekçi matematik eğitimi. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 341-353). Ankara: Pegem Akademi.

Alsina, C. & Nelsen R. B. (2010). An invitation to proof without words. *Europan Journal of Pure and Applied Mathematics,* 3(1), 118-127

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi.* Ankara: Gazi Kitabevi Tic. Ltd. Şti.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematicl proof: History and epistemology. P. Boero (Ed.) In *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27-42). Sense Publishers. Rotterdan, The Netherlands.

Avital, S. & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: Didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, 9(4), 429-438.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Lisans Tezi. Ankara: Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* (2). Ankara: Harf Eğitimi Yayınları.

Baki, A. (2014). *Matematik felsefesi ve tarihi.* (1). Ankara: Pegem Akademi.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, D. Pimm (ed.), in *Mathematics, Teachers and Children*, (pp. 216–235). Hodder and Stoughton, London,

Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: an experiment*. In V. Durand-Guerrier et al (Eds), *Proceedings* of *CERME6*. Lyon, France. INRP, pp. 251-260.

Barker, S. F. (2003). *Matematik felsefesi.* (Çev: Y. Dursun). Ankara: İmge Kitabevi Yayınları.

Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematic Teachers*, 104 (1), 690-695.

Biehler, R. & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 8). Antalya, Turkey.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Doctoral dissertation, Université de Grenoble I

CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof. *Journal of Humanistic Mathematics,* 1(1), 33-60.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Bursa: Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Çiltaş, A. ve Yılmaz, K. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının teoremlerin ifadeleri için kurmuş oldukları matematiksel modeller. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi,* 2(2), 107-114.

D'Angelo, J. P. & West, D. B. (2000). *Mathematical thinking, problem solving and proofs* (2). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Davis, P. J., Hersh, R., Marchisotto, E. A. (2015). *Matematiksel deneyim.* (Çev: S. Durmuş ve İ. O. Eruçar). Ankara: Nobel Yaşam.

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ.Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 15-34). Ankara: Pegem Akademi.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi,* 4(2), s. 47-71.

Delahaye, J. P. (1998). Les preuves sans mots. *Pour La Science*. (244). s. 100-105.

Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2015). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispat yöntemine yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies,*(41), 233-254.

Demircioğlu, H. ve Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının sözsüz ispatlar ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi,* (7), 81-99.

Demirdöğren, N. (2007). *Gerçekçi matematik eğitimi yönteminin ilköğretim 6. sınıflarda kesir kavramının öğretimine etkisi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Detlefsen, M. (2008). Proof: Its nature and significance. Gold, B. and Simons, R. A. (Eds.), in*Proof and Other Dillemas: Mathematics and Philosophy*, (pp. 61–77). Mathematical Association of America, Washington, DC.

Doğan-Dunlap, H., Özdemir Erdoğan, E., Kılıç, Ç. (2008). Matematiksel tümevarım: Karşılaşılan kavram yanılgıları ve öğrenme güçlükleri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* içinde (291-327). Ankara: PegemA Yayınları.

Doyle, T., Kutler, L., Miller, R. Schueller, A. (2014). Why we write proofs. https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-why-we-write-proofs. (Erişim tarihi: 04.07.2017)

Dönmez, A. (2002). Aritmetiğin gelişimi. *Dünya matematik tarihi ansiklopedisi:1* içinde. (1, s. 73-203). İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004, September). The teaching experiment- What it is and what it isn't. In *2003 Physics Education Research Conference* (Vol. 720, pp. 157-160).

Gierdien, M. F. (2007). From ‘proofs without words’ to ‘proofs that explain’ in secondary mathematics. *Pythagoras*, (65), 53-62.

Gossett, E. (2009). *Discrete mathematics with proof*. Hoboken: John Wiley & Sons.

Gökkurt, B., Deniz D., Akgün, L., Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Baskent Univercity Journal of Education*,1(1), 55-63.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), in *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 225-274). Mahwah. NJ. USA: Lawrance Erlbaum Associates.

Greenberg, M. J. (1993). *Eucledean and Non-Eucledean geometries: Development and history* (3). New York: W.H. Freeman and Company.

Güler, G. ve Temizyürek, A. (2015). Matematik öğretmeni adayların ardışık tek sayıların toplamının ispatına yönelik model oluşturma becerilerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(3). 446-462.

Güneş, G. ve Asan, A. (2005). Oluşturmacı yaklaşıma göre tasarlanan öğrenme ortamının matematik başarısına etkisi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 25(1), 105-121.

Hammack, R. (2013). *Book of proof.* Richmond, VA: Virginia Commonwealth University.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.

Hanna, G. (2000a). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5- 23.

Hanna, G. (2000b). Proof and its classroom role: A survey. M.J. Saraiva et al (Eds.), in*Proceedings of Conference en el IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matematica* (pp. 75-104). Funado.

Hanna, G. (2007). The ongoing value of proof. P. Boero, (Ed.), in*Theorems in schools: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice to Classroom Practice* (pp. 3-18). Rotterdam: Sense Publishers.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics,* 24(4), 389-399.

Karakuş Yılmaz, T., Baydaş, Ö., Kokoç, M. (2017). Grup çalışması ortamlarına karşı öğrenci tutumları (GÇOKÖT) ölçeğinin Türkçeye uyarlanması. *İlköğretim Online,* 16(3), 1049-1057, doi: 10.17051/ilkonline.2017.330241

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*, New York, NY: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher,* 95(7), 486-490.

Mann, T. (2013). Proof by computer proof by human. https://www.gresham.ac.uk/lectures-and-events/proof-by-computer-and-proof-by-human. (Erişim tarihi: 04.07.2017)

Miller, R. L. (2012). On proof without words. https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf. (Erişim tarihi: 02.11.2016)

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013a). *Ortaokul matematik dersi (5-6-7-8. Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013b). *Ortaöğretim matematik dersi (9-10-11-12. Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013c). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik uygulamaları dersi (5-6-7-8. Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları.

Mishra, S. M. (2004). *Discreate mathematics*. New Delhi: Indira Gandhi, National Open University.

Moore, R. C. (1994). Making the transit oto formal proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27(3), 249-266.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington: Mathematical Association of America.

Oxford American Dictionary (1980). New York: Avon Boks.

Özdemir, E. ve Üzel, D. (2011). Gerçekçi matematik eğitiminin öğrenci başarısına etkisi ve öğretime yönelik öğrenci görüşleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* (40), 332-343.

Polat, K. ve Demircioğlu H. (2016). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, (28), 129-140.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*, New York, NY: Wiley Combined Edition,

Reis, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM*, 34 (1), 29- 35.

Sangalli, A. (1991). The burden of proof is on the computer. *New Scientist*, 129 (1757), 38-40.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80.

Sembiring, R. K., Hadi, S., & Dolk, M. (2008). Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. *ZDM,* 40(6), 927-939.

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670–675.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. E. Von Glasersfeld (Ed.), in *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Boston, MA: Kluwer Academic Press.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. R. Lesh, ve A. E. Kelly (Eds.), in *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Struik, D. J. (2011). *Kısa matematik tarihi.* (Çev: Y. Silier). İstanbul: Doruk Yayımcılık.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* (65), 1-20.

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: Tall D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, Kluwer, Dordrecht.

Tekin, B. ve Konyalıoğlu A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. B*ayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 5(I-II), 24-37.

Türk Dil Kurumu (TDK). (2005). *Türkçe sözlük*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları

Ülger, A. (2003). Mısır ve mezopotamya matematiği. *Matematik Dünyası.*(2003-I). 42-45.

Wallace, E. C. ve West S. F. (2004). *Roads to geometry*. (3). New Jersey: Pearson Education.

Walle de Van J., Karp, S.K., Bay-Williams J. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği*. (Çeviri Editörü: S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademi Yayıncılık

Wolf, R. S. (1998). *Proof, logic, and conjecture: The mathematicians toolbox*. New York: W. H. Freeman.

Van Der Waerden, B. L. (1994). *Bilimin uyanışı eski Mısır, Babilonya ve eski Yunan matematiği.* (Çev: O. Ş. İçen ve Y. Öner). İstanbul: Türk Matematik Derneği.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme.* (2). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, C. (2011). *Bilim tarihi*. (14). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Erzurum: Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü

EKLER

EK-1. Milli Eğitim Müdürlüğü İzin Yazısı

EK-2. Veli İzin Formu

EK-3. Gönüllü Katılım Formu

EK-1. Milli Eğitim Müdürlüğü İzin Yazısı

T.C.
KÜTAHYA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 53490996-44-E.3755608 21/03/2017
Konu : Emre ÜLKER'in
Tez Uygulaması

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) MEB. Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 2012/13 nolu Genelgesi.
b) Anadolu Üniversitesi Rektörlüğünün 03/03/2017 tarihli ve 27067 sayılı yazısı.

Bakanlığımızın ilgi (a) Genelgesi doğrultusunda, Anadolu Üniversitesi Rektörlüğünün ilgi (b) yazısında, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencisi Emre ÜLKER'in, danışmanlığını Doç.Dr.Abdülkadir ERDOĞAN'ın yaptığı "Ortaokullarda Sözsüz İspatların Matematiksel İspat Olarak Kullanımının İncelenmesi" konulu tez uygulaması çalışmasını 2016-2017 öğretim yılı bahar döneminde İlimiz Tavşanlı İlçesi Moymul Ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerine uygulamak istediği belirtilmektedir.

İl Milli Eğitim Müdür Yardımcısı Hamdi SARIÖZ'ün başkanlığında toplanan değerlendirme komisyonu yapmış olduğu inceleme sonucunda söz konusu tez uygulaması çalışmasının okullarda uygulanabilir olduğuna karar vermiş olup, eğitim- öğretimi aksatmadan, konunun dışına çıkmamaları, bütün sorumluluğun ilgililere ve okul müdürlüğüne ait olmak üzere yukarıda belirtilen tez uygulaması çalışmasının tamamlandıktan sonra bir örneğinin Müdürlüğümüze verilmek üzere yapılmasını;

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Hamdi SARIÖZ
İl Milli Eğitim Müdürü V.

OLUR
21/03/2017

Arif YALÇIN
Vali a.
Vali Yardımcısı

İl Milli Eğitim Müdürlüğü/KÜTAHYA
Elektronik Ağ:kutahya.meb.gov.tr
e-posta:stratejigelistirme43@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Filiz ÖRNEK- VHKİ
Tel: (0 274) 2236241/159
Faks: (0 274) 2236254

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 699f-61e7-3af3-901b-7691 kodu ile teyit edilebilir.

EK-2. Veli İzin Formu

VELİ İZİN FORMU

Bu çalışma, **Ortaokullarda Sözsüz İspatların Matematiksel İspat Olarak Kullanımının İncelenmesi** başlıklı bir araştırma çalışması olup sözsüz ispatların kullanımın öğrencinin ispat algısına olan etkisini belirleme amacını taşımaktadır. Çalışma, EMRE ÜLKER tarafından yürütülmektedir.

- Bu çalışmaya katılım gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda *video/ses kaydı ve not defterleri* ile öğrencilerden veriler toplanacaktır.
- Araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Toplanan veriler *araştırmacı tarafından* başkalarıyla paylaşılmayacak şekilde korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde öğrenciye rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de uygulama sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederse öğrenci çalışmadan istediği zamanda ayrılabilecektir. Çalışmadan ayrılması durumunda öğrenciden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Veli izin formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Tavşanlı Moymul Ortaokulu Matematik öğretmeni Emre ÜLKER'e (eulker79@yahoo.com/05325715002) yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı : Emre ÜLKER

Adres : Hanımçeşme M.

Barbaroz C. Tarhan Sitesi C Blok No:5

Tavşanlı/KÜTAHYA

Cep Tel : 0532 5715002

Bu çalışmaya çocuğumun katılmasına izin veriyorum, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimizi bilerek toplanan bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Veli Adı ve Soyadı: İmza:

Tarih:

EK-3. Gönüllü Katılım Formu

GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, **Ortaokullarda Sözsüz İspatların Matematiksel İspat Olarak Kullanımının İncelenmesi** başlıklı bir araştırma çalışması olup sözsüz ispatların kullanımın öğrencinin ispat algısına olan etkisini belirleme amacını taşımaktadır. Çalışma, EMRE ÜLKER tarafından yürütülmektedir.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda *video/ses kaydı ve not defterleri* ile sizlerden veriler toplanacaktır.
- Araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Toplanan veriler *araştırmacı tarafından* başkalarıyla paylaşılmayacak şekilde korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de uygulama sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabileceksiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Tavşanlı Moymul Ortaokulu Matematik öğretmeni Emre ÜLKER'e (eulker79@yahoo.com/05325715002) yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı : Emre ÜLKER

Adres : Hanımçeşme M.

Barbaros C. Tarhan Sitesi C Blok No:5

Tavşanlı/KÜTAHYA

Cep Tel : 0532 5715002

Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla katılıyorum, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimizi bilerek verdiğimiz bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı: İmza:

Tarih: