ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN

GEOMETRİ PROBLEMLERİNDEKİ MATEMATİKSEL

DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Duygu YILDIRIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Aralık 2015

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ PROBLEMLERİNDEKİ MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Duygu YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı

Danışman: Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Aralık 2015

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Duygu YILDIRIM'ın "Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerindeki Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı tezi 29.12.2015 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi programı yüksek lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. Nilüfer KÖSE	
Üye	: Doç.Dr. Dilek TANIŞLI	
Üye	: Yard.Doç.Dr. Emre EV ÇİMEN	

Prof.Dr. Esra CEYHAN
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZET

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ PROBLEMLERİNDEKİ MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Duygu YILDIRIM

Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Aralık 2015

Danışman: Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Bu araştırmanın amacı ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerine ait özelleştirme ve genelleme süreçlerini incelemektir. Genelleme yapabilmenin yanı sıra öğrencilerin genellemeye ulaşmalarını sağlayacak stratejilerine de dikkat edilmiştir. Araştırmada verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. 2014-2015 öğretim yılı Eskişehir ilinde yer alan üç devlet okulunda öğrenim gören toplam sekiz öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmanın verileri klinik görüşme yöntemi kullanılarak toplanmıştır. Öğrencilere genellemeye ulaşmaları beklenen beş geometrik problem verilmiş, öğrencilerden çözümlerini gerçekleştirdikten sonra farklı stratejiler kullanarak aynı genellemeye ulaşmaları istenmiştir. Veriler tematik olarak analiz edilmiştir.

Araştırma sürecinde elde edilen veriler sorular bazında analiz edilmiş ve her bir soru matematiksel düşünme süreçleri bağlamında özel olarak incelenmiştir. Bulgular ise bu süreçler için belirlenen tema ve alt temalar şeklinde görselleştirilmiş, öğrencilerin genellemeye ulaşabilmek için ürettikleri stratejiler ve bu stratejilerin hangilerinin sonunda tıkanma yaşadıkları belirlenerek tablolar ile sunulmuştur.

Araştırmanın sonucunda farklı problem durumlarında öğrencilerin genelleme yapabilme durumlarının değiştiği gözlemlenmiştir. Özelleştirme sürecinde yapılması gereken işlemleri başarılı bir şekilde gerçekleştiren ancak genelleme sürecinde zorluk yaşayan öğrencilerin genel olarak beklenen genellemeye ulaşabildikleri tespit edilmiştir. Sözel olarak genellemeyi ifade edebilen ya da problemlere geometrik olarak açıklama yapabilen öğrencilerden bazılarının ulaştıkları genellemeleri cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları dikkat çekmiştir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin veriler arasında ilişki ararken birden fazla strateji üreterek farklı şekillerde beklenen genellemeye ulaşabildikleri saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, matematiksel düşünme**,** özelleştirme, genelleme, genelleme stratejileri, geometri problemleri, problem çözme

ABSTRACT

INVESTIGATING THE MIDDLE SCHOOL STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING PROCESS IN GEOMETRY PROBLEMS

Duygu YILDIRIM

Department of Mathematics Education, Post Graduate Program

Anadolu University Graduate School of Educational Sciences

December 2015

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

The purpose of this study was to investigate eight grade students specializing and generalizing process in the geometry problems. In addition to generalizing process, the strategies that enable students to generalize were examined. In this research qualitative research methods were used to collect, to analyze, and to interpret data. This research was conducted with 8 eighth-grade students in the 2014-2015 academic year at the middle schools in the center of Eskişehir and clinical interview was used to collect data. Students were given five geometry problems, and after they completed the solutions, they were asked to solve the problem and reach the same generalization with different strategy. Thematic analysis was used to analyze data.

The obtained data was analyzed based on the questions and each question was specifically investigated in the context of mathematical thinking. Findings were displayed according to the themes and sub-themes which was carried out within this processes and tables were used to show what strategies students used to generalize and which strategy were stuck their solutions.

Results revealed that students' generalizations differed according to the context of the problem. It was deduced that students who successfully specializing and had difficulty in generalizing were generally reached the expected generalizations. Furthermore, some of the students who verbally or geometrically express the generalization had difficulty in algebraic generalization of the problem. In addition, successful students made expected generalization by using more than one strategy and different ways as they seeking relation between facts.

Key Words: Mathematics education, mathematical thinking, specializing, generalizing, strategies of generalizations, geometry problems, problem solving

ÖN SÖZ

Bu araştırmanın her aşamasında akademik ve manevi desteğini esirgemeyen, tezimi titizlikle okuyarak eleştirel bakış açısı ve deneyimi ile gelişimimi sağlayan, çok sevdiğim öğretmenim ve danışmanın Sayın Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE'ye minnettarım. Ayrıca tez jürimde yer alarak görüş ve önerileri ile tezime katkıda bulunan değerli hocalarım Doç. Dr. Dilek TANIŞLI ve Yrd. Doç. Dr. Emre EV ÇİMEN'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olarak benden hiçbir konuda desteğini esirgemeyen, her ihtiyacım olduğunda yardımıma koşan değerli arkadaşım Demet YEŞİL'e ve araştırma sürecinde bana yardım eden, sıkıntılarımı paylaşan değerli arkadaşım Sayın Arş. Gör. Deniz EROĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak beni yetiştiren, bugünlere gelmemi sağlayan, her zaman bana güvendiğini ve arkamda olduğunu bildiğim, canım annem Gülay YILDIRIM ve canım babam Ensar YILDIRIM'a ve varlığından güç aldığım biricik kardeşim Deniz Can YILDIRIM'a gösterdikleri sabır ve destekten dolayı çok teşekkür ederim.

Duygu YILDIRIM

Eskişehir, 2015

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

"Özelde geneli görmek ve genelde özeli görmek"
(Whitehead, 1911'den akt. Mason & Johnston-Wilder, 2004)

Düşünme yeteneği, insanı diğer canlılardan ayıran temel özelliklerden biridir. Bu yeteneğin gelişmesine katkıda bulunan en önemli araçlardan biri olan matematik, bilim ve teknolojinin giderek geliştiği günümüz dünyasında, yeni ve farklı problemlerle karşılaşan bireyler için oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu denli önemli bir bilim dalı olan matematik için literatürde çok fazla tanım geçmektedir. Matematik, kimilerine göre kuralları belli satranç türünde bir zekâ oyunu, kimilerine göre sayı türünden soyut nesneleri konu alan bir bilim, kimilerine göre bilim ve pratik yaşam için yararlı bir hesaplama tekniği iken matematikçilerin bakış açısına göre matematik bizi doğruya, kesin bilgiye götüren biricik düşünme yöntemidir (Yıldırım, 2008). Baykul (2009), "Matematik nedir?" sorusunun yanıtının insanların matematiğe başvurmadaki amaçlarına, kullandıkları matematik konularına, matematikteki deneyimlerine ve matematiğe olan ilgilerine göre değiştiğini belirterek bu çeşitlilik içinde insanların matematiği nasıl gördükleri ve onun ne olduğu konusundaki görüşlerini şu şekilde gruplandırmıştır:

- Matematik, günlük hayattaki problemleri çözmede başvurulan sayma, hesaplama, ölçme ve çizme işlemidir.
- Bazı sembolleri kullanan bir dildir.
- İnsanda mantıklı düşünmeyi geliştiren mantıksal bir sistemdir.

- Dünyayı anlamamızda ve yaşadığımız çevreyi geliştirmede başvurduğumuz bir yardımcıdır.
- Ardışık soyutlama ve genellemeler süreci olarak geliştirilen fikirler (yapılar) ve bağıntılardan oluşan bir sistemdir.

Altun'a (2006) göre ise matematik, yaşamın soyutlanmış biçimidir. Örneğin "Her biri x kg gelen beş çuvalın ağırlığı kaç kilogramdır?", "Her biri x lira olan beş deftere ödenecek para miktarı ne kadardır?" gibi soruların her biri ayrı yaşam kesitleri ile ilgilidir ve her ikisine de uygun olan eşitlik y=5x olup bu eşitlik, bu olayların soyutlanmış bir modelidir. Matematik, örüntülerin ve düzenlerin bilimidir. Bir başka deyişle matematik; sayı, şekil, uzay, büyüklük ve bunlar arasındaki ilişkileri içerir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009). Matematik sayesinde bu örüntü ve ilişkiler genellenebilir hatta bazı matematikçilere göre matematik genellemelerden ibarettir. Bu genellemelere ulaşmada özel durumların bulunmasının önemini ise Hilbert (1988'den akt. Boz, 2008), "Matematik sanatının püf noktası, bir genellemenin bütün tohumlarını içeren özel bir durumu bulmakta yatar." şeklinde belirtmiştir.

Umay'a (2003) göre matematik, düşünmeyi geliştiren araçlardan biri olup temel eğitimin yapı taşlarından en önemlisini oluşturur. Çünkü matematik eğitimi sayıları, işlemleri öğretmekten, günlük yaşamın vazgeçilmez bir parçası olan hesaplama becerilerini kazandırmaktan öte bir işlev üslenmekte; düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminlerde bulunma, problem çözme gibi önemli destekler sağlamaktadır. Bu düşünme biçimi matematiksel düşünme olarak adlandırılır ve üst düzey beceriler gerektiren bir düşünme şeklidir. Bu düşünme biçimine dayalı olarak Mason, Burton ve Stacey (1985) beş varsayım öne sürmektedirler:

1. Herkes matematiksel düşünebilir.

2. Matematiksel düşünme farklı problemlerle pratik yapılarak geliştirilebilir.

3. Matematiksel düşünme şaşırtıcı, umulmadık durumlarla ve zıtlıklarla açığa çıkarılabilir.

4.Matematiksel düşünme sorgulama, derinlemesine düşünme ile desteklenebilir.

5. Matematiksel düşünme kişinin yaşamış olduğu dünyayı ve kendini anlamasına yardımcı olur.

Gerçek hayat problemlerinin çözümünde doğal bir araç olarak tanımlanabilen matematiksel düşünme, matematik öğrenmek ve öğretmek için önemli bir gerekliliktir; bu nedenle de matematik eğitiminin en önemli amaçlarındandır (Stacey, 2006). Bu amaç doğrultusunda öğretim programlarında da matematiksel düşünme gücü gelişmiş bireyler yetiştirmek hedeflenir. Matematiksel düşünmenin gelişmesiyle birlikte zihinde yer alan matematiksel bilgi ve kavramlar kullanılarak soyutlama, tahmin etme, genelleme, hipotez kurup test etme, usavurma, kanıtlama ve betimleme yoluyla yeni bilgiye ulaşılabilmektedir (Alkan ve Güzel, 2005). Bu bağlamda hayatımızda bu denli geniş yer kaplayan matematiksel düşünmeyi bireylere kazandırma gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Çünkü matematiksel düşünme gücü gelişmiş bireyler, karşılaştıkları olayları analiz etmede ve sistemli olarak doğru ve en kısa yoldan çözüme ulaşmada daha başarılıdırlar. Bu süreçte bireyler buldukları ilişkiler hakkında *"Her durumda olur mu?", "Neden her durumda olur?"* gibi soruları düşünerek bir genellemeye varmaya çalışırlar. Driscoll'e (2007) göre ise genelleme becerisi, problem çözen kişi bir problem çözümünü başka bir problem üretmek için kullandığında ya da bütün çözümleri bulamadığını sezdiğinde gelişmeye başlar. Üst düzey bilişsel bir beceri olan genelleme öğrenciler için kolay bir süreç değildir. Çünkü genelleme sürecinde öğrencilerin sayılar ya da değişkenler arasındaki ilişkileri matematiksel bir dil kullanarak ifade etmeleri gerekir. Öğrenciler için soyut olan bu kavram ve süreçler onların zorlanmalarına sebep olmaktadır. Yılmaz, Argün ve Keskin (2009) yaptıkları çalışmada genellemeyi keşfetmenin ve problemin bileşenleri arasındaki ilişkiyi görmenin birçok öğrenci için zor olduğunu saptamışlardır. Yine Hashemi, Abu, Kashefi ve Rahimi (2013) genelleme becerisinin öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmelerini desteklediğini, matematik öğrenme sürecinde oldukça önemli olmasına rağmen genel olarak okullardaki öğretmen ve öğrenciler tarafından ihmal edildiğini ifade etmişlerdir.

Matematiksel düşünmenin temel süreçlerinden biri olan genelleme, matematiksel bilginin gelişiminde oldukça önemlidir. Genelleme, bireylerin yararlı bilgilerle deneyimlerini bir araya getirip yeni durumlardaki problemleri çözmelerine ve daha yaratıcı olmalarına izin verir (Hashemi vd., 2013). Genelleme sürecinde birkaç örnekten hareket edilerek daha geniş durumlar hakkında tahminlerde bulunulur. Bu süreçte "Doğru olması olası görünen şey nedir?", "Niçin doğrudur?" ve "Nerede doğrudur?" soruları karşımıza çıkar (Mason vd., 1985). Skemp'e göre matematiksel genelleme sofistikedir, karşılaşılan yeni durumların özümsenmesi talebine cevap verir, aynı zamanda bu taleplerin ilerisi için de ortaya konulan şemaların tam ve bilinçli olarak yeniden yapılanmalarına katkı sağladığından güçlüdür. Bu sayede öğrenciler matematiksel kavramları tanımayı ve bu kavramlarla ilişkiler kurmayı öğrenirler, bu nedenle genelleme sürecinin geliştirilmesi oldukça önemlidir (Yılmaz ve Argün, 2013). Genelleme sürecinin yaygın olarak görüldüğü becerilerden biri de problem çözmedir.

Matematiksel düşünmenin ve ona ait süreçlerin (özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ikna etme) geliştirilmesi problem çözme etkinlikleriyle gerçekleştirilir. Üstelik problem çözme, ortaokul matematik öğretim programında yer alan temel becerilerden de bir tanesidir. Problem çözme etkinlikleri ile öğrencilerin matematiksel bilgiyi kullanma, hipotezler üretme ve test etme, elde edilen sonucun doğruluğunu kontrol/ispat etme, eleştirel düşünme, farklı çözüm yolları üretme, tümevarımsal/ tümdengelimsel düşünme, soyutlama, ikna etme becerileri gelişir (MEB, 2009). Ayrıca Yıldırım'a (2008) göre düşünme, hangi konuda olursa olsun problem çözme etkinliğidir. Bu etkinliklerde, sorunu açıklayıcı/giderici çözümü bulma ya da oluşturma ile bulunan ya da oluşturulan çözümün doğruluğunu gösterme olmak üzere iki temel aşama ortaya çıkar: Birinci aşama genellikle "buluş", "icat" ya da "yaratma" diye nitelenmekte; ikinci aşama ise "doğrulama", kanıtlama" ya da "ispatlama" diye bilinmektedir. O halde matematikte problem çözme etkinliğini gerçekleştiren bir kişi önce ispatlayacağı bir genellemeye ulaşmalı, sonrasında ulaştığı bu genellemeyi uygun matematiksel işlemlerle doğrulamalıdır. Bütün bu süreçleri uygulamak, bir problemle karşılaşıldığında problemin cevabının ne olduğunu bulmaktan öte problemin çeşitli boyutları ile ele alınarak incelenmesini içerir ki bu da matematiksel düşünmeyi gerektirir ve geliştirir (Yeşildere ve Türnüklü, 2007). Bu süreçte ise rutin olmayan problemler oldukça önemlidir. Belirli bir formülle çözülemeyen, çözüm için öğrencinin bir ya da daha fazla strateji kullanmasını gerektiren problemler rutin olmayan problemler kapsamındadır. Bu şekilde olan alışılmamış karmaşık problemlerle karşı karşıya kalan çoğu öğrenci, problemi alt parçalara ayırmak ve şekil ile ifade etmek, tahminde bulunmak ya da kontrol etmek gibi eylemleri kendiliğinden uygulayamamaktadırlar (De Bock, Verschaffel ve Janssens, 1998). O yüzden öğretim sürecinde bu tür problemlere de yer verilmesi öğrencilerin düşünme süreçlerinin gelişimi için gerekmektedir. Bu tür problemlerin birçoğu bir ilişki, düzen ve örüntünün açıklanmasıyla ilgilidir ve bunların öğretimi öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen ya da örüntü arama eğilimini artırır ve ispat fikrini geliştirir (Altun, 2014).

Problem çözme becerilerinin gelişimine katkı sağlayan alanlardan biri de hiç şüphesiz geometridir. Geometri; çözümleme, karşılaştırma, genelleme yapma gibi temel becerilerin yanı sıra inceleme, araştırma, eleştirme, öğrendiklerini şema biçiminde ortaya koyma, özenli, dikkatli ve sabırlı olma, düşüncelerini açık bir şekilde ifade etme gibi bilişsel becerilerin gelişmesine olanak sağlar (Baykul, 1999'dan akt. Erdoğan, Akkaya ve Akkaya, 2009). Matematiğin bu denli önemli bir dalı olan geometri ise ne yazık ki en çok zorlanılan alanların başında gelmektedir. Öğrencilerin bilişsel süreçlerine ilişkin performanslarını ölçen uluslararası sınavlara ait raporlar incelendiğinde ülke olarak matematik başarımızın düşük olduğu görülmektedir (Aydın, Sarıer ve Uysal, 2012). Matematiğin diğer alanlarıyla kıyaslandığında özellikle geometri alanında başarının daha düşük olması ise dikkat çekicidir. Bu durum geometri alanındaki başarısızlığın altında yatan sebeplerin incelenmesi gerekliliğini ortaya çıkarmaktadır. Geometrideki başarısızlığın nedenleri arasında ülkelerin eğitim stratejileri, eğitime ayırdıkları bütçe, ailelerin eğitim durumu, öğretmen eğitimi gibi genel sebeplerin yanı sıra öğretmenlerin öğrencileri geometrik bilgi ve beceri kazanım sürecinde hatalı yönlendirerek öğrencinin uygun problem durumlarıyla karşılaşmalarına fırsat vermemeleri ve ezbere yöneltmeleri olabilir (Öztürk ve Uçar, 2010). Bu sebeplerle öğrenciler geometrik problemleri yorumlamada başarısız olmaktadırlar. Öğrencilerin geometrik problemleri yorumlayamamaları onların farklı çözüm yolları üreterek problemleri genelleyememelerine de yol açmaktadır.

Geometride genelleme basitçe, verilen sınırlı sayıdaki şekiller üzerinde yapılan incelemelerden ve analizlerden yola çıkarak daha geniş bir şekil sınıfı üzerinde fikre ulaşmadır. Genellemeye yönelik problemler, öğrencilerden ulaştıkları sonucun benzer her duruma uyduğunu kanıtlayıcı ve ikna edici argümanlar geliştirmesini ister (Driscoll, 2007). Yani genelleme yapabilmeye, matematiksel düşünmeye ait bileşenlerin geliştirilmesine olanak sağlayan problemler, yeni problemler karşısında düşünmeye ve bunların ortak yönlerini bulmaya teşvik eder. Oluşturduğu genellemelerle çözümlerin kolaylaştığını gören öğrenci problemler karşısında şu soruları sorar: *"Bu tarz problemleri çözme sürecinde çözüme yardımcı daha kolay bir yol bulunabilir mi?", "Bulunan yol benzer problemlerin çözümünde kullanılabilir mi?"* Bu tarz çıkarımlarda bulunan öğrencinin edindiği bilgiler daha kalıcı olur. Bu gibi sorgulamalara olanak sağlayan geometri problemleri öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin gelişmesi açısından da oldukça önemlidir. Bu doğrultuda bu çalışmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri ve bu süreçte kullandıkları stratejileri belirlemek amaçlanmıştır.

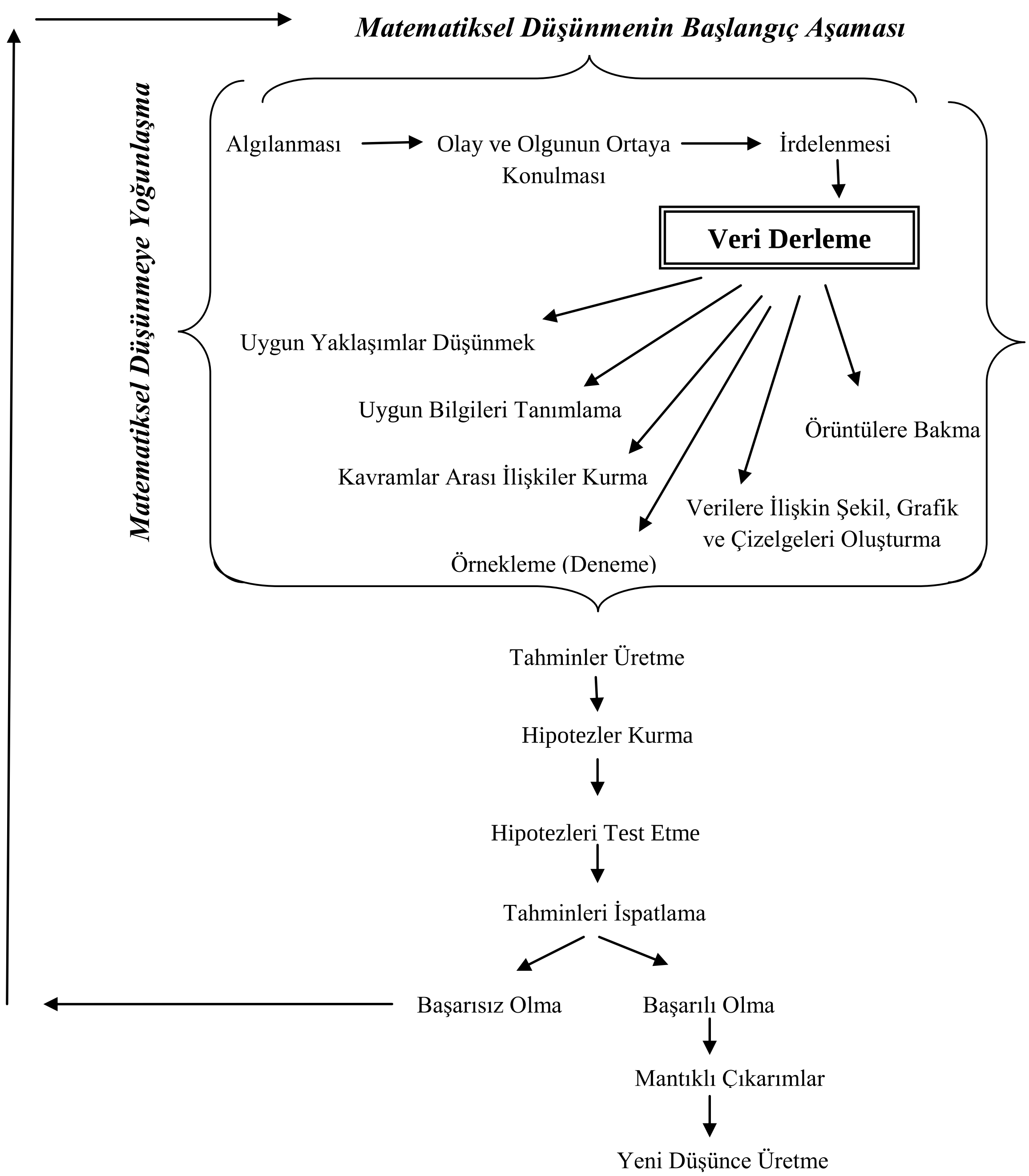
Literatürde çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin matematiksel düşünmenin aşamalarından genelleme süreci ve diğer aşamalarındaki beceri düzeylerini inceleyen (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba ve Altun, 2013; Garcia-Cruz ve Martinón, 1998; Sasman, Linchevski, Olivier ve Lienberg, 1998), genelleme sürecinde görselleştirmenin önemine dikkat çeken (Yılmaz, Argün ve Keskin, 2009; Yılmaz ve Argün, 2013), örüntülerin genellenme süreç ve stratejilerini inceleyen (Tanışlı ve Özdaş, 2009; Tanışlı ve Köse, 2011; 2013; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Yeşildere ve Akkoç, 2011; Rivera ve Becker, 2006), problem çözme ve şema gelişimine odakalanan (Steele ve Johanning, 2004) araştırmalara rastlanılmaktadır. Bu çalışmayı örüntüler ve cebirsel problemlerin genellenmesi ile ilgili literatürdeki diğer çalışmalardan ayıran nokta ise ortaokul sekizinci öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri ve bu süreçte kullandıkları stratejilere odaklanılmasıdır.

1.2. Kuramsal Çerçeve

Matematiksel Düşünme

Düşünme becerisinin gelişimine katkı sağlayan en önemli alanlardan biri matematiktir. Sevgen (2002), matematiksel düşünmenin insanların günlük yaşamlarında karşılaştıkları olaylara sistematik, doğru ve çabuk bir yaklaşım ileri sürebilmelerine olanak tanıdığını ifade etmektedir. Bu iddia matematiksel düşünmenin yalnızca soyut matematiksel kavramların yer aldığı durumlarda değil, günlük yaşamda da kullanılabilecek bir düşünme biçimi olduğunu ortaya çıkarmaktadır. Bu nedenle matematiksel düşünme, öğrencilere kazandırılması hedeflenen temel becerilerden biri olarak öğretim programlarında yerini almıştır. Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) tarafından da günlük hayatın yanı sıra birçok meslek alanında matematiği anlama ve kullanabilme ihtiyacının giderek arttığı bu yüzden de matematiksel düşünme ve problem çözmenin daha çok geliştirilmesi gerekliliği üzerinde durulmuştur. Yıldırım (2008) da matematiksel düşünmenin bilimsel düşünmeden temelde farklı olmadığını sadece matematiksel düşünmenin belli bir yönde gelişen bir biçimi olduğunu ve hangi düzeyde olursa olsun matematiksel düşünmenin bir problem çözme etkinliği olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca matematiksel düşünme bireyi kendisi hakkında daha derin anlayış geliştirmeye, ne bildiği hakkında daha mantıklı görüş oluşturmaya, ne bilmek istediğine yönelik daha etkili araştırma yapmaya, ne duyduğu ve gördüğüne dair daha kritik değerlendirme yapmaya yönlendirir (Mason vd., 1985).

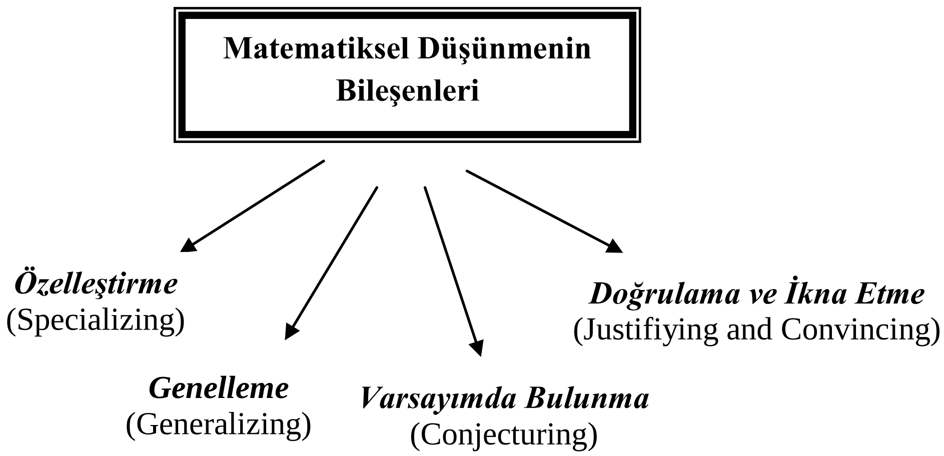
Henderson vd.'e (2004) göre matematiksel düşünme; problemlerin çözümünde matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin doğrudan ya da dolaylı olarak uygulanmasıdır. Alkan ve Güzel (2005) ise matematiksel düşünme sürecinde bireylerin algılarından hareket ederek bir ürüne ulaşma çabası içinde olduklarını ve bu çaba sırasında kullanılan yaklaşımların bireysel farklılıklara göre çeşitlilik gösterebileceğini vurgulamışlar ve matematiksel düşünmeyi diğer düşünmelerden ayıran en belirgin göstergenin bireylerin önceden öğrenmiş oldukları matematiksel bilgi ve kavramları kullanarak soyutlama, tahmin etme, genelleme, hipotez kurup test etme, akıl yürütme, ispatlama ve betimlemelerle yeni bir bilgiye ya da kavrama ulaşması olarak ifade etmişlerdir. Matematiksel düşünmenin özünde sürekli bir fonksiyonu tanımladığını ifade edip buna şu şekilde açıklık getirmişlerdir: Matematiksel düşünme, bir düşünceden yeni bir düşünceye ulaşma mantığı üzerine kuruludur; yani üretilen her yeni düşünce, bir başka düşüncenin başlangıcını oluşturur ve süreç bu şekilde bir döngü halinde devam eder. Bu bağlamda matematiksel düşünmenin oluşum aşamalarını Şekil 1'deki gibi belirlemişlerdir:



Şekil 1. Matematiksel Düşünmenin Oluşum Süreci (Alkan ve Güzel, 2005, s.225)

Matematiksel düşünmenin oluşum süreci “Matematiksel Düşünmeye Başlangıç Aşaması” ile başlar. Bu aşamada birey problemleri anlamaya ve anlamlandırmaya çalışır. İkinci aşamada ise bireyin daha çok matematiksel düşünmeye yoğunlaşarak anlamlandırdığı problemleri çözmede gerekli matematiksel bilgileri ve kavramları belirleme, bunlar arasında ilişkiler kurma, uygun matematiksel yaklaşımları seçme, örneklemeler yapma, örüntüleri belirleme kısacası bir veri derlemesi yapması gerekir. Bu yoğunlaşma aşaması beraberinde tahminlerde bulunmayı, bu tahminlere dayalı hipotezler kurup test etmeyi, tahminleri ispatlamayı, başarılı olma durumunda yeni bir düşünmeye temel atmayı başarısız olma durumunda ise tekrar başlangıca dönmeyi gerektirir. Birey sahip olduğu düşüncelerle matematiksel düşünme sürecini başlatır, bu sürecin bileşenlerini (özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ikna etme-ispatlama) kullanarak yeni düşünceler oluşturur ve oluşturduğu yeni düşüncelerle bir başka düşünce üretmek için süreci tekrar başlatır. Bu döngü Burton’a (1984) göre bir örüntünün araştırılmasıyla başlar; keşfedilen örüntü sözel, resimsel, somut ya da sembolik olarak ifade edilir; daha sonra ise örüntü doğrulanır ve bu şekilde süreç devam eder. Benzer şekilde Liu (2003) da matematiksel düşünmeyi tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, tanımlama, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan akıl yürütme, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir kombinasyonu olarak ifade etmektedir. Ortaokul matematik öğretim programlarında da tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme gibi süreçler matematiğin kendine özgü düşünme teknikleri olarak ifade edilmiş ve bunların geliştirilmesi gerekliliği üzerine vurgu yapılmıştır (MEB, 2013). Mason ve arkadaşlarına (1985) göre matematiksel düşünme, matematiksel süreçle ilgilidir ve geliştirilebilir. Bu gelişim de sorularla uğraşarak özenle mücadele etmek, bu uğraş sırasındaki deneyimleri derinlemesine düşünmek, davranışlarla hisleri birleştirmek, problemleri çözümleme süreci üzerine çalışmak, kendi deneyimleriyle uyumlu neyi ve nasıl öğreneceğini fark etmek gibi yollarla tüm yaşlardaki bireylerde gerçekleştirilebilir. Bunun gerçekleşmesi için yani bireylerin matematiksel düşünmelerini geliştirmek için öğretmenler öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarma, kavramsal anlamalarını destekleme ve düşüncelerinin devamını sağlama-derinleştirme becerilerine sahip olmalıdırlar (Olkun ve Toluk, 2007, s.61).

Burton (1984) ise matematiksel düşünmenin matematiğin konusu hakkında düşünme değil, bilinen matematiksel dinamiklerin, süreçlerin ve belli işlemlerin fonksiyonu olan bir düşünme biçimi olduğunu ifade etmiştir. Literatür incelendiğinde matematiksel düşünmenin bir süreç olduğu ve araştırmacıların matematiksel düşünmenin bileşenlerini benzer şekillerde ortaya koydukları görülmektedir. Örneğin Tall (1991), matematiksel düşünmenin soyutlama (abstraction), sentezleme (synthesizing), genelleme (generalizing), modelleme (modelling), problem çözme (problem solving) ve kanıt (proof) gibi farklı bileşenleri içerdiğini ifade etmektedir. Schoenfeld (1992) ise matematiksel düşünmenin temel bileşenlerini bilginin özü, problem çözme stratejileri, bireyin kendi öz kaynaklarını etkili kullanımı, matematiksel bakış açısına sahip olma, matematiksel uygulamalarla uğraşma şeklinde ortaya koymuştur. Mason, Burton ve Stacey (1985), matematiksel düşünmenin temel bileşenlerini aşağıdaki gibi tanımlayıp incelemişlerdir:



Şekil 2. Matematiksel Düşünmenin Bileşenleri

Özelleştirme; örneklere bakarak özel durumlar arama, genelleme; örüntüler ve ilişkiler arama, varsayımda bulunma; ilişkiler ve sonuçlarını tahmin etme, ikna etme süreci ise bir şeyin neden doğru olduğuna dair sebepler bulmak şeklinde ifade edilmiştir (Stacey, 2006).

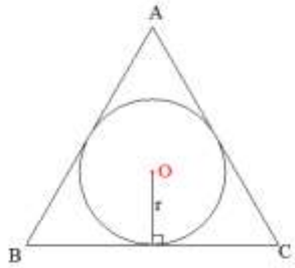
Özelleştirme

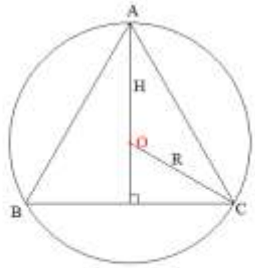
Özelleştirme, en basit anlamıyla çeşitli örneklere bakarak özel durumlar arama olarak ifade edilebilir. Bu örnekleri problemi anlamak için rastgele, genellemeye zemin hazırlamak için sistematik bir şekilde ve genellemeyi test etmek için ustaca seçmek ve incelemek gerekmektedir (Mason vd., 1985). Buradan da anlaşılacağı üzere özelleştirme sürecinde genellemeye ulaşabilmek için kanıtlar toplanır. Özelleştirme sürecinde bir ya da daha fazla örnek verme (verilen herhangi bir durum için karşıt ya da ilgili örnek bulma), bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme ve bulma, istenilenleri doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010).

Özelleştirme soruyu anlamayı, sorunun içine girmeyi kolaylaştırarak sorunun gerçekte ne ile ilgili olduğunu sezmeye yardımcı olan ve daha bilinçli tahmin yapıp soruyu çözmeye olanak sağlayan bir süreçtir. "Ne?" sorusundan daha çok "Niçin?" sorusu üzerine yoğunlaşan özelleştirme, bireyleri problemde istenenler hakkındaki düşüncelerini açıklamaya zorlayarak onların problemi daha iyi anlayıp gerçekte ne olduğuna dair bir iç görü oluşturabilmelerine ve örüntüyü ortaya çıkaran sonucun neden doğru olduğu hakkında fikir sahibi olmalarına katkıda bulunur (Mason vd., 1985). Benzer şekilde Burton (1984) da özel durumları incelemenin sorunun neyle ilgili olduğuna dair bir his geliştirilmesine ve ilgili tahminin yapılmasına yardım edeceğini ifade ederek özelleştirmenin tümevarımsal yaklaşım için anahtar olduğunu ve kullanılan her bir örneğin öğrencilerin düşüncesinin somutlaşmasına olanak sağladığını belirtmiştir. Polya (1957) ise özelleştirmeyi, kavramlardan oluşan bir kümeden daha küçük bir kümeye geçiş ya da kümenin içinde yer alan kavramlardan sadece bir diğer kavrama geçiş olarak tanımlar ve problemlerin çözümünde özelleştirmenin yararlı olduğunu ifade eder. Aşağıda özelleştirmenin ne olduğuna dair incelenen birkaç örnek sunulmuştur:

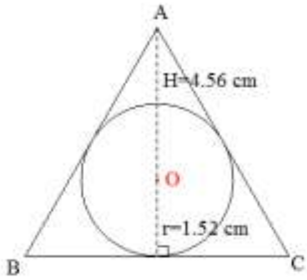
<u>Örnek 1:</u> Bir üçgende r iç teğet çemberin yarıçapı, R çevrel çemberin yarıçapı ve H ise yükseklik olsun. Bu üçgen için $r + R \leq H$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz (Polya, 1957).

Bu sorunun çözümü için üçgenlerle ilgili aynı sonucu verecek herhangi bir teorem hatırlanamıyorsa bazı özel durumlar test edilebilir.



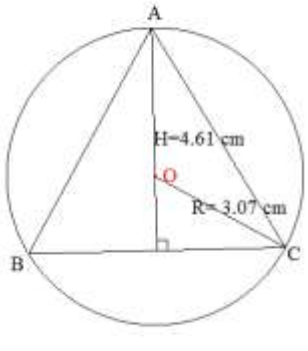


Örneğin; $|AB| = |BC| = |AC|$ olacak şekilde bir eşkenar üçgen çizildiğinde r ve H değerlerine ait aşağıdaki gibi bir tablo oluşturulabilir. Bu tablo incelendiğinde eşkenar bir üçgen için $r = \frac{H}{3}$ eşitliği görülebilir.



	H=	r=	H/3:
1	4.63	1.54	1.54
2	5.53	1.84	1.84
3	7.32	2.44	2.44
4	4.48	1.49	1.49
5	5.78	1.93	1.93
6	3.05	1.02	1.02
7	7.72	2.57	2.57
8	4.56	1.52	1.52

Benzer şekilde çevrel çember oluşturulduğu ve R ile H arasındaki ilişki incelendiğinde eşkenar bir üçgen için $R = \frac{2H}{3}$ eşitliğinin geçerli olduğu da görülebilir.



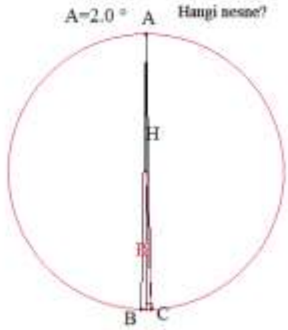
	H=	R=	2H/3=
1	4.56	3.04	3.04
2	5.65	3.77	3.77
3	7.41	4.94	4.94
4	3.51	2.34	2.34
5	4.70	3.13	3.13
6	6.27	4.18	4.18
7	2.44	1.63	1.63
8	4.96	3.31	3.31
9	5.62	3.75	3.75
10	4.61	3.07	3.07

Dolayısıyla her iki durum için de r + R $\leq$ H iddiası doğru olur.

Eğer farklı bir iddia çıkmazsa başka bir özel durum olan ikizkenar üçgen düşünülebilir. $|AB| = |AC|$ olacak şekilde aşağıdaki gibi bir ikizkenar üçgen çizilip üçgenin tepe açısının ölçüsünün 0° ya da 180° olduğu durumlar düşünülebilir.

A tepe açısının 0°'ye yaklaşması durumunda aşağıdaki tabloda görüldüğü üzere r yarıçap uzunluğunun değeri de 0'a yaklaşır ve A açısının 0° olması durumunda $r = 0$ eşitliği gerçekleşir.

	A=	r=
1	80.9	1.25
2	67.2	1.20
3	46.0	0.99
4	28.1	0.70
5	16.2	0.44
6	8.7	0.26
7	6.0	0.18
8	3.3	0.10



	A=	R=	H/2=
1	62.1	3.54	2.60
2	54.4	3.48	2.76
3	44.8	3.53	3.02
4	29.9	3.59	3.35
5	19.9	3.51	3.40
6	7.7	3.49	3.48
7	4.5	3.49	3.49
8	2.0	2.98	2.98

A tepe açısının 0°'ye yaklaşırken çevrel çemberin yarıçapı da H/2 değerine yaklaşır. Her iki eşitlik bağlamında r + R $\leq$ H ifadesinin geçerli olacağı söylenebilir. A açısının 180° olması durumunda ise üç yükseklik de ortadan kaybolur ve "$r = 0$, $R = \infty$, $H = 0$" eşitliklerine ulaşılır. Bu eşitliklerden ise r + R $\leq$ H iddiasının doğrulanmadığı görülür. Böylelikle verilen teoremin yanlış olduğu kanıtlanarak problem çözülmüş olur. Bu yolla tepe açısı 180°'ye çok yakın olduğu durumlarda da bu iddianın yanlış olduğu söylenir. Görüldüğü gibi problemin çözüm aşamasında özelleştirmeye başvurulmuş, birden fazla örnek verme yoluna gidilip (verilen durum için ilgili ve karşıt örnek bulma) bu örnekler tanımlanarak sonuçları yorumlanmıştır.

<u>Örnek 2:</u> %15 satış vergisi ödemek zorunda olduğunuz bir ürüne, %20 indirim yapılmıştır. Öncelikle hangisini hesaplamayı tercih edersiniz? İndirimi mi, vergiyi mi?

Bu gibi sorulara başlarken ilk olarak 100, 120 gibi sayılar için daha sonra ise hesap makinesi kullanılarak farklı değerler için denemeler yapılabilir. Bu denemeleri yapmaktaki amaç sorunun yanıtının ne olacağı hakkında fikir sahibi olmak ve aynı zamanda yanıtın neden doğru olabileceği hakkında bir his geliştirmektir. Böylelikle soru anlamlı hale getirilmiş olur ve soruyu tamamen çözmeye ipucu olacak olan bütün özel durumlar incelenerek bunların altında yatan örüntüyü görmek amaçlanır. Yani bireyi genellemeye götürecek olan süreç başlamış olur. (Mason vd., 1985).

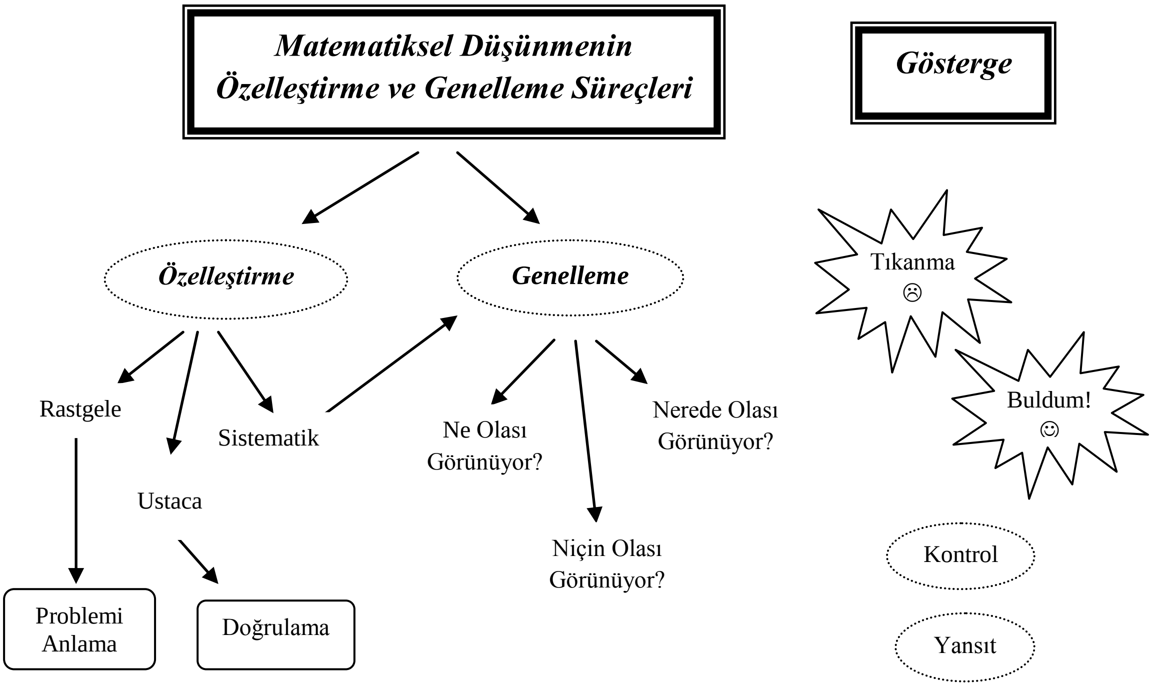
Genelleme

Genelleme ve genelleme süreci matematiksel düşünmenin gelişiminde oldukça önemlidir. Genelleme becerisi, problem çözmeye çalışırken aktif bir örüntü arayışı içinde olmaktır. Bu beceri matematiksel bilgi ve deneyim oluşturarak geliştirileceği için bu süreçte nitelikli açık uçlu sorularla karşı karşıya kalmak ve pratik yapmak önemlidir. Bilindiği gibi matematiğin bütün dalları örüntü açısından zengindir. Dolayısıyla genelleme, matematik için hayati bir öneme sahiptir (Mason vd. 1985). Benzer şekilde Polya (1957'den akt. Amit ve Neria, 2008) da genellemenin matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilgi gelişiminin temeli olduğunu ifade etmiştir. Lannin'e (2005) göre ise genelleme öğrencilerin sembolik temsilleri anlayıp bu temsillerle aritmetikteki önbilgileri arasında ilişki kurabilmelerine yardımcı olur. Bu sebeplerle genelleme matematik eğitiminin temel amaçları arasında yerini almıştır (NCTM, 2000). Literatürde genelleme için farklı araştırmacılar tarafından kullanılan farklı tanımlamalar bulunmaktadır.

Polya (1957) genellemeyi bir kavrama ilişkin anlayıştan bu kavramı içeren bir kümeye ilişkin anlayışa geçiş ya da sınırlı bir kümeye ilişkin kavrayıştan bu sınırlı kümeyi içeren daha kapsamlı bir kümeye ilişkin kavrayışa geçiş olarak ifade etmiştir. Benzer şekilde Harel ve Tall (1991) genellemeyi daha geniş içerikte akıl yürütmeye başvurma süreci olarak tanımlamışlardır. Krutetskii'ye (1976'dan akt. Amit ve Neria, 2008) göre genelleme, benzer durumların fark edilmesi ve genelleştirilmiş bir çözüm yoluna ya da ispat yoluna hâkim olma durumudur. Bir başka tanımda Kaput (1999) genellemenin, düşünülen durum ya da durumlardaki muhakeme ve iletişim kurma alanını genişletmeyi, durumlardaki benzerlikleri açığa çıkarmayı ya da bu benzerlikleri tanımlamayı, muhakeme ve iletişim kurmayı durumların ötesinde bir seviyeye, bu durumlar arasındaki bir örüntüye, işleme, yapıya ya da ilişkiye taşımayı içerediğini söylemektedir. Carraher, Martinez ve Schliemann (2008) matematiksel genellemeyi, bazı özellik ya da tekniklerin, matematiksel kavramların ya da durumların genişletilmiş kümesi için de geçerli olması şeklinde ifade eder. Skemp (1986'dan akt. Amit ve Neria, 2008) ise matematiksel genellemeyi bireyin mevcut şemasını ustalıkla yeniden yapılandırmasını ve yansıtmasını içeren karmaşık ve güçlü bir süreç olarak algılar. Ellis (2007) biraz daha farklı yaklaşarak genellemeyi hareket ve yansıma olmak üzere iki seviyede yapılandırır. Genellemenin hareket aşaması; iki ya da daha fazla matematiksel nesne arasındaki ilişkinin oluşmasını, ilişki ve benzerlikler arayışını ve örüntünün genişletilmesini ya da daha genel yapıda kural oluşturulmasını, yansıma aşaması ise tanımlama ya da mevcut genellemeyi kullanma yeteneğini içerir. Genelleme süreçlerini ayrı olarak inceleyen araştırmacılardan olan Tall (1991) ise genellemenin bileşenlerini genişleyen (expansive), yeniden yapılandırıcı (reconstruction) ve ayrıştırıcı (disjunctive) olmak üzere üç şekilde tanımlamıştır. Genişleyen genelleme, öğrencilerin mevcut fikirlerinde değişikliğe gerek duymadan, var olan bilişsel yapılarının genişlemesi anlamındadır. Yeni bilgi mevcut olan bilgiyle aynı alanda ve ona yakın olmalıdır. Var olan bilişsel yapıların yeniden yapılandırılmasını gerektiren genelleme, yeniden yapılandırıcı genellemedir. Bu genellemede birey, var olan fikir ve bilgilerinde küçük değişiklikler yaparak ilgili kavramı genişletir. Mevcut bilgiyi eski bilgiler ile bütünleştirmeye ihtiyaç duymadan öğrenilen yeni bilginin hatırlanmasını içeren genelleme tipini ise ayrıştırıcı genelleme olarak adlandırmıştır. Genellemeyi farklı bir boyutta ele alan Driscoll'e (2007) göre ise genelleme, "her zamanı" ve "her durumu" anlama ve tanımlamadır. Bu süreçte birey *"Bu neden her durum için geçerlidir?"*, *"Bu durumun doğru olmadığı örnekler düşünülebilir mi ve eğer bulunursa genelleme yeniden düzenlenebilir mi?"* gibi içsel sorular sorar.

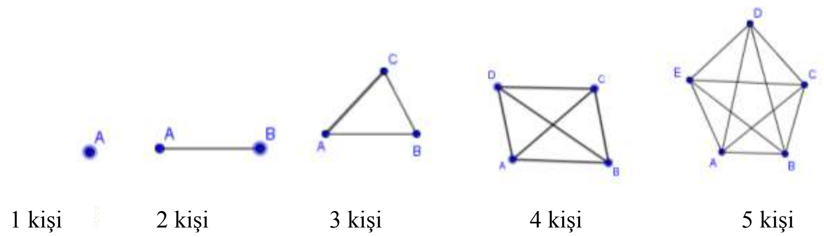
Mason ve arkadaşları (1985) genellemeyi, birkaç örnekten hareket ederek daha geniş durumlar hakkında tahminlerde bulunmak olarak tanımlar. Genelleme sürecinde birey, "*Doğru olması olası görünen şey nedir?", "Niçin doğrudur?" ve "Nerede doğrudur?"* soruları ile karşı karşıya kalır ve bu soruların yanıtlanmasını sağlayacak bir örüntü arayışı içine girer. Bu sebeple genelleme, en basit anlamıyla örüntü ve ilişki arama olarak da ifade edilebilir. Bu bağlamda Baki (2014) de genellemenin belli bir durum ya da olaydaki örüntüyü bularak bunu bir düşüncede toplama işi, aynı zamanda bir soyutlama olduğunu ileri sürmüştür.

Matematiksel düşünmenin önemli bir bölümünü oluşturan genelleme ve özelleştirme süreçleri arasında sürekli bir etkileşim mevcuttur. Özelleştirme süreci sorunun anlaşılmasına yardım eder, genellemeye zemin hazırlar ve genellemeyi test etmeye olanak sağlar (Mason vd., 1985). Matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan yola çıkarak iddia hakkında karar verilmeye çalışılır. Bu durum, genelleme sırasında özelleştirme işleminin de yapıldığını göstermektedir (Arslan ve Yıldız, 2010). Bu yüzden bu süreçleri birbirinden ayrı düşünmek mümkün değildir. Şekil 3'te bu süreçlere yer verilmiştir:



Şekil 3.Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri (Mason vd., 1985)

Dreyfus (1991) genellemenin özelliklerden sonuç çıkarmak ya da türetmek, özellikleri tanımlamak ve doğruluğun tanım kümesini genişletmek anlamında olduğunu düşünmektedir. Birey deneyimlerinden yola çıkarak bulduğu bir özelliği ya da durumu daha geniş kümeler için düşünüp düzenleyebilir. Örneğin "20 kişinin katıldığı bir toplantıda herkes birbiriyle el sıkışıyor. Buna göre bu toplantıda kaç el sıkışması olur?" probleminde öğrenci, öncelikle özelleştirme yaparak bir kişi, iki kişi,… olması durumlarını ele alıp diyagram çizer (Altun, 2014):



ya da aşağıdaki gibi tablo oluşturabilir:

Tablo 1. El Sıkışma Probleminde Ortaya Çıkan Örüntü

Kişi Sayısı	***El Sıkışma Sayısı***
1	0
2	1=1+0
3	3=1+2
4	6=1+2+3
5	10=1+2+3+4
.	
20	?=1+2+3+…+19
.	
n	?=1+2+3+…(n-1)

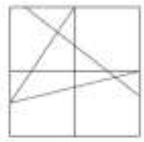
Farklı temsiller kullanıp örüntüyü fark ettiğinde istenilen sonuca kolaylıkla ulaşabilir ve bunu daha da genişleterek n kişinin katıldığı bir toplantıda meydana gelecek el sıkışma sayısının n.(n-1)/2 olacağını ifade edebilir.

Matematiksel düşünmenin bileşenlerinden biri olan genelleme, bir zincirin halkası olarak düşünülebilir. Birey genellemeyle karşılaştığında onu aşina olduğu özel durumlarla yani geçmiş deneyimleriyle karşılaştırır. Genel iddianın doğru olup olmadığına ya da ne zaman doğru olduğuna karar vermeye çalışılırken genellikle özel, uç durumlar düşünülür. Bu özel durumların düşünülmesinin amacı karşı örnekler bulmak değil, onların genellendiği gerçeğinden hareket ederek hesaplamanın nasıl yapıldığına dikkat edip durumu kavramaktır. Bu süreçte özelleştirme, her zaman ne olduğunu anlamak, genellemeyi kavramak yeniden yapılandırmak için yapılan bir harekettir. Burada genelde özeli görmek ve özelden geneli görmek şeklinde iki önemli algı ortaya çıkmaktadır. Genelde özeli görmek; sadece genel iddiayı görmek değil aynı zamanda geneli oluşturan özel örneklerin farkında olmak, özelden geneli görmek ise diğer olasılıklar için özel sayıları ya da diğer durumları görmek anlamındadır (Mason, 2004). Aşağıda özelleştirme ve genelleme süreçlerini açıklayan bir örnek verilmiştir:

Örnek: Bir tane karenin tam ortasından bir doğru parçası çiziniz. Bunun dışında birkaç tane daha çiziniz. Bütün çizgiler kareyle çakışacak şekilde herhangi bir düzende olabilir ve böylece kare birkaç bölgeye ayrılır. Burada beklenen, hiçbir komşu bölge aynı renk olmaksızın bölgeleri boyamaktır. (Bir noktası ortak olan bölgeler komşu sayılmayacak) Böyle bir düzenlemeyi yapmak için en az kaç farklı renge ihtiyaç vardır?

Tablo 2. Bölge Boyama Problemine Ait Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri (Mason vd., 1985, s.12)

<u>**Çözüm:**</u> Soru ne istiyor? Bunu anlamak ve neler olacağını görmek için bir örnekle başlanabilir. Yani özelleştirme yapılır. Bu şekilde beş çizginin 13 bölge oluşturduğu görülmektedir.



Komşu bölgeler farklı renk olacak şekilde bütün bölgelerin boyanması gerektiği bilinmektedir. Dört farklı renk kullanarak yandaki gibi bir şekil çizilebilir.

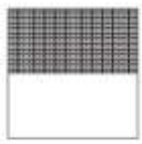
Herhangi bir çizgi düzeni için minimum renk sayısı bulma üzerine düşünülmesi gerekmektedir. Bu belirli düzen için dört minimum mudur? Üç renk kullanılırsa istenilen durum gerçekleşir mi? Bunun incelenmesi gerekmektedir ve üç renk kullanıldığında yandaki gibi istenilen durumun gerçekleşeceği görülür.

Daima iki renk yeterli olacak mıdır? Bu sorunun cevabını başka bir örnek ile kontrol etmek gerekmektedir. Bu yüzden "İki renk kullanma" ve "karşılıklı" kuralı özelleştirme yapılarak yandaki gibi yeniden gözden geçirilir ve "karşılıklı" kuralının bu defa olmadığı görülür.

Koyu bölgeler "karşılıklı" kuralıyla tekrar boyandığında, bölgenin (1) koyu da beyaz da olamadığı görülmektedir. Diğer bölgeler için de bu durum geçerlidir. Bu durumda ya ikiden fazla renge ihtiyaç olduğu ya da "karşılıklı" kuralının kullanılmaması gerektiği anlaşılır. Ancak bu şartlarda hangi yol seçilmedir? Bunun için "karşılıklı" kuralı kullanılmadan tekrar iki renkle boyama denenmelidir.

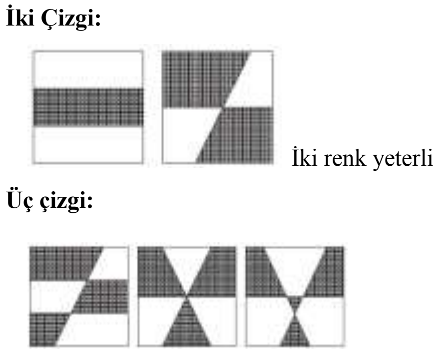
Yukarıdaki başarılı deneme yapılırken bir bölgeyi boyadıktan sonra kalan bölgelerle çalışmanın kolay olduğu fark edilir. Yani, boyalı bölgeye komşu olan bölge hemen diğer renkle boyanmalıdır (komşu kuralı). Bu durumda "Karşılıklı" kuralının başarılı olmadığı görülür. Bundan sonra bölgelerin her düzenlemesi için sadece iki renk kullanılarak boyanabileceği varsayımında bulunarak "neyin" doğru olabileceğini bulmakla genelleştirme yoluna gidilir.

Tek Çizgi:

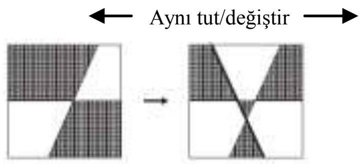


İki renk yeterli

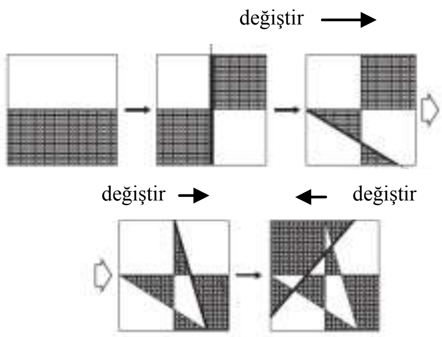
Bu varsayım için çok kanıt olmadığından bu durumun her zaman işe yarayabileceğine ikna edebilmek için sistematik olacak şekilde özelleştirme yapılır. Yani, yeni bir çizgi eklendikçe ne olduğuna bakarken, neden iki rengin yeterli olacağı anlaşılmaya başlanır. (Nedeni bulmayı genelleştirme).



Yeni bir çizgi eklendiğinde (örneğin üçüncü çizgi eklendi) bazı eski bölgelerin iki parçaya ayrıldığı şekilde görülmektedir. Şimdi bütün bölgeleri (ayrılan bölgenin tamamı ve parçaları) yeni çizginin bir tarafında oldukları renkte tutulur. Çizginin öbür tarafında, tüm bölgelerin renklerin değiştirilmesi gerektiği anlaşılır. Üç çizgiyle bunun nasıl çalıştığı incelenir:



Yeniden kontrol edilerek ilk örnek boyamaya çalışılır ve yöntem test edilir. Yani biraz daha özelleştirme yapılır.



Bu örnekte bütün kare düzgün bir şekilde boyandığı için varsayımın çalıştığı ve daima çalışacağını düşünülmektedir. Çünkü yeni çizginin iki tarafının da düzgün bir şekilde (komşu bölgeler eski boyamadan farklı şekilde boyandılar) ve bu çizgi boyunca olan komşu bölgelerin de farklı renkte boyandığı yukarıdaki tabloda görülmektedir. Böylelikle bütün kare yeni çizgiler eklendikçe düzgün bir şekilde boyanmıştır ancak bu süreçte şu sorular akla gelmektedir: “Bulunan yeni yöntemin kareyi aynı renklendirme yapması tesadüf müdür?”, “Yeni yöntemi kullanarak çizgiler farklı sıralamada çizilseydi sonuç ne olurdu, farklı bir sonuç mu verirdi?”, “Bu örnek ya da genel bir örnek için kaç farklı boyama mümkün olabilir?”, “Düz çizgiler eğri olsa ne olurdu?”. Bu tür bazı örnekleri düşünmek ve daha geniş içerikte çözümü bulmak konunun tamamen anlaşılmasını sağlar (Mason vd. 1985). Hashemi vd. (2013) de benzer şekilde genellemenin bireylerin yararlı bilgilerle deneyimlerini bir araya getirip yeni durumlardaki problemlerini çözmelerine ve daha yaratıcı olmalarına izin vereceğini düşünmektedir.

Genellemeye giden mücadele süreci giriş, atak ve gözden geçirme olmak üzere üç kısma ayrılmış olup giriş bölümü problem ile karşılaşıldığında başlar. Problemde verilen bilgiler özümsenip gerçekte neyin sorulduğu anlaşılmaya çalışılır ve daha sonra tam olarak ne yapılmak istenildiğine karar verilir. Özelleştirme sonuçlarını kaydetmek gibi asıl atağı gerçekleştirmek için gerekli olan bazı teknik işlemleri yapmayı içeren giriş bölümünde *"Ne biliyorum?", "Ne yapmak istiyorum?", "Neyle karşılaşabilirim?"* sorularına yanıt aranır. Problem anlaşıldığında ise atak kısmına geçilmiş olur. Bu kısım problem çözüldüğünde ya da çözmekten vazgeçildiğinde tamamlanır. Atak kısmında birçok plan formüle edilip denenebilir, dolayısıyla bu süreçteki matematiksel aktiviteler karışık ve çeşitlidir. Yeni bir strateji ortaya atan birey, bunu uygulamaya başladığında ya hızlı ve sorunsuz bir şekilde sonuca ulaşır (Buldum!) ya da bütün fikirleri deneyip istenilene ulaşamaz, tıkanma sürecine girer ve yeni bir iç görü, yeni bir yaklaşım için uzun bir bekleme süresi geçirir (Tıkandım!). Gözden geçirme bölümü ise isminden de anlaşılacağı gibi geriye bakmak anlamındadır. Düşünme becerilerini geliştirmek ve çözümün daha genel içerikte kurulmasını sağlamak için gerekli bir aşama olup bu aşamada aşağıdaki aktiviteler gerçekleştirilir (Mason vd., 1985).

- *Yapılanı kontrol etme* (Hesaplamalarda ne yapıldığından emin olmak için başlangıçta oluşturulan argümanları, hesaplamalardaki aritmetik ve cebir hatalarını, yapılan çıkarımların (tahmin) sonuçlarının mantıklı olup olmadığını, sadece yardımcı sorunun değil orijinal sorunun cevaplanıp cevaplanmadığının kontrol edilmesi),
- *Anahtar olaylar üzerine yansıtma yapma (*Gereken her şey yapıldıktan sonra ne yapıldığına dair kafa yormak, kullanılan akıl yürütmenin kontrol edilmesi, sistematik hesaplamaya ihtiyaç olduğunun anlaşılması, örüntü tahminini kontrol etmek ve genellemenin neden doğu olduğunu görmek için ayrıca özelleştirme kullanımı, anahtar fikirler ve yaşanılan deneyimden ne öğrenilebileceğinin düşünülmesi)
- *Süreci genişletme ve çözümü geniş içerikte sonuçlandırma* (Genelleme)

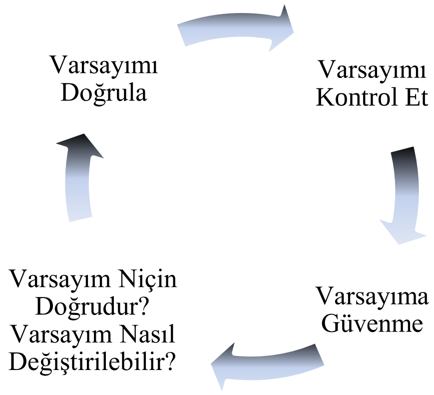
Bu şekilde bir problem karşısında bireyler kendi düşünme süreçlerinin farkına varıp sistematik bir şekilde ilerlerse amaçlarına daha kolay ulaşırlar. Bu süreçlerde yapılması gerekenler aşağıdaki tabloda ayrıntılı olarak verilmiştir:

Tablo 3. Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri (Mason vd., 1985, s.47)

SÜREÇLER	**BÖLÜMLER**	**GÖSTERGELER**
ÖZELLEŞTİRME	**GİRİŞ** Ne biliyorum? Ne istiyorum? Neyle karşılaşırım?	• Sorunun dikkatlice okunması. • Sorunun ne içerdiğini keşfetmek için özelleştirme yapılması. • İlgili görünen fikirlerin, becerilerin ve gerçeklerin neler olduğunun belirlenmesi. • Benzer bir soru düşünülmesi. • Bilginin sıralanıp sınıflandırılması. • Gerçek sorunun ne olduğunu keşfetmek için özelleştirme yapılması. • İmajlar, diyagramlar, semboller kullanılması. • Temsil, simgeleme, organizasyon gibi eylemlerin gerçekleştirilmesi.
	ATAK	***Tıkandım!*** ***Buldum!***
GENELLEME	**GÖZDEN GEÇİRME** Kontrol Yansıtma Genişlet	• Hesaplamaların yapılması. • Hesaplama sonuçları üzerine düşünerek sonucun mantıklı olup olmadığının düşünülmesi. • Soruyla uyumlu çözümlerin gerçekleştirilmesi. • Anahtar durum ve fikirlerin ortaya çıkarılması. • Tahminlerden ve iddialardan çıkan sonuçların değerlendirilmesi. • Çözümün yeterince açık olup olmadığının düşünülmesi. • Sonucu geniş içeriğe yansıtmak için genelleme yapılması. • Çözüm için yeni bir yol aranması.

Varsayımda Bulunma

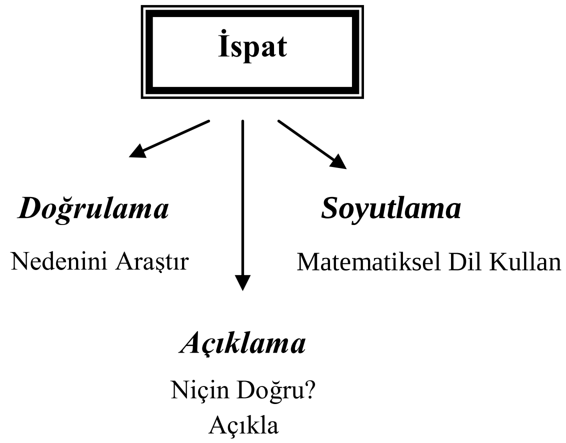
Özelleştirme ve genelleme süreçlerinde kendiliğinden ortaya çıkan varsayımda bulunma, bir önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma sürecidir. Bu süreçte sözel ya da matematiksel olarak tahminde bulunma, matematiksel iddiaları formüle etme, önermelerden sonuç çıkarma, hipotez kurma ve test etme gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010). Yeterli sayıda örnek incelenerek bu örnekler arasındaki bağlantılar ve örüntüler keşfedilir ve keşfedilen örüntülerden yola çıkarak bir yargıya varılır (Burton, 1984). Varsayımda bulunma sürecinde ortaya atılan varsayım doğrulanır, kontrol edilir ve doğru ise niçin doğru olduğu ifade edilir. Eğer yanlış ise nasıl düzeltileceği düşünülür, düzelmiyorsa vazgeçilip yeni bir varsayım aranır. Bu şekilde takip eden döngüsel süreci Mason vd. (1985) aşağıdaki gibi göstermişlerdir:



Şekil 4. Varsayımda Bulunma Süreci

Doğrulama ve İkna Etme

Matematiksel düşünmenin bir diğer bileşeni olan ispat, önermelerin ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarım, sav ya da sonucun doğruluğunu yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2008). Bu bileşen iddianın nedenini araştırma, varsayımın doğruluğunun altında yatan bazı sebepleri anlamayı içerir (Mason vd., 1985). Baki'ye (2014) göre bir iddianın örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliği gösterildiğinde ispat süreci tamamlanmış olur. İddianın doğruluğunu araştırma, niçin doğru olduğunu açıklama ve genelleme koşullarını kontrol etme işlemleri gerçekleştirilen bu süreç; doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç aşamada tamamlanır. İlk aşamada iddianın doğruluğu araştırılır, ikinci aşamada iddianın niçin doğru olduğunun açıklaması yapılır, üçüncü aşamada ise genelleme koşulları kontrol edilir ve soyutlama yapılır yani ispat için yapılanlar matematiksel dil kullanılarak soyutlaştırılır. Bu araştırma da ispat sürecinin ilk iki aşaması olan "doğrulama" ve "açıklama" üzerine odaklanılmıştır.



Şekil 5.İspatlama Süreci (Baki, 2014)

Bu araştırmada matematiksel düşünme süreci Mason, Burton ve Stacey'nin (1985) ele aldığı şekilde incelenmiş ve bu süreçlerden özelleştirme ve genelleme üzerine odaklanılmıştır. Özelleştirme süreci;

- Problemi Anlama
- İlişki Arama ve Varsayımda Bulunma

olmak üzere iki kısımda incelenmiş, genelleme sürecinde ise öğrencilerin oluşturdukları sözel ve cebirsel genellemelere odaklanılmıştır. Varsayımda bulunma, özelleştirme sürecinde ortaya çıktığı için, bu çalışmada özelleştirme süreci içinde ele alınmış, ayrı bir süreç olarak incelenmemiştir. Doğrulama ve ikna etme ise genellemenin ardından ayrı bir süreç olarak ele alınmıştır.

1.3. İlgili Literatür

Matematiksel düşünme ve genelleme sürecine ilişkin çeşitli araştırmalar mevcuttur. Yapılan bu araştırmalardan bazılarına aşağıda değinilmiştir.

Arslan ve Yıldız (2010) 11.sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmayı amaçladıkları çalışmada, bir devlet okulunda öğrenim gören 24 öğrenciyle çalışmışlardır. Bu çalışmanın veri toplama sürecinde doğru, çember ve çokgen kavramları ile ilgili soruların yer aldığı üç çalışma yaprağı kullanılmıştır. Çalışma yapraklarının her biri, dörder soru içeren iki etkinlik ve etkinliklerden elde edilen sonuçların birbiriyle ilişkilendirilmesini isteyen bir soru olmak üzere toplam dokuzar sorudan oluşmaktadır. Etkinliklerde özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispat süreçlerine ilişkin sorulara yer verilmiştir. Nitel araştırma yönteminin kullanıldığı araştırmada matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğü görülmüştür. Özellikle genelleme süreci ile ilgili sorularda öğrencilerin çoğunun sayılar ya da değişkenler arasındaki ilişkiyi daha çok sözel ifade ettikleri, matematiksel sembollerle ifade etmede sorun yaşadıkları gözlenmiştir.

Keskin, Akbaba ve Altun (2013) sekizinci ve on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarındaki yaşantı farklılıklarını incelemeyi amaçladıkları çalışmada, nitel araştırma yöntemi kullanılmışlardır. On dört tanesi sekizinci sınıf, 11'i 11.sınıf olan toplam 25 öğrenciye araştırmacılar tarafından hazırlanan, matematiksel düşünmenin aşamalarını içeren iki çalışma yaprağı uygulanarak veriler uygulama sırasında yapılan yapılandırılmamış gözlemler yolu ile toplanmıştır. Betimsel analiz yöntemi ile analiz edilen veriler sonucunda araştırmacılar, sekizinci sınıf öğrencilerinin daha fazla olmakla birlikte her iki grubun da ispat aşamasına doğru ilerledikçe kendilerini hem matematiksel olarak hem de sözel olarak ifade etmede zorlandıklarını gözlemlemişlerdir. Sekizinci sınıf öğrencilerinin tamamına yakınının genelleme yapmaktan kaçındığını, 11. sınıf öğrencilerinin bu süreçte daha başarılı olduklarını ortaya koymuşlardır.

Yeşildere ve Türnüklü (2007) tarama yöntemini kullanarak gerçekleştirdikleri çalışmada ilköğretim sekizinci sınıftan mezun öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemişlerdir. Veri toplama aracı olarak on tane açık uçlu problem kullanılan araştırma kapsamında 262 öğrencinin verileri nicel ve nitel veri çözümleme teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen verilerden öğrencilerin problem çözmede, matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve akıl yürütmede sorun yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda matematiksel bilgileri kavramsal olarak edinememenin problem çözmeye engel olduğu düşünülmüştür. Öğrencilerin bilgilerin direkt uygulanarak çözüme ulaşılan problemlerde yorumun ve akıl yürütmenin gerekli olduğu problemlere göre daha fazla başarılı olduğu, birden çok veri grubunu ilişkilendirmede sıkıntı çekenlerin tek bir veri grubunu dikkate alarak çözüm yaptığı belirlenmiştir. Bunların yanı sıra öğrencilerin matematiksel olarak tahmin etmede sorun yaşadıkları ancak matematiksel işlemleri yaparken güçlük çekmedikleri belirlenmiştir.

Sriraman (2004'den akt. Hashemi vd., 2013) da çalışmasında matematikte genellemenin formülasyonunu tanımlamıştır. Dokuzuncu sınıf öğrencileriyle çalışarak profesyonel matematikçiler gibi öğrencilerin genellemeyi bulmaları ve formüle etmelerinin mümkün olup olmadığını incelemek için öğrencilere dört farklı problem vermiş ve öğrencilerin bu problemleri çözerken yaşadıkları deneyimleri hakkında bilgi sahibi olmak istemiştir. Sonuçları ise bilişsel ve üst bilişsel bilgiye ilgili olan Piaget'in teorisini baz alan çerçeveyi düşünerek nitel olarak analiz edip yorumlamış ve şu bulgulara ulaşmıştır: Öğretmen öğrencilerin genelleme yapabilmelerine olanak sağlayan problem çözme deneyimleri oluşturmak istiyorsa problem seçimine çok dikkat etmelidir. Ayrıca genelleme davranışı, her bir problem üzerinde fazla çalışmaya bağlıdır. Bu yüzden, genelleme gibi üst düzey matematiksel bir davranışın daha iyi anlaşılması için yapısal olarak benzer problemler üzerinde çalışmanın ve bunları çözmenin gerekli olduğunu ifade etmiştir.

Rivera ve Becker (2006) öğrencilerin şekil ve sayı örüntülerini açıklamak ve genellemek için gerekli ve uygun olan temel düşünme yapılarını betimlemeyi amaçladıkları çalışmalarını 12 erkek, 17 kız olmak üzere toplam 29 altıncı sınıf öğrencisiyle (11 yaş) gerçekleştirmişlerdir. Lineer örüntülerin genellemesine yönelik olarak beş hafta süren bir öğretim deneyi gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerle ön görüşme ve öğretim deneyinden sonra son görüşmelerden elde ettikleri bulgularla deneysel bir çalışma ortaya koymuşlardır. Öğrencilerin sayısal ve geometrik olarak genellemeyi kurduklarını, cebirsel genellemeyi ise ancak üç dizi halinde gerçekleştirilen öğretim deneyinin sonuna doğru yapabildiklerini belirlemişlerdir. Toplamsal ya da çarpımsal karaktere sahip olarak verilen örüntüleri sınıflayan öğrencilerin bu süreçte kullandıkları stratejilerin benzerlik gösterdiğini fark etmişlerdir. Değişkenle ilgili bilgiye sahip olmayan öğrencilerin kısmi ya da yerleşmiş var olan tarzda (var olan bilgileri) genelleme yapabildiği, değişkenlerle ilgili biraz bilgisi olan öğrencilerin ise fonksiyonel bağlamda değişkenleri anlama yeteneğine bağlı olarak ya kısmi genellemeyi ya da tam cebirsel genellemeyi üretebildiklerini belirlemişlerdir. Genelleme sürecini temsilsel ve temsil öncesi olmak üzere iki kısımda tanımlayan Rivera ve Becker, temsilsel alanda değişkenin etkili bir şekilde kullanıldığını ifade etmişler ancak öğrencilerin değişken kullanımıyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmadıklarını belirlemişlerdir.

Öğrencilerin problem çeşitleriyle uğraşırken ortaya çıkardıkları genellemelerin hiyerarşik seviyelerini ve öğrencilere bir seviyeden diğerine geçmek için öğretici notlar belirlemeyi amaçlayan Garcia-Cruz ve Martinon (1998), 15-16 yaşlarındaki ortaokul öğrencileri ile gerçekleştirdikleri araştırmada deneysel araştırma yöntemi kullanmışlardır. Araştırmanın ilk kısmında 11 öğrenci ile görüşme yapılmış, ikinci kısımda ise 18 öğrenciye öğretim deneyi uygulanmıştır. Öğretim deneyi öğrencilerin lineer örüntülere dair daha iyi ve daha derin bir anlayış geliştirmelerine yardımcı olmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırma sürecinde öğrencilerden lineer örüntü içeren üç genelleme problemi hazırlamaları istenmiştir. Araştırmacının görevi ise öğrencileri küçük grup ve tüm sınıf tartışmalarına katılımları konusunda cesaretlendirmek, çözüm açıklandığında kimin bunu yargılayacağını sormak ancak çelişki göstermemeye ya da sorunun doğru ya da yanlış çözümüne dair tüm sınıfa ipucu vermemeye dikkat etmek olarak belirlenmiş, yanı sıra öğrenciler açıklayabilecekleri ve kanıtlayabilecekleri anlamlı çözümler geliştirmeyi denemeleri konusunda mecbur tutulmuş ve kendilerinin ya da diğerlerinin çözüm stratejilerini düşünme konusunda cesaretlendirilmişlerdir. Öğrencilerin yaptıkları genellemeler üç seviye halinde verilmiştir. Birinci seviyede öğrencilerin var olan kavramsal yapılarının yeni problemsel durumlarını özümsemek için yeterli olmadığını fark etmelerinin zaman aldığını bu yüzden öğrencilerin yanlış değişmez nicelikleri oluşturmaya devam ettiklerini, ikinci seviyede öğrencilerin değişmez niceliği (yerel genelleştirme) oluşturmada başarılı olduklarını ancak yeni bir durumla karşılaştıklarında yanlış olsa bile bir değişmez niceliği başka birinin yerine koyduklarını, üçüncü seviyede ise yerel ya da global genelleştirme yapıldığını belirlemişlerdir. Bu aşamadan sonra öğrencilerin yeni zihinsel yapılarının değişmez ve kalıcı olmasını sağlamaktan önce çok sayıda yeni durumlarla yüzleştirilmeleri gerektiğini ifade etmişlerdir.

Sasman, Linchevski, Olivier ve Lienberg (1998) öğrencilerin cebirsel genelleme problemlerini nasıl ele aldıklarını ve ulaştıkları genellemelerin geçerliliği hakkında nasıl karar verdiklerini incelemişlerdir. Toplamda 10 yedinci sınıf öğrencisiyle görüşülen bu çalışmada öğrencilerin istenileni kanıtlamak için kullandıkları yöntemlerden yararlanarak bilişsel çatışma yaratılmaya çalışılmış ve sonrasında öğrencilerin bu bilişsel çatışmaları nasıl çözdükleri kaydedilmiştir. Genelleme ve doğrulama süreçlerinde problemlerde verilenlerin rolü hakkında bir farkındalığa sahip olmayan öğrencilerin kanıtlama yöntemlerinin geçersiz olduğunu ortaya çıkarmışlardır. Araştırmanın birinci aşamasında matematiksel olarak yetenekli öğrencilere iki tane genelleme problemi verilmiş, öğrencilerin hem kalem kâğıt aktiviteleri hem de sözel tepkileri video kameraya alınarak veriler toplanmıştır. Sonrasında ise öğrencilere çeşitli temsilleri (sayısal, resimsel, hem sayısal hem resimsel) olan sekiz genelleme problemi verilerek onlardan yanıtlarını ve kullandıkları stratejileri açıklamaları ve ispatlamaları beklenmiştir. “Bu cevabı nasıl bulduğunu açıklar mısın?”, “Yanıtının doğru olduğuna beni ikna edebilir misin?” ya da “Bu cevaba nasıl ulaştığını bana gösterebilir misin?” şeklinde sorular yöneltilmiş ve eğer öğrenciler problemde verilen bilgileri temel alarak açıklama yaptılar ise bunu başarılı cevap olarak kabul etmişlerdir. Sonuç olarak öğrencilerin çoğunun verdikleri yanıtları doğrulaması gereken bir hipotez gibi görmedikleri, genelleme ve doğrulama sürecinde verilenlerin rolünün farkında olmadıkları belirlenmiştir. Araştırmada öğrencilerin orantısal çarpma hatası yapmaları ve bu konuda değişime karşı dirençli olmaları dikkat çekmiştir. Yineleme kullanarak elde ettikleri f(n) değerinin çarpma metodu kullanarak elde ettikleri değerle farklı olduğunda, çarpma kullanarak elde ettikleri yanıtın yanlış olduğuna kendilerini kolaylıkla ikna eden öğrencilerin aynı hatayı tekrar tekrar yaptıkları görülmüştür. Araştırmacılar, orantısal çarpma metoduna başvuran öğrenciler için bilişsel çatışma yaratarak tabloda verilenlere çarpma metodunun uygun olmadığını öğrencilerin fark etmesini beklemişler ancak çoğu öğrenci çarpma metodunu görüşmeler boyunca kullanmaya devam ederken on öğrenciden altısının hatayı dördüncü seansta fark edip bıraktığı görülmüştür.

Steele ve Johanning (2004) cebir öncesi dönemde bulunan yedinci sınıf öğrencilerinin problem çözme şemalarını açıklamayı amaçladıkları araştırmada bir öğretim deneyi yapmışlar ve sekiz odak öğrenci ile çalışmışlardır. Öğrencilerin problem durumlarındaki nicelikler arasındaki ilişkileri genellemek için kullanabilecekleri şemalar geliştirmeleri ve sözel ya da sembolik olarak genellemeleri ifade edebilmeleri üzerine odaklanılmıştır. Sonuç olarak ise genellemenin şemaların gelişiminde temel olduğu, öğrencilerin kullandıkları genelleme çeşitleri ile oluşturdukları şemalar arasında bağlantı olduğu görülmüştür. Öğrencilerin, yeni özel durumları var olan şemaları ile özdeşleştirerek ya da genel şemaları ile yeni özel durumları bağdaştırarak var olan şemalarını genişlettikleri, yani öğrencilerin hem genelden özele hem de özelden genele olmak üzere iki farklı yönde genelleme yaptıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra çalışmada öğrencilerin bu şemaların yeni durumlarda nasıl çalıştığını açıkladıklarında genelleme yapmayı öğrenmiş olacakları da ifade edilmiştir. Özümseme ve uyum süreçleri içerisinde öğrencilerin tamamının başarılı bir şekilde sözel olarak genellemeyi gerçekleştirdikleri ve şemalar arası iyi bağlantı kuran öğrencilerin aynı zamanda sembolik olarak da genellemeyi oluşturabildikleri ortaya çıkmıştır. Hem sözel hem de sembolik genellemede başarılı olan öğrencilerin çizdikleri diyagramların nasıl çalıştığını görmek için tablolar kullandıkları dikkat çekmiştir. Problemler arası bağlantıları gören öğrencilerin özel durumları çalışmaksızın geçmiş genellemelerini bu problemlere uyguladıkları ve özel durumlar kullanarak doğrulama yaptıkları da görülmüştür. Öğrencilerin kendi matematiksel ifadelerini önceden bildikleri niceliklerden türettikleri ve bu yapılan öğretim deneyinde de problemleri çözen öğrencilerin nicelikler arasındaki ilişkileri ifade etme yetenekleri ve konuşma dili yerine sembolik dil kullanımlarının geliştiği görülmüştür. Kısmen şema oluşturabilen öğrencilerin ise Sfard'ın (1991'den akt. Steele ve Johanning, 2004) bulgularında olduğu gibi problemler arası ilişkileri göremeyip bilgi transferi yapamadıkları ve özel durumlar arasındaki örüntüleri tanımlamada zorluk yaşadıkları bu yüzden de kendi düşünme becerilerini geliştiremedikleri belirlenmiştir.

1.4. Araştırmanın Önemi ve Amacı

Günümüz eğitim anlayışı öğrencilerin akıl yürütebilme, yaratıcı ve eleştirel düşünebilme ve öğrendiklerini günlük hayata aktarabilme becerilerini kazandırmayı amaç edinmiştir. Bireyler yaşamları boyunca her alanda farklı problemlerle karşılaşırlar ve bu problemleri çözmek için fark etmeseler de bir şekilde matematiksel düşünmeyi kullanırlar. Matematiksel düşünme, matematiksel problemlerin çözümü sırasında nicelikler arası ilişki kurularak bireyi sonuca ulaştıracak stratejiler belirlemeyi ve genelleme yapmayı kapsayan süreç olarak başlar ve bu süreç boyunca bu beceri gelişir. Bu sebeple matematiksel düşünmenin geliştirilmesi eğitim programlarında da temel hedeflerden biri olarak belirlenmiştir.

Matematiksel kavramları ezberlemekten, matematiksel formülleri işlemlere uygulamaktan daha fazlası olan matematiksel düşünme; matematiğin bir konusu olmamakla beraber süreç içinde gelişen akıl yürütmeyi, problem çözmeyi, iletişim kurmayı ve ilişkilendirme yapmayı gerektiren üst düzey bir düşünme becerisidir. Bu süreçte matematiğin mantıksal yapısıyla birlikte bireylerin düşünme süreçleri biçimlendirilir ve onların sorgulama, araştırma becerileri geliştirilir (Tanışlı, 2008). Düşünme ve sorgulamaya önem vermekten daha çok öğrencileri kısa zamanda sadece doğru yanıta ulaşmalarını hedefleyen çoktan seçmeli sınavlara yönlendiren eğitim sistemleri, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini (özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, ikna etme) anlamaya ve geliştirmeye yönelik olan rutin olmayan problemlere odaklanılmasına olanak vermemektedir. Oysaki matematiksel düşünme becerisi, bir problemle uğraşma, deneyimler üzerinde düşünme ve tasarlanan bir problem sürecini çalışma gibi çeşitli aktiviteler sonucunda geliştirilebilir (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003). Çünkü problem çözme aktiviteleriyle soyutlama, sembolleştirme, genelleme, ispatlama ve yeni sorular ortaya atma gibi beceriler kazanılır ve bu gibi beceriler söz konusu olduğunda matematiksel düşünme ortaya çıkmış olur.

Silver (1981) matematiksel problemleri çözerken bireylerin çözüm stratejilerini genellemek için matematiksel yapılar kullandığını ve bir problemden öğrenilenlerin benzer yapıdaki başka problemlere transfer edildiğini ifade etmektedir (Steele ve Johanning, 2004). Matematiksel düşünme becerisi kazandırmak uzun ve zor bir süreç olsa da bu becerinin, öğrencinin düşüncelerini açıklamalarına fırsat veren, bu düşünceleri sorgulayarak derinlemesine düşünmesine olanak sağlayan problem çözme temelli öğretim yöntemleri yoluyla öğrencilere kazandırılabileceği düşünülmektedir.

Bilişsel akıl yürütmeyi temel alan araştırmalarda (Piaget, 1971, akt. Steele ve Johanning, 2004) bireyin zihninde bulunan depolama, birleştirme, genelleme ve düzeltme gibi benzer deneyimlere olanak sağlayan bir mekanizma olarak tanımlanan şema kavramı temel alınmakta ve şemaların gelişiminde soyutlamanın önemli olduğu ifade edilmektedir. Şemalar ile matematiksel problem çözme arasındaki bağlantı genelleme ile sağlanır, bu nedenle matematiksel düşünmenin bileşenlerinden olan genelleme Mason'a (1996) göre matematiğin kalp atışıdır. Dubinsky'e (1991, akt. Steele ve Johanning, 2004) göre ise zihinde var olan şema, daha geniş deneyimler dizisine genişletildiğinde genellenir ve bireyler özelden genele ya da genelden özele olmak üzere her iki şekilde de genellemeye varırlar. Mevcut şemayı genişletme ve bu şemanın yeni durumlarda nasıl çalışacağını açıklamak için çaba gösteren bireyler genellemeyi öğrenirler (Steele ve Johanning, 2004). Genelleme yapmaya olanak sağlayan problemlerin çözüm sürecinde kullanılan becerilerin (çözümleme, karşılaştırma, genelleme yapma vb.) gelişmesine olanak sağlayan alanlardan biri de geometridir. Geometrik akıl yürütme ve bu alanda kullanılan temsil biçimleri ile birlikte fiziksel çevreyi tanımlamaya ve yorumlamaya olanak sunan geometri, önemli bir problem çözme aracıdır. Problem çözme sürecinde öğrenciler geometrik yapıları analiz ederek bu yapıların birbirleriyle ilişkilerini öğrenir, bunun yanı sıra öğrencilerin sonuç çıkarma, genelleme yapma ve ispatlama becerileri gelişir.

Geometri ve problem çözmenin çoğu öğrenci tarafından zor olarak nitelendirildiği bir başka saptama olarak ifade edilebilir. Yapılan uluslararası sınavlarda da bu durum açık olarak ortaya çıkmaktadır. Bireylerin problem çözme süreçleri ve bu süreçte problem içerisinde sunulan şekil ve ilişkileri matematiksel bir ifadeye dönüştürebilme, problemin bileşenlerini belirleyebilme, problemi matematiksel olarak formüle edip gerekli olan işlemleri akıl yürüterek sistematik bir şekilde gerçekleştirebilme, çözüme yönelik işlemler gerçekleştirip matematiksel bir çıktı elde ettikten sonra bunu kendi bağlamında problem ile ilişkilendirebilme ve sonucu yorumlayabilme gibi becerilerini ölçen PISA (Programme for International Student Assessment-Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) sınavında Türkiye’nin performansının katılımcı ülkelerin oldukça altına kaldığı belirlenmiştir (Zopluoğlu, 2014). Bilme, uygulama ve akıl yürütme bilişsel süreçlerine ilişkin performanslarını ölçen bir diğer sınav olan TIMMS’de (Trends in International Mathematics and Science Study- Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması) bilme basamağı, öğrencilerin bilmesi gereken gerçekler, işlemler ve kavramlar, ikinci bilişsel süreç olan uygulama basamağı, problemleri çözmek ya da soruları cevaplamak için öğrencilerin bilgilerini kullanma ve kavramsal algılamayı ve üçüncü bilişsel süreç olan akıl yürütme basamağı ise rutin problem çözümlerinin ötesine geçen sıra dışı durumlar, karmaşık içerikler ve çok aşamalı problemleri çözebilme yeteneğini içerir. Türkiye’nin matematik başarı puan ortalamasına bakıldığında diğer ülkelere göre son sıralarda yer aldığı görülmektedir (Yücel, Karadağ ve Turan, 2013). Güner, Sezer ve Akkuş İspir (2013) de

TIMMS’de Türk öğrencilerinin çoğunun bilgi düzeyindeki soruları yanıtlayabilirken uygulama ve akıl yürütme düzeyindeki sorularda zorlandıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin çok azının genelleme yapma, çok adımlı ve karmaşık problemleri çözme ya da sonuç çıkarma gibi üst düzey becerilere sahip olduğu ortaya çıkmıştır (Yayan, 2009). Bu sınav sonuçları geometri başarısı açısından irdelediğinde Türkiye açısından geometri başarının düşük olduğu söylenebilir (Bal, 2011). Yapılan araştırmalarda bu başarısızlığın nedenleri arasında Türkiye’de eğitim sisteminin yapısının uluslararası normlara uygun olmaması, çoktan seçmeli sınavların eğitim sisteminin kalitesini düşürmesi, yaşam boyu öğrenmeye gereken önem verilmemesi, etkin düşünme, algılama, iletişim kurma ve problem çözme yeteneği gelişmiş bireyler yetiştirmekten uzak bir eğitim sistemi kullanılmasına yer verilmektedir (Aydın, Sarıer ve Uysal, 2012). Bu bağlamda öğrencilerin formül ezberleme olarak gördüğü geometri dersinin işlemsel olarak değil diğer alanlarla bağlantı kurularak kavramsal bilgi temelli bir öğretim ile ele alınması yoluyla öğrenci başarısının arttırılabileceği düşünülmektedir. Matematiksel düşünme ve bileşenleri ile ilgili alan yazın taraması yapıldığında Türkiye’de direkt olarak ortaokul öğrencilerin geometri problemleri kapsamındaki matematiksel düşünme süreçlerinden özelleştirme, genelleme ve bu süreçlerde kullanılan farklı stratejilere odaklanan sınırlı sayıda çalışmaya rastlanılmıştır. Bu bağlamda yapılan bu araştırmanın alana katkı sağlanması beklenmektedir.

Bu düşünce doğrultusunda bu araştırmanın genel amacı ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinden özelleştirme ve genelleme süreçlerini incelemektir. Ayrıca öğrencilerin bu süreçte kullandıkları stratejilerin belirlenmesi de amaçlanmıştır. Belirtilen bu genel amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

- Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerine ilişkin özelleştirme süreçleri nasıldır?
- Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerine ilişkin genelleme süreçleri nasıldır?

1.5. Sınırlılıklar

Bu araştırma;

- İçerik bakımından genelleme yapabilme becerisi gerektiren geometri problemleri ile,
- 2014-2015 öğretim yılı bahar dönemi, Eskişehir ili merkezinde yer alan üç okulda öğrenim gören ve klinik görüşmelere katılan sekiz öğrenci ile sınırlıdır.

1.6. Tanımlar

Matematiksel Düşünme: Problemlerin çözümünde matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin doğrudan ya da dolaylı olarak uygulanmasıdır (Henderson vd., 2004).

Özelleştirme: Bir genellemeye ulaşmayı sağlayacak kanıtları bir araya getirme işlemidir (Mason vd.,1985).

Genelleme: Birkaç örnekten hareketle daha geniş olaylar kümesi hakkında tahminlerde bulunma ya da bazı temel ilişkilere ait sezgileri açık bir şekilde ifade etmeye çalışmaktır (Mason vd., 1985).

Varsayımda Bulunma: Önermenin doğru olabileceğini tahmin ederek doğruluğunu araştırma sürecidir (Mason vd., 1985).

İkna Etme: İddianın nedenini araştırma, varsayımın doğruluğunun altında yatan bazı sebepleri bulma işlemidir (Mason vd., 1985).

İKİNCİ BÖLÜM

YÖNTEM

Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve bu süreçte kullandıkları stratejilerin belirlenmesi amacıyla yapılan bu araştırmada öğrencilerin düşünme ve akıl yürütme süreçleri ile ilgilenilmiş, verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Sosyal olguları açıklamaya ve anlamaya yardım eden insanların duyguları, davranışları, düşünceleri ve dünyayı nasıl anlamlandırdıkları ile ilgilenen bir araştırma çeşidi (Merriam, 2002) olan nitel araştırma sosyoloji ve antropoloji gibi disiplinlerden gelen bir yöntem olmakla beraber yorumlayıcı araştırma ya da alan araştırması olarak da adlandırılır (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006'dan akt. Tanışlı, 2008). Algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik bir sürecin izlendiği nitel araştırmalarda amaç bir durumu derinlemesine betimlemek ve özel bir durumdan genel bir sonuca ulaşmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Nitel araştırmalarda üzerinde araştırma yapılan kişilerin bakış açılarıyla araştırılan olay, olgu, norm ya da değerler incelenmeye çalışılır. Bu inceleme sırasında araştırma yapılan kişilerin oluşturdukları ve kullandıkları özel dil, anlamlar, kavramlar üzerinde durup onları anlamak ve bunların araştırılan kişiler için ne anlam ifade ettiğini ortaya çıkarmak amaçlanır (Ekiz, 2003). McMillian'e göre araştırmacı ise anahtar bir araç olup davranışların, içeriğin anlaşılmasını sağlayan ayrıntılı ve derinlemesine bilgi toplamak amacıyla davranışların nasıl ve neden meydana geldiğine odaklanır (2004'ten akt. Tanışlı, 2008). Denzin ve Lincoln ise nitel araştırma yapan araştırmacıların araştırılacak konuları doğal ortamda incelediklerini, araştırılan insanların getirmiş oldukları anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası içerisinde olduklarını ileri sürer (1998'den akt. Ekiz, 2003).

2.1. Araştırma Ortamı

Araştırmanın uygulaması, MEB'den izin alınarak (EK-1) Eskişehir il merkezinde yer alan üç okulda, 2014-2015 öğretim yılı bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Okulların üçü de sosyo-ekonomik düzeyleri orta olan ailelerin çocuklarına tam gün eğitim-öğretim veren MEB'e bağlı kurumlardır. Bu okulların seçilmesinde öğrencilerin yaklaşık aynı sosyo-ekonomik koşullara sahip olması ve okullarda klinik görüşmelerin gerçekleştirilmesi için uygun ortamların yer alması temel alınmıştır. Klinik görüşmeler okulların kütüphanelerinde yapılmıştır. Görüşmeler sırasında kullanılan video kamera öğrencileri, öğrencilerin kâğıtlarını görebilecek ve öğrencilerin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Görüşmeler sırasında görüşmecinin öğrenci ile yüz yüze olduğu ve öğrencinin yaptıklarını rahat görebildiği bir oturma düzeni oluşturulmasına dikkat edilmiştir.

2.2. Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın katılımcılarını 2014-2015 eğitim-öğretim yılı Eskişehir ilinde bulunan üç devlet ortaokulunda öğrenim gören sekiz tane sekizinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Nitel araştırmalarda amaç genelleme değil, çalışılan konuyu derinlemesine ve tüm olası ayrıntıları ile incelemektir. Bu nedenle örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemi benimsenmiştir. Çünkü amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına, olgu ve olayların keşfedilmesine ve açıklanmasına olanak vermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Amaçlı örneklemenin birden fazla çeşidi vardır. Bunlardan biri olan ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır. Buradaki ölçütler araştırmcı tarafından oluşturulabilir ya da önceden hazırlanmış bir ölçüt listesinden yararlanılabilir" (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s.112). Araştırmada katılımcıların belirlenmesinde bu yöntem kullanılmış ve ölçüt, sınıf düzeyi olarak ele alınmıştır. Bu bağlamda zengin veri elde edebilmek için örüntü ve geometri (çokgenler, geometrik cisimler, vs.) ile tanışmış öğrencilerin uygun olacağı düşünülerek sınıf düzeyi ortaokul sekizinci sınıf olarak belirlenmiştir. Araştırma sürecinde çeşitlilik gösteren durumlar arasında benzerlik ya da farklılıkların olup olmadığının görülebilmesi için öğrenciler iki farklı (orta ve yüksek) başarı düzeyinden seçilmiştir. Klinik görüşmelerde öğrencilerin düşünme ve muhakeme etme, verileri sınıflandırma ve ilişkilendirme, varsayımda bulunma, genelleme gibi üst düzey becerileri kullanmaları gerektirecek sorular kullanılacağı için başarı olarak düşük seviyedeki öğrencilerden veri elde edilemeyeceği düşünülmüş ve bu nedenle sadece orta ve yüksek başarı düzeylerine sahip öğrenciler tercih edilmiştir. Öğrenci başarı düzeylerini belirlemede öncelikle matematik öğretmeninin öğrenciler hakkındaki görüşleri ve ayrıca TEOG sınav sonuçları baz alınarak dört kız-dört erkek olmak üzere sekiz öğrenci seçilmiştir. Dört kız-dört erkek öğrenci arasından ise orta ve yüksek başarı düzeylerine uygun öğrenciler seçilmiş ve bu düzeylere uygun öğrenciler seçilirken her düzeye ait iki kız, iki erkek öğrenci seçilmesine dikkat edilmiştir. Öğrencilerin aynı sosyo-ekonomik koşullara sahip ve birbirine oldukça yakın olan üç okuldan seçilmesinin nedeni çalışılacak öğretmenlerin öğrencilerini gönüllü olarak çalışmaya dâhil etmeleridir. Üç farklı okuldaki üç öğretmen de en az dört yıllık mesleki deneyime sahip, yüksek lisanslı ve çalışmaya öğrencilerinin katılması konusunda gönüllü öğretmenlerdir. Öğrencilerin dağılımlarını belirten tablo aşağıda verilmiştir:

Tablo 4. Araştırmaya Katılan Öğrencilerin Cinsiyet ve Başarı Düzeyleri

Okul / **Başarı Düzeyi**	**Orta**		**Yüksek**
Okul 1	1(Nur)	1(Han)	2(Rana, Hale)
Okul 2	1(Su)	1(Mete)	1(Oğuz)
Okul 3			1(Efe)
Öğrenci sayısı	2	2	4
Toplam			8

2.3. Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmada veriler görüşme, gözlem ve doküman incelemesi aracılığıyla toplanır ve çevreyle ilgili veri, süreçle ilgili veri, algılara ilişkin veri olmak üzere üç tür veri elde edilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmanın temel verilerinin toplanmasında görüşme tekniğinin bir çeşidi olan ve matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşme öğrencilerin düşünme yapılarını, bilişsel süreçlerini derinlemesine anlamaya olanak sağlar (Ginsburg, 1981; Clement, 2000).

Klinik Görüşme

Klinik görüşme, düşünmenin doğasını anlamayı amaçlayan Piaget’in ortaya attığı bir tekniktir ve bu teknik öğrencilerin düşünmelerindeki zenginliği keşfetmek, temel aktivitelerini yakalamak, bilişsel yeteneklerini belirlemek için kullanmaktadır. Piaget’in çalışmaları matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmaları büyük ölçüde etkilemiş, matematiksel bilginin altında yatan zihinsel sürecin anlaşılması için yapılan matematik eğitimi araştırmalarında tercih edilen bir yöntem olmuştur (Ginsburg, 1981).

Klinik görüşme daha önce planlanmış bir şekilde, bir ya da birden fazla görevler (sorular, problemler ya da etkinlikler) aracılığıyla görüşmeci ile öğrencinin karşılıklı etkileşime girdiği bir tekniktir (Goldin, 2000). Bu teknik bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak için kullanılır (Clement, 2000). Bahsedilen akıl yürütme sürecini ve öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amaçlandığından öğrenciyle karşılıklı görüşmeler yapılır. Bu görüşmeler, öğrencilerin kendi dünyalarını nasıl oluşturduklarını, nasıl düşündüklerini, bilişsel süreçlerini nasıl işlediklerini ve zihinlerini nasıl çalıştırdıklarını anlamaya da yardımcı olur (Ginsburg, 1981). Klinik görüşme yöntemiyle öğrencilerin hataları derinlemesine incelenebilir ve gizli matematiksel düşünmeleri açığa çıkarılabilir. Problem çözme sırasında öğrencilerin yaptıkları hatalar ya da yanılgılar, onların matematiksel bilgi ve becerileri hakkında ipuçları verebilir. Bu açıdan klinik görüşme, araştırmacının istediği amaçlara ulaşılmasında oldukça geniş esneklik sunar (Karataş ve Güven, 2003). Bu araştırmada öğrencilerin geometri problemlerini genellemelerine ilişkin matematiksel düşünme süreçlerini belirlemek ve derinlemesine bilgi toplamak amacıyla klinik görüşme tekniği kullanılmıştır.

Klinik görüşmelerde veriler ses kayıt cihazı, video kamera, gözlemci notu ve öğrenci çalışmaları ile toplanır. Görüşme sürecinde görüşmecinin yönelttiği keşfedici sorular, birbirini takip eden ilişkili problemler, geriye dönük sorular, ipuçları ya da beklenmedik müdahaleler gibi durumlarla daha belirleyici ve net veriler de elde edilir. Sözel ve sözel olmayan davranışları ya da etkileşimleri de analiz eden araştırmacı, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri ile ilgili yorumlar yapabilir. Klinik görüşmelerde amaç öğrencinin doğru ya da yanlış yanıtlarını belirlemek değil öğrencinin matematiksel görevleri gerçekleştirebilme sürecini incelemektir. Klinik görüşme, matematiği öğrenme ve matematiksel problem çözme sürecinde gözlemler yaparak bir araştırma aracı, matematik eğitimi uygulamalarının iyileştirilebilmesi ve geliştirilebilmesi ya da öğrencilerin düşünme süreçlerini anlamada bir değerlendirme aracı olarak kullanılabilir (Goldin, 2000).

Klinik görüşme üç temel tekniği içerir (Ginsburg, 2004'ten akt. Tanışlı, 2008)

Deneme: Öğrencinin düşünmesi ile ilgili varsayımları aydınlatmak için planlanan görev ya da seçilen testlerin dikkatli bir şekilde uygulanmasıdır.

Gözlemleme: Görüşmeci tarafından öğrencinin bir problemi çözerken üstün davranışlarının yakın bir şekilde incelenmesidir. Ayrıca öğrencinin yapmış olduğu ağız hareketleri ve fısıltıları, spontane yorumları ve duygusal ifadeleri gibi iki grup özelliği fiziksel olarak birleştiren davranışların not edilmesidir.

*Çözüm yolunun istenmesi: "*Çözümü nasıl buldun?" sorusu ile öğrencinin çözüm yolunun istenmesidir.

Bu araştırma sürecinde deneme, gözlemleme ve çözüm yolunun istenmesi tekniklerinin üçü de kullanılmıştır.

Klinik görüşmelerin planlanması elde edilen çıkarımların geçerliliği açısından oldukça önem taşımaktadır. Bu nedenle görüşmeler planlanırken görevler, görüşme soruları, sonda sorular, öğrencilerin seçimi, görüşme ortamı, materyallerin hazırlanması gibi pek çok değişken kontrol altına alınıp iyi bir planlama yapılması gereklidir. Klinik görüşmede kullanılacak soruların hazırlanmasında görüşme süresinin uygun tutulması, öğrencinin sahip olduğu önbilginin farkında olunması, sorunun öğrencinin matematiksel düşünmesini açığa çıkaracak ve ilgi çekici şekilde sunulması, içeriğin farklı yeteneklerdeki öğrencilere hitap etmesine dikkat edilmesi, konuya ilişkin önceki araştırmaların incelenmesi, sürecin gerçeğe uygun bir ortamda yürütülmesi ve kullanılabilecek materyallerin belirlenmesi önem taşımaktadır (Hunting, 1997).

Goldin'e (2000) göre ise klinik görüşmelerin yapılandırılması ve planlanmasında 10 ilkeye dikkat edilmelidir. Bu ilkeler; araştırma ve klinik görüşme sorularının hazırlanması, pilot test, öğrenciler için uygun görevler seçme, zengin temsil yapılarını kapsayan görevler seçme, tanımlanan görüşmeleri detaylı bir şekilde açıklama, dış öğrenme çevresiyle maksimum iletişim, neyin kayıt edileceğine karar vermek ve mümkün olduğunca çok kayıt etmek, yeni ya da tahmin edilemeyen durumlar için uyanık olma, öğrenciyi özgür problem çözmeye cesaretlendirme, uygun olduğunda uzlaşma şeklindedir.

Bu araştırma sürecinde ise klinik görüşmelerin planlanması ve yürütülmesinde yukarıda bahsedilen ilkeler dikkate alınmıştır. Öncelikle araştırmanın genel amacı ve alt amaçları belirlenmiş, daha sonra bu amaçlar dikkate alınarak genelleme yapmaya uygun olan geometri problemleri ve öğrencilerin bu problemlerin çözümü sırasında düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak klinik görüşme soruları hazırlanmıştır. Genelleme yapmaya olanak sağlayan geometri problemleri hazırlanırken araştırmanın amaçları, alanyazın taramasından elde edilen veriler, ilköğretim matematik dersi öğretim programında belirtilen kazanımlar, öğrenci etkinlik kitapları, yerli ve yabancı kitaplar ve genelleme sürecine yönelik yapılmış araştırmalar dikkate alınmıştır. Bu bağlamda soruların hem ortaokul sekizinci sınıf düzeyine uygun hem de matematiksel düşünmenin bir bileşeni olan genelleme sürecini incelemeye olanak sağlayacak türden sorular olmasına dikkat edilmiştir. Klinik görüşmede matematiksel görevler özel ölçütler ve daha önce yapılmış araştırma sonuçları, içerik, ortam, düzen ve yapı dikkate alınarak hazırlanabilir. Görüşmeci ise öğrencilerle etkileşime girerek öğrencilerin problemi çözerken ne yaptığı ile değil problemi nasıl çözdüğü ile ilgilenir (Goldin, 2000). Araştırmada sorular, genellemeye ulaşmaya çalışan öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri hakkında veri elde edilebilecek şekilde düzenlenmiştir. Hazırlanan sekiz klinik görüşme sorusu iki öğretim üyesi ve ortaokulda görev yapan iki matematik öğretmeni olmak üzere matematik eğitimi alanında uzman dört kişiye sunulmuştur. Uzmanlar, her sorunun ölçülmek istenilene uygunluğunu belirleme formundaki “Uygun”, “Uygun değil” seçeneklerinden birini işaretleyerek belirlemişler ve açıklamalarda bulunmuşlardır. Alınan bu görüşler doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılarak üç soru çıkarılmış, bazı soruların ifadeleri değiştirilmiştir (EK-4). Hazırlanan soruların pilot uygulaması, 2014-20015 bahar dönemi Eskişehir il merkezinde yer alan ve araştırmanın yürütüleceği okula benzer bir ilköğretim okulunun sekizinci sınıfına devam eden bir kız öğrenci üzerinde yapılmıştır. Pilot çalışma, soruların net anlaşılabilirliğinin ve görüşme sorularının benzer biçimde diğer öğrenciler tarafından tekrarlanabilirliğinin belirlenmesi amacıyla yapılır. Bu süreçte dil kullanımındaki olası yanlışlıklar, matematiksel yanlış anlamalar, belirsizlikler ve beklenmedik durumlar ortaya çıkarılır (Goldin, 2000). Pilot çalışma sonucunda soruların anlaşılırlığında bir sorun olmadığından dolayı sorularda herhangi bir değişiklik yapılmamıştır.

Klinik görüşme sorusunun doğasının ve düzenlenmesinin görüşmeci için kritik olduğunu ifade eden Hunting’e (1997) klinik görüşmede genel olarak sorular, açık uçlu olmalı, düşünme sürecinin açıklanabilmesi için maksimum düzeyde tartışmaya ve diyaloga olanak sağlamalı ve hem öğrenci hem de görüşmeciye sırayla düşünme süreçlerini yansıtmalarına izin vermelidir. Bu bağlamda araştırma kapsamında, klinik görüşme sorularında *"Ben senin düşünce tarzını öğrenmeye çalışıyorum. O yüzden bu soruyu çözerken yüksek sesle düşüncelerini benimle paylaşır mısın?", "Ne yaptığını yüksek sesle söyler misin?", "Bunu nasıl düşündüğünü söyler misin?", "Nasıl çözdüğünü açıklayabilir misin?", "Nasıl biliyorsun? Nasıl karar verdin?", "Niçin?", "Bulduğun sonucun doğruluğunu nasıl kontrol edersin?", "Emin misin?"* şeklinde soru biçimleri kullanılmıştır. Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın ise *"Tekrar açıklar mısın?"* gibi alternatif ve sonda sorular da sorulmuştur (Clement, 2000, s.572). Bunların yanı sıra öğrenciyi cesaretlendirici "çok güzel", "aferin", "tamam", "devam et" gibi sözel ifadeler kullanılmıştır.

2.4. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacı, bizzat alanda zaman harcayan, araştırma kapsamındaki kişilerle doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimlerini, toplanan verilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada araştırmacı, araştırma sürecinin tüm aşamaların planlaması ve yürütülmesinde tarafsızlığını korumuş, görüşmeci olarak öğrencilerle görüşmüş, görüşmeler sırasında öğrencilerin düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak sorular yöneltmiştir.

2.5. Veri Toplama

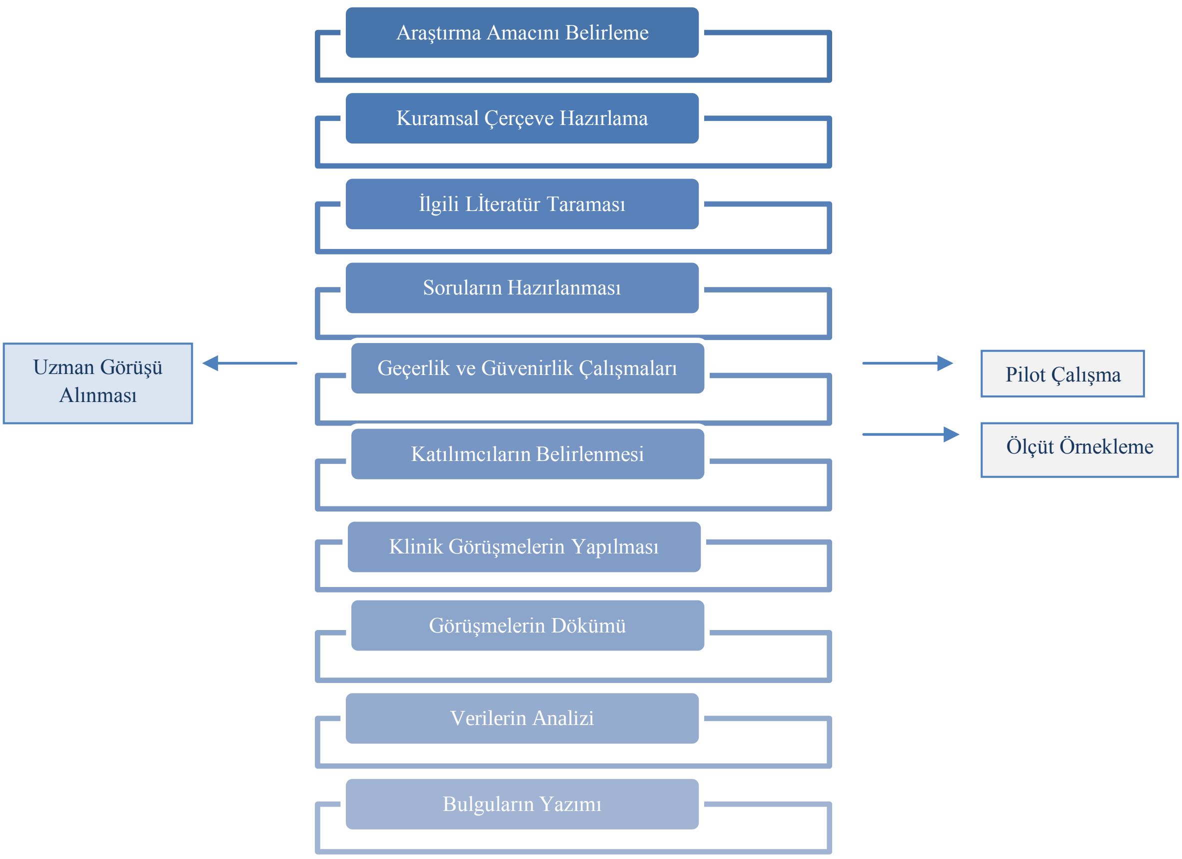
Araştırmanın verileri, 27.04.2015 - 05.06.2015 tarihlerinde arasında toplanmıştır. Öğrencilerle haftada bir gün görüşülmüş her görüşmede öğrencilere klinik görüşme soruları yöneltilmiştir. Klinik görüşmelere başlanmadan önce görüşme yapılacak öğrencilerden ve velilerinden görüşme izni alınmıştır. Bunun için öğrenci velilerine ve öğrencilere görüşmelerin nasıl yapılacağını içeren görüşme onay formu verilerek imzalamaları istenmiştir. Görüşme onay formları EK-2 ve EK-3'te verilmiştir. Görüşmeler için izin alındıktan sonra görüşmeye geçmeden öğrenciler süreç hakkında bilgilendirilmiş, öğrencilere doğru ya da yanlış bir yanıt vermelerinin önemli olmadığı, o yanıta nasıl ulaştıklarının daha önemli olduğu açıklanmış ve bunlar bu video kaydı aracılığıyla da kayıt edilmiştir. Genelleme sürecinin gözlemlenebileceği beş geometri problemi yöneltilen öğreniciler ile iki ya da üç ayrı oturum şeklinde görüşülmüştür. Görüşmelerin her birinde öğrencilere sorular ayrı kâğıtlarda yazılı olarak sunulmuştur.

Öğrencilerden verilen soruları yanıtlarken sesli düşünmeleri ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmıştır. Tablo 5'te her bir öğrenci ile gerçekleştirilen toplam klinik görüşme süreleri verilmiştir:

Tablo 5. Öğrencilerle Yapılan Klinik Görüşme Süreleri

Öğrenci İsimleri	*Görüşme Süresi*
Nur	107'
Efe	136'
Han	93'
Mete	80'
Oğuz	106'
Su	102'
Rana	223'
Hale	121'

Genel olarak bu araştırma sürecinde aşağıdaki adımlar takip edilmiştir:



Şekil 6. Araştırma Süreci

2.6. Veri Analizi

Araştırmada elde veriler analiz edilmeden önce klinik görüşmelerle elde edilen verilerin dökümü yapılmıştır. Döküm sırasında her bir konuşma olduğu gibi hiçbir düzeltme yapılmadan görüşmeci-görüşen sırasıyla yazılmıştır.

Araştırmada verilerin analizinde nitel analiz yöntemlerinden biri olan tematik analiz yöntemi kullanılmıştır. Tema, araştırma verilerinden ortaya çıkartılan kavramdır (Bogdan ve Biklen, 1998). Temalar, katılımcının görüşme sırasında kullandığı ifadelerden meydana gelebileceği gibi araştırmacının, alandaki bilgi yeterliliğine dayanarak verilerde var olan bilgilere isimler vermesiyle de oluşturulabilir (Patton, 1990). Tematik analiz veri içindeki tema ve örüntüleri belirlemede kullanılan bir yöntemdir. İki adımda gerçekleştirilen bu yöntemde öncelikle görüşme verilerinin dökümleri birkaç kez okunur ve katılımcılar tarafından ifade edilen düşünceler anlamlandırılmaya çalışılır. İkinci adımda ise kodlamaya geçilir. Kodlama aşamasında kendi içinde ve birbiriyle anlamlı olan kısımlar bir araya getirilerek geçici temalar belirlenir. Bu aşamada her tema toplanan tüm veri seti ile ilişkilendirilir ve daha sonra geliştirilen ilk temalar tekrar düzenlenerek tüm veri seti üzerinden çıkarılan kodlar ile çalışılan temalar ilişkilendirilir. Oluşturulan temalar adlandırılır ve tanımlanır (Liamputtong, 2009). Son olarak ortaya çıkarılan temalar ve temalar arası ilişkiler yorumlanır ve karşılaştırılır. Bu araştırmada da veriler üzerinde araştırmacı ve bir alan uzmanı hazırlanmış olan kuramsal çerçeveyi dikkate alarak bağımsız çalışarak temaları ve alt temaları oluşturmuşlardır. Bu süreçte kodlama sırasında bazı kodlarda alanyazın dikkate alınarak literatürde yer alan kodlara benzer isimler verilmiştir. Bu şekilde araştırmada veriler bir araya getirilerek incelenmiş ve ortak yönleri bulunmaya çalışılmıştır. Ortak yönleri olan veriler birer alt başlık altında gruplanmış olup bu alt başlıklar araştırmanın alt temalarını oluşturmuştur. Bu alt temalar uygun şekilde başlıklandırılmıştır. Daha sonra alt temalar bir araya getirilerek temalar oluşturulmuştur. Ortaya çıkan tema ve alt temalar birbiriyle ilişkili ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmiştir.

Verinin görsel hale getirilmesi, ortaya çıkan kavramların, temaların ve alt temaların birbirleriyle ilişkilerinin belirgin hale getirilmesi aynı zamanda bu kavram, tema ve ilişkilerden yola çıkarak sonuçlara ulaşmayı sağlaması açısından önemlidir

(Miles ve Huberman, 1994). Bu bağlamda ortaya çıkan temalar ve temalar arası ilişkiler şekiller ile desteklenerek sunulmuş, aynı zamanda elde edilen tema ve alt temalar öğrencilerden alınan görüşler ve dökümanlardan doğrudan alıntılar yapılarak desteklenmiştir.

2.7. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik kavramları; inandırıcılık (iç geçerlilik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

İnandırıcılık: Bireyin bilişsel yapısı ve düşünme süreçlerinin ve gözlemlenen olayların doğru bir şekilde açıklanmasıdır (Clement, 2000; Miles ve Huberman, 1994 akt. Tanışlı, 2008). Bu bağlamda araştırmacı, verileri nesnel bir yaklaşımla toplandığına, elde ettiği bulguların gerçekliğine, benzer ortamlarda sonuçların geçerliliğine, süreçlerin birbiri ile tutarlı olmasına ve nesnel bir yaklaşımla sonuçlar ortaya koyduğuna ilişkin kanıtlar sunmalıdır. Bu araştırmada araştırmacı farklı özelliklere sahip katılımcılar ile etkileşimde bulunmuş; olay, olgu, durum ve yorumları katılımcıların bakış açısıyla ortaya koymuştur. Bu yolla derinlemesine veri toplayarak elde ettiği sonuçları birbiriyle karşılaştırmış, yorumlamış ve temalar oluşturmuştur.

*Aktarılabilirlik: A*raştırma sonuçlarının genellenebilirliğidir. Nitel araştırmalarda araştırma sonuçları doğrudan benzer ortamlara ve durumlara genellenemez; ancak bu tür ortamlara sonuçların uygulanabilirliliğine ilişkin geçici yargılara ulaşılması mümkündür (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Erlandson ve diğerleri (1993; Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2005) araştırma sonuçlarının aktarılabilirliğini artırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerini önermektedir. Bu araştırmada da aktarılabilirliğin sağlanması için ölçüt örnekleme kullanılmış, katılımcıları belirleme ölçütleri ve katılımcıların özellikleri ayrıntılı olarak verilmiştir.

Tutarlılık: Araştırma yaklaşımının ve araştırmanın veri toplama, analiz gibi aşamalarında yapılan kontroller hakkında bilgi verilmesidir. Araştırmaya dışardan bir gözle bakılır ve araştırmacının araştırma etkinliklerinde tutarlı olup olmadığı ortaya konulur (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada veriler, veri toplama ve analizi ile ilgili tüm aşamalar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

Teyit edilebilirlik: Araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtması ve araştırmacının nesnel bir yaklaşımla verileri ortaya koymasıdır. Bu bağlamda araştırmacının ulaştığı sonuçları elde ettiği verilerle sürekli olarak teyit etmesi ve okuyucuya mantılıklı bir açıklama sunabilmesi gerekir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada nesnel davranılmaya çalışılarak verilerin tanımlanması ve yorumlanması sağlanmış, sonuçların doğruluğu için farklı araştırmacılardan yararlanılmıştır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BULGULAR ve YORUMLAR

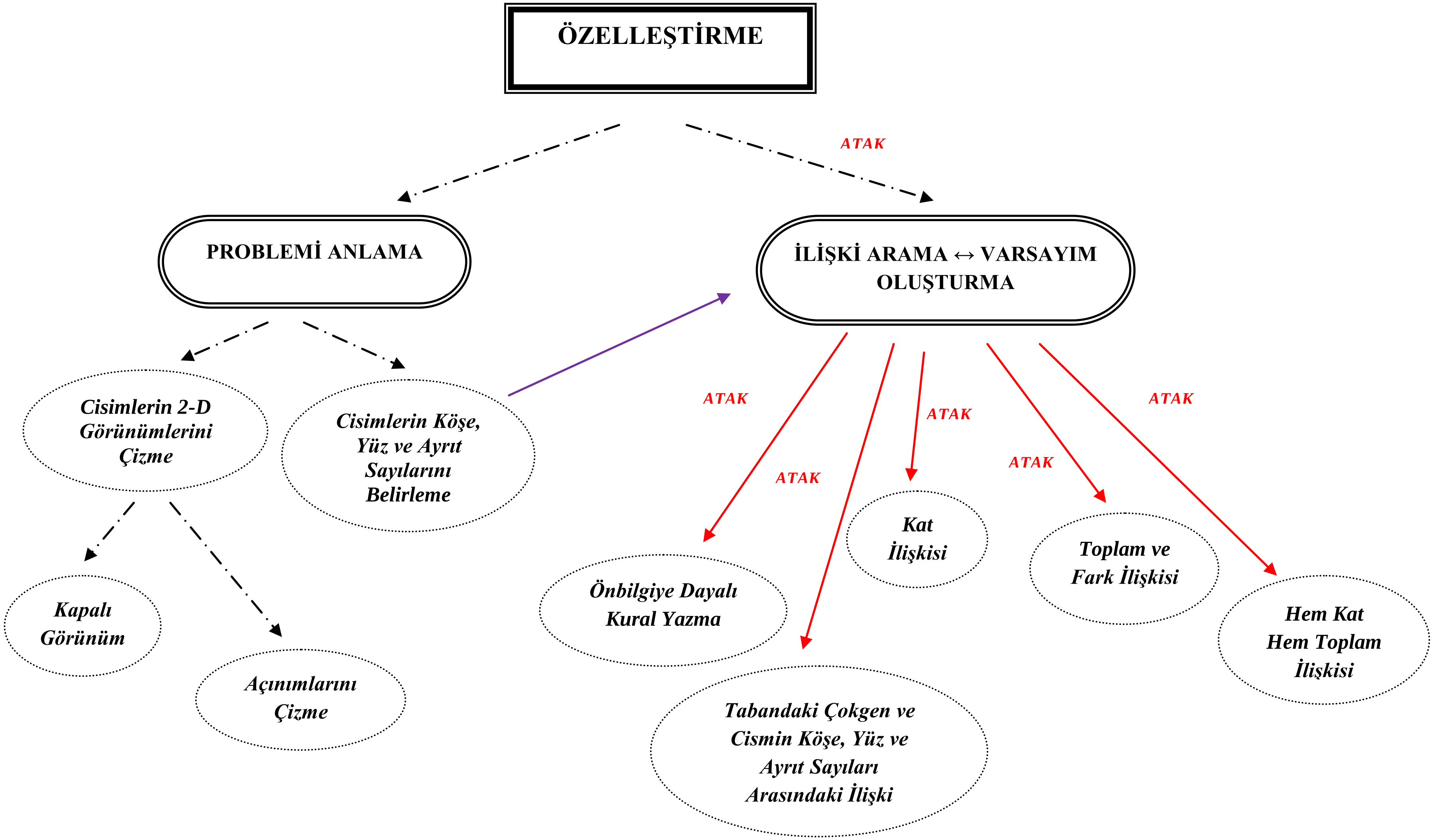
Bu bölümde, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerini genelleme süreçleri ve bu süreçte kullandıkları stratejileri belirlemek amacıyla yapılan araştırma sürecinden elde edilen verilerin analizi sonucunda ortaya çıkan bulgulara ve yorumlarına yer verilmiştir. Bulgular, her soru özelinde analiz edilmiş; tema, alt tema ve kategoriler oluşturulmuş, klinik görüşmelerden elde edilen doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

3.1. Birinci Soruya Ait Bulgular

Öğrencilere "Prizma, piramit ve düzgün çokyüzlü gibi geometrik cisimlerin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır?" sorusu sorulmuş, onlardan konveks (dışbükey) çokyüzlülerin yüz, ayrıt ve köşe sayıları arasında Euler Teoremi olarak bilinen "K+Y–A=2" bağıntısına ulaşmaları ve doğrulama yapmaları beklenmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucu, bu soru özelleştirme ve genelleme olmak üzere iki ana tema altında incelenmiştir.

3.1.1. Özelleştirme

Özelleştirme, problemi derinlemesine incelenmeye (çeşitli örneklere bakarak özel durumlar arama), soruyu daha iyi anlamaya olanak sağlayan bir süreç olarak düşünebilir. Bu bağlamda özelleştirme sürecinde bir ya da daha fazla örnek verme (verilen herhangi bir durum için karşıt ya da ilgili örnek bulma), bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme ve bulma; istenilenleri doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010). Bu probleme ilişkin öğrenci yanıtları incelendiğinde de benzer eylemlerin varlığı dikkat çekmektedir. Öğrenciler, istenilen genellemeye ulaşmak için öncelikle bildikleri örnekleri düşünüp bunlara ait çizim yapmışlar; daha sonra ise köşe, yüz ve ayrıt sayılarını belirleyerek bu sayılar arasında bir ilişki arayıp varsayım oluşturmuşlardır. Bu sebeple özelleştirme ana teması, problemi anlama ve ilişki arama-varsayım oluşturma olmak üzere Şekil 7'de görüldüğü gibi iki tema altında incelenmiştir:



Şekil 7. Euler Probleminde Özelleştirme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

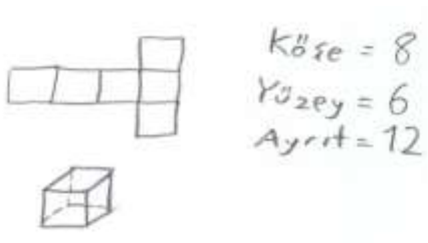
Problemi Anlama

Problem çözme, ne yapılacağının bilinmediği durumlarda yapılması gerekeni bilmek olarak tanımlanmaktadır (Altun, 2014). Bu sürecin ilk aşaması ise problemi anlamadır. Bu doğrultuda problemi anlama teması, cisimlerin iki boyutlu (2D) görünümlerini çizme ve köşe, yüz ve ayrıt sayılarını belirleme olmak üzere iki alt tema halinde incelenmiştir.

Katılımcı öğrenciler, problemi okuduklarında öncelikle bildikleri cisimleri düşünmüş ve birkaç tanesini çizmeye yönelmişlerdir. Bu davranış öğrencilerin soruyu daha iyi anlamak için doğrudan özelleştirme sürecine girdiklerini göstermektedir. İki boyutlu görünüm çizerken öğrencilerin hepsi cisimlerin kapalı görünümlerini yanı sıra biri yüksek (Efe) ve diğeri orta başarı düzeyine sahip (Su) iki öğrencinin ise cisimlerin açınımlarını da çizmeyi tercih ettikleri görülmüştür.

Cisimlerin kapalı görünümlerini çizen orta başarı düzeyine sahip öğrencilerden Su ve Han bir prizma ve bir piramit, Mete ve Nur iki prizma ve bir piramiti kapalı olarak çizmişlerdir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden üçünün (Oğuz, Rana ve Efe) iki prizma ve iki piramit, birinin (Hale) ise üç prizma ve iki piramit çizmeyi tercih ettiği aynı zamanda Efe'nin küp, Su'nun ise kare piramitin açınımlarını çizdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin ağırlıklı olarak piramitlerden (kare piramit) ziyade prizmalara (küp) odaklandıkları saptanmıştır.

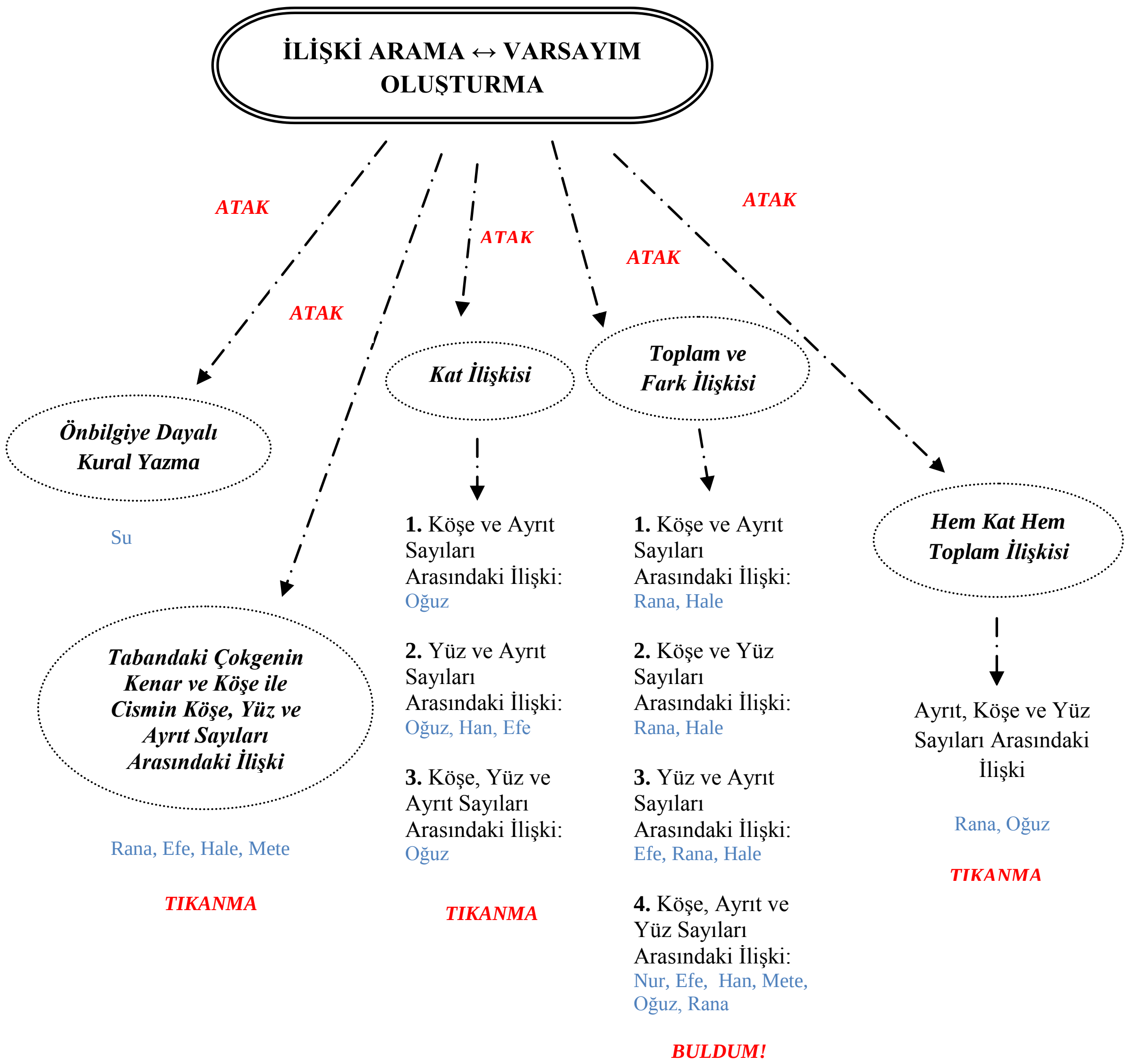
Çizim yapan tüm öğrenciler çizdikleri cisimlerin köşe, yüz ve ayrıt sayılarını doğru bir şekilde belirleyebilmişlerdir. Örneğin kapalı halinin yanında cisimlerin açınımlarını da çizerek problemi anlamaya çalışan öğrencilerden Efe yanıt kâğıdına



şeklinde çizim yapıp köşe, yüz ve ayrıt sayılarını not almıştır.

İlişki Arama-Varsayım Oluşturma

Problemi anlaşılmasının ardından verilenler ile istenenler arasında bir ilişki arama söz konusu olur. İlişki aramanın temelinde varsayım oluşturma yatar. Varsayım oluşturma sürecinde sözel ya da matematiksel olarak tahminde bulunma, matematiksel iddiaları formüle etme, önermelerden sonuç çıkarma, hipotez kurma ve test etme gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010). Bu doğrultuda veriler arasında ilişki aramaya yönelen öğrencilerin bu süreçte kullandıkları yaklaşımlar Şekil 8'de ayrıntılı olarak verilmiştir:



Şekil 8. Euler Probleminde Kullanılan İlişkilendirmeler

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının ilk alt teması olan önbilgiye dayalı kural yazma, probleme ilişkin istenilen genellemeyi öğrencilerin ezbere söylemelerini belirtir. Bu alt tema kapsamında sekiz öğrenciden sadece biri (Su), soruyu okuduğunda Euler Teoreminin aklına geldiğini ifade etmiştir. Öğrenci herhangi özel bir örnek düşünmeden (özelleştirme yapmadan) doğrudan önbilgilerine dayalı olarak istenen ilişkiyi hatırlamaya yönelmiş ve aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Su : *Eee şimdi burada benim bir şey aklıma geldi bu soruyu okuyunca. Euler Teoremi diye bir şey vardı.*
Görüşmeci(G) : *Hatırlıyor musun peki o teoremi?*
Su : *Ya hatırlayamıyorum. Aslında o teoreminde hani prizmalarda geçerli olan ve hani köşe artı yüzey miydi emin olamadım. Köşe artı yüzey ya da çıkarınca ayrıtı hani ikiyi elde eden bir sonuçtu.*

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer alt teması tabandaki çokgenin kenar ve köşe sayısı ile cismin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki aramadır. Bu bağlamda öğrencilerden üçü yüksek (Rana, Efe, Hale), biri orta başarı düzeyine sahip (Mete) toplam dört kişi böylesi bir ilişki aramaya çalışmıştır. Efe, çizdiği cismin tabanındaki dörtgensel bölge ile ilişkili olarak aşağıdaki gibi yüz sayısını ifade etmiştir:

Efe : *Evet, köşe sayıları da tabanındaki çokgenin iki katı. Hem alt taban hem üst taban olduğu için.*
G : *Evet.*
Efe : *Yüzeyleri... de tabanda dörtgensel bir bölge var. Dört kenarı var. Dört tane dik kenarı var, yüzeyi var. Dört tane oradan geliyor bir de iki tane tabanlar olduğu için tabandaki bölgenin iki fazlası oluyor. Yüzeyleri de.*

Benzer şekilde Hale de

Hale : *Taban şekilleri işte değiştikçe çokgenlerin şekli değiştikçe üçgen, dörtgen, beşgen değiştikçe eee sayılar değişiyor; ama mesela beş yapsaydık muhtemelen hani köşesiyle yüzeyin sayısı yine eşit olacaktı; ama sayısı olarak mesela beş burada dört, burada sekiz, burada altı mesela arasında bir fark var; ama burada iki fark var. Bir şey diyebilir miyiz bilmiyorum.*

tabandaki çokgenin kenar ya da köşe sayısına göre köşe, yüz ve ayrıt sayılarının değiştiğini fark etmiş (atak) ancak buradan herhangi bir genellemeye ulaşamamış, tıkanma yaşamıştır.

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer bir alt teması olan kat ilişkisi arama, bir cismin köşe, ayrıt ve yüz sayıları arasında bir kat ilişkisinin araştırılmasıdır. Bu alt tema kapsamında öğrencilerin köşe ve ayrıt, yüz ve ayrıt, köşe, yüz ve ayrıt sayıları olmak üzere üç kategori bağlamında inceleme yaptıkları saptanmıştır. Bazı öğrencilerin birden fazla (herhangi ikisi ya da üçü) yaklaşımı düşünüp değerlendirdiği de görülmektedir.

Çizdikleri cisimlere ait veriler arasında kat ilişkisi arayan öğrencilerden ikisi yüksek (Oğuz ve Efe), biri orta başarı düzeyine sahip (Han) olan toplam üç öğrenci yüz ve ayrıt sayılarına odaklanmıştır. Oğuz, bunun yanı sıra köşe ve ayrıt sayıları arasında bir ilişki aramış daha sonra ise köşe, yüz ve ayrıt olmak üzere üçü arasında farklı bir ilişki aramaya yönelmiştir. Öğrencilerden Han ise çizdiği küp için aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Han : *Mesela yüzey sayısı, ayrıt sayısının, ayrıt sayısı yüzey sayısının iki katı. Diğerlerinde de geçerli mi, bilmiyorum.*

Benzer şekilde Oğuz da Euler Teoremi’ne ulaşmaya çalışırken çizdiği küpün yüz ve ayrıt sayıları arasında bir kat ilişkisi arayarak bunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Oğuz : *Şimdi yüzey sayısı mesela n ise ayrıt sayısı iki n. Onun için yüzeyden ayrıtı böyle bulabiliriz belki.*
G : *Ama diğeri için geçerli olacak mı?*
Oğuz : *Bunda [piramiti göstererek] olmaz.*

Bulduğu 2n ilişkisinin kare piramit için geçerli olmayacağını fark eden Oğuz, çizdiği üçgen prizmaya bakarak ayrıt sayısının 2/3’sinin köşe sayısına eşit olduğunu görmüştür.

Oğuz : *Şimdi mesela bu 2/3’si [çizdiği üçgen prizma üzerinde düşünüyor] öyle bir şey yazacağım ki yüzeyi biliyorsak yüzey yazacağız ve ayrıtı ve köşeyi mi bulacağız?*

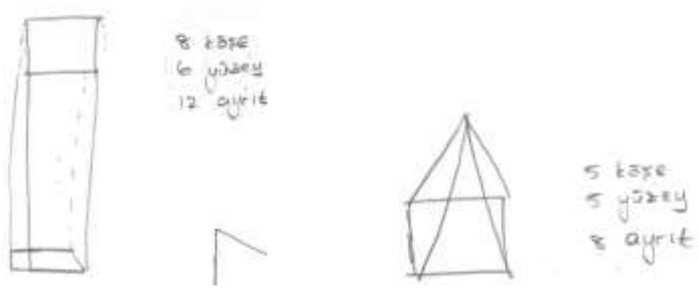
İkili ilişki aramaktan vazgeçen Oğuz; köşe, yüz ve ayrıt sayılarını içeren aşağıdaki gibi bir bağıntı oluşturmuş ve üzerinde denemeler yapmıştır.

$$\frac{\overset{6}{y}}{2} \times \frac{\overset{8}{k}}{2} = a$$

Görüldüğü gibi Oğuz, her üç düşüncesinin (atak) sonucunda doğru ilişkiye ulaşamayıp tıkanma sürecine girmiştir.

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer bir alt teması olan toplam ve fark ilişkisi bir cismin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında hem toplam hem fark içeren bir ilişki aramadır. Bu alt tema köşe-ayrıt, köşe-yüz, yüz-ayrıt, köşe-yüz ve ayrıt arasında toplam ve fark ilişkisi arama olmak üzere dört kategoriye ayrılmıştır. Bazı öğrencilerin birden fazla (herhangi ikisi ya da hepsi) yaklaşımı düşünüp değerlendirdiği görülmektedir.

Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden ikisi (Rana ve Hale) köşe-ayrıt, köşe-yüz ve yüz-ayrıt sayıları arasında ayrı ayrı ilişki aramıştır. Öğrencilerden Rana'nın görüşmesi örnek olarak verilebilir:



Rana : *...dört fazlası (köşe-ayrıt) ama burada iki eksiği (köşe-yüz), altı fazlası (yüz-ayrıt) oluyor. Ona uymuyor.*
G : *Evet.*
Rana : *Burada eşit oluyor. Ona uymuyor, hayır.*

Rana, çizdiği kare prizmaya bakarak ayrıt sayısının köşe sayısından dört fazla, yüz sayısının köşe sayısından iki eksik, ayrıt sayısının yüz sayısından altı fazla olduğunu ifade etmiş ancak kare piramitte düşündüğü ilişkinin geçerli olmadığını gördüğünde oluşturduğu atak tıkanma ile sonuçlanmıştır. Bu ilişkiden vazgeçerek tekrar bir düşünme süreci içine giren Rana'nın aklına aniden başka bir fikir gelmiş (atak) ve bunun sonucunda doğru ilişkiye ulaşmıştır:

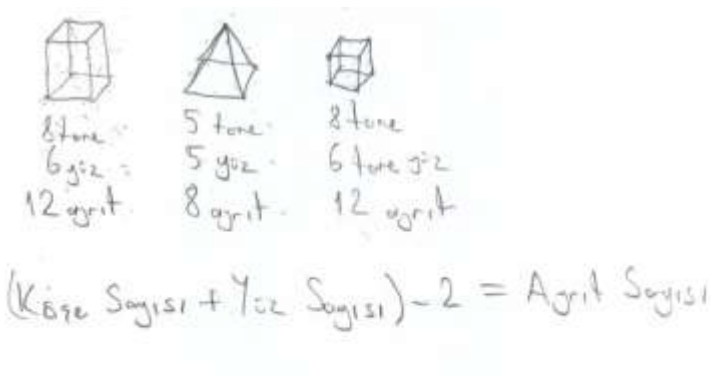
Rana : *Yapacağım kural bu ikisine [kare prizma ve üçgen prizmayı gösteriyor] uyması gerekiyor, şuna [kare piramiti gösteriyor] uymasa bile.*
G : *Biz öyle bir şey bulacağız ki ona da uyacak, prizmalara da, piramite de uyacak.*

Rana	*: Üçüne de uyacak.*
G	*: Evet. Öyle genel bir kural arıyoruz.*
Rana	*: Anladım, buldum! Köşe ve yüzey sayılarını toplayıp iki çıkardığımız zaman ayrıt sayısını buluyoruz.*
G	*: Hepsi için geçerli midir sence bu?*
Rana	*: Evet, denediğim zaman oluyor. Eee kare prizmanın köşe sayısı sekiz, yüzey sayısı altı oluyor. Topladığımız zaman 14 oluyor, çıkardığımız zaman 12, ayrıt sayısına eşit oluyor. Bunda da aynı şekilde beş artı beş eşittir 10, iki çıkardığımız zaman sekiz ediyor. Eee bunda altı, beş 11 ediyor, iki çıkardığımız zaman dokuz ediyor.*

Problemde bir cisme ait köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında bir ilişki arama öğrencileri doğru genellemeye götürebilir. Bu bağlamda ilişki arayan öğrenciler üçü yüksek başarı düzeyine sahip (Efe, Oğuz ve Rana) üçü ise orta başarı düzeyine sahip olan (Nur, Han ve Mete) toplamda altı öğrencidir. Bu öğrencilerden Efe'nin doğru genellemeye ulaşmadan önce Rana ve Hale gibi yüz ve ayrıt sayıları arasında da ikili bir ilişki aradığı belirlenmiştir. Cisimlerin köşe, ayrıt ve yüz sayıları arasındaki ilişkiye odaklanarak doğru genellemeye ulaşan öğrencilerden Mete'nin görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

Mete	*: Eee sekiz köşe, piramitin… Şöyle bir şey oldu sanki ama; köşe sayısıyla yüz sayısı toplayıp iki çıkartınca ayrıt sayısı...*
G	*: Diğer ikisi için de doğru mu?*
Mete	*: Beş, beş 10. Evet, iki çıkartınca sekiz.*
G	*: Peki, bunu bana genel olarak yazabilir misin?*
Mete	*: Köşe sayısı … [yazdı.]*
G	*: Neye göre buldun sen bunu?*
Mete	*: Eee şu ikisini topladım. Sonra ne yapınca 12'yi bulabilirim diye düşündüm. İki çıkartınca 12 oluyordu. Sonra piramitte denedim. Onda da iki çıkartınca sekiz oldu, uydu.*

Mete ifade ettiği genellemeyi yanıt kâğıdına şu şekilde yazmıştır:



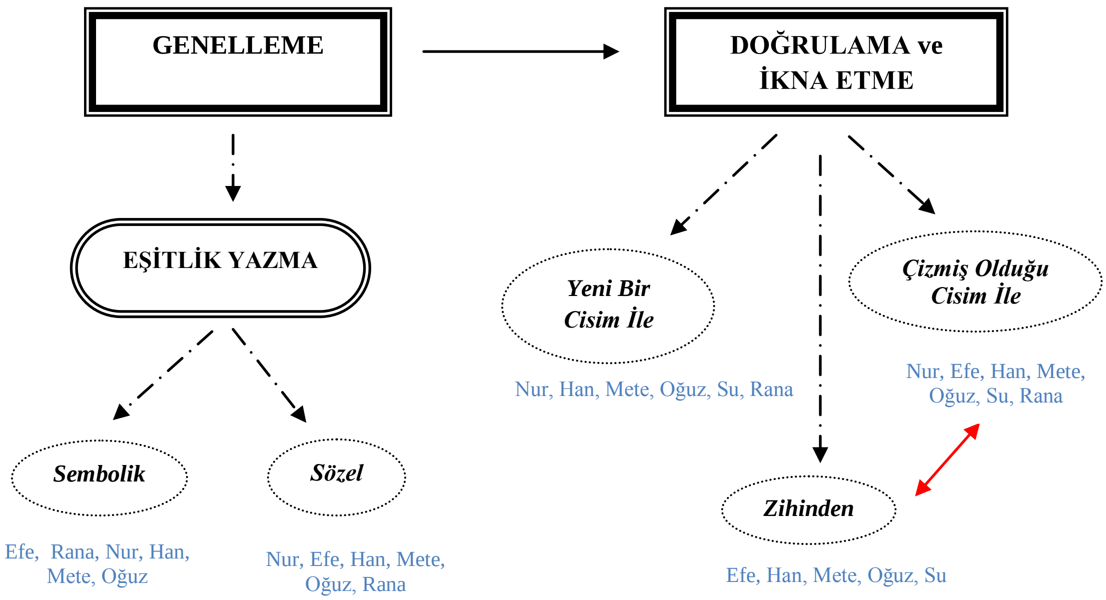
İlişki arama-varsayım oluşturma temasının beşinci alt teması hem kat hem toplam ilişkisi aramadır. Sadece iki (Oğuz ve Rana) öğrencinin kullandığı bu alt temada yüksek başarılı bir öğrenci (Oğuz) köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında hem kat hem de toplam ilişkisi yazmaya çalışmış ancak tıkanma sürecine girmiştir. Yanıt kâğıdına küpe ait ayrıt, köşe ve yüzey sayılarını aşağıdaki gibi yazan Oğuz,

Oğuz : *Şimdi şey diye düşünüyorum. Ayrıtla köşeyi çıkartıp bir şeye böldüğümüzde yüzey çıkar mı? O zaman da çıkmadı. Yüzey altı. Altı çıkması gerekiyor burada.*
G : *Evet.*
Oğuz : *Nasıl altı çıkarabilirim?*

şeklinde düşünmüş ancak bir kat ilişkisi bulamayarak tıkanma yaşamıştır.

3.1.2. Genelleme

Genelleme, birkaç örnekten hareket ederek daha geniş durumlar hakkında tahminlerde bulunmak olarak tanımlanır. Bu süreçte "*Doğru olması olası görünen şey nedir?", "Niçin doğrudur?" ve "Nerede doğrudur?"* sorularına cevap aranır (Mason vd., 1985). Bir başka deyişle matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan hareketle oluşturulan varsayım hakkında karar verilmeye çalışılır. Genelleme sırasında örüntü oluşturma, sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları belirleme, iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel ya da sözel olarak ifade etme, olabilecek bütün ihtimalleri tanımlama gibi eylemler gerçekleştirilir (Arslan ve Yıldız, 2010). Bu bağlamda öğrenci yanıtları incelendiğinde genelleme ve doğrulama-ikna etme süreçleri Şekil 9'da görüldüğü gibi incelenmiştir:



Şekil 9. Genelleme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Eşitlik yazma teması altında genellemeye ulaşabilen öğrencilerin eşitliği nasıl ifade ettikleri üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda bir öğrenci dışında (Hale) öğrencilerin tamamının eşitliği sözel olarak ifade ederek Euler Teoremine ulaştıkları ve K+Y-2= A eşitliğini yazdıkları saptanmıştır. Efe'nin görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

$$K+Y-2=A$$

Efe *: Başka bir formül daha buldum. Hepsi için geçerli.*
G *: Sanırım bu sefer buldun.*
Efe *: Olabilir. Köşe sayısı ile yüzey sayısının toplamının iki eksiği ayrıt sayısına eşit.*
G *: Evet, peki hepsi için geçerli mi bu?*
Efe *: Şu çizdiklerimin hepsi için geçerli.*

Bir diğer öğrenci olan Rana'nın ulaştığı genelleme ise şu şekildedir:

a = köşe sayısı
b = yüzey sayısı
c = ayrıt sayısı

$$(a+b)-2=c$$
$$(8+6)-2=12$$

Genellemeye ulaştıktan sonra gerçekleştirilen doğrulama, aynı zamanda matematiksel ispat sürecinde ele alınan bir kavramdır. Matematiksel ispatlar doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç aşamada tamamlanır. Bu süreçte bir önermeyi açıklama, neden doğru ya da yanlış olduğunu söyleme, değişik mantıksal düşünme yollarını (tümevarımsal ve tümdengelimsel düşünme), ispat çeşitlerini seçme ve kullanma gibi eylemler söz konusudur (Baki, 2014). Doğrulama ise iddianın doğruluğunun araştırıldığı aşamadır. Bu bağlamda doğrulama ve ikna etme ana teması altında öğrencilere, yaptıkları genellemenin doğruluğundan nasıl emin oldukları sorulmuş, büyük bir çoğunluğu çizmiş oldukları cisimleri kullanarak ya da yeni bir cisim çizerek doğrulama yaparken bir kısmı ise kâğıt üzerine yazmadan zihinden bir takım işlemlerle doğrulama yapmıştır.

Katılımcı öğrencilerden Nur, Han, Mete, Oğuz, Rana ve Su ulaştıkları K+Y-2=A eşitliğinin doğruluğunu hem çizmiş oldukları cisimler ile hem de yeni çizdikleri başka bir cisim ile kontrol etmişlerdir. Efe, Han, Mete, Oğuz ve Su aynı zamanda çizmiş oldukları cisimler üzerinden zihinden işlemler yaparak doğrulama yapmışlardır. Örneğin Mete, hem başlangıçta çizmiş olduğu cisimler ile hem de onlarının dışında yeni bir cisim çizerek doğrulamayı tercih etmiştir:

G : *Peki, tek prizma bu değil, tek piramit ya da tek düzgün çok yüzlü bu değil, daha bir sürü var. Hepsi için bu kural doğru olur mu acaba?*
Mete : *Eee beşgen olsa köşe sayısı bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on tane köşe. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir, on iki, on üç, on dört, on beş tane köşe, ay köşe diyorum, ayrıt. Yüz de bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi tane yüz var. Onla yediyi toplayıp iki çıkartsam 17'den iki, 15 ayrıt. Yani oluyor.*
G : *Hepsi için olur mu?*
Mete : *Olabilir. Olur.*
G : *Neye dayanarak olabilir dedin?*
Mete : *Çünkü eee dikdörtgen prizma ya da küpte birbirine benzer. İkisinde de dört köşe var ama ee mesela beşgen prizmada beş köşe olduğu için. Hani onda da sağlıyorsa diğerleri şeylerde de sağlar diye düşündüm.*

Şekil 7'de de görüldüğü üzere özelleştirme aşaması (ilişki arama, mümkün olduğu kadar fazla sayıda ve çeşitlilikte örnek toplama, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, aynı sonuca ulaşılan denemeleri belirleme ve benzer bir deneme yapma vb.) için gerekli işlemlerin öğrencilerin çoğu tarafından yapıldığı görülmektedir. Bu, öğrencilerin özelleştirme aşamasında çok zorlanmadıklarını ortaya koymaktadır.

Problemin genelleme kısmında Hale ve Su dışındaki öğrencilerin tamamının genelleme yapabildiği görülmektedir. Hale genellemeye ulaşamazken Su önceki bilgilerinden Euler Teoremini hatırlayıp ifade etmiş ve örneklerle doğrulmasını da yapmıştır.

Öğrencilerin Euler probleminde genellemeye ulaşmak için kullandıkları stratejiler ve bu stratejilerden hangileri ile genellemeye ulaştıkları ya da hangilerinin sonucunda tıkanma sürecine girdikleri Tablo 6'da verilmiştir:

Tablo 6. Euler Probleminde Öğrencilerin Kullandıkları Stratejiler ve Tıkanma Noktaları

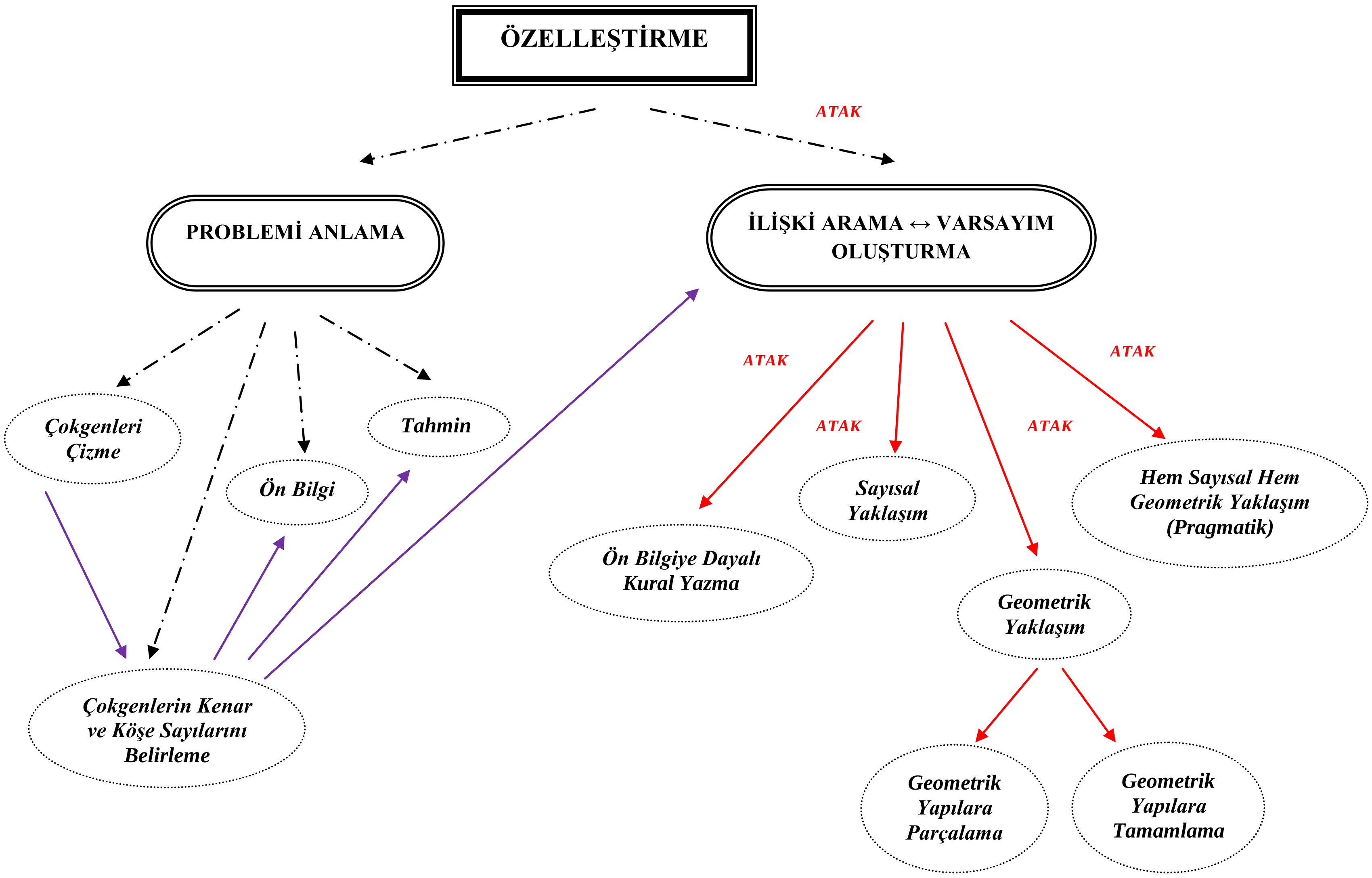
SÜREÇ		**STRATEJİLER (ATAK)**		**BULDUM! / TIKANDIM!**
ÖZELLEŞTİRME	**İLİŞKİ ARAMA-VARSAYIM OLUŞTURMA**	***Ön Bilgiye Dayalı Kural Yazma (1)***	**ATAK 1:** Ön bilgi kullanarak istenilen genel kuralı yazma.	-
		Tabandaki Çokgen ve Cismin Köşe, Yüz ve Ayrıt Sayıları Arasındaki İlişki (4)	**ATAK 2:** Tabandaki çokgen ve cismin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	Tıkandım! (4)
		Kat İlişkisi (3)	**ATAK 3:** Köşe ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	Tıkandım! (1)
			ATAK 4: Yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	Tıkandım! (3)
			ATAK 5: Köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	Tıkandım! (1)
		Toplam ve Fark İlişkisi (6)	**ATAK 6:** Köşe ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.(2) **ATAK 7:** Köşe ve yüz sayıları arasında ilişki arama. (2) **ATAK 8:** Yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama. (3) **ATAK 9:** Köşe, ayrıt ve yüz sayıları arasında ilişki arama. (6)	Buldum! (6)
		Hem Kat Hem Toplam İlişkisi (2)	**ATAK 10:** Ayrıt, köşe ve yüz sayıları arasında ilişki arama.	Tıkandım! (2)

3.2. İkinci Soruya Ait Bulgular

Öğrencilere “Üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen gibi geometrik şekilleri düşünerek herhangi bir sayıda kenar sayısına sahip bir çokgenin iç açıları toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?” sorusu sorulmuş; onlardan herhangi bir çokgenin bir köşesinden çıkabilecek köşegenler yardımıyla çokgenin kenar sayısının iki eksiği (n-2) kadar üçgene parçalanabileceği bilgisini “Bir üçgenin iç açıları toplamı 180°’dir.” bilgisi ile birleştirerek “(n-2).180°” genellemesine ulaşmaları beklenmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda bu soru özelleştirme, genelleme ve doğrulama-ikna etme olmak üzere üç ana tema altında incelenmiştir.

3.2.1. Özelleştirme

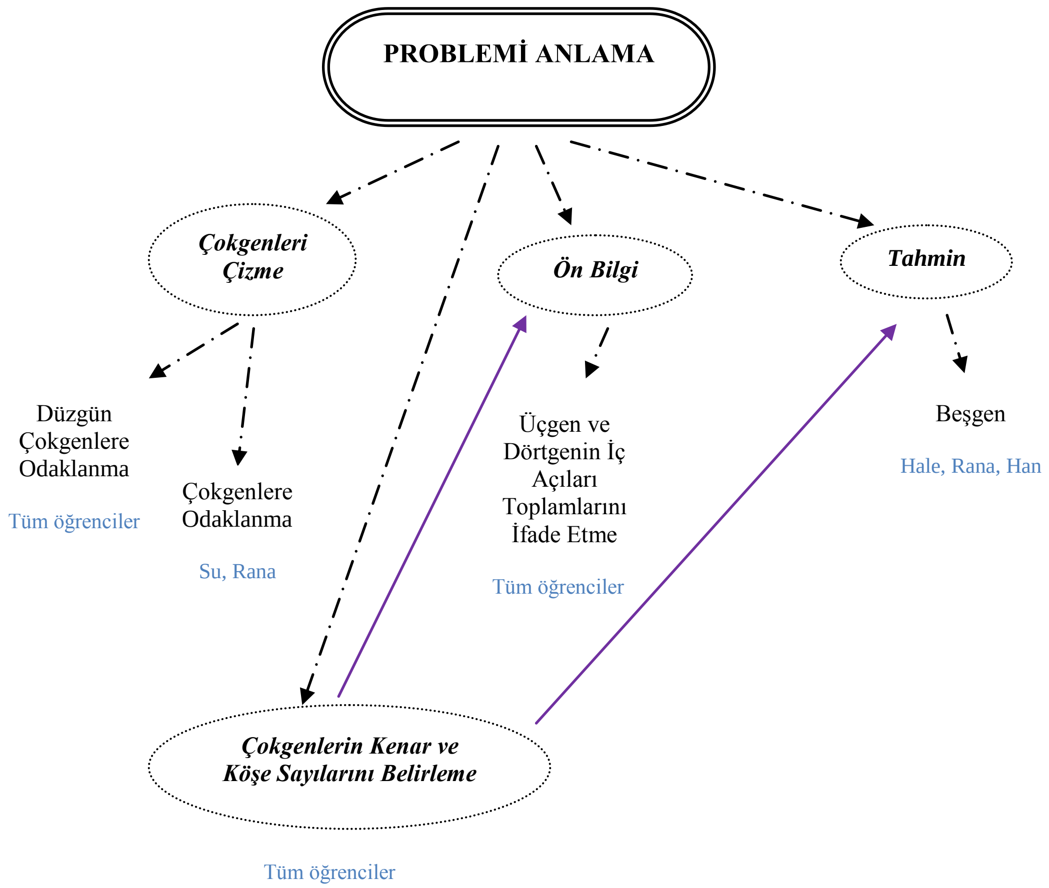
Bu probleme ilişkin öğrenci yanıtları incelendiğinde öğrencilerin istenilen genellemeye ulaşmak için öncelikle bildikleri çokgen örneklerini düşünüp bunlara ait çizimleri gerçekleştirdikleri daha sonra ise çokgenlere ait kenar ya da köşe sayılarını belirleyerek bu sayılar arasında bir ilişki aradıkları, varsayım oluşturdukları görülmüştür. Bu bağlamda özelleştirme ana teması, problemi anlama ve ilişki arama-varsayım oluşturma olmak üzere Şekil 10’da görüldüğü gibi iki temaya ayrılmıştır:



Şekil 10.İç Açılar Toplamı Probleminde Özelleştirme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Problemi Anlama

Öğrencilerin bir çokgenin iç açıları toplamını bulma probleminde anlamaya yönelik olarak kullandıkları yaklaşımlar Şekil 11'de ayrıntılı olarak verilmiştir:



Şekil 11.İç Açılar Toplamı Problemini Anlama Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

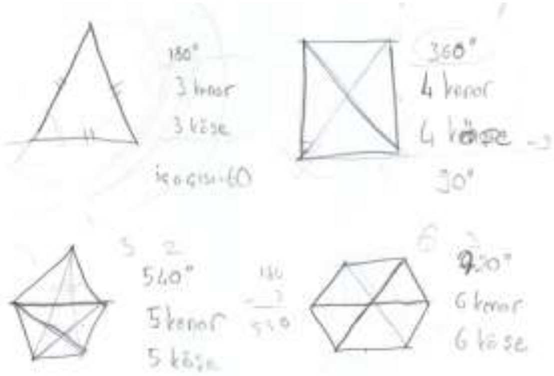
Katılımcı öğrenciler, problemi okuduklarında öncelikle iç açıları toplamlarını bildikleri çokgenleri (üçgen, kare) düşünmüş ve bunları çizmişlerdir. Öğrencilerin tamamının bu çizimlerde öncelikle düzgün çokgenleri tercih etme eğiliminde oldukları dikkat çekmektedir. Üçgenin bir açısının 60°, karenin 90° olmasından yola çıkan öğrenciler, düzgün beşgen ve altıgenin bir iç açısının kaç derece olduğunu hatırlamak için kendilerini zorlamışlardır. Bu bağlamda öğrencilerin bildikleri özel çokgenleri düşünerek özelleştirme yaptıkları ortaya çıkmaktadır. Örneğin her ne kadar çizimleri çok doğru olmasa da düzgün çokgenleri çizerek problemi anlamaya çalışan öğrencilerden Han eşkenar üçgen, kare ve düzgün beşgeni ele alarak bunların iç açılarını hatırlamaya çalışmış, yanıt kâğıdına ise

yukarıdaki gibi çizimler yapıp notlar almıştır.

Düzgün çokgen çizen öğrenciler, kendilerine sorulduğunda bu çokgenlerin her zaman düzgün olmak zorunda olmadıklarını da ifade etmişlerdir. Hatta biri yüksek (Rana), diğeri orta başarı düzeyine sahip (Su) öğrencilerden ikisi çizimlerinde düzgün olmayan çokgenler de kullanmışlardır. Örneğin Rana'nın bazı çizimleri örnek olarak sunulabilir:

Çizimler incelendiğinde düzgün olmayan çokgenleri ele alan Rana yine onlar içinde düzgün çokgenler oluşturmaya odaklanmıştır.

Çokgenleri çizen öğrencilerin tamamı problemi anlama temasının diğer bir alt teması olan çokgenlerin kenar ve köşe sayılarını belirleme kapsamında çizdikleri çokgenlerin kenar/köşe sayılarını saptamışlardır. Örneğin yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden biri olan Oğuz yanıt kâğıdına,



şeklinde notlar almıştır.

Problemi anlama temasının bir diğer alt teması olarak belirlenen önbilgi, öğrencilerin çokgenlerin iç açıları toplamlarına dair bilgileri ezbere söylemelerini belirtir. Katılımcı öğrencilerin tamamı üçgen ve dörtgenin iç açıları toplamını güçlük çekmeden önceki bilgilerine dayalı olarak ifade etmişlerdir; ancak beşgen ve diğer çokgenlerin iç açılar toplamlarını hatırlamakta zorlanmışlardır. Öğrencilerden ikisi yüksek (Rana ve Hale), dördü orta başarı düzeyine sahip (Nur, Han, Mete ve Su) toplam altısı beşgenin iç açıları toplamının kaç derece olduğunu hatırlayamazken yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden (Efe ve Oğuz) ikisi 540° olduğunu söyleyip bunu ezbere bildiklerini ifade etmişlerdir. Oğuz'un görüşmesi bu durumu ortaya koymaktadır:

Oğuz : *Üçgenin iç açıları toplamı 180°. Üç kenarı var.*
G : *Dörtgen için ne dersin?*
Oğuz : *Dörtgen için 360. Dört kenar, dört köşe oluyor. Onu da yazayım.*
G : *Evet, çizebilirsin. Peki, dörtgenin 360° olduğunu nerden biliyoruz?*
Oğuz : *Şey yani şu doğrular birbirine dik o yüzden 90. Dört tane 90°, 360. Ezbere dayalı.*
G : *Peki, beşgen için?*
Oğuz : *Beşgenin kaçtı? 540'tı. Sanırım 540.*
G : *Bu da ezbere dayalı değil mi?*
Oğuz : *Evet.*

Beşgenin iç açılar toplamını önbilgilerine dayanarak hatırlamaya çalışan Mete'nin ise aklına gelenleri aşağıdaki gibi ifade ettiği görülmektedir:

Mete : *Üçgen 180,dörtgen 360, beşgen eee…*
G : *Hatırlayamadık mı?*
Mete : *Beşgen eee 120'ydi. 120.*
G : *:120 nedir?*
Mete : *:120, bir, bir… eee hatırlayamadım.*

Problemi anlama temasının dördüncü ve son alt teması ise tahmin etmedir. Katılımcı öğrencilerden biri orta (Han) diğer ikisi yüksek başarı düzeyine sahip (Hale ve Rana) toplamda üç öğrenci beşgenin iç açıları toplamı için tahminde bulunmuşlardır. Diğer öğrenciler ise hatırlayamadıklarını ifade edip bunun üzerinde fazla durmayarak ilişki aramaya yönelmişlerdir. Geçmiş bilgilerini doğru hatırlayan Hale, 180°'lik artışı fark edip bunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

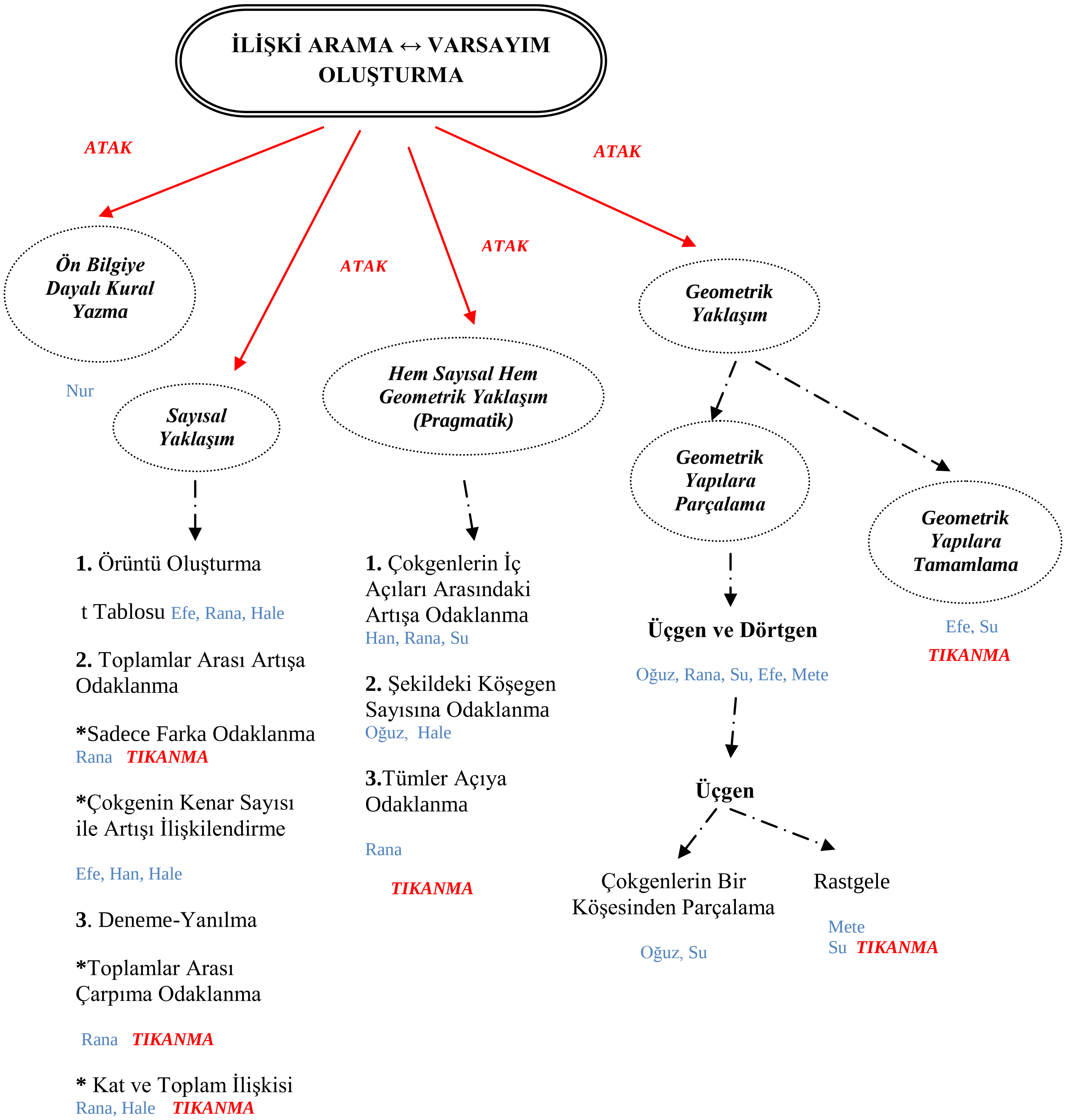
Hale : Eee üçgenin iç açısı 180, dörtgeninki 360.
G : Evet.
Hale : Beşgeninki 180 fazlaydı. 540°.

Benzer şekilde Han'ın görüşmesi ise şu şekildedir:

Han : Burada her açı arttıkça 180° ekleyebilir miyiz?
G : Nasıl yani?
Han : Burada üçten dörde çıktığı zaman 180°, sıfır artıyor ya, dörtten de beşe çıktığı zaman 180° artabilir mi?
G : O zaman ne dersin beşgene?
Han : 360, 180, 40, 540.

İlişki Arama -Varsayım Oluşturma

Çokgenleri çizip kenar/köşe sayılarını belirleyen öğrenciler, bu sayılar arasında ilişki aramaya yönelmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin kullandıkları yaklaşımlar Şekil 12'de ayrıntılı olarak verilmiştir:



Şekil 12.İç Açılar Toplamı Probleminde Kullanılan İlişkilendirmeler

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının ilk alt teması olan ön bilgiye dayalı kural yazma, öğrencilerin probleme ilişkin istenilen genellemeyi ezbere söylemelerini belirtir. Bu bağlamda öğrencilerden sadece Nur, istenen (n-2).180° ifadesini doğrudan hatırlamaya yönelmiş ve aşağıdaki açıklamayı vermiştir:

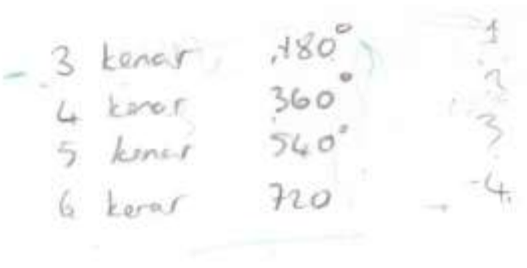
Nur : *n eksi iki çarpı 180, diye hatırlıyorum.*
G : *Doğru mudur bu formül?*

Nur : Bence doğrudur. Yani hatırladığım kadarıyla deneyebilirim.
G : Evet.
Nur : Üç kenar eksi iki, bir çarpı 180. İç açıları toplamı 180 demiştik. Oluyor. Dört eksi ikiden iki çarpı 180, 360 oluyor. Şunda deneyebilirim. Eee beş, iki, üç. Üç çarpı 180, 540 ediyor evet, oluyor eminim.

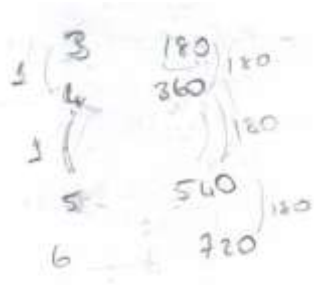
Yukarıda da görüldüğü üzere Nur, önceden ezberlediği bir formülü hatırlamış ve üçgen, dörtgen, beşgen için gerekli hesaplamaları yaparak formülün doğruluğundan emin olmuştur. Nur dışındaki diğer öğrenciler ise doğrudan formülü hatırlayamamış, farklı stratejiler kullanarak istenilen genellemeye ulaşmaya çalışmışlardır.

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer alt teması olan sayısal yaklaşım, çokgenlerin iç açılar toplamları arasında toplam ya da kat ilişkisi aramayı ifade eder. Üçü yüksek başarı (Efe, Rana ve Hale), biri orta başarı düzeyine sahip (Han) toplam dört kişinin genellemeye ulaşmak için stratejiler ararken sayısal bir yaklaşım sergiledikleri dikkat çekmektedir. Bu alt tema kapsamında öğrencilerin örüntü oluşturma, toplamlar arası artışa odaklanma, deneme-yanılma olmak üzere üç kategori bağlamında inceleme yaptıkları saptanmıştır. Bazı öğrencilerin birden fazla (herhangi ikisi ya da üçü) yaklaşımı düşünüp değerlendirdiği de görülmektedir.

Örüntü oluşturma kategorisi bağlamında Efe, Rana ve Hale verileri düzenli hale getirerek çokgenlerin kenar sayıları ve iç açıları toplamını gösteren bir t tablosu hazırlayarak bu veriler arasında ilişki aramaya yönelmişlerdir. Diğer öğrencilerin ise böyle bir yaklaşım kullanmadığı görülmektedir. Öğrencilerden Hale ve Rana'nın hazırladığı tablolar aşağıda görülmektedir:

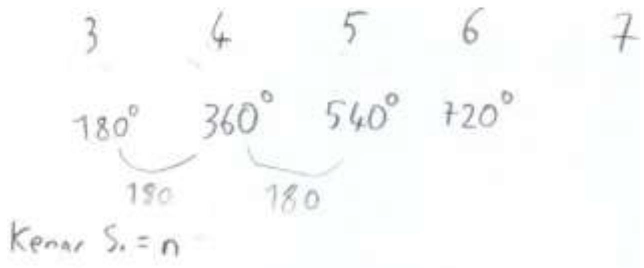


Hale'nin t-tablosu



Rana'nın t-tablosu

Efe'nin ise bunlardan farklı olarak aşağıdaki gibi bir düzenleme yaptığı yanıt kâğıdında görülmektedir:



Sayısal yaklaşım bağlamında kullanılan diğer stratejinin çokgenlerin iç açıları toplamları arasındaki artışa (180°'lik) odaklanmak olduğu saptanmıştır. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden olan Rana iç açılar toplamları arasındaki farka odaklanmış ancak bu veriyi kullanarak bir kural oluşturamamıştır. Bunun yanı sıra ikisi yüksek (Efe ve Hale), biri orta başarı düzeyine sahip (Han) olan üç öğrenci, çokgenlerin iç açıları toplamları arasındaki 180°'lik artıştan yararlanarak bir kural oluşturmuşlardır. Doğru kuralı bulan öğrencilerden Hale'nin görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

Hale : Geometrik şekillerde kenar 180, dört kenar 360, beş kenar 540 çarpı 180 desek olmaz. Zaten burada hani mesela bir kenar 180 diye başlamamış. Üç kenar 180 diye başlamış.
G : Evet.
Hale : Belki de bunu hani bir kenar 180 desek uyacak bir kural genel bi şey yapabiliriz.
G : Nasıl yapabiliriz onu?
Hale : Onu bir, iki, üç, dört olsa. İki eksik. Hepsinden altı, dört, iki eksiği yani iki eksiği Evet, eee sonra sıfırlamış olacağız. Ongene direk çarpı 180 diyebilirdik mi? Hayır, diyemeyiz.
G : Neyle 180'ini çarpacaksın?
Hale : 180'i çarpamazdık. İki tane 180. Çarpı iki, 180 çarpı üç derdik. 180 çarpı 10 derdik mesela ongen için.
G : Ongen için 180 çarpı 10 mu?
Hale : Olmaz mıydı?, Olur muydu? Çarpı 180. Olur.
G : Bunu bana genel olarak yazabilir misin?
Hale : Hmm kenara n desek yine. n eksi iki yapsak bunu direk buluruz, çarpı 180 olur mu ki?

Efe ise,

Efe : Kenar sayısı birer artıyor. Bu 180 artmış. 180°, 180° artıyor. Her bir kenar eklendikçe 180° daha da artıyor iç açılarının toplamı.
G : 180°'lik artış neyden kaynaklanıyor olabilir?
Efe : Bir açı daha eklendiği için olabilir. Diğer açılarla oynandığı için olabilir. Diğer açıların da kaç derece olduğu değişir, köşesi değişir. Olabilir bu mantıkla altıgen bir şeklin iç açılar toplamı bulunabilir yani.
G : Kaç derece olabilir?

Efe : Kaç olabilir? 720cm, 720°.
G : Peki, bir ongenin iç açılar toplamının kaç derece olduğunu sorsam nasıl bulursun?
Efe : Ongen her biri üçten sonra her birinde 180° artıyor. Üçten 10'a... üçten dörde bir ise üçten 10'a yedi tane kalır. Yedi tane 180 eklenir. Yani yedi çarpı 180 artı bir de en baştaki 180° var.
G : Peki, bunu nasıl ifade edebilirim?
Efe : Evet, n kenarlı bir çokgen için n eksi üç.
G : Neden n eksi üç dedin?
Efe : Ya 10'dan üçü çıkarıyoruz. Çünkü üç eee üçten başladığın için. Daha sonra bununla 180'i çarpıyoruz ve en baştaki 180'i ekliyoruz.

şeklinde ifade etmiştir. Bu ifadelerden de anlaşılacağı üzere Efe çokgenlerin iç açılar toplamları arasındaki farka odaklanmış ve buna dayanarak bir kural ortaya koymuştur.

İlişki arama-varsayım oluşturma teması kapsamındaki bir diğer sayısal yaklaşım olan deneme yanılma, öğrencilerin rastgele ilişkiler aramasını ifade eder. Bu kategori iç açılar toplamları arası çarpıma odaklanma, kat ve toplam ilişkisi arama olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir. Toplamlar arası çarpıma odaklanma, çokgenlerin iç açılar toplamları arasında bir kat ilişkisi aramadır. Bu bağlamda sekiz katılımcı öğrenciden sadece biri (Rana) iç açıları toplamını bildiği çokgenler üzerinde inceleme yaparken toplamlara odaklanıp toplamlar arasında iki kat ilişkisi aramıştır. Rana düşüncelerini aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Rana : Üçgende 180, dörtgende 360. Eee aralarında 180 ° var… beşgen kenar sayısı bi fazla.
G : Evet.
Rana : İki katı olsa 720 olabilir mi?
G : 360'ın iki katı mı?
Rana : Evet, 60, 60, 60 eee üç kenarı var, 180°. Dört kenarı var, 180'in iki katı dedim 360°. Çünkü bunun kenar sayısının bir fazlası. Eee dörtgenin kenar sayısının bir fazlası beşgen. Bunun da iki katı 720° olabilir mi, diye düşündüm.

Bu açıklamalarından emin olamayan Rana, bir başka ilişki düşünmüş ve bunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Rana : Dört açıda 360 ise beş açıda x dersek eğer şunlar ikisinde içler dışlar çarpımı yapabiliriz.
G : Şu anda ne yapıyorsun?
Rana : Eee üç açıda 180° dedim. Dört açıda 360°. Dört iç açısı var. Bunda beş iç açıdan toplam ne kadar olduğunu bilmiyorum. Beş açı iç açıda ne kadar çıkacağını bulmaya çalıştım. Eee şu kısımda içler dışlar

çarpımı yapmayı düşündüm. Dört x eşittir 1800 çıktı. Her tarafı dörde böldüğümde 450 çıktı.

Rana çokgenin kenar sayısı ile iç açıları toplamı arasında doğru orantı olacağını düşünmüş ve buna yönelik bir takım işlemler gerçekleştirmiş ancak bu süreç sonunda tıkanma noktasına gelmiştir. Deneme-yanılma kapsamında ele alınan diğer yaklaşımın çokgenlerin iç açıları toplamları arasında kat ve toplam ilişkisi aramak olduğu saptanmıştır. Bu bağlamda Rana, oluşturmuş olduğu t- tablosunu inceleyerek kenarlara dayalı kat ve toplam ilişkisi aramaya yönelmiştir:

Rana : *90'ar derece. 90 katı olmuş olsa 270'ten…*
G : *Kimin 90 katı?*
Rana : *Üç kenarı var üçgenin. 90 katı diye düşündüm. Çünkü bunun [kareyi gösteriyor]. 90 katıydı 90 katının 90 eksiği oluyor. Bunun 90 katı oluyor. Beşgenin 90 katı 450 eder. 450'den 90 çıkartırsak 360 eder.*

Yukarıdaki örnek dışında deneme yanılma yöntemiyle birçok farklı ifade yazan Rana, tıkanma sürecine girmiştir.

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer bir alt teması olan geometrik yaklaşım, öğrencilerin çizdikleri geometrik şekilleri analiz etmelerini ifade eder. Üçü yüksek başarı (Efe, Rana ve Oğuz), ikisi orta başarı düzeyine sahip (Su ve Mete) toplam beş kişinin kendilerini genellemeye ulaştıracak stratejiler ararken geometrik bir yaklaşım sergiledikleri dikkat çekmektedir. Bu alt tema kapsamında öğrenciler geometrik yapılara parçalama ve geometrik yapılara tamamlama olmak üzere iki yaklaşım kullanmışlardır.

Geometrik yapılara parçalayan öğrencilerin yanıtları incelendiğinde çizdikleri çokgenleri öncelikle üçgenler ile dörtgenlere (Oğuz, Rana, Su, Efe ve Mete) ve ardından üçgenlere (Mete, Oğuz ve Su) göre parçalamayı tercih ettikleri görülmüştür. Öncelikle çokgenleri üçgen ile dörtgene parçalayan katılımcı öğrencilerden Oğuz, Rana, Su, Efe ve Mete'nin üçgen ve dörtgenin iç açıları toplamlarını bildikleri için bu şekilde parçaladıkları saptanmıştır. Örneğin Rana beşgen için öncelikle aşağıdaki gibi aşağıdaki gibi bir çizim yapmayı tercih etmiştir:

Bu çizimi yaptıktan sonra alttaki dörtgeni de köşegen yardımıyla ikiye bölebileceğini fark etmiş ve beşgenin tek köşesinden çıkan köşegenleri çizerek doğru parçalamayı elde etmiştir. Ancak bu parçalamadan elde ettiği üçgenlerin bildiği özel üçgenlerden (ikizkenar ve eşkenar üçgen) biri olmadığı için iç açılarla ilgili yorum yapamayacağını onun içinde bu stratejiyle iç açılar toplamına ulaşamayacağını düşünen Rana'nın bu noktada tıkanma sürecine girdiği anlaşılmaktadır. Düşündüğü geometrik yaklaşımdan vazgeçip farklı stratejiler aramaya yöneldiği görülmektedir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden bir başkası olan Oğuz:

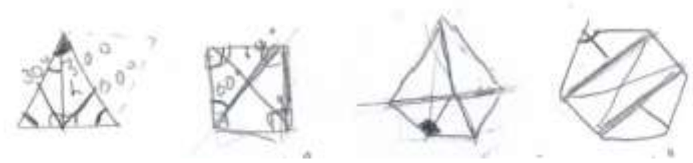
Oğuz : Dörtgenden yani şununla şunun [üçgen ve kareyi gösteriyor] arasında bir bağıntı. İki tane üçgen olduğu için ve tek üçgen 180 olduğu için toplam 360°.

G : Beşgende nasıl açıklarsın bu durumu?

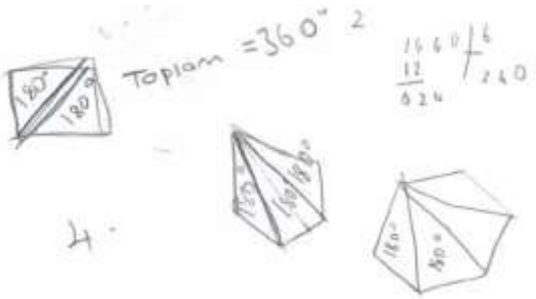
Oğuz : Beşgende şöyle açıklarım. Bunun içinde şöyle bir dörtgen var. Burada bir tane dörtgen var. Yamuk, evet, yine şimdi ezberden gidiyorum. Burada eğer dörtgeni 360 bulduk buradaki dörtgen de 360° [beşgenin içinde oluşturduğu dörtgeni gösteriyor] burada bir tane 180° üçgen var.

şeklinde açıklama (yeni bir atak) yapmıştır. Ancak biraz daha düşündükten sonra çokgenlerin bir köşesinden çizilen köşegenlerle tamamen üçgenlere ayrılabileceğini fark edip yukarıda görüldüğü gibi çizimler yapmış ve köşegen sayısını da içeren bir ifade olabileceğini düşünmeye başlamıştır.

Beşgeni bir üçgen ve bir dörtgene ayıran Su da, altıgende aynı stratejiyi uygulayarak onu da bir dörtgen ve iki üçgene ayırmıştır. Ancak dörtgenin de iç açılar toplamını bilmediği varsayılması gerektiği söylendiğinde Su'nun rastgele bir parçalama yaptığı görülmektedir:

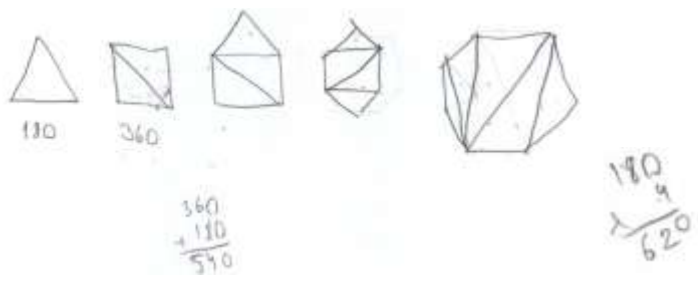


Bu çizimleriyle birlikte tıkanma sürecine giren Su, biraz düşündükten sonra çokgenleri tek köşelerinden çıkan köşegenlerle üçgenlere parçalamayı başarmıştır. Su'nun bu düşünceleri ve çizimleri aşağıda verilmiştir:



G	*: Peki, onları düşünmeden şu soruma cevap veremeyecek misin? Sadece üçgenin iç açılar toplamını bilerek dörtgeninkine nasıl ulaşabilirim?*
Su	*: Dörtgeninkine üçgenin iç açılarını bilerek zaten dörtgende bir üçgen iki. Dörtgende iki tane üçgen oluşur.*
G	*: Tamam, aynı bu şekilde beşgeni nasıl düşünebilirsin?*
Su	*: Şu kenarla şu kenar olabilir zaten tek bir tane kenar var. [çiziyor köşegenleri] Beşgen üzerinde hani bir üçgen oluşturamıyorum. Yani tam denk gelecek şekilde hepsi olacak şekilde şimdi bir iki tane çizgiye ayıracağım olmayacak. Olur mu ki? 180, 180, 180*
G	*: Evet.*
Su	*: Tüm çokgenler hep üçgenlerden mi?*
G	*: Altıgende olabilir mi o?*
Su	*: Olabilir.*
G	*: Bir de altıgen çiz istersen.*
Su	*: Böyle çiziliyor. Üçgen dört.*

Üçgen ve dörtgen ile başlayan Mete de



şeklinde yaptığı çizimleri aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Mete : Dörtgenin içine iki tane üçgen girer.

G : Nasıl? Onu çizebilir misin?

Mete : Biraz şöyle yapsam iki tane üçgen olur içinde.

G : Böyle olabilir mi?

Mete : Olabilir. Çünkü bir üçgen 180 ise diğeri de 180. İki tanesi 360.

G : Beşgende nasıl hesaplayabilirsin?

Mete : Beşgende mesela şu kısma bir tane dörtgen girse buraya da üçgen girse bu ikisinin toplamı olması lazım. 540.

G : Dörtgeni de bilmediğini düşün.

Mete : Üçgenden dörtgeni bulurum. Dörtgenden beşgeni bulurum.

G : Onu beşgen üzerinde direk gösteremez misin?

Mete : Hmm beşgenin içine de üç tane üçgen sığıyor. O zaman kareyi yani dörtgeni bilmeme gerek yok.

G : Peki, altıgende?

Mete : Altıgende… [çizmeye çalışıyor] Altıgende de şuraya bir üçgen sığıyor. Buraya da bir üçgen sığıyor. Şuraya da yine iki tane dört tane üçgen sığıyor.180'ni de dörtle çarparsak 620 mi? 620 mi? Evet 620. O zaman yedigende de [düşünüyor] şimdi dörtgende iki üçgen sığdı, beşgende üç üçgen sığdı, altıgende dört üçgen sığdı. Üçgen sayısı birer artarak gidiyor.

G : Evet.

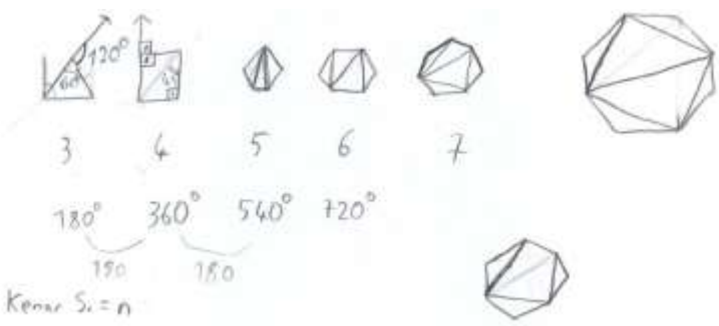
Mete : Yedigende de o zaman beş tane sığması lazım üçgenin. 180'le de beşi çarparsak oradan yedigeni bulabiliriz.

G : Bu ikisinde (dörtgen ve beşgen) köşegenleri çizerken farklı çizdin bunda (altıgen) farklı çizdin bunu özellikle mi yaptın?

Mete : Yok, burada sadece hani eee burada dörtgen kalıyor ya buraya üçgeni koyunca. Dörtgenin içinde de iki tane üçgen olduğu için öyle bir şey yaptım. Sadece üçgen sığdırmaya çalışıyorum.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere Mete belli bir sistematik kullanmadan çokgenleri üçgenlere ayırmayı tercih etmiş, bunu da rastgele yaptığını söyleyip başka bir açıklama yapamamıştır.

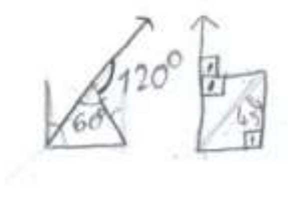
Oğuz, Rana, Su ve Mete çokgenleri öncelikle bir üçgen ve bir dörtgene ayırmış olsalar da sonuçta çokgenlerin tamamen üçgenlere parçalanacağını görebilmişlerdir. Efe ise yaptığı çizimleri aşağıdaki gibi açıklamıştır:



Efe *: Mesela burada iki tane üçgen çıkıyor.*
G *: Tamam.*
Efe *: Burada da şöyle bir şey gözümün önünde canlandı. Hem şöyle hem de şöyle olursa [beşgeni ayırıyor] burada üç tane üçgen oluşuyor.*
G *: Tamam. Altıgen için nasıl gösterirsin bunu?*
Efe *: Altıgende de şöyle bir üçgen çıkıyor. Şöyle bir üçgen çıkıyor. Yine burada dörtgen bir bölge çıkıyor, içerisinde de iki tane vardı şöyle oluyor.*
G *: Peki, yedigeni üçgenlere ayır desem onu nasıl ayıracaksın?*
Efe *: Yedigen, yedigen mesela şöyle bir çıkar, şöyle iki çıkar, şöyle üç çıkar, şöyle de beş tane üçgen çıkar. Ben sekizgende şimdi değişik bir şey fark ettim. Köşegenleri böyle değil de yine kısa şekilde çizsem. Şöyle bir tane daha köşegen çıkıyor. Burada bir dörtgen oluşuyor, dörtgenin de içerisinde iki tane üçgen çıkabiliyor ve rastgele dörtgende köşegen çizdikten sonra elimde bir dörtgen oluşuyor. Bu dörtgenin içerisinde iki tane üçgen oluşuyor. Mesela bu yedigende yine bunun gibi bir böyle bir böyle bir de böyle çizdikten sonra dörtgen ortaya çıkıyor. Yine dörtgenin içerisinde iki tane üçgen olduğu için bu gelir diye düşünüyorum.*
G *: İlerisi için de doğru olur mu acaba bu?*
Efe *: Sanırım doğru olur. Olabilir. Ortada bir dörtgen kalana kadar köşegen çizerim; ama köşegenler birbirini kesmeyecek şekilde.*

Yukarda görüldüğü üzere Efe düşündüğünü *"Çokgenleri parçalarken ortada bir dörtgen kalana kadar birbirlerini kesmeyecek şekilde üçgen çizer ve son olarak ortadaki dörtgeni de köşegen yardımıyla iki üçgene ayırırım."* şeklinde bir genelleme oluşturmuştur.

Geometrik yaklaşım kapsamındaki diğer bir strateji geometrik yapılara tamamlamadır. Katılımcı öğrencilerin çoğu çokgenleri üçgenlere parçalama stratejisini kullanırken biri yüksek (Efe) diğeri orta başarı düzeyine sahip (Su) iki öğrenci, ilk olarak üçgeni dörtgene tamamlamayı düşünmüşlerdir. Bu tamamlamayı gerçekleştirdikten sonra "Çokgenler üçgenlere parçalanabilir." fikri zihinlerinde canlanmıştır. Aşağıda Su ve Efe'ye ait çizimler görülmektedir:



Efe'nin çizimi

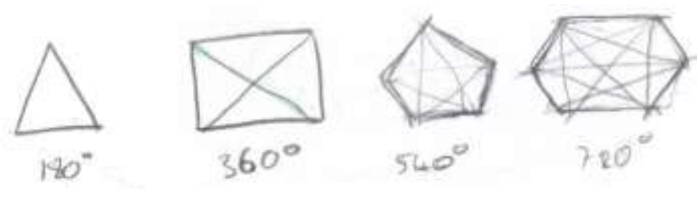
Su'nun çizimi

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer bir alt teması olan hem sayısal hem geometrik (pragmatik) yaklaşım, sayısal yaklaşım ile geometrik yaklaşımın beraber kullanıldığı temadır. Öğrencilerden üçü yüksek (Rana, Oğuz ve Hale) ikisi orta başarı düzeyine sahip (Han ve Su) toplam beşinin istenilen genellemeye ulaşma sürecinde hem sayısal hem geometrik (pragmatik) yaklaşımı kullandıkları dikkat çekmektedir. Bu alt tema kapsamında öğrencilerin çokgenlerin iç açıları arasındaki artışa odaklanma, çokgenlerin köşegen sayısına odaklanma ve tümler açıya odaklanma olmak üzere üç kategori bağlamında inceleme yaptıkları saptanmıştır. Han, Rana ve Su çizdikleri düzgün çokgenlerin iç açıları (60° ve 90°) arasındaki artışa bakarak bir kurala varmak istemişler ancak tıkanma süreciyle karşı karşıya kalmışlardır. Hale ve Oğuz ise iç açılar toplamına çokgenlerin tüm köşegen sayılarını kullanarak ulaşabileceklerini düşünmüşler ve dörtgen, beşgen, altıgene ait tüm köşegenleri yanıt kâğıdına çizmeye çalışmışlardır; ancak her ikisi de tüm köşegen sayısından bir sonuca ulaşamayacağını görüp bundan vazgeçerek yeni bir strateji aramaya yönelmiştir. Hale'nin düşünceleri ve yanıt kâğıdı aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

Hale : *Ya öyle başka bir şey aklıma gelmiyor açıkçası ama eee köşegenle alakalı olur desem. Bilmiyorum ya pek zannetmiyorum açıkçası. Bir, iki, üç, dört, beş, altı. Köşegenleri sayıyorum belki bir şey vardır, diye. Ama görünen yok. Yani bence yok. Açıkçası biraz saçma oldu. Eee bilmiyorum ya.*

G : *Köşegen üzerine biraz daha düşünebilirsin bence.*

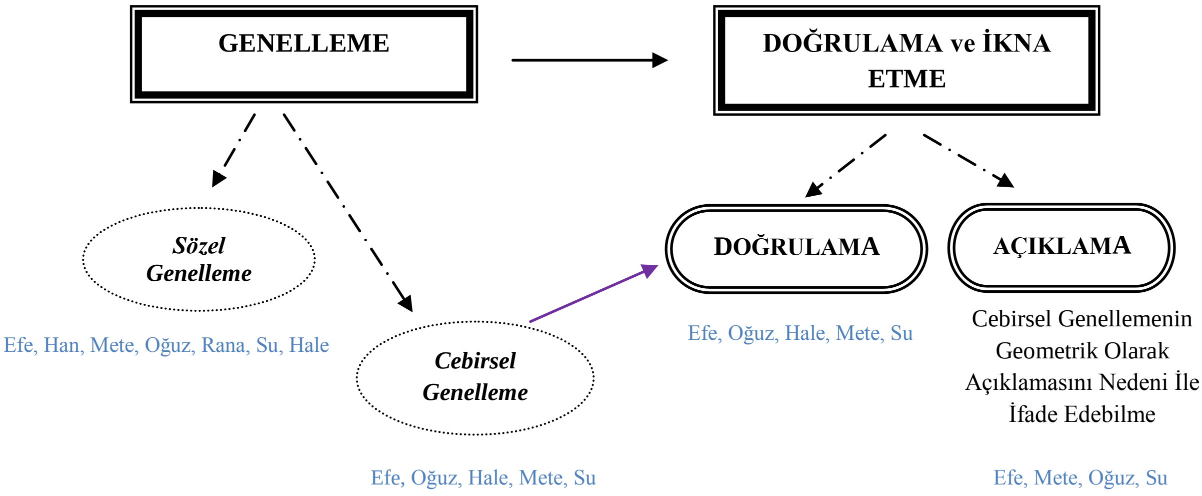
Hale : *Peki. Bir, iki, üç, dört, beş, beş değil mi? Bir, iki, üç, dört. Beş tane. Beşgenin beş köşegeni var; ama dörtgenin iki köşegeni var. Altıgenin de daha ne zamana kadarmış? Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz. Sekiz tane. Köşegenlerden bir yere ulaşacağımı pek zannetmiyorum.*



Katılımcı öğrencilerden Rana, çizdiği beşgeni bir üçgen ve bir dörtgene ayırmış, alttaki dörtgeni de köşegen yardımıyla ikiye bölebileceğini fark etmiş ve beşgenin tek köşesinden çıkan köşegenleri çizerek doğru parçalamayı elde etmiştir; ancak bu parçalamadan elde ettiği üçgenlerin bildiği özel üçgenlerden (ikizkenar, eşkenar üçgen ve dik üçgen) biri olmadığı için iç açılarla ilgili yorum yapamayacağını belirtmiş ve beşgenin tabandaki açılarının tümler açı olup olamayacağını düşünmeye başlamıştır. Yani toplamları 90° olacak iç açılar aradığı görülmektedir. Bu açıları da bilemeyeceğini düşünerek bu stratejiyle iç açılar toplamına ulaşamayacağını gören Rana'nın bu noktada tıkanma sürecine girdiği anlaşılmaktadır.

3.2.2. Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme

Genelleme ve doğrulama-ikna etme ana temaları altında ele alınan alt temalar Şekil 13'te sunulmuştur:

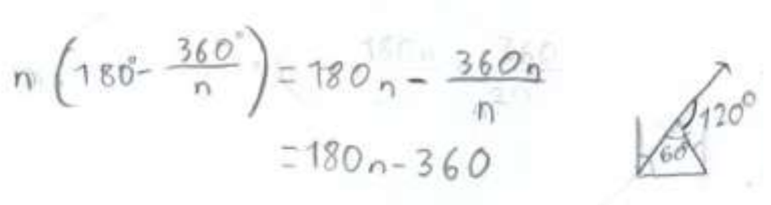


Şekil 13. Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme Süreçlerinde Kullanılan Yaklaşımlar

Elde edilen veriler incelendiğinde öğrencilerden Nur hariç diğer yedi öğrencinin *"Kenar sayısı arttıkça çokgenlerin iç açıları toplamı da 180° artar."* şeklinde bir sözel genelleme yapabildiği görülmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerden Su *"Tüm çokgenler üçgenlerden oluşur"*, Mete "*Dörtgende iki üçgen sığdı, beşgende üç üçgen sığdı, altıgende dört üçgen sığdı. Üçgen sayısı birer artarak gidiyor."* şeklinde sözel genellemelere ulaşmışlardır. Nur ise istenilen (n-2).180° genellemesini önceki bilgilerinden hatırlayarak ifade ettiği için sadece formülün doğruluğunu üçgen, dörtgen ve beşgen üzerinde göstermiş, herhangi bir genellemeye ulaşamamıştır. Yani ifade ettiği genellemenin geometrik açıklamasını kendisi yapamamış ancak araştırmacının yönlendirmesiyle yazdığı cebirsel ifadeyi sözel olarak açıklayabilmiştir.

Katılımcı öğrencilerden üçü yüksek (Efe, Oğuz ve Hale) ikisi orta başarı düzeyine sahip (Mete ve Su) toplam beşi istenilen cebirsel genellemeye ulaşıp örnekler üzerinde doğruluğunu gösterirlerken biri yüksek (Rana) diğeri orta başarı düzeyine sahip olan (Han) ikisi cebirsel genellemeye ulaşamamıştır. Ayrıca Efe'nin üç, Oğuz'un iki, Su, Hale ve Mete'nin sadece bir strateji kullanarak genellemeye ulaştığı belirlenmiştir. Cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerden Efe, ilk olarak düzgün çokgenleri ele almış ve aşağıdaki gibi bir açıklama yapmıştır:

Efe : *Genel olarak yazalım. Kenar, ayrıt sayısı çokgenlerde olduğu için kenar sayısı n olsa…*
G : *Tamam.*
Efe : *360 bölü n*
G : *Bu 360 bölü n bize neyi verir?*
Efe : *Eee bu bize bir dış açıyı verir.*
G : *Tamam.*
Efe : *Düzgün çokgenler için de 180°'den bunu çıkarırım. 180° eksi 360 bölü n diye bir formül düşünüyorum. Bu formül bir iç açıyı veriyor. Bu n kenar sayısı.*
G : *Ben bütün iç açılar toplamını arıyorum.*
Efe : *Hmm kaç tane kenar varsa o kadar da iç açı vardır.*
G : *Nasıl ifade edeceğim onu?*
Efe : *Kenar sayısı n ise n de hem kenar sayısına hem de bir açıya kaç tane açı olduğuna eşit olur.*
G : *Tamam, ben hepsini bulmanı istiyorum.*
Efe : *Evet, çarpı n olacak.*
G : *n ile kimi çarpacaksın?*
Efe : *n ile bir iç açıyı çarpacağım.*



Yanıt kâğıdında da görüldüğü üzere Efe'nin, düzgün çokgenlerin bir dış açısını bulmak için kullanılan 360/n ifadesini hatırlayarak öncelikle bir dış açıyı bulduğunu ve bunu da üçgen üzerinde gösterdiği görülmektedir. "Dış açı ile iç açı ölçüleri toplamı 180°'dir." bilgisini düşünerek 180°'den dış açının ölçüsünü çıkarıp bir iç açının ölçüsüne ulaştığı ve düzgün çokgenler üzerinde çalıştığı için de bunu kenar sayısıyla (açı sayısı) çarparak istenilen toplama ulaştığı görülmektedir. Bir başka strateji olarak ise Efe, çokgenlerin iç açı toplamları arasındaki artıştan yararlanarak genellemeye ulaşmış ve bunu aşağıdaki gibi cebirsel olarak ifade etmiştir:

$$180(n-3)+180 = 180n-540+180$$
$$= 180n-360$$

Oğuz ise çokgenin tek köşesinden çıkan köşegen sayısından yola çıkarak iç açılar toplamına farklı bir şekilde ulaşmış ve bunu aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Oğuz : …Tek köşeden çıkan köşegen sayısı çarpı 180 olabilir mi? Aaa 180 olmuyor. O zaman hmm bir dakika. Burada iki tane çıktı. Tek köşeden çıkan köşegen sayısı artı bir çarpı 180. Şöyle yap yazsam tek köşeden çıkan. Evet, köşegen sayısı artı bir çarpı 180.
G : Hepsi için geçerli olacak mı bu?
Oğuz : Şu an buradaki dördü için geçerli oluyor. Üçgende düşünsem. Tek köşeden çıkan köşegen sayısı yok. Sıfır artı bir çarpı 180 oldu. Tek köşeden çıkan köşegen sayısı bir artı bir, iki 360 oldu. Tek köşeden çıkan köşegen sayısı bunda kaç? İki artı bir, üç çarpı 180, 540 oldu. Tek köşeden çıkan köşegen sayısı üç, dört, 620. Evet, ama mesela şu?
G : 620 mi oluyor?
Oğuz : Bir dakika. 180 hmm 720.

Oğuz yukarda da görüldüğü üzere iç açılar toplamını

(tek köşeden çıkan köşegen sayısı+1).180°

olarak ifade edip üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen üzerinde de doğruluğunu kontrol etmiştir. Oğuz'a köşegen sayısının nasıl bulunacağı sorulduğunda ise

Oğuz : Şimdi köşegen sayısını nasıl bulacağım? Bir dakika. Dörtgende bir tane çıkıyor, beşgende iki tane, altıgende üç tane çıkıyor.
G : Yani nasıl bir ilişki var? Oraya bir şeyler yazdın.
Oğuz : Eksi üç, eksi üç.
G : Neyin üç eksiği?

Oğuz : Kenar sayısının üç eksiği. Tek köşeden çıkan köşegen sayısı da o zaman hmm kenar sayısının üç eksiği olmuş oluyor. O zaman şey bunun tek köşeden çıkan köşegen sayısı x olsun. x eşittir kenar sayısı eksi üç o zaman kenar sayısı eksi iki çarpı 180 direk verir mi? Hmm verir mi?
G : Düşün bakalım üzerine.
Oğuz : Evet, bir dakika kenar sayısı dört, evet verir. Genel bir şey buldum gibi geliyor. n eksi iki çarpı 180.

şeklinde ifade etmiştir. Bu ifadelerden de anlaşılacağı üzere Oğuz, tek köşeden çıkan köşegen sayısına x değişkenini atamış, bunun kenar sayısının 3 eksiği olduğunu fark etmiş ve önceki yazdığı ifadeyle bunu birleştirmiştir. Yani öğrencinin

x = kenar sayısı-3 (tek köşeden çıkan köşegen sayısı+1).180°

x = n-3 $(x+1).180 = (n–3+1).180 = (n-2).180°$

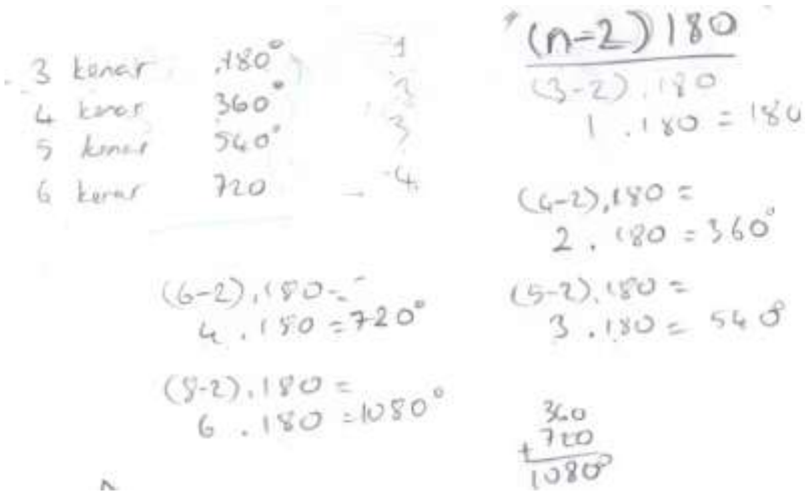
bu işlemleri açık açık yazmasa da zihinden gerçekleştirerek (n-2).180°'e ulaştığı yukarda verilen açıklamalardan anlaşılmaktadır.

Mete ise çokgenlerin içindeki üçgen sayılarından yararlanıp bunu kenar sayısıyla ilişkilendirerek (n-2).180°'e ulaşmıştır.

Mete : Üçgenden dörtgeni bulurum, dörtgenden beşgeni bulurum.
G : Onu beşgen üzerinde direk gösteremez misin?
Mete : Hmm beşgenin içine de üç tane üçgen sığıyor. O zaman kareyi yani dörtgeni bilmeme gerek yok.
G : Peki altıgende?
Mete : Altıgende… [çizmeye çalışıyor] Altıgende de şuraya bir üçgen sığıyor. Buraya da bir üçgen sığıyor. Şuraya da yine iki tane, dört tane üçgen sığıyor.180'i de dörtle çarparsak 620 mi? 620 mi? Evet, 620. O zaman yedigende de şimdi dörtgende iki üçgen sığdı, beşgende üç üçgen sığdı, altıgende dört üçgen sığdı. Üçgen sayısı birer artarak gidiyor.
G : Evet.
Mete : Yedigende de o zaman beş tane sığması lazım üçgenin.180 ile de beşi çarparsak oradan yedigeni bulabiliriz. Dörtgene kenar sayısından iki eksik üçgen sığıyor, beşgene de iki eksik, altıgene de iki eksik üçgen sığıyor.
G : Peki, nasıl ifade edersin onu?
Mete : Eee n eksi iki yani n bir köşegenin kenar sayısı şey çokgenin kenar sayısı çarpı 180 olabilir.
G : n eksi iki neyi ifade eder bu durumda?
Mete : n eksi iki bu durumda çokgenin içine sığacak üçgen sayısını, 180 de üçgenin iç açısı…

Yukarıda görüldüğü gibi Mete bulduğu ifadenin doğruluğunu da kontrol etmiştir.

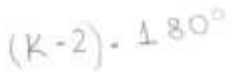
Hale ise diğerlerinden farklı olarak t tablosu yaparak oluşturduğu örüntüyü genellemiştir:



G : *O zaman bunu bana genel olarak yazabilir misin?*
Hale : *Hmm kenara n desek yine n eksi iki yapsak. Bunu direk buluruz. Çarpı 180 olur mu ki? Deneyelim.*
G : *Nasıl emin olabiliriz bunun doğru olduğuna?*
Hale : *Bir kaç tane yani n'e farklı değerler vererek hepsinde sağlıyor mu? Ona bakabiliriz.*

Yukarıda görüldüğü üzere Hale'nin kendisine bir t-tablosu oluşturup artış miktarından yararlanarak (n-2).180° genellemesine ulaştığı ve çeşitli çokgenler için doğrulama yaptığı görülmektedir; ancak Hale, bunun sadece düzgün çokgenler için geçerli olabileceğini düşünmüştür.

Doğrulama-İkna Etme ana teması altında ise genellemeye ulaşan öğrencilerin geometrik açıklama yapıp yapamadığı incelenmiştir. Öğrencilerden ikisi yüksek (Efe ve Oğuz) ikisi orta başarı düzeyine sahip (Mete ve Su) dördünün ulaştığı genellemenin geometrik anlamını açıkladığı görülmektedir. Bu öğrenciler, bir çokgenin uygun şekilde kaç tane üçgene parçalanabileceğini belirleyip bunu çokgenin kenar sayısıyla ilişkilendirmiş ve "Bir üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı 180°'dir." bilgisinden hareketle (n–2).180°'e ulaşmışlardır. Örneğin Su,



Su : *180, 180, 180.*
G : *Evet.*

Su : *Tüm çokgenler hep üçgenlerden mi?*
G : *Altıgende olabilir mi o?*
Su : *Olabilir.*
G : *Tamam, sence buradan genel bir kurala ulaşamaz mıyız?*
Su : *Hepsini 180 üzerinden kaç taneyse…Dörtgen iki tane, beşgen üç, altıgende dört tane. Hep bir artarak yani bir sayı artarak gitmiş. İki çıkarınca…*
G : *Neyden iki çıkarınca?*
Su : *Kenar sayısından.*
G : *Tamam, çok güzel söyledin. Kenar sayısından iki çıkarınca neyi elde etmiş oluyorum ben?*
Su : *Kenar sayısından iki çıkarınca içinde kaç tane üçgen olduğunu buluyoruz.….iki çıkarıp 180'le çarpacağız.*

yazdığı (k-2) ifadesinin geometrik olarak ne anlama geldiğini açıklamış ve bir üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğunu bildiği için bunu (k-2).180° şeklinde düşünmüştür.

Hale t-tablosu oluşturup iç açıların ölçüleri toplamındaki artıştan yararlanarak genellemeye varmış; ancak bunun geometrik anlamını açıklayamamıştır. Yani öğrenciye "(n-2)'nin anlamı nedir ve bunu neden 180° ile çarpıyoruz?" soruları yöneltildiğinde istenilen yanıtlar alınamamıştır.

Nur ise doğrudan geçmiş bilgilerini hatırlayarak istenilen cebirsel genellemeyi yazdığından bu ifadenin geometrik anlamını açıklayamamıştır. Ancak araştırmacının yaptığı yönlendirme sonucu geometrik olarak anlamını da ifade edebilmiştir.

Rana ve Han ise herhangi bir cebirsel genellemeye ulaşamamışlar ve aynı zamanda geometrik olarak da bir açıklama yapamamışlardır.

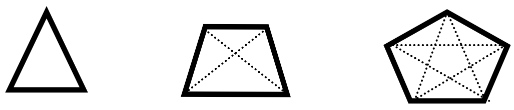
Öğrencilerin iç açılar toplamı probleminde genellemeye ulaşmak için kullandıkları stratejiler ve bu stratejilerden hangileri ile genellemeye ulaştıkları ya da hangilerinin sonucunda tıkanma sürecine girdikleri Tablo 7'de verilmiştir:

Tablo 7. İç Açılar Toplamı Probleminde Öğrencilerin Kullandıkları Stratejiler ve Tıkanma Noktaları

<table>
<tr><th colspan="2">SÜREÇ</th><th colspan="2">STRATEJİLER (ATAK)</th><th>BULDUM! / TIKANDIM!</th></tr>
<tr><td rowspan="8">ÖZELLEŞTİRME</td><td rowspan="8">İLİŞKİ ARAMA-VARSAYIM OLUŞTURMA</td><td>Ön Bilgiye Dayalı Kural Yazma (1)</td><td>ATAK 1: Ön bilgi kullanarak istenilen genel kuralı yazma. (1)</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sayısal Yaklaşım (4)</td><td>ATAK 2: t tablosu kullanarak örüntü (iç açılar toplamları arasındaki 180°'lik artış) oluşturma. (3)
ATAK 3: Sadece toplamlar arası artışa odaklanma.
ATAK 4: Toplamlar arası artışı çokgenin kenar sayısı ile ilişkilendirme.</td><td>Tıkandım! (1)
Buldum! (3)</td></tr>
<tr><td>ATAK 5: Toplamlar arasında (180° - 360° -540° …) deneme- yanılma stratejisiyle ilişki arama.</td><td>Tıkandım! (2)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Hem Sayısal Hem Geometrik Yaklaşım (5)</td><td>ATAK 6: Çokgenlerin iç açıları arasındaki artışa (30°-60 -90°-…) odaklanma.</td><td>Tıkandım! (3)</td></tr>
<tr><td>ATAK 7: Çokgendeki tüm köşegen sayısına odaklanma.</td><td>Tıkandım! (2)</td></tr>
<tr><td>ATAK 8: Tümler açıya odaklanma.</td><td>Tıkandım! (1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Geometrik Yaklaşım (5)</td><td>ATAK 9: Çokgenleri üçgen ve dörtgenlere parçalama.
ATAK 10: Çokgenleri sadece üçgenlere parçalama.</td><td>Buldum! (5)
Buldum! (3)</td></tr>
<tr><td>ATAK 11: Geometrik yapılara (üçgeni dörtgene) tamamlama.</td><td>Tıkandım! (2)</td></tr>
</table>

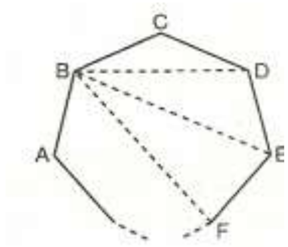
3.3. Üçüncü Soruya Ait Bulgular

Öğrencilerden üçüncü soru kapsamında, köşegenleri çizilmiş olarak verilen üçgeni, dörtgeni ve beşgeni incelemeleri istenmiş ve n kenarlı bir çokgenin kaç tane köşegeni olduğunu bulmaya yarayacak bir kural bulmaları beklenmiştir.



Bu kurala ($\frac{n.(n-3)}{2}$) farklı şekillerde ulaşılabilmektedir. Aşağıda bunlardan iki tanesine yer verilmiştir:

1.Strateji:



n kenarlı bir çokgenin her bir köşesinden n-3 tane köşegen çizilebilir. Buna göre toplamda n.(n-3) köşegen oluşur; A köşesinden B köşesine çizilen köşegen ile B'den A'ya çizilen köşegenler aynı olacağından her biri iki kere sayılmış olur. Bu durumda n>3 olmak üzere, n kenarlı konveks bir çokgenin köşegen sayısı $\frac{n.(n-3)}{2}$ şeklinde bulunur.

2. Strateji: n kenarlı bir çokgende n tane köşe vardır. İki noktadan bir doğru geçtiği için, köşegen sayısını bulmak için, n'in 2'li kombinasyonlarının sayısı bulunmalıdır. Bu da

$$C(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!\ .2!}$$

şeklinde hesaplanır. Ancak komşu olan iki köşeden köşegen (bunlar çokgenin kenarlarıdır) geçemeyeceğinden C(n,2)'sinden kenar sayısı olan n çıkarılmalıdır. O halde n kenarlı çokgenin köşegen sayısına,

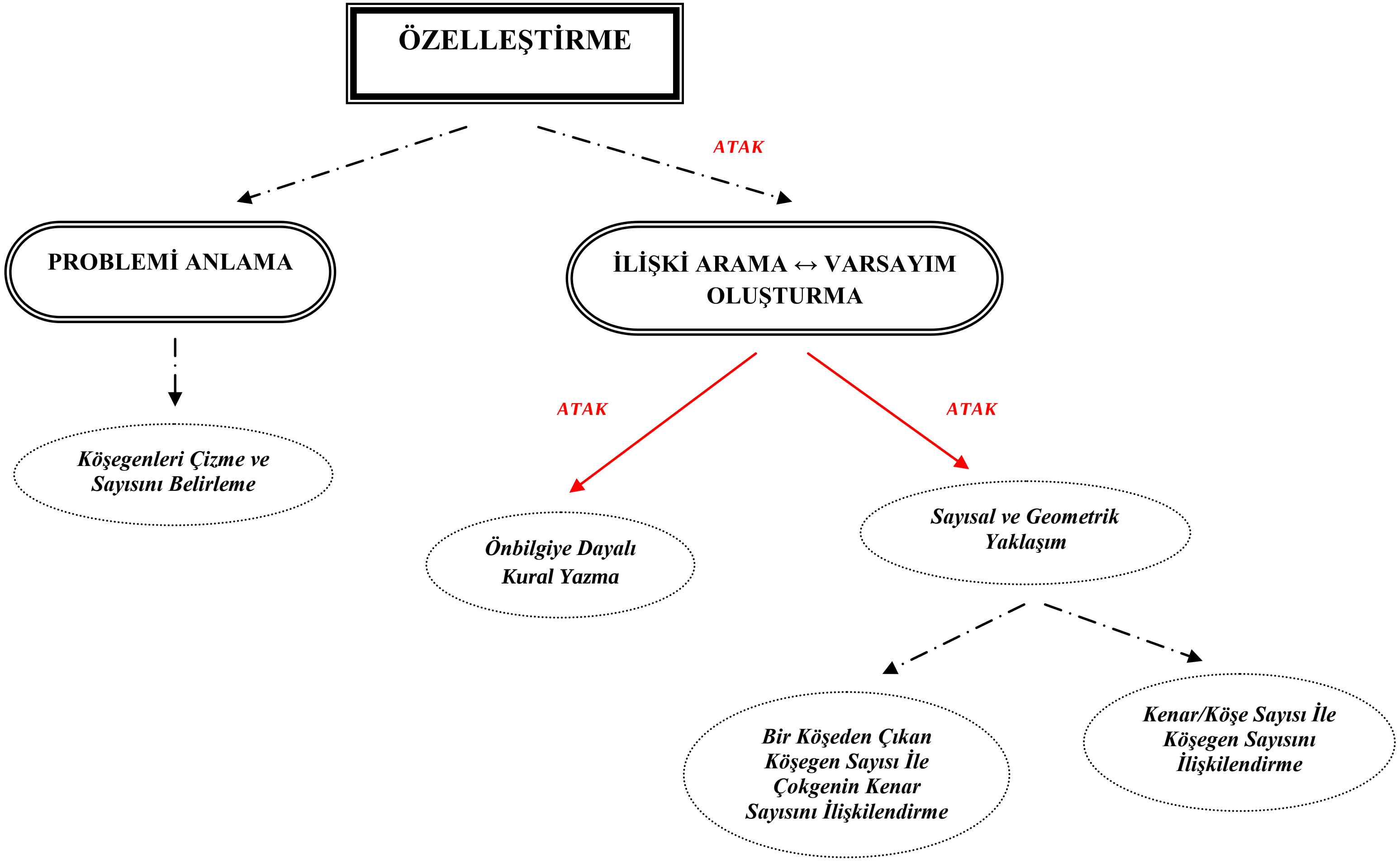
$$\frac{n!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n^2-n}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2}$$

şeklinde ulaşılabilir.

Elde edilen verilerin analizi sonucunda bu soru özelleştirme, genelleme ve doğrulama-ikna etme olmak üzere üç ana tema altında incelenmiştir.

3.3.1. Özelleştirme

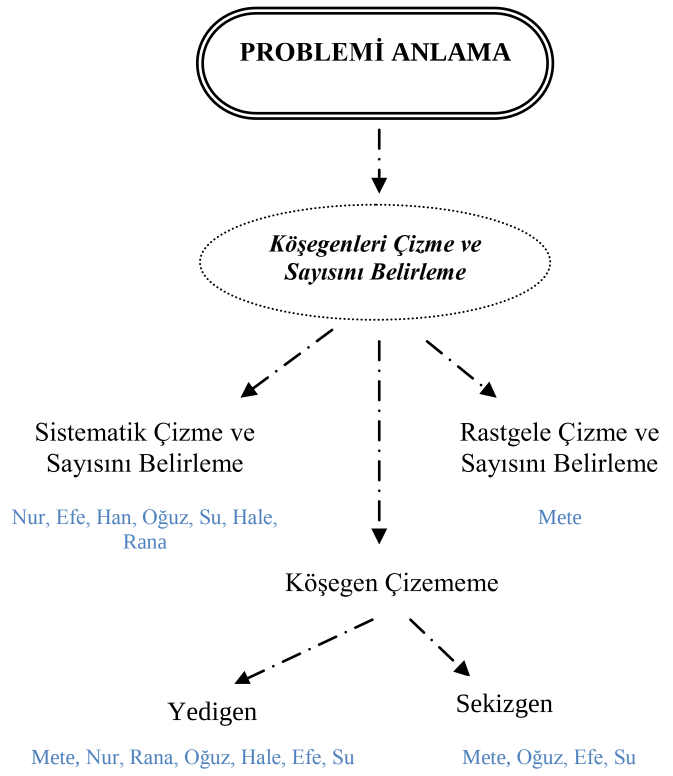
Bu probleme ilişkin öğrenci yanıtları incelendiğinde öğrencilerin istenilen genellemeye ulaşmak için öncelikle verilen örnekleri inceledikleri, daha sonra ise altıgen ve köşegenlerini çizip bunların sayılarını belirleyerek bu sayılar arasında bir ilişki aradıkları ve varsayım oluşturdukları görülmüştür. Bu bağlamda özelleştirme ana teması, problemi anlama ve ilişki arama-varsayım oluşturma olmak üzere Şekil 14'te görüldüğü gibi iki temaya ayrılmıştır:



Şekil 14.Köşegen Sayısı Probleminde Özelleştirme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Problemi Anlama

Öğrencilerin bir çokgenin köşegen sayısını bulma probleminde anlamaya yönelik olarak kullandıkları yaklaşımlar Şekil 15'te ayrıntılı olarak verilmiştir:



Şekil 15.Köşegen Sayısı Problemini Anlama Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Katılımcı öğrencilerin soruyu okuduktan sonra ilk olarak verilen köşegenleri inceleyip saydıkları görülmüştür. Öğrenciler üçgen, dörtgen ve beşgeni inceledikten sonra ise altıgen çizip köşegen sayısını belirlemeye yönelmişlerdir. Dördü yüksek (Efe, Oğuz, Hale ve Rana) üçü orta başarı düzeyine sahip olan (Han, Nur ve Su) toplam yedi öğrencinin köşegenleri çizerken sistematik bir yaklaşım kullandığı görülmektedir. Bu öğrenciler çokgenin herhangi bir köşesinden başlayarak bir köşeden çizilebilecek köşegenleri belirlemişler, sırayı bozmadan ikinci köşeye geçerek oradan çizilebilecek köşegenleri belirlemişler ve bu sırayı takip ederek köşegenlerin tamamını çizmeyi başarmışlardır. Problemi anlama ve genellemeye giden stratejiyi belirleme açısından öğrencilerin çizim yaparken tercih ettikleri yaklaşım oldukça önem taşımaktadır. Bu nedenle aşağıda bu yaklaşımı kullanan öğrencilerin düşüncelerine yer verilecektir. Örneğin Efe, altıgenin köşegenlerini çizerken kendisine bir köşe seçip bu köşeden çıkan köşegen sayısını üç olarak belirlemiş ve sırayla diğer köşelerden de üç tane köşegen çizilmesi gerektiğini şu şekilde ifade etmiştir:

G	*: Mesela orda köşegenleri çizerken nasıl bir yöntem izledin? Rastgele mi çizdin yoksa belirli bir yol kullandın mı çizmek için?*
Efe	*: Belirli bir yol kullandım.*
G	*: Nasıl bir yol?*
Efe	*: Mesela şimdi bu köşenin bir kenarla bağıntısı olmadığı üç tane köşe var. O yüzden buradan üç tane köşegen çıkar ve her köşeden de böyle üç tane köşegen çıkacağı için her köşeden üç tane. Üçer tane köşegen çıktığı ana kadar çizmeye devam ettim.*

Han, Oğuz, Su, Nur, Hale ve Rana'nın yanıtları incelendiğinde de onların Efe ile benzer şekilde açıklamalar yaptığı görülmektedir.

Katılımcı öğrencilerin büyük çoğunluğu yukarıda ifade edildiği gibi köşegenlerin çiziminde sistematik bir yaklaşım sergilerken orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci olan Mete'nin rastgele çizim yaptığı görülmektedir. Rastgele çizim yapan Mete, altıgenin köşegenlerini eksik çizerek altı tane olduğunu düşünmüş ve

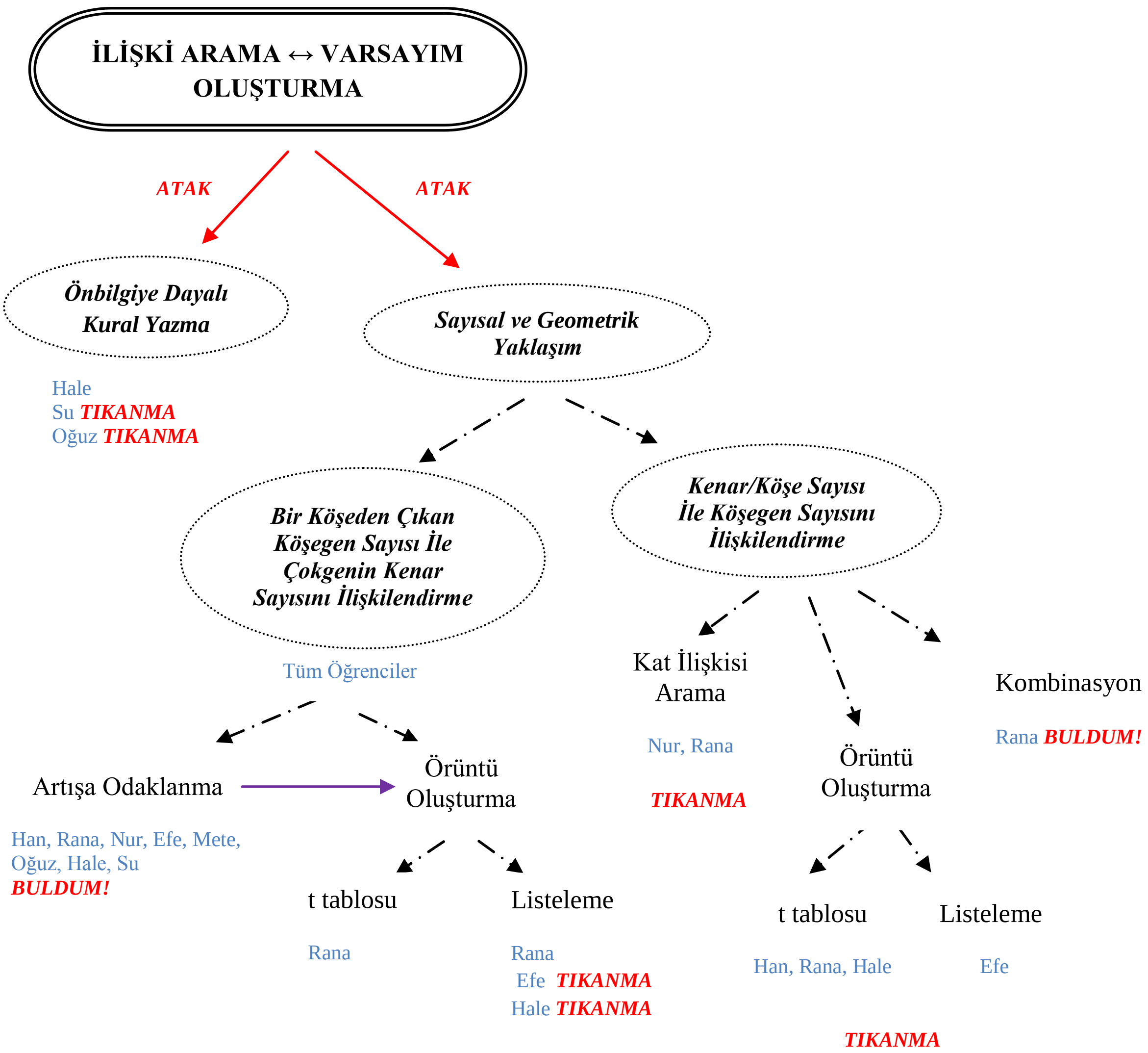
G	*: Bu köşegenleri çizerken bir yol izledin mi? Yine bunları da rastgele mi çizdin?*
Mete	*: Rastgele çizdim. Çünkü aklıma gelmiyor yani.*
G	*: Eksik çizmiş olabilir misin?*
Mete	*: Olabilir. Emin değilim çünkü.*

şeklinde düşündüklerini ifade etmiştir. Biraz daha inceleme yapan Mete'nin bir köşeden kaç tane köşegen çıktığını fark ettiği ve buna göre bir strateji arayışı içine girdiği saptanmıştır.

Öğrencilerin yanıt kâğıtları incelendiğinde tüm öğrencilerin altıgenin köşegenlerini çizip sayısını doğru olarak belirlediği tespit edilmiş ancak yedigen çizmekte öğrencilerin zorlandığı görülmüştür. Efe, Mete, Oğuz ve Su yedigen çizmeyi tercih etmemiş; Rana, Nur ve Hale çizmeye çalışmış ancak başarılı olamayıp vazgeçmiş; Han ise başarılı bir şekilde çizimi gerçekleştirmiştir. Sekizgenin köşegenlerini ise yine Efe, Mete, Oğuz ve Su çizmeyi tercih etmezken Nur ve Rana denemiş ancak başarılı olamamış, Han ve Hale ise başarılı bir şekilde çizimlerini gerçekleştirmişlerdir.

İlişki Arama-Varsayım Oluşturma

Çokgenlerin köşegenlerini çizip sayılarını belirleyen öğrenciler, çokgenin kenar sayısı ve elde ettikleri köşegen sayısı arasında ilişki aramaya yönelmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin kullandıkları yaklaşımlar Şekil 16'da ayrıntılı olarak verilmiştir:



Şekil 16.Köşegen Sayısı Probleminde Kullanılan İlişkilendirmeler

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının ilk alt teması olan önbilgiye dayalı kural yazma, probleme ilişkin istenilen genellemeyi öğrencilerin ezbere söylemelerini belirtir. Bu bağlamda yüksek başarı düzeyine sahip olan bir öğrenci (Oğuz) soruyu okuduktan hemen sonra doğrudan bir varsayımda bulunmuştur. Oğuz'un soruyu okuduğunda aşağıdaki gibi cevap verdiği görülmektedir:

G : Nasıl başlamayı düşünüyorsun?
Oğuz : Eee yani bir şeyden bir şeyi çıkartıp veya bir şeyle bir şeyi toplayıp köşegen sayısını bulayım ilk baş.

Biri yüksek (Hale) diğeri orta başarı düzeyine sahip olan iki kişi (Su) ise yaptıkları özelleştirmelerden istenilen genellemeye ulaşamayınca düşündüklerini bir kenara bırakıp formül hatırlamaya yönelmişlerdir. Hale'nin,

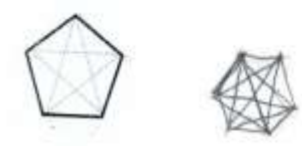
Hale : [n-3 yazdı] çarpı n geçen yıldan ben şey, diye hatırlıyorum; ama hani?
G : Ne hatırlıyorsun?
Hale : n eksi üç ya da iki diye hatırladım. Çarpı n bölü iki gibi bir şey vardı sanki.

yukarıda görüldüğü gibi doğrudan $\frac{n.(n-3)}{2}$ formülünü hatırlayıp örnekler üzerinde doğrulama yapmayı amaçladığı anlaşılmaktadır.

Su ise formülü yanlış hatırlamış ($\frac{n.(n+1)}{2}$) araştırmacının yönlendirmesi ile tekrar ilişki aramaya yönelmiştir.

İlişki arama-varsayım oluşturma temasının diğer bir alt teması olan sayısal ve geometrik yaklaşım, yapıdaki geometrik bir özellik ile belirlenen köşegen sayısı ya da çokgenin kenar sayısı arasında bir ilişki aramayı belirtir. Öğrencilerin tamamı bir şekilde sayısal ve geometrik yaklaşım olarak ifade edilen bu stratejiyi kullanmışlardır. Bu alt tema kapsamında öğrencilerin bir köşeden çıkan köşegen sayısı ile çokgenin kenar sayısını ilişkilendirme ve kenar/köşe sayısı ile köşegen sayısını ilişkilendirme olmak üzere iki kategori bağlamında inceleme yaptıkları saptanmıştır. Öğrenciler, bir köşeden çıkan köşegen sayısı ile çokgenin kenar sayısını ilişkilendirme kategorisi kapsamında çokgenlerin bir köşesinden çıkan köşegen sayıları arasındaki artışa odaklanma ve tek köşeden çıkan köşegen sayıları arasında örüntü oluşturma olmak üzere iki farklı yaklaşım kullanmışlardır.

Katılımcı öğrencilerin tamamının çokgenin kenar sayısı ile tek köşesinden çıkan köşegen sayısı arasında bir ilişki kurulması gerektiğini fark ettiği görülmektedir. Örneğin orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci olan Mete,



Mete : Burada [beşgeni gösteriyor] bir noktadan iki tane köşegen çıkıyor. Altıgende üç tane çıkması lazım; ama bu noktadan bakalım üç, n eksi üç tane köşegen çıkar bu noktadan.
G : Evet.
Mete : Eee kenar sayısı kadar köşe olduğuna göre de … n böle bir şey olabilir. n çarpı n eksi üç. [n.(n-3) yazdı]

çokgenin kenar sayısı ile tek köşesinden çıkan köşegen sayısı arasındaki ilişkiyi yukarıdaki gibi ifade etmiştir. Benzer şekilde yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden olan Oğuz da verilen çokgenlerin köşegenlerini inceledikten sonra altıgenin bir köşesinden çıkan köşegen sayısının farkına varıp,

Oğuz : [altıgen çiziyor] Yani bir köşeden üç tane çıkıyorsa…
G : Evet.
Oğuz : Bir, iki, üç, dört, altı tane var. 18 tane olmalı ya da hayır. 18'i ikiye böl. Dokuz tane olacak
G : Neden ikiye böldün?
Oğuz : Çünkü şöyle bir tane doğru iki köşeyi kapatıyor. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz evet

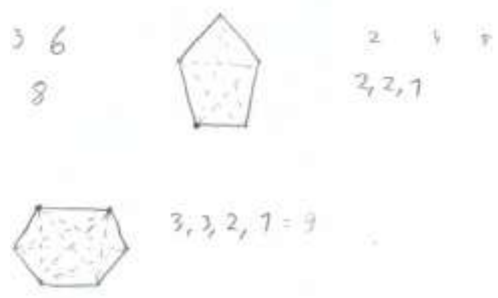
açıklamalarını yapmıştır. Çokgenin bir köşesinden çıkan köşegen sayısı ile çokgenin kenar sayısı arasında bir ilişki olduğunu fark eden öğrencilerden ikisi yüksek (Rana ve Efe) ikisi orta başarı düzeyine sahip olan (Han ve Nur) dört öğrencinin köşegen sayıları arasındaki artışa odaklandıkları görülmüştür. Örneğin Rana,

Rana : Beşgende iki tane çıkıyor. Altıgende üç tane çıkıyor. Sekizgende, sekizgende beş.
G : Sen oraya bir köşeden çıkanları yazdın değil mi?
Rana : Evet, birer birer artıyor. O zaman yedigende dört tane çıkması gerekiyor. Bu mantıkla gidersek eğer.

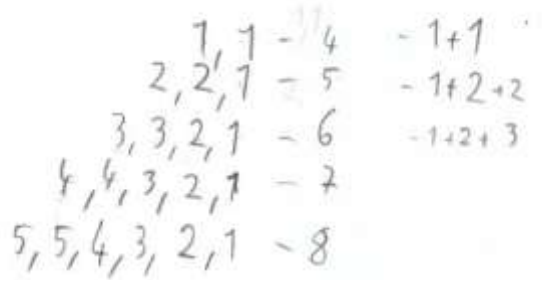
şeklinde açıklamalarda bulunmuştur. Benzer şekilde Nur da bu artışa odaklanmıştır:

Nur : Bir, iki, üç, dört, beş. Beş tane çıkıyor. Yedigende de dört tane çıkacak… Sekizgende beş çıktı.
G : Evet.
Nur : Ya bu arttıkça bu da artıyor. Birer birer artıyor.

Yanıt kâğıtları incelendiğinde yüksek başarı düzeyine sahip üç öğrencinin (Rana, Efe ve Hale) çokgenlerin sırasıyla her bir köşesinden çıkan köşegen sayılarının bir örüntü oluştuğunu fark ettikleri görülmektedir. Örüntüyü fark eden öğrencilerden üçü de listeleme yöntemi kullanmayı tercih ederken Rana'nın buna ek olarak t- tablosu da kullandığı belirlenmiştir. Örneğin Efe, beşgen ve altıgenin bütün köşegenlerini çizmiştir. Çizimi yaparken beşgen ve altıgenin bir köşesinden başlamış, o köşeden çizilen köşegen sayısını belirlemiş daha sonra ise sıradaki köşeye geçip oradan çizilen köşegen sayısını belirlemiş ve sırasıyla bütün köşelere aynı işlemi yapıp her bir köşeden çıkan köşegen sayılarını kâğıda not etmiştir. Beşgenin sırasıyla iki köşesinden iki, bir köşesinden bir köşegen çizilebileceğini ve diğer iki köşesinden köşegen çizilemeyeceğini, altıgen için ise iki köşesinden üç, bir köşesinden iki, bir diğer köşesinden bir köşegen çizilebileceğini ve diğer iki köşesinden hiç köşegen çizilemeyeceğini söylemiştir.



Efe, bu şekilde her bir köşenden çıkan köşegen sayılarının bir örüntü oluşturduğunu fark etmiş ve buradan hareketle diğer çokgenleri de içeren aşağıda verildiği gibi bir listeleme yapmıştır:



Böylelikle yedigenin köşegen sayısı için 14 olan tahmininin de doğruluğunu fark etmiş ve aşağıdaki gibi açıklamalarda bulunmuştur:

Efe : *11. İki, iki bir, üç, üç, iki, bir şöyle yazayım. [aşağı düzenli yazıyor] Mesela birler hep aynı kalmış. Bu bir artmış. Mesela burada hiç yokken iki ve üç olmuş. Bu da üç olmuş. Bir, iki, üç, bir, iki, üç, bir, iki, diye gidiyor [listeye çapraz bakıyor]. Yedigen mesela. Altıgeni çizmiştik. Yedigende mesela bir, iki, üç, dört, dört olabilir. Dört, dört, sekiz, 10, 14 oluyor. Biraz önce ben de 14, diye tahmin etmiştim.*

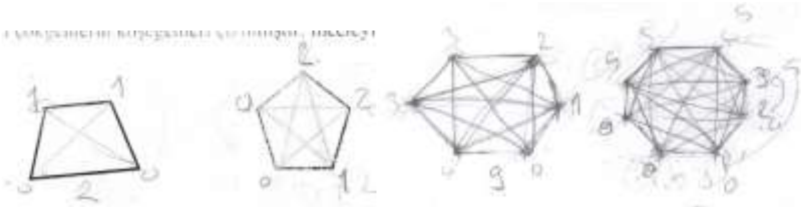
G : *Peki, sekizgene ne diyeceksin şimdi?*

Efe : *Bu da yine aynı yöntemle Bir, iki. Bir, iki, üç. Bir, iki, üç, dört. Bir, iki, üç, dört beş.*

G : *Bunu tamamen sayılar arasındaki örüntüye bakarak yazıyorsun şu anda değil mi?*

Efe : *Evet. Bu da 10, 17, 20 oluyor.*

Efe'ye benzer bir strateji kullanan Hale ise çokgenin bir köşesinden başlayarak sırasıyla her bir köşesinden çıkan köşegen sayılarını Efe gibi ekstra bir listeleme yapmaksızın aşağıda görüldüğü üzere şekil üzerine not almayı tercih etmiştir:



Hale : *[Altıgene bakıyor.] Burada aynısı oluyor. Hani acaba şöyle mi yapabiliriz? Mesela bunda üç tanesini çizdik. Sonra burada da üç tanesini çizdik, burada iki çizdik burada da bir çizdik burada hiç çizmedik.*

G : *Diğerinde de mi hiç çizmedik? İki noktada hiç mi çizmemiş oluyoruz?*

Hale : *İki noktada hiç mi çizmedik? Herhalde evet altı, evet altı, dokuz. Dokuz tane çizmişiz zaten dokuz tane köşegeni var. Demek ki iki köşede hiç çizmemişiz.*

G : *Acaba bu diğerleri için de böyle mi olacak? Yani onlar için de geçerli olur mu dersin?*

Hale : *Bilmem olabilir. Bi beşgen deneyelim. Sonuçta bunda bir tane [beşgene bakıyor] çizdik. Bunda da bir tane çizdik. Bunlarda hiç çizmedik. Ama iki tane. Buna bakalım ama bunda eee iki tane çizdik. İki tane çizdik. Şimdi bir daha yapayım.*

G : *İlginç.*

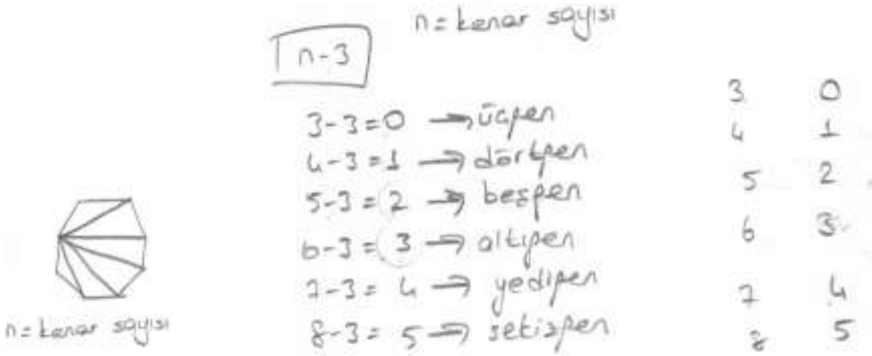
Hale : *Güzelmiş.*

Düşündüğü örüntünün dörtgen, beşgen ve altıgen için doğruluğunu kontrol eden Hale bir de sekizgen çizip aynı örüntünün onda olup olmayacağını araştırırken orada da beş, beş, dört, üç iki, bir, sıfır, sıfır şeklinde bir örüntünün varlığını fark etmiştir. Aynı mantıktan hareket eden Efe ve Hale'nin buldukları bu örüntüden cebirsel bir genellemeye ulaşamayıp tıkanma yaşadıkları görülmüştür. Hale ve Efe'nin fark ettiği örüntü aşağıda ayrıntılı olarak gösterilmiştir:

Tablo 8. Öğrencilerin Köşegen Sayılarına İlişkin Keşfettikleri Örüntü

ÇOKGEN	**SIRASIYLA ÇOKGENİN HER BİR KÖŞESİNDEN ÇIKAN KÖŞEGEN SAYISI**									**TOPLAM**
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**…**	
Dörtgen	1	1	0	0						2
Beşgen	2	2	1	0	0					5
Altıgen	3	3	2	1	0	0				9
Yedigen	4	4	3	2	1	0	0			14
Sekizgen	5	5	4	3	2	1	0	0		20
…										…

Kenar sayısı ile tek köşeden çıkan köşegen sayısı arasındaki ilişkiyi yansıtan Rana’nın verileri düzenlemek için yaptığı listelemenin yanında bir de t-tablosu kullanmayı tercih ettiği görülmektedir. Aşağıda bunlara yer verilmiştir:



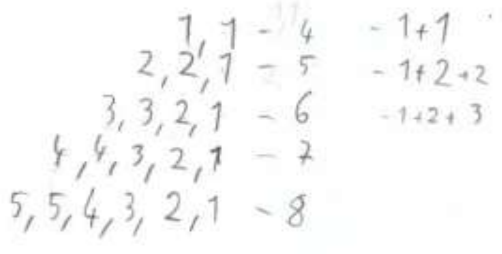
Sayısal ve geometrik yaklaşım bağlamında ele alınan bir diğer kategori, kenar/köşe sayısı ile tüm köşegen sayısını ilişkilendirme olarak belirlenmiştir. Bu kategori kapsamında öğrencilerin ele aldığı yaklaşımlar kat ilişkisi arama, örüntü oluşturma ve kombinasyondur. Örneğin öğrencilerden Nur çokgenlerin köşegen sayılarını belirledikten sonra bu sayılarla çokgenin kenar sayısı arasında bir kat ilişkisi arayamaya yönelmiştir. Aşağıda Nur’un düşüncelerine yer verilmiştir:

Nur : *Altıgenden dokuz var, dörtgende iki var, hmm…*
G : *Ne düşünüyorsun?*
Nur : *Arasında hani bağlantı kurmaya çalışıyorum ama…*
G : *Neyle neyin arasında bağlantı kurmaya çalışıyorsun?*
Nur : *Bunda bu varsa bunda [kenar sayısı ve köşegen sayısını göstererek] bu kadar var.*

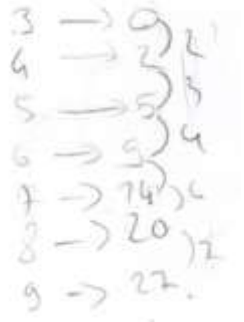
Görüldüğü gibi Nur, kenar sayısına göre köşegen sayısının doğru orantılı olarak artıp artamayacağını düşünmüş ve bu noktada tıkanma yaşamıştır.

Rana’nın ise kenar sayısı ve köşegen sayısı arasında bir ilişki ararken dörtgen için kenar sayısının “yarısı”, beşgen için ise kenar sayısının “kendisi” ifadelerini kullandığı yani bir kat ilişkisi arayışı içinde olduğu görülmektedir.

Üçü yüksek (Hale, Rana ve Efe) biri orta başarı düzeyine sahip olan (Han) toplam dört öğrenci çokgenin köşegen sayısı ile kenar sayısı arasında bir örüntünün varlığını fark edip bunu kullanarak bir genellemeye varmak istemiştir. Bu öğrencilerin buldukları örüntüyü ya listeleme yaparak ya da t- tablosu kullanarak ifade ettikleri görülmektedir. Efe'nin çokgenin kenar sayılarının soluna her bir köşesinden çıkan köşegen sayısını yazarken sağ tarafına da tam olarak tamamlamasa da çokgenin toplam köşegen sayısını yazarak bir listeleme yaptığı yanıt kâğıdından anlaşılmaktadır:



Öğrencilerden Hale, Han ve Rana ise çokgenin kenar sayısı ile köşegen sayısını gösteren bir t-tablosu hazırlamayı tercih etmiş ve çokgenin köşegen sayıları arasındaki artışa odaklanmışlar ancak bu stratejiyi kullanarak herhangi bir genellemeye ulaşamayıp tıkanma yaşamışlardır. Aşağıda Hale ve Rana'nın oluşturduğu t-tabloları görülmektedir:



Hale'nin t-tablosu

Rana'nın t-tablosu

Hale, Han ve Rana t- tablosu düzenleyip köşegen sayıları arasındaki artışa odaklanırlarken Su da bu artışa odaklanmış ancak t-tablosu kullanmayı tercih etmemiştir.

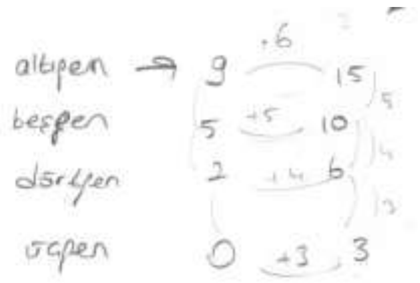
Öğrencilerden $\frac{n.(n-3)}{2}$ genellemesine ulaşmaları beklenen bu soruda kullanılacak yaklaşımlardan bir tanesi de kombinasyondur. Katılımcı öğrencilerden yüksek başarı düzeyine sahip olan bir kişi (Rana) bu stratejiyi kullanmayı tercih etmiştir:

Rana : *Bir, iki, üç. Üç tane evet, aaa hayır üç tane olmuyor. Dört, beş, altı eee bunu kombinasyondan yapsam?*

G : *Kombinasyondan nasıl yapmayı düşünüyorsun?*

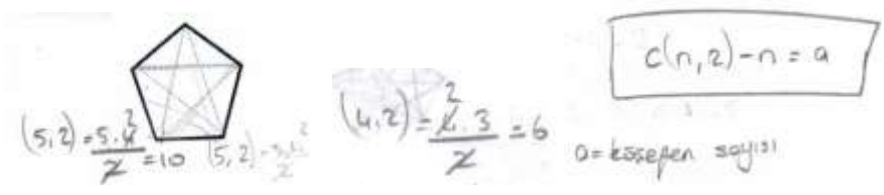
Rana : Altıgenin altı tane köşesi vardır. Benim köşegen çizebilmem için iki tane noktaya ihtiyacım var. Altının ikilisinden düşünürsek eğer 15 tane köşegen çıkar.
G : Peki, emin misin 15 tane olduğundan?
Rana : Deneyeyim. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz.

Öğrenci, bulduğu kombinasyon sonucu ile köşegen sayısı örtüşmeyince bu stratejiyi kullanmaktan vazgeçip farklı bir yöntemle istenilene ulaşmıştır. Araştırmacının yönlendirmesiyle bu stratejiye geri dönen Rana, dörtgen için C(4, 2), altıgen için ise C(6, 2)'lisini hesaplamış, çokgenlerin köşegen sayıları ve bulduğu kombinasyon sonuçlarını içeren aşağıdaki gibi bir tablo oluşturmuştur:



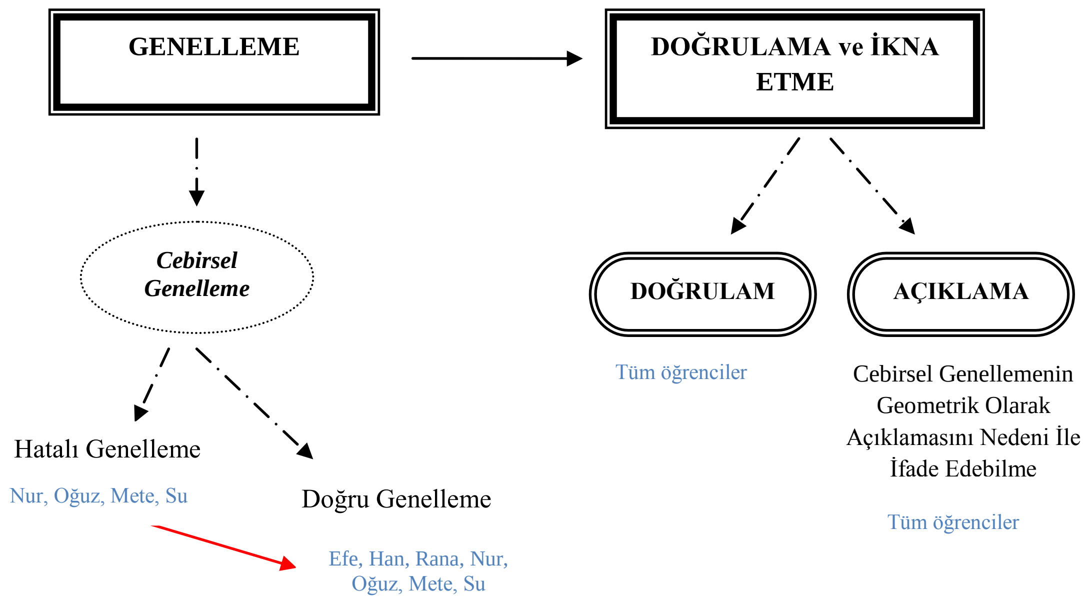
Tablodaki değişkenleri inceleyerek genellemeye ulaşmış ve bunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Rana : Altıgeninin altı kenarı var ve altı fazlası olarak çıkmış. Beşgeninin beş kenarı var ve beş fazlası olarak çıkmış kombinasyon sonucu. Dörtgeninin dört kenarı var. Kombinasyon sonucu bulduğumuz sonucun dört fazlası olarak çıkmış. Üçgenin üç kenarı var, üç fazlası olarak çıkmış.
G : Yani bunu genel kural olarak nasıl ifade edebilirim?
Rana : n'e eğer ben kenar sayısı dersem n'in ikilisi eksi n.



3.3.2. Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme

Genelleme ve doğrulama-ikna etme ana temaları altında ele alınan alt temalar Şekil 17'de sunulmuştur:



Şekil 17. Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Öğrencilerden ikisi yüksek (Efe ve Rana) biri orta başarı düzeyine sahip olan (Han) üçü doğrudan istenilen genellemeye ulaşmışlardır. Biri yüksek (Oğuz) üçü orta başarı düzeyine sahip olan (Nur, Mete ve Su) dördü ise başlangıçta sözel olarak doğru ifade ettikleri genellemeleri cebirsel genellemeye dönüştürürken hata yapmışlar ancak yönlendirme ile örnekler üzerinde kontrol ederken (doğrulama) düzeltme yapıp doğru genellemeye ulaşmayı başarmışlardır. Öğrenciler, değişken atamada zorlandıkları için geometrik olarak açıklayabildikleri genellemeyi cebirsel olarak ifade ederken sorun yaşamışlardır. Hale ise önceki bilgilerinden istenilen formülü hatırlayıp örnek üzerinde doğruluğunu kontrol etmiştir. n.(n-3)'ün ne anlama geldiğini ve neden ikiye bölündüğünü de açıklayabilmiştir. Diğer bir strateji olarak tek köşeden çıkan köşegen sayısı ile çokgenin kenar sayısına bakarak fark ettiği örüntüyü örnekler üzerinde doğrulamış ancak bunu ilerletip cebirsel olarak ifade edememiştir. Bu nokta da öğrencinin özelleştirme aşamasında kalıp cebirsel genellemeye ulaşamadığı ve yaptığı genellemenin sözel boyutta kaldığı söylenebilir.

Bu soruda katılımcı öğrencilerin tamamının bir şekilde istenilen $\frac{n.(n-3)}{2}$ genellemesine ulaştığı belirlenmiştir. Rana ise bu genellemenin yanı sıra C(n,2)-n şeklinde farklı bir strateji kullanarak da genellemeye ulaşmıştır. Cebirsel olarak hata yapmadan doğru genellemeye ulaşan öğrencilerden olan Han,

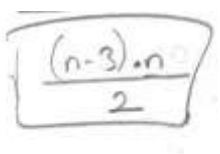
Han : *İşte kenar sayısından üç çıkarıp kenar sayısı ile çarpıyoruz ve ikiye bölüyoruz.*
G : *Tamam işte. Bunu yazabilir misin?*
Han : *[* $\frac{x.(x-3)}{2}$ *yazdı]*

şeklinde düşüncesini açıklamıştır.

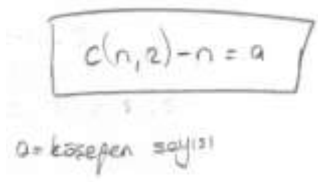
Benzer şekilde Rana'nın da doğrudan cebirsel olarak formülü ifade edip yanıt kâğıdına not aldığı görülmektedir:

G : *Nasıl ifade edebiliriz peki sembolik olarak?*
Rana : *n dediğim kenar sayısı, n eksi üç bir köşeden çıkacak kenar sayısı, bu kenar sayısını ha evet kenar sayısıyla çarpıp neye bölmüştüm? İkiye bölmüştüm. Böyle bir formül çıkıyor.*

Bu açıklamalarının yanı sıra Rana, istenilene kombinasyon kullanarak da ulaşmıştır:



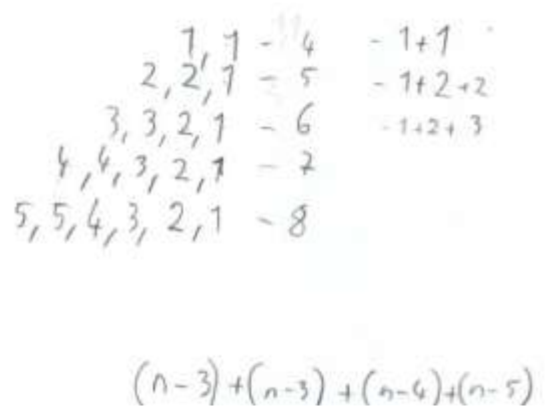
Geometrik olarak açıkladığı genelleme



Kombinasyon kullanarak ulaştığı genelleme

İki stratejiyle farklı genellemelere ulaşan Rana'ya bu iki ifadenin eşitliği hakkında ne düşündüğü sorulduğunda, örnek üzerinden açıklamayı tercih ettiği cebirsel olarak ise bunu kanıtlayamadığı görülmektedir. Öğrenci cebirsel olarak kanıtlayamasa da her ikisinin de örnek üzerinde doğruluğunu gördüğü için iki yanıttan da emin olduğunu ifade etmiştir.

Efe'nin ise çokgenin tek köşesinden çıkan köşegen sayısına odaklanarak ulaştığı genellemeyi "*n eksi üç tane çıkıyor. Her bir köşeden kaç tane kenarı varsa o kadar çarpıyorduk. Bunu da ikiye bölüyorduk. Bu da n kare eksi üç n bölü iki oluyor.*" biçiminde ifade ettiği ve ayrıca cebirsel olarak da başarılı bir şekilde yazdığı görülmektedir. Efe, ikinci bir çözüm olarak çokgenin kenar sayısı ile her bir köşesinden çıkan köşegen sayılarını incelediğinde bir örüntü fark etmiştir. Dörtgenin iki köşesinden bir ve diğer iki köşesinden hiç köşegen çıkmadığını, beşgenin iki köşesinden iki, bir köşesinden bir ve diğer iki köşesinden hiç köşegen çıkmadığını, altıgenin iki köşesinden üç, bir köşesinden iki, bir diğer köşesinden bir ve diğer iki köşesinden hiç köşegen çıkmadığını aşağıdaki gibi not etmiştir:



Efe	*: n eksi üç dedik mesela. Bir köşe altı köşesi var. Altıdan üçü çıkarınca üç, evet, üç. Daha sonra ikinci kenar için de aynı şey dedik. Daha sonraki kenardan iki tane çıktı. Yani altıdan dört çıkartmış olduk. Altıgen için altı eksi iki, dört oluyor. Yine iki oldu bir oluyor. Altıgenin her bir çokgenin ayrı ayrı teker teker kuralını çıkarabilirim; ama ortak kuralı.*

Örüntüyü kullanarak genellemeye ulaşamayan Efe, sadece bildiği yakın adımlar için genel ifadeler yazabileceğini belirtmiştir. Yukarıda da görüldüğü üzere altıgenin her bir köşesinden çıkan köşegen sayılarını kenar sayısına (n) bağlı olarak ifade etmiş, daha ileri gidememiştir. Bu da öğrencinin bu stratejiyi kullandığında özelleştirme aşamasında kalıp genellemeye ulaşamadığını göstermektedir.

Öğrencilerden Mete ise ilk olarak genellemesini n.(n-3) olarak belirlemiş ancak doğruluğundan emin olup olmadığı sorulduğunda ise yaptığı hatayı anlamış ve bunu düzeltme yoluna gitmiştir:

Mete	*: Iı bu noktadan bakalım üç. n eksi üç tane köşegen çıkar bu noktadan. Eee kenar sayısı kadar köşe olduğuna göre de ... n böle bir şey olabilir. n çarpı n eksi üç. [n.(n-3) yazdı]*
G	*:Doğru mu sence?*
Mete	*:Dört eksi üç ay pardon, Beş, iki ...yok olmuyor. Olmaz ama köşegen iki noktayı birden kullandığı için yarısı mı?*

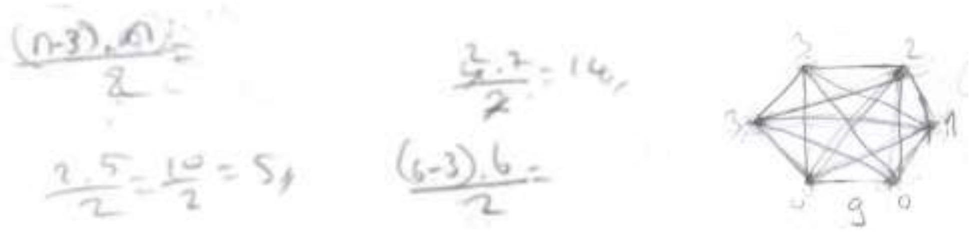
Benzer şekilde Nur ise,

Nur	*: n eksi üç, diye ifade ettiğin şey bize köşegen sayısını verdi, bir köşeden çıkanları.*
G	*: Ama hala henüz tamamına ulaşamadık, değil mi?*
Nur	*: O zaman bir şeyle çarpmamız gerekiyor. Tamamın ulaşabilmemiz için eee iki ile. Hmm evet, iki ile iki ile çarpmamız.*

şeklinde açıklayıp yanıt kağıdına aşağıdaki gibi not almıştır:

Nur da Mete gibi ulaştığı genellemenin doğru olup olmadığını araştırırken hatasını fark etmiş, biraz daha düşündüğünde doğru cebirsel ifadeyi yazabilmiştir.

Genelleme temasına ait bir diğer kategori doğrulama olarak belirlenmiştir. Katılımcı öğrencilerin tümü elde ettikleri cebirsel genellemenin doğruluğunu öncelikle köşegen sayılarını bildikleri çokgenler üzerinde kontrol etmiştir. Nur ve Hale ise bunun yanı sıra yedigen için de hesaplama yapmıştır. Öğrencilerden ikisi yüksek (Rana ve Hale) biri orta başarı düzeyine sahip olan (Nur) üçü, kâğıt üzerine işlem yaparak doğrulama yaparken ikisi yüksek (Efe ve Oğuz) üçü orta başarı düzeyine sahip olan (Han, Mete ve Su) toplam beş öğrenci zihinden birtakım işlemler yapmayı tercih etmiştir. Doğrulama yapan öğrencilerden biri olan Hale'nin yanıt kâğıdına bakıldığında beşgen, altıgen ve yedigen için işlemler yaptığı görülmektedir:



Bu sayısal doğrulamanın yanı sıra Hale, çokgenin her bir köşesinden çıkan köşegen sayısına dair oluşturduğu örüntüden de kontrol etmiştir.

Doğrulama-ikna etme ana teması altında ise cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerin geometrik açıklama yapıp yapamadığına bakılmıştır. Elde edilen veriler analiz edildiğinde öğrencilerin tamamının ulaştığı cebirsel genellemenin geometrik anlamını açıkladığı görülmektedir. Bu öğrenciler, ilk olarak çokgenin bir köşesinden çıkan köşegen sayısına bakıp bunu çokgenin kenar sayısıyla ilişkilendirmişler, daha sonra tüm köşelerden aynı sayıda köşegen çıktığını belirlemişler ve köşegen çizilirken iki tane köşe kullanılacağı için buldukları değerin ikiye bölünmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Sonuç olarak $\frac{n.(n-3)}{2}$ ifadesinin anlamını geometrik olarak açıklayabilmişlerdir. Öğrencilerden Nur'un görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

Nur : *… n çarpı n eksi üç bölü iki, diye düşünüyorum.*
G : *Neden böyle olduğunu düşünüyorsun?*
Nur : *Neden böyle? Zaten bu [n-3'ü gösteriyor] bir köşegenden köşeden çıkan köşegen sayısı.*
G : *Evet.*
Nur : *Eee zaten köşe, kenar sayısı ile köşe sayısı eşit oluyor zaten, diye düşündüm. Bununla bunu [bir köşeden çıkan köşegen sayısı ile köşe sayısını göstererek] çarptım. İkiye bölmemin sebebi de iki kenar, iki köşe arasında gidip gelmesi oldu. Hani benim için öyle diyeyim.*

Öğrencilerin köşegen sayısı probleminde genellemeye ulaşmak için kullandıkları stratejiler ve bu stratejilerden hangileri ile genellemeye ulaştıkları ya da hangilerinin sonucunda tıkanma sürecine girdikleri Tablo 9'da verilmiştir:

Tablo 9. Köşegen Sayısı Probleminde Öğrencilerin Kullandıkları Stratejiler ve Tıkanma Noktaları

<table>
<tr><th colspan="2">SÜREÇ</th><th colspan="3">STRATEJİLER (ATAK)</th><th>BULDUM! / TIKANDIM!</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ÖZELLEŞTİRME</td><td rowspan="3">İLİŞKİ ARAMA-VARSAYIMOLUŞTURMA</td><td colspan="2">Ön Bilgiye Dayalı Kural Yazma (3)</td><td>ATAK 1: Ön bilgi kullanarak istenilen genel kuralı yazma. (3)</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sayısal ve Geometrik Yaklaşım (8)</td><td>Bir Köşeden Çıkan Köşegen Sayısı ile Çokgenin Kenar Sayısını İlişkilendirme (8)</td><td>ATAK 2: Artışa odaklanma.
ATAK 3: Örüntü oluşturma.
ATAK 4: t tablosu oluşturma. (1)
ATAK 5: Listeleme yapma. (3)</td><td>Buldum! (7)

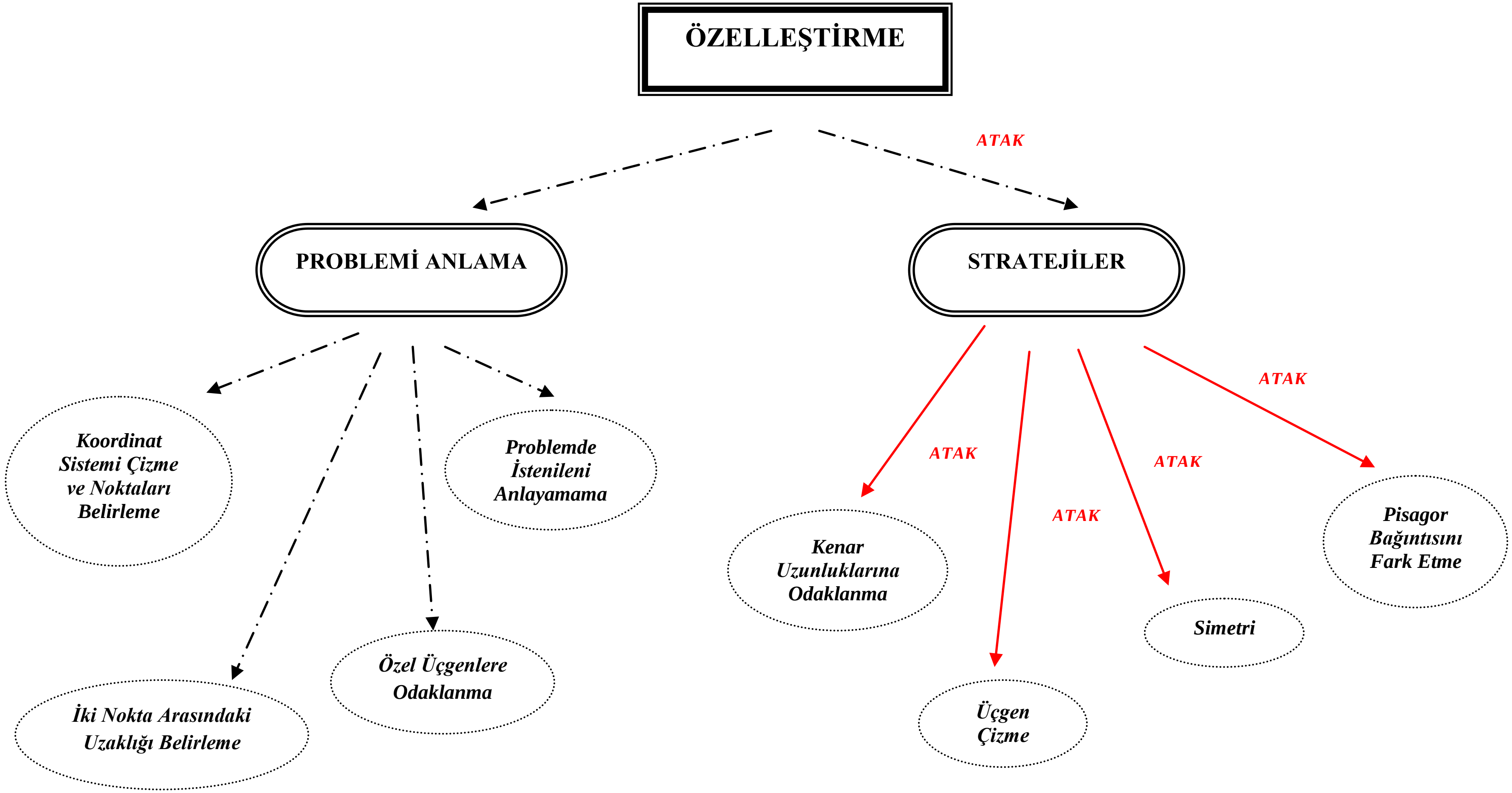
Tıkandım! (3)</td></tr>
<tr><td>Kenar/Köşe Sayısı İle Köşegen Sayısını İlişkilendirme (5)</td><td>ATAK 6: Kat ilişkisi arama.
ATAK 7: Örüntü oluşturma. (4)
ATAK 8: t tablosu oluşturma.
ATAK 9: Listeleme yapma.
ATAK 10: Kombinasyon kullanma.</td><td>Tıkandım! (2)
Tıkandım! (1)
Tıkandım! (3)
Buldum! (1)</td></tr>
</table>

3.4. Dördüncü Soruya Ait Bulgular

Öğrencilere "Bir koordinat sisteminde (4, 0) ve (8, 0) noktalarını belirtiniz. Köşe noktalarından ikisi bu noktalar ve çevresi 12 birim olan bir üçgen düşününüz. Buna göre bu üçgenin üçüncü köşesinin koordinatı için neler söyleyebilirsiniz? Mümkün olan bütün durumları nasıl bulabilirsiniz? Açıklayınız." sorusu sorulmuş, onlardan olası üçüncü noktanın koordinatlarının (4,0) ve (8,0) noktalarını kapsayan yaklaşık bir elips üzerinde olduğunu anlayabilmeleri, bu noktaların hareketliliğini dikkate alabilmeleri ve bir üçgen oluşturmak için kenarlar arasındaki ilişkiyi fark edebilmeleri beklenmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, bu soru özelleştirme ve genelleme olmak üzere iki ana tema altında incelenmiştir.

3.4.1. Özelleştirme

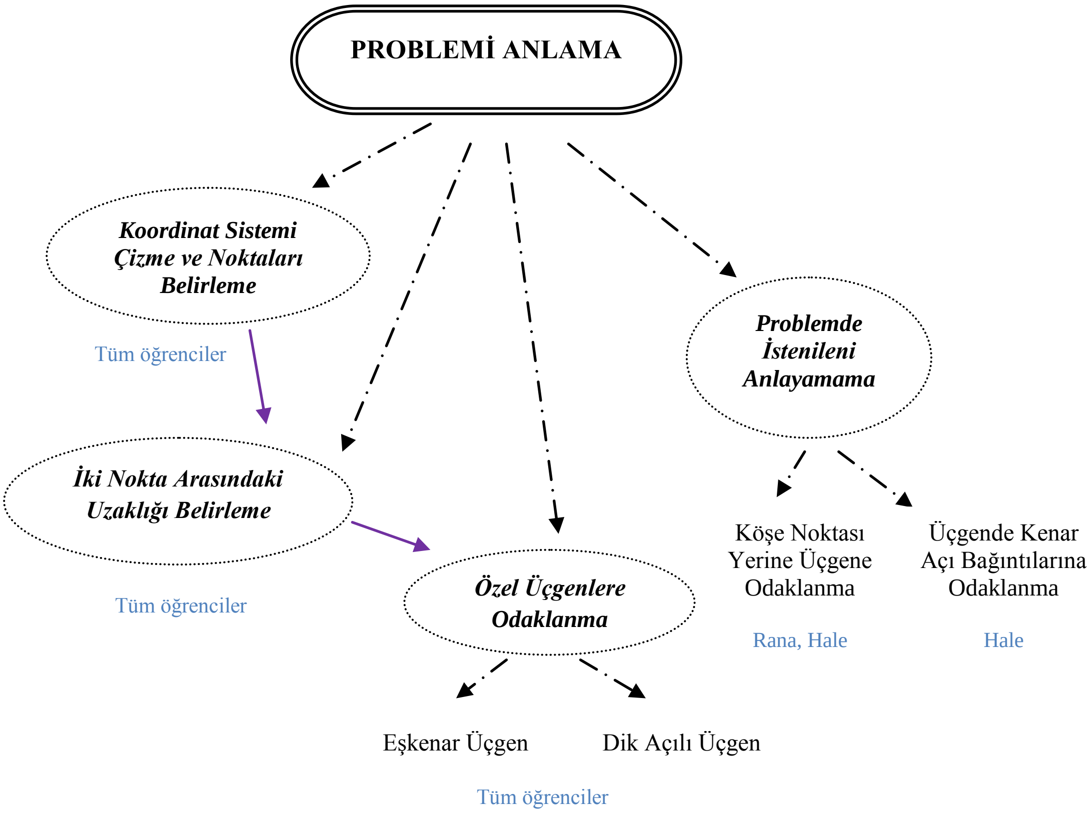
Katılımcı öğrenciler, soruyu daha iyi anlamlandırabilmek için ilk olarak koordinat sistemi çizmiş ve verilen noktaları belirleyerek çizilecek olan üçgenin bir kenar uzunluğunun dört birim, diğer iki kenarın toplam uzunluğunun ise sekiz birim olması gerektiğini ifade etmişlerdir. İlk akıllarına gelen kenar uzunlukları dört, dört, dört birim olan eşkenar üçgen ve üç, dört, beş olan dik üçgendir. Bu bağlamda özelleştirme ana teması, problemi anlama ve ilişki arama-varsayım oluşturma olmak üzere Şekil 18'de görüldüğü gibi iki temaya ayrılmıştır:



Şekil 18.Çevre Probleminde Özelleştirme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Problemi Anlama

Öğrencilerin üçgenin üçüncü koordinatını bulma probleminde anlamaya yönelik olarak kullandıkları yaklaşımlar Şekil 19'da ayrıntılı olarak verilmiştir:



Şekil 19.Çevre Problemini Anlama Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Öğrenci yanıtlarına bakıldığında problemi anlama aşamasında öğrencilerin tamamı ilk olarak koordinat sistemini çizip verilen (4,0) ve (8,0) noktaları belirlemiş ve iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplayarak üçgenin bir kenar uzunluğunun dört birim olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci olan Efe, öncelikle noktaları belirlemiş, sonra ise kenar uzunluğunu hesaplamış ve bunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Efe *: Dörde sıfırmış. Bir, iki, üç, dört. Dörde sıfır noktası burası oluyor. Bu da sekize sıfır. Azıcık daha uzatalım. Altı, yedi, sekize sıfır noktası da burası oluyor. Bu iki nokta oluyor. Köşe noktalarından bu ikisi bu noktalar olacakmış ve çevresi 12 birim olan bir üçgen düşününüz diyor. Bunların arası dört birim.*

G *: Evet.*

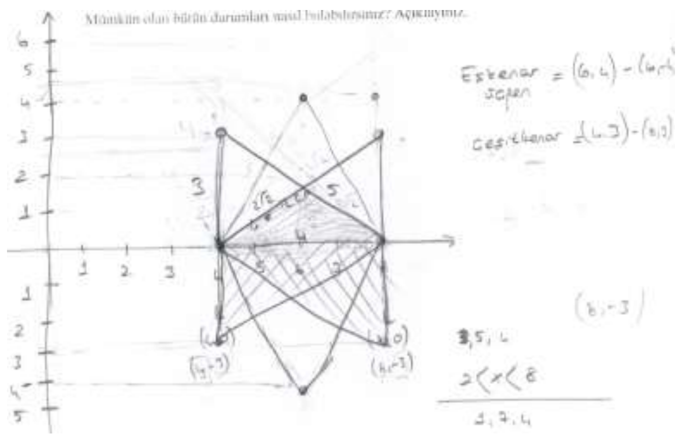
Efe *: Dört birim burası var. Başka bir nokta daha bulacağız ve o noktayla birleştirince bir üçgen çıkacak.*

Problemi anlama aşamasında yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden olan Rana ve Hale'nin problemi tam olarak anlayamadıkları belirlenmiştir. Problemde istenilen üçüncü köşe noktası için olası tüm durumları belirlemedir. Bu öğrenciler, köşe koordinatları belirlemekten daha çok üçgene odaklanmışlar; yanı sıra Hale üçgende kenar açı bağıntılarını da düşünerek bir karmaşıklık yaratmış ve tıkanma sürecine girmiştir. Hale'nin üçgenin rastgele seçtiği kenar uzunluklarına dayalı olarak iç açılarına odaklandığı görüşmesi örnek olarak sunulmuştur:

G *: Mümkün olan bütün durumları nasıl bulabiliriz? Sen şimdi mümkün olan bütün durumları buldun mu?*
Hale *: Dene… eee iki, altıyı bulmadım. İki, altıyı. İki, altı şöyle bir şey, şöyle bir üçgen olabilir mi ki? İki şöyle olur, altı da böyle olur. Altı, iki böyle hani böyle bir üçgen çıkabilir. Neden böyle bir şey düşündüm? Açısı geniş olacak ki altı olsun. Açısı hani daha biraz geniş olacak dört olsun, açısı dar olsun. Dar olacak ki iki olacak… bir, yediye iki, altıya üç, beşe dört. Dördü bulduk. Beş, üç ve şunları, bunları hesaplamayız; çünkü ben bunları şey için yazmıştım. Hani dördüncü bölgede olsaydı bunları da bulurduk diye yazmıştım.*
G *: Anladım.*
Hale *: Ama onları hesaba kattığımız için bunları yazmamıza gerek yok. Toplarsak bence sekiz, 14. 14 durum var diye düşünüyorum.*

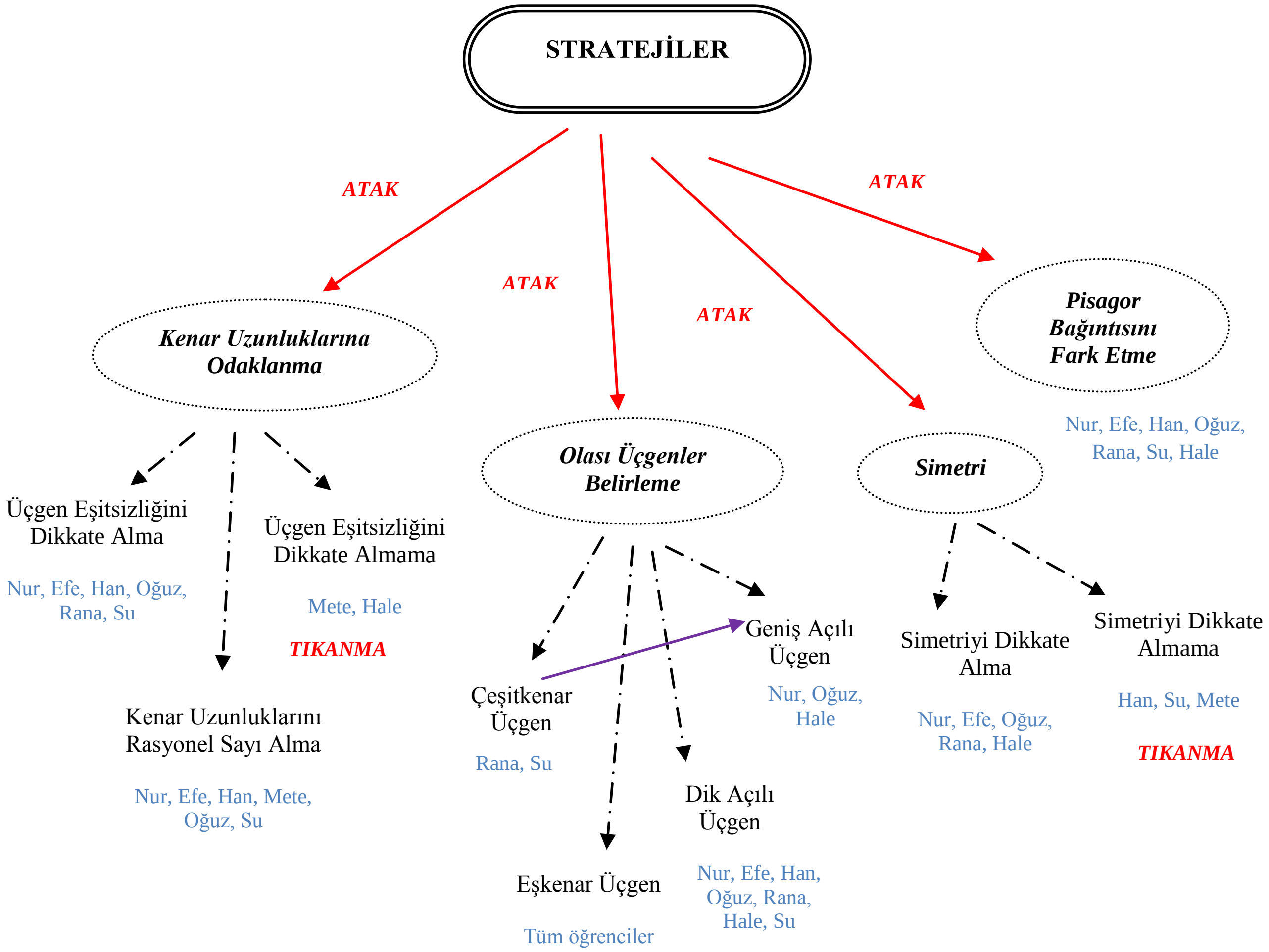
Bu görüşmede görüldüğü üzere Hale, çevre uzunluğu 12 birim ve kenar uzunlukları tam sayı olan tüm üçgenlerin çizilebileceğini kendince düşünmüş ve bu üçgenleri saymıştır. Benzer şekilde Rana'nın da üçgen çeşitleri ve çevre uzunluğunu dikkate alarak problemi algılamaya çalıştığı ve sonuç olarak dört çeşitkenar, iki tane de eşkenar üçgen çizilebileceğini ifade edip yanıt kâğıdına not aldığı görülmektedir:

G *: Soru bize demiş ki mümkün olan bütün durumları bulabilir miyiz? Şimdi sana göre mümkün olan bütün durumlar bu üçgenler mi?*
Rana *: Hmm çeşitkenar ve eşkenarı buldum. Eşkenarlar farklı bir şekilde çizemem. Dik çizmiş olsam dörde dört. Burası dört kök iki olur. Bu da sağlamaz. Ters çevirsem o da olmaz. Koordinatları uymaz. Eşkenarları çizdim. Eee şey çeşitkenarları evet eşkenarları çizdim. Şurada özel üçgen üç birim, üç birim, altı birim. Beş buraya dedik beş de burası 10, 16 birim.*



Stratejiler

Genellemeye giden süreçte öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 20'de ayrıntılı olarak verilmiştir:



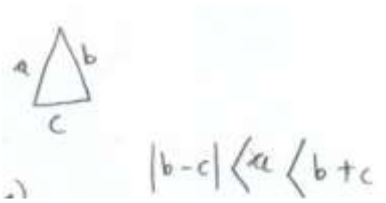
Şekil 20.Çevre Probleminde Kullanılan İlişkilendirmeler

Stratejiler temasının ilk alt teması olan kenar uzunluklarına odaklanma, üçgen oluşturabilmek için gerekli şartların neler olduğunu açıklayabilmeyi ve aynı zamanda uygun değerleri belirleyebilmeyi ifade eder. Yüksek başarı düzeyine sahip (Hale) bir öğrenci dışındaki diğer yedi öğrencinin kenar uzunluklarına odaklandığı görülmüştür.

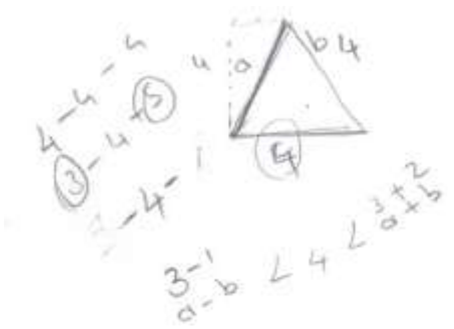
Kenar uzunluklarına odaklanan üçü yüksek (Efe, Oğuz ve Rana) üçü orta başarı düzeyine sahip olan (Nur, Han ve Su) öğrencilerden altısı, çevresi 12 birim olan üçgenleri belirlerken üçgen eşitsizliği kuralını kullanmaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Bu durumu öğrencilerden Han şu şekilde belirtmiştir:

Han : *Diğer iki kenarın sekiz birim olması gerekiyor.*
G : *Evet.*
Han : *Şey ben, şey çizilemez mi? Dört, iki, altı şeklinde.....bu zaten dört, iki, altı olamaz.*
G : *Neye göre belirliyorsun dört, iki, altı olamayacağını?*
Han : *Kenar sayılarına göre işte bu iki kenarın toplamı bu kenardan fazla olması gerekiyordu. Kural vardı. O kuralı düşündüm.*

Efe ve Su üçgen eşitsizliği kuralını sembolik olarak ifade ederken diğer öğrenciler sadece sözel olarak açıklayıp sayısal örnekler vermeyi tercih etmişlerdir. Aşağıda Efe ve Su'nun yazdığı sembolik ifadeler görülmektedir:



Efe'nin ifadesi



Su'nun ifadesi

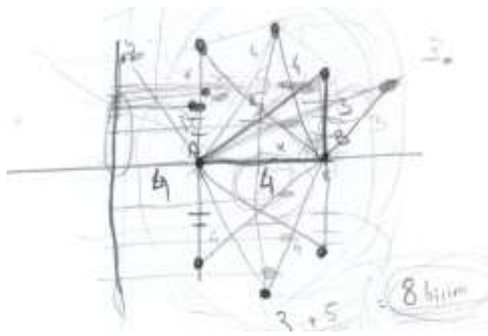
Biri yüksek (Hale) diğeri orta başarı düzeyine sahip olan (Mete) iki öğrencinin üçgen eşitsizliği kuralını dikkate almadıkları saptanmıştır. Mete, üçgenin üçüncü köşesinin koordinatının yerini belirlemeye çalışırken sadece çevre uzunluğunun 12 birim olması gerektiğine odaklanmış, "üçgen eşitsizliği" kuralını düşünmemiştir. Hale'nin ise kuralı hatırlayıp cebirsel olarak ifade etmesine rağmen sonuçta olabilecek üçgenleri belirlerken bu kuralı göz ardı etmesi dikkat çekicidir.

Öğrenciler üçgenin üçüncü köşe noktasının koordinatını belirlerken çevre uzunluğu 12 birim olan üçgenler için kenar uzunluklarını başlangıçta tam sayı olarak almışlar ancak araştırmacının yönlendirmesiyle rasyonel sayı değerlerinin de olabileceğini düşünmeye başlamışlardır. Bununla birlikte yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Rana ve Hale) sadece tam sayıların olabileceğini ifade etmiştir. Hale kenar uzunluklarının rasyonel sayı değerlerinden ondalık gösterim olabileceğini düşünmemiş, Rana ise öncelikle olabileceğini düşünmüş ancak dik üçgenlere odaklandığından Pisagor bağıntısının ondalıklı gösterim için hesaplanamayacağını ifade edip vazgeçmiştir. İkisi yüksek (Efe ve Oğuz) dördü orta başarı düzeyine sahip olan (Nur, Han, Mete ve Su) öğrencilerden altısı ise problemde verilmeyen diğer iki kenar uzunluğunun tam sayı olmak zorunda olmadığını ifade etmişlerdir. Aşağıda Han'ın açıklamalarına yer verilmiştir:

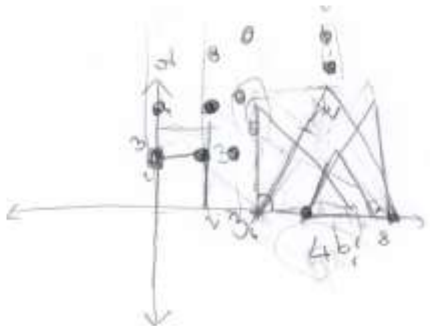
G : *Bir, iki, üç, dört tane belirledin. Diyor ki soru bize mümkün olan bütün durumları nasıl bulabilirsin? Sana göre mümkün olabilecek durumlar bunlar mıdır?*
Han : *Tam sayı olanları düşünürsek…*
G : *Başka nereler olabilir o zaman?*
Han : *Mesela üç,beş gibi….dört,dört-dört,altı filan yapabilirim. Yazayım mı onları?*
G : *Evet.*

Stratejiler temasının diğer bir alt teması, olası üçgenleri belirleme olarak ifade edilmiştir. Bu alt tema çeşitkenar üçgen, eşkenar üçgen, dik açılı üçgen ve geniş açılı üçgen olmak üzere dört kategoriye ayrılmıştır. Koordinat sistemi çizip verilen noktaları sistem üzerine yerleştirdikten sonra olası üçgenler için öğrencilerin akıllarına ilk gelen üçgenin eşkenar üçgen olması dikkat çekicidir. Öğrenciler çevresi 12 birim olacak şekilde bildikleri eşkenar ve çeşitkenar üçgenleri düşünüp onları çizmeye çalışmışlardır. Kenar uzunlukları dörder birim olan eşkenar üçgeni bütün öğrenciler düşünürken Rana ve Su kenar uzunlukları üç, dört, beş birim olan üçgen için de çeşitkenar ifadesini kullanmışlardır. Ayrıca Rana ikizkenar üçgen de aramaya yönelmiş, bir tıkanma sürecine girdikten sonra aslında aradığı üçgenin eşkenar üçgen olduğunu fark etmiştir.

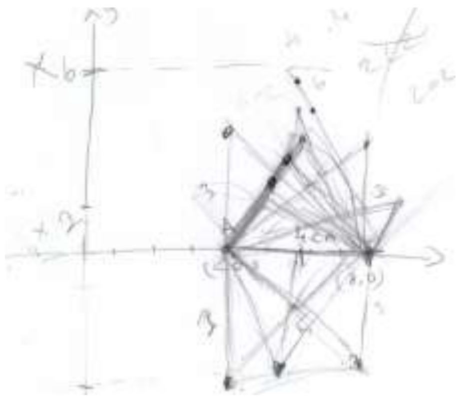
Üçü yüksek (Efe, Oğuz ve Rana) biri orta başarı düzeyine sahip (Han) öğrencilerden dördü dik açılı üçgenler çizebileceklerini düşünürken Efe, Hale, Oğuz ve Nur hem dik hem de geniş açılı üçgenlerin olabileceğini düşünmüşler ve kendilerince üçgenleri çizmişlerdir. Örneğin Oğuz’un yanıt kâğıdına bakıldığında dik açılı ve geniş açılı üçgenlerin çizildiği görülmektedir:



Stratejiler temasına ait bir diğer alt tema simetriyi dikkate almadır. Bu tema olası üçgenlerin x eksenine ve x=6 doğrusuna göre simetrilerini düşünüp çizebilmeyi ifade eder. Katılımcı öğrencilerin tamamı kısmen de olsa belirledikleri noktaların eksenlere göre simetrilerini alarak başka bir üçgen çizmeyi düşünmüşlerdir. Bu öğrencilerden dördü yüksek (Efe, Oğuz, Hale ve Rana), biri orta başarı düzeyine sahip (Nur) beşi belirledikleri bütün noktaların x ekseni ve x=6 doğrusuna göre simetri almaları gerektiğini çok net ifade etmeseler de hissetmişlerdir. Orta başarı düzeyine sahip olan üç öğrenci (Han, Su ve Mete) ise bunu tam olarak algılayamamıştır. Mete, sadece olası üçgen olarak eşkenar üçgeni belirleyip bu üçgenin simetriğini almıştır. Yanı sıra çok fazla üçgen çizilebileceğini de ifade etmiş ancak bu üçgenlerin simetrileri ile ilişki kurmamıştır. Su da Mete’ye benzer şekilde çizdiği üçgenlerden sadece birinin simetriğini düşünmüş, diğerlerini ele almamıştır. Buna bağlı olarak yanıt kâğıdındaki çizimi de aşağıda görüldüğü gibi sınırlı kalmıştır:



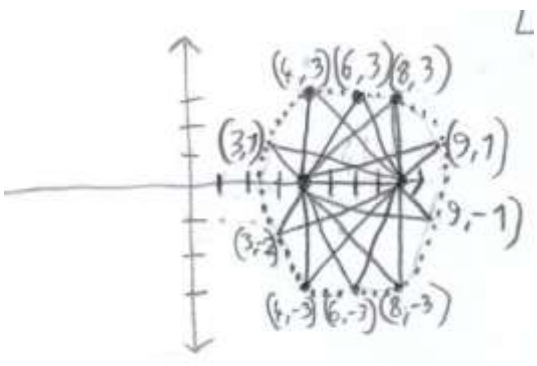
Öğrencilerden Nur, yaptığı çizimi simetri ile ilişkilendirerek aşağıdaki gibi açıklamıştır:



Nur : Burası altı eee yani. Altıdan, altıdan aşağı olur. Eee beş virgül yetmiş beşi de çizebilirim. Şuradan hmm dört evet, bu da oldu. Beş virgül yetmiş beş, iki virgül yirmi beş ve dört üçgen de olur. Bunlar da olabilir. Bunun bir de aşağısı olabilir. Yansıması, birinci ve dördüncü bölgede olacak ve altıdan aşağı olacak diye düşünüyorum.

Genellemeye doğru olarak ulaşan Efe ise düşündüklerini aşağıdaki gibi açıklayıp çizim yapmıştır:

Efe : Bu iki nokta oluyor. Köşe noktalarından bu ikisi, bu noktalar olacakmış ve çevresi 12 birim olan bir üçgen düşününüz diyor. Bunların arası dört birim. Dört birim burası var. Başka bir nokta daha bulacağız ve o noktayla birleştirince bir üçgen çıkacak. Bu üçgenin de çevresi 12 birim olacakmış.
G : Evet, o noktanın neler olabileceğini soruyor bize.
Efe : Evet. Bir sürü nokta çıkar.
G : Neye dayanarak söylüyorsun bunu?
Efe : Mesela dört, bir kenarı dört birim olan üçgenler. Bir nokta daha belirleyeceğiz. O noktanın bu noktaya ve bu noktaya olan uzaklığı toplamı sekiz olacak. Ona göre belirleyeceğim. Mesela şurada bir nokta olabilir. Şurası birazcık daha aşağı olacak üç olur. Üç, üç olarak şurası olabilir mesela. Yüksekliği üç olur burası da beş olur. Pisagor bağıntısından özel üçgende üç, dört, beş olur. Mesela bir üçgen böle çıkabilir. Bir de bunun tam tersi olan bir tane çizilebilir. Mesela burası üç cm olur, burası da beş cm olur. Aynı şey aşağı doğru, eksi tarafa da olabilir.

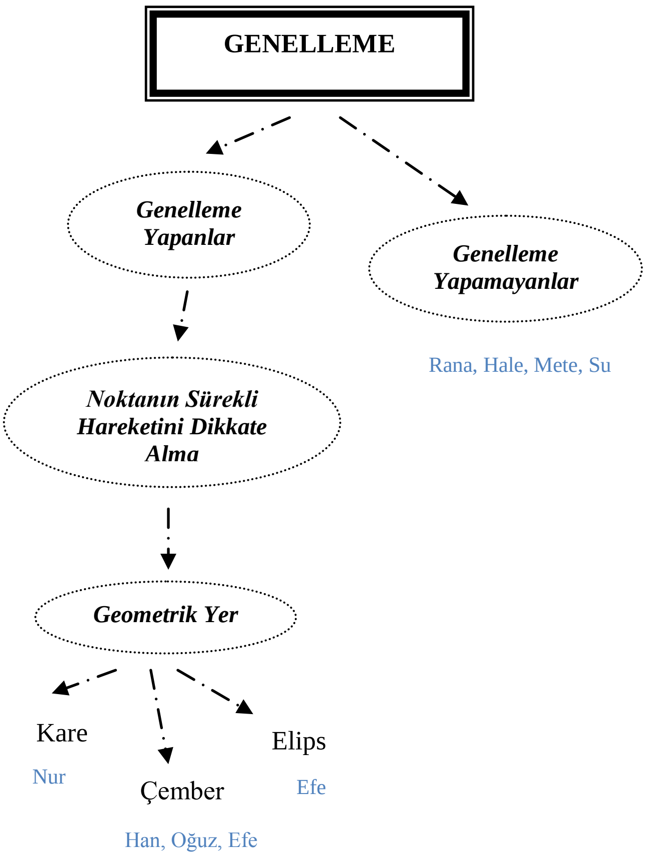


Açıklamalardan anlaşılacağı üzere Efe ilk olarak nokta belirleyip üçgeni çizmiş, daha sonra ise çizdiği üçgenin simetriğini alarak onu da koordinat sistemi üzerinde göstermiştir.

Stratejiler temasına ait bir diğer alt tema, Pisagor bağıntısını fark etmedir. Katılımcı öğrencilerden dördü yüksek (Efe, Oğuz, Rana ve Hale), üçü orta başarı düzeyine sahip olan (Nur, Han ve Su) yedisi çizdikleri üç, dört, beş çeşitkenar üçgeninin aynı zamanda bir dik üçgen olduğunu ve Pisagor bağıntısına dayanarak bunu söylediklerini ifade etmişlerdir.

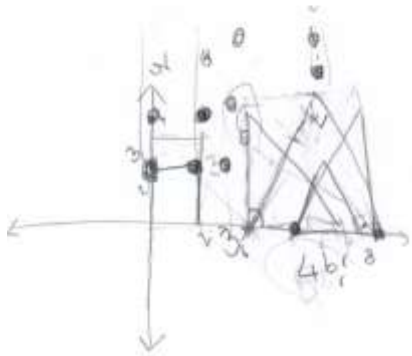
3.4.2. Genelleme

Genelleme ana teması altında belirlenen alt tema ve kategoriler Şekil 21’de verilmiştir. Bu ana tema, genelleme yapanlar ve genelleme yapamayanlar olmak üzere iki alt temaya ayrılmıştır. Genelleme yapanlar kapsamında öğrencilerin hatalı da olsa bir geometrik yerden bahsetmeleri dikkate alınmıştır.



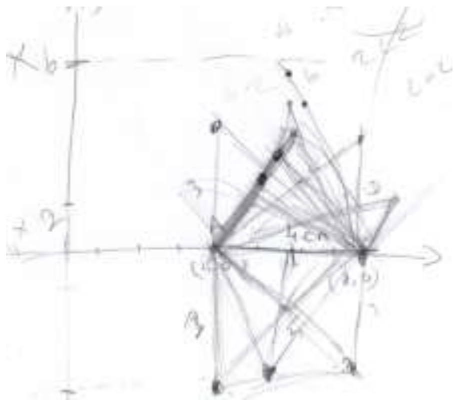
Şekil 21. Genelleme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Öğrencilerden Su ve Nur üçgenin üçüncü köşe noktasının koordinatı için sınırlı sayıda noktayı dikkate almışlardır. Su'nun çizimi ve ifadeleri örnek olarak sunulabilir:



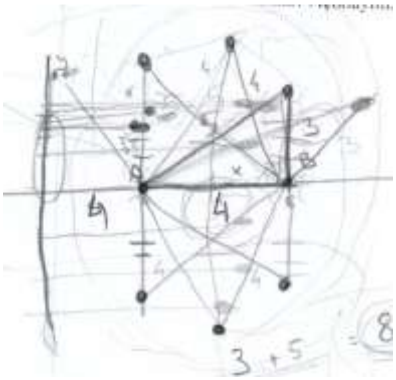
G : Bu soruyla ilgili ne diyorsun son olarak?
Su : Hı şu y ekseninin üstünde olabilir. Şu noktalar olabilir.
G : Başka?
Su : Şu doğrultularda artar diyorum zaten.

Nur, Su'dan farklı olarak belirlediği noktaları birleştirmiş ve bu noktalardan kare oluşabileceğini ifade etmiş ancak emin olamamıştır. Bu noktada Nur'un hatalı genelleme yaptığı söylenebilir. Noktaların yeriyle ilgili yorum yapmaya devam eden Nur, y ekseni doğrultusunda iki ve altı arasında olabileceğini ifade etmiştir:



Nur : Noktalarda bir şey var da.
G : Nasıl bir şey olabilir?
Nur : Bilmiyorum. Hmm şu üç şöyle, şöyle [işaretlediği koordinatları inceliyor], şu noktalar kare oluşturuyor mu diye baktım. Bu noktalar hmm bulamadım. Hmm noktalarla bir örüntü bir şey mi var ki acaba diye düşünüyorum.

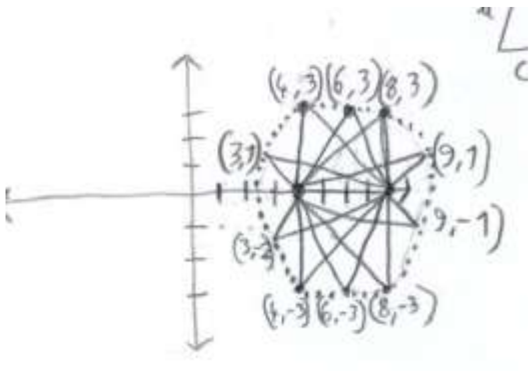
Öğrencilerden Han, Oğuz ve Efe'nin noktaların sürekliliğini bir şekilde hissettikleri anlaşılmaktadır. Örneğin Oğuz aşağıdaki gibi bir çizim yapmış, olabilecek noktaların yaklaşık olarak yerlerini çizdiği çemberle ifade etmiştir. Çember ifadesini kullanan Han ve Oğuz'un hatalı genelleme yaptığı görülmektedir. Oğuz'un sözel açıklamalarına bakıldığında ise



Oğuz : Şu kadar görse. Bunu buraya da getirdiğimizde yani şöyle bir sınır da olabilir. Buradaki sınır burada olabilir, y ekseni de olabilir bu 12 birimi belirleyen sınır.

kenar uzunlukları toplamının 12'yi aşmayacak şekilde olması gerektiğini ifade ettiği ayrıca kendine birinci ve dördüncü bölgelerde yer alan bir sınır belirlediği anlaşılmaktadır. Han da Oğuz' a benzer açıklamalarda bulunmuştur.

Doğru genellemeye ulaşan tek öğrenci olan Efe ise koordinat düzleminde noktaları belirlemiş, bu noktaların bir elips oluşturabileceğini ifade etmiş ve kendine göre elipsi tanımlamıştır. Görüşmesi ve çizimi örnek olarak sunulan Efe'nin diğer bütün öğrencilerden daha ileri düzeyde bir genelleme ortaya koyduğu dikkat çekmektedir.



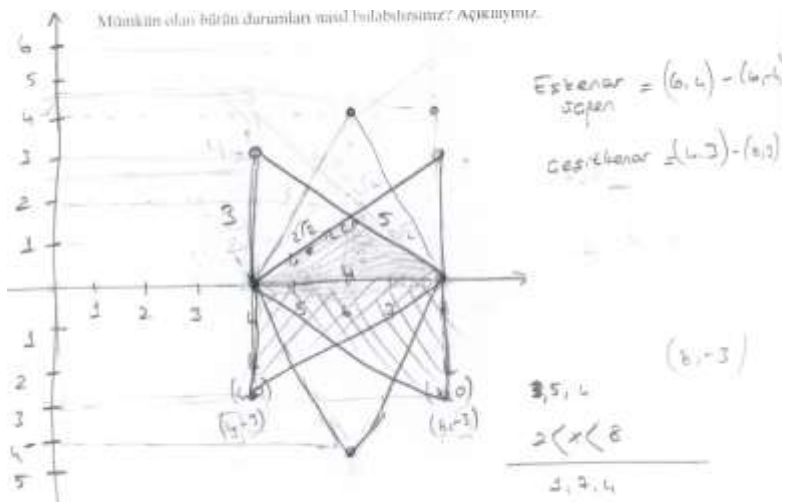
G : Şimdi diğerler köşeler nerelerde olabilir?
Efe : Hmm mesela onlar da şu düzlemde bir yerde olabilir [çiziyor] şöyle, böyle geliyor. Yine böyle [çember gibi bir şey çiziyor] aşağı inebilir.
G : Peki, sence o bize ne belirtir? Aynı şekilde aşağıda da var onlardan diyorsun.

Efe : *Bir daire.*
G : *Daire… Daireden başka ne diyebiliriz?*
Efe : *Daire… Çember olabilir.*
G : *Çember… Başka? Onlara benzer başka şekil?*
Efe : *Elips...*
G : *Elips... Elips olursa nasıl olur peki? Tam olarak tanıyor muyuz o şekli?*
Efe : *Yani hafiften dairenin birazcık daha basık hali gibi.*
G : *Çok güzel.*

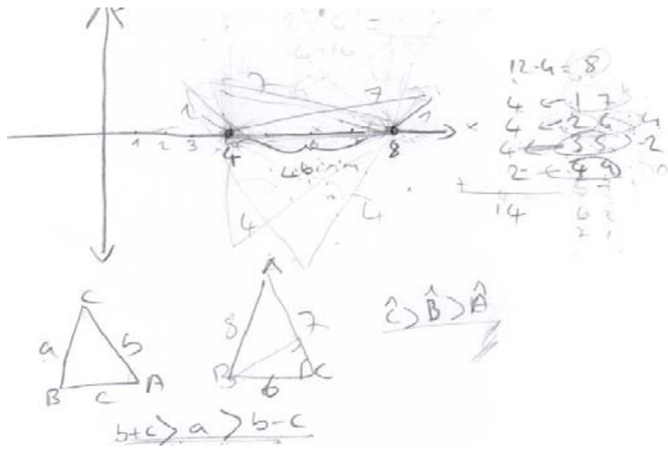
Bu problemde ikisi yüksek (Rana ve Hale), biri orta başarı düzeyine sahip olan (Mete) toplam üç öğrencinin ise genelleme yapmakta oldukça zorlandıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden Rana ve Hale nokta belirlemekten daha çok üçgen odaklı düşündükleri için sınırlı sayıda nokta olabileceğini düşünmüşler ve bu noktalarla ilgili bir genellemeye ulaşamamışlardır. Öğrencilerden Mete ise sadece iki tane eşkenar üçgen çizebilmiş ve aşağıdaki açıklamaları yapmıştır:

Mete : *Yani şu iki üçgenden kesin eminim ama diğerleri için bir şey söyleyemeyeceğim.*
G : *Anladım, bir sayı verebilecek misin? Çoktur dedin.*
Mete : *Evet, çünkü tam sayı olmak gibi bir zorunluluğu olmadığı için yani sadece iki tam sayı arsında çok fazla şey olabilir.*

Rana, Mete'den biraz daha ileri giderek dört tane çeşitkenar, iki tane de eşkenar üçgen olabileceğini düşünüp aşağıdaki gibi çizim yapmıştır:



Hale başlangıçta üçgen eşitsizliğinin farkında olmasına rağmen sonuçta bu kuralı dikkate almamıştır. Bu durum yaptığı listelemeden de anlaşılmaktadır. Hale'nin de Rana gibi üçgenlere odaklandığı için bu noktalarla ilgili bir genellemeye varamadığı özelleştirme aşamasında kaldığı düşünülmektedir. Hale'nin kâğıdı örnek olarak sunulabilir:



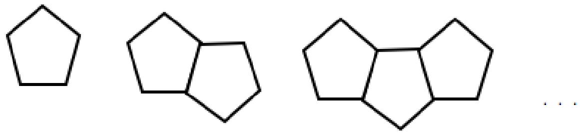
Öğrencilerin çevre probleminde genellemeye ulaşmak için kullandıkları stratejiler ve bu stratejilerden hangileri ile genellemeye ulaştıkları ya da hangilerinin sonucunda tıkanma sürecine girdikleri Tablo 10'da verilmiştir:

Tablo 10. Çevre Probleminde Öğrencilerin Kullandıkları Stratejiler ve Tıkanma Noktaları

SÜREÇ		STRATEJİLER (ATAK)		BULDUM! / TIKANDIM
ÖZELLEŞTİRME	**İLİŞKİ ARAMA-VARSAYIM OLUŞTURMA**	***Kenar Uzunluklarına Odaklanma (8)***	**ATAK 1:** Üçgen eşitsizliğini dikkate alma. Üçgen eşitsizliğini dikkate almama. (2)	Tıkandım!
			ATAK 2: Kenar uzunluklarını rasyonel sayı alma. (6)	
		Olası Üçgenler Belirleme (4)	**ATAK 3:** Çeşitkenar üçgen çizme. (2)	
			ATAK 4: Eşkenar üçgen çizme. (8)	
			ATAK 5: Dik açılı üçgen çizme. (7)	
			ATAK 6: Geniş açılı üçgen çizme. (3)	
		Simetri (5)	**ATAK 7:** Simetriyi dikkate alma. (5) Simetriyi dikkate almama. (3)	Tıkandım!
		Pisagor Bağıntısını Fark Etme (7)	**ATAK 8:** Pisagor bağıntısını fark etme.	

3.5. Beşinci Soruya Ait Bulgular

Öğrencilere beşinci soru kapsamında bir şekil örüntüsü verilmiştir. Bu doğrultuda "Kenar uzunluğu 5 cm olan bir düzgün beşgenden her defasında yanına birer eklenerek aşağıdaki gibi bir beşgen grubu oluşturuluyor.



Çevresi 295 cm olan bir beşgen grubu elde etmek için kaç tane beşgen yan yana konulmalıdır?" sorusu sorulmuş, onlardan n şekil gruplarının kenar sayısı olmak üzere,

$(3n + 2).5$=Çevre ya da

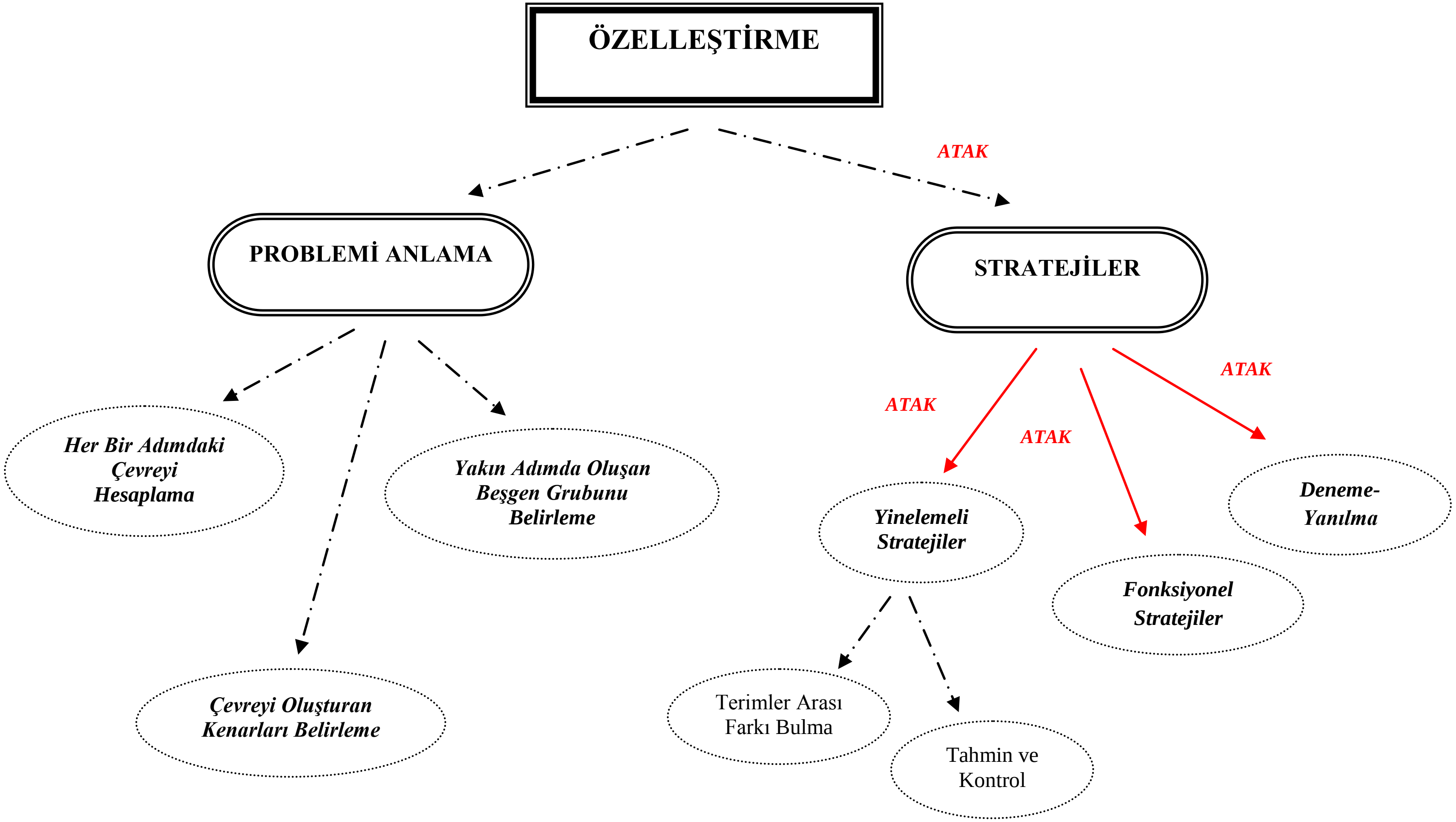
n beşgen sayısı (adım sayısı) olmak üzere;

$(15n+10)$=Çevre

şeklinde genel ifadelere ulaşabilmeleri beklenmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda bu soru özelleştirme, genelleme ve doğrulama-ikna etme olmak üzere üç ana tema altında incelenmiştir.

3.5.1. Özelleştirme

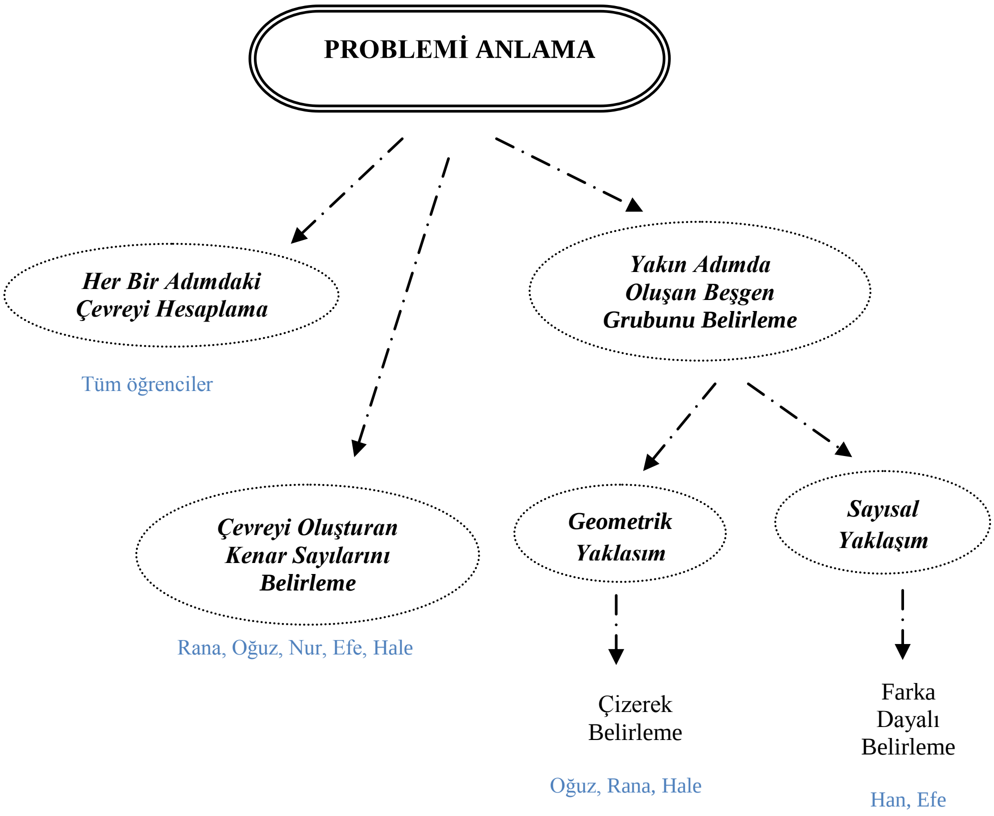
Probleme ilişkin öğrenci yanıtları incelendiğinde öğrencilerin istenilen genellemeye ulaşmak için öncelikle verilen örnekleri inceledikleri, ardından ise dördüncü adımı çizdikleri görülmüştür. Her bir adımdaki çevrenin uzunluğunu hesaplayan öğrencilerin bu sayılar arasında bir ilişki aradıkları ve varsayım oluşturdukları belirlenmiştir. Bu bağlamda özelleştirme ana teması problemi anlama ve stratejiler olmak üzere Şekil 22'de görüldüğü gibi iki temaya ayrılmıştır:



Şekil 22. Beşgen Grubu Oluşturma Probleminde Özelleştirme Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

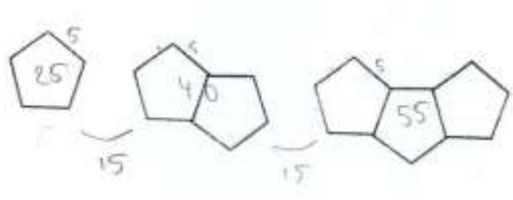
Problemi Anlama

Öğrencilerin çokgen gruplarının çevrelerini bulma probleminde anlamaya yönelik olarak kullandıkları yaklaşımlar Şekil 23'te ayrıntılı olarak verilmiştir:

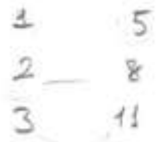


Şekil 23. Beşgen Grubu Oluşturma Problemini Anlama Sürecinde Kullanılan Yaklaşımlar

Problemi okuyan öğrencilerin soruyu daha iyi anlamlandırmak için ilk olarak her bir adımdaki çevre uzunluğunu hesaplama, çevreyi oluşturan kenar sayılarını ve yakın adımda oluşan beşgen grubunu belirleme gibi üç farklı süreçten geçtikleri görülmektedir. Katılımcı öğrencilerin tamamının soruyu okuduklarında verilen şekil gruplarının çevrelerini (25, 40, 55,...) hesaplamaya yöneldiği belirlenmiştir. Örneğin Mete'nin aşağıda verildiği gibi şekil gruplarının çevrelerini hesaplayıp üzerlerine not ettiği görülmektedir:



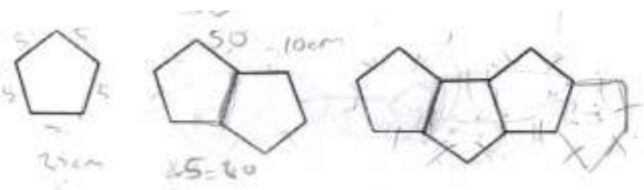
Dördü yüksek, biri orta başarı düzeyine sahip toplam beş öğrenci (Rana, Oğuz, Nur, Efe ve Hale) çevreyi oluşturan kenar sayılarını belirlemişlerdir. Örneğin Rana aşağıda görüldüğü gibi bir t tablosu oluşturmuştur:



Katılımcı öğrencilerden beşi verilen adımları inceledikten sonra düşüncelerinden emin olmak için dördüncü adımı belirlemeye yönelmiştir. Bu belirlemeyi yaparken biri yüksek ve biri orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Efe ve Han) çevreler arasındaki artış miktarından yararlanarak hesaplama yapmış, yüksek başarı düzeyine sahip üç öğrenci de (Oğuz, Rana ve Hale) dördüncü adımı çizerek belirlemeyi tercih etmişlerdir. Örneğin Efe,

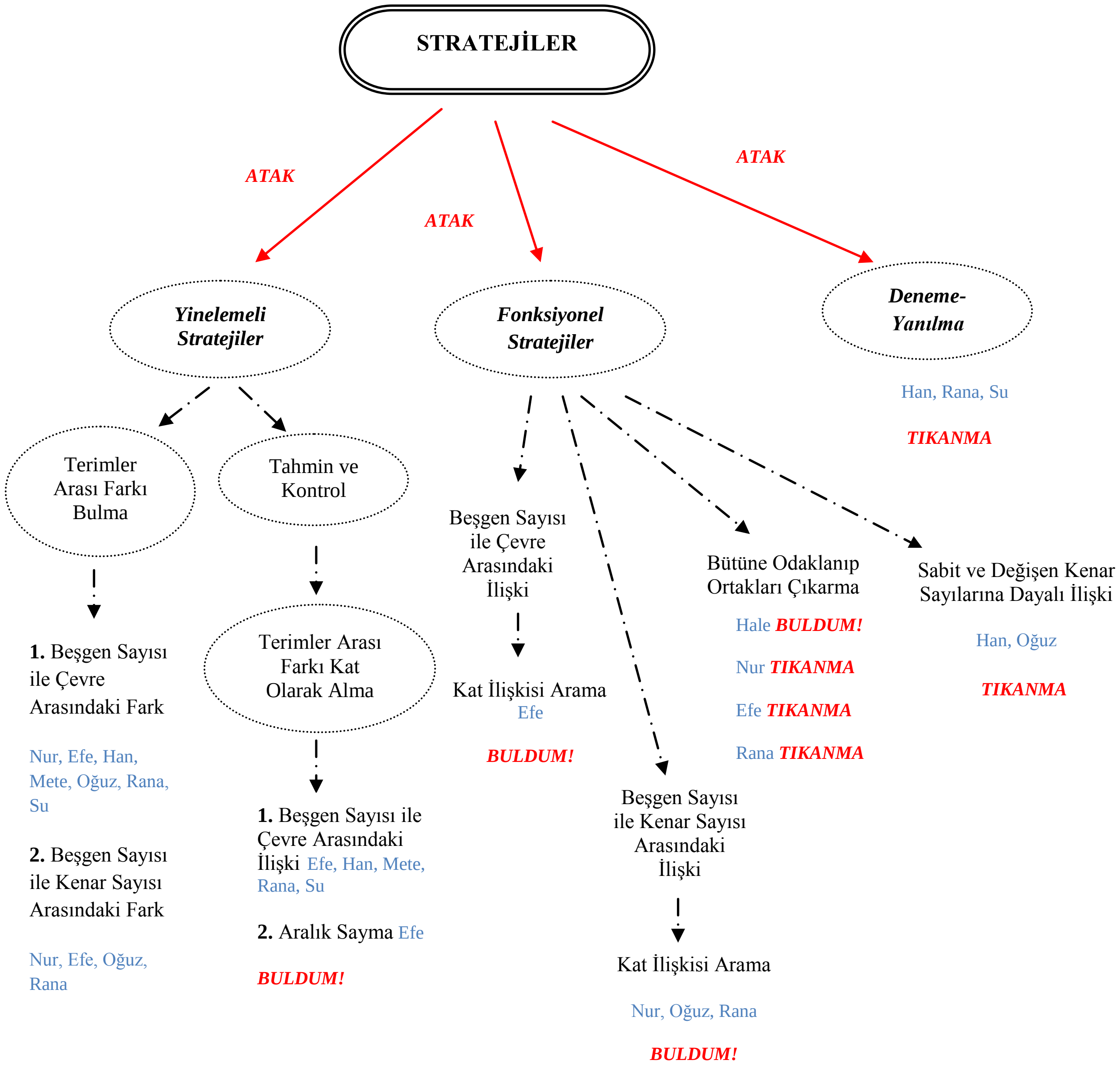
Efe : *Çevresi 295 cm olan bir beşgenler grubu elde etmek için kaç beşgen yan yana konulmalıdır? Diye soruyor. Böyle, böyle 15 artarak gidiyor. Tabi birinci adımda 25 cm, ikinci adımda 25 artı 15, üçüncü adımda 25artı 15 artı 15, dördüncü adımda 25 artı 15 artı 15 artı 15 bu böyle gidiyor.*

şeklinde çizim yapmadan hesaplamalar yaparken Hale'nin çizim yapmayı tercih ettiği aşağıda görülmektedir:



Stratejiler

Şekil gruplarını inceleyip çevre uzunluklarını belirleyen öğrenciler bunlar arasında ilişki aramaya yönelmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 24'te ayrıntılı olarak verilmiştir:

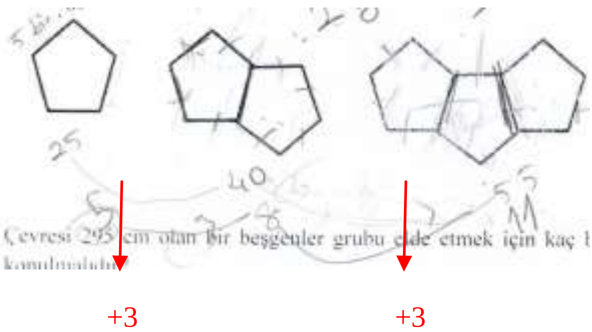


Şekil 24. Beşgen Grubu Oluşturma Probleminde Kullanılan İlişkilendirmeler

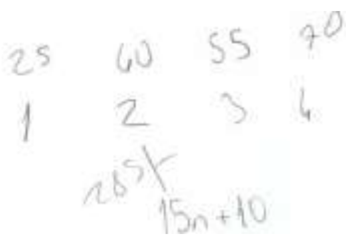
Stratejiler temasının ilk alt teması olan yinelemeli stratejiler, örüntünün ardışık terimleri arasındaki ilişkinin (bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme) araştırılmasını ifade eder. Bu alt tema terimler arası farkı bulma ve tahmin-kontrol olmak üzere iki kategoriye ayrılmıştır. Üçü yüksek (Efe, Rana ve Oğuz), dördü orta başarı düzeyine sahip (Nur, Han, Mete ve Su) toplam yedi öğrenci yinelemeli stratejilerden birini kullanmıştır. Bu yedi öğrencinin yinelemeli stratejilerden öncelikle terimler arası farkı bulmaya yöneldiği görülmektedir. Orta başarı düzeyine sahip olan üç öğrenci (Han, Mete ve Su) sadece beşgen gruplarının çevre uzunlukları arasındaki artı

15’lik farkı bulurken biri orta (Nur), üçü yüksek başarı düzeyine sahip (Efe, Oğuz ve Rana) toplam dört öğrenci artı 15’lik farkın yanı sıra şekil gruplarının çevresini temsil eden kenar sayıları arasındaki artı üçlük farkı da bulmuştur. Beşgen gruplarının dıştaki kenar sayılarını belirleyip bunlar arasındaki farkın artı üç olduğunu ifade eden öğrencilerden olan Nur bunu Mete gibi şekil üzerinde de göstermiştir:

Nur : *Eee beş tane kenarı var. Dışarı bakan burada sekiz tane var. Burada 11 tane var eee bunlar da üç, üç artıyor.*



Yinelemeli stratejilerden olan tahmin ve kontrol, örüntünün ardışık terimleri arasında bir ilişki arama olarak tanımlanır (Tanışlı ve Köse, 2011). Bu kategoride terimler arası farkı kat olarak alma ele alınmıştır. Katılımcılardan ikisi yüksek (Efe ve Rana), üçü orta başarı düzeyine sahip (Han, Mete ve Su) toplam beş öğrencinin her bir adımdaki beşgen grupların çevre uzunluğu (15n+10) arasında kat ilişkisi aradıkları belirlenmiştir. Örneğin Han,



Han : *Hepsi 15, 15 artıyor.*
G : *Tamam, ne güzel bunu da söyledin.*
Han : *[birden 15n+10 yazdı]*
G : *Bu nedir şimdi?*
Han : *İçimden geldi; ama oluyor mesela ikiyle 30 artı 10, 40. Üçle olduğu zaman 45 artı 10, 55. Dörtle olduğu zaman 40, 60 artı 10, 70.*
G : *Evet, peki, bunu nerden buldun nasıl buldun? Bana onu anlat.*
Han : *Mesela 15, 15 arttığı için 15n kullandım. İlk terimi bulmak için de işte ona ekliyorduk veya çıkarıyorduk işte ekleyerek de 25 buldum. İlk*

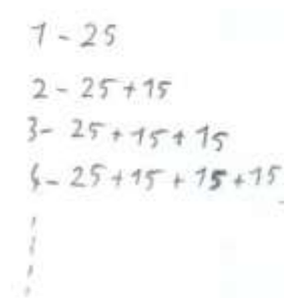
terimi bu şekilde buldum. Diğer n yerine de katsayıları yazarak diğerlerini buluyoruz.

yukarda görüldüğü gibi bir tablo yapmış, beşgen grupları arasındaki 15'lik artışı kat olarak belirleyip 15n yazmış ve 24, 55 ve 70'i elde etmek için gerekli olan sayıyı zihninden hesaplayarak 15n+10 ifadesini yazmıştır. Mete'nin benzer açıklamaları örnek olarak sunulabilir:

Mete : *Bunlar arasında nasıl bir fark var? Beş..15 artıyor uzunluğu. Bu da 15 artıyor uzunluğu. Bu da 15 artıyor.*
G : *Bu artış neyden kaynaklı?*
Mete : *Yeni eklenen beşgenden dolayı. beş, 40, 25cm .. Örüntü mü, fraktal mı? Örüntü. 15n artı 10 olsa evet, örüntüyü sağlıyor mu? Sağlıyor.*
G : *Peki, bu 15n artı 10 nedir? Neye göre yazdın sen bunu?*
Mete : *Eee artış 15. Örüntü kuralına göre. Öğrendiğimiz örüntü kuralına göre yazdım.*

Bu açıklamalardan da anlaşılacağı üzere Mete şeklin yapısını incelemek yerine şekil gruplarının çevre uzunluklarını sayısal bir örüntüye dönüştürüp aradaki artış miktarından yararlanarak doğru ilişkiyi ifade etmiştir.

Efe ise probleme diğerlerinden farklı bir şekilde yaklaşmış ve yinelemeli stratejilerden olan "aralık sayma" stratejisini kullanmıştır. Aralık sayma stratejisi, örüntünün ilk terimine uzak adıma kadar olan terimler arası sabit farkın çarpılarak eklenmesi şeklinde tanımlanır (Tanışlı ve Köse, 2011). Bu stratejiye ilişkin Efe'nin ifadeleri ve yaptığı listeleme örnek olarak sunulabilir:



Efe : *Çevresi 295 cm olan bir beşgenler grubu elde etmek için kaç beşgen yan yana konulmalıdır, diye soruyor. Böyle, böyle 15 artarak gidiyor tabi. Birici adımda 25 cm, ikinci adımda 25 artı 15, üçüncü adımda 25 artı 15 artı 15, dördüncü adımda 25artı 15 artı 15 artı 15. Bu böyle gidiyor.*
G : *Hep ilk şekle eklenenleri yazdın galiba burada.*

Efe : Evet, bize 295'i soruyor. Yo, pardon, burası 295 olduğunda burası kaç olur, diye soruyor. Kaçıncı adım olduğunu, ya burada bir aritmetik dizi var.

Stratejiler temasının diğer alt teması olan fonksiyonel stratejiler, girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişki (şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma) arama olarak tanımlanır (Ley, 2005'ten akt Tanışlı ve Köse, 2011). Katılımcı öğrencilerin yanıt kâğıtları incelendiğinde dördü yüksek (Rana, Efe, Hale ve Oğuz) ve ikisi orta başarı düzeyine sahip olan (Nur ve Han) toplam altı öğrencinin fonksiyonel strateji kullandığı saptamıştır. Bu alt tema beşgen sayısı ile çevre uzunluğu arasındaki ilişki (15n+10), beşgen sayısı ile çevreyi temsil eden kenar sayısı arasındaki ilişki (3n+2), sabit ve değişen kenar sayılarına dayalı ilişki ve bütüne odaklanıp ortakları çıkarma olmak üzere dört kategoriye ayrılmıştır.

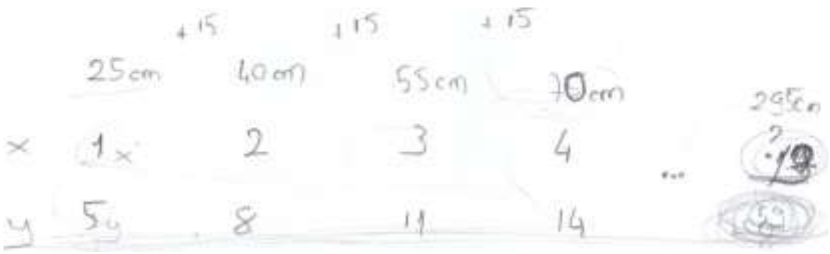
Fonksiyonel stratejiler alt temasına ait bir kategori olarak ele alınan beşgen sayısı ile çevre arasında bir kat ilişkisi (15n+10) arama, öğrencilerden sadece Efe tarafından kullanılmıştır. Efe yinelemeli ilişkiden yola çıkmış ve sonrasında bunu adım sayısı ile ilişkilendirerek istenilen ifadeye aşağıdaki gibi ulaşmıştır:

Efe : … Mesela herhangi bir adım, mesela dördüncü adım bir eksiğinin 15 katı kadar artıyor ve en baştaki 25 ekleniyor
G : Evet.
Efe : Yine aynı mantıkla gidilirse üçte de aynı şekilde bir eksiği iki. İki tane 15 çarpılıyor; pardon, toplanıyor ve üzerine 25 ekleniyor. Birinci şekildeki sayıya 295'i cm'yi soruyor. 295'ten 25'i çıkarırım yani tam tersine giderim.

n = Beşgen sayısı

$15.(n-1)+25$

Katılımcı öğrencilerden ikisi yüksek (Oğuz ve Rana), biri orta başarı düzeyine (Nur) sahip toplamda üç öğrenci beşgen sayısı ile çevreyi temsil eden kenar sayısı arasında ilişki (3n+2) aramayı tercih etmiştir. Öğrenciler şekil gruplarının geometrik yapılarını analiz ederek adım sayısına bağlı bir ifade yazmaya çalışmışlardır. Örneğin Oğuz aşağıda verildiği gibi beşgen sayısı, beşgen gruplarının kenar sayısı ve beşgen gruplarının çevre uzunluğunu içeren bir tablo hazırlamıştır:

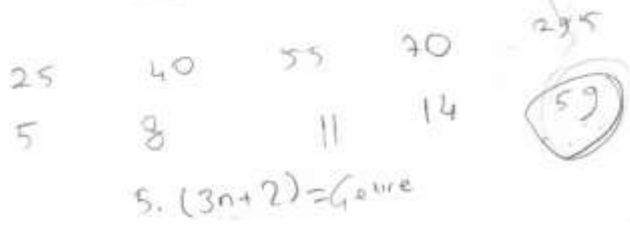


G : Evet, nasıl ilerlemeyi düşünüyorsun?
Oğuz : Şimdi şöyle kaçıncı adım olduğunu vermemiş. O yüzden çevre uzunluğundan şeye inebilirim… Dışarıda kaç kenar kaldığını bunu beşe bölerek bulabilirim. 295 bölü beşten 59.

Oğuz, şekli analiz ederek beşgen gruplarının çevre uzunlukları ile kenar sayıları arasındaki beş kat ilişkisini fark edip istenilen adımdaki beşgen grubunda 59 kenar olması gerektiğini belirlemiş ve tablosundaki soru işaretli yere not etmiştir. Yine adım sayısı ile beşgen gruplarının kenar sayıları arasındaki ilişkiyi keşfedip aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Oğuz : Üç x artı iki yaparak dışarıda kaç kenar kaldığını bulabiliyorum.
G : x kim?
Oğuz : Kaçıncı adım olduğu. Beşgen sayısı. Yani burada 19'u bilmiyorduk. Buraya 19 koyarak bulabiliriz.
G : Peki, şundan çevreye nasıl gideceğim?
Oğuz : Üç x artı iki eşittir y, çarpı beş.
G : Gerek var mı iki tane bilinmeyen kullanmaya?
Oğuz : Hayır.[(3x+2).5=295 yazdı] O zaman üç x artı iki eşittir 59 olmuş oluyor ve buradan 59.

Benzer şekilde Nur da şekli analiz ederek beşgen gruplarının çevre uzunlukları ile kenar sayıları arasındaki beş kat ilişkisini fark etmiş ve aşağıdaki gibi bir tablo oluşturmuştur:



Nur : Ya bunun buna bölümü hep beş oluyor mesela. Çevresi 40. Sekiz ıı
G : Neden öyle oluyor peki?
Nur : Şey olabilir mi? Aslında mesela 295'i neye bölersem. Bir 295'i beşe böleyim ben. 59.

G : Bu 59 neyi ifade eder sana acaba?

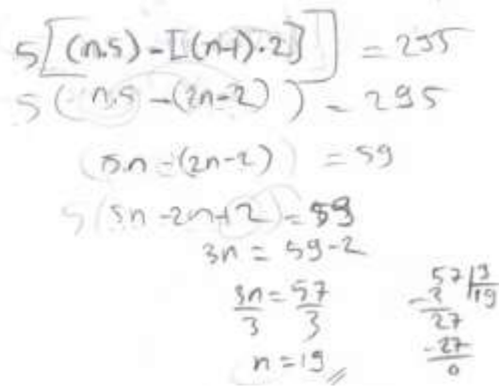
Nur : Bu 59 dışarıya bakan kenar sayısı diye düşündüm; çünkü bu bunun beşe bölünmüş hali bu da bunun beşe bölünmüş hali… hıı dışarı bakan kenar sayısını buluyorum; ama bunu nasıl beşgene çevireceğimizi bulamadım. 59 tane.

G : Bunun üzerinde düşün.

Nur : İki tane, burada sekiz tane. Üç tane. Burada kaç tane bakıyordu? 11 tane evet, 11 tane. Hmm üç katının iki fazlası. Evet, üç katının iki fazlası. İki mi? Bir bakayım. Evet, ikisi içinde ortak oluyor.

Nur çevreyi oluşturan kenar sayısı ile beşgen sayısı arasında bir ilişki kurarak 3n+2 şeklinde genel bir ifade ortaya koymuş ve çevreye ulaşmak için ise bunu beş ile çarpmıştır.

Fonksiyonel strateji kapsamında kullanılan bir diğer yaklaşım şeklin bütününe odaklanıp ortak kenarları çıkarma olarak belirlenmiştir. Bu bağlamda diğer öğrencilerden farklı olarak üçü yüksek (Efe, Rana ve Hale), biri orta başarı düzeyine sahip (Nur) toplam dört öğrenci, beşgenleri ayrı ayrı düşünüp çevre uzunluklarını hesaplamış (2.adım 50, 3. adım 75 şeklinde) daha sonra ise aradaki ortak kenarları çıkartmayı tercih etmiştir. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Efe ve Hale istenilen genellemeye ulaşırken Rana değişken atamada sorun yaşadığı için bir kısmına kadar gelebilmiş, Nur ise sadece sayısal olarak hesaplayıp bırakmıştır. Genellemeye ulaşan Hale bütünden (beşgenleri birleşik düşünmeyip) ortak kenarları (2n-2) çıkararak çevreye dâhil edilecek kenar sayısını bulmuş ve bunun beş katını alarak çevreye ulaşabileceğini düşünmüştür. Bunu cebirsel olarak başarılı bir şekilde ifade edebildiği de görülmektedir:



Benzer şekilde Efe beşgen sayısına n değişkenini atamış ve doğrudan çevre uzunluğu üzerinden giderek aşağıdaki ifadeyi yazmıştır:

$$25n - 5(2n-2)$$

$$25n - 10n + 10 = 15n + 10$$

Rana sözel olarak açıklamış ancak cebirsel olarak ifade ederken değişken atamada sorun yaşayıp (iki bilinmeyenli denklemi bir bilinmeyenliye dönüştürememe) tam olarak istenilen genellemeye ulaşamamıştır.

Rana : Bi beşgenin mesela şu, ikincisinden gidersek iki ayrı beşgen olduğunu düşünürsek 50'dir.
G : Evet.
Rana : 25 birininki, 25 birininki, iki 50 oluyor. Eee çıkarmam gereken ortak kenar ikiydi. İkisi de beşer cm'den 10 cm oluyor. Çıkardığımız zaman 40 cm kalıyor.
G : Tamam, bunu genel bir ifade şeklinde yazalım.
Rana : İkin eksi iki buldum çarpı beş. n eksi hayır, çevre uzunluğuna a desem. [a-(2n-2).5 yazdı] sanırım çıkar.

Nur ise aşağıdaki gibi sözel olarak açıklamış ancak bu stratejiyi kullanarak genellemeye ulaşmaya çalışmamıştır.

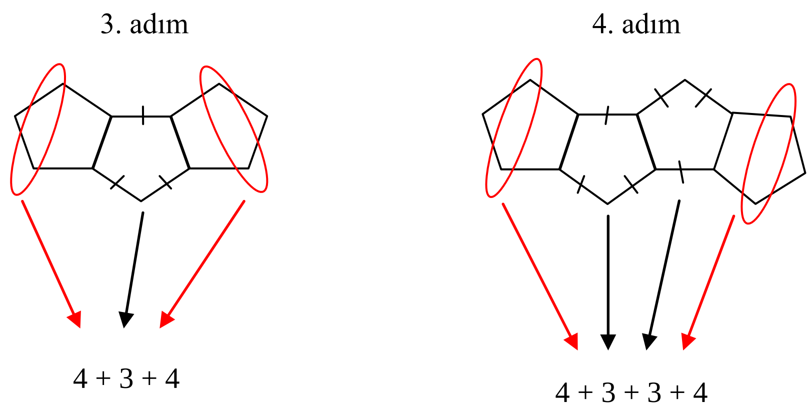
Nur : Hmm kesişiyor. 25 burası, normalde 50 olması gerekirken 40 oluyor. 75 olması gerekirken 55 oluyor. Ya bu bir tanesinin 15 tane artırdığından eminim.

Fonksiyonel strateji kapsamında kullanılan bir diğer yaklaşım sabit ve değişen kenar sayılarına dayalı ilişki arama olarak ifade edilmiştir. Bu bağlamda katılımcı öğrencilerden biri orta (Han) ve diğeri yüksek başarı düzeyine sahip (Oğuz) iki öğrenci şekil gruplarının yapısını incelerken başta ve sonda dört kenarın sabit olduğunu ortada kalanların ise üçer artarak devam ettiğini fark etmişler ve sorunun çözümünü işlemsel olarak gerçekleştirmişlerdir; ancak bu stratejiyi kullanarak herhangi bir genellemeye ulaşamamışlardır. Öğrencilerden Oğuz'un görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

Oğuz : En soldaki ve en sağdaki beşgenlerin bir, iki. Bir, iki, üç, dört kenarları dışarıda yani şöyle gitse buradakinde de dört ve ortada kalanların hepsinde üç kenarları dışarıda.
G : Evet.
Oğuz : Dört, dört sekizi buradan çıkartırsam 51.
G : Bir kere baştaki ve sondakini biliyorum, onları atayım diyorsun.
Oğuz : Hı hı orta ortadakilerin hepsinin üç kenarları dışarı bakıyor.
G : Tamam.
Oğuz : Yani dört, dört kalan 51'i üçe bölerim, 17. Dizinin iç tarafında yani üç kenarı dışarıda olan 17 tane şey var. Beşgen ve buna dahil

kenarlarla da dört kenarı dışarıda olan bir tane beşgen var ve bir tane de burada beşgen var. Aralarında da şey. O zaman 19 tane.

Öğrencilerin ifade ettiği yapı aşağıda açıklanmıştır:



Stratejiler temasının bir diğer alt teması, deneme-yanılma yoluyla ilişki arama olarak ifade edilmiştir. Katılımcı öğrencilerden biri yüksek (Rana) diğer ikisi orta başarı düzeyine sahip (Han ve Su) toplam üç öğrencinin rastgele ilişki aradıkları dikkat çekmektedir. Örneğin Rana'nın,

Rana : *Birinciyi sağlaması için üç n eksi on olması gerekiyor. Birincisi için. Evet, ikinciyi sağlaması için 30 eksi 10'dan 20 çıkar olmadı. Üç n eksi on olmadı. Hmm n eksi iki hayır, yok, n eksi dört, birincisi n eksi sıfır ikincisi n eksi iki, üçüncüsü n eksi dört.*

G : *O söylediklerin neyi ifade ediyor?*

Rana : *n dediğim beşgen sayısı. Hmm saymam gereken kenar sayılarını bulmam için n'i üç ile çarpsam. Kuralı göremiyorum ben ya. Hmm İki n eksi ikiden…*

gibi rastgele ifadeler yazıp tıkanma sürecine girdiği anlaşılmaktadır. Bu düşüncelerinden sonra ise orantı kurmayı denemiş ve bunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

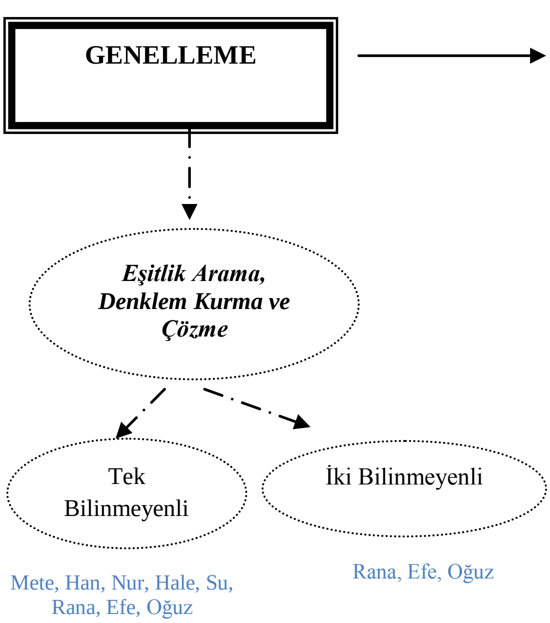
Rana : *Üç. 295 cm buna 59 tane saymam gerekiyor. 59 tane kenar saymam gerekiyor. O zaman burası x olacak. İçler dışlar yapıp çok saçma bir sonuç bulacağım ve çok büyük bir sonuç olacak. Beş kere dokuz, 45. 25, 29, …*

Benzer şekilde Han da aklına gelen *"Üçüncü adımda çevre uzunluğu 55 ise altıncı adımında çevre uzunluğu 110 olur mu?"* sorusuna yanıt aramak için orantı kurmayı denemiş ancak doğru olmadığını görüp tıkanma noktasına gelmiştir.

Öğrencilerden biri hariç diğer yedi öğrencinin istenilen genel ifadeye ulaşırken yinelemeli stratejilerden herhangi birini kullandığı belirlenmiştir. Bunun yanı sıra altı öğrenci fonksiyonel stratejileri kullanmıştır. Üç öğrencinin de istenilen genellemeye ulaşırken deneme-yanılma stratejisini kullandığı görülmüştür. Yinelemeli stratejilerin en çok kullanılan stratejilerden olduğu dikkat çekmektedir.

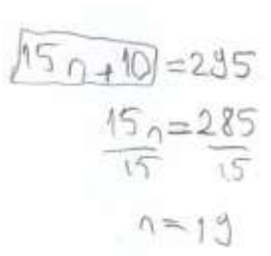
3.5.1. Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme

Genelleme ve doğrulama-ikna etme ana temaları altında ele alınan alt temalar Şekil 25'te sunulmuştur:



Şekil 25.Öğrencilerin Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme Sürecinde Kullandıkları Yaklaşımlar

Bu problemde bütün öğrenciler istenilen genellemeye ulaşabilmişlerdir. Öğrencilerden dört orta (Nur, Han, Mete ve Su), iki yüksek başarı düzeyine sahip (Oğuz ve Hale) toplam altı tanesinin sadece bir, yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden olan Efe'nin iki ve yine yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden olan Rana'nın ise üç farklı strateji kullandığı saptanmıştır. Rana bu üç stratejiden sadece ikisiyle istenilen sonuca ulaşabilmiştir. Kimi öğrenciler şeklin yapısını analiz ederek kimi öğrenciler ise şekli sayı örüntüsüne dönüştürerek bir eşitlik yazmaya çalışmışlardır. Biri yüksek (Hale), dördü orta başarı düzeyine sahip (Mete, Han, Nur ve Su) toplamda beş öğrencinin bir bilinmeyenli; yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrencinin (Rana ve Efe) hem bir bilinmeyenli hem de iki bilinmeyenli denklem kurduğu görülmüştür. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden biri olan Oğuz ise sadece iki bilinmeyenli denklem kurmuştur. Rana kurduğu iki bilinmeyenli denklemin sonunu getiremezken Efe ve Oğuz zorlanarak da olsa iki bilinmeyenli denklemlerini tek bilinmeyene dönüştürüp istenilene ulaşmışlardır. Örneğin Mete, beşgen sayısına dayalı olarak aşağıdaki gibi bir bilinmeyenli denklem kurup çözümünü gerçekleştirmiştir:



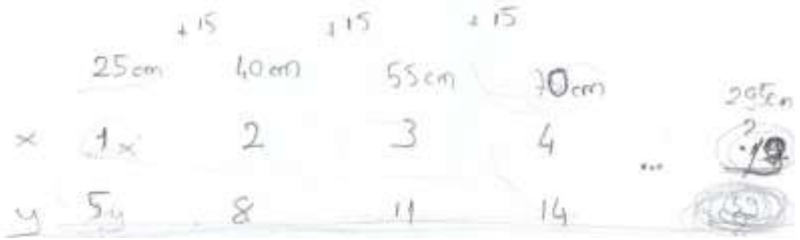
Nur da kenar sayısına dayalı aşağıdaki gibi bir genelleme yapmıştır. Çevre yerine 295 yazarak karşısına çıkan bir bilinmeyenli denklemi çözüp 19'a ulaşmıştır:

Nur'a benzer şekilde Rana da aşağıdaki gibi açıklamalar yapmıştır:

G : *Peki, üç n artı iki ifadesi neye karşılık geldi?*

Rana : *Eee saymam gereken kenar sayısı. Eee bu şekilde 295 cm, 295'i beşe bölmeliyim. Çünkü bu sonucu beş ile çarpacağım. Şu sonuç 59 çıkıyormuş. Üç n artı iki 59 çıkıyorsa üç n eşittir 61 olur. Aaaa hayır, 57 olur. 57 bölü üç bir defa 27'nin içinde dokuz defa. n buradan n, dokuz çıkar. Yani 19 tane beşgen yan yana konmalı.*

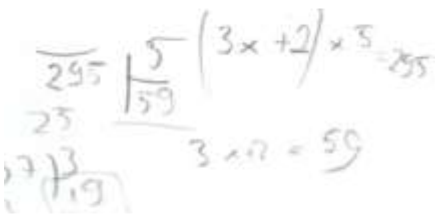
Oğuz ise aşağıdaki tabloda da görüldüğü üzere çevreyi temsil eden kenar sayılarına y değişkenini, adım sayısı ya da beşgen sayısına ise x değişkenini atayıp 3x+2=y ifadesini yazmıştır.



Çevre uzunluğunu bulmak için y değişkenin beş katını alacağını ifade etmiş ve daha sonra aşağıdaki eşitliği yazmıştır:

$$3x+2n=\cancel{y\times 5}$$

Bu eşitlikte y ile 3x+2'nin aynı olduğunu fark ettikten sonra ise aşağıdaki şekilde düzenlemeler yapıp sonuca ulaşmıştır:



Efe ise genellemeye ulaşırken kullandığı ikinci stratejide Oğuz'a benzer şekilde iki bilinmeyenli denklem kurup daha sonra bunu tek bilinmeyene düşürmüştür:

x = Kenar Sayısı
n = Beşgen sayıs

$$5x = 2(n-1)$$
$$5x - 2n-2$$
$$25n - 5(2n-2)$$
$$25n - 10n+10 = 15n+10$$

Yukarıda öğrencinin bütüne odaklanıp ortak kenarları çıkarttığı dikkat çekmektedir; ancak başlangıçta kenar sayısı x ve beşgen sayısı n olmak üzere iki farklı değişken atadığı daha sonra ise x'i n cinsinden yazdığı da görülmektedir.

Nur, Efe, Oğuz ve Rana'nın ulaştıkları genellemenin örnek üzerinde doğruluğunu kontrol ettikleri de görülmektedir. Aşağıda Nur'un doğrulamasıyla ilgili ifadeye örnek sunulmuştur:

Nur : …Beş. Üç n artı iki de çevre. Deneyeyim mi? Bir deneyeyim sağlıyor mu?
G : İstersen dene.
Nur : Hmm bu sekiz, sekiz. Eminim, budur.

Benzer şekilde Efe de aşağıdaki gibi bir doğrulama yapmıştır:

Efe : Mesela bu birinci adım. Buraya bir konulursa bir kere on beş 15 artı 10 eşittir 25, çevreyi veriyor.
G : Evet.
Efe : İkinci adımda iki konulur. İki kere on beş 30 artı10, 40 cm, üçüncü adımda üç kere on beş 45, 10 daha 55.

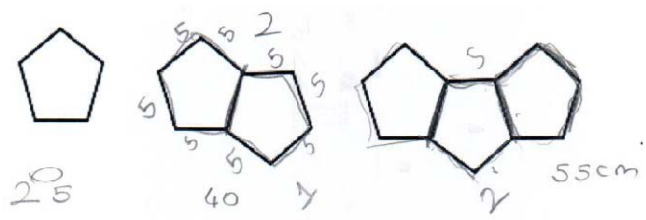
Ayrıca Efe, kullandığı her iki stratejide de 15n+10'a ulaştığı için sonucunun doğru olduğundan emin olmuştur.

Doğrulama-ikna etme ana teması altında ise cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerin geometrik açıklama yapıp yapamadığı incelenmiştir. Elde edilen veriler incelendiğinde iki yüksek (Oğuz ve Hale), bir orta başarı düzeyine sahip (Nur) toplam üç öğrencinin geometrik yapıya dayalı açıklamalarda bulunduğu görülmektedir. Orta başarı düzeyine sahip olan üç öğrencinin (Han, Mete ve Su) verilen geometrik yapıyı sayı örüntüsüne dönüştürüp istenilene ulaştığı dikkat çekmektedir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden sadece birinin (Efe) ise her iki stratejiyi kullanarak açıklama yaptığı görülmektedir. Örneğin öğrencilerden Hale,

Hale : Evet, çevresi 25cm. Bir beşgen eklendi mi eee hani çarpı iki desek olmaz çünkü bir kenarı ikisinde de ortak. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz. Sekiz tane kenar oluyor. Sekiz çarpı beşten 40. 40 cm ama hepsini böyle böyle deneyerek bulamayız. Bulabilir miyiz? Şimdi beş kenar var burada sekiz kenar. Beş, sekiz. Normalde ne olurdu? Hani ayrı ayrı olsaydı beş, beş ne olurdu? Beş, beş 10 olurdu. İki kenarı çıkarttık çünkü ikisinde kenar eee şey olarak çevre olarak sayılmıyor. İki kenarı çıkarmış olduk. Buna dönecek olursak. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on bir. On bir kenarı var. Eğer hani hepsinde ayrı ayrı hesaplıyor hesaplayacak olsaydık, 15 olurdu. Ama burada Bir, iki, üç ve dört yani hepsinde bir kenar olarak kabul edersek bir, iki kenarı olarak kabul hayır nasıl kabul ediyoruz. Hı şöyle bir, hem bunun için bir hem bunun için. Ortada kalan yani içte iç bölgede kalan kenarları iki olarak sayıyoruz; çünkü iki tane beşgenin eee kenarı olduğu için iki ile çarpıyoruz. İki çarpı dört tane kenar. Yani iki, iki de buradan dört tane kenarı çıkartmış oluyoruz.
G : Güzel.
Hale : Burada 11 tane. 11 çarpı beş eder, işte beş çarpı beş, beş,… bunların arasında bir düzen var mı? Bakalım şöyle.

şeklin geometrik yapısını analiz etmiş ve buna göre cebirsel ifade yazmıştır.

Su ise aşağıda görüldüğü gibi şekil gruplarını sayı örüntüsüne dönüştürüp geometrik yapıyla bağlantı kurmadan istenilen genellemeye ulaşmış ve aşağıdaki açıklamaları yapmıştır:



Su : *Aralarında 15 olduğu için de kaç taneyse onu yazıyoruz sonra bu kaçsa bundan çıkarıyoruz. Eğer eksili bir şey olursa eksi çıkarsa artı o yüzden 15n artı 10 eşittir 295 olduğunu düşündüm. Tabi bu birçok şeye eşit olabilir ama şu n de değişiyor işte böyle.*

Öğrencilerin beşgen grubu oluşturma probleminde genellemeye ulaşmak için kullandıkları stratejiler ve bu stratejilerden hangileri ile genellemeye ulaştıkları ya da hangilerinin sonucunda tıkanma sürecine girdikleri Tablo 11'de verilmiştir:

Tablo 11. Beşgen Grubu Oluşturma Probleminde Öğrencilerin Kullandıkları Stratejiler ve Tıkanma Noktaları

SÜREÇ		STRATEJİLER (ATAK)			BULDUM! / TIKANDIM!
ÖZELLEŞTİRME	İLİŞKİ ARAMA-VARSAYIM OLUŞTURMA	*Yinelemeli Stratejiler (7)*	*Terimler Arası Farkı Bulma*	**ATAK 1:** Beşgen sayısı ile çevre arasındaki farka odaklanma. (7) **ATAK 2:** Beşgen sayısı ile kenar sayısı arasındaki farka odaklanma. (2)	
			Tahmin ve Kontrol	**ATAK 3:** Beşgen sayısı ile çevre arasında ilişki arama. **ATAK 4:** Aralık sayma.	Buldum! (5) Buldum! (1)
		Fonksiyonel Stratejiler (7)		**ATAK 5:** Beşgen sayısı ile çevre arasında kat ilişkisi arama.	Buldum! (1)
				ATAK 6: Beşgen sayısı ile kenar sayısı arasında kat ilişkisi arama.	Buldum! (3)
				ATAK 7: Bütüne odaklanıp ortakları çıkarma.	Buldum! (2)/ Tıkandım! (2)
				ATAK 8: Sabit ve değişen kenar sayılarına dayalı ilişki arama.	Tıkandım! (2)
		Deneme-Yanılma (3)		**ATAK 9**	Tıkandım! (3)

Öğrencilerin başarı düzeylerine göre problemlerin tamamında gerçekleştirdikleri ataklar, tıkanma yaşadıkları noktalar aşağıda Tablo 12'de ve her bir öğrencinin gerçekleştirdiği atak sayısı ise Tablo 13'te sunulmuştur:

Tablo 12. Öğrencilerin Başarı Düzeylerine Göre Gerçekleştirdikleri Ataklar, Tıkanma Noktaları

	ATAK (STRATEJİLER)		ÖĞRENCİ BAŞARI DÜZEYLERİ	TIKANMA
EULER PROBLEMİ	***1. Ön bilgi kullanarak istenilen genel kuralı yazma.***		1OBD öğrenci	
	2. Tabandaki çokgen ve cismin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.		3 YBD, 1OBD öğrenci	X
	Kat İlişkisi	**3.** Köşe ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	1 YBD öğrenci	X
		4. Yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	2 YBD, 1OBD öğrenci	X
		5. Köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	1 YBD öğrenci	X
	Toplam ve Fark İlişkisi	**6.** Köşe ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	2 YBD öğrenci	
		7. Köşe ve yüz sayıları arasında ilişki arama.	2 YBD öğrenci	
		8. Yüz ve ayrıt sayıları arasında ilişki arama.	3 YBD öğrenci	
		9. Köşe, ayrıt ve yüz sayıları arasında ilişki arama.	3 YBD, 3OBD öğrenci	
	Hem Kat Hem Toplam İlişkisi	**10.** Ayrıt, köşe ve yüz sayıları arasında ilişki arama.	2 YBD öğrenci	X
İÇ AÇILAR TOPLAMI PROBLEMİ	***1. Ön bilgi kullanarak istenilen genel kuralı yazma.***		1OBD öğrenci	
	Sayısal Yaklaşım	**2.** t tablosu kullanarak örüntü (180°'lik artış) oluşturma	3 YBD öğrenci	
		Sadece toplamlar arası artışa odaklanma.	1 YBD öğrenci	X
		Toplamlar arası artışı çokgenin kenar sayısı ile ilişkilendirme.	2 YBD, 1OBD öğrenci	
		3. Toplamlar Arası Çarpıma Odaklanma (deneme-yanılma)	1 YBD öğrenci	X
		Toplamlar Arası Kat ve Toplam İlişkisi (deneme-yanılma)	2 YBD öğrenci	X
	Hem Sayısal Hem Geometrik Yaklaşım	**4.** Çokgenlerin iç açıları arasındaki artışa odaklanma.	1 YBD, 2 OBD öğrenci	X
		5. Çokgendeki tüm köşegen sayısına odaklanma.	2 YBD öğrenci	X
		6. Tümler açıya odaklanma.	1 YBD öğrenci	X
	Geometrik Yaklaşım	**7.** Çokgenleri üçgen ve dörtgenlere parçalama.	3 YBD, 2 OBD öğrenci	
		Çokgenleri sadece üçgenlere parçalama.	1 YBD, 2 OBD öğrenci	
		8. Geometrik yapılara (üçgeni dörtgene) tamamlama.	1 YBD, 1OBD öğrenci	X
KÖŞEGEN	***1. Ön bilgi kullanarak istenilen genel kuralı yazma.***		1 YBD ***(Buldum!)***, 1 YBD, 1OBD öğrenci	X
	Sayısal ve Geometrik Yaklaşım	**2.** Bir köşeden çıkan köşegen sayısı ile çokgenin kenar sayısını ilişkilendirme	4 YBD, 4 OBD öğrenci	
		Artışa odaklanma	4 YBD, 4 OBD öğrenci	
		Örüntü oluşturma.		
		t-tablosu oluşturma	1 YBD öğrenci	
		Listeleme yapma	2 YBD öğrenci	X

SAYISI PROBLEMİ	***Sayısal ve Geometrik Yaklaşım***	**3.** Kenar/köşe sayısı ile köşegen sayısını ilişkilendirme		
		Kat İlişkisi Arama	1 YBD, 1 OBD öğrenci	X
		Örüntü Oluşturma		
		t-tablosu oluşturma	2 YBD, 1 OBD öğrenci	X
		Listeleme yapma	1 YBD öğrenci	X
		Kombinasyon	1 YBD öğrenci	
ÇEVRE PROBLEMİ	***Kenar Uzunluklarına Odaklanma***	**1.** Üçgen eşitsizliğini dikkate alma.	3 YBD, 3 OBD öğrenci	
		2. Üçgen eşitsizliğini dikkate almama.	1 YBD, 1 OBD öğrenci	X
		3. Kenar uzunluklarını rasyonel sayı alma	2 YBD, 4 OBD öğrenci	
	Olası Üçgenler Belirleme	**4.** Çeşitkenar üçgen	1 YBD, 1 OBD öğrenci	
		5. Eşkenar üçgen	4 YBD, 4 OBD öğrenci	
		6. Dik açılı üçgen	4 YBD, 3 OBD öğrenci	
		7. Geniş açılı üçgen	2 YBD, 1 OBD öğrenci	
	Simetri	**8.** Simetriyi dikkate alma.	4 YBD, 1 OBD öğrenci	
		9. Simetriyi dikkate almama.	3 OBD öğrenci	X
	Pisagor Bağıntısını Fark Etme	**10.** Pisagor bağıntısını fark etme.	4 YBD, 3 OBD öğrenci	
BEŞGEN GRUBU OLUŞTURMA PROBLEMİ	***Yinelemeli Stratejiler***	**1.** Terimler Arası Farkı Bulma	3 YBD, 4 OBD öğrenci	
		Beşgen sayısı ile çevre arasındaki farka odaklanma.		
		Beşgen sayısı ile kenar sayısı arasındaki farka odaklanma.	3 YBD, 1 OBD öğrenci	
		2. Tahmin ve Kontrol		
		Terimler Arası Farkı Kat Olarak Alma		
		Beşgen sayısı ile çevre arasında ilişki arama.	2 YBD, 3 OBD öğrenci	
		Aralık sayma.	1 YBD	
	Fonksiyonel Stratejiler	**3.** Beşgen sayısı ile çevre arasında ilişki arama.	1 YBD	
		4. Beşgen sayısı ile kenar sayısı arasında ilişki arama.	2 YBD, 1 OBD öğrenci	
		5. Bütüne odaklanıp ortakları çıkarma.	2 YBD ***(Buldum!)***, 1 YBD, 1OBD öğrenci	X
		6. Sabit ve değişen kenar sayılarına dayalı ilişki arama.	1 YBD, 1 OBD öğrenci	X
	Deneme-Yanılma	**7.** Deneme-yanılma yoluyla ilişki arama	1 YBD, 2 OBD öğrenci	X

Tablo 13. Öğrencilerin Başarı Düzeyleri ve Gerçekleştirdikleri Atak Sayıları

PROBLEMLER	ÖĞRENCİLER ve BAŞARI DÜZEYLERİ	ATAK SAYILARI
EULER PROBLEMİ	Rana (YBD)	6
	Hale (YBD)	4
	Efe (YBD)	4
	Oğuz (YBD)	5
	Nur (OBD)	1
	Han (OBD)	2
	Mete (OBD)	2
	Su (OBD)	1
İÇ AÇILAR TOPLAMI PROBLEMİ	Rana (YBD)	7
	Hale (YBD)	4
	Efe (YBD)	4
	Oğuz (YBD)	3
	Nur (OBD)	-
	Han (OBD)	2
	Mete (OBD)	2
	Su (OBD)	4
KÖŞEGEN SAYISI PROBLEMİ	Rana (YBD)	7
	Hale (YBD)	4
	Efe (YBD)	4
	Oğuz (YBD)	3
	Nur (OBD)	3
	Han (OBD)	3
	Mete (OBD)	2
	Su (OBD)	3
ÇEVRE PROBLEMİ	Rana (YBD)	6
	Hale (YBD)	6
	Efe (YBD)	5
	Oğuz (YBD)	7
	Nur (OBD)	7
	Han (OBD)	6
	Mete (OBD)	4
	Su (OBD)	7
BEŞGEN GRUBU OLUŞTURMA PROBLEMİ	Rana (YBD)	6
	Hale (YBD)	1
	Efe (YBD)	6
	Oğuz (YBD)	4
	Nur (OBD)	4
	Han (OBD)	4
	Mete (OBD)	2
	Su (OBD)	3

Tablo 12 ve 13'te de görüldüğü üzere genel olarak yüksek başarı düzeyine sahip olan öğrenciler daha çok varsayım oluşturma girişiminde bulunmuşlar ve diğer öğrencilerden daha fazla sayıda atak gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca tablolar incelendiğinde en fazla tıkanmanın iç açılar toplamı, en az ise çevre probleminde olduğu dikkat çekmektedir. İç açılar toplamı probleminde öğrenciler sayısal, geometrik, sayısal ve geometrik yaklaşım kapsamında oldukça fazla strateji üretmiş ve aynı zamanda deneme-yanılma ile de varsayım oluşturmuşlardır. Öğrencilerin ortaya attıkları strateji sayısı fazla olduğundan yaşadıkları tıkanma sayısı da buna bağlı olarak artış göstermiştir. Bunun yanı sıra çevre probleminde öğrenciler üçgenlerle ilgili bildikleri özellikleri düşünmüş ancak birden fazla özelliği beraber düşünerek akıl yürütme gerektiren bu soruda, öğrenciler kendilerini genellemeye ulaştıracak fazla strateji üretememişlerdir. Bu nedenle strateji kullanımıyla birlikte yaşanan tıkanma süreci ile diğer problemlerden daha az karşılaşılmıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan ortaya çıkan sonuçlara, elde edilen sonuçların ilgili araştırmalar ile tartışılmasına, uygulamaya ve ilerde yapılabilecek araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

4.1. SONUÇ

Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinden geometri problemlerini genelleme süreçleri ve stratejilerine ilişkin sonuçlar; Euler problemine ait sonuçlar, iç açılar toplamı problemine ait sonuçlar, köşegen sayısı problemine ait sonuçlar, çevre problemine ait sonuçlar ve beşgen grubu oluşturma problemine ait sonuçlar olmak üzere beş başlık altında ele alınmıştır.

4.1.1. Euler Problemine Ait Sonuçlar

- Özelleştirme sürecinin problemi anlama kısmında öğrencilerin tamamının özel örnekleri kullandıkları, çizim yaparken daha çok küp (6) ve kare piramit (8) daha sonrasında ise üçgen prizma (4) ve üçgen piramit (4) çizmeyi tercih ettikleri, yine öğrencilerin tamamının kapalı görünüm çizdiği ve bunun yanı sıra biri yüksek diğeri orta başarı düzeyine sahip iki öğrencinin (Efe ve Su) cisimlerin açınımlarını da çizmeyi tercih ettiği ve çizdikleri cisimlere ait köşe, ayrıt ve yüz sayılarını doğru olarak belirleyebildikleri gözlemlenmiştir.

- Özelleştirme sürecinin ilişki arama-varsayım oluşturma kısmında ise öğrencilerin ön bilgiye dayalı kural yazma, tabandaki çokgen ve cismin köşe-yüz-ayrıt sayıları arasında ilişki arama, kat ilişkisi arama, toplam ve fark ilişkisi arama, hem kat hem toplam ilişkisi arama olmak üzere beş yaklaşım kullandığı ve bu beş yaklaşımın altında yer alan birçok farklı strateji ortaya attıkları saptanmıştır. Bunlardan en fazla (6) "Köşe-Ayrıt-Yüz Sayıları Arasında İlişki Arama" stratejisinin kullanıldığı tespit edilmiştir.

- Ellerindeki veriler arasında ilişki aramaya yönelen öğrencilerin toplam ya da fark ilişkisinden daha çok ilk olarak çarpımsal bir ilişki arama eğiliminde oldukları için tıkanma sürecine girdikleri dikkat çekmiştir. Üçü yüksek (Rana, Efe ve Hale), biri orta başarı düzeyine sahip öğrencilerden (Mete) dördünün ise tabandaki geometrik şekil ile ilişkilendirme yaparak sadece prizma ya da piramit için geçerli olabilecek ilişkiler keşfettikleri ve tıkanma sürecine girdikleri görülmüştür. Tıkanma süreci yaşayan öğrencilerden altısının kısa bir düşünme sürecinden sonra yeni bir atak gerçekleştirerek köşe, yüz ve ayrıt arasında toplam ve fark ilişkisi aramaya yönelerek beklenen ilişkiyi keşfettikleri saptanmıştır.

- Öğrencilerin altısının beklenen genel kurala ulaştığı ve ulaştıkları genellemeleri ifade eden öğrencilerden biri yüksek (Oğuz) ve üçü orta başarı düzeyine sahip olan (Mete, Han ve Nur)

  (Köşe sayısı+Yüz sayısı)-2=Ayrıt

  şeklinde, yüksek (Rana ve Efe) başarı düzeyine sahip ikisinin ise

  K+Y-A=2

  şeklinde sembolik bir ifadeler kullandıkları saptanmıştır.

- Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden birinin (Hale) özelleştirme yaptığı ancak daha sonra kendisini genellemeye ulaştıracak bir strateji ortaya atamadığı için ilerleyemeyip tıkanma sürecine girerek istenilen genellemeye ulaşamadığı, orta başarı düzeyine sahip bir öğrencinin (Su) ise problemi okuduktan hemen sonra istenilenin Euler Teoremi olduğunu ifade ederek bunu ezberden yazdığı görülmüştür.

- Son aşamada ise cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerden buldukları genel kural için doğrulama yapmaları beklenmiştir. Bir cisim üzerinde buldukları ilişkiyi başka cisimler için zihinlerinden ya da kâğıt üzerinde işlemler gerçekleştirerek emin olan öğrencilerin “Bunlar için geçerliyse bütün geometrik cisimler ve düzgün çok yüzlüler için geçerli olur." şeklinde bir yorumda bulundukları belirlenmiştir.

- Bu problemden özelleştirme (ilişki arama, mümkün olduğu kadar fazla sayıda ve çeşitlilikte örnek toplama, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, aynı sonuca ulaşılan denemeleri belirleme ve benzer bir deneme yapma vb.) ve genelleme (örüntü oluşturma, sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları belirleme, iki değişken arasındaki ilişkiyi matematiksel ya da sözel olarak ifade etme, olabilecek bütün ihtimalleri tanımlama vb.) için gerekli işlemlerin öğrencilerin çoğu tarafından yapıldığı saptanmıştır.

4.1.2. İç Açılar Toplamı Problemine Ait Sonuçlar

- Özelleştirme sürecinin problemi anlama kısmında öğrencilerin üçgen, dörtgen ve beşgen başta olmak üzere özel örnekleri kullandıkları, çizim yaparken daha çok düzgün çokgenleri çizme eğiliminde oldukları, çizdikleri çokgenlere ait köşe/kenar sayılarını doğru olarak belirleyebildikleri ve bunların iç açıları toplamlarını ön bilgilerinden yararlanarak ifade ettikleri belirlenmiştir. Çokgenlerden üçgen, dörtgen ve beşgeni öğrencilerin tamamı çizmiş, yedigeni ise çoğu öğrenci çizerken zorlandığı için vazgeçmiş, sonuçta biri yüksek (Efe) diğeri orta başarı düzeyine sahip (Mete) sadece iki öğrenci yedigen çizmeyi başarmıştır. Düzgün çokgenlerin yanı sıra düzgün olmayan çokgen çizmeyi tercih eden biri yüksek (Rana) diğeri orta başarı düzeyine sahip olan (Su) iki öğrencidir. Öğrencilerin tamamının üçgenin ve dörtgenin iç açıları toplamını ifade ettiği, beşgen ve sonrasında gelen çokgenler için ise birçoğunun cevap veremediği, ikisi yüksek (Hale ve Rana) biri orta başarı düzeyine sahip (Han) üç öğrencinin beşgenin iç açıları toplamını tahmin ettiği görülmüştür.

- Özelleştirme sürecinin ilişki arama varsayım oluşturma kısmında ise öğrencilerin ön bilgiye dayalı kural yazma, sayısal, geometrik, hem sayısal hem geometrik olmak üzere beş yaklaşım kullandığı ve bu beş yaklaşımın altında yer alan birçok farklı strateji ortaya attıkları saptanmıştır. Bunlardan en fazla (5) "Çokgenleri Üçgen ve Dörtgenlere Parçalama" stratejisinin kullanıldığı tespit edilmiştir.

- Verilerden ilişki aramaya yönelen öğrencilerin ilk olarak sayısal yaklaşımı kullanma eğiliminde oldukları dikkat çekmiştir. Bu öğrencilerin bir kısmı sayısal stratejilerle ilişkiyi elde ederken diğer öğrencilerin geometrik şekilleri inceleyerek farklı stratejilere yöneldikleri ve bu süreçte geometrik yaklaşımları kullandıkları saptanmıştır. Yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrencinin üç farklı strateji kullanarak beklenen genellemeye ulaştığı, diğer altı öğrencinin ise denediği stratejilerin sadece biriyle istenilen genellemeye ulaştığı görülmüştür.

- Genellemeye ulaşmak için birçok atak gerçekleştiren öğrencilerden altısı hem sözel hem de cebirsel olarak istenilen genel kurala ulaşmışlar ancak bu süreçte (cebirsel olarak ifade etmekte) zorluk yaşamışlardır. Orta başarı düzeyine sahip öğrencilerden birinin (Nur) özelleştirme yaptığı ancak daha sonra kendisini genellemeye ulaştıracak bir strateji ortaya atamadığı için ilerleyemeyip tıkanma sürecine girdiği görülmüştür. Öğrencinin bu tıkanma sürecinden geçmiş bilgilerini hatırlayarak çıktığı, istenilen genel kuralı ezberden yazdığı belirlenmiştir. Orta başarı düzeyine sahip bir diğer öğrencinin (Han) ise keşfettiği ilişkiyi cebirsel olarak ifade edemediği gözlemlenmiştir.

- Son aşamada ise cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerden buldukları ifadenin geometrik olarak anlamını açıklamaları ve doğrulama yapmaları beklenmiştir. Geometrik yaklaşım ile genellemeye ulaşan ikisi yüksek (Efe ve Oğuz), ikisi orta başarı düzeyine sahip (Mete ve Su) dört öğrencinin genellemenin geometrik anlamını açıklayabildiği, buna karşın sayısal yaklaşım kullanan yüksek başarılı bir öğrencinin (Hale) ise elde ettiği genellemeyi geometrik olarak açıklayamadığı saptanmıştır. Ayrıca açıklama yapamayan bu öğrencinin ulaştığı genellemeyi sadece düzgün çokgenlerle sınırlandırdığı görülmüştür.

Doğrulamayı ise elde ettikleri genel kuralda sayısal olarak gerçekleştiren öğrenciler, bunun tüm çokgenler için geçerli olacağına inanmışlardır.

4.1.3. Köşegen Sayısı Problemine Ait Sonuçlar

- Özelleştirme sürecinin problemi anlama kısmında öğrencilerin köşegenleri çizilmiş olarak verilen üçgen, dörtgen ve beşgeni inceledikten sonra altıgen ve yedigenin köşegen sayılarını belirlemeye çalıştıkları görülmüştür. Öğrencilerin tamamı altıgenin köşegenlerini doğru olarak çizerken orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Han) yedigenin, ikisi yüksek (Hale ve Rana) ikisi orta başarı düzeyine sahip (Hale ve Han) dört öğrencinin ise sekizgenin köşegenlerini de başarılı bir şekilde çizdiği gözlemlenmiştir. Öğrencilerden yedisinin bir köşeden çizilen köşegenleri çizdikten sonra sırasıyla diğer köşelere geçerek o köşelerden çizilen köşegen sayılarını belirlediği, orta başarı düzeyine sahip birinin (Mete) ise bu çizimi sistematik olarak değil de rastgele yaptığı saptanmıştır.

- Özelleştirme sürecinin ilişki arama-varsayım oluşturma kısmında ise öğrencilerin genel olarak çokgenin bir köşesinden çıkan köşegen sayısı ile çokgenin kenar sayısını ilişkilendirme ve çokgenin kenar/köşe sayısı ile çokgenin tüm köşegen sayısını ilişkilendirme olmak üzere iki farklı yaklaşım kullandığı ve bu iki yaklaşımın altında yer alan birçok farklı strateji ortaya attıkları saptanmıştır. Bunlardan en fazla (7) öğrencileri genellemeye ulaştıracak olan "Çokgenin Bir Köşesinden Çıkan Köşegen Sayısı ile Çokgenin Kenar Sayısı Arasındaki Artışa Odaklanma" stratejisinin kullanıldığı tespit edilmiştir.

- Genellemeye ulaşmak için bazı öğrencilerin birden fazla yaklaşım kullandığı belirlenmiştir. Altı öğrencinin denediği stratejilerin sadece biriyle istenilen genellemeye ulaştığı ve yüksek başarı düzeyine sahip olan (Rana) öğrencilerden birinin ise iki farklı strateji kullanarak beklenen genellemeye ulaştığı saptanmıştır. Bu öğrenci diğer öğrencilerin düşünemediği bir strateji olan kombinasyonu kullanmıştır. Yüksek başarı düzeyine sahip olan diğer iki öğrenci

(Hale ve Efe) ise farklı bir strateji ortaya atarak çokgenlerin her bir köşesinden çizilen köşegen sayılarının Tablo 8'de gösterildiği gibi bir örüntü oluşturduğunu keşfetmiş ve biri bu örüntüyü çokgenler üzerinde gösterirken diğeri listeleme yapmayı tercih etmiştir.

- Farklı stratejiler kullanarak birçok atak gerçekleştiren öğrencilerden yedisi hem sözel hem de cebirsel olarak istenilen genel kurala ulaşmalarına rağmen bu öğrencilerin süreçte (cebirsel olarak ifade etme) zorluk yaşadıkları gözlemlenmiştir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden birinin (Hale) özelleştirme yaptıktan sonra birkaç farklı strateji ortaya atmasına rağmen bu stratejileri kullanarak genellemeye ulaşamayıp tıkanma sürecine girdiği, ardından geçmiş bilgilerini hatırlayarak istenilen genel kuralı ezberden yazdığı görülmüştür.

- Son aşamada ise cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerden buldukları ifadenin geometrik olarak anlamını açıklamaları ve doğrulama yapmaları beklenmiştir. Genellemeye ulaşan yedi öğrencinin beklenen açıklamayı yaptığı, ön bilgisini kullanarak kural yazan bir öğrencinin de ortaya attığı stratejilerden yararlanarak geometrik açıklama yapabildiği görülmüştür. Bu öğrencinin farklı stratejiler ortaya atıp köşegenlerin nasıl devam ettiğini algılayabilmesine rağmen bunu cebirsel olarak ifade etmekte oldukça zorlandığı dikkat çekmektedir. Öğrencilerin tamamının elde ettikleri genel kuralda sırasıyla üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen için sayısal olarak işlemler gerçekleştirerek doğrulama yaptığı belirlenmiştir. Öğrencilerin ulaştıkları genel kuralın hem geometrik olarak açıklamasını yapıp hem de doğrulama yaptıktan sonra bunun tüm çokgenler için geçerli olacağına inandıkları görülmüştür.

4.1.4. Çevre Problemine Ait Sonuçlar

- Özelleştirme sürecinin problemi anlama kısmında öğrencilerin tamamının ilk olarak koordinat sistemi çizip verilen noktaları belirleyerek çizilecek olan üçgenin bir kenar uzunluğunun dört birim, diğer iki kenarının toplam uzunluğunun ise sekiz birim olması gerektiğini ifade ettikleri ve sonrasında kenar uzunlukları dörder birim olan eşkenar üçgen ve üç, dört, beş olan dik üçgeni simetrileriyle beraber çizdikleri belirlenmiştir. Yüksek başarılı öğrencilerden ikisinin (Rana ve Hale) ise istenilenin üçüncü köşe noktası için olası tüm durumları belirlemek olan bu problemde köşe koordinatları belirlemekten daha çok üçgene odaklandıkları ve problemi tam olarak anlayamadıkları görülmüştür.

- Özelleştirme sürecinin ilişki arama varsayım oluşturma kısmında ise öğrencilerin kenar uzunluklarına odaklanma, olası üçgenler belirleme, simetri, Pisagor bağıntısını fark etme olmak üzere dört yaklaşım kullandığı saptanmıştır. Ayrıca bu stratejilerin tamamının birçok öğrenci tarafından kullanıldığı belirlenmiştir. Üçgen eşitsizliğini dikkate alma ve kenar uzunluklarını rasyonel sayı alma stratejilerini altı öğrencinin, simetriyi dikkate alma stratejisini beş öğrencinin kullandığı ve üçgen çizme stratejisi başlığı altında ise çeşitkenar üçgen iki, eşkenar üçgen sekiz, dik açılı üçgen yedi ve geniş açılı üçgeni üç öğrencinin çizdiği görülmüştür.

- Genellemeye ulaşmaya çalışırken öğrencilerden beşinin bir geometrik yer belirleyebildiği, üçünün ise genelleme yapamayıp özelleştirme aşamasında kaldığı gözlemlenmiştir. Sınırlı sayıda noktayı dikkate alan orta başarı düzeyine sahip öğrencilerden birinin (Nur) elips olarak belirlenmesi beklenen geometrik yer için kare, ikisi yüksek (Oğuz ve Efe), biri orta başları düzeyine sahip (Han) üç öğrencinin çember, yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden birinin (Efe) ise önce çember daha sonra ise elips olarak genellediği saptanmıştır.

4.1.5. Beşgen Grubu Oluşturma Problemine Ait Sonuçlar

- Özelleştirme sürecinin problemi anlama kısmında öğrencilerin tamamının ilk olarak her bir adımdaki çevre uzunluğunu hesapladıkları, dördü yüksek biri orta başarı düzeyine sahip beşinin çevreyi oluşturan kenar sayılarını ayrıca belirledikleri ve beş öğrencinin de yakın adımda oluşan beşgen grubunun çevre uzunluğunu hesapladıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden yüksek başarı düzeyine sahip olan üçünün (Oğuz, Rana ve Hale) yakın adımda oluşan beşgen grubunun çevresini geometrik yaklaşım kullanarak yani çizerek biri yüksek (Efe) diğeri orta başarı düzeyine sahip (Han) ikisinin ise sayısal yaklaşım kullanarak yani çevre uzunlukları arasındaki farka dayalı olarak belirledikleri saptanmıştır.

- Özelleştirme sürecinin ilişki arama varsayım oluşturma kısmında ise öğrencilerin yinelemeli, fonksiyonel ve deneme-yanılma olmak üzere üç yaklaşım kullandığı ve bu üç yaklaşımın altında yer alan birçok farklı strateji ortaya attıkları saptanmıştır. Bazı öğrencilerin birden fazla strateji kullandığı saptanmıştır. Bunlardan en fazla (5) yinelemeli stratejilerden olan "Beşgen Sayısı ile Çevre Arasında İlişki Arama" stratejisinin kullanıldığı tespit edilmiştir.

- Bu problemde öğrencilerin ilk hedeflerinin soruyla ilgili genel bir kural oluşturmak olmayıp problemi sayısal olarak çözüp sonuca ulaşmak olduğu ayrıca dikkat çekmiştir. Örüntü oluşturarak soruyu çözen öğrencilerin daha sonra genel kural arayışı içinde girdikleri belirlenmiştir. Altı öğrenci sadece bir stratejiyle istenilen genellemeye ulaşırken yüksek başarı düzeyine sahip olan öğrencilerden birinin (Efe) iki farklı strateji kullandığı ve her ikisiyle de beklenen genellemeye ulaştığı, yine yüksek başarı düzeyine sahip olan bir başka öğrencinin (Rana) ise üç farklı strateji ortaya attığı ancak iki tanesi ile genel kurala ulaştığı belirlenmiştir. Öğrencilerin tamamı verileri kullanarak t-tablosu oluşturmuş ve aradaki ilişkiyi yinelemeli ya da fonksiyonel olarak ifade etmiştir. Biri yüksek (Oğuz) diğeri orta başarı düzeyine sahip (Han) sadece iki öğrencinin geometrik yaklaşım kullanarak beşgen gruplarının yapılarını analiz ettiği dikkat çekmektedir. Ancak bu öğrencilerin bu stratejiyi kullanarak herhangi bir genellemeye ulaşamadıkları görülmüştür.

- Genellemeye ulaşmak için birçok atak gerçekleştiren öğrencilerden yüksek başarı düzeyine sahip olan üçünün (Rana, Efe ve Oğuz) başlangıçta iki bilinmeyenli denklem kurduğu ve bu öğrencilerden ikisinin, oluşturduğu iki bilinmeyenli denklemi tek bilinmeyene dönüştürerek genel kurala ulaştığı saptanmıştır. Bu durumda öğrencilerin tamamının bir bilinmeyenli denklem çözerek istenilene ulaştığı söylenebilir.

- Son aşamada ise cebirsel genellemeye ulaşan öğrencilerden buldukları ifadenin geometrik olarak anlamını açıklamaları beklenmiştir. Üçü yüksek (Oğuz, Hale ve Efe), biri orta başarı düzeyine sahip (Nur) dört öğrencinin ulaştıkları genel kuralı geometrik olarak da açıklayabildikleri tespit edilmiştir. Daha çok sayısal stratejilerden kullanmayı tercih eden diğer dört öğrencinin ise cebirsel olarak ulaştıkları genel kuralın geometrik anlamını çok net olarak açıklayamadıkları görülmüştür.

4.2. TARTIŞMA

Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerine ait matematiksel düşünme süreçlerinin ve bu süreçte kullandıkları stratejilerin incelendiği bu araştırmada elde edilen veriler kuramsal çerçeveye dayalı olarak tartışılacaktır.

Özelleştirme çeşitli örneklere dayalı özel durumlar arama olarak tanımlanmakta (Mason vd., 1985) ve problemde istenilen genelleme sürecindeki ilk adım olarak ifade edilebilmektedir. Bu ilk adım ise hiç şüphesiz problemin anlaşılmasıdır. Bu doğrultuda verilen problemlere ilişkin öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun hemen hemen her soruda problemi anladıkları ve problemde istenen ilişkinin keşfi için verilenleri belirledikleri, tahminde bulundukları, anlamayı destekleyici çizimler yaptıkları görülmüştür. Bu durum öğrencilerin özelleştirme yapabilmelerini kolaylaştırmış ve öğrenciler bu süreçte zorlanmamışlardır. Arslan ve Yıldız (2010); Keskin, Akbaba ve Altun (2013) da öğrencilerin özelleştirme aşamasında sorun yaşamadıklarını belirlemişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerin problemleri anladıkları söylenebilir. Ancak bir problemde (çevre probleminde) yüksek başarılı iki öğrencinin (Rana ve Hale) problemde istenilenden ziyade daha çok üçgen çizimine odaklandıkları ve sadece özel durumlara dayalı çıkarımlarda bulundukları görülmüştür. Problemi tam olarak algılayamayan öğrencilerin hatalı stratejiler kullanarak probleme kavramsal ve ilişkisel anlamadan daha çok işlemsel yaklaşmaları Köse ve Tanışlı'nın (2014) çalışmasının sonuçları ile benzerlik göstermektedir. Bu durumun en belirgin sebeplerinden biri öğrencilerin özel durumları dikkate almaları, diğer bir deyişle herhangi bir üçgen yerine prototip şekillere (eşkenar üçgen ve dik üçgen gibi) odaklanmalarıdır. Bu odak diğer iç açılar probleminde de kendini göstermiş ve yüksek başarılı öğrencilerden diğer ikisi (Efe ve Hale) herhangi bir çokgenin (üçgen, dörtgen ya da beşgen) iç açılar toplamını bulmak yerine düzgün çokgenlerin iç açılarını bulmaya yönelmişlerdir. Bu durumla özellikle dörtgenlerle ilgili yapılan araştırmaların (Üstün ve Ubuz, 2004; Fujita ve Jones, 2007; Aktaş ve Aktaş, 2012) sonuçlarında çok sık karşılaşılmaktadır. Araştırmanın özelleştirme sürecinin problemi anlama aşamasında elde edilen önemli sonuçlardan biri de öğrencilerin tahmin yapmaya çok fazla yönelmemeleridir. Bu soruda beşgen ve altıgenin iç açılar toplamını belirlemek için bazı öğrencilerin iç açılar toplamları arasındaki farkın 180° olduğunu fark ederek doğru tahminlerde bulundukları görülmüştür. Tahmin süreci problemin anlaşılmasında oldukça önemli bir bileşendir. Çünkü Mason ve arkadaşlarının (1985) da ifade ettiği gibi neyin doğru olabileceğini hissetme ya da tahin etme ve bu gerçeği araştırma olarak tanımlanan tahmin süreci, henüz ortaya çıkarılmamış olan genellemenin, çözümün hatta matematiksel düşünmenin temelidir. Ne yazık ki sadece bir soruda ve sadece üç öğrencinin tahminde bulunması matematiksel düşünme süreci için engeldir. Benzer şekilde Alkan ve Güzel (2005) de öğrencilerin tahmin yetilerini kullanma yoluna gitmediklerini ya da bu konuda yetersiz kaldıklarını belirlemişlerdir. Oysaki ilköğretim öğrencilerinden tahmin yapabilmeleri aynı zamanda varsayım ve iddia oluşturup onları değerlendirebilmeleri ve bunları formüle edebilmeleri beklenmektedir (Altıparmak ve Öziş, 2005).

Problemi anlayan öğrencilerin veriler arasında ilişki arama ve varsayım oluşturmaya geçtikleri görülmektedir. Araştırmanın özelleştirme sürecinin bu aşamasında elde edilen önemli sonuçlardan biri bazı öğrencilerin özel değerleri, özel şekilleri inceledikten sonra ya da bu aşamaları hiç yapmadan önbilgilerine dayalı olarak kural yazmaya çalışmalarıdır. Öğretmenlerin bir kuralı öğrencilerin keşfetmelerine olanak sağlayan kavramsal temelli öğretim gerçekleştirmek yerine, formülü verip öğrencileri işlem yapmaya yönelten sorular kullanmaları öğrencileri, ezberledikleri bu bilgileri hatırlamaya yöneltmiş olabilir. Bu da öğrencilerin tıkanma sürecine girdiklerinde “Farklı alternatifler neler olabilir?” şeklinde bir sorgulama yapmaktan yani derinlemesine düşünmekten kaçındıklarını göstermektedir. Arslan ve Yıldız’ın (2010) araştırmasında da özelleştirme aşamasını atlayıp doğrudan varsayımda bulunan öğrencilerin var olduğu görülmüştür. Benzer durumla Steele ve Johanning (2004) karşılaşmış ve problemler arası bağlantıları gören öğrencilerin özel durumları çalışmaksızın geçmiş genellemelerini yeni problemlere uyguladıkları ve özel durumları sadece doğrulama yapmak için kullandıklarını belirlemişlerdir. Devam eden özelleştirme sürecinde özel durumları sistematik olarak ele alan öğrencilerin ise kendilerini genellemeye ulaştıracak bir ilişki arayışı içinde oldukları söylenebilir. Bu doğrultuda verilen her probleme ilişkin öğrencilerin tamamı veriler arasında çeşitli ilişkiler düşünmüşlerdir. Kullandıkları bu ilişkilerin bir kısmı onları genellemeye ulaştırırken bir kısmı ise tıkanma sürecine girmelerine sebep olmuştur. Örneğin Euler problemi kapsamında ilişki arayan öğrencilerin çoğu, ilk olarak veriler arasında çarpımsal bir ilişki arayışı içine girmişler, ya iki veri arasında ya da sadece bir geometrik cisim grubu için geçerli olacak ilişkiler bulmuşlardır. Öğrencilerin ilköğretim boyunca daha çok toplamsal ilişkiye odaklandıkları düşünüldüğünde, veriler arasında ilk olarak toplamsal bir ilişki aramaya yönelmeleri yerine çarpımsal bir ilişki aramaları şaşırtıcı bir durumdur. Benzer bir bulguya Sasman, Linchevski, Olivier ve Lienberg'in (1998) çalışmasında da rastlanılmıştır. Öğrencilerin problemlerde orantısal ilişkiler aradıkları ve orantısal çarpma hatasını çok sık yaptıkları belirlenmiş, araştırmacılar öğrencilerde bilişsel çatışma yaratarak bunu ortadan kaldırmaya çalışmışlar ancak bu nokta da öğrencilerin oldukça dirençli olduğunu görmüşlerdir.

İlişki arama-varsayım oluşturma sürecinde sayısal yaklaşımlara odaklanan öğrencilerin iç açılar toplamı probleminde t-tablosu oluşturarak sayı örüntüsü arayışı içine girdikleri görülmüştür. Şekilleri bir ilişki bulma yönünde incelemek yerine sayı örüntüsüne dönüştürmek için kullanan öğrencilere Rico (1996) ve Stacey'nin (1989) çalışmalarında da karşılaşılmıştır. Benzer durumun beşgen grubu oluşturma probleminde de ortaya çıktığı görülmüştür. Öğrenciler beşgenlerden oluşturulan örüntünün kuralını belirlerken verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Bu durum Stacey (1989); Sasman, Linchevski ve Olivier (1998); Becker ve Rivera (2006), Ma (2007); Tanışlı ve Özdaş'ın (2009) çalışmaları ile paralellik göstermektedir. Sayısal stratejiler bağlamında ele alınan yinelemeli stratejileri kullanan öğrencilerin çoğunluğunun Stacey (1989); Ma (2007); Tanışlı ve Özdaş'ın (2009); Tanışlı ve Köse (2011) bulgularında da olduğu gibi terimler arasındaki farkları belirledikleri görülmüştür. Bu farkı belirlerken t-tablosundan yararlandıkları dikkat çekmiştir. Öğrenciler ya beşgen sayısı ile beşgen grubunun çevre uzunlukları arasındaki ya da beşgen sayısı ile çevreyi oluşturan kenar sayıları arasındaki ilişkilerin keşfi için t-tabloları oluşturup bu veriler arasındaki farkı belirlemiş ve genel ifadeye ulaşmışlardır. Yine bu yöntemler arasında ele alınan ve aralık sayma olarak adlandırılan bir diğer strateji, sadece yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Efe) tarafından kullanılmıştır. Bu strateji kullanımına Tanışlı ve Köse'nin (2011) çalışmasında da rastlanılmıştır. Yinelemeli stratejilerde bilinçli olarak belirlenen sayı örüntüleri kullanılırken bazı öğrencilerin bu örüntüleri kullanmayarak veriler arasında rastgele ilişki aradıkları dikkat çekmiştir. Öğrencileri bu duruma öğretmenlerin programda yer alan örüntü problemlerini işlerken ezbere yaklaşım kullanmalarının alıştırmış olabileceği düşünülmektedir. Şekil örüntülerini analiz etmeden doğrudan sayı örüntülerine dönüştüren öğrenciler, sayılar arasında ezbere ilişkiler aramaya başlamaktadırlar. Bu nedenle öğrencilerin geometri problemleri ile karşılaştıklarında şeklin yapısını incelemekten daha çok sayılarla ezbere işlem yapama eğiliminde oldukları düşünülmektedir ve bu araştırma sürecinde de rastgele ilişki arayan öğrencilerin varlığı dikkat çekmiştir. Matematiksel bilgileri kavramsal olarak edinemeyen öğrencilerin problem çözmede, matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve akıl yürütmede sorun yaşadıklarını ifade eden Yeşildere ve Türnüklü (2007) de çalışmalarında, öğrencilerin bilgilerin direkt uygulanarak çözüme ulaşılan problemlerde, yorumun ve akıl yürütmenin gerekli olduğu problemlere göre daha fazla başarılı olduğunu belirlemişlerdir. Bu şekilde sayılar arasında bilinçli ya da ezbere ilişki arayarak genellemeye ulaşan bazı öğrencilerin elde ettikleri kuralın geometrik olarak ne anlama geldiğini açıklayamadıkları görülmüştür. Yinelemeli ilişki dışında bazı öğrenciler ise veriler arasında fonksiyonel ilişkinin varlığını fark ederek adım sayısı ile elde ettikleri sayı örüntüsünün terimlerini ilişkilendirmiş ve bir genellemeye ulaşmışlardır. Benzer bulguların Stacey (1989), Sasman vd. (1998), Tanışlı ve Özdaş'ın (2009) çalışmalarında da var olduğu dikkat çekmiştir. Fonksiyonel stratejiler başlığı altında ele alınan sabit ve değişen kenar sayıları ile adım sayılarını ilişkilendirerek genellemeye ulaşma, yüksek başarı düzeyine sahip sadece iki öğrenci tarafından fark edilmiş olmasına rağmen öğrenciler bu strateji ile beklenen genellemeye ulaşamayıp tıkanma sürecine girmişlerdir. Yine fonksiyonel stratejiler kapsamında ele alınan bütüne odaklanıp ortak kenarları çıkarma, yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Hale) tarafından kullanılmış ve beklenen genellemeye ulaşılmıştır. Bu iki stratejide de öğrencilerin Stacey (1989); Becker ve Rivera (2006); Tanışlı ve Özdaş (2009) çalışmalarındaki öğrenciler ile paralel olarak şeklin yapısal özelliklerine odaklandıkları ve problemi görsel olarak analiz ettikleri görülmüştür.

Sayısal yaklaşımla bir ilişki bulamayan öğrenciler ise iç açılar toplamı probleminde araştırmacının yönlendirmesiyle çokgenlerin köşegenler ile üçgenlere parçalanabileceğini fark ederek geometrik bir yaklaşım kullanmaya yönelmişler ve çokgenlerin içinde oluşan üçgen sayısı ile kenar sayısı arasında ilişki kurarak istenilen genellemeye ulaşmışlardır. Yüksek başarılı öğrencilerden biri (Efe) çokgenleri parçalamış ve kendince "Çokgenleri parçalarken ortada bir dörtgen kalana kadar birbirlerini kesmeyecek şekilde üçgenler çizer ve son olarak ortadaki dörtgeni de köşegen yardımıyla iki tane üçgene ayırırım.", orta başarı düzeyine sahip bir diğer öğrenci (Su) ise "Bütün çokgenler üçgenlerden oluşur." şeklinde bir genelleme oluşturmuştur. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden bir diğerinin (Oğuz) ise tek köşeden çıkan köşegenlerle çokgenleri üçgenlere ayırdığı ancak oluşan üçgen sayısı ile kenar sayısını ilişkilendirmeyip daha farklı şekilde genelleme yaptığı görülmüştür. Bu öğrenci tek köşeden çıkan köşegen sayısının bir fazlası kadar üçgen oluştuğunu fark etmiş ve ilişkiyi

$$(\text{tek köşeden çıkan köşegen sayısı}+1).180°$$

şeklinde ifade etmiştir. Cebirsel işlemlerde oldukça başarılı olan bu öğrenci, ulaştığı bu genellemenin kenar sayısı ile ilişkilendirilmiş olan $(n-2).180°$ formundaki genel kuralla aynı olduğunu görmüştür.

Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin daha farklı stratejiler üretebildikleri araştırmada dikkat çeken bir diğer önemli noktadır. Benzer şekilde köşegen sayısı probleminde de öğrenciler farklı temsiller kullanmış, özel örnekler üzerinde sistematik bir şekilde inceleme yaparak köşegenlerin nasıl oluştuğunu fark etmişlerdir. Öğrencilerin tamamına yakını bir köşeden çıkan köşegen sayısını belirleyip çokgenin kaç tane köşegeni varsa her birinden o kadar köşegen çizileceğini ancak bir köşegen iki kere sayıldığı için buldukları toplam sayıyı ikiye bölmeleri gerektiğini anlayabilmişlerdir. Farklı temsil kullanan öğrencilerin hem sözel hem de sembolik genellemede daha başarılı olduğu Steele ve Johanning'in (2004) araştırma sonuçları ile paraleldir. Bu noktada öğrencilerin diğer sorulardan farklı olarak doğrudan yapıyı inceleyerek geometrik bir yaklaşım kullanmaları, yani sadece sayılar arasında ezbere bir ilişki aramayıp çokgenin her bir köşeden çizilebilecek köşegenlerinin nasıl değiştiğini bilinçli bir şekilde incelemeleri onların daha çabuk genellemeye ulaşmalarını sağladığı düşünülmektedir. Mason ve arkadaşları (1985) da sistematik olarak yapılan özelleştirmenin genellemeye zemin hazırladığını ifade etmektedirler. Geometrik açıklama yapan bu öğrenciler kenar sayısı ile ilişkilendirme yaparak beklenen kuralı cebirsel olarak ifade etmişlerdir. Benzer bir çözüm yolu Steele ve Johanning (2004) gerçekleştirdikleri çalışmada yer almaktadır. Bu çalışmada araştırmacılar, öğrencilerden birinin öncelikle üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen gibi özel örnekleri inceleyip ardından çokgenin kenar sayısı ve köşegen sayısı arasında örüntü aramaya olanak sağlayan bir tablo oluşturduğunu ve bu tabloda köşegen sayısını nasıl elde ettiğini gösteren bir ek sütun açtığını fark etmişlerdir. Bu ek sütunda oluşturduğu genellemeyi sembolik olarak da ifade edebilen öğrenci kenar sayısından üçü çıkarmış, bunu kenar sayısının yarısı ile çarpması gerekeceğini ifade etmiş ve doğrulamasını örnekler üzerinde göstermiştir. Diyagram çizerek öğrencinin ilişkileri genelleyebildiği ve bunu sadece kendisinde var olan orijinal şemasını düzenleyip tabloya yerleştirerek yeni bir inşa durumu oluşturduğunu ayrıca temsiller arası etkileşimin öğrenciyi sembolik genelmeye daha kolay götürdüğü sonucuna ulaşmışlardır. Bu bağlamda problem çözme aşamasında benzer küçük örnekleri düşünmek yani özelleştirme yaparak örüntü algılamaya çalışıp daha sonra diyagram ya da farklı temsiller yardımıyla genellemeye daha çabuk ulaşılabileceği ve bu yolla ulaşılan genellemenin sembolik olarak ifade edilebilmesinin de kolaylaşacağı düşünülmektedir. Çünkü farklı temsil kullanımı öğrencilerin nicelikler arasındaki ilişkileri daha kolay yorumlayarak genellemeye ulaşmalarını sağlar. Çokgenlerin köşegen sayısını bulma probleminde yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden ikisinin (Hale ve Efe) çok farklı bir strateji ortaya attığı dikkat çekmiştir. Bu öğrenciler şekilleri incelerken çokgenlerin her bir köşesinden çıkan köşegen sayılarının bir örüntü oluşturduğunu fark etmişler ve bu örüntüyü biri şekiller üzerinde biri de listeleme yaparak ifade etmiştir. Her ne kadar öğrenciler bu strateji ile genel bir kural oluşturamasalar da öğrencilerin fark ettiği bu örüntünün bu soru ile ilgili yapılan çalışmalarda sıklıkla karşılaşılmayan bir strateji olduğu görülmüştür. Benzer olarak Steele ve Johanning'in (2004) çalıştığı öğrencilerden biri üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen ve yedigenin köşegen sayılarını içeren bir tablo oluşturup örüntü arayışı içine girmiştir. Öğrenci oluşturduğu tabloya "Köşegen sayısını nasıl elde ettim?" sorusuna cevap arayarak sayılar arasında;

N= kenar sayısı-3+kenar sayısı-3+ 0'a kadar geri say

şeklinde bir örüntünün varlığını fark etmiş ancak bunu her bir köşeden çizdiği köşegenleri inceleyerek değil aritmetik işlemlerin sonucunda bulmuştur. Bu oluşturulan genelleme yinelemeli strateji ile elde edilmiş ve sadece her bir çokgen için kendisinden önceki çokgenlerin köşegen sayıları bilindiğinde işe yaramıştır.

Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden bir diğeri (Rana) ise geometrik açıklama getirerek beklenen kurala ulaşmış ayrıca bunun yanı sıra farklı bir strateji olan kombinasyon ile de genellemeye ulaşmıştır. Başarı düzeyi arttıkça öğrencilerin daha esnek düşünebildikleri ve buna bağlı olarak problem çözmek için ürettikleri strateji sayılarının arttığı görülmüştür. Bu noktada sadece başarı düzeyinin değil aynı zamanda yaratıcılığın ve yaratıcı düşünen bireyler yetiştirmenin önemli olduğu düşünülmektedir. Fisher'ın (1995) da ifade ettiği gibi yaratıcı düşünen öğrencilerin yetişebilmesi için öğrenciler ezberden uzak tutulmalı ve problemle her karşılaşmalarında farklı şekilde düşünerek farklı yollar üretmeye yöneltilmelilerdir (Arıkan ve Ünal, 2012).

Araştırmada dikkat çeken bir başka durum ise öğrencilerin verilen bir problemi, kuralı uygulayarak hemen çözme isteğinde olmalarıdır. Özelikle beşgen grubu oluşturma probleminde öğrencilerin düşünme gerektiren, onları yorum yapmaya yönlendiren sorularla uğraşmak istemedikleri, daha çok işlemsel bilgilerini kullanarak çözebilecekleri problemler bekledikleri ve genelleme içeren problemlerle uğraşırken zorlandıklarından dolayı ikinci ya da üçüncü bir çözüm yolu aramak istemedikleri görülmüştür. Bu durum derin düşünme, nicelikler arası ilişki arama ve bunu daha geniş bir kümeye genişletme içeren problemlere öğretim programlarında çok fazla yer verilmemesinden yani öğrencilerin bu tarz sorulara alışkın olmamasından kaynaklanıyor olabilir. Oysaki Altun'un (2014) da ifade ettiği gibi rutin olmayan problemlerin birçoğu bir ilişki, düzen ve örüntünün açıklanmasıyla ilgili olduğundan, bunların öğretimi öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen ya da örüntü arama eğilimini artırır ve ispat fikrini geliştirir. Çoktan seçmeli sınavlarla değerlendirmesi yapılan öğretim programlarında öğretmenler kavramsal bilgiden daha çok işlemsel bilgi kullanımına önem vermek durumunda kalacağından öğrencilerin düşünmeleri ve sorgulamaları engellenmiş olur ki bunun da matematiksel düşünme becerilerinin gelişimine yardımcı olmayacağı düşünülmektedir. Çünkü Mason ve arkadaşlarının (1985) da ifade ettiği gibi matematiksel düşünme, sorgulama ve derinlemesine düşünme ile desteklenir.

Problemlerin genelleme süreçlerinde ise öğrencilerin fark ettikleri genellemeleri sözel olarak açıklayabildikleri halde cebirsel olarak ilişkiyi ifade etmede zorlandıkları belirlenmiştir. Benzer sonuçlarla Rivera ve Becker (2006); Özmantar, Bingölbali ve Akkoç (2008); Tall (2008); Arslan ve Yıldız (2010) ile Keskin, Akbaba ve Altun (2013) da karşılaşmıştır. Sadece bir tane yüksek başarılı öğrenci (Efe) iç açılar toplamı probleminde üç farklı strateji ile beklenen genellemeye ulaşmış, diğer öğrenciler tek bir strateji kullanmış ve zorlandıkları için farklı bir strateji arayışına girmek istememişlerdir. Bu durum Arıkan ve Ünal'ın (2012) çalışması ile paralellik göstermektedir. Genel olarak öğrencilerin kısa yollardan doğrudan sonuca ulaşma eğiliminde oldukları ve düşünmekten kaçınarak soru kalıplarını ezberlemeyi tercih ettikleri görülmüştür. Bu noktada da öğrencilerin ilköğretim boyunca düşünmeye yöneltici sorularla çok fazla karşılaşamadığı için bu şekilde davrandıkları düşünülmektedir. Buna rağmen görüşmelerde öğrencilere yöneltilen beş sorudan dördünde öğrenciler her ne kadar süreçte zorlanmış olsalar da birçoğu beklenen genellemelere ulaşmıştır. Bu durumun matematiksel düşünmenin gelişimi açısından oldukça önemli olduğu düşünülmektedir. Öğrencilere dördüncü soru olarak sorulan çevre problemi ise öğrencilerin alışkın olmadığı tarzda bir sorudur. Problem birden fazla durumu ele alarak yorumda bulunmayı gerektirdiğinden öğrencilerin büyük bir kısmının oldukça zorlandığı ve bu yüzden bu problemde özelleştirme aşamasında kalan öğrenci sayısının diğer problemlere oranla daha fazla olduğu dikkat çekmektedir. Eşkenar üçgen ve dik üçgen çizerek özelleştirme yapan öğrencilerden biraz daha esnek düşünüp daha iyi yorum yapabilenler, üçgen eşitsizliği kuralını dikkate alarak diğer üçgenleri de düşünmüşler ve son olarak da simetriyi dikkate almışlardır. Yüksek başarılı öğrencilerden sadece biri (Efe) beklenen doğru genellemeye ulaşırken öğrencilerden bazıları sınırlı sayıda noktayı dikkate alarak yanlış geometrik yer tahmininde bulunmuş ve sonuç olarak hatalı genellemelere ulaşmışlardır. Bu noktada öğrencilerin simetri, üçgen eşitsizliği, Pisagor bağıntısı, üçgen çizimi ve kenar uzunluklarının rasyonel olabilmesi gibi birden fazla durumu düşünerek bir genellemeye ulaşmaları beklenen soruda çoğu öğrencinin bu durumların hepsini birden değerlendiremediği, bu durumlardan sadece birine ya da birkaçına dikkat etmeleri yüzünden hatalı genellemeler yaptıkları düşünülmektedir. Bu durum Yeşildere ve Türnüklü'nün (2007) de belirttiği gibi öğrencilerin genelde birden çok veri grubunu ilişkilendirmede sıkıntı çektikleri bu yüzden de tek bir veri grubunu dikkate alarak çözüm yaptıklarının bir göstergesidir. Ayrıca öğretim programına bakıldığında genelde örüntü problemi içerisinde öğrencilerden genelleme yapmaları beklenmektedir. Bu açıdan sayı ya da şekil örüntülerinin genel kuralını bulmak için genelleme yapmaya alışkın olan öğrenciler aslında geometrik formda verilen genelleme problemlerine çok da aşina değillerdir. Buna rağmen araştırmadan elde edilen sonuçların matematiksel düşünme ve genelleme süreçleri açısından olumlu olduğu, öğrencilerde var olan bu hazırbulunuşluğun ilerleyen öğretim basamaklarında da genelleme ve daha üst düzey bir beceri olan ispatlama süreçlerinin gelişiminde öğrencilere iyi bir temel oluşturabileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda matematiksel düşünmenin gelişimin oldukça önemli olduğu, bu sebeple ilköğretim boyunca bu becerinin gelişimini öne çıkaracak yapıda problemler kullanılmasının gerekli olduğu ortaya çıkmaktadır. Özellikle genelleme gibi üst düzey matematiksel bir davranışın daha iyi anlaşılması için yapısal olarak benzer problemler üzerinde çalışmanın ve bunları çözmenin gerekliliği Sriraman (2004'den akt. Hashemi vd., 2013) tarafından da ifade edilmiştir. Araştırma sürecinde öğrencilerin tamamının ulaştıkları genellemelerin doğruluğundan emin olmak için birkaç özel örneği kural üzerinde denedikleri ve genellemeye nasıl ulaştıklarını ifade edebildikleri görülmüştür.

Sonuç olarak matematiksel düşünmenin bileşenleri düşünüldüğünde ilk aşamada (özelleştirme süreci) öğrencilerin verilen herhangi bir durum için ilgili ya da karşıt örnekler seçme, bu örnekleri tanımlama, anlatma, çizme ve farklı temsillerle gösterme gibi eylemleri kolaylıkla gerçekleştirebildikleri yani problemi anladıkları ancak sonrasında veriler arasında ilişki aramada öğrencilerin sorun yaşadıkları bu sebeple de ortaya attıkları stratejilerin çoğunun sonucunda tıkanma sürecine girdikleri belirlenmiştir. Tıkanma sürecine giren öğrenciler zor da olsa kendilerini genellemeye ulaştıracak stratejiler üretmeyi genelde başarabilmişlerdir. Ancak bu süreçte zorlanmaları bir strateji ile genellemeye ulaştıktan sonra farklı stratejiler düşünmekten kaçınma davranışında bulunmalarında rol oynamıştır. Genelde benzer stratejilerle genellemeye ulaşılmasına rağmen bazı öğrencilerin daha farklı düşünerek değişik stratejiler üretebildiği de dikkat çekmiştir. Ayrıca beklenen genellemeye ulaşıp bunu sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin çoğu, genellemeyi cebirsel olarak ifade etmekte oldukça zorlanmışlardır. Buna rağmen sonuçta öğrencilerin birçoğu aşina oldukları problemlerde beklenen genellemelere ulaşabilmişlerdir. Genellemeye ulaşan öğrenciler, öncelikle ulaştıkları ifadenin doğruluğundan emin olmak için başlangıçta düşündükleri özel örnekleri (özelleştirme) kullanmayı tercih etmişlerdir. Zihinden işlemler ya da kâğıt kalem kullanarak doğrulamayı gerçekleştiren öğrenciler, ulaştıkları ifadenin geometrik olarak ne anlama geldiğini genelde ifade edebilmişlerdir. Geometrik yaklaşım kullanarak genellemeye ulaşan öğrencilerin daha kolay açıklama yapabilmelerine rağmen sadece sayısal yaklaşım kullanan öğrencilerin açıklama yapmakta zorladıkları saptanmıştır.

4.3. ÖNERİLER

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak geliştirilen öneriler "Uygulamaya Yönelik Öneriler" ve "Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler" şeklinde iki başlık altında toplanmıştır.

Uygulamaya Yönelik Öneriler

- Matematik dersi öğretim programları, matematiksel düşünme sürecinin ve akıl yürütme becerilerinin gelişimine olanak sağlayacak şekilde düzenlenebilir, eksik kısımları geliştirilebilir.

- Öğrencilerin kullandığı ders kitapları işlemsel bilgiden daha çok kavramsal bilgi gelişimine yönelik olarak hazırlanarak kitaplarda öğrencilerin akıl yürütme, yorumlama, tahmin etme, genelleme yapma gibi becerilerin gelişimine olanak sağlayacak etkinliklere daha çok yer verilebilir. Bu bağlamda matematiksel düşünmenin tüm bileşenlerini öğrencilerde ortaya çıkaracak ve geliştirecek materyallerin hazırlanması, uygulanması ve kullanılması yaygınlaştırılmalıdır.

- Öğretmenlerin rutin problemlerin dışında günlük hayatla ilişkili rutin olmayan problemlerin çözüm sürecine önem vermeleri, yani tek bir strateji ile çözülebilen problemlerden ziyade birden fazla strateji kullanarak çözülebilen problemlere yer vermeleri gerekmektedir. Bu süreçte öğrencilerin birbirleriyle düşüncelerini paylaşacakları tartışma ortamları yaratılarak farklı çözüm yollarını fark etmeleri sağlanabilir ve bu yolla öğrencilerin daha esnek ve daha yaratıcı düşünmelerinin gelişimi desteklenebilir.

- Eğitim Fakültelerinde öğretmen adaylarına matematiksel düşünmenin gelişimine yardım edecek, öğrencileri sorgulayarak düşünmeye sevk edecek yöntemlerin nasıl uygulanacağı konusunda seçmeli derslerin açılması önerilebilir.

- Öğretmenlerin öğrencilere tahmin becerilerini kullanabilecekleri durumlar yaratmaları onların matematiksel düşünmelerine katkı sağlayabilir. Ancak bu süreçte öğrencilerin yaptığı tahminlerin rastgele olmayıp bilinçli bir şekilde yapılmasına dikkat edilmesi oldukça önemlidir. Bu doğrultuda öğretmenlere yönelik hizmet içi eğitim kapsamında tahmin ve tahmin stratejileri üzerine çalıştaylar düzenlenebilir.

- Öğretmenler genelleme çalışmalarında örüntüleri sadece sayısal ya da tamamen ezbere bir yaklaşımla ele almamalı, öğrencileri şekillerin yapısını analiz ederek ilişki aramaya yönlendirmelidirler. Bu yaklaşım, geometri problemlerinde ilişki arama, genelleme oluşturmada öğrencilere kolaylık sağlayabilir.

- Öğretmenlerin, formül verip öğrencileri işlem yapmaya yönelten sorular kullanmaya dayalı bir öğretim gerçekleştirmek yerine daha çok kuralı öğrencilerin keşfetmelerine olanak sağlayan kavramsal temelli yaklaşımlar kullanmaları öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişimine daha çok katkı sağlayabilir.

Araştırmacılara Öneriler

- Öğrencilerin matematiksel düşünme sürecinin incelendiği bu araştırma, farklı örneklemler ve farklı alanlardan problemler kullanılarak gerçekleştirilebilir.

- Öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin gelişimini destekleyecek, sorgulama yoluyla onları düşünmeye sevk edecek bir öğretime ne kadar inandıkları ve bunu ne kadar uygulayabildikleri araştırılabilir.

- Öğretmenlerin örüntü ve genelleme içeren problemler çözerken nasıl bir yaklaşım kullandıkları ve yaklaşımın öğrencilerin düşünme süreçlerine nasıl yansıdığı bir başka araştırma konusu olabilir.

- Öğrencilerin özelleştirme aşamasını atlayıp doğrundan varsayımda bulunmayı tercih etmelerinin altında yatan sebepler derinlemesine incelenebilir.

- Öğrencilerin sözel olarak ifade ettikleri genellemenin geometrik açıklamasını yapabilmelerine rağmen ulaştıkları genellemeyi cebirsel olarak ifade etmekte neden zorlandıkları araştırılabilir.

- Öğrencilerin genellemeye ulaşırken belirledikleri örüntüye göre değil de ezbere ilişkiler aramaya yönelmelerinin altında yatan sebepler araştırılabilir.

- Ortaokul öğrencileri üzerinde matematiksel düşünmenin nasıl geliştirilebileceğine ilişkin araştırmalar desenlenebilir.

- Problem çözme etkinlikleri sırasında öğrencilerin farklı stratejiler üretmekten kaçınmalarının sebepleri araştırılabilir.

EKLER

Ek 1. Eskişehir Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Belgesi

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ESKİŞEHİR

Sayı : 98074293/605.01/1529236 11/02/2015
Konu : Araştırma Projesi

VALİLİK MAKAMINA

İlgi: Eskişehir Anadolu Üniversitesi Genel Sekreterliği'nin 30.01.2015 tarih ve 815 sayılı yazısı.

İlgi yazı ile; Eskişehir Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı öğrencisi Duygu YILDIRIM'ın "Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçleri: Geometrik Problemlerin Genellenmesi" başlıklı tez çalışma kapsamında Araştırma İzin Komisyonu tarafından incelenmiş ve komisyon tarafından sakınca görülmediği tespit edilmiş olup, komisyon tarafından belirtilen okullarda yukarıda adı geçen projenin gerçekleştirilmesi uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde takdirlerinize arz ederim.

Barış HANCI
Milli Eğitim Müdür Yardımcısı

OLUR
..../02/2015

Nevzat ÖZEN
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

Güvenli Elektronik İmzalı
Aslı ile Aynıdır

Ek 2. Veli Bilgilendirme ve İzin Belgesi

VELİ İZİN BELGESİ

Veli Bilgilendirme

Sayın Veli,

Bu araştırma Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Programı'nda yürütmekte olduğum yüksek lisans tezimin çalışmasıdır. Araştırmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik problemleri genelleme süreçlerini incelemek amaçlanmaktadır.

Araştırma 2014-2015 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde gönüllü olarak seçilen ortaokul öğrencileri üzerinde gerçekleştirilecektir. Seçilen öğrenciler ile klinik görüşme yapılacaktır. Görüşme oturumları video kamera ile kayıt altına alınacaktır. Bu kayıtlar yalnızca araştırmayı analiz etme ve raporlaştırma aşamasında kullanılacak, isimler gizli tutulacaktır. Ayrıca bu kayıtlar araştırma kapsamı dışında hiçbir kişiyle ya da kurumla kesinlikle paylaşılmayacaktır. İstediğiniz takdirde kayıtlar tarafınıza iade edilecektir.

Araştırmaya katılmak istiyorsanız lütfen aşağıdaki izin belgesini doldurunuz. İlginize teşekkür ederim.

Duygu YILDIRIM

Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi

İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi ABD

İzin Belgesi

Yukarıda açıklanan araştırma kapsamında velisi olduğum ……………………….'ın araştırmanın gereklilikleri doğrultusunda etkinliklere katılmasına izin veriyorum.

Ayrıca araştırma kapsamında gerçekleştirilecek uygulamaların ve derslerin video kamera ile kayıt altına alınmasında sakınca yoktur.

Öğrenci Velisi

Ek 3. Öğrenci Bilgilendirme ve İzin Belgesi

ÖĞRENCİ İZİN BELGESİ

Sevgili Öğrenci;

Bu araştırma Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Programı'nda yürütmekte olduğum yüksek lisans tezimin çalışmasıdır. Araştırmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik problemleri genelleme süreçleri incelemek amaçlanmaktadır.

Araştırmada öncelikle sizlerin gönüllüğü esastır. Eğer katılmak isterseniz sizlerle, size uygun zamanlarda görüşmeler yapılacaktır. Görüşme oturumları video kamera ile kayıt altına alınacaktır. Bu kayıtlar yalnızca araştırmayı analiz etme ve raporlaştırma aşamasında kullanılacak, isimleriniz gizli tutulacaktır. Ayrıca bu kayıtlar araştırma kapsamı dışında hiçbir kişiyle ya da kurumla kesinlikle paylaşılmayacaktır. İstediğiniz takdirde kayıtlar elinize araştırma sonunda iade edilecektir. Bunların yanı sıra dilediğiniz zaman araştırmanın herhangi bir aşamasında çekilme hakkına da sahipsiniz. Bu araştırmada doğru ya da yanlış yanıtlarınıza odaklanılmayacak yalnızca düşünme süreçleriniz incelenecektir.

Araştırmaya katılmak istiyorsanız lütfen aşağıdaki izin belgesini doldurunuz. İlginize teşekkür ederim.

Duygu YILDIRIM
Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi

İletişim Bilgileri:
Tel:
Mail:

Öğrenci İzin Belgesi

Yukarıda açıklanan araştırmanın gereklilikleri doğrultusunda yapılacak olan etkinliklere katılmak istiyorum.

Ayrıca araştırma kapsamında gerçekleştirilecek uygulamaların ve derslerin video kamera ile kayıt altına alınmasında sakınca yoktur.

Öğrenci

Ek 4. Klinik Görüşme Soruları

GÖRÜŞME SORULARI

Adı:

Soyadı:

Sevgili Öğrenci;

Size verilen bu testte geometri öğrenme alanına ait sorular yer almaktadır. Testte 5 tane soru bulunmaktadır. Her soruyu dikkatlice okuduktan sonra yanıtlarınızı uygun boşluklara yazınız. Her soruda ne isteniyorsa açıkça ifade ediniz ve sesli düşününüz. Başarılar dilerim.

Duygu YILDIRIM

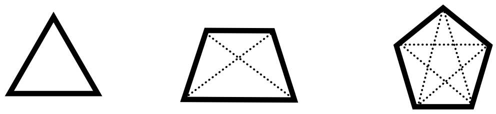
Matematik Öğretmeni

SORULAR

1) Prizma, piramit ve düzgün çok yüzlü gibi geometrik cisimlerin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır?

2) Üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen gibi geometrik şekilleri düşünerek, herhangi bir sayıda kenar sayısına sahip bir çokgenin iç açıları toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?

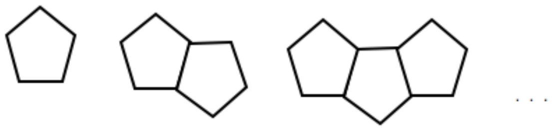
3) Aşağıda bazı çokgenlerin köşegenleri çizilmiştir. İnceleyiniz.



Buna göre n kenarlı bir çokgenin kaç tane köşegeni olduğunu bulmaya yarayacak bir kural bulabilir misiniz?

4) Bir koordinat sisteminde (4, 0) ve (8, 0) noktalarını belirtiniz. Köşe noktalarından ikisi bu noktalar ve çevresi 12 birim olan bir üçgen düşününüz. Buna göre bu üçgenin 3. köşesinin koordinatı için neler söyleyebilirsiniz? Mümkün olan bütün durumları nasıl bulabilirsiniz? Açıklayınız.

5) Kenar uzunluğu 5 cm olan bir düzgün beşgenden her defasında yanına birer eklenerek aşağıdaki gibi bir beşgenler grubu oluşturuluyor.



Çevresi 295 cm olan bir beşgenler grubu elde etmek için kaç beşgen yan yana konulmalıdır?

KAYNAKÇA

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim, 37*(165), 184-194.

Aktaş, M. ve Aktaş, D.Y. (2012). Öğrencilerin dörtgenleri anlamaları: Paralelkenar örneği. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 1*(2), 319-329.

Alkan, H. ve Güzel, E. B. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25*(3), 221-236.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6*(1), 25-37.

Altun, M. (2006). Matematik öğretiminde gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *XIX* (2), 223-238

Altun, M. (2014). *Ortaokullarda (5, 6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi.* (10.Baskı). Bursa: Aktüel Yayınları.

Amit, M. ve Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*, 111-129.

Arıkan, E. E. ve Ünal, H. (2012). Farklı profillere sahip öğrencilerle çoklu yoldan problem çözme. *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *1*(2), 76-84.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35*(156), 17-31.

Aydın, A., Sarıer, Y. ve Uysal, Ş. (2012). Sosyoekonomik ve sosyokültürel değişkenler açısından PISA matematik sonuçlarının karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim, 37*(164).

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (5. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Bal, A. P. (2011) Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik düşünme düzeyleri ve tutumları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(3). 97-115.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi 6.-8. sınıflar için*. (2. Baskı). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Becker, J. R. ve Rivera, F. (2006). Sixth graders' fi gural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), *Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 95-101). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Bogdan, R. C. ve Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.* 3rd ed-Boston: Allyn and Bacon.

Boz, N. (2008) . Matematik neden zor?. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, *2*(2), 52-65.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(l), 35-49.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. ve Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers

De Bock, D., Verschaffel, L. ve Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*,*35*(1), 65-83.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Driscoll, M. (2007). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Ekiz, D. (2003). *Eğitim araştırma yöntem ve metotlarına giriş.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Ellis, A. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194 - 229.

Erdoğan, T., Akkaya, R. ve Akkaya Ç.S., (2009). Van Hiele modeline dayalı öğretim sürecinin ilköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin yaratıcı düşünme düzeylerine etkisi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 9*(1), 161-194.

Fujita, T. ve Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, *9*(1), 3-20.

Garcia-Cruz, J. A. ve Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In A. Olivier & K. Karen (Eds.), *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Ginsburg, H.P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.517-545). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Güner, N., Sezer, R. ve Akkuş İspir, O. (2013). İlköğretim ikinci kademe öğretmenlerinin TIMSS hakkındaki görüşleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 33*, 11-29.

Hacısalihoğlu, H. H., Mirasyedioğlu, S. ve Akpınar, A. (2003). *Matematik öğretimi. Matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme.* (1. Baskı). Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Harel, G. ve Tall, M. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38–42.

Henderson, P. B., Marion, B. Fritz, S. J., Riedesel, C., Hamer, J., Scharf, C., et al. (2004). *Materials development in support of mathematical thinking.* {ONLINE} http://www.cs.geneseo. edu/~baldwin/math-thinking/iticse2002-paper.pdf adresinden 10.12.2014 tarihinde edinilmiştir.

Hashemi, N., Abu, M., Kashefi, H. ve Rahimi, K. (2013). Generalization in the Learning of Mathematics. *2nd International Seminar on Quality and Affordable Education (ISQAE*-October 7-10), Johor Bahru, Malaysia.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, ve T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classsrooms that Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim-Online, 2*(2), 2-9.

Keskin, M., Akbaba, S. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences, 1*, 33-50.

Köse, N. Y. ve Tanışlı, D. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıkları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 14*(3), 1203-1230

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The chalenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Liamputtong , P. (2009). Qualitative Research Methods, 3rd Ed., Pranee Melbourne: Oxford University Press.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *The Mathematics Teacher*, *96*(6), 416-421.

Ma, H. L. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceeding of the 31th Conference of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 225- 232). Seoul: PME. http://www.emis.de/proceedings/PME31/3/225.pdf

Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Revised Edition. England: Addison-Wesley Publishers, Wokingham.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Mason, J. ve Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: RoutledgeFalmer.

MEB. (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı ve kılavuzu*. Ankara: TTK Başkanlığı.

Merriam, S. B. (2002). Introduction to qualitative research. In S. B. Merriam (Ed.), *Qualitative research in practice* (pp. 3-17). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Miles, M. ve Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis.* Second Edition. California: Sage Publications.

National Council of the Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.

Olkun, S. ve Toluk Z. (2007). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Özmantar, M. F., Bingölbali, E. ve Akkoç, H. (2008). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Öztürk, D. ve Uçar, S. (2010). TIMMS verileri kullanılarak Tayvan ve Türkiye'deki 8. sınıf öğrencilerinin fen başarısına etki eden faktörlerin belirlenmesi ve karşılaştırılması. *Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 19*(3), *241-256.*

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods.* Second Edition. London: Sage Publications.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Second Edition. Princeton: Princeton University Press.

Rico, L. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 87–102). Valencia: University of Valencia.

Rivera, F. ve Becker, J. R. (2006). Accounting for sixth graders' generalization strategies in algebra'. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (*Vol 2*, s.155-157). *Mérida, México, Universidad Pedagógica Nacional*.

Sasman, M., Linchevski, L., Olivier, A. ve Liebenberg, R. (1998). Probing children's thinking in the process of generalisation. In *Fourth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA. Pietersburg*.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. (Ed. D.A. Grouws). *In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of The National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334-370). Newyork: Macmillan.

Sevgen, B. (2002). Matematiksel düşünce yapısı ve gelişimi. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi: 16-18-Eylül-2002,* Ankara: Ortadoğu Teknik Üniversitesi.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K. (2006). What is Mathematical Thinking and Why is It Important? Progress report of the APEC project: "Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II) - Lesson Study focusing on Mathematical Thinking".

Steele, D. ve Johanning D.I. (2004). A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 65–90.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2008). *The historical and individual development of mathematical thinking: Ideas that are setbefore and met-before.* Plenary presented at Colóquio de Histório e Tecnologia no Ensino Da Mathemática, UFRJ, Brazil.

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi.* Doktora tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice, 9*(3), 1453-1497.

Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim, 36*(160), 184-194.

Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 12(*44). 255-283.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 234- 243.

Üstün, I. ve Ubuz, B. (2004). Student’s development of geometrical concepts through a dynamic learning environment. In *The 10th International Congress on Mathematics Education (pp.1-6),* Denmark. *http://www. icme-10. dk/index. html*

Yayan, B. (2009). Uluslararası matematik ve fen çalışması (TIMSS 2007) ve Türk öğrencilerinin TIMSS 2007’deki matematik performanslarının değerlendirilmesi. *Cito Eğitim: Kuram ve Uygulama Dergisi, 3*, 39-52.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40*(1), 181-213.

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2011) Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*, 141-153.

Yıldırım, C. (2008). *Matematiksel düşünme.*(5. Baskı). İstanbul: Remzi Kitapevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel aratırma yöntemleri.* (5. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, R., Argün, Z. ve Keskin, M. (2009). What is the role of visualization in generalizaton processes: The case of preservice secondary mathematics teachers. *Humanity & Social Sciences Joural. 4*(2), 130-137.

Yılmaz, R. ve Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*(2), 564-576.

Yücel, C., Karadağ, E. ve Turan, S. (2013). TIMSS 2011 ulusal ön değerlendirme raporu. Eskişehir: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Eğitimde Politika Analizi Raporlar Serisi I. http://www.egitim.ogu.edu. tr/upload/Dokumanlar/TIMSS_2011.pdf adresinden edinilmiştir.

Zopluoğlu, C. (2014). Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) 2012 Türkiye Değerlendirmesi: Matematik.