ORTAOKUL 5. SINIF ÖĞRENCİLERİNDE

İLİŞKİSEL DÜŞÜNMENİN GELİŞİMİ:

BİR ÖĞRETİM DENEYİ

Ayhan KIZILTOPRAK

(Yüksek Lisans Tezi)

Temmuz 2014

ORTAOKUL 5. SINIF ÖĞRENCİLERİNDE İLİŞKİSEL DÜŞÜNMENİN GELİŞİMİ: BİR ÖĞRETİM DENEYİ

Ayhan KIZILTOPRAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2014

ÖZET

ORTAOKUL 5. SINIF ÖĞRENCİLERİNDE İLİŞKİSEL DÜŞÜNMENİN GELİŞİMİ: BİR ÖĞRETİM DENEYİ

Ayhan KIZILTOPRAK
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı
Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2014

Danışman: Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Bu araştırmanın amacı, ortaokul beşinci sınıf öğrencilerinin ilişkisel düşünmelerinin gelişimini incelemektir. Araştırma öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerinin nasıl geliştiğini ortaya çıkarmayı amaçladığından, araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi deseni kullanılmıştır. Araştırmanın uygulaması 2012-2013 öğretim yılında Eskişehir il merkezindeki bir ortaokulda 5. sınıfa devam etmekte olan 6 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi kapsamında öğrencilerle öncelikle ön görüşmeler yapılmıştır. Ardından ilişkisel düşünmeyi destekleyici toplam 8 oturumdan oluşan bir öğretim süreci gerçekleştirilmiştir. Gelişimin gözlenmesi amacıyla da öğrencilerle son görüşmeler yapılmıştır. Araştırma verileri “video kayıtları”, “klinik görüşmeler”, “öğrenci etkinlik kağıtları”, “araştırmacı günlükleri” ve “öğrenci günlükleri” yoluyla toplanmıştır. Toplanan verilerin analizi “verilerin işlenmesi”, “verinin görsel hale getirilmesi” ve “sonuç çıkarma ve teyit etme” basamakları dikkate alınarak yapılmıştır.

Araştırmanın öğretim süreci kapsamında gerçekleştirilen oturumlar öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerini geliştirebilecek toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri ile ilgili etkinlikleri kapsamaktadır. Bu etkinliklerin sonucunda öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerini kullanarak işlem özelliklerini kavradıkları, soruların çözümlerinde sonuç bulma odaklı yaklaşım yerine, toplama ve çıkarma işlemlerinde toplananlar, eksilenler ve çıkanlar arasındaki toplamsal ilişkilere, çarpma ve bölme işlemlerinde ise çarpanlar, bölünenler ve bölenler arasındaki çarpımsal ilişkilere odaklandıkları saptanmıştır.

Araştırmanın ön ve son görüşmelerinin analizi sonucunda tüm öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerinin geliştiği belirlenmiştir. Bu gelişim sürecinde temel aritmetik kavramların gelişimi ile ilişkisel düşünmenin gelişimi arasında karşılıklı bir etkileşim olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin dört işleme ilişkin toplanan, toplam, eksilen, çıkan, fark, çarpan, çarpım, bölünen, bölen ve bölüm kavramlarını geliştirdikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri formal olarak ifade edemeseler bile etkin bir biçimde kullandıkları görülmüştür. 6. sınıfta öğrenilen işlem özelliklerinin ilişkisel düşünme yoluyla aritmetik öğrenimi kapsamında 5. sınıfta öğrenilebileceği tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin eşit işaretini sonuç bulmanın yanı sıra sayılar, şekiller ve ifadeler arasında ilişki kurmaya yarayan bir sembol olarak algıladıkları saptanmıştır. Araştırmada ilişkisel düşünmenin odağında olan sayılar ve işlemlerin temel özelliklerinin vurgulanmasının dört işlem becerilerini geliştirirken bilinmeyeni bulmada belirleyici olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, cebirsel düşünme, eşit işareti, ilişkisel düşünme, öğretim deneyi

ABSTRACT

DEVELOPMENT OF RELATIONAL THINKING OF FIFTH GRADE STUDENTS: A TEACHING EXPERIMENT

Ayhan KIZILTOPRAK
Department of Mathematics Education
The Graduate School of Educational Sciences

July 2014

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

The aim of this study is to investigate the development process of relational thinking skills of fifth grade students. Since the study aims to reveal how the students' relational thinking skills develop, teaching experiment design among qualitative research methods was used in the study. The study was held with a total number of six fifth grade students in a middle school in Eskisehir in 2012- 2013 teaching year. Within the teaching experiment design, initially pre-interviews were conducted with students. Then a teaching process, which consist of 8 teaching episodes supporting relational thinking, realized. Afterwards, post interviews were conducted with intend to observe the development. The data were collected with "video recordings", "clinical interviews", "students' work sheets", "researcher's diary" and "students' diaries". The analysis of data was held by considering the three phases consisting of "data reduction", "data display" and "conclusion drawing and verification".

The teaching episodes within the teaching process of the study include the activities associated with addition, subtraction, multiplication and division which could improve students' relational thinking skills. As a result of these activities it is determined that students conceptualized the properties of the operations by using relational thinking skills, focused on the additional relationships among addends, minuends and subtrahends in the context of addition and subtraction, and focused on multiplicative relationships among multipliers, dividends and divisors in the context of multiplication and division instead of the result oriented approach.

As a result of the analysis of the study's pre and post-interviews, it is observed that all of the students' relational thinking skills have developed. It is determined that there was a mutual interaction among the development of basic arithmetical concepts and development of the relational thinking skills in this development process. It was seen that students conceptualized the concepts associated with operations such as addend, sum, minuend, subtrahend, difference, multiplier, product, dividend, divisor and quotient, and also even if they can't express the relationships among them formally they can use these relationships effectively. It was determined that properties of operations which take part in the sixth grade mathematics curriculum can be learned in the context of relational thinking in the fifth grade. It was also seen that students understood the equal sign not only an announcement of the result of an operation but also a symbol of a mathematical equivalence which provides to relate among numbers, shapes and expressions. In the study it is inferred that emphasizing the basic properties of numbers and operations which is in the center of the relational thinking be determinative to find out the unknowns while developing the procedural skills.

Key Words: Mathematics education, algebraic thinking, equal sign, relational thinking, teaching experiment.

ÖNSÖZ

Öğretmenlik mesleğimdeki gelişimimi bir adım öteye taşıyabilmek için başlamış olduğum bu serüvenin son noktasına (ya da yeni bir başlangıca) varabilmek benim için bir umut ve gurur kaynağı olmuştur. Yaklaşık üç yıllık emeğin sonucunda ortaya çıkan bu tezde aritmetikten cebire geçiş dönemindeki 5. sınıf öğrencilerinin bu geçiş döneminin önemli bileşenlerinden biri olan ilişkisel düşünme becerisinin gelişimi incelenmiştir.

Bu çalışmanın başlangıcından itibaren beni destekleyen, cesaretlendiren, karşılaştığım olumsuzluklarda bana umut veren ve konu seçiminden tezin sonuçlanmasına kadar katkısını her zaman hissettiğim değerli öğretmenim ve danışmanım Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE'ye sonsuz teşekkür ederim. Cebirsel düşünmeye ilgi duymamı sağlayan aynı zamanda tez jürimde yer alarak değerli görüş ve önerileriyle tezime katkıda bulunan Doç. Dr. Dilek TANIŞLI' ya teşekkür ederim. Tez jürimde olmayı kabul eden Yrd. Doç. Dr. Melih TURGUT' a zaman ayırdığı ve değerlendirmeleri ile tezime katkıda bulunduğu için teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana vermiş oldukları kıymetli katkılarından dolayı derslerini almış olduğum Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim. 3 sene boyunca beraber yürüdüğümüz bu yolda her zaman desteğini hissettiğim Mehmet DUR'a ve yardımlarını esirgemeyen değerli dostum Ömer Faruk AYDIN'a teşekkür ederim. Bu tezin yazılmasında en az benim kadar istekli olan, yardımlarını esirgemeyen Sami Sipahi Ortaokulu öğretmen ve idarecilerine teşekkürü bir borç bilirim. Bu çalışmanın kamera çekimlerinde ve sınıf ortamının fiziksel şartlarının hazırlanmasında emeklerinden dolayı Bayram AKDENİZ, Osman KUBAŞ, Abdullah ERDOĞAN, Eyyüp ŞAHİN, Nermin YANBAKAN, Pelin CİN ve Ali CİN' e teşekkür ederim.

Beni bugünlere getiren, daima desteklerini hissettiğim, varlığımı borçlu olduğum sevgili annem Ayşe KIZILTOPRAK'a, babam Hacı KIZILTOPRAK'a ve abim Gökhan KIZILTOPRAK'a sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak ilk günden son güne kadar daima yanımda olan, sevgisini ve desteğini her zaman hissettiğim biricik eşim Fatma KIZILTOPRAK’a teşekkür eder ve bu tezi ona ithaf ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Ayhan KIZILTOPRAK
MATEMATİK Eğitimi Anabilim Dalı
Yüksek Lisans

Eğitim

Lisans: 2001-2005 Gazi Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

Lise: 1997-2001 Alparslan Anadolu Lisesi (Ankara)

İş

2011-… MEB, Sami Sipahi Ortaokulu (Odunpazarı/ Eskişehir)

2010-2011 MEB, Başaran İlköğretim Okulu (Osmangazi/ Bursa)

2006-2010 MEB, Mihalıççık Kayı 60.Yıl İlköğretim Okulu (Mihalıççık/ Eskişehir)

2005-2006 MEB, Göktepe İlköğretim Okulu (Merkez/ Muğla)

Seçilmiş Yayınlar

Kızıltoprak, A. & Köse, N. Y. (2013). Eşit işaretini anlama ve ilişkisel düşünme. 12. Matematik Sempozyumu Toplumda Matematik (23-25 Mayıs 2013), ss. 76-77, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Kişisel Bilgiler

Doğum Yeri ve Yılı: Ankara -1983

Cinsiyeti: Erkek

Yabancı Dili: İngilizce

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics – Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi

EARGED : Eğitim Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı

TDK : Türk Dil Kurumu

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Giderek karmaşıklaşan dünyamızda matematiğin, bireylerin günlük yaşamlarında karşılaştıkları problemleri çözmelerinde gereksinim duydukları düşünme becerilerini geliştirmede en önemli araçlardan biri olduğu söylenilebilir. Bu nedenle ilkokuldan başlayarak yükseköğretime kadar devam eden süreçte matematik her düzeyde ve her alanda yer almaktadır (MEB, 1999). Ancak yapılan uluslararası çalışmalar öğrencilerin matematik öğrenmede ve matematik yapmada zorlandıklarını göstermektedir (Earged, 2007, 2010). Bununla birlikte PISA, TIMMS gibi uluslararası çapta yapılan değerlendirme çalışmalarında ülkemizin alt sıralarda yer alması matematik eğitiminde sorunlar olduğunu düşündürmektedir (Altun, Aydın, Akkaya ve Uzel, 2013).

Ülkemizde uluslararası sınavlarda alınan sonuçların istenilen düzeyde olmaması ile birlikte matematik programlarında yenileme çalışmaları yapılmıştır. 2012-2013 eğitim öğretim yılı ile beraber "4+4+4" eğitim modeline geçilmiş ve ilkokulu bitiren öğrenciler 5. sınıfta ortaokul bünyesinde öğrenim görmeye başlamışlardır. Bundan dolayı ilköğretim matematik dersi öğretim programı yenilenerek ortaokul matematik dersi öğretim programı hazırlanmıştır. Bu öğretim programı, öğrencilerin yaşamlarında gereksinim duyacakları matematiksel bilgi, beceri ve tutumları kazandırmayı amaçlamakla birlikte kavramsal öğrenmeyi destekleyen öğrencilerin işlemleri akıcı bir şekilde yaparken aynı zamanda ilişki kurma ve problem çözme becerilerinin gelişimine vurgu yapan bir noktadadır (MEB, 2013). Bu öğretim programının başarılı bir şekilde uygulanması ile öğrencilerin matematiğe karşı olumlu tutum geliştirebilecekleri ve özgüven sahibi olabilecekleri düşünülmektedir.

İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programında (2009) matematiksel kavramların süreç içerisinde gerçekleşmesi ve bu süreçte ilişkilerin araştırılması, tartışılması ve genelleştirilmesi gerektiğinden bahsedilmektedir. Program doğrultusunda kazandırılması hedeflenen kazanımlardan bir tanesi de öğrencilerin matematiği öğrenirken ilişkilerden yararlanabilmeleridir. Yenilenen ortaokul matematik dersi 5-8. sınıflar öğretim programında (2013) ise öğrencilerin kendi deneyimleri aracılığıyla matematiksel anlamlar oluşturmasına ve ilişkilendirme yapmalarına önem verilmektedir. Bu süreçte öğrencilerin öğrenme sürecinde aktif rol alması ve sürecin öznesi olması gerektiği vurgulanmaktadır. Kavramların temsil biçimleri arasında ilişki kuran öğrencinin kuralları doğrudan ezberlemek yerine kuralların arkasında yatan ilişkileri görmesi gerektiği belirtilmektedir.

Matematik, öğrenilmesi en zor konu alanlarından biridir. Matematiğin öğrencilere zor gelmesinin ve öğrenilmesinde güçlükler yaşanmasının temel nedenlerinden biri soyut ilişkiler ağından oluşmasıdır. Bu soyut ilişkilerin en yoğun kullanıldığı ve görüldüğü öğrenme alanı ise cebirdir. Yapılan çalışmalarda özellikle cebirin öğrenilmesinde güçlük yaşanılan konulardan biri olduğu belirtilmiştir (Blanton, 2008; Carpenter, Levi, Franke ve Zeringue, 2005; Dede ve Argün, 2003; Lee, 1996; Usiskin, 1997). İlkokulda aritmetik işlemlerin içerisinde olan çocuk için cebir zordur. Cebirin öğrenilmesi sadece işlemsel öğrenme ile sınırlı kaldığında ve kavramsal öğrenme ile desteklenmediğinde tam anlamıyla gerçekleştirilemez.

Skemp’e (1976) göre işlemsel öğrenme matematiksel bir kavramı tam olarak anlama olmamakla birlikte, öğrencilerin ve öğretmenlerin anlamadan bir kurala ve bu kuralı kullanma yeteneğine sahip olmasıdır. İşlemsel öğrenmenin bazı faydaları vardır; karşıt iki kavramın birleştirilmesine yardımcı olur, genel terimler arasındaki farklılığın formüle edilmesi çalışmaları için iyi bir hazırlıktır. Ayrıca, kendi içeriği bağlamında anlaşılması daha kolaydır, ödülü daha çabuk ve daha görünürdür ve doğru cevaplar çok daha hızlı bulunabilir.

Günümüzde birçok insanın matematiğin formüllerden ve bu formüllerin uygulanmasından ibaret olduğunu düşündüğünü görmekteyiz. Oysaki ilişkisel öğrenme matematiksel kavramlar arasında geçiş yapabilme, herhangi bir kurala ihtiyaç duymama, gerekli durumlarda kendi kurallarını üretebilme, neden böyle oldu sorusuna mantıklı cevaplar verebilme gibi pek çok üst beceriyi gerçekten anlamayı ifade eder. Skemp (1976) matematiğin tam olarak öğrenilebilmesi için ilişkisel ve işlemsel öğrenmenin birlikte desteklenmesi gerektiğini ileri sürmüştür.

Carpenter, Franke ve Levi (2003) ilişkisel düşünmenin iki nedenden dolayı öğrencilere öğretilmesi gerektiğini savunmaktadırlar. Bu nedenlerden ilki, ilişkisel düşünmenin aritmetik öğretiminde kolaylık sağladığı gibi cebirsel düşünme için de ön koşul olmasıdır. Cebirsel düşünme ayrı bir başlıktan öte aritmetik öğrenimiyle birlikteliği zorunlu olan ve böylece aritmetik öğrenimini daha da kolaylaştırarak, verimliliği arttıracak bir düşünme becerisidir. İkinci olarak; ilişkisel düşünme cebire geçiş için sağlam bir temel sağlar. Öğrenciler geleneksel yöntemle öğrendiklerinde dört işlemi sadece bir uygulama olarak görürler.

İlişkisel düşünme sayı durumlarının öğrenilmesinde yardımcı olduğu gibi, sayı durumlarının öğrenilmesi de ilişkisel düşünmenin gelişimine yardımcı olur. Daha da ötesi dağılma özelliği gibi işlem özelliklerini kullanabilmede, büyük sayıları kolay bir biçimde çarpmada etkili yöntemler sunar. İlişkisel düşünme sayılar ve ilişkilerin özel bir yolu olarak düşünülebilir ve anlayarak öğrenmeyi kolaylaştırır (Carpenter vd., 2005). Koehler (2004) öğrencilerin sayılar ve sayılar arasındaki ilişkileri ararken cesaretleneceğini ve bu sayede işlemleri farklı yollarla yapabileceğini ve işlemler arası dönüşümleri kullanabileceklerini belirtmiştir. Böylelikle ilişkisel düşünmenin esas amaçlarından biri olan işlem yükünü azaltabilmek kolaylaşacaktır (Köse ve Tanışlı, 2011).

Yeni eğitim sistemiyle birlikte ortaokula dönüşen 5. sınıf öğrencilerinin ilişkisel düşünme becerilerinin belirlenmesi ve geliştirilmesi 6. sınıftan itibaren cebirle karşılaşmalarında aritmetikten cebire geçişin daha sorunsuz ve daha kolay olmasını da sağlayabilir. Bu önem doğrultusunda, bu çalışmada 5. sınıf öğrencilerinin ilişkisel düşünme becerilerinin belirlenmesine ve geliştirilmesine odaklanılmıştır. Bu odak doğrultusunda ise öğrencilerin öncelikle ilişkisel düşünme becerileri belirlenmiş, ardından bu becerileri geliştirmeye yönelik bir öğretim süreci tasarlanmış ve son görüşmeler ile öğrencilerdeki gelişim incelenmiştir.

1.1. Cebir

Cebir en genel anlamı ile dış dünyamızı anlamamızı sağlayan bir araç olarak görülebilir. Ancak öğrenciler sembollerle kurulu bir dil olan cebiri anlamlandırmada ve kullanmada sıkıntı çekerler. Ortaokula geçen öğrenciler yaş itibariyle somut düşünce yapısından soyut düşünceye geçebilmektedir. Soyut ilişki yapılarından oluşan cebirin ortaokul yıllarından itibaren öğretimine giriş yapılabilir. Bununla birlikte cebir öğrencilere formal olarak ilkokul yıllarında öğretilmese de sınıf içi tartışmalarla ve öğrenci deneyimleriyle birlikte, cebire geçişi kolaylaştıracak kavram ve becerilerin geliştirilmesine önem verilmelidir.

Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Topluluğu (National Council Teachers of Mathematics (NCTM), 2000) tüm öğrencilerin cebiri öğrenmesi gerektiğini vurgulamaktadır. İlk yıllarda formal cebire yer verilmese de örüntüler, eşitlik, fonksiyonel düşünme, sıralama sınıflama ve karşılaştırma etkinlikleri gibi cebirsel düşünmeyi geliştirici konu, kavram ve becerilere odaklanılmalıdır.

Cebir ile ilgili tanımlara bakıldığında ise kişilere ya da bağlama göre farklı algılamaların söz konusu olduğu görülmektedir. Örneğin; çoğu insan için cebir, harfleri ve sembolleri kullanarak karmaşık denklemleri çözebilmek ya da basit bir şekilde cebirsel anlatımlar yapabilmektir (Blanton, 2008). Cebir, insanların matematiği bir dil olarak düşündüklerinde zihinlerinde oluşan semboller dizisidir. Ancak semboller dizisi kendi başına cebiri tanımlamada yetersiz kalmaktadır (Lee, 1996).

Matematikçiler arasında ise cebir tipik bir şekilde genelleştirilmiş aritmetik olarak anlaşılır (Carpenter vd., 2003; Lee, 1996). Genelleştirilmiş aritmetik, temel aritmetik işlemlerden somut olarak yola çıkarak anlamlı bir genellemeye varmadır. Lee (1996) matematiğin bir kültür olarak ele alındığında cebirin bu kültür altında yer alan bir alt kültür olduğunu kabul etmekte ve bu bakış açısının cebiri tanımlamada esneklik sağladığını vurgulamaktadır.

Okul matematiğinde cebir, sayılar bağlamında genellemelerin ifade edilmesi ve manipüle edilmesi için sembollerin kullanılması anlamına gelir (Lee, 1996). Bu ifade okulda öğrenilen cebire ilişkin geleneksel görüşü yansıtmaktadır. Okul matematiğindeki cebir sembolik manipülasyonlar yoluyla çok çeşitli eşitlik ve eşitsizliklerin çözümünü merkeze alan bir imaja sahiptir (Watanabe, 2008). İleri matematik için ise bir kapı açıcıdır. Gerçekte okul matematiğinde cebir daha çok bir araç olarak ele alınmaktadır. Alanyazında araştırmacılar okul matematiğinde cebiri NCTM standartları ile de uyumlu olduğu görülen dört boyutta ele almaktadır (Örn; Blanton ve Kaput, 2005; Carpenter vd, 2003; Kilpatrick ve Izsak 2008; Usiskin, 1997).

- Genelleştirilmiş aritmetik anlamında cebir
- Fonksiyonların, örüntülerin ve ilişkilerin çalışılması anlamında cebir
- Problem çözmede bir araç olarak cebir
- Yapıların çalışılması anlamında cebir

Bir başka açıdan bakıldığında cebir genellemelerin dilidir (Usiskin, 1997). Eğer bir işlemi bir kez yapıyorsak cebir kullanmamız gerekmeyebilir. Ancak bir işlemi tekrar tekrar yapıyorsak, cebir yaptığımız işlemler için açıklayıcı, basit bir dil sağlar. Bu dil formüllerin dili olarak düşünülebilir. Örneğin karenin alanı birim karelerden yararlanarak formül kullanmadan bulunabilir. Ancak bu işlemi bir kez değil de sürekli olarak yapıyorsak her defasında birim karelere çevirerek ve bu kareleri sayarak hesaplamak yerine, bu işi daha da kolaylaştıracak bir genellemeye, iki kenarını çarparak hesaplamaya başvurabiliriz.

Cebirin kendine özgü bu dili cebirsel düşünme için gereklidir. Cebirin tam ve anlamlı öğrenilebilmesi için cebirsel düşünmenin okul öncesinden başlayarak erken yaşlardan itibaren kazandırılmasına yönelik çalışmaların yapılması gerektiği vurgulanmaktadır. Cebirsel düşünmenin neden önemli olduğunu açıklayabilmek için, öncelikle cebirsel düşünmenin bileşenlerini anlamak gerekir (Kriegler, 2004).

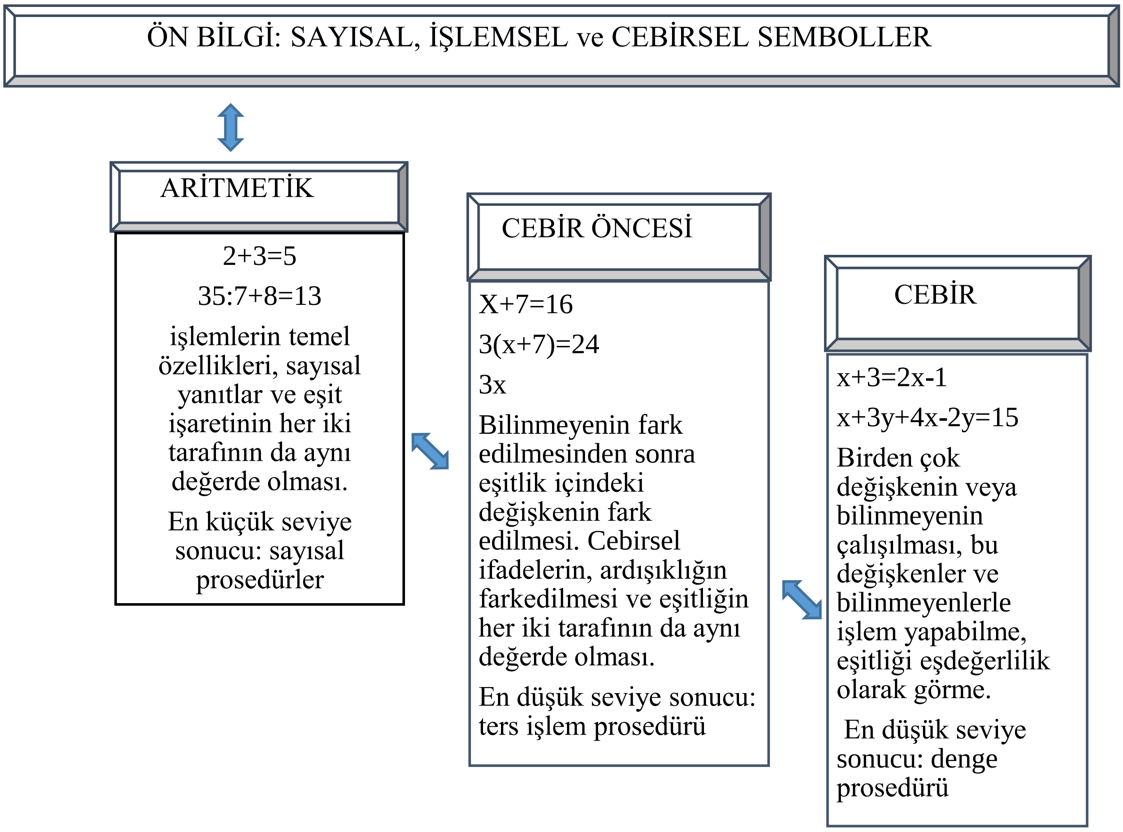
1.2. Cebirsel Düşünme

Cebirsel düşünme; fonksiyonel düşünme, genelleme, eşitlik kavramı, modelleme, temsil kullanımı (grafik, tablo, …), problem çözme gibi çeşitli kavram ve becerileri içeren üst düzey bir düşünme olarak görülebilir. Cebirsel düşünmenin gelişimi ilişkili olduğu bu becerilerin geliştirilmesi ile mümkündür. Cebirsel düşünmenin bileşenleri alanyazında farklı şekillerde ele alınmıştır. Cebirsel düşünme kavramı, genellemelerin yapılmasını ve sembollerin matematiksel fikirleri temsil etmede ve problemleri temsil edip çözmede kullanılmasını merkeze almaktadır (Carpenter ve Levi, 2000). Cai ve Moyer (2008) erken sınıflarda cebirsel düşünmenin ne olduğuna ilişkin bir görüş birliği olmadığını ancak aritmetiğin ve işlemsel akıcılığın sınırlarını aştığının ve daha derin matematiksel yapılarla çalışmak için gerekli olduğunun genel olarak kabul edildiğini belirtmişlerdir.

Kriegler (2004) cebirsel düşünmenin bileşenlerini iki kategoriye ayırmıştır. Bunlardan biri matematiksel düşünme araçlarının gelişimi, diğeri ise bu araçların geliştirileceği temel cebirsel konu bağlamıdır. Matematiksel düşünme araçları analitik zihinsel alışkanlıklardır ve problem çözme becerileri, temsil becerileri ve niceliksel muhakeme becerileri olmak üzere üç başlık altında incelenmektedir. Bu becerilerin geliştirileceği konu bağlamında ise, cebir aritmetiğin genellenmesi olarak, bir dil olarak ve fonksiyonlar ile matematiksel modelleme için bir araç olarak görülmektedir. Dolayısıyla cebirsel düşünme, matematiksel düşünme araçları ve temel cebir konularının birbiriyle sürekli karşılıklı etkileşim içinde oldukları görülebilir. Örneğin; matematiksel düşünme becerileri geliştikçe, cebirsel düşünme de gelişir, cebirsel düşünme geliştikçe temel cebir konuları da giderek derinleşir. Dolayısıyla cebirsel düşünme, kişilerin problem çözme becerilerini, niceliksel muhakeme becerilerini geliştirir ve ileri matematik konularında başarılı olmalarını sağlar.

Kaput (1999) cebirsel düşünmenin beş farklı biçiminden bahsetmektedir. Bunlar matematiğin tümündeki aritmetik ve örüntülerden genelleme, sembollerin anlamlı kullanımı, sayı sistemindeki yapıların çalışılması, fonksiyonlar ile örüntülerin çalışılması ve bunları birleştirecek matematiksel modelleme sürecidir. Özellikle sembollerin anlamlı kullanımı ve sayı sistemindeki yapıların çalışılması cebire geçiş sürecinde önemli bir yere sahiptir. Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2010) ise cebirsel düşünmenin üç temel konudan oluştuğunu belirtmiştir. Bunlar; *genellemelere götüren örüntülerin kullanımı, değişimin çalışılması* ve *fonksiyon* kavramıdır. Kieran (1996) ise okulda öğretilen cebirde öğrencilerin meşgul oldukları etkinliklere dayalı olarak cebirsel düşünmeye ilişkin *oluşumsal etkinlikler, dönüşümsel etkinlikler ve genel üst düzey etkinlikler* olmak üzere üç boyuttan oluşan bir model geliştirmiştir. Modele göre oluşumsal etkinlikleri cebirin temel nesneleri olan eşitliklerin ve ifadelerin biçimlendirilmesini içermektedir. Problem durumlarını ifade eden ve bir bilinmeyen içeren eşitlikler, geometrik ya da sayısal örüntülerin genellemelerinin ifade edilmesi, sayılar arasındaki ilişkilerle ilgili kuralların ifade edilmesi gibi etkinlikler bu boyuta örnek olarak verilebilir. İkinci boyut olan dönüşümsel etkinlikler daha çok kurala dayalı etkinlikler olup benzer terimlerin toplanması, cebirsel ifadelerin genişletilmesi, sadeleştirilmesi, cebirsel ifadelerle toplama ve çarpma gibi etkinlikler içerir. Üçüncü boyut olan genel üst düzey etkinlikler ise, cebirin bir araç olarak kullanıldığı ancak cebire özgü olmayan üst düzey matematiksel etkinliklerdir. Problem çözme, modelleme, yapıların fark edilmesi, değişimin çalışılması, genelleme, ilişkilerin analizi, doğrulama, kanıtlama ve tahmin etme gibi etkinliklerdir. Kieran (2004) daha sonra bu modeli revize ederek erken sınıflarda cebirsel düşünmenin gelişiminin nicelikler arasındaki ilişkilerin analizi, yapıların fark edilmesi, değişimin çalışılması, genelleme, problem çözme, modelleme, kanıtlama ve tahmin etme etkinliklerinin sonucunda ortaya çıkan belirli düşünme yollarının gelişimini gerektirdiğini ileri sürmüştür.

Boulton, Lewis, Cooper, Atweh, Pillay ve Wills (2000) cebirsel düşünmenin gelişim basamaklarını inceleyerek cebir bilgisinin gelişimine ilişkin bir model oluşturmuşlardır. Bu modele göre öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin ardışık olarak geliştiği ve bir basamaktaki gelişim yeterli düzeye ulaşmadan bir üst basamağa geçişin sağlıklı olmayacağı ileri sürülmektedir. Bu modelin ilk basamağında öğrencilerin öncelikle ters işlem, değişme özelliği, dağılma özelliği gibi işlemlerin temel özelliklerinin bilgisine sahip olması, tersine işlem yapabilmeleri ve eşit işaretinin her iki tarafındaki değerlerin aynı olduğunun farkına varmaları gerekmektedir. Bu aşamayı takip eden bir sonraki aşama ise cebir öncesi dönem olarak adlandırılmıştır. Modelin aşamaları ve bu aşamalarda yer alan özellikler Şekil 1’de sunulmaktadır:



Şekil 1: Cebir bilgisinin ardışık gelişiminin modeli (Boulton vd., 2000, s. 90).

Driscoll (1999) cebirsel düşünmeyi değişkenler arasındaki ilişkilerin açığa çıkarılması için sayısal durumları temsil etme yeteneği olarak tanımlamıştır. Değişkenlerin ve niceliklerin ilişkileri öğrencilere farklı biçimlerde sunulabilir. Bu durumda her öğrenci verilen bir cebirsel ifadeyi farklı biçimde yorumlayabilir. Cebirsel düşünme çok küçük yaşlarda başlamakla birlikte ilerleyen zamanda derinleşen bir konu alanıdır. Birey cebiri keşfetmekle beraber cebirsel düşünmesini genişletir, yeni durumlara göre farklı biçimde kavram haritaları oluşturabilir. Burada önemli olan çocuğun gelişmekte olan cebirsel düşünme yeteneklerini destekleyici bir süreç izlenmesidir. Kısaca cebirsel düşünme cebir ile birlikte gelişen, öğrenciye farklı şekilde düşünme becerilerini gösteren, gerçek yaşam durumlarıyla örtüşen matematiksel düşünmenin önemli bir alt dalıdır. Aynı zamanda cebirsel düşünme aritmetik düşünmenin devamı niteliğindedir.

1.2.1. Aritmetikten Cebire Geçiş

NCTM (1991) aritmetiği sayıları, sayılar arası ilişkileri, sayılarda dört işlemi ve dört işleme dayalı diğer hesaplamaları içeren bir alan olarak tanımlamıştır. Aritmetik sayılarla ve hesaplamalarla uğraşırken, cebir değişken ve niceliklerin değişimi ile ilgilenir, muhakeme becerilerine odaklanır. Aritmetik ve cebirin doğalarından kaynaklanan farklılıklarına karşın aritmetiğin cebir öğreniminde temel olduğu açıktır (Hersovics ve Linchevski, 1994; Kieran, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinmberg ve Stephens, 2005; Knuth, Stephens, McNeil ve Alibali, 2006). Öğrencilerin aritmetikte yaşamış oldukları deneyimleri cebire geçişte kullandıkları görülmektedir (Hersovics ve Linchevski, 1994; Mcneil ve Alibali, 2005). Aritmetik ve cebir öğretiminin birbirinden ayrı yapılması çocukları matematikle ilgili düşünme yollarından mahrum bırakırken ileri sınıflarda cebir öğrenimini de daha zor bir hale getirmekte ve gelişim uzun zaman almaktadır (Carpenter vd., 2003).

Cebir ile aritmetik arasında farklılıklar bulunmakla beraber birbirlerine bağlı bir zincirin halkaları gibidirler (Blanton, 2008). Bu halkalar arasındaki boşluk kapandığı zaman cebir öğretimindeki en büyük sorun olan kavram yanılgıları da ortadan kalkar. Kavram yanılgılarının en çok cebir alanında yaşanmasının sebebi, cebirin kendi soyut yapısından kaynaklanan zorluklar ve okul öncesi dönemden başlayarak çocuklarda sayılardan aritmetiğe geçişteki bazı temel kavramların oluşmaması; daha sonra da temel kavramların gelişiminin zor olması durumudur.

Lee (1996) cebirin matematiğin içinde mini bir kültür olduğunu, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerinde zorlandıklarını ve kültürel bir şok yaşadıklarını belirtmiştir. İlkokuldan sonra, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte yaşadıkları bu kültürel şok üniversite yıllarına kadar devam edebilmektedir.

Aritmetikten cebire geçiş ilköğretimin başlarında sıralama, sınıflama ve karşılaştırma etkinlikleriyle başlar ve ilköğretimin sonlarına doğru artık aritmetiğin genellenmiş olması beklenir. Genellenmiş aritmetikten kasıt sayıların ve işlemlerin özelliklerinin genellenmesidir. Küçük çocuklar için nesnelerin sınıflandırılması ve sıralanması doğal ve ilginç bir deneyimdir. Çocuk nesnelerle, şekillerle, sayılarla ya da renklerle bir sıralama yapabilir farkında olmadan örüntü oluşturabilir. Aslında çocuğun burada yapmak istediği şey nesne ve şekiller arasında ilişki kurabilmektir ki bu da çocuğun muhakeme yeteneğini geliştirecektir. Çocuk kurduğu örüntülerle ilgili olarak cesaretlendirilmeli kendi cümleleriyle kurduğu örüntüleri savunacak ve genelleme yapabilir duruma gelmelidir.

Boulton ve arkadaşları (2000) geliştirmiş oldukları cebir bilgisinin ardışık gelişim modeline göre aritmetikten cebire geçişin sağlanabilmesi için öncelikle öğrencilerin bu modelin aritmetik basamağında yer alan bilgi ve becerilere sahip olması gerektiğini ileri sürmüşlerdir. Bu bilgi ve beceriler; ters işlem, değişme özelliği, dağılma özelliği gibi işlemlerin temel özelliklerinin bilgisi, tersine işlem yapabilme ve eşit işaretinin her iki tarafındaki değerlerin aynı olduğunun farkına varmadır. Temel aritmetik becerilerinin geliştirilmesi matematiksel sembollerle sayı cümlelerinin yazılmasını ve bir sayının çok farklı biçimlerde (7-2=5, 3+2= 5) anlaşılabilmesini sağlar. Öğrenciler bu türdeki sayı cümlelerin çözümünü eşitlik ve sayılar arasındaki ilişkiye odaklanarak yapabilirler. Bu odaklanma cebirsel düşünmenin gelişiminde önemli bir yere sahip olan ilişkisel düşünmeyi gerektirmektedir.

Kilpatrick, Swafford, ve Findell (2001) ise öğrencilerin aritmetikte çok iyi olsalar bile aritmetikten cebire geçişte, pek çok düzenleme yapmaya gereksinim duyduklarını vurgularlar. İlkokul aritmetiği yoğunlukla sonuç merkezli olma eğilimindedir ve ilişkilerin temsil edilmesine odaklanmaz. Cebirsel düşünmenin geliştirilmesi için aşağıdakileri içeren ama bunlarla sınırlı olmayan düzenlemeler yapılması önemlidir (Kieran, 2004, s. 140):

1. Sadece sayısal cevabın hesaplanmasına değil ilişkilere odaklanılması
2. Ters işlemlere olduğu kadar işlemlere odaklanılması ve bununla ilişkili yapma/geri alma fikrine odaklanılması
3. Bir problemin sadece çözülmesine değil, hem çözülmesine hem temsil edilmesine odaklanılması
4. Sadece sayılara değil, hem sayılara hem harflere odaklanılması
5. Eşit işaretinin anlamının yeniden düzenlenmesi

Koehler (2004) ilişkisel düşünmenin aritmetik öğretiminde iki yarar sağladığını savunur. Birincisi öğrenciler hesap dönüşümleri için sayısal işlemleri yeniden yapılandırır. İkincisi ise sayı cümlelerinin dönüşümünü özellikle de temel aritmetik özelliklerin kullanımı sağlar. Örneğin; 85 + 69 + 15 ifadesini (85 + 15) + 69 biçimine dönüştürebilir. (9 x 7) işleminde (10 x 7) -7 biçimine dönüştürürken onlukları ve birlikleri kombine ederek hesaplamalarını kolaylaştıracak işlemlerin temel özelliklerini kullanır.

1.3. İlişkisel Düşünme

İlişkisel düşünmenin tanımlanmasına yönelik çalışmaların cebirsel düşünme çatısı altında ve aritmetikten cebire geçişle ilgili olarak ele alındığı görülmektedir (Kieran, 1981; Carpenter ve Franke, 2001; Blanton ve Kaput, 2004; Stephens, 2006). Koehler'e (2004) göre ilişkisel düşünme, doğrudan bir hesaplamadan ziyade aritmetiğe farklı bir bakış açısı getirme şansı tanır ve aritmetik öğreniminde anahtar rol oynar. Stephens' a (2006) göre ilişkisel düşünme, özünde öğrencilerin bir sayı cümlesindeki sayılar arasındaki olası çeşitlilikleri kullanabilmelerine ve anlayabilmelerine bağlıdır. Bir sayı cümlesindeki olası çeşitlilikler ile ifade edilmek istenen, bu sayı cümlesine eş değer olan çok sayıdaki ve farklı formlardaki sayı cümleleridir. Örneğin; 3 + 6 cümlesine eş değer 2+7, 11-2 ya da 3x3 gibi çok sayıda ve farklı formda sayı cümlesi yazılabilir. Bu sayı cümleleri başlangıçta sunulan 3+ 6 cümlesinin olası çeşitlilikleri olarak ifade edilmektedir. İlişkisel düşünmenin sayılar arasındaki olası çeşitlilikleri anlama kapasitesi olarak tanımlanabileceği görülmektedir. Burada olasılıklar eşitlikte yer alan işlemlere bağlı olan değişimin belirli yönlerini içermektedir. Bir sayının diğerinden daha büyük ya da daha küçük olduğunu bilmek, bu farklılıklar ile vurgulanan değişimin yönü bilinmedikçe kullanışlı değildir.

Olası çeşitlilikler 99 ve 90 ya da 72 ve 73 ya da 747 ve 746 gibi sayılar birbirine daha yakın olduğunda daha kolay bir şekilde fark edilebilir. Örneğin 109 + 76 = 23 +_ biçimindeki bir sayı cümlesinde sol taraftaki sayıları toplayarak 185 elde etmek ve daha sonra 23'e ne eklenirse 185 eder diye sormak ve yanıtı 162 bulmak daha hızlı bir seçenek olabilir. Bununla birlikte 23'ün 76'dan 53 eksik olduğu için bilinmeyen sayınında 109'dan 53 daha fazla olması gerektiği de doğrudur (ya da 109 23'ten 86 fazladır o halde bilinmeyen sayı da 76'dan 86 daha fazla olacaktır). Bu örnekte çeşitliliğin yönü 23’ün 76’dan eksik olmasından dolayı bilinmeyen sayınında 109’dan aynı büyüklükte fazla olması anlamındadır. Çeşitliliğin büyüklüğü ise değişim miktarı olan 53’ tür.

İlişkisel düşünen öğrenciler işlem yapmaktan kaçınma yeterliliğine sahiptirler, çünkü çeşitliliğin yönü ve büyüklüğünün içerdiği sayılar ve işlemlere bağlı olduğunu görebilirler. Matematiksel olarak doğru olduğu halde bu çeşitlilikler pek çok öğrenci ya da yetişkin tarafından kolayca fark edilememekte ya da fark edilse bile yanıta ulaşmada daha hızlı bir alternatif olarak görülmemektedir (Stephens, 2006). Belirlenen yönde olası çeşitliliği fark etme ilişkisel düşünmede anahtar rol oynamaktadır.

Carpenter vd. (2005) ise ilişkisel düşünmeyi, peşi sıra gelmiş belli yöntemleri takip ederek bir yanıt bulmadan çok matematiksel ifadelerin dönüşümleri için sayı ve işlemlerin temel özelliklerini kullanmayı içeren bir beceri olarak tanımlamaktadır. Bu tanımlara bakıldığında ilişkisel düşünmenin aritmetik öğretimi kapsamında kazandırılabileceği düşünülebilir. Bununla birlikte aritmetik çerçevede işlem yapan öğrenciler, işlemlerin ilişkisel boyutunu anlama eğiliminde değildirler ve hesaplama yapmaya odaklanırlar (Kieran, 2004). Bu yönüyle ilişkisel düşünme aritmetiğin ötesinde olup cebirsel düşünmeyi destekleyen önemli bir beceridir. Matematik sorularında çoğunlukla verilen işlemler ve bu işlemlere ait istenen bir sonuç yer almaktadır. İlişkisel düşünme ise bir sonuç bulmaktan çok, verilen nicelikler arası ilişkilere odaklanarak cebirsel düşünmenin ortaya çıkmasını sağlamaktadır. Nicelikler ve nicelikler arası ilişkilerin kavranması cebirsel düşünmenin gelişiminde esastır (Kabael ve Tanışlı, 2010).

İlişkisel düşünme kullanıldığında adım adım yürütülmesi gereken süreçler yerine cümleler bir bütün olarak ele alınır. Örneğin; 8+4=_+5 sayı cümlesi ele alındığında bazı öğrenciler her iki taraftaki ifadenin de toplama içerdiğini ve sol taraftaki toplananlardan biri olan 4’ün sağ taraftaki toplananlardan biri olan 5’ten 1 eksik olduğunu fark ederler. Bu ilişkiyi fark etme ve toplama işleminin özelliklerinin anlamına (açık ya da örtük) sahip olma, öğrencilerin bu problemi 8 ile 4 ü toplayıp 12 elde edip 5 çıkarma işlemlerini yapmadan çözebilmelerini sağlar (Molina, Castro, ve Mason, 2008).

Pek çok öğrencinin başarılı bir şekilde gerçekleştirdiği dikkatli bir biçimde hesaplama yapmaya yönelik düşünme yaklaşımı ile eşit işaretinin her iki tarafındaki sayı cümleleri arasındaki muhtemel çeşitliliklerin anlaşılmasına dayanan ilişkisel düşünme yaklaşımları birbirine ters düşmektedir (Stephens, 2006). İlişkisel düşünebilen öğrenciler açık sayı cümlesi içeren problemleri çözebilmek için eşit işaretinin her iki tarafındaki ifadeleri gözden geçirir. Bu öğrenciler hesaplama yapmadan her iki taraftaki ifadeler arasındaki ilişkileri kullanarak problemleri çözebilirler. Dikkatli bir biçimde hesaplama yapmaya yönelen öğrenciler ise ilişkisel düşünenlerin tersine eşit işaretinin her bir tarafının farklı işlemleri temsil ettiğini düşünürler. Bu öğrenciler açık sayı cümlelerini çözebilmek için hesaplama yaparlar (Carpenter vd., 2003; Stephens, 2006).

Stephens' a (2006, s. 5) göre ilişkisel düşünme aşağıda verilen bileşenler görüldüğünde belirgindir:

- Eşit işaretinin her iki tarafındaki sayıların büyüklüklerini kıyaslamak için diyagramların ya da okların kullanılması
- Eşit işretinin her iki tarafındaki sayıların göreceli büyüklüklerini kıyaslamak için sözel ifadelerin kullanılması
- Hesaplamasal çözümler sağlansa bile, okların, diyagramların ya da açıklamaların bilinmeyen sayıların değerini bulmak için hesaplanmamış çiftlere dayandırılarak bir argüman zinciri içinde kullanılması

Molina ve Ambrose (2006) öğrencilere verdikleri ilişkisel düşünme eğitimi ardından öğrencilerin çalışma yapraklarında hesaplama olmadığını fark etmişler ve buradan ilişkisel düşünmeyi kullandıkları sonucuna ulaşmışlardır. Örneğin; 28+35 = 29 + _ matematik cümlesinde, boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulmak için hesaplama yapmaya gerek yoktur. İlişkisel düşünebilen bir kişi toplananlar arasındaki ilişkilere bakarak boşluğa gelecek sayıyı bulabilir. Sayı cümlesinde birinci toplanan 28 iken 1 artmış ve 29 olmuştur. Bu durumda eşitliğin bozulmaması için ikinci toplanan 35 sayısının 1 azalıp 34 olması gerekir. Böylece eşitliğin iki tarafındaki toplamlar eşit olur. Molina ve Ambrose (2006)'a göre öğrenciler hesaplama yapmak yerine ilişkisel düşünmeyi kullanarak bir eşitlikte yer alan sayılar arasındaki ilişkilere odaklanarak da sayı cümlelerini çözebilirler.

Öğrencilerin bir eşitlikte yer alan sayılar arasındaki ilişkileri görebilmelerinde sunulacak sayı cümlelerinin zorluk derecesi önemlidir (Carpenter ve Levi, 2000). İlk aşamalarda öğrencilere doğru yanlış cümleleri ile sayılar arasındaki ilişkilerin kolayca görülebileceği sayı cümleleri sunulmalıdır. İlerleyen zamanlarda sayılar arası ilişkilerin kolayca görülemediği sayı cümlelerine doğru bir yol izlenmelidir.

Koehler' e (2004) göre doğru/yanlış biçimindeki sayı cümleleri ve açık sayı cümlelerinin ardı ardına verilmesi çocukların ilişkisel düşünebilmeleri için bir şanstır. Öğrenciler ilişkiler hakkında düşünmeye başlarken ilk olarak doğru/yanlış biçimindeki sayı cümlelerine yer verilmesi ve öğrencilerin bu tür cümlelere dikkatlerinin çekilmesi anladıklarını açıklamada esneklik sağlar. Sayı cümleleri ise temel matematiksel fikirlerden ne anladıklarını ifade etmede belirli içerikler sağlayabilir. Özellikle doğru/yanlış biçimindeki sayı cümleleri zorunlu değildir, ancak ilk aşamada öğrencilere ait sonuçları görmede kısa ve kolay bir yoldur (Carpenter vd., 2003).

Carpenter ve Levi'nin (2000) çalışmasında öğrencilerin cebirsel düşünme örnekleri araştırılmış olmasına rağmen, öncelik doğru/yanlış ve açık sayı cümlelerinin tartışılması ve çözülmesi yoluyla cebirsel düşünmenin geliştirilmesi etkinlikleri olmuştur. Öğrencilere çeşitli doğru/yanlış cümleleri ($23 - 14 = 9$, $7 + 8 = 13$, $67 + 54 = 571$) ile çeşitli formlarda açık sayı cümleleri ($x + 57 = 84$, $x + y = 7$, $x + x = 24$) sunulmuştur. Uygun zamanlarda işlemlerin temel özelliklerinin ve aralarındaki ilişkilerin tartışılması için sayı cümleleri ve sayı cümlesi grupları seçilmiştir. Cebir çalışan öğrenciler sıklıkla değişkenin bir eşitliğin çözümüne karşılık gelen belirli bir sayıyı temsil ettiğini düşünmektedirler. Bu durum öğrencilerin değişkenlerin işlemlerin özelliklerini tanımlamadaki kullanımları ($x + y = y + x$) gibi diğer kullanımlarını algılamalarında bazı sorunlara neden olmaktadır. Doğru - yanlış cümleleri ile başlamak ve bunları açık sayı cümlelerini ilişkilendirmek potansiyel olarak daha bütünsel bir değişken kavramı oluşturmalarını sağlamaktadır. " Değişkenlerin yerine hangi sayı gelirse gelsin hep doğru olacak bir açık sayı cümlesi düşünebiliyor musun?" biçimindeki sorular öğrencilere genellemeleri ifade etmek için değişkenlerin kullanımına yönelik bir kapı açmaktadır (Davis, 1964).

Diğer yandan ilişkisel düşünme ile ilgili etkinliklerin ders kitaplarında fazla yer almadığı belirtilmektedir (Köse ve Tanışlı, 2011; Mcneil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur ve Krill, 2006; Molina vd., 2008). Sonuç bulma odaklı sayı cümlelerinin sürekli verilmesi öğrencinin işlem yapma isteğini arttırabilir ve öğrenciler nicelikler arasında ilişki kurmak istemeyebilir, cesaret edemeyebilir ya da ders ve çalışma kitaplarında bulunan etkinlikler üzerinde çalıştıklarında eşit işaretinin ilişkisel anlamına odaklanamayabilirler. Bu noktada ders kitaplarında standart sayı cümlelerinin yanında doğru/yanlış ve açık sayı cümlelerinin de verilmesi önemlidir (Köse ve Tanışlı, 2011). Standart sayı cümlelerinin yerine açık sayı cümleleri ya da doğru/yanlış biçimindeki sayı cümlelerinin verilmesi, öğrencinin sayılarla manipülasyon yapmasını sağlarken öğrenciye farklı bir bakış açısı kazandırarak cebirsel düşünme yeteneklerinin gelişimini arttırabilir. İlişkisel düşünmeyi geliştirici faktörlerden birisi de öğretmenin sınıf içinde yaratmış olduğu öğrenme ortamıdır. Öğretmen sınıf içinde bir tartışma ortamı oluşturabilir ve öğrencilerin fikirlerine dayanarak genellemelere varmalarını sağlayabilir (Carpenter vd., 2003).

İlişkisel düşünme ile asıl amaçlanan, öğrencilerin hesaplama yapmadan eşitliğin her iki tarafının da aynı sayıları temsil ettiğinin farkına varmalarına yardımcı olabilmektir. Örneğin; “3 + 8 = (2 x 8) + 8”, “9 x 7 = (10 x 7) - 7”, “6 x 7 = (5 x 7) + 5” gibi doğru/yanlış biçimindeki sayı cümlelerinde öğrencilerin eşitliğin her iki tarafındaki işlemleri yapmadan sayılar arasındaki ilişkiler ve temel işlem özelliklerini kullanarak bu tür soruları çözebilmeleridir (Carpenter vd., 2003). İlişkisel düşünme sayıların nasıl çalıştığıyla ilgili öğrencilerin düşünmelerini cesaretlendirmek, sayıların manipüle yollarına bakmak, değişimleri açıklamak ve gerçek sayı cümlelerini korumayı amaçlamaktadır. Böylece öğrenciler bu bilgileri daha sonra cebirdeki bilgilerle, yapılarla bağdaştırabilir (Koehler, 2004). Aynı zamanda ilişkisel düşünme öğrencilerin toplama ve çarpma gibi işlemlerin ilişkisine odaklanabilmelerini, sayılar arası ilişkiler ve açıklamalarla ilgili yeteneklerini geliştirebilmeyi amaçlamaktadır (Carpenter vd., 2003).

İlişkisel düşünmenin temelinde ise eşit işareti ve eşitlik kavramı yatmaktadır. Kieran (2007) öğrencilerin cebirde başarılı olabilmeleri için bilinmeyen ve değişken, cebirsel ifadeler ve denklemler, eşit işareti ve eksi işareti gibi bazı temel kavramlara sahip olmaları gerektiğini belirtmiştir. Eşit işareti ilişkisel düşünmede temel bileşen olup, olmazsa olmazdır. Yaman'a (2004) göre eşit işaretinin gelişiminde geçmişten günümüze cebir ile tutarlı olarak işlemsel anlamdan ilişkisel anlama doğru bir değişim vardır.

1.3.1. Eşit İşareti

Carpenter ve Franke (2001) eşit işaretinin her iki tarafındaki işlemler ve terimler arasındaki eşitliğin anlaşılmasının öğrencilerin ilişkisel düşünmelerini geliştireceğini belirtmiştir. Öğrencilerin cebirdeki çalışmalarının tamamı eşit işaretinin doğru bir biçimde anlamlandırılmasına dayanmaktadır. Ancak ne yazık ki öğrenciler çoğu eşit işaretinin anlamı ile ilgili çok ciddi kavram yanılgılarına sahiptirler (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980; Falkner, Levi, & Carpenter,1999; Molina vd., 2008; Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). NCTM'e (2000) göre öğrencilerdeki en temel kavram yanılgılarından biri eşitlik kavramı ile ilgilidir.

Boulton ve diğerlerinin (2000) cebir bilgisinin ardışık gelişim modelinin basamakları incelendiğinde eşit işaretine ilişkin bilgilerin her basamakta yer aldığı ve eşit işaretine önemli bir yer verildiği görülmektedir. Eşit işaretinin ilişkisel anlamına sahip olmayan öğrenciler eşit işaretini sadece işlemin sonucunu bulmayı sağlayan bir gösterge olarak görmektedir.

Kieran (1981) cebirsel düşünmenin gelişiminde eşit işaretinin anlamına odaklanılmasına dikkat çekmiştir. Bu bağlamda eşit işaretinin eşitlik ya da dengenin bir belirleyicisi olarak anlaşılmasının öneminden bahsetmiş ve ilkokuldaki pek çok öğrencinin eşit işaretini yanıtı bulmak için bir yön olarak algıladığını belirtmiştir. Eşit işareti bir işlem yapma olarak algılanmakta ve eşitlik bir dengeleme sembolü olarak görülmemektedir (NCTM, 2000). Öğrenciler eşit işaretini gördüklerinde ona problem ve yanıt arasında bir ayıraç olarak davranmakta, eşit işaretini sol tarafındaki işlemlerin yapılıp elde edilen sonucun yazılması için bir gösterge olarak ele almaktadırlar (Kilpatrick vd., 2001). Öğrenciler eşitliğin sol tarafındaki sayıları hızlıca hesaplayarak sağ taraf yazmak isterler (Kieran, 2007). Behr, Erlwanger ve Nichons (1975), Erlwanger ve Berlanger (1983) erken sınıflarda öğrencilerin genellikle eşit işaretini bir şey yapmak, öncesindeki işlemi hesaplamak olarak anlamlandırdıklarını ve eşit işaretinden sonra gelen sayının işlemin yanıtı olduğuna inandıklarını belirtmişlerdir. Bu durum sembolün ilkokulda nasıl kullanıldığını ortaya koymakta olup aritmetikten cebire geçişi zorlaştıran en önemli engellerden biridir (Matz, 1982).

İlkokul aritmetiğinin çoğu sonuç bulma odaklıdır. 4+5 işlemi küçük yaşlarda verildiğinde sayılar alt alta yazılır ve yatay bir çizgi çekilir. Buradaki yatay çizgi eşitliği temsil eder ancak “=” sembolü kullanılmaz. Bu da a+b=c arasındaki denklem ilişkisinin bozulması anlamına gelir (Seo ve Ginsburg, 2003). Bu durum aritmetikten cebire geçişi zorlaştıran bir diğer etkendir.

Aritmetik ilkelerini ve cebiri de içeren matematiğin birçok yönünün gelişiminde eşit işaretinin bir ilişki olarak anlaşılması vazgeçilmezdir (Seo ve Ginsburg, 2003). Öğrenciler ilk basamakta yani cebiri öğrenmeye başlamadan önce eşit işaretinin ilişkisel anlamını kullanmalıdır (Boulton vd., 2000). Yaman, Toluk ve Olkun (2003) ise eşit işaretini denge olarak anlayan öğrencilerin eşit işaretinin ilişkisel anlamını oluşturabildiklerini ifade etmişlerdir. Dolayısıyla eşit işaretinin ilişkisel düşünmenin anahtarı olduğu söylenebilir. Çünkü öğrenciler eşit işaretini doğru bir şekilde kullanarak sayılar, nicelikler ve ifadeler arasında ilişki kurabilirler.

Falkner, Levi ve Carpenter’ ın (1999) yaptıkları çalışmada 1. sınıftan 6. sınıfa kadar olan öğrencilerin“ 8 + 4 = □ + 5” işlemine ait yanıtlarını incelemişler ve aşağıdaki gibi bir tablo ortaya çıkmıştır.

Tablo 1: 1-6. Sınıflar Yanıtları ve Yüzde Değerleri

Yanıtlar	7*	12	17	12 ve17
Sınıf Düzeyleri	Yanıtlama Yüzdeleri			
1-2	5	58	13	8
3-4	9	49	25	10
5-6	2	76	21	2

Tabloda kutucuğa gelmesi gereken sayıya ilişkin öğrencilerin vermiş olduğu bu yanıtlar ve sınıf düzeylerine göre yanıtlama yüzdeleri yer almaktadır. Öğrencilerin vermiş oldukları yanıtların 7, 12, 17 ile 12 ve 17 olduğu görülmektedir. Buradaki 12 ve 17 ile ifade edilen yanıt, öğrencinin önce 12 yanıtını daha sonra karar değiştirerek 17 yanıtını verdiği anlamındadır. Doğru yanıt olan 7'nin sınıf düzeylerine göre cevaplanma yüzdeleri sırasıyla 5, 9 ve 2'dir. Tabloda da görüldüğü gibi 5-6. sınıf öğrencilerinin doğru yanıt sonuçları daha önceki sınıflardaki öğrencilerin sonuçlarından daha azdır. Bu sonuç sadece ilkokul öğrencilerinin eşitlik kavramını bilmediği düşüncesini reddetmektedir. Bu durum öğrencilere eşit işaretinin farklı anlamları doğru biçimde kazandırılsa bile, geniş zaman diliminde sadece sonuç anlamında eşit işareti ile karşılaşırlarsa eski doğru olmayan kavramlara dönebileceklerini göstermektedir (Carpenter vd., 2003). Verilen diğer yanıtlar eşitlik kavramına ilişkin kavram yanılgılarını yansıtmaktadır. Bu kavram yanılgıları temel aritmetik fikirlerin öğretilmesi için sınır koyabilir hatta cebire geçişte ciddi problemler yaratabilir. Çocukların eşittir sembolü kullanımı çerçevesinde yaşadıkları kavramsal zorlukların aslında kolaylıkla üstesinden gelinebilir. Ancak çocukların eşitlik kavramı yanılgısı üzerinde inatla sarılacağı unutulmamalıdır (Carpenter vd., 2003).

NCTM (2000) standartlarına bakıldığında ise cebirsel düşünmenin önemli bileşenlerinden biri olan eşitlik kavramının birinci sınıftan itibaren üzerinde durulan kavramlardan biri olduğu görülmektedir. Birinci sınıf öğrenme alanına bakıldığında eşitlikle ilgili terazi problemleri, kutu örnekleri, açık-kapalı sayı cümleleri gibi etkinliklere rastlanılmaktadır. Çocuğun 5. sınıfı bitirdikten sonra değişken kavramıyla karşılaşması ve böylece cebire adım atmasıyla; denklemlerle ve cebirsel ifadelerle karşılaşması onu yeni bir başlangıca götürdüğünü fark ettirir. Eşitlik kavramının daha önce verilmesi de eşitliğin bir sembolden çok anlamına odaklanmalarını kolaylaştırır İlköğretimin erken sınıflarından itibaren öğrenciler cebirin temel bilgilerini, temsil şekillerini, fonksiyon ve değişken gibi kavramları öğrenebilir. Cebirsel düşünmenin bu bileşenleri çocuğun gelişimine katkı sağlayarak ifade yeteneğini geliştirir. Çocuğun bu ifadelerini günlük hayattaki örneklerle desteklemesi beklenir. Çünkü farkına varmadan çocuklar örnek verdiği nesnelerle veya olaylarla bir bağlantı kurarlar ki bu da onların ilişkisel düşünmelerini sağlar ve kazanımları daha anlamlı olur (NCTM, 2000).

İlişkisel düşünmeyi tanımlamak için eşitliğin anlaşılması gereklidir ancak yeterli değildir. İlişkisel düşünmeyi işaret eden sayı cümlelerinde çeşitliliğin olasılıklarını kullanabilme kapasitesidir (Stephens, 2006). İlişkisel düşünmeyi kullanarak sayı cümlelerini çözebilen öğrenciler işlemsel bir hızdan çok aritmetiksel becerileri ile eşit işaretinin anlamı üzerinde durmuşlardır.

1.3.2. İşlem Özellikleri

Köse ve Tanışlı (2011) ilişkisel düşünmenin temelinde aritmetiksel işlemlerin ve işlemlerin özelliklerinin yattığını belirtmişlerdir. İlişkisel düşünme öğrencilerin belirli bir amaç bağlamında bir problemi analiz etmede işlemlerin temel özelliklerini ve eşitliği kullanmalarını ve daha sonra bu amaç doğrultusunda süreci basitleştirmelerini içermektedir (Carpenter vd., 2005; Empson, Levi ve Carpenter, 2011).

Schifter' e (1999) göre öğrenciler problemleri çözmek için stratejiler geliştirmek için, toplama, çıkarma, çarpma ve bölmenin temel özelliklerini ve bu işlemler arasındaki ilişkileri kullanırlar. Örneğin bilinmeyen toplananların olduğu bazı problemlerin çözümü toplama ve çıkarma işlemleri arasında ters ilişkinin anlamlandırılmasına ve stratejilerin geliştirilmesi toplama işleminin değişme özelliğinin anlamlandırılmasına bağlıdır. Sayıların özellikleri ile ilgili temel anlamlandırmaların açıklığa kavuşturulması kapsamlı bir aşamadır.

Seeley ve Schielack (2007) ise öğrencilerin cebirde başarılı olabilmeleri için sayı sistemine, işlemlere ve ilgili özelliklere ilişkin derin bir anlayışa sahip olmaları gerektiğini belirtmiştir. Yanıtı hesaplamak için gerekli olan işlemlere odaklanmak yerine ilişkiler ve aritmetik işlemlerin temel özelliklerine dikkat edilerek gerçekleştirilen öğrenme ve öğretim hem cebir öğrenimini destekleyen türden bilgilerle uyumludur, hem de aritmetiğin öğrenilmesini zenginleştirir ve destekler (Carpenter vd., 2005). Öğrenciler sayılarla işlem yapmaya odaklanarak işlemlerin temel özelliklerini gözden kaçırabilir ve aritmetik ile cebirin aynı esaslar üzerine kurulu olduklarının farkına varamayabilirler.

Örneğin Empson vd. (2011) kesirlerin toplanmasında ilişkisel düşünmenin nasıl kullanıldığını açıklamışlardır. Bu çalışmadaki öğrenciler paydaları eşit olmayan kesirlerin nasıl toplandığını başlangıçta bilmemektedirler. İlişkisel düşünen bir öğrenci

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ işlemini yaparken öncelikle $\frac{3}{4}$ ü $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ biçiminde iki parçaya ayırmış, daha sonra birleşme özelliğini kullanarak $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{2}$ yi toplamış ve 1 tam elde etmiştir. Bu öğrenci sonuç olarak $1\frac{1}{4}$ doğru yanıtına ulaşmıştır. Bu örnekte de görüldüğü gibi ilişkisel düşünmenin kullanımı öğrencilerin aritmetiği öğrenmelerini zenginleştirmekte ve desteklemektedir.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$$

38 + 47 = 47 + 38 biçimindeki bir sayı cümlesinde ise toplama işleminin değişme özelliğine odaklanılmaktadır. Bu biçimdeki bir doğru/yanlış cümlesi öğrencilere sunulduğunda öğrenciler eşit işaretinin her iki yanındaki toplama işlemini yapmaya yönelebilirler. Ancak öğrenciler bu biçimindeki sayı cümleleri ile karşılaştıklarında genellikle sayıların yerleri değiştiği için cümlenin doğru olduğu çıkarımına çabucak varmaktadırlar (Carpenter vd., 2005).

Carpenter ve diğerlerine (2005) göre, öğrenciler, dağılma özelliğini nasıl uygulayacağı yönde bir sayı hissine sahip olabilir ancak kelimeler ya da sembollerle açıklayamayabilir. Örneğin; öğrenciler "8 + 4= 4 x (_ + _) " problemini eşit işaretini uygun bir biçimde ifade ederek çözebilirler. Bir öğrenci önce 8+4 işlemini yaparak 12 sonucuna ulaşıp daha sonra 12 sayısını 4' e bölüp parantezdeki işlemin sonucunun 3 olduğunu bulabilir. Ancak onlardan beklenen bilinmeyenlerin hesaplanmadan bulunmasıdır. İlişkisel düşünebilen bir öğrenci 8 ve 4 sayılarının sırasıyla 4'ün 2 ve 1 katı olduğunu fark ederek boşluklara gelebilecek sayıları belirleyebilir.

1.3.3. İlgili Araştırmalar

Son yıllarda uluslararası alanyazında ilişkisel düşünmeye ilişkin çeşitli araştırmalar gerçekleştirilmiştir. Bu araştırma, ortaokul basamağında gerçekleştirildiğinden alanyazındaki araştırmalar içinden ortaokul basamağı ile ilgili olanlar ve ilişkisel düşünmenin ilk olarak ortaya çıktığı ilkokul öğrencileriyle yapılmış bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

İlişkisel düşünme üzerine yapılan ilk çalışmalardan biri olan Koehler'in (2004) "İlişkisel Düşünmeyi Öğrenme: Öğrenme İçin İlişkisel Düşünme" isimli doktora tez çalışmasıdır. Bu çalışmanın amacı matematiği anlayarak öğrenmeye odaklı bir sınıf ortamında ilkokul 2. ve 3. sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakemelerinin nasıl geliştiğini araştırmaktır. Bu amaçla 2. ve 3. sınıfa devam eden 6 tanesi düşük matematik başarısına sahip 25 öğrenci ile nitel araştırmaların bir çeşidi olan tasarım deneyi deseni kullanılarak çalışılmıştır. Veri toplama kaynakları görüşme ve başarı testidir. Araştırmanın başında altı öğrencinin ilişkisel düşünme becerisinin çok düşük olduğu ve başarı testi puanlarının da akranlarına göre düşük olduğu görülmüştür. Öğrencilere doğru/yanlış ve açık sayı cümleleri sunularak öğretim yapılmış, öğrencilerin dikkati sayılar arasındaki ilişkilere çekilmiştir. Öğrencilerin ilişkisel düşünmeyi kullanmalarının gelişimi bir öğrenme yörüngesi olarak ele alınmıştır. Bu yörüngenin başlangıç noktasını ilişkilerin daha açık görülebildiği durumlar oluşturmaktadır. Bu yörüngede ikinci önemli nokta, sayı ve işlemleri içeren, çeşitli ilişkilere odaklanan, özel sayı cümleleri için ilişkisel düşünmenin kullanımıdır. Son olarak öğrencilerin işlem özellikleri ile ilgili kuralları oluşturmada ve çözümleri diğer aritmetik problemlere genellemede kullandıkları stratejilerdir. Araştırma sonucunda uygun koşullar sağlandığında öğrencilerin ilişkiler üzerine etkili bir şekilde düşünebildikleri ve öğretmenlerin cebirsel görevler aracılığıyla aritmetiği anlayarak öğrenimini destekleyebileceği görülmüştür.

Molina ve Ambrose'nin (2006) "Eşit İşareti'nin Anlamının Tartışılarak İlişkisel Düşünmenin Geliştirilmesi" isimli çalışmalarında öğrencilerin doğru/yanlış cümleleri kapsamında eşit işaretini nasıl kavramsallaştırdıkları, eşit işaretinin anlamının tartışılmasıyla ilişkisel düşünmenin geliştirilip geliştirilemeyeceği ve öğrencilerin zamanla eşit işaretinin farklı anlamlarını kazanıp kazanamadıklarını araştırmayı amaçlamışlardır. Bu amaç doğrultusunda 18 tane 3. sınıf öğrencisi ile bir öğretim yılı boyunca süren 5 oturum gerçekleştirilmiştir. 18 öğrenci ile okul zamanında 5 oturum yapılmış sınıfların etnik ve dilsel olarak çeşitlilik gösterdiği vurgulanmıştır. Çalışmaya başlamadan önceki bir ay boyunca misafir öğretmen olarak sınıfın çeşitli matematik etkinliklerine haftada bir kez katılmışlardır. Öğrencilerin eşit işareti kavramını uyarmak ve daha iyi değerlendirmek için öğrencilerden “ _ + _ = _ + _”, “_ - _ = _ - _” ya da “_ + _ = _ - _ “ şeklinde doğru sayı cümleleri yazmaları istenmiştir. Bu şablonlar alt çizgiyi bir değişken olarak yorumlayan ve her birinin yerine aynı sayının gelmesini düşünen öğrencilerin kafasını karıştırabileceği ve bu durumun öğrenciler tarafından sorun olmadığını saptamışlardır. Çalışma sonunda farklı görevlerle öğrencilerin kavramları başarılı bir şekilde genişletilmiştir. Öğrencilerin kavramları başlangıçta “yanıt bulmak için uyaran” ve “geriye doğru eşitlik (backward)”seviyesinde olup çalışmanın sonunda eşit işaretini ifadedeki eşitliğin bir belirtisi olarak anlamlandırmaya doğru geliştirilmiştir. “11 + 3 = 4 + __” türündeki açık sayı cümlelerinde eşitliğin sol tarafındaki işlemin sonucu 4' e eşit olmadığı için öğrencilerin zorladığını ve bütün cümleyi anlamak için çaba göstermelerine neden olduğunu belirtmişlerdir. Molina ve Ambrose bu tür cümlelerin ilişkisel düşünmeyi uyarıcı olarak kullanılması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca sınıf içi tartışma ortamının yanıtın hesaplanmasını vurgulamaktan çok örüntünün fark edilmesini vurguladığı için ilişkisel düşünmeyi geliştirmede önemli bir yere sahip olduğunu ortaya koymuşlardır.

Molina vd. (2008) “İlkokul Öğrencilerinin Doğru/Yanlış Sayı Cümlelerini Çözmedeki Yaklaşımları” başlıklı çalışmada öğrencilerin doğru/yanlış sayı cümlelerini yaklaşma yollarına odaklanmışlardır. Bu çalışmanın amacı öğrencilerin sergilemiş oldukları ilişkisel düşünme kullanımının derecelerinin ayırt edilerek doğru/yanlış cümlelerini yaklaşma yollarının belirlenmesidir. Nitel araştırma yöntemlerinden biri olan öğretim deneyi deseninin kullanıldığı bu çalışmada 8 yaşındaki (ilkokul 2. ve 3. sınıf) 26 İspanyol öğrenci ile bir dönemi aşkın bir sürede altı oturum yapılmış, ilk ikisinde öğrencilerin eşit işaretini anlaması ve keşfetmesine odaklanılmış, diğer dördünde ilişkisel düşünme üzerine çalışılmıştır. Veriler öğrencilerin cümleleri çözerken kullandıkları stratejiler ve ilişkisel düşünme kullanımının kanıtlarının belirlenmesine odaklanarak analiz edilmiştir. Bu süreçte öğrencilere ilişkisel düşünme stratejileri öğretilmemiş, ilişki aramanın bir alışkanlık olarak geliştirilmesine çalışılmıştır. Öğrencilerin ilişkisel düşünme kullanımları aynı sayı cümlesinin farklı yollarla çözümünün araştırılması için desteklenmiş ve ilişkiler üzerine yaptıkları açıklamalar takdir edilmiştir. Bu çalışma sonucunda öğrencilerin ilişkisel düşünme davranışlarının birbirini izleyen 6 basamakta toplandığı görülmüştür. Bu basamaklar ilişkisel düşünmenin olmadığı davranışlar, ilişkisel düşünmenin basit düzeyde olduğu davranışlar, benzerliğe dayalı ilişkisel düşünme davranışları, ilişkisel düşünmenin bir kez kullanıldığı davranışlar, ilişkisel düşünmenin sıklıkla kullanıldığı davranışlar, ilişkisel düşünmenin her zaman kullanıldığı davranışlardır.

Stephens (2006) "İlişkisel Düşünmenin Gücünün Keşfedilmesi ve Tanılanması" isimli çalışmasında küçük çocukların toplama ve çıkarma içeren cümlelerde uyguladıkları etkili düşünme biçimlerini araştırmayı amaçlamıştır. Bu çalışmanın katılımcılarını iki farklı ortaokulun 5, 6, ve 7. sınıflarındaki 301 öğrenci oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak 3 tür matematiksel görevin yer aldığı kağıt kalem testi kullanılmıştır. Bu görevler toplama, çıkarma ile toplama ve çıkarmanın birlikte yer aldığı açık sayı cümlelerinden oluşmaktadır. Toplama ve çıkarma içeren sayı cümleleri ile hesaplamaya dayanmayan düşünme biçimlerinin nasıl kullanılabileceği araştırılmış, bu güçlü düşünme biçimlerinin iki okuldaki 5, 6, 7. sınıf öğrencileri tarafından nasıl kullanıldığı, bu düşünmeyi işlemsel düşünmeden ayıran farklar ve farklı problem türleri karşısında öğrencilerin bu düşünmeyi sürekli olarak nasıl kullandıkları araştırılmıştır. Verilerin analizinde 0 ile 4 puan arasında değer alan beşli puanlama ölçeği kullanılmıştır. Bu ölçekteki 0 puan ilişkisel düşünmenin işlemsel düşünmenin kullanıldığı ilişkisel düşünmenin kullanılmadığı durumları, 4 puan ise ilişkisel düşünmenin başarılı bir şekilde ve açıkça kullanıldığı durumları ifade etmektedir. Araştırmanın yapıldığı okullardan A okulunda ilişkisel yaklaşımların genel olarak vurgulanmadığı B okulunda ise bir öğretmenin ilişkisel stratejileri açıkça kullandığı diğer öğretmenlerin ise düzenli olarak kullanmadığı belirtilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre üst düzeyde ilişkisel düşünmeyi kullanan öğrenci yüzdesinin oranının her sınıf düzeyi için B okulunda daha fazla olduğu görülmüştür. Aynı zamanda B okulundaki öğrencilerin sınıf düzeyi arttıkça ilişkisel düşünmeyi kullanma yüzdelerinin de arttığı görülmektedir.

Hunter (2007) yaptığı çalışmada “İlişkisel ya da İşlemsel Düşünme: Öğrencilerin Açık Sayı Cümleleri Biçimindeki Problemlerin Çözümü” isimli çalışmasında öğrencilerin eşit işaretini ve denklemi nasıl anlamlandırdıklarını keşfetmeyi amaçlamıştır. Bu bağlamda öğrencilerin açık sayı türündeki problemleri çözmede hangi stratejileri kullandıklarına ve bu süreçte yaygın olarak hangi hataları yaptıklarına odaklanmışlardır. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseninin kullanıldığı bu çalışmanın katılımcılarını 9-13 yaş grubu arasındaki 361 öğrenci oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak eşitlik problemleri ve eşit işareti ile ilgili uyarlama çalışması olan bir anket kullanılmıştır. Verilerin analizinde ise bu anket için oluşturulmuş olan puanlama anahtarı kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre az sayıda öğrencinin ilişkisel düşünmeyi kullandığı ileri sürülmüştür. Bununla birlikte sadece aritmetik stratejileri kullanan öğrenci sayısının sınıf düzeyi ile ters orantılı olduğu sınıf düzeyi arttıkça sadece aritmetik stratejileri kullanan öğrenci sayısının azaldığı görülmüştür. Eşitlik problemleri çözerken öğrencilerin yapmış oldukları yaygın hataların eşit işaretinin eksik anlamlandırılmasından kaynaklandığı, öğrencilerin eşit işaretini işlem yapmayı gerektiren bir işaret olarak gördükleri ortaya çıkmıştır. Erken yaşlarda yapılan hatalar daha çok olmakla birlikte sekizinci sınıfta hala hata yapan öğrencilerin olduğu saptanmıştır.

Köse ve Tanışlı (2011), “İlköğretim Matematik Ders Kitaplarında Eşit İşareti ve İlişkisel Düşünme” isimli çalışmalarında Türkiye’de okutulan ilkokul matematik ders ve öğrenci çalışma kitaplarındaki eşit işaretinin kullanımını ve ilişkisel düşünmeyi destekleyici etkinliklere ne kadar yer verildiğini araştırmışlardır. Araştırmalarında nitel araştırma yönteminden doküman incelemesini kullanmışlar ve verileri Mcneil ve diğerlerinin 2006’ da geliştirmiş oldukları içerik kodlamasını esas alarak analiz etmişlerdir. Araştırma sonucunda ülkemizde 1-5. Sınıf matematik ders ve çalışma kitaplarında eşit işaretinin çoğunlukla işlem yapma ve sonuç bulma biçiminde kullanıldığını saptamışlardır.

Carpenter ve arkadaşları (2005) “İlkokulda Cebir: İlişkisel Düşünmenin Geliştirilmesi” isimli çalışmalarında ilişkisel düşünmenin gelişimini destekleyen sınıflarda öğrenim gören 2 tane üçüncü sınıf öğrencisi ile yapılan görüşmeleri incelemişlerdir. Her iki durumda da dağılma özelliğine odaklanılmıştır Bu öğrencilerden birinin bulunduğu sınıfın öğretmeni öğrencilerinin çarpma işlemlerini ilişkilendirebilmesi için dağılma özelliğinin kullanılacağı bir dizi sayı cümlesi sunmaktadır. İkinci öğrenci ise dağılma özelliğini hali hazırda kullanmakta olup kendi bilgisini genişletmektedir. Bu araştırmada öğrencilerin ilkokulda öğrenmiş oldukları aritmetiksel kavram ve becerilerin cebir öğrenmede ihtiyaç duyacakları kavram ve beceriler ile nasıl bir araya getirileceği göz önüne alınmıştır. Araştırma sonuçlarına göre ilişkisel düşünen öğrenciler diğerlerine oranla ilişkiler kurmak için temel matematiksel kuralları çok daha az kullanmaktadırlar. Böylece ilişkisel düşünme anlayarak öğrenmede ilişki kurmanın özel bir türü olarak görülebilir.

Baiduri (2014) “ Üstün Yetenekli İlkokul Öğrencilerinin İlişkisel Düşünme Süreci” isimli çalışmasında matematikte üstün yetenekli 5. sınıf öğrencilerinin bir matematik problemi ile karşılaştıklarında ilişkisel düşünme sürecini analiz etmeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda kız ve erkek öğrencilerin ilişkisel düşünme süreçlerinin nasıl olduğunu araştırmak ve karşılaştırmak amacıyla 31 tane 5. sınıf öğrencisine sayısal yetenek testi uygulayarak bu testten yüksek puan alan üstün yetenekli biri kız, biri erkek 2 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşme yapmışlardır. Bu araştırmada veri toplama aracı olarak sayısal yetenek testi ile görüşmeler için problemler kullanılmıştır. Video kaydı yapılan görüşmelerin yanı sıra verilerin inandırıcılığının sağlanması açısından zamanda çeşitleme ve katılımcı kontrolü amacıyla gözlemler yapılmıştır. Verilerin analizinde Miles ve Huberman’ın (1994) üç aşamalı modeli kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin matematiksel bir problemle karşılaştıklarında, Polya’nın problem çözme modelindeki problemi anlama ve problemi çözme basamaklarını hem kendi içinde hem de birbiri arasında ilişkilendirdikleri ortaya çıkmıştır. Bunun yanı sıra erkek öğrencilerin kurmuş oldukları ilişkilerin kız öğrencilerin kurmuş oldukları ilişkilerden daha zengin olduğu ileri sürülmüştür.

1.4. Amaç

Bu araştırmanın genel amacı ilişkisel düşünmeyi destekleyen bir öğretim süreciyle ortaokul 5. sınıf öğrencilerinin eşit işaretinin anlamını nasıl yorumladıklarını belirleyerek ilişkisel düşünme becerilerinin gelişimini gözlemlemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranmıştır;

1. Ortaokul 5. sınıf öğrencilerinin eşit işaretini anlamaları ve yorumlamaları ile ilişkisel düşünme becerileri nasıldır?
1.1.Ön ve son görüşmelerdeki öğrencilerin eşit işaretini anlamaları ve yorumlamaları ile ilişkisel düşünme becerileri nasıldır?
1.2.Öğrencilerin işlem özellikleri ile ilgili becerileri nasıldır?
2. Öğretim süreci ile öğrencilerdeki eşit işaretinin anlamı ve ilişkisel düşünme becerileri nasıl gelişmektedir?

1.5. Önem

Eğitim sistemindeki matematik öğrenimine yönelik öğretmenden, programdan ya da sınav sistemlerinden kaynaklanan ezberci yaklaşımlar matematik öğrenimini ve uluslararası sınavlardaki matematik başarılarını engellemektedir. 1999 yılında hazırlanan TIMMS sonuçlarına göre Türkiye matematik alanında 38 ülke arasında 31. sırada yer almıştır (Earged, 2003). TIMMS raporlarında dikkat çeken konu öğrencilerin cebir konusundaki eksiklikleridir. Ersoy ve Erbaş (2005) uluslararası öğrenci başarısını inceleyen KaPAT testinde öğrencilerin cebir konularında eksiklikleri ve kavram yanılgılarına sahip olduklarını tespit etmişlerdir. Bu konudaki en büyük eksikliğin de eşitlik ve değişken konusunda olduğunu belirtmişlerdir. Eşitlik kavramının aynı zamanda çocuğun problemi çözebilmesinde önemli bir yer tuttuğunu fark edilmesi çocuğun muhakeme gücünü de arttıracak ve ezbersel bir yöntemden kaçınacaktır. Ezberci yaklaşımın bir alternatifi olarak ilişkisel öğrenme, ilişkisel öğrenmenin de bir boyutu olabilecek ilişkisel düşünme göze çarpmaktadır.

İlişkisel düşünme ile ilgili ilk çalışmalar 2000'li yıllarda başlamıştır. İlişkisel düşünmenin aritmetikten cebire geçişte önemli bir yerde olduğu düşünüldüğünde öğrencilerin ilkokuldan ortaokula geçişlerinde bu becerinin geliştirilmesi önemlidir. 2012-2013 öğretim yılında yenilenen ortaokul matematik öğretim programı ile birlikte nicelikler arası ilişkiler ve bu ilişkilere dair akıl yürütme biçimleri daha fazla vurgulanmaktadır. Bu çalışmanın bulgularının program geliştirme uzmanlarına öğretim programlarını geliştirmede ve değerlendirmede, öğretmenlere ise sınıf içi uygulamalarını planlama ve yürütmede faydalı olacağı düşünülmektedir.

1.6. Sınırlılıklar

Bu araştırma ilişkisel düşünmenin ve ilişkisel düşünme ile ilgili kavramların gelişiminin 5. sınıfa devam eden öğrencilerden elde edilecek nitel veriler doğrultusunda tespit edilmesiyle sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Cebir: Sayılar bağlamında genellemelerin ifade edilmesi ve manipüle edilmesi için sembollerin kullanılması anlamına gelir (Lee, 1996).

Cebirsel düşünme: Fonksiyonel düşünme, genelleme, eşitlik kavramı, modelleme, temsil kullanımı (grafik, tablo, …), problem çözme gibi çeşitli kavram ve becerileri içeren üst düzey bir düşünme olarak görülebilir.

Eşit: Yapı, değer, boyut, nicelik ve nitelik bakımından birbirinden ne artık ne eksik olmayan (iki veya daha çok şeyler), müsavi (TDK)

Eşitlik: İki veya daha çok şeyin eşit olması durumu, denklik, müsavilik, müsavat, muadelet (TDK)

İlişkisel düşünme: Öğrencilerin belirli bir amaç bağlamında bir problemi analiz etmede işlemlerin temel özelliklerini ve eşitliği kullanmalarını ve daha sonra bu amaç doğrultusunda süreci basitleştirmelerini içermektedir (Carpenter vd., 2005).

İKİNCİ BÖLÜM
YÖNTEM

2.1.Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada öğrencilerin eşit işaretini nasıl algıladıkları ve ilişkisel düşünme becerilerinin nasıl geliştiğini araştırmak amaçlanmıştır. Böyle bir amaca en uygun yaklaşımın nitel araştırma yaklaşımı olduğu söylenebilir. Nitel araştırma yaklaşımları son yıllarda eğitim alanında sıklıkla kullanılmakta olup matematik eğitiminde de bu yaklaşımlardan öğretim deneyi ve klinik görüşmelerden yararlanıldığı görülmektedir.

Öğretim deneyi Piaget'nin klinik görüşme tekniğinden üretilmiştir. Ancak öğrencilerin matematiksel bilgilerinin ortaya çıkarılması ile bu bilgilerin etkilenme yollarının/araçlarının ve durumlarının deneyimlenmesini de kapsadığından klinik görüşmeden daha kapsamlıdır (Steffe ve Thompson, 2000). Bu nedenle bu araştırmada nitel araştırma yaklaşımları içinde yer alan öğretim deneyi kullanılmıştır.

Öğretim deneyinin temel felsefesinde, öğrencilere matematiğin kazandırılabilmesinde araştırmacıların/öğretmenlerin "kendi matematiksel gerçekliklerinden bağımsız olmaları" öğrencilerin fiziksel ve sosyo-kültürel çevreleri içindeki etkileşimlerinin bir sonucu olarak yapılandırdıkları matematiksel kavram ve işlemlerin öğrenciye mal edilmesi yatmaktadır. Öğrencilerin sahip oldukları matematik bilgisi ile araştırmacıların bu öğrenci bilgisini nasıl yorumladıkları arasındaki fark bu yöntemin temel dayanaklarından biridir. Öğrencilerin sahip olduğu matematik bilgisi, matematiksel etkinliklerle uğraşırken yaptıkları ve söyledikleri ile belirlenebilmekle birlikte, öğretim deneyinde araştırmacıların temel amaçlarından biri öğrencilerin sahip olduğu matematiğe dayanan modeller kurmaktır (Steffe ve Thompson, 2000).

Araştırmacılar için öğretim deneyi yönteminin kullanılmasındaki öncelikli amaç, öğrencilerin matematiksel öğrenme ve muhakemelerini ilk elden tecrübe etmektir. Öğretim yoluyla kazanılan deneyimler olmaksızın, öğrencilerin matematiksel kavram ve işlemleri nasıl yapılandırdıklarını anlamak için bir dayanak olmayacaktır.

Matematik eğitimi deneysel bir bilimdir öyle ki deneysel matematik de denilebilir. Öğretim deneyi ise bunun hem bir aracı hem de sınıf içi etkileşimlerdeki rolleri ve öğretmenleri/araştırmacıları ilgilendiren daha pek çok konuda öğretmenlerin/araştırmacıların eylemlerini belirleyen, araştırma sorularının cevaplarını bulmak, matematik öğreniminin doğasını ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin gelişimini araştırmak için bir yöntemdir (Czarnocha ve Maj, 2008).

Öğretim deneyi aynı zamanda öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin açıklanması ve keşfedilmesi için tasarlanmış yaşayan bir yöntemdir. Diğer taraftan matematik öğretmenlerinin de öğretim deneyi yöntemini kullanmalarında asıl amaçları, öğrencilerinin öğrenmelerini geliştirmektir. Bu açıdan bakıldığında bir öğretim deneyi aynı sınıfta ve ötesindeki öğrenmelerin gelişimine yardımcı, öğretim ile eş zamanlı yürütülen, öğrenme ve öğretme süreçlerinin sınıf içi araştırmasıdır.

Bu yöntem bir dizi oturum (öğretim bölümü) içerir. Bir oturum ise, bir öğretim yapan (öğretmen/araştırmacı), bir ya da birkaç öğrenci, bir şahit (gözlemci) ve veri kayıt yöntemini içermektedir (Steffe ve Thompson, 2000). Bu araştırmada öğretim yapan kişi araştırmacının kendisi, öğrenciler 6. sınıf öğrencileri, şahit tez danışmanı, veri kayıt yöntemi ise videodur.

Öğretim bölümleri kaydedilir ve analiz edilir. Bu analizler bir sonraki öğretim bölümünün geliştirilmesinde kullanılır. Bu süreç boyunca araştırmacı hipotezlerini test eder ve geliştirir. Klinik görüşmelerde olduğu gibi ilgi odağı öğrencilerin muhakemeleridir. Öğretim deneyinde gözlemcinin amacı, öğretmen/görüşmeciye öğrencileri anlamada ve bir sonraki öğretim bölümünü belirlemede yardımcı olmaktır. Araştırmacılar öğrencilerin matematiğini öğrenme girişimlerinde öğrencilerin o anki düşünceleri yenilemelerini cesaretlendirecek etkileşim yolları ve durumlar yaratmaya çalışırlar. Öğrencilerin düşüncelerini değiştirmeleri öğretim deneyi için istenen bir sonuçtur. Öğretim deneyi bu yönüyle klinik görüşmeden ayrılır.

2.2. Katılımcılar

Nitel araştırmalarda ilk amaç genelleme değildir. Bu nedenle araştırma sonucunda elde edilen bulguların belirli bir evren için genellenmesi amaçlanmamaktadır. Bu araştırmada çalışılan konunun derinlemesine ve tüm olası ayrıntıları ile incelenmesi amaçlandığından örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemi benimsenmiştir. Bu araştırmada 5. sınıf öğrencilerinin seçilmesindeki temel amaç bu düzey öğrencilerin yeni uygulanan 4+4+4 eğitim sistemi ile 2012-2013 öğretim yılında ilk kez ortaokul kapsamında ele alınmasıdır. Bu değişim doğrultusunda öğrencilerin zihin haritalarını ortaya koyabilmenin öğretim deneyi ile mümkün olabileceği düşünülmüştür. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden ise ölçüt örnekleme yöntemine başvurulmuştur. Buna göre önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumlar çalışılmıştır. Adı geçen ölçütler önceden oluşturulmuş bir listeden alınabilir ya da araştırmacı tarafından hazırlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2003).

Araştırmanın katılımcılarını bir devlet okulundaki 5. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmada seçilen 6 öğrencinin eşit işaretini algılamaları ve ilişkisel düşünme becerileri üzerine odaklanılmıştır. Öğrencilerin seçiminde üç temel ölçüt dikkate alınmıştır. Bu ölçütlerden ilki araştırmacının matematik öğretmenliğini yaptığı, dolayısıyla tanıdığı ve önceden gözlemlemiş olduğu 5. sınıf öğrencilerinden seçmesi, ikinci ölçüt ise bu öğrencilerin sözlü ifade becerileri yüksek olanlar arasından seçilmiş olmasıdır. Üçüncü ölçüt ise seçilen öğrencilerin öğretmen görüşü bağlamında ilişkisel düşünme becerilerinin düşük, orta ve yüksek seviyede olmasıdır. Ayrıca seçilen öğrencilerin gönüllü olması dikkate alınmıştır. Bu öğrenciler seçilirken hem araştırmacının hem de bir önceki yılın (4. sınıf) sınıf öğretmenlerinin öğrencilerle ilgili görüşleri dikkate alınmıştır.

Bu kapsamda Eskişehir ilinin sosyo-ekonomik düzeyi orta sınıf olan bir devlet okulunun 5. sınıf öğrencilerden üç farklı başarı düzeyinden (düşük, orta, yüksek) 6 öğrenci seçilmiştir. Her düzey için bir erkek ve bir kız öğrenci ile çalışılmıştır. Öğrencilerin dağılımlarını belirten tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo 2: Araştırmaya Katılan Öğrencilerin Başarı Düzeyleri

Başarı düzeyi / Sınıf	Düşük	Orta	Yüksek
5/A	1(Kız)	1(Kız)	1(Kız)
5/A	1(Erkek)	1(Erkek)	1(Erkek)
Öğrenci sayısı	2	2	2
Toplam		6	

Tablo 3: Öğrencilerin Demografik Özellikleri

Öğrenci İsimleri	**Ozan**	**Gaye**	**Hakkı**	**Tülay**	**Semih**	**İrem**
Yaşları	11	11	11	11	11	11
Kardeş sayısı	1	0	0	1	5	0
Kardeşlerin eğitim durumu	İlkokul	-	-	Ortaokul	Okul öncesi İlkokul Lise Üniversite	
Annenin eğitim durumu	Lisans	Ortaokul	Lise	Ortaokul	İlkokul	Lisans
Babanın eğitim durumu	Lisans	Lise	Lisans	Ortaokul	Ortaokul	Lisans
Annenin mesleği	Öğretmen	Ev hanımı	Ev hanımı	Ev hanımı	Ev hanımı	Hemşire
Babanın mesleği	Öğretmen	İşçi	Memur	Güvenlik görevlisi	İşçi	Asker
Evde kendine ait çalışma odası olma durumu	Var	Var	Var	Var	Var	Var
Matematik ödevlerinin verilme sıklığı	Her hafta	Her hafta	Her hafta	Her hafta	Her hafta	Her hafta
Matematik ödevlerini yapma sıklıkları	Haftada 2 gün	Haftada 2 gün	Haftada 2 gün	Haftada 2 gün	Haftada 2 gün	Haftada 2 gün
Matematik dersine ödev dışı ayrılan zaman	Haftada 1-2 saat	Haftada 1-2 saat	Haftada 3-4 saat	Haftada 1-2 saat	Haftada 2-3 saat	Haftada 2-3 saat

Matematik dersine çalışma yöntemleri	Kaynak kitaplar kullanarak Anne-babadan yardım alarak Problemler çözerek Ödev yaparak Tekrar yaparak	Kaynak kitaplar kullanarak Problemler çözerek Ödev yaparak Tekrar yaparak	Kaynak kitaplar kullanarak Anne-babadan yardım alarak Problemler çözerek Ödev yaparak Tekrar yaparak	Kaynak kitaplar kullanarak Problemler çözerek Ödev yaparak Tekrar yaparak Bilgisayar CD'leri ile	Kaynak kitaplar kullanarak Kardeşinden yardım alarak Problemler çözerek Ödev yaparak Tekrar yaparak	Kaynak kitaplar kullanarak Anne-babadan yardım alarak Problemler çözerek Ödev yaparak Tekrar yaparak Bilgisayar CD'leri ile

2.3. Veri toplanması ve Yorumlanması

Nitel araştırmalarda en sık kullanılan veri toplama araçları gözlem, görüşme ve doküman incelemesidir. Bu araştırmada görüşme tekniğinin bir çeşidi olan ve özellikle matematik eğitiminde sıkça kullanılan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşmelerin ve öğretme sürecindeki oturumların video kaydı tutularak analizi yapılmıştır. Ayrıca araştırmacının ve katılımcıların tuttukları günlükler ile kullanılan çalışma yaprakları da veri toplama aracı olarak kullanılmıştır.

2.4. Öğretim Süreci ve Klinik Görüşme

Bu öğretim deneyi üç aşamadan oluşmuştur. Bu aşamalar araştırmanın başında bir klinik görüşme, öğretim aşaması ve araştırmanın sonunda bir klinik görüşmedir. Çocuktaki ilişkisel düşünme becerilerindeki ilerlemeyi belirleyebilmek için, klinik görüşmeler araştırmanın başında ve sonunda yapılmıştır. Öğretim aşaması 8 oturumdan oluşmuştur. Öğretim aşamasında, araştırmacı öğrenciye sorduğu sorulara ilişkin almış olduğu yanıtlara bakarak öğrencinin nasıl düşündüğünü ve matematiksel bilgiyi nasıl yapılandırdığını belirlemeye çalışmıştır.

Öğretim deneyi üç temel aşamayı içeren bir döngü olarak ifade edilebilir. Cobb (2000) bu aşamaları öğretim sürecinin tasarlanması ve planlanması, sınıf içinde uygulanması ve geriye dönük analiz olarak ifade etmektedir. Ön klinik görüşmelerden sonra yapılan oturumlar planlanmış ve tasarlanmış, sınıf içinde uygulanarak geriye dönük analiz edilmiş ve bulgular bir sonraki oturumun tasarlanmasında kullanılmıştır. Bu analizler her oturumun ve görüşmenin sonunda tekrarlanmıştır.

2.4.1. Klinik Görüşme

Piaget tarafından geliştirilen klinik görüşme yöntemi matematik eğitimi alanında sıkça kullanılmaktadır. Bu yöntemden çocukların zihinsel yapılarının nasıl oluştuğu ve bu yapının nasıl çalıştığı, nasıl düşündüklerini ve kişisel dünyalarını nasıl yapılandırdıkları gibi konular için yararlanılmaktadır (Ginsburg, 1981). Goldin (1998) araştırmalarda klinik görüşme tekniğinin kullanılmasının iki nedenden dolayı önemli olduğunu belirtmiştir. Bu amaçlardan birincisi, problem çözme yöntemi sayesinde çocukların ya da yetişkinlerin matematiksel davranışlarını gözlemleyebilmektir. İkinci amaç ise bu gözlemlerden elde edilen çocuktaki matematiksel bilgi yapıları, anlamalar ve çocukların bilişsel süreçlerindeki duyuşsal değişiklikler ile ilgili sonuçlara varabilmektir. Piaget çocuğun zihinsel gelişimini dikkate alarak klinik görüşmeleri keşfetme, tanımlama ve yeterlilik olmak üzere üç amaç başlığı altında tanımlanmıştır (Ginsburg, 1981):

- Keşfetme, öğrencinin bir problem durumuna yaklaşımındaki zihinsel olguyu fark etmesidir.
- Tanımlama, öğrencinin bir problem durumuna yaklaşımındaki zihinsel olguya dayanan bilişsel süreçtir.
- Yeterlilik ise öğrencinin bir görevi yerine getirebilme becerisi olarak tanımlanmıştır.

Hunting (1997) klinik görüşmelerde öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlara bakarak gözlemcinin farklı veriler elde edebileceğini belirtmiştir. Klinik görüşme sorularının açık uçlu olması gerektiğini belirterek öğrencilerin bu soruları yanıtlarken özgür olduklarını vurgulamıştır. Ayrıca görüşmeler sırasında öğrenciye ve görüşmeciye düşüncelerini aktarmak için izin verilmesi gerektiğini, tartışma ve diyaloglar için düşünme sürecinin gerekli olduğunu belirtmiştir.

Bu bağlamda araştırma kapsamında, ilişkisel düşünme becerilerini izleme ve eşitliği tanımlayabilme ve ilişkisel düşünme becerilerinin gelişimini görebilme açısından klinik görüşmelerde öğrenciye “İşlem yapmadan da bulabilir miydin?”.

“Neden doğru olduğunu düşünüyorsun?”, “ biçiminde sorular kullanılmıştır. Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın , “Tekrar açıklar mısın?” “İstersen biraz daha düşünebilirsin, zamanımız var”, “Peki, nasıl buldun bu kadar çabuk?”, “Başka yolla yapılabilir miydi?”, “Biraz daha açık bir şekilde söyleyebilir misin?”, “Neden o sayı gelebileceğini düşündün?”, “Farklı sayılar da gelebilir mi?” gibi farklı sorular da sorulmuştur (Clement, 2000). Ayrıca bir yönlendirme yapmadan “çok güzel”, “aferin”, “tamam”, “bravo”, “tabi, olabilir” gibi öğrenciyi cesaretlendirici ifadelere de yer verilmiştir. Daha sonra hazırlanan klinik görüşme soruları üç uzman görüşüne sunulmuş ve gelen görüşler doğrultusunda sorulara son şekli verilmiştir.

Bu araştırmada görüşmeci hem araştırmacı hem de öğrencilerin matematik öğretmenidir. Görüşmelerin ve oturumların yapıldığı ortam araştırmacı tarafından okul idaresinin uygun gördüğü bir derslik olarak seçilmiştir. Seçilen dersliğin fiziksel koşulları araştırmacı tarafından etkileşime en uygun şekilde düzenlenmeye çalışılmıştır.

Oturumlarda öğrencilere çeşitli matematiksel görevler sunularak bu görevleri grup içi etkileşimle ya da bireysel olarak yerine getirmeleri istenmiştir. Daha sonra görevlerle ilgili tartışmalar yapılarak öğrencilerin ilgili kavramları ve becerileri yapılandırmaları gözlenmiştir. Öğrencilerin yaş düzeyleri göz önüne alınarak oturumlar 30-40 dakika arasında yapılmış, gerek duyulduğunda oturumlara ara verilmiştir. Tablo 3’ te öğrenciler ile gerçekleştirilen toplam klinik görüşme süreleri verilmiştir.

Tablo 4: Öğrencilerle Yapılan Klinik Görüşme Süreleri

Klinik Görüşme Süreleri		
Öğrenci İsimleri	*Ön görüşme*	*Son Görüşme*
Ozan	93’ 8’’	48’ 35’’
Gaye	64’ 49’’	45’ 16’’
Tülay	69’ 33’’	57’ 18’’
Hakkı	62’ 11’’	40’ 25’’
Semih	57’ 43’’	26’ 56’’
İrem	55’ 24’’	27’ 32’’

2.5. Pilot Çalışma

Pilot çalışmanın amacı, görüşme sorularının net olarak belirlenebilmesi ve tekrar uygulanabilir olmasıdır. Böylece dilde hatalı kullanımlar ve matematiksel hatalı anlamalar giderilerek, beklenmedik durumlara karşı önlemler alınır (Goldin, 2000).

Pilot çalışmada öncelikle, hazırlanan klinik görüşme soruları araştırmada yer alan katılımcılara benzer bir grup seçilerek bu gruba uygulanmıştır. Bu doğrultuda düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip üç öğrenci ile çalışılmış ve görüşmeler iki gün sürmüştür. Görüşmeler sırasında video kaydı yapılmıştır. Birinci gün öğrencilere ilk beş soru, ikinci gün dört soru yöneltilmiştir. Bu görüşmeler sonunda öğrencilerin süre ile ilgili sorun yaşadıklarını, bunun nedeninin de araştırmacının yönlendirici soruları geç sormasından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Ayrıca soruların kazanımlara göre yerlerinin değişmesi gerektiği ve kolaydan zora göre sıralamasının tekrar gözden geçirilmesi gerektiği görülmüştür. Daha sonra üzerinde değişiklikler yapılan klinik görüşme soruları için ikinci bir pilot çalışma yapılmıştır. İkinci pilot uygulamada da aynı okulda farklı bir sınıftan, diğer gruptan biraz daha düşük düzeyde olan, düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip üç öğrenci ile çalışılmıştır. İkinci pilot uygulama da iki gün sürmüştür. Birinci gün öğrencilere, ilk beş soru ve ikinci gün kalan dört soru yöneltilmiştir. Daha sonra pilot görüşmelerden örnekler tez danışmanı tarafından izlenmiş ve klinik görüşme sorularının bu haliyle oluşmasına karar verilmiştir. Ön görüşme ve son görüşme soruları Ek-3 ve Ek-4'te verilmiştir.

2.6. Öğretim Süreci

Öğretim süreci altı oturum olarak planlanmış ancak üçüncü oturumdan ve altıncı oturumdan sonra konuları tekrar etmek amacıyla birer oturum daha yapılmıştır. Gerçekleştirilen her bir oturum, oturumun amacı, ilgili kazanımı ve süresi Tablo 5'de sunulmuştur.

Tablo 5: Uygulama Sürecinde Her Oturuma Ait Amaç ve Kazanımlar

	Amaç	**Kazanım**	**Süre(dk)**
1. Oturum	Öğrencilerin eşitlik kavramı hakkında düşüncelerini almak ve sayı cümlelerini yazmalarını sağlamak	Öğrenciler ilişkisel düşünmeyi kullanarak toplama işlemi yapar.	50
2. Oturum	Öğrencilerin birim küpleri kullanarak çıkarma işlemi yapmalarını sağlamak ve ilişkisel düşünmeyi ne derecede kullanabildiklerini gözlemleyebilmek	Öğrenciler ilişkisel düşünmeyi kullanarak çıkarma işlemi yapar.	60
3. Oturum	Çarpma ve toplama işlemleri üzerindeki ilişkileri fark etme, bu ilişkilerle ilgili soruları çözebilme	Öğrenciler ilişkisel düşünmeyi kullanarak çarpma işlemi yapar.	50
Ek oturum	Toplama ve çıkarma işlemlerinin bir arada verildiği örnekleri çözümleyebilme. Çarpma işleminde ortak çarpanlara odaklanarak ilişki kurma	Öğrenciler ilişkisel düşünme özelliklerini kullanarak toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini yapar.	30
4. Oturum	Çıkarma, toplama ve çarpma işlemlerinin özelliklerini fark etme	İlişkisel düşünme yardımıyla işlem özelliklerini kavrar.	50
5. Oturum	Çarpma işleminin özelliklerini fark etme	İşlemleri farklı yollardan yaparak ve birim küpleri kullanarak çarpma işleminde karşılaştırma yapar, farklı hesaplamalar yaparak sonuçlar karşılaştırır.	60
6. Oturum	Bölme işleminin özelliklerini fark etme	İşlemleri farklı yollardan yaparak ve birim küpleri kullanarak bölme işleminde karşılaştırma yapar, farklı hesaplamalar yaparak sonuçları karşılaştırır.	50
Ek Oturum	İşlem özellikleri bulunan ve bulunmayan işlemleri fark etme. Çarpma ve bölme işlemlerini aynı eşitlikte kullanabilme	Çarpma ve bölme işlemini tek eşitlik cümlesinde kullanarak işlem özelliklerini ortaya çıkarır.	30

Birinci oturumda öğrencilere “ Eşitlik denilince ne anlıyorsunuz?” sorusu yöneltilmiş, mikado çubukları kullanılarak öğrencilerin eşitliğin denge anlamını nasıl kazandıkları incelenmiştir. Bu süreçte etkinlikler toplama işlemi bağlamında yürütülmüştür. Mikado çubukları kullanılarak her çocuktan farklı gruplandırma yapmaları ve bunları kâğıda yazmaları istenmiştir. Öğrencilerin birbirleri ile etkileşimleri ve sözlü iletişimleri desteklenmiştir. Daha sonra öğrencilere “971+ 108=112+…” gibi sorular yöneltilmiştir.

İkinci oturumda öğrencilere birim küpler dağıtılmış ve onlardan bu küpleri kullanarak bir çıkarma cümlesi yazmaları istenmiştir. Bu öğretim ile öğrencilerin değişmeyen niceliklerin ne olduğuna, çıkan, eksilen ve fark arasındaki ilişkilere odaklanmaları amaçlanmıştır. Daha sonra doğru/yanlış sorularına geçilmiş ve açık sayı cümlelerinde verilmeyen sayılar buldurulması ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. “583 – 529 = 83 – 29” ve “67 – 49 = □ – 46” gibi örneklere geçilmiştir.

Üçüncü oturumda öğrencilere 24 adet birim küp verilip küpleri her grupta 3 tane olacak şekilde gruplara ayırmaları istenmiştir. Ardından yapmış oldukları işlemi sayı cümlesi olarak yazıp yazamayacakları tartışılmıştır. Bu noktada öğrencilerden “3+3+3+3+3+3+3+3=24” , “3x8=24” ve “[8x3=(2x3)+(6x3) vb.]” sayı cümlelerini yazmaları beklenmiştir. Üçüncü öğretimin ikinci dersinde aynı cinsten paraların toplamı 20 TL’ye eşit olmak üzere öğrencilere 20 adet 1 TL, 4 adet 5 TL, 2 adet 10 TL ve 1 adet 20 TL ayrı ayrı verilip bu paralar arasında nasıl bir ilişki olduğu sorulmuştur. Eşitlikleri sayı cümleleriyle yazmaları, t tablosu ile göstermeleri ve tablodan yararlanarak çarpanlar arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulmaları istenmiştir. Örneğin; 4x5 = 2x10 işleminde birinci çarpan yarıya düşerken ikinci çarpan iki katına çıkacaktır şeklinde öğrenci yanıtları gelmiştir.

Dördüncü oturumda eşit işaretinin anlamı tekrar edilmiş, doğru/ yanlış biçimindeki sayı cümleleri verilip öğrencilere verilen ifadelerde yanlış olan sayı cümlelerinin neden yanlış olduğu sorulmuştur. Burada öğrencilere “Sayıların yerlerinin değişmesinin bir önemi var mı?” şeklinde sorular yöneltilerek öğrencilerden gelen yanıtlara göre toplama ve çıkarma işleminde değişme özelliğinin olup olmadığı sorgulatılmıştır. İkinci bölümde birleşme özelliğini vurgulayan doğru/yanlış biçimindeki sayı cümleleri verilerek öğrencilerin incelemeleri için zaman verilmiş, öğrencilere "İşlem yapmamız gerekli midir?" sorusu yöneltilmiş, öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlara göre öğretmen hangi ifadelerin neden yanlış olduğunu sorarak öğrencilerin bir genellemeye gitmelerini sağlanmıştır.

Beşinci oturumda öğrencilere kantine gelen kolilerin içlerine konan çikolataların nasıl yerleştirildiği sorulmuştur. Öğrencilerden gelen yanıtlar üzerine sınıfa getirilen bir kolide denemeler yapılmış, kolinin içinde kutular, kutuların içinde de çikolataların olduğu gösterilmiştir. Çikolata sayısının nasıl hesaplanacağı sorulmuş ve farklı yanıtlar aranmıştır. Daha sonra yapılan uygulamaya ait bir örnek soru sorulmuş ve nasıl yapılabileceği üzerinde düşünmeleri istenmiştir. (*Örnek Soru: Bir bisküvi paketinde 10 adet bisküvi vardır. 20 paket bisküvi bir kutuya yerleştirilir. Bir koliye ise 25 kutu sığmaktadır. Buna göre bir kolideki bisküvi sayısını gösterecek ifadeyi yazabilir misiniz?)*

Bu çalışmaya benzer bir çalışma da birim küplerle yaptırılarak önce üstü açık bir dikdörtgen prizma alınmış ve birim küpleri nasıl yerleştirecekleri sorulmuştur. Bu aşamadan sonra dağılma özelliğinin keşfedilmesi için birim küpler farklı renklerde seçilmiştir. Toplam küp sayısını bulmak için iki farklı yolla çözüm yapılabileceğini öğrenciler fark ettikten sonra öğrenciler tarafından *dağıtma özelliği* diye isimlendirilmiştir. Ayrıca üçlü küpler verilerek nasıl yerleştirebilecekleri ve küp sayısının değişimi öğrencilere incelettirilmiştir. Yapılan uygulamalardan sonra çarpma işlemi özelliklerinin ilişkisel düşünme ile çözülebilecek uygulama sorularına geçilmiştir.

Son oturumda ise bölme işleminin ilişkisel düşünme ile nasıl çözülebileceği üzerine durulmuştur. Bölme işlemine geçerken öğrencilere örnek bir problem durumu verilmiştir. (*Örnek Soru: Üçgen piramitler ile kare prizmaların sayısı eşittir. Kare prizmaların toplam yüzey sayısı 36 olduğuna göre piramitlerin yüzey sayısını bulunuz.)* Sınıfa getirilen kare prizma ve üçgen piramidin yüzey sayıları incelettirilerek öğrencilere "Kare prizmadaki toplam yüzey sayısı 36 olduğuna göre kaç prizma vardır" sorusu yöneltilmiştir. 6 yanıtı geldikten sonra doğru yanıtı nasıl bulduğu sorulmuş ve bu şekilde bir işlemin piramit için de yapılıp yapılamayacağı düşündürülmüştür. Öğrenciler prizma ve piramit sayılarının eşit olduğunu söyledikten sonra 6 ile 4'ü çarpmaları beklenmiştir. 24 yanıtından sonra "24 : 4 = 36 : 6" eşitliğinin yazılıp yazılamayacağı sorulmuş ve veriler t tablosuna yazılmıştır.

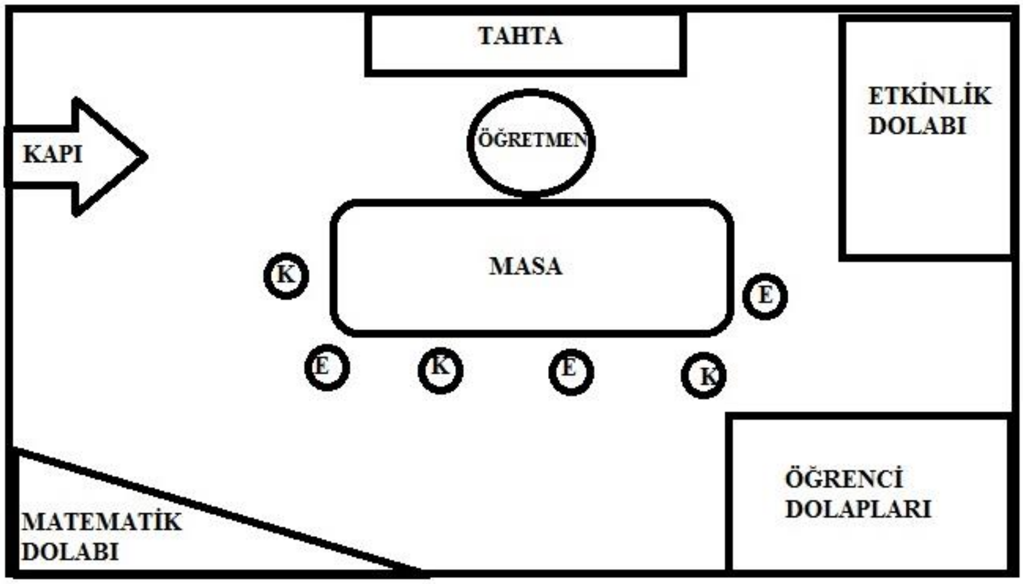
Her öğretimden sonra öğrencilerin günlüklerini çıkarmaları ve o günkü etkinliğe ilişkin düşüncelerini, duygularını yazmaları istenmiştir. Genel olarak veri toplama süreci Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6: Veri Toplama Takvimi

Tarih	Zaman	Süre	Etkinlik
11.11.2012	4 hafta		Soruların belirlenmesi
05.01.2013	1 hafta	322'	Pilot çalışma
13.01.2013	1 hafta		Soruların tekrar hazırlanması
18.01.2013	1 hafta		Tez Danışmanı ile öğrenci seçimi hakkında görüşme
24.01.2013 27.01.2013	4 gün	402'	Ön görüşmelerin yapılması
15.02.2013	1 gün	50'	Toplama işlemi
25.02.2013	1 gün	60'	Çıkarma işlemi
03.03.2013	1 gün	50'	Toplama ve çıkarma işlemi
08.03.2013	1 gün	30'	Tekrar çalışması
15.03.2013	1 gün	50'	Çarpma işlemi
25.03.2013	1 gün	60'	Bölme işlemi
31.03.2013	1 gün	50'	Çarpma ve bölme işlemi
04.04.2013	1 gün	30'	Tekrar çalışması
09.04.2013 12.04.2013	4 gün	246'	Son görüşmelerin yapılması

2.7.Ortam

Araştırmanın uygulaması 20012-2013 öğretim yılı güz ve bahar döneminde Eskişehir ili merkezindeki bir ortaokulundaki özel alt sınıfında gerçekleştirilmiştir. Okul aynı zamanda araştırmacının kendi öğretmenliğini de yapmış olduğu okul olması bakımından daha uygun olacağı ve rahat hissedeceği düşünülmüştür. Sınıf seçiminde normal sınıfların aksine bu sınıfta öğrencilerin ders iletişimini güçlendirebilecek materyallerin bulunması ve oluşturulabilmesi sınıf oturma düzeninin "U" şeklinde olması gibi ölçütlere dikkat edilmiştir. Sınıfta bir etkinlik panosu ve etkinlik dolabı oluşturulmuştur. Öğretim sırasında öğretmenin uygulamış olduğu etkinlikler bu dolapta biriktirilmiş ve öğrenci görüşleri panolara asılmıştır. Ayrıca etkinlik sonrasında ya da aralarda öğrenciler istedikleri etkinliklerle zaman geçirebilmişlerdir. Öğrenciler tekli sandalyelere oturmuşlar ve yüzleri öğretmen ve tahtaya dönük olmuştur. Öğrenciler bir kız, bir erkek olacak şekilde oturmuşlardır. Ayrıca oturma düzeni yüksek düzey-orta düzey-alt düzey-orta düzey-alt düzey-yüksek düzey öğrenci şeklindedir. Sınıf ortamının bir krokisi Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2: Sınıf ortamı

2.8. Verilerin Analizi

Verilerin analiz sürecinde öğretim deneyi sürekli analiz ve geriye dönük analiz olmak üzere iki önemli analiz düzeyini içermelidir. Öğretim deneyine ilişkin verilerin analizi oluşturulurken sürekli ve geriye dönük analiz basamaklarını içermelidir. Sürekli analiz sayesinde araştırmacı öğrencinin bilgi, eylem ve eğilimlerine bakarak modelini oluşturabilir (Simon, 2000).

Bu araştırmanın sürekli analiz bölümünde araştırmacı kaydedilen video görüntülerinden çıkartmış olduğu sonuçları ve gözlemlerini tez danışmanı ile tartışmıştır. Geriye dönük analizde ise klinik görüşmeler değerlendirilerek elde edilen verilere ait dökümler çıkartılmıştır. Bu dökümün ardından video kayıtları, öğrencilerin çalışma kâğıtları titizlikle incelenmiş ve herhangi bir düzeltme yapılmamış; görüşme kayıtları olduğu gibi aktarılmıştır. Veriler bağımsız 2 kişi tarafından kodlanmış ve aktarılmıştır.

Araştırmacının günlüğü de veri toplama araçlarından biri olduğu ve diğer verilere destek olarak kullanıldığı için verilerin analizinde günlüğün de analiz yapılarak diğer verilere ışık tutması beklenmektedir. Öğrencilerin günlüklerinin analizinde ise oturumlarda ve görüşmelerdeki ifadelerine benzer ya da karşıt ifadelerin görülmesi verilerin güvenilirliğini arttıracağı düşünülmektedir.

2.9. Geçerlik ve Güvenirlik:

Nitel araştırmalarda araştırmaya ait geçerlik ve güvenirlik kavramlarının inandırıcılık (iç geçerlilik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) gibi çeşitli boyutlarda ele alındığı görülmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Araştırmada geçerliğin ve güvenirliğin sağlanabilmesi için araştırmacı tarafından bazı önlemler alınmıştır. Alınan önlemler şu şekilde ifade edilebilir:

- Araştırmacı gerçekleştirilen etkinliklerde inanılır ve güvenilir veriler toplamak amacıyla öğrenciler ile özel alt sınıfta uzun süreli etkileşimde bulunmuştur.
- Araştırma sürecinin tamamı kayıt altına alınmıştır.
- Araştırmanın amaçları doğrultusunda, öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerini ortaya çıkaracak nitelikte veri toplanmıştır.

- Araştırma sürecinde farklı veri toplama araçları yardımı ile farklı türde veriler farklı zamanlarda toplanarak veri çeşitlemesi yapılmıştır. Bu yolla araştırmanın geçerliliğinin desteklenmeye çalışılmıştır.
- Öğretim bölümlerinin içeriği ve klinik görüşme görevlerinin hazırlanmasında alan uzmanlarının görüşleri alınmıştır.
- Araştırma sürecinde elde edilen bulgular uzman öğretim üyesinin görüşlerine sunularak onay alınmıştır.
- Öğretim bölümlerinin sonunda geriye dönük analizler yapılarak bir sonraki öğretim bölümünün tasarlanmasında bu analiz sonuçlarından yararlanılmıştır.
- Öğretim bölümlerinin yürütüldüğü süresince araştırmacı öğreten rolünden daha çok öğrencilerin öğrenmelerini ve düşünmelerini anlamaya çalışan bir katılımcı gözlemci rolündedir.
- Katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yoluna gidilmiştir.
- Araştırmada katılımcılarının, ortamın, veri toplama araçlarının ve uygulama sürecinin özellikleri ayrıntılı bir biçimde tanımlanmıştır.
- Bulguların raporlaştırılmasında veriler açık, net ve ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır.
- Verilerin yorumlanmasında veri kaynaklarından doğrudan alıntılar yapılmıştır.
- Araştırmadan elde edilen veriler arasındaki tutarlılık kontrol edilmiştir.
- Araştırmadan elde edilen sonuçlar birbirleriyle ve ilgili alanyazınla ilişkilendirilerek raporlaştırılmıştır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
BULGULAR ve YORUMLAR

Bu bölümde verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular sunulmuş ve yorumlanmıştır. Bulgular, öğrencilerin klinik görüşmelerde yanıtlamış oldukları sorulara yönelik açıklamalar, bu açıklamaların yapıldığı öğrenci çalışma yaprakları, öğrenci günlükleri ve araştırma günlükleri ile desteklenmiştir.

Öğrencilere öğretimden önce ve öğretimden sonra olmak üzere 2 aşamada klinik görüşmeler aracılığıyla 9 soruluk görevler verilmiştir. Bu görevler ile öğrencilerin;

- eşittir sembolünü nasıl tanımladıkları ve sembole karşı genel eğilimleri
- eşittir işaretini ilişkisel bir sembol olarak kullanabilmeleri
- işlemsel ya da ilişkisel düşünme becerileri
- verilen eşitliklerde ilişki kurma ve bu ilişkileri ifade etme şekilleri analiz edilmiştir.

Bulgular ön görüşmelerden elde edilen bulgular ve son görüşmelerden elde edilen bulgular olmak üzere iki başlıkta sunulmuştur.

3.1. Öğrencilerin Ön Görüşmelerinden Elde Edilen Bulgular

Ön görüşmeler sonucunda öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar ve öğrenci açıklamaları 3 tema altında toplanmıştır. Bu temalar *ilişkisel düşünme odaklı işlem süreci, ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem süreci* ve *sonuç odaklı işlem sürecidir*. Öğrencilerde görülmek istenilen birinci tema olarak belirlenen ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine uygun 3 alt tema belirlenmiş olup bunlar *temel aritmetik işlem özeliklerinin kullanımı, sayılar arası ilişkinin kullanımı ve açık sayı cümleleri içeren eşitlikleri kurabilmedir.* Temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımı alt temasının kategorileri ise işlem özellikleridir (değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği).

Öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlardan bazı sorularda ilişkisel düşünme özelliklerini tam olarak göstermemelerine rağmen yanıtlarının ilişkisel düşünmeye yakın olduğu tespit edilmiştir. Bu kapsamda öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlara uygun açıklamaları ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem süreci teması altında değerlendirilmiş *bilinmeyeni bulduktan sonra ilişkiyi açıklama ve ilişkisel düşünme öncesi* olmak üzere iki alt temada incelenmiştir.

Öğrencilerin sorularda ilişkisel düşünme becerisini hiçbir şekilde gösteremediği yanıtlar da olmuştur. Bu yanıt ve açıklamalar *sonuç odaklı işlem süreci* temasında incelenmiştir.

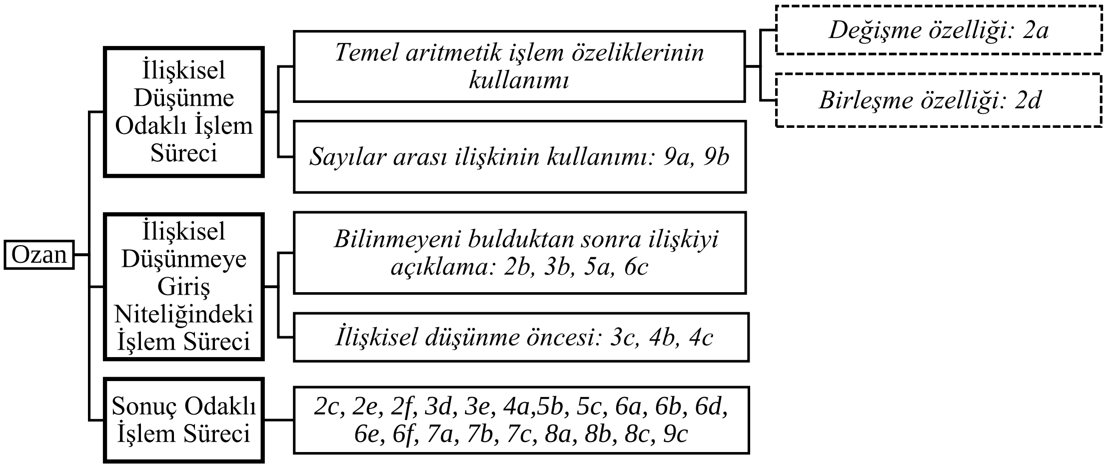
Ön görüşme ve son görüşme bulgularının sunumunda öğrencilerin öncelikle ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine uygun vermiş olduğu yanıtlara yer verilmiştir. Daha sonra ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecine ve son olarak da sonuç odaklı işlem sürecine uygun öğrenci yanıtları belirlenmiştir. Bu yüzden her öğrencinin vermiş olduğu yanıtlar ve açıklamalar bu sıralamaya uygun bir şekilde verilecektir.

Öğrencilere ait yanıtlar ve açıklamalar yorumlanarak oluşturulan ilişki şemalarında, eşit işareti ve eşit işaretinin farklı anlamları üzerine olan birinci soru ile üçüncü sorunun a maddesine ($\square = 15 - 6$) yer verilmemiştir. Bu sorular ile öğrencinin eşitliği doğrudan bir işlem olarak algılayıp algılamadığı araştırılmak istenmiştir. Öğrencilerin çoğu üçüncü sorunun a maddesini doğru yanıtlamış ve farklı yanıt veren bir öğrencinin yine bulgularında bu yanıta yer verilmiştir.

Ön görüşmelerin sunumunda sırasıyla düşük, orta ve yüksek düzey öğrencilerin bulgularına yer verilmiştir.

3.1.1. Öğrenci: Düşük Düzey

Öğrencinin ön görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 3' de sunulmuştur.



Şekil 3: Ozan'ın ön görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Ozan öncelikli olarak eşittir işaretini tanımış ve işaretin sayıların eşitlenmesinde kullanılacağını söylemiştir. Burada Ozan nesnelerin eşitliğinden çok sayılarla ilgilenmiştir.

İlişkisel Düşünme Odaklı İşlem Süreci temasında öğrencilerin sayılar arası ilişkileri nasıl kurdukları, işlem özelliklerini nasıl kullandıkları ve nasıl açıkladıkları incelenmiştir. Ozan'ın vermiş olduğu yanıtlarda dokuzuncu sorunun maddeleri ile ilgili olarak açık sayı cümlelerini içeren eşitlikleri kurabilme temasına ait bir açıklama görülmemektedir. Temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımı öğrencinin işlem özeliklerini ne düzeyde bildiği ile ilgilidir. Değişme, birleşme ve dağılma özeliğini daha önceden öğrenmemiş olan öğrenci için bu özelikler yeni bir durum olmakla beraber sayılar arasındaki ilişkilere odaklanmalarını sağlamaktadır. Ozan temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımına ilişkin olarak "9+7=7+9" [2a] ve "(5 x 4) x 7 = (7 x 4) x 5" [2d] cümlelerinde değişme özeliklerini fark etmiş ve sayı cümlelerinin doğru olduğunu ifade etmiştir. Ozan öncelikle her iki cümlede de işlem yapmak istemiş ancak öğretmenin de yönlendirmesiyle eşitliği değişme özelliğine dayalı olarak ifade etmiştir. Öğrencinin "(5 x 4) x 7 = (7 x 4) x 5" [2d] cümlesindeki açıklaması şu şekildedir;

Öğretmen ***:****Peki hesaplamadan bulabilir miydik bu cevabı? Eşit olduğunu bulabilir miydik sence?*

Ozan ***:****Hesaplamadan bulurduk. Çünkü şu 7'yi buraya almış. 5'i oraya almış. Yani hepsi aynı sayı. Üçü de aynı sayı. Almış bunu 7'yi* *buraya koymuş, 5'i de çıkartmış buraya yani hepsi aynı sonucu veriyor.*

İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin ikinci alt teması ise sayılar arası ilişkinin kullanımıdır. Dokuzuncu soruda verilen "□ + □ = □ + □" [9a] kutularını doldurma, sayılar arası ilişkinin kullanımı ile ilgilidir. Molina ve Ambrose (2006) yapmış oldukları çalışmada bu tür örneklerde öğrencilerin kafalarının karışabileceğini ve kutulara aynı sayıyı yazmak istediklerini belirtmişlerdir. Bu şekilde düşünen öğrencilerin kutulara farklı sayıların da gelebileceğini fark etmeleri öğrencilerin kendi yazmış oldukları açık sayı cümleleri sayesinde eşit işaretinin ilişkisel düşünmedeki yerini anlamalarını kolaylaştırmaktadır.

Ozan'ın ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine ilişkin yanıtladığı 9. sorudaki " □ + □ = □ + □" [9a] ve "□ – □ = □ – □" [9b] şıklarında verilen açık sayı cümleleridir. Ozan 9a açık sayı cümlesinde önce eşitliğin sol tarafına aynı sayıları yazmış, ardından eşitliğin sağ tarafına da aynı sayıların 1 fazlasını ve 1 eksiğini yazarak tamamlamıştır. Örneğin;

Ozan *: Buraya bir 8'le başlayalım.*

Öğretmen *: Neden 8 yazdın ilk başta?*

Ozan *: Aklıma gelen ilk sayıyı yazdım.*

Öğretmen *: Aklına gelen ilk sayıyı yazdın.*

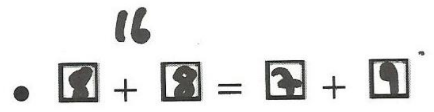
Ozan *: Hı hı evet. Bu da 8 olsun.(eşitliğin sağındaki ikinci kutu)*

Öğretmen *: Aynı sayıyı yazdın.*

Ozan *: Hı hı evet. 16 ediyor bunun toplamı. Bunun toplamı bunun işlemine eşit diyor. Bunu da şey yaparız bundan 1 alçaltırız 7. Bunu da 1 yükseltiriz 9.(eşitliğin sağ tarafı)*

Öğretmen *: Çok güzel. Neden peki bir alçaltıp bir yükseltmeyi düşündün Ozan?*

Ozan *: Yani farklı sayılar olsun diye yaptım.*



Ayrıca aynı sayıların da eşitliğin her iki tarafına yazılabileceğini söylemiş ve bir genellemeye vararak eşitliğin bir tarafında bir sayı arttırılırken diğer sayının azaltılması gerektiğini düşünmüştür.

Öğretmen ***:*** *Anladım. Peki, başka sayılar gelebilir miydi bunların yerine?*

Ozan ***:*** *Evet.*

Öğretmen ***:*** *Mesela ne gelebilirdi?*

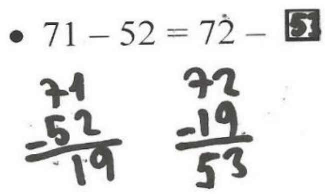
Ozan ***:*** *Bunun aynısı gelebilirdi 8–8.*

Öğretmen ***:*** *Çok güzel aferin sana.*

Ozan ***:*** *6 ile 10 gelebilirdi mesela bunu(7) hep alçaltırdık 5 ile 11.*

Ozan 9b cümlesinde ise sayılar aradaki farka odaklanarak çıkarma işleminde hem eksileninin hem de çıkanın aynı miktarda artacağını ya da azalacağını görmüş ve bu durumu "*İkisini de ya yükseltiriz ya da alçaltırız*" ifadesi ile açıklamıştır.

İkinci tema olarak belirlenen ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem süreci iki alt temadan oluşmaktadır. Bilinmeyeni bulduktan sonra ilişkiyi açıklama olarak belirlenen birinci alt temada, öğrenci önce ilişkiyi kuramamış ancak doğru yanıtı bulduktan sonra sayılar ve işlemler arasındaki ilişkiyi açıklayabilmiştir. Sonuç odaklı düşünen öğrenci, öğretmenin de yönlendirmesi ile eşitliğin iki tarafında bulunan sayıların arasındaki fark ilişkisini görebilmiştir. Örneğin; "71 – 52 = 72 – □" [5a] cümlesinde öğrenci daha önce yanıtlamış olduğu açık sayı cümlelerine de güvenerek bu soruyu ilişkisel düşünerek yanıtlamak istemiş ancak ilişkilendirmeden emin olamamış, işlem yapmak istemiştir. Ozan' ın işlemleri yaptıktan sonra bulduğu sonuca göre ilişki kurması daha da kolaylaşmıştır. Ayrıca Ozan, yapmış olduğu işlemlerde yazmış olduğu sayılara odaklanmış ve sayılar arasında 1 fark olduğunu görmüştür.



Ozan *: 71 bunda 1 sayı artıyor 52'de belki burada 1 sayı artıyordur.*

Öğretmen *: Ama yine kararsızsın.*

Ozan *: Hı hı evet. Ya ben işlem yapmamız gerektiğini düşünüyorum.*

Öğretmen *: İşlem yapmamız gerektiğini düşünüyorsun peki. İşlem yapabilirsin istiyorsan.*

Ozan *: 19 demek ki 71'den 52'yi çıkarınca 19. 72'den de başka bir sayıyı çıkartınca 19 olması gerekiyor. 72'den 19'u çıkartırız burayı bulmak için. 53! Demek ki bu sayı 53.*
Ben bu kutuyu bulmadan önce yani 2'den 1, 71'den 72'ye 1 sayı artmış demiştim. 52'den de hani 1 sayı arttırırsak belki olur demiştim. Demek ki bulunabiliyor işlem yapmadan 1 sayı arttırarak.

Ozan "(8 x 9) + ☐ = 8 x 10" [7c] açık sayı cümlesinde ilişki kurmayı denemeyerek doğrudan ters işlem yapmış ve sonuca ulaşmıştır.

Öğretmen *:Hesaplama yapmadan bulunabilir miydi, acaba bulabilir miydik? Biraz inceler misin?*

Ozan *:Bence bulamazdık çünkü zaten hangisine eşitleyeceğimizi bilemezdik.*

Aslında bir önce verilmiş olan açık sayı cümlesiyle benzer olan "2 x 9 = (2 x 10) – ☐" [7b] cümlesi için Ozan ortak çarpanlara odaklanmayarak doğrudan sonuç bulmak istemiştir. Sekizinci soruda aşağıda da gösterilen açık sayı cümlelerinde birden fazla sayı ve kutu verilmiştir. Sayı cümlelerinde eşitliğin iki tarafında parantezli işlemler özellikle verilmiş, eşitliğin bir tarafında sonuç yazılmadığından dolayı Ozan nasıl bir eşitleme yapacağını anlamayarak en çok bu soruda zorlanmıştır.

5 x (8 + 4) = (5 x ☐) + (5 x 4)[8a]
3 x (10 – 4) = (3 x ☐) – (Δ x 4)[8b]
☐ x (7+8) = (☐ x7) + (☐ x 8)[8c]

İlişkisel düşünmenin zor örneklerinden olan ve dağılma özeliğini de içeren bu açık sayı cümlesinde (8c) Ozan bir ilişkilendirme kurmuş ve şöyle açıklamıştır:

Öğretmen *: Ne düşünüyorsun açıklar mısın?*

Ozan *: Nasıl yapacağımızı düşünüyorum da pek… Bir tek burada bir işlem var bunu yapsak hani 7 ile 8'in toplamı 15. Bu 15 ne* *olabilir? Bunun sonucu 15'le neyi çarpacağımızı bilmiyoruz. O yüzden belki işlem yapmadan bulunabilir.*

Öğretmen **:** *Hım. İşlem yapılmadan bulunabilir diyorsun, neden öyle düşündün?*

Ozan **:** *Çünkü tek bir tane işlem yapılacak yer var. 15 hani bunu kaçla çarpacağımızı bilmiyoruz, bunla da… O yüzden belki işlem yapmadan bulabiliriz.*

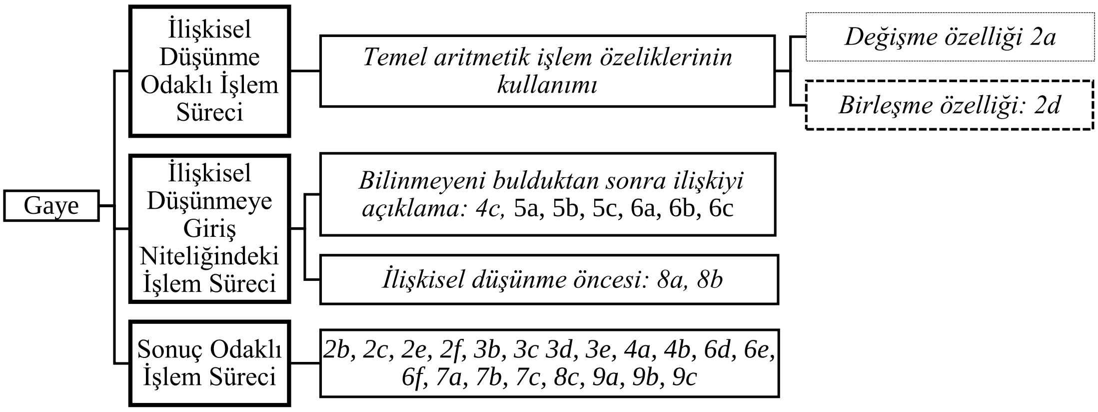
Ozan 8a ve 8b açık sayı cümlelerinde eşitliğin her iki tarafında da sonuç aramış ve sonuca odaklanarak karar vermek istemiştir. Aynı şekilde "2 x 9 = (2 x 10) – ☐" cümlesinde de eşitliğin iki tarafının hesapladıktan sonra aralarındaki farka odaklanmış ve işlem yapmadan bulunamayacağını söylemiştir.

Ozan'ın sekizinci soruda verilen açık sayı cümlesindeki işlem ve kutuların diğer örneklere göre çok olmasından dolayı daha fazla zorlandığı görülmüştür. Ozan'ın soruları çözerken sürekli bir sonuç aradığı saptanmıştır. Dokuzuncu soruda Ozan sayıları kutulara kendi yerleştirdiği için daha kolay olduğunu söylemiş ve ilişkisel düşünmeye yatkın olabileceğini göstermiştir.

Ozan ile yapılan ilk görüşme sonucunda öğrencinin düşünme sürecinin daha çok işlem yaparak sonuç bulma üzerinde odaklandığı söylenebilir. Bununla beraber yapmış olduğu açıklamalar ve düşünme şekline bakarak Ozan'ın ilişkisel düşünme becerilerine yatkın olduğu saptanmıştır. Eşitlik kavramının bir ilişki kurmaktan çok sonuç bulma olarak matematik sınıflarımızda yorumlanabiliyor olmasından dolayı, öğrenciler verilen sayıları hızlı bir şekilde işleme sokarak doğru yanıtı bulmak istemektedirler.

3.1.2. Öğrenci: Düşük Düzey

Öğrencinin ön görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 4'de sunulmuştur.



Şekil 4: Gaye'nin ön görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Gaye'ye ilk olarak eşit işareti gösterilmiş sembol ve sembolün anlamı hakkındaki düşünceleri alınmak istenmiştir. Gaye eşit işaretini tanıyarak anlamını söylemiş ve bu sembolü iki sayının eşitliği olarak gördüğünü belirtmiştir. Kağıdına 1/2 = 2/4 yazarak kesirlerle genişletme yaptığını ve eşit işaretinin bu şekilde bir kullanımı olduğu söylemiştir. Ozan gibi Gaye de değişme özeliği olan cümleleri ("9+7=7+9" [2a]) fark etmiş ancak Gaye eşitliğin doğruluğundan emin olabilmek için devamlı işlem yaparak karar vermek istemiştir. Çarpma işleminin birleşme özelliği ile ilgili olan "(5 x 4) x 7 = (7 x 4) x 5" [2d] soru maddesinde de verilen işlemi doğru olarak yanıtlamasına rağmen işlem yapmış ve eşitliği kontrol etmek istemiştir.

Gaye verilen soruların çoğunluğunda işlem yaparak doğru sonuca ulaşmak istemiştir. Bu yüzden Gaye'nin katılımcı öğrenciler arasında en fazla sonuç odaklı öğrenci olduğu söylenilebilir. Öğrenci her yeni soruda ilişki aramak yerine işlem yapmak hatta sonuç bularak karar vermek istemiştir. Sonuç bulamadığı zamanlarda ilişki kurmayı denemiş ancak ilişkilendirmede zorlanmış ve sıkılmıştır. Örneğin; "92 + □ = 95 + 85" [4c] cümlesinde önce eşitliğin her iki tarafında da işlem yapmış ve sonuçlar arasındaki farka odaklanmıştır. İşlemlerin sonucundan emin olduktan sonra aslında "2 artmış, 2 azalmış" şeklinde bir ilişki kurmuş ancak yine de ifade etmekte zorlanmıştır. Aynı tür cümlelerin arka arkaya verilmesi de ilişki kurmasında etkili olmuştur.

Gaye ***: Buraya 88 gelebilir.***

Öğretmen ***: Neden?***

Gaye : *Zaten bu iki sayının toplamı eşittir diyor bu iki sayıya. Topladıktan sonra bunu çıkartırsak…*

Öğretmen : *Hım anladım. Peki, işlem yapmadan bulabilir miydik buraya gelecek olan sayıyı?*

Gaye : *Hayır.*

Öğretmen : *Bulamazdık diyorsun. Biraz daha incele istersen… Ne düşünüyorsun?*

Gaye : *Aslında bulabilirdik.*

Öğretmen : *Nasıl?*

Gaye : *92'den buraya 95'e 3 artmış. 85'te 3 artarsa 88 gelebilir diye düşündüm.*

Öğretmen : *Hım, çok güzel. Bu şekilde bulabilirdik diyorsun öteki sayıyı.*

Gaye : *Evet.*

Öğretmen : *Peki, bir üstteki soru için mesela yapabilir miydik bu düşündüğünü?* (62 + 38 = 60 + ☐)

Gaye : *Aynı şekilde yapabilirdik.*

Öğretmen : *Nasıl?*

Gaye : *Burası 62'den 2 eksik 60. Buda 38'den 2 fazla 40.*

Öğretmen : *Neden peki 2 fazlayı oraya ekledin?*

Gaye : *Hiçbir fikrim yok.*

İşlem yaparak doğru sonuca ulaşamadığı ya da istenilen sayıyı bulamadığı zaman uzun süre düşünmüş, işlem yapmadan istenilen sayının nasıl bulunabileceğini fark etmeye çalışmıştır. Sayılar arasında ilişki arayan öğrenci ilişkiyi tam olarak kuramamasına rağmen eşitliğin her iki tarafındaki sayıların belli bir düzene göre yerleştirildiğini fark etmiştir. İlişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecinin bir alt teması olan ilişkisel düşünme öncesi alt temasına uygun bir yanıtı "5 x (8 + 4) = (5 x ☐) + (5 x 4)" [8a] cümlesinde görülmüştür. Bu alt temada öğrenci ilişkisel düşünme becerisini tam olarak gösteremese de basit bir ilişki bulabilmiştir.

Gaye : *Bu da 8.*

Öğretmen : *Nasıl?*

Gaye : *İşte bu işlemi buldum. (eşitliğin sol tarafı)*

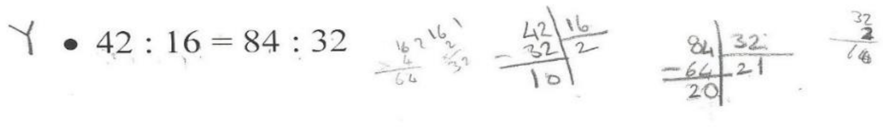
Öğretmen : *60 buldun galiba orayı.*

Gaye	***:*** *Evet, 60 buldum. Burayı 20 buldum. 60'tan 20 çıkarınca 40 oluyor zaten. 5'le hangi sayıyı çarparsak 40 eder. 8'le .*
Öğretmen	***:*** *O yüzden 8 yazdın, peki. Bu biraz daha diğerlerinden farklı bir işlem değil mi? Diğer sorulara göre.*
Gaye	***:*** *Evet farklı.*
Öğretmen	***:*** *Burada işlem yapmadan bulabilir miydik 8'i?*
Gaye	***:*** *Belki bulabilirdik.*
Öğretmen	***:*** *Nasıl?*
Gaye	***:*** *Belki saçma olabilir ama yani.*
Öğretmen	***:*** *Olsun*
Gaye	***:*** *Zaten burada 5'i kullanmış burada 5'i kullanmış. 4'ü burada. 4'ü, bir tek, 8'i burada iki defa.*

Gaye sayılar arasında ilişkiyi fark etmemiş ancak sayıların kullanımına odaklanmış ve bu sayede doğru yanıtlamıştır. Gaye tamamen işlemsel düşündüğü için ilişki kurmakta zorlanmış ya da ilişki kurmak istememiştir. Ayrıca işlem yapmadan kutu yerine gelebilecek olan sayıların bulunamayacağını düşünmüştür. "3 x 21 = 7 x □" [3e] açık sayı cümlesinde Gaye ortak çarpanlara odaklanmamış, işlem yapmak istemiştir.

Öğretmen	***:*** *Hım peki işlem yaparak buldun değil mi buradaki sayıları?*
Gaye	***:*** *Evet.*
Öğretmen	***:*** *Peki, işlem yapmadan o kutucuğa gelecek olan sayıyı bulabilir miydik Gaye?*
Gaye	***:*** *Bence bulamazdık.*
Öğretmen	***:*** *Neden bulamayacağımızı düşünüyorsun?*
Gaye	***:*** *Yani ilk başta baktığımda yani işlem yapmadan hiçbir şeyi bulamayız.*
Öğretmen	***:*** *İşlem yapmadan hiçbir şeyi bulamayız diyorsun ama 1'inci soruda sayıların yeri değişik demiştin ve hiç işlem yapmamıştın. Sadece sayıların yeri değişik demiştin değil mi?*
Gaye	***:*** *Evet.*
Öğretmen	***:*** *Burada da öyle bir şey olabilir mi?*
Gaye	***:*** *Ama zaten buradaki sayıların birbirleri farklı yani.*
Öğretmen	***:*** *Farklı derken ne söylemek istiyorsun?*
Gaye	***:*** *Yani kutu olsa burada 15 eder. 16 olsaydı buraya 7 yazabilirdim yani.*

Değişme özeliğini içeren ikinci sorunun ilk maddesinde Gaye sayıların yerlerinin değiştiğini fark etmiş ve işlem yapmaya gerek olmadığını düşünmüştür. Ancak bu cümlede verilen sayıların hepsi farklı olduğu için ilişkiyi fark edememiş ve ortak çarpan olan 7 sayısını görememiştir. Her iki tarafta aynı sayılar verildiğinde işlem yapmadan eşitliğin doğruluğunun bulunabileceğini yoksa işlem yapmadan bulunamayacağını söylemiştir. Gaye'nin vermiş olduğu yanıtlara uygun olarak daha çok sonuç odaklı düşündüğü saptanmıştır. Sonuç bulamadığında ise sorunun zor olduğunu düşünmüştür. 2f açık sayı cümlesinde bölme işleminin sonucunu çıkartamamış ve verilen ifadenin yanlış olduğuna karar vermiştir.



Öğretmen : *Peki. Ne yaptın 42'yi 16'ya böldün.*
Gaye : *16'yla 2'yi çarparsak 32 çıkıyor. Ama 10'da 16 yok yani.*
Öğretmen : *10 buldun kalanı. 10'da 16 yok diyorsun evet.*
Gaye : *Nasıl devam edeceğimi bilemiyorum .*

Gaye son sorulan soruların en zor olduğunu söylemiştir. Bunun nedenini de bu cümlelerde bir sonuç bulma işleminin olmaması ve verilen kutulara sayıları yerleştiren öğrencinin hayal gücüne kalmasından kaynaklanmaktadır. Çünkü öğrencinin eşitliğin sağlanmasında sayılarla oynaması ve ilişki kurabilmesi gerekmektedir.

Öğretmen : *Senin için bu sorulardan sana en zor gelenler, en kolay gelenler hangileri?*
Gaye : *Benim için en zor gelenleri bunlar.*
Öğretmen : *En son sorular mı?*
Gaye : *Evet*
Öğretmen : *Neden?*
Gaye : *Çünkü net bir sayı bulamadım her sayıyı denk koydum.*

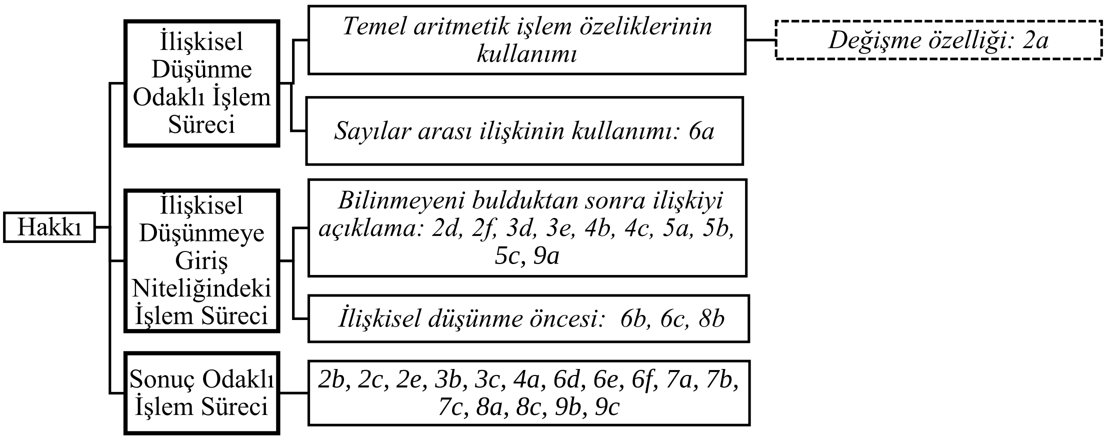
Aslında, öğretmenin yönlendirmesiyle Gaye'nin ilişki kurması amaçlanmış ancak yine sonuç odaklı düşünmeden uzaklaşılamamıştır. "☐ - ☐ = ☐ - ☐" [9b] cümlesinde kutulara aynı sayıların gelebilmesini yine sonuca bağlı olarak düşünmüştür.

Gaye' nin ön görüşme sonunda ortak çarpanlara dikkat etmeyerek sayılar arasındaki ilişkilerden daha çok işlem ve sonuç bulmaya odaklandığı saptanmıştır. Öğretmenin zaman zaman yönlendirmeleriyle birlikte ilişkileri bazen fark edebilmiştir. İlişkiler üzerine öğretmenin biraz daha düşünmesini istediği zamanlarda Gaye'nin sıkıldığı ve zorlandığı görülmüştür. Gaye sorulan soruların çok kolay olduğunu belirtmiş çünkü eşit işareti verildiğinde işlem yapmanın kolay olduğunu ve bir sonuç bulmak gerektiğini belirtmiştir. Herhangi bir sonuç bulma işlemi olmadığında ise zorlanmış ve bunu da günlüğünde yazmıştır.

Ayhan öğretmen beni yine derse çağırdı. Dersteki soruların hepsi çok basitti fakat sonuncu soruda zorlandım. Çünkü tam olarak net bir cevap veremedim. Bir süre sonra ders bitti ve ben sınıfıma gittim. Sınıfa girdiğimde öğretmen de performans ödevlerini veriyordu. Neyse ki bana daha sıra varmadı. Ders bitti ve akşam oldu annemle birlikte eve geldik. Ben yemeğimi yedikten sonra derslerimi yaptım. Artık uykum gelince de yattım.

3.1.3. Öğrenci: Orta Düzey

Öğrencinin ön görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 5’de sunulmuştur.



Şekil 5: Hakkı’nın ön görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Hakkı eşit işaretini tanımış, eşit işaretinin iki sayının eşit olması ve bir işlemin sonucunu belirlemesi olarak kullanıldığını söylemiştir. “9 + 7 = 7 + 9” [2a] ve “(5 x 4) x 7 = (7 x 4) x 5” [2d] maddelerinde ilişkisel düşünebilen Ozan ve Gaye’nin aksine Hakkı sadece 2a soru maddesinde değişme özelliğini fark edebilmiştir. Yine ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine bağlı olarak oluşturulan sayılar arası ilişkinin kullanımı ile ilgili alt temaya uygun olarak Hakkı’nın “5 x 8 = □ +□ +□ +□ +□” [6a] cümlesinde kutu sayısına odaklanarak ilişkisel bir düşünme gösterebildiği saptanmıştır. Ama işlem yapma isteğinden dolayı 5 ile 8 i çarpıp tekrar 5’e bölerek düşüncesini kontrol etmiştir. İlişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecinin ana özelliği, öğrencinin ilişkisel düşünme becerisi gösterebileceği ve bu becerilere yatkın olmasına rağmen bu beceriyi kullanmak istemediği ya da nasıl kullanılacağını bilmediği durumları kapsamasıdır.

Hakkı’nın verdiği yanıtlardan yola çıkarak daha çok ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecinde olduğu ve bu temaya uygun yanıtlar verdiği görülmüştür. Öğrencinin işlem yapmanın ve sonuç bulmanın vermiş olduğu güvenle ilişkisel düşünmeyi tercih etmediği saptanmıştır. “68 + 58 = 57 + 69 + □” [3d] cümlesinde kutu yerine yazılacak sayıyı işlem yaparak bulduktan sonra sonuca göre doğru bir ilişki kurmuştur. Yani ikinci temanın bir alt teması olan bilinmeyeni bulduktan sonra ilişkiyi açıklamaya uygun bir açıklama yapmıştır.

Öğretmen : *Nasıl buldun?*

Hakkı : *68'le 58'i topladığımızda 126 elde ederiz. 57 ile 69 u topladığımızda da 126'yı buluruz. O yüzden eşit olduğu için 0 oluyor.*

Öğretmen : *Hı hı peki. İşlem yapmadan bulabilir miydik?*

Hakkı : *Bulabilirdik*

Öğretmen : *Nasıl?*

Hakkı : *58'den 1 çıkarmış 57'yi bulmuş; o1 çıkarmayı da 1 ekleme yaparak 69'u e elde etmiş.*

Öğretmen : *Hı hı*

Hakkı : *Ve sonuçta aynı sayıyı bulabileceğimizi, yani 1 çıkararak 0 elde edebiliriz.*

Öğretmen : *Burası buradan (58 57'den)1 fazla dedin*

Hakkı : *Bu da bundan 1 fazla (69 68'den). 1 den 1 çıkarınca 0 elde edebiliriz.*

Öğretmen : *Hım anladım. Yani işlem yapmaya gerek yok diyorsun burada di mi.*

Hakkı : *Evet*

Hakkı 5. sorunun tamamında işlem yapmış ve sonuçlara göre ilişkiyi açıklayabilmiştir. Aşağıda verilen cevap kağıdına bakıldığında, birinci ifadede işlem yaptıktan sonra ilişkiyi kurabilmiş, diğerlerinde ise işlem yapmaması gerektiğini fark edememiştir. Ancak işlem yapmanın vermiş olduğu güvenle aynı ilişkinin her birinde olduğunu söylemiştir.

Soru 5: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 71 – 52 = 72 – $\boxed{53}$

$71 - 52 = 19$ $72 - 19 = 53$

- 75 – 32 = 73 – 28 – $\boxed{2}$

$75 - 32 = 43$ $73 - 28 = 45$

- 627 – 125 = 625 – 121 – $\boxed{2}$

$627 - 125 = 502$ $625 - 121 = 504$

Hakkı özellikle çıkarma işleminde zorlanmış ve doğrudan bir ilişki kuramamıştır. Carpenter ve diğerleine (2003) göre çıkarma işlemi ilişkisel düşünmedeki en zor ve önemli basamaklardan bir tanesidir. Hakkı kutu yerine gelecek olan sayıyı bulduktan sonra birbirine yakın olan sayıların farkını almış ve kutudaki sayıya göre bu farkları toplamış ya da çıkarmıştır.

Hakkı ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecinin bir alt temasına uygun ilişkisel düşünme öncesi düşünme özelliği göstermiş ve dağılma özeliğinin araştırıldığı “3 x (10 – 4) = (3 x ☐) – (Δ x 4)” [8b] cümlesi için eşitliğin sağ tarafındaki parantezli işlemlerden birini yok etmek istemiştir. Çarpım durumunda olduğu için üçgen yerine de 0 yazmıştır. Çünkü birinci parantezde 3 çarpanı eşitliğin sol tarafındaki 3 çarpanı ile eşleşmiştir. Yani sayıların sırasına dikkat etmiş ve buna göre bir ilişki kurmak istemiştir.

- 3 x (10 – 4) = (3 x $\boxed{6}$) – (Δ x 4)

6

Hakkı eşitliğin her iki tarafında da 3 çarpanı olduğu için sağ tarafta bulunan ikinci parantez işlemini fazla bulmuştur. Ancak burada yine eşitliğin her iki tarafında işlem yaparak bir karşılaştırma yapmış ve katlara odaklanmayı başaramamıştır. Hakkı en çok bu sorularda zorlandığını günlüğünde şu şekilde belirtmiştir.

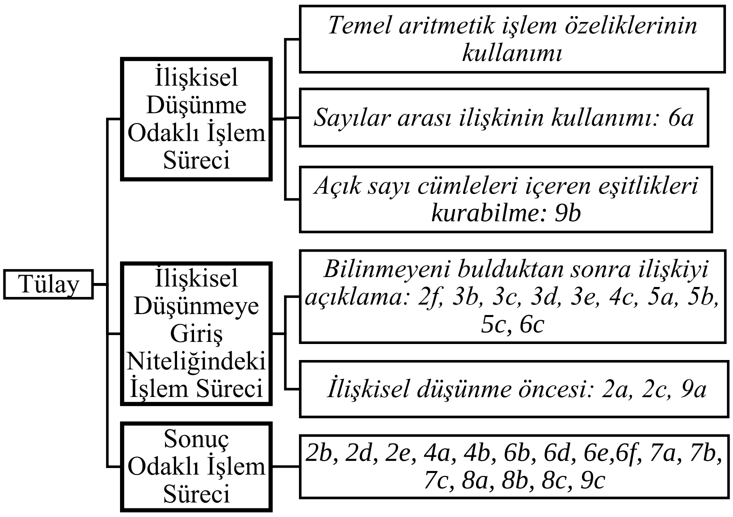
2. Gün
Bugün günlerden yine Perşembe 8. derse
girme teneffüsünde Ayhan öğretmenim beni 2. kez
çağırdı. Kalan sorumuzdan devam ediyorduk. Soru-
ların çoğu boş bırakılan yeri doldurmaydı.
8. soruda boş bırakılan yerler üçe çıkınca
oldukça zorlandım. Diğer sorularda zorlanmazken
yine "başka yolu var mı?" Sorularında zorlan-
dım. Bu sefer 30 dakika süren çekimden ayrıl-
dım.

Hakkı'nın sorular üzerinde sıkıldığı zamanlarda ilişki kurmak istemediği saptanmıştır. Ayrıca dağılma özelliğinin olduğu sorularda ya da çıkarma işlemi ile ilgili örneklerde zorlandığı için doğrudan işlem yaparak kutu yerine gelecek olan sayıyı bulmuştur. Örneğin; "□ x (7+8) = (□ x7) + (□ x 8)" [8c] eşitliğinde deneme yanılma yoluyla doğru sayıyı bulmak istemiş ancak kutu yerine gelebilecek farklı sayıları belirleyememiştir.

Hakkı verilen soruların çoğunluğunun çözümünde sonuç odaklı bir düşünce sergilemiştir. İşlemleri çok hızlı yapabilen bir öğrenci olmasının yanı sıra verilen sorularda diğer öğrencilere göre daha farklı düşünmektedir. Örneğin yukarıda verilen dağılma özelliği ile ilgili ifadede bir tek Hakkı 0 çarpanını düşünmüş işlem sırasına ve sonuca odaklanmıştır. Ancak soru üzerinde çok düşünmeyi sevmediğinden dolayı çabuk sıkılmış, işlem yaparak çözebileceği bir soruda hızlıca işlem yapma yolunu tercih etmiştir.

3.1.4. Öğrenci : Orta Düzey

Öğrencinin ön görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen tema ve alt temalar arasındaki ilişkiler Şekil 6'da sunulmuştur.



Şekil 6: Tülay'ın ön görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Öğrenci eşit işaretini tanımış ve tanımlamıştır. İki kesrin eşitliğini eşit işaretine örnek olarak vermiştir. Tülay ilişkisel düşünmenin alt temalarından ilki olan temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımı ile ilgili ifadelerin hiçbirinde ilişkisel düşünme becerisi gösterememiş olmasına rağmen tüm kutuların boş olarak verildiği (□ – □ = □ – □) [9b] ve öğrencinin ilişkisel düşünme becerisi için ipucu veren örnekte başarılı olmuştur. Eşitliğin sol tarafına iki sayı yazdıktan sonra sağ tarafına farkın aynı kalabilmesi için eşit miktarda sayı eklemiş ancak yine de sol tarafta bir sonuç bulmuş ve emin olmak istemiştir.

Tülay *: 85'le 17 verdim.*

Öğretmen *: 1'inci kısmında sol tarafi?*

Tülay *: 83–19 verdim. 1'inci kısma 64 oluyor, 2'inci kısma da 85–17 verdim. Buna 2 ekledim, buna 2 ekledim*

Tülay sonucunu bulduğu işlemlerde kendinden emin bir biçimde ilişki arayabilmiştir. Bu da öğrencinin verilen ifadelerde ilişkisel düşünemese bile ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecine uygun sorular çözebildiğini göstermiştir. doğru/yanlış biçiminde verilen sayı cümlelerinden "42 : 16 = 84 : 32" [2f] bölme işlemlerinden birinin kalanlı, diğerinin tam çıktığını söylemiş ancak sonra her ikisinin de tam çıktığını görmüştür. Öğretmenin sayıları incelemesi yani sayılar arasında bir ilişki var mı şeklindeki sorusundan sonra verilen sayıların birbirinin iki katı olduğunu görmüştür. Bu yüzden fikrini değiştirmiş ve kendisi de bir örnekle açıklama ihtiyacı duymuştur.

Tülay ***:****Şöyle bir yuvarlak bütünümüz var diyelim ki…*

Öğretmen ***:****Tamam.*

Tülay ***:****Hepsini eşit şeye böldük.*

Öğretmen ***:****4 parçaya ayırdın.*

Tülay ***:****Evet. 4 bölü 2 yani yarısı sonra yine böyle bir eşit parçalarımız var. 8'e böldük. Ay 4'ünü boyadık.*

Öğretmen ***:****Hım. Anladım. Orada 4'e mi bölecektin?*

Tülay ***:****8 bölü 4. 4'ünü boyadık. Şu an yani yarısı.*

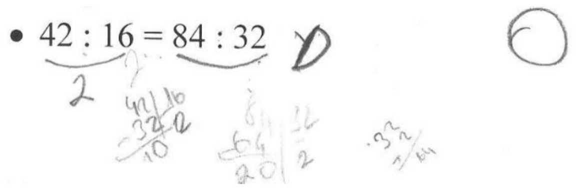
Öğretmen ***:****Anladım. Tamam. Hıhı. Buna yanlış diyorsun o zaman.*

Tülay ***:****Bunlar bence doğru diyorum. Çünkü…*

Öğretmen ***:****Doğru diyorsun?*

Tülay ***:****Evet. Çünkü öğretmenim yarısı anlamına geliyor. Yani 16'nın 2 katı 32, 42'nin 2 katı 84. Sadece sayılar farklı. Doğru bence.*

Tülay'ın yukarıdaki açıklamalarında sayılar arasında bir ilişki kurduğu görülmektedir. Daha önce işlem yapmak istemiş ve herhangi bir sonuca ulaşamamış, ilişki aramak istemiştir. İşlemin sonucunu bulamadığı aşağıdaki yanıtladığı kağıtta da görülmektedir.



Tülay'ın işlemlerle uğraşmaktan ve işlem yapmaktan zevk alan bir öğrenci olduğu görülmüştür. Bu yüzden öncelikle işlem yaparak bir sonuç bulmak istemiş ve bulduğu sonuçlar üzerinden ilişki kurmaya çalışmıştır. Ancak çarpma ve bölme işlemlerinde sayılar arasında çok fazla ilişki kuramadığı görülmüştür. Ayrıca Tülay bu örneklerde sayılar arasında bir ilişkinin kurulamayacağını söylemiştir.

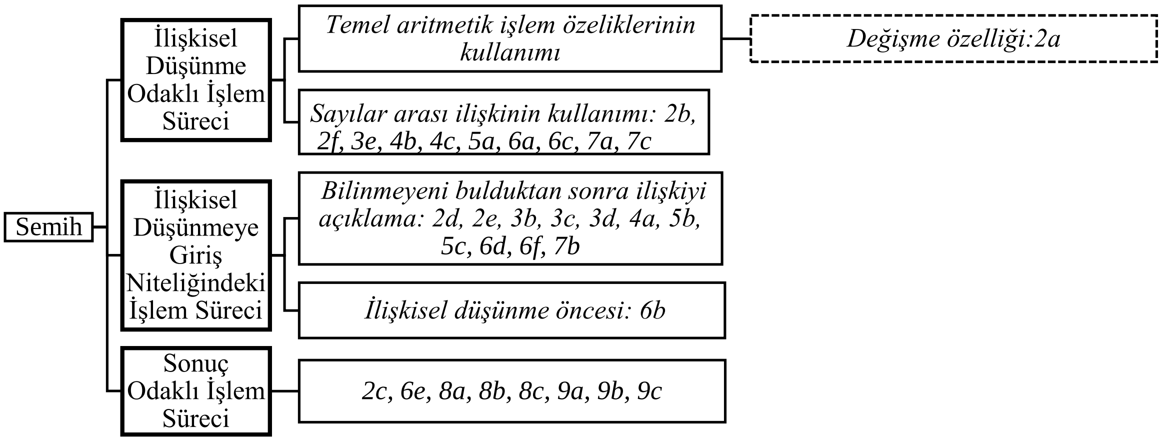
Tülay aritmetik işlemleri hızlı bir şekilde yapmasına rağmen işlemler ve sayılar arasında muhakeme yapmadığı görülmüştür. Bu da Tülay’ın verdiği yanıtlar ışığında çoğunlukla sonuç odaklı işlem sürecinde olduğunu göstermektedir. Yapmış olduğu işlemlerin otomatikleşmesi ile birlikte farklı örneklerle karşılaştığında zorlanmıştır. $2 \times 9 = (2 \times 10) - \square$ “2 x 9 = (2 x 10) – □” [7b] örneğinde kutu yerine gelecek olan sayıyı bulabilmek için çarpmanın tersi olan bölme işlemini kullanmak istemiş ancak ilişkiyi kuramamış ve sayıyı bulamamıştır.

Öğretmen	***:** Neden böldün?*
Tülay	***:** Çünkü çarpma işleminin zıddı bölme olduğu için.*
Öğretmen	***:** Tamam. Ama neden zıddını düşündün?*
Tülay	***:** Zıddını yazdım çünkü çarpmalarda da öyle yapmıştım ben. Hep çıkartmalarda toplama, toplamalarda da çıkarma.*
Öğretmen	***:** Diğer soruda mı?*
Tülay	***:** Evet.*
Öğretmen	***:** Hım anladım tamam. 2’yi 2’ye böldüm dedin.*
Tülay	***:**2’yi 2’ye böldüm 1. 9, 10’dan da 1 çıkarttım. 1, 1daha 2. Ama bu da biraz şey oldu.*
Öğretmen	***:** Tesadüfi mi oldu?*
Tülay	***:** Evet.*

Tülay’ın verilen örneklerde işlem yapmak istediği saptanmıştır. İşlemleri yaptıktan sonra sonuca uygun olarak ilişki kurabilmiş ve kutu yerine gelecek olan sayıları bulabilmiştir. Yalnız çarpma ve bölme işlemleri ile ilgili sorularda ilişkileri kuramamıştır. İlişki kurduğu sorularda ise işlem yaparak kontrol etmek istemiştir.

3.1.5. Öğrenci: Üst Düzey

Öğrencinin ön görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 7’de sunulmuştur.



Şekil 7: Semih'in ön görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Öğrenci eşit işaretini tanıdığı gibi sembolün farklı anlamlarını da ifade edebilmiştir. Semih üst düzey düşünme becerilerine sahip olmakla beraber hızlı düşünebilen ve diğer öğrencilerden fark yaratmak isteyen bir öğrencidir. Bu nedenle görüşme esnasında sürekli hızlı yanıtlar vermek istemiştir. Diğer öğrenciler gibi "9 + 7 = 7 + 9" [2a] eşitliğinde bir işlem yapma gereği duymamış ve verilen ifadenin doğru olduğunu belirtmiş, sayıların değişmediğini sadece sayıların yerlerinin değiştiğini ifade etmiştir. Yani ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin ilk teması olan temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımı ile ilgili olan değişme özelliğini kullanmıştır. Diğer bir ilişkisel düşünme odaklı işlem süreci alt teması olan sayılar arası ilişkinin kullanımına ilişkin düşünmesinin de diğer öğrencilere göre daha ağırlıklı olduğu görülmektedir. Örneğin "6 + 9 = 5 + 11" [2b] doğru/yanlış cümlesinde Semih önce işlem yaparak eşitliğin yanlış olduğunu görmüş, daha sonra eşitliği tekrar incelediğinde sayılar arasındaki ilişkiyi fark etmiş ve açıklayabilmiştir.

Öğretmen ***:*** *Tamam, toplama yaparak yanlış olduğunu buldun. Peki, başka bir yolla da bulabilir miydik? İşlem yapmadan.*

(…)

Semih ***:*** *Ya zaten işlem yaparak yapmadım zihinden yaptım da.*

Öğretmen ***:*** *Zihinden nasıl yaptın?*

Semih ***:*** *Ya 9'la 6 toplandığında hani 9 olduğu için buna 1 eklendiğinde 10 oluyor. Bundan da çıkıyor direk 5 ekliyorum.*

Öğretmen ***:*** *Yani ne demek istedin?*

Semih : *9'la eklenen her sayı yani 1 eklendiğinde 10 oluyor. Bundan da çıkıyor direk 5 ekleniyor.*

Öğretmen : *Yazar mısın ne demek istediğini. 10 dedin,*

Semih : *Hayır, şey 9'a eklenen her sayı 1 eklendiğinde direkt 10 oluyor. Bu yüzden de öteki sayıdan 1 eksiliyor.*

Semih verilen eşitlikte eşitliğin bir tarafı arttığı zaman aynı miktarda azalması gerektiğinin de farkına varmıştır. Toplama işlemi ile ilgili arka arkaya verilen örneklerle nasıl bir ilişki kurulacağını fark etmiş "62 + 38 = 60 + ☐" [4b] gibi bir açık sayı cümlesinden sonra verilen çıkarma işlemine ait açık sayı cümlesinde de yine sayılar arasında ilişki aramış ve bu sefer farka odaklanmıştır. "71 – 52 = 72 – ☐"[5a] açık sayı cümlesinde eksilenler arasındaki 1 farka odaklanmış ve işlem yapmadan doğru yanıt vermiştir.

Semih : *Yine aynı soru tipi.*

Öğretmen : *Yine aynı soru tipi bu sefer işlemlerimiz çıkarma. (biraz düşündü ve işlem yapmadı)Kaç yazdın?*

Semih : *53.*

Öğretmen : *Hım açıklar mısın?*

Semih : *Burada eksilenler, bu eksilen değil mi baştaki?*

Öğretmen : *Hangisi?*

Semih : *Şunlar. Fazlalık. Bu çıkan.*

Öğretmen : *Eksilen derken? Eksilen, çıkan, fark o mu?*

Semih : *Evet.*

Öğretmen : *72 ve 71 evet eksilen.*

Semih : *Buradan eksilen 71. burada 72 yazılmış. O yüzden çıkanı da 1 fazla yazmamız gerekir.*

Öğretmen : *Neden?*

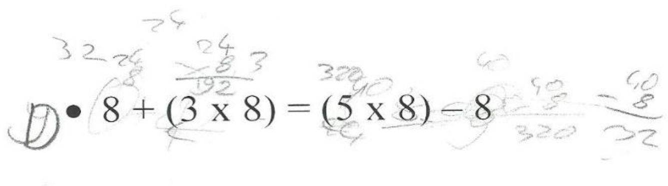
Semih : *Eşit olması için.*

Eşitliğin sağ tarafında eksilen arttığı için çıkanı da artırmış ve eşitliğin bozulmadığını söylemiştir. Toplama işleminde fark ettiği ilişkiler sayesinde işlem yapmamış ve kendine güveni gelmiştir. Ayrıca Semih' in işlem yapmadan kutuya doğru sayıyı yerleştirmesi ve bunu kısa sürede yapması hoşuna gitmiş, diğer sorularda olabildiğince işlem yapmayarak ilişki aramıştır. Sadece toplama ve çıkarma işleminde değil çarpma ve bölme işleminde de ilişkileri fark edebildiği örnekler olmuştur. “42 : 16 = 84 : 32” [2f] cümlesinde işlem yapmayarak eşitliğin her iki tarafının da 2 kat arttığını görmüş ve verilen eşitliğin doğru olduğunu fark etmiştir.

Semih *: Doğru.*
Öğretmen *: Neden doğru olduğunu düşünüyorsun?*
Semih *: Çünkü burada sayılar genişletilmiş.*
Öğretmen *: Genişletilmiş derken?*
Semih *: Yani 2 ile çarpılmış.*
Öğretmen *: Çok hızlı cevap verdin çünkü. Aferin. 2 ile çarpılmış, hangi sayılar 2 ile çarpılmış?*
Semih *: 42 2 ile çarpılmış, 84, 16 2 ile çarpılmış 32.*
Öğretmen *: Yani burada bir işlem yapmamıza gerek yok mu? Mesela bölme işlemi var orada değil mi?*
Semih *: Hı hı. Evet de yani ben yapmadım.*

Semih verilen eşitlikte bölme işlemi yapmaya gerek duymamıştır. Oysa ki; diğer örneklerde öncelikle toplama ya da çıkarma işlemi yapmak istemiştir. Bölme işlemi yapmamasının nedeni eşitliğin her iki tarafındaki sayılara odaklanarak aynı oranda arttığını görmesinden kaynaklanmaktadır.

Öğrenciler ilişkisel düşünmeyi kullandıklarında hesaplama yapmak yerine sayılar ile ilişkilere odaklanarak açık sayı cümlelerini çözebilirler (Carpenter vd., 2003). Semih ilişkisel düşünmeye yatkın bir öğrenci olmasına rağmen sayılar arasında ilişki kuramadığı zaman eşitliğin iki tarafında da işlem yaparak bir sonuç bulma ve bu sonuç üzerinden ilişki kurmaya çalışmıştır. Bunun temel nedeni, öğrencinin verilen işlemin sonucunun doğruluğundan emin olma isteğidir. Böylece aradaki ilişkiyi daha kolay bulabileceğine inanmaktadır. İkinci tema olan ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecine ait alt tema bilinmeyeni bulduktan sonra ilişkiyi açıklama, “8 + (3 x 8) = (5 x 8) – 8” [2e] eşitliğinin doğru olup olmadığına işlem yapmadan karar verebilmek 5. sınıf öğrencisi için zor bir karar olabilir. Çünkü verilen bu ifadede 3 ayrı işlem vardır ve öğrenci soruyla ilk karşılaştığında zorlandığı görülmektedir.



İlkokulda öğretilen işlem önceliğine uymak isteyen Semih öncelikle parantez içindeki işlemleri yapıp sonra diğer verilen işlemleri yapmak istemiştir. Ancak verilen toplama ve çıkarma işlemlerini de birer çarpma işlemi olarak görmüş ve eşitliğin her iki tarafındaki sayıları ayrı ayrı çarpmıştır. Bu yüzden verilen eşitliği yanlış yanıtlamıştır. Ancak toplama ve çıkarma işlemlerini yaptıktan sonra eşitlik hakkında doğru karar verebilmiştir.

(.....)

Öğretmen ***:*** *Anladım. Peki işlem yapmadan baktığımızda bu doğru veya yanlış diyebileceğimiz bir düşünce var mı kafanda?*

Semih ***:*** *Var.*

Öğretmen ***:*** *Nasıl?*

Semih ***:*** *8'le çarpılıyor değil mi?*

Öğretmen ***:*** *Hı hı.*

Semih ***:*** *5'ten 8 yani aynı rakam olduğu için bir tane 5'ten çıkarttığımızda 4 kalır yine aynı.*

Öğretmen ***:*** *Niye çıkarttın?*

Semih ***:*** *Çünkü burada çıkarma işlemi var. 8 çıkıyor. Yani 8'le çarpıldığında zaten onlar şey olacak. Burada da 3 var ama burada toplama var. 8 eklendiğinde bu çarpmaya bir tane daha eklenir cevapta 32 oluyor. O yüzden yine eşit olur.*

Eşitliğin sol tarafını 32 bulduktan sonra sağ tarafının da nasıl 32'i bulunacağını fark etmiştir. Öğrenciler eşitlik işaretini bir sonuç bulma sembolü olarak gördükleri için işlem yapmak ve sonuç bulmak istemektedirler. Bu yüzden zorlandıkları, emin olamadıkları ya da ilk defa karşılaştıkları bir eşitlik sorusuyla ilgili öncelikle işlem yapmak istemektedirler. Ancak bu işlemlerden sonra öğrenci sonuca dayalı olarak sayılar arasında bir ilişki kurabilmiştir. Örneğin "☐ : 2= (4 : 2) + (4 : 2)" [6f] açık sayı cümlesinde önce işlem yapmış daha sonra biraz düşündükten sonra doğru ilişkiyi kurmuş ve sonuca göre yorumlayabilmiştir.

Öğretmen	***:*** *İşlemsiz yapılamaz mıydı? İşlem yapmadan.*
Semih	***:*** *Şimdi aklıma geldi hocam bu 2 ya 4 tane var. Buradaki sayı için bunu 2 ile çarparız. 8 çıkar çünkü 2 tane var.*
Öğretmen	***:*** *2 tane olduğu için 2 ile çarptın.*
Semih	***:*** *Evet.*

Semih “4 x 3 = ☐ x 3 + ☐ x 3” [6b] açık sayı cümlesinde kutu yerine önce 1 ve 3 sonra 2 ve 2 yazmıştır. Hem işlem yapmak hem de sayılar arasında ilişki kurabilmek istemiş ancak başaramamıştır. Bu örnekle beraber Semih’in ilişkisel düşünme becerilerine yakın bir öğrenci olduğu söylenilebilir. Ancak bazı sorularda hiçbir ilişki kuramamış ya da doğrudan işlem yaparak karar vermek istemiştir. “12 - (9 - 2) = (12 - 9) + 2” [2c] cümlesinde eşitliğin her iki tarafında da aynı rakamların kullanıldığı fark ederek sonuç odaklı işlem süreci temasına uygun bir şekilde yanıtlamıştır. Eşitliğin her iki tarafında işlem yaparak doğru karar vermiş ama işlemlerin her iki tarafta da neden farklı olduğunu anlayamamıştır. “15 : 5 = (10 : 5) + (5 : ☐)” [6e] açık sayı cümlesinde 15’in parçalandığına odaklanması gerekirken işlem yapmak istemiş ve işlemsiz bulunamayacağını söylemiştir.

Öğretmen	***:*** *Yani illa işlem yapmaya gerek var mı? Yoksa işlemsiz de bulabilir miydik?*
Semih	***:*** *İşlemsiz hocam biraz zor ya bunun işlemi yani işlemsiz biraz zor oluyor.*

Semih’in sonuç odaklı işlem süreci temasına uygun düşündüğü bir soru da “☐ – ☐ = ☐ + ☐” [9c]’dir. Dokuzuncu sorunun diğer soru maddelerinde olduğu gibi son maddesinde de eşitliğin her iki tarafı için de ortak bir sonuç düşünmüş ve kutu yerine sayıları yerleştirmiştir.

Semih	***:*** *60’la 50’yi topladım. 200’den de 90 çıkardım.*
Öğretmen	***:*** *Neden?*
Semih	***:*** *Eşit olması için.*
Öğretmen	***:*** *Sonuca mı baktık yine?*

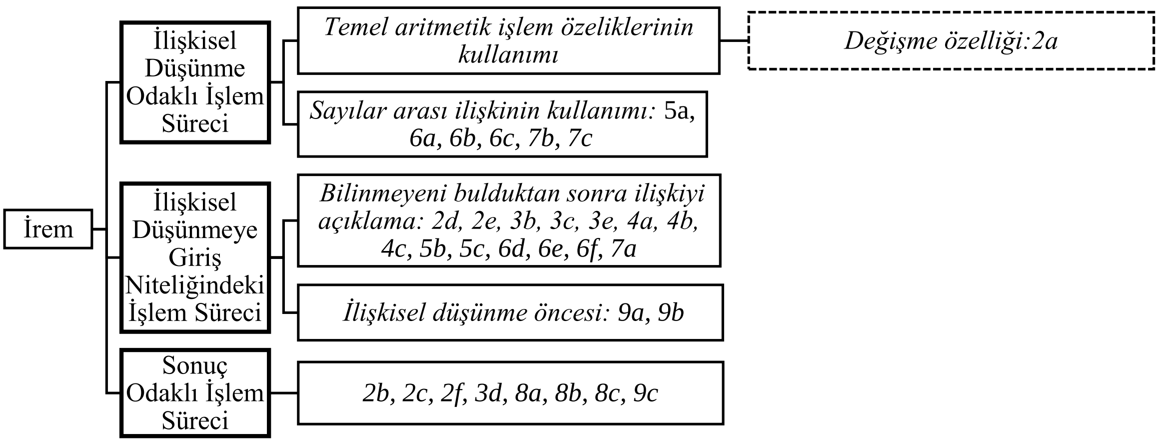
Semih *: Evet.*

Öğretmen *: 110, 110 diye.*

Semih en zor sorunun "□ x (7+8) = (□ x7) + (□ x 8)" [8c] olduğunu, bunun nedeninin de ifadede çok sayıda kutu verilmesinden kaynaklandığını söylemiştir. Aslında bu tür sorularda Semih'i zorlayan neden, sayılar ve işlemler arasında bir ilişki kuramamasından kaynaklanmaktadır. Çünkü sayılarla ilgili ilişki kuramadığı zaman sonuç bulmak için işlem yapmıştır. Bu tür açık sayı cümlelerinin bir sonuç bulmaktan daha çok sayılar ve işlemler arasında ilişki kurarak eşitliğin doğruluğuna karar verebileceğimiz cümleler olduğu söylenilebilir. Semih en kolay sorunun açık sayı cümleleri oluşturma örnekleri olduğunu söylemiştir. Çünkü sayıları kendi yazdığı için kolay yaptığını belirtmiştir. Özellikle verilen sorularda sayılar arasındaki ilişkiyi anladıktan sonra diğer sorulara geçerek işlem yapmamıştır. Ayrıca toplama ve çıkarma işlemlerinde ilişkiyi kolay fark etmiştir. Ancak Semih'in hızlı bir şekilde yanıt vermek isteği, zaman zaman hata yapmasına neden olmuştur.

3.1.6. Öğrenci : Üst Düzey

Öğrencinin ön görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 8'de sunulmuştur.



Şekil 8: İrem'in ön görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

İrem' e eşit işaretinin anlamı sorulduğunda, öğrenci eşittir işaretinin eşitliğin her iki tarafında da aynı özellikleri taşıması gereken bir sembol olduğunu belirtmiştir. Ayrıca eşit işaretinin diğer anlamlarını da bildiği görülmüştür. Semih gibi İrem' in de ilişkisel düşünme becerilerine yatkın bir öğrenci olduğu görülmüştür. İrem' in yorulmasından dolayı ön görüşmeler iki günde tamamlanmıştır. Birinci günden sonra İrem sayılar arasındaki ilişkileri daha kolay fark edebilmiştir. "4 x 3 = ☐ x 3 + ☐ x 3"[6b] açık sayı cümlesinde önce ilişkisel düşünerek kutulara gelecek olan sayılara karar vermiş ardından işlem yaparak hangi sayıların yazılabileceğini ve nasıl bulunabileceğini göstermiştir.

İrem	***:*** *Burada da 4'ü iki kutucuğa atabilmek için ikiye böldüm; hem de şöyle de olabilir. 2 kere 3, 6. 6 oluyor. Bu işlemin sonucu da 4 kere 3 12 olduğu için yarı yarıya 6 oluyor.*
Öğretmen	***:*** *İşlem mi yaptık yoksa…*
İrem	***:*** *Yok işlem yapmadan*
Öğretmen	***:*** *İşlem yapmadan, hım.*
İrem	***:*** *Direk zihinden yaptım.*
Öğretmen	***:*** *Nasıl yaptın, tekrar söyler misin?*
İrem	***:*** *İlk baş şöyle de yapabiliriz. 4'ü iki kutuya yerleştirmek için ikiye böleriz ya da 4 kere 3 12'dir. 12 6,6. 12'yi yarıya böleriz. Bu parantezin içindeki işlemin sonucu 6, bu parantezin içindeki işlemin sonucu 6 olması gerekir 12 olması için.*

İrem "5 x 9 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 – ☐" [7a] cümlesi için doğrudan bir ilişki kuramamasına rağmen "2 x 9 = (2 x 10) – ☐" [7b] ve "(8 x 9) + ☐ = 8 x 10" [7c] ifadelerinde sayılar arasındaki ortak çarpanlara odaklanarak yani doğru bir ilişki kurarak kutu yerlerine yazılacak olan sayıları bulabilmiştir. İrem toplama ve çıkarma işlemlerinin aksine çarpma işlemindeki sayı ilişkilerini daha kolay görebilmiştir. Diğer öğrenciler arka arkaya verilen toplama ve çıkarma işlemlerine ilişkin bir ilişki kurabilmelerine rağmen çarpma ve bölme ile ilgili sayılar arasında çok fazla bir ilişki kuramamışlardır. Ancak İrem ortak çarpanlara odaklanmayı başarmış ve çarpma işleminde doğru sayı ilişkileri kurmuştur.

Şekil-6 dan da görüleceği üzere İrem daha çok bilinmeyeni bulduktan sonra ilişkileri fark edebilmiş ve yorumlayabilmiştir. “8 + (3 x 8) = (5 x 8) – 8” [2e] eşitliği için İrem parantez içi işlemleri yaptıktan sonra diğer çıkarma ve toplama işlemlerini yapmıştır. İlişkisel düşünmenin zor bir örneği olan bu örnekte biraz düşündükten sonra ilişkileri fark edebilmiştir. Eşitliğin sağ tarafında bulunan 8 sayısının sol tarafta bulunan 8 sayısından 2 kat fazla olduğunu fark etmiştir. Bu yüzden de sağ taraftan bir tane 8 çıkarıp sol tarafa eklemeyi düşünmüştür.

İrem **:** *İşlem yapmadan nasıl bulunabilir diye düşünüyorum, ama…Şu farklı demiştim. Artı eksi. Oradaki açığı 5 3 ten iki fazla, öyle kapatmış olabilir mi acaba?*

Öğretmen **:** *Hım, nasıl, güzel. Anlamadım ama güzel bir yönteme benziyor.*

İrem **:** *Şu zıt. Burada 3 ile çarpmış burada 5 ile çapmış, 8 çıkıyor daha azalıyor ya. Oradaki açığı 5’le 2 fazlasıyla kapatmış olabilir.*

Öğretmen **:** *5’le 2 açık olduğu için 5 ten 3 çıktı. 2 açığı onu oradan kapatmıştır diyorsun. Bu nasıl kapatmış olabilir bu açığı, biraz daha açıklayabilir misin?*

İrem **:** *İki kat daha fazla yapmıştır sekizi.*

Öğretmen **:** *İki kat daha fazla yapmıştır. O zaman eşit oluyor mu peki? İki kat daha fazla yaparsa sağ tarafı.*

İrem **:** *Evet oluyor.*

Öğretmen **:** *Neden?*

İrem **:** *Burada 8 eksikmiş burada 8 artırmış, yani bunun çarpımı daha az sonuç çıkıyor artırmış, bunun çarpımı daha fazla çıkıyor eksiltmiş.*

İrem yukarıdaki soruda eşitliği bulduktan sonra sayılar arasındaki ilişkiyi fark edebilmiştir. Ancak işlem yapmanın ve bir sonuç bulabilmenin onu rahatlattığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin bu tür ilişkileri kurduktan sonra yine benzer sorularla ilişki kurabilmeleri desteklenmelidir. Çünkü öğrenci kurduğu ilişkiyi birkaç örnekle beraber pekiştirecek ve çıkarımlarda bulunabilecektir. Doğru/Yanlış ve açık sayı cümlelerinin ardı ardına verilmesi çocukların ilişkisel düşünme becerilerini geliştirmede kolaylık sağlamaktadır (Koehler, 2004). Üçüncü soruda verilen “3 + 4 = □ + 5” [3b] açık sayı cümlesinde İrem doğru sonuca ulaşmış, farklı bir yol ile nasıl bulunabileceği sorulduğunda ise sayılar arasındaki 1 farkı görmüş ve ilişki kurabilmiştir. Hemen ardından gelen “7 + 16 = $\square$ + 15”[3c] cümlesinde ilişkiyi daha hızlı ve kolay kurabilmiştir. Ancak yine zihninden işlem yapmıştır.

	(…)
İrem	***:*** *Bir tek 4 oluyor. 2 olur burası.*
Öğretmen	***:*** *Neden?*
İrem	***:*** *3, 4 daha 7. 5, 2 daha 7.*
Öğretmen	***:*** *Anladım. Peki burada bir toplam işlemi yaptık*
İrem	***:*** *Evet.*
Öğretmen	***:*** *İşlem yapmadan acaba kutu yerine yazılabilecek sayıyı bulabilir miydik İrem?*
İrem	***:*** *Şu yöntemle olabilirdi belki. Dört beşten bir eksik*
Öğretmen	***:*** *Hmm*
İrem	***:*** *O yöntemle bulabilirdik belki*
Öğretmen	***:*** *Nasıl yani? Nasıl bulacağız?*
İrem	***:*** *Hah şey buldum. Dört beşten bir eksik, üçte buradan (kutudan) bir eksik olabilir, şey buradaki de 3 ten bir eksik olabilir.*
Öğretmen	***:*** *Anladım 4 5ten 1 eksik olduğu için; 2 de 3 ten 1 eksik mi diyorsun?*
İrem	***:*** *Evet*
Öğretmen	***:*** *Anladım. Peki. Bir sonrakine geçelim?*
İrem	***:*** *8 olur.*
Öğretmen	***:*** *Neden 8 olacağını düşünüyorsun?*
İrem	***:*** *Yine bu 1 fazla (16 15ten) bu da 1 fazla olur.*
Öğretmen	***:*** *Hım 1 fazla. Peki işlem yaptın mı direk onu mu gördün?*
İrem	***:*** *İşlem yaptım da onu da gördüm.*
Öğretmen	***:*** *İlk önce işlem mi yaptın?*
İrem	***:*** *Evet.*

Carpenter vd. (2003) yapmış oldukları çalışmalarında öğrencilerin eşit işaretinin her iki tarafını da hesaplama yaparak karşılaştırdıklarını fark etmişlerdir. Böylece öğrenciler, iki eşit sayı arasında bir ilişki olduğunu ve bu ilişkinin eşit işareti tarafından temsil edildiğinin farkına varmışlardır. İrem “(3 x 4) + $\square$ = 3 x 7” [6d] cümlesinde kutu yerine gelecek olan sayıyı hesaplama yaparak karşılaştırmış ve daha sonra eşitliğin iki tarafındaki sayılar arasındaki ilişkiyi fark etmiştir. Ortak çarpanlara odaklanabilmesi de sadece toplama ve çıkarma işlemi değil diğer işlemlerde de farklı ilişkiler kurabileceğini göstermiştir.

İrem *: 9 oluyor sonucu*

Öğretmen *: Neden?*

İrem *: 3 kere 4 12 çıkıyor, 3 kere 7 de 21, bu yüzden 9 oluyor 21'den 12 çıkarınca*

Öğretmen *: Hı hı. Peki, işlem yapmadan düşünelim bakalım bulabilir miydik kutu içerisindeki sayıyı?*

İrem *: İşlem yapmadan da şöyle bulabilirdik. Yine işlem yoluyla yaptım ama mantıken düşünürsek 3 ün katları verilmiş burada 3 kat daha fazla o yüzden 9 olabilir. Çünkü 3 katı 9 olduğu için*

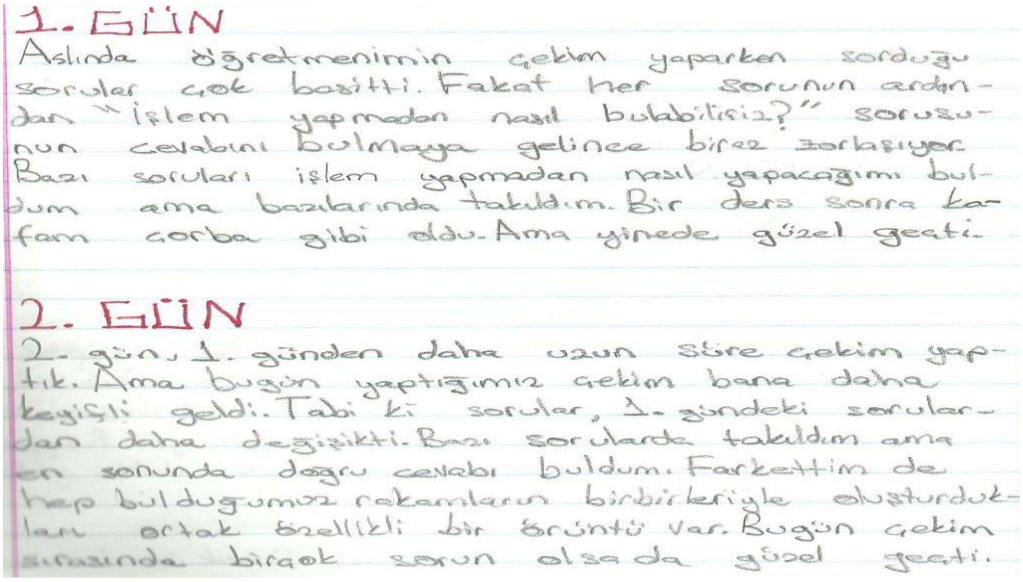
Öğretmen *: 3'ün 3 katı 9 olduğu için*

İrem *: Burada 3 kat daha fazla(sağda), burada 4 kat burada 7 kat; o yüzden 9 kere 9 da ya 3 kere 3'de 9 ediyor.*

Öğretmen *: 3 kere 3 9. Hım. 3 kat orda, bir daha açıklar mısın?*

İrem *: Burada 4 kat, burada 7 kat var. 7'den 4 çıkınca 3 kat oluyor. 3'ün de 3 katı 9 oluyor.*

İrem işlem yaptıktan ve karşılaştırma yaptıktan sonra sayılar arasındaki ilişkilere odaklanabilmiştir. Ancak İrem sorulara çok yoğun odaklandığı için diğer öğrenciler gibi bir gün de değil iki günde ancak ön görüşme sorularını tamamlayabilmiştir. 2. ün 1. gün fark etmiş olduğu özellikleri ve sayılar arasındaki ilişkileri de kullanarak verilen soruları daha kolay çözebilmiştir. Ayrıca eşitliğin bir tarafı artarken diğer tarafının da azalmasını örüntü kurmaya benzetmiştir. Aşağıda verilen günlüklerde bu ifadeler gözükmektedir.



1. GÜN
Aslında öğretmenimin çekim yaparken sorduğu sorular çok basitti. Fakat her sorunun ardından "işlem yapmadan nasıl bulabilirsiniz?" sorusunun cevabını bulmaya gelince biraz zorlaşıyor. Bazı soruları işlem yapmadan nasıl yapacağımı buldum ama bazılarında takıldım. Bir ders sonra kafam çorba gibi oldu. Ama yinede güzel geçti.

2. GÜN
2. gün, 1. günden daha uzun süre çekim yaptık. Ama bugün yaptığımız çekim bana daha keyifli geldi. Tabi ki sorular, 1. gündeki sorulardan daha değişikti. Bazı sorularda takıldım ama en sonunda doğru cevabı buldum. Farkettim de hep bulduğumuz rakamların birbirleriyle oluşturdukları ortak özellikli bir örüntü var. Bugün çekim sırasında birçok sorun olsa da güzel geçti.

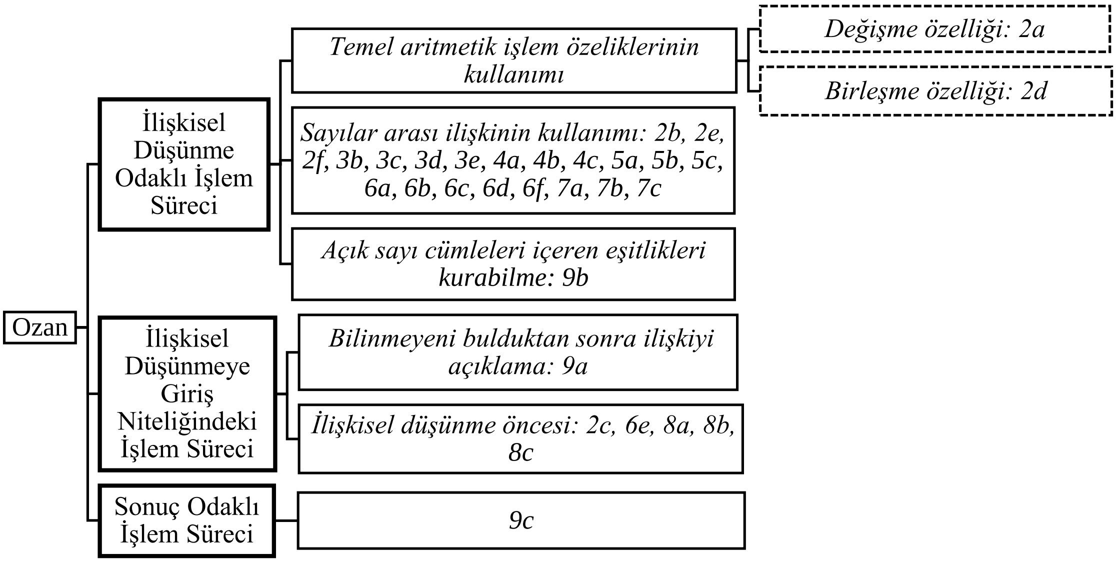
İrem'in zaman zaman ilişki kurabildiği görülmüştür ancak dağılma özelliğinin kullanıldığı soruların hiçbirinde doğru ilişki kuramamış, doğrudan işlem yapmak istemiştir. Bu işlemleri yaparken de zorlandığı hatta vermiş olduğu yanıtların yanlış olduğu görülmüştür.

3.2. Öğrencilerin Son Görüşmelerinden Elde Edilen Bulgular

Son görüşmelerin sunumunda sırasıyla düşük, orta ve yüksek düzey öğrencilerin bulgularına yer verilmiştir. Ön görüşmeler bazı öğrencilerin yorulması nedeniyle bir oturumdan fazla sürmesine karşın son görüşmelerde öğrencilerin tamamı verilen görevleri bir oturumda tamamlamıştır.

3.2.1. Öğrenci: Düşük Düzey

Öğrencinin son görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 9'da sunulmuştur.



Şekil 9: Ozan'ın son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Ön görüşmede soruları genellikle işlemsel düşünerek yanıtlayan Ozan son görüşmede sayılar arası ilişkileri daha fazla görebilmiş ve işlem yapmak istememiştir. Ozan'ın, bildiklerini ifade etme ve yorumlamada diğer öğrencilerden daha başarılı olduğu saptanmıştır. Öğrenci verilen bir ifadenin doğru olduğuna inandığında açıklamak ve kanıtlamak istemiştir.

Ozan ile son görüşmeye, ilk görüşmede olduğu gibi eşit işareti sembolünün anlamı sorularak başlanmıştır. Ozan eşit işaretini tanımış ve eşit işaretinin tüm anlamlarını söyleyerek işareti bir tahterevalliye benzetmiştir. İşaretin bir denge mekanizması görevi gördüğünü belirtmiştir.

(…)

Öğretmen ***:*** *Eşittir işareti hı hı. Ne anlama geliyor peki bu işaret?*

Ozan ***:*** *Bir başka aletin ya da sayının herhangi bir şeyin başka bir öbür karşısındaki aynı benzerine eşit, eşit olması*

Öğretmen ***:*** *Aynı. Benzerine eşit olması. Peki güzel. Başka anlamları da olabilir mi?*

Ozan ***:*** *Hocam tahterevalli, eşitlik.*

Öğretmen ***:*** *Nasıl yani, ne kastediyorsun tahterevalli derken?*

Ozan ***:*** *Hocam dengede durması, eşitlik, iki tarafın da eşit olması*

Öğretmen ***:*** *İki tarafın da eşit olması*

Ozan *: Evet.*

Öğretmen *: Peki başka anlamları olabilir mi?*

Ozan *: Sonuçlarının eşit olması*

Ozan ön görüşmede olduğu gibi son görüşmede de a+b = b+a biçimindeki açık sayı cümlelerinde sayıların yerlerinin değiştiğini ve işlemin değişmediğini, bu yüzden de sonuçların değişmediğini söylemiş ve işlem yapmaya gerek duymamıştır. “(6 x 7) x 8 = (6 x 7) x 8” [2d] cümlesinde sayıların ve işlemlerin aynı olduğunu görmüş ve birleşme özelliğini fark etmiştir.

Öğretmen *: Aynı işlemler olduğu için mi, aynı sayılar kullanıldığı için mi doğru dedin?*

Ozan *: Evet. Bir de sonuçlar da aynı çıkar diye, aynı sayılar olduğu için ben de doğru dedim*

Öğretmen *: Parantez içine almanın bir farkı olabilir mi? Önce burada 6 ile 7’yi almış sonra 7 ile 8 i almış. Sonucu değiştirir mi?*

Ozan *: Hayır hocam yine de aynı sayılarla çarpmış. İlk baş 6 ile 7’yi çarpmış. Ama burada ilk baş 7 ile 8 i çarpmış. Ondan sonra 6 ile çarpmış. Yine aynı oluyor.*

Yukarıda da görüldüğü gibi Ozan çarpma işleminin işlem özelliklerini fark etmeye başlamış ve işlem yapmak istememiştir. Ozan çarpma işlemi ile ilgili ön görüşme sorularında ortak çarpanlara fazla odaklanamadığı için çarpma ve bölme işlemlerinin bulunduğu sorularda yanlış kararlar vermiş, son görüşmede ise eşitliğin her iki tarafında bulunan ortak katlara odaklanarak doğru kararlar verebilmiştir. Bölme işlemlerinde bölünenler ile bölenlerin aynı oranda azaldığını fark etmiştir. Çarpma işleminde ise eşitliğin hangi tarafındaki kat fazlalığı olduğu görmek istemiş ve diğer tarafa o kadar kat eklemek istemiştir. Örneğin “6 + (7 x 6) = (9 x 6) – 6” [2e] ifadesi için aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Ozan *: Hocam 9 ile 6 yı çarpmış, burada 7 ile 6 yı çarpmış. Arada 2 kat var o yüzden 12 oluyor. 2 kat olduğu için 6 ile 6. Hocam burada 6 ile toplarız, burada eksiltiriz. İkisi aynı yerde olduğu için. Ben buna doğru dedim.*

Sadece çarpma işleminin olmaması aynı zamanda eşitliğin bir tarafında çıkarma diğer tarafında toplama verilmesi ilişki kurmayı zorlaştırabilmektedir. Ancak Ozan'ın da açıkladığı gibi eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı katlara odaklanarak fazlalık ve farklar doğru şekilde yorumlanabilir.

Verilen toplama işlemlerinde ilişkiyi kolayca fark edebilen Ozan eşitliğin bir tarafında toplananlardan biri artarken diğerinin azalacağını söylemiştir. Eşitliğin aynı tarafında bulunan toplananların her ikisinin de artması ya da azalması durumunda eşitliğin bozulacağını çünkü farkın artacağını belirtmiştir. Çıkarma işleminde ise eksilen ile çıkan arasındaki ilişkiye odaklanabilmiş ve verilen sorularda kutu yerine gelecek olan sayıları doğru yazabilmiştir. "62 – 45 = 63 – □" [5a] için:

Ozan	***:*** *Hocam çıkarma işleminde fark mesela hocam 1 artmış burda yine 1 arttırırız.*
Öğretmen	***:*** *Neden?*
Ozan	***:*** *Toplamadaki gibi değil bu*
Öğretmen	***:*** *Neden?*
Ozan	***:*** *Hocam çünkü ekside öyle oluyor. Eşitliği sağlamak için*
Öğretmen	***:*** *Biraz daha açıklar mısın?*
Ozan	***:*** *Ekside öyle yapmamız gerekiyor. Hani burada 1 artırmış buradan 1 azaltırsak eksiyi artı yapmamız gerekiyor. Çünkü o toplamada olacak bir şey. Bunda da eksiltiriz.*

"48 – 17 = 46 – 16 - □" [5b] eşitliğinde ise kutu yerine gelecek olan sayıyı yanlış yorumlamıştır. Ancak öğretmenin düşünmesini istemesi üzerine yaptığı hatayı fark etmiştir. Ancak en önemlisi kutudan önce hangi işaretin, neden yazıldığını açıklayabilmiştir.

Ozan	***:*** *Hocam buradaki (sol) sonuçla, buradaki sonuç eşit değilse o arasındaki farkı eşitleyebilmek için bu arasındaki farkı oraya yazarız. Böylece eşitlenir. O yüzden "+" yazmış. Burada(sağ) çok olsaydı buraya – yazardık, küçültürdük.*

İlişkisel düşünmenin ikinci teması olan sayılar arası ilişkileri kullanabilme temelde sayıların hangi işlemlerle nasıl değiştiğini görebilmektir. Örneğin toplama işleminde eşitliğin her iki tarafının da aynı şekilde artması düşünülürken çıkarma işleminde farka odaklanılmıştır. Çarpma ve bölme işlemlerinde ise ortak çarpanlara odaklanmak gerekmektedir. Ön görüşmelerde tüm öğrencilerin zorlandığı “30 : 10 = (20 : 10) + (10 : □)” [6e] biçimindeki bölme işleminde Ozan doğru yanıt vermiş ve kutu yerine neden 10 gelmesi gerektiğini gerekçeli olarak ifade edebilmiştir

Ozan *: Burada hocam 30 bölü 10 istiyor. Burayı 20 ye bölmüş. O yüzden 30 ile 20’ nin arasında 10 kaldığı için 10 u da 10 a böleriz.*

Öğretmen *: Güzel. Peki biraz daha açıklayabilir misin buradaki yaptığın işlemi.*

Ozan *: Burada 30 bölü 10. Burada 20 yi 10’ a bölmüş. 10’ u da bu sefer arasındaki farka bölmemiz gerekiyor eşitlenmesi için, o yüzden de 10*

İlişkisel düşünmenin son alt teması olan açık sayı cümlelerini içeren eşitlikleri kurabilmede ise öğrencilere verilen bütün boş kutuların yerine gelecek olan sayıları kendi muhakeme gücüyle yazabilmeleri istenmektedir. “□ – □ = □ – □” [9b] eşitliğinde Ozan önce işlemsel düşünmek istemiş ancak öğretmenin sorusuyla ilişkiyi görmüş, toplama ve çıkarma işlemlerinde ilişkisel düşünmeyi açıklayabilmiştir.

Ozan *: Hocam burada mesela 3 den 2’yi çıkartırsak 1 kalıyor burada*

Öğretmen *: İşlem yapmadan düşünsek mesela oradaki 1 i düşünmeden, hiç düşünmeden, mesela öbür tarafa sayıları yerleştirebilir misin?*

Ozan *: Öbür tarafa… Hocam bu eksi olduğu için diye ikisinden de çıkartırız diye düşündüm. Burası 1 olur(4. kutu), burası da (2) yine de aynı sonuç oluyor. Böyle farklı oluyor. Mesela burası 4 olsa*

Öğretmen *: Daha büyük sayılar ver.*

Ozan *: 20. burası da 15 olsa*

Öğretmen *: Tamam*

Ozan *: Burada 1 tane daha sayı düşeriz 14. Buradan da düşmemiz gerekir o zaman*

Öğretmen *: Neden düşürdün ikisinden de*

Ozan *: Çünkü eksi de toplarsak şey bu sefer artı olması gerekiyor. O yüzden de ikisinden de çıkartırız sonuç eşit olur.*

Öğretmen *: Artı olursa dedin. Ne dedin orayı tam anlamadım Ozan?*

Ozan: ***: Burada 21 yazarsan burada toplayıp burada azaltırsak buraya toplama işlemi yazmamız gerekir.***

Öğretmen ***: Anladım. Peki***

Ozan ***: Ama şey çıkartmamız gerekiyor ya da ikisini de artırırız.***

Bir önceki örnekte Ozan'a boş kutular bu defa sadece toplama işlemleri olacak biçimde sunulmuştur. Önce eşitliğin her iki tarafında da bir sonuç düşünerek kutulara gelecek olan sayıyı yazmış, ancak sayılar arasında ilişkinin sorulması üzerine ilişkiyi fark etmiş ve nedenini açıklayabilmiştir. Ozan dokuzuncu soruda verilen örneklere doğru yanıtlar vererek ilişkisel düşünme becerilerini kazandığını göstermiştir. Ancak dokuzuncu sorunun son örneğini "☐ + ☐ = ☐ – ☐" [9c] sonuç üzerinden gitmeden ve hem toplamayı hem de çıkarmayı karşılıklı olarak bir arada bulunduran bir eşitlikte ilişkisel düşünme becerisi ve muhakemesi zor geldiği için uzunca bire süre düşünmüş, farklı sayılar denemiş ancak yine de çözememiştir. Ayrıca hem görüşmenin son örneği olmasından hem de zorluğu açısından Ozan'ın yorulduğu da görülmüştür.

Ozan son görüşmede hemen hemen tüm soruları ilişkisel düşünmeye uygun bir şekilde çözse de bazı sorularda ilişkileri kuramamıştır. Ancak yine de ikinci temanın alt teması olan ilişkisel düşünme öncesine uygun bir biçimde soruları çözebilmiştir. Örneğin; "15 - (8 - 5) = (15 - 8) + 5"[2c] eşitliğinde sayılar arası bir ilişki yakalayabilmesine rağmen istenen ilişkiyi tam olarak kuramamış ve ilişkisel düşünme öncesi dediğimiz temaya uygun bir düşünme biçimi ortaya koymuştur. Ancak verdiği karardan da yine emin olamamıştır.

Ozan ***:Hocam burada 8 den 5 çıkmış, 15 den 8 çıkmış. 8 ile 5'in arasında 3 fark var. 15 ile 8 arasında 7 fark var. Hocam 7 değil mi? 8 ile 15'in arasında***

Ozan'ın ön görüşmede çok zorlandığı "☐ x (5 + 6) = (☐ x 5) + (☐ x 6)" [8c] cümlesinde yine zorlanmış ve uzun süre düşünmek istemiştir. Kutuların yerine sadece 11'in gelebileceğini söylemiş ve dağılma özelliğini fark edememiştir.

Ozan ***: 2 ile 2'yi toplayınca 4. Mesela 1 ile 3'ü toplayınca 4. İstediğimiz sayıları yazarız ama sonuçların eşit olması gerekiyor.***

Öğretmen ***: Peki sonuçlardan mı yaptık direk. Sonuçlardan yapmasak bulamaz mıydık bu taraftaki (eşitliğin sağ tarafı) sayıları. Mesela buraya***

herhangi iki sayıyı verip buradaki herhangi iki sayıyı bulamaz mıydık kafadan?

Ozan **:** *Buraya hocam veririz de toplamamız gerekiyor. Sonuç eşit olması gerekiyor. Direk bulamayız hani ben diye düşündüm*

Öğretmen **:** *Sayılar arasında bir ilişki var mı?*

Ozan **:***Var hocam burada 1 eksiliyor, burada 1 artıyor.*
Şöyle de yapabilirdik. Burada 1 tane daha eksiltiriz, burada 1 tane daha arttırırız. Şuraya 4 yazarız.

Öğretmen **:** *Peki o zaman sonuçtan gitmemiz gerekmiyor mu sence?*

Ozan **:** *Hocam şuraya yazarız (ilk iki kutuya) sonuçtan da yazarız mesela buraya*

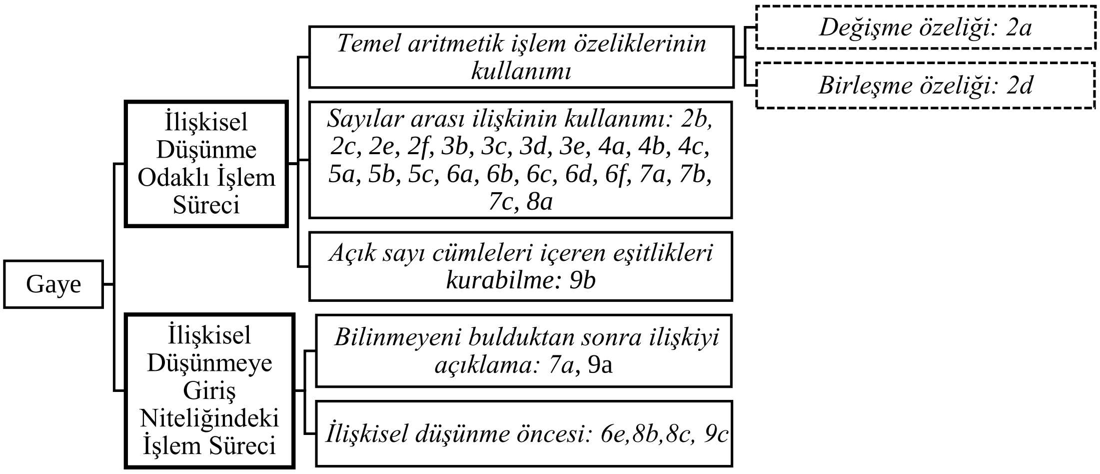
Öğretmen **:** *Farklı bir örnek verir misin, hepsini silip*

Ozan **:** *4 ile 5 9 oluyor hocam. Burada 1 eksiltiriz 3, burada 1 artırırız 6 oluyor. Bir daha artırırız 7 olur, 2. 8 olur 1.*

Ozan en çok son soruda zorlanmıştır. Bu sorunun ilk iki soru maddesinde sayılar arasında ilişki kurabilmesine rağmen son maddede hiçbir ilişki kuramamıştır. Ayrıca görüşmenin başında ilişkisel düşünme becerilerini daha çok gösteren Ozan görüşmenin sonlarına doğru işlemsel çözüme yani sonuç odaklı bir yaklaşıma doğru yönelmiştir. Bu sorularda yorulduğu da görülmüştür.

3.2.2. Öğrenci: Düşük Düzey

Öğrencinin son görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 10'da sunulmuştur.



Şekil 10: Gaye'nin son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

İlk olarak eşit işareti sorulmuş, öğrenci sembolü tanıyarak eşitliği karşılaştırma ve bir denge kurma olarak tanımlamıştır. Bunun yanı sıra eşit işaretinin verilen iki işlemin sonuçlarının karşılaştırılmasında kullanılabileceğini de vurgulamıştır.

İlişkisel düşünme odaklı işlem süreci teması altında öğrencinin temel aritmetik işlem özelliklerinden değişme ve birleşme özelliğini iki cümlede kullandığı görülmüştür. İkinci soruda sunulan toplama ve çarpmanın işlem özellikleri ile ilgili doğru/yanlış cümleleri biçimindeki sorularda Gaye işlem yapma gereği duymamıştır. "8 + 5 = 5 + 8" [2a] eşitliği için değişme özelliğini "(6 x 7) x 8 = (6 x 7) x 8" [2d] işleminde ise birleşme özelliğini fark edebilmiştir.

Gaye **:** *Tamam. Bu doğru.(8 + 5 = 5 + 8)*
Öğretmen **:** *Neden?*
Gaye **:** *Sadece sayıların yerleri değiştirilmiş.*
Öğretmen **:** *Sayıların yerlerinin değişmesi fark ediyor mu sonuç açısından?*
Gaye **:** *Hayır fark etmiyor*
(….)
Gaye **:** *Bu işlem doğru olabilir aslında (6 x 7) x 8 = (6 x (7 x 8))*
Öğretmen **:** *Neden?*
Gaye **:** *Çünkü 6, 7, 8 yazılmış bir daha 6, 7, 8 yazılmış. Doğru olabilir.*

Öğretmen **:** *Peki parantezleri farklı. Onun bir farkı olabilir mi. Neden parantezleri farklı almış olabilir? Sonuca etki eder mi ya da eşitliği bozar mı? Burada 6 ile 7'yi burada 7 ile 8'i almış.*

Gaye **:** *Bence bozmaz. Çünkü parantez içine alması bir şey etkilemiyor.*

İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecinde öğrencilerin ilişkileri kurabilmesi için sayılar ya da işlemler arasında bir bağlantı kurabilmesi gerekmektedir. Ancak bu işlemler eşitliğin her iki tarafında da farklı verilmişse öğrenci yanılgıya düşebilmektedir. "6 + (7 x 6) = (9 x 6) – 6"[2e] eşitliği için Gaye bir süre düşünmüş ve zaman istemiştir. Önce eşitliğin sağ tarafında bulunan eksi işaretini toplama işlemi olarak görmüş daha sonra çıkarma işlemi olduğunu fark etmiştir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan 6 sayısına dikkat etmiş ve sağ tarafta bulunan parantezin içinde 2 tane 6 sayısının fazla olduğunu görmüştür. Bir tanesini eksik olan tarafa yani eşitliğin sol tarafına ekleyerek diğer fazlanın da eşitliğin sağ tarafından çıkarıldığını görmüş ve şu şekilde açıklamıştır.

Gaye **:** *Bence bu doğru. Çünkü burada bizden 7 tane 6 istiyor. Buradan da 9 tane istiyor. İki tane 6 var. Bir tane 6 yı buraya koyar. Bir tane 6 yı da buraya koyar.*

Öğretmen **:** *Bir tane 6 buraya koymuş, bir tane 6 buraya koymuş derken?*

Gaye **:** *Elimizde zaten 2 tane 6 fazlaydı zaten bir tane 6 yı buraya koymuş(sol taraf), hala elimizde bir tane 6 fazla. O da 6 eksi .*

Ön görüşmede zorlanmış olduğu bölme işleminde ise bu kez zorlanmadığı saptanmıştır. "90 : 24 = 30 : 8" [2f] eşitliğinde bölünen ve bölen sayıların aynı kat oranı olarak değiştiğini söylemiştir. Bu soru maddesinden sonraki sorular çıkarma ve toplama ile daha çok ilgilidir. Gaye en rahat bu toplama ve çıkarma işlemlerini yapabildiğini söylemiştir. Bu yüzden 3, 4 ve 5. sorularda Gaye fazla zorlanmamış, ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine ait sayılar arası ilişkilerin kullanılması ile ilgili alt temaya uygun bir şekilde düşünce geliştirmiştir. Hatta işlem yapmamanın yanı sıra toplama işleminde kurduğu ilişkileri de açık bir şekilde anlatabilmiştir. Sayılar arasındaki ilişkileri fark ettikten sonra da soruları çok hızlı çözebilmiştir. Verilen "64 + 56 = 65 + 55 + □" [3d]

eşitliğinde kutu yerine gelebilecek olan sayıyı hızlı bir şekilde söylemiş ve nedenini açıklayabilmiştir.

Gaye ***:*** *Buraya 0 gelecek.*

Öğretmen ***:*** *Nasıl buldun?*

Gaye ***:*** *64 ten 65 e 1 artmış zaten. 56 dan 55 e 1 azalmış.*

Öğretmen ***:*** *Hı hı*

Gaye ***:*** *Hiçbir fazlalık yok zaten doğru.*

Öğretmen ***:*** *Anladım*

Gaye ***:*** *Bu olmasaydı (kutu) zaten doğru olurdu. Yani buraya hiçbir sayı gelmez.*

Gaye'nin toplama ve çıkarma işleminde ilişkisel düşünebilme yeteneğinin geliştiği görülmüştür. Çarpma işleminde ise zaman zaman zorlandığı saptanmıştır. "4 x 18 = 9 x ☐" [3e] cümlesi için kutu yerine gelecek olan sayıyı yanlış bulduğunu söylemiş ve düzeltmiştir.

Gaye ***:*** *Öğretmenim buraya 2 gelecek.*

Öğretmen ***:*** *Neden?*

Gaye ***:*** *18 i 2'ye bölmüş 9 bulmuş. Biz de 4'ü 2 ye böleceğiz 2.*

Öğretmen ***:*** *4'ü 2 ye böleceğiz 2, peki. Emin misin?*

Gaye ***:*** *Hayır*

Öğretmen ***:*** *Neden emin değilsin?*

Gaye ***:*** *Öğretmenim yanlış yaptım. 18'i 2'ye böldüğümüzde 9 çıkıyor. 4'le de 2'yi çarpacağız.*

Öğretmen ***:*** *Neden peki?*

Gaye ***:*** *Öğretmenim toplama ve çarpma işlemlerinde bir taraf artıyor, bir taraf azalıyor. Burada da bir taraf bölünüyorsa bu taraf da çarpılacak*

Öğretmen ***:*** *Aa çok güzel hmm. Yani bir taraf azalıyorsa… toplama ve çarpmada böyle bir şey var diyorsun.*

Gaye ***:*** *Evet*

Öğretmen ***:*** *Nerden, peki öğrendin böyle bir şeyi; nerden söyledin. Ben de söylemedim böyle bir şeyi, güzel bir cevap*

Gaye ***:*** *Sizin anlattıklarınızdan yani ben bunu anladım, bunu çıkarttım.*

Çarpma işlemi ve toplama işlemi ile ilgili ilişkisel düşünme için öğrenci kendine bir kural oluşturmuş ve hata yaptığını fark ederek kendi oluşturduğu kuralı ortaya koymuştur.

Dördüncü sorunun ilk soru maddesinde “63 + 25 + $\square$ = 27 + 66” [4a] açık sayı cümlesi verilmiştir. Gaye 63’ ün 66’dan 3 az, 25 in de 27 den 2 az olduğunu ve eşitliğin sol tarafına 5 ekleyerek kutu yerine gelecek olan sayıyı bulup işlem yapmamıştır. Gaye sayılar arasındaki farka odaklanıp, eşitliğin sağ tarafındaki fazlalığı sol tarafa eklemiştir. İlişkisel düşünme becerisi gösteremeyen bir öğrencinin aksine Gaye burada eşitliğin her iki tarafındaki toplama işlemlerini yapmadan aradaki farkı bulmuştur. Bu yüzden işlem yapmak istememiştir. Beşinci sorunun maddeleri çıkarma işlemi ile ilgilidir ve “62 – 45 = 63 – $\square$” [5a] ilk soru maddesidir. Bu açık sayı cümlesinde öğrenci çıkarma işlemindeki farka odaklanarak eşitliğin dengelenmesi gerektiğini düşünmüştür. Farka odaklandığı için öğrenci zorlanmadan kutu yerine gelecek olan sayıyı söyleyebilmiştir.

Öğretmen **:** *5. soruda kalmıştık. Bu sefer kutu yerine gelecek sayıları çıkarma işleminde yapmanı istiyorum.*

Gaye **:** *Buraya 46 gelir.*

Öğretmen **:** *Neden?*

Gaye **:** *Çünkü 62 den 63’e 1 artmış, 45’ten de 1 artacak 46.*

Öğretmen **:** *Neden artırdın bu sefer?*

Gaye **:** *Çıkarmada farkı dengelemeye çalışıyoruz.*

Bir sonraki soru maddeleri çarpma işleminin işlem özellikleri ve bölme işleminin özellikleri ile ilgilidir. Gaye bu soru maddelerinin tamamını doğru yanıtlamış, bazılarını açıklama da zorlansa da hepsini çözebilmiştir. Gaye soruların tamamını ilişkisel düşünebilmiş ve sayılar arası ilişkilerin kullanımı ile ilgili alt temaya uygun çözebilmiştir. Sadece altıncı sorunun beşinci maddesi olan “30 : 10 = (20 : 10) + (10 : $\square$)” [6e] açık sayı cümlesinde zorlanmıştır. Bu soru maddesinde öğrenci 30, 20 ve 10’un azalan bir sayı örüntüsü olduğu düşünmüştür. Bölenlerin sabit olduğunu görmüş ancak 30 un 20 ve 10 un toplamı olduğunu görmekte zorlanmıştır.

İlişkisel düşünme becerileri ön görüşmede çok fazla gözlemlenmeyen Gaye’nin ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecinde kaldığı bazı sorular hala vardır.

Yukarıda 6e maddesinde olduğu gibi sekizinci soruda da bazı soru maddeleri Gaye'yi zorlamış ve ilişkisel düşünme öncesi alt temasına uygun bir şekilde çözüme gittiği tespit edilmiştir. Ön görüşmelerde diğer öğrencilerde olduğu gibi Gaye'nin de en zorlandığı sorulardan bir tanesi çarpmanın toplama ve çıkarma işlemi üzerine olan dağılma özelliği olan eşitliklerdir. "4 x (9 – 5) = (4 x □) – (Δ x 5)" [8b] cümlesi için Gaye sekiz dakika kadar uğraşmış, verilen sorular arasında en çok bu soru üzerinde durmuştur. Verilen açık sayı cümlesinde kutunun yanında başka bir şekil daha yani üçgende verilince anlamakta zorlanmış ve dağılma özelliğini fark edememiştir. İki tarafta da kat ortaklığı aramış ve bulamamıştır. Gaye her ne kadar ilişkisel düşünmeyi anlamış olsa da işlem yaparak soruyu çözmek istemiştir. Ancak sadece işlem yapmayı düşünerek soruyu çözemeyeceğini görmüştür. Kutu ve üçgen yerine gelecek olan sayıları ilişkisel düşünme yoluyla bulmaya çalışmış, tam olmasa da yakın bir muhakeme yaptığı saptanmıştır. Diğer soruya geçerken Gaye'nin bir önceki yanıtından yani üçgen ve kare yerine gelecek olan sayıların doğruluğundan emin olmadığı gözlemlenmiştir. "□ x (5 + 6) = (□ x 5) + (□ x 6)" [8c] cümlesinde kutu yerine birden fazla sayı gelebileceğini öğrenci fark etmiş ve doğru yanıtlamıştır. Ancak kutu yerine gelecek olan sayıları yerleştirmekten çekindiği tespit edilmiştir. Kutu sayısının ikiden fazla verilmesinden dolayı Gaye verdiği yanıtlardan emin olamamıştır. Bu yüzden bu iki soru maddesinde de ilişkisel düşünme becerilerini tam olarak sergileyememiştir. Ancak ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem süreci içerisinde ve ilişkisel düşünme öncesi alt temasına uygun yanıtlar verdiği söylenilebilir. Örneğin; "□ x (5 + 6) = (□ x 5) + (□ x 6)" [8c] eşitliğinde öğrenci soruyu doğru yanıtlamasına rağmen emin olamamıştır.

Öğretmen	***:*** *Açıklar mısın?*
Gaye	***:*** *Sanırım kutu biraz fazla oldu.*
Öğretmen	***:*** *3 tane kutu biraz fazla oldu.*
Gaye	***:*** *Tüm sayılar da gelebilir oraya.*
Öğretmen	***:*** *Deneyelim istersen*
Gaye	***:*** *Öğretmenim burası 1 olsa(en baştaki kutu)*
	Karışık oldu. Bunu net olarak bilmiyorum

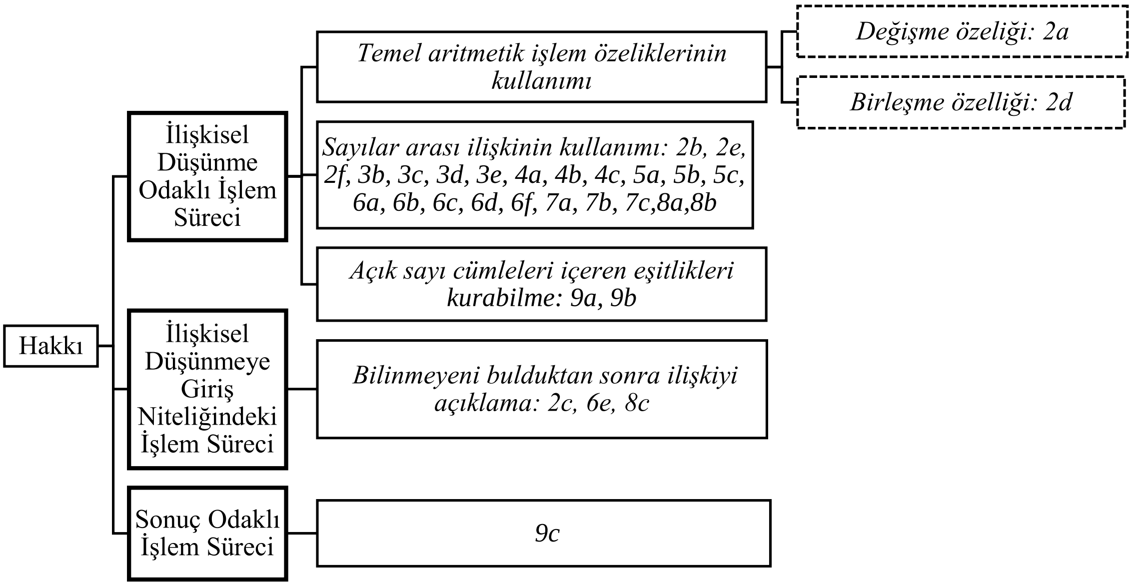
Son soruda öğrencilere boş kutular verilerek sayıları kendilerinin yazması beklenilmektedir. "□ + □ = □ +□ " [9a] ilk maddesinde kutular içerisine sayıları yazarken eşitliğin her iki tarafında da kafasından bir sonuç oluşturduğu tespit edilmiştir. Yani bilinmeyeni bulmak istemiş ve daha sonra aradaki ilişkiyi açıklamak istemiştir. " ☐ – ☐ = ☐ – ☐ " [9b] ikinci soru maddesinde birinci maddede yaptığı gibi sonuç yerine farka odaklanmıştır. Sayıları doğru bir şekilde yerleştirerek ilişkisel düşünebildiği görülmüştür. Son soru maddesinde ise önceki iki soru maddesine göre daha fazla muhakeme gerekmektedir. Çünkü eşitliğin iki tarafında farklı işlemler bulunmaktadır. Uzun süre düşünmesine rağmen tam olarak sayılar arasında bir ilişki kuramamıştır. Gaye ilişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem süreci içerisinde ilişkisel düşünme öncesi alt temasına uygun olarak "☐ + ☐ = ☐ – ☐ " [9c] cümlesinde kutulara sayıları yazmıştır.

Gaye	***: Sonuncusu biraz karmaşık***
Öğretmen	***: Nasıl?***
Gaye	***: İki tane işlem oldu.***
Öğretmen	***: Bu sefer biraz zor değil mi?***
Gaye	***: Evet. Burada işlem yapacağım***
Öğretmen	***: Peki yapmadan bulamaz mıyız?***
Gaye	***: Aralarında bir ilişki kursam***
Öğretmen	***: Belki kurulabilir, bir düşün bakalım***
Gaye	***: Ama işlem yaptığımızda doğru mu çıkar sonuç?***

Gaye en çok sekizinci ve dokuzuncu sorularda zorlanmış, bir ve ikinci soruların en kolay sorular olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin toplama ve çıkarma işleminde ilişkisel düşünmeyi rahatlıkla kullandığı görülmüştür. Ön görüşmelerde tamamen işlemsel düşünen Gaye son görüşme sorularının çoğunda ilişkisel düşünme becerilerini gösterebilmiştir. Bazen (kutu sayısı arttığında gibi) işlemsel düşünmeye geçiş yapabilmektedir. Ayrıca soruların hiçbirinde sonuç odaklı düşünmediği de saptanmıştır.

3.2.3. Öğrenci: Orta Düzey

Öğrencinin son görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen tema ve alt temalar arasındaki ilişkiler Şekil 12'da sunulmuştur.



Şekil 11: Hakkı'nın son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Hakkı'ya öncelikle eşit işareti gösterilerek bu işaretin ne anlama geldiği ve eşit işaretinin farklı anlamlarının neler olduğu sorulmuştur. Hakkı eşitlik sembolünü eşitliğin her iki tarafında bulunan sayılar ve bu sayıların işleme sokulmasına benzeterek, iki sayının toplamının, eşit işaretinin diğer tarafında bulunan iki sayının toplamına eşit olması gerektiğini belirtmiştir. Diğer anlamlarına yönelik olarak eşit işaretini bir denge olarak gördüğünü, bir sonuç bulma sembolü olarak düşünülebileceğini ifade etmiştir. Para örneği vererek nesnelerin eşitliğinde bu sembolü kullanılabileceğini şu şekilde belirtmiştir.

***Hakkı** : 2 tane 50 kuruş olur, bir tane 1 lira olur ya öyle. Onların eşitliği falan. Yine aynı olur herhalde. Toplama işleminde sayıların yerlerinin değişmesi fark etmiyor sonuçta. O yüzden.*

Öğrencinin ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine uygun temel aritmetik işlem özeliklerinin kullanımı ile ilgili değişme özelliğini bildiği yukarıda kullanmış olduğu örnekten de anlaşılmaktadır. "8 + 5 = 5 + 8" [2a] işleminde de işlem yapmamış ve sayıların yer değiştirmesinin sonucu etkilemeyeceğini düşünmüştür. İkinci sorunun dördüncü soru maddesi olan "(6 x 7) x 8 = (6 x 7) x 8" [2d] çarpma işleminde birleşme özelliğini kullanmış ve toplama işleminde olduğu gibi sayıların yer değişikliğinin sonucu değiştirmeyeceğini söylemiştir. Ön görüşmelerde bölme işlemi verilen eşitliklerde Hakkı'nın zorlandığı görülmektedir. Son görüşmedeki "90 : 24 = 30 : 8" [2f] bölme işleminde eşitliğin her iki tarafın da ortak çarpanlarının eşit olarak değiştiğini fark etmiş ve açıklayabilmiştir.

Hakkı ***:*** *Katlardan yola çıktım 90 30'un 3 katı. 24'te 8'in 3 katı. O yüzden eşit.*

Öğretmen ***:*** *Bölümleri eşit midir peki?*

Hakkı ***:*** *Ne?*

Öğretmen ***:*** *Bölümleri eşit midir?*

Hakkı ***:*** *Bölümleri, bakalım bir. Valla bilmiyorum da 4 buçuk gibi. Ay 3*

Öğretmen ***:*** *Yani bölmesek bulur muyuz? İşlem yapmasak olur mu?*

Hakkı ***:*** *İşlem yapmasak olur. Yani benim düşündüğüm gibi katlardan gitsek yine olur.*

İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin ikinci alt teması olan sayılar arası ilişkilerin kullanımında öğrenci eşitliğin sağ ve sol tarafındaki sayılar arasında ortak fark ya da ortak çarpan aramak ister. Bu şekilde eşitlikteki diğer sayılar arasında bir ilişki kurabilir ve ilişkisel düşünür. Hakkı da verilen sayılar arasındaki ortak farkı bulabilmek için kutuyu parmağıyla kapatarak verilen sayılar arasında ilişki kurmaya çalışmıştır. Hakkı toplama ve çıkarma işlemlerinde kutu yerine gelecek olan sayıyı bulmak için kutuyu eliyle kapatmış ve eşitliğin hangi tarafında fazlalık olduğunu saptamak istemiştir. Eğer fazlalık yoksa kutu yerine gelecek olan sayının 0 olacağını belirtmiş ve ilişkiyi doğru bir biçimde kurabilmiştir. Örneğin "64 + 56 = 65 + 55 + ☐" [3d] açık sayı cümlesini aşağıdaki gibi yanıtlamıştır.

Hakkı ***:*** *Bu 55'i kapatırız. 1 eksik 64, 65'ten; burada da 1 eksilmesi lazım. Hım bunda toplama. Yok ya bunda bir fark olmuyor 0.*

Öğretmen ***:*** *Nasıl yaptın bir daha söyler misin?*

Hakkı ***:*** *Burada sayıların eşitliğine göre gidiyoruz. 64, 65'ten 1 eksikse 56'dan da gelecek sayı 1 eksik olması lazım. 1 eksik olduğu için yani eşitleme de doğrudur. Bu yüzden 0 getirdim.*

Hakkı vermiş olduğu yanıtların doğru olmasından sonra kendine güveni gelmiş ve işlemleri daha hızlı çözmek istemiştir. “4 x 18 = 9 x □” eşitliğinde işlem yapmamanın yanı sıra hızlı bir şekilde ilerlemek istemiştir.

Hakkı **:** *18, 9’un 2 katı. Bunda da 2 kat olur mu? Dur! Evet, 8 olur burada.*

Öğretmen **:** *Katlardan yola çıktın 18 ‘in 2 katı 4’ün 2 katı ve 8.*

Hakkı **:** *Evet. Geçelim mi?*

Hakkı toplama ve çıkarma işlemlerinde sayılar arası ilişkileri kullanmada çoğunlukla sorun yaşamamıştır. Çarpma işleminde de sürekli olarak eşitliğin her iki tarafında bulunan belirli sayıların ortak çarpanlarına odaklanarak çözüme ulaşmıştır. Açık sayı cümlelerinde kutuyu eliyle kapatarak eşitlikte nasıl bir ilişki olabileceğini görmek istemiştir. “48 – 17 = 46 – 16 - □” [5b] açık sayı cümlesinde yine eliyle kutuyu kapatarak eşitlikte hangi tarafın eksik olduğunu görmek istemiştir. Eşitliğin sağ tarafında bulunan eksilenin (48) eşitliğin sol tarafında bulunan eksilene (46) göre daha fazla olduğunu görmüş ve “+” işaretinin bu cümledeki yerini ve anlamını açıklayabilmiştir.

Hakkı **:** *Evet. Şu sayıyı kapatırız. 48’den 46 çıktı 2. yani 2 var. Buradan da 2 eksik olması lazım. Ama 1 eksik olmuş. 1 yazarız.*

Öğretmen **:** *Neden?*

Hakkı **:** *Çünkü 1 eksik olması lazımken, evet 1 eksik olması gerekirken… 2 eksik olması gerekirken 1 eksilmiş. Onu da 1 eksik, 2 eksiğe tamamlarız.*

Öğretmen **:** *O artının ne anlamı olabilir orada?*

Hakkı **:** *O artının ne anlamı… Yani çıkanın fazlalaşması mı… Eksilenin fazlalaşması!*

Hakkı’nın vermiş olduğu yanıtlara bakarak ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin alt teması olan sayılar arası ilişkilerin kullanımı birçok soru maddesinde görülmektedir. Bunlardan bir tanesi olan “8 x 6 = (□ x 6) + (□ x 6)” [6b] eşitliğinde öğrencinin çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemlerinin dağılma özelliğini fark etmesi amaçlanmıştır. Ön görüşmede tüm öğrencilerin bu soru türünde zorlandığı saptanmıştır. Bu soru maddesine benzer bir soru maddesi ön görüşmede de sorulmuş ve Hakkı ilk kutu yerine gelecek olan sayının 0 ikinci kutuya ise eşitliğin her iki tarafında da bulunan sabit olmayan sayının geleceğini söylemiştir. Bu açık sayı cümlesinde de yine aynı şekilde düşünmüş ancak kutuya aynı sayıların da gelebileceğini söyleyebilmiştir. Ayrıca ortak çarpanlara odaklanarak sekizi parçalayıp kutulara farklı sayıların da yazılabileceğini vurgulamıştır. Hakkı'nın bu tür sorularda sayılar ve verilen işlemler arasında diğer öğrencilerden farklı düşünebildiği tespit edilmiştir.

Hakkı	***:****Bunda istediğimiz sayıyı yazabiliyoruz değil mi kutuya?*
Öğretmen	***:*** *Hı hı evet.*
Hakkı	***:*** *Bu 4, 4 olur.*
Öğretmen	***:*** *Aklından ne geçiyor söyle söyle.(Hakkı'nın güldüğünü görünce)*
Hakkı	***:*** *0'la 8 geldi.*
Öğretmen	***:*** *0'la 8 dedin buraya 0 buraya 8 gelebilir değil mi?*
Hakkı	***:*** *Evet. Ya da 3–5, 2–6*
Öğretmen	***:*** *Katlara mı baktın burada?*
Hakkı	***:*** *Evet, 8'e dengeleyeceğiz hepsinin toplamını o yüzden.*

Hakkı'nın son görüşme soruları devam ettikçe kendine güveninin de artığı gözlemlenmiştir. Öğrenci vermiş olduğu yanıtlardan sonra açıklama yapmak ve vermiş olduğu yanıtların doğruluğunu da göstermek istemiştir. İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecine ait sayılar arası ilişkinin kullanımının kavranmasından sonra öğrenciler işlem yapmak istememiş ya da işlem yaptıklarında yani sonuç odaklı bir düşünce ile işlem yaptıklarında doğru yanıtlayamadıkları sorular olmuştur. Hakkı "$\square$: 3= (6 : 3) + (6 : 3)" [6f] açık sayı cümlesinde eşitliğin sağ tarafını öncelikle kullanmak gerektiğini düşünmüş ve işlem yaparak bulmaktansa sayılar arasında verilen işleme göre bir ilişkinin kurulması gerektiğini düşünmektedir.

Hakkı	***:*** *6.*
Öğretmen	***:*** *Nasıl düşündün?*
Hakkı	***:****Ya burada 2 tane… 2 kez 6'ya parçalamış. Yani 6'ya 2 kez parçalamış. 1 olur 2 ile 1'in toplamı olmadı.*
Öğretmen	***:*** *İşlem yapmadan düşün.*
Hakkı	***:*** *İşlem yapınca karışıyor işte.*
Öğretmen	***:*** *İşlem yapınca karışıyor değil mi?*
Hakkı	***:*** *Evet.*

Öğretmen : *O zaman işlem yapmadan düşünsek. Mesela yukarıdakilere de bakabilirsin.*

Hakkı : *Evet, yukarıdaki zaten şununla aynı mantık da… Hayır, zaten bu olmuyor. İşlemle de olmuyor.*

Öğretmen : *İşlemle düşünmeyelim o zaman. Nasıl yapılabilir?*

Hakkı : *2 tane 6 kere 3. 6'yı 3'e bölmüş bunları 2 tane olduğu için 2 ile çarparız 12. Durun!*

Öğretmen : *Ne oldu?*

Hakkı : *Bir yanda dağılma mı var diye baktım. Bunların ikisini topladığımızda 12 ediyor şu 6'ları. Onu da 3'e böldüğümüzde 4 ediyor. 3'ün de 4 katı 12 oluyor.*

Görüldüğü gibi ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecinde öğrenci sayılar arasında ilişki kurmak istemiş ve kuramadığı zaman rahatsız olmuş herhangi bir sonuç odaklı işlem yapmak istememiştir. Ayrıca Hakkı dağılma özelliğini de kullanabileceğini göstermiştir. Son görüşmelerde "4 x (9 – 5) = (4 x □) – (Δ x 5)" [8b] açık sayı cümlesi ön görüşmelerde bütün öğrencilerin çok zorlandığı hatta yapamadıkları bir soru olmuştur. Hakkı bu cümlede çarpmanın çıkarma işlemi üzerine olan dağılma özelliğini fark etmiş, her bir parantezin içinde aynı ortak çarpanın olması gerektiğini söylemiştir. Eşitliğin sağ ve sol tarafında 4'ün katlarının olduğunu ve her iki tarafta da ortak çarpanlarının eşitlenmesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca eşitliğin sağ tarafında bir tane daha 4 ün katı olsaydı sol tarafta da yine bir 4 ün katı olması gerektiğini söylemiş, dağılma özelliğini kullanarak parantez sayısını artırabileceğimizi görmüştür.

Hakkı : *Bu 4. kat olduğu için 4'ü 2 kere yazıyorduk. Bu da (kutu) 9 oluyor.*

Öğretmen : *Nasıl düşündün?*

Hakkı : *Daha demin ki gibi. Kat olduğu için 4'ü 2 kez kullanıldı 5'i 1 kere.*

Öğretmen : *Neden 2 kez kullanıyoruz?*

Hakkı : *Kat olduğu için.*

Öğretmen : *Neden 3 değil veya neden 4 değil neden 2 değil?*

Hakkı : *Sayıları onla çarpıyoruz. Burada da 2 tane sayı var.*

Öğretmen : *Hımm*

Hakkı : *Yani 3 sayı olsa 1 tane daha 4 kullanırdık.*

Hakkı ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecinde açık sayı cümleleri içeren eşitlikleri kurabilme ile ilgili "☐ + ☐ = ☐ + ☐" [9a] ve "☐ – ☐ = ☐ – ☐" [9b] soruları rahatlıkla çözebilmiştir. Hakkı kutu yerine aynı sayıların yazılabileceğini ayrıca eşitlik sağlayacak biçimde farklı sayılarında gelebileceğini söyledi. Hakkı çıkarma işleminde hem eksileni hem de çıkanı aynı oranda azaltmıştır.

Hakkı	***:*** *8,7. 6,5.*
Öğretmen	***:*** *Nasıl düşündük?*
Hakkı	***:*** *Şunu kapatırız. 8'den 6 çıktığında 2 kalır. Bundan da 2 farklı bir şey çıkması lazım 5.*
Öğretmen	***:*** *Nasıl yani biraz kafamı karıştı. Yavaşça anlat.*
Hakkı	***:*** *8'den 6 çıkardığımızda 2 kalıyor.*
Öğretmen	***:*** *Tamam*
Hakkı	***:*** *Yani 2 çıkması gerek.*
Öğretmen	***:*** *7'den mi 2 çıkması gerek?*
Hakkı	***:*** *Hı hı 7'den kapadığımızda sayının ya çünkü eksilen azaldığı zaman farkta da bir değişiklik olur. Çıkanı da o yüzden azaltmalıyız ki eşitliği kuralım.*

İlişkisel düşünmeye giriş niteliğindeki işlem sürecinde ise "☐ x (5 + 6) = (☐ x 5) + (☐ x 6)" [8c] sorusu Hakkı'nın ön görüşmelerde zorlandığı ve açıklayamadığı bir maddedir. Yine bu soruda zorlanmış ve zaman harcamıştır. Eşitlikte bir ilişki kuramadığı için işlem yapmak istemiştir. Her bir kutuya aynı sayıların gelebileceğini söylemiştir. İşlem yaparak eşitlik içindeki ilişkiyi fark edebilmiştir.

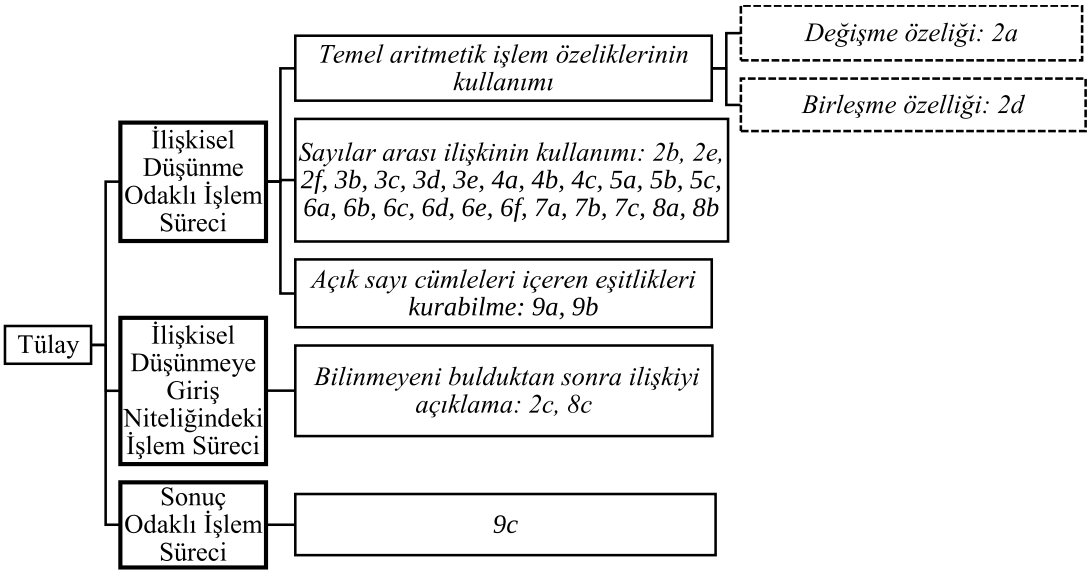
Hakkı	***:*** *Yani ikisinin de toplamı 11 kat ediyor. Yani aynı sayı olması şartıyla istedikleri sayılarla çarpsak olur. Yani 1, 2, 3…*

Hakkı son soruda çok zorlandığını belirtmiş ve kutu yerlerine yazılacak olan sayılar arasında bir ilişki kuramadığını belirtmiştir. Kutu yerine gelecek olan sayıları bulabilmek için zaman istemiş ve soru üzerinde düşünmek istemiştir. Öğrenci işlemsel düşünerek kutu yerine gelecek olan sayıları söyleyebilmiş ancak sonuç üzerinden de bir ilişki kuramamıştır.

Hakkı'nın ön görüşmeyle ile son görüşme arasında belirgin bir fark ortaya çıkmıştır. Ön görüşmelerde zorlandığı ve moralinin bozulduğu görülmüş ancak son görüşmelerde kendine güveni gelmiş hatta sorularda sürekli bir ilişki kurmak istemiş, işlem yapmak istememiştir. Toplama ve çıkarma işlemlerinde ilişkileri rahat kurabildiği saptanmıştır. En rahat yaptığı ve ilişkiyi en hızlı gördüğü işlemin ise çarpma işlemi olduğu tespit edilmiştir. Çarpma işleminde eşitlikte bulunan ortak çarpanlara hızlı bir şekilde odaklanarak ilişki kurabilmiştir. Çarpma işleminde yapamadığı sorularda dahi işlem yapmak istememiş ilişki kuracağına inandığı görülmüştür.

3.2.4. Öğrenci: Orta Düzey

Öğrencinin son görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 12'de sunulmuştur.



Şekil 12: Tülay'ın son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Son görüşmede diğer öğrencilerde olduğu gibi ilk olarak Tülay'a da eşittir sembolü sorulmuştur. Tülay eşit işaretinin farklı anlamlarını söyleyebilmiş ve işareti daha çok bir denge mekanizması olarak gördüğünü belirtmiştir. Eşit işaretini teraziye benzeterek bu sembolün sayıların ya da işlemlerin karşılaştırılmasında kullanıldığını söylemiştir.

Öğretmen ***:*** *Bu sembolün adı nedir, söyleyebilir misin?*

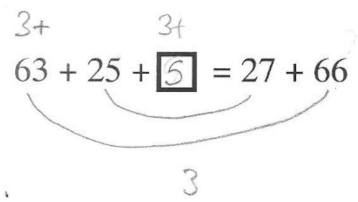
Tülay	***:** Eşittir sembolü, eşittir işareti.*
Öğretmen	***:** Peki bu sembol ne anlam ifade ediyor?*
Tülay	***:** Denge. Terazi. Bir sayı ile başka bir sayının eşit olması. Karşılaştırma sonucunun eşit olması*

Öğrencilerin eşit işaretinin farklı anlamlarını kavrayabilmeleri ilişkisel düşünmenin gelişiminde önemli bir yerdedir. Verilen bir sayı cümlesinde eşit işaretinin bir sonuç bulmadan daha çok ilişkiyi temsi ettiğinin vurgulanması öğrencinin cebiri öğrenme açısından çok önemlidir (Köse ve Tanışlı; 2011). Öyle ki, öğrencilerin ortaokula geçtiklerinde karşılaştıkları kavramlardan bir tanesi de ilişkisel düşünme kapsamındaki temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımıdır. Tülay "8 + 5 = 5 + 8" [2a] doğru/yanlış cümlesini hızlıca doğru yanıtlamış ve sayıların yerlerinin değişikliğinin eşitliği hiçbir biçimde bozmayacağını söylemiştir. Ayrıca toplama işleminde değişme özelliğinin olduğunu çıkarma işleminde ise değişme özelliğinin olmadığını söylemiştir. Aynı şekilde çarpma işleminde de birleşme özelliğinin olduğunu söyleyerek "(6 x 7) x 8 = (6 x 7) x 8" [2d] ifadesinin doğru olduğunu, çünkü rakamların yerleri değişmese bile aynı sayıların çarpıldığını belirtmiştir.

İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin ikinci alt teması olan sayılar arası ilişkinin kullanımında öğrenci, eşitliğin iki tarafında bulunan sayılar arası bir benzerlik arar. Tülay "6 + (7 x 6) = (9 x 6) – 6" [2e] doğru/yanlış cümlesinde ilk başta işlemler arasında bir ilişki kuramamasına rağmen ortak sayılar arasındaki ilişkiyi fark ederek eşitliğin doğru olduğunu görmüştür.

Tülay	***:** Yanlış*
Öğretmen	***:** Neden yanlış?*
Tülay	***:** Burası artı olması lazım(eksi olan yer). Benden dokuz tane 6 istiyor ama burada yedi tane 6 var. İki tane daha 6'ya ihtiyacım var. Burada 1 tanesi vermiş, ay pardon ya…Yedi tane 6 bir de 1 de 6 ile toplamışız …*
Öğretmen	***:** Buradaki(sağ taraf) 6 ne anlama geliyor?*
Tülay	***:** Bir kat fazla. Yani yedi değil, sekiz çarpı altı. Buradan bir eksilmiş, bu da sekiz çarpı altı oluyor. Bir kat eksildiği için doğru oluyor.*

Tülay toplama ve çıkarma işlemlerinde ilişkisel düşünmenin araştırıldığı tüm soruları sayılar arası ilişkilerden yararlanarak doğru çözmüştür. Toplama işleminde eşitliğin her iki tarafında da sayıların aynı miktarda artması gerektiğini, çıkarma işleminde ise farka dikkat etmemiz gerektiğini belirtmiştir. Tüm bu soruları yanıtlarken Tülay sürekli olarak “denge kurmamız gerekiyor, o zaman ….” şeklinde cümleler kurmuştur. Ön görüşmelerde işlem yapmanın daha kolay olduğunu söyleyen Tülay son görüşmelerde eşitlikte sayıları kullanarak işlem üzerinde denge kurarak soruları rahat ve basitçe çözebilmiştir. Örneğin “63 + 25 + □ = 27 + 66” [4a] açık sayı cümlesinde birbirine yakın sayılar arasında bir ilişki kurarak eşitlik üzerinde dengeyi sağlamıştır.



Tülay **:** *3 artmış burası(66), denge olması için burayı da 3 artırmamız(25) lazım… 25,27…3ile de 2’yi toplarız. 5 oluyor.*

Öğretmen **:** *Neden 5*

Tülay **:** *63’ten 66’ya 3 artmış zaten. Denge kurmam için burayı da 3 artırmam lazım. 25’den 27’ye 2 oldu. 3ile de 2’yi topladım 5 oluyor.*

Öğrenci öncelikle eşitlikte dengeyi bozan sayılara dikkat etmiş ve bu sayılar arasındaki farka odaklanmıştır. Buna benzer bir yaklaşımı “(4 x 5) + □= 4 x 9” [6d] sorusunda göstermiştir. Bu soruda eşitliğin her iki tarafında bulunan ortak çarpanlara odaklanmış ve bu ortak çarpanların çarpımlarını eşitlemeye yani dengelemeye çalışmıştır.

Tülay **:** *16*

Öğretmen **:** *Nasıl buldun?*

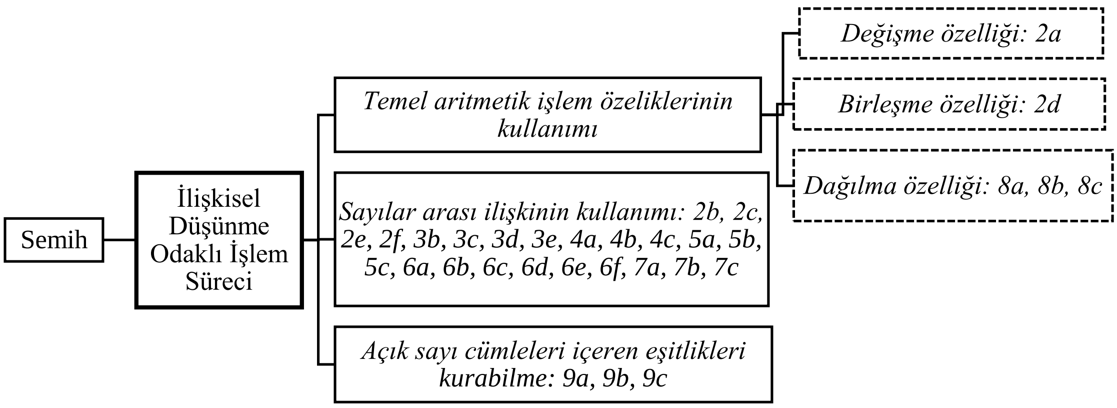
Tülay **:** *4 ile 9. 4 ile 5’i.çarpmış. Benim 4 katım daha eksik. O yüzden eşit olması için, dengeyi kurmam için 4 ile 4’ü çarparım 16 olur.*

Tülay’ın bu soru maddesinden bir sonraki soru maddesi olan “30 : 10 = (20 : 10) + (10 : □)” [6e] da zorlandığı görülmüştür. Bu soruda öncelikle 30 20 ve 10 un örüntü şeklinde yazıldığını söylemiş ancak sonra 30 sayısının 20 ve 10'u içerdiğini yani 30 sayısının parçalandığını görmüştür.

☐ x (5 + 6) = (☐ x 5) + (☐ x 6) [8c] soru maddesinde öğrenci kutu yerine sayıları doğru yazmasına rağmen emin olamamıştır. İşlem yaparak sonuçları karşılaştırmak istemiş ve sonuçlara güvenebildikten sonra kutu yerlerine gelebilecek olan sayıları yazabilmiştir. Tülay'ın bu soruda bilinmeyeni bulduktan sonra ilişkiyi açıklaması onu mutlu etmemiştir. Öğrenci soruyu çözebildiğini fark etmiş ancak sonuca yönelmesi onu rahatsız etmiştir. Aynı şekilde dokuzuncu sorudaki "☐ + ☐ = ☐ – ☐ " maddesinde öğrenci farklı şekilde denemeler yapmış ancak bir türlü eşitliği sağlayamamıştır. Öğretmenden bu soru için Tülay ek süre istemiş ve soru üzerinde uzunca düşünmüştür. Sonuca odaklı düşünmek istemeyen Tülay bu soruda farklı sayılar vererek doğru eşitlikler bulabilmiş ancak net bir şekilde açıklayamamıştır. Daha sonra bir sonuç bulmuş ve bu sonuç üzerinden kutulara yerleştirme yapmış ve kafasının çok ağrıdığını bu soruyu düşünürken çok yorulduğunu söylemiştir.

3.2.5. Öğrenci: Üst Düzey

Öğrencinin son görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen temalar ve temalar arasındaki ilişkiler Şekil 13'de sunulmuştur.



Şekil 13: Semih'in son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

Semih'i son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması incelendiğinde ilişkisel düşünmeyi kavradığı ve soruları tamamen ilişkisel düşünerek çözdüğü görülmektedir.

Son görüşmede ön görüşmenin aksine işlem yapmak istememiş, işlem yapmanın kendisini yavaşlattığını ve yorucu olduğunu belirtmiştir.

Semih'e ilk olarak eşit işaretinin anlamı ve farklı anlamlarının neler olabileceği sorulmuştur. Eşitliği iki sayının sonuçlarının eşit olması olarak tanımlamış ve 7+15=15+7 örneğini vererek eşitlik sembolünün sayılar arasındaki ilişkinin doğruluğunu temsil ettiğini belirtmiştir.

Öğrenci eşit işaretinin kullanım alanlarını ve bu işaretin neyi sembolize ettiğini açık bir şekilde ifade edebilmiştir. Semih'in vermiş olduğu yanıtlar incelendiğinde tamamının ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine uygun olduğu görülmektedir. Bu sürecin bir alt teması olan temel aritmetik işlem özeliklerinin kullanımı ile ilgili değişme, birleşme ve dağılma özelliklerini kullanabilmiş, uygulayabilmiş ve ifade edebilmiştir. "(6 x 7) x 8 = (6 x 7) x 8" [2d] de çarpma işlemine ait birleşme özelliğini fark ederek çözüme gitmiştir. Birleşme özelliğinde eşitliğin iki tarafında bulunan aynı sayıların yer değiştirmelerinin eşitliği bozmayacağını ve bu değişikliklerin sonucu değiştirmediğini söylemiştir.

Semih **:** _Doğru._
Öğretmen **:** _Neden?_
Semih **:** _Yani birleşme özelliği._
Öğretmen **:** _Çok güzel._
Semih **:** _Hocam çarpmada parantezinin yeri değişse bile sonuç değişmez._

Çarpma işleminde birleşme özelliğini bildiği ve rahat yorumlayabildiği görülmektedir. Temel aritmetik işlem özeliklerinin kullanımı ile ilgili bir diğer soruda sekizinci sorudur. Bu soruda çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği ile ilgili maddeler bulunmaktadır. Bu maddelerin ilki olan"3 x (7 + 5) = (3 x ☐) + (3 x 5)" [8a] işleminde dağılma özelliğini fark ederek belirleyici sayının 3 olduğunu ve bu sayının işlemde ortak çarpan olduğunu analiz edebilmiştir.

Semih **:** _Evet. Hım_
Öğretmen **:** _Nasıl düşündün?_
Semih **:** _Bu bir özellikti._

Öğretmen	***:*** *Hangi özellikti? Hatırlıyor muyuz?*
Semih	***:*** *Dağılma… Dağılma özelliğiydi. Burada 7 ile 5 toplayıp 3 ile çarpmış, burada ayrı ayrı çarpmış.*
Öğretmen	***:*** *Ayrı ayrı çarpmış…*
Semih	***:*** *O yüzden 5'i vermiş buraya da kalan 7 olduğu için 7'yi yazdım.*
Öğretmen	***:*** *Hım. Peki, başka bir fark ettiğin bir şey var mı? Orada.*
Semih	***:*** *İkisinde de hocam 3 katı belirliyordu, burada 3'ün 1 katını ya 3 kat bir bölümünü vermiş, diğer bölümü kalmış o yüzden bende* oraya bunu *yazdım*

Sekizinci sorunun ikinci soru maddesi "4 x (9 – 5) = (4 x □) – (Δ x 5)" [7b] dir. Semih yine dağılma özelliğini görerek ortak çarpanı yerleştirmek istemiştir. Ortak çarpanın 4 olduğunu söylemiş üçgen yerine 4 yazmıştır. Sonra da kutu yerine 9 yazmıştır. Eşitliğin sol tarafında bulunan parantez işleminden sonra 4 ile çarpıldığını, sağ tarafında ise 4 ile parantez içi işlemlerin ayrı ayrı çarpılarak farklarının alındığını söylemiştir. Semih'e kutu ve üçgen yerine başka hangi sayılar gelebileceği sorulmuş; Semih ise farklı bir sayının gelemeyeceğini çünkü eşitliğin bozulacağını şu şekilde söylemiştir.

Semih	***:*** *Yani 9'dan 5'i çıkartıp da 4'le çarpıyor. Bu da hepsini ayrı ayrı çarpıp da çıkartıyor.*
Öğretmen	***:*** *Ayrı ayrı çıkartıp da çıkartıyor. Güzel. Ya buradaki dedin ya parçalıyor, ayırıyor toplamları kadar kat. Orda da oluyor mu toplamları kadar fark ya da farkları kadar kat oluyor mu?*
Semih	***:*** *Bu(4) kat oluyor. Bu bundan çıkan oluyor, çıkan bölüm veya işte buraya 9 yazıp buraya da 4. 4 katı olduğu için ikisinde de olması gerekiyor. Burada katı vermemiş buraya bunu yazdım. Burada da bu sayı kalıyor onu da buraya yazdım.*

Sekizinci sorunun son maddesi olan"□ x (5 + 6) = (□ x 5) + (□ x 6)" [8c] eşitliğinde ise kutu yerlerine her sayının gelebileceğini, zaten ortak çarpanların da yani sabit sayıların da yazılmadığını belirtmiştir.

Semih	***:*** *İstediğim sayı gelir.*

Öğretmen ***:*** *Nasıl? Nasıl düşündün?*

Semih ***:*** *Katı vermemiş hiç birinde. O yüzden kat yazarım. Buldum 0, 0, 0, 0*

Öğretmen ***:*** *Olur mu bilmiyorum sen bilirsin.*

Semih ***:*** *Olur. Hepsinde 0 çıkar. Ama hocam 0 olmasın etkisiz o ya. Hepsine 1 yazdım.*

Öğretmen ***:*** *Hepsine 1. Peki başka sayı olur mu?*

Semih ***:*** *Olur. İstediğim sayı olur.*

Semih sayılar arası ilişkinin kullanımı temasına uygun soruları da ilişkisel düşünerek çözebilmiştir. Bu temaya uygun soruları çok hızlı çözebildiği sayılar arasındaki ilişkileri rahatlıkla ve hızlı bir şekilde görebildiği saptanmıştır. Ön görüşmede “15 - (8 - 5) = (15 - 8) + 5” [2c] eşitliğinin doğru ya da yanlış olduğuna karar vermede öğrencilerin zorlandıkları görülmüştür. Son görüşme de bu eşitlik için Semih doğru karar verebilmiş ve nedenini açıklayabilmiştir.

Semih ***:*** *Evet. Burada da doğru*

Öğretmen ***:*** *Neden?*

Semih ***:*** *Hocam burada 8’i almış 5’ten çıkartmış ondan sonra 15’le çıkartmış. Burada direkt 15’le 8’i çıkartmış sonra 5’i eklediği için.*

Öğretmen ***:*** *Sonra 5’i eklediği için. Biraz daha açıklar mısın? Doğru ama biraz daha net bir ifade istiyorum.*

Semih ***:*** *Hocam burada hani 5’i katmamış içine çıkartmada bundan 8’den çıkartmış da 15’ten çıkarttığı için burada 8’i çıkarttığı için oradaki 5’i burada eklemesi gerekiyor.*

Semih ilişkileri doğru kurmasına rağmen bazı durumlarda hata yapmıştır. Bunun nedeni soruları hızlı çözme isteği hatta diğer öğrenciler arasında en hızlı çözenin kendisi olmasını istemesidir. Yine hızlı düşünerek kendi hatasını düzelttiği de gözlemlenmiştir.

Toplama ve çıkarma işlemlerinde diğer öğrencilerde olduğu gibi Semih de pek sorun yaşamamıştır. Toplama işleminde eşitliğin her iki tarafında bulunan toplanan sayıların aynı şekilde artması gerektiğini belirtmiştir. Çıkarma da ise farklı durumlar olabileceğini söylemiştir. “62 – 45 = 63 – □” [5a] işlemi için kutu yerine gelecek olan sayıyı söyleyebilmiş, çıkan ile fark arasındaki ilişkisini açıklayabilmiştir.

Öğretmen ***:*** *46 mı yazdın? Nasıl düşündük?*

Semih ***:*** *Bu bundan 1 fazla buda bundan 1 fazla olmalı.*
Öğretmen ***:*** *Neden bu tarafı azaltmadın arttırdın?*
Semih ***:*** *Ya çıkartmada çıkan çoğalırsa fark azaldığı için .*
Öğretmen ***:*** *Çıkan çoğaldığında fark azaldığında.*
Semih ***:*** *Bir de eksilen çoğaldığında fark da çoğalır. O yüzden.*

"514 – 236 = 512 – 232 – □" [5c] açık sayı cümlesinde ise eksilen ile çıkan arasındaki ilişkiyi görmek kolay olmamasına rağmen görebilmiş ve ifade edebilmiştir.

Semih ***:*** *Hocam farkı 4 arttırdığı için yani buradakine göre hani eksilen burada 2 fazlaydı buna göre çıkanda 2 az olması gerekiyor. Bundan 2 az olması gerekiyordu o yüzden 2 de çıkarttım .*

Sayılar arası ilişkinin kullanımı ile ilgili çarpma ve bölme işlemlerini içeren açık sayı cümlelerinin bulunduğu altıncı soruda Semih genellikle kutu sayısına bakarak doğru karar vermiştir. Kutu sayılarına bakarak eşitlikte ortak bir çarpan oluşturmuş ve kutu yerine gelebilecek olan sayıları yazabilmiştir. Altıncı sorunun ikinci soru maddesinde "8 x 6 = (□ x 6) + (□ x 6)" [6b] kutu yerine gelebilecek olan sayıları söylerken ortak çarpan ile çarpılan(sekiz) sayıyı kutu sayısına bölmememiz gerektiğini ifade etmiştir.

Semih ***:*** *Burada 8'in 6 katını vermiş burada 2 tane parantez içinde 6 vermiş çarparak. O yüzden 2'ye böldüm iki kutuya da dağıttım.*
Öğretmen: ***:*** *Peki, bu 2 tane 6 ne anlama geliyor?*
Semih ***:*** *2 tane 6 mı? Hani burada çarpan.*
Öğretmen ***:*** *Niye burada 2 tane parantez vermiş?*
Semih *: Bunu(8) dağıtmak için, ikisini.*
Öğretmen *: Hım. Dağıtmış.*
Semih *: Hı hı .*

Altıncı sorunun üçüncü soru maddesinde kutuların yerleri eşitlikte değiştirilerek ve kutu sayısı artırılarak "(□ x 5) + (□ x 5)+ (□ x 5) = 12 x 5" [6c] biçiminde verilmiştir. Semih kutu yerine gelecek olan sayıyı 12 ‘yi parçalayarak bulmuştur. Aynı zamanda 12’ yi oluşturan katların da kutu yerine gelebileceğini söylemiştir.

Semih ***: 12’yi 5’le çarpmış 3 tane kutu vermiş 12’yi 3’e böldüm her kutuya da yazdım.***

Öğretmen ***: Evet. Peki,***

Semih ***: İki tanesine 0 bir tanesine 12 de olur.***

Altıncı sorunun beşinci soru maddesi 30 : 10 = (20 : 10) + (10 : □) [6e] dir. Kutu yerine gelebilecek10 olduğunu, çünkü her bir sayının 10 a bölündüğünü ve bu yüzden son parantez içindeki bölenin de 10 olması gerektiğini söylemiştir. eşitliğin sağ taraında parantezin içinde bulunan bölünenlerin toplamının eşitliğin sol tarfında bulunan bölünene eşit olması gerektiğini ifade etmiştir.

Semih ***: 0’larını atınca oluyor mu.... Hocam burada 30, 20’den 10 fazla burada da 10’a bölmüş, burada da 10’a bölmüş o yüzden 10 yazdım.***

Öğretmen ***: Güzel. Ama biraz daha açıklar mısın? Açık bir ifadeyle söyleyebilir misin?***

Semih ***: 10’a bölmüş 30’u, burada 20’yi 10’a bölmüş. Burada 10’a bölmüş böleni vermemiş hepsinde aynı olduğu için bölen oraya 10 yazdım. Birde bununla bunun toplamı 30 oluyor burada da 30 var 10’a bölmüş bu sayıyı da 10’a bölmem gerekiyordu.***

Semih çarpma ve bölme işleminde ortak çarpanlara odaklanmasından dolayı yaptığı açıklamalar da anlaşılır olmuştur. “7 x 9 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 – □” [7a] açık sayı cümlesinde de 10 sayısının sol tarafta bulunan 9 dan 1 eksik olduğunu ve bu yüzden kutu yerine yedi tane 10 olduğundan 10 gelmesi gerektiğini söylemiştir. Yani burada eşitlikte bulunan dokuzu ortak çarpan olarak düşünmüştür.

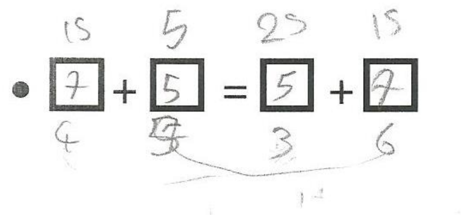
Öğretmen ***: 7’inci soru. Kutu yerine gelecek sayılar***

Semih ***: 7 tane var.(Hızlı bir şekilde)***

Öğretmen ***: Nasıl düşündük?***

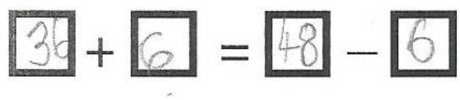
Semih ***: Ya 10, 9’dan 1 fazla o yüzden 7 tane 10 vermiş. Bu yüzden de 7 de çıkarılması gerekiyordu.***

Dokuzuncu sorunun soru maddelerinin tamamı ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin diğer bir alt teması olan açık sayı cümleleri içeren eşitlikleri kurabilme ile ilgilidir. Semih bu soru maddelerinin hepsine doğru yanıt verebilmiştir. “□ + □ = □ + □” [9a] toplama işleminde eşitliğin her iki tarafında bulunan toplananların aynı miktarda artması gerektiğini belirterek çözmüştür. Kutu yerine gelebilecek birden fazla sayı yazarak farklı örnekler verebilmiştir.



“□ – □ = □ – □” [9b] çıkarma işleminde eksilenleri de çıkan sayıları da bir arttırarak farkın sabit olduğunu göstermiştir.

“□ + □ = □ – □” [9c] eşitliğinde diğer öğrencilerin aksine işlem yapmak istememiş çünkü işlem yaparsa uzun süreceğini belirtmiştir. Önce doğru bir muhakeme ile sayıları yerleştirebilmiş, eşitliğin iki tarafında da farklı işlem olduğu için katlara odaklanmıştır. Eşitliğin her iki tarafında da 6’nın 7 katı olması gerektiğini düşünmüş ve eşitliğin sol tarafına 36, sağ tarafına da 48 yazmıştır. Böylece eşitliğin sol tarafa 1 kat ekleyip sağ taraftan 1 kat çıkartabilmiştir.



Öğretmen	***:** Hıhı altındakini yap bakalım.*
Semih	***:** He bu toplama.*
Öğretmen	***:** Sorun değil mi diyorsun? Nasıl düşündük sonuç olarak mı?*
Semih	***:** Yoo. Kat yaparak*
Öğretmen	***:** Nasıl kat?*

Semih *: Burada 6'nın 6 katı var. 1 kat daha ekledim 7 kat. Burada 8 kat verdim 1 kat çıkardım.*

Öğretmen *: Toplamda 7 tane mi 6 yaptı.*

Semih *: Evet.*

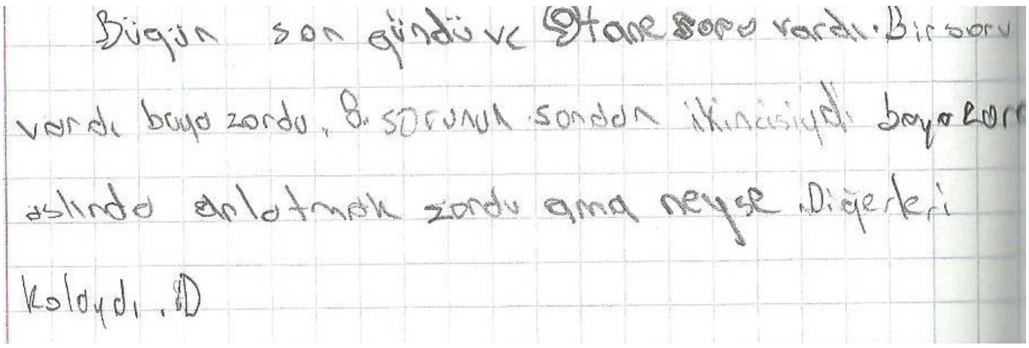
Öğretmen *: Müthiş. Çok güzel tebrik ederim. Başka sayılar da gelebilir dimi?*

Semih *: Evet.*

Öğretmen *: Peki.*

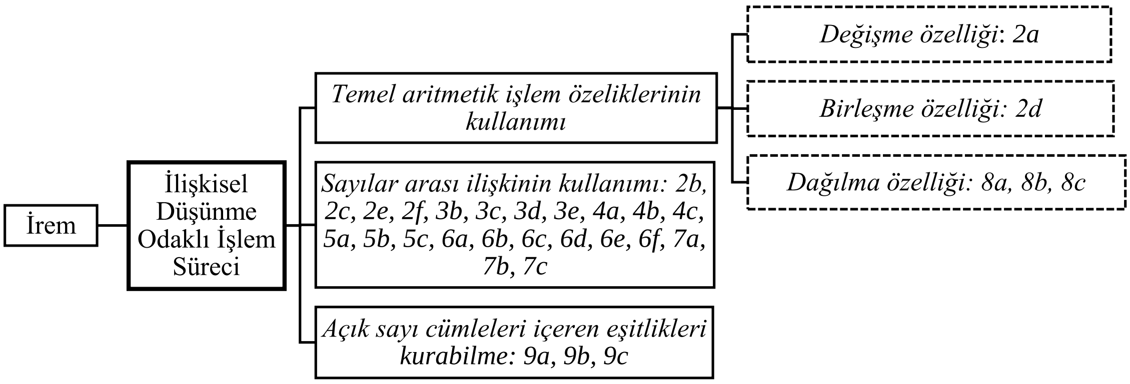
Semih *: 1000'lerde de gelir istediğin gibi gelir.*

Semih işlemsel olarak hızlı olabilir ancak verilen eğitimlerden sonra ilişkisel düşünerek de soruları çok hızlı bir şekilde çözebileceğini göstermiştir. Aynı zamanda ilişkisel düşünerek soruları çözdüğünde soruları daha kolay çözdüğü ve kendine güvendiği görülmüştür. Tüm sorulara doğru yanıt vermesi de bunun bir göstergesi sayılabilir. Verilen soruların hiçbirine işlemsel düşünerek yanıtlamamıştır. Semih' in ilişkisel düşünmeyi özümsediği son sorunun soru maddesinde gözükmektedir. Çünkü yürütmüş olduğu muhakeme verilen eğitimlerde gösterilen bir düşünce değildi. Bu sorunun yanıtını o anda bulması ve bu soruyu en kolay soru olarak söylemesi öğrencinin ilişkisel düşünmeyi tamamen özümsediğini gösterir. Semih'in en çok zorlandığı sorunun soru sekizinci soru olduğu tespit edilmiştir. Çünkü açıklama yaparken zorlandığı görülmüştür.


Bugün son gündü ve 9 tane soru vardı. Bir soru vardı baya zordu. 8. sorunun sondan ikincisiydi baya zor aslında anlatmak zordu ama neyse. Diğerleri kolaydı. :D

3.2.6. Öğrenci: Üst Düzey

Öğrencinin son görüşmesindeki bulguların analizi sonucunda ilişkisel düşünmeye ilişkin elde edilen tema ve alt temalar arasındaki ilişkiler Şekil 14'de sunulmuştur.



Şekil 14: İrem'in son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması

İrem'e ilk olarak eşit işareti gösterilmiş ve eşit işareti hakkında düşünceleri alınmıştır. İrem eşitliği, iki değerin birbirine eşit olması ve bir denge kurma olarak ifade etmiştir. İrem'in son görüşme sonunda oluşan ilişki şeması incelendiğinde vermiş olduğu tüm yanıtların ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine uygun düştüğü görülmektedir. Bu da öğrencinin ilişkisel düşünmeyi kavradığını ve soruları bu şekilde çözebileceğini göstermektedir.

İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin alt teması olan temel aritmetik işlem özelliklerinin kullanımına uygun olarak "8 + 5 = 5 + 8" [2a] sorusunda değişme özelliğini görmüş, "(6 x 7) x 8 = 6 x (7 x 8)" [2d] sorusunu doğru yanıtlamış ve birleşme özelliğini fark etmiştir.

İrem ***:*** *Evet. Doğru.*

Öğretmen ***:*** *Neden doğru olduğunu düşünüyorsun?*

İrem ***:*** *Öğretmenim zaten aynı işlemler. Sadece parantez içi yazmamış. İkiden fazla işlem olduğu için. Yine aynı sayılarla aynı işlem yapılmış. Şimdi üçü aynı oldu. Sonuç aynı oldu, değişmedi.*

Sekizinci sorunun tüm maddelerinde temel aritmetik işlem özelliklerini kullanabilmiştir. Sekizinci sorunun ilk maddesinde "3 x (7 + 5) = (3 x □) + (3 x 5)"

[8a] dağılma özelliğini fark etmiş, dağılma özelliğini sayıların ayrılması gibi düşünmüştür.

İrem *: Öğretmenim 7 olabilir burası.*

Öğretmen *: Neden?*

İrem *: Öğretmenim şimdi burada tek tek 3 ile 5'i çarpmış. Diyelim ki 3 ile de 7'yi çarpar öyle olur. Yani ayrılma, dağılma gibi. Tek tek bunlarla çarpacağına parantez içine yazıp ikisini toplayıp çarpım yapmış. Hâlbuki tek tek çarpma yapsa da olur.*

Sekizinci sorunun ikinci soru maddesinde "4 x (9 – 5) = (4 x □) – (Δ x 5)" [8b] öğrenci dağılma özelliğinin yanında sabit olan çarpanları da görmüş ve dağılma özelliğinin kullanılmasını işlemlerin uzun hali olarak nitelendirmiştir. Bu soruyu çok hızlı bir şekilde çözdüğü saptanmıştır.

İrem *: Öğretmenim şimdi burada daha bir önceki sorudaki gibi mantık kurdum. Öğretmenim 4'le 9'u çarparız sonra 4'le de 5'i çarpar sonra birbirinden çıkartırız. Yani böyle yapacağına öyle yapmış olur .*

Öğretmen *: 9'la 5'i çıkarmaktansa diyorsun.*

İrem *: Evet. Öyle yapardı yani dağılıyor işte. Daha uzun hali oluyor.*

İrem'in bu tür sorularda zorlanmadığı tespit edilmiştir. Bu yüzden soruları hızlı yanıtlayarak ve kısa açıklamalarda bulunarak ilerlemek istemiştir. Sekizinci sorunun son maddesi olan "□ x (5 + 6) = (□ x 5) + (□ x 6)" [8c] ise tüm sayıların kutulara gelebileceğini fark etmiştir.

İrem *: Öğretmenim istediğimiz sayıyı yazıyoruz buraya. Her sayı oluyor buraya.*

Öğretmen *: Her sayı oluyor mu?*

İrem *: Evet öğretmenim.*

Öğretmen *: Nasıl düşündün?*

İrem *: Öğretmenim çünkü mesela diyelim buraya 2 gelse 2 ile 5'i çarparız. Sonra da 2 ile 6'yi çarparız. Sonra 3 gelse de aynı yaparız hep birbirine eşit olur.*

İrem birçok soruyu ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin diğer bir alt teması olan sayılar arası ilişkinin kullanımına uygu çözmüştür. İrem soruların çözümünde genellikle denge kavramı üzerinde yola çıkmıştır. “15 - (8 - 5) = (15 - 8) + 5” [2c] sorusunda öğrencilerin sayılar ve işlemler arasındaki ilişkileri görmeleri zor olduğu söylenebilir. Öğrenci eşitlikte dengenin bozulmasıyla beraber verilen işlemlerin (toplama-çıkarma) değişebileceğini şöyle belirtmiştir.

İrem ***:** Bu da doğru öğretmenim.*

Öğretmen ***:** Neden?*

İrem ***:** Çünkü öğretmenim burada mesela 8’i çıkarmamış direk 8’den 5’i çıkartıp çıkan sonucu çıkarmış. Burada 8 çıkarmış. Yani daha fazla çıkarmış. Açığı da kapatmak için 5 eklemiş.*

Buna benzer bir örnekte “6 + (7 x 6) = (9 x 6) – 6” [2e] eşitliğidir. Burada da yine öğrenci altı sayısının katlarına odaklanarak eşitliğin sağ tarafında daha fazla kat olduğunu görmüş ve bir katın çıkarılması gerektiğini şöyle ifade etmiştir.

İrem ***:** Doğru öğretmenim bu da. Burada 8 tane 6 verilmiş burada 7 tane verilmiş. Burada 4 var 8 oluyor. Burada 9 tane var 1 kat fazla olduğu için 1 katını azaltırız. İkisi de eşit olur.*

İkinci sorunun son maddesi olan “90 : 24 = 30 : 8” [2f] eşitliğinde ise eşit işaretinin iki tarafında bulunan işlemlerin aynı olduğunu belirtmiş, eşitlikte sadece sayıların büyüdüğünü düşünmüştür. Sayılar arasındaki orana dikkat ederek büyüyen sayıların eşit oranda büyüdüğünü görmüştür. Bu soruda daha da önemli olan işlem özelliklerinin de öğrenci tarafından fark edilmesidir. Öğrenci soruyu çözdükten sonra çarpma işleminde değişme özelliğinin olduğunu ancak bölme işleminde böyle bir özelliğin olmadığını şöyle belirtmiştir.

İrem ***:** Çünkü öğretmenim 90’ı 3’e bölmüş 30’u elde etmiş. 24’ü de 3’e bölmüş 8’i elde etmiş. Yani aynı işlemin küçük sayılardan oluşmuş hali. Sonuç aynı olur bence.*

Öğretmen ***:** Sonuç olarak mı düşünüyorsun?*

İrem **:** *Yok, sonuç olarak değil şöyle sayılar arasına bakınca da şimdi bu bunun 3 katı 24. 30'un 3 katı 90 etti. Yani sadece sayıları büyütüyor. İşlemin sonucu aynı.*

Öğretmen **:** *İşlemin sonucu aynı. Bölme olduğu için mi diyorsun yoksa çarpma da olsa aynısı olur muydu?*

İrem **:** *Çarpma da olmazdı öğretmenim. Çünkü mesela yok çarpmada olur da bölmede olmuyor galiba. Evet. Çarpmada oluyor öğretmenim. Çarpmada çünkü değişme özelliği var.*

Çarpma işleminde değişme özelliğini fark eden İrem aynı zamanda verilen eşitliklerin ortak çarpanlarına odaklanıp açık sayı cümlelerini basitçe çözebilmiştir. "4 x 18 = 9 x □" [3e] eşitliğini şu şekilde açıklamıştır.

İrem **:** *Öğretmenim şimdi 18'i 2'ye bölmüş 9 elde etmiş. Şimdi burası yani 2'ye bölünmüş. O yüzden burası daha az oluyor. O yüzden 4'le de 2'yi çarptım 8 buldum.*

Öğretmen **:** *Hım anladım 18 2'ye bölünmüş 9 diyorsun. Burada 2 kat az.*

İrem **:** *Evet, 2 kat az oluyor burada o yüzden 4'le de 2'yi çarptım 8.*

Üçüncü ve dördüncü soruların soru maddeleri toplama işlemi içeren açık sayı cümleleri şeklindedir. İrem'in bu soruları çok rahat çözdüğü saptanmıştır. Öyle ki; öğrenci soruyu çözdükten sonra öğretmen sormadan sorunun çözümünü kısaca anlatmış ve diğer soruların çözümüne geçmiştir. Toplama işleminde de sayılar arasında ilişkileri kurarken eşitliğin öğrenciye vermiş olduğu denge hissini kullanmak istemiştir. Eğer eşitliğin bir tarafında fazlalık varsa dengenin bozulduğunu görmüş ve eşitliğin diğer tarafına da ekleme yapmıştır.

Beşinci sorunun soru maddeleri ise çıkarma işlemine ait açık sayı cümleleridir. Çıkarama işleminde de yine zorlanmamış ve farka odaklanmıştır. Çıkarma işleminde eksilen ile çıkan arasındaki ilişkiye dikkat ettiği görülmüştür. "514 – 236 = 512 – 232 – □" [5c] için kutu yerine gelecek olan sayıyı söyleyebilmiş ve neden iki kez çıkarma işlemi yapıldığını açıklayabilmiştir.

İrem *:Evet. Burası 2 olacak. 514, 512'de 2 azalmış. Yani çıkan da aynı azalır diye buradan da 2 azaltınca 234 çıkartması gerekiyor ama 232 çıkartmış, 2'yi de sonradan çıkartırız.*

İrem yukarıda da görüldüğü gibi işlemleri rahat çözebilmenin yanı sıra açıklamaları da diğer öğrencilerden farklıdır. Çözüm aşamasında daha anlaşılır bir dil kullanmanın yanı sıra öğrenci soruları çözerken ilişkisel düşünmeyi kullandığına karşısındakini ikna edebilmektedir. 30 : 10 = (20 : 10) + (10 : ☐) [6d] eşitliğinde öğrenciler kutu yerine gelecek olan sayıyı ön görüşmede yanıtlarken zorlanmışlardır. Son görüşmelerde ise öğrencilerin bu soruyu doğru yanıtlayabildiği gözükmektedir. Ancak sorunun çözümüne ilişkin açıklamayı diğer öğrencilerden farklı olarak İrem şu şekilde yapmıştır.

İrem ***:*** *Öğretmenim şimdi 30'u 10'a bölmüş burada da 20'yi 10'a bölmüş. Şimdi mesela burada işlemi uzattığımızda tek tek 10'ları 10'a bölüp yapabiliriz. 3 tane 10. 2, 10'unu buraya vermiş. 1, 10'unu da buraya vermiş.*

Sekizinci soru İrem 'in sayılar arası ilişkinin kullanımına ait temaya uygun çözmüş olduğu son sorulardır. Bu sorunun maddeleri genel olarak çarpma, toplama ve çıkarma işlemini içeren açık sayı cümleleri şeklindedir. Bu sorunun ilk maddesinde "3 x (7 + 5) = (3 x ☐) + (3 x 5)" [8a] kutu yerine gelebilecek olan sayıyı söylemenin yanında çarpma işleminin toplama işlemi üzerindeki dağılma özelliğini söyleyebilmiştir.

İrem ***:*** *Öğretmenim 7 olabilir burası.*

Öğretmen ***:*** *Neden?*

İrem ***:*** *Öğretmenim şimdi burada tek tek 3'le 5'i çarpmış. Diyelim ki 3'le de 7'yi çarpar öyle olur. Yani ayrılma, dağılma gibi. Tek tek bunlarla çarpacağına parantez içine yazıp ikisini toplayıp çarpım yapmış. Hâlbuki tek tek çarpma yapsa da olur.*

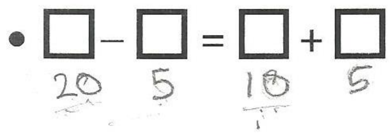
Sekizinci sorunun ikinci soru maddesi olan "4 x (9 – 5) = (4 x ☐) – (Δ x 5)" [8b] eşitliğinde de çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğini görebilmiş ve dağılma işlemini verilen bir işlemin daha uzun yoldan yapma olarak ifade etmiştir.

İrem	***:*** *Evet. Öğretmenim şimdi burada daha bir önceki soruda ki gibi mantık kurdum. Öğretmenim 4'le 9'u çarparız sonra 4'le de 5'i çarpar sonra birbirinden çıkartırız. Yani böyle yapacağına öyle yapmış olur.*
Öğretmen	***:*** *9'la 5'i çıkarmaktansa diyorsun.*
İrem	***:*** *Evet. Öyle yapardı yani dağılıyor işte. Daha uzun hali oluyor.*

Sekizinci sorunun son maddesi olan "☐ x (5 + 6) = (☐ x 5) + (☐ x 6)" [8c] açık sayı cümlesinde ön görüşmeler sonunda tüm öğrencilerin zorlandığı görülmüştür. Son görüşmede İrem bu soruyu rahatlıkla çözebilmiş ve şu şekilde ifade etmiştir.

İrem	***:*** *Öğretmenim istediğimiz sayıyı yazıyoruz buraya. Her sayı oluyor buraya.*
Öğretmen	***:*** *Her sayı oluyor mu?*
İrem	***:*** *Evet öğretmenim.*
Öğretmen	***:*** *Nasıl düşündün?*
İrem	***:*** *Öğretmenim çünkü mesela diyelim buraya 2 gelse 2 ile 5'i çarparız. Sonra da 2 ile 6'yi çarparız. Sonra 3 gelse de aynı yaparız hep birbirine eşit olur.*

İlişkisel düşünme odaklı işlem sürecinin son teması açık sayı cümleleri içeren eşitlikleri kurabilme üzerinedir. Dokuzuncu sorunun tüm soruları bu temaya uygundur. Bu sorunun ilk iki soru maddesi "☐ + ☐ = ☐ +☐" [8a] ve "☐ –☐ = ☐ –☐" [8b] şeklindedir. Öğrenci iki soruyu da doğru yanıtlayabilmiştir. Üçüncü soru maddesi "☐ + ☐ = ☐ – ☐" [8c] şeklindedir. Bu soru maddesi öğrencide ilişkisel düşünmenin artık ne derece geliştiği ile ilgili bize fikir verebilmektedir. İlişkisel düşünme ile ilgili sorulan sorular arasında en zor soru olmakla birlikte öğrencinin ilişkisel düşünme ile ilgili muhakeme yeteneğinin üst düzeyde olduğunu gösterebilmektedir. Bu soruda İrem ilk kutuya 20 yazmış ve bu sayıyı ikiye parçalamıştır. Böylece eşitliğin her iki tarafında 10 ve 10 bırakmak istemiştir. Daha sonra parçaladığı 10 sayısında 5 çıkartıp sol tarafa 5 ekleyerek sağ tarafa yazmıştır.



Öğretmen : *Peki. İşlem mi yapıyorsun*

İrem : *Yok, öğretmenim bağlantı kurmaya çalışıyorum.*

Öğretmen : *Nasıl bir bağlantıymış o?*

İrem : *Üstteki gibi mesela 10 eksildi. 10 oldu. Mesela 5'te 5 eksildi yok 10 eksilmiyor bağlantı kurmaya çalışıyorum.*

Öğretmen : *Anladım.*

İrem : *Öğretmenim aslında oluyor şöyle sanki. Çünkü burası 10 eksilmiş. 20. 10 eksilmiş 10 olmuş. Zaten 10 eksiği burada yani 10 fazlasından 5 çıkarmış burada 10 fazlasına 5 eklesek de aynı sonuç olur.*

Öğretmen : *Onla onun neden aynı olduğunu düşündün?*

İrem : *Öğretmenim burada 2 10'luk var. Burada da 1 10'luk var. Şimdi buraya 5 eklesek yine aynı yere gelir. Ama işte 2 10'luktan 5 çıkarsak da yine aynı.*

Öğretmen : *2 10'luktan 5 çıkartıyorsun. Diğerinde…*

İrem : *1 10'luğa 5 ekliyorum.*

Öğretmen : *Aynı sonuç yani.*

İrem : *Evet. Çünkü burada zaten 5 çıkarmak için 20'nin bir 10'luğu bozuyorum*

İrem ile görüşme soruları bittiğinde en çok hangi sorularda zorlandığı sorulmuştur. Öğrenci zorlandığı bir sorunun olmadığını çarpma işleminin dağılma özelliğini sevdiğini ve rahat yaptığını belirtti. Ayrıca ilişkisel düşünmenin en zor sorusu olarak niteleyebileceğimiz son sorunun ise en kolay soru olduğunu şöyle belirtti.

İrem : *Öğretmenim en kolay bunlardı zaten bence de bu var birde şu çok kolay*

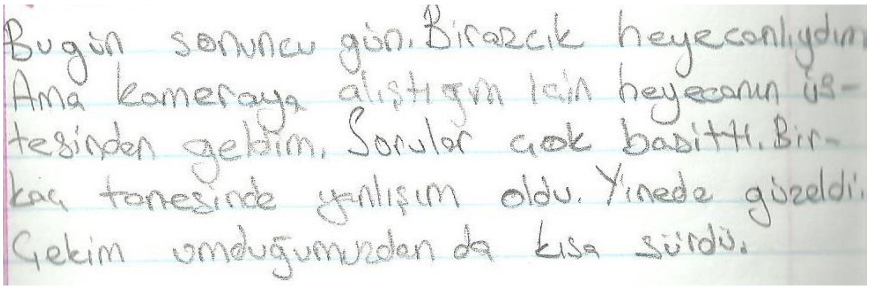
Öğretmen : *Bu dediğin? Dağılma özelliği mi?*

İrem : *Evet. Onlar kolay geliyor bana.*

Öğretmen : *Ama ilk başta zorlandın biraz sanki.*

İrem : *Evet. Şimdi bayağı kolay geliyor. Çok zorlandığım olmadı aslında ama.*

İrem son görüşmedeki soruların kolay olduğunu ve hızlı bir şekilde yapabildiğini günlüğünde de yazmıştır.


Bugün sonuncu gün. Birazcık heyecanlıydım
Ama kameraya alıştığım için heyecanın üs-
tesinden geldim. Sorular çok basitti. Bir-
kaç tanesinde yanlışım oldu. Yinede güzeldi.
Çekim umduğumuzdan da kısa sürdü.

İrem ile yapılan görüşmelerden sonra öğrencinin artık tamamen ilişkisel düşünme yeteneğine sahip olduğu söylenilebilir. Öğrenci görüşme sonrasında “Artık sürekli işlem yapmıyorum. Sürekli sayılarla ilgili ilişki arıyorum ve bu çok hoşuma gidiyor.” şeklinde duygularını ifade etmiştir.

Verilen 6 derslik eğitimin ardından öğrencilerin işlemlerle ilgili kendine güvenlerinin geldiği gözlemlenmiştir. Son görüşmeler sırasında öğretmen tarafından sunulan soruların çoğunda öğrencilerin, verilen ifadelerin neden doğru olduğunu sormaya gerek kalmadan açıklayabildikleri tespit edilmiştir. Verilen eğitimle birlikte ilişkisel düşünme yeteneklerin gelişmesinin yanı sıra aynı zamanda soruları çözmede ki hızlarında da artış olduğu gözlemlenmiştir. Verilen sorulardaki eşit işaretinin anlamını bile artık daha fazla düşünür olmuşlar, her farklı ifadede farklı anlamlar çıkarmışlardır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu bölümde araştırmadan elde edilen bulgular ışığında çalışmanın ilgili araştırmalar ile tartışılmasına ve çıkan sonuçlar bağlamında uygulamaya ve yapılacak araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

4.1. Sonuç

Ortaokul 5. sınıf öğrencilerinin ilişkisel düşünmelerinin gelişimine ilişkin sonuçlar; öğrencilerin eşit işaretini anlama ve yorumlamaları, işlem özelliklerinin yapılandırılması ve ilişkisel düşünme becerilerinin gelişimi başlıkları altında ele alınmıştır.

4.1.1. Eşit Kavramına Ait Öğrencilerin Kullandıkları İfade Biçimlerine İlişkin Sonuçlar

- Öğrencilerin ön görüşmelerde eşitlik kavramına ilişkin "*aynı*", "*eş değer*", "*sonuç bulma*" gibi tanımlamalar kullandıkları, öğretimlerden sonraki son görüşmelerde ise eşitliği daha çok "*denge kurma*" olarak gördükleri belirlenmiştir.
- Eşit işaretinin öğrenciler tarafından işlemsel bir sembol olarak görülmesinden dolayı bu işaretin öğrencilere bir yön çağrıştırdığı saptanmıştır. Somut materyal kullanımın bir sonucu olarak öğrencilerin eşit kavramını sadece sayılarla değil ifadelerle ve şekillerle de açıklayabildikleri görülmüştür.
- Eşit işaretinin *denge noktası* olarak kullanılmasının öğrencilerin verilen bir işlemde bilinmeyeni bulmasını kolaylaştırdığı tespit edilmiştir.

4.1.2. İlişkisel Düşünme Becerileri Kapsamında Kullanılan İşlem Özelliklerine İlişkin Sonuçlar

- Yapılan etkinlikler sonucunda öğrencilerin işlem özelliklerini isimlendirmede "*yer değiştirme özelliği*" "*değişim özelliği*", "*bütünleşme özelliği*", "*birleşim özelliği*" , "*dağıtım özelliği*", "*dağıtma özelliği*", "*ayrıştırma özelliği*" gibi ifadeler kullandıkları belirlenmiştir.

- Ön görüşmelerde öğrencilerin tamamının değişme özelliğini fark ettikleri, diğer özellikleri ise fark edemedikleri özellikle dağılma özelliği ile ilgili soruların çözümünde öğrencilerin tamamının zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğretim sürecinin ardından gerçekleştirilen son görüşmelerde tüm öğrencilerin özelliklerin tamamını fark edebildikleri ve bu özellikleri kullanarak soruları çözebildikleri görülmüştür.
- Öğrencilerin işlem özelliklerini kavramalarında öncelikle doğru/yanlış türündeki sayı cümlelerinin ard arda verilmesinin etkili olduğu görülmüştür. Ardından açık sayı cümleleri verildiğinde ise öğrencilerin istenen sayıları bulurken zorlanmadıkları tespit edilmiştir.

4.1.3. Öğrencilerin İlişkisel Düşünme Becerilerinin Gelişimine İlişkin Sonuçlar

- Ön görüşmelerde tüm öğrencilerin toplama ve çıkarma işlemi ile ilgili açık sayı cümlelerini doğru çözebildikleri ancak sonuç bulma odaklı bir düşünce içerisinde oldukları bir çözüm yoluna yöneldikleri görülmüştür. Öğretim sürecinin sonunda gerçekleştirilen son görüşmelerde öğrencilerin toplama işlemi ile ilgili örneklerde ilişkisel düşünme becerilerini kullanabildikleri ve verilen görevleri ilişkisel düşünerek daha hızlı çözebildikleri tespit edilmiştir.
- Son görüşmelerde öğrencilerin tamamının çıkarma işleminde farka odaklandıkları ve eksilen, çıkan ve fark arasındaki ilişkiyi kavradıkları saptanmıştır. Toplama ve çıkarma işleminin bir arada verildiği açık sayı cümlelerinde öğrenciler eşit kavramını denge olarak ele aldığı ve eşitlikte dengenin bozulduğu durumlarda ekleme-eksiltme yaptıkları görülmüştür.
- Son görüşmelerde öğrencilerin çoğunun çarpma işleminde eşitliğin her iki tarafında yer alan çarpma işlemlerinin sonucunu yani çarpımı hesaplayarak bu çarpımları karşılaştırdıkları görülmüştür. Öğretimlerin ardından ise öğrencilerin her iki taraftaki çarpanlar arasındaki orana odaklanarak bu oranları karşılaştırdıkları görülmüştür.
- Son görüşmelerde öğrencilerin bölme işleminde eşitliğin her iki tarafında bulunan bölünen ve bölenleri karşılaştırdıkları ve bölünenler arasındaki çarpımsal ilişki (oran) ile bölenler arasındaki çarpımsal ilişkinin aynı olmasına dikkat ettikleri tespit

edilmiştir. Ön görüşmelerde öğrencilerin tamamının bölme işleminde zorlandıkları, eşitliğin her bir tarafındaki bölümleri hesaplayarak karşılaştırdıkları ve öğrencilerin çoğunun hatalı yanıt verdikleri görülmüştür. Öğretimlerin ardından son görüşmelerde ise öğrencilerin tamamı bölümü hesaplama yoluna gitmeden bölünenler ve bölenler arasındaki oranları karşılaştırdıkları ve eşitlikteki sayıların hangi oranda artıp azaldığına dikkat ederek çözebildikleri tespit edilmiştir.

- Son görüşmelerde çarpma ve bölme işlemlerinin birlikte yer aldığı soruların çözümünde ise eşitlikte yer alan sayıların ortak çarpanlarına odaklanarak ve işlem özelliklerini kullanarak soruların çözüldüğü saptanmıştır.
- Dört işlemle ilgili yukarıdaki sonuçların birlikte ele alınmasıyla öğrencilerin dört işleme ilişkin toplanan, toplam, eksilen, çıkan, fark, çarpan, çarpım, bölünen, bölen ve bölüm kavramlarını geliştirdikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri formal olarak ifade edemeseler bile etkin bir biçimde kullandıkları görülmüştür. Buradan ilişkisel düşünmenin gelişimi ile bu kavramların gelişimi arasında karşılıklı bir etkileşim olduğu görülmüştür.
- Öğretim sürecinde sınıf içi tartışma ortamının yaratılması öğrencilerin fikirlerini açıkça ortaya koymalarını ve birbirlerinden öğrenmelerini sağlamıştır. Bu tartışmalarla işlem özelliklerini isimlendirdikleri, soruların çözümüne ilişkin her birinin farklı bir çözüm getirdiği görülmüştür. Açık sayı cümlelerinde bazı öğrencilerin verilen kutuyu kapatarak dengenin kaydığı noktayı bulması, bazı öğrencilerin sayılar arasında oluşan artış ve azalışları ellerini terazinin kefeleri biçiminde kullanarak ifade etmesi gibi durumlar bu sonuca örnek olarak gösterilebilir.

4.2. Tartışma

Ortaokul 5. sınıf öğrencileri ile yapılan bu çalışma kapsamında öncelikle öğrencilerin eşit işareti hakkındaki görüşleri alınmış, eşit işaretinin anlamı üzerinden öğrencilerin eşitlik kavramı ile ilgili bilgileri incelenmiştir. Gerçekleştirilen ön görüşmelerde öğrencilerin eşitlik kavramını sayısal olarak birbirine eşit olma durumu olarak gördüğü belirlenmiştir. Oysaki eşitlik ve eşitlik kavramının anlamı bundan daha fazlasıdır. Eşitlik sadece iki sayının ya da nesnenin eşit olma ya da aynı olma durumu değil aynı zamanda açıklamaların ve ifadelerin de aynı olmasıdır. Türk Dil Kurumu eşitliği, iki ya da daha çok şeyin eşit olması durumu, denklik, müsavat, muadelet olarak tanımlamaktadır.

İlkokulda öğrencilere yöneltilen anneni mi yoksa babanı mı daha çok seviyorsun şeklindeki sorularda öğrenciler genellikle “eşit” kelimesini kullanırlar. Buradan da anlaşılacağı üzere öğrenci eşitlik kavramını “fark olmama” ya da “aynı olma” olarak görmektedir. Yaman’ a (2004) göre buradaki eşit kavramı birini diğerinden fazla ya da eksik sevmediğini ifade etmek için kullanılmakta olup matematiksel anlamda kullandığımız biçimiyle örtüşmektedir.

4.1.1. Öğrencilerin Eşit ve Eşit İşaretinin Anlamlarını Yorumlamaları

NCTM (2000) ilkokul çağındaki öğrencilerin eşitlik kavramının gelişiminin desteklenmesi gerektiğini belirterek eşit işaretinin işlemsel bir sembolden çok, farklı anlamlarının da kazandırılması gerektiğini savunmuş ve önermiştir. Öğrenciler okula başladıkları ilk yıllarda eşit işaretini sonuç bulmak için kullanılan bir sembol olarak görebilirler. Bu durum öğrencilerde ileriki yıllar için kavram yanılgılarının ortaya çıkmasına neden olur. Behr ve diğerlerinin (1980) yapmış oldukları çalışmada 2+5=7 eşitliğinde öğrencilerin cümleyi “İki artı beş yedidir” şeklinde okuduklarını tespit etmişlerdir. Öğrencilerin eşit işaretini bir sonuç bulma sembolü olarak gördükleri söylenebilir. Amerika Birleşik Devletleri genelinde yapılan bir testte 9 yaşındaki çocukların sadece %15’inin “□ - 19 = 32” eşitliği için kutu yerine gelebilecek olan sayıyı doğru olarak belirleyebildiği belirlenmiştir (Akt. Yaman, s 13, 2004; Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist ve Reys, 1981). Benzer biçimde Kieran (1981) verilen bir eşitliğin sağ tarafında işlem verilerek sol tarafında bir sonuç bulması istenildiğinde öğrencilerin zorlandığını belirtmiştir. Bu yüzden öğrencilerin ilkokul yıllarında eşitliği daha çok soldan sağa doğru bir işlem yaparak sonuç bulma olarak gördüklerini söylenebilir (Behr, Erlwanger ve Nichols, 1980; Carpenter ve Levi, 2000; Carpenter, Levi ve Farnsworth, 2000; Falkner vd., 1999; Yaman vd., 2003; Yaman, 2004,).

Ön görüşme bulgularına bakıldığında öğrencilerin eşit işaretini ifade edilen araştırma sonuçlarına benzer şekilde bir sonuç bulma ifadesi olarak gördükleri söylenebilir.

Öğrencilerden farklı yanıtlar istendiğinde ise "7=7" gibi aynı niceliklerin eşitliği örneğini vermişlerdir. Son görüşmelerde ise öğrencilerin tamamının eşitlik kavramının farklı anlamlarını söyleyebildiği görülmüştür. Öğrenciler genellikle eşitliği "tahterevalli" ye benzetmiş ve bir denge kurma mekanizması olarak tanımlamışlardır. Öğrencilerin çoğu eşitliği, verilen cümlelerin aynı olması biçiminde gördüklerini söylemişler, bazı öğrenciler ise eşitliği tanımlarken paraların eşitliğinden yararlanmışlardır. Burada öğrenciler her iki taraftaki paraların adetlerinin aynı olmasa bile miktarlarının (para değerlerinin) eşit olduğunu söylemiş ve eşitliği kesir biçiminde verilen ifadelerin genişletilmiş ve sadeleşmiş halleri olarak gördüklerini, ayrıca eşit işaretinin sadece sayılar ile değil şekiller ya da ifadeler ile kullanılabileceğini belirttikleri saptanmıştır. Böylece son görüşmeler sonucunda öğrencilerin eşit işaretini bir sembolden çok; sayılar, şekiller ve ifadeler arasındaki ilişki kurma mekanizması biçiminde tanımladıkları söylenebilir. Benzer şekilde Yaman (2004) da eşit işaretinin gelişiminin cebir tarihi ile tutarlı olarak işlemsel anlamdan ilişkisel anlama doğru biçimlendiğini ifade eder. Tarihsel olarak ilk aşamada eşit işareti yerine kelimeler kullanılmış ve bu kelimeler sadece bir hesabın sonucunu belirtmek için kullanılmıştır. İkinci aşamada ise yine kelimeler kullanılmış ancak bu aşamada bir hesabın sonucunu belirtirken başka, ilişkisel anlam için başka kelimeler kullanılmıştır. Son aşamada ise sembollerin kullanımına geçilmiş ve eşit işaretinin bir hesabın sonucunu vermesinin yanında ilişkisel bir sembol olduğu matematiksel toplum tarafından kabul edilmiştir. Bu eğilim, çocukların eşit işaretini önce işlemsel bir sembol olarak, daha sonra ise ilişkisel bir sembol olarak görmesi ile tutarlı görülmektedir.

4.1.2. İlişkisel Düşünmenin İşlem ve İşlem Özellikleri Üzerindeki Önemi

Aritmetikten cebire geçişte öğrencilerin zorlanmalarının temel nedenlerinden biri öğrencilerin eşit işaretini bir ilişki sembolü olarak görememelerinden kaynaklanmaktadır. Öğrenciler hesaplama yapma olarak gördükleri işaretin farklı anlamları ile karşılaştıklarında zorlanabilmekte ve açıklama yapmakta sıkılmaktadırlar. Köse ve Tanışlı (2011) ilişkisel düşünmenin amaçlarından birinin de öğrencilerin yapmaları gereken hesaplamaları azaltmak olduğunu belirtirler. İlişkisel düşünme aritmetik işlemlerin, işlemler ve işlem özellikleri dikkate alınarak dönüştürülmesi olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla ilişkisel düşünmenin odağında toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi aritmetik işlemler bulunmaktadır.

Yapılan bu çalışmada alanyazındaki diğer çalışmalardan farklı olarak, öğrencilerdeki ilişkisel düşünme becerilerinin belirlenmesi, ardından gelişimi ve dört işlem ve işlem özelliklerinin tamamının gelişiminin ilişkisel düşünme üzerindeki etkisi üzerinde durulmuştur. 5. sınıfa yeni başlayan öğrencilerin işlem özelliklerini bilmediklerini göz önüne alındığında bu öğrencilerin özellikleri kavramadaki yatkınlıkları ve gelişim süreçleri son derece önemlidir. Örneğin "8x(5+4)=(8x5)+(8x4)" eşitliği verildiğinde İrem isimli öğrenci cümleyi *"sayıları ayrıştırmışız, dağıtmışız"* şeklinde yorumlamış, özelliğin ne olabileceği sorulduğunda ise "*Dağıtma Özelliği"* olabilir diye yanıtlamıştır. Böylesi bir çıkarım doğrultusunda 6. sınıfta öğrenilen işlem özelliklerinin 5. sınıfta ilişkisel düşünme becerileri kullanılarak öğrencilere kazandırılabileceği söylenebilir.

Özellikle alanyazında çıkarma ve bölme işlemi ile ilgili örneklere az rastlanılmakta ve bu işlemlerde ilişkisel düşünme becerilerinin ne olduğu ile ilgili araştırmalara gereksinim duyulmaktadır. Örneğin Kieran (2007) öğrencilerin toplama işleminde ilişkisel düşünebilseler bile çıkarma işleminde zorlandıklarını belirtir. Bu doğrultuda verilen eğitimlerde öncelikle öğrencilerin toplama ve çarpma işlemleri üzerinde çalışmaları sağlanmış ardından çıkarma ve bölme işlemleri geçilmiştir. Toplama işleminde öğrencilerin ilişkilendirmeleri kolay kavradıkları gözlenirken çıkarma işleminde farklı etkinlikler yapılması gerekmiş, birden fazla etkinlik tasarlanmış ve uygulanmıştır.

Çarpma işlemi öğrencilere hacim kavramından yola çıkılarak sunulmuştur, somut materyallerden yararlanılmıştır. Bu doğrultuda öğrencilere dikdörtgenler prizması verilmiş ve içlerine konuşan birim küplerin kaç adet olduğu buldurmak istenmiştir. Öğrenciler vermiş olduğu yanıtlara bakarak çarpma işleminde işlem özelliklerinin olduğunu kolaylıkla fark etmiştir. Çarpma işleminin öğretiminden sonra geçilen bölme işleminde ise Semih dersin başında bu işleme ait hiçbir işlem özelliğinin olmadığını, çünkü çarpma işlemine ait özellikleri bölme işleminde denediğinde eşitliğin bozulduğunu söylemiştir. Çarpma işleminde öğrencilerin ortak çarpanlara odaklanmayı fark etmeleri bölme işlemini kavramalarını da kolaylaştırmıştır. Böylelikle ön görüşmelerde bölme işleminde zorlanan öğrencilerin son görüşmelerde sayılar arasında orana ve ortak çarpanlara odaklanarak bu tür sorularda zorlanmadıkları görülmüştür.

4.1.3. Öğrencilerdeki İlişkisel Düşünme Becerilerinin Gelişimi

Ön görüşme sonuçları incelendiğinde öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerine sahip olmadıkları ya da çok az sahip oldukları söylenebilir. Bu nedenle öğrencilerin gerçekleştirilen öğretim süreci ile gelişimleri önemlidir. Ön görüşmeler sonunda öğrencilerden ilişkisel düşünme becerilerine en yatkın olanının Semih olduğu tespit edilmiştir. Semih ve İrem'in gelişimleri diğer öğrencilerden farklılık göstermiştir. Bu öğrenciler verilen tüm soruları ilişkisel düşünme yöntemi ile çözmüş, sayılar ve eşitlikler arasında daima ilişki aramışlar ve bulmakta zorlanmamışlardır. Hatta İrem ile yapılan son görüşmeden sonra "Artık fazla işlem yapmıyorum. Bir de sayılar arasında ilişki aramak çok hoşuma gidiyor. Yazılılarda çok işime yaradı" şeklinde açıklama getirmiştir.

Hakkı ve Tülay, İrem ve Semih'ten sonra ilişkisel düşünmeye yatkın olan öğrencilerdendir. Tülay öğretimlerin başlarında işlem yapmanın daha kolay olduğunu savunmuş ve genellikle işlem yapmak istemiştir. Ancak ileriki derslerde o da işlem yapmak istememiş ve ilişki kurmanın daha basit olduğunu ve kendisini rahatlattığını söylemiştir. Hakkı ise öğretimlerin başından sonuna kadar farklı ilişkiler bulmak istemiş ve ilişkisel düşünmeye sahip olduğu için diğer öğrencilerden *artık* farklı olduğunu savunmuştur.

Ozan ve Gaye isimli öğrenciler genellikle sonuç odaklı işlem düşünme isteğinde olan öğrencilerdendir. Öğrencilerin yazmış oldukları günlükler incelendiğinde en çok sevinen ve kendisinin en çok geliştiğini düşünen öğrencinin Gaye olduğunu söylenebilir. Bu durum aynı zamanda öğrencinin kendine güvenmesini sağlamıştır.

Öğrencilerin ilişkisel düşünme becerilerini ortaya koyarken genellikle sınıf içi tartışmalara yer verilmiştir. İlişkisel düşünmenin gelişiminde sınıf içi tartışmaların yeri büyüktür (Behr vd., 1980; Carpenter ve Levi, 2000; Carpenter vd., 2000; Falkner, vd., 1999; Köse ve Tanışlı, 2011; Kızıltoprak ve Köse, 2013) Ön görüşme ve son görüşmelerle birlikte sınıf içi tartışmalarda en aktif ve açıklayıcı olan öğrencilerden biri Ozan olmuştur. Ozan son görüşmelerden hemen hemen tüm soruları ilişkisel düşünme yollarını kullanarak doğru yanıtlamıştır. Ozan'ın ilişkisel düşünme odaklı işlem sürecine ilişkin yanıtladığı sorulardan biri de 9. sorunun a "□ + □ = □ + □ " ve b " □ – □ = □ – □ " şıklarında verilen açık sayı cümleleridir. Bu soru ilişkisel düşünmenin en üst seviyesinde gösterilebilir. Bunun nedeni ise daha öncede belirtildiği gibi sayıların öğrenci tarafından yerleştirilmesi istendiğinde işlem yapmaktan daha çok muhakeme yeteneğine dayalı bir zihinsel süreci gerektirmesidir.

Bulgular kısmında değinilmiş olan ön görüşme ve son görüşme sonucunda öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlara bakarak bazı yanıtların farklı ve özel oldukları görülmektedir. Bunlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 7: Öğrencilerin Ön Görüşmelerde ve Son Görüşmelerde Verdikleri Özel Yanıtlar

ÖĞRENCİLER	1	2a	2b	2c	2d	2e	2f	3a	3b	3c	3d	3e	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	6e	6f	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
Okan			X					x																							X		
Gamze	X	X														X																	
Hamza				X	X																								X				
Türkan	X	X																														X	
Salih	X		X											X									X										
İzel						X				X						X				X						X							

ÖĞRENCİLER	1	2a	2b	2c	2d	2e	2f	3a	3b	3c	3d	3e	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	6e	6f	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c
Okan	X		X			X		X	X							X			X												X	X	
Gamze	X	X	X						X		X					X															X	X	
Hamza	X			X	X		X										X											X	X	X	X	X	
Türkan	X	X										X					X					X						X					
Salih	X		X		X									X									X						X	X	X	X	X
İzel				X		X				X						X		X		X						X		X	X	X	X	X	X

4.3.Öneriler

4.3.1. Uygulamaya Yönelik Öneriler

Araştırma sürecinde elde edilen bulgulara dayalı olarak şu önerilerde bulunulabilir:

- İlköğretimde öğrencilerin aritmetik öğrenimi deneyimlerinde eşit işaretinin çoğunlukla sonuç bulma anlamında kullanıldığı alıştırmaların azaltılarak eşit işaretinin denge ve ilişkisel anlamının vurgulandığı sorulara daha çok yer verilmelidir.
- İşlemlerin temel özelliklerinin öğretimine ilköğretimin daha erken basamaklarında yer verilebilir. Böylelikle hem öğrencilerin aritmetikte daha kolay ve daha hızlı bir biçimde işlem yapabilmeleri hem de ilişkisel düşünme becerilerinin erken basamaklardan itibaren gelişimi sağlanabilir.
- Öğrencilerin dağılma özelliğini kavramada yaşadıkları zorlukları azaltmaya yönelik olarak dağılma özelliğinin öğretimine birleşme özelliği ile ilişki kurularak geçilebilir. Ayrıca işlem özellikleri soyut bir konu olarak sunulmamalı, öğrenciler işlemler ile ilgili tüm deneyimlerinde bu özellikleri kullanmaya yönlendirilmelidirler.
- Öğretmenlerin aritmetik öğretiminde toplanan, toplam, eksilen, çıkan, fark, çarpan, çarpım, bölünen, bölen ve bölüm kavramlarına odaklanmaları öğrencilerin ilişkisel düşünmelerini geliştirebilir.
- İlişkisel düşünmenin geliştirilmesine öncelikle arka arkaya sunulan doğru yanlış cümleleri ile başlanmalı daha sonra açık sayı cümlelerine yer verilmelidir.
- Öğretmenler doğru yanlış ve açık sayı cümlelerini sınıf içi etkin bir tartışma ortamında öğrencilere sunmalıdır. Tüm öğrenciler fikirlerini ve gerekçelerini ifade etmeleri için cesaretlendirilmelidir. Sonuç odaklı yanıtlara değil ilişkisel odaklı yanıtlara odaklanılmalıdır.
- İşlem özelliklerinin öğretiminde ve eşitliğin denge anlamının kazandırılmasında somut materyaller kullanımına yer verilmelidir.

4.3.2. Araştırmaya Yönelik Öneriler

Matematik eğitiminde yapılacak araştırmalara yönelik şu önerilerde bulunulabilir:

- Toplanan, toplam, eksilen, çıkan, fark, çarpan, çarpım, bölünen, bölen ve bölüm kavramlarının gelişimi ile ilişkisel düşünmenin gelişimi arasındaki ilişki araştırılabilir.
- Ortaokul öğrencilerinin işlemsel becerileri ölçen sorularda işlem özelliklerini ne düzeyde kullandıkları araştırılabilir.
- Hem nitel hem de nicel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı ortaokul öğrencilerinin ilişkisel düşünme düzeylerini saptamaya yönelik araştırmalar yapılabilir.

EKLER

1. Milli Eğitim Bakanlığı İzin Yazısı
2. İzin Formları
3. Ön Görüşme Soruları
4. Son Görüşme soruları
5. Ders Planı
6. Materyal Fotoğrafları
7. Öğretim Sürecinden Fotoğraflar

Ek-1: Milli Eğitim Bakanlığı İzin Yazısı

Matematik
Y.Doç.Dr. Nilüfer KÖSE

eskişehir 2013

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

eskişehir 2013
UNESCO SOMUT OLMAYAN KÜLTÜREL MİRAS BAŞKENTİ

Sayı : 42815220/605.01/699270 /44 22/04/2013
Konu: Anket Uygulama Çalışması
İzin Talebi.

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Genel Sekreterlik)

İlgi :a) 05.04.2013 tarih ve 475 - 4036 sayılı yazınız.
b)22.04.2013 tarih ve 688171 sayılı Valilik Onayı.

Üniversiteniz Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Ayhan KIZILTOPRAK'ın, Odunpazarı İlçelerine bağlı Sami Sipahi Ortaokulunda öğrenim gören öğrencilere yönelik anket uygulama çalışması yapabilmesine ait ilgi (b) Valilik Oluru ile müdürlüğümüzce de tasdik edilen anket çalışması'nın bir örneği ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinize arz ederim.

Arif DEDE
İl Milli Eğitim Müdürü

GELEN EVRAK
Kayıt Tarihi : 29.04.2013
Kayıt No.su : 869

-Danışman
-İlgiliye
29.04.2013

EKLER:
1: Valilik Oluru.
2: Anket Çalışması (… sayfa)

Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü
Evrak Kayıt Servisi
K. TARİHİ: 29 Nisan 2013
K. NOSU: 4190

24-04-2013

+ Eğit. Bil. Ens. Md
- Y. İ. Md

Bu belge, 5070 sayılı Elektronik İmza Kanununun 5 inci maddesi gereğince güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır
Evrak teyidi http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 1100-7f1d-3055-8994-c79a kodu ile yapılabilir.

Büyükdere Mh. Atatürk Blv. No:247 ESKİŞEHİR
Elektronik Ağ: http://eskisehir.meb.gov.tr
e-posta : sinavlar26@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: S.ERDİL
Tel : (0 222) 239 72 00
Faks: (0 222) 239 39 32

Ek-2: İzin Formları

GÖRÜŞME ONAY FORMU

Tarih

Merhaba,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğin ilgi ve bana ayırdığın zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve senin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "Ortaokul 5. Sınıf öğrencilerinde ilişkisel düşünmenin gelişimi" adlı yüksek lisans tez çalışması için belirlenen hedef öğrencilerin Matematik dersinde ilişkisel düşünmeye yönelik görüşlerini almaktır.

Araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceğin görüşlerinin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmemizi video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Senin isteğin doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da sana teslim edilecektir.

İznin olmadığı takdirde, ismin bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. İstediğin zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilirsin. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları sana teslim edeceğim.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim sana verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanı rica ediyorum. Araştırmama katıldığın ve bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığın için teşekkür ederim.

Görüşülen Öğrenci

Görüşmeci: Ayhan KIZILTOPRAK

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Fakültesi

Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı

GÖRÜŞME ONAY FORMU

Tarih

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "Ortaokul 5. Sınıf öğrencilerinde ilişkisel düşünmenin gelişimi" adlı yüksek lisans tez çalışması için belirlenen hedef öğrencilerin Matematik dersinde ilişkisel düşünmeye yönelik görüşlerini almaktır.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Öğrencinizin ya da sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, öğrencinizin ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Öğrenci istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Görüşülen Öğrencinin Velisi ______ Görüşmeci: Ayhan KIZILTOPRAK

Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Matematik Öğretmenliği Programı

Ek-3: Ön Görüşme Soruları

Soru1 : "=" işareti verilir

- Bu sembolün adı nedir? Söyleyebilir misin?
- Bu sembol ne anlam ifade ediyor? Bu sembolün başka bir anlamı olabilir mi?

Soru 2: Aşağıda verilen ifadelerin başına doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- $9 + 7 = 7 + 9$
- $6 + 9 = 5 + 11$
- $12 - (9 - 2) = (12 - 9) + 2$
- $(5 \times 4) \times 7 = (7 \times 4) \times 5$
- $8 + (3 \times 8) = (5 \times 8) - 8$
- $42 : 16 = 84 : 32$

Soru 3: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- $\square = 12 - 8$
- $3 + 4 = \square + 5$
- $7 + 16 = \square + 15$
- $68 + 58 = 57 + 69 + \square$
- $3 \times 21 = 7 \times \square$

Soru 4: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- $42 + 54 + \square = 56 + 45$
- $62 + 38 = 60 + \square$
- $92 + \square = 95 + 85$

Soru 5: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 71 – 52 = 72 – ☐
- 75 – 32 = 73 – 28 + ☐
- 627 – 125 = 625 – 121 – ☐

Soru 6: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 5 x 8 = ☐ + ☐ + ☐ + ☐ + ☐
- 4 x 3 = ☐ x 3 + ☐ x 3
- (☐ x 8) + (☐ x 8)+ (☐ x 8) = 9 x 8
- (3 x 4) + ☐ = 3 x 7
- 15 : 5 = (10 : 5) + (5 : ☐)
- ☐ : 2= (4 : 2) + (4 : 2)

Soru 7: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 5 x 9 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 – ☐
- 2 x 9 = (2 x 10) – ☐
- (8 x 9) + ☐ = 8 x 10

Soru 8: Aşağıdaki cümlelerde ☐ ve Δ yerine gelebilecek sayıları yazınız.

- 5 x (8 + 4) = (5 x ☐) + (5 x 4)
- 3 x (10 – 4) = (3 x ☐) – (Δ x 4)
- ☐ x (7+8) = (☐ x7) + (☐ x 8)

Soru 9: Aşağıdaki eşitliklerde boş bırakılan yerlere uygun sayıları yazınız.

- $\square + \square = \square + \square$
- $\square - \square = \square - \square$
- $\square - \square = \square + \square$

Ek-4: Son Görüşme Soruları:

Soru1 : "=" işareti verilir

- Bu sembolün adı nedir? Söyleyebilir misin?
- Bu sembol ne anlam ifade ediyor? Bu sembolün başka bir anlamı olabilir mi?

Soru 2: Aşağıda verilen ifadelerin başına doğru ise "D" yanlış ise "Y" yazınız.

- $9 + 7 = 7 + 9$
- $6 + 9 = 5 + 11$
- $12 - (9 - 2) = (12 - 9) + 2$
- $(5 x 4) x 7 = (7 x 4) x 5$
- $8 + (3 x 8) = (5 x 8) - 8$
- $42 : 16 = 84 : 32$

Soru 3: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- $\square = 12 - 8$
- $3 + 4 = \square + 5$
- $7 + 16 = \square + 15$
- $68 + 58 = 57 + 69 + \square$
- $3 x 21 = 7 x \square$

Soru 4: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- $42 + 54 + \square = 56 + 45$
- $62 + 38 = 60 + \square$
- $92 + \square = 95 + 85$

Soru 5: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 71 – 52 = 72 – □
- 75 – 32 = 73 – 28 + □
- 627 – 125 = 625 – 121 – □

Soru 6: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 5 x 8 = □ + □ + □ + □ + □
- 4 x 3 = □ x 3 + □ x 3
- (□ x 8) + (□ x 8)+ (□ x 8) = 9 x 8
- (3 x 4) + □ = 3 x 7
- 15 : 5 = (10 : 5) + (5 : □)
- □ : 2= (4 : 2) + (4 : 2)

Soru 7: Kutu yerine gelebilecek sayıyı yazınız.

- 5 x 9 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 – □
- 2 x 9 = (2 x 10) – □
- (8 x 9) + □ = 8 x 10

Soru 8: Aşağıdaki cümlelerde □ ve Δ yerine gelebilecek sayıları yazınız.

- 5 x (8 + 4) = (5 x □) + (5 x 4)
- 3 x (10 – 4) = (3 x □) – (Δ x 4)
- □ x (7+8) = (□ x7) + (□ x 8)

Soru 9: Aşağıdaki eşitliklerde boş bırakılan yerlere uygun sayıları yazınız.

- $\square + \square = \square + \square$
- $\square - \square = \square - \square$
- $\square - \square = \square + \square$

Ek-5: Ders Planı

ETKİNLİK PLANI 3

Ders **:** Matematik

Sınıf **:** 5/A

Etkinliğin Süresi **:** 50 dakika

Amaç : Çarpma ve toplama işlemleri üzerindeki ilişkileri fark etme, bu ilişkilerle ilgili soruları çözebilme.

Kazanımlar : Öğrenciler ilişkisel düşünme becerilerini kullanarak çarpma işlemi yapar.

Kullanılan Malzemeler: Birim küpler, oyun paraları, kağıt, kalem, silgi

Uygulama Süreci:

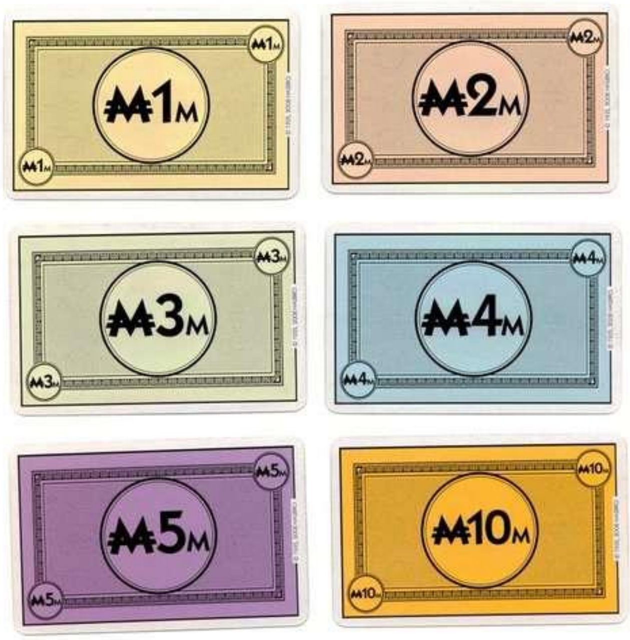
- Öğrencilere 24 adet birim küp verilir ve bu küpleri her grupta 3 tane olacak şekilde gruplara ayırmaları istenir. Yapmış oldukları işlemi sayı cümlesi olarak yazıp yazamayacakları tartışılır. (Bu gruplandırmaları işlem ile göstermek istersek hangi işlemi seçerdiniz? Neden?)
- Bu noktada öğrencilerden 3+3+3+3+3+3+3+3=24 ve 3x8=24 sayı cümlelerini yazmaları beklenir. Daha sonra eşitliklerin sağ tarafındaki ifadelerin de birbirine eşit olduklarını yazmaları beklenir (3+3+3+3+3+3+3+3=3x8).
- Daha sonra oluşturmuş oldukları bu grupları yeniden gruplandırmaları ve sayı cümlesi olarak yazmaları istenir. Örneğin; 8x3=(2x3)+(6x3) vb.
- Öğrencilere bu şekilde yaklaşık olarak altı-yedi adet sayı cümlesi yazmaları için süre verilir.
- Yazma işlemi tamamlandıktan sonra öğrenciler sayı cümleleri üzerine tartışırlar ve yazdıkları eşitlikleri kontrol ederler. Bu aşamada öğrencilerin kendi buldukları üç eşitlik daha yazmaları istenir. Bu eşitlikler de grup olarak tartışılır.

- İkinci bölümde öğrencilere 20 adet 1 TL, 4 adet 5 TL, 2 adet 10 TL ve 1 adet 20 TL ayrı yarı verilir. Bu paralar arasında nasıl bir ilişki olduğu sorulur (aynı cinsten paraların toplamı 20 TL ye eşit).
- Bu eşitliği sayı cümleleriyle yazmaları ve t tablosuyla göstermeleri istenir. Tablodan yararlanarak çarpanlar arasında nasıl bir ilişki olduğunu bulmaları istenir. (Örneğin; 4x5 = 2x10 işleminde birinci çarpan yarıya düşerken ikinci çarpan iki katına çıkmıştır.)
- Öğrencilerden son olarak çarpımları birbirine eşit olan 3 farklı sayı cümlesi yazmaları ve bu sayı cümlelerindeki ilişkileri açıklamaları istenir.
- Dersin sonunda öğretmen genel olarak neler öğrendiklerini ve ne tür ilişkiler bulduklarını yazılı olarak bir iki cümle ile açıklamalarını ister.
- Öğrencilerin günlüklerini çıkarmaları ve bugünkü etkinliğe ilişkin düşüncelerini, duygularını yazmaları istenir (5 dk).

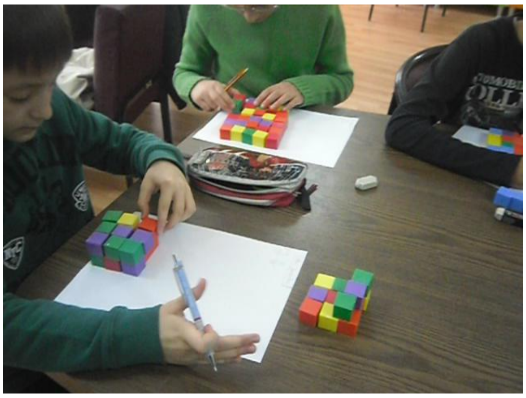
Uygulama Soruları

1. 4 x 6 = ☐ + ☐ + ☐+ ☐+ ☐+ ☐
2. 4 x 6 = ☐+ ☐+ ☐+ ☐
3. 5 x 9 = (2x9) + (☐ x 9)
4. ☐+☐+☐+☐ = 4 x 7
5. 3 x 6 = (3 x 5) + ☐
6. (9 x 4) + ☐ = 10 x 4
7. 10 + 10 + 10 + 10 - ☐= 4 x 8
8. 5 x 9 + 5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10
9. 13 x 10 = (10 x ☐) + Δ

Ek-6: Materyal Fotoğrafları



Ek-7: Öğretim Sürecinden Fotoğraflar



Ek 8: ÖĞRETİM SÜRECİNDEKİ ÖĞRENCİLERİN ÇALIŞMA YAPRAKLARINDAN ÖRNEKLER

$15 + 15 = 30$

$14 + 16 = 30$

$17 + 13 = 30$

1.Grup	2.Grup
28	2
25	5
18	12

1.Grup	2.Grup
15	15
14	16
13	17
11	19

$20 + 10 = 30$

$21 + 9 = 30$

$27 + 3 = 30$

$\boxed{21} + 7 = 20 + 8$

$13 + \boxed{27} = 25 + 15$

$26 + 28 = \boxed{25} + 29$

$\underset{3}{129} + \underset{\cancel{3}}{\boxed{68}} = 65 + 132$

$971 + 108 = \overset{4}{112} + \boxed{967}$

$\underset{3}{571} + \underset{3}{102} + \boxed{267} = 574 + 105 + 261$

Birinci öğretim sonunda Gaye’nin çalışma kağıdı

$30-6=24$

$30-19=11$

$30-14=16$

$30-20=10$

$30-12=18$

$50-25=25$

$50-20=30$

$50-35=15$

$50-48=2$

Çıkan	Fark
25	25
20	30
35	15
48	2

$67-49=\boxed{64}-46$

$92-57=\boxed{91}-56$

$56-\boxed{23}=58-25$

$\boxed{74}-37=75-38$

$92-57=94-56-\boxed{3}$

$56-23=59-25-\boxed{5}$

3 2

$573-368=571-370+\boxed{4}$

+2 -2

İkinci öğretim sonunda İrem’in çalışma kağıdı

$8 \times 3 = 24$

$6 \times 4 = 24$

$12 \times 2 = 24$

$1000 \times 1 =$

$1500 \times 2 =$

$850 \times 4 =$

Adet	Para
1	20
2	10
4	5
20	1

Meyve	Meyve suyu
1	30
2	15
3	10
5	6

$4 \times 6 = \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4}$

$4 \times 6 = \boxed{6} + \boxed{6} + \boxed{6} + \boxed{6}$

$5 \times 9 = (2 \times 9) + (\boxed{3} \times 9)$

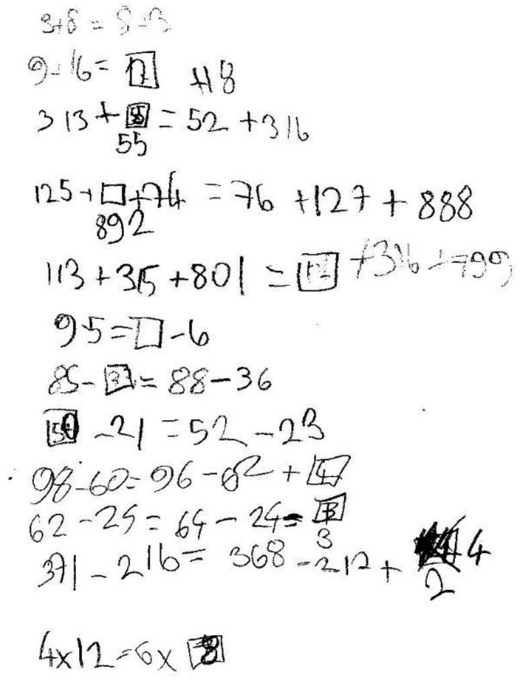
$\boxed{7} + \boxed{7} + \boxed{7} + \boxed{7} = 4 \times 7$

$3 \times 6 = (3 \times 5) + \boxed{3}$

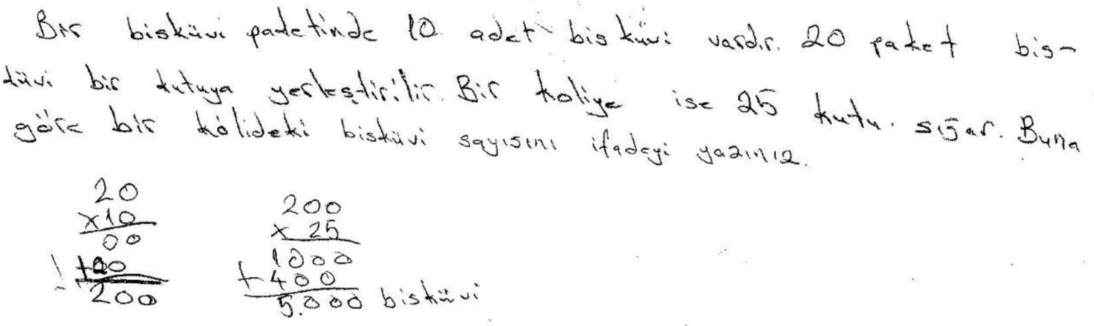
$(9 \times 4) + \boxed{4} = 10 \times 4$

$10 + 10 + 10 + 10 - \boxed{8} = 4 \times 8$

Üçüncü öğretim sonunda Tülay’ın çalışma kağıdı


3+8 = 8+3
9+16 = 12 + 8
313 + 55 = 52 + 316
125 + □ + 76 = 76 + 127 + 888
892
113 + 35 + 801 = □ + 316 + 499
95 = □ - 6
85 - 33 = 88 - 36
50 - 21 = 52 - 23
98 - 60 = 96 - 62 + 4
62 - 25 = 64 - 24 - 3
371 - 216 = 368 - 212 + 2
4x12 = 6x 8

Dördüncü öğretim sonunda Semih’in çalışma kağıdı


Bir bisküvi paketinde 10 adet bisküvi vardır. 20 paket bisküvi bir kutuya yerleştirilir. Bir koliye ise 25 kutu sığar. Buna göre bir kolideki bisküvi sayısını ifadeyi yazınız.

20 × 10 = 00 + 20 = 200

200 × 25 = 1000 + 400 = 5.000 bisküvi

Beşinci öğretim sonunda Hakkı’nın çalışma kağıdı

$5+15=15+5$

$9-7=7-9$

$30\div 6=6\div 30$

$20+(30+40)=(20+30)+40$

$6\times(9\times 5)=(6\times 9)\times 5$

$(14-5)-3=14-(5-3)$

$(18\div 6)\div 3=18\div(6\div 3)$

Öteleme dağılma ayrılma

$13+7=12+8$

$126+45=130+41$ (D)

$8-6=14-12$ (D)

$125-43=129-47$ (D)

$214-56=213-55$ (D)

$125-48=126-47$ (Y)

$14-(7-5)=(14-7)+5$ (D)

$16\div(8\div 4)=(16\div 8)\times 4$ (Y)

$20\div(5\div 5)=(20\div 5)\times 5$ (D)

$12-(6-3)=(12-6)+3$

İlişkisel düşünme

Altıncı öğretim sonunda Ozan’ın çalışma kağıdı

KAYNAKÇA

Altun, M., Aydın, N., Akkaya, R., & Uzel, D. (2012) *PISA perspektifinden ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarı düzeyinin tahlili*. 11 Mayıs 2014 http://doktora2012.files.wordpress.com/2012/10/zpisa-kuyeb.doc tarihinde adresinden erişilmiştir.

Baiduri B. (2014). A relational thinking process of elementery school students with high capability. *Journal of Educational and Developmental Psychology; Vol. 4, No. 2.* http://www.ccsenet.org/journal/index.php/jedp/article/viewFile/36226/21118 adresinden alınmıştır.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1975). How children view the equals sign(Report no. PMDC-TR-3). Tallahassee, Fla.:Florida State University, (ERIC Document Reproduction Service No.ED 144 802). Retrieved January 6,2010, from ERIC database.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Blanton, M. L. & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoines and A. Fuglestad (Eds.), *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 135-142. Bergen, Norway: International Group For The Psychology of Mathematics Education.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5),* 412-446.

Blanton, M.L.(2008). *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice.* Portsmouth: Heinemann.

Boulton G. M., Lewis G., Cooper T. J., Atweh B., Pillay H. & Wills L. (2000). Readiness of Algebra. In Nakahara, T. and Koyama, M. (Eds.), *Proceeding of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

Education, 2, 89-105. Hiroshima, Japan: International Group For The Psychology of Mathematics Education.

Cai, J. & Moyer, P. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. In C. E. Greenes (Ed.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 169-179). Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. (Res. Rep. 00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement İn Mathematics and Science.

Carpenter, T. P., Levi, L., & Farnsworth, V. (2000). Building a Foundation for Learning Algebra in the Elementary Grades. *In Brief, 1(2)*, n2. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED449015.pdf adresinden alınmıştır.

Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 1, pp. 155-162). Melbourne, Australia.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter,T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking, *ZDM, 37(1)*, 53-59.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. Kelly, A. E. and Lesh, R. A. (Ed), *Handbook Of Research Design İn Mathematics And Science Education*, 547-589. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboration with teachers.In A. E. Kelly and R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.307-333). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Czarnocha, B. & Maj, B.(2008). A teachıng experıment. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook Of Mathematics Teaching Research* (pp. 387-396). Rzeszów: University of Rzeszów.

Davis, R. B. (1964). *Discovery in mathematics: A text for teachers*. Palo Alto, CA: Addison Wesley.

Dede Y. & Argün Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180-185.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, Grades 6-10.* Portsmouth, NH: Heinemann.

EARGED, (2003). Üçüncü uluslararası matematik ve fen bilgisi çalışması: Ulusal rapor. Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara.

EARGED, (2007). Pısa 2006 uluslararası öğrenci değerlendirme programı ulusal ön rapor, Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara.

EARGED, (2010). Pısa 2009 uluslararası öğrenci değerlendirme programı ulusal ön rapor, Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In Cai J. and Knuth E. (Eds). *In Early Algebraization* (pp. 409-428). Heidelberg Berlin: Springer

Erlwanger, S., & Berlanger, M. (1983). Interpretations of the equal sign among elementary school children. *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* .

Ersoy, Y., & Erbaş, A. K. (2005). Kassel projesi cebir testinde bir grup türk öğrencinin genel başarısı ve öğrenme güçlükleri. *İlköğretim Online,* 4(1), 18-39. http://ilkogretim-online.org.tr/vol4say1/v04s01m3.pdf adresinden alınmıştır.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*, 232-236.

Ginsburg, H.P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics.1(3),* 4-11.

Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through task based interviews. In A. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education.* USA: NCTM.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *Kelly, A. E. and Lesh, R. A. (Eds), Handbook Of Research Design in Mathematics and Science Education* (517-545). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics,27(1),* 59–78.

Hunter, J. (2007). Relational or calculational thinking: students solving open number equivalence problems. In. J. Watson and K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice, 1,* 421-429.

Hunting, R. P. (1997*).* Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16(2*), 145-165.

Kabael, T., & Tanışlı, D. (2010). Cebirsel Düşünme Sürecinde Örüntüden Fonksiyona Öğretim. *İlköğretim Online, 9(1),* 213-228.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kızıltoprak, A., & Köse, N. Y. (2013). Eşit işaretini anlama ve ilişkisel düşünme, *12. Matematik Sempozyumu: Toplumda Matematik (23-25 Mayıs 2013),* ss. 76-77, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Kieran C. (1981) Concepts assocıated wıth the equalıty symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. (1996). The changing face of schoolalgebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, and A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran C. (2004). The Equation / Inequality Connection in Constructing Meaning for Inequality Situations. *Psychology of Mathematics Education, 1*, 143-147.

Kieran,C. (2007). What do students struggle with when first introduced to algebra symbols? *Algebra Research Brief*, retrieved from NCTM: http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=12332

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press. Education,36(5), 412–446.

Kilpatrick, J., & Izsak, A. (2008). A history of algebra in the school curriculum. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook (2008 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 3–18). Reston, VA: NCTM

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable, *ZDM, 37(1),* 68-76.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibabi, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37(4),* 297-312.

Koehler, J.L. (2004). *Learning to think relationally*: *Thinking relationally to learn* (University of Wisconsin-Madison) Retrieved from ProQuest Dissertations and Theses. (AAT 3143187).

Kriegler, S. (2004). JustWhatisAlgebraicThinking? http://mathandteaching.org/uploads/Articles_PDF/articles-01-kriegler.pdf adresinden ulaşılmıştır.

Köse, N., & Tanışlı, D. (2011). İlköğretim matematik ders kitaplarında eşit işareti ve ilişkisel düşünme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 2(5),* 251-277.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: N. Bednarz, C.Kieran, and L.Lee (Eds.), *Approaches To Algebra: Perspectives For Research And Teaching* (pp.87-106). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Matz, M. (1982). Towards a process model for school algebra errors. In D. Sleeman and J. S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25–50). New York: Academic Press.

McNeil, N., & Alibabi, M. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development, 6(2),* 285-306.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. L. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The Books They Read Can't Help, *Cognition and Instruction, 24 (3),* 367-385.

MEB. (1999) *İlköğretimde matematik öğretimi- İlköğretimde etkili öğretme ve öğrenme öğretmen el kitabı.* Ankara: Devlet kitapları Müdürlüğü Basımevi

MEB. (2009) *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı.* Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

MEB. (2013) Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8 sınıflar) öğretim programı, http://ttkb.meb.gov.tr/www/guncellenen-ogretim-programlari-ve-kurul-kararlari/icerik/150 adresinden alınmıştır.

Miles M. ve Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis (2nd. Ed.).* CA: Sage Publications.

Molina, M., & Ambrose, R. C. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching Children Mathematics, 13(2),* 111-117.

Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2008). Elementary school students' approaches to solving true/false number sentences. *PNA, 2(2),* 75-86.

National Center for Research on Teacher Learning. (1991). *Findings from the teacher education and learning to teach study:* Final report. East

NCTM. (2000*). Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: NCTM Publications.

Saenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35(2)*, 153-87.

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking in grades K-6. In L.V. Stiff and F.R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in K-12.* (pp. 62-81). Reston, VA: NCTM.

Schielack, J. F., & Seeley, C. (2007). Implementation of the NCTM's curriculum focal points: concept versus content. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(2),* 78-80.

Seo, K.-H., & Ginsburg, H. P. (2003). ‘‘You’ve got to carefully read the math sentence...”: Classroom context and children’s interpretations of the equals sign. In A. J. Baroody and A. Dowker (Eds.), *The Development Of Arithmetic Concepts And Skills.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: the teacher development experiment. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.335-359). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77,* 20-26.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh and A. E. Kelly (Eds.), *Research Design İn Mathematics And Science Education*(pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. http://www.merga.net.au/documents/RP552006.pdf adresinden ulaşılmıştır.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. In B. Moses (Eds.). *Algebraic thinking, Grades K-12,* (pp.5-7). Reston, VA: NCTM.

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics; Teaching developmentally, (7th ed.).* Boston, MA: Allyn ve Bacon

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. In C. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Math: 70th Yearbook* (pp. 183–194). Reston, VA:NCTM.

Yaman H., Toluk Z., & Olkun S. (2003). İlköğretim Öğrencileri Eşit İşaretini Nasıl Algılamaktadırlar? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*, 142-151

Yaman H. (2004) *İlköğretim ikinci sınıf öğrencilerinde eşit işaretinin ilişkisel anlamını geliştirme,* Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Sözkesen Matbaacılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (Beşinci Basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık