ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN ÇEVRE VE ALAN İLE İLGİLİ KAVRAM İMAJLARININ VE KANIT ŞEMALARININ ARAŞTIRILMASI

Doktora Tezi

Özlem GELİCİ

Eskişehir 2022

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN ÇEVRE VE ALAN İLE İLGİLİ KAVRAM İMAJLARININ VE KANIT ŞEMALARININ ARAŞTIRILMASI

ÖZLEM GELİCİ

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Doktora Programı

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Bahadır YANIK

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Temmuz 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

ÖZET

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN ÇEVRE VE ALAN İLE İLGİLİ KAVRAM İMAJLARININ VE KANIT ŞEMALARININ ARAŞTIRILMASI

Özlem GELİCİ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Temmuz, 2022
Danışman: Prof. Dr. H. Bahadır YANIK

Bu araştırmanın amacı ortaokul (5, 6, 7 ve 8. sınıf) öğrencilerinin çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarının ve kanıt şemalarının uygulanan öğretim seanslarıyla nasıl değiştiğinin araştırılmasıdır. Araştırmanın katılımcılarını belirlemek amacıyla bir ortaokulda öğrenim gören 170 öğrenciye yazılı değerlendirme aracı uygulanmıştır. Öğrencilerin yanıtları incelendikten sonra her sınıf düzeyinden ikişer kişi olmak üzere toplam sekiz öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Araştırmanın verilerini yazılı değerlendirme aracına verilen yanıtlar, öğrencilerle uygulama öncesi ve sonrası yapılan klinik görüşmeler, bireysel öğretim seanslarının ses ve video kayıtları, öğrencilerin bireysel öğretim seansları kapsamındaki yazılı çalışmaları ve araştırmacının tutuğu alan notları ile günlükler oluşturmaktadır. Uygulama öncesinde katılımcıların çevre ve alan kavramları ile ilgili kavram imajlarının formal tanımlardan oldukça uzak ve sınırlı olduğu belirlenmiştir. Ayrıca katılımcıların dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları, analitik kanıt şemasının ise kullanılmadığı görülmüştür. Bireysel öğretim seansları süresince yapılan çevre ve alan kavramına yönelik etkinlikler ile araştırmacının onları düşüncelerinin doğruluğunu savunmaya yönlendirmesiyle birlikte katılımcıların kavram imajlarının ve kanıt şemalarının değişime uğradığı belirlenmiştir. Uygulama sonrasında katılımcıların çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarının formal tanımlara uygun hale geldiği, kavram imajlarındaki sınırlılıkların büyük oranda giderildiği tespit edilmiştir. Katılımcıların düşüncelerinin doğruluğunu savunurken kullandıkları kanıt şemaları da farklılaşmıştır. Katılımcıların dışsal kanıt şeması kullanımının oldukça azaldığı, deneysel ve analitik kanıt şeması kullanımının ise arttığı görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: Kavram İmajı, Kanıt Şeması, Öğretim Deneyi, Çevre, Alan

ABSTRACT

INVESTIGATION OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS' CONCEPT IMAGES AND PROOF SCHEMES ABOUT PERIMETER AND AREA

Özlem GELİCİ

Department of Mathematics Education

Anadolu University, Institute of Educational Sciences, July, 2022

Supervisor: Professor Dr. H. Bahadır YANIK

The aim of this research is to investigate how the concept images and proof schemes of secondary school (5th, 6th, 7th and 8th grade) students about perimeter and area change with the applied teaching episodes. In order to determine the participants of the research, a written assessment tool was applied to 170 students studying in a secondary school. After examining the answers of the students, a total of eight students, two from each grade level, were determined as participants. The data of the research consists of the answers given to the written assessment tool, the clinical interviews with the students before and after the application, audio and video recordings of the individual teaching episodes, the written works of the students within the scope of the individual teaching episodes, the field notes and diaries taken by the researcher. Before the application, it was determined that the concept images of the participants about the perimeter and the area were quite far from the formal definitions and were limited. In addition, it was observed that the participants used external and experimental evidence schemes, while the analytical proof scheme was not used. It has been determined that the concept images and proof schemes of the participants have changed with the activities conducted during the individual teaching sessions on the concept of perimeter and area and the researcher guiding them to defend the correctness of their thoughts. After the application, it was determined that the concept images of the participants about perimeter and area became suitable for the formal definitions, and the limitations in the concept images were largely eliminated. Proof schemes used by the participants in defending the correctness of their thoughts have also differed. It was observed that the use of the external proof schemes of the participants decreased considerably, while the use of experimental and analytical proof schemes increased.

Keywords: Concept Image, Proof Scheme, Teaching Experiment, Perimeter, Area

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca akademik yaşama dair bilgi ve tecrübelerini paylaşan, sabırla yol gösteren değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. H. Bahadır YANIK'a bu çalışmanın her aşamasında sunduğu eleştiri, öneri ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Tez izleme komitesinde yer alarak çalışmama yönelik değerli görüş ve önerileri ile süreç boyunca desteğini esirgemeyen ve çalışmama zenginlik katan sayın hocalarım Prof. Dr. Tuba ADA'ya, Prof. Dr. Aytaç KURTULUŞ'a teşekkür ederim. Tez jürisinde olmayı kabul eden Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ ve Prof. Dr. Ahmet KAÇAR'a zaman ayırdıkları ve değerlendirmeleri ile tezime katkıda bulundukları için teşekkür ederim.

Doktora eğitimi sürecinde derslerini aldığım değerli hocalarım Prof. Dr. Tangül KABAEL, Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN, Prof. Dr. Emel ÖZDEMİR ERDOĞAN, Prof. Dr. Nilüfer KÖSE ve Prof. Dr. Ali ERSOY'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her an yanımda olup maddi, manevi desteklerini esirgemeyen annem ve babam Bedriye ve Neşet GELİCİ'ye, kardeşlerim Emine ÖZBOĞA ve Merve GELİCİ'ye bu uzun ve yorucu süreçte gösterdikleri sabır ve fedakârlıklar için çok teşekkür ederim. Onların desteği ve anlayışı olmadan bu araştırmayı tamamlayamazdım.

Doktora eğitimim boyunca, dahil olduğum yurt içi doktora burs programı ile beni maddi olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Son olarak araştırmanın katılımcısı olan sevgili öğrencilerime zaman ayırıp araştırmaya katkı sundukları için teşekkür ederim.

Özlem GELİCİ

Eskişehir, 2022

18/07/2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Özlem GELİCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

MEB **:** Milli Eğitim Bakanlığı

TDK **:** Türk Dil Kurumu

1. GİRİŞ

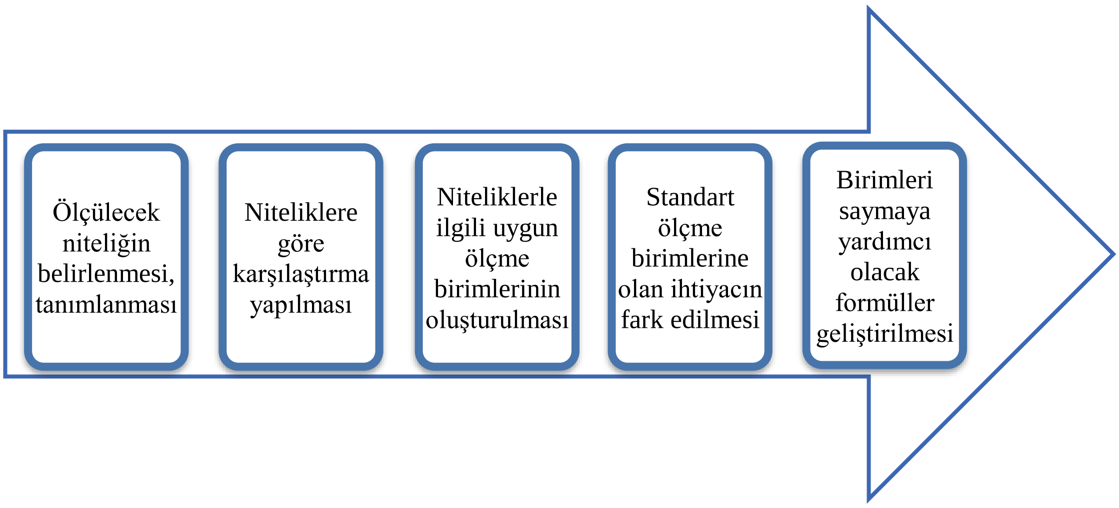
Çevre ve alan kavramları ortaokul düzeyinde ölçme bağlamında ele alınmakta ve genellikle fiziksel bir eylem veya bir dizi işlemsel becerinin uygulanması şeklinde öne çıkmaktadır. İşlemsel becerilere yapılan bu vurgu nedeniyle kavramsal anlayış geri planda kalmaktadır. Araştırmada öğrencilerinin çevre ve alan kavramları ile ilgili anlayışlarının ortaya çıkarılması için kavram imajı ve kanıt şeması kuramsal çerçevelerinden yararlanılmıştır. Bu bölümde neden bu araştırmaya ihtiyaç duyulduğu, araştırmanın amacı, araştırma soruları ve araştırmanın önemi üzerinde durulacaktır.

1.1. Problem Durumu

Matematik, öğretmenin gösterdiği yöntemleri taklit ederek benzer sorular çözmenin ötesinde, karşılaşılan problemleri çözmek için yöntemler geliştirmeyi, bu yöntemleri uygulamayı, doğru ve anlamlı olup olmadıklarını kontrol etmeyi içerir. Matematik, belirli bir düzen ve mantıksal sıralama içindeki kavram ve işlemlere dayalı bir bilimdir. Matematiğin özünde bu kavram ve işlemler arasındaki düzeni ve ilişkileri keşfedip anlamlandırmak vardır (Van de Walle, Karp ve Williams,2010/2013, s. 13). Matematik diğer bilim dallarında kullanılmakla birlikte günlük yaşamda giderek daha fazla yer almaktadır. Bu durum matematiksel düşünme becerisinin ve dolayısıyla matematik öğretiminin önemini artırmaktadır.

Matematiğin günlük yaşamla doğrudan ilişkili olduğu alanlardan biri de ölçmedir. Ölçme, tıpkı sayma gibi insanoğlunun çevresindeki nesneleri karşılaştırma ihtiyacından doğmuştur (Altun, 2014, s. 298). Matematikle ilgili neredeyse her konuda ölçmenin izlerini görmek mümkündür. Ölçme, tek başına bir matematik konusu olmakla birlikte geometri ile sayılar arasında bir köprü oluşturmakta, böylece her iki alanın gelişimine de katkı sağlamaktadır (Clements ve Sarama, 2009, s. 163). Bunun yanında ölçme fen bilimlerinin de bir parçası olduğundan bu alandaki kavramların anlaşılması için de gereklidir. Bütün bu özellikler ölçmeyi günümüz öğrencileri için oldukça önemli kılmaktadır.

Bir çokluğu ölçmek; "aynı türden geliştirilmiş standart birimin, bu çokluk içinde kaç tane olduğunu saymak" şeklinde açıklanmaktadır (Altun, 2014, s. 297). Buna göre ölçme için öncelikle ölçülecek niteliğe (uzunluk, alan, hacim vb.) ve bu niteliği ölçebilecek birime (m, m^2, m^3 vb.) karar verilmesi, ardından nesnenin bu niteliği ile seçilen birimin karşılaştırılması gerekmektedir (Van de Walle, Karp ve Williams, 2010/2013, s. 370). Bu açıklamalara uygun olarak ölçme öğretiminde takip edilmesi önerilen aşamalar Şekil 1.1.'de gösterilmektedir:



Şekil 1.1. *Ölçme öğretimi için önerilen aşamalar (Strutchens, Martin ve Kenney, 2003, s. 197)*

Ölçme öğretiminde ilk aşama olan ölçülecek niteliğin (uzunluk, alan, hacim vb.) belirlenmesi oldukça önemlidir. Bu aşamada öğrencilerin öncelikli olarak ölçmeye konu olan uzunluk, alan, hacim gibi kavramları öğrenmeleri gerekmektedir (Lubienski, 2003, s. 291). Ölçme sadece fiziksel bir eylem, bir beceri olarak görüldüğü zaman ilgili olduğu kavramlar göz ardı edilebilmektedir. Dolayısıyla öğrenciler bir nesnenin hangi niteliğinin ölçmeye konu olduğuna karar vermekte zorlanmaktadır (Grant ve Kline, 2003, s. 46-47). Ölçme öğretiminde işlemsel becerilere ağırlık verilip kavramlar üzerinde yeterince durulmaması birçok öğrencinin güçlük yaşamasına neden olmaktadır (Stephan ve Clements, 2003, s. 3).

Bu araştırmaya konu olan çevre ve alan kavramlarının öğrenimi için birçok farklı kavram, bilgi ve prosedürün bir arada kullanılması gerekmektedir. Dolayısıyla bu kavramları öğrenirken birçok öğrencinin zorluk yaşadığı belirlenmiştir. Öğrencilerin bu kavramları zihinlerinde nasıl oluşturduklarının araştırılması öğretimin planlanması, öğrencilerin hata ve yanlış öğrenmelerinin tespiti ve giderilmesi açısından önemlidir. Öğrencilerin bir kavram hakkında zihinlerinde var olan tüm yapıyı öğrenmenin bir yolu da onların kavram imajlarını ortaya çıkarmaktır. Kavram imajı temsil ettiği kavramla ilgili tüm zihinsel resimleri, özellikleri ve süreçleri içermektedir (Tall ve Vinner, 1981).

Öğrencilerin kavram imajları kendileri için anlamlı olsa da kavramın formal tanımı ile uyumlu olmayabilir. Buna rağmen öğrenciler problem çözerken genellikle var olan kavram imajlarından faydalanmaktadırlar (Tall ve Vinner, 1981). Böyle durumlarda öğrencilerin hatalarını fark edip düzeltebilmeleri için onlara fırsatlar sunulması oldukça önemlidir. Bunu sağlamanın bir yolu da öğrencilerden çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamalarını istemektir. Öğrencilerin yanıtlarının doğruluğunu destekleyecek kanıtlar sunmaları matematiksel düşüncelerinin değişmesi ve gelişmesi için oldukça önemlidir (Flores, 2002). Öğrencilerin çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamaya çalışırken kullandığı yöntemler farklı araştırmacılar tarafından çeşitli kategorilere ayrılmıştır. Bu araştırmada Sowder ve Harel (1998) tarafından öğrencilerin çözümlerini açıklamaya ve savunmaya çalışırken kullandıkları stratejilerin kategorilere ayrılmasıyla oluşturulan "Kanıt Şemaları" kullanılmıştır.

Öğrenciler yanıtlarını açıklayıp savunurken matematiksel fikirlerini gözden geçirme fırsatı bulmakta, çeşitli varsayımlar oluşturmakta ve problemin farklı çözüm yollarını görebilmektedirler. Ayrıca, çözümlerinin doğruluğunu savunma sürecinde, kullandıkları sembol, kural ve algoritmaların ardındaki anlamları da keşfetmektedirler. Bu süreçte öğrenciler sürekli iletişim halinde olduklarından hem düşüncelerini geliştirmekte hem de yeni düşünceler oluşturmaktadırlar (Whitenack ve Yackel, 2002).

Çevre ve alan kavramları öğrencilerin hem günlük hayatta hem de öğrenim hayatlarında sürekli karşılaştıkları kavramlardandır. Örneğin alan kavramı, kendi başına önemli bir matematik konusu olmakla birlikte diğer konularla ve gerçek yaşam deneyimleriyle de bağlantılıdır. Alan modelleri, sayma, kesirler, cebirsel ifadeler, çarpma, bölme, kalanı yorumlama, birleşme ve dağılma özellikleri, basamak değeri ve rasyonel sayılarla işlemler gibi geometri alanının dışındaki kavramları göstermek için de kullanılabilir (Wickstrom vd., 2017). Bunun yanında bir evin toplam kullanışlı zemin miktarını belirlemek, navigasyon veya ambalaj tasarımı gibi gerçek yaşam problemlerini ele almak için de temel oluşturur (Clements vd., 2018; Kozulin ve Kazaz, 2017). Bu nedenle bu kavramların doğru bir şekilde öğrenilmesi oldukça önemlidir.

Öğrencilerin çevre ve alan kavramları ile ilgili zihinlerinde var olan yapıların, hangi eksik ve yanlış anlayışlara sahip olduklarının, bu kavramları nasıl algıladıklarının ve yapılandırdıklarının açığa çıkarılması uygulanacak öğretimin daha iyi tasarlanmasını sağlayacaktır. Küçük yaştaki çocukların bu kavramları zihinlerinde nasıl yapılandırdığı ile ilgili yapılmış pek çok kapsamlı çalışma bulunmaktadır. Fakat bu kavramlarla ilgili yapıların daha sonraki aşamalarda nasıl bir değişim yaşadığını gösteren çok az çalışma vardır. Ortaokul ve daha sonraki düzeylerde yapılan çalışmalarda sıklıkla öğrencilerin bu kavramlarla ilgili yapılan testlerdeki başarı düzeyleri ve kavram yanılgıları incelenmiştir. Öğrencilerin bu kavramlarla ilgili zihinlerindeki yapıyı ortaya çıkarmayı amaçlayan daha kapsamlı araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu araştırmada öğrencilerinin çevre ve alan kavramları ile ilgili zihinsel yapılarının ortaya çıkarılması için kavram imajı ve kanıt şeması kuramsal çerçevelerinden yararlanılmıştır. Katılımcıların mevcut kavram imajları ve kanıt şemaları belirlendikten sonra çevre ve alan kavramları ile ilgili bir dizi öğretim seansı gerçekleştirilmiştir. Öğretim seanslarının ardından katılımcıların kavram imajları ve kanıt şemaları yeniden belirlenmiş ve başlangıçtaki durumları ile karşılaştırılmıştır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarının ve kanıt şemalarının uygulanan öğretim seansları yoluyla nasıl değiştiğinin incelenmesidir.

1.3. Araştırma Soruları

1. Katılımcıların uygulama öncesinde çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemaları nasıldır?
    a. Katılımcıların uygulama öncesinde kavram imajları nasıldır?
    b. Katılımcıların uygulama öncesinde kanıt şemaları nasıldır?
2. Katılımcıların uygulanan öğretim seansları sırasında çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemaları nasıldır?
    a. Katılımcıların uygulanan öğretim seansları sırasında kavram imajları nasıldır?
    b. Katılımcıların uygulanan öğretim seansları sırasında kanıt şemaları nasıldır?
3. Katılımcıların uygulama sonrasında çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemaları nasıldır?
    a. Katılımcıların uygulama sonrasında kavram imajları nasıldır?
    b. Katılımcıların uygulama sonrasında kanıt şemaları nasıldır?

1.4. Araştırmanın Önemi

Son yıllarda dünyada ve ülkemizde öğrencilerin kavramsal anlayışlarını inceleyen çalışmaların sayısı artmaktadır. Bu çalışmalar incelendiğinde bazılarının kavram imajlarını belirlemeyi (Akkoç, 2008; Avgören, 2011; Aztekin, 2008; Biber, 2010; Bozkurt ve Koç, 2012; Dede, Bayazit ve Soybaş, 2010; Dündar, 2015; Ergin, 2014; Erşen ve Karakuş, 2013; Gutierrez ve Jaime, 1999; Güzel, 2014; Kabael, Barak ve Özdaş, 2015; Kaplan, 2008; Özaltun Çelik ve Bukova Güzel, 2017; Paksu, Musan, İymen ve Pakmak, 2012; Rösken ve Rolka, 2007; Süzer, 2011; Yanık, 2014; Yiğit Koyunkaya, 2016) bazılarının da uygulanan öğretimle kavram imajlarının nasıl değiştiğini belirlemeyi (Bingölbali ve Monaghan, 2008; Deniz, 2014; Gülkılık, 2008; Öner, 2013; Zhang, Clements ve Ellerton, 2015) amaçladıkları görülmektedir. Yapılan çalışmalardaki ortak noktalardan biri öğrencilerin kavramları öğrenirken bilimsel tanımlar yerine kendilerine özgü bir şekilde oluşturdukları kişisel kavram tanımlarını ve kavram imajlarını esas aldıklarıdır.

Kavram imajlarıyla ilgili çalışmalar sonucunda öğrencilerin sahip oldukları kavram imajlarının uzun yıllar boyunca öğretim görseler bile formal tanımlardan uzak, oldukça sınırlı ve birçok hatalı uygulamayı içerdiği belirlenmiştir. Bu şekilde formal tanımdan uzak kavram imajlarını tespit edip değiştirmenin ise oldukça zor olduğu vurgulanmıştır. Formal tanıma uygun olmayan kavram imajlarına sahip olan öğrencilerin kavramla ilgili yeni bir bilgiyi öğrenmeleri de güçleşmektedir. Mevcut kavram imajları ile yeni bilginin birbiriyle çeliştiği durumda öğrenciler formal tanıma uygun olmayan kavram imajlarını değiştirmek yerine karşılaştıkları yeni bilgiyi yok saymaktadır. Öğrencilerin mevcut kavram imajlarına olan bu bağlılıkları onların yeni ve doğru bilgilerle kavram imajlarını değiştirip zenginleştirmelerine engel olmaktadır. Bu araştırmada ise öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili kavram imajları belirlenip uygulanan öğretim seansları ile formal tanıma uygun olacak şekilde değiştirilmeye çalışılmıştır.

Çevre ve alan öğrencilerin bilerek veya bilmeyerek günlük hayatlarında sıklıkla kullandıkları kavramlardandır. Bu kavramlar ile ilgili daha önce öğrencilerin başarılarını (Aktuna, 2013; Dağlı, 2010; Garrett, 2010; Tan Şişman ve Aksu, 2009; Tan Şişman, 2010; Zhou, 2012), bu kavramları öğrenirken izledikleri süreçleri (Alkan, 2019; Barrett,vd., 2011; Battista, 2004; Clements vd., 2018; Izsak, 2005; Kozulin ve Kazaz, 2017; Nitabach ve Lehrer, 1996; Outhred ve Mitchelmore, 2000), bu kavramlarla ilgili algı ve anlayışlarını (Casa, Spinelli ve Gavin, 2006; Cavanagh, 2007; Dorko, 2012;

Huang ve Witz, 2011, 2013; Huang, 2014; Kamii ve Kysh, 2006; Kordaki ve Potari, 1998; Kospentaris, Spyrou ve Lappas, 2011; Köse ve Tanışlı, 2014; Mulligan, Prescott, Mitchelmore, ve Outhred, 2005; Olkun vd., 2014; Simon ve Blume, 1994; Tossavainen, Suomalainen ve Mäkäläinen, 2016; Wickstrom, Fulton, ve Carlson, 2017; Wilder, 2014; Yuzawa, Bart ve Yuzawa, 2000), hata ve kavram yanılgılarını (Dağlı, 2010; Gökdal, 2004; Machaba, 2005; Tan Şişman ve Aksu, 2009; Tan Şişman, 2010; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens ve Verschaffel, 2004; Zacharos, 2006) inceleyen araştırmalar yapılmıştır. Görüldüğü gibi öğrencilerin çevre ve alan kavramları ile ilgili algılarını, anlayışlarını, öğrenme sürecinde izledikleri zihinsel süreçleri, başarı düzeylerini, sıklıkla yaptıkları hataları ortaya koyan pek çok araştırma mevcuttur. Bu araştırmada önceki araştırmalardan farklı olarak öğrencilerin bu kavramlarla ilgili anlayışları kavram imajı ve kanıt şemaları teorik çerçeveleri perspektifinden sunulmuştur.

Öğrencilerin çevre ve alan kavramlarını nasıl algıladıklarının ve karşılaştıkları problemlerde bu kavramları kullanmaya yönelik hangi stratejileri geliştirdiklerinin belirlenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Öğrencilerin kavramları algılama ve uygulaması sonucunda ortaya çıkan, öğretim ve tecrübeler yoluyla değişip şekillenen kavram imajlarının ayrıntılı bir şekilde ortaya konulması sayesinde öğrencilerin zihinlerinde bu kavramlarla ilgili bütün bağlantıların ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır. Böylece öğrencilerin bu kavramları ne derece doğru yapılandırdıklarının, oluşturdukları kavram imajlarındaki eksikliklerin, kavram imajlarının uygulanan öğretim ve araştırma boyunca edindikleri tecrübeler sonunda nasıl değiştiğinin açıklığa kavuşturulabileceği düşünülmektedir. Bu araştırmayla öğrencilerin çevre ve alan kavramlarını zihinlerinde nasıl yapılandırdıkları, sahip oldukları kavram imajları ve bunların içeriği ile uygulanan öğretim seanslarının kavram imajlarını nasıl değiştirdiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Öğrencilerin karşılaştıkları problemlere çözüm bulmaları kadar çözümlerinin doğruluğundan emin olmaları ve buna başkalarını ikna edebilmeleri de önemlidir. Matematik öğretim programında da öğrencilerin problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini dile getirmeleri, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilmeleri beklenmektedir. Ayrıca öğrencilerin çözümlerini gerekçelendirmelerine ve fikirlerini paylaşmalarına önem verilmektedir. Ancak, kanıt ortaokul düzeyinde bir kavram veya beceri olarak yer almamaktadır. Bununla birlikte öğretim programında kanıt ile matematiksel yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinlikler arasında dolaylı bir bağlantı mevcuttur. Matematiksel yetkinlik, mantıksal ve uzamsal düşünme ile bu düşünceleri formül, model, grafik ve tablolar kullanarak sunmayı içermektedir. Bilimde yetkinlik ise, soruları tanımlamak ve kanıta dayalı sonuçlar üretmek için gerekli bilgi ve metodolojiden yararlanma becerisini içermektedir (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018, s. 4-9). Bu doğrultuda araştırmada öğrencilerin yaptıkları çözümlerin doğruluğunu kanıtlamak için kendilerini, bir arkadaşlarını veya araştırmacıyı ikna etmeleri istenmiştir. Böylece öğrencilerin sahip oldukları kanıt şemaları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Araştırmada öğrencilerin kavram imajları ile kanıt şemalarının birlikte ele alınmasının nedenlerinden biri, öğrencilerin düşüncelerinin doğruluğunu kanıtlama sürecinde yaptıkları açıklamaların onların kavram imajlarını da yansıtacağının düşünülmesidir. Öğrenciler çözümlerinin doğruluğunu savunurken problemde yer alan bir kavramın kişisel tanımını, kavramla ilgili bildikleri özellikleri, kavrama ait olan veya olmayan örnekleri, kavramın diğer kavramlarla olan ilişkisini kullanabilirler. Tüm bu açıklamalar öğrencilerin kavram imajlarının parçalarını ortaya koymaktadır. Diğer bir neden ise öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarının onların kavram imajlarından etkilendiğinin düşünülmesidir. Bir problemin çözümünün doğruluğunu savunurken öğrenciler problemde yer alan kavramla ilgili tüm bilgilerini, anlayışlarını, kısacası kavram imajlarını kullanacaklardır. Buna göre öğrencilerin kavram imajları formal tanıma yaklaştıkça, çözümlerinin doğruluğunu savunurken doğru argümanlar sunma ihtimallerinin artacağı düşünülebilir.

Yukarıda sıralanan nedenlerden dolayı bu araştırmada öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili sahip oldukları kavram imajları ve kanıt şemaları belirlenip uygulanan bireysel öğretim deneyi sürecinde kavram imajları ve kanıt şemalarındaki değişim incelenmiştir.

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu araştırmada öğrencilerin çevre ve alan kavramları ile ilgili kavramsal anlayışlarını ortaya çıkarmak için kavram imajı kuramsal çerçevesinden yararlanılmıştır. Ayrıca düşüncelerinin doğruluğunu savunurken kullandıkları yöntemleri belirlemek için kanıt şeması kuramsal çerçevesinden yararlanılmıştır. Bu bölümde öncelikle çevre ve alanın kavramsal yapısına değinilmiş, çevre ve alanın matematik öğretim programındaki yerinden bahsedilmiş, ardından kavram imajı - kavram tanımı modeli üzerinde durulmuş, kanıt şemaları ile ilgili bilgi verilmiş daha sonra kanıt şemaları ile kavram imajı arasındaki ilişki açıklanmıştır. Son olarak bahsi geçen kuramsal çerçevelerle ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.1. Çevre ve Alanın Kavramsal Yapısı

Öğrenciler, formal öğretimden önce, ölçmeyle ilgili birçok kavramla günlük yaşamlarında tanışmaktadırlar. Öğrencilerin ölçmeyle ilgili en sık karşılaştıkları kavramlardan bazıları uzunluk, çevre ve alandır. Çocuklar okul öncesi dönemde bile "bu daha uzundur", "senin boyun benimkinden kısa", "parkın çevresinde/etrafında koştum", "(kapalı bir bölge oluşturarak) burası benim oyun alanım" gibi söylemlerde bulunabilmektedirler. Tablo 2.1.'de uzunluk, çevre ve alan kavramlarının birkaç tanımına yer verilmiştir.

Tablo 2.1. *Çevre ve alan tanımları*

Uzunluk	"Nesnenin bir boyutlu uzayda kapladığı yer" (Stephan ve Clements, 2003, s. 3)
Çevre	"Bir şeklin veya bölgenin çevresi, sınırının uzunluğudur." (Ball, 1988, s. 170). "Çevre, bir şekli çevrelemek için gereken doğrusal birim sayısıdır." (Rickard, 1996, s. 306). "Bir bölgenin etrafındaki mesafeyi ölçen, uzunluğun özel bir uygulaması" (Strutchens, Martin ve Kenney, 2003, s. 198) "Çevre, iki boyutlu kapalı bir şekil için özel doğrusal boyuttur." (Larsen, 2006, s. 41).
Alan	"Alan, bir şekli veya bölgeyi kaplamak için gereken birim karelerin sayısıdır." (Ball, 1988,s.170). "Bir sınır içindeki iki boyutlu bölgenin miktarına karşılık gelir." (Lehrer, 2003). "İki boyutlu bir yüzeyin sınırları arasında kalan miktarıdır." (Stephan ve Clements, 2003, s. 4). "Alan, bir sınır içinde bulunan iki boyutlu yüzey miktarıdır." (Sarama ve Clements, 2009, s.293).

Yukarıdaki tanımlardan anlaşılacağı üzere çevre, uzunluk kavramının özel bir uygulamasıdır. Uzunluk ölçme, sayısal bir nicelikle uzamsal bir niteliğin ilişkilendirilmesini gerektirir. Bu ilişki, birçok temel kavramın kullanılmasını gerektirdiği için, uzun ve zor bir süreç sonunda kurulabilmektedir (Barret vd., 2006). Uzunluk kavramını ölçmenin altında yatan temel kavramlar ise şunlardır: korunum, birim yineleme, geçişlilik, bölümleme, uzaklığın birikimi, sayı ile ölçme arasındaki ilişki (Stephan ve Clements, 2003, s. 39; Tan Şişman, 2010, s. 38-40). Şekil 2.1.'de uzunluk ölçmeyle ilgili temel kavramlar gösterilmektedir.

Şekil 2.1. *Uzunluk ölçmeyle ilgili temel kavramlar (Tan Şişman, 2010, s. 39)*

Korunum kavramı, bir nesne hareket ettirildiğinde veya parçalara ayrılıp farklı bir biçimde yeniden düzenlendiğinde uzunluğunun sabit kalması anlamına gelmektedir. Birim yineleme kavramı ise, uzunluk ölçmede kullanılan birimin, bütünün bir parçası olarak görülmesi ve ölçülen nesne boyunca bu birimin tekrar tekrar kullanılabilmesidir (Kamii ve Clark, 1997, s. 118). Geçişlilik kavramı, iki nesnenin uzunluğunun doğrudan karşılaştırılamayacağı durumlar için gereklidir. Bu kavrama uygun düşünen bir öğrenci aşağıdaki ilişkileri anlayabilir:

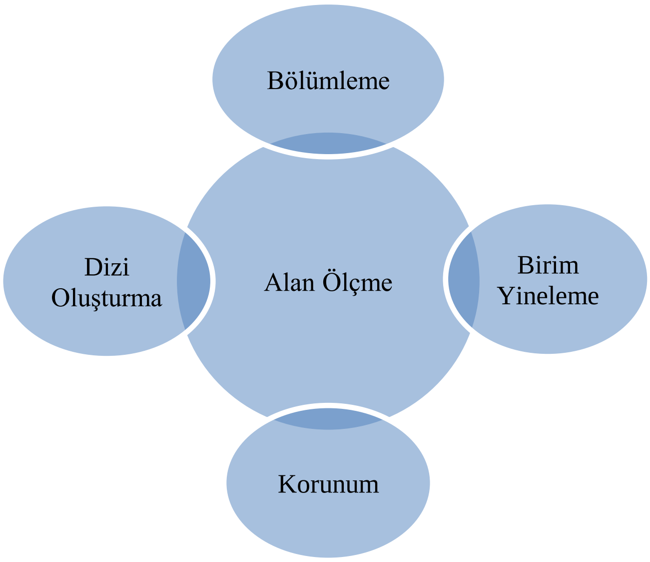
a) Eğer A nesnesinin uzunluğu B'ye eşitse ve B'nin uzunluğu da C'ye eşitse bu durumda A nesnesi C ile eşit uzunluktadır ($A = B\ ve\ B = C\ ise\ A = C$).
b) Eğer A nesnesinin uzunluğu B'den büyükse ve B nesnesi de C'den uzunsa bu durumda A nesnesi C'den uzundur ($A > B\ ve\ B > C\ ise\ A > C$).

c) Eğer A nesnesinin uzunluğu B'den küçükse ve B nesnesi de C'den kısaysa bu durumda A nesnesi C'den kısadır ($A < B\ ve\ B < C\ ise\ A < C$) (Stephan ve Clements, 2003, s. 5).

Bölümleme kavramı bir nesnenin uzunluğunun zihinsel olarak eş büyüklükte birimlere ayırılması anlamına gelmektedir. Öğrenciler bu birimlerin bölünebileceğini fark ettiklerinde uzunluğun sürekliliğini de anlamış olurlar (Clements ve Stephan, 2004, s. 301, Barret vd., 2006). Uzaklığın birikimi kavramı öğrencilerin bir birimi yinelemenin sonucunun, ilk yinelemenin başlangıcından en sonuncunun bitimine kadar olan mesafeyi gösterdiğini anlamasını içerir (Stephan ve Clements, 2003, s. 5). Sayı ve ölçme arasındaki ilişki kavramına göre uzunluk ölçmede cetvel üzerinde ölçülen uzunluğa karşılık gelen sayının okunmasından ziyade yinelenen birimlerin sayılması söz konusudur. Ayrıca öğrencilerin farklı büyüklükte birimlerin aynı uzunluğu ölçmek için kullanılabileceğini anlamaları ve ölçme yaparken sayılan nesnelerin sürekli birimler olduğunu fark etmeleri de gereklidir (Tan Şişman, 2010, s. 40).

Uzunluk tek boyutta ele alınan bir nitelikken, alan iki boyutta ele alınan bir niteliktir. Alan, bir sınır içinde bulunan iki boyutlu yüzey miktarı olarak tanımlanabilir (Sarama ve Clements, 2009, s. 293). İki boyutlu alan niteliğini ölçmek için bu niteliğe uygun olarak iki boyutlu bir birim seçilir. Buna göre alan ölçme, bir bölgeyi özdeş iki boyutlu birimlerle, bölge hiçbir boşluk ve çakışma olmadan tamamen örtülene kadar kaplamaya dayanır (Stephan ve Clements, 2003, s. 4). Burada kaplama eylemi ön plana çıksa da alan ölçme arka planda alan korunumu, birim, birimlerin yinelenmesi ve birimlerin sayılması gibi birbiriyle ilişkili kavramlar ağını içerdiğinden öğrenciler için oldukça karmaşık hale gelebilmektedir (Kordaki ve Potari, 2002, s. 65; Smith, Males ve Gönülateş, 2016).

Alan ölçme ile fiziksel araçların (cetveller) kullanımından sayısal hesaplamalara (formüller) geçiş yapılmaktadır (Kordaki ve Potari, 2002; Lehrer, 2003; Zacharos, 2006). Formüller yoluyla hesaplamaya odaklanma, öğrencilerin daha sonraki matematik ve fen çalışmalarında karşılaştıkları diğer nitelikler için devam eder. Dolayısıyla, alan ölçme, ölçmenin somut, fiziksel bir eylem olmaktan çıkıp daha soyut, genelleştirilmiş cebirsel ifadeler şeklinde öğretilmesi ve öğrenilmesinde önemli bir geçişi temsil eder (Smith, Males ve Gönülateş, 2016). Alan ölçme ile ilgili temel kavramlar bölümleme, birim yineleme, korunum ve dizi oluşturmadır (Tan Şişman, 2010, s. 50-52). Şekil 2.2.'de bu kavramlar gösterilmektedir.



Şekil 2.2. *Alan ölçmeyle ilgili temel kavramlar (Tan Şişman, 2010, s.50)*

Bölümleme kavramı ile anlatılmak istenen, iki boyutlu bir yüzeyi zihinsel olarak yine iki boyutlu eş birimlere ayırmaktır. Birim yineleme kavramı, bir bölgeyi iki boyutlu birimlerle boşluk veya çakışma olmayacak şekilde kaplamayı içermektedir (Stephan ve Clements, 2003, s. 11). Korunum kavramı, şeklin parçalanıp farklı bir biçimde yeniden düzenlenmesinin şeklin alanını değiştirmeyeceği anlamına gelmektedir. Bir dikdörtgenin alanı için düşünülecek olursa, dizi oluşturma kavramı ile anlatılmak istenen, kenarlara paralel olacak şekilde her birinde eşit sayıda birim olan satır ve sütunların hizalandığı ızgara şeklinde bir yapıdır (Outhred ve Mitchelmore, 2004).

Uzunluk ve alan kavramlarını ölçmenin temelinde pek çok ortak fikir bulunmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

- Ölçme için kullanılan birimin ölçülmekte olan niteliğe sahip olması,
- Sabit bir birimi yineleme ihtiyacı, diğer bir deyişle bir uzunluk veya alanın eş birimlere bölünebilmesi,
- Farklı tür birimlerin aynıymış gibi birlikte sayılamayacağı,
- Ölçme için kullanılan birimlerin çakışma veya boşluk olmadan ölçülen niteliği kaplaması,
- Birim büyüklüğünün, ölçülen miktar ile ters orantılı olması (Stephan ve Clements, 2003).

Öğrencilerin bu ortak fikirleri hangi sıralamaya göre geliştirdiği tam olarak bilinmemektedir. Ancak öğrencilerin bu fikirlerden bazılarını diğerlerinden daha iyi kavrayabildikleri görülmüştür (Izsak, 2005).

Alan öğretimindeki önemli yapılardan biri, dikdörtgensel bölgenin eş birim karelerle kaplandığında (veya birim karelere bölündüğünde) ortaya çıkan satır ve sütunlardan oluşan ızgara yapısıdır. Bu süreçte öğrencilerin ilkel bir kaplamadan, her satır ve sütunda aynı sayıda birim olduğunu gözlemleyip oluşan düzeni görmesi (uzamsal yapılandırma) ve birim kare dizilerini anlamlı şekilde numaralandırması önemlidir (Clements vd., 2018; Panorkou, 2020). Özellikle küçük yaştaki öğrenciler için satır ve sütunlardan oluşan ızgara yapısını inşa etmek ve altında yatan kavramları anlamak kolay değildir. Izgara yapısının tanınması, alanın birim kareler kullanılarak nasıl ölçüldüğünü ve özellikle alan ölçümünün çarpma ile nasıl ilişkili olduğunu anlamak için gerekli bir adımdır (Outhred ve Mitchelmore, 2000, 2004; Mulligan, Prescott, Mitchelmore ve Outhred, 2005). Bu yapıyı anlayan öğrenciler, ızgara yapısındaki satır ve sütun sayısıyla dikdörtgenin uzunluk ve genişliği arasındaki ilişkiyi fark edebilirler (Clements ve Stephan, 2004; Huang, 2014). Ancak, formüle dayalı yaklaşımlar izlenmesi, bir boyutlu uzunlukların nasıl iki boyutlu bir yapı oluşturduğunu veya uzunluk ölçü birimlerinin dikdörtgeni birimler dizisi olarak yapılandırmak için nasıl koordine edilebileceğini açıklamada başarısız olmaktadır (Simon ve Blume, 1996; Battista vd., 1998; Zacharos, 2006; Smith, Males ve Gönülateş, 2016; Kobiela ve Lehrer, 2019).

Izgara yapısının anlaşılabilmesi için gerekli temel fikirlerden biri de alan korunumunun kazanılmasıdır. Bir şeklin parçalara bölündükten sonra bu parçaların yeniden düzenlenmesinin başlangıçtaki alanı değiştirmediği anlayışı, herhangi bir şeklin alanı ölçülürken kesirli birimlerin tam birimler oluşturmak için birçok şekilde birleştirilebilmesinde karşımıza çıkmaktadır (Piaget vd., 1960 Akt: Kospentaris, Spyrou ve Lappas, 2011). Özellikle çokgenler dışındaki kapalı şekillerin alanlarını belirleyip ölçerken öğrencilerin alan korunumunu kazanmış olmaları gereklidir.

Çocukların alan kavramını anlayışının gelişimini destekleyen dört şema üzerinde durulmuştur: kaplama, niceleme, alt bölümlere ayırma ve uzamsal yapılandırma. Kaplama, bir birim ile döşeme veya tekrarlama eylemlerini içermektedir. Bir alanı kaplamak için somut birim kareler kullanılabileceği gibi bir veya daha fazla birim kare zihinsel olarak da yinelenebilmektedir. Niceleme ise alan birimlerini sayma eylemidir. Öğrenciler, bazen sistematik olmasa da birim kareler için organizasyon şemaları geliştirirken birer birer saymadan başlayarak, gruplar halinde sayma ve çarpmaya kadar ilerleyebilmektedirler. Alt bölümlere ayırma, sürekli bir bütünü sayılabilir parçalara bölmeye yarayan zihinsel işlem şeklinde açıklanabilir. Bu şema, bir bütünü (örneğin, dikdörtgen) hayal edip eş birim karelere ayırabilmeyi içermektedir (Clements, Sarama ve Miller, 2017). Uzamsal yapılandırma "uzaydaki bir nesne veya nesneler kümesi için bir organizasyon veya form oluşturmanın zihinsel işleyişi; bir dizi zihinsel nesne ve eylemi seçme, koordine etme, birleştirme ve hafızaya kaydetme sürecini içeren bir soyutlama biçimi" olarak açıklanmaktadır (Sarama ve Clements, 2009, s. 296). Uzamsal yapılandırma, alanı matematiksel olarak belirlemek için yapıların kullanılmasının anlamlı olarak anlaşılmasının temeli olarak görülmektedir (Wickstrom, Fulton ve Carlson, 2017).

Alanın sayısal değerini belirlerken kullanılan kare dizilerini anlamlı bir şekilde sıralayabilme beş aşamada ele alınmıştır: soyutlama, zihinsel modeller oluşturup kullanma, uzamsal yapılandırma, birimlerin konumu ve birleşik birimlere göre düzenleme. Başlangıçta, öğrenciler bir dizi (satır/sütun) içindeki kare birimleri koordine edemezler ve yaptıkları numaralandırmalar sistematik değildir. Ardından zihinsel bir modeli kavramsallaştırarak alanı bir dizi olarak hayal etmeye başlarlar. Satırlar ve sütunlar gibi birleşik birimleri kullanarak numaralandırma yapabilirler. Son olarak öğrencilerin şemaları yansıtılabilecek ve analiz edilebilecek bir soyutlama düzeyine ulaştığında, öğrenciler bir numaralandırma stratejisi ile uzamsal yapılandırma arasındaki bağlantıyı açıkça anlayabilirler (Battista, 2007, s. 897-898).

Alan kavramı, öğrencilerin günlük yaşamlarında ve daha sonraki öğrenimlerinde büyük öneme sahip olmasına rağmen, birçok öğrenci alanı anlamlı bir şekilde öğrenmek yerine formüllere veya algoritmalara bağlı kalmaktadır. Bunun sonucunda da kavram yanılgıları ve hatalar ortaya çıkmaktadır. Örneğin, alan (iki boyutlu bir şeklin sınırları içinde kalan bölgenin kapladığı yer miktarı) ve çevre (bir alanın etrafındaki uzunluk) kavramları öğrenciler tarafından kolaylıkla birbirine karıştırılabilmektedir (Dağlı, 2010). Her ikisi de ölçme ile ilişkilendirilen bu kavramlar öğretim programında da yakın zamanlarda yer almaktadır. Öğrenciler için anlamlı bir öğrenme ortamı sağlanmaz, sadece formül uygulamayı gerektiren alıştırmalar yaptırılırsa öğrencilerin bu iki kavramı birbirine karıştırma riski de artmaktadır (Van de Walle, Karp ve Williams, 2010/2013).

Öğretim sırasında kavramlar yerine işlemsel becerilere aşırı vurgu yapılması nedeniyle birçok kişi için bir şeklin alanı "uzunluk x genişlik" formülü ile hesaplanan sayısal bir değeri ifade etmektedir. Bu durumda alan kavramı, iki boyutlu bir şeklin sınırları içinde kalan bölgenin kapladığı yer miktarından ziyade, bir formülle hesaplanan sayısal değer olarak algılanmaktadır. Burada ele alınan formül dikdörtgenin alanı için doğru olsa da hatalı bir şekilde tüm çokgenlere aşırı genellenmektedir. Alan kavramının öğretimi süresince çokgenlere, özellikle de dikdörtgene ağırlık verilse de günlük hayatta karşılaştığımız pek çok şekil düzensizdir. Bu tür şekillerin alanını hesaplayabilmek için alan kavramını ve onunla ilgili temel prosedürleri bilmenin yanında yaratıcı matematiksel çözüm yolları da üretmek gerekmektedir. Bu nedenle öğretmenlerin alan formülüne dayalı bir öğretim yerine öğrencilerine alanı kavramsal olarak anlamaları için fırsat vermeleri çok önemlidir (Casa, Spinelli ve Gavin, 2006).

Dikdörtgenin alan formülünün diğer dörtgenlere aşırı genellenmesi kavram yanılgısının nedenlerinden birinin verilen şekle ait yükseklik ve tabanın belirlenememesi olduğu ifade edilmiştir. Dikdörtgende dik kenarlardan biri yükseklik diğeri taban olarak isimlendirildiğinde bunların uzunlukları çarpımı dikdörtgenin alan ölçüsünü vermektedir. Oysa başka bir dörtgende (örneğin paralelkenarda) iki kenar uzunluğunun çarpımı öğrenciyi hatalı bir sonuca ulaştırmaktadır (Van de Walle, Karp ve Williams, 2010/2013). Bazı öğrenciler ise dikdörtgenin alan ve çevre ölçüsünü bulmada kullandıkları yöntemleri yanlış bir şekilde birleştirip en ve boy uzunluğunu toplayarak alan ölçüsünü bulmaya çalışmaktadırlar (Dağlı, 2010). Öğretim sırasında kavramlar yeterince anlaşılmadan işlemlere aşırı vurgu yapılması yukarıdaki gibi hata ve yanılgıların oluşmasına neden olmaktadır.

Alan kavramı ile ilgili zorluklardan bir kısmı da alan ölçme birimleri ile ilgilidir. Bazı öğrenciler niteliğin hangi birimle ölçüleceğine karar verememektedir. Örneğin karenin alanını ölçmek için kare şeklindeki birimleri, üçgenin alanını ölçmek için üçgen şeklindeki birimleri kullanmaya yönelebilmektedirler (Ntabach ve Lehrer, 1996). Bazı öğrenciler ise birim kareyi alan ölçüsünü hesaplamak için kullansalar da onu alan ölçme birimi olarak görmemektedirler (Kamii ve Kysh, 2006). Öğrencilerin bir şeklin alan niteliğini ölçmek için bu niteliğe sahip eş birimler kullanılması gerektiği fikrini benimsemesi göründüğü kadar kolay değildir.

Alan ve çevre kavramları arasındaki ilişkiye yönelik en sık karşılaşılan yanılgılardan biri ise şekil ve sınırlandırdığı yüzey değişmiş olsa bile, çevre tarafından sınırlanan alan ölçüsünün aynı kalacağına inanmaktır. Birçok öğrenci şekil gözleri önünde yavaş yavaş değiştirildiğinde bile alan ölçüsünün sabit kaldığını düşünmeye devam etmiştir (Nunes vd., 1994 ve Machaba, 2005). Benzer bir kavram yanılgısı araştırmacılar tarafından "Aynı A- Aynı B" şeklinde isimlendirilmiştir (Tsamir ve Mandel, 2000). Buna göre öğrenciler, bir karenin bir kenarı uzatılırken diğer kenarı aynı miktarda kısaltıldığında, son durumda oluşturulan şeklin çevre ve alan ölçüsünün orijinal karenin çevre ve alan ölçüsüne eşit olduğunu iddia etmektedirler. Öğrencilerin cevaplarına ilişkin gerekçeleri, aynı sayı bir yerden başka bir yere aktarılırsa, oluşan şeklin çevre veya alan ölçüsünde herhangi bir değişiklik olmayacağı sezgisine dayanmaktadır. Ayrıca öğrenciler alan ölçüsündeki değişimin uzunluk ölçüsündeki gibi doğrusal olacağını düşünerek bir karenin kenar uzunluklarını iki katına çıkarmanın karenin alan ölçüsünü de iki katına çıkardığını düşünmektedirler (Outhred ve Mitchelmore, 1996; Zacharos, 2006 ve Zembat, 2012).

Öğrencilerin alan kavramı ile ilgili neden zorluk yaşadığı üzerinde duran araştırmacılar öğretim için kullanılan kitapları ve manipülatif materyalleri analiz etmişlerdir (Smith vd., 2013). Ders kitaplarının alan kavramıyla ilgili etkinlikleri sunarken, genellikle şekilleri alt bölümlere veya parçalara ayrılmış bölgeler halinde gösterdikleri için öğrencilerin alan ölçüsünü belirlerken sadece kareleri saymasının (genellikle teker teker) yeterli olduğu görülmüştür (Cavanagh, 2008). Böyle gösterimler, öğrencilerin alan ölçme ile ilgili deneyimini önceden oluşturulmuş birimleri basitçe sayma, ilerleyen dönemde ise formülleri kavramsal bir anlayış geliştirmeden kullanma ile sınırlamaktadır (Clements vd., 2018). Bunun sonucunda, alanın niteliği, birim kavramı, birikimli ilerleme, korunum ve sayı ile uzay arasındaki ilişkiyi anlamak da dahil olmak üzere temel kavramlar tam olarak anlaşılamamaktadır (Lehrer, 2003; Sarama ve Clements, 2009). Ayrıca doğrudan iki kenar uzunluğunu ölçüp bu uzunlukların çarpımını hesaplamayı vurgulayan bir öğretim öğrenciler için oldukça kafa karıştırıcı olabilmektedir. Bu durumda öğrenciler iki boyutlu satır-sütun yapısı ile kenar uzunluklarının çarpımını ilişkilendirmekte zorlanmaktadırlar (Stephan ve Clements, 2003).

Öğrenciler yeni bir kavramı oluşturmaya başladıklarında, önceki kavramları yeniden yapılandırdıkları, düzenledikleri ve yeni bilgilerle ilişkilendirdikleri sırada bazı yanılgılar ortaya çıkabilmektedir. Öğrenmenin kaçınılmaz bir parçası olan bu yanılgılar, genellikle öğrencilere yanlış olduğunu söyleyerek kolayca düzeltilebilecek hatalar değildir. Ancak fark edildiklerinde uygun şekilde ele alınarak düzeltilebilmektedirler (Machaba, 2005). Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin çevre ve alan kavramlarını oluşturma süreçleri kavram imajı-kavram tanımı kuramsal çerçevesi kapsamında incelenmiştir. Araştırma sürecinde uygulanan bireysel öğretim seansları ile katılımcıların başlangıçta sahip oldukları kavram imajları formal tanımlara uygun hale getirilmeye çalışılmıştır. Bireysel öğretim seanslarının hazırlanmasında temel alınan kaynaklardan biri matematik öğretim programıdır. Aşağıdaki bölümde çevre ve alan kavramlarının öğretim programında nasıl ele alındığı üzerinde durulmuştur.

2.2. Matematik Öğretim Programında Çevre ve Alan

Ülkemizde öğrenciler ölçme konusu içinde uzunluk, alan, hacim, ağırlık ve zaman kavramlarını öğrenmektedirler. Bunlardan uzunluk, alan ve hacim kavramları diğerlerine göre daha ön plana çıkmaktadır. Uzunluk, alan ve hacim kavramları birbirleriyle olan ilişkileri bakımından da oldukça ilgi çekicidir.

Ölçme, okulöncesi dönemden itibaren öğrencilerin hayatındadır. Öğrencilerin okulöncesi eğitimde ölçmeyle ilgili karşılaştıkları ilk kavram uzunluk olmaktadır. Bu dönemde nesneleri uzunluklarına göre eşleştirme, gruplama, karşılaştırma, sıralama etkinliklerine yer verilmektedir. Bu etkinliklerde standart olmayan birimlerle uzunluk ölçme yapılmaktadır (MEB, 2013, s. 20-23).

Uzunluk kavramına ilkokul birinci sınıfta nesnelerin ölçme yapılmadan sadece karşılaştırılması ve sıralanmasıyla giriş yapılmaktadır. Daha sonra standart olmayan birimlerle ölçme ve tahmin yapmaya yer verilmektedir. İkinci sınıfa geçildiğinde standart uzunluk ölçme birimleri tanıtılarak tahmin ve ölçme yapılmaktadır. Ayrıca standart ve standart olmayan birimlerle uzunluk modelleri oluşturulmaktadır. Bu aşamada artık uzunluk ölçmeyle ilgili problemler de çözülmeye başlanır. Üçüncü sınıfa gelindiğinde uzunluk birimleri arasındaki kat ilişkileri üzerinde durulmaktadır. Ayrıca, çevre kavramıyla ilk kez karşılaşılmaktadır. Öğrencilerin, çeşitli şekillerin çevrelerini belirlemeleri, ölçmeleri ve ilgili problemleri çözmeleri beklenmektedir. Dördüncü sınıfta öğrencilerin öğrendikleri birimler arasındaki ilişkileri keşfetmeleri, bir uzunluğu farklı birimleri kullanarak ifade etmeleri gerekmektedir. Ayrıca dikdörtgen ve karenin çevre uzunlukları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklamaları beklenmektedir. Bunun yanında, çevre uzunlukları eşit olan farklı geometrik şekiller oluşturmaları gerekmektedir (MEB, 2018, s. 29-49). Tablo 2.2.'de ilkokul düzeyinde uzunluk ve çevre ile ilgili kazanımlar listelenmektedir:

Tablo 2.2. *İlkokul düzeyinde (1-4. sınıf) uzunluk ve çevre ile ilgili kazanımlar*

Sınıf Düzeyi	Kazanımlar
1	**M.1.3.1.1.** Nesneleri uzunlukları yönünden karşılaştırır ve sıralar. **M.1.3.1.2.** Bir uzunluğu ölçmek için standart olmayan uygun ölçme aracını seçer ve ölçme yapar. **M.1.3.1.3.** Bir nesnenin uzunluğunu standart olmayan ölçü birimleri türünden tahmin eder ve ölçme yaparak tahminlerinin doğruluğunu kontrol eder.
2	**M.2.3.1.1.**Standart olmayan farklı uzunluk ölçü birimlerini birlikte kullanarak bir uzunluğu ölçer ve standart olmayan birimin iki ve dörde bölünmüş parçalarıyla tekrarlı ölçümler yapar. **M.2.3.1.2.** Standart uzunluk ölçme araçlarını tanır ve kullanım yerlerini açıklar. **M.2.3.1.3.** Uzunlukları standart araçlar kullanarak metre veya santimetre cinsinden ölçer. **M.2.3.1.4.** Uzunlukları metre veya santimetre birimleri türünden tahmin eder ve tahminini ölçme sonucuyla karşılaştırarak kontrol eder. **M.2.3.1.5.** Standart olan veya olmayan uzunluk ölçü birimleriyle, uzunluk modelleri oluşturur. **M.2.3.1.6.** Uzunluk ölçme birimi kullanılan problemleri çözer.
3	**M.3.3.1.1.** Bir metre, yarım metre, 10 cm ve 5 cm için standart olmayan ölçme araçları tanımlar ve bunları kullanarak ölçme yapar. **M.3.3.1.2**. Metre ile santimetre arasındaki ilişkiyi açıklar ve birbiri cinsinden yazar. **M.3.3.1.3.** Cetvel kullanarak uzunluğu verilen bir doğru parçasını çizer. **M.3.3.1.4.** Kilometreyi tanır, kullanım alanlarını belirtir ve kilometre ile metre arasındaki ilişkiyi fark eder. **M.3.3.1.5.** Metre ve santimetre birimlerinin kullanıldığı problemleri çözer. **M.3.3.2.1.** Nesnelerin çevrelerini belirler. **M.3.3.2.2.** Şekillerin çevre uzunluğunu standart olmayan ve standart birimler kullanarak ölçer. **M.3.3.2.3.** Şekillerin çevre uzunluğunu hesaplar. **M.3.3.2.4.** Şekillerin çevre uzunlukları ile ilgili problemleri çözer.
4	**M.4.3.1.1.** Standart uzunluk ölçü birimlerinden milimetrenin kullanım alanlarını belirtir. **M.4.3.1.2.** Uzunluk ölçme birimleri arasındaki ilişkileri açıklar ve birbiri cinsinden yazar. **M.4.3.1.3.** Doğrudan ölçebileceği bir uzunluğu en uygun uzunluk ölçü birimiyle tahmin eder ve tahminini ölçme yaparak kontrol eder. **M.4.3.1.4.** Uzunluk ölçme birimlerinin kullanıldığı en çok üç işlem gerektiren problemleri çözer. **M.4.3.2.1.** Kare ve dikdörtgenin çevre uzunlukları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklar. **M.4.3.2.2.** Aynı çevre uzunluğuna sahip farklı geometrik şekiller oluşturur. **M.4.3.2.3.** Şekillerin çevre uzunluklarını hesaplamayla ilgili problemleri çözer.

Ortaokula geçildiğinde öğrenciler beşinci sınıfta tüm standart ölçme birimlerini öğrenmektedirler. Bu birimler arasında dönüşümler yapmakta ve ilgili problemleri çözmektedirler. Ayrıca çokgenlerin çevre uzunluklarını hesaplamakta, aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturmaktadırlar. Bu düzeyde de çevre uzunluğunu tahmin etmeye yönelik çalışmalara yer verilmektedir. Altıncı sınıf düzeyinden itibaren çember ve çember parçasının uzunluğunu ölçmeye de değinilmektedir (MEB, 2018, s.

56-69). Tablo 2.3.'de ortaokul düzeyinde uzunluk ve çevre ile ilgili kazanımlar listelenmektedir:

Tablo 2.3. *Ortaokul düzeyinde (5-8. sınıf) uzunluk ve çevre ile ilgili kazanımlar*

Sınıf Düzeyi	Kazanımlar
5	**M.5.2.3.1.** Uzunluk ölçme birimlerini tanır; metre-kilometre, metre-desimetre-santimetre-milimetre birimlerini birbirine dönüştürür ve ilgili problemleri çözer. **M.5.2.3.2.** Üçgen ve dörtgenlerin çevre uzunluklarını hesaplar, verilen bir çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturur.
6	**M.6.3.3.2.** Bir çemberin uzunluğunun çapına oranının sabit bir değer olduğunu ölçme yaparak belirler. **M.6.3.3.3.** Çapı veya yarıçapı verilen bir çemberin uzunluğunu hesaplamayı gerektiren problemleri çözer.
7	**M.7.3.3.2.** Çemberin ve çember parçasının uzunluğunu hesaplar.
8	Bu düzeyde çevre kavramına ait doğrudan bir kazanım bulunmamaktadır. Ancak farklı konular içinde çevre kavramına değinilmektedir.

Matematik öğretim programları incelendiğinde ülkemizde öğrencilerin alan kavramı ile ilk olarak üçüncü sınıfta karşılaştıkları görülmektedir. Bu sınıf düzeyinde öğrencilerden şekillerin alanını standart olmayan birimlerle kaplayarak ölçmeleri beklenmektedir. Programda bu düzeyde iki farklı şeklin eş birimlerle kaplanarak alanlarının karşılaştırılmasına yönelik çalışmalara yer verilmesi önerilmektedir. Dördüncü sınıf düzeyinde de alan ölçmede tahmine yer verilmekte ve öğrencilerden tahminlerini birimleri sayarak kontrol etmeleri istenmektedir. Düzlemsel bölgelerin alanlarının, bu alanı kaplayan birim karelerin sayısı olduğunun öğrenciler tarafından keşfedilmesi beklenmektedir. Burada satır ve sütun ilişkisine dikkat çekilerek kare ve dikdörtgenin alanını toplama ve çarpma işlemleri ile ilişkilendirmeleri gerekmektedir (MEB, 2018, s. 42-49). Tablo 2.4.'de ilkokul düzeyinde alan ile ilgili kazanımlar gösterilmektedir.

Tablo 2.4. *İlkokul düzeyinde (1-4. sınıf) alan ile ilgili kazanımlar*

Sınıf düzeyi	Kazanımlar
3	**M.3.3.3.1.** Şekillerin alanını standart olmayan uygun malzeme ile kaplar ve ölçer. **M.3.3.3.2.** Bir alanı, standart olmayan alan ölçme birimleriyle tahmin eder ve birimleri sayarak tahminini kontrol eder.
4	**M.4.3.3.1.** Şekillerin alanlarının, bu alanı kaplayan birim karelerin sayısı olduğunu belirler. **M.4.3.3.2.** Kare ve dikdörtgenin alanını toplama ve çarpma işlemleri ile ilişkilendirir.

Ortaokulda öğrenciler alanı standart birimlerle ölçmeye başlamaktadırlar. Beşinci sınıf düzeyinde alanı santimetrekare ve metrekare cinsinden ölçmeye ve tahmin etmeye başlarlar. Ayrıca verilen bir alan ölçüsüne sahip farklı dikdörtgenler oluşturabilirler. Dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamayı gerektiren problemleri çözebilirler. Altıncı sınıf düzeyine gelindiğinde dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamada kullandıkları yöntemleri bir adım öteye taşıyarak paralelkenar ve üçgenin alan ölçülerini hesaplamayı öğrenirler. Kullandıkları yöntemleri formüle ederek çeşitli problem durumlarında uygulayabilirler. Standart alan ölçme birimlerini ve arazi ölçme birimlerini tanıyıp bunlar arasındaki dönüşümleri yapabilirler. Farklı geometrik şekillerin birleşiminden oluşan alanların ölçüsünü hesaplamayı gerektiren problemleri çözebilirler (MEB, 2018, s. 56-62).

Yedinci sınıf düzeyinde ise daha önce oluşturdukları alan ölçme kurallarını biraz daha geliştirerek eşkenar dörtgen ve yamuğun alan ölçüsü bağıntılarını oluşturup, bunlarla ilgili problemleri çözebilirler. Bu problemlerin bileşik şekillerin alan ölçülerini hesaplamayı, çevre uzunluğu ile alan ölçüsü arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmayı gerektirmesi önerilmektedir. Sekizinci sınıf düzeyine gelindiğinde ise geometrik cisimlerin yüzey alanı bağıntılarının oluşturulması istenmektedir (MEB, 2018, s. 69-75). Tablo 2.5.'de ortaokul düzeyinde alan ile ilgili kazanımlar gösterilmektedir.

Tablo 2.5. *Ortaokul düzeyinde (5-8. sınıf) alan ile ilgili kazanımlar*

Sınıf düzeyi	Kazanımlar
5	**M.5.2.4.1.** Dikdörtgenin alanını hesaplar, santimetrekare ve metrekareyi kullanır. **M.5.2.4.2.** Belirlenen bir alanı santimetrekare ve metrekare birimleriyle tahmin eder. **M.5.2.4.3.** Verilen bir alana sahip farklı dikdörtgenler oluşturur. **M.5.2.4.4.** Dikdörtgenin alanını hesaplamayı gerektiren problemleri çözer. **M.5.2.5.3.** Dikdörtgenler prizmasının yüzey alanını hesaplamayı gerektiren problemleri çözer.
6	**M.6.3.2.1.** Üçgenin alan bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer. **M.6.3.2.2.** Paralelkenarın alan bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer. **M.6.3.2.3.** Alan ölçme birimlerini tanır, m^2–km^2, m^2–cm^2–mm^2 birimlerini birbirine dönüştürür. **M.6.3.2.4.** Arazi ölçme birimlerini tanır ve standart alan ölçme birimleriyle ilişkilendirir. **M.6.3.2.5.** Alan ile ilgili problemleri çözer.
7	**M.7.3.2.4.** Eşkenar dörtgen ve yamuğun alan bağıntılarını oluşturur, ilgili problemleri çözer. **M.7.3.2.5.** Alan ile ilgili problemleri çözer. **M.7.3.3.3.** Dairenin ve daire diliminin alanını hesaplar.
8	**M.8.3.4.3.** Dik dairesel silindirin yüzey alanı bağıntısını oluşturur; ilgili problemleri çözer.

Yukarıda çevre ve alan kavramlarının matematik öğretim programındaki yerinden bahsedilmiştir. Görüldüğü gibi bu kavramlar okul öncesinden başlayarak ilkokul ve ortaokul boyunca devam eden bir süreçte ele alınmaktadır. Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin çevre ve alan kavramlarını anlayışları kavram imajı kuramsal çerçevesi kapsamında incelenmiştir. Aşağıdaki bölümde kavram imajı kuramsal çerçevesi ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

2.3. Kavram İmajı ve Kavram Tanımı

Hayatımız boyunca birçok farklı fikir, olay ve nesne ile karşılaşmaktayız. Bir insanın tüm bunları yaşamı boyunca tek tek ele alıp özelliklerini öğrenebilmesi pek mümkün değildir. Bu nedenle birbirine benzeyen yönleri olanları sınıflandırıp onlara birer isim vermekteyiz. Bu şekilde ortak özelliklerine göre sınıflandırılarak isimlendirilen fikir, olay veya nesnelere kavram adı verilmektedir (Çetin, 2009).

Kavram genel anlamda "Bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımı" olarak, eğitim bilimlerinde ise "1. Bir şey üzerinde birçok ayrı algıları kapsayan genel düşünce. 2. Bir olay, bir nitelik ya da nicelik üzerinde oluşan zihinsel imge. 3. Kapsamı ve içeriği bir im ya da sözle anlatılarak anlam kazandırılan soyut düşünce." olarak ifade edilmektedir (www.tdk.gov.tr, alıntı tarihi: 10.05.2022). Bu tanımlardan anlaşılacağı üzere kavram kişilerin düşünce ve algılarıyla ilgilidir. Kişiler arasında yaşantıları, deneyimleri, değer yargıları, karakterleri, zihinsel yapıları, eğitimleri gibi faktörlerin etkisiyle bireysel farklılıklar oluşmaktadır. Bu bireysel farklılıklar da kişilerin algılarını ve dolayısıyla sahip oldukları kavramları çeşitlendirmektedir. Bu nedenle kavramlar aynı kültür içinde yetişmiş olsalar bile kişiden kişiye farklılık gösterebilmektedir.

Günlük hayatta karşımıza çıkan hemen hemen tüm nesne, olgu veya duygu zihnimizde bir kavramla temsil edilmektedir. Kavramlar günlük hayatın olduğu gibi öğrenme sürecinin de ayrılmaz bir parçasıdır. İlk ve ortaokul döneminde öğrenciler nerdeyse tüm temel matematiksel kavramlarla karşılaşmaktadır. Fakat öğrencilerin matematiksel kavramlarla ilgili anlayışlarını tanımlamak kolay değildir. Öğrencilerin anlayışlarını keşfetmek amacıyla kullanılan kavramsal araçlardan biri de kavram imajlarıdır (Tall ve Vinner, 1981 ve Vinner, 1983).

Kavram imajı (concept image) ve kavram tanımı (concept definition) ifadelerinden literatürde ilk olarak bahseden araştırmacılar Vinner ve Hershkowitz (1980) tir.

Araştırmacılar öğrencilerin geometrik şekilleri ve aralarındaki ilişkileri nasıl algıladıklarını analiz eden bir çalışma yürütmüşlerdir (Vinner ve Hershkowitz, 1980). Ardından Tall ve Vinner (1981) yayınladıkları makale ile günümüzde kullanılan yapı etrafındaki tüm geçerli terminolojiyi tanıtmışlardır (Bingölbali ve Monaghan, 2008, s.20). Kavram imajı araştırmacılar tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: "Kavram imajı, tüm zihinsel resimleri ve birbiriyle ilişkili özellik ve süreçleri içeren, kavram ile bağlantılı tüm bilişsel yapıdır" (Tall ve Vinner 1981, s. 152). Burada ifade edilen "zihinsel resimler" şema, resim, grafik, sembol gibi farklı temsil türlerini içerebilir. Bu model matematik öğrenmeyi etkileyen bilişsel süreçleri aynı anda matematiksel özellikleri de dikkate alarak analiz etme imkânı verir (Rösken ve Rolka, 2007, s. 201).

Kavram imajı, bireyin "kavrama ait olan ve olmayan örnekler ile ilgili deneyimleri" sonucu oluşmaktadır (Vinner ve Dreyfus, 1989, s. 356). Uzun yıllar boyunca yaşanan deneyimler sonucunda oluşmaları kavram imajlarını dinamik ve kişiye özel kılmaktadır (Bingölbali ve Monaghan, 2008, s. 20). Örneğin "alan" kavramından bahsedildiğinde her bireyin zihninde oluşan görüntü farklı olabilmektedir.

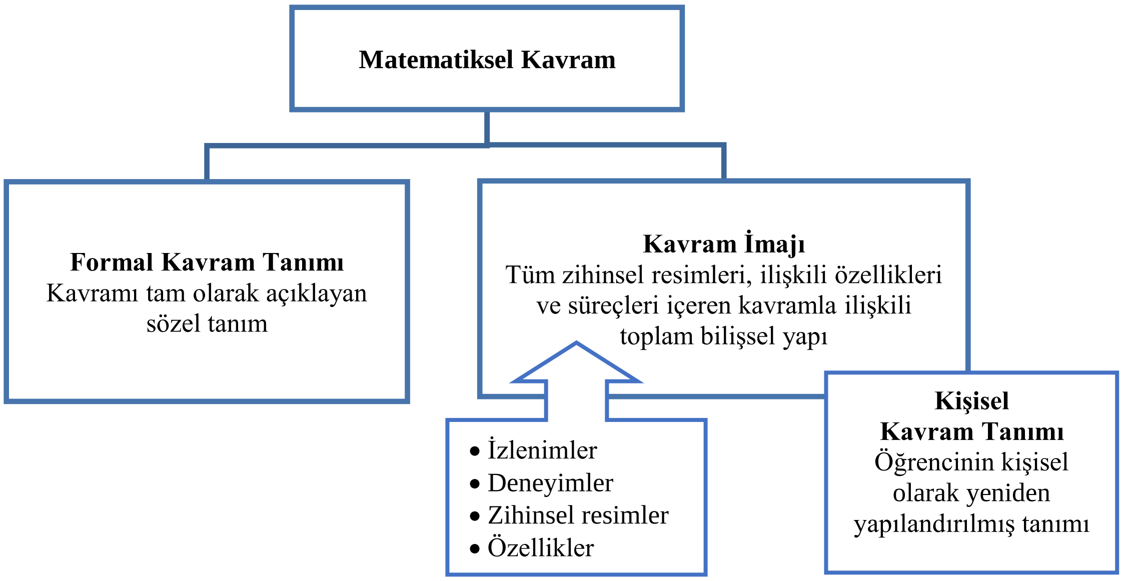
Bir kavramı öğrenirken birey zihninde o kavramla ilgili kavram imajını biçimlendirmekte, eski fikirlerini yeni bilgilerle yeniden düzenlemektedir. Bu süreçte kavram imajı geliştikçe, her zaman tutarlı olması gerekmez. Farklı zamanlarda farklı uyaranlar, kavram imajının farklı parçalarını harekete geçirebilmekte, bunları tutarlı bir bütün olmayacak şekilde geliştirebilmektedir (Tall ve Vinner, 1981, s. 152). Kavram imajlarının önemli ve belirleyici bir parçasını sezgisel fikirler oluşturabilmektedir. Bu fikirler kendiliğinden gerçekleştiği için çoğunlukla analitik doğrulama yapmaya gerek duyulmadan içselleştirilmektedir (Rösken ve Rolka, 2007, s. 202).

Kavramla ilişkili tüm zihinsel özellikler ister bilinçli ister bilinçsiz olsun, gelecekteki çatışma tohumlarını içerseler de kavram imajına dahil edilmektedir (Tall ve Vinner, 1981, s. 152). Burada kavramla ilişkilendirilen öğelerin, dolayısıyla kavram imajının doğru olmasına gerek yoktur. Birey, kavrama atfettiği hatalı veya kısmen doğru özellikleri, anlamları ve kavram yanılgılarını içeren matematiksel olarak yanlış kavram imajları oluşturabilir (Bingölbali, 2016, s. 136-137). Örneğin bir öğrenci alan kavramına "bir şeklin alanı iki kenar uzunluğunun toplamıdır" şeklinde bir anlam atfedebilir. Bu örnekte olduğu gibi öğrencinin alan kavramına ait kavram imajı kendisi için anlamlı olsa da alan kavramının formal tanımı ile uyumlu olmayabilir. Kavram imajı, bireyin bile farkında olmadığı çelişkili yönleri içerebilir, tutarlı bir yapısı olmayabilir. Bu nedenle, öğrencilerin kavram imajlarının belirlenmesi onların bir kavramı nasıl anladıklarını, kavramla ilgili eksik, sınırlı ve hatalı öğrenmelerini belirlemek açısından önemlidir.

Yukarıda açıklandığı gibi kavram imajı oldukça kapsamlı bir yapıdır. Bu nedenle içeriğindeki tüm bilgilerin öğrenciler tarafından karşılaştıkları matematiksel görevlerde uygulamak için eşzamanlı olarak çağırılması olası değildir (Bingölbali ve Monaghan, 2008, s. 21). Birey tarafından belirli bir zamanda, belirli bir görevde uygulamak için çağırılan bilgiye uyandırılmış kavram imajı denilmektedir. Farklı zamanlarda görünüşte birbiriyle çelişkili imajlar uyandırılabilir. Çelişkili yönler aynı anda uyandırıldığında gerçek bir çatışma veya karışıklık duygusu hissedilebilir (Tall ve Vinner, 1981, s. 152). Matematiksel kavramlara ilişkin öğrencilerin uyandırılmış kavram imajları hakkında fikir sahibi olmak pek de kolay değildir. Ancak bir kavramı oluşturma sürecinde öğrenciler gözlemlenerek elde edilen verileri yorumlamak için geçerli yollar bulunabilir (Bingölbali ve Monaghan, 2008, s. 21).

Kavram tanımı "ilgili kavramı açıklamak/belirlemek için kullanılan ve kelimelerden oluşan bir yapı" şeklinde açıklanmaktadır (Tall ve Vinner, 1981, s. 52). Kavram tanımı genellikle matematiksel bir kavramı açıklamak için öğretmenler veya ders kitapları tarafından kullanılmaktadır. Sadece kelimelerden oluşabileceği gibi semboller de içerebilmektedir (Bingölbali ve Monaghan, 2008, s. 20). Öğrencilerin yaptıkları kavram tanımları ise matematik otoritelerince kabul edilen formal tanımlardan oldukça farklı olarak kavrama ilişkin kendi açıklamaları şeklinde olabilmektedir. Bu durum genellikle onların sahip oldukları kavram imajlarıyla ilişkilendirilmiştir (Tall ve Vinner, 1981, s. 152).

Kavram imajı ve kavram tanımı modeli ile matematiksel bilginin hem formal tanımlarla hem de öznel yapılarla verilen yönleri farklılaştırılmış olur. Şekil 2.3.'de kavram imajı ve kavram tanımı ile onlarla ilişkili fikirler özetlenmektedir.



Şekil 2.3. *Kavram imajı ve kavram tanımı yapısı (Rösken ve Rolka, 2007, s.184)*

Kavramlara ait tanımlar eğer bireyin kendi zihinsel süreçleri sonunda oluşturulmamışsa, dışarıdan hazır olarak alınıp ezberlendiyse öğrenciler tarafından uzun vadede unutulmaktadır (Vinner, 1991). Bu nedenle pek çok öğrenci kavram tanımları konusunda zorluk yaşamaktadır (Ubuz, 1999). Bir kavramın tanımını bilmek her zaman o kavramın anlaşıldığını göstermemektedir. Birey ancak kavrama ait doğru kavram imajına sahip olduğunda onu anlamış, öğrenmiş olur. Bu nedenle öğrencilerin kavramları doğru bir şekilde öğrenebilmesi için doğru kavram imajlarına sahip olmaları önemlidir.

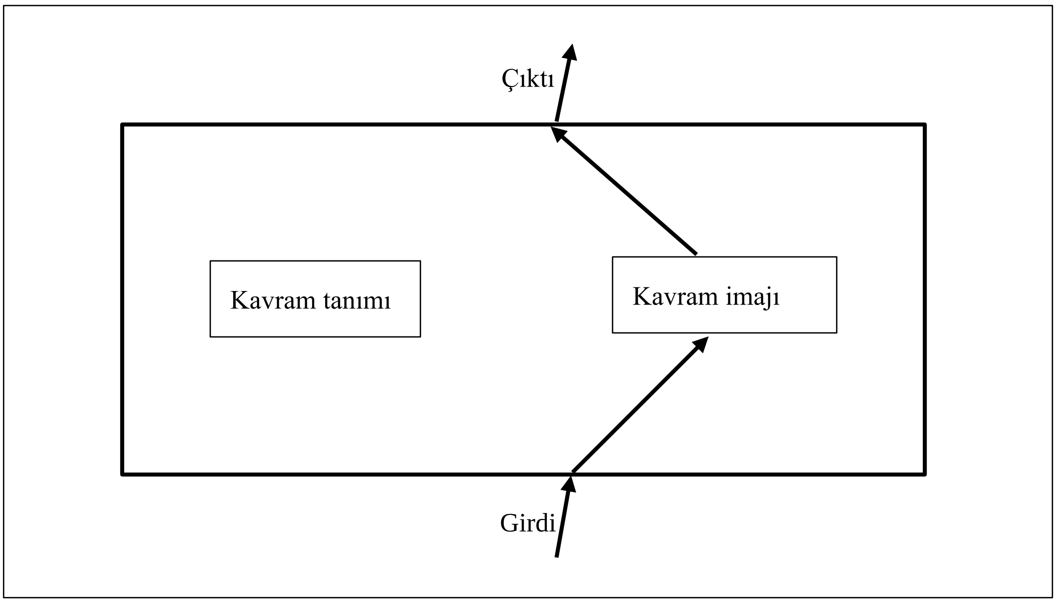
Kavram imajı-kavram tanımı teorik çerçevesine göre bireyin zihninde, sahip olduğu her bir kavrama ait, kavram imajı ve kavram tanımı olmak üzere iki farklı hücre bulunduğu düşünülmektedir. Birey kavramla ilgili problemlerle karşılaştığında, sahip olduğu zihinsel yapı ve görevin amacına bağlı olarak, bu hücreler aktif hale gelmektedir. Birey, karşılaştığı problemi çözebilmek amacıyla sadece kavram tanımı ya da kavram imajı hücresini kullanabileceği gibi bu iki hücre arasında ilişki de kurabilmektedir. Kavram tanımı ve kavram imajı hücreleri arasında ilişki kurulması durumunda öğrenme gerçekleşmektedir (Vinner, 1983, s. 294-296). Söz konusu modelde, öğrenme sürecinde öğrencilerin yanlış anlamalarının neden ortaya çıktığı açıklanmaktadır. Kavram oluşturma sürecinde kavram imajı ile kavram tanımı arasındaki ilişkinin karşılıklı olduğunu göstermektedir. Şekil 2.4.'de kavram imajı ile kavram tanımı arasındaki karşılıklı ilişki gösterilmektedir.

Şekil 2.4. *Kavram oluşumu sırasında kavram imajı ve kavram tanımı arasındaki ilişki (Vinner, 1994,s.70)*

Bu durumun aksine öğretmenler, Şekil 2.5.'de gösterildiği gibi, kavram tanımından kavram imajına tek yönlü bir ilişki olduğunu varsaymaktadırlar (Vinner, 1994, s. 70). Buradaki varsayıma göre kavram tanımının kavram imajının içeriğini kontrol etmesi yeterli bir kavram oluşumunu sağlayacaktır. Ancak araştırmacılar kavram imajının genellikle tanımlara değil tipik örneklere dayandığına dikkat çekmektedir. Öğrencilerin kavrama atfettiği bu tipik örneklerin formal tanıma uygun örnekler olmasına gerek yoktur.

Şekil 2.5. *Öğretmenler tarafından kavram oluşumu sırasında kavram imajı ile kavram tanımı arasında beklenen ilişki (Vinner ve Dreyfus, 1989, s. 356)*

Öğrenciler karşılarına çıkan problemlerde kavram tanımından ziyade kendi zihinsel süreçlerinin ürünü olan kavram imajlarını kullanma eğilimi göstermektedirler (Tall ve Vinner, 1981). Sahip oldukları kavram imajı formal tanımdan oldukça uzak olsa bile, zihinlerinde oluşturdukları bu yapı onlara dışarıdan hazır olarak verilen bilgiden daha değerli gelmektedir. Bu nedenle bir kavramın öğretimine formal tanımlarla başlandığında bu tanımlar kolaylıkla unutulmaktadır. Bir problem durumunda ilk akla gelen, formal tanıma göre eksik veya hatalı da olsa, kavram imajı olmaktadır (Vinner, 1983). Eğer, öğrenci kavramın formal tanımını anlayıp içselleştirebilirse, kavram imajını tanımı da içerecek şekilde yeniden düzenleyebilir (Bingölbali, 2016, s. 144-145). Şekil 2.6.'da öğrenciler problemler üzerinde çalışırken kavram tanımı ve kavram imajının üstlendiği rol gösterilmektedir.



Şekil 2.6. *Problem çözme sırasında kavram tanımı ve kavram imajı (Vinner, 1994, s.73)*

Kavram imajının veya kavram tanımının başka bir kısmı ile çatışabilecek bir parçası potansiyel çatışma faktörü olarak adlandırmaktadır. Bu tür faktörler, koşullara bağlı olarak herhangi bir bilişsel çatışmaya yol açmadan, farklı veya aynı varlıklar olarak kabul edilebilirler. Bazı durumlarda birey tarafından birbiriyle çatışan kavram imajı veya kavram tanımı bölümleri aynı anda uyandırılabilir. Bu durum ise bilişsel çatışma faktörü olarak adlandırılmıştır (Tall ve Vinner, 1981, s. 153-154). Burada oluşan bilişsel çatışma zaman içinde bireyde rahatsızlık yaratıp onu yaşadığı çatışmanın nedenini aramaya yöneltebilir. Bu arayışın sonucunda çoğu zaman birey doğru kavram imajı veya kavram tanımını uyandırabilir (Yiğit Koyunkaya, 2016, s. 1031).

Matematiksel bir kavram veya süreç daha önceden bilinen diğer fikir, olgu veya prosedürlerle ilişkilendirildiğinde anlaşılmış olur. Kavramlar arasındaki ilişkileri tanımak ve kurmak bir kavramın anlaşılıp öğrenilmesi için anahtar fikirlerdir (Yiğit Koyunkaya, 2016, s. 1030). Dolayısıyla bir kavramın doğru öğrenilip öğrenilmemesi sadece o kavramı etkileyen bir durum değildir. Yeni öğrenilen bir kavram daha önce yanlış öğrenilmiş bir kavramla ilişkilendirildiğinde bu durum yeni kavramın da yanlış yapılandırılmasına neden olacaktır (Tall ve Vinner, 1981). Bu nedenle her bir kavramın yapılandırılması üzerinde özenle durulması gerekmektedir. Kavramların doğru bir şekilde anlaşılması matematiği öğrenme ve anlama için önemli olduğu kadar matematiksel konularla ilgili iletişim kurmakta da önemlidir. İletişim sırasında bireyler genellikle bahsedilen kavramla ilgili kavram imajlarından faydalanırlar (Güzel, 2014).

Matematiksel kavramların öğrenilmesi, kavramla ilgili zengin ve kapsamlı kavram imajları oluşturulmasını gerektirmektedir. Kavram imajları, bireylerin matematiksel bir düşüncenin arkasındaki fikirleri anlamasını sağlayan, kendi oluşturdukları ilişkiler ağını içermektedir. Ancak, kavram imajı oluşturma sürecinde formal tanımların önemli noktaları yeterince temsil edilmezse, öğrencilerin öğrenmelerinde zorluklar meydana gelebilir (Rösken ve Rolka, 2007, s. 184-201). Bireyler kavram imajlarında formal tanımın önemli noktalarını içerecek şekilde kendi fikirlerini ve ilişki ağlarını geliştiremezlerse kavramla ilgili yapılan tüm açıklamalar kolayca unutulacaktır.

Genellikle sınıflardaki öğretim sırasında, önce ele alınan kavramın tanımı verilmekte, ardından çeşitli etkinliklerle bu tanım pekiştirilmektedir. Bu durum sonucunda öğrencilerin birçoğu sözü edilen kavramları ya hiç öğrenememekte ya da daha kötüsü yanlış öğrenmektedirler. Birçoğu sadece kendilerine sunulan bilgiyi ezberleme yolunu tercih etmektedir (Vinner, 1983). Bu tarz bir öğretim yerine öğrencilerin matematiksel kavramlar hakkında kendilerince oluşturacakları fikirler, onlar açısından daha anlaşılır ve kalıcı olacaktır.

Uzunluk, çevre ve alan kavramları öğrencilerin günlük hayatlarında pek çok durumda karşılarına çıkmaktadır. Bu nedenle bu kavramlarla ilgili öğrencilerin sahip oldukları kavram imajlarının belirlenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu sayede öğrencilerin bu kavramlarla ilgili zihinlerindeki yapının nasıl oluştuğu, ne derce doğru olduğu, formal tanımlara göre hangi eksiklik ve hataları barındırdığı, öğrenim hayatları boyunca edindikleri hangi tecrübelerin bunlara kaynaklık etmiş olabileceği gibi birçok durumun açıklığa kavuşması beklenmektedir. Küçük yaştaki çocukların bu kavramları nasıl oluşturduğu ile ilgili yapılmış pek çok kapsamlı çalışma bulunmaktadır. Fakat bu kavramların daha sonraki aşamalarda nasıl değiştiğini gösteren çok az çalışma vardır (Eames, 2014, s. 2). Ortaokul ve daha sonraki düzeyde yapılan çalışmalarda sıklıkla öğrencilerin bu kavramlarla ilgili yapılan testlerdeki başarı düzeyleri ve kavram yanılgıları incelenmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin çevre ve alan kavramlarıyla ilgili anlayışlarını ortaya çıkarmak için kavram imajlarının yanında düşüncelerinin doğruluğunu savunurken kullandıkları kanıt şemaları da belirlenmiştir. Aşağıdaki bölümde kanıt şemaları ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

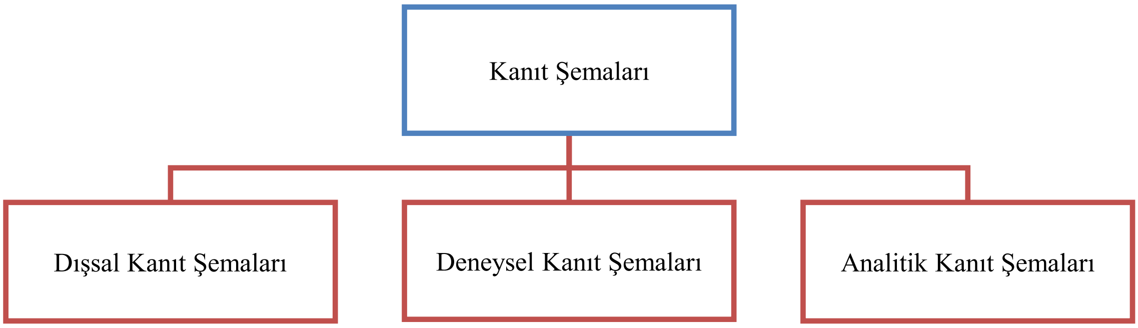
2.4. Kanıt ve Kanıt Şemaları

Matematiksel kanıt bir ifadenin doğruluğunu ortaya koymak ve neden doğru olduğunun mantıksal bir açıklamasını yapmaktır (Baki, 2006; Altıparmak ve Öziş, 2005). Matematiksel kanıtın pek çok kullanım amacından bazıları bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistem içine yerleştirmek, bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek veya ikna etmektir (Almeida, 2003). Tüm bu amaçlarının yanında kanıt, öğretmenlerin matematik derslerinde öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl anladıklarını kavramalarına da yardımcı olabilir. Bu nedenle ileri düzey matematik derslerinin amaçları arasında öğrencilere kanıtlama becerisi kazandırmak da bulunmaktadır (Weber, 2001).

Kanıt okul matematiğinde bir iddianın doğruluğunun sistematik bir şekilde gösterilmesi, neden doğru olduğunun açıklanması işlevini üstlenir. Kanıtlama sürecinde öğrenciler çeşitli denemeler yaparak keşfeder, analitik düşünme becerileri gelişir ve matematiğin estetik yönünün farkına varır (Dede ve Karakuş, 2014). Öğretmenler için öğrencilerinin matematiksel düşünce ve fikirlerini kendi kendilerine, arkadaşlarına ve öğretmenlerine nasıl kanıtladıklarını anlamak oldukça önemlidir. Çünkü, öğrencilerin çözümlerinin doğruluğunu destekleyecek kanıtlar sunmaları konu hakkındaki düşünce yapılarını ortaya çıkarmakta, matematiksel düşüncelerinin değişmesi ve gelişmesi için bir fırsat oluşturmaktadır (Flores, 2002). Öğrencilerin çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamaya çalışırken kullandığı yöntemler farklı araştırmacılar tarafından çeşitli kategorilere ayrılmıştır. Bunlardan biri de kanıt şemalarıdır.

Kanıt şemaları hakkında ilk kez Sowder ve Harel (1998) tarafından bahsedilmiştir. Araştırmacılar öğrencilerin matematiksel problemlere verdikleri yanıtların doğruluğundan nasıl emin olduklarını ve bunları nasıl savunduklarını ele almışlardır. Öğrencilerin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri savunurken kullandıkları gerekçelendirme biçimlerini sınıflandırmış ve bunları kanıt şemaları olarak isimlendirmişlerdir. Buna göre kanıt şeması bireyin kendisini veya bir başkasını matematiksel bir durumun doğru veya yanlış olduğuna ikna ederken yaptığı açıklama, savunma ve kanıtları içeren düşünme süreçleridir (İskenderoğlu, 2016, s. 66-67).

Bireyin bir varsayımın doğruluğunu anlamak ve buna karşısındaki kişiyi ikna etmek için kullandığı düşünme süreçleri kanıt şemalarını oluşturmaktadır. Kanıt şemaları üç temel şema ve bunların alt şemalarından oluşmaktadır: dışsal kanıt şemaları (otoriter, alışkanlık edinilmiş ve sembolik); deneysel kanıt şemaları (algısal ve örnek temelli) ve analitik kanıt şemaları (dönüştürülebilen ve aksiyomatik). Şekil 2.7.'de üç temel kanıt şeması gösterilmektedir.

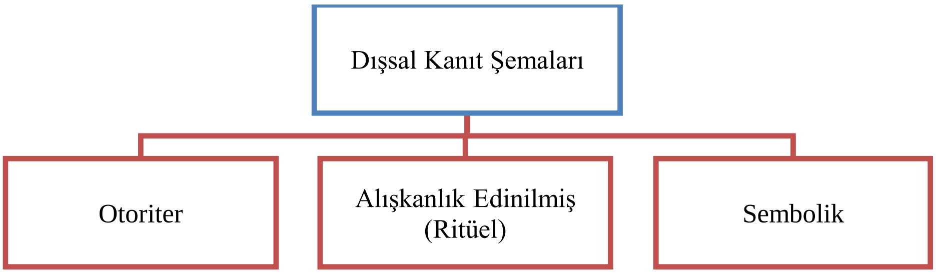


Şekil 2.7. *Temel kanıt şemaları (Sowder ve Harel, 1998)*

Kanıt şemaları birbirinden bağımsız değildir; dolayısıyla bireyler aynı anda birden fazla kanıt şemasına sahip olabilmektedir. Kanıt şemaları, bireylerin matematiksel gelişimindeki ve kanıtlama sürecindeki davranışlarının gözlemlenmesi sonucunda ortaya çıkarılan bir bilişsel basamağı, zihinsel beceri ve yeteneği ifade etmektedir (Dede ve Karakuş, 2014). Aşağıda sırasıyla dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemaları ve her birinin alt şemaları ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

2.4.1. Dışsal kanıt şemaları

Bir öğrenci dışsal bir kaynak tarafından ikna ediliyorsa veya öğrenci başkalarını bu dış kaynağı referans göstererek ikna etmeye çalışıyorsa burada dışsal kanıt şemasından söz edilebilir. Bu kaynaklar genellikle kitaplar, aile, öğretmen veya daha başarılı bir arkadaş olabilmektedir (Sowder ve Harel, 1998). Öğrenci burada yaptığı çözümün doğruluğunu savunurken öğretmeninin söylediği bir sözü, kitaptan okuduğu bir cümleyi veya bir arkadaşını referans göstermektedir. Öğrenciler bu kaynaklara güvendikleri için onlardan öğrendikleri bilgilere de güvenmektedirler (Flores, 2002; İskenderoğlu, 2016, s. 71). Ancak bilginin tek kaynağı dışsal bir otorite olduğunda ve keşfetme yerine ezberlenen kurallar uygulandığında öğrencilerin matematiğe yönelik eleştirel düşünme becerileri ve matematiğe yönelik güvenleri gelişememektedir (Dede ve Karakuş, 2014). Dışsal kanıt şemaları üç alt başlıkta ele alınmaktadır. Şekil 2.8.'de dışsal kanıt şemaları gösterilmektedir.



Şekil 2.8. *Dışsal kanıt şemaları (Sowder ve Harel, 1998)*

2.4.1.1. *Otoriter kanıt şeması*

Öğrenci düşüncesini savunurken öğretmen, ebeveyn, abi/abla, daha bilgili sınıf arkadaşı, ders kitabı, bir tür teknoloji gibi şeylere dayanıyorsa bu kanıt şemasını kullanıyordur. Tamamen kötü bir şema olmasa da öğrencinin dayandığı tek şema olmamalıdır. Öğrenci bilgiyi hatırlamaz ya da yanlış yorumlarsa bu şema onu hataya götürebilir. Bu oldukça yaygın olarak kullanılan, öğrenciler için vazgeçmesi zor bir kanıt şemasıdır. Bir otoriteye güvenmek kötü değilse de bunun sonucunda öğrenciler kendi zihinsel yapılarını oluşturmakta zorlanmaktadırlar (Sowder ve Harel, 1998).

Sınıfında bir formülün veya teoremin neden doğru olduğu tartışılmayan öğrenciler yaptıkları matematiksel işlemlerin doğruluğunu kanıtlamayı pek düşünmemektedirler. Onlar için önemli olan sadece doğru sonuca ulaşmaktır. Çözüm sürecinde yaptıklarının ve buldukları sonuçların neden ve nasıl doğru olduğunu önemsememektedirler. Bu nedenle yaptıklarının doğruluğunu kanıtlamaları istendiğinde kaynak olarak öğretmenlerini, ders kitaplarını veya fikrine güvendikleri bir başkasını (anne, baba, arkadaş vb.) göstermektedirler. Bu kanıt şemasını kullanan öğrenci kullandığı formülün anlamını bilmeden uygulayabilmektedir. Onun için formülün anlamı değil, sorunun çözümüne ulaştırması önemlidir. Formülü daha önce sınıfta öğretmeni kullanmıştır, dolayısıyla bu formül de yaptığı işlem de doğrudur. Bundan başka kanıta ihtiyaç duymamaktadır. Böyle düşünen öğrenci sadece formülü ezberlemiş, kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirememiştir (İskenderoğlu, 2016, s. 71-72).

2.4.1.2. *Alışkanlık edinilmiş (ritüel) kanıt şeması*

Öğrenci bir konuyu yargılarken düşüncenin doğruluğundan ziyade görünüşüne odaklanıyorsa bu kanıt şemasını kullanıyordur. Bu kanıt şemasını kullanan öğrenciler karşılarındakileri ikna etmek için akıl yürütmek yerine önceden öğrendikleri gerekçeleri öne sürmektedirler. Daha önceden öğrendikleri çözüm yollarını ve kalıpları çözümlerinin doğruluğunu savunurken dayanak olarak göstermektedirler. Öğrenciler alışılagelmiş yöntemleri gördüklerinde bunların doğruluğunu veya duruma uygunluğunu düşünmeden hareket edebilmektedirler. İçeriğin matematiksel olarak doğruluğundan çok çözüm yolunun biçimsel olarak doğru olmasına odaklanmaktadırlar. Bu nedenle sadece biçimi doğru olsa da yanlış bir ifadeyi doğru kabul edebilmektedirler. Görünüşü esas alarak kanıtın doğruluğuna karar vermesi bireyin matematik eğitiminde kanıt yazma, anlama, üretme ve değerlendirmede yetersizliğe neden olmaktadır (Sowder ve Harel, 1998; İskenderoğlu, 2016, s. 72-73).

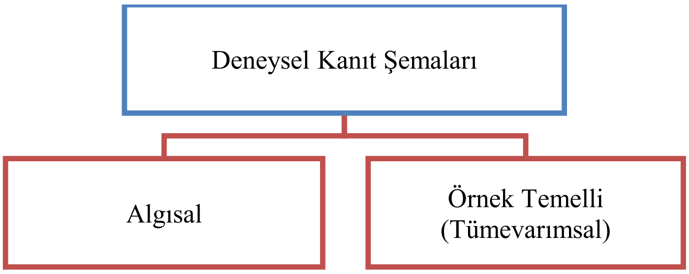
2.4.1.3. *Sembolik kanıt şeması*

Sembolik kanıt şeması anlamlara bakılmadan sadece sembollerin manipülasyonunu içerir. 19. yy. da yapılan matematiğin çoğu bu şemaya dayalıdır. Bu şemayı kullanan öğrenciler kanıt olarak sembolleri anlamsız bir şekilde kullanmaktadırlar. Öğrenciler sembolleri içinde bulundukları durumun nicelikleriyle ilişkisi yokmuş gibi veya olası işlevlerini düşünmeden kullanmakta, anlam ve işlevlerini yok sayarak sadece sembol olarak görmektedirler. Oysaki sembollerin böyle yanlış kullanımı sonucunda öğrenciler yanlış genellemeler yapabilmektedirler (Sowder ve Harel, 1998; İskenderoğlu, 2016, s. 73).

Sembolik kanıt şeması öğrencilerin okul yıllarında edindiği ve değiştirmesi çok güç bir şemadır. Bu şemanın araçsal (instrumental) öğrenme (Skemp, 1987) ve hesapsal yönlendirme (calculational orientation: ilişkilere, niceliklere ve durumlara dikkat etmeden sayılarla hesap yapmak) (Thompson, Philipp, Thompson ve Boyd, 1994) ile ilişkili olduğu söylenebilir (Flores, 2006). Öğrenci sembolleri matematiksel olarak anlamsız ve yüzeysel bir şekilde kullanırsa sembolik kanıt şemasını kullanmış olur. Fakat öğrenci sembolleri anlamlarını ve işlevlerini doğru bir şekilde bilerek kullanırsa dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanmış olur (İskenderoğlu, 2016, s. 73).

2.4.2. Deneysel kanıt şemaları

Deneysel kanıt şemasında fiziksel gerçeklerin veya duyusal deneyimlerin yardımıyla tahminlerin geçerliliği denetlenmektedir. Deneysel kanıt şeması öğrencilerin geçerlik için kullandıkları özel örnekleri ve sezgisel desenleri içermektedir. Bu şema okul çağından daha önce oluşmaya başlamakta ve okula başlandıktan sonra yavaş yavaş kullanımı azalmaktadır. Buna rağmen öğrencilerin oluşturdukları kanıtları etkilemeye devam etmektedir (Sowder ve Harel, 1998; İskenderoğlu, 2016, s. 75). Algısal ve örnek temelli olmak üzere iki alt şeması vardır. Şekil 2.9.'da deneysel kanıt şemaları gösterilmektedir.



Şekil 2.9. *Deneysel kanıt şemaları (Sowder ve Harel, 1998)*

2.4.2.1. *Algısal kanıt şeması*

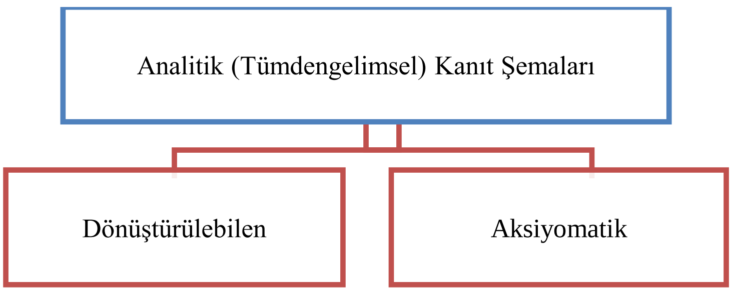
Bu kanıt şemasını kullanan öğrenciler basit bir çizimi, gelişmemiş zihinsel görüntüleri veya sezgilerini kaynak göstererek fikirlerinin doğrulunu savunurlar. Bir şeyin öğrencinin zihninde nasıl göründüğüne bağlıdır. Öğrencilerin görsel algıları bu şemaya dahil edilebilir; fakat burada öğrencilerin kullandıkları zihinsel temsiller oldukça yetersizdir. Öğrencinin zihninde bir kavram ile ilgili prototip bir görüntü olabilir, algısı tek bir çizime dayanabilir ve bunu diğerlerini ikna etmede de kullanabilir. Öğrenciden fikrinin doğruluğunu savunması istendiğinde zihnindeki bu görüntüyü çizerek düşüncesini savunmaktadır. Öğrencinin savunması matematiksel olarak yetersiz ve hatalı olsa da onun zihnindeki imaja uymaktadır (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; İskenderoğlu, 2016, s. 75).

2.4.2.2. *Örnek temelli (tümevarımsal) kanıt şeması*

Öğrenciler yeni bir kavramı oluştururken olduğu gibi matematiksel bir durumu anlamaya çalışırken veya onun doğu olup olmadığını belirlerken de örnekleri kullanabilmektedirler. Kanıtlamaya yeni başlayan öğrencilerin çok sık kullandığı bu yöntem örnek temelli kanıt şeması olarak isimlendirilmektedir. Bu kanıt şemasını kullanan öğrenciler kendilerine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek savundukları durumu destekleyen örneklerin yanı sıra aksi örneklerden de yararlanabilmektedirler. Genel bir matematiksel durumun doğruluğuna ikna etmek için özel örneklerden faydalanılması matematiksel olarak geçerli değildir. Ancak aksi örneklerle bir durumun doğruluğunun veya yanlışlığının gösterilmesi matematiksel olarak geçerlidir. Bireyin sahip olduğu imajı zenginleştirebildiği, yeni fikirler veya anlayışlar oluşturmasını sağlayabildiği için çok kötü bir şema olarak görülmemektedir (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; İskenderoğlu, 2016, s. 75-76).

2.4.3. Analitik (tümdengelimsel) kanıt şemaları

Bu kanıt şeması matematikte önerilen, uygun bir şemadır. Mantıksal çıkarımların anlamıdır (Sowder ve Harel, 1998). Burada düşünceyi savunmak için genel nedenler gösterilmekte ve kanıtlama süreci akıl yürütmeyi içermektedir. Bu akıl yürütmeler ise deneysel kanıt şemalarındaki gibi özel örneklere dayanmaktan çok matematiksel ilişkileri ve kuralları içermektedir (Flores, 2002). Bu kanıt şemasında öğrenci mantıksal tümdengelimi kullanarak matematiksel bir durumun doğruluğunu veya geçerliliğini savunmaktadır. Savunmada kullandığı nedenler aksiyomlar, teoremler ve akıl yürütmeyi kapsamaktadır. Öğrenci sadece aksiyom ve teoremleri kullanmakla yetinmeyip çeşitli stratejileri ve matematiksel ilişkileri de sürece dahil etmektedir (İskenderoğlu, 2016, s. 76). Analitik kanıt şeması dönüştürülebilen ve aksiyomatik kanıt şeması olmak üzere iki alt şemadan oluşmaktadır. Şekil 2.10'da analitik kanıt şemaları gösterilmektedir.



Şekil 2.10. *Analitik (tümdengelimsel) kanıt şemaları (Sowder ve Harel, 1998)*

2.4.3.1. *Dönüştürülebilen kanıt şeması*

Bu kanıt şemasını kullanan öğrenciler matematiksel bir durumun doğrulunu savunmak için tümdengelimsel akıl yürütme yapmaktadırlar. Bu kanıt şemasında öğrenci, bir desenin arkasında kalan, ilk bakışta fark edilmeyen yapıyı ortaya çıkarmaya çalışır. Öğrenci, karşılaştığı ifadenin içerisinde yer alan genellenebilir durumları inceleyerek belirlediği amaca yönelik zihinsel işlemler uygular. Bu süreçte şekil, tanım ve teoremler arasında geçişler yapar. Burada öğrenci akıl yürütmeyi kullanarak bir durumu genellemektedir. Bu kanıt şeması bir bağlam için genel zihinsel imgelerin oluşturulması ve dönüştürülmesini içermektedir. Buradaki dönüşümler açıklamalar doğrultusunda idare edilir. Nesneler üzerindeki işlemleri ve işlemlerin sonuçlarını tahmin etmeyi içerir. Bu tümdengelime (sonuç çıkarmaya) yol açar. Bu kanıt şemasının en belirgin üç özelliği genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarımı içermesidir (Sowder ve Harel, 1998; İskenderoğlu, 2016, s. 76-77).

Dışsal kanıt şemalarından biri olan sembolik kanıt şemasında öğrenciler nitel bir gerçekliğe sahip olmadan sembolleri ve işlemleri uygularlar. Sembolik akıl yürütme bir iddiayı kanıtlamak veya çürütmek amacıyla veya bir problemin çözümünde kullanıldığında ise dönüştürülebilen kanıt şemasına dahil olmaktadır. Bu kanıt şemasında bireyler matematiksel bir durumu cebirsel olarak gösterebilmekte, sembolleri manipüle edebilmektedirler (Sowder ve Harel, 1998).

2.4.3.2. *Aksiyomatik kanıt şeması*

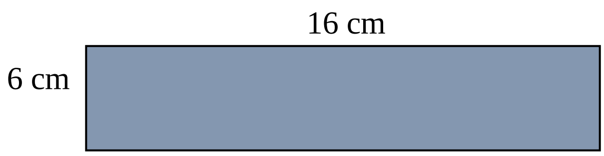
Aksiyomatik kanıt şeması, matematiksel tümevarımın değer kazanması ile ilgilidir. Dönüştürülebilen kanıt şemasının genişletilmiş halidir. Diğer bir deyişle dönüştürülebilen kanıt şeması aksiyomatik kanıt şeması için ön koşuldur. Bu kanıt şemasına sahip öğrenci dönüştürülebilen kanıt şemasının tüm özelliklerine sahip olmakla birlikte tanımsız terimleri, tanımları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini de kullanmaktadır. Ayrıca tanımsız terimleri ve aksiyomları içeren bir kanıtı da kolaylıkla anlayabilir. Matematiksel bir sistem içinde rahatlıkla çalışabilir. Yeni bir teoremi kanıtlarken sadece aksiyomları ve önceden kanıtlanmış teoremleri dikkate alır. Bunun yanında alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. Diğer kanıt şemalarına göre en üst düzeydedir (İskenderoğlu, 2016, s. 78).

Kanıt şemalarına ait kategoriler tam anlamıyla bir hiyerarşi yoktur. Dışsal kanıt şeması tümdengelimsel kanıt şemasının oluşturulması için gerekli değildir. Ancak dönüştürülebilen kanıt şeması aksiyomatik kanıt şeması için bir ön koşuldur. Ayrıca aksiyomatik kanıt şeması diğer kanıt şemalarına göre en üst düzeydedir (Sowder ve Harel, 1998). Kanıt şemalarının özetlenmiş hali Tablo 2.6.’da gösterilmiştir.

Tablo 2.6. *Kanıt şemalarının özeti (Lee, 1999, s. 33)*

Kanıt şeması		Kanıt şemasının özellikleri	Kanıt şemasının gerçekleşme yöntemleri
Dışsal kanıt şeması	**Otoriter kanıt şeması**	• Bir kanıtın neden doğru olduğu hakkında yeterli gerekçelendirme yapamamak • Bir kanıtın doğruluğunu belirleyememek	• Teoremleri ezberlemek • Formülleri uygulamak
	Alışkanlık edinilmiş kanıt şeması	• Yüzeysel gerekçeler sunmak • Bir kanıtın gerekçeleri arasında sınırlı bağlantı kurmak	• Tanıdık kanıt süreçleri kullanmak • Diğer kanıt süreçlerini taklit etmek
	Sembolik kanıt şeması	• Sembollerin anlamını anlamak • Sembolleri anlamsız gerekçeler olarak sunmak • Kanıtın sembollerin içinde olduğuna inanmak • Matematiksel sembolleri kullanarak kanıtlamak	• Matematiksel ifadeleri sembolleri kullanarak yazmak • İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak • Kanıtın ilk ve devam eden adımlarında sembolik manipülasyonlar yapmak
Deneysel kanıt şeması	**Örnek temelli kanıt şeması**	• Mantıksal gerekçelere sahip olmamak • Hızlıca sonuç çıkarmak • Kanıtın doğruluğunu örneklerle belirlemek	• Örnekler göstererek başkalarını ikna etmek • Kanıtı örnekler göstererek yapılandırmak
	Algısal kanıt şeması	• Kanıt basamaklarıyla hipotezleri çizimler yardımıyla birleştirmek; fakat mantıksal gerekçeleri göz ardı etmek • Kanıtın doğruluğunu çizimlerle belirlemek	• Çizimlerle başkalarını ikna etmek • Bir veya daha fazla çizime dayanarak sonuç çıkarmak
Analitik kanıt şeması	**Dönüştürülebilen kanıt şeması**	• Kanıt için tutarlı basamaklar yapılandırma • Kanıtın önceki ifadelerine mantıksal kurallar uygulama	• Temel konuyu belirlemek • Akıl yürütmeyle diğerlerini ikna etmek
	Aksiyomatik kanıt şeması	• Tanımsız terimlerle sınırlı bir küme oluşturmak • Lineer yöntemleri kullanarak kanıtlamak • Geleneksel kanıt süreçlerini kullanmak	• Aksiyomatik bir sistem geliştirmek • Bir teoremin sonucunun aksiyomatik sistemden nasıl çıktığını kanıtlamak

Sınıflarda sıklıkla karşılaşılan bir soru Şekil 2.11.'deki gibi bir dikdörtgenin alanının kaç cm^2 olduğunun hesaplanmasıdır.



Şekil 2.11. *Örnek alan ölçme sorusu*

Tablo 2.7.'de yukarıdaki soruya verilebilecek cevaplar üzerinden kanıt şemaları açıklanmaya çalışılmıştır.

Tablo 2.7. *Örnek soruya verilebilecek olası cevapların kanıt şemalarına göre dağılımı*

Kanıt şemaları		Öğrenci cevabı
Dışsal kanıt şemaları	**Otoriter**	Böyle soruları nasıl yapıyorduk? Hıım Hatırladım. Öğretmenimiz alanı bulmak için buradaki sayıları çarpıyordu. Cevap 16 x 6 = 96 olmalıdır. Böyle çözdüm çünkü öğretmenimiz de bu şekilde çözüyor.
	Alışkanlık edinilmiş	Alan bulurken verilen iki sayı çarpılıyordu. Alanı bulurken hep bunu yapıyorduk. Cevap 16 x 6 = 96 olmalıdır. Doğru çözdüğümü biliyorum çünkü alan bulunurken çarpma işlemi yapılır ve yaptığım işlem doğru görünüyor.
	Sembolik	Cevap 16 + 6 = 22 olmalıdır. Çünkü Alan = a + b şeklinde hesaplanır.
Deneysel kanıt şemaları	**Algısal**	Ben cevabın (16 + 6) x 2 = 44 olduğunu düşünüyorum. Neden doğru olduğunu bilmiyorum ama bence cevap bu olmalı.
	Örnek temelli	Bunun gibi bir soruyu çözdüğümüzü hatırlıyorum. Orada ne yapmıştık? Daha önce bunun gibi sorularda hep kenarları çarpmıştık. 16 x 6 = 96 olmalı. Bence cevabım doğru çünkü daha önceki sorularda da böyle çözmüştük.
Analitik kanıt şemaları	**Dönüştürülebilen**	Şimdi bu dikdörtgeni santimetre karelerle kapladığımızı düşünürsek bir sütun için 1 x 6 = 6 santimetre kare gerekir. Bunun gibi 16 sütun olmalı, çünkü bu kenar boyunca 16 santimetre kare sığıyor. O halde tamamını doldurmak için 16 x 6 = 96 santimetre kare gerekir.
	Aksiyomatik	Alan kapalı bir bölgenin düzlemde kapladığı yerdir. Bu dikdörtgenin düzlemde kapladığı yeri bulmak için önce bir satırının veya sütunun kapladığı yeri buluruz. Bu dikdörtgenin bir satırı 16 x 1 = 16 birim kareden oluşur. Bu satırı sütun boyunca tekrarlayacağız. O halde alanı 16 x 6 = 96 cm^2 olacaktır. Yani alanı bulmak için satır x sütun veya başka bir deyişle yükseklik x genişlik yapılır.

Öğrencilerin kanıtlama becerilerinin gelişmesinde öğretmenlere büyük görev düşmektedir. Öğretmenlerin öğrenciler için farklı kanıt yöntemlerini içeren, mantıksal düşünceyi geliştiren, öğrencilerin düşüncelerini açıklayıp tartışabilecekleri bir öğrenme ortamı hazırlamaları gerekmektedir. Derslerde açıklayıcı ispatlara yer verilirse öğrencilerin kavramları nedenleriyle öğrenmesi sağlanacaktır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Derslerde kanıta erken yaşlarda yer verilmesi öğrencilerin akıl yürütme, eleştirel düşünme, açıklama, savunma becerilerini geliştirip farklı kanıt şemaları kullanabilmelerini sağlayabilir. Öğretmenlerin küçük yaşlardan itibaren öğrencilerini savunmalarını bir otoriteye dayandırmadan akıl yürütmeyle yapmaya teşvik etmesi kanıtlama becerilerinin gelişmesinde etkili olacaktır (İskenderoğlu, 2016).

2.5. Kanıt Şeması ile Kavram İmajı İlişkisi

Matematiksel kanıt, bir ifadenin neden doğru olduğunun mantıksal bir açıklamasını yaparken (Altıparmak ve Öziş, 2005), aynı zamanda onun anlamını ortaya çıkararak matematiğin anlaşılmasına yardım etmektedir (İskenderoğlu, 2016). Kanıt, okullarda bir iddianın sistematik bir şekilde doğrulanması, neden doğru olduğunun gösterilmesi ve bu süreçte çeşitli keşiflerin yapılması işlevleriyle yer almaktadır (Dede ve Karakuş, 2014). Bu yönleriyle matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olmasına rağmen, kanıt birçok öğrencinin zorlandığı bir alandır.

Öğrencilerin kanıtlama sürecinde zorlanmalarının nedenlerinden biri de bu süreçte kullanmaları gereken kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanacaklarını bilmemeleridir (İskenderoğlu, 2016). Kavramlar ve kavramlar arası ilişkiler konusunda yeterli bilgiye sahip olmayan öğrenciler matematiksel kanıt üretmekte de zorlanmaktadırlar. Öğrencilerin doğru bir şekilde kanıt yapabilmeleri için kavramlara ilişkin örnekler oluşturabilmeleri, bu örnekleri kullanabilmeleri, kanıtlama sürecinde kavram tanımlarından yararlanabilmeleri gerekmektedir (Barak, 2018). Burada bahsi geçen kavramlara ait olan örnekler, tanımlar, özellikler, kavramlar arası ilişkilerin bütünü bireylerin kavram imajını oluşturmaktadır. Dolayısıyla bireyin matematiksel bir durumun doğruluğunu kanıtlayabilmesi için matematiksel durumun ilişkili olduğu kavramlara ait kavram imajlarının doğru yapılandırılmış olması gerekmektedir.

Bireyin, matematiksel bir durumun doğru veya yanlış olduğuna, kendisini veya başkalarını ikna etmek için yaptığı açıklamaları, savunmaları ve kanıtları içeren düşünme biçimi kanıt şemasını oluşturmaktadır. Bireyin savunma veya kanıtlama sürecinde kullandığı yöntemler, matematiksel durum hakkındaki düşünce yapısını ortaya koymaktadır. Bu nedenle yaptığı savunma ve kanıtlar her zaman doğru olmayabilir. Bireyin sahip olduğu hatalı veya sınırlı bilgiler ile kavram yanılgıları savunma ve kanıtlama sürecinin yanlış olmasına neden olabilmektedir. Kanıt şemaları belirlenirken kanıtın doğruluğuna bakılmadan yapılan açıklamalar dikkate alındığı için bireyin matematiksel düşüncesinin gelişim aşamaları da incelenebilmektedir (Sowder ve Harel, 1998; Dede ve Karakuş, 2014; İskenderoğlu, 2016).

Kanıt şemalarının, bireylerin düşünme biçimlerini içermesi bakımından, kavram imajlarıyla ilişkili olduğu söylenebilir. Dışsal kanıt şemaları bireyin kendi düşüncesini yansıtmaktan çok bir otoriteden edinilmiş bilgilere, ezberlenmiş ifadelere dayandığı için kavram imajlarıyla ilişkisi oldukça sınırlıdır. Ancak, deneysel ve analitik kanıt şemaları bireyin kendi düşüncesini içeren açıklamalara dayandığından kavram imajlarını daha iyi yansıtmaktadır.

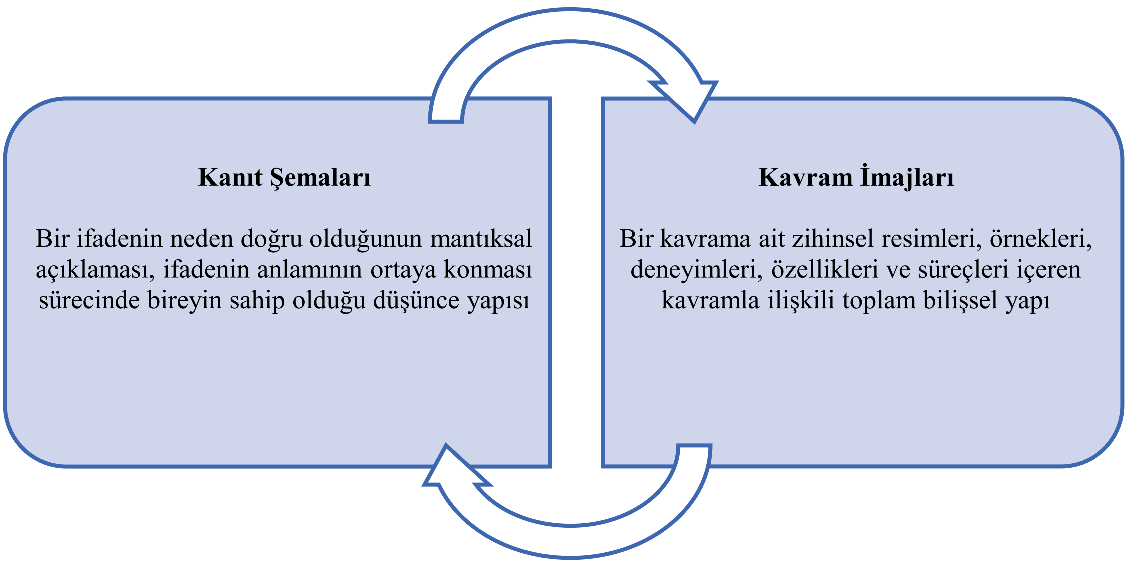
Dışsal kanıt şemalarından otoriter kanıt şemasını kullanan birey savunmasını öğretmen, kitap, daha bilgili arkadaş gibi bir otoriteye dayandırmaktadır. Savunmada kullandığı bireyin kendi bilgisi değildir; henüz içselleştirilmemiştir. Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasını kullanan birey ise savunmasını akıl yürütme yerine daha önceki benzer çözümlere, alışılmış şablonlara dayandırmaktadır. Savunmada kullanılan gerekçeler oldukça yüzeysel olsa da bireyin konuyla ilgili düşüncesini yansıtması bakımından değerlidir. Sembolik kanıt şemasını kullanan birey savunmasında matematiksel ifadeleri sembolleri kullanarak yazmaya çalışsa da anlamsız sembolik manipülasyonların ötesine geçemez. Savunmada kullanılan gerekçeler doğru bir şekilde yapılandırılmamış olsa da bireyin kavram imajındaki hata ve sınırlılıkları ortaya çıkarması bakımından değerlidir.

Deneysel kanıt şemalarından özellikle algısal kanıt şemasında bireyin savunmasını dayandırdığı çizimler ve sezgiler aynı zamanda kavram imajının bir parçasıdır. Bireyin düşüncesini savunmak için kullandığı çizimler onun kavramla ilişkilendirdiği imgelerdir. Bu çizimler prototip şekiller olsalar da bireyin kavram imajını yansıtmaları onları değerli kılmaktadır. Örnek temelli kanıt şemasını kullanan bireyin savunmasını dayandırdığı örnekler de kavram imajının yansımasıdır. Bireyin seçtiği bu örnekler onun kavramla ilişkilendirdiği durumlardan oluşmaktadır.

Analitik kanıt şemalarını kullanan bireyin kavram imajının formal tanımla uyumlu olduğu, kavramlar arası ilişkileri doğru bir şekilde yapılandırdığı söylenebilir. Çünkü bu kanıt şemalarını kullanan bireyin savunmasını kavram tanımlarına ve kavramlar arası ilişkilere dayandırması beklenir. Dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanan birey akıl yürütmeyi kullanarak bir durumu genellemekte, bir bağlam için genel zihinsel imgeler oluşturmakta ve dönüştürmektedir. Matematiksel bir durumu cebirsel olarak gösterebilmekte, sembolleri manipüle ederek bir iddiayı kanıtlamak/çürütmek amacıyla veya bir problemin çözümünde kullanabilmektedir. Aksiyomatik kanıt şemasına sahip birey ise, dönüştürülebilen kanıt şemasının tüm özelliklerine sahip olmakla birlikte tanımsız terimleri, tanımları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini de kullanabilmektedir.

Yukarıdaki açıklamalardan anlaşıldığı gibi bireylerin matematiksel kanıt yapabilmeleri için tanım, teorem ve kavram bilgilerinin eksiksiz olması, bu bilgileri kullanarak mantıksal çıkarım yapabilmesi, matematiğin sembolik dilini anlamlı bir şekilde kullanabilmesi, kanıtlama yöntemlerini bilip doğru olarak uygulayabilmesi gerekmektedir (Barak, 2018; İskenderoğlu, 2016; Sarı Uzun ve Bülbül, 2013). Kısacası bireylerin matematiksel bir durumun doğruluğunu kanıtlayabilmesi için o durumla ilişkili kavram imajlarının doğru yapılandırılmış olması gerekmektedir.

Bireylerin sahip oldukları kavram imajları onların kanıt şemalarını etkilediği gibi kanıt şemaları da kavram imajlarını etkilemektedir. Kanıtlama sürecinde öğrenciler matematiksel durumun neden doğru olduğunu mantıksal olarak açıklarken kavramlarla ilgili yeni keşiflerde bulunarak mevcut kavram imajlarını zenginleştirebilirler. Kanıtlama sürecinde gerçekleşen sorgulamalar ve gerekçelendirmeler yoluyla öğrenciler daha derin düşünmeye başlayarak kavramla ilgili farkındalık geliştirebilirler. Bunun sonucunda kavram imajlarında değişim yaşanabilir. Örneğin bir öğrenci kanıtlama sürecinde kavrama ait bir özelliği veya kavramlar arası bir ilişkiyi fark edip kavram imajını bu yeni bilgiye göre yeniden düzenleyebilir. Buna göre kanıt şemaları ile kavram imajları arasındaki ilişki Şekil 2.12.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.12. *Kanıt şemaları ile kavram imajları arasındaki ilişki*

2.6. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde sırasıyla çevre ve alan kavramları ile ilgili, kavram imajlarıyla ilgili ve kanıt şemalarıyla ilgili daha önce yapılmış araştırmalara yer verilmiştir.

2.6.1. Çevre ve alan kavramları ile ilgili araştırmalar

Çevre ve alan kavramlarıyla ilgili geçmişte pek çok araştırma yapılmıştır. Aşağıda bunlardan bazılarına yer verilmiştir.

Kordaki ve Potari (1998) altıncı sınıf öğrencilerinin alan ölçme konusundaki düşüncelerini geometrik şekillerin alanının hesaplanmasını gerektiren ve günlük yaşam problemleri içeren farklı bağlamlarda incelemişlerdir. Araştırma sonucunda, alanların farklı doğasının, farklı boyut ve şekiller ile ölçme araçları üzerindeki kısıtlamaların, öğrencilerin eylemlerini etkileyen bağlamları tanımladığı görülmüştür. Ayrıca, kültürel çevrenin öğrencilerin seçimlerini etkilediği ve çalıştıkları genel çerçeveyi oluşturduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin, kişisel deneyimlerini ve karşılaştıkları görevlere uyan unsurları kullandıkları tespit edilmiştir. Çalışmanın sonuçları, öğrencilere alan ölçmeyle farklı ortamlarda karşılaşma fırsatı sağlamanın, kavramın farklı yönleri arasında bağlantılar kurulmasını ve alan kavramının yeterli düzeyde oluşturulmasını sağlayacağını göstermiştir.

Outhred ve Mitchelmore (2000) çalışmalarında, 1-4. sınıflardan çocukların formal olarak alan ölçmeyi öğrenmeden önce çeşitli dizi tabanlı dikdörtgen kaplama görevlerini çözmek için kullandıkları stratejilere odaklanmışlardır. Çocukların çözüm stratejileri 5 gelişim düzeyinde sınıflandırılmıştır:

- Seviye 0: Eksik kaplama. Birimler boşluk veya çakışma olmadan dikdörtgeni tamamen kaplamaz.
- Seviye 1: İlkel kaplama. Birimler çakışma olmadan dikdörtgeni tamamen kaplar, ancak organizasyonları sistematik değildir.
- Seviye 2: Birimden oluşturulmuş dizi kaplaması. Yapılan çizimler, her bir satır ve sütunda yaklaşık eşit sayıda birim içeren dizi yapısını gösterir. Fakat dizi yinelenen satırlar tarafından oluşturulmamıştır.
- Seviye 3: Ölçümle oluşturulmuş dizi kaplama. Birim sayıları ölçüm ve çizim ile bulunur. Bir boyut, her satırdaki birim sayısını bulmak için kullanılırken, diğeri satır sayısını bulmak için kullanılır.

- Seviye 4: İma edilen dizi, hesaplama ile çözüm. Birim sayısı herhangi bir çizim yapmadan birim ve dikdörtgenin boyutlarından hesaplanır. Uygulanan hesaplama prosedürü, genellikle çarpma, bazen de tekrarlanan toplamadır. Bu durum, dizinin görselleştirildiğini veya dizi yapısına dayalı bir prosedürün öğrenildiğini gösterir.

Araştırmacılar bu düzeylerde dört temel ilkenin ardışık olarak kazanıldığını ifade etmişlerdir: tam kaplama, uzamsal yapı, boyut ilişkileri ve çarpımsal yapı. Bu ilkeler çocukların alan ölçme hakkında sezgisel anlayışlarını oluşturmaktadır.

Battista (2004), alan ve hacim ölçümü için değerlendirme görevleri oluşturmuş ve öğrencilerin bu görevler üzerindeki akıl yürütmelerini yorumlamıştır. Araştırmacı öğrencilerin akıl yürütmelerini seviyeler halinde sunmuştur. Bu seviyeler öğrencilerin bir konuyu anlamlı bir şekilde öğrenirken izledikleri yolları anlamak için kavramsal bir çerçeve sağlamaktadır. Alan ile ilgili yedi seviye oluşturulmuştur:

- Seviye 1: Birleşik birim bulma ve düzenleme süreçlerinin olmaması. Bu düzeydeki öğrenciler birimleri birleşik birimler (satır ve sütunlar) halinde organize etmezler.
- Seviye 2: Birimlerin yerini belirleme ve birleşik birimlere göre düzenleme süreçlerinin kullanılmaya başlanması.
- Seviye 3: Birimleri bulma işlemi, çift sayma hatalarını fark etmek ve ortadan kaldırmak için yeterince koordine olma.
- Seviye 4: Birleşik birimleri organize ederken maksimum birleşik birimler (alan için satırlar veya sütunlar) içeren bir dizinin oluşturulması; ancak yineleme yaparken yetersiz koordinasyon nedeniyle, bunların tam olarak yerleştirilememesi.
- Seviye 5: Tüm birimleri doğru şekilde yerleştirmek için yeterli olan ancak en büyük birleşik birimleri içermeyen birim yerleştirme işleminin kullanılması. Kullanılan yapılandırma ve numaralandırma stratejileri genellenebilir değildir ve büyük diziler için yetersizdir.
- Seviye 6: Hem birimleri bulma hem de birleşik birimlere göre düzenleme süreçlerinin tam olarak geliştirilmesi ve koordinasyonu.
- Seviye 7. Öğrencilerin uzamsal yapılandırma ve numaralandırma şemaları, öğrencilerin (a) sayısal prosedürler ve uzamsal yapılandırmalar arasındaki bağlantıyı anlayabilmeleri ve (b) “paketler”le ilgili gerekçelerini genelleyebilmeleri için yeterince soyut hale gelir.

Van Dooren, vd. (2004), öğrencilerin bir şeklin doğrusal ölçüleri ile çevresi, alanı ve hacmi arasındaki ilişki bağlamında, kökleşmiş doğrusal tepkiler verme eğilimine yani doğrusallık yanılgısına odaklanmaktadırlar. Başlangıçta uyguladıkları ön testle, sekizinci sınıf öğrencilerinin bu yanılgıya sahip olduğunu belirlemişlerdir. Hem deney hem de kontrol grubu, orantı içeren durumlarda iyi performans göstermiş, ancak doğrusal yöntemler uygulamaları nedeniyle orantılı olmayan durumlarda genellikle başarısız olmuşlardır. Öğretim sonrasında deney grubu, doğrusal yöntemleri testteki doğrusal olmayan maddelere daha az uygulamıştır. Bununla birlikte, doğrusal olmayan maddelerin önemli bir kısmında doğrusal çözümler yapmışlar ya da doğrusal olmayan çözüm yöntemlerini hatalı uygulamışlardır. Ayrıca, yeni öğrendikleri orantısız stratejileri orantılı problemlere aşırı genelledikleri için orantılı problemlerde daha fazla hata yapmaya başlamışlardır. Uygulanan öğretim deneyi sonrasında bile öğrenciler hangi durumda hangi modeli kullanacaklarını belirlemede hala ciddi zorluklar yaşamaktadırlar.

Izsak (2005) ilkokul öğrencileri ile yürüttüğü çalışmasında alanı öğrenme sürecini bilgi parçaları perspektifiyle ele almıştır. Çalışma kapsamında çarpma, toplama ve eşit gruplar arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde anlayan öğrencilerin bunu alanla nasıl ilişkilendirdiğini belirlemek için bir dizi görüşme yapılmıştır. Öğrencilerin öğrenme yörüngesi iki aşama olarak organize edilmiştir:

- 1. Aşama, “Dizilerdeki Nokta ve Uzay Perspektiflerini Koordine Etme” sırasında, öğrenciler şunları başarmaktadır: (a) nokta ve uzay perspektiflerini farklılaştırmak; (b) boyutları ve toplamları her perspektif içinde koordine etmek ve (c) nokta perspektifinde, kişinin hem boyutları hem de toplamları belirlemek için tek bir temsili özellik -nokta- kullandığını, boşluk perspektifinde ise toplamları belirlemek için boyutları ve birim karelerini kullandığını anlamak.
- 2. Aşama, “Dikdörtgenin Alan Temsilleri İçin “Ölçeklendirme” Kriterlerinin Rafine Edilmesi” sırasında öğrenciler, uzay perspektifinde, temsil edilen dikdörtgenlerin alanlarını belirlemek için dizilerin ölçeklendirilmesinin gerekmediğini anlamaya başlamıştır. Doğru satır ve sütun sayısına sahip olacak şekilde dikdörtgenler yerleştirmenin yeterli olduğunu fark etmişlerdir.

Kamii ve Kysh (2006) çalışmalarında öğrencilerin kareyi alan ölçme birimi olarak görüp görmediklerini araştırmışlardır. Katılımcılardan geometri tahtası üzerinde gösterilen iki dikdörtgenin alanlarını karşılaştırmaları istendiğinde, dördüncü sınıfların %16'sı, sekizinci sınıfların %41’i ve dokuzuncu sınıfların normal matematik programındaki öğrencilerin %53’ü kareleri saymıştır. Buna göre 4-8. sınıflardaki çoğu öğrenci için kare bir alan birimi değildir. Benzer şekilde L biçimindeki şeklin alanını bulmaları gereken görevde normal matematik programındaki sekizinci sınıfların %43'ü kareleri saymıştır. Yine bu sekizinci sınıf öğrencilerinin sadece %6'sı alanın sürekli olduğunu düşünmekte, diğerleri için kareler bir alanı kaplayan birimler olarak kullanılabilen ayrık nesnelerdir. Araştırma sonucunda ileri matematik programındaki sekiz ve dokuzuncu sınıf öğrencileri dışındaki katılımcıların kareyi alan ölçme birimi olarak görmedikleri ve karenin yüzey kaplama özelliğine sahip olmadığını düşündükleri belirlenmiştir. Araştırmacılar yaşla birlikte kareleri sayma yüzdesinin artışına dayanarak çocukların, kareleri sonsuz derecede yakın çizgilerden oluşan bir matris olarak algıladıklarında alan birimi olarak görmeye başlayabileceğini düşünmektedirler.

Casa, Spinelli ve Gavin (2006) çalışmalarında öğrencilerden iki kapalı eğrinin alanını tahmin etmek için çeşitli yollar keşfetmelerini istemişlerdir. Kullanılacak etkili bir formülleri olmadığından öğrenciler, bu alanlardaki kare birim sayısını belirlemek için anlamlı gelen birkaç yöntemi birleştirerek kendilerine özgü stratejiler keşfetmişlerdir. Sınıf tartışmalarında, stratejilerini paylaşmaları alanı belirlemek için daha etkili yaklaşımlar bulmalarına yardımcı olmuştur. Öğrencilerin kullandığı stratejiler şunlardır: tek tek bütün kareleri sayma, şeklin içindeki dizileri kullanma ve sonra diğer bütün ve kısmi kareleri ekleme, şeklin dışından geçen bir dizi kullanma ve sonra şekle dahil olmayan diğer kareleri çıkarma, bir tam kare yapmak için iki yarım kareyi birleştirmek, bir tam kare yapmak için herhangi bir sayıda kısmi kareyi bir araya getirmek.

Zacharos (2006), öğrencilere alan ölçme için sunulan araçların ve uygulanan öğretimin onları belirli stratejileri benimsemeye yönlendirip yönlendirmediğini, öğrencilerin alan ölçme ile ilgili anlayışlarını, stratejilerini ve kavram yanılgılarını araştırmıştır. Öğrencilerin en sık uyguladığı hatalı strateji, dikdörtgen veya paralelkenar için geçerli olan algoritmayı ("Taban $\times$ Yükseklik" veya "Uzunluk $\times$ Genişlik") diğer şekillere uygulamaya çalışmak olmuştur. Yapılan bir başka hata ise "Alan $=$ Taban $+$ Yükseklik" stratejisinin kullanılmasıdır. Bazı öğrenciler ise aşina olmadıkları geometrik şekillerin alanları olmadığını, onları "düzeltmek" veya "bitirmek" gerektiğini belirtmişlerdir. Araştırma sonucunda, alan ölçmenin kavramsal özelliklerini vurgulayan öğretim uygulamalarının katkısı olduğu görülmüştür. Alan ölçme araçlarını kullanma ve alanı birim karelere bölme konusunda talimat verilen öğrenciler, daha başarılı stratejiler benimsemişlerdir. Kavramsal öğretim almayan öğrenciler ise formülleri doğru bir şekilde uygulayıp hesaplama yapsalar da buldukları sayısal sonucun ne anlama geldiğini kavrayamamışlardır. Ayrıca öğrencilere sunulan ölçme araçları ile alan ölçme için izledikleri stratejiler arasında bağlantı olduğu görülmüştür.

Cavanagh (2007), yedinci sınıf öğrencilerinin alan ölçme anlayışlarını araştırmıştır. Çoğu öğrenci alanı bir şeklin "içindeki yer" olarak tanımlamış, diğerleri de "bir şeklin büyüklüğünün ne kadar olduğu" gibi benzer fikirler ifade etmiştir. Bununla birlikte, bazıları alanı "uzunluk çarpı genişlik" olarak betimlemiş veya çevre olarak tanımlamıştır. Tüm öğrenciler dikdörtgenin alanını hesaplayabilseler de sadece biri uzunluk ile genişliğin çarpımının neden doğru cevabı verdiğini açıklayabilmiştir. Şekillerin alanlarını karşılaştırırken öğrencilerin birçoğu görünüme odaklanıp hatalı cevap vermiştir. Verilen cevaplar, öğrencilerin üçgen ve paralelkenar alanlarını hesaplamak için dikey yükseklik kullanmanın önemini anlamadığını ve bunun görünüşte farklı boyutlara sahip olmasına rağmen iki şeklin nasıl aynı alana sahip olabileceğini anlamalarını zorlaştırdığını ortaya koymuştur. Öğrencilerin, paralelkenarın alanını hesaplarken eğik yüksekliğe olan güveni, $\text{"Alan} = \text{Uzunluk} \times \text{Genişlik"}$ formülünün aşırı genellenmesi olarak yorumlanmıştır. Sonuçlar, öğrencilerin alan ile çevreyi karıştırdığını, yüksekliği eğik olarak kullandığını ve üçgenin alanı için geçerli formülün temelini anlamadığını göstermiştir.

Tan Şişman ve Aksu (2009) yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarılarını araştırmışlardır. Buna göre, öğrencilerin alan ve çevre kavramlarını anlamada zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin çevre uzunluğunun ne anlama geldiğini yüzeysel olarak açıklayabilseler de çevre uzunluğunun değişebileceği durumlar gibi konularda çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Çevreyi bulurken birim kareleri saymaları ya da alanı bulurken şekli çevreleyen çizgileri saymaları, öğrencilerin alan ile çevreyi birbirine karıştırdıklarının göstergesi olarak yorumlanmıştır. Ayrıca alan ve çevre formüllerini etkili olarak kullanamadıkları görülmüştür. Alan korunumunu henüz kazanmadıkları, bir şeklin parçalarına ayrılıp yeniden düzenlenmesiyle oluşturulan yeni şeklin alanının başlangıca göre değiştiğine inandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca, şeklin alanını doğru hesaplamalarına rağmen buldukları sonucu alan ölçü birimleri dışında birimler kullanarak ifade ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin alan ve çevre uzunluğu hesaplama performansları incelendiğinde, bu kavramları anlama performanslarına kıyasla daha yüksek düzeyde başarı gösterdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin hesaplama performanslarının aşina oldukları şekiller için yüksek olduğu, alışkın olmadıkları şekiller söz konusu olduğunda ise performanslarının düştüğü görülmüştür.

Garrett (2010), reform yöntemi ile öğretimin yedinci sınıf öğrencilerinin alan ile ilgili kavramsal öğrenmelerini sağlamadaki etkisini araştırmıştır. Çalışmada kullanılan testler ve yapılan öğretim literatürde söz edilen altı öğrenme güçlüğüne odaklanmıştır. Bu güçlükler çeşitli nesnelerin alanlarını ölçmek, alanın statik yönü, alanın dinamik yönü, uzamsal yapılandırma ve kaplama, tahmin ve düzensiz bir şeklin alanıdır. Çalışma sonucunda dört temel bulgudan bahsedilmiştir: öğrenciler reform yöntemiyle öğretime oldukça olumlu yanıt vermişler, problemleri çözerken daha fazla türde stratejiyi uyarlamışlar, diğerleriyle iletişim kurma ve fikirlerini kanıtlama fırsatı bulmuşlar, literatürde normalde yüzeysel bir şekilde öğrenildiği söz edilen bu konuyla ilgili kavramsal bir anlayış geliştirmişlerdir.

Barrett, vd. (2011), ilkokul öğrencileriyle ikinci sınıftan beşinci sınıfın sonuna kadar devam eden boylamsal bir araştırma yürütmüşlerdir. Araştırmada birimin kavramsal yönünü içeren üç ana temayı (birimlerin çoklu temsillerinin entegrasyonu, ilişkili birimlerin koordinasyonu ve birim ölçümleri üzerine teorik perspektifler, özellikle çarpımsal ilişkiler) ele alan on bir farklı görev hazırlanmıştır. Araştırma kapsamında alan ölçmeyle ilgili dört düzey belirlenmiştir:

- İlkel Kaplayıcı: Çocuklar çizim yaparak bir bölgenin kaplanışını temsil ederler, ancak şekillerin hizalanması sezgiseldir; bu nedenle, satırlar ve sütunlar doğru değildir.
- Kısmi Satır Yapıcısı: Dikdörtgeni bir satır kümesi olarak yapılandırmazlar, satırların eşzamanlılığını ve her satırın aynı sayıda birime sahip olmasını gerektiren kısıtlamayı anlamazlar.
- Satır ve Sütun Yapıcısı: Çocuklar hizalanmış, uyumlu birim karelerden oluşan bir satırın zihinsel bir yapısına sahiptir ve bu satırları yineleyerek karelerin sayısını belirler.
- Dizi Yapıcısı: Çocuklar, dikdörtgenin boyutlarının satır ve sütunlardaki karelerin sayısını sağladığını ve böylece algısal destek olmadan alanı bu boyutlardan anlamlı bir şekilde hesaplayabildiğini anlarlar.

Öğrenciler bu çalışmada, kendilerine çeşitli fırsatlar verildiğinde bile, daha önce yapılan araştırmaları destekleyerek, toplamaya dayalı karşılaştırmalar yapmaktan çarpmaya dayalı karşılaştırmalar yapmaya geçişte zorluk yaşamışlardır.

Huang ve Witz (2011), öğrencilerin alan ölçmeyi kavramsal olarak anlamalarını sağlayacak üç öğretim programını incelemişlerdir: yalnızca alan ölçümü için sayısal hesaplamaları vurgulayan geleneksel bir program (AM), iki boyutlu geometri kavramlarının vurgulandığı bir program (GM) ve iki boyutlu geometri kavramları ve alan ölçmeyle ilgili sayısal hesaplamaları birleştiren bir program (GMAM). Kontrol grubu ise ölçmeyle ilgili özel bir program almamıştır. Araştırma kapsamında, öğrencilerin aldıkları öğretimin kullandıkları stratejileri yönlendirdiği belirlenmiştir. Buna göre AM grubu sayısal hesaplamalara, GM grubu geometrik hareketlere, GMAM grubu ise hem geometrik hareketlere hem de sayısal hesaplamalara atıfta bulunmuştur. GMAM grubu alan ölçme hakkında daha üst düzey matematiksel düşünme gerektiren problemleri çözüp çözümlerinin gerekçelerini açıklasa da genel puanları AM grubundan daha yüksek değildir. Ayrıca, grupların sayısal hesaplama gerektiren problemleri çözmedeki performanslarının pek farklılaşmadığı görülmüştür. Araştırmacılar, öğrencilerin alan ölçme formüllerini anlama düzeylerinin, geometri ile zenginleştirilmiş bir öğretim programıyla, özellikle matematiksel fikirlerini kanıtlama ve alan ölçme hakkındaki gerekçelerini sözlü olarak açıklama yoluyla geliştirilebileceğini belirtmişlerdir.

Kospentaris, Spyrou ve Lappas (2011), lise ve üniversite öğrencilerinin alanları karşılaştırma ve korunum ile ilgili uyguladıkları stratejileri incelemişlerdir. Öğrencilerin eğitim düzeylerine rağmen geometrik bir tümdengelimsel çıkarımı yeterli olarak tamamlayabilen katılımcıların oranı, bir görev hariç, oldukça düşüktür. Öğrencilerin çoğunluğu, problemleri çözmenin doğru yolunun geometrik yöntem olduğu görüşüne sahiptir; ancak geçmiş bilgilerinin yetersizliği seçtikleri yönteme katkı sunmamıştır. Bazı durumlarda kendilerine formül verilse de bunu problemle ilişkilendirememiş, uygun olmayan durumlarda kullanmaya çalışmış veya yükseklik kavramını bilmedikleri için üçgenin alan formülünü uygulayamamışlardır. Bir kısmı ise sezgisel yöntemler ve görsel tahminler kullanarak çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Öğrencilerin tutumlarını etkileyen en önemli sezgisel kavramın, alan eşitliğinin eşlikle örtüştüğü görüşü olduğu söylenebilir. Diğer sezgisel düşünce ise “şeklin kenarları ne kadar uzun olursa, alanı o kadar büyüktür” şeklindedir. Soruların görünümü öğrencilerin strateji seçiminde etkili olmuştur. Sorunun görünümü karmaşıklaştıkça, analitik olmayan stratejiler daha çok tercih edilmiştir. Bazı öğrenciler bir tür dinamik görselleştirmeye güvenmişler, karşılaştırılan şekillerin dinamik dönüşümünü hayal etmişlerdir.

Zhou (2012) çalışmasında alan kavramını üç boyutta ele almıştır: niteliğin doğasını anlama, birimlerin özellikleriyle ilgili fikir geliştirme, alanı formül kullanarak hesaplama. Öğrencilerin alan ölçmeyi anlamalarındaki bilişsel başarılarını test etmek için her bir boyuttaki başarıyı ortaya çıkaracak sorular geliştirilmiştir. Yapılan madde analizleri sonucunda özellik boyutunun birim ve formül boyutlarından daha kolay olduğu, en zor boyutun formül boyutu olduğu belirlenmiştir. Ayrıca alan ölçmeyle ilgili her bir boyut için öğrencilerin düşünce ve davranışlarının gelişimini yansıtan düzeyler oluşturulmuştur. Alan niteliğini anlama üç düzeyde ele alınmıştır. 1. düzeyde öğrenci nesneleri görünüşlerine göre bütünsel olarak görür. 2. düzeyde öğrenci alan niteliğini birçok farklı geometrik temsilden hareketle soyutlaştırır. 3. düzeyde ise öğrenci alan niteliğinin doğasına ilişkin anlayışını problem çözümlerinde kullanır. Birimlerin özellikleriyle ilgili fikir geliştirme dört düzeyde ele alınmıştır. 1. düzeyde öğrenci alan ölçmek için birimleri sayar. 2. düzeyde ölçmeyi anlayarak sayar. 3. düzeyde alan birimlerinin özellikleri ile ölçülecek yüzeyin özelliklerini ilişkilendirir. 4. düzeyde alan ölçmenin farklı temsillerinin ötesinde düşüncesini genişletir. Alanı formül kullanarak ölçme üç düzeyde ele alınmıştır. 1. düzeyde öğrenci dikdörtgenin alan formülünü bilir. 2. düzeyde geometrik şeklin özellikleri ile formülün bileşenlerini ilişkilendirir. 3. düzeyde doğrusal ve alan ölçme arasındaki orantısal olmayan çarpımsal ilişkiyi anlar.

Huang ve Witz (2013) öğrencilerin alan kavramı ve alan formülü ile ilgili anlayışlarını ve alan ölçme problemlerini çözerken kullandıkları stratejileri ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Bu çalışmada, görüşülen tüm öğrenciler bir dikdörtgenin alan formülünü ezberleme becerileri sergilemiştir. Ancak, öğrencilerin yaklaşık beşte ikisi alan kavramını alan ölçmeden ayırmakta zorlanmıştır. Alan ölçme ve formül ezberleme konusunda deneyim sahibi olan öğrencilerin her zaman doğru bir alan anlayışına sahip olmadığı belirlenmiştir. Öğrencilerin aldıkları öğretime uygun olarak alan formülünü açıklarken çarpmanın küme modelini kullanma eğiliminde oldukları görülmüştür. Bireysel görüşmeler sonucunda öğrencilerin başarılarının alan kavramını ve formülün dayandığı çarpımsal ilişkiyi anlama düzeylerinden etkilendiği görülmüştür. Buna göre alan kavramını doğru yapılandıran ve formülün ardındaki çarpımsal ilişkiyi anlayan öğrenciler diğerlerine göre daha başarılı çözümler yapmışlar, varsa hatalarını kendileri düzeltebilmişlerdir.

Huang (2014) öğrencilerin çarpmaya dayalı anlayışlarını, alan formülü hakkındaki yorumlarını ve bu faktörlerin alan ölçme problemlerini çözmede oynadıkları rolleri araştırmıştır. Çalışmaya katılan öğrenciler dikdörtgenin alanını ölçmek için formülün uygun olduğunu bilseler de görüşmeler sırasında formüle ilişkin fikirlerini ifade etmekte zorlanmışlardır. Bazı öğrenciler "uzunluk × genişlik" formülünün bir dikdörtgenin kenar uzunluklarının toplamını hesaplamayı sağladığına inanmaktadır. Araştırma sonucunda üçüncü sınıfta çarpımsal düşünme ile alan ölçme problemlerini çözme becerisi arasında bir ilişki olduğu, ancak dördüncü sınıfta böyle bir ilişki bulunmadığı belirlenmiştir. Bununla birlikte her iki sınıf düzeyinde alan formülünün yorumları ile alan ölçme problemlerini çözme yeteneği arasında ilişki bulunmuştur. Alan formülünün küme modeli anlayışına sahip olan ve dikdörtgenin alan formülünü kullanabilen öğrenciler hem alan ölçmede hem de karmaşık problemlerde daha iyi performans göstermiştir.

Yenilmez ve Çiftçi (2014) lise matematik öğretmen adaylarının, çevre ve alan kavramına ilişkin alan bilgilerini incelemişlerdir. Çalışma kapsamında katılımcılardan görüşme formunda verilen 12 şekilden çevresi ve alanı olanları seçip bu seçimin nedenini açıklamaları istenmiştir. Katılımcıların büyük bir bölümü kapalı basit şekillerin, kapalı eğrilerin ve üç boyutlu şekillerin çevresinin ve alanının olduğunu belirterek doğru cevap vermiştir. Öğretmen adaylarının bir kısmı çevre ve alan hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahiptir. Bu katılımcılardan bazıları üç boyutlu şekillerin çevre ve alanlarının olamayacağını düşünürken, bazıları da kapalı eğrilerin çevre ve alanlarının olmayacağını belirtmişlerdir. Öğretmen adayları seçimlerinin nedenini genelde şekillerin kapalı olmasına dayandırmışlardır. Yapılan açıklamalarda katılımcılar benzer özellikler üzerinde durmakla birlikte çok azı uygun ifadeler kullanarak durumu betimlemiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının çevre ve alan kavramlarını tanımlamaları da istenmiştir. Ancak hiçbir katılımcı yeterli bir tanımlama yapamamıştır. Öğretmen adaylarının alan kavramına ilişkin bilgileri çevre kavramına ilişkin bilgilerine paralellik göstermektedir. Bazı öğretmen adayları kapalı eğrilerin alanının olmadığını düşünse de bu durum çevreye oranla daha düşüktür. Benzer şekilde açık ve tek boyutlu şekillerin alanının olacağını düşünen öğretmen adaylarının sayısı, çevresi olacağını düşünen öğretmen adaylarından daha düşüktür. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının alanı olan şekilleri seçmede daha başarılı oldukları ve alana ilişkin daha geniş açıklamalar yaptıkları gözlemlenmiştir. Buna rağmen öğretmen adaylarının çevre ve alan kavramlarıyla ilgili yaptığı açıklama ve tanımların oldukça yetersiz olduğu belirlenmiştir.

Wilder (2014) çalışmasında öğrencilerin "uzunluk × genişlik" formülü hakkındaki düşüncelerini ve hangi yaşta dikdörtgenin alanını hesaplamada kullanacakları bir araç olarak güvenilir bulduklarını anlamayı amaçlamıştır. Araştırmaya katılan dördüncü sınıftaki öğrencilerin %55'i, altıncı sınıftakilerin %90'ı ve sekizinci sınıftakilerin %95'i yöneltilen alan hesaplama sorusunu doğru olarak cevaplamıştır.

Öğrencilerin alan hesaplamadaki başarısı sınıf düzeyi arttıkça yükselmiştir. Öğrencilerin çoğu alanı hesaplamak için bir veya daha fazla sayıda birim kare kullanmıştır. Öğrencilerin alan hesaplama problemini çözerken formülü kullanma yüzdeleri ise dördüncü sınıfta %5, altıncı sınıfta %15 ve sekizinci sınıfta %25 şeklindedir. Yanlış cevaplar incelendiğinde dördüncü sınıfların %45'inin, altıncı sınıfların %10'unun ve sekizinci sınıfların %5'inin alan yerine çevreyi hesapladığı sonucuyla karşılaşılmıştır.

Machaba (2016) onuncu sınıf öğrencilerinin alan ve çevre kavramlarını nasıl tanımladıklarını, bu kavramlarla ilgili problemleri nasıl çözdüklerini, yaşadıkları kavram yanılgılarını ve bu yanılgıların sebeplerini incelemiştir. Araştırma kapsamında öğrenciler neredeyse tüm sorularda zayıf performans göstermişlerdir. Öğrenciler formülleri kullanmadan alan ve çevreyi tanımlayamamış, birçoğu alanı, neredeyse tamamı çevreyi yanlış tanımlamıştır. Şekil üzerinde ölçüler verildiğinde alanı hesaplayabilmişler; ancak ölçüler verilmediğinde alanı belirleyememişlerdir. Ayrıca düzensiz bir şeklin (bir yaprak gibi) uzunluğu ve genişliği olmadığı için alanı olmadığını düşünmektedirler. Öğrenciler aşırı genelleme yaparak, dikdörtgen için kullanılan "$\text{Alan} = \text{Uzunluk} \times \text{Genişlik}$" formülünün dikdörtgen olmayan şekiller için de kullanılabileceğini düşünmektedirler. Tespit edilen diğer kavram yanılgısı ise "Aynı A- Aynı B" sezgisel kuralının uygulanmasıdır. Öğrenciler, bir karenin karşılıklı iki kenar uzunluğu belirli bir miktar artırılır ve diğer iki kenar uzunluğu aynı miktar azaltılırsa çevre ve alanın değişmeyeceğini iddia etmişlerdir. Benzer şekilde, karşılıklı iki kenar uzunluğu belirli bir sayıyla çarpılır ve diğer kenarların uzunluğu aynı sayıya bölünürse alanın aynı kaldığını iddia etmişlerdir. Araştırmacı tüm bu verilere dayanarak, öğrencilerin alan kavramı hakkında kavramsal bir anlayışa sahip olmadığını ve çevrenin ne olduğunu bilmediklerini ifade etmiştir. Ayrıca, alan ve çevre hakkındaki yetersiz ön bilgilerinin kavram yanılgılarının temel sebebi olduğunu belirtmiştir.

Tossavainen, Suomalainen ve Mäkäläinen (2016) öğretmen adaylarından oluşan bir grubun, alan kavramını nasıl tanımladığını ve alanın iki boyutlu oluşu ile ilgili anlayışlarını, uzunluk, alan ve hacim arasındaki ilişkileri içeren problemlere verdikleri yanıtlar üzerinden incelemişlerdir. Araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının alan kavramına ilişkin tanımları genellikle eksiktir. Birçoğu, alanı yalnızca sınırlı şekillerle ilişkilendirir veya kavramı bir temel geometrik şeklin alan formülünden yeterince ayırt edemez. Katılımcılar verilen düzgün çokgenlerin alanını hesaplamakta oldukça yetenekli olsalar da sadece üçü düzensiz bir düzlemsel şeklin iyi tanımlanmış bir alana sahip olabileceğini doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Bazıları böyle şekilleri düzenli hale getirerek alanı tanımlamaya çalışmışlardır. Bu durumda şekil düzenli hale getirilirken çevre sabit tutulduğunda, şeklin alanının değişmediği varsayılmıştır.

Kozulin ve Kazaz (2017) çalışmalarında bilişsel yönelimli bir yaklaşım geliştirmeyi ve bu yaklaşımın öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerde çevre ve alan kavramını geliştirmedeki etkinliğini değerlendirmeyi amaçlamışlardır. Ön test sonuçlarına göre, öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerin çoğunun çevre ve alan görevlerini çözmek için gerekli genel bilişsel becerilerden yoksun olduğu görülmüştür. Son testte ise, öğrenme güçlüğü yaşayan öğrencilerin çoğu, iki şeklin çevre ve alanlarını karşılaştırabilmişlerdir. Çalışmada uygulanan yaklaşım öğrencilerin çoğunda etkili olsa da hala bazı zorlukların devam ettiği görülmüştür: 1) Bazı öğrenciler mevcut verileri toplayıp analiz edememiş ve gerekli çıkarımları çizememiştir, 2) "Şekil ne kadar büyükse, çevresi de o kadar büyüktür" yerleşik bir kavram yanılgısıdır, 3) Görevi kolaylaştırmak amacıyla görevi değiştirmek gibi "kaçış stratejilerine" yol açan görevi ele almadaki devamlılık eksikliği. Başlangıçta deney grubundaki öğrencilerin performansının kontrol grubundakilerden anlamlı derecede düşük olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, deney grubundaki öğrenciler, önemli ölçüde daha fazla ilerleme kaydetmiş ve sonuç olarak öğrenme güçlüğü yaşamayan akranlarından daha iyi performans göstermiştir.

Wickstrom, Fulton, ve Carlson (2017) öğretmen adaylarının bir alanı kaplamak için gereken birim sayısını bulmada kullandıkları stratejileri, bu stratejilerin birim büyüklüğü ile nasıl değiştiği ve kullanılan stratejilerin öğretmen adaylarının alan ölçmeyi kavramsal olarak anlayışları hakkında neleri ortayı çıkardığını ele almışlardır. Yapılan analizler sonucunda öğretmen adaylarının altı farklı strateji uyguladıkları görülmüştür: (1) uzunluk muhakemesi uygular, (2) tüm birimleri sayar, (3) uzunluk ve genişliği çarpar, (4) parçaları ekler, (5) birimleri karşılaştırır ve (6) bütünü birime böler. Çalışmaya katılan öğretmen adayları alanın iki boyutlu olduğunu anlasalar da bu özelliğin alan ölçmeye nasıl yansıdığını göstermemişlerdir.

Clements vd. (2018) çalışmalarında daha önce 2-5. sınıftaki çocukların alan ölçme anlayışını uzamsal yapılandırma ile desteklemek üzere tasarlanmış deneysel müdahalelerin etkilerini değerlendirmek amacıyla 1–3. sınıftaki öğrenciler üzerinde genişleterek yeniden uygulamışlardır. Araştırmacılar görüşmeler sırasında öncelikle öğrenciye kendi çözümünü yapabilmesi için süre vermiş, ardından üç tür video izletmişlerdir. Gösterilen video, müdahaleye bağlı olarak değişmektedir. Kontrol müdahalesindeki videoda öğretmen dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulduktan sonra sadece alanını söylemekle yetinmekte, alanın nasıl hesaplandığı belirtmemektedir. Yineleme müdahalesi kompozit bir birimin geliştirilmesi ve tekrarlanması üzerine odaklanmıştır. Bölümleme müdahalesi, bir dikdörtgeni satırlara ve sütunlara ayırmaya odaklanmıştır. Araştırmacıların uyguladığı iki deneysel müdahale, öğrencilerin dikdörtgenlerin alanlarını doğru bir şekilde belirlemeyi öğrenmelerine yardımcı olmada kontrol müdahalesinden daha etkili olmuştur. Yineleme müdahalesindeki öğrenciler tek bir kare birimi saymanın ötesine geçmek için kompozit birimleri kullanmayı ve alanı belirlemek için bu birimleri tekrar tekrar uygulamayı öğrenmişlerdir. Bölümleme müdahalesi öğrencilerin kavramsal anlayış oluşturmak için yeniden üretebilecekleri ve kullanabilecekleri bir stratejiyi göstermede yineleme müdahalesinden daha başarılı olmuştur. Her iki müdahale de öğrencilerin alan öğrenme yörüngesinin seviyeleri arasındaki geçişleri desteklemiştir. Ayrıca öğrencilerin başarılarının sınıf seviyesiyle birlikte artış gösterdiği belirlenmiştir.

Kaya (2019) altıncı sınıf öğrencilerinin alan ölçme ile ilgili problem çözme becerilerini incelemiştir. Çalışmanın bulguları öğrencilerin ölçme konusu ile ilgili problemleri anlama yeterlilik oranlarının oldukça düşük olduğunu ve birçok öğrencinin problemleri anlamakta güçlükler yaşadığını göstermiştir. Öğrencilerin alan kavramının anlamını tam olarak bilmediği, mantığını anlamadığı, ayrıca problem cümlesinin içerdiği sayılarla bir sonuca ulaşma gayretinde oldukları dikkat çekmiştir. Öğrencilerin problem çözmenin plan yapma adımında ne yapmaları gerektiğini bilmedikleri ve zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin kısmen yeterli bir plan yapmış olsalar bile planı uygulama adımında daha fazla çaba harcadıkları, önceliklerinin bir çözüme ulaşmak olduğu, başka bir deyişle planı uygulamayı plan yapmaktan daha öncelikli gördükleri belirlenmiştir. Ancak öğrencilerin alanı hesaplarken etkili bir problem çözme sürecinden oldukça uzak oldukları, alan birimini tanımama ve alan yerine çevre hesabı yapma gibi birtakım kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin birçoğunun problemin çözümünü kontrol etme aşamasında ne yapacaklarını, nasıl bir yol izleyeceklerini bilemedikleri ve çoğunlukla bu adımı boş bıraktıkları görülmüştür.

Kobiela ve Lehrer (2019) altıncı sınıf öğrencileriyle alanın dinamik oluşumu ile bu şekilde oluşturulan alan biriminin parçalara ayrılıp incelenmesi arasındaki etkileşimin potansiyel etkilerini keşfetmek için tasarıma dayalı bir araştırma yapmışlardır. Araştırmaya katılan öğrenciler, dikdörtgenlerin alanını bulmak için formül kullanma geçmişine sahiplerdir. Araştırmacılar alanı tasarlama şekillerini değiştirecek yeni kavramsal araçları tanıtarak formüle olan bağımlılığı ortadan kaldırmayı hedeflemişlerdir. Başlangıçta öğrencilerin alanla ilgili anlayışlarının büyük ölçüde formülle sınırlı olduğu belirlenmiştir. Alanın silecek ve boya modeliyle dinamik olarak oluşturulmasını içeren öğretimden sonra çoğu öğrenci uzunluk birimleri tarafından yönlendirilen birim parçalayarak inceleme ile dinamik alan oluşumunun koordinasyonu; çarpım olarak alanın iki boyutlu anlaşılması ve çarpmanın dağılma özelliğinin dinamik yorumları konularında istikrarlı anlayış göstermiştir. Öğrenciler çarpmayı dinamik bir alan oluşumu olarak algılamaya başlamışlardır. Öğrenciler istenilen alanı oluşturmak için hareketleriyle fiziksel araçları koordine edebilmişlerdir. Bu dinamik bakış açısı, çarpmanın dağılma ve değişme gibi özelliklerini ele almak için bir yol sağlamıştır.

Yıldırım Yakar ve Albayrak (2019) matematik dersinde alan ölçme öğretiminde basamaklı öğretim yönteminin kullanılmasının 6.sınıf öğrencilerinin başarıları üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Deney ve kontrol gruplarının uygulama öncesinde başarı testinden aldıkları puanlar arasında anlamlı bir fark olmadığı görülmüştür. Yapılan deneysel çalışma sonrasında tüm grupların başarısında anlamlı bir artış gözlenmesine rağmen, öğretimin basamaklı öğretim yöntemi ile gerçekleştirildiği deney grubu öğrencilerinin, düz anlatım ve soru cevap yöntemlerinin uygulandığı kontrol-1 ve kontrol-2 grubu öğrencilerine göre anlamlı derecede daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Basamaklı öğretim yönteminin öğrencilerin alan ölçme konusunda başarılarını artırmada düz anlatım ve soru ve cevap yöntemlerine dayalı öğretimden daha etkili olduğu görülmüştür.

Brady ve Lehrer (2020) öğrencilerin alan ölçümüyle ilgili yaşadıkları iki boyutlu alanın yapılandırılması ve bir miktar olarak alanın birim ve referans dönüştürücü niteliği zorluklarını içeren kapsamlı görevlerin öğrencilere bu zorlukları ele almak için nasıl kaynaklar sağladığını göstermişlerdir. Öğrenciler öncelikle fiziksel süpürme ile istenilen alanları dinamik olarak oluşturmuşlar, ardından sınıf tartışmasında sanal süpürmeyi kullanmışlardır. Fiziksel ortam eylemlere olan ihtiyacı temel almış, daha sonra sanal ortam öğrencilerin genelleme ve keşif yapmalarını sağlamıştır. Uygulama aracılığıyla öğrenciler, sayılar üzerindeki aritmetik işlemlerle kalıpları süpürülen şekillerin içindeki ve arasındaki örüntüleri birbiriyle ilişkilendirmiştir. Uygulama aynı zamanda paralelkenarların oluşturulmasını ve incelenmesini de kolaylaştırmıştır. Süpürme, alanın dinamik inşasında boyutlar arasında bir asimetri ortaya çıkarmıştır. Bu asimetri, öğrencileri dinamik taramalarının kapsam boyutunu (ne kadar uzağa süpürdükleri) zorlaştırmış, alanı dinamik olarak görmeyi (profesyonel vizyon, 2D yapılandırma) ise teşvik etmiştir. Öğrenciler daha sonra uygulamayı kullanarak esnek bir şekilde farklı tarama kapsamları ve farklı boyutlu süpürücüler kullanmanın etkilerini keşfetmiştir. Sınıf tartışmasında, belirli bir şeklin birden fazla yolla oluşturulabileceğini göstermek için uzunluk ölçüleri arasında keşfettikleri “değişme özelliğini” araştırmışlardır. Böylece, sınıf, alan yapısının iki boyutunu asimetrik ancak değiştirilebilir olarak görmüştür. Hem fiziksel hem de sanal ortamdaki dinamik yapılar, öğrencilerin birim dönüşümü kavramıyla oyuncu bir şekilde etkileşime girmesine ve onu şekiller tasarlamak için kullanmasına izin vermiştir. Uygulamayı sonraki sınıf oturumlarında kullanan öğrenciler, oluşturan birimleri kapsamlı bir şekilde dönüştürmenin yollarını vurgulayan çeşitli keşiflerle uğraşmışlardır.

Cullen ve Barrett (2020) ilkokul ve ortaokul öğrencilerinin alanı kare ve kare olmayan (dikdörtgen, üçgen) birimlerle ölçme yöntemlerini incelemişlerdir. Öğrencilerin bir bölgenin alanını bulmak ve şekillerle birimlerin uyumunu gösterirken bölgeyi yapılandırmak için kullandıkları stratejileri belgelemişlerdir. Eksik birimleştirici düzeyinde, öğrenciler şekilleri birer birer çizmişler, ancak şekilleri aynı boyutta veya biçimde değildir. Şekiller arasında boşluklar bırakılmış veya şekiller üst üste bindirilmiştir. Başlangıç birimleştirici düzeyinde, öğrenciler boşluklar veya çakışmalar olmadan doğru bir kaplama çizebilmişlerdir. Tekrarlanabilir birim kavramı geliştirilmeye başlanmış, yaklaşık olarak aynı boyut ve şekle sahip birimler birer birer çizilmiştir. Öğrencilerin karma çizim stratejilerini kullandığı kompozit birimleştirici düzeyine kadar bireysel birimler ve birim koleksiyonları arasında geçiş yapılmamıştır. Soyutlanmış birimleştirici düzeyinde, öğrenciler yalnızca satır ve sütunları oluşturan doğru parçaları çizmişlerdir. Birim şekli ve boyut göstergelerine bakılmaksızın doğru birim dizileri üretmişler ve birim koleksiyonlarıyla esnek bir şekilde çalışmışlardır. Çalışma sonucunda, seviyeler arasında ilerlemenin kademeli ve sürekli olduğu, seviyelerin dağılımının sınıf seviyesine göre değiştiği görülmüştür. Çoğunlukla birinci sınıfların eksik birimleştirici, üçüncü sınıfların başlangıç birimleştirici, yedinci sınıfların kompozit birimleştirici ve beşinci sınıfların soyutlanmış birimleştirici düzeyinde davranışlar gösterdikleri belirlenmiştir. Ancak, birinci sınıflar soyutlanmış birimleştirici ve yedinci sınıflar eksik birimleştirici seviyesinin davranışlarını göstermemiştir. Düzeylerin karmaşıklığı arttıkça, birim türleri arasında doğru sayısal cevapların ve doğru çizimlerin daha yüksek yüzdeleri artsa da sınıf seviyesi arttıkça durum böyle olmamıştır. Buna göre, seviyeler boyunca ilerlemeyi etkileyenin tek başına yaş veya biyolojik olgunlaşma olmadığı; bunun yerine tecrübe veya öğretimin gerektiği belirtilmiştir. Öğrencilere ızgaralı bölgeler sağlanmasının, birim şekline bakılmaksızın, onları satır veya sütunlar boyunca düzenlenmiş birim koleksiyonları oluşturmaya yönlendirdiği görülmüştür. Ayrıca bir bölgeyi kaplamak için dikdörtgen birimler çizmenin, kare veya üçgen birimler çizmekten daha zor olduğu görülmüştür.

Panorkou (2020) üçüncü sınıf öğrencilerinin dikdörtgenin alanıyla ilgili bir dizi dinamik görevle etkileşime girdiklerinde sergiledikleri akıl yürütme yollarını araştırmıştır. Öğrencilerin dinamik alan modellerini oluşturmalarına, bir birim hakkında esnek bir anlayış geliştirmelerine ve ayrıca ölçmedeki sürekli değişim ve kovaryasyonel muhakemeyi incelemelerine yardımcı olma potansiyeli gösteren alternatif bir alan ölçme yaklaşımı uygulanmıştır. Öğrencilerin birim hakkında esnek bir anlayış geliştirdiği, kendi birimlerini oluşturdukları ve birimlerin iki boyutlu olduklarını kavramsallaştırdıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bir dikdörtgenin alanını ilişkilere dayalı iki tek boyutlu ölçüme boyutsal olarak parçaladıkları görülmüştür. Ayrıca, ölçümdeki sürekli değişimin araştırılmasının, öğrencileri esnek bir birim anlayışı oluşturma ve ölçümü kesirlere, geometrik dönüşümlere ve birlikte değişime bağlayan gelişmiş genellemeler yapmak için desteklediği belirlenmiştir. Bu yaklaşımın öğrencilerin dikdörtgenin alan formülünü iki doğrusal ölçü olan uzunluk ve genişliğin çarpımsal bir ilişkisi olarak anlamalarına yardımcı olabileceği görülmüştür. Ayrıca, öğrencileri ölçümdeki miktarlar hakkında kovaryasyonel muhakeme yapmaya, alanları genişletme ve bölümleme konusunda mantık yürütmeye teşvik ettiği belirlenmiştir. Buna göre, dinamik yaklaşım öğrencilerin ölçme muhakemesini geometrik dönüşümlerin yanı sıra bölümleme ve kesirler ile ilişkilendirme potansiyeline sahiptir.

Tomooğlu ve Kurtuluş (2020) 6.sınıfta yer alan üçgen ve paralelkenarın yükseklik çizimi, alan bağıntılarını oluşturma ve ilgili problemleri çözme konularını içeren bir eylem araştırması gerçekleştirmişlerdir. Eylem planları hazırlanırken 5E öğretim modeli benimsenmiştir. Uygulama sırasında tangram parçaları ile yapılan şekillerin alanları karşılaştırılırken oluşan tartışma ortamında öğrenciler alan korunumunu fark etmişlerdir. Paralelkenarların alanlarını hesaplamak için farklı stratejiler uygulamışlardır. Öğrencilerin şekli kaplayan birim kareleri saymak, paralelkenarı parçalayıp yeniden düzenleyerek dikdörtgene benzetmek, “taban x yükseklik” formülünü uygulamak gibi stratejiler uyguladıkları görülmüştür. Üçgenin alanı için de benzer stratejiler uyguladıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin keşfetme aşamasında bir kenara ait yüksekliği ve alan bağıntılarını kendilerinin oluşturabildiği, açıklama kısmında ise eksiklerini giderdikleri tespit edilmiştir. Derinleştirme aşamasında alan hesaplamayı farklı konu alanları ile ilişkilendiren görevlerin, hem alanın farklı alanlarda kullanımını sağladığı hem de öğrencilerin eski bilgilerini hatırlamalarına ya da eksiklerini (açı türleri, çokgenler, üçgen çeşitleri vb.) tamamlamalarına yardım ettiği belirlenmiştir.

Ağaçdiken (2021) 5.sınıf öğrencilerinin alan kavramını yapılandırma süreçlerini dinamik matematik yazılımı destekli öğretim ortamında incelemiştir. Beş katılımcıyla üçer klinik görüşme gerçekleştirilmiş ve elde edilen veriler APOS teorik çerçevesi kapsamında incelenmiştir. Çalışma sonucunda, katılımcılardan birinin alanı hiç boşluk kalmadan kaplayan birim karelerin sayısı olarak nesne düzeyinde kavramsallaştıramadığı, katılımcılardan ikisinin ise dikdörtgenin alan formülünü nesne düzeyinde kavramsallaştıramadığı belirlenmiştir. Çoğu katılımcının alan kavramını ve alan formülünü kapsüllerken zorlandıkları tespit edilmiştir. Alanın örtme özelliğinin farkına varılmasının, alan korunumunun ve birim kavramlarının alan kavramının kavramsallaştırılması için önemli olduğu sonucuna varılmıştır. Alan formülünün kavramsallaştırılmasında ise boyut ilişkisinin anlaşılmasının önemli düzeyde etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

2.6.2. Kavram imajıyla ilgili araştırmalar

Kavram imajıyla ilgili araştırmalar genellikle ortaöğretim ve yükseköğretim düzeylerindeki katılımcılarla yürütülmüştür. Ortaokul düzeyinde yürütülen az sayıda araştırma da mevcuttur.

Tall ve Vinner (1981) yaptıkları çalışmada kavram imajı ve kavram tanımını detaylı bir şekilde açıklamışlardır. Ayrıca öğrencilerin limit ve süreklilik ile ilgili kavram imajlarının formal tanımla çelişkili olduğunu ve öğrencilerin bu konularda bilişsel bir karmaşa içinde olduklarını belirtmişlerdir. Vinner (1983) ise çalışmasında öğrencilerin kavramlarla ilgili yanlış kavram imajları oluşturduğunu tespit etmiştir. Bu durumun ders kitaplarında kavramla ilgili verilen örneklerin yeterince çeşitlendirilmemesinden kaynaklandığını belirtmiştir. Bu çalışmalar kavram imajı ile ilgili yapılan ilk çalışmalar olup sonraki çalışmaların çoğunun dayanak noktasını oluşturmaktadırlar.

Gutiérrez ve Jaime (1999) çalışmalarında öğretmen adaylarının "üçgenin yüksekliği" kavramını anlama düzeylerini, kavram imajı-kavram tanımı kuramsal çerçevesiyle değerlendirmişlerdir. Bu amaçla uyguladıkları yazılı bir testten elde ettikleri verilerin analizi sonucunda öğretmen adaylarının performanslarına etki eden iki değişken tespit etmişlerdir. Bunlardan ilki formal bir tanımın varlığı ve diğeri önceki sınıflarda üçgenin yüksekliği kavramı ile ilgili etkinliklerdir. Çalışmada öğretmen adaylarının yükseklik kavramı ile ilgili bazı kafa karışıklıkları yaşadıkları görülmüştür. Örneğin yükseklik yerine kenarortay veya kenar orta dikme çizen katılımcılar olmuştur.

Rösken ve Rolka (2007) on ikinci sınıf öğrencilerinin belirli integral kavramı ile ilgili kavramsal öğrenmelerini kavram imajı ve kavram tanımı çerçevesinde incelemişlerdir. Öğrencilerin yanıtları iki temel görüşü ortaya koymaktadır: integral sembolünü açıklama ve alan yönünü ifade etme. Öğrencilerin integral sembolünü açıklayan cevapları daha çok kavram tanımına atıfta bulunurken, alan olarak yorumlayan cevapları daha çok kavram imajıyla ilgilidir. Öğrencilerin zengin kavram imajları geliştirdikleri, birçoğunun kavramın ilgili yönlerini bildiği; ancak kavram tanımlarının oldukça zayıf bir şekilde temsil edildiği belirlenmiştir. Öğrencilerin kavram imajlarındaki çelişkiler, alan ve integral kavramlarının ayırt edilememesi, integral sembolünün belirli bir fonksiyon tipine bağlı olması, alan hesaplamasının belirli bir fonksiyon grafiğiyle sınırlı olmasıdır. Öğrenciler problemler üzerinde çalışırken kavram imajları daha ön plandadır. Öğrenciler integral ve alan kavramları arasındaki ilişkiyi sadece bir yönle sınırlamışlardır. Bazı öğrenciler integral yardımıyla alan hesaplarken her zaman mutlak değer kullanma prensibi ile hareket etmiştir. Birçoğu için bu kural kavram imajının bir parçasıdır. Öğrenciler problemi çözmelerine yardımcı olabilecek daha yaratıcı yaklaşımları uygulamamış, algoritma ve hesaplamalara odaklanmışlardır. Araştırmacılar öğrencilerin fikirlerinin sadece mevcut kavram imajları ile açıklanamayacağını, diğer matematiksel nesnelerdeki fikirlerin de dahil olduğunu belirtmişlerdir. Bu nedenle, bir kavram imajının tek bir birim olarak görülemeyeceği, ancak farklı kavram imajlarının, aralarında çeşitli ilişkiler olan bir ağa entegre edildiği sonucuna varmışlardır.

Akkoç (2008) matematik öğretmen adaylarının radyan ile ilgili ne tür kavram imajlarına sahip olduklarını ve bu imajların olası kaynaklarını incelemiştir. Katılımcılardan sadece biri radyan kavramını bir yay uzunluğu olarak tanımlamıştır. Katılımcıların dereceyle ilgili kavram imajlarının, radyanla ilgili kavram imajlarına hâkim olduğu tespit edilmiştir. Katılımcıların çoğunun radyan cinsinden açıları ancak π

dahil edildiği zaman değerlendirdiği belirlenmiştir. Radyan olarak verilen açıları derece cinsinden eşdeğeriyle ilişkilendirdikleri görülmüştür. Katılımcıların trigonometrik fonksiyonları gerçek sayı girdileriyle kabul etmeyip değeri derece olarak kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca, π ile ilgili iki ayrı imaja sahiptirler: 180 dereceye karşılık gelen bir açı ölçüsü olarak π ve irrasyonel bir sayı olarak π ($\cong 3{,}14$). Radyan kavramı hakkında daha derin bir anlayışa sahip olan katılımcıların, birim çemberi trigonometride çeşitli kavramlarla ilişkilendirebildikleri ve kullanabildikleri görülmüştür. Öte yandan, derece kavram imajı güçlü olan katılımcıların trigonometrideki kavram ve ilişkileri açıklamak için dik üçgeni kullandıkları anlaşılmıştır.

Aztekin (2008) öğrencilerin sonsuzluk kavramını nasıl anladıklarını ve kavram imajlarının matematik bilgilerine göre nasıl değiştiğini araştırmıştır. Araştırmacı, öğrencilerin "sonsuz + sonsuz = iki sonsuz" gibi bir işleme yönelmelerinin sebebinin sonsuzu ölçme anlayışı değil, sonlu okul matematiği olduğunu, çocukların okulda öğrendikleri "1 elma, 1 elma daha 2 elma eder" düşüncesi ile hareket ettiklerini düşünmektedir. Öğrencilerde sık sık karşılaşılan "bir bütün sonsuza kadar bölünürse yok olur" düşüncesi, sonsuza kadar küçülen bir şeyin büyüklüğünün olmayabileceği veya ihmal edilebileceği şeklinde yorumlanmıştır. Öğrencilerin doğal sayılar kümesini bir bütün olarak kavramaları zor olsa da her doğal sayıdan sonra bir doğal sayı bulunduğu düşüncesini kavrayabilirler. Öğrencilere ait önemli bir fenomen "hiç bitmeyen süreç" fenomenidir. Öğrenciler için sonsuz bir olayın anlamının, sonlu olan bir işlemin hiç bitmeden devam etmesi olduğu görülmüştür. Doktora öğrencileri ile ilköğretim öğrencilerinin sonsuzluk kavramını anlayışları arasındaki benzerliğe göre, konu ile ilgili kayda değer bir matematik öğretimi alınmadığı sürece ileri yaşlarda kavram imajlarının pek fazla değişmeyeceği belirlenmiştir. Sonuç olarak sabit sezgilerden bahsedilmese de öğrencilerin sezgi ve anlayışlarının aynı yapıyı koruduğu görülmüştür. Bazı öğrencilerin farklı sonsuz kümeleri açıklamak için kullandıkları ve yaşadıkları kararsızlıkların sebeplerinden biri olarak görülen "sayılabilirlik" kavramının hem doktora hem de ilköğretim öğrencileri için kilit kavramlardan biri olduğu düşünülmektedir.

Bingölbali ve Monaghan (2008) makine mühendisliği ve matematik bölümü birinci sınıf öğrencilerinin, değişim oranı ve tanjant yönlerine atıfla türevin kavramsal gelişimini ve öğrencilerin bölümlerinin bilgi düzeyleri üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Öğrencilere yöneltilen test soruları, türevin grafik, cebir ve uygulama formatlarında değişim oranı ve tanjant yönlerini ele almıştır. Ön test sonuçlarına göre mühendislik ve matematik öğrencilerinin performansı arasında anlamlı bir fark görülmemiştir. Son testte ve kalıcılık testinde her iki grup da performanslarını geliştirmiş, ancak mühendislik öğrencileri değişim oranı, matematik öğrencileri tanjant sorularında diğer gruba göre daha iyi performans göstermiştir. Buna paralel olarak mühendislik öğrencilerinin değişim oranı, matematik öğrencilerinin ise tanjant yönelimlerini daha fazla tercih ettikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin türevle ilgili kavram imajlarının öğrenim yılının sonuna doğru ilerledikçe yapılan öğretimin içeriğine ve bölümlerinin perspektifine paralel olarak değiştiği görülmüştür. Mühendislik öğrencilerinin türevle ilgili kavram imajlarının yönelimi değişim oranı yönünde gelişirken, matematik öğrencilerininki tanjant doğrultusunda gelişmiştir.

Gülkılık (2008) açı, çember, geometrik yer, metrik kavramları ile ilgili öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram imajlarını ortaya çıkarmayı ve üç aylık bir eğitim dönemi sonucunda kavram imajlarındaki değişimleri anlamayı amaçlamıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının sadece kazandıkları yeni kavram imajlarını kullandıkları, ilk olarak yeni kavram imajı ile problemin üstesinden gelmeye çalışıp bunu başaramazlarsa eski kavram imajlarına geri döndükleri, problem çözme sürecinde eski ve yeni kavram imajlarını birlikte kullanmayı tercih etmedikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının problem çözmeye çalışırken uygun bir kavram imajı kullanmaya gereksinim duydukları sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının kavram imajlarını şekillendirirken, deneyimleri sonucunda kendilerine kolay gelen durumları tercih ettikleri belirlenmiştir. Kavramlarla ilgili kullanılan sembollerin kavram imajlarında ilk plana yerleştirildiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının, kavram imajları kavram tanımına yaklaştıkça problem çözümlerinin daha doğru olduğu tespit edilmiştir.

Kaplan (2008) araştırmasında sekizinci sınıf öğrencilerinin basamak ve basamak değeri kavramları hakkındaki zihinsel yapılarını incelemiştir. Katılımcıların çoğu, “basamak” kavramını konum ile, “basamak değeri” kavramını ise çarpım sonucu ile ilişkilendirmiştir. Katılımcıların, onluk sayı sisteminde ifade edilen sayıların birden fazla basamağı bulunabileceğini, sayının yazılışındaki rakamın miktarının konumu ile değiştiğini, basamak değerinin sayıyı oluşturan rakamlar tarafından belirlendiğini düşündükleri görülmüştür. Katılımcılar, ondalık sayıların onluk sayı sisteminde ifade edilebileceğini, ondalık sayıların kesir kısmındaki rakamların da birer konuma sahip olduğunu belirtmişlerdir. Bir ondalık sayının kaç basamaklı olduğunu belirlerken, katılımcıların çoğu hem tam kısmı hem de kesir kısmını dikkate almışlardır.

Katılımcıların çoğunun, onluk sayı sisteminden farklı bir sayı sistemindeki “basamak” ve “basamak değeri” ile ilgili fikirlerini açıklarken, onluk sayı sistemindeki alışkanlıklarını sürdürdükleri görülmüştür.

Biber (2010) matematik öğretmen adaylarının tek ve çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği ile ilgili kavram imajlarını ve bu kavramların yapılandırılmasında ortaya çıkan zorlukları incelemiştir. Katılımcıların limit kavramının gerçek hayattaki anlamına yönelik düşünceleri ile bu kavramların öğrenilmesi arasında bir ilişki gözlenmemiştir. Katılımcılar, yaklaşma kavramını fonksiyonun limitinin arandığı noktada “yaklaşık bir değer elde etme” olarak anlamaktadırlar. Formal tanımda yer alan sembollerin görevlerini ve tanımın anlaşılması için gerekli olan komşuluk ve yakınsaklık kavramlarını çok azı tam olarak bilmektedir. Fonksiyonun bir noktadaki limitini bulmak için lisede gördükleri teknikleri tercih etmişlerdir. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda limitini bulmada sorun yaşamışlardır. Limit ve süreklilik için iki boyutlu grafiklerde yaptıkları yorumları, üç boyutlu grafikler için yapmakta zorlanmışlardır. Tek değişkenli fonksiyonların sürekliliği hakkında doğru kavram bilgisine sahip olan öğretmen adaylarının çoğu, iki değişkenli bir fonksiyonun sürekliliği için cevap vermekte çekimser kalmıştır. Katılımcılar, iki değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için, iki farklı yaklaşım sonucu elde edilen limitlerin eşit olmasını yeterli görmektedir. Araştırmacı, katılımcıların bunu tek değişkenli fonksiyonlarda limitin varlığı için gerekli olan “sağ ve sol limitlerin eşit olması” ilkesine benzettiklerini düşünmektedir. Katılımcıların işlem becerileri iyi olsa da kavram bilgisi gerektiren sorularda başarısız oldukları görülmüştür. Tek değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği konusunda kavramsal bilgilerinin eksikliği nedeniyle iki değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği konusunda zorluk yaşadıkları düşünülmektedir.

Dede, Bayazit ve Soybaş (2010) öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarına ilişkin bilgi düzeylerini kavramsal bilgi ve kavram imajı temelinde araştırmışlardır. Katılımcıların büyük çoğunluğu fonksiyonu bir kümeden başka bir kümeye eleman eşleyen bir bağıntı olarak algıladıkları görülmüştür. Ancak, bu öğrencilerin sadece yarısı fonksiyon olma şartını açıkça belirtmiştir. Araştırmacılar bu durumu öğrencilerin kayda değer bir bölümünün fonksiyonlarla ilgili kavramsal bilgilerinin eksik olduğu şeklinde yorumlamışlardır. Öğrencilerin ders kitapları ve sınıf içi öğretimlerde yapılan vurgulara (cognitive focus) paralel olarak kavram imajlarını geliştirdikleri görülmüştür. Çalışma sonucunda öğrencilerin geliştirdikleri kavram imajları ve kavram tanımları arasında her zaman bir uyum olmayabileceği tespit edilmiştir. Bir kavramla ilgili farklı temsillerin kullanılmasının öğrencilerin kavram imajlarını geliştirirken zihinsel karmaşa yaşamalarına neden olabileceği düşünülmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom gibi temel cebirsel kavramlar arasındaki ilişkileri anlamada çok daha zayıf oldukları belirlenmiştir. Katılımcıların çoğu denklem ve fonksiyonların cebirsel gösterimleri arasındaki biçimsel benzerlikleri gerekçe göstererek 'denklem ve fonksiyon aynı şeylerdir' yorumunu yapmışlardır. Bu durum öğretmen adaylarının sorulara yanıt verirken kavram tanımları ile değil daha ziyade kavram imajları ile hareket ettikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Avgören (2011) ortaöğretim öğrencilerinin katı cisimler (prizma, piramit, silindir, koni, küre) ile ilgili sahip oldukları kavram imajlarını belirlemek amacıyla dokuz ve on ikinci sınıf öğrencileriyle fenomenografik bir araştırma yapmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin bazı katı cisimlerle ilgili prototip modeller oluşturdukları, kavram imajlarının geometrik cisim modelleri ve sınıf içi geometrik çizimler ile özdeşleştiği, katı cisimlerin alan ve hacim problemleri ile karşılaştıklarında ilk önce formülleri hatırlamaya çalıştıkları görülmüştür. Prizmalarda tabanların birbirine paralel olması kavram için kritik bir nitelik olarak belirlenmiştir. Katı cisimlerin genellikle karşılaşılan somut objelerin çizimi olarak algılandığı görülmüştür. Bu nedenle silindirin tabanının kapalı bir eğri olabileceği veya eğik cisim modellerinin tanım ve kavramla uyuştuğunun düşünülmediği belirlenmiştir. Benzer şekilde öğrencilerin koni ile ilgili model ve çizimleri geometrik tanımla tutarlı olduğu halde, kavramla ilgili algıları somut nesnelerle sınırlıdır. Öğrenciler ayrıtla ilgili kavram imajlarını genelde sezgisel yollarla oluşturduklarından, silindir ile koninin ana doğrularını ve yüksekliklerini de ayrıt olarak ele aldıkları için, ayrıtları saymaları istendiğinde çelişkiye düşmüşlerdir. Katı cisimler için belirli prototip modellerin daha baskın olduğu belirlenmiştir. Prizma için dikdörtgenler prizması, piramit için kare piramit, koni ve silindir için dik dairesel modellerin prototip olarak görülmektedir. Küre ise daha çok günlük yaşamda "yuvarlak" diye tabir edilen nesnelerle özdeşleşmektedir. Bu prototip modeller çoğu kez katı cisimler için farklı bir modelin düşünülmesini engellemektedir.

Bozkurt ve Koç (2012) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin geometrik kavramlardan prizmaya dair bilgilerini incelemişlerdir. Katılımcıların üçte birinden fazlasının prizmayı yazılı olarak tanımlayamadığı, cevap verenlerin büyük kısmının yanıtlarının ise bir tek tema içerdiği görülmüştür. Bir tema kullanılarak yapılan bu tanımların hiçbirinin prizmayı tam olarak işaret edemediği belirlenmiştir. Katılımcıların cevaplarında prizmanın geometrik şekil, geometrik cisim ve üç boyutlu olma özellikleri ön plana çıktığı görülmüştür. Katılımcıların tanımlarını şekil üzerinden verdikleri, bunun için de kâğıt üzerindeki görünümü esas aldıkları tespit edilmiştir. Üst düzey geometri problemlerini doğru yanıtlayarak bu bölüme yerleşen öğrencilerin prizmayı doğru bir şekilde tanımlayamamasının nedeni olarak kavram imajları ile kavram tanımları arasındaki farklılık gösterilmiştir. Katılımcıların zengin bir kavram imajına sahip olsalar da prizma kavramını tanımlayabilme becerilerinin aynı düzeyde olmadığı görülmüştür. Ayrıca katılımcıların matematiksel dili kullanma ve tanımlanması istenen kavramı ifade edebilmede de yeterli olmadıkları belirlenmiştir.

Paksu, Musan, İymen ve Pakmak (2012) çalışmalarında sınıf öğretmeni adaylarının boyut kavramına yönelik kavram imajlarını belirlemeyi amaçlamışlardır. Çalışma kapsamında 46 öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmış, boyutla ilgili sorulara verdikleri yanıtların nedenleri sorgulanmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının boyut kavramına dair bilgilerinin yetersiz olduğu, boyut sayısına karar verirken köşe sayısı, kenar sayısı, köşegen sayısı, görünen yüz sayısı gibi farklı ölçütlere odaklandıkları gözlenmiştir. Katılımcıların çoğunun boyutla ilgili kavram imajlarının doğru olmadığı ve verilen nesnelere ilişkin kavramsal bilgi eksiklikleri bulunduğu belirlenmiştir.

Erşen ve Karakuş (2013) sınıf öğretmeni adaylarının bazı özel dörtgenlere yönelik kavram imajlarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Katılımcılar dörtgenlerin özelliklerini bilseler de çizimlerinde bunu göstermemişler; ancak klinik görüşmelerde çizdikleri şekillerin özelliklerini ifade etmişlerdir. Çizdikleri dörtgenlerin genelde prototip şekiller olduğu görülmüştür. Bu durum alışkın oldukları dörtgenlerin şekillerini çizerken daha çok sezgisel davrandıkları, özelliklere dikkat etmek yerine zihinlerindeki dörtgen imajlarını kullandıkları şeklinde yorumlanmıştır. Bazı katılımcılar şekillerin boyutlarını değiştirmeden sadece şekilleri döndürerek farklı dörtgenleri elde ettiklerini ifade etmişlerdir. Bazıları ise bir özel dörtgeni farklı şekilde çizerken farklı dörtgenlerin birbirileriyle olan ilişkilerini kullanmışlardır. Dörtgenler arasındaki hiyerarşik ilişkiyi yamuğun farklı şekilde gösterimleri için kullanmamışlardır. Dörtgenleri tanımlamaları istendiğinde sadece yamuğu tanımlamakta zorlandıkları görülmüştür. Geometrik bir şekil olan yamuk ile günlük hayatta kullanılan yamuk kelimesi ilişkilendirilerek yamuğun eğri büğrü bir şekil olduğu düşünülmektedir.

Öner (2013) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının trigonometrik fonksiyonların periyotlarına ilişkin kavram imajlarını belirleyerek uyguladığı bilgisayar destekli eğitimin kavram imajlarında oluşturduğu değişimi incelemiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının trigonometrik fonksiyonların periyotlarına ilişkin kavram imajları “belirli aralıklarla tekrarlanan olay”, “bir olayın tekrarlanması için geçen süre” ve “bir olayın tekrarlandığı uzunluk, aralık” olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının dörtte biri açıklamalarında fizikle ilgili kavramlara yer vermiştir. Bu durum öğretmen adaylarının kavram imajlarının aldıkları fizik eğitimi ve günlük yaşamlarında karşılaştıkları fiziksel olaylardan etkilendiği şeklinde yorumlanmıştır. Bilgisayar destekli uygulamalar sayesinde öğretmen adaylarının kavram imajlarının formal tanımla daha uyumlu, daha teknik ve zengin hale geldiği görülmüştür. Öğretmen adaylarından hem tanım hem imaj hücresine başvuranların genellikle doğru cevaba ulaştıkları, tanımla örtüşen imajlar geliştirenlerin sadece imaj hücresine başvurarak doğru cevaba ulaşabildikleri, ancak teknik içerikli problemler çözülürken sadece imaj hücresine başvuranların yanılabileceği sonuçları elde edilmiştir.

Deniz (2014) gerçekçi matematik yaklaşımına dayalı bir öğretim sürecinde sekizinci sınıf öğrencilerinin eğim kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorik çerçevesinde incelemiştir. Öğrencilerin, günlük yaşantılarından edindikleri eğimin fiziksel yorumu hakkındaki bilgi ve stratejilerini, öğrenme sürecine yansıttıkları ve fiziksel yorumdan geometrik yoruma geçiş yaptıkları görülmüştür. Geometrik yorumdan cebirsel forma geçiş yaparak, eğimi anlamlı bir şekilde temsiller arası ilişki kurarak öğrenmelerinin, onlarda güçlü bir eğim kavramı oluşumu sağladığı sonucuna varılmıştır. Öğrencilerden hiçbirinin eylem öncesi düzeyde bulunmadığı belirlenmiştir. Eylem düzeyindeki öğrencilerin eylemin sürece içselleştirilmesinde dik üçgen modelinin dinamik olarak zihinde yer edinmesi, “y2-y1/x2-x1” in anlamsız bir formül olarak ezberlenmemesi, eğimin yükseklik ve yatay mesafeye göre yorumlanması gibi olumlu adımları izledikleri görülmüştür. Eğimin geometrik yorumunun süreç düzeyinde kavramsallaştırılmasında eğime etki eden uzunluk değişkenleri arasındaki oransal ilişki dolayısıyla oran bilgisinin önemli olduğu görülmüştür. Öğrencilerin eğimin günlük yaşamdaki yansımaları olarak düşünülen formlarına sahip oldukları ve bu kavramı öğrenirken yatay matematikleştirme sürecinde oldukça aktif rol aldıkları görülmüştür. Araştırma sonunda tüm öğrencilerin, eğimin bağlı olduğu değişkenleri önce dik üçgen modelini bir araç gibi kullanarak daha sonra modelden bağımsızlaşarak anlamlı bir şekilde savunabildiği görülmüştür.

Ergin (2014) sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik cisimlerle ilgili imgelerini ve sınıflama stratejilerini incelemeyi amaçlamıştır. Ayrıca öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri, uzamsal düşünme becerileri açısından da incelenip ilişkileri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin geometrik cisim imgelerinde boyut kavramının eksikliği görülmüştür. Öğrenciler iki boyutlu şekilleri de geometrik cisim olarak algılamışlardır. Öğrencilerin görünüşe, yuvarlak olmamaya, kenar, açı gibi özelliklere veya boyuta göre geometrik cisim olup olmadığına karar verdikleri görülmüştür. Öğrencilerin geometrik cisim imgelerinde üçgen, kare, dikdörtgen ve yamuk şekillerinin etkisi olduğu belirlenmiştir. Ayrıca öğrenciler geometrik cisimleri tanımlarken, belirlerken ve örnek verirken yüzeylerine dikkat etmişlerdir. Geometrik cisimlerin duruşlarının da onları belirlemede etkili olduğu görülmüştür. Öğrencilerin daha çok günlük hayattan somut modelleri ve prototip cisimleri tercih ettiği belirlenmiştir. Bu şekilde sınırlı bir duruma dayalı düşünerek genellemeler yapmalarının kavrama yönelik algılarını sınırlandırdığı ve kavram yanılgılarına sebep olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin formal tanımdan uzak kişisel tanımları üzerinden hareket ettikleri, geometrik cisimlerin kritik özelliklerine dikkat etmedikleri görülmüştür. Ayrıca tanımlamalarında ve açıklamalarında matematiksel dili doğru kullanmadıkları belirlenmiştir. Geometrik cisimleri sınıflarken de kendi imgelerinin etkisinde kalmış, yüzeyler arasındaki ilişkilere bağlı olarak sınıflamalar yapmışlardır.

Güzel (2014) ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin prizma ve silindir kavramlarıyla ilgili kavram imajlarını incelemiştir. Çalışma kapsamında öğrencilerden prizma ve silindir ile ilgili çağrışımlarını yazmaları, gerekirse şekiller çizmeleri istenmiştir. Kare prizma ve silindir ile ilgili verilerin analizi sonucunda katılımcıların genellikle çağrışım yerine tanım yapma eğiliminde oldukları, şekilleri betimlemeye çalıştıkları, şekillerin yüzeylerine ve açılımlarında oluşacak iki boyutlu şekillere çok fazla vurgu yaptıkları belirlenmiştir. Katılımcıların birçoğunun kare prizmayı dörtgen prizma, silindiri ise dik dairesel silindir olarak algıladıkları görülmüştür.

Yanık (2014) çalışmasında altıncı sınıf öğrencilerin geometrik dönüşümlerle ilgili kavram imajlarını ve bunların muhtemel kaynaklarını araştırmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin geometrik dönüşümlerle ilgili iki temel kavram imajına sahip olduğu ortaya çıkmıştır: öteleme hareketi olarak dönüşüm ile öteleme ve dönme hareketi olarak dönüşüm. Bu kavramları benimseyen öğrenciler dönüşümleri, tanımlanmamış hareket, kısmen tanımlanmış hareket ve düzlemde tek bir geometrik şeklin tanımlanmış hareketi olarak kavramak gibi çeşitli anlayış seviyeleri göstermişlerdir. Sonuçlar, bazı öğrencilerin tüm geometrik figürlerin dönüştürülemeyeceğini düşündüklerini ortaya koymuştur. Bu öğrencilere göre, sadece çokgenler gibi dairesel olmayan şekiller dönüştürülebilir. Öğrenciler dönüşümün sadece dikey, yatay veya her ikisi birlikte şeklinde uygulanabileceğini, çapraz dönüşümün mümkün olmadığını düşünmektedir. Tüm öğrenciler hareket ve yer değiştirme olmadan dönüşümün yapılamayacağını düşünmektedirler. Öğrencilerin çoğu, kuvveti bir hareket başlatıcı şeklinde geometrik dönüşümlerin önemli bir parçası olarak görüyordu. Ayrıca yapılan veri analizleri öğrencilerin bir dönüşüm vektörünü beş farklı şekilde yorumladığını ortaya çıkarmıştır: referans doğrusu olarak vektör, simetri doğrusu olarak vektör, yön göstergesi olarak vektör, parametre olarak vektör ve soyut bir araç olarak vektör. Ayrıca öğrencilerin geometrik dönüşümlerle ilgili kavram imajlarının ana kaynakları, sınıf içinde yapılan öğretim, kullanılan matematik ve fen ders kitapları, gerçek yaşam örnekleri ve gündelik dil olarak belirlenmiştir.

Dündar (2015) matematik öğretmen adaylarının eğim kavramına ilişkin bilgilerini ve kavram imajlarını ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Araştırmacı katılımcıların eğim kavramına ilişkin bilgilerini yedi farklı kategoride (geometrik, trigonometrik, oran, fiziksel, cebirsel, fonksiyon, davranış) sınıflamıştır. Katılımcıların eğim kavramına ilişkin görüşlerinin en fazla trigonometrik, fiziksel ve geometrik kategorilerinde sınıflandığı görülmüştür. Birinci sınıfların eğim kavramına fiziksel özellikleriyle yaklaştığı ve bu yaklaşımın sınıf seviyesi yükseldikçe azaldığı ortaya çıkmıştır. Bunun tersine, eğim kavramına trigonometrik yaklaşımın sınıf seviyesi yükseldikçe arttığı görülmüştür. Katılımcıların eğimi geometrik, fiziksel, oran, cebirsel, sayısal, sembol ve trigonometrik olarak temsil ettikleri belirlenmiştir. Birinci sınıfların çoğunun eğimi sembol (m) ile temsil ettiği ve bu durumun sınıf seviyesi arttıkça azaldığı ortaya çıkmıştır. Sınıf seviyesi artıkça eğimin trigonometrik (tan x) olarak temsilinin arttığı belirlenmiştir. Eğimin matematiksel tanımıyla ilgili katılımcıların düşüncelerinin altı kategoride (trigonometrik, geometrik, oran, cebirsel, sembol ve fiziksel) sınıflandığı belirlenmiştir.

Kabael, Barak ve Özdaş (2015) çalışmalarında üniversite öğrencilerinin limit kavramına yönelik kavram imajlarını, kavram tanımlarını ve kavram imajları ile formal tanımı ilişkilendirme durumlarını araştırmışlardır. Öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin hem limit kavramıyla ilgili kavram imajlarında hem de yaptıkları kavram tanımlarında sağ-sol limit eşitliği teoremi ve limitin dinamik formunun öne çıktığı görülmüştür. Öğrencilerin limitin formal tanımını açıklayıp kullanmada zorluk yaşadığı belirlenmiştir. Birçoğunun görüşme boyunca formal tanım yapmaktan kaçındığı, formal tanım yapmaya çalışanların ise tanımlarının hatalı ya da eksik olduğu görülmüştür. Limitin varlığını ispatlamak için de limitin formal tanımını kullanamadıkları belirlenmiştir. Ayrıca limit kavramıyla süreklilik kavramını karıştırdıkları görülmüştür. Öğrencilerin uygulamaya yönelik soruları çözerken kavram imajlarından faydalandıkları göze çarpmıştır. Öğrenciler kavram imajlarını bu şekilde kullanıyor olsalar da limitin formal tanımı ile kavram imajları arasında ilişki kuramadıkları tespit edilmiştir.

Zhang, Clements ve Ellerton (2015) beşinci sınıf öğrencilerinin birim kesirlere ait kavram imajlarının, kesir kavramının çoklu düzenlemelerine dayanan bir öğretim sonrası nasıl değiştiğini araştırmışlardır. Katılımcıların kavram imajlarını belirlemek için öğretim öncesi ve sonrasında uygulanan yazılı sorular ve bireysel görüşmelerdeki sözlü sorular kullanılmıştır. Sonuçlar, öğretim öncesi aşamada, öğrencilerin birim kesir kavram imajlarının çok sınırlı ve alan modellerine bağlı olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte, öğretimden sonra öğrencilerin birim kesir etkinliklerine yanıt olarak alan modelleri yanında farklı modeller de seçip uygulayabildikleri görülmüştür. Öğrencilerin birim kesirlere ait kavram imajları, kapasite, çevre, doğrusal ve süreksiz modellerle zenginleştirilmiş ve bunlarla ilişkilendirilmiştir. Öğrencilerin öğretim sonrasında performansları iyileşmiş ve birim kesirlere yönelik kavramsal anlayışları gelişmiştir.

Yiğit Koyunkaya (2016) matematik eğitimi lisansüstü öğrencilerinin bir dik üçgendeki iki taban açısının sinüs ve kosinüsü arasındaki ilişkileri nasıl anladıklarına odaklanmıştır. Ayrıca, öğrencilerin trigonometri ile ilgili etkinlikleri çözerken ne tür kavram imajları ve kavram tanımları gösterdiklerini belirlemiştir. Araştırmacı öğrencilerin kavram imajlarını ve kavram tanımlarını kullanmasının araçsal ve ilişkisel anlayışlarını belirlemeye yardımcı olabileceğini düşündüğünden, bu iki teoriyi birleştirmiştir. Öğrencilerin cevapları birim çember, dik üçgen veya anımsatıcının görev hakkında akıl yürütmeye yardımcı olan kavram imajları ve kavram tanımları olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin trigonometri ile ilgili kavram imajları ve kavram tanımlarının, tek bir işlem, kural veya teoremin tek bir bağlama uygulandığı, kavramın araçsal anlayışı ile ilişkili olduğu belirlenmiştir. Öğrenciler trigonometrik oran görevlerini yerine getirmede esnek olmadıkları ve sınırlı bir ilişkisel anlayışa sahip olduklarından, trigonometrik oranlara yönelik araçsal anlayışa sahip oldukları öne sürülmüştür. Öğrencilerin kavramla ilgili prosedürleri görevlere esnek bir şekilde uygulamadıkları görülmüştür. Araştırmanın sonuçları öğrencilerin açı kavramı anlayışlarının trigonometri anlayışlarına, özellikle de trigonometrik oranlara, aracılık ettiğini göstermektedir.

Özaltun Çelik ve Bukova Güzel (2017) çalışmalarında bir lise öğrencisinin ikinci dereceden fonksiyonları inceleyip grafiklerini çizerken zihnindeki kavramları ve bunların altında yatan sebepleri ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Araştırmacılar öğrencinin yaşadığı güçlüklerin temel sebebi olarak fonksiyonlar ve grafikleri hakkında kavramsal bir anlayış geliştirmeden kuralları ve özellikleri ezberleyen sınırlı bir anlayışa sahip olmasını göstermişlerdir. Öğrencinin ilgili kavramları unuttuğu, fonksiyonun grafiğinin a, b ve c katsayılarının değerlerinin değişimine bağlı olarak değişeceğini bildiği halde sadece işlemsel bir anlayışa sahip olduğu anlaşılmıştır. Ayrıca tepe noktasını simetri ekseni ile ilişkilendirememek gibi ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili kritik kavramlar ya da fikirleri ilişkilendiremediği belirlenmiştir. Araştırmacılar öğrenci kavramsal bir anlayışa sahip olsaydı, bu tür zorlukları yaşamayacağını ve önceden edindiği bilgiyi hatırlamak yerine akıl yürütmeye çalışacağını ifade etmişlerdir.

Ubuz (2017) yedinci sınıf öğrencilerinin kavram öğrenme modeli çerçevesinde dörtgenler arasındaki ilişkiler ile ilgili kavram imajlarını incelemiştir. Araştırma kapsamında Van Hiele Geometri testinin görsel, analitik ve soyutlama boyutlarını içeren soruları öğrencilerin dörtgenlere yönelik kavram imajlarını belirlemek için uygulanmıştır. Van Hiele testindeki sonuçlar, öğrencilerin dörtgenlerin benzer ve farklı özellikleri arasında pek sağlıklı bir ilişki kuramadıkları ve dörtgenler arasında özellikle de paralelkenar, kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen arasında doğru bir sınıflandırma yapamadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bazı kavram yanılgıları olduğu ve dörtgenlerin özellikleri arasında ilişki kurmada zorlandıkları görülmüştür. Öğrenciler dörtgenleri tanımlarken onların şekillerini de çizmişlerdir. Öğrencilerin dörtgenler için yaptıkları tanımların şekilleri yeterince sınırlandırmadıkları, formal tanımlara uygun olmadıkları belirlenmiştir. Dörtgenler arasındaki benzerlikleri doğru olarak ifade ettikleri, farklılıkları belirtirken şekillerden yararlandıkları; ancak kritik olmayan özelliklerden bahsettikleri görülmüştür. Bu eğilim doğru sınıflandırmalar yapmalarına engel olmuştur. Dörtgenler arasında hiyerarşik ilişkilerin kurulmasında dörtgenlere ait olan formal tanımlar ile öğrencilerin kavram imajları arasındaki farklılaşmanın önemli olduğu belirtilmiştir. Kavram imajlarının oluşumunda ise şekillerin büyük rol oynadığı görülmüştür.

Bayram ve Duatepe Paksu (2018), sekizinci sınıf öğrencilerinin paralelkenar kavramına yönelik yaptıkları çizimler bağlamında kavram imajlarını ve yaptıkları tanımları incelemişlerdir. Öğrencilerin paralelkenara ait özellikleri belirleyebilmeleri, yaptıkları tanımlar ve oluşturdukları örnekler; doğruluk, genellik ve zenginlik ölçütlerine göre incelenmiştir. Öğrencilerin yaklaşık %94'ünün (61 öğrenci) doğru şekilde paralelkenar çizebildiği; ancak bunların zengin örnekler olmadıkları görülmüştür. Öğrencilerin akıllarına ilk gelen paralelkenar örnekleri çoğunlukla prototip örnekler olmuştur. Öğrencilerden sadece 6'sının (yaklaşık %9) paralelkenarın kritik özelliklerini tam olarak yazabildiği belirlenmiştir. Öğrencilerin yaklaşık yarısının (%49, 32 öğrenci) paralelkenarın kritik özelliklerini açıklamada yetersiz kaldığı, geriye kalan 27'sinin (yaklaşık %42) yanlış cevap verdiği veya soruyu boş bıraktığı görülmüştür. Öğrencisinden sadece 6'sının (yaklaşık %9) paralelkenara özel tüm kritik özellikleri yazabildiği, 9'unun (yaklaşık %14) özele yakın cevaplarla paralelkenara ait bazı kritik özellikleri yazsalar da bu özelliklerden şeklin paralelkenar olduğunun tam olarak anlaşılmadığı, büyük çoğunluğunun (35 kişi, yaklaşık %54'ü) paralelkenarın hiçbir kritik özelliğini yazmadığı belirlenmiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğunun (54 kişi, yaklaşık %83) paralelkenar için farklı örnekler çizebildikleri; ancak bunların genelde zengin örnekler olmadığı görülmüştür. Sadece 4 öğrencinin (yaklaşık %6) doğru şekilde paralelkenarı tanımlayabildiği belirlenmiştir. 21 öğrencinin (yaklaşık %32) tanımlarının yetersiz olup paralelkenarın kritik özellikleri tam olarak içermediği, 18 öğrencinin (yaklaşık %28) tanımlarının hiçbir kritik özelliği içermeyen yanlış tanımlar olduğu, 22 öğrencinin (yaklaşık %34) hiç tanım yapmayıp soruyu boş bıraktığı tespit edilmiştir.

Bilir (2018), öğretmen adaylarının tam sayı olan ve tam sayı olmayan kenar uzunluklarına sahip dikdörtgenlerin alan ölçümüne ilişkin anlayışlarını incelemiştir. Katılımcıların kenar uzunlukları tam sayı olan dikdörtgenlerin alan ölçümü için kavramsal bir anlayış göstermiştir. Verilen dikdörtgeni kaplamak için ihtiyaç duydukları birim sayısını belirlemek için birim yerleştirme sürecini doğru olarak kullandıkları görülmüştür. Katılımcılar tüm birimleri yerleştirmeden, alan formülünü kullanmak amacıyla, dikdörtgenin boyutlarını belirlemek için bir satır ve sütundaki alan birimlerini konumlandırmışlardır. Birimleri yerleştirme sürecini doğru bir şekilde uygulasalar da araştırmacı onları yönlendirmeden bileşik birimleri kullanmamışlardır. Birimleri yerleştirme ve bileşikler yoluyla düzenleme süreçlerini kullanımlarının, birim karelerin konumlarını doğru bir şekilde koordine etmeleri ve diziler oluştururken bileşikler kullanmaları nedeniyle, alan ölçme için yeterli olduğu belirlenmiştir. Katılımcıların tamamı alan formülünün anlamını uzamsal yapılandırma ve sayısal prosedürler arasındaki ilişki açısından açıklayabilmiştir. Bir ve iki boyutlu şekiller için birimlerin konumlandırılmasında zorluk yaşamaları, katılımcıların bileşiklerle düzenleme sürecini kullanmasını da etkilemiştir. Katılımcılar başlangıçta uzunluk birimleri ile alan birimleri arasında ayrım yapmamış ve bazen birbirinin yerine kullanmıştır. Alan formülünün anlamı üzerine odaklanan görüşmelere katıldıktan sonra, alan birimleri ve uzunluk birimleri arasında bağlantı kurmayı başarmışlardır. Tam sayı olmayan kenar uzunlukları kullanıldığında, tüm katılımcıların, birimleri yerleştirme ve birleşikler yoluyla düzenleme süreçlerini yeterince kullanamadıkları için, düşük düzeyde bir anlayış sergiledikleri belirlenmiştir. Katılımcılar, birim yerleştirme sürecini tam sayı olmayan kenar uzunluklarına sahip dikdörtgenlere genişletmekte güçlük çekmişlerdir.

Çavuş Erdem (2018) alan ölçme kazanımlarını içeren matematiksel modelleme etkinliklerinin, öğrencilerin konuyu öğrenmelerine ve matematiksel modelleme becerilerine etkisini araştırmıştır. Başlangıçta öğrencilerin alan kavramı ve alan hesaplamalarıyla ilgili algılarının eksik ve yetersiz olduğu belirlenmiştir. Bazı öğrencilerin alan kavramını sayısal bir değer olarak kabul ettiği görülmüştür. Çoğu öğrencinin bir çokgenin alanını diklik şartı aramadan kesişen iki kenar uzunluğunun çarpımıyla hesapladığı tespit edilmiştir. Ayrıca, bazı öğrencilerde birim kare kavramının oluşmadığı, bazılarında ise yetersiz olduğu, alan ölçme birimlerini tanımlamada ve birimler arası dönüşümde eksiklikleri bulunduğu belirlenmiştir. Çoğu öğrencinin uzunluk korunumuna sahip olmadığı için çokgenlerin alanını yanlış hesapladığı belirlenmiştir. Uygulama öncesinde öğrencilerin alan bağıntılarını yanlış ve ezbere bir biçimde kullandığı, bağıntı kurallarını duruma göre çarpıttığı ve kural uydurduğu görülmüştür. Bazı öğrencilerin aynı alan veya çevre ölçüsüne sahip farklı çokgenler bulunmadığını düşündükleri tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin kenar uzunluğu ile alan arasındaki ilişkiyi doğru yorumlayamadıkları belirlenmiştir. Uygulama sonrasında öğrencilerin birim kare kavramını öğrendiği, doğru bir şekilde kullandığı görülmüştür. Şekli kaplayan birim kare sayısı ile dikdörtgenin alan bağıntısının ilişkilendirilmesinin öğrenciler için bir dönüm noktası olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin alanı bölge olarak algılamaları sonucunda alan korunumunu kazandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin çokgenlerin alan bağıntılarını matematiksel olarak açıklayabildiği, bazı öğrencilerin daha öğrenimini görmeseler de yamuk gibi çokgenlerin alan bağıntılarını oluşturabildiği ve alanı doğru olarak hesaplayabildiği görülmüştür. Uygulama sürecinde öğrencilerin, aynı alan ve çevre ölçüsüne sahip farklı çokgenler oluşturmaları bu konudaki düşüncelerinin hatalı olduğunu fark etmelerini sağlamış, farklı uzunluklara sahip çokgenler oluşturabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin çevre uzunluğunun sabit olması durumunda alanla kenar uzunluğu arasındaki ilişkiyi fark edebildiği, fakat alanın sabit olması durumunda kenar uzunluklarının çevreyle olan ilişkisine dair bir fikirde bulunmadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin birim kare kullanarak kenar uzunluğu ile alan arasındaki ilişkiyi görüp açıklayabildikleri tespit edilmiştir.

Ardiansari, Suryadi ve Dasari (2020), altı ve yedinci sınıf öğrencilerinin eşittir işaretini ne ölçüde anladıklarını, ilkokul ve ortaokul öğretmenlerinin bu işaret hakkındaki anlayışlarını araştırmışlardır. Öğrencilerin eşitlik hakkındaki kavram imajı üç kategoriye ayrılmıştır: işlemsel, ilişkisel ve belirtme. Az sayıda öğrencinin ilişkisel ve belirtme kategorilerinde yer aldığı, neredeyse tüm öğrencilerin eşittir işaretiyle ilgili işlemsel kategoride bir kavramsal tanıma sahip oldukları belirlenmiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlerin eşittir işaretine ilişkin kavram imajlarının genel olarak esnek işlemsel kategoride olduğu, ancak henüz iyi gelişmiş bir ilişkisel anlayışa sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin öznel zihinsel eylemlerinin, öğretmenlerin öğrenci ihtiyaçlarına bireysel olarak cevap vermesini gerektirdiği üzerinde durulmuştur. Öğretmenlerin öğrencilerin yanlış anlamalarını belirleyebilmesi ve bunları çözmelerine yardımcı olacak bir eylem planı oluşturabilmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Macit ve Altay (2020) altıncı sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram imajları, kavram yanılgıları ve akademik başarıları arasındaki ilişkiyi belirlemeyi amaçlamışlardır. Öğrencilerin en çok sahip oldukları kavram imajları sırasıyla bölüm, parça-bütün, pay-payda kavram imajları olmuştur. En az sayıda öğrencinin sahip olduğu kavram imajları ise sırasıyla ölçü, oran ve işlemci kavram imajları olmuştur. Farklı kesir kavram imajlarına sahip öğrencilerin, kavram yanılgısına sahip olma ve başarı durumlarının da farklılık gösterdiği belirlenmiştir. Ayrıca kavram yanılgıları ile başarı arasında düşük düzeyde negatif yönlü bir ilişki olduğu tespit edilmiştir. Parça- bütün kavram imajına sahip olan öğrencilerin hem yüksek başarı göstermiş hem de daha az sayıda kavram yanılgısına düştükleri görülmüştür. Ölçü, işlemci ve pay-payda kavram imajına sahip olan öğrencilerin diğer kavram imajlarına göre daha az başarılı oldukları ve daha fazla kavram yanılgısına sahip oldukları tespit edilmiştir. Pay-payda kavram imajına sahip olan öğrencilerin kesri sadece simgesel olarak gördükleri ve kapsamlı, yeterli bir kavram imajına sahip olmadıkları belirlenmiştir.

Ulusoy (2020) öğretmen adaylarının üçgen kavramıyla ilgili anlayışlarını ortaya koymak için kavram imajı ve kavram tanımı teorik yapısını kullanmıştır. Katılımcıların bir üçgeni tanımlarken gerekli ve yeterli koşullara dayalı bir tanım üretmekte güçlük yaşadıkları belirlenmiştir. Bir üçgenin tanımlanması için uygun olan ifadelerin gerekli ve yeterli koşullardan oluştuğu; ancak çoğunun asgari düzeyde olmadığı veya uygun olmayan terminoloji kullanımlarını, kritik özellikleri ve bu özelliklerden türetilecek diğer özellikleri içerdiği görülmüştür. Uygunsuz ifadelerin çoğunlukla, kapalı olmayan veya kavisli kenarları olan birçok örnek olmayan üçgen oluşumuna izin veren, gerekli ancak yeterli olmayan koşullar içerdiği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının çizdiği üçgen örnekleri incelendiğinde, kavram imajlarının çoğunlukla prototip dar üçgenler içerdiği görülmüştür. Ayrıca, dik üçgen kavram imajlarının, dik kenarları dikey ve yatay konumda olan örnekler içerdiği tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının üçgen olmayan örnekler için çoğunlukla çokgenler (kareler ve dikdörtgenler) veya kapalı ancak çokgen olmayan (daireler ve elipsler) iki boyutlu şekiller çizdikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının üçgenin kritik bir özelliği olarak kenar sayısını vurguladıkları ve öğrencilerin bu şekilleri kolayca anlayabileceklerini düşündükleri için dört veya daha fazla kenarlı çokgenleri üçgen olmayan örnekler olarak çizdikleri belirlenmiştir. Üç kenarlı olup üçgen olmayan örneklerin, çocukları geometrik şekiller hakkında görsel özelliklerden ziyade niteliklere dayalı olarak akıl yürütmeye teşvik ettiği; ancak katılımcıların bu tarz örneklere oldukça sınırlı sayıda yer verdiği, bunların öğrencilerin kazanımları üzerindeki potansiyel etkilerinin farkında olmadıkları görülmüştür.

Kaymakçı Üstüner (2022) ortaokul matematik derslerine yönelik hazırlanan internet videolarında kullanılan analojileri kavram tanımı ve kavram imajı çerçevesinde incelemiştir. Araştırma kapsamında 2020-2021 eğitim öğretim yılında en çok izlenmeye sahip 5 öğretmenin sayılar ve cebir konularıyla ilgili ders anlatım videolarındaki analojiler belirlenerek analiz edilmiştir. Toplam 228 video hazırlanan “Video İnceleme Rehberi” eşliğinde izlenerek öğretmenlerin başvurduğu 68 analoji çalışmanın verileri olarak belirlenmiştir. Bu analojilerin öncelikle kavram tanımları belirlenmiş, ardından kavram tanımları ışığında analojilerin kullanım amaçları ve öğrencilerde oluşabilecek olası kavram imajları belirlenmiştir. Öğretmenlerin kullandığı analojilerin özellikle, belirli işlemleri doğru şekilde uygulama ve işlem kurallarını akılda tutma amacıyla kullanıldığı ve bu işlemlerin kavramsal boyuttaki nedensellik açıklamalarına cevap vermediği sonucuna ulaşılmıştır. Birçok analojinin sadece işlemlerin doğru gerçekleştirilmesi ve işlem özelliklerini akılda tutulması için kullandığı ve kavrama yönelik analojilerin az sayıda olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, kullanılan analojilerin matematiksel kavram veya işlemlerle ilgili sınırlı bir bakış açısı sunduğu ve öğrencilerde pek çok kavram yanılgısına sebep olabileceği tespit edilmiştir.

Şahin (2022) ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlere ilişkin kavram imajlarının incelemiştir. Öğrencilerin kavram imajlarını belirlemek amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilen ve iki kısımdan oluşan "7. Sınıf Cebirsel İfade ve Denklem Kavram İmajı Testi" kullanılmıştır. İlk bölümde öğrencilerden cebirsel ifade ve denklem kavramlarını tanımlamaları ve örnek vermeleri istenmiştir. İkinci bölümde ise verilen örnekleri cebirsel ifade veya denklemle eşleştirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin cebirsel ifade kavramına ait tanımlarının "En az bir bilinmeyen içeren işlem", "Bilinmeyen/Harf", "Bilinmeyen ve sayı" ve "Bilinmeyen ve eşitlik" kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli denkleme ilişkin kavram tanımlarının "Bilinmeyeni Bulma", "Bilinmeyen/Harf" ve "Bir Bilinmeyen" kategorileri altında toplandığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin bazılarının cebirsel ifade ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kavramına ait tanım yapmasalar bile doğru örnek verdikleri görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel ifade ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kavramlarını birbirinin yerine kullandıkları tespit edilmiştir. Diğer taraftan öğrencilerin denklem kavramında eşittir sembolünün anlamını fark etmedikleri ve birinci derece ile bir bilinmeyen kavramlarını görmezden geldikleri belirlenmiştir.

2.6.3. Kanıt şemalarıyla ilgili araştırmalar

Kanıt şemalarıyla ilgili araştırmalar genellikle ortaöğretim ve yükseköğretim düzeylerindeki katılımcılarla yürütülmüştür. Ortaokul ve ilkokul düzeyinde yürütülen az sayıda araştırma da mevcuttur.

Flores (2002) farklı sınıflarda öğrenim gören bir grup ilköğretim öğrencisi ile matematik öğretmeni adaylarıyla birlikte görüşmeler yapmıştır. Araştırmada öğrencilerden matematik dersinde öğrendikleri dört konuyu söylemeleri istenmiştir. Daha sonra öğrencilere bu bildiklerinin doğruluğundan nasıl emin oldukları sorulmuştur.

Öğrencilerin bunun için Sowder ve Harel'ın (1998) şemalarına benzer şemalar kullandıkları ortaya konulmuştur. Çalışmaya katılan öğrencilerin okulda öğrendikleri olguların neden doğru olduğunu açıklamakta zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca birçoğunun matematikteki düşüncelerini açıklarken veya düşüncelerinin doğruluğunu gösterirken sınırlı açıklamalar yaptıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin matematikte öğrendiklerinin sorgulanmasından rahatsız oldukları da gözlenmiştir. Buna rağmen kendilerine olan güvenlerini ve öğrendikleri olguları doğru anladıklarını göstermek için çözümlerinin doğruluğunu gösterirken kendi yöntemlerini kullanmışlardır.

Flores (2006) yaptığı bir başka çalışmada 5-12. sınıfa devam etmekte olan toplam 70 öğrenciyle görüşmüş, öğrencilerden matematikte öğrendikleri olguların neden doğru olduğunu açıklamalarını istemiştir. Görüşmelerde öğrencilerden matematikte öğrendikleri iki tane olgu, prosedür veya kuralı söylemeleri istenmiştir. Daha sonra görüşmeci katılımcıya söylemiş olduğu olgunun neden doğru olduğunu veya prosedürün neden doğru yanıtı verdiğini sormuştur. Öğrencilerin verdikleri yanıtlar Sowder ve Harel'in (1998) kanıt şemalarına göre sınıflanmıştır. Öğrencilerin çoğunun matematikte öğrendikleri ile ilgili konuşmakta ve öğrendiklerini anımsamakta zorlandıklarını görmüştür. Sonuç olarak katılımcıların çoğunlukla dışsal kanıt şemalarından otoriteye bağlı kanıt şemasını kullandıkları, çok sayıda katılımcının deneysel kanıt şemalarını kullandığı, az sayıda öğrencinin de analitik kanıt şemalarını kullanmayı tercih ettiği görülmüştür.

Aydoğdu, Olkun ve Toluk'un (2003) yapmış olduğu çalışmanın amacı ise altı, yedi ve sekizinci sınıflardaki öğrencilerin matematik problemlerine buldukları sonuçlardan nasıl emin olduklarını araştırmaktır. Bu amaçla her sınıf düzeyinden dörder öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Veriler analiz edildiğinde öğrencilerin genellikle dışsal kanıt şemalarından otoriteye bağlı kanıt şemasını kullandıkları görülmüştür. Buna göre bu öğrenciler matematiği öğrenirken kendi zihinsel yapılarını oluşturmak yerine ezberleme yoluna gitmişlerdir.

Ören (2007) çalışmasında onuncu sınıf öğrencilerinin geometri sorularında kullandıkları kanıt şemalarını, öğrencilerin bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre kanıt şemaları kullanımlarındaki farklılıkları araştırmıştır. Elde edilen verilerin analizi sonucunda öğrencilerin dışsal temelli ve deneysel kanıt şemalarını analitik kanıt şemalarına göre önemli ölçüde daha fazla kullandıkları görülmüştür. Ayrıca kız öğrencilerin deneysel kanıt şemalarını erkek öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullandığı sonucuna ulaşılmıştır.

Sarı, Altun ve Aşkar (2007) çalışmalarında üniversite öğrencilerinin kanıtla ilgili görüşlerini belirlemişler ve kanıtlama süreçlerini incelemişlerdir. Ders gözlemleri ve görüşmeler sonucunda öğrencilerin sahip oldukları kanıt şemaları ve kanıt yapma yaklaşımları belirlenmiştir. Öğrencilerin ders başarıları ile kanıtlama sürecindeki başarılarının paralel olduğu görülmüştür. Yüksek başarıya sahip öğrencinin dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı belirlenmiştir. Orta başarıya sahip öğrenci başlangıçta tümevarımsal kanıt şemasına sahipken zamanla dönüştürülebilen kanıt şemasına geçiş yapmıştır. Düşük başarıya sahip öğrenci ise otoriteye bağlı kanıt şemasının yanında algısal kanıt şemasının özelliklerini de göstermiştir. Yüksek ve orta başarılı öğrenciler geçerli bir kanıt oluşturabilmiş; fakat düşük başarılı öğrenci geçerli bir kanıta ulaşamamıştır.

İskenderoğlu ve Baki (2011) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını tespit etmeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla 53 öğretmen adayına yazılı sınav uygulamışlar ve bunlardan dördü ile klinik görüşme yapmışlardır. Çalışmanın sonucunda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemaların her üçünü de kullandıkları görülmüştür. Bunun yanında katılımcıların yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullandıkları ortaya çıkmıştır.

Ceylan (2012) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının dinamik matematik yazılımı yardımıyla geometriye yönelik kanıtlama becerilerini incelemiştir. 6 öğretmen adayı ile yürütülen klinik görüşmeler sonucunda katılımcıların problemlerin çözümünde yazılımı amaçları doğrultusunda kullanabildikleri görülmüştür. Ayrıca yazılımın özelliklerinin öğretmenlerin farklı çözüm yolları aramalarını, geometrik özellikleri keşfetmelerini, genelleme ve akıl yürütme becerilerini geliştirmelerini, varsayımlar oluşturup bunları kanıtlamalarını desteklediği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kanıtlama yaparken deneysel ve tümdengelimsel gerekçelendirmeleri kullandıkları görülmüştür. Doğru varsayımlar ortaya atsalar da bazı öğretmen adaylarının yeterli gerekçe gösteremedikleri için kanıtlama sürecini tamamlayamadıkları belirlenmiştir. Ayrıca yanlış öğrenilen bilgiler de katılımcıların kanıtlama sürecini tamamlayamamasının nedenleri arasında gösterilmiştir.

Liu ve Manouchehri (2013), ortaokul öğrencilerinin, matematiksel ilişkilerle ilgili ifadelerin geçerliliğini doğrulamaları istendiğinde, kullandıkları kanıt şemalarını araştırmışlardır. Öğrencilerin çoğunluğunun büyük ölçüde deneysel ve dışsal kanıt şemaları ile akıl yürütmeye güvendiği belirlenmiştir. Ancak, öğrenciler alternatif argümanları inceledikten sonra analitik şemalara yöneldikleri, analitik argümanları deneysel argümanlardan daha inandırıcı ve matematiksel olarak eksiksiz buldukları gözlenmiştir. Öğrencilerin, kendileri üretemeseler bile daha genel matematiksel açıklamaları tanıma ve onaylama eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Katılımcıların sayı teorisi probleminde tümevarımsal şemaları tercih ederken, diğer üç bağlamda analitik şema argümanlarını tercih ettikleri görülmüştür. Katılımcıların kanıtlama gerektiren görevler üzerinde çalışırken, tekdüze bir şemayı takip etmek yerine, çalıştıkları bağlamlara dayalı olarak akıl yürütme şemalarını belirledikleri tespit edilmiştir.

Çontay (2017), farklı başarı düzeyindeki ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını incelemiş, bu ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiklerini araştırmıştır. Öğretmen adaylarının tüm sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç temel kategorideki kanıt şemalarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bir öğretmen adayının iki farklı ispat şemasına ilişkin tepkileri aynı anda ortaya koyduğu durumlarda ispat şemalarından birinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel fikirleri olsa da bunların yanında çoğunlukla dışsal fikirlere yöneldikleri belirlenmiştir. Bunun yanında öğretmen adaylarının en az sıklıkla deneysel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri, analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkileriyse göstermedikleri tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerinin ispatı yapılandırmaları ve değerlendirmeleriyle benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının, çoğu durumda soru hakkında düşünüp uygun olan yöntemi seçerek ispatı yapılandırmak yerine, kendilerine daha önceden tanıdık gelen ifadeler için önceden hatırladıkları kalıpları uygulayarak sonuca ulaşma eğiliminde oldukları görülmüştür.

Barak (2018) araştırmasında ortaokul matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar ve sayılar konusu bağlamında, ispatlama süreçlerini incelemiştir. Katılımcıların, genel olarak sınıf düzeyi arttıkça hem ispatın formal-retorik kısmını oluşturmada hem de problem merkezli kısmını gerekli olan kavramsal ve işlemsel bilgiyi kullanarak çözmede daha başarılı oldukları görülmüştür. Katılımcıların programa yeni başladıklarında matematik dilini kullanamadıkları, ancak sınıf düzeyi arttıkça günlük konuşma dilini kullanmak yerine matematik dilini kullanmaya başladıkları belirlenmiştir. Katılımcıların sınıf düzeyleri arttıkça ispat yöntemlerinde olduğu gibi ispat yapmaları için gerekli olan kavram bilgilerinin ve bunları kullanma becerilerinin de geliştiği görülmüştür. Katılımcıların ispatlama süreçlerinde başarısız olmalarındaki başlıca sebeplerin ispat için gerekli olan kavramsal bilgideki eksiklikler ya da bu bilgilerin doğru bir şekilde kullanılamaması olduğu görülmüştür. Ayrıca katılımcılar genel olarak ortaokul düzeyinde daha basit düzeyde ispatlar yapılacağını ifade etmişler ancak ortaokul matematiğinde nasıl ispatlar yapılabileceğini açıkça ortaya koyamamışlar hatta ortaokul öğrencileri için ispatı uygun bulmadıklarını ifade etmişlerdir.

Kunt ve Keşan (2020), öğrencilerin matematiksel ispat türlerine yönelik eğilimleri ile sahip oldukları öğrenme stilleri arasındaki ilişkiyi yapay sinir ağı modeli kullanarak ortaya koymayı amaçlamışlardır. Araştırma sonucunda, modelin ürettiği sonuçlar ile öngörülen öğrenme stilleri arasında yeterince tutarlılık gözlenmiştir. Öğrencilerin sözlü ifadelerinin içeriği, sahip oldukları öğrenme stillerini tahmin etmek için kullanılmış ve envanterdeki bireysel sonuçlar bu tahminlerle karşılaştırılmıştır. “Biçimlendirmeye dayalı temsil daha güvenilirdir” diyen öğrencilerin özümseyen öğrenme stiline sahip olduğu belirlenmiştir. “Formülü çözmektense zihni çözmeyi tercih ederim” diyen öğrencilerin ise değiştiren öğrenme stiline sahip olduğu tespit edilmiştir. Sembolik (cebirsel) kanıt şemasındakiler sadece sonuca göre hareket etmişler, kavramlar arasındaki ilişkiyi görmezden gelmişlerdir. Cebirsel önermeyi tercih eden öğrencilerin özümseme ve ayırma öğrenme stillerine sahip oldukları görülmüştür. Sezgisel (algısal) kanıt şemasındakiler, sezgilerini öne sürerek kanıtın doğruluğu hakkında fikir vermişler, hislerine güvenmişler; ancak doğruluklarını açıklarken kesinliği kullanmamışlardır. Algısal önermeyi tercih eden öğrencilerin özümseme öğrenme stiline sahip oldukları görülmüştür. Tümevarım önermeyi ilk sıraya yerleştiren öğrencilerin çoğu zaman uyumsama öğrenme stiline sahip oldukları görülmüştür. Ayrıca görsel önermeleri ilk sıraya koyan öğrencilerin çoğu zaman ayırma öğrenme stiline sahip oldukları görülmüştür.

Sevgi ve Orman (2020), sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri ve ölçme öğrenme alanlarında ne tür kanıt şemaları kullandıklarını, öğrencilerin kanıtlama becerilerini ve kanıta ilişkin görüşlerini incelemişlerdir. Araştırma sonucunda, sekizinci sınıf öğrencilerinin orta düzeyde kanıtlama becerisine sahip oldukları görülmüştür.

Öğrencilerin çoğunlukla deneysel ve dışsal ispat şemalarını kullandıkları görülmüştür. Ayrıca, yüksek puan alan öğrencilerin aksiyomatik, orta düzey puan alanların örnek temelli, düşük puan alanların ise otoriter kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Yüksek puan alan öğrenciler, 20 sorunun 15'inde analitik, 4'ünde deneysel ve 1'inde dışsal kanıt şemalarını kullanmıştır. Öğrenciler kanıtlarını kural, özellik, tanım, Pisagor Teoremi ve akıl yürütmeye dayandırdıkları için analitik ispat şemalarından aksiyomatik ispat şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Orta düzeyde puan alan öğrenciler 15 soruda deneysel, 4 soruda dışsal kanıt şemalarını kullanmış, 1 soruyu boş bırakmıştır. Öğrenciler kanıtlarını çizim, sezgi ve örneklerle açıklamaya çalıştıkları için deneysel kanıt şemalarından örnek temelli kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Düşük puan alan öğrenciler 20 problemin 15'inde otoriter, 3'ünde deneysel kanıt şemalarını kullanmış, iki soruyu boş bırakmıştır. Öğrenciler ispatlarını daha çok öğretmene, kitaba, ezberlenen bilgilere, şeklin görünümüne dayandırdıkları, kendi bilişsel yapılarını oluşturmak yerine kural ve özellikleri ezberlemeyi seçtikleri için, dışsal kanıt şemalarından otoriter kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir.

Yılmaz (2021) 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama sürecini incelemiş ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerini belirlemiştir. Çalışma kapsamında küçük grup ve sınıf tartışmaları şeklinde yürütülen 12 haftalık sınıf uygulamaları ile gerçekleştirilmiş ve bu sınıftan 6 öğrenci muhakeme biçimlerini incelemek amacıyla odak olarak belirlenmiştir. Araştırma sonucunda sosyal etkileşime dayalı sınıf çalışmalarının öğrencilerin kanıtlama süreçlerini olumlu yönde etkilediği, tümdengelimsel muhakemeleri güçlendirdiği görülmüştür. Bununla birlikte hem küçük grup hem de sınıf tartışmalarında ortaya çıkan kanıt işlevleri ile sosyal ve sosyo-matematiksel normlar arasında ilişki olduğu belirlenmiştir.

2.6.4. İlgili araştırmaların genel bir değerlendirmesi

Araştırmacılar, farklı sınıf seviyelerinden öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin uzunluk, çevre ve alan ölçme anlayışlarının farklı yönlerini incelemişlerdir. Bunlardan bazıları, uzunluk ve alan birimleri, çevre ve alan arasındaki ilişkiler, alan ölçmenin gerektirdiği çarpımsal ilişkiler, öğretmenlerin çevre ve alan ölçme konu alanı bilgisi ve alan ölçme konu alanı bilgisi ile öğretim arasındaki bağlantıdır.

Çevre ve alan kavramları ile ilgili daha önce yapılmış araştırmalar ağırlıklı olarak öğrencilerin kavramları nasıl anladıklarına odaklanmıştır. Bu araştırmalarda, öğrencilerin alanı tanımlamak, birimleri anlamak, dikdörtgenlerin alanını ölçmek için birim kareleri yerleştirip saymak, dikdörtgen alan formülünün nasıl geliştirildiğini açıklamak, uzunluk ve alan ölçmeyi ilişkilendirmek, alan korunumunu geliştirmek gibi alanla ilgili yaşadıkları zorlukların nedenleri tartışılmıştır. Daha az sayıda araştırma ise dikdörtgen dışındaki çokgenlerin ve öğrencilerin alışkın olmadıkları kapalı eğrilerin alanlarını belirlemekle ilgili zorlukları içermektedir.

Kavram imajı teorik çerçevesini temel alan birçok araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalarda çeşitli kavramların farklı sınıf seviyelerinde nasıl algılandıkları ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Daha önce yapılan araştırmaların çoğu mevcut durumu belirlemeye yönelik olmakla birlikte, uygulanan öğretim sonrasında kavram imajlarında nasıl bir değişim yaşandığını ortaya çıkarmaya yönelik araştırmalar da mevcuttur. Yapılan araştırmalar incelendiğinde farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin kavram imajlarının birçok sınırlılık ve hatalı uygulama içerdiği belirlenmiştir. Araştırmalar kapsamında kavram imajlarını değiştirmeye yönelik uygulanan öğretimler bu sınırlılıkları ve hataları büyük oranda ortadan kaldırabilmiştir.

Kanıt şemaları ile ilgili araştırmalar genellikle lise ve üniversite düzeyinde uygulanmıştır. Ortaokul düzeyinde az sayıda araştırma bulunmaktadır. Bunun nedenlerinden biri formal kanıt öğretiminin lise düzeyinde başlıyor olmasıdır. Daha önce yapılan araştırmalar incelendiğinde öğrencilerin dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarının hepsini kullandıkları farklı durumlar olduğu belirlenmiştir. Ayrıca bir öğrencinin birden fazla kanıt şemasını kullanabildiği görülmüştür. Ortaokul düzeyindeki araştırmalarda öğrencilerin çoğunlukla dışsal ve deneysel kanıt şemalarını tercih ettikleri belirlenmiştir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde öncelikle araştırma modeli, araştırma ortamı, araştırmacının rolü, katılımcıların belirlenme süreci ve katılımcıların özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. Ardından araştırmada kullanılan veri toplama araçları, gerçekleştirilen öğretim uygulamaları, veri toplama süreci ve bu süreçte elde edilen verilerin analizine ilişkin bilgiler sunulmuştur.

3.1. Araştırma Modeli

Ortaokul öğrencilerinin çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemalarının uygulanan öğretim deneyi sonucunda nasıl değişim gösterdiğinin incelenmesinin amaçlandığı bu araştırmada, öğrencilerin yöneltilen sorulara verdikleri doğru cevapların sayısından çok gerçekleştirdikleri akıl yürütme süreçleri önemsendiğinden nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Nitel araştırma "kuram oluşturmayı temel alan bir anlayışla sosyal olguları bağlı bulundukları çevre içerisinde araştırmayı ve anlamayı ön plana alan bir yaklaşımdır" (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 39). Nitel araştırma yaklaşımında araştırmacı, kendisinin de dahil olduğu araştırma ortamını anlaşılır kılmak için gözlem, görüşme, alan notu, günlük, fotoğraf, video kaydı gibi tekniklerle bu ortamı betimler, analiz eder ve yorumlar. Araştırmacı, incelediği kişi veya nesnelerin doğal ortamlarına dahil olur, onları bu ortam içinde anlamlandırıp yorumlayarak resmeder. Buradaki amaç yeni bilgilerin keşfinden ziyade bir durumu derinlemesine incelemektir (Creswell, 2013; Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Bu araştırmada nitel yaklaşım çerçevesinde öğretim deneyi (teaching experiment) yöntemi kullanılmıştır. Öğretim deneyi, süreç içinde öğrencilerin düşünme ve öğrenme biçimlerindeki değişimin incelenmesini ve toplanan veriler yoluyla her öğrencinin bireysel öğrenme sürecinin planlanmasını sağlayan bir yöntemdir (Steffe ve Thompson, 2000). Bu araştırma kapsamında öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili problemler çözerken zihinlerinde neler olup bittiği, nasıl düşündükleri, süreç içinde edindikleri tecrübeler sonucunda düşüncelerinin nasıl değiştiği incelenmektedir. Araştırmacı bu süreçte öğrencilerle birebir etkileşim içinde olmuştur. Böylece katılımcıların süreç boyunca çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemalarındaki değişim ortaya konulmuştur. Tüm bu nedenlerle araştırma bir öğretim deneyi olarak desenlenmiştir. Aşağıda öğretim deneyi yöntemi ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

3.1.1. Öğretim deneyi

Öğretim deneyi, matematiksel bilginin oluşumunun nasıl gerçekleştiğini ve öğrenme üzerinde hangi değişkenlerin etkili olduğunu derinlemesine inceleyen, öğrenme-öğretme yollarına ilişkin varsayımlar ortaya koyan ve bu varsayımları test etmeyi içeren nitel bir araştırma yöntemidir. Öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin açıklanması ve keşfedilmesi için tasarlanmış olup süreç içinde yeniden düzenlenebilmektedir (Steffe ve Thompson, 2000, s. 273). Araştırmacıya yaptığı betimleme ve yorumlar doğrultusunda bir model oluşturma imkânı vermektedir (Wood, Cobb ve Yackel, 1990). Bu yöntemde araştırmacı aynı zamanda öğretici rolünü de üstlenir. Böylece katılımcılar ile arasında karşılıklı bir etkileşim oluşur (Cobb ve Steffe, 1983).

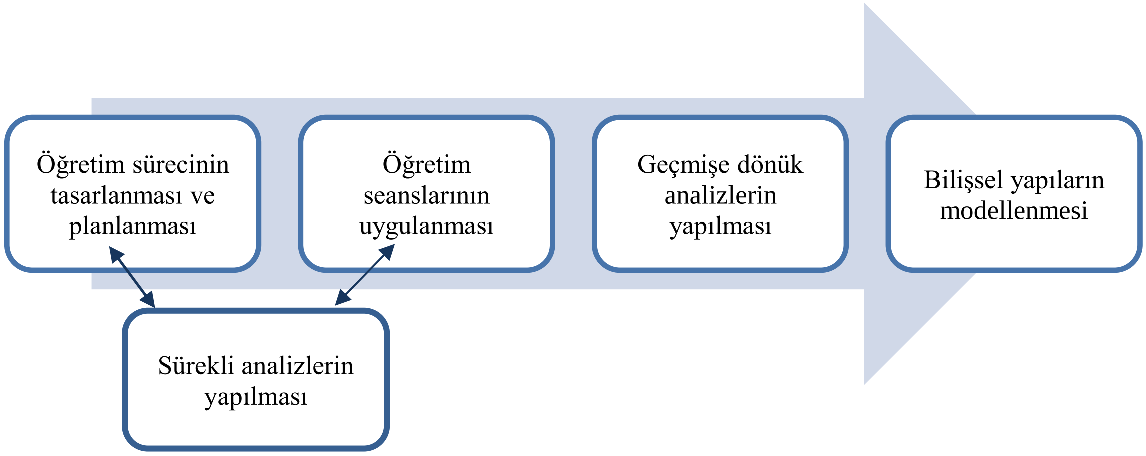
Öğretim deneyi temelde, öğrencilerle bireysel olarak gerçekleştirilen klinik görüşmeler ve öğrencilerdeki değişimin gözlenebileceği kadar geniş bir zamana yayılmış bir dizi öğretim seansından oluşmaktadır (Cobb ve Steffe, 1983). Öğretim seanslarını içermesi bakımından, matematik eğitimiyle ilgili araştırmalarda, öğretim süreci bulunmayan diğer araştırma türlerine göre öğrencilerin matematiksel kavramları inşa etme süreçleri hakkında daha ayrıntılı bilgiler sunabilmektedir.

Klinik görüşme tekniği, öğretim deneyini oluşturan önemli parçalardan biridir. Klinik görüşmelerde araştırmacı, öğrenciye bazı problem durumları sunmakta, onun bu problemlerin çözümleri hakkındaki düşüncelerini anlatmasını istemektedir. Öğrencinin yanıtları, düşünme süreçleri hakkında araştırmacıya bazı ipuçları sunarak, araştırmacının bazı çıkarımlar yapmasını sağlamaktadır. Bu yanıtlar, aynı zamanda araştırmacının daha derinlemesine bilgi elde edebilmek amacıyla yeni sorular oluşturmasına da fırsat vermektedir. Klinik görüşmelerin amacı, öğrencilerin herhangi bir konudaki bilgilerini ve düşünme süreçlerini keşfetmektir. Öğretim deneyinin amacı ise, öğrencilerin matematiksel öğrenme ve akıl yürütme süreçlerini ilk elden deneyimleyip bazı müdahalelerde bulunarak nasıl bir değişim gösterdiğini ortaya çıkarmaktır (Steffe ve Thompson, 2000, s. 267-273). Buna göre, katılımcıların bilgilerini etkileme yollarını ve araçlarını belirlemeyle de ilgilendiği için, öğretim deneyi klinik görüşme yönteminden daha kapsamlıdır (Toluk, 2002).

Öğretim deneyinin bir diğer önemli parçası ise öğretim seanslarıdır (teaching episodes). Öğretim seanslarının amacı öğrencilerin matematik öğrenme süreçlerini incelemektir (Steffe ve Thompson, 2000). Öğretim seansları, araştırmanın amacı doğrultusunda tasarlanmakta ve her bir öğretim seansından sonra yapılan sürekli analizler sonucunda sonraki öğretim seansları yeniden düzenlenmektedir. Araştırmacı, öğretim sürecini kendisi yürüttüğü için, bu sürece öğretmen rolüyle de dahil olmaktadır. Araştırmacı-öğretmen ve öğrenciler genellikle kritik konular, gelecek vadeden bakış açıları, konu ile ilgili veriler veya faydalı yorumlar arayışında olan ortaklar halinde çalışırlar. Bu nedenle araştırmacı ile öğrenciler öğretim sürecinde devamlı olarak birbirleri ile etkileşim halindedirler (Kelly ve Lesh, 2000). Kısacası öğretim deneyi, araştırmanın başında ve sonunda yapılan birer klinik görüşme ile bunlar arsındaki öğretim seansları aşamasından oluşmaktadır (Toluk, 2002).

Öğretim deneyindeki bir diğer önemli öğe ise, süreç içinde oluşturulan, denenen ve yeniden düzenlenen varsayımlardır. Öğretim deneyi boyunca, araştırmacı öğrencinin matematik bilgisi ve nasıl geliştirilebileceği hakkında varsayımlar oluşturmaktadır. Fakat, bu varsayımlar nicel deneysel araştırmalardaki statik hipotezlerden farklı olarak, süreç içinde elde edilen yeni bilgilere göre tekrar şekillendirilmekte ve düzenlenmektedir. Araştırmacı öğrencilerle etkileşim kurdukça onların söylediklerini ve yaptıklarını inceleyerek kavramsal süreçleri hakkında çıkarımlarda bulunmaktadır. Öğretim deneyi ilerledikçe bu çıkarımlar belirsiz ve örtük varsayımlardan daha kesin ve sağlam zihinsel modellere dönüşmektedir (Steffe ve Thompson, 2000, s. 296). Araştırmacının bu süreçte varsayımlarını oluşturması, değerlendirmesi ve yeniden düzenlemesi için öğrencilerle yakın ve güvene dayalı bir iletişim kurması gerekmektedir.

Öğretim deneyinin aşamaları, öğretim sürecinin tasarlanıp planlanması, tasarlanan bu sürecin öğretim seansları şeklinde uygulanması ile sürekli ve geriye dönük analizlerin yapılması şeklinde özetlenebilir (Cobb, 2000). Öğretim deneyinin analizinde hem sürekli (ongoing) hem de geriye dönük (retrospective) analizden yararlanılmaktadır. Araştırmacı, sürekli analizle birlikte öğretim deneyi sürecinde katılımcıların öğrenmelerini sağlamak için planlı ya da plansız yönlendirmeler yaparak, gösterilen gelişime göre süreci yeniden düzenleyebilmektedir. Sürekli analizden elde edilen verilere göre öğretim seanslarının yeniden düzenlenmesi, gerekirse ek seansların hazırlanması öğretim deneyi sürecini dinamik kılmaktadır. Geriye dönük analiz sayesinde ise, araştırmacı birbirini takip eden öğretim seanslarının tamamını bütüncül olarak ele alıp, süreçte toplanan verileri detaylı bir şekilde inceleyerek katılımcıların matematiksel gelişimlerini ve bilişsel yapılarını ortaya koymaktadır (Simon, 2000). Öğretim deneyini oluşturan bu aşamalar Şekil 3.1.'de gösterilmiştir:



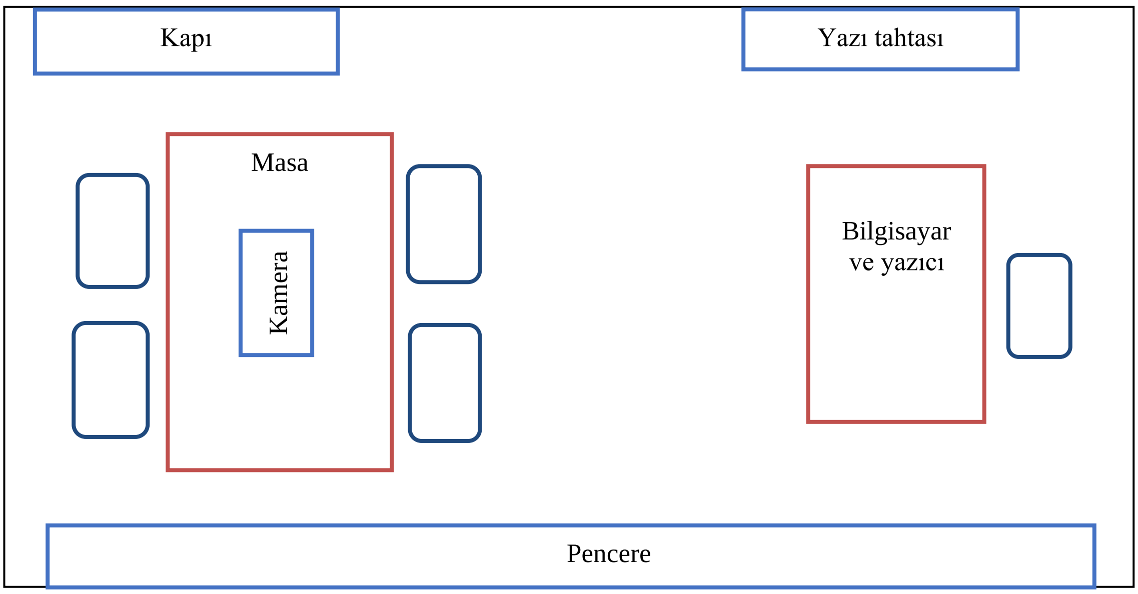
Şekil 3.1. *Öğretim deneyinin aşamaları*

Bu araştırmada, ortaokul öğrencilerinin çevre ve alan kavramlarıyla ilgili kavram imajları ve kanıt şemalarını ortaya çıkarmaya yönelik hazırlanmış etkinlikleri içeren bireysel bir öğretim deneyi uygulanmıştır. Bu öğretim deneyinde, öğretme ve öğrenme bir problem çözme etkinliği olarak ele alınmıştır. Araştırma kapsamında, öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemalarında oluşan değişimleri görebilmek için, araştırmanın başında ve sonunda birer klinik görüşme ile bunlar arasında bir dizi öğretim seansı yapılmıştır. Araştırmanın başında yapılan klinik görüşmeyle, öğretim öncesinde öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili var olan bilgileri, kavram imajları ve kanıt şemaları belirlenmiştir. İlk klinik görüşmelerden sonra, öğrencilerin çevre ve alanı kavramsal olarak öğrenebilmeleri, kavram imajlarını formal tanımlara yaklaştırmak ve çözümlerinin doğruluğunu sorgulayarak kanıt şemalarını çeşitlendirmek amacıyla, bir dizi öğretim seansı tasarlanıp uygulanmıştır. Öğretim seansları aşamasında, öğrencilerle bireysel olarak çalışılmıştır. Öğretim seansları daha önce yapılmış araştırmaların sonuçlarından yararlanılarak hazırlanmış, seansların sürekli analizi ile sonraki seanslar yeniden düzenlenmiştir. Öğretim seanslarının genel kapsamı değişmese de her öğrencinin ilerleme hızı, öğretim senası sayısı, içeriği değişiklik göstermiştir. Öğretim seansları sonrası yapılan son klinik görüşmeler yoluyla öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ve kanıt şemaları yeniden belirlenmiştir. Araştırma boyunca yapılan sürekli ve geriye dönük analizlerle, öğrencilerin edindikleri deneyimler sonucunda çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarında ve kanıt şemalarında meydana gelen değişim izlenmiş, bu değişimin nasıl oluştuğu ortaya konmaya çalışılmıştır.

3.2. Araştırma Ortamı ve Katılımcılar

Araştırma, Türkiye'nin güneyindeki bir ilçe merkezinde yer alan bir ortaokulda 2018-2019 eğitim-öğretim yılında uygulanmıştır. Uygulamanın yapıldığı okula genellikle alt ve orta sosyoekonomik düzeydeki ailelerin çocukları devam etmektedir. Okulda tam gün eğitim (8:20-14:30) verilmektedir. Araştırmanın uygulanması için bu okulun seçilmesinde, okulun öğrencilerinin yaklaşık aynı sosyoekonomik düzeyde bulunmaları, okulda uygulama yapmak için uygun ortamın bulunması ve araştırmacının bu okulda öğretmen olması etkili olmuştur.

Araştırma süresince yapılan klinik görüşmeler ve öğretim seansları okulda araştırmacıya tahsis edilen bir sınıfta gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmeler ve öğretim seansları sırasında öğrencilerin yazılı çalışmalarını ve konuşmaları kaydedebilecek aynı zamanda öğrencilerin dikkatlerini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiş bir kamera kullanılmıştır. Klinik görüşmeler ve öğretim seansları bireysel olarak yapılmıştır. Araştırma süresince kullanılan sınıfın krokisi Şekil 3.2'de gösterilmektedir.



Şekil 3.2. *Araştırmanın uygulandığı sınıfın krokisi*

Belirlenen ortaokulda araştırmanın uygulanabilmesi için ilk olarak Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu izni (Ek-1) ve ardından İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden uygulama izni alınmıştır (Ek-2). Ayrıca katılımcılar belirlendikten sonra veli (Ek-3) ve öğrencilerden (Ek-4) izinleri alınmıştır.

Araştırmanın katılımcıları uygulamanın yapıldığı ortaokulun 5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencileridir. Ülkemizde uygulanan matematik öğretim programları incelendiğinde çevre ve alan ile ilgili en çok kazanımın ortaokul düzeyinde olduğu dikkat çekmektedir. Yine bu düzeyde dikdörtgenin alan formülü kullanılarak paralelkenar, yamuk ve üçgen için bağıntılar oluşturulmaktadır. Cebirle bu düzeyde yeni tanışan öğrenciler kullandıkları stratejileri formüle ederek problem durumlarında uygulayabilmektedirler. Öğrencilerin bu düzeyde çevre ve alan ile ilgili öğrendikleri onların ileride öğreneceklerine temel oluşturmaktadır. Tüm bu nedenlerden dolayı araştırmanın katılımcıları ortaokul düzeyinden (5, 6, 7 ve 8. sınıf) seçilmiştir.

Araştırmada katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme yönteminde araştırmacı kendisinin hazırladığı ya da önceden var olan bir ölçüt listesini kullanır. Bu şekilde belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumları çalışma olanağı bulur (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada katılımcılar belirlenirken şu ölçütler kullanılmıştır:

- Mevcut kavram imajları,
- Mevcut kanıt şemaları,
- Sınıf düzeyleri,
- Okula devam durumları,
- İletişim becerileri (araştırmacının yönelttiği sorulara rahat cevap verebilecek, kendini kolaylıkla ifade edebilecek olması).

Öğretim deneyinde, bireysel görüşmelere başlamadan önce katılımcıları belirlemek amacıyla, araştırmacıların öğrencilerin sahip oldukları doğal şemaları ortaya çıkarıp tanımlamaları gerekmektedir (Steffe ve Thompson, 2000, s. 288). Buna uygun olarak bu araştırmada katılımcıların belirlenmesindeki ölçütlerden olan kavram imajları ile kanıt şemalarının ortaya çıkarılması amacıyla literatür, öğretim programı, ders kitapları ve araştırmacının öğretmenlik deneyiminden faydalanılarak hazırlanan yazılı değerlendirme aracı (Ek-5) uygulanmıştır. Yazılı değerlendirme aracıyla ilgili ayrıntılı açıklamaya veri toplama araçları başlığı altında (Bkz. s. 89-91) yer verilmiştir. Yazılı değerlendirme aracı araştırmanın yapıldığı ortaokulda öğrenim gören toplam 170 öğrenciye uygulanmış, buradan elde edilen veriler doğrultusunda her sınıf düzeyinden iki kişi olmak üzere toplam sekiz öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Katılımcıların mümkün olduğunca farklı kavram imajlarına ve kanıt şemalarına sahip olmalarına özen gösterilmiştir.

Böylece bu farklılıkların katılımcıların kavramları anlayışlarını, düşünce yapılarını, düşüncelerini doğrulama süreçlerini nasıl etkilediği belirlenmeye çalışılmıştır.

Katılımcıların belirlenmesinde farklı sınıf düzeylerinin ölçüt olarak seçilmesinin nedeni çevre ve alan kavramları ile ilgili okulda aldıkları öğretimin kavram imajlarını ve kanıt şemalarını nasıl etkilediğini ortaya çıkarabilmektir. Katılımcıların okula devam durumunun ölçüt olarak ele alınmasının nedeni ise araştırmanın devamlılığının sağlanabilmesidir. Araştırma öğretim yılı boyunca uygulandığı için katılımcıların okula devam etmemesi süreci olumsuz etkileyeceğinden katılımcıların devamsızlık yapmayan öğrenciler olmasına dikkat edilmiştir. İletişim becerilerinin ölçüt olarak seçilmesinin nedeni ise araştırma kapsamında katılımcıların düşüncelerini çoğunlukla sözlü olarak açıklamaları beklendiğinden kendini kolay ifade edebilen, rahatça konuşabilen öğrencileri belirleyebilmektir. Böylece katılımcılar yazılı çözümlerini, çizimlerini ve bunların doğruluğunu savunurken yaptıkları açıklamaları anlaşılır bir şekilde ifade edebileceklerdir.

Yukarıda sıralanan ölçütlere göre her sınıf (5, 6, 7, 8) düzeyinden ikişer kişi olmak üzere toplam sekiz öğrenci katılımcı olarak belirlenmiştir. Tablo 3.1.’de katılımcıların uygulama sırasındaki sınıf ve akademik başarı düzeyleri gösterilmektedir.

Tablo 3.1. *Katılımcıların özellikleri*

Öğrenci	Sınıf Düzeyi	Akademik Başarı Düzeyi
Neşe	5	Orta
Zehra	5	Yüksek
Ceylan	6	Orta
Fırat	6	Düşük
Mısra	7	Orta
Can	7	Düşük
Gülce	8	Yüksek
Filiz	8	Düşük

Not: Düşük akademik başarı (0-49), Orta akademik başarı (50-79), Yüksek akademik başarı (80-100)

Bu aşamadan sonra katılımcılardan söz edilirken örneğin Neşe (5) olarak ifade edilecektir. Burada parantez içinde yazılan sayı o katılımcının sınıf düzeyini göstermektedir.

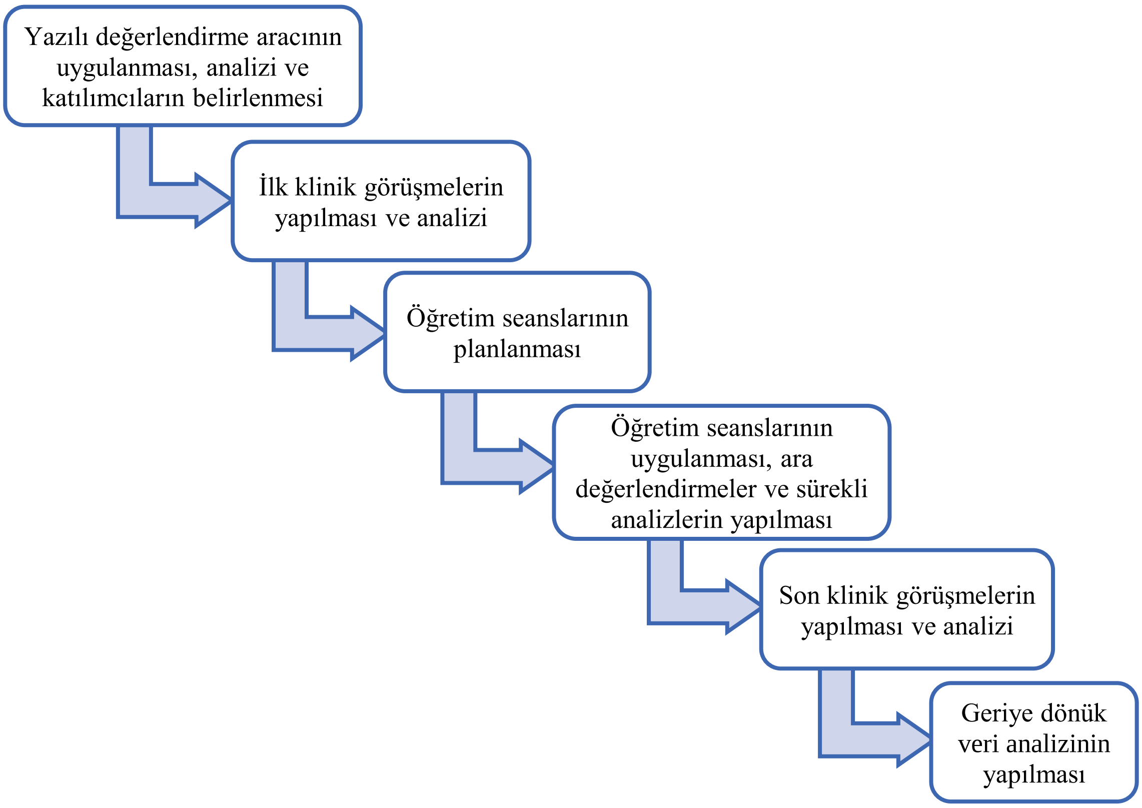
3.3. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmada araştırmacı, "bizzat alanda zaman harcayan, araştırma kapsamındaki kişilerle doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimlerini, toplanan verilerin analizinde kullanan kişidir" (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 43). Bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyinin amacı öğrencilerin matematiği öğrenme ve akıl yürütme süreçlerini ilk elden deneyimlemek olduğundan, araştırmacı öğretmen rolünü de üstlenmektedir. Araştırmacının öğretmen rolü özellikle öğretim seansları sırasında katılımcılarla kurduğu etkileşimde ön plana çıkmaktadır (Steffe ve Thompson, 2000).

Bu araştırmada, araştırmacı süreç boyunca her bir adımın planlanıp yürütülmesi sırasında tarafsızlığını korumuştur. Öğrencilerle yapılan klinik görüşmeleri ve öğretim seanslarını planlayıp uygulamış, bu sırada yönelttiği derinlemesine sorularla öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Öğretim seansları boyunca öğrencilere yönelttiği sorular ve yaptığı müdahalelerle onların mevcut düşüncelerini formal tanımlar doğrultusunda değiştirmelerini amaçlamıştır. Öğretim seansları devam ederken her bir öğrencinin bireysel ilerleme durumuna göre sonraki seansları yeniden şekillendirmiştir. Ayrıca araştırmacı önemli gördüğü noktaları alan notlarına ve günlüğüne kaydetmiştir. Böylece gözden kaçan veya vurgulanması gereken noktaları belirlemeye çalışmıştır. Araştırmanın uygulaması boyunca ve sonrasında veri analizini yapmıştır. Araştırmadan elde edilen verileri tarafsız ve ayrıntılı bir şekilde raporlamıştır.

3.4. Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verileri 2018-2019 eğitim öğretim yılında (eylül ile haziran ayları arasında) toplanmıştır. Veri toplama süreci yazılı değerlendirme aracının uygulanması, ardından analizi ve katılımcıların belirlenmesi ile başlamıştır. Katılımcılardan ve ailelerinden gerekli izinler alındıktan sonra ilk klinik görüşmelerin yapılmış ve analiz edilmiştir. Ardından buradan elde edilen bilgiler ışığında öğretim seansları planlanmıştır. Her bir katılımcı ile bireysel olarak öğretim seansları uygulanmış, seansların sonunda ara değerlendirmeler yapılmış, toplanan veriler sürekli analiz edilerek gerekli durumlarda öğretim seansları revize edilmiş veya yeni seanslar eklenmiştir. Daha sonra son klinik görüşmeler yapılmış ve analiz edilmiştir. Araştırma boyunca toplanan verilerin geriye dönük veri analizi yapılarak süreç tamamlanmıştır. Şekil 3.3.'de araştırmanın veri toplama süreci özetlenmiştir.



Şekil 3.3. *Veri toplama süreci*

Öğretim deneyi öncesinde yazılı değerlendirme aracı ile toplanan veriler katılımcıların belirlenmesindeki ölçütlerden biri olarak kullanılmıştır. Öğretim deneyi sürecinde ise ilk ve son klinik görüşmeler, her bir katılımcı ile bireysel olarak yürütülen öğretim seanslarını ve ara değerlendirmeleri içeren görüşmeler araştırmanın verilerini oluşturmuştur. Bunun yanında araştırma süreci boyunca tutulan araştırmacı günlükleri, görüşmeler sırasında araştırmacının yazdığı alan notları ve öğrencilerin öğretim seansları kapsamındaki yazılı çalışmaları da araştırmada toplanan veriler arasındadır. Ayrıntılı bilgi veri toplama araçları başlığı altında verilmiştir.

Araştırmacı tarafından geliştirilen yazılı değerlendirme aracı iki bölüme ayrılarak uygulanmıştır. İlk bölümde 10, ikinci bölümde 13 soru yer almaktadır. Her bölümü cevaplandırmaları için öğrencilere 40 dk süre verilmiştir. Yazılı değerlendirme aracının birinci bölümü kavramları açıklamaya ve tanımlamaya yönelik sorulardan oluşmaktadır. İkinci bölümde ise kavramları tanımaya ve uygulamaya yönelik sorular yer almaktadır.

Değerlendirme aracına verilen cevapların analizinden elde edilen sonuçlar ve daha önce belirtilen diğer ölçütler doğrultusunda katılımcılar belirlenmiştir. Öğrenci ve velilerin ilk kez böyle bir araştırmayla karşılaşmalarından dolayı tedirgin ve heyecanlı olmaları beklenmiştir. Bu nedenle öğrencilere ve velilerine görüşmelerin nasıl yürütüleceğini ve araştırma sürecini detaylı olarak açıklayan bir onay formu verilmiştir. Öğrenci ve velilere araştırma hakkında sözlü olarak bilgi verildikten sonra onlardan gerekli sözlü ve yazılı izinler alınıp öğrencilerle ilk klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

İlk klinik görüşmeler sırasında katılımcıların kendilerini rahat hissedebilmeleri için yapılacak görüşmelerin amacı açıklanmış, sorulara geçilmeden önce kısa bir sohbet yapılarak heyecanları giderilmeye çalışılmıştır. Katılımcılara araştırma süreci boyunca önemli olanın doğru ya da yanlış bir cevaba ulaşmalarından çok nasıl düşünüp akıl yürüttükleri olduğu açıklanmıştır. Gerekirse çizim yapabilecekleri veya düşüncelerini yazabilecekleri belirtilmiştir. Klinik görüşmeler sırasında elde edilen verilerin video kaydı alınmış, katılımcıların cevaplarını içeren kağıtlar da toplanmıştır. Yazılı değerlendirme aracından toplanan verilerin ve ilk klinik görüşmelerin analizi ile katılımcıların başlangıçta sahip oldukları kavram imajları ve kanıt şemaları belirlenmiştir.

İlk klinik görüşmelerin analizinden sonra öğretim seanslarının planlanmasına geçilmiştir. Klinik görüşmeler yoluyla katılımcıların çevre ve alan kavramlarıyla ilgili kavram imajlarının içerdiği formal tanıma uygun olmayan algılar ve sınırlılıklar ile kullandıkları kanıt şemaları belirlenmiştir. Seanslar kapsamında katılımcıların sahip oldukları kavram imajlarının mümkün olduğunca formal tanımlara uygun hale getirilmesi, kullandıkları kanıt şemalarının çeşitlendirilmesi ve çözümlerini savunurken matematiksel olarak doğru argümanlar sunabilmeleri amaçlanmıştır. Bu amaçla problem çözmeye dayalı çeşitli etkinlikler tasarlanmıştır. Etkinlikler hazırlanırken literatürden, matematik öğretim programından ve araştırmacının öğretmenlik deneyiminden faydalanılmıştır. Öğretim seanslarının içeriğinde hedeflenen genel amaçlar, kavramlar ve özellikler değişmese de katılımcıların mevcut durumuna göre kişiye özel olarak düzenlenmiştir. Katılımcının bireysel ilerleme hızına bağlı olarak süreç içinde seansların kapsamı ve sayısında değişiklikler yapılmıştır.

Öğretim seansları planlandıktan sonra uygulamaya geçilmiştir. Öğretim seansları sırasında katılımcılarla bireysel olarak görüşülmüş, katılımcılardan yöneltilen soruları cevaplarken sesli düşünmeleri ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Katılımcılar bir soruyu cevapladıktan sonra bu cevabın doğruluğunu kanıtlamaları beklenmiştir. Ortaokul düzeyinde formal kanıt öğretimi yapılmadığından, bu araştırmada katılımcıların formal bir kanıt yapmaları yerine, kendisinden farklı düşünen bir arkadaşını veya öğretmenini ikna etmesi gereken bir durum oluşturulmuştur. Böylece hem kullandıkları kanıt şemaları hem de çevre ve alan ile ilgili kavram imajları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretim seanslarının her birinin sonunda o gün ele alınan konuyla ilgili kısa bir ara değerlendirme yapılmıştır. Her görüşme sonrasında elde edilen veriler sürekli analiz edilerek katılımcıların kavram imajları ve kanıt şemalarının son hali belirlenmiş ve bir sonraki öğretim seansı planlamıştır.

Öğretim seanslarının bitiminde son klinik görüşmeler yapılarak analiz edilmiştir. Son klinik görüşmelerde ilk klinik görüşmelerdeki sorular yeniden kullanılmıştır. Son klinik görüşmelerin analizi ile katılımcıların uygulanan bireysel öğretim seansları sonrasında sahip oldukları kavram imajları ve kanıt şemaları belirlenmiştir. Yapılan geriye dönük veri analizi sonucunda araştırma süresince katılımcıların başlangıçtaki kavram imajları ve kanıt şemalarında nasıl bir değişim olduğu ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

3.4.1. Klinik görüşmeler

Klinik görüşme, Piaget tarafından bireylerin bilgi yapılarının ve akıl yürütme süreçlerinin modellerini incelemek için geliştirilen bir tekniktir (Clement, 2000, s. 547). Klinik görüşme yönteminde derinlemesine sorular yöneltilerek bireylerin düşünce yapılarını keşfetmek ve bilişsel becerilerini değerlendirmek amaçlanmaktadır. Klinik görüşmelerde yöneltilecek sorular önceden belirlenmiş olsa da süreç içerisinde gerektiğinde düzenlemeler yapılabilmektedir (Ginsburg, 1981). Araştırmacı, öğrencinin verdiği yanıta göre ek sorular yöneltebilmekte, daha önce hazırladığı sorunun yapısını değiştirebilmekte veya soruyu yöneltmesine gerek kalmayabilmektedir.

Klinik görüşme tekniği bireyin özgün fikir ve anlayışları düzeyinde zihinsel süreçlere ilişkin verileri toplayıp analiz etme ve bireyin düşüncesindeki gizli yapı ve süreçleri açığa çıkarma becerisini içermesi bakımından diğer tekniklerden ayrılmaktadır. Bu gizli yapıların ortaya çıkarılması öğretimin tasarlanması ve başarıya ulaşabilmesi için oldukça önemlidir. Çünkü öğrenciler öğretim sırasında çoğunlukla önceki algılarını ve akıl yürütme süreçlerini kullanmaktadır ve bunlar öğretimin seyrini önemli ölçüde etkilemektedir. Testler, standart akademik bilgiyi tespit etmek için tasarlandıklarından, öğrencilerin düşüncelerindeki temel unsurları belirlemede başarısız olabilmektedir. Klinik görüşmeler ise, akademik bilgi düzeyinin yanında öğrencilerin kavramsal anlayışının derinliği hakkında bilgi verebilmektedir. Çünkü klinik görüşmelerde sözlü ve grafiksel açıklamalar toplanabilmekte ve gerektiğinde ek açıklamalar istenebilmektedir (Clement, 2000, s. 547-548).

Bu araştırmada, katılımcıların her biriyle uygulamanın başında ve sonunda olmak üzere iki klinik görüşme yapılmıştır. Görüşmeler öncesinde öğrencilerden kendilerine yöneltilen soruları çözerken sesli düşünmeleri istenmiştir. Görüşmeden önce ve görüşme sırasında öğrenciye cevaplarının doğruluğunun önemli olmadığı, verdiği cevapların puanlanmayacağı, önemli olanın düşüncelerini dile getirmesi olduğu vurgulanmıştır. Katılımcıların kendilerini rahat hissetmesi için asıl sorulara geçilmeden önce her biriyle kısa bir sohbet gerçekleştirilmiştir. Görüşme sırasında katılımcılara kâğıt ve kalem verilmiş, böylece cevaplarını çizim, işlem veya yazıyla desteklemeleri sağlanmıştır.

Klinik görüşmelerde yazılı değerlendirme aracında yer alan sorular daha derinlemesine ele alınmıştır. Katılımcıların daha önce yazılı olarak verdikleri cevapları ayrıntılı bir şekilde açıklayarak genişletmeleri, örneklerini çoğaltmaları istenmiştir. Bunların yanında her bir soru için cevaplarının neye dayandığını, altında yatan sebepleri ifade etmeleri beklenmiştir. Böylece katılımcıların kavram imajları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ayrıca "Bunun doğru olduğunu nasıl biliyorsun?", "Senin gibi düşünmeyen bir arkadaşını nasıl ikna edersin?" gibi alt sorular yöneltilerek katılımcıların her soruya verdikleri cevabı kanıtlamaları istenmiştir. Bu alt sorular yoluyla katılımcıların kanıt şemalarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Araştırma kapsamında klinik görüşmelerde katılımcılara yöneltilen sorular Ek 5' de verilmiştir.

3.4.2. Öğretim seansları

Bir öğretim seansı, bir öğretim faktörünü, bir veya daha fazla öğrenciyi ve seans sırasında neler olup bittiğini kaydetme yöntemini içermektedir. Bu kayıtlar, varsa, sonraki bölümlerin hazırlanmasında ve öğretim deneyinin geriye dönük kavramsal analizinin yürütülmesinde kullanılmaktadır (Steffe ve Thompson, 2000, s. 273).

Öğretim seansları kapsamında her bir katılımcıyla bireysel olarak görüşülmüştür. Öğretim seanslarının her biri çevre ve alan kavramları ve bunlar arasındaki ilişkilerle ilgili kritik noktalara dikkat çeken etkinliklerden oluşmaktadır. Bu aşamada, öğrencilerin çevre ve alan kavramlarını nasıl anlamlandırıp yorumladıkları, çevre ve alanı öğrenirken hangi düşünce süreçlerinden geçtikleri ve bu süreçleri nasıl öğrenme ortamlarının desteklediği belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmacı, öğrencilere derinlemesine sorular yönelterek onların nasıl düşündüklerini, matematiksel bilgiyi zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarını ortaya çıkarmayı amaçlamıştır.

Öğretim seansları planlanırken genel kapsamın sınıf düzeylerinden bağımsız olarak kavramların temel özelliklerini, kavramlar arası ilişkileri içermesine ve katılımcıları düşüncelerinin doğruluğunu savunmaya yöneltmesine dikkat edilmiştir. Tüm katılımcılar için ortak bir kapsam belirlenmiş, bununla birlikte her katılımcının bireysel özellikleri göz önüne alınarak öğretim seansları planlanıp uygulanmıştır. Öğretim seanslarının içeriği ve sayısı katılımcıların bireysel ilerleme hızlarına göre şekillendirilmiştir. Çevre kavramı ile ilgili katılımcılarla 4-6 öğretim seansı ve alan kavramına geçilmeden önce bir ara değerlendirme yapılmıştır. Ara değerlendirmede katılımcılara öğretim seanslarındaki etkinliklere paralel olarak çevre kavramını açıklamaya, tanımaya ve uygulamaya yönelik sorular yöneltilmiştir. Yaptıkları çizimleri ve hesaplamaları ayrıntılı olarak açıklamaları, düşüncelerinin nedenlerini ifade etmeleri istenmiştir. Ayrıca her bir soru için düşüncelerinin, çözümlerinin doğruluğundan nasıl emin olduklarını açıklamaları beklenmiştir. Alan kavramı ile ilgili katılımcılarla 5-8 öğretim seansı yapılmıştır. Çevre ve alan kavramları ile ilgili hazırlanan öğretim seanslarından birer örnek Ek 6 ve Ek 7'de verilmiştir. Tablo 3.2.'de katılımcılardan Fırat (6) için hazırlanan öğretim seanslarının uygulama tarihleri ve kapsamları gösterilmektedir.

Tablo 3.2. *Öğretim seanslarının kapsamı*

Tarih	Öğretim Seansı	Kapsam	Kavram imajı ve kanıt şemalarının belirlenmesine yönelik eylemler
13/11/2018	1. Öğretim seansı	• Herhangi bir şeklin çevresini gösterme, söyleme, çizme ve nedenini ifade etme. • Çevreye sahip olan ve olmayan şekiller oluşturma, çizme ve nedenini açıklama. • Çevreye sahip olan şekillerin ortak özelliklerini ve nedenini belirleme. • Çevreye sahip olmayan şekillerin özelliklerini ve nedenini belirleme.	• Katılımcıya birçok farklı şekil (çokgenler, kapalı eğriler, şeritler vb.) gösterilerek çevresi olup olmadığına karar vermesi ve kararının nedenini açıklaması istenir. Eğer var olduğunu düşünüyorsa şeklin çevresini göstermesi veya çizmesi beklenir. • Katılımcıdan çevresi olan ve olmayan şekiller için örnekler oluşturması, çizmesi istenir. Bu şekillerin neden çevresi olduğunu veya olmadığını açıklaması beklenir. • Katılımcıdan birçok farklı şekli inceledikten sonra çevreye sahip olan şekillerin ortak özelliklerini belirlemesi ve bunların nedenlerini açıklaması istenir. • Katılımcıdan çevreye sahip olmayan şekillerin özelliklerini ve bunların nedenlerini açıklaması istenir. • Katılımcının öğretim seansı sonunda çevre ile kapalı bir şeklin sınırlarını ilişkilendirmesi beklenir.

Tablo 3.2. *(Devam) Öğretim seanslarının kapsamı*

Tarih	Öğretim Seansı	Kapsam	Kavram imajı ve kanıt şemalarının belirlenmesine yönelik eylemler
05/12/2018	2. Öğretim seansı	• Çevreyi herhangi bir şekil üzerinde gösterme. • Çevre uzunluğunu tahmin etme. • Çevre uzunluğunu farklı yöntemlerle (birim uzunlukları sayarak, iple, cetvelle) ölçme. • İki şeklin çevre uzunluklarını tahmin ve ölçme yoluyla karşılaştırma.	• Katılımcıya birçok farklı şekil gösterilerek çevrelerini göstermesi istenir. Gösterdikleri kısmın çevre olduğundan nasıl emin oldukları sorulur. • Gösterilen şeklin çevresini tahmin etmeleri istenir. Ardından farklı yöntemlerle ölçme yaparak çevre uzunluğunu belirlemeleri beklenir. Ölçme yaparken hangi yöntemi kullanacaklarını nasıl belirledikleri, bu yöntemin doğru olduğundan nasıl emin oldukları sorulur. • Gösterilen farklı şekillerin çevre uzunluklarını tahmin ve ölçme yoluyla karşılaştırmaları istenir.
19/12/2018	3. Öğretim seansı	• Bir şekil yeniden düzenlendiğinde çevrenin değiştiği ve değişmediği durumları belirleme. • Aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller (birim uzunluklar kullanarak) oluşturma ve (kareli kâğıt kullanarak) çizme.	• Katılımcıya birbirine eş iki şekil gösterilir, daha sonra bunlardan biri parçalanıp yeniden düzenlenerek çevrenin değişip değişmediğine karar vermesi istenir. Bu kararının nedenlerini açıklaması beklenir. Ardından ölçme yaparak tahminini kontrol etmesi istenir. Tahmininin neden doğru veya yanlış olduğu sorulur. • Katılımcıdan birim uzunlukları ve kareli kâğıdı kullanarak aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturması istenir. Bu şekillerin çevre uzunluklarının eşit olduğuna nasıl karar verdiğini açıklaması beklenir.
09/01/2019	4. Öğretim seansı	• Bir şeklin kenar uzunlukları ile çevre uzunluğu arasındaki doğrusal ilişkiyi keşfetme.	• Katılımcıdan herhangi bir çokgenin kenar uzunluklarını k katına çıkarırsa çevre uzunluğunun nasıl değişeceğini tahmin etmesi ve bunun nedenini açıklaması istenir. Daha sonra ölçme yaparak tahminini kontrol etmesi sağlanır. Tahmininin neden doğru veya yanlış olduğunu açıklaması istenir. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğu sorulur.
13/02/2019	5. Öğretim seansı	• Herhangi bir şeklin alanını gösterme, söyleme, çizime ve nedenini ifade etme. • Alana sahip olan ve olmayan şekiller oluşturma, çizme ve nedenini açıklama. • Alana sahip olan şekillerin ortak özelliklerini ve nedenlerini belirleme. • Alana sahip olmayan şekillerin özelliklerini ve nedenlerini belirleme.	• Katılımcıya birçok farklı şekil (çokgenler, kapalı eğriler, şeritler vb.) gösterilerek alanı olup olmadığına karar vermesi ve kararının nedenini açıklaması istenir. Eğer var olduğunu düşünüyorsa şeklin alanını göstermesi veya çizmesi beklenir. • Katılımcıdan alanı olan ve olmayan şekiller için örnekler oluşturması, çizmesi istenir. Bu şekillerin neden alanı olduğunu veya olmadığını açıklaması beklenir. • Katılımcıdan birçok farklı şekli inceledikten sonra alana sahip olan şekillerin ortak özelliklerini belirlemesi ve bunların nedenlerini açıklaması istenir. • Katılımcıdan alana sahip olmayan şekillerin özelliklerini ve bunların nedenlerini açıklaması istenir. • Katılımcının öğretim seansı sonunda alan ile kapalı bir şeklin sınırladığı bölgeyi ilişkilendirmesi beklenir.

Tablo 3.2. *(Devam) Öğretim seanslarının kapsamı*

Tarih	Öğretim Seansı	Kapsam	Kavram imajı ve kanıt şemalarının belirlenmesine yönelik eylemler
27/02/2019	6. Öğretim seansı	• Birim karelerle oluşturulmuş farklı şekillerin alanını gösterme, tahmin etme ve içerdiği birim kare sayısını belirleyerek alan ölçme. • Herhangi bir dikdörtgenin alanını gösterme, tahmin etme ve birim karelerle kaplayarak alan ölçme. • Dikdörtgenin alan formülü ile satır-sütun yapısını ilişkilendirme.	• Katılımcıya birim karelerden oluşan birçok farklı şekil gösterilerek her birinin alanını göstermesi istenir. Gösterdikleri kısmın alan olduğundan nasıl emin oldukları sorulur. • Gösterilen dikdörtgenin alanını tahmin etmeleri istenir. Ardından birim kareler yardımıyla (birer birer veya ritmik sayma yaparak) şeklin alanını belirlemeleri beklenir. Ölçme yaparken hangi yöntemi kullanacaklarını nasıl belirledikleri, bu yöntemin doğru olduğundan nasıl emin oldukları sorulur. • Birçok farklı dikdörtgenin alanını birim kareler yardımıyla ölçtükten sonra ritmik sayma yöntemini genel bir ifadeye dönüştürerek satır x sütun yapısını keşfetmeleri beklenir.
13/03/2019	7. Öğretim seansı	• Temel geometrik şekillerin yanında kapalı eğrilerin ve karmaşık şekillerin alanlarını gösterme, tahmin etme ve ölçme.	• Katılımcıya birçok farklı geometrik şekil, kapalı eğri ve karmaşık şekil gösterilerek her birinin alanını göstermesi istenir. Gösterdikleri kısmın alan olduğundan nasıl emin oldukları sorulur. Ardından şeklin alanını tahmin etmeleri istenir. Tahminlerini ölçme yoluyla kontrol etmeleri sağlanır. Ölçme yaparken hangi yöntemi kullanacaklarını nasıl belirledikleri, bu yöntemin doğru olduğundan nasıl emin oldukları sorulur.
03/04/2019	8. Öğretim seansı	• Farklı iki şeklin alanlarını tahmin ve ölçme yoluyla karşılaştırma.	• Katılımcıya farklı iki kapalı şekil gösterilerek her birinin alanını göstermesi istenir. Gösterdikleri kısmın alan olduğundan nasıl emin oldukları sorulur. Ardından şekillerin alanlarını tahmin etmeleri istenir. Tahminlerini ölçme yoluyla kontrol etmeleri sağlanır. Ölçme yaparken hangi yöntemi kullanacaklarını nasıl belirledikleri, bu yöntemin doğru olduğundan nasıl emin oldukları sorulur.
10/04/2019	9. Öğretim seansı	• Bir şeklin yeniden düzenlenmesi ile alanı arasındaki ilişkiyi belirleme. • Alan korunumunu fark etme.	• Katılımcıya birbirine eş iki şekil gösterilir, daha sonra bunlardan biri parçalanıp yeniden düzenlenerek alanın değişip değişmediğine karar vermesi istenir. Bu kararının nedenlerini açıklaması beklenir. Ardından ölçme yaparak tahminini kontrol etmesi istenir. Tahmininin neden doğru veya yanlış olduğu sorulur.
24/04/2019	10. Öğretim seansı	• Aynı alana sahip farklı şekiller (birim kareler kullanarak) oluşturma ve (kareli kâğıt kullanarak) çizme.	• Katılımcıdan birim kareleri ve kareli kâğıdı kullanarak aynı alana uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturması istenir. Bu şekillerin alanlarının eşit olduğuna nasıl karar verdiğini açıklaması beklenir.
08/05/2019	11. Öğretim seansı	• Dikdörtgen ve karenin kenar uzunlukları ile alanı arasındaki ilişkiyi fark etme.	• Katılımcıdan herhangi bir dikdörtgenin kenar uzunlukları k katına çıkarılırsa alanının nasıl değişeceğini tahmin etmesi ve bunun nedenini açıklaması istenir. Daha sonra ölçme yaparak tahminini kontrol etmesi sağlanır. Tahmininin neden doğru veya yanlış olduğunu açıklaması istenir. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğu sorulur.

3.5. Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmalarda gözlem, görüşme, doküman analizi gibi veri toplama araçları kullanılarak toplanan veriler yoluyla olayların kendi doğal ortamlarında ve bütüncül olarak sunulmasına çalışılır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmanın verilerini yazılı değerlendirme aracına verilen yanıtlar, öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler ile öğretim bölümlerinin ses ve video kayıtları, öğrencilerin öğretim seansları kapsamındaki yazılı çalışmaları ve araştırmacının tutuğu günlük ve alan notları oluşturmaktadır.

3.5.1. Yazılı değerlendirme aracı

Yazılı değerlendirme aracı ile katılımcıların çevre ve alan kavramları hakkındaki kavram imajlarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Ayrıca her soruda verdikleri cevabın doğruluğunu kanıtlamaları istenerek mevcut kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmıştır. Açık uçlu sorular yöneltilerek öğrencilerin herhangi bir sınırlama ve yönlendirme olmadan cevap vermeleri sağlanmıştır. Değerlendirme aracının oluşturulmasında literatürdeki çalışmalardan, matematik öğretim programından ve ders kitaplarından faydalanılmıştır. Değerlendirme aracı kapsam geçerliliği için uzman görüşüne sunulmuş, öğrencilere uygulanmadan önce gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Değerlendirme aracına verilen yanıtlar katılımcıların belirlenmesindeki ölçütlerden biri olarak kullanılmıştır.

Değerlendirme aracının uygulanmasından önce öğrencilere bu sorulara doğru ya da yanlış cevap vermelerinin önemli olmadığı, soruyu cevaplarken nasıl düşündüklerini açıklamalarının istendiği söylenmiştir. Öğrenciler bildikleri her şeyi yazıp çizmeleri konusunda araştırmacı tarafından cesaretlendirilmiştir. Sorulara verdikleri cevaplar için herhangi bir puanlama yapılmayacağı söylenmiş, yanlış cevap vermekten çekinmemeleri ve mümkün olduğunca soruları boş bırakmamaları istenmiştir. Değerlendirme aracının uygulanması sırasında araştırmacı sınıfta hazır bulunmuştur. Böylece öğrencilerin anlamakta zorlandığı bölümleri ilk elden açıklayabilmiştir.

Değerlendirme aracı iki bölümden oluşmaktadır. Her bölümün yanıtlanması için öğrencilere bir ders saati (40 dk) süre verilmiştir. İlk bölümde katılımcılara çevre ve alan kavramlarıyla ilgili beşer olmak üzere toplam 10 soru yöneltilmiştir. İkinci bölümde uzunluk kavramına yönelik 2 soru, çevre kavramına yönelik 5, alan kavramına yönelik 6 olmak üzere toplam 13 soru yöneltilmiştir. Değerlendirme aracında yer alan sorular kavram imajlarını ortaya çıkarma yönünden kavramı tanımlamaya yönelik, kavramı tanımaya yönelik ve kavramın uygulanmasına/kullanılmasına yönelik sorular şeklinde üç kategoride ele alınabilir (Yanık, 2014).

Değerlendirme aracının ilk bölümündeki sorular daha çok öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarını ortaya çıkarmaya yöneliktir. Bu kapsamda öğrencilerden çevre ve alan kavramlarını nasıl algıladıklarını açıklamaları, kendilerince bu kavramları tanımlamaları istenmiştir. Öğrencilerden beklenen formal bir tanım yapmaları değil, kavramı kendi kelimeleriyle açıklamaları, kişisel kavram tanımlarını yapmalarıdır. Ayrıca öğrencilerin bu kavramlara örnek olan ve olmayan durumları çizerek göstermeleri istenmiştir. Bu bölümde yer alan sorular Yanık'ın (2014) çalışmasından uyarlanmıştır.

İkinci bölümde yer alan sorular ise kavramların tanınmasına ve uygulanmasına yönelik sorulardan oluşmaktadır. Kavramları tanımaya yönelik sorularda öğrencilere, kavramlara örnek olan ve olmayan durumları içeren, her kavram için altı farklı şekil verilmiştir. Öğrencilerden şekillerin her biri için çevreyi/alanı göstermeleri, neden şeklin çevresi/alanı olduğunu veya olmadığını açıklamaları istenmiştir.

Kavramın uygulanmasına yönelik sorularda ise öğrencilerden birçok farklı şeklin çevresini/alanını göstermesi ve çevre/alan ölçüsünü hesaplaması istenmiştir. Sabit bir çevreye/alana sahip farklı şekiller çizmesi, bir karenin kenar uzunlukları iki katına çıkarıldığında alanın sayısal değerinde nasıl bir değişim olacağını açıklamaları istenmiştir. Ayrıca her soru için "Çözümünün doğru olduğunu nasıl biliyorsun?", "Neden böyle olacağını düşünüyorsun?" gibi alt sorular yöneltilerek katılımcıların her soruya verdikleri cevabı kanıtlamaları istenmiştir. Bu alt sorular yoluyla öğrencilerin kanıt şemalarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Değerlendirme aracında kullanılan soruların hazırlanmasında yararlanılan çalışmalar Tablo 3.3.'de gösterilmektedir.

Tablo 3.3. *Yazılı değerlendirme aracının hazırlanmasında yararlanılan kaynaklar*

Sorular	**Yararlanılan çalışmalar**
1. Bölüm Soruları	Yanık, 2014
2. Bölüm 1. soru	McCool, 2009, s. 198
2. Bölüm 2. soru	Eames, 2014, s. 240; Barrett vd., 2012, s. 42
2. Bölüm 3. ve 8. soru	Baturo ve Nason, 1996, s. 245
2. Bölüm 5. ve 10. soru	Barrett vd., 2006, s. 195; Fernandez vd., 2014, s. 166-176
2. Bölüm 11. soru	Kamii ve Kysh, 2006, s. 110; Zhou, 2012, s. 89
2. Bölüm 9. soru	Kamii ve Kysh, 2006, s. 110

Değerlendirme aracı, öğrencilerin çevre ve alan kavramlarına yönelik algıları hakkında temel bazı bilgiler verse de düşüncelerinin altında yatan nedenlerle ilgili ayrıntılı bilgi sağlayamamıştır. Bu nedenle katılımcı olarak belirlenen öğrencilerin her biriyle klinik görüşmeler yapılarak daha derinlemesine bilgi edinmeye çalışılmıştır. Yazılı değerlendirme aracı Ek-5'te verilmiştir.

3.5.2. Bireysel görüşmeler

Araştırma kapsamında katılımcılarla yapılan görüşmeler üç kategoride ele alınmıştır. Bunlar sırasıyla yazılı değerlendirme sonrasında yapılan ilk klinik görüşmeler, her öğretim seansının sonunda yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler şeklinde yapılan ara değerlendirmeler ve son değerlendirme amacıyla yapılan klinik görüşmelerdir.

İlk klinik görüşmelerin temel amaçları katılımcıların yazılı değerlendirme aracına verdikleri yanıtları detaylı bir şekilde açıklamalarını, örneklerini çeşitlendirmelerini ve derinlemesine sorular yardımıyla cevaplarının ardında yatan nedenleri dile getirmelerini sağlamaktır. Bu görüşmelerde katılımcıların yazılı değerlendirme aracına verdikleri yanıtlardaki eksik noktaları tamamlamak hedeflenmiştir. Özellikle yazılı değerlendirme aracında cevap vermedikleri veya yeterli olarak açıklamadıkları, kanıt şemalarına yönelik soruları yanıtlamaları istenmiştir.

Ara değerlendirme görüşmeleri yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler olarak tasarlanmıştır. Her bir öğretim seansının sonunda öğrencilerin mevcut durumunu belirlemek ve çevre kavramıyla ilgili öğretim seanslarının bitiminde öğrencilerin kavramla ilgili zihinsel yapılarındaki değişimi tespit etmek amacıyla yapılmıştır. Son klinik görüşmeler ise öğretim seansları sonunda öğrencilerin ulaştıkları mevcut durumu belirlemek amacıyla yapılmıştır.

3.5.3. Araştırmacı günlükleri ve alan notları

Araştırmacı günlükleri klinik görüşme ve öğretim seanslarını kapsamaktadır. Araştırmacının bu süreç boyunca öğrencilerin düşünme biçimlerinde, kavram imajlarında, kanıt şemalarında oluşan değişimleri yansıttığı yazılardan oluşmaktadır. Araştırmacı günlüklerini her öğrenciyle yaptığı görüşme sonrasında tutmuştur. Görüşmeler sırasında ise önemli görülen her düşünce, olay ve davranış araştırmacı tarafından hızlıca not edilmiştir. Araştırmacının tuttuğu günlük ve alan notlarının özellikle öğretim seanslarının planlanması ve yeniden düzenlenmesinde katkısı olmuştur.

3.5.4. Öğrencilerin yazılı çalışmaları

Araştırma boyunca çevre ve alan ile ilgili kavram imajlarını ve kanıt şemalarını belirleyebilmek amacıyla öğrencilere birçok soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin bunları cevaplarken yaptığı çizimler, karalamalar, yazdığı açıklamaların yer aldığı kağıtlar araştırmacı tarafından toplanmıştır. Bazen öğrenciler düşündüklerini sözle değil de bir çizimle daha iyi ifade edebilmektedirler. Bu kağıtlarda yer alan çizimler, karalamalar ve yazılar yardımıyla öğrencilerin sözle ifade edemedikleri düşünceleri açığa çıkarılmaya çalışılmıştır. Bazen de bu dokümanlar öğrencilerin sözlü cevaplarını desteklemede kullanılmıştır.

3.6. Veri Analizi

Veri analizi araştırmacının topladığı verileri anlamlandırma sürecidir. Bunun için veri toplama sürecinde elde ettiği bilgileri düzenler; tanımlamalar, karşılaştırmalar, açıklamalar yaparak varsayımlar veya kuramlar oluşturur. Araştırmada verilerin analizinde içerik analizi yaklaşımından faydalanılmıştır. Bu analiz türünde araştırmacı topladığı verileri tekrar tekrar okuyarak içlerinde tema ve örüntüler aramaktadır. Araştırmacı verileri kodlayıp aynı koda sahip verileri tekrar inceleyerek o kodun özünde neler olduğunu ortaya çıkarmaya çalışmaktadır. Bunu yaparken genelleme yapmanın ve norm belirlemenin ötesine geçmesi gerekmektedir (Glesne, 2011/2013, s. 255-256).

Araştırmada, video kayıtları ile toplanan veriler öncelikle hiçbir değişiklik yapılmadan bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Ardından video kayıtları ve dökümler tekrar tekrar incelenerek her bir öğrencinin araştırma boyunca yaptığı çalışmalar anlamlandırılmaya çalışılmıştır. Bu aşamada öğrencilerin düşünce süreçleri kodlanmış, birbiriyle benzer özellikler taşıyan kodların birleştirilmesiyle temalar oluşturulmuştur. Kodlama ve tema oluşturma tüm veri setinin incelendiği ve yorumlandığı süreç boyunca devam etmiştir.

Araştırmada toplanan verilerin analizinde kullanılan ön kodlar ve temalar literatürde daha önce çevre ve alan ile ilgili yapılan çalışmalardan faydalanılarak oluşturulmuştur. Araştırma sürecinde veriler analiz edildikçe bunların bazılarının içeriği değiştirilmiş, yenileri eklenmiş veya bir kısmı çıkarılmıştır. Çevre ve alan kavramları ile ilgili oluşturulan temalar ve bunların kapsadığı kodlardan bazıları Tablo 3.4.’ de sunulmuştur.

Tablo 3.4. *Çevre ve alan kavramları ile ilgili örnek temalar ve kodlar*

Tema	Alt tema	Kod	Açıklama
Çevreyi Şeklin Etrafı Olarak Algılama	Çevreyi şeklin dışında, şekilden bağımsız bir olgu olarak ele alma	• Çevre şeklin dışıdır • Dış bölgeyi (etrafını) gösterme • Kapalı eğriyle çizme	• Çevreyi gösterirken şeklin dış bölgesini (etrafını) işaret etme • Bir şeklin çevresini çizerken şeklin dışına kapalı bir eğri çizme • Çevre için "şeklin dışı" "şeklin etrafı" ifadelerini kullanma
	Çevreyi şeklin kenarlarının çok az dışında, yeni bir şekil olarak ele alma	• Kenarları dışarıdan takip etme • Kenarların dışından çizme	• Çevreyi gösterirken şeklin kenarlarını dışarıdan takip etme • Bir şeklin çevresini çizerken şeklin kenarlarının çok az dışına, kenarlara paralel olacak şekilde bir benzerini çizme
Çevreyi Bir Formül veya Algoritma Olarak Algılama	Çevreyi şekli oluşturan kenar uzunluklarının toplamı olarak ele alma	• Kenarların üzerinden takip etme • Kenar uzunluklarını toplama • Formül kullanma (dikdörtgen)	• Çevreyi gösterirken şekli oluşturan kenarları takip etme • Bir şeklin çevresini kenar uzunluklarının toplamı olarak ifade etme • Karenin çevresi için $4 \times a$ Dikdörtgenin çevresi için $2 \times (a + b)$ formüllerini kullanma
	Çevreyi şeklin sınır uzunluğu olarak ele alma	• Sınırları gösterme • Çevre sınırlardır	• Çevreyi gösterirken şeklin sınırlarını işaret etme (burada şeklin doğru parçalarından oluşmasına gerek yoktur) • Bir şeklin çevresini sınır uzunluğu olarak ifade etme
Çevre ve Alanı Şeklin Sınırları Olarak Algılama	Hem çevre hem de alanı şeklin sınırları ile ilişkilendirme	• Alan sınırlardır • Çevre ve alan aynıdır	• Çevre ve alanı gösterirken şekillerin sınırlarını işaret etme • Çevre ve alanın aynı olduğunu ifade etme
Alanı Şekli Kaplayan Birim Kare Sayısı Olarak Algılama	Birim kare sayısını teker teker sayarak hesaplama	• Birim kareleri sayma	• Birim kareleri tek tek sayma • Çizilmeyen birim kareleri de sayma
	Birim karelerle satır-sütun yapısı oluşturma	• Satır veya sütun halinde ritmik sayma	• Birim kareleri satır veya sütunları takip ederek ritmik sayma
	Birim kare sayısını hesaplama yaparak doğrulama	• Satır x sütun	• Toplam birim kare sayısını bulmak için bir satır ve bir sütundaki birim kare sayısını çarpma
Alanı Bir Formül veya Algoritma Olarak Algılama	Alanı bulmak için en x boy formülünü kullanma	• Çokgenlerde alan = iki kenarın çarpımı • Dikdörtgende alan = en x boy	• Tüm çokgenler için bu formülü kullanma • Sadece dikdörtgen için bu formülü kullanma
	Alanı bulmak için kenar uzunluklarını toplama	• Çokgenlerde alan = kenarlar toplamı • Dikdörtgende alan = en + boy	• Sadece uzunluk değeri verilenleri veya hesaplayabileceğini düşündüklerini toplama • Dikdörtgen için en + boy algoritmasını kullanma • Tüm kenar uzunluklarını toplama

Öğrencilerin kanıt şemalarıyla ilgili kodlar ve temalar ise Sowder ve Harel'ın (1998) çalışmalarından öğrencilerin bulunduğu sınıf düzeyleri ile çevre ve alan kavramlarına uygun olacak şekilde uyarlanarak oluşturulmuştur. Kanıt şemaları ile ilgili oluşturulan temalar ve bunların kapsadığı kodlar Tablo 3.5.' de sunulmuştur.

Tablo 3.5. *Kanıt şemaları ile ilgili temalar ve kodlar*

Tema	Alt tema	Kod	Açıklama
Dışsal kanıt şemaları	Otoriter kanıt şeması	• Dışsal kaynak gösterme • Ezberlenmiş formüller kullanma	• Yaptıklarının doğruluğunu kanıtlamak için öğretmen, ders kitabı veya fikrine güvendiği birini kaynak olarak gösterme • Kullandığı formülün anlamını bilmeden uygulama
	Alışkanlık edinilmiş (ritüel) kanıt şeması	• Biçimsel doğruluğu önemseme • Benzer çözümleri kaynak gösterme	• İçeriğin doğruluğundan çok çözüm yolunun biçimsel olarak doğru olmasına odaklanma • Karşısındakini ikna etmek için akıl yürütmek yerine önceden öğrendiği delil ve sebepleri öne sürme
	Sembolik kanıt şeması	• Anlamsız sembol kullanma	• Anlamlara bakmadan sadece sembollerin manipülasyonu • Sembolleri olası işlevlerini düşünmeden, matematiksel olarak anlamsız şekilde kullanma
Deneysel kanıt şemaları	Algısal kanıt şeması	• Prototip şekiller kullanma • Sezgilere dayalı açıklama yapma	• Basit bir çizimi, gelişmemiş zihinsel görüntüleri veya sezgilerini kaynak gösterme
	Örnek temelli (tümevarımsal) kanıt şeması	• Duruma uygun örnekler kullanma • Özel örnekleri genelleme	• Savundukları durumu destekleyen örnekler verme • Genel bir matematiksel durumun doğruluğuna ikna etmek için özel örneklerden faydalanma
Analitik kanıt şemaları	Dönüştürülebilen kanıt şeması	• Kavram tanımlarını kullanma • Kavram özelliklerini kullanma • Kavramlar arası ilişkileri kullanma	• Matematiksel bir durumun kabulü için akıl yürüterek genelleme yapma • Kavramların özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri kullanma • İşlemlerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri düşünme • Mantıksal çıkarım yapma
	Aksiyomatik kanıt şeması	• Teoremleri kullanma	• Dönüştürülebilen kanıt şemasının özelliklerini sağlamakla birlikte, tanımsız terimleri, teoremleri, neden-sonuç ilişkilerini kullanarak kanıtlama

3.7. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nicel ve nitel araştırmalar geçerlik ve güvenirlik kavramlarının ele alınışları yönünden farklılık göstermektedir. Nicel araştırmalarda geçerlik ölçme aracının ölçmeyi amaçladığı olguyu doğru ölçmesi ile ilişkiliyken nitel araştırmalar için geçerlik ise araştırmacının incelediği olguyu mümkün olduğunca yansız bir şekilde, olduğu gibi sunmasıyla ilişkilidir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Benzer bir farklılık güvenirlik için de geçerlidir. Nicel araştırmalar için araştırmanın tekrar edilebilirliğiyle ilgili olan bu kavram nitel araştırmalar için genellikle verilerin birden fazla kişi tarafından kodlanması sırasındaki kararlılığıyla ilişkilendirilir (Creswell, 2013/2013).

Nicel ve nitel araştırmalar arasındaki farklılıklar araştırmacıları nitel araştırmaların geçerlik ve güvenirliklerini sağlamak amacıyla bazı stratejiler geliştirmeye yöneltmiştir. Bir nitel araştırmanın geçerli ve güvenilir oluşu inandırıcılık (iç geçerlilik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile belirlenmektedir (Lincoln ve Guba, 1985, Akt: Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmanın geçerlik ve güvenirliğinin sağlanması için de bu stratejilerden faydalanılmıştır.

Bu araştırmanın inandırıcılığının sağlanması amacıyla uzun süreli etkileşim ve üçgenleme (çeşitleme) stratejilerinden yararlanılmıştır. Uzun süreli etkileşimde araştırmacı veri kaynakları ile uzun bir süre etkileşim içinde olmaktadır. Bu şekilde hem alanda katılımcılarla arasında bir güven bağı kurulabilir hem de araştırmacı veya katılımcıların yanlış bilgilendirmelerinin önüne geçilebilir. Ayrıca gözlem, görüşme ve doküman incelemesi veri toplama yöntemleri birlikte kullanılarak üçgenleme yapılmıştır. Üçgenlemede araştırmacı bulgularını aydınlatabilmek için farklı kaynaklardan kanıtlar toplamaktadır. Bu şekilde farklı yöntemlerle bilgi toplayarak bulguların geçerliği artırılmaya çalışılmaktadır (Creswell, 2013/2013).

Nitel araştırmalar için belirli bir örnekleme ait sonuçların doğrudan yeni durumlara genellenmesi söz konusu değildir. Çünkü verilerin elde edildiği ortamın yeniden aynı şekilde oluşturulması mümkün değildir ve olgular içinde bulundukları ortamdan etkilenmektedirler. Bu nedenle nitel araştırmalarda genelleme yerine aktarılabilirlik kavramı ön plana çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmanın aktarılabilirliğinin sağlanması amacıyla ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme stratejilerinden faydalanılmıştır. Katılımcıların belirlenmesinde kullanılan ölçütler ve katılımcıların her birinin özellikleri ayrıntılı olarak betimlenmiştir. Bununla birlikte elde edilen veriler temalara göre düzenlenerek doğrudan alıntılar yanında katılımcıların çizim ve yazılı açıklamalarıyla desteklenmiştir. Detaylı betimleme sayesinde okuyucu edindiği bilgileri diğer ortamlara aktarıp aktaramayacağına karar verebilir (Creswell, 2013/2013).

Nicel araştırmalar güvenirlik açısından tekrar edilebilirliği ön plana çıkarmaktayken nitel araştırmalar olay ve olguların değişken olduğunu kabul ederek bunu tutarlı bir şekilde araştırmaya yansıtmaya odaklanmaktadır. Tutarlılığın sağlanabilmesi için araştırmaya dışarıdan bakılarak araştırmacının süreç boyunca yaptığı etkinliklerde ne kadar tutarlı olduğunun belirlenmesi önerilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada tutarlılığın sağlanabilmesi için yapılan görüşmelerde öğrencilere araştırma amacına uygun olarak hazırlanmış sorular yöneltilmiş, bu sırada araştırmacı tarafından tüm öğrencilere benzer bir yaklaşım sergilenmeye çalışılmıştır. Araştırma kapsamında yapılan tüm görüşmeler ve öğretim bölümleri video kamera ile kayıt altına alınmış, her biri yazılı olarak raporlaştırılmıştır. Araştırmanın veri toplama ve analizi ile ilgili tüm aşamaları ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Bilimsel araştırmalarda araştırmacıdan veri toplarken varlığının, varsayımlarının veya inançlarının süreci etkilememesini sağlaması, mümkün olduğunca nesnel olması beklenir. Nitel araştırmalar için ise tam anlamıyla bir nesnellikten söz edilemez. Bu nedenle araştırmacının elde ettiği sonuçları sürekli olarak topladığı verilerle teyit etmesi gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırmada teyit edilebilirliğin sağlanması amacıyla dışarıdan bir uzmanın değerlendirme yapması sağlanmıştır.

4. BULGULAR

Bu bölümde araştırma problemlerine uygun şekilde ilk olarak, katılımcıların uygulama öncesinde sahip oldukları çevre ve alan kavramlarına yönelik kavram imajları ve kanıt şemaları ayrı ayrı ele alınmıştır. Ardından, katılımcılarla uygulanan bir dizi öğretim seansıyla birlikte katılımcıların kavram imajları ve kanıt şemaları üzerindeki değişimler incelenmiştir. Son olarak, katılımcıların uygulama sonrasında çevre ve alan kavramlarına yönelik kavram imajları ve kanıt şemaları belirlenmiştir.

4.1. Uygulama Öncesine İlişkin Bulgular

Bu bölümde öncelikle katılımcıların uygulama öncesinde sahip oldukları çevre ve alan kavramlarına yönelik kavram imajları ayrı ayrı incelenmiştir. Ardından katılımcıların uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmelerde kullandıkları kanıt şemaları ele alınmıştır. Katılımcıların kavram imajlarının ve kanıt şemalarının belirlenmesinde onlarla uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmelerden (Bkz. s. 87) yararlanılmıştır.

4.1.1. Uygulama öncesinde çevreye yönelik kavram imajları

Katılımcılarla yapılan klinik görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesi sonucunda katılımcıların çevreyle ilgili kavram imajları iki başlık altında ele alınmıştır: 1) etraf ve 2) çevre ölçümü kavram imajı.

Etraf kavram imajına sahip katılımcılar kavramın anlamına odaklansalar da bu anlam formal tanımın içerdiği anlamdan oldukça uzaktır. Çevre bu katılımcılar için herhangi bir ölçüm yapılmasa da anlamı olan bir kavramdır. Bu doğrultuda açıklamalarında çevrenin kendileri için ne anlam ifade ettiğine vurgu yapmakta, herhangi bir ölçümden, hesaplamadan söz etmemektedirler. Fakat yaptıkları açıklamalar incelendiğinde çevreyi günlük hayattaki bir şeklin etrafındaki yakın bölge anlamına dayanarak anlamlandırdıkları görülmektedir. Bu nedenle çevreyi bir şeklin sınırlarının dışındaki bölge olarak algılamaktadırlar.

Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar ise işlemsel bilgi temelli bir yaklaşım sergileyerek çevrenin kendileri için ne anlama geldiğinden ziyade çevrenin nasıl hesaplanacağına odaklanmaktadır. Bu doğrultuda açıklamalarında kavramın anlamı yerine kavramın nasıl ölçüldüğüne vurgu yapmışlardır. Çevre bu katılımcılar için hesaplanıp bulunması gereken sayısal bir değerdir. Çevreyi hesaplamak için genellikle toplama ve çarpma işlemlerini kullanmaktadırlar. Tablo 4.1.'de katılımcıların uygulama öncesinde sahip oldukları çevreye yönelik kavram imajları özetlenmiştir.

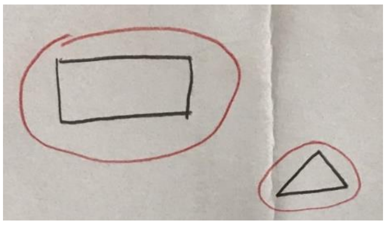
Tablo 4.1. *Katılımcıların uygulama öncesinde çevreye yönelik kavram imajları*

Sınıf düzeyi	Katılımcı	Kavram imajı
5	Zehra	Çevre Ölçümü
	Neşe	Çevre Ölçümü
6	Ceylan	Etraf
	Fırat	Etraf
7	Mısra	Çevre Ölçümü
	Can	Etraf
8	Gülce	Çevre Ölçümü
	Filiz	Etraf

Tablo 4.1.'de görüldüğü üzere sekiz katılımcıdan dördünün (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) çevre ölçümü, dördünün (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) etraf kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Sınıf düzeyleri değişse de çevre ile ilgili aynı kavram imajına sahip öğrenciler bulunduğu dikkat çekmektedir. Ayrıca katılımcıların sahip oldukları bu kavram imajları sınıf düzeyleri fark etmeksizin birçok sınırlılık barındırmaktadır. Aşağıda katılımcıların kavram imajlarına detaylı olarak yer verilmiştir.

4.1.1.1. *Etraf kavram imajı*

Katılımcıların çevreye yönelik kavram imajları incelendiğinde sekiz katılımcının dördünün (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) etraf kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Etraf kavram imajına sahip bu katılımcılar çevreyi günlük hayattaki kullanımına odaklanarak bir şeklin dışındaki yakın bölge, çevresel bölge olarak düşünmektedirler. Burada herhangi bir ölçme veya hesaplama yapmadan sadece çevreyi işaret edip açıklamaya çalışmışlardır. Bu kavram imajına sahip katılımcılardan bir şeklin çevresinin ne anlama geldiğini göstermeleri istendiğinde, bunu çizdikleri bir şeklin kenarlarının dışını işaret ederek ifade etmeye çalıştıkları görülmüştür. Böyle bir durumda bu imaja sahip katılımcıların şekillerin etrafını çevreleyecek şekilde kapalı eğriler çizdikleri görülmüştür. Buna göre çevreyi, sınırların uzunluğundan ziyade sınırların dışındaki bölge, şeklin etrafı olarak ele almaktadırlar. Bu nedenle etraf kavram imajının hatalı olduğu söylenebilir. Şekil 4.1.'de bu öğrencilerden Can'ın (7) yaptığı çizimler örnek olarak verilmiştir.



Şekil 4.1. *Can'ın (7) çevre için yaptığı çizimler*

Şekil 4.1.'de görüldüğü gibi katılımcılardan Can (7) çevreyi gösterirken şekillerin dışına kapalı eğriler çizmektedir. Kendisinden bu çizimleri açıklaması istendiğinde ise çevreyi "şeklin etrafı" olarak ifade etmiştir. Çevreyi, günlük hayattaki kullanımıyla ilişkilendirerek ele almakta, şeklin sınırlarının biraz dışı olarak algılamaktadır. Can'ın (7) kavram imajında çevrenin günlük hayattaki "etraf" anlamı daha baskındır.

Katılımcılardan Ceylan (6) da çevreyi gösterirken şekillerin sınırlarının dışına odaklanmaktadır. Kendisinden yaptığı çizimleri açıklaması istendiğinde çevrenin sayısal değerini kenar uzunluklarının toplamı olarak hesaplasa da çizimlerinde ve açıklamalarında çevreyi her zaman şeklin "sınırlarının dışı" olarak ifade etmiştir. Bu nedenle Ceylan (6) da bu kavram imajına dahil edilmiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog örnek olarak aşağıda verilmiştir:

Araştırmacı: Ceylan bir şeklin çevresi denildiğinde ne anlıyorsun?

Ceylan: Mesela bir dikdörtgenin dışındaki … dışı

Araştırmacı: Bunu çizip gösterebilir misin bana? Şöyle şu kâğıdın üzerinde göster bakalım.

Ceylan: Mesela bu dikdörtgenin dışındaki kenarları bir de şeyleri

Araştırmacı: Şöyle renkli kalemle gösterebilirsin. Nereyi kastediyorsun?

Ceylan: Şuralarını (dikdörtgenin bir uzun ve bir kısa kenarının dışına eğriler çiziyor)

Araştırmacı: Sadece o iki kenarını mı gösteriyor?

Ceylan: Yok hocam buraları da (diğer kenarların da dışına eğriler çiziyor)

Yukarıdaki diyalogdan da anlaşıldığı gibi katılımcı çevreyi şeklin sınırlarının dışındaki bölge ile ilişkilendirmiştir. Çevreyi çizim yaparak göstermesi istendiğinde de bu düşüncesini yansıtan çizimler yapmıştır.

Öte yandan, katılımcılarla yapılan görüşmeler bu kavram imajına sahip olanların sadece sıklıkla karşılaştıkları çokgenlerin (Bkz. Şekil 4.1.) veya onlara çokgeni anımsatan en az bir doğru parçası içeren şekillerin çevreye sahip olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin katılımcılardan Fırat (6) kendisine gösterilen kare, beşgen, çember ve daire diliminin çevresi olup olmadığı sorulduğunda, çevreleri olduğunu belirtip kalemiyle şekillerin sınırları dışında gezinerek çevreyi göstermiştir. Düzensiz bir kapalı eğrinin ise "yamuk" olduğu için çevresi olmadığını söylemiştir. Fırat (6) bir şeklin çevresi olması için gerekli şartlar sorulduğunda "Kapalı olması, düzgün olması." şeklinde açıklama yapmıştır. Burada "düzgün" kelimesiyle neyi ifade etmeye çalıştığı sorulunca "Düzgün, yani düz çizgiler hocam." şeklinde düşüncesini açıklamıştır. Buna göre Fırat (6) bir şeklin çevresi olması için kapalı olması yanında doğru parçalarından oluşması gerektiğini de eklemektedir. Fırat'ın (6) yaptığı bu açıklamalara göre kavram imajının zihnindeki prototip şekillere dayandığı söylenebilir.

Katılımcıların sahip olduğu çevre kavram imajı şeklin kapalı olması gerekliliğini içerse de eğrisel şekilleri içermemektedir. Katılımcılar bir şeklin çevresi olup olmadığına karar verirken şeklin doğru parçası (kenar) içerip içermediğine odaklanmaktadır. Araştırmacı ile Ceylan (6) arasında geçen aşağıdaki diyalog bu düşüncelere örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Peki dairenin var mı çevresi?
>
> Ceylan: Yok
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Ceylan: Çünkü bu direkt böyle gidiyor (kalemle şeklin sınırları üzerinden geçiyor). Hiç köşesi de yok kenarı da yok.
>
> Araştırmacı: Köşe ve kenarı olmayınca çevre de mi olmuyor?
>
> Ceylan: Hı hı

Görüldüğü gibi Ceylan'ın (6) kavram imajı çokgenlerle sınırlıdır, hiçbir kapalı eğriyi içermemektedir. Katılımcıya göre kenar ve köşesi olmayan şekillerin çevresi de yoktur. Katılımcılar matematik derslerinde görmeye alışık oldukları çokgenler söz konusu olduğunda çevreyle ilgili sorun yaşamazlarken alışık olmadıkları kapalı eğrilerle karşılaştıklarında bunların çevreleri olmadığını iddia etmektedirler. Buna göre katılımcıların çevre kavram imajları formal tanımın işaret ettiği tüm kapalı şekilleri içermemekte, prototip çokgenlerle (özellikle kare, dikdörtgen ve üçgen) sınırlı kalmaktadır. Tablo 4.2.'de etraf kavram imajının sınırlılıkları özetlenmiştir.

Tablo 4.2. *Etraf kavram imajının sınırlılıkları*

Kavram imajının sınırlılıkları	Katılımcılar
Çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanma	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)
Eğrisel şekillerin çevresi olmadığını düşünme	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)
Ölçülen niteliğe uygun birim kullanmama	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)

Tablo 4.2.'de görüldüğü gibi katılımcıların tamamı çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmakta, bu kavramları birbirine karıştırmaktadır. Bu durum kullandıkları birimlerde de kendisini göstermekte, çevre için alan birimi olan birim kareyi kullanmaktadırlar. Örneğin katılımcılardan Fırat (6) çevre ölçmeyi gerektiren soruları yanıtlarken kavramsal bilgi yerine işlemsel bilgiye dayalı bir düşünceyle hareket etmiştir. Kareli zemine çizilen şekillerin sınırları içinde kalan birim kare sayısını o şeklin çevre ölçüsü olarak ifade etmiştir. Burada kendisinden açıkça çevre uzunluğunu hesaplaması istenmiş olsa da kendisine daha tanıdık gelen bir eyleme, birim kareleri saymaya, yönelmiştir. Kareli zemin olmadığında şeklin sınırlarının biraz dışını çevre olarak gösterirken kareli zeminin varlığında şeklin içindeki birim karelerin sayısını çevre ölçüsü olarak ifade etmektedir. Bu durum katılımcının işlemsel bilgi odaklı düşünce yapısını göstermektedir.

4.1.1.2. *Çevre ölçümü kavram imajı*

Katılımcıların çevreye yönelik kavram imajları incelendiğinde sekiz katılımcıdan dördünün (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) çevre ölçümü kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip olan bu katılımcılar çevreyi ölçülüp hesaplanması gereken bir değer olarak düşünmektedirler. Katılımcılar çevreyi açıklarken ölçme, hesaplama yapma ve bir sonuç bulma arayışı içindedirler. Bu katılımcıların muhakeme anlayışı eylem odaklıdır. Bu imaja sahip katılımcılardan bir şeklin çevresinin ne anlama geldiğini çizim yaparak göstermeleri istendiğinde, bunu çizdikleri şeklin çevre uzunluğunu hesaplayarak ifade etmeye çalıştıkları görülmüştür. Katılımcılar böyle bir durumda şeklin kenar uzunluklarına sayısal değerler atayarak çevre uzunluğunu hesaplamaya çalışmışlardır. Bazıları şeklin kenar uzunluklarını toplayarak çevre uzunluğunu gösterirken, diğerleri dikdörtgen, kare veya düzgün bir çokgen için ezberlemiş oldukları algoritmaları kullanmışlardır.

Katılımcıların çevre ile ilgili yaptıkları açıklamalar incelendiğinde kavramın anlamından ziyade uyguladıkları eylemlere değindikleri görülmüştür. Çevre kavramı ile ilgili en çok ifade edilen eylemler toplama ve çarpma işlemleri olmuştur. Aşağıda araştırmacı ve katılımcılardan Gülce (8) arasında geçen bir diyalog bu konuda örnek olarak verilmiştir:

Araştırmacı: Bir şeklin çevresi denilince aklına ne geliyor? Ne anlıyorsun bundan?

Gülce: İşlemler, sayılar, derece.

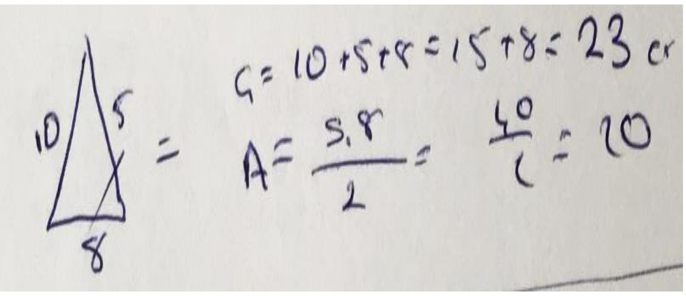
Araştırmacı: Biraz daha açabilir misin? Hangi işlemler mesela?

Gülce: Mesela toplama, çarpma. Çünkü bir çevreyi bulurken o çevredeki santimleri toplayıp, alanı bulurken de onları çarptığımız için akla direkt onlar geliyor.

Araştırmacı: Bir şekil üzerinde bana gösterebilir misin çizerek?

Gülce: Mesela kare yapsak (bir kare çiziyor) burası beş santim, burası beş santim olsa (çizdiği karenin komşu iki kenarına 5 yazıyor) karenin her biri eşit olduğu için çevreyi bulurken tüm şeyi toplarız o yüzden dörtle çarpabiliriz. Yirmi olur.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi bu kavram imajına sahip Gülce (8) çevreyi açıklarken çevre kavramının anlamına değil, çevre uzunluğunu hesaplamada kullandığı işlemlere odaklanmıştır. Araştırmacı Gülce'den (8) daha sonra çizdiği karenin çevresini göstermesini yeniden istediğinde şeklin kenarları üzerinden geçerek çevreyi göstermiştir. Fakat sahip olduğu çevre kavram imajının ölçme ve hesaplamaya dayalı parçası daha baskındır. Araştırmacı kendisinden sadece çevreyi göstermesini istediği halde çevreyi hesaplama olmadan düşünememektedir. Şekil 4.2.'de Gülce'nin (8) çizdiği üçgen ve çevre uzunluğunu hesaplamak için yaptığı işlemler örnek olarak verilmiştir.



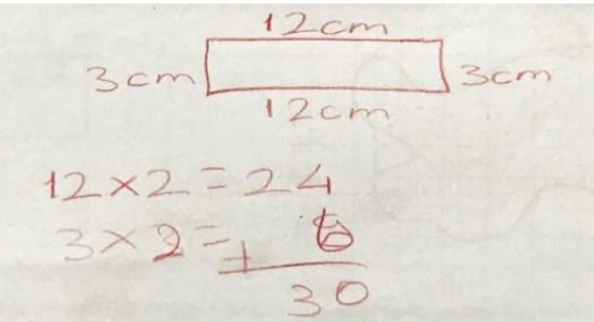
Şekil 4.2. *Gülce'nin (8) çevre için verdiği örnek*

Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi Gülce (8) çevreyi açıklamak için verdiği örnekte çevre uzunluğunu hesaplamada kullanılan formüllere ve algoritmalara vurgu yapmaktadır. Gülce (8) verdiği örneklerde çevreyi doğru hesaplamış olsa da kavram imajı hesaplamayı ön plana çıkardığı için hesaplayamayacağını düşündüğü şekillerin çevresinin olmadığını ifade etmektedir. Katılımcılardan Zehra (5) da benzer düşüncelerle çevreyi açıklarken çevre ölçümüne ve bu sırada yaptığı işlemlere vurgu yapmakta, sadece çevre uzunluğunu hesaplayabileceği şekillerin çevresi olduğunu düşünmektedir. Bu iki katılımcının çevre kavram imajları tüm kapalı şekilleri içermediği için eksik ve sınırlıdır. Araştırmacının sorusunu tekrar etmesi üzerine çizdikleri çokgenlerin çevresini göstermek için kenarları işaret etseler de kavram imajlarında işlemsel düşünce daha baskındır.

Çevreyi açıklarken ölçme ve hesaplamaya dayalı ifadeler kullanan bir diğer katılımcı ise Neşe (5) dir. Aşağıda araştırmacı ile Neşe (5) arasında geçen bir diyalog buna örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Bana buraya bir örnek verebilir misin, çevresi olan bir şekille ilgili? Çizebilir misin çevresi olan bir şekil?
>
> Neşe: (Dikdörtgene benzer bir şekil çiziyor) Şeyini, içini yazayım mı?
>
> Araştırmacı: Sen bilirsin. Bunun çevresini gösterir misin bana?
>
> Neşe: Mesela burası on iki santim, bu kenarı da üç santim verilmiş. Karşılıklı kenarlar eşit olduğu için üç santim yazıyoruz buraya, buraya da on santim. Bunları toplayarak iç açısını bulabiliriz. Önce on iki ile ikiyi çarpıcaz. İki kere iki, dört; iki kere bir, iki (12 x 2 = 24 yazıyor). Şimdi üç kere üç, dokuz.
>
> Araştırmacı: Üç tane mi üç var?
>
> Neşe: İki tane var. Ay iki. Üç kere iki, altı. Onları toplarsak altı, dört daha on. Onun sıfırı elde var bir. İki, bir de elde otuz. Bunun çevresi otuz.
>
> Araştırmacı: Peki, buradaki çevre ne demek?
>
> Neşe: Çevre, bir şeklin top … kenarlarının toplamı.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşıldığı gibi Neşe (5) çevreyi "bir şeklin kenarlarının toplamı" olarak algıladığı için kavram imajı sadece çevre uzunluğunu hesaplamayı bildiği çokgenlerle sınırlıdır. Ayrıca matematik dilini de doğru şekilde kullanamamaktadır. Şekil 4.3.'de Neşe'nin (5) çevre için verdiği örnek gösterilmektedir.



Şekil 4.3. *Neşe'nin (5) çevre için verdiği örnek*

Katılımcılar çevre kavramı için verdikleri örneklerde çoğunlukla dikdörtgen kullanmışlardır. Bu dikdörtgenleri bazen sadece geometrik şekil, bazen de tarla, bahçe gibi günlük hayatla bağlantılı olarak ele almışlardır. Örneğin, Mısra (7) günlük hayatla bağlantı kurarak, çizdiği şekilleri genellikle bir bahçe olarak ifade etmiştir. Araştırmacı Mısra'dan (7) çevreyi şekil üzerinde göstermesini istediğinde, şeklin biraz dışında benzer bir şekil daha çizmiştir. Bu nedenle Mısra'nın (7) hem çevre ölçümü hem de etraf kavram imajının özelliklerini gösterdiği belirlenmiştir. Fakat açıklamalarında ölçme ve hesaplamaya daha fazla vurgu yaptığı için çevre ölçümü kavram imajına dahil edilmiştir.

Öte yandan, katılımcılarla yapılan görüşmeler bu kavram imajına sahip katılımcıların çoğunun (Zehra (5), Neşe (5) ve Mısra (7)) bir şeklin çevresi olması için en az bir doğru parçası içermesi gerektiğini düşündüklerini ortaya koymuştur. Bunun nedeni eğrilerin çevre uzunluğunu hesaplayamayacakları düşüncesi olabilir. Katılımcılar sadece hesaplamayı bildikleri şekillerin çevresinin varlığından söz etmekte, geri kalanları görmezden gelmektedirler. Buna paralel olarak açıklamalarında da işlemsel düşüncenin baskınlığı göze çarpmaktadır. Aşağıda araştırmacı ile katılımcılardan Neşe (5) arasında geçen bir diyalog örnek olarak verilmiştir.

> Araştırmacı: Peki, çevresi olmayan bir şekil var mıdır, geometrik bir şekil?
>
> Neşe: Vardır.
>
> Araştırmacı: Nedir?
>
> Neşe: Mesela daire.
>
> Araştırmacı: Neden onun çevresi yok?
>
> Neşe: Çünkü dairenin kenarları yok ve onun için daireye bir şey yazılamıyor. Bir sayı yazılıp onlarla toplanmıyor, onun için dairenin çevresi yok.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşıldığı üzere Neşe (5) bir şeklin çevresinin varlığını kenarları olması ve bu kenar uzunluklarını toplayabilmesiyle ilişkilendirmiştir. Bu açıklamasının ardından katılımcıya çevre yerine kullanabileceği bir kelime olup olmadığı sorulduğunda da "kenar, kenarların toplamı" yanıtını vermiştir. Bu kavram imajına sahip diğer üç katılımcı da benzer açıklamalar yapmışlardır. Katılımcılardan sadece Gülce (8) çevresi olduğunu düşündüğü şekillere çokgenler yanında çemberi de dahil etmiştir. Ancak bunun için bir şart öne sürmektedir. Buna göre çemberin yarıçapı verildiği sürece formülü uygulayarak çevre uzunluğunu hesaplayabileceğini söylemiştir. Gülce'nin (8) çevreyi hesaplanması gereken sayısal bir değer olarak görme algısı burada da kendisini göstermektedir.

Yukarıda bu kavram imajına sahip katılımcıların düşünceleri açıklanmıştır. Tablo 4.3.'de ise katılımcıların kavram imajlarının sınırlılıkları özetlenmiştir.

Tablo 4.3. *Çevre ölçümü kavram imajının sınırlılıkları*

Kavram imajının sınırlılıkları	Katılımcılar
Çevre ve alan kavramlarını işlemsel olarak birbiri yerine kullanma	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7)
Eğrisel şekillerin çevresi olmadığını düşünme	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Gülce (8)
Kapalı olmayan şekillerin çevresi olduğunu düşünme	Neşe (5)
Ölçülen niteliğe uygun birim kullanmama	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7)
Bir şekli oluşturan parçaların çevreleri toplamının şeklin çevresine eşit olacağını düşünme	Neşe (5), Gülce (8)

Tablo 4.3.'de görüldüğü üzere çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların üçü çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmakta, bu kavramları birbirine karıştırmaktadır. Örneğin bu katılımcılardan kareli zemine çizilmiş bir dikdörtgenin çevre uzunluğunu hesaplamaları istendiğinde şeklin kenar uzunluklarını çarpma yolunu izlemişlerdir. Araştırmacı katılımcılardan Mısra'ya (7) çevre ve alanı bu şekilde birbiri yerine kullanıp kullanamayacağını sorduğunda "Kullanılabilir. Çünkü ikisi de yer kapladığı için." yanıtını vermiştir. Buna göre Mısra (7) alan ile ilişkili olan "yer kaplama" özelliğini çevre ile de ilişkilendirerek aşırı genelleme yapmaktadır. Katılımcılardan sadece Gülce (8), açıklamalarında çevre ve alan kavramlarının birbirinden farklı olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca katılımcılar kapalı eğrilerin çevresi olduğunu düşünmemektedir. Sadece Gülce (8) açıklamalarında çemberin yarıçapı verildiğinde çevre uzunluğunun hesaplanabileceğini belirtmiştir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar ölçme ve hesaplamaya dayanan açıklamalar yapmışlardır. Çevreyi şeklin kenarları ile ilişkilendirseler de işlemsel düşünceleri daha ön plandadır. Bu nedenle verdikleri örnekler de çevre uzunluğunu hesaplamayı bildikleri çokgenlerle sınırlı kalmıştır.

4.1.2. Uygulama öncesinde alana yönelik kavram imajları

Katılımcılarla yürütülen klinik görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesiyle katılımcıların alan ile ilgili kavram imajları iki başlık altında ele alınmıştır: 1) sınır bölgesi ve 2) alan ölçümü kavram imajı.

Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar alan kavramının anlamına odaklansalar da bu anlam formal tanımın içerdiği anlamdan oldukça uzaktır. Bu katılımcılar açıklamalarında ölçme ve hesaplamaya değinmeden sadece alan kavramının kendileri için ne anlama geldiğine vurgu yapmaktadırlar. Fakat hatalı bir şekilde alan kavramını çevre ile eşdeğer görmektedirler. Hem açıklamalarında hem de yaptıkları ölçme ve hesaplamalarda çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmaktadırlar.

Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar ise işlemsel bilgi temelli bir yaklaşım sergileyerek alanın ne anlama geldiğinden ziyade nasıl hesaplanacağına odaklanmaktadır. Bu katılımcılar açıklamalarında kavramın kendisi yerine kavramın ölçümüne ve ölçüm yaparken kullandıkları işlemlere vurgu yapmışlardır. Alan onlar için hesaplanıp bulunması gereken sayısal bir değerdir. Bu kavram imajı iki alt başlıkta ele alınmıştır: 1a) hatalı alan ölçümü ve 1b) kısmen doğru alan ölçümü. Hatalı alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar çevre uzunluğu için uyguladıkları algoritmaları alan ölçüsü için de kullanmaktadırlar. Kısmen doğru alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar ise uyguladıkları algoritma ve formüllerle alan ölçüsünü bazı durumlar için doğru hesaplayabilmektedirler. Kavram imajları ezberledikleri algoritma ve formüllerle sınırlıdır. Tablo 4.4.'te katılımcıların uygulama öncesinde sahip oldukları alana yönelik kavram imajları özetlenmiştir.

Tablo 4.4. *Katılımcıların uygulama öncesinde alana yönelik kavram imajları*

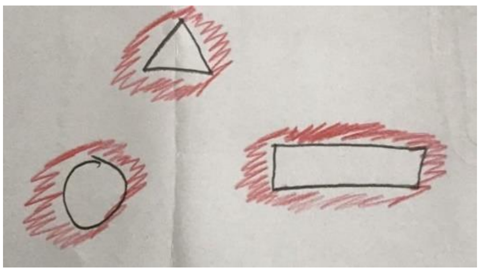
Sınıf düzeyi	Katılımcı	Kavram imajı
5	Zehra	Alan Ölçümü (1a)
	Neşe	Alan Ölçümü (1a)
6	Ceylan	Sınır Bölgesi
	Fırat	Sınır Bölgesi
7	Mısra	Alan Ölçümü (1b)
	Can	Sınır Bölgesi
8	Gülce	Alan Ölçümü (1b)
	Filiz	Sınır Bölgesi

Tablo 4.4.'te görüldüğü üzere sekiz katılımcıdan dördü alan ölçümü (ikisi 1a, ikisi 1b), dördü sınır bölgesi kavram imajına sahiptir. Tablo 4.1. ve Tablo 4.4. birlikte

incelendiğinde katılımcıların çevreye yönelik kavram imajları ile alana yönelik kavram imajlarının paralellik gösterdiği söylenebilir. Çevreye yönelik çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların alana yönelik olarak da alan ölçümü kavram imajına sahip oldukları görülmüştür. Yine çevre için etraf kavram imajına sahip katılımcılar alan için sınır bölgesi kavram imajına sahiptir. Bu durum çevre ve alan kavram imajları arasındaki ilişkinin bir göstergesi olarak düşünülebilir. Katılımcıların sınıf düzeyleri değişse de alan ile ilgili aynı kavram imajına sahip olanların varlığı dikkat çekmektedir. Ayrıca katılımcıların sahip oldukları bu kavram imajları sınıf düzeyleri fark etmeksizin birçok sınırlılık barındırmaktadır. Aşağıda katılımcıların kavram imajlarının detaylarına yer verilmiştir.

4.1.2.1. *Sınır bölgesi kavram imajı*

Katılımcıların alana yönelik kavram imajları incelendiğinde sekiz katılımcıdan dördünün (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)) sınır bölgesi kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar alanı tıpkı çevrede olduğu gibi şeklin sınırlarının dışındaki bölge olarak düşünmektedirler. Alanı açıklamak için herhangi bir ölçme yapmadan sadece şekil üzerinde işaret etmişlerdir. Ancak yaptıkları bu çizim ve açıklamalar matematiksel olarak doğru değildir. Yapılan görüşmelerde bu kavram imajına sahip katılımcıların çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullandığı, bu kavramları birbirine karıştırdığı görülmüştür. Katılımcılardan bir şeklin alanını göstermeleri istendiğinde çevreyi göstermek için yaptıkları gibi yine şeklin sınırlarının dışındaki bölgeyi işaret etmişlerdir. Şekil 4.4.'de katılımcılardan Can'ın (7) yaptığı çizimler örnek olarak verilmiştir.



Şekil 4.4. *Can'ın (7) alan için verdiği örnekler*

Katılımcılardan Can (7) alanı gösterirken çevre için kullandığına benzer bir yöntem izlemiştir. Yaptığı çizimleri açıklaması istendiğinde "Hocam bunun sadece alanını göstermek için yani bence normal alan da normal yani çevre gibi düz bir şekildir.” şeklinde ifade etmiştir. Açıklamasından ve çizimlerinden anlaşıldığı gibi Can (7) çevre ve alan kavramlarının aynı anlama sahip olduğunu düşünmektedir.

Öte yandan, katılımcılarla yapılan görüşmeler bu kavram imajına sahip olanların çoğunun sadece en az bir doğru parçası içeren şekillerin alanı olduğunu düşündüklerini ortaya koymuştur. Katılımcılar alan kavramını hesaplamadan bağımsız olarak düşünseler de kavram imajları sadece sıklıkla karşılaştıkları çokgenlerle sınırlı kalmıştır. Buna uygun olarak, katılımcılardan Ceylan (6), Fırat (6) ve Filiz (8) bir şeklin alanı olması için kapalı olması gerektiğini ifade etmiştir. Can (7) ise doğru parçalarından oluşan kapalı olmayan şeklin de alanı olduğunu düşünmektedir.

Bu kavram imajına sahip olan katılımcılar derslerde sıklıkla karşılaştıkları çokgenlerin veya onlara çokgeni anımsatan şekillerin sınırlarının dışarıda kalan bölgeyi işaret ederek alanı göstermişlerdir. Örneğin Fırat (6) bir şeklin alanını göstermesi istendiğinde parmağıyla şeklin sınırlarını dışarıdan takip etmiştir. Kendisine gösterilen şekiller arasından Fırat (6) dikdörtgen, altıgen, daire ve doğru parçaları ile eğriden oluşan bir şeklin alanı olduğunu ifade etmiştir. Fırat’a (6) göre bir şeklin alanı olması için kapalı olmalı; fakat bu kapalı şekiller düzensiz eğriler içermemelidir.

Bu kavram imajına sahip katılımcıların alan ve çevre kavramlarını birbirine karıştırdıkları, bir şeklin alan ölçüsünü hesaplamaları istendiğinde kenar uzunluklarını topladıkları görülmüştür. Aşağıda araştırmacı ve katılımcılardan Can (7) arasında geçen bir diyalog bu konuda örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Peki, bunun (L biçimindeki kapalı şekil) alanını bulabilir misin?
>
> Can: Bunun alanı burada şeyleri … küpleri yine sayarak bulmuşum. (Her bir kenarı tek tek gösteriyor) Bu üç, burası da üç. Bir, iki, üç, dört. İki, yediymiş, beşmiş. Bunları toplayarak çözümünü bulabiliriz.
>
> Araştırmacı: Anladım, yani çevredekinin aynısını yapıyorsun.
>
> Can: Aynen. (7, 5, 4, 3, 2 sayılarını alt alta yazıyor) Bunları yeniden sayayım. (Yeniden birim kareleri sayıyor) Beş, üç, üç, dört, iki, yedi. Aynen hepsi doğru. Yedi beş daha on iki, dört daha on altı, üç daha on dokuz, iki daha yirmi bir. Yirmi bir santimetre.

Bu kavram imajına sahip katılımcılar alanın uygulanmasına yönelik sorularda eğer şekiller kareli zemin üzerinde verilmişse birim kareleri sayma yöntemine başvurmuşlardır. Örneğin Fırat (6) alan ölçüsünü hesaplamayı gerektiren sorularla karşılaştığında alışkın olduğu bir stratejiyle şeklin içindeki birim kareleri saymaya yönelmiştir. Fakat öğrencinin hem çevre hem de alan için aynı stratejiyi kullanması bu kavramları birbirine karıştırdığını, iki kavram arasındaki farkları göremediğini akla getirmektedir. Benzer uygulamaları diğer katılımcıların da gösterdiği belirlenmiştir.

Bu kavram imajına sahip katılımcılar bir şeklin kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşünmektedir. Kendilerine bir karenin kenar uzunlukları iki katına çıkarıldığında alan ölçüsünün başlangıca göre nasıl değişeceği sorulduğunda “iki katına çıkar” cevabını vermişlerdir. Bu düşüncenin nedenlerinden biri alan ve çevre kavramlarını birbirine eş görmeleri olabilir. Katılımcılar alanı da çevre gibi tek boyutlu olarak algıladıkları için kenar uzunluğu ile çevre arasında doğrusal bir ilişki olduğunu ifade etmiş olabilirler. Tablo 4.5.’de uygulama öncesinde alana yönelik sınır bölgesi kavram imajının sınırlılıkları özetlenmiştir.

Tablo 4.5. *Uygulama öncesinde alana yönelik sınır bölgesi kavram imajının sınırlılıkları*

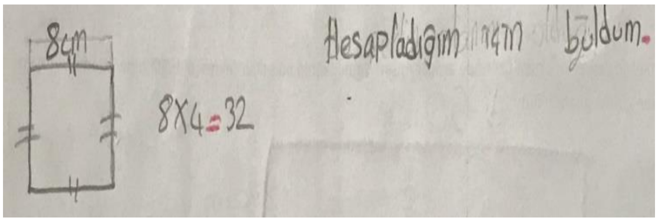
Kavram imajının sınırlılıkları	**Katılımcılar**
Alan ve çevre kavramlarını birbiri yerine kullanma	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)
Sadece doğru parçası içeren şekillerin alanı olduğunu düşünme	Ceylan (6), Fırat (6), Filiz (8)
Kapalı olmayan şekillerin alanı olduğunu düşünme	Can (7)
Alanı bir şeklin sınırlarının dışı olarak gösterme	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)
Bir şeklin alanı sorulduğunda çevresini hesaplama	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)
Kenar uzunluğu ile alan arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşünme	Ceylan (6), Fırat (6), Can (7), Filiz (8)

4.1.2.2. *Alan ölçümü kavram imajı*

Katılımcıların alana yönelik kavram imajları incelendiğinde sekiz katılımcıdan dördünün (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Gülce (8)) alan ölçümü kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu kavram imajına sahip katılımcılar alanı açıklarken ölçme, hesaplama ve bir sonuç bulma arayışındadırlar. Eylem odaklı bir muhakeme anlayışları vardır. Bu katılımcılardan bir şeklin alanının ne anlama geldiğini çizerek göstermeleri istendiğinde bunu o şeklin alan ölçüsünü hesaplayarak ifade etmeye çalıştıkları görülmüştür. Katılımcılar, çizdikleri şeklin kenar uzunluklarına rastgele sayısal değerler atayarak, alan ölçüsünü hesaplamaya çalışmışlardır. Bunun için daha önce ezberlemiş oldukları algoritma ve formülleri kullandıkları görülmüştür.

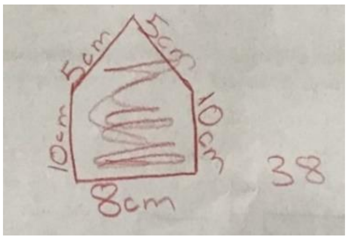
Katılımcıların kullandığı algoritma veya formüllerin bir kısmı alan için bazı özel durumlarda doğruyken, bir kısmı alan için yanlış olup aslında çevre için doğrudur. Bu nedenle bu kavram imajı 1a) hatalı alan ölçümü ve 1b) kısmen doğru alan ölçümü olmak üzere iki alt başlıkta ele alınmıştır. Beşinci sınıf düzeyindeki iki katılımcı hatalı alan ölçümü kavram imajına sahipken, yedi ve sekizinci sınıf düzeyindeki katılımcılar kısmen doğru alan ölçümü kavram imajına sahiptir. Katılımcıların altı ve yedinci sınıf düzeyinde çokgenlerin ve dairenin alanına yönelik bir öğretim almaları kavram imajlarının sınıf düzeyleri arasında farklılık göstermesinin nedenlerinden biri olabilir.

1a) Hatalı alan ölçümü: Bu kavram imajına sahip iki katılımcı bulunmaktadır: Zehra (5) ve Neşe (5). Katılımcılarla yapılan görüşmeler bu kavram imajına sahip katılımcıların kullandıkları formül ve algoritmaların matematiksel olarak anlamsız ve yanlış olduğunu ortaya koymuştur. Katılımcıların çevre uzunluğu için geçerli olan algoritmaları alan ölçüsü için de uyguladıkları; yani çevre ve alanı işlemsel olarak birbiri yerine kullandıkları görülmüştür. Bu nedenle sahip oldukları kavram imajı hatalıdır. Şekil 4.5.'de katılımcılardan Zehra'nın (5) yaptığı çizim ve hesaplamalar verilmiştir.



Şekil 4.5. *Zehra'nın (5) alan için verdiği örnek*

Şekil 4.5.'de görüldüğü üzere Zehra (5) alanı açıklamak için çizdiği şeklin alan ölçüsünü hesaplamak isterken aslında çevre uzunluğunu hesaplamıştır. Burada karenin bir kenar uzunluğuna rastgele atadığı değeri dört ile çarptığı görülmektedir. Katılımcının önceki matematik derslerinden aşina olduğu, karenin alan ve çevre ölçüsünü hesaplamak için kullanılan algoritmaları karıştırdığı anlaşılmaktadır. Şekil 4.6.'da ise Neşe'nin (5) yaptığı çizim ve hesaplamalar verilmiştir.



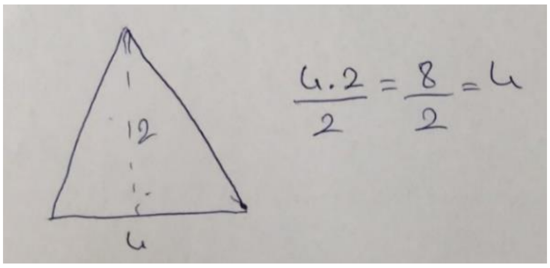
Şekil 4.6. *Neşe'nin (5) alan için verdiği örnek*

Şekil 4.6.'da görüldüğü üzere Neşe (5) alanı açıklamak için çizdiği beşgenin alan ölçüsünü hesaplamak isterken aslında çevre uzunluğunu hesaplamıştır. Bu amaçla beşgenin kenar uzunluklarına rastgele atadığı değerleri toplamıştır. Zehra (5) ve Neşe (5) herhangi bir hesaplama yapmaları istenmediği, sadece alanın kendilerine ne ifade ettiğini açıklamaları istendiği halde, kendilerince kenar uzunlukları atayarak hesaplama yapmaya yönelmişlerdir. Katılımcılar alan kavramını hesaplama eyleminden bağımsız olarak açıklayamamışlardır. Ancak, yaptıkları çizim ve işlemlerden sonra, araştırmacı hesapladıkları bu alan değerinin şeklin neresi olduğunu yeniden sorduğunda, Şekil 4.6.'da görüldüğü gibi çokgenin iç bölgesini işaret etmişlerdir. Alan ile şeklin iç bölgesini ilişkilendirmiş olsalar da ölçme ve hesaplama eylemleri kavram imajlarında daha baskındır. Bu iki katılımcı açıklamalarında, yaptıkları hesaplamalara uygun olarak, alan ve çevrenin aynı anlama geldiğini ve birbiri yerine kullanılabileceğini ifade etmişlerdir.

Yapılan klinik görüşmeler sonucunda Zehra (5) ve Neşe'nin (5) sadece doğru parçası içeren şekillerin alanı olduğunu düşündükleri ortaya çıkmıştır. Onlara göre hesaplama yapamayacakları şekillerin alanı yoktur. Alanı hesaplayabilmeleri için de şeklin kenarları (en az bir tane) olmalıdır. Zehra (5) klinik görüşmenin ilerleyen bölümünde fikrini değiştirerek dairenin alanı olabilmesi için kareli zemine çizilmiş olması gerektiğini belirtmiştir. Burada birim kareleri alanı ölçmek, hesaplamak için kullanmıştır. Yaptıkları çizim ve açıklamalar incelendiğinde katılımcıların alan ile ilgili kavram imajlarının kendilerine tanıdık gelen çokgenler ve kısmen daire ile sınırlı olduğu söylenebilir. Görüldüğü gibi bu kavram imajına sahip katılımcılar şekillerin alan ölçüsünü hesaplamaya odaklandıkları için hesaplayamayacaklarını düşündükleri şekillerin alanı olmadığını ifade etmektedirler. İşlemsel düşünceyi ön planda tutan, eylem odaklı muhakeme anlayışları kavram imajlarını sınırlamıştır.

1b) Kısmen doğru alan ölçümü: Bu kavram imajına sahip iki katılımcı bulunmaktadır (Mısra (7), Gülce (8)). Katılımcıların kavram imajları sadece bazı şekiller (çokgenler ve kısmen daire) için ezberledikleri alan formüllerini içermektedir. Bu nedenle eksik ve sınırlı bir kavram imajıdır. Katılımcılar açıklamalarında alan kavramının anlamına değil, alan formüllerine vurgu yapmışlardır.

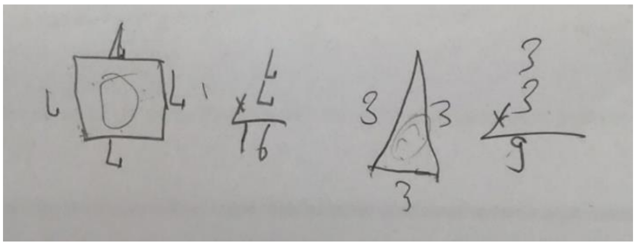
Bu kavram imajına sahip katılımcılardan Gülce (8) alanı açıklamak için verdiği örneklerde temel geometrik şekilleri kullanmıştır. Sadece temel geometrik şekillerin alanı olduğunu, çünkü bu şekillerin alan ölçülerini hesaplamak için belirli formüller kullanıldığını ifade etmiştir. Buna göre alan ile ilgili kavram imajının temel geometrik şekiller ve onların alan formülleri etrafında şekillendiği söylenebilir. Gülce'nin (8) alan kavramını açıklamak için verdiği örnek Şekil 4.7.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. *Gülce'nin (8) alan için verdiği örnek*

Şekil 4.7.'de görüldüğü gibi Gülce (8) çizdiği şeklin alanını ezberlediği formül ($Alan = \frac{a\,x\,h}{2}$) yardımıyla açıklamaya çalışmıştır. Kavramın ve kullandığı formülün ne anlama geldiğini açıklamamıştır. Her ne kadar Gülce'nin (8) burada yaptığı işlemler kısmen doğru da olsa hatalı hesaplamalar yaptığı durumlar da mevcuttur. Örneğin Şekil 4.2.'de yaptığı işlemler incelendiğinde üçgenin çevre uzunluğunu doğru bir şekilde hesaplasa da kullandığı alan formülünün hatalı olduğu görülmektedir. Burada üçgenin herhangi iki kenar uzunluğunun çarpımının yarısını hesaplamıştır. Gülce (8) alana sahip olduğunu düşündüğü şekiller arasına çokgenler yanında daireyi de dahil etmiş, dairenin yarıçapı verildiği sürece formülü uygulayarak alan ölçüsünü hesaplayabileceğini söylemiştir. Gülce'nin (8) kavram imajı sadece alan formülünü bildiği şekillerle sınırlı olduğu ve hatalı uygulamalar içerdiği için bu gruba dahil edilmiştir.

Bu kavram imajına sahip katılımcılardan Mısra (7) ise alanı ölçmek için dikdörtgenin alan formülünü hatalı bir şekilde tüm çokgenlere genellemiştir. Buna göre çizdiği çokgenlerin herhangi iki komşu kenarının uzunluklarını çarparak alan ölçüsünü hesaplamaktadır. Bu hesaplama dikdörtgen ve kare için doğru olsa da diğer çokgenler için hatalıdır. Mısra (7) tüm kapalı şekillerin bir yer kapladıkları için alanları olacağını ifade etmiş; fakat kapalı eğrilerin alan ölçüsünün hesaplanamayacağını da eklemiştir. Bu düşüncesine uygun şekilde verdiği örneklerde sadece alan ölçüsünü hesaplayabileceğine emin olduğu çokgenleri kullanmıştır. Mısra'nın (7) kavram imajı sadece belirli durumlarda doğru olduğu ve birçok hatalı uygulama barındırdığından dolayı bu gruba dahil edilmiştir. Şekil 4.8.'de Mısra'nın (7) alanı açıklamak için yaptığı çizim ve hesaplamalar örnek olarak verilmiştir.



Şekil 4.8. *Mısra'nın (7) alan için verdiği örnekler*

Kısmen doğru alan ölçümü kavram imajına sahip bu katılımcılardan herhangi bir hesaplama yapmaları istenmediği, sadece alanı açıklamaları istendiği halde, çizdikleri şekillere kendilerince kenar uzunlukları atayarak daha önceden ezberledikleri algoritmaları kullanarak hesaplama yapmaya yönelmişlerdir. Ancak yaptıkları çizimler ve işlemlerden sonra araştırmacı hesapladıkları alan ölçüsünün şeklin neresi olduğunu yeniden sorduğunda katılımcılar şekillerin iç bölgesini işaret etmişlerdir. Alanı şeklin iç bölgesi ile ilişkilendirmiş olsalar da kavram imajlarında ölçme ve hesaplama daha baskındır. Tablo 4.6.'da uygulama öncesinde alan ölçümü kavram imajının sınırlılıkları özetlenmiştir.

Tablo 4.6. *Uygulama öncesinde alana yönelik alan ölçümü kavram imajının sınırlılıkları*

Kavram imajının sınırlılıkları	**Katılımcılar**
Alan ve çevre kavramlarını birbiri yerine kullanma	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7)
Niteliğe uygun birim kullanmama	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7)
Sadece doğru parçası içeren şekillerin alanı olduğunu düşünme	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7)
Sadece çokgenler ve dairenin alanı olduğunu düşünme	Gülce (8)
Alanı hesaplarken çevre formülünü kullanma	Zehra (5), Neşe (5)
Bir çokgenin alanını kenar çiftlerinin çarpımı olarak düşünme	Gülce (8), Mısra (7)
Kenar uzunluğu ile alan arasında doğrusal bir ilişki olduğuna inanma	Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7)

Tablo 4.6.'da görüldüğü gibi katılımcılar çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmakta, bu kavramları birbirine karıştırmaktadır. Örneğin katılımcılardan Zehra (5) dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamak için kenar uzunluklarını çarparken, karenin alan ölçüsü için bir kenar uzunluğunu dörtle çarpmıştır. Benzer şekilde bu katılımcılar bir şeklin kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşünmektedir. Örneğin katılımcılar kenar uzunlukları iki katına çıkarılan bir karenin alan ölçüsünün başlangıca göre iki katına çıkacağını söylemişlerdir.

Uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmelerde katılımcıların çevre ve alan ile ilgili kavram imajları yanında yaptıklarının doğruluğunu savunurken kullandıkları kanıt şemaları da ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Aşağıda katılımcıların uygulama öncesinde sahip oldukları kanıt şemaları ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

4.1.3. Uygulama öncesinde kanıt şemaları

Uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmelerden elde edilen veriler incelendiğinde katılımcıların yaptıkları çözümlerin doğruluğunu kanıtlamak için dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları görülmüştür. Katılımcılardan hiçbiri analitik kanıt şemalarını kullanmamıştır. (Kanıt şemalarıyla ilgili bilgi için Bkz. s. 26-35) Tablo 4.7.'de katılımcıların uygulama öncesinde sahip oldukları kanıt şemaları özetlenmiştir.

Tablo 4.7. *Katılımcıların uygulama öncesinde kanıt şemaları*

Sınıf Düzeyi	Katılımcı	Kanıt Şeması
5	Zehra	Örnek temelli, Algısal
	Neşe	Örnek temelli, Algısal
6	Ceylan	Alışkanlık Edinilmiş, Örnek Temelli
	Fırat	Otoriter, Alışkanlık Edinilmiş
7	Mısra	Otoriter, Algısal
	Can	Alışkanlık Edinilmiş, Algısal
8	Gülce	Alışkanlık Edinilmiş, Örnek Temelli
	Filiz	Otoriter

Elde edilen verilere göre dışsal kanıt şemalarından otoriter ve alışkanlık edinilmiş/ritüel kanıt şemalarının katılımcılar tarafından kullanıldığı görülmüştür. Otoriter kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Fırat (6), Mısra (7) ve Filiz (8)) düşüncelerinin doğruluğunu kendilerinden daha bilgili gördükleri bir büyüklerine veya derslerde bu şekilde öğrenmelerine dayandırmışlardır. Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Gülce (8)) düşüncelerinin doğru olduğunu çevre/alan ölçüsünü her zaman bu şekilde hesapladıklarını söyleyerek savunmuşlardır.

Deneysel kanıt şemalarından ise algısal ve örnek temelli/tümevarımsal kanıt şemalarının katılımcılar tarafından kullanıldığı görülmüştür. Algısal kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Can (7)) savunmalarını mevcut olan veya kendilerinin oluşturduğu bir çizime dayandırmışlardır. Açıklamalarını bu çizim üzerinden yapmaya çalışmışlardır. Örnek temelli/tümevarımsal kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Gülce (8)) ise düşüncelerinin doğru olduğunu kanıtlamak için bir veya birkaç farklı örnek vermişlerdir. Açıklamalarında bu örnekler üzerinden bir genellemeye ulaşmaya çalışmışlardır.

4.1.3.1. *Dışsal kanıt şemaları*

Dışsal kanıt şemaları üç alt başlık altında incelenmektedir: otoriteye bağlı, alışkanlık edinilmiş/ ritüel ve sembolik. Uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmeler incelendiğinde katılımcıların sadece otoriteye bağlı ve alışkanlık edinilmiş kanıt şemalarını kullandıkları, sembolik kanıt şemasını kullanmadıkları görülmüştür.

Dışsal kanıt şemasını kullanan katılımcılardan üçü (Fırat (6), Mısra (7) ve Filiz (8)) çözümlerinin doğruluğunu savunurken kendilerinden daha bilgili olduğunu düşündükleri öğretmenlerini veya abla/abilerini dayanak olarak göstermişlerdir. Yine bu kanıt şemasını kullanan dört katılımcı (Fırat (6), Ceylan (6), Can (7) ve Gülce (8)) ise çözümlerinin doğruluğunu göstermeye çalışırken çevre veya alan ölçüsünü hesaplamada kullandıkları formüllere, algoritmalara dayalı açıklamalar yapmışlardır. Çevre veya alan ölçüsü hesaplanırken her zaman bu yöntemleri kullandıklarını vurgulamışlardır. Aşağıda dışsal kanıt şemaları ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

4.1.3.1.1. ***Otoriteye bağlı kanıt şeması***

Otoriteye bağlı kanıt şemasına sahip katılımcılar (Fırat (6), Mısra (7) ve Filiz (8)) yaptıkları çözümleri doğrulama konusunda başlangıçta oldukça isteksiz davranmışlardır. Örneğin katılımcılardan Fırat (6) çözümlerinin doğruluğunu göstermesi istendiğinde "Hocam bilmiyorum ki nasıl ikna edecem?", "Bilmiyorum hocam, doğru olduğunu bile bilmiyorum." şeklinde açıklamalar yapmıştır. Buna göre Fırat (6) kendisini çevre ve alan konusunda bir otorite olarak görmemektedir. Katılımcının sahip olduğu bilgilerin doğru olup olmadığı konusunda şüpheleri olduğu açıktır. Bu nedenle yaptığı çözümlerin doğrulayıcısı olarak kendisi dışında bir otorite figürünü, ablasını göstermektedir. Örneğin bir başka çözümü için yaptığı açıklamada bunu "Hocam ablamla çalışmıştık, o böyle dedi." şeklinde ifade etmiştir. Fırat (6) kendisinden daha bilgili olarak gördüğü ablasını düşüncesinin doğruluğunu savunmak için dayanak olarak göstermiştir.

Bu kanıt şemasını kullanan katılımcılar savunmalarını öğretmenlerine de dayandırmışlardır. Örneğin Mısra (7) dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplaması istenen bir soruda çözümünün doğruluğunu kanıtlamak için aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

> Araştırmacı: Bu soruların böyle çözüldüğünü nereden biliyorsun?... Alanın böyle hesaplandığını nasıl biliyorsun?
>
> Mısra: Alanın böyle, alanın bu iç kısmı olduğunu biliyorum.
>
> Araştırmacı: Nereden biliyorsun işte?
>
> Mısra: … yani hep derslerde falan öğrendiğimiz için bu alanın iç kısım, çevrenin de dış kısım olduğunu bildiğim için. Alan içindeki bu kareleri ya da noktaları hesaplayıp cevabı bulabiliriz.

Katılımcıların yaptıkları açıklamalardan anlaşıldığı gibi savunmalarında kullandıkları bilgileri henüz içselleştirmemişlerdir. Otoriteye bağlı kanıt şemasını kullanan bu katılımcılar başkalarından edindikleri bilgileri özümsemeden, ezberleyerek uygulamaya çalışmışlardır. Bilginin neden ve nasıl doğru olduğunu açıklamak için matematiksel gerçekleri değil bilgiyi edindikleri kişiyi dayanak olarak göstermişlerdir. Yeterince yapılandıramadıkları kavram imajları nedeniyle bu kanıt şemasına yöneldikleri düşünülebilir.

4.1.3.1.2. ***Alışkanlık edinilmiş/ritüel kanıt şeması***

Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasına sahip katılımcılar (Fırat (6), Ceylan (6), Can (7) ve Gülce (8)) yaptıkları çözümlerin doğruluğunu savunurken her zaman kullandıklarını belirttikleri formülleri ve algoritmaları dayanak olarak göstermişlerdir. Bu katılımcılara göre önceden beri alışkın oldukları, en azından birkaç soruda doğru cevaba ulaşmalarını sağlayan bu yöntemleri uyguladıkları için şimdiki çözümleri de doğrudur. Örneğin Gülce (8) kareli zemine çizilmiş dikdörtgen ve karenin çevre uzunluklarını karşılaştırırken çözümünün doğruluğunu "Çünkü her bir konunun, her bir işlemin, her bir düzenin bir kuralı vardır. Çevrenin de kuralı tüm kenarlarının toplanmasıyla bulunuyor." diyerek kanıtlamaya çalışmıştır.

Katılımcılardan Ceylan (6) kareli zemin üzerine çizilmiş dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplaması gereken bir soruyu çözerken şeklin kenar uzunluklarını belirleyip alt alta yazarak toplamıştır. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğunu araştırmacı ile aralarında geçen aşağıdaki diyalogda açıklamaktadır:

> Araştırmacı: Yani alanın bu şekilde bulunduğunu nereden biliyorsun?
>
> Ceylan: Çünkü mesela her bir kare bir birim yapıyor ya burada üç tane kare var o zaman üç yapıyor. Burada da yedi tane var, o da yedi yapıyor. Zaten burası üç oldu mu burası da aynı şekilde eşit oluyor. Burası yedi oldu mu burası da eşit oluyor. Ondan böyle buldum.
>
> Araştırmacı: Toplayarak bulman gerektiğini nereden biliyorsun?
>
> Ceylan: Mesela bunları çarpsak 49 çıkıyor. Şunların ikisini çarpsak 49 çıkıyor ya da haa bir dakika buldum. İlla bu işlem değil bunda.
>
> Araştırmacı: Nasıl olur?
>
> Ceylan: Mesela üçle ikiyi çarptık mı altı, yedi yedi daha on dört, on dörtle altıyı topladık mı yirmi yapıyor.
>
> Araştırmacı: Anladım.
>
> Ceylan: Yani ikisinin de iki farklı işlemi var.

Ceylan (6) dikdörtgenin alan ölçüsünü (aslında matematiksel olarak çevresini) hesaplamak ve çözümünü doğrulamak için kullandığı yukarıdaki iki yöntemi (a+b+a+b ve 2a+2b) benzer tüm sorularda argüman olarak kullanmıştır. Bu nedenle yaptığı açıklama alışkanlık edinilmiş/ritüel kanıt şeması kapsamında ele alınmıştır.

4.1.3.2. *Deneysel kanıt şemaları*

Deneysel kanıt şemaları iki alt başlık altında incelenmektedir: algısal ve örnek temelli/tümevarımsal kanıt şeması. Uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmeler incelendiğinde katılımcıların her iki kanıt şemasını da kullandıkları görülmüştür.

Deneysel kanıt şemasını kullanan katılımcılardan dördü (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Can (7)) çözümlerini bir çizime dayandırmışlar ve algısal kanıt şemasına dahil olmuşlardır. Yine bu kanıt şemasını kullanan dört katılımcı (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Gülce (8)) ise çözümlerini kanıtlarken bir veya daha fazla örnek üzerinden savunma yapmışlar ve örnek temelli kanıt şemasına dahil olmuşlardır. Aşağıda deneysel kanıt şemaları ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

4.1.3.2.1. *Algısal kanıt şeması*

Algısal kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Can (7)) çözümlerinin doğruluğunu savunurken bir çizimi dayanak olarak göstermişlerdir. Örneğin katılımcılardan Mısra (7) kareli zemin üzerine çizilmiş kapalı eğrinin alanı olup olmadığı sorusuna aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

> Araştırmacı: Sence bu şeklin bir alanı var mıdır?
>
> Mısra: Bir alanı vardır ama hesaplanmaz.
>
> Araştırmacı: Neresidir alanı gösterir misin?
>
> Mısra: Alanı bu iç kısımlarıdır. (Kapalı eğrinin iç bölgesini tarıyor) Ama hesaplanmaz çünkü hesaplanması için sayılar verilmesi lazım. Sayıların verilmesi için de köşeli olması lazım. Ama bu köşeli değil yuvarlak kısımlı olduğu için alanı var; ama hesaplanmaz.

Görüldüğü gibi Mısra (7) tek bir çizim üzerinden düşüncesini savunmaya çalışmakta, buna göre alan zihninde şeklin iç bölgesi olarak resmedilmektedir.

Katılımcılardan Neşe (5) ise çevresi olmayan bir şekil olup olmadığı sorulduğunda çevre kavram imajının içerdiği çokgenlere atıfta bulunmuştur. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog aşağıda örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Peki çevresi olmayan bir şekil var mıdır, geometrik bir şekil?
>
> Neşe: Vardır.

Araştırmacı: Nedir?

Neşe: Mesela daire.

Araştırmacı: Neden onun çevresi yok?

Neşe: Çünkü dairenin kenarları yok ve onun için daireye bir şey yazılamıyor. Bir sayı yazılıp onları toplanmıyor onun için dairenin çevresi yok.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşıldığı gibi Neşe (5) zihnindeki prototip çokgen algısına dayanarak bir şeklin çevresi olup olmadığına karar vermekte ve düşüncesini savunmaktadır. Görüldüğü gibi katılımcıların sahip oldukları kavram imajları ve bu imajların içerdiği bilgiler onların kanıt şemalarını da etkilemektedir.

4.1.3.2.2. *Örnek temelli kanıt şeması*

Örnek temelli kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Gülce (8)) çözümlerinin doğruluğunu savunurken bir veya daha fazla örnek kullanmışlardır. Örneğin katılımcılardan Neşe (5) Şekil 4.9.'da gösterilen L biçimindeki bir şeklin alan ölçüsünü hesaplaması istenen bir soruda çözümünün doğruluğunu aşağıdaki gibi kanıtlamaya çalışmıştır:

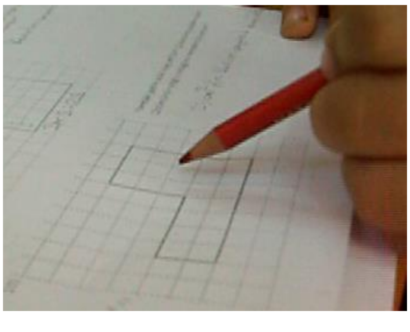
Araştırmacı: Peki, nasıl emin oluyorsun bu çözümün doğruluğundan?

Neşe: Önce ayırıp bu tarafı, sonra da bu tarafı (L biçimindeki şeklin sırasıyla sol ve sağ bölümlerini gösteriyor) buluyorum. Topluyorum, buluyorum.

Araştırmacı: Peki, bu iki parçanın toplamının bütün alanı verdiğinden nasıl emin oluyorsun?

Neşe: Çizgi olmadığı gibi düşünüyorum. (Şekli iki dikdörtgene ayırdığı hayali çizgiden bahsediyor) Kareleri tek tek sayıyorum.

Görüldüğü gibi Neşe (5) düşüncesini savunurken doğru olduğunu kabul ettiği bir örnek üzerinden açıklama yapmaktadır. Neşe (5) verdiği örnek doğru olduğu için savunduğu çözümünün de doğru olacağını düşünmektedir.



Şekil 4.9. *Neşe'ye (5) ilk klinik görüşmede gösterilen L biçimindeki şekil*

Benzer şekilde katılımcılardan Gülce (8) de kenar uzunlukları iki katına çıkarılan bir karenin alan ölçüsünün nasıl değişeceği sorulduğunda çözümünün doğruluğunu aşağıdaki gibi kanıtlamaya çalışmıştır:

> Araştırmacı: Elimizde bir kare var. Bu karenin kenar uzunluklarını iki katına çıkarıyoruz. Alanı nasıl değişir sence?
>
> Gülce: Mesela burası her biri 2 santim olsa (bir kare çizerek kenarlarına 2 yazıyor), bunu iki katına çıkartırsak (bir kare çizerek kenarlarına 4 yazıyor) burası 4 hale geliyor. Burasının alanı 4, burasının alanı ise 16. Bunun yani çıkan sayının kendi katı haline gelmiş oluyor.
>
> Araştırmacı: Kaç katı?
>
> Gülce: Dört katı.
>
> Araştırmacı: Peki, bu bütün kareler için geçerli midir sence?
>
> Gülce: (Bir kare çizerek kenarlarına 3 yazıyor. Bu karenin yanına biraz daha büyük bir kare çizerek kenarlarına 6 yazıyor. İlk karenin altına 9, ikincinin altına 36 yazıyor.) Her biri dört katına çıkıyor.
>
> Araştırmacı: Nasıl emin oldun bundan?
>
> Gülce: Çünkü bunda da bunda da aynı şeyi yaparak, iki katına çıkartarak yaptığımızda bura da dört katına çıkıyor bura da dört katına çıkıyor. Öyle düzen haline gelmişse her biri dört katı.

Görüldüğü gibi Gülce (8) çözümünün doğru olduğunu kanıtlamak için birden fazla örnek vermiştir. Bu örneklerin her birinin doğru olduğunu dolayısıyla savunduğu düşüncesinin de doğru olacağını öne sürmektedir. Verdiği birkaç örnek üzerinden bir genellemeye varmaya çalışmaktadır. Katılımcıların düşüncelerinin doğruluğunu savunurken verdikleri bu örnekler onların kavram imajlarının bir parçasıdır.

4.2. Öğretim Seanslarına İlişkin Bulgular

Katılımcılarla uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin çevre ve alan ile ilgili mevcut kavram imajları ve kanıt şemaları ortaya çıkarılmıştır. Buna göre katılımcıların çevre ve alan ile ilgili başlangıçtaki kavram imajlarının formal tanımlardan uzak olduğu (Bkz. s. 100-117), ayrıca kavram imajlarının birçok sınırlılık içerdiği tespit edilmiştir (Bkz. Tablo 4.2., Tablo 4.3., Tablo 4.5. ve Tablo 4.6.). Katılımcıların kanıt şemalarının ise dışsal ve deneysel kanıt şemaları ile sınırlı kaldığı (Bkz. Tablo 4.7.) görülmüştür.

Araştırmacı katılımcıların kavram imajlarını formal tanımlara yaklaştırmak, içerdikleri sınırlılıkları gidermek, daha kapsamlı kanıt şemalarını kullanmalarını sağlamak amacıyla bir dizi öğretim seansı tasarlamıştır (Bkz. s. 88). Bu kapsamda araştırmacı öncelikle katılımcıların çevreyle ilgili kavram imajlarını formal tanıma uygun hale getirmeyi, ardından kavram imajlarının içerdiği sınırlılıkları ortadan kaldırmayı amaçlamıştır. Çevreyle ilgili sınırlılıklar giderildikten sonra katılımcıların alan kavramıyla ilgili kavram imajları formal tanıma uygun hale getirilmeye, ardından kavram imajlarının içerdiği sınırlılıklar giderilmeye çalışılmıştır. Tüm bu süreç boyunca katılımcılar düşüncelerinin doğruluğunu savunmaya yönlendirilmiştir. Araştırmacı kendilerine has kavram tanımları oluşturmalarını sağlayarak, örnekler üzerinden genellemelere ulaşmalarını teşvik ederek, düşüncelerinin hatalı olduğunu keşfetmeleri için aksine örnekler sunarak katılımcıların kanıt şemalarını geliştirmeye çalışmıştır.

4.2.1. Çevreyle ilgili kavram imajlarının değişimi

Uygulama öncesinde katılımcıların çevreyle ilgili kavram imajları iki başlık altında, çevre ölçümü ve etraf, ele alınmıştır. Aşağıda katılımcıların kavram imajlarının öğretim seansları boyunca yaşadığı değişim ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

4.2.1.1. *Çevre ölçümü kavram imajının değişimi*

Uygulama öncesinde çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) çevreyle ilgili kavram imajları çevrenin şeklin (genellikle bir çokgen) kenar uzunlukları toplamı olduğu şeklindeydi. Bu katılımcılar eğrisel şekillerin çevresi olduğunu kabul etmemekte, şekillerin çevresi olması için en az bir doğru parçasına (veya ona benzer bir çizgiye) sahip olmaları gerektiğini savunmaktaydılar. Kısacası çevre uzunluğunu hesaplayamayacaklarını düşündükleri şekillerin çevresi olmadığını iddia etmekteydiler.

Araştırmacı tasarladığı ilk iki öğretim seansında bu katılımcıların kavram imajlarını formal tanıma uygun olarak eğrisel şekilleri de içerecek hale getirmeyi amaçlamıştır. Katılımcıların zihnindeki çevre algısını kenar uzunlukları toplamından uzaklaştırarak şeklin sınır uzunluğuna dönüştürmeye çalışmıştır. Bu amaçla katılımcıları çevreleme eylemine yönlendirmiştir.

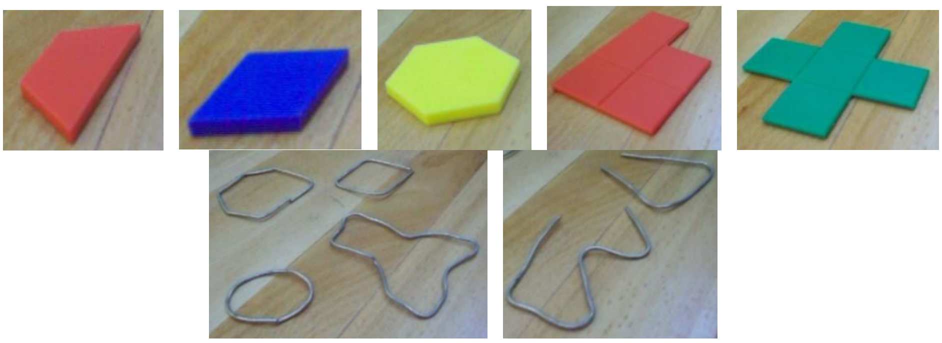
Örneğin katılımcılardan Zehra (5) ilk klinik görüşme sonuçlarına göre sadece kenarları, köşeleri olan şekillerin çevresi olduğunu düşünmekteydi. Öğretim seansının başlangıcında Zehra'ya (5) Şekil 4.10.'daki plastik üçgen gösterilip çevresi olup olmadığı sorulunca şeklin çevresi olduğunu söylemiştir. Şeklin çevresini göstermesi istenince parmağını kenarlar üzerinde gezdirmiş ve kenarların çevreyi oluşturduğunu söylemiştir.

Şekil 4.10. *Plastik ikizkenar üçgen*

Bu şeklin çevresi olduğuna nasıl karar verdiğini "Çünkü bunun hem kenarları birleşik önceki yaptığımız testteki gibi ayrılmış değil. Bunlar hem birleşik hem de köşeleriyle … birleşmiş o yüzden." diyerek açıklamıştır. Zehra (5) herhangi bir şeklin çevresi olduğuna nasıl karar verdiğini aşağıdaki diyalogda açıklamıştır:

> Araştırmacı: Burada önemli olan nedir çevresi olmasında?
>
> Zehra: Kenarları olması.
>
> Araştırmacı: Kenarları olmazsa çevre olmaz mı?
>
> Zehra: Kenarları olmazsa mesela bir daire diyelim, dairenin kenarları yok. Kenarları var da köşeleriyle birleşmemişler. Köşeleri olsaydı onun da olurdu.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi Zehra'nın (5) odağında şeklin kapalı olması yanında kenar ve köşelere sahip olması vardır. Araştırmacı bu noktada onun dikkatini kenar ve köşelerden şeklin sınırlarına yönlendirmek için çevreleme eylemini kullanmıştır. Zehra'dan (5) daha önce çevresi olduğunu söylediği şekillerin sadece sınırları boyunca hareket eden bir karıncayı hayal etmesi istenmiştir. Bu eylem sırasında karıncanın izlediği yol ile şeklin çevresi arasında nasıl bir ilişki olduğunu düşünmesi söylenerek çevre ile şeklin sınırları arasında bir bağ kurması sağlanmıştır. Bu yöntem aşina olduğu çokgenlerden başlayarak düzensiz kapalı eğrilere doğru ilerleyen bir dizi şekil için yinelenmiştir. Şekil 4.11.'de araştırmacının bu amaçla kullandığı şekillerden bazıları gösterilmiştir.



Şekil 4.11. *Katılımcıların ilk seansta incelediği şekillerden bazıları*

Aşağıda araştırmacı ile aralarında geçen diyalog Zehra'nın (5) kavram imajındaki değişim sürecini göstermektedir:

> Araştırmacı: Peki, daha önce şu şeklin (telden yapılmış dikdörtgen) çevresi olduğunu söylemiştin. Burada şöyle bir hayal gücünü kullanmanı istiyorum. Minik bir karınca var, karınca bu şekil üzerinde hareket edecek. Ama tek bir kural var şeklin sınırlarını takip etmeli. Üzerinde gezemez başka bir yerin sadece sınırlarında dolaşacak. Mesela bir noktadan başladı diyelim başladığı yere geri dönebilir mi hareketinin sonunda?
>
> Zehra: Dönebilir.
>
> Araştırmacı: Hangi yolu takip eder karınca?
>
> Zehra: Mesela buradan başladığında yine sınırlarından gidip tekrar aynı yere ulaşacak.
>
> Araştırmacı: Peki, karıncanın izlediği bu yol bu şeklin neyidir?
>
> Zehra: Bu şeklin çevresi.
>
> Araştırmacı: Anladım. Peki, bu şekil için düşünsek? (Telden yapılmış altıgen)
>
> Zehra: Bu şekilde de gelebilir aynı noktaya.
>
> Araştırmacı: Peki, karıncanın ilerlediği yol şeklin neyidir?
>
> Zehra: Çevresi. Sınırları yani.
>
> Araştırmacı: Anladım. Peki, ya bu şekilde? (Telden yapılmış çember)
>
> Zehra: Bu şekilde de gelebilir.
>
> Araştırmacı: Bu şeklin üzerinde karınca hangi yolu takip eder?
>
> Zehra: Yine şuradaki sınırlarını takip eder. (Parmağını şeklin sınırı üzerinde gezdiriyor) çünkü dünya da küre şeklinde bu da çember şeklinde döndüğü gibi aynı yere gelir.
>
> Araştırmacı: Peki, o zaman bu şeklin sence çevresi olur mu?
>
> Zehra: Olur.
>
> Araştırmacı: Daha önce bunlar için karıncanın ilerlediği yola çevresi demiştin. Bu da aynı yere varıyor. O zaman çevresi oluyor mu?
>
> Zehra: Oluyor. O sizin anlattığınız şekilde düşünürsek oluyor.
>
> Araştırmacı: Peki, sen neden olmayacağını düşündün daha önce?
>
> Zehra: Çünkü bunun (dikdörtgen) gibi dik kenarları yok bunun (çember) sadece yuvarlak kenarı var. Bununki gibi aynı dik kenarları olsaydı onun da çevresi olduğunu söylerdim.
>
> Araştırmacı: Peki, şu anda ne düşünüyorsun? Çevresi var mı?
>
> Zehra: Şu anda hep üçünün de çevresi var.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi Zehra'nın (5) daha önce çevresini doğru bir şekilde gösterdiği dikdörtgenle ilgili bilgilerini çevresi olmadığını düşündüğü çemberle karşılaştırarak çevre kavram imajını değiştirmesi sağlanmıştır. Öğretim seansı boyunca benzer durumlar düzensiz kapalı eğriler için tekrarlanmıştır. Görüşme sonunda Zehra'dan (5) bir şeklin çevresi denildiğinde ne anladığını açıklaması istendiğinde aşağıdaki cevabı vermiştir:

> Zehra: Çevre bir şeklin mesela bunun gibi (telden yapılmış kareyi gösteriyor) sınırları.

Araştırmacı: Peki, illa böyle kenarları mı olması gerekiyor, köşeleri mi olması gerekiyor?

Zehra: Kenarlarının birleşmesi gerekiyor. Bunlar gibi (telden yapılmış açık eğrileri gösteriyor) olursa olmaz.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşılacağı gibi Zehra (5) bir şeklin çevresi olup olmadığına karar verirken artık şeklin kenar ve köşelere sahip olmasına değil, kapalı olmasına dikkat etmektedir. Buna bağlı olarak da çevreyle ilgili kavram imajı şeklin kenarlarının toplamından şeklin sınırlarına dönüşmüştür.

Katılımcılardan Neşe (5) ise öğretim seansının başında kendisine gösterilen çokgenlerin (sırasıyla kare, dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen, yamuk, altıgen) her birinin çevresini olduğunu söylemiştir. Bu çokgenlerin çevrelerini göstermesi istendiğinde şekillerin sınırlarını işaret etmiştir. Katılımcının aşina olduğu bu çokgenlerin ardından kendisine daire dilimi gösterildiğinde de yine şeklin çevresi olduğunu söyleyerek çevresi için şeklin sınırını işaret etmiştir. Şekil 4.12.'de araştırmacının kullandığı daire dilimi gösterilmektedir.

Şekil 4.12. *Plastik daire dilimi*

Araştırmacının şeklin eğri bölümünü gösterip bunun sorun olup olmayacağını sorması üzerine katılımcı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Neşe: Sıkıntı yaratmaz, köşesi var, yine kenarları verilince zaten bulabiliriz.

Araştırmacı: Peki, buranın (şeklin eğri bölümünü gösteriyor) uzunluğunu bulabilir misin?

Neşe: Buranın uzunluğu bulunabilir.

Araştırmacı: Nasıl bulunabilir?

Neşe: Mesela bir cetvelle buradan buraya kadar ölçülür. Eğri olması bir sıkıntı yapmaz. Orası verilir, yazılır.

Araştırmacı: Peki, bu cetvelle ölçebilir misin o eğriyi? Dene bakalım. Nasıl ölçeceksin?

Neşe: Sıfırı buraya koyacağız. Öbür ucu da buraya geliyor. (Öğrenci cetveli daire diliminin eğri bölümünün altına yerleştirip eğrinin iki ucunun karşılık geldiği sayılara odaklandı.)

Araştırmacı: O zaman uzunluğunu ölçmüş olur musun?

Neşe: Oluruz.

Araştırmacı: Ama tam hizalanmadı cetvelle sıkıntı olmaz mı?

Neşe: Tam hizalanmamış olabilir. Burada sıfıra gelince burada buraya geliyor olabilir. Yine de çevresini bulabiliriz.

Görüldüğü gibi Neşe (5) daire diliminin çevresi olduğunu belirtse de uzunluk ölçümüyle ilgili hatalı bir düşünceye sahiptir. Araştırmacı onun uzunluk ölçümüyle ilgili bu hatasını giderebilmek için buradaki eğri bölümün uzunluğunu başka nasıl ölçebileceğini düşünmesini istemiştir. Araştırmacı onun dikkatini daha önceden masada hazır bulunan malzemelere (cetvel, ip, makas) yönlendirmiş ve ardından Neşe (5) ipi kullanmaya karar vermiştir. Neşe (5) ipi kullanarak şeklin eğri bölümünü ölçtükten sonra araştırmacı ondan bu ölçümle sadece cetvel kullanarak yapmaya çalıştığı ölçümü karşılaştırmasını istemiştir. Neşe (5) hangi ölçümün daha doğru olduğunu şu şekilde açıklamıştır: "Bence iple ölçüm daha doğru. Çünkü ipi cetvel gibi, ip cetvel gibi böyle sade dimdik durmuyor, yana dönebiliyor, farklı şekiller oluşturabiliyor. Ama cetvel öyle dönemiyor."

Eğri uzunlukların nasıl ölçülebileceği ile ilgili bu tartışma sonrasında katılımcıya daha farklı kapalı eğriler gösterilip çevreleri olup olmadığına karar vermesi istenmiştir. Katılımcı telden yapılmış kapalı eğrilerin çevresi olduğunu söylemiş ve çevre için şekillerin sınırlarını işaret etmiştir. Şekil 4.13.'de araştırmacının katılımcıya gösterdiği eğrilerden bazıları verilmiştir.

Şekil 4.13. *Neşe'nin (5) incelediği kapalı eğrilerden bazıları*

Bu aşamada Neşe (5) araştırmacının gösterdiği diğer eğrilerin çevresi varken çemberin çevresi olmadığı düşüncesini dile getirmiştir. Bunun üzerine araştırmacı ve katılımcı arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Peki ya bu şeklin çevresi var mıdır? (Telden yapılmış oval şekli gösteriyor.)

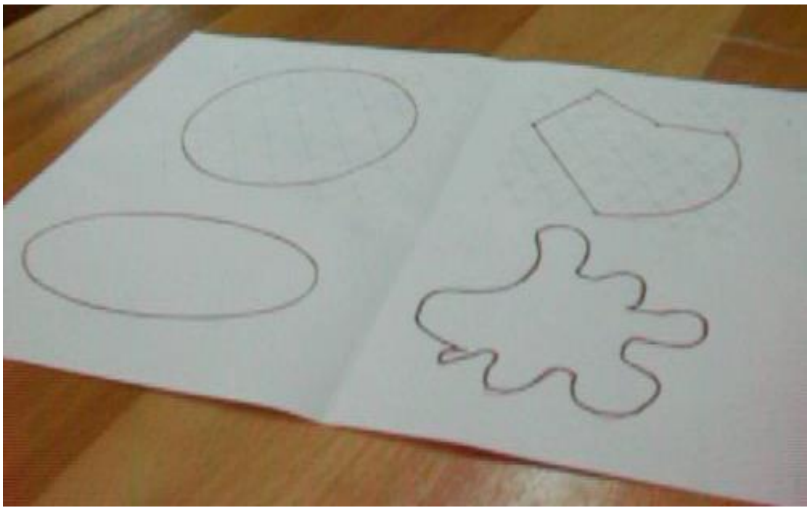
Neşe: Bu şeklin de vardır. Çevresi olsa da olmasa da her şeklin çevresi vardır.

Araştırmacı: Daha önceki sorduğum sorularda böyle daire şekillerinin çevresi olmadığını söylemiştin. Şimdi neden fikir değiştirdin?

Neşe: Hocam çünkü o zamanlar daireler biraz böyle tam oluyordu. Tamlarda çevresi olmuyor ama bunun birazı oval şekilde onun için çevresi var.

Neşe (5) buradaki açıklamasında şeklin görüntüsüne odaklanmış ve oval şekillerin biraz kenarı olduğunu, ama dairelerin kenarı olmadığı için çevrelerinin de olmayacağını söylemiştir. Bu aşamada öğrenci halen çevre ile kenar uzunluklarını ilişkilendirmekte, şeklin çevresi olduğuna karar vermek için onun kenar olarak söz ettiği düz çizgiler aramaktadır.

Bu aşamadan sonra araştırmacı katılımcının çevreyle ilgili düşüncesini değiştirebilmek amacıyla çevreleme eylemine dikkat çekmiştir. Katılımcının daha önce çevresi olduğunu söylediği şekiller tekrar ele alınarak şekiller etrafında çevreleme yapması istenmiştir. Bu eylemin odağında başlanan noktaya geri dönebilmek, yani şeklin kapalı olması yer almaktadır. Araştırmacı sorduğu sorularla katılımcının dikkatini şeklin kenarlarından sınırlara kaydırarak kavram imajını yeniden düzenlemesine yardımcı olmuştur. Son olarak yapılan bu çevreleme eylemiyle şeklin çevresini ilişkilendirmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Seansın sonunda değerlendirme amaçlı yapılan görüşmede katılımcının kavram imajını tüm kapalı şekilleri içerecek şekilde değiştirdiği görülmüştür. Değerlendirmede kullanılan çizimler Şekil 4.14.'de verilmiştir.

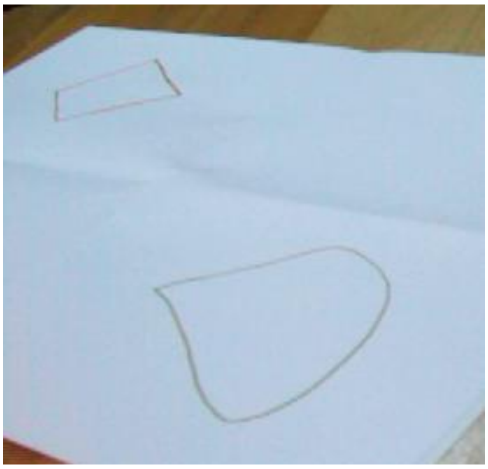


Şekil 4.14. *Neşe'ye (5) değerlendirme amaçlı gösterilen şekiller*

Aşağıda araştırmacı ve katılımcı arasındaki diyalog değerlendirme aşamasına örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Bu şeklin sence var mı çevresi? (Kâğıt üzerine çizilmiş daireyi gösteriyor.)
>
> Neşe: Bu şeklin de vardır. (Şeklin çevresini göstermek için sınırlar üzerinden renkli kalemle geçiyor.)
>
> Araştırmacı: Peki, böyle bir şekil olursa? (Kâğıt üzerine çizilmiş kapalı düzensiz eğriyi gösteriyor.)
>
> Neşe: Böyle bir şekil olursa da vardır. (Şeklin çevresini göstermek için sınırlar üzerinden renkli kalemle geçiyor.)
>
> Araştırmacı: Böyle girintili çıkıntılı, böyle düzensiz bir şekil olması sorun yaratır mı çevresi olmasında?
>
> Neşe: Yaratmaz. Sonuçta etrafı, çevresi kapalı.
>
> Araştırmacı: Peki, bir sürü şeklin bana çevresini gösterdin. İlk başta bana dairenin çevresi olmadığını söylemiştin, şimdiyse olduğunu söyledin. Nasıl düşündün burada?
>
> Neşe: Burada çevresi yine burası kapalı. Buradan başlasa, fark etmez nereden başlarsa başlasın kapalı olduğu için çevresi vardır.

Neşe'den (5) daha sonra değerlendirme amaçlı olarak çevresi olan şekillere örnekler vermesi istenmiştir. Şekil 4.15.'de katılımcının çizdiği şekiller gösterilmiştir. Neşe (5) çizdiği bu şekillerin çevresi olup olmadığına karar verirken de yine yukarıda belirttiği gibi şeklin kapalı olmasına dikkat ettiğini ifade etmiştir. Görüşmenin başında çevre kavramını kenar uzunlukları ile ilişkilendiren Neşe (5) artık bu kavramı şeklin sınırlarıyla ilişkilendirmiştir. Çevresi olan şekilleri en az bir kenarı olan şekillerle sınırlamışken artık tüm kapalı şekilleri buna dahil etmektedir.



Şekil 4.15. *Neşe'nin (5) birinci seansta değerlendirme için çizdiği şekiller*

Katılımcılardan Mısra (7) ise birinci öğretim seansının başlangıcında çevresi olup olmadığına karar vermesi için gösterilen çokgenlerin (sırasıyla üçgen, kare, yamuk) çevreleri olduğunu söylemiş; fakat yaptığı açıklamalarda kenar yerine köşe kelimesini kullandığı görülmüştür. Aşağıdaki diyalog buna örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Peki, böyle bir şeklin çevresi var mıdır? Bir düşün bakalım, bunun çevresi var mıdır? (Masanın üzerine yerleştirdiği eşkenar dörtgeni gösteriyor.)
>
> Mısra: Bunun çevresi bence vardır.
>
> Araştırmacı: Neresidir?
>
> Mısra: Yine onlarda (Daha önce çevresi olduğunu söylediği üçgen, kare ve yamuğu gösteriyor.) da gösterdiğimiz gibi (Parmağını şeklin kenarlarının biraz dışında gezdiriyor.) köşeleri.

Mısra (7) daha önce çevreyi açıklarken ölçme ve hesaplama kullanmaktaydı; fakat araştırmacı hesaplama yapmamasını isteyince çevreyi şeklin dışında, etrafında olan, o şekille aynı biçime sahip ayrı bir olgu olarak düşünmektedir. Şekil 4.16.'da gösterilen telden yapılmış düzgün olmayan bir altıgene benzer şekil için araştırmacı ile arasında geçen aşağıdaki diyalog bu düşüncesini daha açık bir şekilde ortaya koymaktadır:

> Araştırmacı: Böyle bir şeklin çevresi var mıdır? (Telden yapılmış düzgün olmayan bir altıgeni gösteriyor.)
>
> Mısra: (Bir süre sessiz kalıp şekli inceliyor.) Şey, köşeleri yamuk olduğu için (Parmağını şeklin kenarlarının biraz dışında gezdiriyor.)
>
> Araştırmacı: Çevresi yok mudur?
>
> Mısra: Vardır ama kendisinin etrafını yine dış şeyini kaplayacak şekilde. Dış etrafını kaplayacak şekilde vardır.
>
> Araştırmacı: Peki köşelerin yamuk olması derken neyi kastettin? Biraz daha açıklayabilir misin?
>
> Mısra: Köşelerinin yamuk olması … yani köşeleri yamuk o yüzden çevresinin de yamuk olması gerekir. Çevresi düz olursa ters olabilir.
>
> Araştırmacı: Çevre şekilden bağımsız bir şey mi? Çevre şekilden ayrı bir şey mi, yoksa bu şekle dahil olan bir şey mi?
>
> Mısra: Çevre …
>
> Araştırmacı: Neresi bu şeklin çevresi?
>
> Mısra: (Parmağını şeklin kenarlarının biraz dışında gezdiriyor) Şekli kaplayacak şekilde.
>
> Araştırmacı: Dışına mı çiziyoruz?
>
> Mısra: Evet.

Şekil 4.16. *Mısra'ya (7) gösterilen telden yapılmış altıgene benzer şekil*

Mısra'nın (7) çevreyle ilgili bu düşüncesini değiştirmek için araştırmacı ona daha önce de gösterdiği karenin çevresini yeniden göstermesini istemiştir. Karenin çevresini nasıl bulabileceğini sorarak öğrencinin dikkatini şeklin kenarlarına yöneltmeyi amaçlamıştır. Bu aşamadan sonra araştırmacı ile Mısra arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Mesela bu karenin çevresini hesaplarken onun dışına yeniden bir şey çizip onu mu hesaplıyorsun? Nasıl yapıyorsun?
>
> Mısra: Mesela karenin her köşesi aynı olduğu için dört, dört, dört, dört yapıp (şeklin kenarlarını işaret ediyor.), dörtle dördü çarpıp cevabı buluyoruz.

Araştırmacı aynı soruyu üçgen için de sormuştur. Mısra (7) yine kenar uzunluklarını toplayacağından söz etmiştir (kenar yerine köşe kelimesini kullanmaya devam etmektedir). Bu noktada araştırmacı altıgene geri dönerek bu şekil için neden daha farklı düşündüğünü, kenarların etrafında olan bir çevreden söz ettiğini sormuştur. Mısra (7) bu soruya "Çünkü bunların içleri dolu yani alanları var ama bunun içi boş ondan öyle dedim." cevabını vermiştir. Araştırmacı Şekil 4.17.'de gösterilen telden yapılmış bir dörtgeni göstererek altıgen ile bu dörtgenin çevrelerini karşılaştırmasını, ne gibi farklılıkları olduğunu açıklamasını istemiştir.

Şekil 4.17. *Mısra'ya (7) gösterilen telden yapılmış dörtgen*

Mısra (7) bir süre sessiz kalıp düşündükten sonra her iki şeklin çevresi için "kenarları ve etrafları" açıklamasını yapmıştır. Araştırmacı daha sonra öğrenciye farklı şekiller için çevreleme eylemi yaptırarak öğrencinin dikkatini şeklin etrafından ve kenarlarından şeklin sınırlarına yöneltmeye çalışmıştır. Bu amaçla öğrenciden şeklin sınırları boyunca hareket eden bir karıncayı hayal ederek çevreleme yapması istenmiştir. Karıncanın ilerlediği yol ile şeklin çevresi ilişkilendirilmeye çalışılmıştır. Bu benzetim yoluyla öğrencinin odak noktası şeklin kenarları yerine sınırlarına kaydırılmıştır. Böylece sadece çokgenlerin değil tüm kapalı şekillerin çevresi olduğu düşüncesine ulaşması sağlanmıştır. Seansın sonunda artık Mısra (7) bir şeklin çevresini gösterirken şeklin sınırlarını işaret etmiş, gösterdiği çevrenin şeklin kendisi olduğunu söylemiştir. Çevrenin biçim olarak şekil ile uyumlu olması gerektiğini de eklemiştir.

Katılımcılardan Gülce (8) ise öğretim seansları öncesinde çokgenlerin ve eğer yarıçapı verilirse çemberin çevresi olduğunu düşünmekteydi. Birinci öğretim seansında araştırmacı onun bu düşüncesini değiştirip tüm kapalı şekillerin çevresi olduğunu görmesini sağlamayı amaçlamıştır. Öncelikle katılımcıya daha önceden aşina olduğu çokgenler (sırasıyla kare, dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen, yamuk, altıgen) tek tek gösterilmiş ve çevreleri olup olmadığı sorulmuştur. Ayrıca katılımcıdan kendisine gösterilen her bir çokgenin çevresini göstermesi istenmiştir. Katılımcı bu çokgenlerin çevreleri olduğunu söylemiş ve şekillerin kenarları üzerinden geçerek çevrelerini göstermiştir. Ardından katılımcıya Şekil 4.18.’de gösterilen telden yapılmış bir eğri gösterilerek çevresi olup olmadığı sorulmuştur. Aşağıda bu aşamadan sonra araştırmacı ile katılımcı arasında geçen diyalog verilmiştir:

> Araştırmacı: Gelelim kenarı olmayan şekillere, ya şeklin kenarı olmazsa bu durumda ne düşüneceksin bakalım. (Telden yapılmış eğriyi masanın üzerine yerleştiriyor) Sence bunun çevresi var mı?
>
> Gülce: Hayır, yoktur.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Gülce: Çünkü çevresini hesaplamak için böyle düzgün bir kenarı, bir şekli yok.
>
> Araştırmacı: Hıım, illa kenarı mı olması gerek çevresi olması için?
>
> Gülce: İlla kenarı olması gerek değil ama düzgün bir şekle sahip olması gerek.
>
> Araştırmacı: Bunun düzgün bir şekli var mıydı mesela? (Beş birim kareden oluşan bileşik şekli gösteriyor.)
>
> Gülce: Bunun kenarları hesaplanacak şekilde, düzgün. Ama bunun hesaplanacak düzgün bir yanı yok.

Şekil 4.18. *Gülce'ye (8) gösterilen telden yapılmış eğri*

Yukarıdaki diyalogdan anlaşılacağı gibi Gülce (8) bir şeklin çevresi olmasını çevre uzunluğunu hesaplayabilmesine dayandırmaktadır. Bu hesaplamayı yapabilmesi de şeklin kenarları olmasına bağlıdır. Onun bu düşüncesini değiştirmek amacıyla araştırmacı öğrenciden şeklin sınırları üzerinde dolaşan bir karıncayı hayal etmesini istemiştir. Ardından karıncanın başladığı noktaya geri dönmek için izlediği yolun şeklin hangi niteliğine karşılık geldiğini sormuştur. Gülce (8) daha önce de çevresi olduğunu söylediği üçgen için bu yolun çevreye karşılık geldiğini söylese de çember için aynı çıkarımı yapmamıştır. Bunun üzerine araştırmacı karıncanın izlediği yolu bir iple temsil etmeyi önermiştir. Aşağıda bu aşamadan sonra araştırmacı ile katılımcı arasında geçen diyalog verilmiştir:

> Araştırmacı: Mesela şöyle bir yöntem izlesek, bu karıncanın izlediği yolu bir iple şöyle çevrelesek, sonra o ipi açıp ölçsek şeklin çevresiyle aynı olur mu?
>
> Gülce: Hayır, olmaz.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Gülce: O sadece yani o yolun uzunluğuna eşit olur o toplam alanı şey toplam uzunluğu ama çevresine eşit olmaz.
>
> Araştırmacı: Peki burada (üçgeni gösteriyor) ama karıncanın ilerlediği yol şeklin çevresidir demedin mi?
>
> Gülce: Dedim.
>
> Araştırmacı: Burada neden farklı olduğunu düşünüyorsun?
>
> Gülce: Çünkü yani üçgende hesaplanabilecek bir şey var yani bir kenarı, düzgün bir şekli var. Ama burada hani hesaplanabilecek bir düzgün şekli falan yok. Yani bir kenarı düzgün değil.

Gülce (8) üçgenin çevresini hesaplarken kenar uzunluklarını cetvelle ölçüp toplamanın ve çevresini iple ölçmenin aynı sonucu vereceğini söylemiştir. Çemberde ise özel bir formül kullanarak çevreyi hesapladığı için iple ölçtüğünde farklı bir değer bulacağını ifade etmiştir. Araştırmacı bu noktada onu üçgen ve çemberin çevrelerini her iki yöntemi de kullanarak ölçmeye yönlendirmiştir. Katılımcı üçgenin çevre uzunluğunu bulmak için önce cetvelle her bir kenar uzunluğunu ölçerek toplamış ve 24 cm bulmuştur. Ardından bir iple üçgeni çevreledikten sonra ipin uzunluğunu ölçmüş ve yaklaşık 24 cm bulmuştur. Yaptığı ölçme ve hesaplamalar sonucunda çevre uzunluğu için her iki yöntemle aynı sayısal değere ulaşmıştır. Aşina olduğu üçgen şeklinden sonra çevresi olup olmadığı konusunda tereddüt yaşadığı çember için de aynı yöntemleri uygulaması istenmiştir. Çemberin çevre uzunluğunu bulmak için de iple çevreleme yöntemini kullanarak yaklaşık 12 cm bulmuştur. Katılımcı çemberin yarıçapı verilmese de çevresi olduğunu kabul etmekte; fakat iple çevreleme yöntemini çember için uygun bulmamaktadır. Ona göre çemberin çevresi sadece formül kullanılarak bulunmalıdır. Araştırmacı bu aşamada katılımcının kavramın anlamına odaklanmasını istemiş, ölçmeyi bir sonraki seansta ele almıştır. Çemberle ilgili tartışmanın ardından katılımcıya Şekil 4.19.'da verilen düzensiz eğri gösterilerek çevresi olup olmadığı sorulmuştur.

Şekil 4.19. *Gülce'ye (8) gösterilen düzensiz eğri*

Katılımcı Şekil 4.19.'da gösterilen eğrinin çevresi olduğunu kabul etmekte; buna rağmen hala eğrisel şekillerin çevre uzunluğunu ölçmenin zor olacağını söylemektedir. Aşağıda araştırmacı ve Gülce (8) arasında geçen bir diyalog buna örnek olarak verilmiştir:

> Araştırmacı: Ya böyle tamamen düzensiz bir şekil olursa bunun çevresi olur mu? (Öğrenciye kâğıt üzerine çizilmiş düzensiz bir kapalı eğriyi gösteriyor)
>
> Gülce: Şimdi hani bunun tam bir uzunluğunu bulabilsek hani tam bir uzunluğu belli olsa bunun çevresi bulunabilir. Çünkü çevresi demek buradaki uzunluğun toplamına eşit olması gerekiyor. Ama hani bulunması baya zor.
>
> Araştırmacı: Zor olması çevresi olmadığı anlamına mı geliyor?
>
> Gülce: Zor olması çevresi olmadığı anlamına gelmez. Mesela demin iple bulduk o çevresinin uzunluğunu falan. Burada da yine iple yapsak tam net çıkmaz da benzer bir yakın şey çıkabilir.

Görüldüğü gibi seans boyunca çevreleme eylemini ve cetvel dışında da uzunluğun ölçülebileceğini tecrübe eden Gülce (8) artık kapalı eğrilerin de çevresi olduğunu kabul etmektedir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip diğer katılımcılar gibi Gülce (8) de Şekil 4.20.'de gösterilen açık şekillerin çevresi olmadığını düşünmektedir.

Şekil 4.20. *Gülce'ye (8) gösterilen açık şekiller*

Katılımcıya doğru parçalarından oluşturulmuş bir açık şeklin çevresi olup olmadığı sorulduğunda aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

> Gülce: Çevresi yok; ama bu uzunlukları toplayınca sadece bu çizgilerin yani doğruların uzunluğunu bulabiliriz.
>
> Araştırmacı: Yani her böyle doğru parçasını topladığımızda çevreyi vermiyor mu? Belirli bir şartı mı olması gerek?
>
> Gülce: Hayır. Bu şeklin hani tam bir şekil olması gerekiyor çevresini bulmamız için.
>
> Araştırmacı: Tamdan kastın nedir?
>
> Gülce: Tamdan kastım yani bunlar gibi tam bir şekle … tam kapanması gerekiyor. Ama burada birleşmediği için yani pek olmadığı için çevresi bulunmuyor. Sadece bu kenar uzunluklarını, bu uzunluğu verebiliyor.

Yukarıdaki konuşmadan anlaşıldığı gibi Gülce (8) şeklin çevresi olması için sadece kenarları olmasının yeterli olmadığını, aynı zamanda kapalı olması gerektiğini düşünmektedir. Araştırmacı tüm bu yapılanların ardından öğretim seansının sonunda çevrenin ne olduğunu yeniden sorduğunda Gülce (8) aşağıdaki gibi cevaplamıştır:

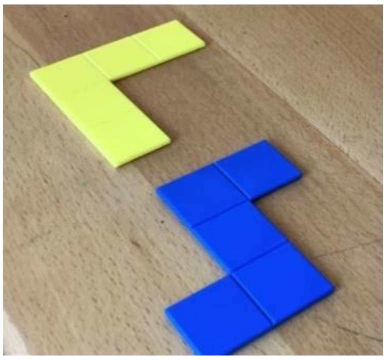
> Gülce: Çevre, bir şeklin yani toplam kenar uzunluğu.
>
> Araştırmacı: Burada kenardan kastın sadece doğru parçaları mı?
>
> Gülce: Sadece doğru parçaları değil, böyle yani birazcık yamuk da olabilir ya da bir daire şeklinde direktmen bir yuvarlak halini alabilir. Ama o şeklin bir bitiş noktası yani kapanması gerekiyor.

Seansın sonunda Gülce (8) çevreyi yine kenar uzunlukları toplamı olarak açıklasa da burada kenar kelimesine yüklediği anlam daha öncekinden farklıdır. Gülce (8) kenar kelimesini sınır anlamında kullanmış, şeklin çevresi olması için sadece kapalı olmasının yeterli olduğunu ifade etmiştir. Başlangıçta sadece ölçebileceği şekillerin çevresi olduğunu düşünürken artık düzensiz de olsa tüm kapalı şekillerin çevresi olduğunu düşünmektedir. Bununla birlikte kapalı eğrilerin çevrelerini ölçmenin çokgenlere göre daha zor olduğunu da belirtmiştir.

4.2.1.2. *Etraf kavram imajının değişimi*

Uygulama öncesinde etraf kavram imajına sahip katılımcılar (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) çevreyi günlük hayattaki kullanımına odaklanarak aşina oldukları şekillerin sınırlarının dışındaki yakın bölge olarak algılamaktaydılar. Katılımcılar herhangi bir ölçme veya hesaplama yapmadan sadece çevreyi işaret edip açıklamaktaydılar. Ayrıca katılımcılar kapalı eğrilerin çevresi olmadığını iddia etmekteydiler. Çevreyle ilgili kavram imajları çokgenlerle veya en az bir doğru parçası içeren şekillerle sınırlıydı. Araştırmacı katılımcıların çevreyle ilgili kavram imajlarını tüm kapalı şekillerin sınırları olarak değiştirmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla katılımcıların önceki bilgilerinden ve günlük hayat tecrübelerinden yaralanmıştır.

Örneğin katılımcılardan Fırat (6) birinci öğretim seansının başında aşina olduğu çokgenlerin (üçgen, kare, dikdörtgen) çevreleri olduğunu söylemiş ve şekillerin çevresi olarak kenarların dışını işaret etmiştir. Sıra Şekil 4.21.'de gösterilen aşina olmadığı çokgenlere (L ve Z biçimli şekiller) geldiğindeyse önce şekillerin kapalı olduğunu bu nedenle çevreleri olduğunu söylemiş; fakat sonra fikir değiştirerek çevreleri olmadığına karar vermiştir.



Şekil 4.21. *Fırat'a (6) gösterilen L ve Z biçimli şekiller*

Fırat (6) açıklamasında şekillerin görünümlerine odaklanarak daha önce çevresi olduğunu söylediği çokgenlerin ortasının geniş olduğunu ama bu şekillerin ortası olmadığını ifade etmiştir. Fırat (6) burada zihnindeki prototip çokgen algısına göre karar vermektedir. Araştırmacı bu noktada katılımcıya şekiller etrafında çevreleme yaptırarak onun dikkatini şekillerin iç bölgesinden sınırlarına çekmeye çalışmıştır. Bu aşamadan sonra Fırat (6) bir şeklin çevresi olup olmadığına şeklin kapalı olmasına göre karar vermektedir. Çevresi olduğunu düşündüğü şekillerin çevresi için “sınırları” ifadesini kullanmaktadır.

Fırat (6) çember için öncelikle çevresinin olmadığını söylemiş, araştırmacının şeklin etrafında çevreleme yapmaya yönlendirmesi sonrası fikrini değiştirip çevresi olduğunu ifade etmiştir. Çember dışındaki diğer eğriler için de önce tereddüt etse de yine çevreleme yaparak şekillerin çevresi olduğuna karar vermiştir. Burada dikkat ettiği noktanın şekillerin açık olmaması, kapalı olması olduğunu ifade etmiştir. Seansın sonunda çevreyi açıklaması istendiğinde de buna vurgu yaparak “çevre, hiçbir yerinde açıklık olmayan, kapalı bir alan” cevabını vermiştir.

Katılımcılardan Ceylan (6) da kendisine tanıdık gelen çokgenlerin (üçgen, kare, dikdörtgen) çevresi olduğunu söylese de sıra Şekil 4.22.’deki eşkenar dörtgene geldiğinde görüntüsü farklı geldiği için çevresi olmadığını söylemiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog aşağıdaki gibidir:

Araştırmacı: Peki, böyle bir şeklin çevresi var mıdır? (Eşkenar dörtgeni gösteriyor.)

Ceylan: (Hayır anlamında kafasını sallıyor.)

Araştırmacı: Neden?

Ceylan: Bunlar mesela böyle gidiyor ya (Eşkenar dörtgenin komşu iki kenarını gösteriyor.) ama bu böyle direkt genişlemesine olduğundan dolayı böyle yapsak mesela ıım böyle mi böyle mi? (Eşkenar dörtgenin duruşunu yatay ve dikey olarak değiştiriyor.)

Araştırmacı: Duruşu fark eder mi? Fark ettirir mi çevresinin olup olmamasını?

Ceylan: (Hayır anlamında kafasını sallıyor.)

Araştırmacı: Nasıl durduğu önemli mi? Mesela bu üçgeni ben şöyle koysam çevresi olmaz mı?

Ceylan: Olur.

Araştırmacı: Bunda neden sıkıntı olacağını düşündün?

Ceylan: Çünkü buraları çok geniş. (Eşkenar dörtgenin geniş açı oluşturan komşu iki kenarını gösteriyor.)

Araştırmacı: Hıım, geniş olunca çevre olmaz mı?

Ceylan: (Bir süre sessiz kalıp düşünüyor.) Aslında buraları da olabilir. (Kenarlar üzerinde parmağını gezdiriyor.)

Araştırmacı: Var mı sence çevresi, yok mu?

Ceylan: Var.

Araştırmacı: Nasıl karar verdin?

Ceylan: Dört kenarı, dört köşesi var. Şuraları şurada biraz çıkıntı var ya (Köşelerden birini gösteriyor.) şuralardan saydığımızda dört kenarı, dört köşesi oluyor zaten.

Şekil 4.22. *Ceylan'a (6) gösterilen eşkenar dörtgen*

Yukarıdaki konuşmalardan anlaşıldığı gibi Ceylan (6) zihnindeki prototiplere uymayan görüntülere sahip şekillerin çevresi olmayacağını düşünmektedir. Araştırmacı bu aşamada daha önce çevresi olduğunu belirttiği şekillerle karşılaştırma yaptırarak onun bu düşüncesini değiştirmeye çalışmıştır.

Ceylan (6) daire diliminin de (Bkz. Şekil 4.12.) benzer şekilde görünümünden dolayı çevresi olamayacağını belirtmiştir. Düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: "Burası böyle gittiğinden dolayı çevresi yok (şeklin eğrisel bölümünü gösteriyor.). Ama bu direkt böyle (şeklin doğru parçası olan bölümleri gösteriyor.) olsaydı çevresi olurdu. Buralarında (doğru parçaları) sadece çevresi olabilir ama buradan (eğri bölüm) olmaz." Bu konuşmadan anlaşılacağı gibi katılımcı şeklin sadece doğrusal bölümlerini çevreye dahil etmekte, yine şeklin görünümüne göre bir yargıda bulunmaktadır. Sadece kendisine tanıdık gelen, doğru parçası içeren şekillerin çevresi olduğunu düşünmektedir. Katılımcının bu düşüncesini değiştirmek için daha önce çevresi olduğunu belirttiği şekillerle daire dilimini karşılaştırması, aralarında ne gibi farklılıklar olduğunu söylemesi istenmiştir. Katılımcı bir şeklin kenar ve köşe sayıları eşitse çevresi olacağını düşünmektedir. Bunu şu şekilde dile getirmiştir: "Eğer bu direkt gitseydi bunun (üçgen) gibi üç kenarı üç köşesi olurdu; ama burada iki kenar üç köşe var." Katılımcı çember için de benzer şekilde kenarı, köşesi olmadığı için çevresi olamayacağını söylemiştir. Bu düşüncesini aşağıdaki diyalogda açıklamıştır:

Ceylan: Kenarı ve köşesi olmazsa zaten bu çevre olmaktan çıkıyor.

Araştırmacı: Yani eğri bir şekil olursa çevresi olmaz mı?

Ceylan: (Hayır anlamında başını sallıyor.)

Araştırmacı: Neden sadece kenarı ve köşesi olanların çevresi olacağını düşünüyorsun?

Ceylan: …

Araştırmacı: Hesaplanamayacağı için mi?

Ceylan: Hı hı. Mesela bunu (üçgen) bir şeyle ölçsek burasını buluruz, burasını buluruz, burasını buluruz. (Üçgenin kenarlarını gösteriyor.) Ama bunu (çemberi gösteriyor) hesaplasak bunu bulamayız.

Araştırmacı: Peki bu teli böyle açsak, uzatsak, öyle ölçsek boyunda bir değişiklik olur mu?

Ceylan: Demirin boyunda mı?

Araştırmacı: Hı hı. Uzunluğu değişir mi açtığımızda?

Ceylan: (Hayır anlamında başını sallıyor.)

Araştırmacı: Peki, o ölçtüğümüz uzunluk bunun neyi olur?

Ceylan: Çevre, yok bir dakika.

Araştırmacı bu noktada katılımcının kapalı eğrilerin uzunluğunun bulunamayacağına yönelik düşüncesini değiştirmek için telden yapılmış şekilleri kullanmıştır. Bu şekilleri, uzunluğunu değiştirmeden açıp düz hale getirerek, cetvelle ölçülecek şekilde biçimlendirmiş, böylece onun zihnindeki algıyı değiştirmeye çalışmıştır. Katılımcı önce fikrini değiştirir gibi olsa da tereddütleri devam etmiştir. Bu aşamada araştırmacı ondan üçgenin çevre uzunluğunu bulmak için kenar uzunluklarını cetvelle ölçüp toplama ve etrafını bir iple çevreleyerek ölçme yöntemlerini karşılaştırmasını istemiştir. Katılımcı her iki yöntemle de üçgenin çevre uzunluğunu ölçmüş ve birbirine yakın değerler elde etmiştir. Bunun üzerine her iki yöntemin de çevre ölçümü için kullanılabileceğini belirtmiştir. Fakat iple çevreleme yöntemiyle çemberin çevre uzunluğunu hesapladığı halde çemberin çevresi olmadığını yinelemiştir. Bulduğu ölçümün diğer şekiller için çevre uzunluğu olduğunu ifade etse de çember söz konusu olduğunda “köşesi ve kenarı olmayanın çevresi olmuyor ki” diyerek yaşadığı tereddüttü ortaya koymaktadır. Ceylan’ın (6) daha önceki deneyimleri onun bu yeni durumu kabullenmesini zorlaştırmaktadır. Araştırmacı ile aralarında geçen aşağıdaki diyalog onun bu düşüncesini ortaya koymaktadır:

Araştırmacı: Nereden biliyorsun bunu?

Ceylan: Çünkü bunun (üçgen) köşesi de var, kenarı da var. Bunun zaten çevresi de oluyor. Ama bunun (çember) ne köşesi var ne kenarı. Ama sade bir şeyle mesela iple etrafını şey yaptığımızda sadece bulabiliyoruz. Ama başka bir türlü bulamayız ki.

Araştırmacı: Tamam. Bir yöntemle bulunabiliyorsa o yeterli değil mi senin için?

Ceylan: Yeterli.

Araştırmacı: Aslında bir yöntemle daha bulunabilir ama onu henüz derste öğrenmediniz. Şu anda iple bulduğumuz şey neyi oluyor bu şeklin?

Ceylan: Yine çevresi oluyor.

Bu tartışmanın ardından Ceylan (6) daire diliminin de çevresi olduğunu söylemiş ve ölçüm yaparak çevre uzunluğunu hesaplamıştır. Katılımcı daha sonra kendisine gösterilen farklı kapalı eğrilerin de çevreleri olduğunu belirtmiştir. Bu şekillerin çevresi olarak sınırlarını göstermiştir. Seans sonunda değerlendirme amaçlı olarak katılımcıya birçok farklı şekil gösterilmiştir. Katılımcı öğretim seansının başında kabul etmese de artık kapalı eğrilerin de çevresi olduğunu ifade etmiştir. Bir şeklin çevresi olup olmadığına karar verirken başlangıçta kenar ve köşelere sahip olmasına dikkat etmekteydi. Öğretim seansı sonundaysa bir şeklin çevreye sahip olması için kapalı olmasının yeterli olduğunu "tam şekil olduğu sürece çevresi ölçülür." sözleriyle açıklamıştır.

Katılımcılardan Can (7) ise başlangıçta kapalı olan tüm şekillerin çevresi olduğunu söylemiş ve bu şekillerin çevresi olarak etraflarını göstermiştir. Araştırmacı bazı arkadaşlarının bir şeklin çevresi olması için kenarları, köşeleri olması gerektiğini düşündüklerini, onun bu konuda ne düşündüğünü sorduğunda Can (7) düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: "Çünkü hocam yani her şeklin çevresi vardır. Yani illa bir şeklin çevresi olabilmesi için köşesi ve kenarına gerek yoktur bence." Bu düşüncesine paralel olarak Can (7) bir şeklin çevresi olması için gereken şartları "Çevresi olması için hiçbir şeye bence gerek yok. Sadece belli bir şekli olması lazım." diyerek açıklamıştır. Can (7) şekillerin çevreleri olduğunu düşünmekte; fakat çevre için şeklin dışını, etrafını işaret etmektedir. Çevreyi şeklin dışında, ondan ayrı bir olgu olarak algılamaktadır. Bu durum araştırmacı ile arasında geçen aşağıdaki diyalog ile örneklendirilmiştir:

Araştırmacı: Böyle bir şeklin çevresi var mı?

Can: Var.

Araştırmacı: Neresidir?

Can: (Şeklin etrafında, onu kapsayacak şekilde parmağıyla bir çember çiziyor.)

Araştırmacı: Yani şu sınırları mı, yoksa dışına çizdiğin yer mi?

Can: Dışına çizdiğim yer. Yani sınırları olamaz.

Araştırmacı bu düşünceyi değiştirmek için onun zihnindeki çevre algısını sorgulamaya devam etmiştir. Bu amaçla şekil ve çevre arasındaki ilişkiye dikkat çekmiştir. Aşağıdaki diyalog bu süreçte katılımcının düşüncesindeki değişimi göstermektedir:

Araştırmacı: Yani şekilden ayrı bir şey midir çevre? Onu çok anlayamadım.

Can: Nasıl yani? Bence hocam bunun sınırları da hiçbir şeyin sınırları da değil çevresi.

Araştırmacı: Neresi oluyor?

Can: Etrafı oluyor.

Araştırmacı: Yani o şekilden ayrı bir şey mi çevresi? Onu anlayamadım.

Can: Evet hocam ayrı bir şey.

Araştırmacı: Onun dışında çizilen, ondan ayrı bir şey mi oluyor çevre?

Can: Aynen.

Araştırmacı: Şekille bağlantılı değil mi?

Can: Şekille bağlantılı hocam.

Araştırmacı: Nasıl bir bağlantı var?

Can: Soruyu anlayamadım hocam.

Araştırmacı: Yani bu şeklin sınırını mı kabul etmeliyim çevre olarak (parmağıyla şeklin sınırı üzerinde geziniyor), yoksa onun dışında gösterilen bir yer mi çevresi (parmağıyla şeklin sınırlarının biraz dışında geziniyor)? Şöyle dışında ayrı bir şey mi, o şekilden ayrı olan bir şey mi? Şekilden bağımsız, dışındaki bir yer mi?

Can: (Bir süre sessizce düşünüyor.) Sınırları hocam.

Yukarıdaki konuşmadan anlaşılacağı gibi Can (7) çevrenin şeklin dışında, etrafında olduğu düşüncesinden çevrenin şeklin sınırları olduğuna geçiş yapmıştır. Bu aşamadan sonra katılımcıya bir şeklin çevresi olması için gereken şartlar sorulmuştur. Can (7) başlangıçta tüm kapalı şekillerin çevresi olduğunu söylese de bu soruya şeklin kenarı olması gerektiği cevabını vermiştir. Araştırmacı ile aralarında daha sonra aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Kenarı mı olması lazım? Bunun kenarı yok (çemberi gösteriyor) o zaman nasıl diyeceğiz?

Can: Onun kenarı yok ama şey sınırları var.

Araştırmacı: O zaman ne diyelim bir şeklin çevresi olması için gereken şart?

Can: Kenarı olması lazım, köşesi olması lazım, bir tarafı bunlarınki gibi (eğrisel açık şekilleri gösteriyor) açık olmaması lazım.

Araştırmacı: Ama bunun (çemberi gösteriyor) kenarı, köşesi yok. O zaman çevresi olmayacak mı? Senin dediğine göre ben ona çevresi var demem.

Can: ….

Araştırmacı: Hepsini kapsayacak bir şey söylemen lazım. Hem eğri olanları hem dörtgen olanları, çokgen olanları kapsayacak şekilde.

Can: Hocam ben galiba daireye yanlış bir cevap verdim.

Araştırmacı: Yok mudur onun çevresi?

Can: Yoktur.

Araştırmacı: Neden fikir değiştirdin?

Can: …

Araştırmacı: Bunun (çember) çevresi yoktur diyorsun şu anda o zaman bunun (daire dilimi) var mı?

Can: Bunun (daire dilimi) var hocam.

Araştırmacı: Neden? Ne farkı var?

Can: Çünkü hocam köşesi var, kenarı var.

Araştırmacı: Ama bunun da eğri kısmı var.

Can: Ama hocam bunun yani bence var. Çünkü bunun (çember) köşesi bile yok hocam.

Can (7) bu konuşmanın devamında da aynı görüşünü savunmaya devam etmiş, daha önce çevresi olduğunu söylediği diğer kapalı eğrilerin de çevresi olamayacağını söylemiştir. Başlangıçtaki görüşünü değiştirerek kenarı, köşesi olmayan şekillerin çevresi olamayacağını ifade etmiştir. Fikrini bu şekilde değiştirmesinin sebebini açıklamakta zorluk çekmiştir. Daha önce söylediklerinin hatalı olduğunu söylemekten öteye gidememiştir. Bunun üzerine araştırmacı kapalı eğrilerin çevreleri olmadığını söylemesinin nedeninin çevre uzunluğunu ölçemeyeceğini düşünmesi mi olduğunu sormuştur. Can (7) bu sebebi kabul etmiş ve "Çünkü hocam bu bir daire ya ölçemeyiz bunu yuvarlak olduğu için." açıklamasını yapmıştır. Araştırmacı daire diliminin eğrisel bölümünü nasıl ölçebileceğini sorarak onu sorgulama yapmaya yöneltmiştir. Can (7) eğrisel bölümün uzunluğunu ölçebilmek için bir yöntem öne süremeyince araştırmacı devreye girmiştir. Eğrisel bölümün uzunluğunun araştırmacı tarafından bir ip yardımıyla ölçülebileceğinin gösterilmesi üzerine katılımcının düşüncesinde değişim yaşanmıştır. Can (7) diğer kapalı eğrilerin de bu yöntemle çevre uzunluklarını ölçebileceğini, dolayısıyla bu şekillerin de çevresi olduğunu belirtmiştir.

4.2.1.3. ***Çevre uzunluğu ile ilgili uygulamaların kavram imajlarında yarattığı değişim***

İlk öğretim seanslarında katılımcıların çevreyle ilgili kavram imajları formal tanıma uygun hale getirilmeye çalışılmıştır. Sonraki seanslardaysa bununu desteklemek için çevre ile ilgili çeşitli uygulamalardan yararlanılmıştır. Katılımcılar ilk klinik görüşmelerde ve önceki öğretim seanslarında çevre uzunluğunu ölçemeyecekleri kapalı şekillerin çevrelerinin olmadığını iddia etmişlerdir. Bu düşünceyi değiştirmek için araştırmacı ikinci ve üçüncü seanslarda özellikle kapalı eğrilerin çevre uzunluklarını ölçme uygulamalarına odaklanmıştır.

Araştırmacı öğretim seansına öncelikle katılımcıların çevresinin varlığında hemfikir oldukları çokgenlerin çevrelerini gösterip farklı yöntemlerle ölçmelerini isteyerek başlamıştır. Katılımcılar seansın başlangıcında çevre uzunluğunu ölçmek için kenar uzunluklarını toplama yöntemini kullanmışlardır. Örneğin Neşe (5), çevre uzunluğunu bulmak için cetvelle kenar uzunluklarını tek tek ölçüp, bulduğu uzunlukları toplama yöntemini kullanmıştır. Bu yöntemi kullanma nedenini “Çünkü hem ilkokulda hem ortaokulda öyle öğrendik.” şeklinde açıklamıştır. Bu açıklamaya göre katılımcı düşüncesini savunurken kendi bilgisi yerine ilk ve ortaokul öğretmenlerine, yani dışarıdaki bir otoriteye güvenmektedir. Buradan sahip olduğu bilgiyi henüz içselleştirmediği anlaşılmaktadır.

İşlemler arasındaki ilişkileri kullanabilen katılımcılar ise çevre uzunluğunu hesaplamak için toplamayla birlikte çarpmayı da kullanmışlardır. Örneğin Zehra (5) Şekil 4.23.’de gösterilen kenar uzunlukları 7, 7, 10 cm olan bir üçgenin çevre uzunluğunu hesaplarken eşit uzunluktaki kenarlar için toplamanın kısa yolu olarak çarpma işlemini kullanmıştır. Zehra’ya (5) çevreyle ilgili yaptığı bu uygulamalardan nasıl emin olduğu sorulduğunda “Çünkü tüm kenarları eşit olsaydı, mesela tüm kenarları 7 santim olsaydı 3’le direkt çarpabilirdik. Ama bunun alt tabanı farklı uzunlukta diğer kenarları da farklı uzunlukta o yüzden ilk önce eşit uzunlukta olanları çarpıp sonra alt tabanındaki yüzeyi ile topladık.” açıklamasını yapmıştır. Bu açıklamaya göre katılımcı çevreyi kenar uzunlukları toplamı olarak algılamakla birlikte, toplama ve çarpma işlemleri arasındaki ilişkiyi anlayıp kullanabilmektedir.

Şekil 4.23. *Katılımcılara gösterilen ikizkenar üçgen*

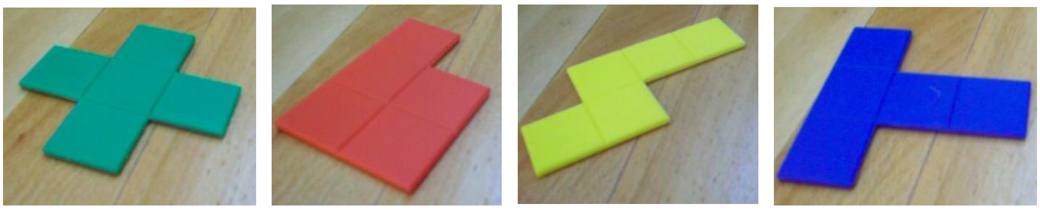
Katılımcılardan Filiz (8) ise, seansın başlangıcında Şekil 4.23.’deki ikizkenar üçgenin çevresi olarak sınırlarını göstermiş; ancak çevre uzunluğunu nasıl hesaplayacağını bilmediğini söylemiştir. Araştırmacı, Şekil 4.24.’de gösterilen, masada hazır bulunan ölçme için kullanabileceği malzemeleri kullanarak hesaplayıp hesaplayamayacağını sorduğunda, Filiz (8) yine bilemediğini söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı şeklin çevresini yeniden göstermesini istemiştir. Araştırmacı onun çevre için işaret ettiği kenarları göstererek “Bu kenarların uzunluğunu bilsen çevrenin uzunluğunu bulabilir misin?” sorusunu yöneltmiştir. Filiz (8) bu soruya “evet” yanıtını vermiştir.

Bunun üzerine araştırmacı önce şeklin kenar uzunluklarını cetvel yardımıyla ölçmesini, ardından çevre uzunluğunu hesaplamasını istemiştir.

Şekil 4.24. *Katılımcılara çevre ölçme için verilen malzemeler*

Filiz (8) Şekil 4.23.'deki üçgenin kenar uzunluklarını cetvelle ölçmekte de zorluk yaşamıştır. Ölçme yaparken başlangıç noktasını dikkate almayıp cetvelin ucundaki boşlukla kenarın başlangıcını hizaladığı için kenar uzunluklarını yaklaşık 1 cm eksik ölçmüştür. Bu nedenle araştırmacı öncelikle katılımcının uzunlukla ilgili yaşadığı sorunları gidermeye çalışmıştır. Araştırmacı bu boşluğu göstererek "Şimdi, şu kısımda boşluk kaldı, o bir sorun olur mu?" sorusunu yöneltmiştir. Bunun üzerine Filiz (8) hata yaptığını fark etmiş, "Sayılmaz herhalde şurdan başlamalıyız" diyerek cetveli kaydırıp kenarın başlangıç noktasıyla cetvelin sıfır noktasını hizalamıştır. Filiz (8) bu aşamada da farklı birimleri (cm ve mm) toplayarak ölçme yapmaya çalışmıştır. Araştırmacı cetveldeki birimlerin büyüklüklerinin farklılığına dikkat çekerek farklı büyüklüklerin toplanıp toplanamayacağını sorduğunda ise soruya yanıt verememiştir. Bunun üzerine araştırmacı uzunlukları tam sayıya yuvarlamayı önermiştir. Filiz (8) yuvarlayarak kenar uzunluğunun yaklaşık 7 cm olduğunu söylemiştir. Diğer iki kenar uzunluğunu da 7 ve 10 cm olarak ölçmüştür. Ardından katılımcıya bulduğu bu değerleri çevre uzunluğunu hesaplamada nasıl kullanacağı sorulmuştur. Filiz (8) bir süre düşündükten sonra bu değerleri toplaması gerektiğini söylemiş ve bulduğu değerleri yazarak toplamıştır.

Öğretim seansında katılımcıların aşina olduğu üçgen, kare, dikdörtgen, altıgen gibi çokgenler yanında Şekil 4.25.'de bir kısmı gösterilen birim karelerin birleşimiyle oluşturulmuş çokgenlere de yer verilmiştir.



Şekil 4.25. *Birim karelerden oluşmuş çokgenlerden bazıları*

Katılımcılardan bir kısmı bu çokgenlerin çevre uzunluklarını ölçmek için ilk klinik görüşmelerde yaptıkları gibi birim kareleri saymışlardır. Bu şekilde çevre uzunluğunu ölçmeye çalışan Fırat (6) ve araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Neleri saydın?

Fırat: Kareleri hocam

Araştırmacı: Peki bana çevreyi bir daha gösterir misin?

Fırat: (Parmağıyla şeklin sınırı üzerinde geziniyor)

Araştırmacı: Çevresini gösterirken kareleri mi gösterdin?

Fırat: Evet hocam

Araştırmacı: Yoksa karelerin şu dışındaki sınırı mı gösterdin? (Parmağıyla şeklin sınırı üzerinde geziniyor)

Fırat: Buraları gösterdim

Araştırmacı: Hangisini sınırı mı, karelerin içini mi?

Fırat: Karelerin içini hocam

Araştırmacı: Geçen haftaki dersimizde ….

Fırat: (Şeklin sınırı boyunca ilerleyerek birim uzunlukları sayıyor) 10 santim hocam 10 birim. 11 birim.

Araştırmacı: Nasıl buldun 11 birimi?

Fırat: Hocam buraları sayarak.

Araştırmacı: Niye fikir değiştirdin?

Fırat: Hocam çünkü böyle hocam kenarlarını saydım (şeklin sınırı boyunca ilerleyerek birim uzunlukları sayıyor).

Araştırmacı: Neden fikir değiştirdin?

Fırat: Hocam … içi alanı oluyor içindeki. Bunların alanı 5 birim.

Araştırmacı: Ama az önce çevresi dedin içine.

Fırat: Hocam yanlış söyledim. Buralar (Parmağıyla şeklin sınırı üzerinde geziniyor).

Katılımcılardan Mısra (7) ise yine birim karelerden oluşan bir şeklin çevre uzunluğunu bulmak için birim kare sayısı ile karenin kenar sayısını çarpmıştır. Bu aşamada araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Mısra: Karenin zaten dört kenarı var. Burada beş tane kare var. Burada beş tane kare olduğu için mesela her birim … beşle dördü çarpıp bulabiliriz.

Araştırmacı: Hım yirmi midir yani cevabın?

Mısra: Evet.

Araştırmacı: Peki, bana çevreyi bir daha gösterir misin?

Mısra: Çevresi şu kısımları (parmağıyla şeklin sınırları üzerinde geziniyor.)

Araştırmacı: Ama senin söylediğine göre benim şu içerideki uzunlukları da katmam gerekir. (Birim karelerin şeklin iç bölgesinde kalan kenarlarını gösteriyor.) Sence çevreye o içerideki uzunluklar da dahil mi?

Mısra: İçeri kısmı alan olduğu için bence katmamalıyız.

Araştırmacı: Ama az önce yaptığın hesaba göre şuradaki kenarları da dahil etmiş oluyorum. Çünkü sen beş tane kare var dedin, her birinin dört tane kenarı var dedin. O zaman o dört kenara bu içeridekiler de dahil. Dahil etmeli miyiz?

Mısra: Bence etmeliyiz.

Araştırmacı: Çevreye dahil edilir mi içerideki kenarlar?

Mısra: Edilir.

Yukarıdaki konuşmada görüldüğü gibi katılımcının düşüncesi net değildir. Çevreyi gösterirken şeklin sınırlarını işaret etse de hesaplarken şeklin içinde kalan kenarları da dahil etmektedir. Araştırmacı bir önceki seansta kullandığı çevreleme eylemini hatırlatarak onun dikkatini şeklin görünümünden çevre kavramına yönlendirmeye çalışmıştır. Daha önce gösterdiği şekillerde çevreyi ölçerken neler yaptığına odaklanmasını istemiştir. Aşağıda bu aşamada aralarında geçen diyalog verilmiştir:

Araştırmacı: Az önceki şekilde çevreyi hesaplamanı istediğimde sadece şu kenarları hesapladın. Ama şimdi içindekileri de hesaplayarak söyledin. Aradaki fark nedir?

Mısra: Çünkü bunun içinde de yollar var böyle.

Araştırmacı: Ama o yollardan geçme şartımız yok. Onlar sadece şekli oluştururken kullanılmış. Beş tane kare birleştirilip bu şekil elde edilmiş. Artık bakmamız gereken şey bu şekil. Bütün olarak düşün bunu. Parçalarına değil bütüne odaklan.

Mısra: O zaman içinde böyle şekiller olsa da olmasa da çevrenin şeyi değişmez.

Araştırmacı: Peki şimdi bu konuştuklarımızı düşünerek çevreyi hesaplayabilir misin?

Mısra: Hesaplanır.

Araştırmacı: Peki, hesapla bakalım. Cetveli yok sayalım şimdi cetvelimizin olmadığını düşün. Bunun şu uzunluğu bir birimse çevresi ne kadardır? Çevresi kaç birimdir?

Mısra: 10

Araştırmacı: Nasıl buldun?

Mısra: Sadece şu dış katmanları sayarak 10 buldum.

Görüldüğü gibi katılımcı başlangıçta kavrama değil şeklin görünümüne odaklanmış ve alışkın olduğu işlemleri kullanarak bir sonuç elde etmeye çalışmıştır. Araştırmacı daha önce kullandığı çevreleme eylemini hatırlatarak öğrencinin dikkatini çevre kavramına yönlendirmiştir. Böylece katılımcının çevre ölçümünde şekli oluşturan parçalar yerine şeklin sınırlarına odaklanmasını sağlamıştır. Bu konuda katılımcılardan Can (7) ise iki çokgenin ortak kenarı olan ve şeklin iç bölgesinde kalan kenarın çevreye dahil edilip edilmeyeceği sorusuna “Bence değil hocam. Çünkü bu çubuk yani çevrenin pardon alanın sınırları içinde oluyor.” cevabını vermiştir. Can (7) ilk klinik görüşmede hem çevre hem de alanı şeklin sınırları ile ilişkilendirmiş olsa da bu aşamada iki kavramı birbirinden ayırmıştır. Yaptığı açıklamaya göre çevreyi şeklin sınırlarıyla, alanı ise iç bölgesiyle ilişkilendirmektedir.

Çokgenler ve karmaşık şekillerin ardından kapalı eğrilerin çevre ölçümüne geçiş yapılmıştır. Bu aşamada katılımcılardan Zehra (5) kendisine gösterilen çeyrek dairenin (Bkz. Şekil 4.12.) çevresi olsa da kendisinin bu şeklin çevre uzunluğunu hesaplayamayacağını söylemiştir. Bunun nedenini “Bunun kenarları gibi düz değil. Çünkü cetvelimiz düz, eğer bunu ölçmek için böyle koyarsak eğer (cetveli çeyrek dairenin eğri bölümünün altına yerleştiriyor) cetveli düz tuttuğumuzda burası eğimli o yüzden.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı bunu nasıl ölçebileceğini yeniden sorduğunda Zehra (5) şeklin eğri bölümünü kesip atmayı ve şekli bir üçgene dönüştürmeyi önermiştir. Bunun üzerine araştırmacı şekli olduğu gibi düşünmesini, herhangi bir değişiklik yapmamasını istemiştir. Zehra (5) bir süre sessiz kalıp düşünmüş; fakat eğri bölümü nasıl ölçebileceğini bulamamıştır. Ardından araştırmacı masanın üzerinde bulunan ölçme araçlarına (Bkz. Şekil 4.24.) dikkat çekmiştir. Zehra (5) bu araçlardan ip ve makası alarak şeklin eğri bölümünü bunlarla ölçebileceğini belirtmiştir. Ardından araştırmacının da yardımıyla iple şeklin eğri bölümünü çevreleyerek bu bölümün uzunluğu kadar bir ip parçasını makasla kesmiştir. Bu ip parçasının uzunluğunu ölçerek eğri bölümün uzunluğunu bulduğunu ifade etmiştir. Daire diliminin diğer bölümlerini ise cetvelle ölçerek uzunluklarını not etmiştir. Son olarak ölçtüğü uzunluk değerlerini toplayarak çeyrek dairenin çevre uzunluğunu hesaplamıştır. Araştırmacı aynı yöntemi diğer şekiller için de kullanıp kullanamayacağını sorduğunda Zehra (5) düşüncesini “Yine iple ölçebiliriz. Bir kenarını ölçtüğümüzde sonra orayı işaretleyip cetvel üzerinde de ölçeriz. Tüm kenarlara aynı işlemi yaparız ve sonucu buluruz.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı bu aşamada öğrencinin düşüncesini kenar uzunluklarının toplamından şeklin sınır uzunluğuna yönlendirmek amacıyla tek tek kenarları iple çevrelemek yerine tüm şekli iple çevreleyerek çevreyi bulup bulamayacağını sormuştur. Zehra (5) tüm şekli çevreleyerek yapsa da aynı sonucu bulacağını ifade etmiştir. Düşüncesini “Bunun gibi işlemsiz yapsak yine ipi etrafına sarsak, cetvelle ölçtüğümüzde zaten çevresinin sonucunu buluruz.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı katılımcının aşina olduğu kenar uzunluklarını toplama yöntemini başlangıç olarak kullanıp yönelttiği sorular yardımıyla aşama aşama değiştirerek sınır uzunluğunu ölçme yöntemine dönüşmesini sağlamıştır.

Katılımcılardan Neşe (5) de Şekil 4.26.’da verilen kapalı bir eğrinin çevresi olduğunu söylemiş, çevreyi şeklin sınırları olarak göstermiştir. Çevre uzunluğunu nasıl bulabileceği sorulduğunda “Bunun çevresini ip yardımıyla bulabiliriz. Çünkü cetvelle bulamayız, cetvel tam ölçüm yapmaz.” cevabını vermiştir. Bu yöntemle çevre uzunluğunu bulabileceğinden nasıl emin olduğu sorulduğunda “İple ölçtükten sonra cetvele koyarak cetvelde kaç santim çıkıyorsa çevresi o kadardır… Çevresi bunda cetvelle bulamayız. Çünkü burası eğik olduğu için cetvel düz yerleri ölçer, eğik yerleri ölçemez. Ama iple ölçersek ipin boyu ne kadar çıkarsa çevresi de o kadar olur.” açıklamasını yapmıştır.

Şekil 4.26. *Neşe’ye (5) gösterilen kapalı eğri*

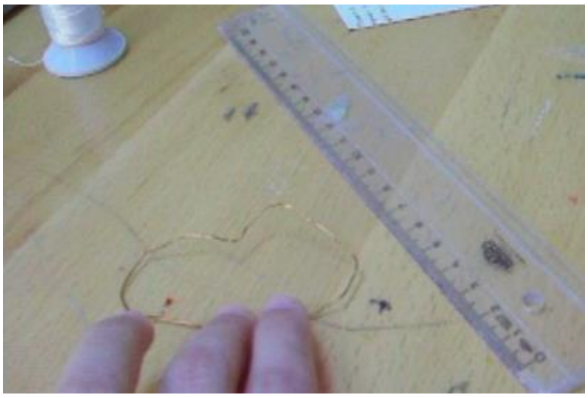
Neşe (5) daha önce şekillerin çevrelerini gösterirken ve hesaplarken şeklin içinde bulunduğu bağlama göre karar vermekteydi. Çevreyle ilgili gerçekleştirilen öğretim seanslarının ardından artık çevreyi her bağlamda şeklin sınırları olarak görmektedir. Çevre uzunluğunu hesaplarken de şeklin sınırlarının uzunluğunu ölçmektedir. Düşüncesinin doğruluğunu savunmak için artık dışsal bir otorite yerine kendi düşüncelerini kullanmaktadır.

Katılımcılardan Can (7) çeyrek daire modelinin (Bkz. Şekil 4.12.) çevresi olduğunu söylemiş ve çevre için şeklin sınırlarını göstermiştir. Araştırmacı bunun üzerine şeklin çevre uzunluğunun nasıl ölçülebileceğini sormuştur. Can (7) “Hocam bunun ölçüsünü cetvelle ölçemeyiz. Çünkü burası yamuk olduğu için bence hocam ipi dolarız ilk önce, ondan sonra da makasla kesip şey yapabiliriz.” açıklamasını yapmıştır. Can (7) şeklin sınırlarını çevreleyen bu ipin uzunluğu ile çevre uzunluğunun aynı olacağını belirtmiştir. Araştırmacının da yardımıyla şeklin etrafını iple sarıp çevre uzunluğunu hesaplamıştır. Kendisine gösterilen diğer düzensiz kapalı eğriler için de aynı yöntemi kullanarak çevre uzunluklarını hesaplamıştır.

Katılımcılardan Mısra (7) Şekil 4.27.'de verilen kapalı eğri gösterildiğinde bu şeklin çevresi olduğunu; fakat çevre uzunluğunun hesaplanamayacağını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı şekli açıp düz hale getirmeyi önermiştir. Mısra (7) bu aşamadan sonra telden yapılmış kapalı eğrileri önce açıp düz hale getirmiş, sonra cetvelle bu uzunluğu ölçmüştür. Bulduğu değerin başlangıçtaki şeklin çevre uzunluğu olduğunu ifade etmiştir. Daha önce kapalı eğrilerin çevre uzunluğunu ölçmeyeceğini belirtmiş olsa da öğretim seansının sonunda bu şekillerin çevre uzunluğunun ölçülebileceğini söylemiştir. Değerlendirme amaçlı yöneltilen sorularda Mısra (7) çevre uzunluğunu hesaplamak için şekillerin sınırları boyunca ilerleyerek birim uzunlukları sayma yöntemini kullanmıştır. Buna göre Mısra (7), başlangıçta çevreyi ayrı ayrı kenar uzunluklarının toplamı olarak ele alırken, artık çevreyi şeklin sınırlarının uzunluğu olarak düşünmektedir.

Şekil 4.27. *Mısra'ya (7) gösterilen kapalı eğri*

Katılımcılardan Filiz (8) de Şekil 4.28.'de gösterilen telden yapılmış kapalı eğrinin çevresi olduğunu söylemiş, çevre için şeklin sınırlarını göstermiş olsa da çevre uzunluğunu ölçemeyeceğini söylemiştir. Araştırmacı teli açıp düzelttikten sonra cetvelle ölçmeyi önermiştir. Bu durumda telin uzunluğunun değişip değişmeyeceğini sorduğunda Filiz (8) telin uzunluğunun değişmeyeceğini söylemiştir. Filiz (8) bu yöntemle kapalı eğrinin çevre uzunluğunun bulunabileceğini ifade etmiştir. Bunun üzerine araştırmacı bu yöntemi kullanarak şeklin çevre uzunluğunu ölçmesini istemiştir. Filiz (8) şekli düz hale getirip cetvelle ölçtüğünde uzunluğunu 18 cm bulmuştur. Telden yapılmış diğer kapalı eğriler için de aynı yöntemi kullanarak çevre uzunluğunu hesaplamıştır.

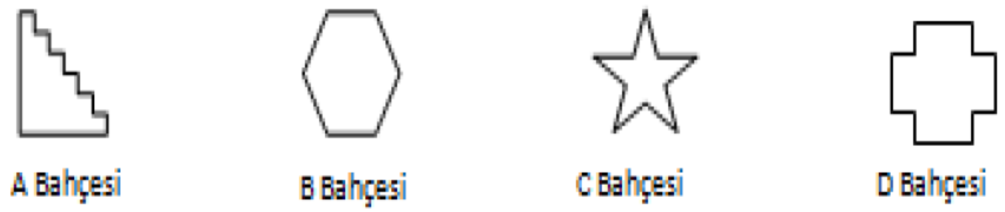


Şekil 4.28. *Filiz'e (8) gösterilen kapalı eğri*

Filiz (8) değerlendirme amaçlı olarak sorulan sorularda izometrik kâğıt üzerine çizilmiş şekillerin çevre uzunluklarını bulurken şekillerin sınırları boyunca ilerleyerek birim uzunlukları saymıştır. Çevre uzunluğunu farklı bir şekilde nasıl bulabileceği sorulunca her bir kenar uzunluğunu belirleyerek daha sonra toplama yöntemiyle de bulabileceğini söylemiştir. Başlangıçta çevre uzunluğunun nasıl ölçülebileceğine yanıt veremezken artık her kapalı şeklin çevresini belirleyip uzunluğunu hesaplayabilmektedir.

4.2.1.4. *Aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturmanın kavram imajlarında yarattığı değişim*

Katılımcıların tamamı çevre kavramını kapalı eğrileri içerecek şekilde formal tanıma uygun hale getirdikten ve bu yeni duruma uygun ölçme yöntemlerini keşfettikten sonra klinik görüşmelerde neredeyse hiçbirinin doğru cevaplayamadığı aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturma üzerinde durulmuştur. Katılımcılar klinik görüşmelerde belirli bir çevre uzunluğuna sahip bir tek şekil olduğunu ifade etmişlerdir. Bu algıyı değiştirmek için öncelikle katılımcılara farklı şekillere sahip dört bahçenin eşit miktarda tel ile çevrelendiği bir problem durumu verilmiştir. Katılımcılardan bu dört bahçenin çevre uzunlukları hakkında yorum yapmaları ve düşüncelerinin doğruluğunu savunmaları istenmiştir. Şekil 4.29.'da problem durumunda verilen bahçeler gösterilmektedir.



Şekil 4.29. *Aynı çevre uzunluğuna sahip bahçeler (Tan Şişman, 2010)*

Fırat (6) seansın başlangıcında kendisine yöneltilen problemde kenar sayısı fazla olan (A) bahçenin çevre uzunluğunun daha büyük olacağını söylese de düşüncesinin nedenini açıklayamamıştır. Araştırmacı bunun üzerine problemi bir parça ip yardımıyla somutlaştırarak yeniden açıklamıştır. Problem somut materyallerle açıklandıktan sonra Fırat (6) cevabını düzgün altıgen şeklindeki bahçenin çevre uzunluğunun daha büyük olacağı şeklinde değiştirmiştir. Bunun nedeni olarak da "kenarlarının hepsi eşit hocam" açıklamasını yapmıştır. Kenarların eşitliğinin çevre uzunluğunun daha büyük olmasına mı neden olduğu sorulunca "bilmiyorum hocam" yanıtını vermiştir. Araştırmacı bu aşamada bahçelerin etrafını çevrelemek için kullanılan tellerin uzunluklarının eşitliğine dikkat çekerek problemi tekrar açıklamıştır. Bahçeler çevrelenmeden önce ve sonraki durumlarda tellerin uzunluğunda bir değişim olup olmadığını sorduğunda Fırat (6) her iki durumda tellerin uzunluklarının eşit olduğunu söylemiştir. Araştırmacı bahçelerin çevre uzunlukları için ne söyleyebileceğini yeniden sorunca çevre uzunluklarının da eşit olacağını belirtmiştir.

Katılımcılardan Mısra (7) da başlangıçta Şekil 4.29.'daki bahçelerin çevre uzunluklarının farklı olduğunu söylemiştir. Bunun nedeni olarak bahçelerin kenar sayılarının farklı olmasını göstermiştir. Araştırmacı soruda verilenleri yeniden incelemesi için verilenleri bir ip yardımıyla somutlaştırmıştır. Ardından aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Şimdi burada dört tane eşit parça ipimiz var. Bu ipleri bu şekillerin etrafına doladığımızı düşün. Her biri için bir parça kullanıyoruz. Soruda bize öyle demiş. Peki bu telleri şekillerin etrafına doladığımızda tellerin uzunluğu değişir mi?
>
> Mısra: Değişmez.
>
> Araştırmacı: Peki, o telleri çevirdiğimizde bu şekillerin neyini gösterir?
>
> Mısra: Çevresini.
>
> Araştırmacı: O zaman bu şekillerin çevreleri için ne söyleyebiliriz? Eşit mi olur, biri diğerinden büyük mü olur?

Mısra: Eşit olur.

Araştırmacı: Sen az önce neden daha farklı düşündün, şimdi neden eşit olduklarını düşünüyorsun?

Mısra: Az önce çünkü şey çevrenin böyle kenar uzunluklarına göre olduğunu sandım. Ama şimdi böyle yapınca eşit. Çünkü ipler eşit, ipleri etraflarına dolarsak eşit santimli oluyor.

Görüldüğü gibi sorunun somut materyallerle açıklanmasının ardından Mısra (7) düşüncesini değiştirmiştir. Çevre uzunluklarının eşit olduğunu ancak şekilleri çevreleyen iplerin uzunluğunun eşit olduğunu somut olarak gördükten sonra kabul etmiştir. Filiz (8) de benzer şekilde başlangıçta problemdeki bahçelerin çevre uzunluklarının birbirinden farklı olduğunu söylemiştir. Bu konuda "Çünkü her bir şeklin yani şekli farklıdır. Mesela bu yıldızla bunu aynı olarak şey yapamayız." diyerek düşüncesini açıklamıştır. Filiz (8) problemde verilen bahçelerin görünümlerine odaklanmış, görünümleri farklı olduğu için çevre uzunluklarının da farklı olacağını ifade etmiştir. Araştırmacı onun bu düşüncesini değiştirmek için problemde verilenleri bir iple modelleyerek ona yeniden açıklamıştır. İp parçalarını kullanarak problemdeki bahçelerin etrafını çevrelediğini düşünmesini istemiştir. Araştırmacı problemi tekrar okuyarak bahçelerin çevreleri için şimdi ne düşündüğü sorunca "Aynıdır. Çünkü telleri her eşit parçaya ayırmış, dört parçaya bölmüş, sonra da onun etrafında sarmış." cevabını vermiştir. Filiz'in (8) düşüncesini değiştirmek için somut materyallerle problemin açıklanması yeterli olmuştur. Görüldüğü gibi hangi sınıf düzeyinde olursa olsun katılımcıların çevreyi somut materyallerle ele alması kavramın anlaşılmasını etkilemektedir.

Can (7) da benzer şekilde seansın başında problemdeki bahçelerin çevre uzunluklarının birbirinden farklı olduğunu tahmin etmiştir. Bahçelerden girinti-çıkıntısı fazla olan, kenar sayısı fazla olanların çevre uzunluklarının daha fazla olacağını belirtmiştir. Araştırmacı bahçelerin çevre uzunluklarıyla ilgili daha kesin bir sonuca ulaşmak için ne yapabileceğini sorunca ölçme yapabileceğini söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı ona bir parça ip vererek problemde verilenleri modellemesine yardım etmiştir. Birbirine eşit uzunlukta dört parça ip ile farklı şekillerdeki bahçelerin etrafını çevreleyerek onun problemi daha iyi anlamasını amaçlamıştır. Bunu yaparken kullanılan tellerin (ip) uzunluklarının eşit olduğuna vurgu yapmıştır. Can'a (7) bu modellemeden sonra bahçelerin çevre uzunluklarıyla ilgili ne düşündüğü sorulduğunda tereddüt ederek eşit olduklarını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı neden tereddüt ettiğini sorduğunda kenar sayısı fazla olan bahçenin çevre uzunluğunun daha büyük olması gerektiğini düşündüğünü söylemiştir. Araştırmacı kenar sayısı fazla olanın kenar uzunluklarını küçük, kenar sayısı az olanın kenar uzunluklarını büyük seçerek çevre uzunluklarını eşitleyip eşitleyemeyeceğini sormuştur. Can (7) bu soruya bir yanıt veremeyince araştırmacı problem durumuna uygun şekilde bahçelerin kenar uzunluklarına kendisi sayılar atayarak ondan çevre uzunluklarını hesaplamasını istemiştir. Can (7) her bir bahçenin kenar uzunluklarını toplayıp çevre uzunluğunu hesapladığında hepsinin eşit olduklarını bulmuştur. Can'ın (7) düşüncesini değiştirmek için somut materyaller yeterli olmamıştır. Bu nedenle araştırmacı probleme uygun olacak şekilde bahçelerin kenar uzunluklarına sayısal değerler atayarak her birinin çevre uzunluğunu hesaplamasını sağlamış ve aklındaki tereddütleri gidermiştir.

Neşe (5) eşit çevre uzunluklarına sahip farklı şekilleri içeren problem durumunda modellemeye gerek duymadan şekillerin çevre uzunluklarının aynı olduğunu ifade etmiştir. "Bu bahçelerin çevreleri için o zaman çevrelerinin toplamı telin hepsinin demek ki çevresinin toplamı eşitmiş… Teller artmamış o zaman yani hepsi çevresi aynı oluyor." şeklinde düşüncesini açıklamıştır. Zehra (5) da yine benzer şekilde bahçelerin çevre uzunluklarının eşit olduğunu söylemiştir. Bunun sebebini "Çünkü tüm telleri eşit uzunlukta kesmiş ve hepsi hiç artmıyor ne tel artıyor ne de bir şeklin çevresi açıkta kalmıyor, yani bunların çevresinin hepsi eşit." şeklinde açıklamıştır. Katılımcılardan Ceylan (6) da yine modellemeye gerek duymadan bahçelerin çevre uzunluklarının eşit olduğunu söylemiştir. Bahçelerin şekilleri farklı olsa da çevrelemede kullanılan tel miktarı aynı olduğu için çevre uzunluklarının eşit olduğunu belirtmiştir. Katılımcılardan Gülce (8) de bahçelerin çevre uzunluklarının eşit olduğunu modellemeye gerek kalmadan söylemiştir. Aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller olabileceğini ifade etmiştir.

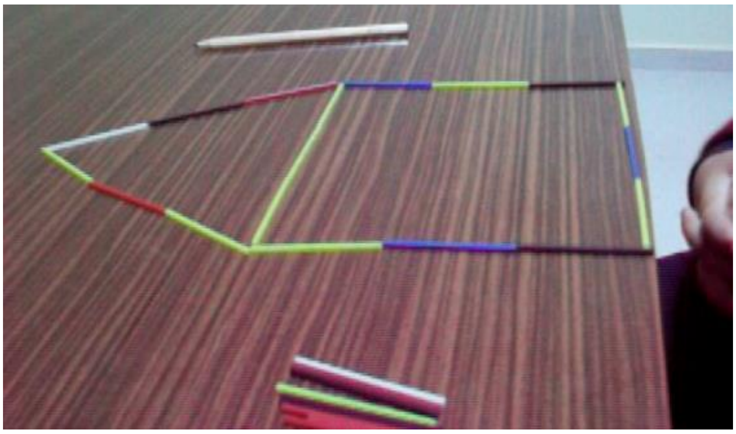
Seansın devamında bu kez katılımcılardan eşit uzunlukta çubuklar kullanarak aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturmaları istenmiştir. Katılımcılar daha önce yapılan klinik görüşmelerde bu konuda başarılı olamasalar da bu seansta aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturabilmişlerdir. Katılımcıların bir kısmının oluşturdukları şekiller daha önceden aşina oldukları çokgenler olduğu gibi öğretim seanslarında karşılaştıkları karmaşık şekillere yer verenler de olmuştur.

Örneğin katılımcılardan Gülce (8) çevre uzunluğu 18 birim olan şekiller oluşturması istendiğinde öncelikle aşina olduğu çokgenleri (üçgen, dörtgen vb.) oluşturmayı tercih etmiştir. Araştırmacı daha farklı şekiller oluşturulup oluşturulamayacağını sorduğunda "Şekiller farklı olabilir ama çevresi yine aynı olabilir." demiştir. Katılımcılardan Zehra'nın (5) tercihi de yine alışkın olduğu çokgenlerden yana olmuştur. Araştırmacı bir arkadaşının oluşturduğunu söyleyerek iç bükey bir çokgeni gösterdiğindeyse bu şekli de kabul etmiş ve çevresi olduğunu söylemiştir. Katılımcılardan Mısra (7) ve Neşe (5) ise hem aşina oldukları çokgenleri hem de karmaşık şekilleri oluşturmayı tercih etmişlerdir. Katılımcılardan Filiz (8) ise aynı çevre uzunluğuna sahip şekiller oluşturması istendiğinde yalnızca karmaşık şekiller oluşturmayı tercih etmiştir. Katılımcılardan Fırat'ın (6) da oluşturduğu şekiller prototip olmayan, karmaşık şekillerdir. Öğretim seanslarından önce aynı çevre uzunluğuna sahip farklı çokgenler oluşturamayan katılımcılar artık aynı çevre uzunluğuna sahip birçok farklı şekil oluşturabilmektedir. Ayrıca oluşturdukları şekiller incelendiğinde önceden olduğu gibi sadece prototip çokgenleri değil, daha karmaşık şekilleri içerdiği görülmektedir.

Katılımcılardan Can (7) ise başlangıçta aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller olamayacağını söylemiştir. Bu düşüncesini "Mesela hocam bir kareyle bir dikdörtgen, mesela hocam karenin çevresi 30 çıkar, dikdörtgeninki de mesela atıyorum 40 çıkar." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı aynı çevre uzunluğuna sahip bir kare ve dikdörtgen olamayacağını mı düşündüğünü sorduğunda "Hayır. Çünkü hocam kare yani tüm şeyleri eşit hocam çizgileri mesela 4 santim hepsi eşit. Hocam ama dikdörtgen eşit değil hocam bir tarafı uzun bir tarafı kısa o yüzden." yanıtını vermiştir. Katılımcının zihnindeki prototip şekiller çevreyle ilgili düşüncesini de etkilemektedir. Ardından araştırmacı ondan birim uzunlukları kullanarak çevre uzunluğu 18 birim olan farklı şekiller oluşturmasını istemiştir. Can (7) hem prototip hem de karmaşık şekiller oluşturmuştur. Oluşturduğu bu şekillerin her biri için çevreyi şeklin sınırları olarak göstermiş ve birim uzunlukları sayarak çevre uzunluğunun 18 birim olduğunu ifade etmiştir. Can (7) birkaç farklı şekil oluşturduktan sonra araştırmacı aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller olup olamayacağını yeniden sorduğunda ise başlangıçtaki fikrini değiştirerek olabileceğini söylemiştir. Fikrini neden değiştirdiği sorulunca önce aklına kare ve dikdörtgen geldiği için çevre uzunluklarının aynı olamayacağını söylediğini, şimdi farklı şekillerin aynı çevre uzunluğuna sahip olabileceğini gördüğünü ifade etmiştir. Can'ın fikrini değiştirmesinde problemi çözerken çevreyi şeklin sınırları ile ilişkilendiren somut nesneler kullanması etkili olmuş olabilir.

Katılımcılardan Neşe (5) öğretim seansları öncesinde bir şeklin çevre uzunluğunun onu oluşturan parçaların çevre uzunluklarının toplamına eşit olduğunu düşünmekteydi. Neşe (5) sabit çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturması istendiğinde Şekil 4.30.'da gösterilen bir kare ve üçgenin birleşiminden oluşan şekli oluşturmuştur. Bu şeklin çevre uzunluğunu hesaplarken de öğretim seansları öncesindeki düşüncesine uygun olarak kare ve üçgen parçanın çevre uzunluklarını ayrı ayrı bulup toplamıştır. Ayrıca şeklin çevresini gösterirken iç bölgede kalan uzunlukların da üzerinden geçerek dahil etmiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog onun düşüncesini ayrıntılı olarak göstermek için aşağıda verilmiştir:

> Araştırmacı: Peki, bu içteki çizgi çevreye nasıl dahil oluyor?
>
> Neşe: Çünkü burada çevresinde şimdi burada üçgen … ev şeklinde bir şekil oluştu. İçinde bir çizgisi var. Evin çevresini ölçmek için o çatılara da tuğla konulduğu için o tuğlaları da çevreye dahil oluyor. Burada da bu çizgi çevreye dahil oluyor.
>
> Araştırmacı: Peki, şimdiye kadar biz oluşturduğumuz şekillerde iç kısımdakileri çevreye dahil ettik mi?
>
> Neşe: O zaman dahil etmedik. Çünkü o zaman iç kısımda mesela şu üçgenler yokmuş gibi düşünürsek iç kısmı boş kalıyor. Dış kısmı yani şu karesel bölgesi çevresi oluyordu. Şu an ama hem üçgen hem de karesel bir bölge oluşmuş.
>
> Araştırmacı: Evet iki tane şeklin birleşimiyle oluşan bir şekil oluşturdun. Ama bunun iç kısmını çevreye dahil edebilir miyiz?
>
> Neşe: Evet çünkü bu hem karenin karşılıklı kenarlarından bir tanesi hem de üçgenin alt tabanı olduğu için o dahil oluyor çevreye.



Şekil 4.30. *Neşe'nin (5) oluşturduğu karmaşık şekil*

Araştırmacı bu konuşmanın ardından daha önce çevresini gösterdiği diğer şekillerle Şekil 4.30.'u karşılaştırmasını istemiştir. Neşe (5) belirli bir çevre uzunluğuna ulaşmak için iç bölgede kalan kenarı dahil ettiğini, ayrıca o kenarın hem kareye hem de üçgene ait olduğunu onu saymazsa kare ve üçgen olmayacağını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı şeklin sınırını göstermesini istemiştir. Ardından aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Burası (iç bölgede kalan kenar) şeklin sınırlarına dahil mi?

Neşe: Burası şeklin sınırına dahil değil, sadece çevresine dahil.

Araştırmacı: Peki, şeklin sınırı ile çevresi arasında nasıl bir ilişki var?

Neşe: Sınır bir yerden bir yere kadar olan bir şey, çevresi bir üçgensel, dairesel, dikdörtgensel bir bölgenin o kısımları.

Araştırmacı: Anlamadım.

Neşe: Yani mesela şu üçgen yoksa şu karenin karesel bölgesi karenin çevresi oluyor.

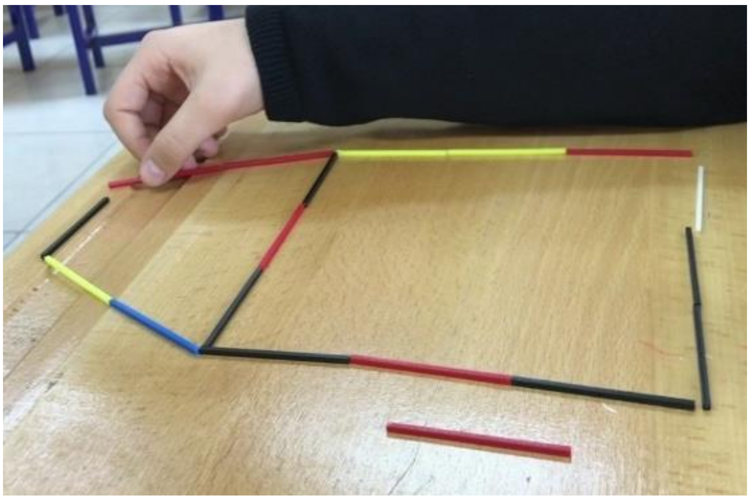
Araştırmacı: Evet, ama artık burada ne kare var ne üçgen var. Burada yeni bir şekil var. Üçgen ve karenin birleşiminden oluşan yeni bir şekil var. Evet burada bir kare kullandık, burada bir üçgen kullandık. Ama bu iki şekil birleştiğinde artık burada üçgenden ve kareden bahsedebilir miyiz? Burada yeni bir şekil var. Bu yeni şeklin çevresini bana gösterir misin?

Neşe: Bu yeni şeklin çevresi şu kısımdır. (Şeklin sınırlarını gösteriyor. İç bölgede kalan kenarı dahil etmiyor.)

Araştırmacı: Peki, burası çevreye nasıl dahil oluyor?

Neşe: Orası çevreye dahil olmaz ama eğer farklı ayrık bir şekilde olsaydı çevreye dahil olurdu.

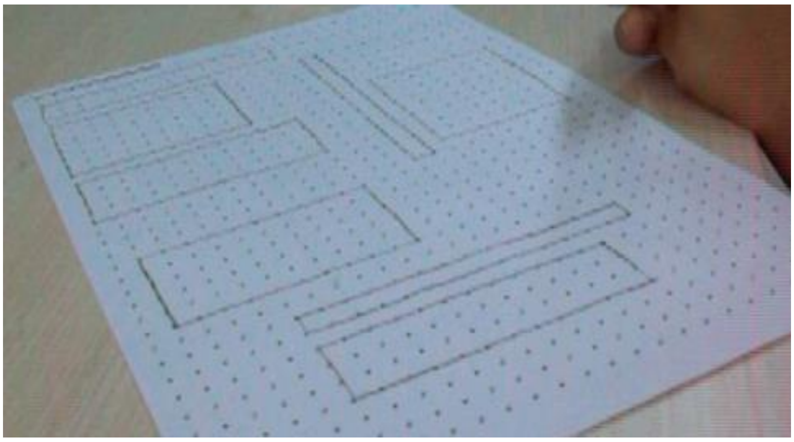
Yukarıdaki tartışmanın benzeri katılımcılardan Ceylan (6) ile de yaşanmıştır. Ceylan (6) Şekil 4.31.'de gösterilen kare ve üçgenin birleşiminden oluşan bir karmaşık şeklin çevresine iç bölgede kalan ortak kenarı da dahil etmiştir. Araştırmacı ondan oluşan son şeklin sınırlarını ve çevresini göstermesini istemiştir. Böylece onun dikkatini parçalardan ziyade bütüne yönlendirmeye çalışmıştır. Bunun sonucunda Ceylan (6) iç bölgede kalan kenarı çevreye dahil edemeyeceğini söylemiştir.



Şekil 4.31. *Ceylan'ın (6) oluşturduğu karmaşık şekil*

Katılımcılardan değerlendirme amaçlı olarak kareli kâğıt üzerine belirli bir çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenler çizmeleri istenmiştir. Bu aşamada bazı katılımcılar daha sistematik davranırken diğerleri kenar uzunluklarına rastgele değerler vererek çözüme ulaşmaya çalışmışlardır.

Örneğin katılımcılardan Neşe (5) çevre uzunluğu 30 birim olan dikdörtgenlerden sırasıyla 14 x 1, 5 x 10, 1 x 14, 3 x 12, 6 x 9, 7 x 8, 2 x 13, 4 x 11 birim uzunluğundakileri çizmiştir. Bu dikdörtgenler Şekil 4.32.'de gösterilmektedir. Neşe (5) 30 birimin yarısı 15 olduğu için 1 ve 14 sayılarıyla başladığını söylemiştir. Burada çevre uzunluğunu ikiye bölmesinin nedeni olarak karşılıklı kenar uzunluklarının eşit olmasını göstermiştir. Toplamı 15 olan başka sayılar olmadığı için tüm dikdörtgenleri çizdiğinden emin olduğunu söylemiştir. Neşe (5) rastgele sayılar denemek yerine dikdörtgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiden yararlanarak hareket etmiştir.



Şekil 4.32. *Neşe'nin (5) çizdiği çevresi 30 birim olan dikdörtgenler*

Katılımcılardan Fırat (6) ve Gülce (8) de yukarıdakine benzer şekilde dikdörtgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi düşünerek çizimlerindeki dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını belirlemişlerdir. Fırat (6) başlangıçta rastgele sayılar denese de daha sonra iki kenar uzunluğu toplamının çevre uzunluğunun yarısı kadar olmasına dikkat ettiğini söylemiştir. Gülce (8) ise kenar uzunluklarını belirlerken karşılıklı iki kenar uzunluğunun toplamını çevre uzunluğuna tamamlayan sayıyı diğer iki kenara paylaştırdığını söylemiştir.

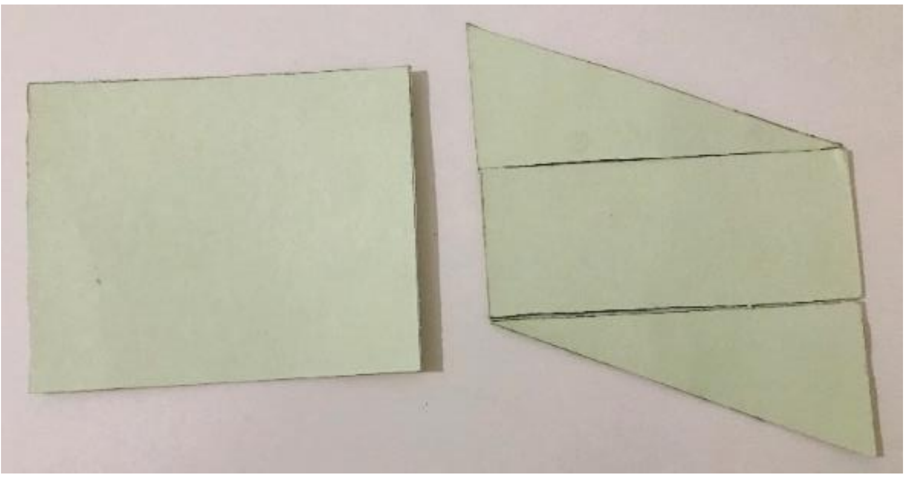
Katılımcılardan Mısra (7) ise ilk denemelerinde kenar uzunluklarına rastgele sayılar atayarak başarısız olmuştur. Ardından çevre uzunluğu olan 30'u 4'e bölerek bir kenar uzunluğunun yaklaşık 7 birim olması üzerinden hareket etmiştir. Buna uygun olarak ilk çizdiği dikdörtgen 8 ve 7 birimlik kenar uzunluklarına sahiptir. Mısra'nın (7) farklı dikdörtgenler bulmakta zorluk yaşaması üzerine araştırmacı daha önce çizdiği dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını hatırlatarak onu kenar uzunlukları arasında bir ilişki aramaya yönlendirmiştir. Mısra (7) başlangıçta bir ilişki görememiş ve uzunlukları rastgele belirlemiş olsa da birkaç denemenin ardından sayıları atarken daha önce kullandıklarını elemeye, onların fazla veya eksiği olacak şekilde değerler vermeye başlamıştır.

Katılımcılardan yalnızca Filiz (8) dikdörtgenleri oluştururken bir strateji geliştirmeden, rastgele sayılar vererek hareket etmiştir. Araştırmacı onun dikkatini dikdörtgenin kenar uzunlukları ve çevre uzunluğu arasındaki ilişkiye çekmeye çalışmıştır. Fakat Filiz'in (8) dört işlemde zorluk yaşaması dikkatini toplayamamasına neden olduğundan başarılı olamamıştır. Filiz (8) kenar uzunlukları ile çevre uzunluğu arasında bir ilişki bulamasa da belirli çevre uzunluğuna sahip farklı dikdörtgenler çizmeyi başarmıştır.

Öğretim seansının sonunda katılımcıların tamamı, başlangıçtakinin aksine, belirli bir çevre uzunluğuna sahip birçok şekil oluşturulabileceğini belirtmiştir. Katılımcılardan Zehra'nın (5) açıklaması şu şekildedir: "Çünkü her bir iki nokta arası bir birim olduğu için bu birimlerden de istediğimiz şekilleri oluşturabiliriz. Bunlar birer örnek ama böyle eğimli şekiller kullanarak da oluşturabiliriz aslında." Görüldüğü gibi katılımcıların kavram imajlarını sınırlayan belirli bir çevre uzunluğuna sahip tek bir şekil olabileceği düşüncesi öğretim seansı kapsamında yapılan uygulamalar sonrası değişmiştir. Üstelik kullanılan materyaller onları çokgenlerle sınırlamış olsa da katılımcılar kapalı eğrilerin de aynı çevre uzunluğuna sahip olabileceğini ifade etmiştir.

4.2.1.5. ***Yeniden düzenlenen şekillerin çevresi ile ilgili uygulamaların kavram imajlarında yarattığı değişim***

Araştırma kapsamında yapılan ilk klinik görüşmelerde Neşe (5) ve Ceylan'ın (6) bir şekli oluşturan parçaların çevre uzunlukları toplamının tüm şeklin çevre uzunluğunu oluşturduğunu düşündüğü görülmüştür. Bu nedenle öğretim seansları kapsamında bir şeklin parçalara ayrılıp farklı bir biçimde yeniden düzenlenmesiyle çevre uzunluğunun nasıl değişeceği üzerinde durulmuştur. Bu aşamada ele alınan problem durumunda Şekil 4.33.'de gösterilen bir dikdörtgen katılımcıların gözleri önünde parçalara ayrılarak yeniden düzenlenmekte ve oluşan yeni şekille başlangıçtaki şeklin çevre uzunlukları karşılaştırılmaktadır. Bu amaçla dikdörtgen önce kısa kenarının ortasından kesilerek iki eş dikdörtgen parçaya ayrılmış, ardından eş dikdörtgen parçalardan biri köşegeni boyunca kesilerek birbirine eş iki dik üçgen oluşturulmuştur. Ardından bu parçalar bir paralelkenar oluşturacak şekilde yerleştirilmiştir (Tan Şişman, 2010). Seansın başlangıcında katılımcıların neredeyse tamamı şekil yeniden düzenlendiğinde çevre uzunluğunun değişmeyeceğini, çünkü her iki durumda da aynı parçaların kullanıldığını söylemiştir.



Şekil 4.33. *Öğretim seansı kapsamında yeniden düzenlenen dikdörtgen*

Katılımcılardan Zehra (5) başlangıçta çevre uzunluğunun değişmeyeceğini düşündüğünü "Çünkü bu 44 santimlik dikdörtgeni bölüp bu parçalara ayırmışsınız. Bu parçaların da çevresinin yine eşit olacağını düşünüyorum." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı bu aşamada ondan ölçme yaparak tahminini kontrol etmesini istemiştir. Zehra (5) cetvel yardımıyla son durumdaki şeklin çevre uzunluğunu ölçerek 46 cm bulmuştur. İlk ve son durum ile ilgili düşüncesini "Çünkü bu dik şekilde (dikdörtgen) bu biraz daha eğimli şekilde (paralelkenar) şu kenarları ve parçalara ayırdığımız için birleştirdiğimizde bence daha fazla çıkmıştır çevresi." şeklinde açıklamıştır. Katılımcılardan Neşe (5), Fırat (6), Mısra (7), Can (7) ve Filiz (8) de başlangıçta şekil parçalara ayrılıp yeniden düzenlendiğinde çevre uzunluğunun değişmeyeceğini tahmin etmişlerdir. Katılımcıların bu düşüncelerinin nedenlerinden biri alan korunumunu aşırı genellemeleri olabilir. Alan korunumunda olduğu gibi aynı parçalar kullanıldığında çevre uzunluğunun değişmeyeceğini tahmin etmişler; ancak ölçme yaptıktan sonra çevre uzunluğunun değiştiğini deneyimlemişlerdir. Katılımcılar, başlangıçtaki düşüncelerine oldukça güvenseler de somut materyaller üzerinde yaptıkları ölçme, hatalarını gözler önüne sermiştir.

Katılımcılardan Ceylan (6) ise en başında Şekil 4.33.'de gösterilen dikdörtgen parçalanıp yeniden düzenlendiğinde çevre uzunluğunun başlangıca göre değişeceğini tahmin etmiştir. Bunun sebebi olarak son durumdaki kenarların çapraz bir şekilde ilerlemesini göstermiştir. Araştırmacı bunun doğruluğundan nasıl emin olduğunu sorunca tereddüt edip fikrini değiştirmiş ve çevre uzunluklarının eşit olacağını söylemiştir. Neden böyle düşündüğü sorulunca "Bir şey fark etmiyor zaten. Mesela burası tahminen kaç olabilir bir dakika kaçtı 10 olsa, buralar da 12 olsa şey yine aynı sonuç çıkıyor. Bu buradayken hesaplasak zaten kesildi diye bir şey fark etmiyor. Yine bu çıkar." cevabını vermiştir. Araştırmacı bu aşamada ölçme yaparak tahminini kontrol etmesini istemiştir. Başlangıçtaki şeklin çevre uzunluğunu, cetvelle kenar uzunluklarını belirleyip toplayarak 44 cm bulmuştur. Parçalanıp farklı bir görünümde birleştirildikten sonraki şeklin çevre uzunluğunu ise yine aynı yöntemle 46 cm bulmuştur. Tahmininden farklı bir sonuç bulmasının nedenini açıklarken şekilleri üst üste getirerek karşılaştırmaya çalışmıştır. Araştırmacı bu aşamada onu ilk durumla son durum arasındaki farkları bulmaya yönlendirmiştir. Nelerin değişip nelerin aynı kaldığını belirlemesini istemiştir. Ceylan (6) son durumda uzun kenar uzunluklarının başlangıçtan farklı bir değer aldığını belirtmiş, çevre uzunluğunun bu nedenle değiştiğini söylemiştir.

Katılımcılardan sadece Gülce (8) parçalanıp yeniden düzenlenen şeklin çevre uzunluğunun başlangıca göre farklı olacağını ifade etmiş ve bu düşüncesini savunmuştur. Yeni şekil oluşturulurken başlangıçtaki dikdörtgen köşegeninden kesildiği için son durumda çevre uzunluğunun daha uzun olacağını söylemiştir. Dikdörtgenin köşegeninin uzunluğunun başlangıçtaki kenar uzunluğundan fazla olmasının bu durumun nedeni olduğunu belirtmiştir. Burada katılımcı düşüncesinin doğruluğunu görsel bir örnek üzerinden akıl yürüterek savunmuştur.

Öğretim seansının başında katılımcıların neredeyse tamamı yeniden düzenlenen bir şeklin çevre uzunluğunun değişmeyeceğini düşünmüşlerdir. Katılımcılar, alan korunumunun aşırı genelleyerek, her iki durumda da aynı parçalar kullanıldığı için çevre uzunluğunun değişmeyeceğini iddia etseler de ölçme ve hesaplamalardan sonra hata yaptıklarını fark etmişlerdir. Buradaki gibi düşüncelerinin aksine bir örnekle karşılaşmaları onları fikirlerini sorgulamaya yöneltmiştir. Araştırmacının onları bu farklılığın nedenini bulmaya yönlendirmesiyle çevre uzunluğundaki değişimin nedenini keşfedip matematiksel olarak ifade edebilmişlerdir.

4.2.1.6. *Benzer çokgenlerin kenar uzunlukları ile çevreleri arasındaki ilişkiyle ilgili uygulamaların kavram imajlarında yarattığı değişim*

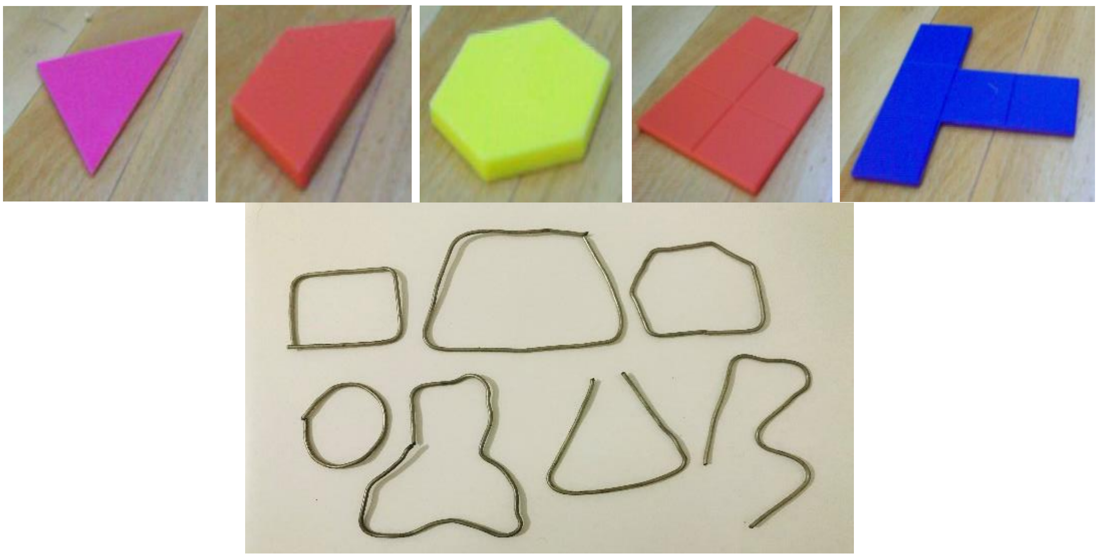
Kenar uzunlukları arasında belirli bir oran olan iki şeklin çevre uzunlukları arasında da aynı oranın bulunduğunu belirlemeye yönelik bir seans planlanmıştır. Bu amaçla öğrencilerden kenarları arasında belirli bir oran olan çokgenlerin çevre uzunlukları arasındaki ilişkiyi önce tahmin etmeleri, sonra hesaplamaları istenmiştir. Katılımcılar kenar uzunlukları arttığı/azaldığı durumda çevre uzunluğunun da buna paralel olarak artacağını/azalacağını ifade etmişlerdir. Ayrıca şekillerin kenar uzunlukları ile çevre uzunlukları arasındaki kat ilişkisini doğru bir şekilde belirlemişlerdir. Kenar uzunlukları arasındaki ilişki ile çevre uzunlukları arasındaki ilişkinin aynı olduğunu söylemişlerdir. Yalnızca Gülce (8) bu ilişkinin sadece kenar uzunlukları arasında orantı varsa geçerli olduğunu belirtmiştir. Kenar uzunlukları orantılı olmayan şekillerin çevre uzunluklarının de orantılı olmayacağını söylemiştir. Katılımcının sınıf ve başarı düzeyinin yüksek olması, oran-orantı konusunda diğer katılımcılardan daha deneyimli olması böyle bir çıkarımda bulunmasını kolaylaştırmış olabilir.

4.2.2. Alanla ilgili kavram imajlarının değişimi

Uygulama öncesinde katılımcıların alanla ilgili kavram imajları alan ölçümü (1a-hatalı ve 1b-kısmen doğru alan ölçümü) ve sınır bölgesi olarak belirlenmiştir. Hatalı alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar öncelikle alan ölçüsünü hesaplamaya yönelmiş, bu amaçla çevre uzunluğu için kullandıkları algoritmaları uygulamış; ancak sonrasında alanı gösterirken sınırların içinde kalan bölgeyi işaret etmişlerdir. Kısmen doğru alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar çevre ve alanı farklı kavramlar olarak ele almışlar; ancak kavram imajlarının formal tanımlara uygun olmaması, sınırlı sayıda çokgeni ve onların çevre/alan formüllerini içermesi nedeniyle her zaman doğru sonuçlara ulaşamamışlardır. Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar için ise alan ve çevre hem işlemsel hem de kavramsal olarak aynıdır. Katılımcılar alanı açıklamak için herhangi bir ölçme yapmadan sadece şekil üzerinde işaret etmişler; ancak yaptıkları çizim ve açıklamalar matematiksel olarak doğru değildir. Katılımcılar bir şeklin alanını göstermek için çevreyi gösterirken yaptıkları gibi şeklin sınırlarının dışındaki bölgeyi işaret etmişlerdir. Aşağıda katılımcıların kavram imajlarının öğretim seansları boyunca yaşadığı değişim ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

4.2.2.1. ***Alan ölçümü kavram imajının değişimi***

Alanla ilgili ilk seansta katılımcılara sıklıkla karşılaştığı çokgenlerden başlayıp kapalı eğrilere doğru devam eden bir sırayla çeşitli şekiller gösterilmiş ve bunların alanı olup olmadığını söylemeleri istenmiştir. Katılımcılardan alanı olan şekillerin alanını göstermeleri, alanı olmayanlar için ise bunun nedenini açıklamaları beklenmiştir. Klinik görüşmelerde katılımcıların büyük kısmı alan için şeklin sınırlarını işaret etse de çevre ile ilgili yapılan öğretim seansları sonrasında hepsi alanı şeklin iç bölgesi olarak göstermiştir. Katılımcıların öğretim seansı kapsamında alanlarını göstermeleri beklenen nesnelerden bazıları Şekil 4.34.'de verilmiştir.



Şekil 4.34. *Katılımcıların alanlarını göstermeleri istenen şekillerden bazıları*

Katılımcılardan Zehra (5) kendisine gösterilen tüm kapalı şekillerin iç bölgesini alan olarak göstermiştir. Çevre ve alan hakkındaki düşüncesini "Sınırları çevreyi belirliyor, iç tarafı da alanı belirliyor." şeklinde açıklamıştır. İncelediği şekiller eğri de olsa içleri dolu ve kapalı oldukları sürece alanları olduğunu söylemiştir. Çember hakkında ise diğer şekillerden farklı düşünmektedir. Çemberin alanı olup olmamasına nasıl karar verdiğini "Çember dışında tüm şekillerin alanı vardır. Çünkü çemberin içinde sadece bir boşluk var, sadece bir sınır var. Ama bunda (çeyrek daire) sadece çevresi yok, içi de dolu olduğu için alanı da var.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı bunun üzerine telden yapılmış bir dikdörtgeni göstererek alanı olup olmadığını sormuştur.

> Zehra: Çevresini işaretlediğimizde kâğıt üzerinde kaldırdığımızda aslında bir bölgeyi sınırlıyor.
>
> Araştırmacı: Yani şöyle dursaydı alanı olmaz mıydı? (Şekli kâğıt üzerinden alıyor.)
>
> Zehra: Olmaz
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Zehra: Çünkü burada içi boş görünüyor.
>
> Araştırmacı: Boş mudur burası, şu iç kısmı sence?
>
> Zehra: İçi bence boş şu an.
>
> Araştırmacı: Matematiksel olarak düşünürsen, hani böyle gördüğün olarak değil de.
>
> Zehra: Matematiksel olarak düşündüğümüzde içi dolu.

Araştırmacı daha sonra gösterdiği şekillerin sınırladığı bir yüzey olup olmadığını sormuş ve bu sınırlanan bölge ile alan arasında bir ilişki olup olmadığını düşünmesini istemiştir. Bunun üzerine Zehra (5) şekillerin sınırladığı bölgenin onların alanı olduğunu ifade etmiştir. Zehra (5) bundan sonra kendisine gösterilen telden yapılmış şekillerin de alanı olduğunu söylemiş ve alanı iç bölgeleri olarak göstermiştir. Buna rağmen Zehra (5) çemberi tüm bunlardan ayrı değerlendirmiş ve alanı olmayacağını söylemiştir. Açık şekillerin ise çevreleri olmadığı için alanları da olamayacağını, bir yüzey kaplamadıklarını söylemiştir. Ayrıca Zehra (5) şeklin sınırlarının çevreyi oluşturduğu için alana dahil olmadığını düşünmektedir.

Öğretim seansı sonunda Zehra (5) alanı şu şekilde tanımlamıştır: “Alan bir şeklin sınırları dışında iç bölgesinin ve kapladığı yüzeyin bölümü”. Alan denildiğinde tüm kapalı şekillerin aklına geldiğini söylemiştir. Araştırmacı bu şekillerin alanla ilişkisini sorduğunda “Çünkü bu şekillerin kapladığı bir yüzey var. Eğer ki şu şekil yaptığım şu şekil gibi (oyun hamuruyla daha önce oluşturduğu üçgeni bir kenarından açıyor) birleşmemiş olsaydı kapladığı bir yüzey olmazdı ve alanı olmazdı.” cevabını vermiştir. Bir şeklin alanı olması için sınırlarının kapalı olması ve içinin dolu olması şartlarını sıralamıştır. İlk klinik görüşmede alan kavram imajı çokgenlerle sınırlıyken artık tüm kapalı şekillerin alana sahip olduğunu ifade etmektedir. Zehra (5) daha önce alanı hesaplanması gereken bir değer olarak görmekteydi; ancak seans sonunda alanı tüm kapalı şekillerin iç bölgesi, kapladığı yüzey olarak ele almaktadır.

Katılımcılardan Neşe (5) ise seansın başlangıcında açık şekillerin alanı olduğunu düşünmekteydi. Aşağıdaki diyalogda bu konudaki düşüncesi daha açık görülmektedir.

Araştırmacı: Şimdi burada alanın olduğunu ama çevrenin olmadığını söylüyorsun. Bu şekil belirli bir bölgeyi sınırlıyor mu sence? Belirli bir yüzeyi sınırlamış mı? (Şekil 4.34.'deki açık eğrileri gösteriyor.)

Neşe: Belirli bir yüzeyi sınırlamış. Sadece şeklin alanı var ama çevresi yok. Eğer burası kapalı olsaydı çevresi olurdu.

Araştırmacı: Şimdi buradaki açıklıktan dolayı tam sınırlamış olur mu sence?

Neşe: Tam sınırlamış olmaz ama belirli bir bölgeyi sınırlar.

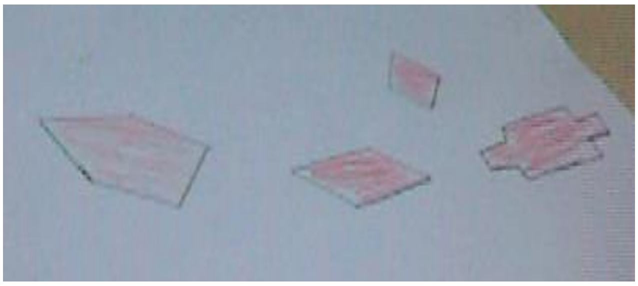
Araştırmacı: Nasıl yani? Ne demek istiyorsun anlamadım.

Neşe: Yani bu bölgeyi sınırlar, dış kısmını yani buradan sonraki kısmını sınırlamaz. Çünkü bu şeklin sadece kendisi ıı kendi alanı.

Araştırmacı: O zaman sınırlamış oluyor mu? Tamam buralar evet, ama buradan sonrası da yine devam ediyor. Bir sınır yok ki burada.

Neşe: Bu kısım öbür şekil, öbür şeyleri, farklı şekiller çizmek için olur. Ama bu şeklin sadece bu kısmı kapsar, dış kısmı kapsamaz.

Araştırmacı Neşe'den (5) şeklin alanını göstermesini istediğinde sanki şekil kapalıymış gibi davrandığı görülmüştür. Araştırmacı şeklin açık kısmını işaret ederek orada bir sınır olmadığını söylediğinde ise o kısmın diğer şekilleri çizmek için olduğunu yinelemiştir. Araştırmacı şeklin açık bölümünde onu sınırlayacak bir hat olup olmadığını sorunca şekli yeniden inceleyip olmadığını belirtmiştir. Ayrıca şeklin alanı olmayacağını da ifade etmiştir. Araştırmacı düşüncesini daha iyi anlayabilmek için ondan farklı araçlar kullanarak alanı olan şekiller oluşturmasını isteyince Neşe (5) Şekil 4.35.'de verilen kapalı şekilleri oluşturmuş ve şekillerin alanı olarak iç bölgesini göstermiştir.



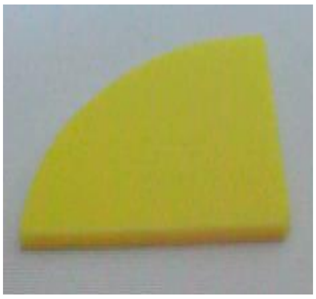
Şekil 4.35. *Neşe'nin (5) alanı olan şekillere verdiği örnekler*

Yukarıdaki uygulamaların ardından Neşe (5) alanı şu şekilde tanımlamıştır: "Alan bir şeklin kenarının kapalı olduğu sürece içidir, şeklin içidir." Bu açıklamasında alanın kapalı bir şeklin iç bölgesi olmasına yaptığı vurgu alanı hiç bilmeyen birine anlatması istendiğinde de ortaya çıkmıştır: "Bana biri alan ne demek diye sorduğunda ben ona derim ki önce bir şekil çizerim, bu şeklin alanı iç kısmıdır derim. O da bana nasıl derse, ben ona şeklin kenarı veya başka bir yeri açık olduğu sürece alanı olmaz ama kapalıysa alanı olur diye anlatırım.” Neşe (5) şeklin alanı olması için kapalı olması yanında iç bölgesinin dolu olmasına da vurgu yapmıştır. Bu düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: “Alan deyince benim aklıma ilk bahçe geliyor. Bahçenin oyun oynanan kısmı geliyor. Çünkü biz o alanı, alan olmasaydı içi boş olsaydı biz orada oyun oynayamazdık. Ama o alan, bahçenin alanı dolu olduğu için yani içi bu şekiller gibi dolu olduğu için orada oyun oynanabilir.” şeklinde açıklamıştır. Katılımcının açıklaması incelendiğinde şeklin içinin dolu olması olarak ifade ettiğinin aslında şeklin kapladığı yer olduğu anlaşılmaktadır. Uygulamadan önce çevre ve alanın aynı olduğunu düşünen Neşe (5), öğretim seanslarının ardından alanı şeklin kapladığı yer ile ilişkilendirmektedir.

Mısra (7) da diğer katılımcılar gibi senasın başlangıcında bir şeklin kapladığı yer olarak şeklin sınırları ve iç bölgesini göstermiştir. Bu kaplanan yerin şeklin alanı olduğunu belirtmiştir. Araştırmacı düşüncesini biraz daha açıklamasını istediğinde “Çevre dış kısımları, alan ise iç kısımları.” demiştir. Telden yapılmış kapalı şekiller gösterildiğinde ise bir bölgeyi sınırlasa da alanı olmayacağını çünkü içinin boş olduğunu söylemiştir. Araştırmacı şekli bir kâğıt üzerine yerleştirerek bu şekilde düşünmesini istediğinde alanı olacağını çünkü içinin dolu olduğunu söylemiştir. Mısra (7) sadece açık şekillerin belirli bir yüzeyi sınırlamadıkları için alanları olmadığını düşünmektedir. Bir şeklin alanı olup olmadığını belirlerken neye dikkat ettiği sorulduğunda “Yer kaplıyor ve her yeri kapalı.” yanıtını vermiştir. Bir şeklin alanı olması için gereken tek şartın ise şeklin kapalı olması olduğunu belirtmiştir. Klinik görüşme sırasında Mısra (7) alanı sadece hesaplanması gereken bir değer olarak görmekte ve alan ile çevreyi birbirine karıştırmaktaydı. Yapılan öğretim seansları sonrasında aşina olduğu çokgenlerle sınırlı olan kavram imajını yer kaplayan her kapalı şeklin alanı olduğu şeklinde değiştirmiştir.

Gülce (8) ilk olarak Şekil 4.34.’de verilen üçgenin sınırladığı yüzeyi göstermesi istendiğinde üçgenin iç bölgesini göstermiştir. Ardından sınırlanan bu yüzeyi şeklin alanı olarak isimlendirmiştir. Bunun nedenini şu şekilde açıklamıştır: “Çünkü şu kenarları deseydik çevresi olurdu ama içi de yüzeyi de dahil olunca o şeklin bir alanı bir yüzeyini hesaplama oluyor.” Araştırmacı Gülce’ye (8) bir şeklin alanı olduğuna nasıl karar verdiğini sorduğunda “Düzenli bir kenarı olması, bir yüzeyi olması” cevabını vermiştir.

Gülce (8) nasıl bir şeklin alanı olmayacağını sorduğunda “Mesela dik yerine böyle bir yuvarlak şeklinde olsaydı şurası mesela, şunlar düzgün ama burası bir yamuk olsaydı alanı olmazdı.” cevabını vermiştir. Neden eğrisel bir şeklin alanı olmayacağını düşündüğünü şu şekilde açıklamıştır: "Yani olur ama ölçülemeyecek bir şekilde olduğu zaman alanı da bulamayız." Araştırmacı ölçülemeyen şekillerin alanı olmadığını mı düşündüğünü sorduğunda "Alanı vardır ama biz ölçemeyiz daha doğrusu" yanıtını vermiştir. Ardından düşüncesini yeniden değiştirerek Şekil 4.36.'daki gibi eğrisel bölümler içeren şekillerin alanı olmadığını düşündüğünü söylemiştir.



Şekil 4.36. *Gülce'nin (8) alanı olmadığını düşündüğü çeyrek daire*

Gülce (8) bu düşüncesini şöyle açıklamıştır: "Bence bunun (Şekil 4.36.) alanı olmaz. Çünkü hani şu iki tarafı düzgün bir şekilde hani ne yapılacağı belli ama burası böyle düzgün olmadığı için bu şeklin alanı bence olmaz." Araştırmacı bu aşamada şeklin belirli bir yüzeyi sınırlayıp sınırlamadığını sorduğunda "Sınırlıyor ama illa yapmak için bir alanın da ölçümünün belli olması gerekir. Bu şekil de hani bunlar gibi düzgün olmadığı için alanı yoktur." cevabını vermiştir. Gülce (8) uygulama öncesinde olduğu gibi hesaplayamayacağını düşündüğü şekillerin alanı olmayacağını ifade etmektedir. Araştırmacı bunu değiştirmek için alışkın olduğu şekiller ile ona farklı gelen kapalı eğriler arasında bir ilişki kurmasını sağlamaya çalışmıştır.

Araştırmacı Gülce'nin (8) daha önce alanı olduğunu söylediği altıgeni göstererek bu şeklin alan ölçüsünü nasıl hesaplayabileceğini sorunca Gülce (8) "Bu iki kenarın çarpımı değil miydi?" cevabını vermiştir. Gülce (8), uygulama öncesinde olduğu gibi dikdörtgenin alan formülünü aşırı genelleyerek, kenarlar eşit olduğu için onları çarpıp alan ölçüsünü bulabileceğini ifade etmiştir. Araştırmacı çeyrek daire için de benzer bir kural olup olmadığını sormuştur. Gülce (8) eğer bu şekil üçgen olsaydı iki kenarının çarpımının yarısıyla alan ölçüsünü bulabileceğini söylemiştir. Araştırmacı birim karelerden oluşmuş bir şekli göstererek çeyrek daireyi de benzer şekilde birim karelere ayırarak alan ölçüsünü hesaplamayı önermiştir. Gülce (8) eğrisel bölümlerde karelerin tam olmayacağını söyleyerek bu öneriyi önce kabul etmese de biraz düşündükten sonra kesirli birimleri birleştirme yöntemini kullanabileceğini söylemiştir. “Böyle düşünürsek alanını bulabiliriz. Vardır o zaman.” diyerek eğrisel şeklin de alanı olduğunu belirtmiştir.

Gülce (8) seans sonunda alanı şu şekilde tanımlamıştır: “Alan bir şeklin iç yüzeyinin ölçümü bence” Bu düşüncesini biraz daha açıklaması istendiğinde “Mesela bir karenin çevresini hesaplarken nasıl hani o kenarlarının hesaplanması gerekiyorsa bir alanın da o kenarlarının bir ölçümü olması gerekiyor ki o iç yüzeyini hesap … hani o iç yüzeyinin alanını bulabilelim.” Araştırmacı kenarı olmayan şekiller için ne düşündüğünü sorduğunda onlar için farklı formüller kullanıldığını söylemiştir. Gülce (8) bir şeklin alanı olması için kapalı olması yanında ölçülebilir olması gerektiğini ifade etmiştir.

4.2.2.2. ***Sınır bölgesi kavram imajının değişimi***

İlk klinik görüşmede sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar alan ile çevreyi birbirine karıştırmakta ve bu iki kavramı aynı şekilde göstermekteydiler. Her iki kavramı da şeklin sınırlarının dışındaki bölge ile ilişkilendirmekteydiler. Alanla ilgili ilk seansta katılımcılara sıklıkla karşılaştığı çokgenlerden başlayıp eğrisel kapalı şekillere doğru devam eden bir sırayla çeşitli şekiller gösterilerek alanı olup olmadığını söylemeleri istenmiştir. Alanı olduğunu düşündükleri şekillerin alanını göstermeleri, alanı olmadığını düşündükleri için ise bunun nedenini açıklamaları beklenmiştir. Aşağıda bu katılımcıların ilk seans boyunca düşüncelerinde yaşanan değişim açıklanmaktadır.

Katılımcılardan Can (7) ilk klinik görüşmede çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmış olsa da seansın başında çevre ve alanın birbirinden farklı olduğunu söylemiştir. Buna göre Can (7) çevre kavramı ile ilgili öğretim seansları sonrasında iki kavramın birbirinden farklı olduğunu anlamıştır. Can (7) başlangıçta alanın tam olarak ne olduğunu bilmediğini söylese de daha sonra “Bence bir şeklin iç kısmı” diyerek açıklamıştır. Buna uygun olarak incelediği şekillerin alanını göstermesi istendiğinde şekillerin sınırları içinde kalan bölgeyi işaret etmiştir. Ayrıca daha önce alanı olmadığını düşündüğü kapalı eğrilerin de çevresi ve alanı olduğunu söylemiştir. Can (7) artık çevreyi şeklin sınırları, alanı ise sınırların içinde kalan bölge ile ilişkilendirmektedir. Bir şeklin alanı olması için açık olmamasının yeterli olduğunu söylemiştir. Şekillerin içinin dolu veya boş olmasının alanı olmasını etkilemeyeceğini düşünmektedir. Seansın sonunda Can (7) alanı şu şekilde açıklamıştır: “Bence alan bir şeklin yani iç kısmı. Yani çevre hani bir şeklin sınırlarının ölçüsünü gösteriyorsa, yani dışarının ölçüsünü gösteriyorsa, alan da mesela bir şeklin iç ölçüsünü gösteriyordur.” Açıklamalarından anlaşıldığı gibi Can (7) başlangıçtaki oldukça sınırlı çevre ve alan kavram imajlarını formal tanımlara uygun olacak şekilde değiştirmiştir.

Katılımcılardan Fırat (6) da benzer olarak herhangi bir şeklin sınırlarının çevreyi, iç bölgesinin ise alanı gösterdiğini söylemiştir. Bir şeklin alanı olduğuna karar verirken kendi deyimiyle “şeklin iç kısmı” olmasına dikkat etmiştir. Açık şekillerin ise alanı olmadığını, çünkü belirli bir sınırları olmadığını ifade etmiştir. Buna göre Fırat (6) alan kavramının kapalı şekillere ait bir nitelik olduğunun farkındadır. Daha önce aşina olduğu çokgenlerle sınırlı olan alan kavram imajı çevreyle ilgili seanslardan sonra değişim göstermiştir. Çevreyle ilgili öğretim seansları sonrasında şekillerin eğri olmasının alanı etkilemeyeceğini “Hocam iç kısımları alan olduğu için hocam eğri büğrü olsa da yine bakın iç kısmı var, onun için.” şeklinde açıklamıştır. Fırat (6) bir şeklin alanı olabilmesi için sadece kapalı olmasına vurgu yapmaktadır. Kapalı herhangi bir şeklin sınırlarının içinde kalan bölge onun için alanı belirtmektedir.

Katılımcılardan Ceylan (6) seansın başında alanı göstermek için şeklin iç açılarını işaret etmiş ardından bunun daha farklı olduğunu ve alanla ilgili hiçbir şey hatırlamadığını söyleyince araştırmacı kâğıt üzerinde şekiller çizerek şeklin kapladığı yeri kâğıt üzerinde göstermesini istemiştir. Ceylan (6) bu şekillerin kapladıkları yeri gösterirken iç bölgelerini taramıştır. Araştırmacı kâğıt üzerinde taradığı bölgeyle şekli karşılaştırmasını ve kaplanan bu yerin kendisine neyi çağrıştırdığı sorunca Ceylan (6) “alan” yanıtını vermiştir. Şekil 4.37.’de Ceylan’ın (6) alanlarını belirlediği bu şekiller gösterilmektedir.

Şekil 4.37. *Ceylan’ın (6) alanlarını belirlediği şekiller*

Öğretim seansının ilerleyen bölümünde Ceylan (6), telden yapılmış kapalı şekillerle ilgili önce alanları olmayacağını, sadece çevreleri olduğunu söylemiştir. Araştırmacı, böyle şekillerin belirli bir yüzeyi sınırlandırıp sınırlandırmadığını sorunca, eğer şekli bir kâğıt üzerinde düşünürse belirli bir yüzeyi sınırlandırdığını söylemiştir. Daha sonra düşüncesini açıklamak için telden yapılmış şeklin sınırları boyunca kalemiyle ilerleyerek Şekil 4.37.'de gösterildiği gibi şekli kâğıt üzerine geçirmiş ve çizdiği bu şeklin iç bölgesini tarayarak bunun alanı gösterdiğini söylemiştir. Ceylan'a (6) göre bir şekil kapalı ve içi dolu olduğunda alanı olmaktadır. İlk klinik görüşmede kapalı eğrilerin alanı olmadığını söylemiş olsa da artık onların da alanı olduğunu düşünmektedir. Seans sonunda Ceylan (6) alanı şu şekilde tanımlamıştır:

> "İçi dolu her şekle alan denir… Alan olmasının bazı şartları vardır. Böyle kapalı bir şekil olması ve içinin dolu olması gerekiyor. Ama eğer böyle şekiller (açık) olursa, burası boş, bu alan olarak sayılmaz. Yani alan içi dolu olması gerekiyor. Sonra böyle bırakılmaması bir de ıı bir dakika kapalı olup içi dolu olması gerekiyor. Öyle olan şekillere de alan denir."

Katılımcılardan Filiz (8) klinik görüşmelerde alan konusunda oldukça zorlanmıştı. Bu nedenle araştırmacı Filiz (8) için diğer katılımcılara göre daha fazla seans planlamıştır. Başlangıçta Filiz'e (8) Şekil 4.34.'de verilen üçgen modelini göstererek "Belirli bir bölgeyi sınırları içine alıyor mu bu üçgen?" sorusunu yöneltmiştir. Filiz (8) "Sınırları içinde mesela bu sınırları içindedir." diyerek parmağını üçgenin kenarları üzerinde gezdirmiştir. Filiz (8) şeklin sınırladığı bölgeyi göstermesi istendiğinde sadece üçgenin sınırlarını işaret etmiştir. Araştırmacı iç bölgenin dahil olup olmadığını sorduğunda ise "Evet onlar da çünkü içinden geçiyor, belirli bir iç kısmından geçiyor." yanıtını vermiştir. Araştırmacı Filiz'e (8) üçgenin sınırladığı bu bölgenin neyi temsil ettiğini sorduğunda Filiz (8) "alan" yanıtını vermiştir. Filiz (8) Şekil 4.38.'de gösterilen diğer kapalı şekillerin de sınırlarını çevre, iç bölgelerini ise alan olarak isimlendirmiştir.

Şekil 4.38. *Filiz'in (8) alanını belirlediği şekillerden bazıları*

Araştırmacı daha önce kapalı eğrilerin alanı olmadığını söylediğini hatırlattığında Filiz (8) aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

> "Geçen sefer öyle demiş olabilirim ama işte sonradan bunu ölçebiliriz. Mesela ama cetvelle ölçemeyiz. Mesela burası eğri, ama iple yapmıştık biz. Mesela ipi buradan sardığımız zaman sonra kestiğimiz zaman bunu cetvele koyup ölçebiliriz. Yine bunları da (şeklin eğrisel olmayan bölümlerini gösteriyor) aynı şekilde yapabiliriz. O yüzden şu kısımlar. (Şeklin iç bölgesini gösteriyor)"

Araştırmacı iple ölçtüğü bölümlerin şeklin alanı mı olduğunu sorduğunda, Filiz (8) "evet" yanıtını vermiştir. Araştırmacı daha önce bu şekilde bulduğu değere çevre dediğini hatırlatmış, çevre ve alanın aynı şey mi olduğunu sormuştur. Filiz (8) "çevresi burası (şeklin sınırlarını gösteriyor), alan (şeklin iç bölgesini gösteriyor) … alanını ölçemeyiz yani böyle." Bunun üzerine araştırmacı ona bu şeklin alanını nasıl ölçebileceğini sormuştur. Filiz (8) yeniden bu şeklin alanını ölçemeyeceğini söylemiştir. Ardından araştırmacı birim karelerden oluşmuş şekilleri göstererek eğriler için de birim karelere ayırma yöntemiyle ölçüm yapıp yapamayacağını sormuştur. Filiz (8) tüm şekli karelerle doldurup daha sonra kareleri sayarak hesaplayabileceğini söylemiştir. Yaptığı açıklamalar incelendiğinde Filiz'in (8) artık çevre ve alan kavramlarının birbirinden farklı olduğunu kabul ettiği anlaşılmaktadır. Alan kavram imajının daha önce dahil olmayan kapalı eğrileri de içerdiği görülmektedir. Buna rağmen alan kavramını ölçme ile ilgili sorunlar yaşadığı açıktır. Bu nedenle daha sonraki seanslarda alan kavramı ile ilgili uygulamalara yer verilerek bu sınırlılıkların giderilmesine çalışılmıştır.

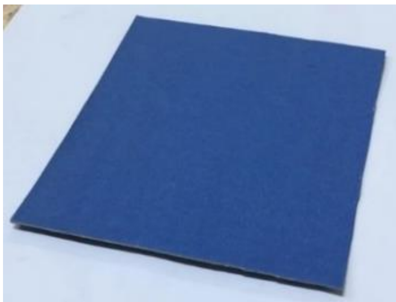
4.2.2.3. *Alan ile ilgili uygulamaların kavram imajlarında yarattığı değişim*

Alanla ilgili ilk öğretim seanslarında kavramın anlamı üzerinde durulurken sonraki seanslarda bu anlamın farklı noktalarının pekiştirilmesi amacıyla kavramın uygulamalarına odaklanılmıştır. Bu seansta katılımcıların alan ile ilgili olarak birim kavramını ve özelliklerini keşfetmeleri amaçlanmıştır. Birim kavramı ölçme ile ilgili tüm aşamalarda oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle katılımcıların alan ölçme biriminin niteliğini ve özelliklerini keşfedebilecekleri bir öğretim seansı planlanmıştır.

Öğretim seansının başlangıcında katılımcılardan Neşe (5) alanın ölçülemeyeceğini ifade etmiştir. Bunu şu şekilde açıklamıştır: "Alan ölçülemez. Çünkü biz alanı … alan … alanın içi ölçülemez çünkü alanın içi doludur. Sadece biz onun çevresini ölçebiliriz." Araştırmacı katılımcının bu düşüncesini değiştirebilmek için derslerden alışkın olduğu "Bir karenin alanı 20 santimetrekaredir" ifadesinin ne anlama geldiğini sormuştur. Neşe

(5) bu ifadeden ne anladığını "Alanı 20 santimetrekare derken … yani içinde 20 tane kare var." sözleriyle açıklamıştır. Araştırmacı 20 tane karenin şeklin hangi niteliğini gösterdiğini sorduğunda ise alanı gösterdiğini söylemiş, böylece alanının ölçüldüğünü kabul etmiştir. Araştırmacı alanın ölçülemeyeceğini söylerken neyi kastettiğini sorduğunda "Alanı biz yarıya bölerek … yarıya falan bölerek ölçebiliriz ama tam böyle bölmeden ölçemeyiz." yanıtını vermiştir. Zehra (5) ise alanın ölçülebileceğini şu şekilde ifade etmiştir: "İçindeki kısmı kareli kâğıt üzerinde birimle ölçebiliriz." Yaptıkları açıklamalardan anlaşıldığı gibi her iki katılımcı da alan ile birim kareleri ilişkilendirmiştir. Katılımcıların ilkokuldaki alan ölçme deneyimleri nedeniyle bu ilişkiyi kurdukları düşünülebilir. Çünkü ilkokul matematik öğretim programında alan ölçme öncelikle birim karelerle kaplama yoluyla ele alınmaktadır. Araştırma uygulandığı sırada 5. sınıf öğrencisi olan katılımcılar henüz bu sınıf düzeyinde alan ölçme deneyimine sahip değillerdir.

Katılımcılardan Fırat (6), Ceylan (6) ve Can (7) çevrenin bir şeklin sınırları, alanın ise iç bölgesi olduğunu söyleseler de Şekil 4.39.'daki dikdörtgen için ölçme yaparken her ikisini de kenar uzunluklarını cetvelle ölçüp buldukları değerleri toplayarak bulacaklarını belirtmişlerdir. Araştırmacı onların bu düşüncesini değiştirmek amacıyla çevre ve alan kavramlarının anlamına vurgu yapmıştır.



Şekil 4.39. *Ceylan'ın (6) alanını ölçtüğü dikdörtgen*

Aşağıda araştırmacı ile Ceylan (6) arasında geçen diyalog olarak verilmiştir:

Araştırmacı: Bunun ölçüsünü nasıl bulabilirsin, büyüklüğünü?

Ceylan: Cetvel ya da başka bir şeyle kenarlarını ölçüp de bulabilirim. İçten de ölçsem aynı şey çıkacak sonucu.

Araştırmacı: Nasıl bulacaksın cetvelle ölçüp?

Ceylan: Mesela bunun cetvelle bir kenarını ölçecem, sonra diğer taraflarını da. Hepsini toplayıp bütün bunun alanını bulucam.

Araştırmacı: Toplayarak mı bulacaksın?

Ceylan: Eğer bunlar (karşılıklı iki kenarı gösteriyor) eşitse mesela bu iki bu da iki bunları çarparak da bulabilirim karşılıklı. Mesela bu yedi, bu yedi, yedi yedi daha on dört yapıyor ya, şunlar da dört, iki kere iki dört, onları sonradan da toplayıp hem çarpma hem toplama işlemi de yapabilirim.

Araştırmacı bu konuşmanın ardından Ceylan'a (6) dikdörtgenin çevre uzunluğunu nasıl bulacağını sorduğunda alan için yaptığına benzer bir açıklama yaparak onu da kenar uzunluklarını toplayıp bulacağını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı alan ve çevreyi ölçmek için aynı işlemleri yapacağını söylediğini hatırlatarak çevre ile alanın aynı mı olduğunu sormuştur. Ceylan (6) bir süre sessiz kalıp düşündükten sonra aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Gelmiyor mu aklına bir şey? Ama bu senin fikrin. Bir cevap vermen lazım bana. Yani alan ve çevre sence aynı mı? Yoksa farklı mı?

Ceylan: Farklı ama mesela alanı ne bölme işlemiyle yapabilirim ne de başka bir işlemle.

Araştırmacı: Hani bildiğin tek işlem o olduğu için mi onu kullanıyorsun? Onu mu anlamalıyım?

Ceylan: Hayır. Hani toplayarak diyorum ya bölme yapsak sonuç çıkmaz ki zaten bunun alanı.

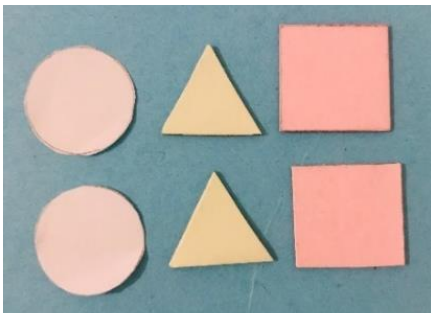
Araştırmacı: Neden ama? Niye ikisinde de topluyorsun kenar uzunluklarını?

Ceylan: …

Araştırmacı: Alanı dediğin yer şu iç kapladığı yüzey değil mi? Şu sınırlar arasında kalan yüzey demiştik. Peki o zaman bunu nasıl ölçecez? Kenar uzunluklarını toplayarak o yüzeyin hepsini nasıl ölçmüş oluyorsun? Ölçmüş olur musun bunları toplarsan?

Ceylan: Hayır.

Ceylan (6) yaptığı işlemle alan ölçüsünü bulamayacağını kabul etse de farklı bir yöntem öne sürememiştir. Bunun üzerine araştırmacı Şekil 4.40.'da verilen daha önceden hazırladığı birim kare, daire ve üçgenleri göstererek dikdörtgenin yüzeyini kaplamayı önermiştir.



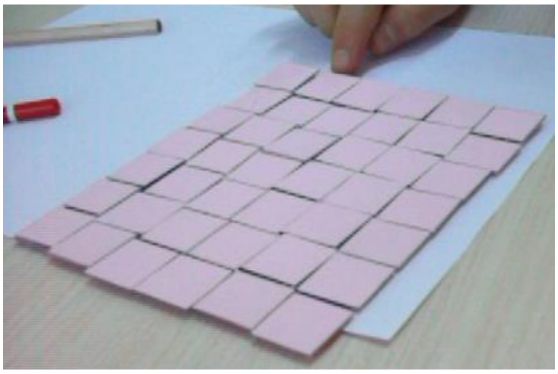
Şekil 4.40. *Alan ölçme için hazırlanan birim kare, üçgen ve daireler*

Ceylan (6) birim kareleri kullanmayı tercih etmiş, diğerlerinde şeklin yüzeyinin tamamen kaplanamayacağını, boşluk kalacağını söylemiştir. Ceylan (6) birim karelerle şeklin tüm yüzeyini kapladıktan sonra araştırmacıyla aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Şimdi tüm şekli kapladın buradaki karelerle. Bu karelerin, küçük karelerin alanı var mıdır?
>
> Ceylan: Evet çünkü bunların da içleri dolu.
>
> Araştırmacı: Peki, başlangıçtaki bu kapladığımız şeklin alanı var mıydı?
>
> Ceylan: Evet
>
> Araştırmacı: Şimdi bu küçük kareleri yerleştirdik, kapladık bütün yüzeyini. Bu kapladığımız yüzey şeklin neyi oluyor?
>
> Ceylan: …
>
> Araştırmacı: Bu kapladığımız yüzeye şeklin neyi demiştin daha önce?
>
> Ceylan: Alanı
>
> Araştırmacı: Alanı demiştin. Peki bu karelerin sayısını bulursak şeklin alanının ölçüsünü de bulmuş olur muyuz?
>
> Ceylan: Evet, buluruz.
>
> Araştırmacı: Nasıl emin oluyorsun bundan?
>
> Ceylan: Çünkü içini ne cetvelle ölçebiliyoruz ne de başka bir şeyle. Ama üstünü bir şeyle kapladığımızda bir de ona uygun olduğundan dolayı yani mesela üçgen olsaydı tam olmazdı. Bundan dolayı bunları sayarak zaten o bütün yerini kaplıyor dikdörtgenin. Onları bunları sayarak bulabiliriz alanını.

Görüldüğü gibi Ceylan (6) başlangıçta alanı uygun birimleri kullanarak ölçemezken araştırmacının müdahalesi sonrası birim kareleri kullanarak ölçüm yapabilmiştir. Ayrıca neden bu birimi seçtiğini de açıklayabilmiştir. Diğer katılımcılar da benzer şekilde alanı ölçmek için birim kareleri tercih etmişlerdir. Örneğin Neşe (5) neden birim kareleri tercih ettiğini “Kareleri kullanmak daha doğru olur. Çünkü mesela kareleri böyle sırasıyla koyarsak kareler tüm her tarafı kaplar. Ama üçgenlerin üçgensel kısmı bazı bölgeleri kaplamayabilir. Onun için karelerle daha doğru olur.” şeklinde açıklamıştır. Cetvelin çevre ölümünde kullanılabileceğini, alan için uygun olmadığını söylemiştir. Mısra (7) ise neden bu birimi seçtiğini “Bence kareler. Çünkü yuvarlakları iki yan birbirine birleştirirsek arada boşluklar oluşur. Ama biz her yeri hesaplayacağımız için … olmaz.” şeklinde açıklamıştır. Katılımcıların yaptığı açıklamalar incelendiğinde birim karelerin tüm yüzeyi boşluk bırakmadan kaplama özelliklerinin onları alan ölçme birimi olarak seçmelerinde etkili olduğu anlaşılmaktadır.

Katılımcılardan Zehra (5) diğerlerinden farklı olarak Şekil 4.41.'deki dikdörtgenin yüzeyini birim kareleri kullanarak kapladıktan sonra alanı ölçerken sınır hattındaki birim kareleri dahil etmemiştir. Araştırmacı şeklin alanını nasıl bulduğunu sorduğunda "Bir kenarı altı bu kenarı da yedi. Çevresi şurası olduğu için içi de alanı oluyor." açıklamasını yapıp alanı 20 bulduğunu söylemiştir.



Şekil 4.41. *Zehra'nın (5) alanını ölçtüğü dikdörtgen*

Araştırmacı Zehra'dan (5) düşüncesini biraz daha açıklamasını isteyince "Çünkü buraları sınırları (sınır boyunca yer alan birim kareleri gösteriyor) çevre oluyor. Bunları çıkardığımızda da bu iç bölgesi (sınır hattındaki birim kareler dışında kalanları gösteriyor) kaldığı için" cevabını vermiştir. Araştırmacı bu noktada araya girip sınır boyunca yer alan birim karelerin iç bölgeye dahil olup olmadığını sorduğunda Zehra (5) bu karelerin iç bölgeye dahil olduğunu söylemiştir. Neden onları alan ölçüsünü hesaplarken dahil etmediğini "Çünkü çevresini de belirlememiz gerekiyor. O yüzden bu kareleri kullanarak yapabiliriz diye düşündüm." şeklinde açıklamıştır. Bunun ardından araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Kareler uzunluk mu belirtir yoksa alanı mı belirtir?
>
> Zehra: Alanı
>
> Araştırmacı: Çevre neyi belirtir? Çevre alanla ilgili bir şey mi, uzunlukla ilgili bir şey mi?
>
> Zehra: Çevre uzunluk
>
> Araştırmacı: O zaman bunları (birim kareler) kullanarak nasıl uzunluğu ölçüyorsun? Orayı çok anlayamadım.
>
> Zehra: Bunlar bir birim kare sayarsak eğerki, sınırları aslında dikdörtgenin etrafına yaparak kaç birim kare olduğunu bulabiliriz birim kareleri koyarsak.
>
> Araştırmacı: Ama karenin alanla ilgili olduğunu söyledin çevrenin uzunlukla. Bir uzunluğu kareyle ölçebilir miyiz?

Zehra: Yani bir birim kare olarak sayarsak mesela bir karenin bir kenarının uzunluğu kaç santimse bunları böyle dizip aslında uzunluğunu da ölçebiliriz.

Araştırmacı: Yani kenar uzunluklarını kullanıyorsun. Karenin tamamını mı kullanıyorsun?

Zehra: Yok karenin tamamı değil.

Araştırmacı: O zaman neden karenin tamamını saymadın?

Zehra: Çünkü buraları sınırlar olarak belirledim. Karenin içinde … kare de sınırları oluşturuyor o yüzden saymadım ama sayılabilir aslında.

Bu konuşmanın ardından Zehra (5) satır ve sütunlardaki birim kareleri sayarak bulduğu değerleri çarpmıştır. Alanı bu şekilde bulduğunu söylemiştir. Neden çarptığını şu şekilde açıklamıştır: "Bu kenarı altı birim, bu kenarı da yedi birim. Bu kenarını tek tek altıyla basamaklarını kullanarak saymak yerine iki kenarının uzunluğunu çarpıp yapabiliriz." Araştırmacı tekrarlı sayma yöntemiyle de yaparak kontrol etmesini isteyince Zehra (5) birim kareleri sayıp çarparak bulduğu değere ulaşmıştır. Alan ölçüsünün bu şekilde bulunduğundan nasıl emin olduğunu şu şekilde açıklamıştır: "Çünkü sınırlar çevresi, içinde kalan bölgesi ise alanı. Hem biz bu karelerle içini doldurduk yani alanını." Açıklamasına uygun olarak şeklin çevresini hesaplamak için kenar uzunluklarını toplamıştır. Zehra'nın (5) yaptığı açıklamalar incelendiğinde düşüncesinin doğruluğunu savunurken kavramların anlamlarına vurgu yapması dikkat çekmektedir.

Katılımcılardan Neşe (5) ise alan ölçüsünü hesaplamak için Şekil 4.41.'deki dikdörtgenin yüzeyini kaplayan birim kare sayısını belirlerken bir satır ve bir sütundaki birim kareleri saymış ve bulduğu değerleri çarpmıştır (6 x 7 = 42). Birim olarak ise metrekareyi kullanmıştır. Araştırmacı birim karelerden birini işaret ederek bunun bir metrekare mi olduğunu sormuştur. Neşe (5) "evet" yanıtını verince araştırmacı bir metrenin kaç santimetre olduğunu sormuş, Neşe (5) "Bir metre yüz santimetredir." cevabını vermiştir. Ardından araştırmacı birim karenin kenar uzunluklarını ölçmesini istemiştir. Neşe (5) cetvelle bir birim karenin kenar uzunluğunu ölçerek 2 cm bulmuş ve daha önce seçtiği birimin yanlış olduğunu görmüştür. Birim olarak metrekare kullanmasının nedeni olarak sadece o şekilde hatırlamasını göstermiştir. Neşe (5) alan birimi olarak sadece metrekareyi hatırladığı için uygun olmasa da bu birimi kullanmıştır. Araştırmacının yönlendirmesiyle yaptığı ölçme sonucunda metrekarenin daha büyük yüzeyler için uygun olduğunu fark etmiştir. Bunun üzerine araştırmacı alan ölçüsünü hesaplarken kullandığı kareleri "birim kare" olarak isimlendirmeyi önermiştir. Neşe (5) bu karelerin sayısının alanı verdiğini söylemiş, dikdörtgenin alanı olarak 42 birim kare yanıtını vermiştir.

Katılımcılardan Ceylan (6) da dikdörtgenlerin alanını ölçmek için satır ve sütundaki birim kareleri sayıp bulduğu değerleri çarpmıştır. Bu yaptığının doğruluğunu şu şekilde açıklamıştır: "Çünkü zaten buradan buraya hep şey altı altı gidiyor. Yan yataylamasına da altı ay yedi yedi gidiyor. Bunla bunu sayınca çıkıyor." Buna göre Ceylan (6) alanı ölçmek için birim kareleri ritmik saymak yerine çarpma yapmaktadır. Dikdörtgendeki satır ve sütunlardan oluşan dizi yapısını kullanarak alan ölçüsünü hesaplamak için kısa bir yöntem geliştirmiştir.

Fırat (6) da diğer katılımcılara benzer şekilde çarpma işlemi yaparak dikdörtgenin yüzeyini kaplayan birim kare sayısını bulduğunu ifade etmiştir. Aşağıda araştırmacı ile aralarında geçen diyalog verilmiştir:

Araştırmacı: Bu kapladığımız yere şeklin neyi diyoruz?

Fırat: Şeklin alanı hocam.

Araştırmacı: Alanı. Peki bunun alanı kaç birim kare? Bunların her biri bir birim kare.

Fırat: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Altı sıra var hocam. altı, altı (sütunları gösteriyor).

Araştırmacı: Burası da mı altı (bir satırı gösteriyor)?

Fırat: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Yedi hocam. Yedi kere altı hocam, kırk iki hocam, kırk iki birim.

Araştırmacı: Nasıl biliyorsun bu çarpma işlemi sonucunda tüm kareleri bulacağını? Nasıl emin oldun?

Fırat: Hocam böyle yedi (bir satırı gösteriyor), yedi, yedi, yedi, yedi, yedi. Hocam 1, 2, 3, 4, 5, 6 (bir sütundaki birim kareleri gösteriyor) hocam. Yedi kere altı hocam böyle.

Araştırmacı: Yani yedişer yedişer mi saydın?

Fırat: Evet hocam.

Araştırmacı bu aşamada Fırat'ın (6) dikdörtgenin alanı için genel bir kural oluşturmasını sağlayabilmek için aşağıdaki konuşmayı yapmıştır.

Araştırmacı: Peki, bunları daha kolay nasıl bulabilirdin, hepsini yerleştirmeden? Yerleştirirken baya zorlandın çünkü. Daha kolay nasıl bulabilirdin?

Fırat: Hocam çizerek kare üstünde. Hocam o zaman daha zor olacak galiba. Bilmiyorum hocam.

Araştırmacı: Daha basit bir yöntem gelmiyor mu aklına? Tüm kareleri yerleştirmeden sadece bir kısmını yerleştirerek bulabilir misin mesela?

Fırat: …

Araştırmacı: Olmaz mı, illa hepsini yerleştirmek mi lazım?

Fırat: Olabilir hocam, böyle (komşu iki kenar boyunca parmağını gezdiriyor).

Araştırmacı: Yani şurayı ve şurayı bilsen yeterli mi senin için?

Fırat: Evet

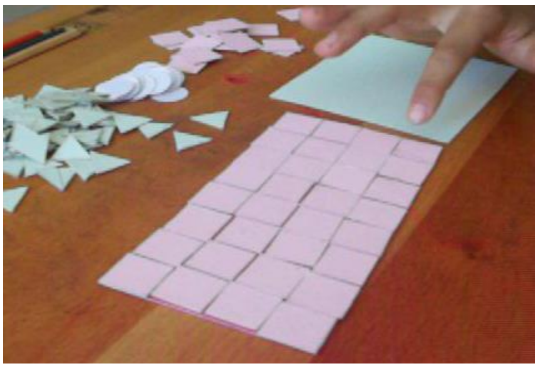
Araştırmacı: Şu satırı ve sütunu bilsen yeterli mi?

Fırat: Evet.

Fırat (6) kendisine daha sonra gösterilen dikdörtgenlerin alan ölçülerini hesaplarken tüm şekli birim karelerle kaplamak yerine sadece bir sütun ve bir satırı kaplamıştır. Satırdaki birim kare sayısını sütun boyunca ritmik sayarak alan ölçüsünü hesaplamıştır. Araştırmacı alan ölçüsünü daha farklı nasıl bulabileceğini sorduğunda bu sayıları çarparak da bulabileceğini söylemiştir. Araştırmacı çarptığı sayıların neyi ifade ettiğini sorduğunda satır ve sütundaki birim kareleri gösterdiklerini ifade etmiştir. Fırat'ın (6) daha önce ezbere kullandığı dikdörtgenin alan formülünü artık satır ve sütundaki birim kare sayılarıyla ilişkilendirdiği görülmüştür. Fırat (6) düşüncesini sözel olarak ifade etmekte zorlansa da dikdörtgenin alanı için satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarptığı anlaşılmaktadır.

Araştırmacı dikdörtgenlerin alanını ölçmek için tüm yüzeyi birim karelerle kaplamaktan daha kısa bir yöntem geliştirmesini istediğinde benzer bir yöntemi Zehra (5) da kullanmıştır. Zehra (5) alanı ölçmek için sadece bir satır ve bir sütun oluşturarak buradaki birim kare sayılarını çarpmıştır. Neden bu yöntemi kullandığını şu şekilde açıklamıştır: "Çünkü burası (satır) on birim kare, burasıysa (sütun) sekiz birim kare. Burayı sekiz sayarsak böyle katlarından oluşacak git gide yükselerek. Sekizle onu çarptığımızda kaç birim kare olduğunu bulacağız." Zehra (5) daha önce anlamını bilmeden, sadece ezbere kullandığı dikdörtgenin alan formülünü artık satır ve sütunlardaki birim kare sayılarıyla ilişkilendirmiştir.

Katılımcılardan Can (7) da Şekil 4.42.'deki dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamak için benzer bir yöntem kullanmıştır. Bu yöntemi şu şekilde açıklamıştır: "Hocam burada dört tane var (bir sütunu gösteriyor), burada da hocam sekiz tane koymuşuz (bir satırı gösteriyor) onlar da şeyi sırayı söyledim. Dörtle de zaten sekizi çarparsak otomatikman otuz iki." Burada bulduğu değerin şeklin alan ölçüsünü ifade ettiğini söylemiştir.



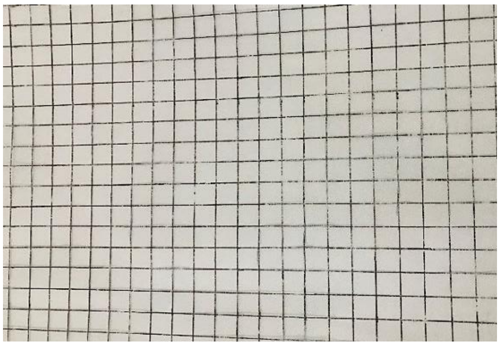
Şekil 4.42. *Can'ın (7) alanını hesapladığı dikdörtgenler*

Şekil 4.42'de gösterilen dikdörtgenin alan ölçüsünü tüm kareleri yerleştirmeden, kısa yoldan nasıl hesaplayabileceği sorulunca sadece komşu iki kenar boyunca birim kareleri yerleştirmenin yeterli olduğunu belirtmiştir. Can (7) uyguladığı yöntemi "uzun kenar ile kısa kenarı çarptım" şeklinde açıklamıştır. Daha önce de bu yöntemi uygulamakta fakat altında yatan nedeni açıklayamamaktaydı. Artık bu yöntemdeki çarpma işlemini satırdaki birim kare sayısını sütunlar boyunca yinelemek (veya tam tersi) şeklinde açıklayabilmektedir.

Katılımcılardan Mısra (7) ise başlangıçta dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamak için birim kareleri satırlar boyunca tek tek sayarak ilerlemiştir. Araştırmacı alan ölçüsünü daha kısa bir yöntemle bulmasını isteyince öğrenci "Belki şey yapabiliriz mesela burada kaç tane varsa yatay ve dikey kaç tane varsa onları çarpıp da yapabiliriz belki." cevabını vermiştir. Mısra (7) tüm şekli kaplayan birim kareleri saymanın uzun süreceğini, bu şekilde daha kolay bulunduğunu söylemiştir. Araştırmacı burada yaptıklarını matematiksel olarak ifade etmesini istediğinde ise çarpma işlemini kullanmıştır. Çarptığı sayıların satır ve sütundaki birim kare sayısını gösterdiğini belirtmiştir.

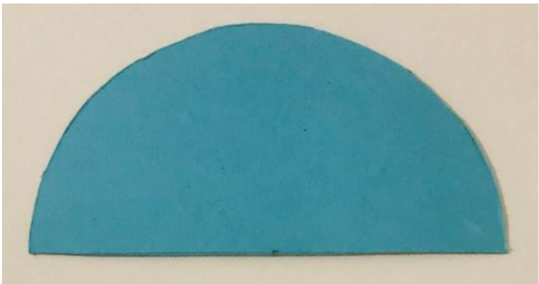
Katılımcılardan Filiz (8) alan ölçüsünü hesaplamak için birim kareleri satırlar boyunca tek tek dizerek tüm yüzeyi kaplamıştır. Araştırmacı bu yüzeyin içine kaç birim kare sığdığını sorunca birer birer sayarak 42 cevabını vermiştir. Bu değerin şeklin alan ölçüsünü verdiğini söylemiştir. Araştırmacı daha kısa bir yöntem bulmasını istemiş, fakat Filiz (8) bulamayacağını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı ona bir sütunda kaç kare olduğunu sormuş ve bu satırları tekrarlı saymaya yönlendirmiştir. Aynı yöntemi satırları yineleyerek de uygulamasını sağlamıştır. Araştırmacı Filiz'den (8) bu yaptıklarını bir matematik işlemiyle ilişkilendirmesini istemiştir. Filiz (8) burada kullandığı ritmik sayma yöntemini çarpma işlemi ile ilişkilendirmiştir.

Tüm katılımcılar dikdörtgenin alan formülünü anlamlandırmayı başardıktan sonra araştırmacı onları sırasıyla birkaç dikdörtgenin birleşiminden oluşan karmaşık şekillerin, dikdörtgenler dışındaki çokgenlerin ve son olarak kapalı eğrilerin alanlarını ölçmeye yönlendirmiştir. Katılımcılar derslerden alışkın oldukları birim kareleri çokgenler ve kapalı eğrilerin alan ölçümü için de kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu aşamada tek tek birim kareleri yerleştirmek zaman alacağı için araştırmacı Şekil 4.43.'de gösterilen birim karelere ayrılmış şeffaf bir materyal hazırlamıştır. Katılımcılar kapalı eğri yüzeyleri kaplayan birim kareleri sayarak alanlarını ölçmeye çalışmışlardır.



Şekil 4.43. *Birim karelere ayrılmış şeffaf yüzey*

Araştırmacı katılımcılardan Zehra'ya (5) kartondan yapılmış yarım daireyi gösterip alan ölçüsünü nasıl bulabileceğini sorduğunda alanı ölçmek için hangi birimi (birim üçgen, daire ve kare) kullanacağına karar vermekte zorlanmıştır. Zehra (5) önce yarım dairenin görünümüne bakarak dairelerle ölçebileceğini düşünmüş, bunu denediğinde ise boşluk kaldığını fark ederek daireleri kullanamayacağını söylemiştir. Araştırmacı üçgenler için ne düşündüğünü sorunca bu kez onları kullanarak şekli kaplamaya çalışmıştır. Şekil üzerine üçgenleri yerleştirdiğinde de boşluk kaldığı için onların da uygun olmadığına karar vermiştir. Araştırmacı kareler için ne düşündüğünü sorduğunda ise Zehra (5) birim karelerin eğri bölümü kaplamayabileceğini söylemiştir. Araştırmacı kesirli birimleri birleştirmeyi önerince Zehra (5) bu yöntemle alanı ölçebileceğini söylemiştir. Zehra'nın (5) alanını ölçtüğü yarım daire Şekil 4.44.'de verilmiştir.



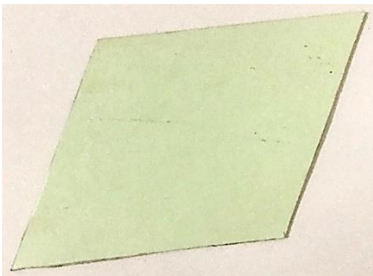
Şekil 4.44. *Zehra'nın (5) alanını ölçtüğü yarım daire*

Zehra'nın (5) kesirli birimleri daha rahat görebilmesi için araştırmacı birim karelere ayrılmış Şekil 4.43.'deki şeffaf yüzeyi şeklin üzerine yerleştirmiştir. Zehra (5) şeklin alanını ölçerken önce tam olan birim kareleri sayıp 94 bulmuş, ardından kesirli olanları birleştirerek tam kareler oluşturmaya çalışmıştır. Bu noktada Zehra (5) parçaların sayısının yarısını almanın daha kolay olacağını söylemiş ve saydığı 22 parçanın yarısı olan 11'i daha önce bulduğu 94 birim kareye eklemiştir. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğunu "İlk önce tam kare olanları saydık. Sonra şu yarım olanları yani tam bir kare etmemiş olanları saydık ve ikiye böldük. Çünkü her parçanın bir uyacağı bir şekil var." şeklinde açıklamıştır. Bu yöntemle tüm şeklin alan ölçüsünü bulduğunu belirtmiştir. Daha önce dikdörtgenin alan formülünü keşfetmiş olmasına rağmen burada birim kareleri birer birer sayma stratejisine geri dönmüştür. Şeklin görünümü ve birim karelerin varlığı onun bu yöntemi seçmesinin nedenleri olabilir.

Katılımcılardan Fırat (6) da benzer bir yöntemle kesirli birimleri eşleştirip bir tam oluşturarak alan ölçüsünü hesaplamıştır. Bu düşüncesini aşağıdaki diyalogda açıklamaktadır:

> Araştırmacı: Tamamını kaplıyor mu bu kareler?
>
> Fırat: Evet
>
> Araştırmacı: Ama şurada şöyle küçük parçalar kalıyor. Onları nasıl yapacağız?
>
> Fırat: Hocam her iki parça bir birim.
>
> Araştırmacı: Hııım, ikisini birleştirip bir birim mi yapıyorsun?
>
> Fırat: Evet

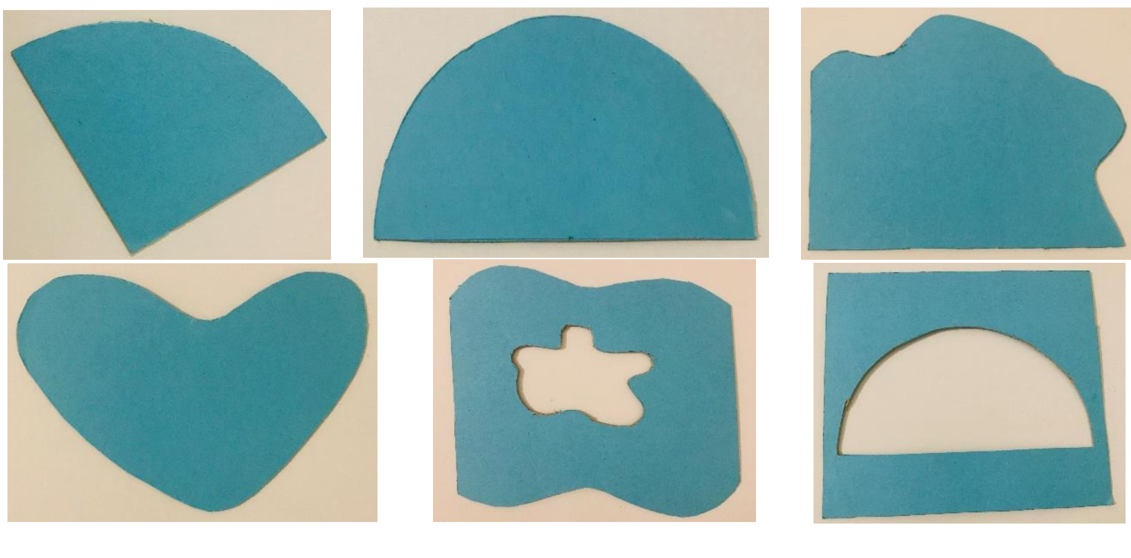
Katılımcılardan Neşe (5) ise başlangıçta kesirli birimler konusunda oldukça zorlanmıştır. Neşe (5) Şekil 4.45.'de gösterilen paralelkenarın alanını ölçmesi istendiğinde şekil üzerine yerleştirdiği bazı karelerin tam olmadıkları için sayılamayacağını söylemiştir. Neşe (5) uzun süre düşünüp kesirli birimler için kendisi bir yöntem geliştiremeyince, araştırmacı bazı arkadaşlarının tam olmayan birim kareleri birbirleriyle birleştirerek tamlar oluşturduklarını, böyle bir yöntemin uygun olup olmadığını sormuştur. Neşe (5) bu şekilde birleştirirse tamdan fazla veya az çıkacağını söylemiştir. Neşe (5) tam olanları bir birim kare, diğerlerini ise yarım, çeyrek gibi kesirli birimler olarak isimlendirmiş; fakat bu birimleri birleştirip tamlar oluşturmayı başaramamıştır.



Şekil 4.45. *Neşe'nin (5) alanını ölçtüğü paralelkenar*

Neşe'nin (5) kesirli birimlerle yaşadığı zorluk üzerine araştırmacı bu konuya yönelik ek bir seans tasarlamıştır. Neşe (5) bu kez kesirli birimleri birleştirirken her dört tanesinin bir tam kare yapacağını söylemiştir. Bunun sebebi olarak karenin dört kenarı olmasını göstermiştir. Araştırmacı bu noktada müdahale edip birbiriyle eşleşen iki kesirli birimi örnek göstererek bir tam kare yapıp yapmadığını sorunca Neşe (5) "Bir kare yapar." yanıtını vermiştir. Bu örneğin ardından araştırmacının da yardımıyla kesirli birimleri diğerleriyle eşleştirerek bir tam oluşturmaya çalışmıştır. Neşe'nin (5) kesirli birimler konusunda yaşadığı bu zorluğun temelinde büyük oranda kesir kavram imajındaki sınırlılıklar bulunmaktadır. Neşe (5) alan birimlerinin parçalanıp birleştirilebileceğini kabul etse de bu parçaları sayısal olarak nasıl ifade edeceğini kestiremediği için zorluk yaşamaktadır.

Katılımcılardan Mısra (7) ise başlangıçta alan ölçümünde karşılaştığı kesirli birimleri yok saymayı tercih etmiştir. Araştırmacı kesirli birimlerin alan ölçüsüne dahil olup olmadığını sorduğunda Mısra (7) dahil olduklarını, kesirli birimleri yok sayarsa tüm alan ölçüsünü bulmuş olmayacağını söylemiştir. Tüm alan ölçüsünü bulmak için nasıl bir yol izlemesi gerektiğini ise bilmediğini ifade etmiştir. Bunun üzerine araştırmacı bazı arkadaşlarının kesirli birimleri birleştirerek bir tam birim oluşturduklarını bunun doğru olup olmadığını sormuştur. Bunun ardından Mısra (7) araştırmacının önerdiği yöntemi kendince yorumlamış, kesirli birimleri (onun deyimiyle yarımlar) eşleştirerek bir tam oluşturup sayacağını söylemiştir. Bu yöntemi uygulayarak Şekil 4.46.'da gösterilen diğer kapalı eğrilerin alanını ölçmüştür.



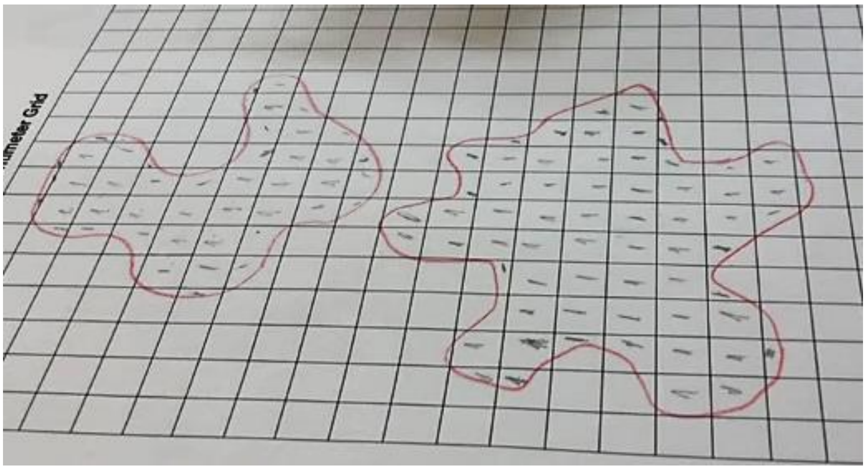
Şekil 4.46. *Mısra'nın (7) alanını ölçtüğü kapalı eğriler*

Filiz (8) de Şekil 4.46.'daki kapalı eğrilerin alanlarını ölçmek için benzer bir yöntem uygulayarak birim kareleri tek tek sayıp alanı ölçmüştür. Sayma işlemine tam karelerle başlayıp ardından kesirli olanları birleştirerek tam kareler elde etmiş ve daha önce bulduğu değere eklemiştir. Katılımcılar kesirli birimlerin de alana dahil olduğunun farkında olsalar da bu birimleri ölçüme nasıl ekleyebileceklerini bilmemektedirler. Kesirlerle ilgili kavram imajlarının yeterli düzeyde olmaması onların alan kavram imajlarını da etkilemektedir.

Katılımcılardan Gülce'nin (8) başlangıçtaki alan kavram imajının içerdiği en önemli sınırlılık eğrisel şekillerin alanları olmadığını düşünmesi olduğu için araştırmacı öğretim seanslarında çokgenlerden ziyade bu konu üzerine yoğunlaşmıştır. Araştırmacı Gülce'ye (8) farklı kapalı eğriler göstererek bir yüzeyi sınırlandırıp sınırlandırmadıklarını sormuştur. Gülce (8) gösterilen her şeklin iç bölgesini kalemle tarayarak şeklin bu taranan yüzeyi sınırlandırdığını söylemiştir. Sınırlandırılan bu bölgenin şeklin alanını, sınırların ise çevresini gösterdiğini belirtmiştir. Düzensiz bir kapalı eğri gösterildiğinde ise bunun alanı olmayacağını söylemiştir. Ardından araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Neden olmadığını düşünüyorsun?
>
> Gülce: Çünkü bunda hani mesela bundaki (dört doğru parçası ve bir yaydan oluşmuş şekli gösteriyor) gibi hani ölçülebilir burası yine ya da şöyle düz bir kısmı olduğu zaman ölçülebilir ama burada … onlardan pek şey olmadığı için karışık olduğu için ölçülemez.
>
> Araştırmacı: Peki alan sadece formülle mi ölçülebilir?
>
> Gülce: Sadece formülle değil mesela kare ve dikdörtgenlerde onun farklı çarpma işlemiyle ama bu tür şeylerin mesela daire gibi şekiller formülle.
>
> Araştırmacı: Anladım. Peki daha farklı bir ölçüm yöntemi var mı bildiğin?
>
> Gülce: Hayır.
>
> Araştırmacı: Peki ölçme kısmını karıştırmasak bunun sadece bir yüzeyi sınırlandırıp sınırlamadığını sorsam?
>
> Gülce: Sınırlandırır.
>
> Araştırmacı: Nereyi sınırlandırır?
>
> Gülce: (şeklin iç bölgesini kalemle tarıyor) İç kısmını.
>
> Araştırmacı: İç kısmı. Peki daha önceki şu şekillerde (daha önce öğrencinin alanı olduğunu söylediği daire ve elipsi gösteriyor) böyle sınırlandırdığı zaman alanı olduğunu söylemiştin. Bu da bir yüzeyi sınırlandırıyor. O zaman bunun alanı var mı, yok mu?
>
> Gülce: Alanı vardır o zaman.

Gülce (8) şeklin alanı olduğunu; fakat ölçme konusunda tereddütleri olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının gösterdiği diğer kapalı eğrilerin de iç bölgelerini alan, sınırlarını çevre olarak isimlendirmiştir. Araştırmacı Gülce'nin (8) yaşadığı zorluğu gidermek için bir santimetrekarelik bölümlere ayrılmış bir kâğıt üzerine çeşitli kapalı eğriler çizerek ondan her birinin alanını hesaplamasını istemiştir. Şekil 3.47.'de Gülce'nin alanlarını ölçtüğü kapalı eğrilerden ikisi gösterilmiştir.



Şekil 4.47. *Gülce'nin (8) alanlarını ölçtüğü kapalı eğriler*

Araştırmacı ve Gülce (8) arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Nasıl bir şey düşünürsün, nasıl bir strateji kullanırsın?

Gülce: Alanı ölçeceksek şu kareleri kullanacak mıyız?

Araştırmacı: Bu karelerin her birinin bir santimetrekare olduğu biliniyor. Buna göre bu şeklin alanını bulabilir misin?

Gülce: Karelerin alanlarını bulurum, ona göre sayarım. Yarım olanları da sadece buralar kalıyor, onları da birleştirerek yapabiliriz.

Araştırmacı: Bir dene bakalım. Bu şeklin alanı neresidir?

Gülce: İç yüzeyi

Araştırmacı: Peki, hesapla bakalım. Karelerin her biri bir santimetrekare olarak verilmiş.

Gülce: (Öğrenci satırlar boyunca ilerleyerek tam olan birim kareleri sayıyor, saydıklarının üzerini işaretliyor) Buralar toplam on dokuz oluyor.

Araştırmacı: Peki, diğer kalanlar için ne düşünürsün?

Gülce: Bunu (kesirli birimlerden birini gösteriyor) tamamlamak için bir şekil …

Araştırmacı: Mesela yanındaki kullansan bir tam yapar mı onlar yaklaşık?

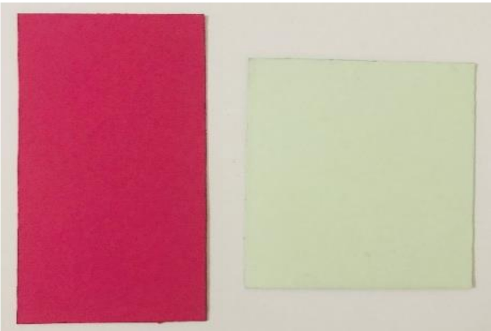
Gülce: Yaklaşık olarak yapar ama tam olarak yapmaz.

Araştırmacı: Nereyi alabilirsin?

Gülce: Bununla bunu alırım. (Öğrenci bir tam oluşturacağını düşündüğü başka bir parçayı gösteriyor)

Bu aşamadan sonra Gülce (8) kesirli birimleri bir tam kare oluşturacak şekilde eşleştirmeye devam etmiştir. Şekli kaplayan tüm birim karelerin sayısını 33 bulmuştur. Araştırmacı daha önce alan ölçüsünü hesaplayamayacağını söylediği şekiller için de bu yöntemi kullanıp kullanamayacağını sorduğunda kullanabileceğini belirtmiştir. Araştırmacı bahsi geçen şekilleri kareli kâğıda aktarıp ondan alanlarını ölçmesini istemiştir. Gülce (8) bu şekiller için de önce tam kareleri, ardından kesirli olanları birleştirerek saymış ve alanlarını ölçmüştür.

Katılımcıların birçoğu alanları karşılaştırırken şekillerin görünümlerine odaklanmıştır. Örneğin katılımcılardan Mısra (7) ve Zehra (5) Şekil 4.48.'de gösterilen dikdörtgenlerden eni daha geniş olan dikdörtgenin alan ölçüsünün daha büyük olacağını tahmin etmişlerdir. Zehra (5) seçtiği dikdörtgenin alan ölçüsünün neden daha büyük olduğunu "Çünkü hem bu geniş bu ama ince uzun" şeklinde açıklamıştır. Mısra (7) ise düşüncesini "Çünkü bu (pembe dikdörtgen) boyuna uzun, bu (yeşil dikdörtgen) geniş, enine uzun. Bence enine uzun daha büyüktür." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı ölçüm yaparak tahminlerini kontrol etmelerini istemiştir. Ölçüm sonucunda tahminlerinin yanlış olduğunu görmüşlerdir. Katılımcılar daha önceki seanslarda olduğu gibi satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarparak alan ölçüsünü hesaplamıştır. Ritmik saymak yerine bu şekilde kısa yoldan çarpma yaptıklarını belirtmişlerdir. Kapalı eğrilerin alan ölçüsünü hesaplarken birim kareleri tek tek sayma stratejisine geri dönen katılımcılar, dikdörtgenler söz konusu olduğunda satır-sütun ilişkisini kullanma stratejisini uygulamışlardır.

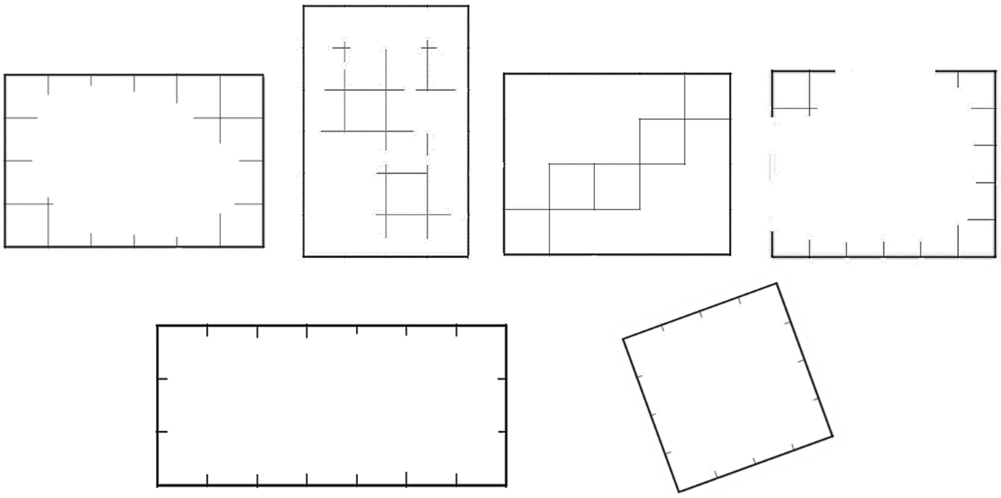


Şekil 4.48. *Alanları karşılaştırılan dikdörtgenler*

Katılımcılardan Neşe (5) ve Fırat (6) ise Şekil 4.48.'de verilen dikdörtgenlerin alanlarını karşılaştırırken iç bölgelerinin büyüklüğüne odaklanmıştır. Fırat (6) düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: "Bunun iç alanı daha büyüktür." Neşe (5) ise düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: “Alanları için bununki (yeşil dikdörtgen) daha büyüktür, çünkü bunun iç kısmı daha büyük olduğu için bununki daha büyüktür.” Araştırmacı bu tahminini ölçme yaparak kontrol etmesini isteyince Neşe (5) birim kareler yardımıyla her iki dikdörtgenin alanlarını ölçmüştür. Bunu yaparken birim kareleri satırlar boyunca birer birer saymış, daha önce geliştirdiği satır-sütun ilişkisini içeren stratejiyi kullanmamıştır. Ancak araştırmacı başka bir yoldan nasıl bulabileceğini sorunca daha önce geliştirdiği bu stratejiyi kullanmıştır. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğu sorulunca “Çünkü ben buraları saydım, burası (satır) on çıktı. Burada on iki tane on yan yana dizilmiş bir şekilde. Bunu kısa yoldan yaparak bulabiliriz.” cevabını vermiştir. Yaptığı ölçme sonucunda başlangıçtaki tahmininin yanlış olduğunu görmüştür. Pembe renkli dikdörtgen daha uzun olduğu için alan ölçüsünün daha fazla olmuş olabileceğini söylemiştir.

Ceylan (6) ve Filiz (8) de yine tahminlerini Şekil 4.48.’deki dikdörtgenlerin görünüşlerine dayandırsalar da diğer katılımcıların aksine kenar uzunlukları birbirine yakın olan dikdörtgenin alan ölçüsünün daha küçük olacağını söylemişlerdir. Filiz (8) bu düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: “Mesela her bir kareyi mesela buradan (hayali bir satırı gösteriyor) ilerlesek daha fazla olacak uzunlamasına. Bunların her birini alt alta yaptığımızda çok fazla olduğu için bunu dedim.” Ardından birim kareler yardımıyla alanlarını ölçerek tahminlerini kontrol etmiştir. Ölçme yaparken Filiz (8) birim kareleri tek tek saymış, Ceylan (6) ise bunun yerine birer satır ve sütundaki birim karelerin sayısını çarpmıştır. Ceylan (6) bulduğu sonucun doğruluğundan nasıl emin olduğu sorulunca tek tek veya ritmik sayarak aynı sonuca ulaşacağını söyledikten sonra ritmik sayarak bunun doğruluğunu göstermiştir. Katılımcılar yaptıkları ölçme sonucunda tahminlerinin doğru olduğunu görmüşlerdir. Ceylan (6) kendisinden karmaşık şekillerin alanlarını karşılaştırması istendiğinde ise şekilleri dikdörtgen, kare, üçgen gibi kendisine tanıdık gelen parçalara ayırıp her parçanın alan ölçüsünü hesapladıktan sonra bu değerleri toplamıştır. Bu yöntemin doğruluğundan nasıl emin olduğu sorulunca tek tek saydığında da aynı sonucu vereceğini belirtmiş, ardından birim kareleri tek tek sayıp her iki yöntemle aynı değerler çıktığını göstermiştir.

Araştırmacı Filiz’den (8) birim kareleri tek tek saymak yerine daha kısa bir yöntem geliştirmesini isteyince “Burası (bir sütunu gösteriyor) on, burası da on, on, yirmi, otuz, kırk, …, yüz on, yüz yirmi” şeklinde ritmik sayma yapmıştır. Araştırmacı bir sütunun bu şekilde kaç kez tekrar ettiğini sorarak Filiz’i (8) çarpma işlemine yönlendirmeye çalışsa da o bu ilişkiyi (daha önce kurmuş olmasına rağmen) kuramamıştır. Bu nedenle Filiz'in (8) dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamak için genel bir kural oluşturmasını sağlamak amacıyla araştırmacı ek bir öğretim seansı planlamıştır. Bu seansta araştırmacı Filiz'den (8) Şekil 4.49.'da gösterilen dikdörtgenlerin alanlarını hesaplamasını istemiştir.



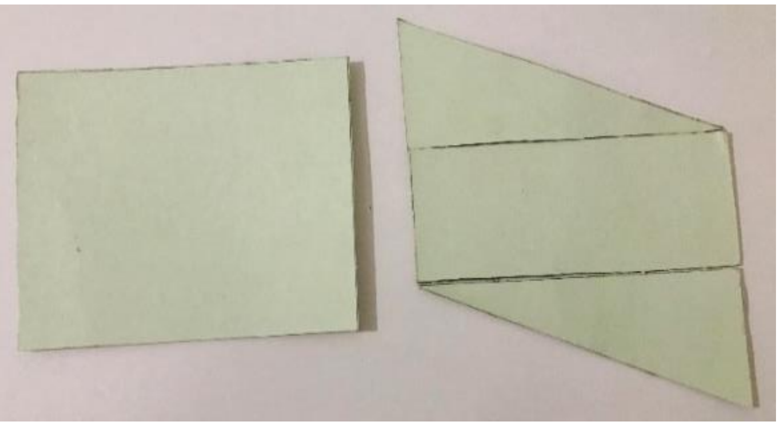
Şekil 4.49. *Filiz'in (8) alanlarını hesapladığı dikdörtgenler*

Filiz (8) başlangıçta tüm kareleri teker teker çizip saymıştır. Bunu yaparken çizdiği karelerin boyutları birbirinden farklı olduğu için araştırmacı bu durumun bir sorun olup olmayacağını sormuştur. Filiz (8) bunun sorun olmayacağını, çizdiklerinin yine de kare olduklarını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı soruyu biraz daha netleştirerek hepsini bir birim kare olarak sayıp sayamayacağını sorduğunda Filiz (8) "Hayır. Bunlar mesela eşit olsun ki bir bir olarak sayabilelim." cevabını vermiştir. Filiz (8) cetvel yardımıyla birbirine eş kareler çizdikten sonra bunları birer birer sayarak alan ölçüsünü hesaplamıştır. Araştırmacı daha kısa bir yoldan bulmasını istediğinde üçer üçer sayabileceğini söylemiş ve ritmik sayarak hesaplamıştır. Uyguladığı bu yöntemi bir matematik işlemi ile göstermesi istenince çarpma yapabileceğini söylemiştir. Diğer dikdörtgenlerde birim kareleri çizdikten sonra birer satır ve sütundakilerin sayısını çarparak alan ölçüsünü hesaplamıştır. Görüldüğü gibi Filiz (8) seans sonunda satır-sütun ilişkisini alanı ölçmek için kullanabilmektedir. Fakat hala şekli kaplayan tüm birim kareleri somut olarak çizmesi gerekmektedir.

4.2.2.4. *Alan korunumuyla ilgili uygulamaların kavram imajlarında yarattığı değişim*

Katılımcıların alan korunumu ile ilgili düşüncelerini ortaya çıkarmak için planlanan öğretim seansında şekiller parçalara ayrılıp farklı bir görünümle yeniden birleştirilerek katılımcıların başlangıçtaki ve son durumdaki şekillerin alanlarını karşılaştırması istenmiştir. Ayrıca alan ve çevre kavramları arasındaki farklara dikkat çekmek amacıyla katılımcılardan bu şekillerin çevrelerini de karşılaştırmaları istenmiştir. Katılımcılardan ilk ve son durumdaki şekillerin alan ve çevre ölçülerini önce tahmin etmeleri, ardından ölçüp hesaplamaları istenmiştir.

Katılımcılardan Zehra (5) seansın başlangıcında kartondan bir dikdörtgenin alanını göstermesi istendiğinde parmağıyla şeklin iç bölgesini tarayarak "alanı sınırları dışında kalan iç kısmı" şeklinde cevap vermiştir. Aynı şeklin çevresini gösterirken parmağıyla şeklin sınırını takip ederek "çevresi alan dışında kalan sınırları" açıklamasını yapmıştır. Zehra'nın (5) yaptığı açıklamalardan artık çevre ve alan kavramlarının birbirinden farklı olduğunu düşündüğü, çevre ve alanı formal tanıma uygun olarak açıklayabildiği ve şekil üzerinde gösterebildiği anlaşılmaktadır. Araştırmacı bir dikdörtgeni kısa kenarının ortasından uzun kenarına paralel olacak şekilde keserek önce iki eş dikdörtgene ayırdığını, ardından dikdörtgenlerden birini köşegeninden keserek iki üçgen elde ettiğini söylemiştir. Söylediklerini daha önceden hazırladığı somut materyaller yardımıyla Zehra'nın (5) gözleri önünde parçalara ayırıp yeniden birleştirerek Şekil 4.50.'de gösterilen dikdörtgen ve paralelkenarı oluşturmuştur. Ardından oluşturduğu bu şekillerin alanlarını karşılaştırmasını istemiştir.



Şekil 4.50. *Alan korunumu için hazırlanan dikdörtgen ve paralelkenar*

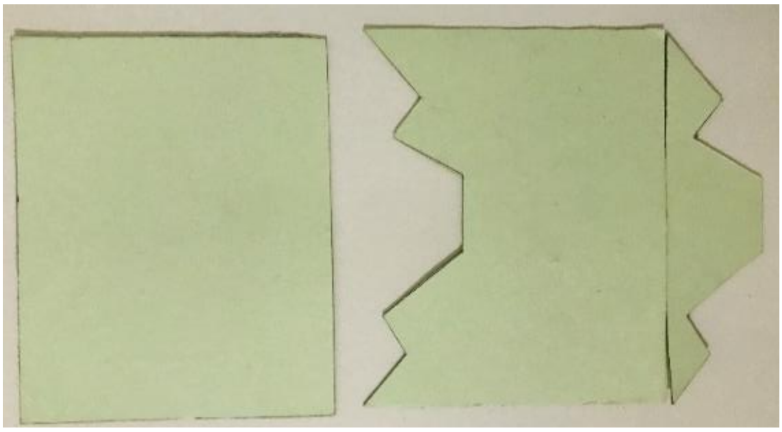
Zehra (5) yan yana gösterilen iki şekle bakarak "Ben ikisi eşittir diye düşünüyorum" cevabını vermiştir. Bunun nedenini "Çünkü bu parçaların (son durumdaki paralelkenarı gösteriyor) birleşmiş hali bu (başlangıçtaki dikdörtgeni gösteriyor)." şeklinde açıklamıştır. Bundan nasıl emin olduğu sorulunca "Çünkü daha demin bu üçgeni şuraya koyduğumuzda bu şeklin (başlangıçtaki dikdörtgeni gösteriyor) aynısı çıkmıştı." cevabını vermiştir. Araştırmacı bu düşüncesini şekil üzerinde göstermesini isteyince üçgenin yerini değiştirip şekli başlangıçtaki dikdörtgene dönüştürmüştür. Zehra (5) burada düşüncesinin doğruluğunu açıklarken şekil konum değiştirdiğinde (ötelendiğinde) sahip olduğu alanın değişmeyeceği fikrinden yararlanmaktadır. Henüz bununla ilgili formal bir öğretim almamasına rağmen sezgisel olarak öteleme kavramına değinmiştir. Araştırmacı ölçme yaparak bu düşüncesinin doğruluğunu kontrol etmesini istediğinde birim kareli şeffaf yüzey yardımıyla şekillerin alanlarını ölçmüş ve tahmininin doğruluğunu göstermiştir.

Katılımcılardan Filiz (8) ve Mısra (7) da araştırmacı Şekil 4.50.'de gösterilen dikdörtgeni parçalara ayırıp farklı bir biçimde yeniden birleştirdiğinde alanın başlangıca göre değişmeyeceğini belirtmiştir. Bu düşüncesinin nedeni sorulunca Mısra (7) "Aynı parçalardan olduğu için bence eşittir." cevabını vermiştir. Araştırmacı nasıl emin olabileceğini sorunca Mısra (7) "Ölçerek bulabiliriz." demiştir. Filiz (8) de benzer açıklamalar yapmıştır. Mısra (7) ilk kez birim kareleri sayıp ölçme yaptığında alanların birbirinden farklı olduğunu bulsa da tekrar saydığında Filiz (8) gibi o da aynı olduklarını görmüştür. Araştırmacı saymak dışında eşit olduklarını nasıl gösterebileceğini sorunca Mısra (7) "Belki şu şekilleri (paralelkenarı oluşturan parçaları gösteriyor) şunun (dikdörtgeni gösteriyor) üstüne koyarsak" önerisini sunmuştur. Araştırmacı denemesini isteyince parçaları dikdörtgenin üzerine yerleştirip çakıştıklarını görmüş ve aynı olduklarını söylemiştir. Mısra (7) düşüncesini "Eğer burada fazlalık ya da az bir şey olsaydı sonucun farklı çıkacağı belli olurdu." şeklinde açıklamıştır. Mısra (7) alan korunumu ile ilgili düşüncesini savunmak için şekilleri üst üste çakıştırarak eşleme yapmıştır. Araştırmacı daha farklı biçimlerde birleştirilseydi alanın nasıl olacağını sorunca her ikisi de alanın değişmeyeceğini söylemiştir.

Katılımcılardan Ceylan (6) ve Can (7) senasın başlangıcında Şekil 4.50.'de gösterilen dikdörtgenin parçalara ayrılıp yeniden düzenlenmesiyle alanının başlangıca göre daha farklı olduğunu (son halinin alanı daha büyük) söylemiştir. Bunun nedenini Can (7) şöyle açıklamıştır: "Hocam hani siz bunu ayırdığınızda bunun hani yarımları olduğu için ben de hocam bunun daha fazla çıkacağını düşündüm o yüzden.” Ceylan (6) da şeklin görünümüne odaklanan benzer bir açıklama yapmıştır. Araştırmacı bu cevabın ardından başlangıçtaki ve son durumdaki şeklin alanını ölçerek karşılaştırmalarını istemiştir. Ceylan (6) ve Can (7) dikdörtgen için satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarparak, paralelkenar için birim kareleri tek tek sayarak alan ölçülerini hesaplamışlardır. Ceylan (6) ölçme sonucunda fark ettiği eşitliği şekilleri üst üste çakıştırıp eşleştirerek desteklemiştir. Yaptıkları ölçme sonucunda her ikisi de bir şekil parçalara ayrılıp yeniden düzenlendiğinde sahip olduğu alanın değişmediği sonucuna ulaşmışlardır. Araştırmacı Can’dan (7) parçaları farklı biçimlerde yeniden birleştirip düşüncesini açıklamasını istediğinde yine alanın değişmeyeceğini söylemiştir. Can (7) daha önce ölçme yaparak ulaştığı sonucu farklı durumlara uyarlayabilmektedir.

Katılımcılardan Gülce (8) de Şekil 4.50.’de gösterilen dikdörtgen parçalara ayrılıp yeniden düzenlendiğinde alanın değişmeyeceğini belirtmiştir. Bunun nedenini şu şekilde açıklamıştır: “Çünkü zaten hani o şeklin parçalara ayrılmış hali hani onda nasılsa bunda da aynıdır. Araştırmacı ölçme yaparak kontrol etmesini istemiştir. Gülce (8) dikdörtgenin alan ölçüsünü satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarparak hesaplamıştır. Gülce (8) dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunlukları çarpıldığında alan ölçüsünü bulduğunu söylemiştir. Paralelkenarın alan ölçüsünü hesaplarken her parçanın alan ölçüsünü ayrı ayrı hesaplayıp toplamıştır. Üçgen parçalar için dik kenar uzunlukları çarpımının yarısı formülünü uygulamıştır. Dikdörtgen parça içinse daha önce açıkladığı gibi kenar uzunlukları çarpımını uygulamıştır. Yaptığı hesaplamalar sonucunda alanın değişmediğini bulmuştur. Herhangi bir şekil yeniden düzenlendiğinde de alanın yine değişmeyeceğini söylemiştir. Gülce (8) daha önce olduğu gibi düşüncesinin doğruluğunu savunmak için ölçme ve hesaplamayı kullanmaktadır. Problem durumuna uygun formül ve algoritmaları uygulayarak hesaplamalar yapmaktadır.

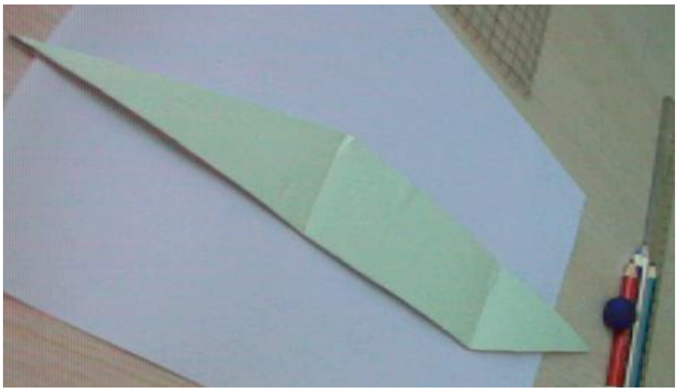
Katılımcılardan Fırat (6) da benzer olarak Şekil 4.51.’de gösterilen dikdörtgenden rastgele bir parça kesilip farklı bir biçimde yeniden birleştirildiğinde ilk ve son durumdaki şekillerin alanlarının eşit olacağını belirtmiştir. Bu düşüncesinin nedenini “Hocam bu parça buranın parçası olduğu için hocam bunu buradan kaldırıp alta koysanız hocam değişmez. Yani bu parça hep aynı ve aynı şekilde olduğu için hocam aynı alanı olur.” şeklinde açıklamıştır.



Şekil 4.51. *Alan korunumu için hazırlanan dikdörtgen ve konkav çokgen*

Fırat (6) da Zehra (5) gibi her iki şekil aynı parçalardan oluştuğu ve bu parçaların konumu değişse de alanları değişmeyeceği için iki şeklin alanlarının eşit olduğunu belirtmiştir. Araştırmacı ölçüm yaparak kontrol etmesini istediğinde dikdörtgenin alan ölçüsü için birer satır ve sütundaki birim kare sayısını çarpmıştır. Ritmik saymanın kısa yolu olarak çarpma kullandığını belirtmiştir. Son durumdaki şeklin alan ölçüsünü ise birim kareleri tek tek sayarak ölçmüştür. Ölçümleri sonucunda şekillerin alanlarını eşit bulmuştur. Araştırmacı parçaları daha farklı biçimlerde birleştirdiğinde de Fırat (6) alanların aynı olacağını söylemiştir.

Katılımcılardan Neşe (5) araştırmacı Şekil 4.50.'de gösterilen dikdörtgeni parçalara ayırıp yeniden düzenlediğinde ilk olarak alanların eşit çıkacağını düşünmüştür. Ölçüm yaparak bu tahmininin doğruluğunu göstermiştir. Fakat araştırmacı aynı parçaları kullanarak Şekil 4.52.'de gösterilen daha farklı bir karmaşık şekil oluşturup bu durumda alan için ne düşündüğünü sorduğunda görünüme odaklanarak fikrini değiştirmiştir.



Şekil 4.52. *Neşe'ye (5) alan korunumu için gösterilen karmaşık şekil*

Neşe (5) “Alanında bir değişiklik olurdu. Çünkü burada yarımlar daha fazla çıkardı, öbüründe hafif şey olduğu için yani yamuk olduğu için onda biraz daha az yarım çıktı. Onun için bunda daha fazla çıktığı için bunun alanı daha küçük.” cevabını vermiştir. Araştırmacı ölçme yaparak bu tahminini kontrol etmesini istediğinde birim kareleri sayarak son şeklin alan ölçüsünü hesaplamış ve tahmininin aksine şekillerin alan ölçülerinin eşit olduğunu bulmuştur. Neşe (5) alanı bulmak için şekli oluşturan üç parçanın tek tek alan ölçülerini hesaplayıp toplamıştır. Başlangıçta nasıl düşündüğünü ise “Bunun daha az çıkacağını düşündüm. Çünkü bunun (son şekil) boyu daha uzun ve alanı daha küçük. Çünkü bununki (ilk şekil) daha büyük alanına göre, ama eşit çıktılar. O zaman öncekine göre yani yine önceki şekil gibi buna benzer şekil gibi ayırırsak alanları aynı.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı daha farklı bir biçimde birleştirerek alanı için ne düşündüğünü sormuştur. Neşe (5) “Alanı yine aynı olur. Çünkü daha demin bu şekil (üçgen parçalardan birini gösteriyor) ikisi otuz, bu (dikdörtgen parçayı gösteriyor) altmış çıkmıştı. Yine hesaplarsak yine aynı çıkacak. Onun için alanı eşit.” cevabını vermiştir. Neşe (5) her iki durumda da aynı parçalar kullanıldığı için alan ölçüsünün değişmeyeceğini belirtmiştir.

Katılımcılardan alanlarını karşılaştırdıkları bu şekillerin çevrelerini de karşılaştırmaları istenmiştir. Katılımcılar daha önce çevre ile ilgili öğretim seanslarında yeniden düzenlenen şekillerin çevrelerini karşılaştırmış olsalar da aradan geçen zaman sonrasında büyük çoğunluğu başlangıçta bu şekillerin alan ölçüleri gibi çevre uzunluklarının da eşit olacağını ifade etmiştir. Katılımcıların öğretim seansları öncesindeki düşünceleri değişime karşı oldukça dirençlidir. Ancak katılımcılar yaptıkları ölçme sonucunda bu tahminlerinin hatalı olduğunu fark etmişlerdir.

Katılımcılardan Zehra (5) Şekil 4.50. için “Aynı önceki gibi bu yarım parçayı da buraya getirdiğimizde bu şekil oluşacak ve kenarları tam aynı bu şekil olacak çevresi o yüzden böyle düşündüm. İkisinin de aynı olacağını düşündüm.” diyerek burada alan ile ilgili düşüncesini yinelemiştir. Araştırmacı ölçüm yaparak bu tahminini kontrol etmesini istediğinde Zehra (5) dikdörtgen ve paralelkenarın kısa ve uzun kenarlarından birer tanesinin uzunluğunu cetvelle ölçtükten sonra iki ile çarpıp bulduğu değerleri toplamıştır. Neden bu işlemleri yaptığı sorulunca karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğu için toplamak yerine iki ile çarptığını söylemiştir. Yaptığı hesaplamalar sonucunda iki şeklin çevre uzunluklarının farklı çıktığını görmüştür. Bu farklılığın nedenini “Çünkü bu kenarı yani kısa kenarı bu kısa kenarına eşit, uzun kenarıysa bir santim fazla, o yüzden.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacının daha sonra karşılaştırmasını istediği şekillerin ise çevrelerinin farklı olacağını "Çünkü burada (başlangıçtaki dikdörtgeni gösteriyor) sadece düz ve yatay şekilde. Çevre uzunlukları düz ve yatay. Ama burada (son durumdaki şekli gösteriyor) eğimli şekiller de var ve şurası, şurası, tüm bu eğimli olan şekillerin de alanı var, şuradakiler ay çevresi var." şeklinde açıklamıştır. Zehra (5) eğimli bölümlerin düz olanlara göre daha uzun olduğunu belirtmiştir. Çevre ile ilgili öğretim seanslarında yeniden düzenlenen şekillerin çevrelerini karşılaştırmaya yer verilmiş olmasına rağmen katılımcının öğretimden önceki düşünceleri direnç göstermektedir. Ancak yaptığı ölçme ve hesaplamalar sonucunda düşüncesinin hatalı olduğunu fark ederek düzeltebilmiştir.

Benzer şekilde katılımcılardan Neşe (5), Ceylan (6) ve Filiz (8) de Şekil 4.50.'de gösterilen şekillerin çevre uzunluklarının aynı olacağını belirtmiştir. Neşe (5) bu düşüncesini "Çevreleri yine aynıdır. Çünkü bunları yine yan yana getirsek uzunlukları aynı olur. Onun için aynı." şeklinde açıklamıştır. Ceylan (6) ise şöyle açıklamıştır: "Evet aynı. Alanları aynıysa çevreleri de aynı oluyor. Çünkü diğer şekilde yaptığımızda büyüklükleri ay alanlarının sonuçları da aynı çıkıyor. Hatta birleştirdiğimizde aynısı çıkıyor bunun. Çevreleri de aynı olur o yüzden." Araştırmacı ölçme yaparak kontrol etmelerini istediğinde şekillerin kenar uzunluklarını cetvelle ölçüp, buldukları değerleri toplayarak çevre uzunluklarını hesaplamışlardır. Ölçme sonucunda son şeklin çevre uzunluğunun daha fazla olduğunu bulmuşlardır. Ceylan (6) bulduğu bu sonuca şaşırmış, tekrar tekrar ölçmüştür. Neşe (5) ise "Çünkü bu (son şekil) biraz yamuk olduğu için uzunluğu daha fazla çıkmış olabilir veya bunların (ilk şekil) uzunluğu daha az daha farklı olabilir." şeklinde bu durumun nedenini açıklamıştır. Katılımcılar Şekil 4.51.'de gösterilen çokgenler için de benzer açıklamaları yaparak alanlarının aksine çevrelerinin farklı olduğunu söylemişlerdir.

Katılımcılardan Mısra (7) Şekil 4.50. için yeniden düzenlenen şeklin başlangıca göre çevresinin durumu konusunda tereddüt yaşamıştır. Şekillerin çevre uzunlukları için ne düşündüğü sorulunca başlangıçta "Çevre olarak da eşittir bence." cevabını vermiştir. Bundan nasıl emin olduğu sorulunca "Çünkü aynı şekil… ama yamuk şekil çıkıyor belki farklı çıkabilir." cevabını vermiştir. Araştırmacı ölçüp tahminini kontrol etmesini istediğinde cetvelle kenar uzunluklarını ölçüp bulduğu değerleri toplayarak çevre uzunluklarını hesaplamıştır. Yaptığı işlemler sonucunda çevre uzunluklarının farklı olduğunu bulmuştur. Çevre uzunluğunu bulurken araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Çevreyi nasıl bulacaksın?

Mısra: 13 ile 10'u çarparak.

Araştırmacı: Çevresini böyle mi bulacağız? Çevresi neresidir, bana bir gösterir misin?

Mısra: Şuralar (şeklin sınırını gösteriyor)

Araştırmacı: Peki, bu gösterdiğin çevresinin uzunluğunu nasıl bulabilirsin?

Mısra: …

Araştırmacı: Çarpınca nereyi bulacaksın, o gösterdiğin kısmı mı?

Mısra: … ya da 13 ile 10'u … 13 ile 10'u çarpmamız gerek bence çevresini bulmak için.

Araştırmacı: Neden?

Mısra: Yani ya bütün sayıları toplayacaz ya da çarpıcaz 13 ile 10'u

Araştırmacı: Aynı şey mi çıkacak?

Mısra: Çıkmaz, çarpma toplamaya göre daha yüksek bir sayı çıkar.

Araştırmacı: Hangisi o zaman?

Mısra: Bence toplayarak

Araştırmacı: Neden çarpmayı düşündün önce?

Mısra: Çünkü çarpmayla toplama birbirlerine kardeş olduğu için bence aynı sonuç çıkar diye düşündüm ilk önce

Araştırmacı: 13x 10 neyi ifade eder?

Mısra: Alanı. Yani alanı bulurken çarparız, çevresini bulurken toplarız.

Araştırmacı: Anladım. Yani 13 tane 10 dediğimizde 13 tane 10'u toplamak demek değil mi?

Mısra: Evet, ya da şöyle de yapabiliriz.

Araştırmacı: Burada 13 tane 10 mu toplanacak çevresi için?

Mısra: Yok. Ya bütün sayıları toplayabiliriz ya da 13 santimetreden 2 tane olduğu için 13 ile 2'yi çarpıp 10 ile 2'yi çarpıp sonra çıkan sonuçları toplayabiliriz.

Görüldüğü gibi Mısra'nın (7) geçmişte yaptığı hatalı genellemeler yeni öğrendiklerini de etkilemeye devam etmektedir. Araştırmacı ona ölçmeye çalıştığı kavramı hatırlatarak hatasını fark etmesini beklemiştir. Mısra (7) alan ölçüleri aynıyken çevre uzunluklarının farklı olmasının nedenini "Çünkü çevresi şeklinin şu … şu şekli oluşturacak biçimde olması lazım çevre, çevre buna deniyor (şeklin sınırlarını gösteriyor). Bunların çevreleri farklı olduğu için yani şekiller farklı olduğu için farklı sonuç çıkar. Çünkü içi aynı, sadece dış şekli değişiyor." şeklinde açıklamıştır.

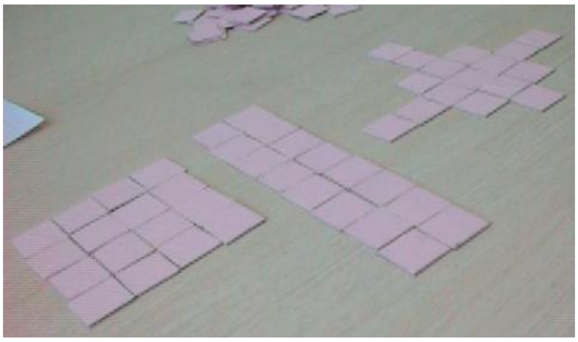
Mısra (7) Şekil 4.51.'de gösterilen yeniden düzenlenmiş başka bir şekil için de benzer bir açıklama yapmış, alan ölçüsü sabit kalırken çevre uzunluğunun değişeceğini söylemiştir. Bunun nedenini "Çünkü kapladığı yer değişmez. Ama çevresi değişir" şeklinde açıklamıştır. Nasıl emin olduğu sorulunca "Çünkü çevre şeklin şu dış kısmına göre hesaplanır. Yani biz şeklin dış kısmına göre hesaplıyoruz. Ama bunun dış şekliyle bunun dış şekli farklı olduğu için çevre farklı çıkar. Ama kapladığı yerler aynı olduğu için alan aynı çıkar.” cevabını vermiştir. Görüldüğü gibi öğrenci açıklamasında çevre ve alan kavramlarının anlamına vurgu yapmaktadır. Daha önce ayırt etmekte zorlandığı bu kavramları artık doğru bir şekilde ifade edip yorumlayabilmektedir.

Katılımcılardan Can (7) ve Gülce (8) Şekil 4.50. için yeniden düzenlenen şeklin çevre uzunluğunun başlangıca göre değişeceğini tahmin etmişlerdir. Gülce (8) “Çünkü şimdi burasının (son durumdaki şekil) uzunlukları biraz daha fazla ama bunlarınki (başlangıçtaki şekil) birazcık daha kısa.” diyerek düşüncesini açıklamıştır. Araştırmacı katılımcılardan tahminlerini ölçerek kontrol etmeleri istenmiştir. Katılımcılar cetvelle şekillerin kenar uzunluklarını ölçüp buldukları değerleri toplayarak çevre uzunluklarını hesaplamışlardır. Sonuçta tahmin ettikleri gibi çevre uzunluklarının farklı olduğunu görmüşlerdir. Can (7) alan ölçüleri aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının da aynı olacağı düşüncesine katılmadığını şu şekilde açıklamıştır: “Hayır bence hocam yanlış bir bilgi. Çünkü hocam yine dediğim gibi alan iç kısım, ama çevreyse sınırları olduğu için hocam alanla da çevre yani aynı değil. Zaten hocam bu da matematiksel olarak bir hesap.” Can (7) artık yaptığı açıklamalarda alan ve çevre kavramlarının anlamına ve farklılıklarına vurgu yapmaktadır.

4.2.2.5. *Aynı alana/çevreye sahip farklı şekiller oluşturmanın kavram imajlarında yarattığı değişim*

Öğretim seansları kapsamında katılımcıların neredeyse hepsinin ilk klinik görüşmelerde zorlandığı sabit bir alan veya çevre ölçüsüne sahip farklı şekiller oluşturma da ele alınmıştır. Katılımcılardan sabit bir alan ölçüsüne sahip mümkün olduğunca çok sayıda farklı şekil oluşturarak bu şekillerin çevre uzunluklarını karşılaştırmaları istenmiştir. Aynı zamanda sabit bir çevre uzunluğuna sahip mümkün olduğunca çok sayıda farklı şekil oluşturarak bu şekillerin alan ölçülerini karşılaştırmaları beklenmiştir. Böylece, ilk klinik görüşmelerde belirlenen aynı çevre uzunluğuna sahip şekillerin alan ölçülerinin de aynı olacağı (veya tam tersi) düşüncesini, somut örnekler üzerinden değerlendirerek değiştirmeleri sağlanmıştır. Katılımcılar genellikle kare, dikdörtgen gibi sıklıkla karşılaştıkları çokgenleri oluşturmayı tercih etmişlerdir. Bunun yanında daha önce pek karşılaşmadıkları konkav çokgenleri de oluşturmuşlardır.

Katılımcılardan Zehra (5) seansın başlangıcında alanı “Alan bir şeklin çevresi yani sınırları içinde kalan iç kısmı” şeklinde, çevreyi “Çevre sınırları yani alanı dışında kalan sınırları” şeklinde açıklamıştır. Buna rağmen, birim karelerle oluşturduğu, alan ölçüsü 16 birim kare olan şekillerin çevre uzunluklarını karşılaştırması istendiğinde Şekil 4.53.'de gösterilen dikdörtgenin çevre uzunluğunu bulmak için alan formülünü uygulamıştır.



Şekil 4.53. *Zehra'nın (5) oluşturduğu alanı 16 birim kare olan şekiller*

Bunun üzerine araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Bu bulduğun çevre mi alan mı?

Zehra: Haaa, bir dakika. Burasını (birim karenin bir kenarını gösteriyor) bir santim sayarsak

Araştırmacı: Birim

Zehra: Bir birim sayarsak burası (dikdörtgenin uzun kenarı) sekiz birim burası (dikdörtgenin kısa kenarı) da iki birim çevreleri de on altı birim olacak aynı buradaki (daha önce oluşturduğu kareyi gösteriyor) gibi. Tek tek dört dört saymak yerine böyle.

Araştırmacı: Peki çevresi neresi bana gösterir misin?

Zehra: Çevresi şu kenar kısımlar (kalemle sınır boyunca ilerliyor)

Araştırmacı: Hıım, yani sekizle ikiyi çarpınca o kenarları buluyor muyuz?

Zehra: Evet çünkü bir kenarı bir birim olduğu için bir birim sayarsak

Araştırmacı: Peki bir de sayarak kontrol et bakalım gerçekten on altı çıkacak mı?

Zehra: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 birimmiş bu. (Sınır boyunca birim uzunlukları sayıyor)

Araştırmacı: Neden farklı çıktı sence?

Zehra: Ben alanda yaptığım gibi uzun kenarla kısa kenarı çarpımını yaptığım için oldu bence.

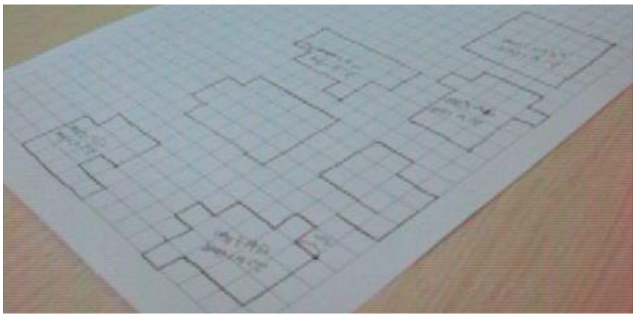
Araştırmacı: Peki alanla çevre aynı şekilde mi bulunur?

Zehra: Hayır, aynı şekilde bulunmuyor.

Bu konuşmanın ardından Zehra (5) daha önce çevre uzunluğunu hesapladığı Şekil 4.53.'de gösterilen kare için de aynı yöntemi kullanarak yeniden hesaplama yapmıştır. Zehra (5) başlangıçta alan ölçüleri eşit olan bu üç şeklin çevre uzunluklarının da aynı olacağını ifade etmiştir. Yaptığı hesaplamalar sonucunda ise oluşturduğu üç şeklin (Şekil 4.53.'de gösterilen kare, dikdörtgen ve karmaşık şekil) çevre uzunluklarının birbirinden farklı olduğunu bulmuştur. Bu durum karşısındaki düşüncesi aşağıdaki diyalogda verilmiştir:

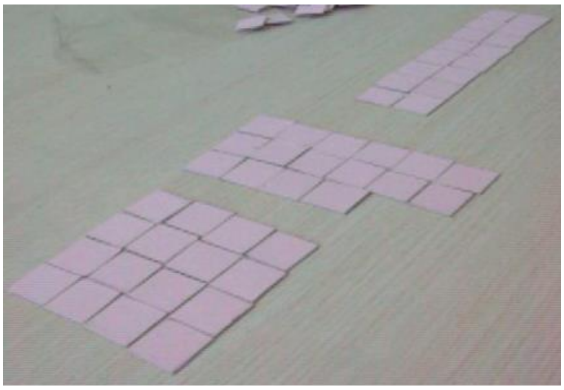
> Araştırmacı: Şimdi burada alanları aynı olan üç tane şekil vardı. Sen çevrelerinin de aynı olacağını düşünmüştün. Ama her birinin çevresi farklı bir şey çıktı.
>
> Zehra: Evet
>
> Araştırmacı: Ne düşünüyorsun bu konuda?
>
> Zehra: Bunun (kare) tüm kenarları eşit bir biçimde mesela burası dört birim, burası dört birim, burası da, burası da. Çevreleri de her biri bir birim olduğuna göre burası alanıyla aynı çıkacak. Burası (dikdörtgen) bir kenarı sekiz birim uzun kenarı, burası da iki birim. Burası sekiz birim olduğuna göre burası da sekiz birim, on altı birim bu iki uzun kenarı. Burası da iki birim, iki birim, toplamda dört birim, toplayınca yirmi birim oluyor.
>
> Araştırmacı: Yani, şöyle sorayım alanları aynı olan farklı şekillerin çevreleri de aynı olur mu her zaman?
>
> Zehra: Hayır, çevreleri aynı çıkmaz. Mesela bununki on sekiz birim kareydi alanı ama şimdi çevresi yirmi birim.

Bu konuşmanın ardından Zehra (5) birim kareli kâğıt üzerinde sabit çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturmuştur. Bu kez tercihi karmaşık şekillerden yana olmuştur. Nasıl karar verdiği sorulunca "Her bir birim burası bir santim sayarsak yani bir birim toplamları da yirmi birim olacak" cevabını vermiştir. Çevre uzunlukları eşit olan bu farklı şekillerin alan ölçülerinin de farklı olacağını belirtmiştir. Her bir şeklin içindeki birim kareleri sayarak alanlarını ölçtüğünde bir kısmının aynı diğerlerinin farklı olduklarını göstermiştir. Araştırmacı düşüncesini açıklamasını isteyince "Çevresi aynı olan şekillerin alanları her zaman aynı değildir. Mesela burada yirmi birim bulduk, burada on beş birim alan çıktı. Burada yirmi birim çevre yine aynı, burada on yedi birim alan. Şimdi yirmi birim çevre, yirmi beş birim alan çıktı. Her zaman farklı, aynı olmayabilir." şeklinde açıklamıştır. Şekil 4.54.'de Zehra'nın (5) oluşturduğu sabit çevre uzunluğuna sahip şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.54. *Zehra'nın (5) oluşturduğu sabit çevreye sahip şekiller*

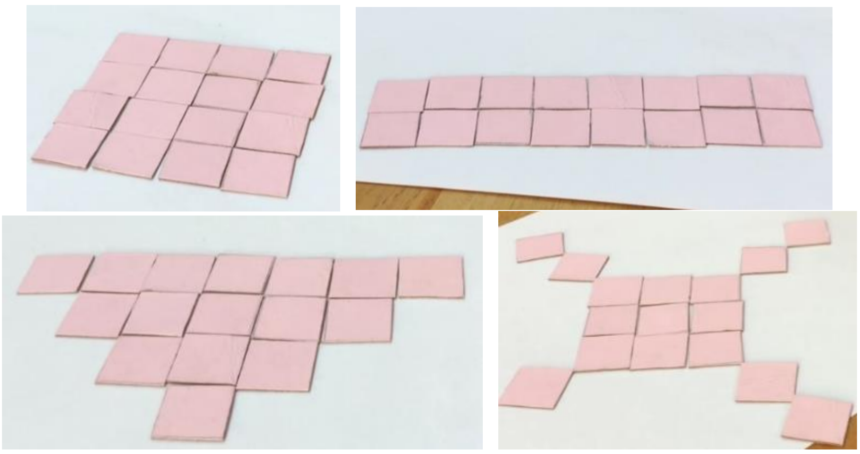
Katılımcılardan Neşe (5) birim kareleri kullanarak alan ölçüsü 16 birim kare olan şekiller oluşturması istendiğinde ilk olarak kenar uzunluğu dört birim olan bir kare oluşturmuştur. Şekli oluşturan dört birim kare içeren dört satır olduğu için alanının 16 birim kare olduğunu söylemiştir. Araştırmacı daha farklı bir şekil oluşturmasını isteyince kenar uzunlukları 3 ve 6 birim olan bir dikdörtgen oluşturmuştur. Araştırmacı kendisinden alan ölçüsü 16 birim kare olan bir şekil oluşturmasını istediğini hatırlatınca Neşe (5) karıştırdığını belirtmiş; fakat bu şekli uygun duruma getirmeye de çalışmamıştır. Araştırmacı şekilden rastgele iki birim kareyi alıp konkav bir çokgen oluşturarak bu şeklin uygun olup olmadığını sorduğundaysa uygun olduğunu belirtmiştir. Araştırmacı daha farklı bir şekil oluşturmasını isteyince Neşe (5) kenar uzunlukları 8 ve 2 birim olan dikdörtgeni oluşturmuştur. Neşe'nin (5) oluşturduğu bu şekiller Şekil 4.55.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.55. *Neşe'nin (5) oluşturduğu sabit alana sahip çokgenler*

Araştırmacı Neşe'nin (5) birim karelerle oluşturduğu üç şekli yan yana getirerek çevre uzunlukları için ne düşündüğünü sormuştur. Neşe (5) "Çevreleri aynı değildir. Çünkü bazılarında dört birimlik, bazılarında üç veya altı, bazılarında sekiz birimlik yaptık. Onun için bazıları daha büyük çıkar." cevabını vermiştir. Araştırmacı şekillerin çevre uzunluklarını hesaplayıp kontrol etmesini isteyince, kenar uzunluklarını toplayarak çevre uzunluklarını hesaplamış ve birbirinden farklı değerler aldıklarını göstermiştir. Neşe (5) birbirinden farklı şekillerin alan ölçüleri aynı olduğunda çevre uzunluklarının da aynı olduğu görüşüne katılmadığını söylemiştir.

Katılımcılardan Ceylan (6) başlangıçta alan ölçüleri aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının da aynı olacağını belirtmiştir. Araştırmacı alan ölçüsü 16 birim kare olan şekiller oluşturmasını istediğinde ilk olarak kenar uzunlukları 4 birim olan bir kare oluşturmuştur. Şeklin çevre uzunluğunun da 16 olduğunu söylemiştir. İkinci olarak kenar uzunlukları 2 ve 8 birim olan dikdörtgeni oluşturmuştur. Buradaki düşüncesini şöyle açıklamıştır: “Çünkü arasında bir fark yok ki yine aynı kareleri kullanıyoruz, aynı kareleri. Bütün yaptığımız şekiller on altı olacak.” Ceylan (6) şeklin çevre uzunluğunun de on altı olacağını söylemiş, çevre için alan ölçüsünü hesaplarken kullandığı yöntemi uygulayarak 2x8=16 şeklinde düşünmüştür. Yaptıklarını açıklarken burada kareleri saymadığını, cetvelle de ölçse yine aynı değerleri bulacağını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı daha önce çevreyi ölçerken nasıl bir yöntem kullandığını sormuştur. Ceylan (6) unuttuğunu, kafası karıştığı için böyle yaptığını söylemiştir. Üçüncü olarak karmaşık bir şekil oluşturarak şeklin çevre uzunluğunun diğerlerinden farklı olacağını söylemiştir. Hesapladığında çevre uzunluğunun 22 birim olduğunu bulmuştur. Dördüncü olarak yine bir karmaşık şekil çizerek şeklin çevre uzunluğunun diğerlerinden fazla olacağını söylemiştir. Hesapladığında çevre uzunluğunun 40 birim olduğunu bulmuştur. Şekil 4.56.’da Ceylan’ın (6) oluşturduğu sabit alan ölçüsüne sahip şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.56. *Ceylan’ın (6) oluşturduğu sabit alana sahip şekiller*

Ceylan (6) somut materyallerle yaptığı ölçümler sonucunda seansın başlangıcından farklı olarak artık alan ölçüsü aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının aynı olması gerektiğini düşünmemektedir. Daha önce sabit bir alan ölçüsüne sahip farklı şekiller oluşturamazken artık birçok farklı şeklin aynı alan ölçüsüne sahip olabileceğinin farkındadır. Ceylan’ın (6) bu düşünceleri aşağıdaki diyalogda daha açık görülmektedir:

Araştırmacı: Şimdi üç farklı şekil oluşturduk, üçünün de alanı yirmi ama çevreleri farklı çıktı. Ne diyebilirsin burada alanı aynı olan şekiller için çevreleri aynı olur mu?

Ceylan: Hayır.

Araştırmacı: Peki her zaman farklı mı çıkar çevreleri?

Ceylan: Hayır her zaman farklı çıkmaz. Mesela bu şekilde bütün kenarları birbirine eşit çevresi on altı alanı da on altı çıktı.

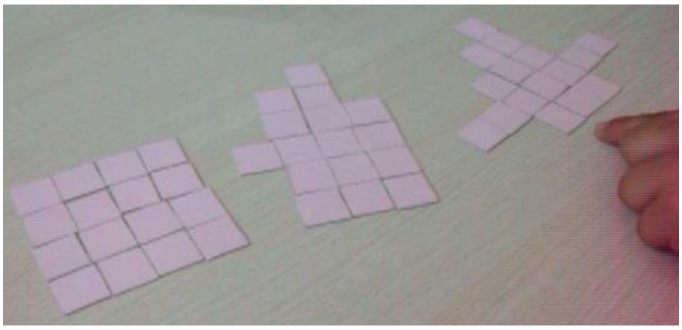
Araştırmacı: Anladım. Mesela iki şeklin hem alanı hem çevresi aynı olabilir mi?

Ceylan: İki şeklin hem çevresi hem alanı … birbirinden ayrı mı yoksa bütün alanları birbirine eşit mi?

Araştırmacı: Yani alanlar kendi arasında eşit, çevreler kendi arasında eşit çıkabilir mi farklı şekiller arasında?

Ceylan: Çıkabilir.

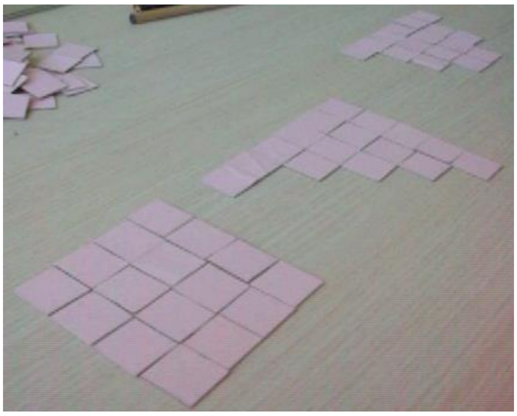
Katılımcılardan Fırat (6) birim karelerle alan ölçüsü 16 birim kare olan şekiller oluşturması istendiğinde bir kare ve iki karmaşık şekil oluşturmuştur. Fırat'ın (6) oluşturduğu şekiller Şekil 4.57.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.57. *Fırat'ın (6) oluşturduğu sabit alana sahip çokgenler*

Araştırmacı Fırat'ın (6) oluşturduğu Şekil 4.57.'de gösterilen üç şekli yan yana yerleştirip bu şekillerin çevre uzunlukları için ne düşündüğünü sormuştur. Fırat (6) çevre uzunluklarının eşit olmadığını söylemiştir. Bunun nedenini şu şekilde açıklamıştır: "Hocam bunda (kare) girinti çıkıntı yok mesela, bunda (ikinci oluşturulan karmaşık şekil) hafif var, bunda (en son oluşturulan karmaşık şekil) çok var. Bu (en son oluşturulan karmaşık şekil) daha büyüktür bence, bu (ikinci oluşturulan karmaşık şekil) daha küçüktür, bu (kare) daha da küçüktür." Araştırmacı ölçüp kontrol etmesini isteyince sınır boyunca birim uzunlukları sayarak şekillerin çevre uzunluklarını hesaplamıştır. Yaptığı hesaplama sonrasında tahmininin doğru olduğunu göstermiştir. Fırat (6) alan ölçüleri aynı olan şekillerin çevre uzunlukları da aynıdır düşüncesinin yanlış olduğunu belirtmiştir.

Mısra (7) ise aynı alan ölçüsüne sahip farklı şekiller olabileceğini söylese de bu şekilleri oluşturmakta zorlanmıştır. Alan ölçüsü 16 birim kare olan şekiller oluşturması istendiğinde "16 birim kareyse 16 tane bu karelerden kullanmamız lazım" diyerek birim kareleri alıp bir şekil oluşturmaya başlamıştır. İlk olarak kenar uzunlukları 4 birim olan kare oluşturmuştur. Aynı alan ölçüsüne sahip farklı bir şekil daha oluşturması istenince bir süre düşündükten sonra “Başka oluşturulamaz bence.” yanıtını vermiştir. Araştırmacı bir arkadaşının oluşturduğunu söylediği karmaşık şekli göstererek alanı olup olmadığını sormuştur. Mısra (7) bu şeklin alanı olduğunu söylemiş ve ölçüsünü 16 birim kare olarak hesaplamıştır. Ardından araştırmacı ondan farklı bir şekil daha oluşturmasını isteyince öncekinden farklı bir karmaşık şekil oluşturmuştur. Araştırmacı Mısra’nın (7) oluşturduğu aynı alan ölçüsüne sahip üç şekli yan yana getirerek çevre uzunlukları için ne düşündüğünü sormuştur. Mısra (7) çevre uzunluklarının farklı olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Bunun nedenini “Çünkü çevre dış, şu dış kısımlarını yaparak bulunur.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı hesaplayıp kontrol etmesini istemiştir. Mısra (7) sınırlar boyunca birim uzunlukları sayarak çevreleri ölçmüş ve birbirinden farklı olduklarını göstermiştir. Mısra’nın (7) birim karelerle oluşturduğu şekiller Şekil 4.58.’de gösterilmiştir.



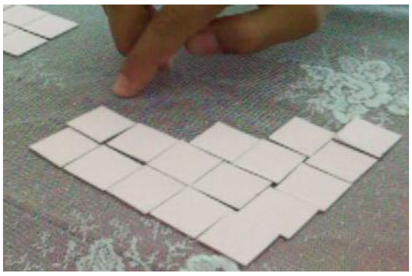
Şekil 4.58. *Mısra’nın (7) oluşturduğu aynı alana sahip şekiller*

Mısra (7) bu aşamada çevre uzunluğunu ifade ederken alan birimi olan birim kareyi kullanmıştır. Bu konuyla ilgili araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Birim kare mi olacak çevresi de? Karelerle mi ölçtük çevreyi? Burada kareleri mi ölçtün, karelerin kenarlarını mı ölçtün? Neyi ölçtün?
>
> Mısra: Karelerin kenarlarını ölçtüm. O zaman sadece birim.

Görüldüğü gibi araştırmacının sorusu üzerine çevre için “birim” ifadesini kullanması gerektiğini fark etmiştir.

Katılımcılardan Can (7) ise aynı alan ölçüsüne sahip farklı şekiller oluşturması istendiğinde sadece dikdörtgenler oluşturmuştur. Bunun üzerine araştırmacı Şekil 4.59.'da gösterilen karmaşık şekli oluşturarak ona düşüncesini sormuştur.



Şekil 4.59. *Can'a (7) gösterilen karmaşık şekil*

Araştırmacı yukarıdaki karmaşık şekli oluşturduktan sonra Can (7) ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: Böyle bir şeklin sence alanı olur mu? Alanı 16 birim kare olur mu bunun?

Can: Bence olmaz hocam.

Araştırmacı: Neden?

Can: Hocam çünkü hocam bunun, hocam bunun içinde yani eksik birim kareler var.

Araştırmacı: Neresi eksik?

Can: Hocam şuradaki birim kareler eksik. (Şeklin merdivene benzer bölümünü gösteriyor)

Araştırmacı: Neden eksik olduğunu düşünüyorsun?

Can: Hocam hocam mesela buranın sırası 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4 hocam burada bir tane daha birim kare olması lazım. Hocam burada beş tane.

Araştırmacı: Ne için?

Can: Hocam alanını bulmak için.

Araştırmacı: Yani illa dikdörtgen şeklinde mi olması gerekiyor? Az önce dikdörtgen olmasa da olur demiştin. Bunun alanını bulamaz mısın?

Can: Bence bulamayız hocam.

Araştırmacı: Bu açık bir şekil mi?

Can: Aynen o yüzden.

Araştırmacı: Neresi açık?

Can: Hocam şuraları yani, şuradaki birim kareler eksik. Mesela hocam böyle olsaydı olabilirdi. (Bir birim kare alarak eksik olduğunu düşündüğü satırlardan birine yerleştiriyor)

Araştırmacı: Bunu kâğıda çizelim istersen. Bir de orada düşün bakalım. (Şekli kâğıt üzerine taslak olarak çiziyor) Böyle bir şeklin alanı yok mudur? Düşün bakalım.

Can: …

Araştırmacı: Bu şekil açık bir şekil mi?

Can: Aaa vardır hocam.

Araştırmacı: Hangi durumda olmazdı?

Can: Hocam şöyle olsaydı mesela.

Araştırmacı: Yan tarafa çizebilirsin istersen.

Can: Hocam mesela böyle olsaydı şurası burası yok ya hocam. Burası olmasaydı alanı olmazdı. (Şeklin bir bölümünü açık bırakarak çiziyor)

Araştırmacı: Peki bu durumda alanı var mı?

Can: Var.

Araştırmacı: Neresi alanı?

Can: İç kısımları.

Araştırmacı: Renkli kalemle göster.

Can: İç kısımları. (Şeklin içini tarıyor)

Araştırmacı: Peki nasıl bulabiliriz onun alanını? 16 birim kare olup olmadığını bulabilir misin?

Can: Hocam yukarı doğru çıkan 5, 5 sıra var hocam.

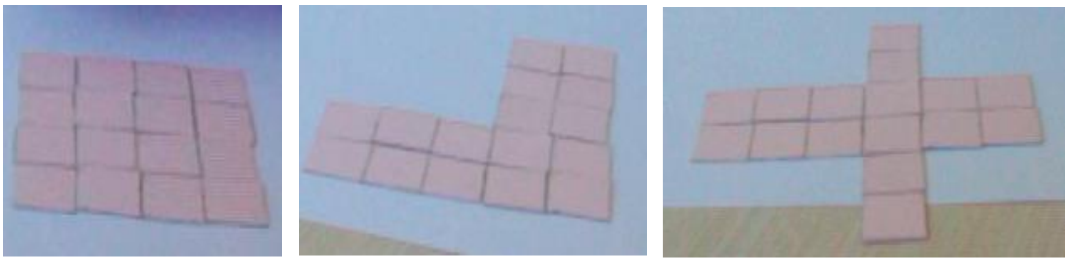
Araştırmacı: İlla aynı sıra sayısında mı olması gerekiyor?

Can: hayır. Ha buldum. Hocam beş dört daha dokuz, üç daha on iki, on beş, on altı.

Bu konuşmanın ardından Can (7) araştırmacının sorusu üzerine oluşturduğu aynı alan ölçüsüne sahip dört şeklin çevrelerinin birbirinden farklı olacağını söylemiştir. Araştırmacı ölçüp kontrol etmesini istemiştir. Her bir şeklin çevresini ölçerek bazılarının birbirlerine eşit bazılarının ise farklı değerler aldıklarını göstermiştir. Alan ölçüsü aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının aynı da farklı da olabileceğini belirtmiştir.

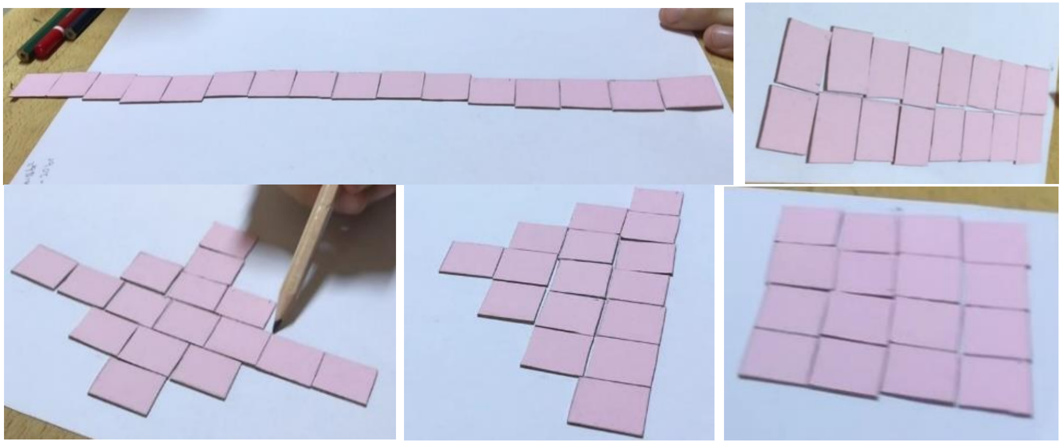
Katılımcılardan Filiz (8) aynı alan ölçüsüne sahip şekiller oluşturması istendiğinde ilk olarak kenar uzunluğu 4 birim olan bir kare oluşturmuştur. Bu şeklin alan ölçüsünü birim kareleri sayarak 16 birim kare, çevresini sınır boyunca birim uzunlukları sayarak 16 birim olarak hesaplamıştır. Filiz (8) aynı alan ölçüsüne sahip farklı bir şekil oluşturamayınca araştırmacı karmaşık bir şekil oluşturarak alanı olup olmadığını sormuştur. Filiz (8) bu şeklin alanı olduğunu söylemiş ve alan için şeklin iç kısmını göstermiştir. Şeklin alan ölçüsünün 16 birim kare olduğunu çünkü daha önceki şekilde de aynı birim karelerin kullanıldığını belirtmiştir. Burada alan korunumundan faydalanarak düşüncesinin doğruluğunu savunmuştur. Fakat Filiz (8) aşırı genelleme yaparak şeklin çevre uzunluğunun da 16 olacağını söylemiştir. Bunun nedenini "Çünkü yine bu dış kısımlarını sayıyoruz. Yine birer birim olarak sayıyoruz. Yani burada on altı olduğu için öyle oluyor." şeklinde açıklamıştır. Çevresini ölçerek kontrol etmesi istenince sınır boyunca birim uzunlukları sayıp 20 birim bulmuştur.

Araştırmacı aynı alan ölçüsüne sahip farklı bir şekil daha oluşturmasını istemiş, Filiz (8) bir süre sessizce düşünüp aklına gelmediğini söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı karmaşık bir şekil daha oluşturarak alanı olup olmadığını sormuştur. Filiz (8) alanı olduğunu söylemiş ve şeklin iç kısmını alan olarak göstermiştir. Şeklin alan ölçüsünün 16 birim kare olduğunu söylemiş, çevre uzunluğunun ise diğerlerinden farklı olacağını tahmin etmiştir. Ölçüp kontrol etmesi istenince sınır boyunca birim uzunlukları sayarak çevresini 24 birim bulmuştur. Alan ölçüleri 16 birim kare olan bu şekillerin çevre uzunluklarının farklı olması için ne düşündüğü sorulunca "Alanın yani buradakilerin hepsi on altı tane var. Biz bunu teker teker saydık. Yani teker teker saydığımız için öyle çıktı ama alanda ay çevresinde saydığımız zaman mesela buradan 1, 2, 3, 4, 5 kenarlarını mesela her kısmı sayıyoruz. O yüzden fazla çıkıyor." şeklinde açıklamıştır. Filiz (8) açıklamasında alan ve çevre kavramları arasındaki farklılıklara dikkat çekmeye çalışmaktadır. Her ne kadar matematik dilini etkin kullanamasa da iki kavramı artık birbiri yerine kullanmadığı görülmektedir. Araştırmacı daha sonra Filiz'den (8) alan ölçüsü 20 birim kare olan farklı şekiller oluşturmasını istediğinde Şekil 4.60.'da gösterilen birbirinden farklı üç şekil oluşturabilmiştir. Oluşturduğu bu şekillerin çevre uzunluklarının aynı ya da farklı çıkabileceğini belirtmiştir.



Şekil 4.60. *Filiz'in (8) oluşturduğu aynı alana sahip şekiller*

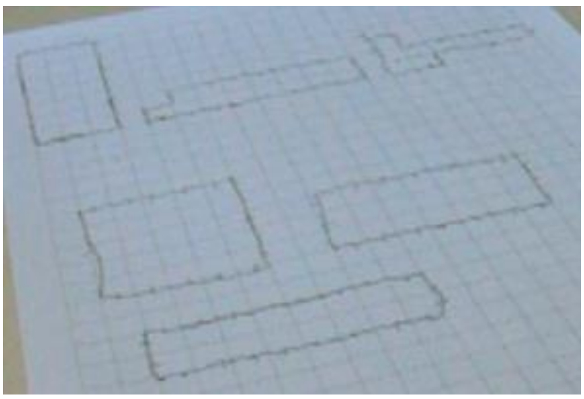
Aynı alan ölçüsüne sahip farklı şekiller oluşturması istendiğinde Gülce (8) de tercihini dikdörtgenlerden yana kullanmıştır. Üç farklı dikdörtgen oluşturduktan sonra yeni bir şeklin aklına gelmediğini belirtince araştırmacı karmaşık bir şekil oluşturarak ne düşündüğünü sormuştur. Gülce (8) "İçindeki birim kareleri sayarak da bulabiliriz." diyerek birim kare sayısını 16 bulmuştur. Aynı alan ölçüsüne sahip farklı bir şekil daha oluşturması istenince bu kez karmaşık bir şekil oluşturmuştur. Alan ölçüsünün aynı olduğundan nasıl emin olduğunu alan korunumunu anımsatarak "Çünkü sadece şekil değişti. O birim kareler falan değişmedi." şeklinde açıklamıştır. Şekil 4.61.'de Gülce'nin (8) oluşturduğu şekiller gösterilmiştir.



Şekil 4.61. *Gülce'nin (8) oluşturduğu aynı alana sahip şekiller*

Gülce (8) Şekil 4.61.'de gösterilen alan ölçüsü aynı olan bu şekillerin çevre uzunlukları için ne düşündüğü sorulunca kullanılan birim kare sayısı değişmediği için alan ölçülerinin aynı olduğunu; fakat çevre uzunluğunun şekillerin her biri için değişim gösterdiğini söylemiştir. Her bir şeklin çevre uzunluğunu sınır boyunca birim uzunlukları sayarak hesaplamıştır. Şekillerin sınırlarında yer alan birim uzunluk (öğrencinin deyimiyle kenar) sayısı arttıkça çevre uzunluğunun da arttığını belirtmiştir. Araştırmacı bazı arkadaşlarının alan ölçüleri aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının da aynı olacağını düşündüğünü söylemiştir. Kendisinin bu konudaki düşüncesi sorulunca "alanları eşit olan şekillerin çevrelerinin hepsi eşit olmaz, sadece bazıları nadiren eşit çıkabilir." cevabını vermiştir.

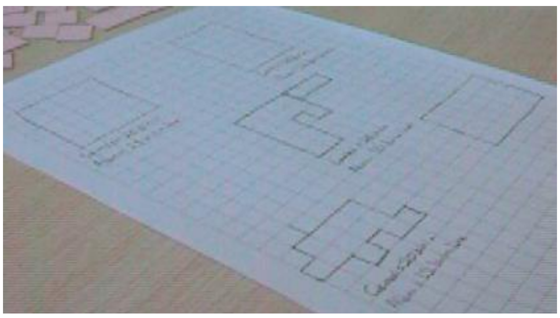
Fırat (6) çevre uzunluğu 20 birim olan farklı şekiller oluşturduktan sonra bu şekillerin alan ölçülerinin de aynı olduğunu söylemiştir. Şekil 4.62.'de Fırat'ın (6) oluşturduğu aynı çevre uzunluğuna sahip şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.62. *Fırat'ın (6) oluşturduğu aynı çevreye sahip şekiller*

Araştırmacı Fırat'ın (6) tahminini ölçerek kontrol etmesini istemiştir. Fırat (6) birim kareleri sayıp şekillerin alan ölçülerini hesaplamış ve her birinin farklı değerler olduğunu görmüştür. Seans boyunca katılımcının yukarıda açıklandığı gibi aynı çevre uzunluğuna sahip birçok şekil oluşturması ve alan ölçülerini karşılaştırması istenmiştir. Seansın sonunda çevre uzunlukları aynı olan şekillerin alan ölçülerinin de aynı olup olmayacağı sorulunca aynı olmayacağını "hocam arkada yaptığımız gibi hocam farklı çıktı alanları çevreleri aynıyken." şeklinde daha önce yaptıklarını örnek göstererek açıklamıştır.

Neşe (5) ve Mısra (7) çevre uzunluğu aynı olan farklı şekillerin alan ölçülerinin farklı olacağını belirtmişlerdir. Kareli kâğıt üzerinde çevre uzunluğu 20 birim olan şekiller çizmesi istendiğinde her ikisi de ilk olarak kenar uzunluğu 5 birim olan kare çizmiştir. Araştırmacı şeklin alan ölçüsü için ne düşündüğünü sorduğunda Neşe (5) "yaklaşık otuz" cevabını vermiştir. Alanı birim kareleri sayıp hesapladığında ise 25 birim kare bulmuştur. Araştırmacı farklı bir şekil daha çizmelerini isteyince her ikisi de kenar uzunlukları 4 ve 6 birim olan bir dikdörtgen çizmişlerdir. Bu dikdörtgenin alan ölçüsünün ilk şekilden farklı olduğunu söylemişlerdir. Neşe (5) düşüncesini "Çünkü burada bir kenar beş birim, beş birim kareden oluşuyor, burada dört birim, onun için farklıdır." şeklinde açıklamıştır. Alan ölçüsünü birim kareleri sayıp hesaplayınca 24 birim kare bulmuştur. Araştırmacının aynı çevre uzunluğuna sahip daha farklı şekiller oluşturmalarını istemesi üzerine birbirinden farklı karmaşık şekiller çizerek onların da alan ölçülerini 15 ve 12 birim kare bulmuşlardır. Araştırmacı çevre uzunluğu aynı olan şekillerin alan ölçülerinin de aynı olup olmadığını sorunca Neşe (5) "Çevresi aynı olan şekillerin alanları aynı olamaz. Çünkü burada çevresi mesela burada 20 birim burada da 20 birim ama bu şekil buna göre daha fazla kare kaplamış olduğu için çevresi ve alanları da aynı olamaz." cevabını vermiştir. Şekil 4.63.'de Neşe'nin oluşturduğu aynı çevre uzunluğuna sahip şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.63. *Neşe'nin (5) oluşturduğu aynı çevreye sahip şekiller*

Katılımcılardan Can (7) da oluşturduğu çevre uzunlukları aynı olan şekillerin alan ölçülerinin farklı olacağını söylemiştir. Araştırmacı oluşturduğu şekillerin alan ölçülerini hesaplayıp tahminini kontrol etmesi istemiştir. Can'ın (7) yaptığı hesaplamalar sonrasında araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

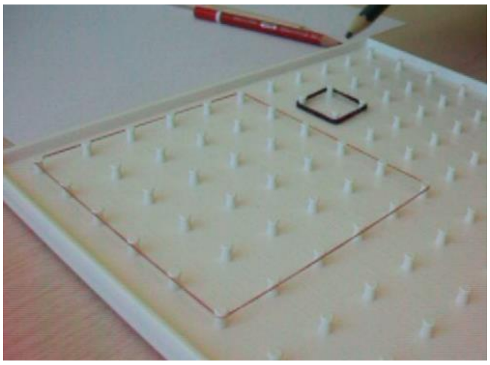
> Araştırmacı: Bazı arkadaşların diyorlar ki "çevreleri aynıysa alanları da aynıdır, alanları aynıysa çevreleri de aynıdır" sence doğru mu?
>
> Can: Hayır hocam. Çünkü çevreyle alan aynı şey değil hocam. Çevre bir şeklin sınırları hocam. Hocam alansa bir şeklin iç kısımları.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşıldığı üzere Can (7) artık çevre ve alan kavramlarının farklı olduklarının bilincindedir. Bu kavramların anlamlarını kendi düşüncesinin doğruluğunu savunmak için kullanmaktadır.

4.2.2.6. *Benzer çokgenlerin kenar uzunlukları ile alanları arasındaki ilişkiyle ilgili uygulamaların kavram imajlarında yarattığı değişim*

Katılımcıların neredeyse tamamı (Gülce (8) hariç) ilk klinik görüşmelerde kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Bu durumun, katılımcıların başlangıçtaki kavram imajlarına uygun olarak çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmalarının bir sonucu olduğu düşünülmüştür. Bu nedenle araştırmacı alan ile ilgili öğretim seansları kapsamında bu algıyı değiştirmeyi de amaçlamıştır. Araştırmacı, katılımcıların yaptıkları bu aşırı genellemenin hatalı olduğunu keşfetmeleri amacıyla, onlardan kenar uzunlukları belirli bir katına çıkarılan şekillerin alan ölçülerinin nasıl değişeceğini önce tahmin etmelerini, ardından hesaplamalarını istemiştir. Katılımcıların geometri tahtası üzerinde şekilleri oluşturmaları veya birim kareli kağıtlar üzerine çizim yapmaları teşvik edilmiştir. Bu öğretim seansı sonunda kenar uzunlukları ve alan ölçüsü arasındaki karesel ilişkiyi keşfetmeleri amaçlanmıştır. Aşağıda katılımcıların düşünceleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

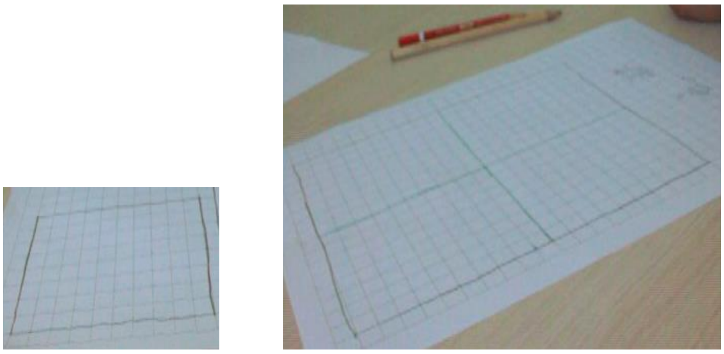
Katılımcılardan Zehra (5) ilk klinik görüşmede kenar uzunlukları ve alan ölçüsü arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşünmekteydi. Araştırmacının yönelttiği ilk soruda, Şekil 4.64.'de verilen, kenar uzunlukları arasındaki oran beş olan iki kare gösterilmiş ve alan ölçüleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu tahmin etmesi istenmiştir.



Şekil 4.64. *Geometri tahtasında gösterilen* kenar *uzunluklarının* oranı *beş olan iki kare*

Zehra'nın (5) doğrusal ilişkiye dayanan düşüncesini Şekil 4.64.'de gösterilen kareler için de devam ettirdiği belirlenmiştir. Araştırma kapsamında bu zamana kadar uygulanan çevre ve alan ile ilgili öğretim seansları, bu yerleşmiş düşünceyi değiştirmeye yetmemiştir. Araştırmacı, düşüncesinin hatalı olduğunu fark etmesi için geometri tahtası üzerinde gösterilen her bir karenin alan ölçüsü hesaplayarak tahminini kontrol etmesini istemiştir. Zehra (5) yaptığı ölçme ve hesaplamalar sonucu başlangıçtaki düşüncesinin hatalı olduğunu görmüştür. Zehra (5) alanı ölçmek için geometri tahtasında oluşturulmuş şekillerin sınırları içinde kalan birim kareleri saymıştır. Ardından iki şeklin alan ölçüleri arasındaki ilişkiyi "Bunun alanı 4 birim kare, bunun alanı 100 birim kare aralarında 25 katı." şeklinde açıklamıştır. Zehra (5) başlangıçtaki düşüncesinin hatalı olduğunu görse de henüz kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasında yeni bir ilişki kuramamıştır.

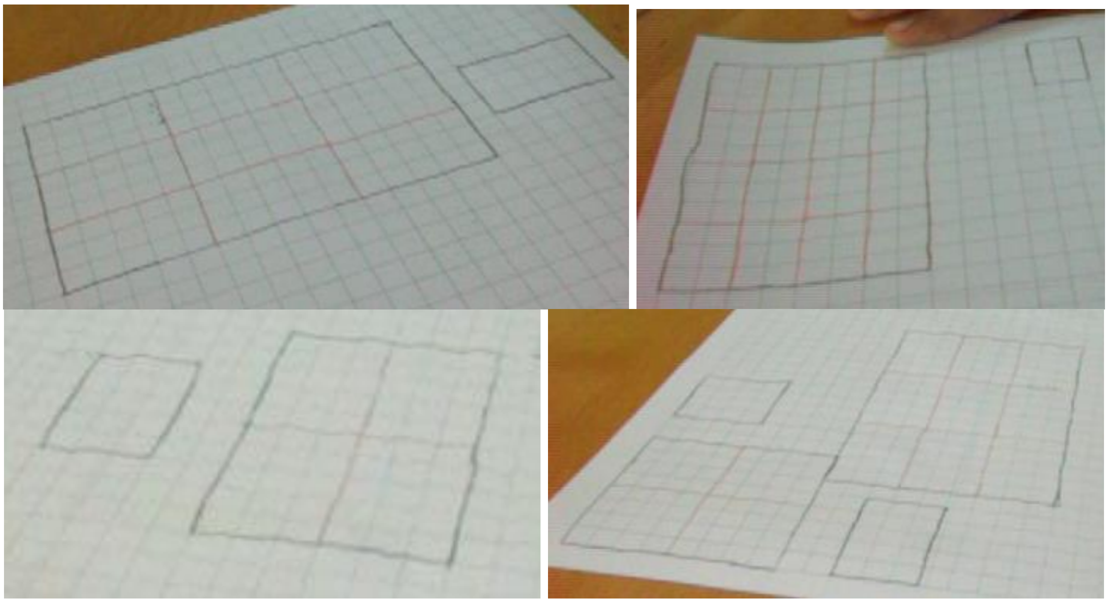
Zehra (5) bir sonraki soruda kenar uzunlukları iki katına çıkarılan dikdörtgen şeklindeki fotoğrafın alan ölçüsü için düşüncesini, "Alanın iki katına çıkmış olduğunu düşünmüyorum çünkü burada çevresi 5 katına çıktı, alanıysa 25 katına çıktı. Burada da alanın tahminen … 5 katına çıkacağını düşünüyorum." şeklinde açıklamıştır. Zehra (5) doğrusal bir ilişki olmadığını kabul etse de henüz doğru bir tahminde bulunamamıştır. Araştırmacı bu kez düşüncesini kareli kâğıt üzerinde göstermesini istemiştir. Zehra (5) Şekil 4.65.'de gösterildiği gibi her bir dikdörtgenin alan ölçülerini hesaplayıp bulduğu değerleri bölerek ve küçük olan şekli büyük olanın içine yerleştirerek alan ölçüleri arasındaki oranın 4 olduğunu bulmuştur.



Şekil 4.65. *Zehra'nın (5) benzer dikdörtgenlerin alanları için yaptığı çizimler*

Araştırmacı kenarları üç katına çıkarılan şeklin alan ölçüsü kaç katına çıkacağını sorduğunda Zehra (5) hesaplama veya çizim yapmadan "dokuz katına çıkar" dese de kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak açıklamakta zorlanmıştır. Seansın sonunda bu ilişkiyi "Yani kaç kat azalırsa iki kenar da kaç kat azalırsa o katları çarpılacak." şeklinde açıklamıştır. Zehra (5) açıklamasında matematik dilini doğru bir şekilde kullanmamış olsa da yaptığı çizim ve hesaplamalarda kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasındaki karesel ilişkiyi fark ettiği görülmüştür.

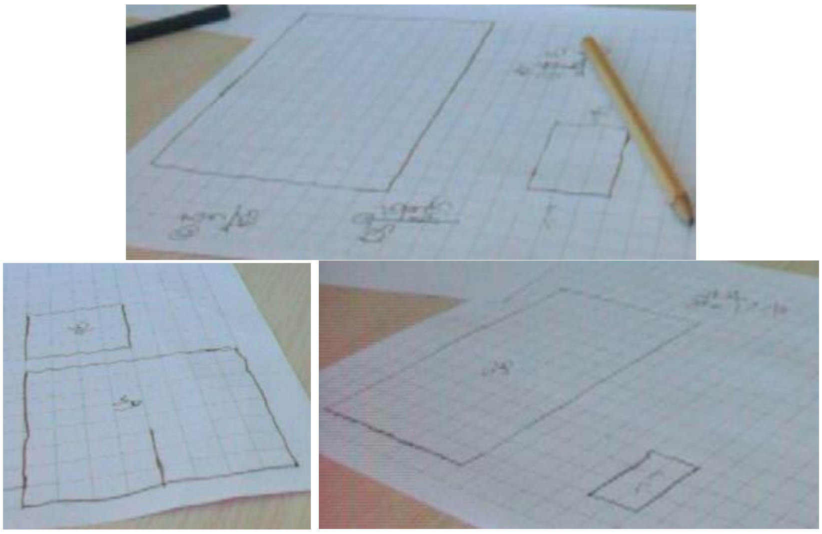
Katılımcılardan Neşe (5) seansın başında kenar uzunlukları ve alan ölçüsü arasında bir ilişki kurmaya çalışmamış, rastgele tahminlerde bulunmuştur. Şekil 4.64.'da gösterilen kenar uzunlukları arasındaki oran 5 olan karelerin alan ölçüleri arasındaki oranın 50 olacağını tahmin etmiştir. Araştırmacı işlem yaparak göstermesini isteyince "Bunun alanı 4 birim. 4'le kaçı çarparsak 100 olur? 4'le 10'u denesek 40 olur, 20'yi denesek 80 olur, 25 olabilir." şeklinde yaptıklarını açıklamıştır. Araştırmacı hesaplama yaparak doğru olup olmadığını göstermesini isteyince 25 ile 4'ü çarparak 100 bulmuştur. Denemeden nasıl bulabileceği sorulunca $100 \div 4 = 25$ cevabını vermiştir. Araştırmacı kenar uzunlukları 3 ve 5 birim olan dikdörtgenin kenar uzunlukları 3 katına çıkarıldığında alan ölçüsünün nasıl değişeceğini sorduğundaysa ilk tahmini alan ölçüsünün 6 katına çıkacağı olmuştur. Araştırmacı bu tahminini kontrol etmek için büyük dikdörtgenin içine küçük olanlardan kaç tane sığacağını şekil üzerinde çizerek göstermesini istemiştir. Neşe (5) yaptığı çizimler sonucunda 9 tane sığdığını bulmuştur. Şekil 4.66.'da Neşe'nin (5) kenar uzunlukları orantılı şekillerin alan ölçüleri için yaptığı çizimlerden bazıları gösterilmektedir.



Şekil 4.66. Neşe'nin (5) *benzer dikdörtgenlerin alanları için yaptığı çizimler*

Neşe (5) yaptığı çizim ve hesaplamalar sonucunda kenar uzunlukları ve alan ölçüsü arasında genel bir ilişki kuramayınca araştırmacı seansın başından beri yapılanları özetleyerek onun dikkatini kenarlar uzunlukları ile alan ölçüsü arasındaki karesel ilişkiye çekmeye çalışmıştır. Neşe (5) sözel olarak yapılan açıklamayı anlamakta zorlanınca, araştırmacıyla birlikte bir tablo oluşturarak şimdiye kadar bulunan sonuçları özetlemesi sağlanmıştır. Bunun üzerinde Neşe (5) sayılar arasındaki ilişkiyi "kendisi kadar katını almak" şeklinde ifade etmiştir.

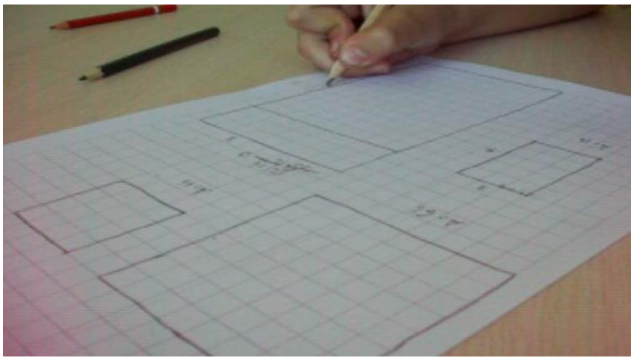
Katılımcılardan Fırat (6) da seansın başlangıcında daha önceki düşüncesini devam ettirmiş ve kenar uzunlukları ile alan ölçüsü arasında doğrusal bir ilişki kurmuştur. Ancak karşılaştığı dördüncü problemde Fırat'ın (6) bu düşüncesi değişime uğramıştır. Araştırmacı kareli kâğıt üzerine çizdiği 5 x 3 birimlik dikdörtgenin kenar uzunlukları üç katına çıkarılırsa alan ölçüsünün nasıl değişeceğini sorunca Fırat (6) da Neşe (5) gibi 6 katına çıkacağını tahmin etmiştir. Araştırmacı hesaplama yaparak tahminini kontrol etmesini istemiştir. Fırat (6) ilk ve son durumdaki dikdörtgenlerin alan ölçülerini hesaplayıp sırasıyla 15 ve 135 bulmuştur. Araştırmacı 15'in 6 katını hesaplayıp kontrol etmesini isteyince çarpma işlemini yapıp 90 bulmuştur. Ardından 135'i 15'e bölerek alan ölçüsünün 9 katına çıktığını hesaplamıştır. 15 ile 9'u çarparak kontrol etmiştir. Araştırmacı şimdiye kadar yaptıklarını düşünüp genel bir kural oluşturmasını isteyince "Çarpımı mı hocam? hocam dokuz … üç kat mı artmıştı hocam üç kere üçü çarpıcaz hocam." açıklamasını yapmıştır. Daha önceki problemler için de bu kuralın sağlandığını belirtmiştir. Şekil 4.67.'de Fırat'ın (6) kenar uzunlukları orantılı şekillerin alan ölçüleri için yaptığı çizimlerden bazıları gösterilmektedir.



Şekil 4.67. *Fırat'ın (6) benzer dikdörtgenlerin alanları için yaptığı çizimler*

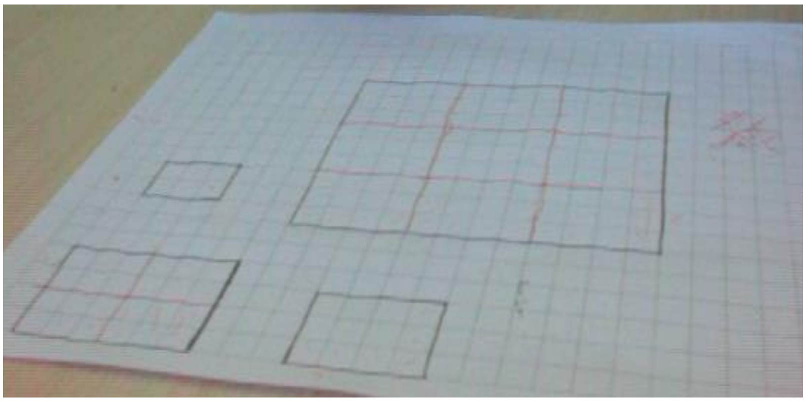
Katılımcılardan Ceylan (6) da benzer şekilde alan ölçüleri arasındaki ilişkiyi bulmak için kenar uzunlukları arasındaki oranı gösteren sayıyı kendisiyle çarptığını söylemiştir. Zehra (5), Neşe (5), Fırat (6) ve Ceylan (6) bir sayının kendisiyle çarpımını o sayının karesi olarak ifade edememiştir. Bir sayının karesinin ne anlama geldiği 5. sınıf düzeyinde ele alınmasına rağmen katılımcılar bu ifadeyi buldukları değerle ilişkilendirememişlerdir.

Mısra (7) da başlangıçta kenar uzunlukları arasındaki oran ile alan ölçüleri arasındaki oran arasında genel bir ilişki kuramasa da araştırmacının yönelttiği üçüncü problemde yaptığı tahmini bir nedene bağlamaya çalışmıştır. Kenar uzunlukları arasındaki oran 2 olan dikdörtgenlerin alan ölçüleri arasındaki oranın hesaplama yapmadan 4 olacağını söylemiştir. Buradaki düşüncesini "Çünkü daha deminki dediğim gibi mesela beş … yirmi beş beşin katı, dört de ikinin katı olduğu için burada da yine iki ikinin de katı ama bir ikiden fazla olması gerek o yüzden dört dedim." şeklinde açıklamıştır. Mısra (7) bir ilişki kurmaya çabalasa da henüz bunu tam anlamıyla ifade edememektedir. Bir sonraki problemde kenar uzunlukları 3 katına çıkarılan şeklin alan ölçüsünün 6 katına çıkacağını söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı çizim yaparak alan ölçüsünün nasıl değişeceğini göstermesini istemiştir. Mısra (7) dikdörtgenleri kareli kâğıda çizip alanlarını sırasıyla 15 ve 135 birim kare olarak hesaplamış ve 135'i 15'e bölerek alan ölçüsünün 9 katına çıktığını göstermiştir. Düşüncesini “Burada da kenar ilişkisi üçtü. Yine kendi sayısıyla çarpıp üçle üçü dokuz çıkar. Alan ilişkisi de dokuz olur.” şeklinde açıklamıştır. Bundan sonra kendisine yöneltilen problemlerde de bu ilişkiyi kullanmıştır. Seansın sonunda kenar uzunlukları a katına çıkarsa alan ölçüsünün nasıl değişeceğini “yine a ile a’yı çarpıp alanı buluruz, ikisinin alan ilişkisini.” şeklinde açıklamıştır. Mısra (7) da bir sayının kendisi ile çarpımını o sayının karesi olarak isimlendirememiştir. Mısra’nın (7) yaptığı çizim ve hesaplamalardan bazıları Şekil 4.68.’de gösterilmektedir.



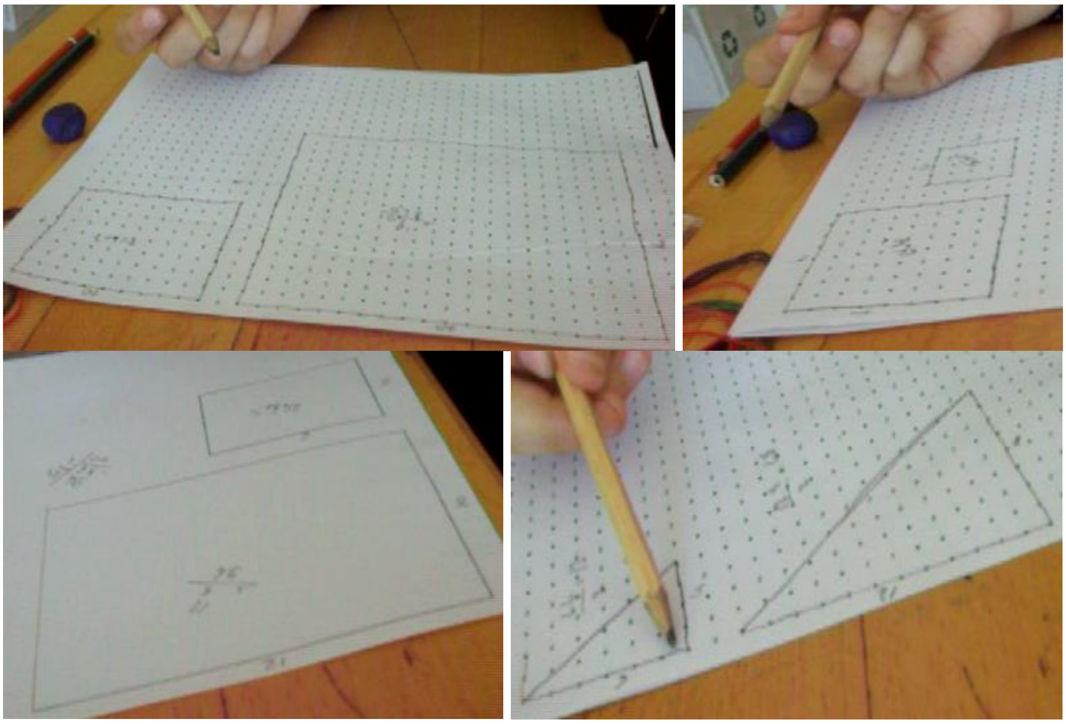
Şekil 4.68. *Mısra’nın (7) benzer dikdörtgenlerin alanları için yaptığı çizimler*

Can (7) seansın başında kenar uzunlukları ve alan ölçüsü ile ilgili rastgele tahminler yapmıştır. Örneğin $4 x 6$ ve $2 x 3$ birimlik dikdörtgenler gösterilerek küçük olan dikdörtgenden kaç tanesinin büyük olanın içine sığabileceği sorulunca 5 tahmininde bulunmuştur. Tahminini nasıl kontrol edeceği sorulunca “Hocam ilk önce hocam bunun (küçük dikdörtgen) alanını bulurum. Sonra hocam bunun (büyük dikdörtgen) alanına göre burayı da hesaplarım” cevabını vermiştir. Alan ölçülerini birer satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarparak hesaplamış, sırasıyla 24 ve 6 birim kare bulmuştur. İçine kaç tane sığacağını bulmak için büyük olanın alan ölçüsünü küçüğün alanına böleceğini söylemiş ve 4 elde etmiştir. Bir sonraki problemde kenar uzunlukları arasındaki oran 3 olan iki dikdörtgenin alan ölçüleri arasındaki oranı 8 olarak tahmin etmiştir. Hem alan ölçülerini hesaplayarak hem de çizim yaparak bu oranın gerçekte 9 olduğunu bulmuştur. Bir sonraki problemde de bir genellemeye ulaşamasa da yakın bir tahminde bulunmuştur. Dördüncü problemde ise kenar uzunlukları arasındaki oran 5 olan iki karenin alan ölçüleri arasındaki oranı 25 olarak tahmin etmiştir. Araştırmacı şimdiye kadar yaptıklarını gözden geçirerek genel bir ilişki bulmaya yönlendirince başlangıçta toplamaya dayalı bir düşünce geliştirmeye çalışmış; fakat başarılı olamamıştır. Araştırmacı baştan beri buldukları kenar ve alan ölçüsü ilişkilerini yeniden özetleyince Can (7) bulduğu ilişkiyi “Hocam hani bununki beşti ya hocam onlar hocam yani kendi sayısının katıyla fazla oluyor.” şeklinde açıklamıştır. Şekil 4.69.’da Can’ın (7) kenar uzunlukları orantılı şekiller için yaptığı çizimlerden bazıları gösterilmektedir.



Şekil 4.69. Can’ın (7) *benzer dikdörtgenlerin alanları için yaptığı çizimler*

Katılımcılardan Gülce (8) ilk klinik görüşmede benzer iki karenin alan ölçüleri arasındaki oranı doğru bir şekilde hesaplayabilen tek katılımcıydı. Öğretim seansındaki ilk problem durumunda da kenar uzunlukları 2 ve 6 birim olan kareler için kenar uzunlukları ile alan ölçüleri arasındaki ilişkiyi alan ölçülerini hesaplayarak tespit etmeye çalışmıştır. Kenar uzunlukları arasındaki oranı üç olarak belirlediği iki karenin alan ölçüleri ile ilgili şu açıklamayı yapmıştır: “Alanları arasında … burası 4, burası 36 olduğu için 9 katı oluyor. Kenarlarında da 3 katı vardı yine kenarları 3 katı olduğu için 9 da onun 3 katı.” Bunun ardından kenarları orantılı şekillerin alan ölçüleri arasındaki ilişkiyi bulması beklenen iki problem durumu daha sunulmuş ve Gülce (8) her ikisini de kolaylıkla hesaplayarak çözmüştür. Araştırmacı her üç problemde bulduğu ilişkileri yeniden incelemesini ve bir genellemeye ulaşmasını sağlamaya çalışmıştır. Gülce (8) “Kenarı hangi sayıyla artırırsak alanı da o sayının ikisinin çarpımına eşit oluyor.” genellemesine ulaşmıştır. Araştırmacı bu açıklamayı matematik diline uygun hale getirebilmesi için bir sayının kendisiyle çarpımına verilen özel ismi sorunca Gülce (8) önce “üssü”, sonra “karekök”, en son “karesi” cevabını vermiştir. Şekil 4.70.’de Gülce’nin (8) kenar uzunlukları orantılı şekillerin alan ölçüleri için yaptığı çizim ve hesaplamalar gösterilmektedir.

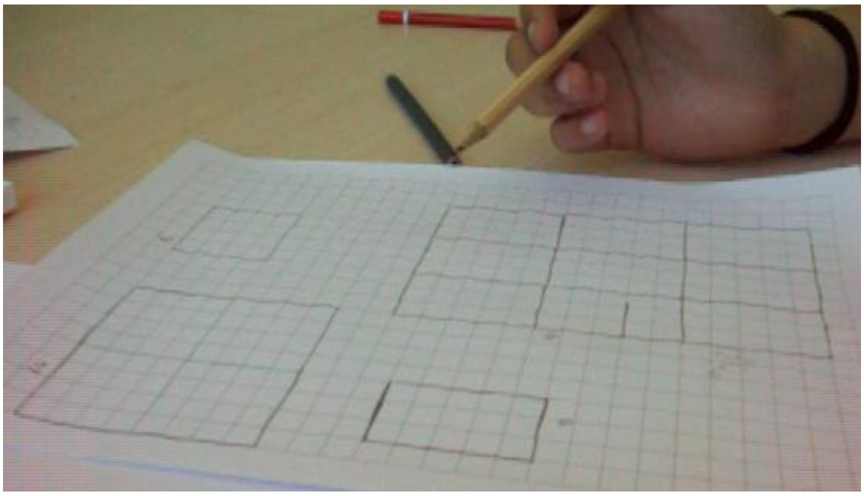


Şekil 4.70. *Gülce'nin (8) benzer şekillerin alanları için yaptığı çizim ve hesaplamalar*

Gülce (8) ulaştığı genellemeyi kendisine değerlendirme amaçlı yöneltilen diğer problem durumlarında da uygulamıştır. Bu ilişkinin diğer şekiller için de geçerli olduğundan nasıl emin olduğu sorulunca "Çünkü hani birçok örnek yaptık. Her birinde de hani burası kaç katına çıkarsa alanları da onun karesi oluyor. Hepsi … hepsi de onun eşitine denk geliyor, farklı bir şey yok." cevabını vermiştir. Gülce (8) yaptığı çözümlerden yola çıkarak bir genelleme yaptığını ifade etmiştir. Karşılaştığı problemlerde yaptığı genellemeye aykırı bir durum olmadığı için genellemenin doğruluğundan emin olduğunu belirtmiştir.

Katılımcılardan Filiz (8) kenarları orantılı olan şekillerin alan ölçüleri arasındaki ilişkiyi belirlemekte oldukça zorlanmıştır. Kendisiyle bu konuyla ilgili yapılan ilk seansta kenar uzunlukları arasında belirli bir oran olan şekillerin alan ölçüleri arasındaki oranı hesaplayarak veya çizim yaparak bulabilse de bir genellemeye varamamıştır. Filiz (8) seans sonunda bir genellemeye ulaşamadığı için ek bir seans daha yapılmıştır. Bu ek seansta Filiz (8) akıcı bir şekilde dört işlem yapamadığından daha çok kareli kâğıt üzerine yapılan çizimler üzerinde durulmuştur. Filiz (8) kendisine yöneltilen problem durumlarında kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin kendisiyle çarpımının alan ölçüleri arasındaki ilişkiyi verdiğini uygulamada kullanabilse de sözel olarak ifade edememiştir.

Filiz'in (8) matematiksel işlemleri uygulamadaki yetersizliği ve matematik dilini doğru bir şekilde kullanamaması bu durumun nedenleri olarak düşünülmektedir. Şekil 4.71.'de Filiz'in (8) kenar uzunlukları orantılı şekiller için yaptığı çizim ve hesaplamalardan bazıları gösterilmektedir.



Şekil 4.71. Filiz'in (8) *benzer dikdörtgenlerin alanları için yaptığı çizimler*

4.2.3. Öğretim seansları boyunca katılımcıların kullandığı kanıt şemalarında yaşanan değişim

Araştırmacı öğretim seansları boyunca sorduğu sorularla katılımcıları uyguladıkları yöntemleri ve buldukları sonuçları sorgulamaya yönlendirmiştir. Her problem durumu için çözümlerinin doğruluğundan nasıl emin olduklarını sorarak onları çözüm yöntemlerini açıklayıp savunmaya teşvik etmiştir. Katılımcılar başlangıçta çözümlerinin doğruluğunun sorgulanmasına şaşırmış ve çözümlerini kanıtlamaya pek istekli davranmamışlardır. Araştırmacı bu durumu aşmak için onlara bir arkadaşlarının daha farklı bir çözüm yaptığını ve onu ikna etmelerini istemiştir. Burada katılımcılara arkadaşlarının yaptığı farklı çözüm olarak sunduğu karşı yöntemlerin literatürde çevre ve alanla ilgili öğrencilerin sıklıkla yaptığı hata ve yanılgıları içermesine dikkat etmiştir. Böylece katılımcıların kavram imajlarındaki sınırlılıkları ve formal tanıma uymayan özellikleri tespit etmeyi de amaçlamıştır. Katılımcılar öğretim seanslarının başlangıcında uygulama öncesindeki gibi dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullanma eğiliminde olmuşlardır. Öğretim seansları devam ettikçe kavram imajlarında yaşanan değişimle birlikte kendi bilgilerine güvenmeye başlayıp dışsal ve deneysel kanıt şemaları yanında analitik kanıt şemalarını da kullanmaya başlamışlardır.

4.2.3.1. Öğretim seansları boyunca dışsal kanıt şemalarının kullanımı

Öğretim seanslarının başında bazı katılımcıların kendi düşüncelerine olan güvenleri oldukça düşüktü. Bu katılımcılar sahip oldukları bilgileri henüz içselleştirmedikleri için bilgiyi onlara sunan dışsal kaynakları savunmalarının dayanağı olarak gösteriyorlardı. Örneğin katılımcılardan Fırat (6) öğretim seanslarının başında, yaptığı işlemlerin doğruluğunu savunması istendiğinde oldukça isteksiz davranmış, kendisinin de yaptıklarının doğruluğundan emin olmadığını söylemiştir. Kendi bilgisine güvenmediği için onu savunma gereği bile duymamıştır. Ancak araştırmacının ısrarları sonrası bazı kısa açıklamalar yapabilmiştir. Bu açıklamalarında da savunmasını kendisi dışında daha bilgili birilerine (öğretmeni veya ablası) dayandırmış, yani otoriter kanıt şemasını kullanmıştır.

Benzer şekilde katılımcılardan Neşe (5) de çevre uzunluğunu hesaplamakta kullandığı yöntemin doğruluğundan nasıl emin olduğunu açıklarken otoriter kanıt şemasını kullanmıştır. Araştırmacıya çevre uzunluğunu hesaplarken neden bu yöntemi kullandığını "Çünkü hem ilkokulda hem ortaokulda öyle öğrendik." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacıya verdiği cevabın doğruluğunu kanıtlamak için düşüncesinin kaynağı olarak daha önce öğretmenlerinden bu şekilde öğrenmesini göstermiştir.

Yukarıdaki açıklamalardan anlaşıldığı üzere Neşe (5) ve Fırat (6) çözümlerinin doğruluğunu savunurken kendi düşüncelerine yeterince güvenmemekte, kendilerinden daha bilgili olduğunu düşündükleri kişileri dayanak olarak göstermektedirler. Bu kişiler de çoğunlukla öğretmenleri olmaktadır. Öğretmenleri bu şekilde öğrettiği için kullandıkları yöntemlerin doğru olduğunu ifade etmektedirler.

4.2.3.2. Öğretim seansları boyunca deneysel kanıt şemalarının kullanımı

Öğretim seanslarının başında katılımcılardan bazıları şekillerin görünümleri ve zihinlerindeki prototip imgeler üzerinden düşüncelerini savunma eğilimi göstermişlerdir. Süreç ilerledikçe katılımcıların pek çok örnek durum üzerinden çıkarımlar yapmaları gerekmiştir. Araştırmacı, katılımcıların kavram imajlarındaki sınırlılıkları ve hataları değiştirmek için, onları düşüncelerinin aksi örneklerle karşılaştırmış, böylece hatalarıyla yüzleşmelerini sağlamaya çalışmıştır. Bazı durumlarda ise, birçok örnek durum üzerinden bir genellemeye ulaşmalarını beklemiştir. Öğretim seanslarında örneklerin bu şekilde kullanımı katılımcıların örnek temelli kanıt şemasını kullanma sıklığını artırmıştır.

Katılımcılardan Zehra'nın (5) ilk öğretim seansında uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmede olduğu gibi algısal kanıt şemasını kullandığı görülmüştür. Örneğin kendisine gösterilen dairenin çevresi olmadığını "Kenarları olmazsa mesela bir daire diyelim, dairenin kenarları yok. Kenarları var da köşeleriyle birleşmemişler. Köşeleri olsaydı onun da olurdu." şeklinde bir açıklama yaparak kanıtlamaya çalışmıştır. Seansın devamında yaptığı etkinliklerle birlikte çevreyle ilgili kavram imajındaki değişim sonrası yaptığı açıklamaların içeriği değişse de kanıt şeması değişmemiştir. Araştırmacı ile aralarında gerçekleşen diyalogda Zehra'nın (5) yine algısal kanıt şemasına uygun bir açıklama yaptığı görülmektedir:

> Araştırmacı: Bu (telden yapılmış çember) şeklin üzerinde karınca hangi yolu takip eder?
>
> Zehra: Yine şuradaki sınırlarını takip eder. (Parmağını şeklin sınırı üzerinde gezdiriyor.) Çünkü dünya da küre şeklinde bu da çember şeklinde döndüğü gibi aynı yere gelir.
>
> Araştırmacı: Peki, o zaman bu şeklin sence çevresi olur mu?
>
> Zehra: Olur.

Katılımcılardan Mısra (7) da ilk seansta algısal kanıt şemasına uygun açıklamalar yapmıştır. Telden yapılmış bir çemberin neden çevresi olmadığını şeklin görünümüne odaklanarak "Çünkü çevrede kenarlarını, kenarlarındaki şeyi ölçüleri çarpıp da kenar sayılarına göre çarpıyoruz. Ama bunun kenarı olmadığı için çarpamayız. Çevresini bulamayız." şeklinde açıklamaya çalışmıştır. Yaptıkları açıklamalardan görüldüğü üzere Zehra (5) ve Mısra'nın (7) çevreyle ilgili kavram imajları çokgen algıları etrafında şekillenmiştir. Bu nedenle inceledikleri şekil zihinlerindeki çokgen algısına uymadığında o şeklin çevresi olmadığını söylemektedirler. Bu nedenle algısal kanıt şemasını kullandıkları düşünülmektedir.

Katılımcılardan Neşe (5) ilerleyen öğretim seanslarında bir şekil parçalanıp yeniden düzenlendiğinde ilk olarak alanın korunduğunu söylese de aynı parçalar farklı bir şekilde yeniden birleştirildiğinde alanın değişeceğini söylemiştir. Burada oluşturulan şekillerin görünümüne bakarak düşüncesini savunmuştur. "Alanında bir değişiklik olurdu… Çünkü burada yarımlar daha fazla çıkardı, öbüründe hafif şey olduğu için yani yamuk olduğu için onda biraz daha az yarım çıktı. Onun için bunda daha fazla çıktığı için bunun alanı daha küçük." şeklinde savunmasını yapmıştır. Katılımcılardan Can (7) da parçalara ayrılıp yeniden düzenlenen şeklin alanının başlangıca göre daha farklı olduğunu (son halinin alanı daha büyük) söylemiştir. Bu düşüncesini şöyle açıklamıştır: "Hocam hani siz bunu ayırdığınızda bunun hani yarımları olduğu için ben de hocam bunun daha fazla çıkacağını düşündüm o yüzden." Can (7) da Neşe (5) gibi şeklin görünümüne bakarak bir yargıda bulunmuştur. Buna göre şeklin görüntüsüne dayanarak savunma yaptıkları için algısal kanıt şemasını kullandıkları söylenebilir.

Neşe (5) ve Can (7) yukarıda bahsedilen öğretim seansının devamında araştırmacının isteği üzerine birim kareler yardımıyla ölçme yaparak alanın değişmediği sonucuna varmışlardır. Neşe (5) başlangıçta nasıl düşündüğünü "Bunun daha az çıkacağını düşündüm. Çünkü bunun (son şekil) boyu daha uzun ve alanı daha küçük. Çünkü bununki (ilk şekil) daha büyük alanına göre, ama eşit çıktılar. O zaman öncekine göre yani yine önceki şekil gibi buna benzer şekil gibi ayırırsak alanları aynı." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı aynı parçaları daha farklı bir biçimde birleştirerek alan için ne düşündüğünü yeniden sormuştur. Neşe (5) bu kez "Alanı yine aynı olur. Çünkü daha demin bu şekil (üçgen parçalardan birini gösteriyor) ikisi otuz, bu (dikdörtgen parçayı gösteriyor) altmış çıkmıştı. Yine hesaplarsak yine aynı çıkacak. Onun için alanı eşit." cevabını vermiştir. Neşe (5) ve Can (7) açıklamalarında her iki durumda da aynı parçalar kullanıldığı için alanın değişmeyeceğini belirtmiştir. Düşüncelerini örnekler üzerinden savundukları için örnek temelli kanıt şemasını kullandıkları söylenebilir.

Katılımcılardan Ceylan (6) birçok farklı şeklin çevre uzunluğunu ölçmesi gereken problem durumunda yaptıklarının doğruluğunu kanıtlaması istendiğinde ip veya cetvel kullanımıyla ulaştığı sonuçların benzer olmasını kanıt olarak göstermiştir. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğunu "Hem iple hem de cetvelle şeyini çevresini ölçtüğümüzde yine aynı şey çıkıyor." şeklinde açıklamıştır. Ceylan (6) farklı şekiller için bu sonuçların her zaman benzer çıktığını belirtmiştir. Buna göre katılımcının örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir. Ceylan (6) seanslar kapsamında karşılaştığı yeni ölçme yöntemlerini mevcut çevre kavram imajına eklemiş ve düşüncesini savunmak için kullanmıştır.

Zehra (5) bir başka öğretim seansında parçalara ayrılıp yeniden düzenlenmiş bir şeklin çevresinin başlangıca göre nasıl bir hal alacağını incelemiştir. Kendisi başlangıçta çevre uzunluğunun değişmeyeceğini tahmin etse de yaptığı ölçümler sonucunda bunun hatalı olduğunu tecrübe etmiştir. Araştırmacı Zehra'ya (5) aksine bir örnek üzerinde ölçme yaptırarak düşüncesinin hatalı olduğunu keşfetmesini sağlamıştır. Ardından kendisi gibi düşünmeyen bir arkadaşını ikna etmesi istendiğinde başlangıçta ölçme yaparak o arkadaşını ikna edebileceğini söylemiştir. Eğer yine de ikna olmadıysa şekilleri üst üste getirerek karşılaştırabileceğini ifade etmiştir. Zehra (5), öğretim seanslarında karşılaştığı örnek durumları başkalarını ikna etmek için kullanmaktadır. Buna göre katılımcının örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Can (7) bir başka öğretim seansında aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturmuştur. Araştırmacı çizdiği şekillerin çevre uzunluklarının 24 birim olduğunu nasıl kanıtlayacağını sorduğunda ise daha önceki problemlerde yaptığı gibi kenar uzunluklarını toplama veya sınırlar boyunca birim uzunlukları sayma yöntemlerini kullanabileceğini söylemiştir. Her iki durumda da şeklin çevre uzunluğu için aynı değere ulaştığını, bu nedenle çözümünün doğru olduğunu savunmuştur. Can (7) daha önce karşılaştığı problemleri çözerken kullandığı bu yöntemlerin şeklin çevre uzunluğunu doğru bir şekilde hesaplamasını sağladığı için burada yaptıklarının da doğru olduğunu ifade etmiştir. Buna göre katılımcının örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Gülce (8) alanı olan şekillere örnek olarak çizdiği karmaşık şekillerin alanlarını ölçerken önce bunları parçalara ayırmış, ardından her bir parçanın alan ölçüsünü önceden bildiği formülleri kullanarak hesaplamıştır. Son olarak şeklin tamamının alan ölçüsünü hesaplamak için bu parçaların alan ölçülerini toplamıştır. Araştırmacı formülleri kullanmadan alan ölçülerini nasıl hesaplayabileceğini sorduğunda şeklin sınırları içinde kalan birim kareleri sayabileceğini belirtmiştir. Gülce (8) hem formüllerle hesapladığı hem de birim kareleri sayarak bulduğu sonuçların şekillerin alan ölçüsünü gösterdiğini söylemiştir. Ardından araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Peki bu parçaların alanlarının toplamının tüm şeklin alanını verdiğinden nasıl emin oluyorsun?
>
> Gülce: Emin olmasak da yine mesela dikdörtgen ya da üçgendeki gibi bu içlerini sayarak da yine aynı sonucu elde edebilirdik.
>
> Araştırmacı: Bir dene bakalım gerçekten aynısı çıkacak mı?
>
> Gülce: (Şekli kaplayan birim kareleri sayıyor) 16, şurası da tam oluyor yine 17.
>
> Araştırmacı: Yani hesaplayarak bulduğunla yine aynı çıktı mı?
>
> Gülce: Evet.

Yaptığı açıklamalardan anlaşıldığı üzere Gülce (8) alan ölçüsünü hesaplamak için farklı yöntemler kullanabilmiştir. Her iki yöntem sonucunda da şeklin alan ölçüsünü bulacağı için aynı değere ulaşacağını ifade etmiştir. Gülce (8) burada örnek durumlar üzerinden çözümünün doğruluğunu savunmaya çalıştığı için örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Bir başka öğretim seansında alan korunumuyla ilgili katılımcıların neler düşündüğünü ortaya çıkarmak için bir dikdörtgen parçalanıp paralelkenar oluşturacak şekilde yeniden düzenlenmiş ve alan ölçüsünün başlangıca göre değişip değişmeyeceği sorulmuştur. Zehra (5) bu durumda alan ölçüsünün değişmeyeceğini çünkü sadece parçalardan birinin yer değiştirdiğini söylemiştir. Araştırmacı düşüncesini şekil üzerinde göstermesini isteyince üçgen parçalardan birinin konumunu değiştirip şekli başlangıçtaki dikdörtgene dönüştürmüştür. Katılımcılardan Ceylan (6), Fırat (6), Mısra (7), Filiz (8) ve Gülce (8) de alan korunumuyla ilgili araştırmacıyı ikna ederken parçalanmış şekli başlangıçtaki şeklin üzerine yerleştirmiş ve çakıştıklarını göstermişlerdir. Fırat (6) düşüncesini savunmak için "Hocam bu parça buranın parçası olduğu için hocam bunu buradan kaldırıp alta koysanız hocam değişmez. Yani bu parça hep aynı ve aynı şekilde olduğu için hocam aynı alanı olur." açıklamasını yapmıştır. Açıklamalardan görüldüğü üzere katılımcılar her iki şekil aynı parçaları içerdiğinden (bire bir eşleme yaparak) alan ölçüsünün değişmediğini söylemişlerdir. Araştırmacının isteği üzerine birim kareler yardımıyla ölçme yaparak da alan ölçüsünün değişmediğini göstermişlerdir. Kendileri gibi düşünmeyen bir arkadaşlarını ikna etmek için daha önce onların uyguladığı yöntemle modeller üzerinde ölçme yaptırarak gösterebileceklerini söylemişlerdir. Katılımcılar düşüncelerini savunurken örnek durumlar üzerinden açıklama yaptıkları için örnek temelli kanıt şemasını kullandıkları söylenebilir. Aynı zamanda açıklamalarında sezgisel olarak öteleme dönüşümünü kullanmaları analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasına geçiş yaptıklarının göstergesi olarak kabul edilebilir.

Başka bir öğretim seansında katılımcılar aynı alan ölçüsüne sahip şekiller oluşturmuş ve bunların çevre uzunluklarını karşılaştırmışlardır. Katılımcılardan Neşe (5) ve Fırat (6) aynı alan ölçüsüne sahip şekillerin çevre uzunluklarının farklı olacağını düşünmektedirler. Bu düşünceyi Neşe (5) şu şekilde savunmuştur: "Çünkü bazılarında dört birimlik, bazılarında üç veya altı, bazılarında sekiz birimlik yaptık. Onun için bazıları daha büyük çıkar." Fırat (6) da Neşe'yle (5) benzer şekilde daha önce yaptığı örnekleri düşüncesini savunurken kanıt olarak öne sürmüştür: "Hocam mesela bunların hepsinin alanları aynı, bakın hocam farklı (çevre ölçülerini gösteriyor)." Kendisi gibi düşünmeyen bir arkadaşını nasıl ikna edeceği sorulunca "Hocam bu şekilleri yaparak yine hocam. Kâğıt üzerinde göstererek." cevabını vermiştir. Ardından kâğıt üzerine şekiller çizip düşüncesini örneklendirmiştir. Görüldüğü gibi katılımcılar düşüncelerinin doğruluğunu örnek durumlara dayandırmıştır. Buna göre Neşe (5) ve Fırat'ın (6) yine örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Alan ile ilgili son öğretim seansında Zehra'dan (5) kenar uzunlukları 3 ve 5 birim olan dikdörtgen ile kenar uzunlukları bu dikdörtgenin üç katı olan dikdörtgenin alan ölçülerini karşılaştırması istenmiştir. Zehra'nın (5) ilk tahmini alan ölçüsünün 9 katına çıkacağı olmuştur. Araştırmacı ölçme yaparak tahminini kontrol etmesini istediğinde önce her bir dikdörtgen için satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarpıp sırasıyla 15 ve 135 bulmuştur. Ardından "135'i 15'e bölerek olup olmadığını kanıtlayabiliriz" diyerek yaptığı bölme işlemi sonucunda 9 katına çıktığını göstermiştir. Kendisi gibi düşünmeyen bir arkadaşını nasıl ikna edeceğini "Yani ilk başta bunu sözle anlatırım. Yani olmayacağını anlatırım. Sonra böyle şekiller çizerek gösteririm. Mesela bunun kısa kenarı 3 birim kare, uzun kenarı 5 birim kare, alanı 15 birim kare. Bunu 3 katına çıkardığımızda burası 9 birim kare oluyor, burasıysa 15 birim kare oluyor. Bunları çarpmasını isterim, sonucunu bulacak. Sonucunu da küçük karenin daha büyük olan kareye karenin alanına küçük olan karenin alanına bölmesini isterim ve aradaki ilişkiyi bulabilir." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı çarpma ve bölme bilmeyen birini ikna etmek için nasıl bir yol izleyeceğini sorduğundaysa öğrenci "Bunun bu dikdörtgenin içine bu küçük dikdörtgenlerden çizmesini isterim. Kaç tane olursa." cevabını vermiştir. Araştırmacı çizerek göstermesini isteyince büyük dikdörtgenin içine küçük olanlardan 9 tane yerleştirmiştir. Zehra (5) düşüncesini örnekler üzerinden savunduğu için örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Araştırmacı alan ile ilgili son öğretim seansında birçok şeklin kenar uzunluklarını belirli bir oranda değiştirerek Fırat'tan (6) alan ölçülerinde yaşanan değişimi açıklamasını istemiştir. Bir dikdörtgenin kenar uzunlukları 8 katına çıkarılırsa alan ölçüsünün nasıl değişeceğini sorduğunda Fırat (6) alan ölçüsünün 64 katına çıkacağını işlem yapmadan söylemiştir. Bundan nasıl emin olduğunu ise "Deneyerek hocam. Baya bir şekil … ilk yaptığımızdan bu yaptığımıza kadar hocam deneyerek." şeklinde açıklamıştır. Görüldüğü gibi Fırat (6) düşüncesinin doğruluğunu daha önceki çözümlerine dayandırmaktadır. Buna göre örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Ceylan (6) da benzer bir problem durumunda kenar uzunlukları iki katına çıkarılan dikdörtgenin alan ölçüsünün dört katına çıktığını hesaplamış ve çizim yaparak şekil üzerinde göstermiştir. Araştırmacı "Kenarlar iki katına çıktıysa alan da iki katına çıkar." şeklinde düşünen birinin bu düşüncesinin doğru olup olmadığı sorunca Ceylan (6) bu düşüncenin yanlış olduğunu belirtmek için “Çünkü biz şey olarak da yaptık burada bunun üstünde dört bulduk, işlem yaparak da bulduk yine dört bulduk. O yüzden yanlış onlarınki.” cevabını vermiştir. Böyle birini ikna etmek için kendisinin yaptığı gibi hem çizim yaparak hem de hesaplayarak örnekler üzerinde göstereceğini belirtmiştir. Ceylan’ın (6) yaptığı açıklamalardan da anlaşıldığı gibi örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Araştırmacı Gülce’ ye (8) 8x10 birimlik dikdörtgen şeklindeki fotoğrafın kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa alan ölçüsünün nasıl değiştiğini sorduğunda hesaplama yapmadan “Dört katına çıkar.” cevabını vermiştir. Cevabının doğrulundan nasıl emin olduğunu ise “Çünkü demin de aynı şeyi yaptık ve o sayının karesi yani sayının kendisiyle çarpımına eşit oluyordu. Burada da iki katına çıktığı için de iki kere ikiden dört olduğu için alan da dört katına çıkacak.” şeklinde açıklamıştır. Bulduğu bu ilişkinin diğer şekiller için de geçerli olduğundan nasıl emin olduğu sorulunca “Çünkü hani birçok örnek yaptık. Her birinde de hani burası kaç katına çıkarsa alanları da onun karesi oluyor. Hepsi … hepsi de onun eşitine denk geliyor, farklı bir şey yok.” cevabını vermiştir. Görüldüğü gibi Gülce de yaptığı örnekler sonucunda bir genellemeye ulaşmıştır. Buna göre örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

4.2.3.3. Öğretim seansları boyunca analitik kanıt şemalarının kullanımı

Öğretim seanslarına devam edildikçe katılımcılar düşüncelerinin doğruluğunu savunurken kavram tanımlarına vurgu yapmaya başlamışlardır. Buradaki tanımlar formal tanımlar değil katılımcıların kendi oluşturdukları kişisel kavram tanımlarıdır. Kişisel kavram tanımları katılımcıların bahsi geçen kavram hakkındaki düşüncelerinin kısa bir özeti, kavramın onlar için anlamı olarak ele alınabilirler. Zaman geçtikçe bu kişisel tanımlar formal tanıma anlam ve içerik bakımından daha çok yaklaşmışlardır. Ayrıca katılımcılar işlemlerin sahip olduğu özellikleri, işlemler arasındaki ilişkileri, kavramların özelliklerini, kavramlar arasındaki farklılıkları ve işlemler ile kavramlar arasındaki bağlantıları da savunmalarına dayanak olarak sunmuşlardır.

Örneğin Zehra (5) alan kavramı için verdiği örneklerle ilgili yaptığı açıklamayı savunurken kavramın anlamına vurgu yapmıştır. Zehra (5) alan denildiğinde aklına ilk olarak tüm kapalı şekillerin geldiğini söylemiştir. Araştırmacı bu şekillerin alanla nasıl bir ilişkisi olduğunu sorduğunda “Çünkü bu şekillerin kapladığı bir yüzey var. Eğer ki şu şekil yaptığım şu şekil gibi (oyun hamuruyla daha önce oluşturduğu üçgeni bir kenarından açıyor) birleşmemiş olsaydı kapladığı bir yüzey olmazdı ve alanı olmazdı." cevabını vermiştir. Zehra'nın (5) yaptığı açıklamadan anlaşıldığı gibi düşüncesini savunmak için şekillerin yüzey kaplama ve kapalı olma özelliklerine dikkat çekmiştir. Zehra (5) kavram tanımını kullanarak savunma yaptığı için dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir. Burada aynı zamanda farklı örnekler göstererek savunmasını güçlendirmeye çalıştığı için örnek temelli kanıt şemasını da kullanmıştır.

Benzer şekilde Fırat (6) da kendisine gösterilen şekillerin alanı olup olmadığıyla ilgili düşüncesini savunurken yaptığı açıklamada şekillerin iç bölgelerine dikkat çekmiştir. Şekiller kapalı oldukları sürece eğri olmalarının alanı etkilemeyeceğini söylemiş ve "Hocam iç kısımları alan olduğu için hocam eğri büğrü olsa da yine bakın iç kısmı var, onun için." şeklinde düşüncesini açıklamıştır. Açık şekillerin ise alanı olmadığını çünkü bu şekillerin belirli bir sınırı olmadığını belirtmiştir. Alan ölçüsünü hesaplayamayacağı şekillerin alanı olmadığını düşünen bir arkadaşını ikna etmesi istendiğinde bu düşüncenin yanlış olduğunu, iç bölgesi olan her şeklin alanı olduğunu söylemiştir. Görüldüğü gibi Fırat (6) düşüncelerinin doğruluğunu savunurken yaptığı açıklamalarda alan kavramının anlamına vurgu yapmıştır. Daha önce savunmalarında kendi bilgisi yerine dışsal bir otoriteyi dayanak olarak gösteren Fırat (6) artık kişisel kavram tanımını kullanmaktadır. Bu nedenle dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Bir başka problem durumunda Neşe (5) birim karelerden oluşan şeklin çevre uzunluğunu ölçmek için şeklin sınırları boyunca birim uzunlukları saymıştır. Araştırmacı bir arkadaşının farklı bir yöntem kullandığını söyleyerek onu ikna etmesini istemiştir. Bunun üzerine aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır.

> Araştırmacı: Peki, sen sayarken hep şu sınırdaki kenarları saydın. Ama bir arkadaşın şu içindeki kareleri saydı. Sence hangisi doğru?
>
> Neşe: Dış tarafı daha doğru çünkü burada çevresini soruyor. Her biri bir birimlik diyor kenarları. Onun için bu daha doğru.
>
> Araştırmacı: Peki, ona yanlış yaptığını, seninkinin daha doğru olduğunu nasıl kanıtlarsın?
>
> Neşe: Nasıl kanıtlarım? Yine daha deminki gibi on birimlik olduğunu sayarım. On birim çıkıyor, öyle kanıtlarım.

Araştırmacının daha önce kendisinin de çevre ölçümünde kullandığı birim kareleri sayma yönteminin doğru olup olmadığı sorusuna iç kısmın alanı gösterdiği cevabını vermiştir. Neşe (5) daha önce çevre ve alan kavramlarını birbirinden ayırmakta zorlanırken artık bu iki kavramın birbirinden farklı olduğunu dile getirmektedir. Neşe (5) çevreyi hesaplarken neden sadece sınırlardaki uzunlukları dahil ettiğini “Çevresi dış kısım onun için sadece dış kısımlar çevreye dahil.” şeklinde açıklamıştır. Görüldüğü gibi Neşe (5) açıklamalarında matematiksel dili doğru kullanamasa da çevrenin anlamını, şeklin sınırları olduğunu, vurgulamaktadır. Neşe’nin (5) çevre ve alan kavram imajlarındaki değişim onun düşüncesini savunurken yaptığı açıklamalara yansımaktadır. Daha önce kendi bilgisi yerine dışsal bir otoriteye güvenen Neşe (5) artık kavramların anlamını düşüncesini savunmada kullanmaktadır. Bu nedenle dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Katılımcılardan Mısra (7) da alanı olmayan şekillere örnek olarak çizdiği açık şekillerin alanı olmadığından nasıl emin olduğunu belirli bir yüzeyi sınırlamamalarına dayandırmıştır. Bir şeklin alanı olup olmadığını belirlerken nelere dikkat ettiğini “yer kaplıyor ve her yeri kapalı” şeklinde açıklamıştır. Mısra’nın düşüncesini savunurken yaptığı açıklamalardan anlaşılacağı gibi şeklin kapalı olması yanında belirli bir yüzeyi kaplamasına da dikkat çekmiştir. Burada söz ettiği özellikler bir şeklin alanı olması için gerekli şartları belirtmektedir. Bu nedenle Mısra’nın (7) dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Katılımcılardan Can (7) ise açık bir şeklin alanı olmadığından nasıl emin olduğunu açıklarken çevre ve alan kavramlarının anlamlarına vurgu yapmıştır. Açık bir şeklin neden alanı olmadığını şu şekilde açıklamıştır: “Çünkü hocam yani çevre aynı size dediğim gibi sınırları çevresi, hocam alansa sınırlarının yani içi.” Bu şekillerin sınırlarının eksik olduğunu belirtmiştir. Can (7) burada düşüncesini savunurken çevre ve alan kavramlarının anlamlarına odaklanarak daha önce birbirine karıştırdığı bu iki kavram arasındaki farkları vurgulamıştır. Bu nedenle Can’ın (7) dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Başka bir öğretim seansında farklı alan birimlerini inceleyen Mısra (7) alan ölçümünde dairesel birimlerin kullanılamayacağını söylemiştir. Bu düşüncesinin doğrulunu savunmak için “Çünkü yuvarlakları iki yan birbirine birleştirirsek arada boşluklar oluşur. Ama biz her yeri hesaplayacağımız için … olmaz.” açıklamasını yapmıştır. Yaptığı açıklamada Mısra (7) alanı ölçmek için seçilen birimin şeklin tüm yüzeyini kaplaması gerektiğine vurgu yapmış, dairesel birimlerin bunu sağlamadığını belirtmiştir. Diğer katılımcılar da bu konuda benzer açıklamalar yapmışlardır. Buna göre alanın yüzey kaplama özelliğine değinerek düşüncelerini savundukları için katılımcıların dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandıkları söylenebilir.

Alan kavramının uygulanmasına yönelik öğretim seanslarında Neşe (5) alan ölçmek için birim kareleri kullanarak tüm yüzeyi kaplama yöntemini uygulamıştır. Bu şekilde alan ölçüsünü hesaplayacağından nasıl emin olduğunu "Çünkü bu kareler her tarafı kapladığı için sonra alan cetvel veya başka bir şeyle ölçülmediği için bunlarla daha kolay ölçeriz." şeklinde açıklamıştır. Cetvelin çevre ölümünde kullanılabileceğini, alan ölçümü için uygun olmadığını söylemiştir. Ceylan (6) da alanı ölçmek için şekli birim karelerle kaplama yöntemini kullanmasını şu şekilde savunmuştur: "Çünkü içini ne cetvelle ölçebiliyoruz ne de başka bir şeyle. Ama üstünü bir şeyle kapladığımızda bir de ona uygun olduğundan dolayı yani mesela üçgen olsaydı tam olmazdı. Bundan dolayı bunları sayarak zaten o bütün yerini kaplıyor dikdörtgenin. Onları bunları sayarak bulabiliriz alanını." açıklamasını yapmıştır. Görüldüğü üzere Ceylan (6) ve Neşe (5) açıklamalarında birim karelerin yüzey kaplama özelliğine vurgu yapmış, cetvelin bunu sağlayamayacağını belirtmiştir. Katılımcılar düşüncelerini savunurken kavram ile onu ölçerken kullandıkları birimin uygunluğuna dikkat çekmişlerdir. Birim karelerin yüzeyi kapladığını; fakat cetvelin buna uygun olmadığını ifade etmişlerdir. Buna göre alanın yüzey kaplama özelliğine değinerek düşüncesini savundukları için Neşe (5) ve Ceylan'ın (6) dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Zehra (5) da benzer olarak alanı ölçerken şekilleri birim karelerle kaplayıp kullandığı birim kare sayısının alan ölçüsünü verdiğini söylemiştir. Alan ölçüsünün bu şekilde bulunduğundan nasıl emin olduğunu şu şekilde açıklamıştır: "Çünkü sınırlar çevresi, içinde kalan bölmesi ise alanı. Hem biz bu karelerle içini doldurduk yani alanını." Zehra (5) düşüncesini savunurken çevre ve alan kavramlarının anlamına dikkat çekmiştir. Alan ölçmede kullandığı birim karelerin yüzey kaplama özelliğini alan kavramıyla ilişkilendirmiştir. Buna göre Zehra'nın (5) da dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Neşe (5) daha sonraki bir seansta dikdörtgenin alan ölçüsü için oluşturduğu algoritmanın doğruluğunu savunurken "Çünkü zaten mesela altı tane, altı kere yediyi önceden altı tane yediyi toplayarak bulduk. Çarpma onun daha kısası olduğu için." şeklinde cevap vermiştir. Yapılan açıklamadan anlaşılacağı üzere Neşe (5) düşüncesinin doğruluğunu toplama ve çarpma işlemleri arasındaki ilişkiye dayandırmıştır. Buna göre işlemler arasındaki ilişkilere dayanarak savunma yaptığı için dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Fırat (6) dikdörtgenin alan ölçüsünü satır ve sütunu oluşturan birim kare sayılarını çarparak alan ölçüsünü hesaplayabileceğini belirtmiştir. Yaptıklarının doğruluğunu kanıtlaması istendiğinde ritmik sayma yöntemiyle alan ölçüsünü hesaplayarak çarpma sonucunda bulduğu değerle karşılaştırmıştır. Benzer bir açıklamayı Zehra (5), Ceylan (6) ve Mısra (7) da yapmış ve ritmik sayma yerine çarpma işlemi yaptıklarını belirtmişlerdir. Görüldüğü gibi katılımcılar ritmik sayma ile çarpma arasında bir ilişki kurmuş ve bunu düşüncelerinin doğruluğunu savunmak için kullanmışlardır. Buna göre işlemler arasındaki ilişkilere dayanarak savunma yaptıkları için dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandıkları söylenebilir.

Araştırmacı Can'dan (7) bir şekil çizerek alanını göstermesini isteyince öğrenci bir dikdörtgen çizerek iç bölgesini taramıştır. Çizdiği bu şeklin alanını nasıl ölçeceği sorulunca Can (7) "Hocam nasıl ölçebiliriz, direkt hocam uzun kenarla kısa kenarı buluruz ve sonra da toplarız." cevabını vermiştir. Ardından araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Neden topluyoruz?
>
> Can: Neden hocam çünkü hocam burada hani böyle direkt … hocam bir örnek vereyim şu mesela burası dört hocam (dikdörtgenin uzun kenarını gösteriyor),
>
> Araştırmacı: Dört nedir?
>
> Can: Şu uzun kenarımız hocam dört santimetre, şu kısa kenarı da atıyorum üç santimetre hocam. Hocam burada direkt dört tane sıra vardır. Ama hocam biz direkt bu dört sırayla toplayarak hiç uğraşmayacağımız için direkt dörtle üçü çarparız.

Yukarıdaki diyalogdan anlaşılacağı üzere Can (7) alan ölçüsünü hesaplarken satırlardaki birim kare sayısını toplamak yerine bu işlemin kısa yolu olarak çarpma işlemi yaptığını ifade etmiştir. Araştırmacı bu düşüncesini şekil üzerinde göstermesini isteyince Can (7) uzun kenarı dört bölüme ayırmıştır (bölümler birbirine eşit değildir fakat öğrenci eşit olmaları gerektiğini belirtmiştir). Her bölümün alan ölçüsünün üç olduğunu bu nedenle dört ile üçü çarparak şeklin alanını bulduğunu belirtmiştir. Buna göre alan kavramının tanımına ve işlemler arasındaki ilişkilere dayanarak savunma yaptığı için dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Gülce (8) bir başka seansta çevre uzunluğu 30 birim olan farklı dikdörtgenler çizmesi istendiğinde sırasıyla kenar uzunlukları 12x3, 8x7, 10x5, 9x6, 13x2, 14x1, 11x4 birim olan dikdörtgenleri çizmiştir. Burada kenar uzunluklarını belirlerken önce bir kenar uzunluğu atayıp karşısındaki kenar için de aynı uzunluğun olacağını belirtmiştir. Ardından bu iki kenarın toplamını 30'a tamamlayan sayıyı diğer iki kenara paylaştırdığını söylemiştir. Tüm dikdörtgenleri oluşturduğundan nasıl emin olduğu sorulunca sırasıyla 1,2,3 ..7 yaptığını söylemiştir. Gülce (8) burada dikdörtgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi ve çevre uzunluğunu hesaplamada kullandığı toplama işleminin özelliklerini bir arada kullanarak çözümünün doğruluğunu savunmuştur. Bu nedenle Gülce'nin (8) dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı düşünülmektedir.

Mısra (7) parçalanıp yeniden düzenlenen bir şeklin alan ölçüsünün başlangıca göre değişmeyeceğini, çevre uzunluğunun ise değişeceğini düşünmektedir. Bu düşüncesini savunurken şu açıklamayı yapmıştır: "Çünkü kapladığı yer değişmez; ama çevresi değişir… Çünkü çevre şeklin şu dış kısmına göre hesaplanır. Yani biz şeklin dış kısmına göre hesaplıyoruz. Ama bunun dış şekliyle bunun dış şekli farklı olduğu için çevre farklı çıkar. Ama kapladığı yerler aynı olduğu için alan aynı çıkar." Yaptığı açıklamadan anlaşılacağı üzere Mısra (7) düşüncesinin doğruluğunu savunurken çevre ve alan kavramlarının anlamına vurgu yapmıştır. Bu nedenle dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Araştırmacı Can'a (7) bazı arkadaşlarının alan ölçüleri aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının da aynı olacağını düşündüğünü söylemiştir. Can (7) bu düşünceye katılmadığını şu şekilde açıklamıştır: "Hayır bence hocam yanlış bir bilgi. Çünkü hocam yine dediğim gibi alan iç kısım, ama çevreyse sınırları olduğu için hocam alanla da çevre yani aynı değil. Zaten hocam bu da matematiksel olarak bir hesap." Yaptığı açıklamadan görüldüğü gibi Can düşüncesinin doğruluğunu çevre ve alan kavramlarının tanımına dayandırmıştır. Bu nedenle dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Mısra (7) alan ölçüleri aynı olan şekillerin çevre uzunluklarının da ayı olması gerektiğini düşünmemektedir. Araştırmacı kendisi gibi düşünmeyen bazı arkadaşları olduğunu söylediğinde aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

> Araştırmacı: Bazı arkadaşların senin düşündüğün gibi düşünmüyorlar. Eğer şekillerin alanları aynıysa çevreleri de aynıdır dediler. Onların düşüncesi sence doğru mu?
>
> Mısra: Bence değil.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Mısra: Çünkü alanda, alanı bulurken bu her kareyi bir birim olarak yaptık. Ama çevrede sadece karenin kenarlarını saydık. Ama karenin dört kenarı var.
>
> Araştırmacı: Dördünü de mi sayıyoruz?
>
> Mısra: Hayır. Sadece dışta kalan yerleri sayıyoruz. Çünkü çevre dış yerleri. Sadece bir kenarlarını sayıyoruz. Onun için ya az çıkar ya da fazla çıkar.
>
> Araştırmacı: Anladım. Peki, onları nasıl ikna edersin düşüncelerinin yanlış olduğuna?

Mısra: Yine böyle bir şey yaptırırdım. Alanlarını ve … ilk önce alanlarını saydırırdım, sonra da çevrelerini saydırırdım. Aralarındaki farkı görürlerdi.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü gibi Mısra (7) düşüncesini savunurken hem çevre ve alan kavramlarının anlamına vurgu yapmış hem de arkadaşlarını ikna etmek için örneklerden yararlanacağını söylemiştir. Buna göre hem örnek temelli hem de dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Katılımcılardan Can (7) da bu konuda benzer bir savunma yapmıştır. Araştırmacı ile aralarında yaşanan aşağıdaki diyalog düşüncesini ortaya koymaktadır:

Araştırmacı: Bazı arkadaşların diyorlar ki "çevreleri aynıysa alanları da aynıdır, alanları aynıysa çevreleri de aynıdır" sence doğru mu?

Can: Hayır hocam. Çünkü çevreyle alan aynı şey değil hocam. Çevre bir şeklin sınırları hocam. Hocam alansa bir şeklin iç kısımları.

Araştırmacı: Nasıl ikna edebilirsin onları bu fikirlerinin yanlış olduğuna?

Can: Hocam bir tane şey yaparım, bir tane şekil oluştururum. Hocam mesela bu şekil (1x9 birimlik dikdörtgen) hocam bu şeklin ilk önce alanını bulurum sonra çevrelerini de bulurum. Sonra hocam bir tane daha şekil yaparım. Sonra hocam yine onun da alanıyla çevresini oluştururum. Hocam bunun … mesela hocam bunun çevresi on altıysa bununki de atıyorum on üçtür. Çevresi de aman alanı da on birse bununki de ondur hocam.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere Mısra (7) gibi Can (7) da düşüncesini savunurken hem çevre ve alan kavramlarının anlamına vurgu yapmış hem de arkadaşlarını ikna etmek için örneklerden yararlanacağını söylemiştir. Buna göre hem örnek temelli hem de dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Ceylan (6), Gülce (8) ve Filiz (8) birim kareler kullanarak aynı alan ölçüsüne sahip şekiller oluşturması istendiğinde bu şekillerin alan ölçülerinin eşitliğinden nasıl emin olduklarını alan korunumuna dayandırmışlardır. Ceylan (6) buradaki düşüncesini "Ne kare eksilttik ne de artırdık. Kareler aynı kalıyor. O yüzden bunun da alanı yirmi yapıyor." şeklinde açıklamıştır. Gülce (8) ise "Çünkü sadece şekil değişti. O birim kareler falan değişmedi." diyerek açıklamıştır. Filiz (8) de benzer şekilde aynı birim kareler kullanıldığı için alan ölçüsünün değişmeyeceğini ifade etmiştir. Katılımcılar alan korunumuna dayanarak düşüncelerini savundukları için dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandıkları söylenebilir.

Gülce (8) alan ölçüsü 24 birim kare olan dikdörtgenlerin hepsini çizdiğinden nasıl emin olduğunu "Çünkü alanı bulmak için o sayının çarpanlarını bulmamız gerekiyor. Yani hangi sayılarla çarpılabileceği ve o sayılarla sadece 24'ü elde edebileceğimiz. Onda da hani kullandığımız 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 gibi sayılar vardır. Başka da olmuyor zaten."

şeklinde açıklamıştır. Görüldüğü gibi Gülce (8) aynı alan ölçüsüne sahip dikdörtgenler oluşturmak için alanın sayısal değerinin çarpanlarından faydalanmıştır. Burada dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamak için farklı iki kenar uzunluğunun çarpımı algoritmasını tersine uygulayarak çarpımı oluşturabilecek tüm sayı çiftlerini yani o sayının çarpanlarını kullanmıştır. Buna göre dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Mısra (7) birinin kenar uzunluğu diğerinin beş katı olan iki kareden büyük olanın alan ölçüsünün küçüğün yirmi beş katı olacağını hesaplamıştır. Bazı arkadaşlarının kenarlar arasındaki ilişkiyle alan ölçüleri arasındaki ilişkinin aynı olduğunu düşündüğü söylenince Mısra (7) "Olmaz. Çünkü kenarlar derken şu ikiyle şu on kenarları saydık; ama alanı bulurken bütün kareleri saydık." demiştir. Görüldüğü gibi Mısra (7) düşüncesinin doğruluğunu savunurken uzunluk ve alan niteliklerinin farklılıklarına dikkat çekmektedir. Uzunluğu ve alanı ölçmek için kullandığı birimlerin birbirinden farklı olmasını düşüncesinin doğruluğuna dayanak olarak göstermiştir. Buna göre dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

4.3. Uygulama Sonrasına İlişkin Bulgular

Bu bölümde öncelikle katılımcıların uygulama sonrasında çevre ve alan kavramlarına yönelik kavram imajları ayrı ayrı incelenmiştir. Ardından katılımcıların uygulama sonrası yapılan klinik görüşmelerde kullandıkları kanıt şemaları ele alınmıştır. Katılımcıların kavram imajlarının ve kanıt şemalarının belirlenmesinde uygulama sonrasında onlarla bireysel olarak yapılan son klinik görüşmelerden yararlanılmıştır. (Klinik görüşmelerle ilgili ayrıntılı bilgi için bkz. s. 84)

4.3.1. Uygulama sonrasında çevreye yönelik kavram imajları

Katılımcılarla yapılan son klinik görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesi sonucunda katılımcıların çevre kavramıyla ilgili kavram imajları iki başlık altında ele alınmıştır: 1) sınır kavram imajı, 2) dış sınırlar kavram imajı.

Sınır kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi bütün kapalı şekillerin sınırları olarak ele almışlardır. Çevreyle ilgili açıklamalarında ve ölçme yapmaları gereken durumlarda kavramın anlamına odaklanmışlardır. Çevreyi çizim yaparak göstermeleri istendiğinde şekillerin sınırları üzerinden geçmişlerdir. Çevre ölçmeyi gerektiren durumlarda ise şeklin sınırlarının uzunluğunu bulmaya çalışmışlardır.

Dış sınırlar kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi bütün kapalı şekillerin sınırlarının biraz dışında, şekille aynı biçime sahip ama şekilden ayrı bir olgu olarak düşünmektedirler. Çevreyi çizim yaparak göstermeleri istendiğinde şeklin sınırlarının biraz dışında onunla aynı biçime sahip yeni bir şekil çizmişlerdir. Ölçme yapmaları gereken durumlarda ise sınır kavram imajına sahip katılımcılarla aynı yöntemleri uygulamışlardır. Tablo 4.8.'de katılımcıların uygulama sonrasında sahip oldukları çevreye yönelik kavram imajları özetlenmiştir.

Tablo 4.8. *Katılımcıların uygulama sonrası çevreye yönelik kavram imajları*

Sınıf düzeyi	Katılımcı	Kavram imajı
5	Zehra	Sınır
	Neşe	Sınır
6	Ceylan	Sınır
	Fırat	Sınır
7	Mısra	Dış sınırlar
	Can	Sınır
8	Gülce	Sınır
	Filiz	Dış sınırlar

Tablo 4.8.'de görüldüğü üzere 8 katılımcıdan 6'sı (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Gülce (8)) sınır, 2'si (Mısra (7) ve Filiz (8)) dış sınırlar kavram imajına sahiptir. Aşağıda katılımcıların kavram imajlarının detaylarına sırasıyla yer verilmiştir.

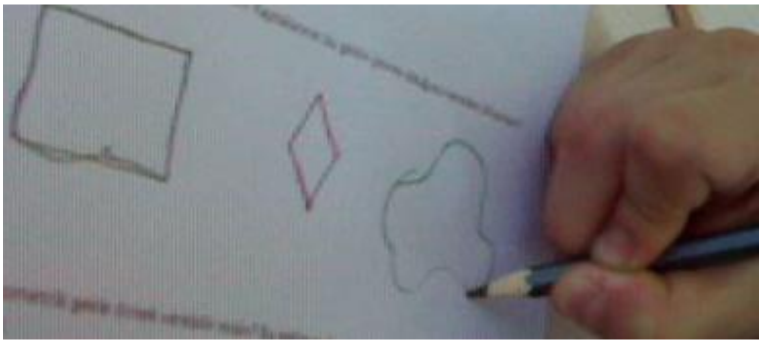
4.3.1.1. *Sınır kavram imajı*

Katılımcılardan Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Gülce (8) sınır kavram imajına sahiptir. Bu kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi açıklarken inceledikleri şekillerin sınırlarına vurgu yapmışlardır. Uygulamadan önceki kavram imajlarının içerdiği sınırlılıkların üstesinden gelmişlerdir. Katılımcıların artık çevreyi hesaplanması gereken bir değer (Zehra (5), Neşe (5) ve Gülce (8)) veya bir şeklin sınırları dışındaki bölge (Ceylan (6), Fırat (6) ve Can (7)) olarak düşünmedikleri belirlenmiştir. Katılımcılardan çevreyi çizim yaparak göstermeleri istendiğinde kapalı şekillerin sınırlarını işaret etmişlerdir. Buna göre kavram imajları artık formal tanıma uygun şekilde çokgenlerle birlikte tüm kapalı eğrileri içermektedir.

Katılımcılardan Zehra (5) son klinik görüşmede çevre kavramını "Çevresi alanın dışında kalan sınırlar… mesela bu masanın sınırları, şurası (masanın kenarını gösteriyor)." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı sadece verdiği örnekteki gibi kenarı, köşesi olan şekillerin mi çevresi olduğunu sorunca "Çevresi olması için köşesi olmasına gerek yok." diyerek kapalı bir eğri çizmiş, şeklin sınırları üzerinden geçerek çevresini göstermiştir. İlk klinik görüşmenin aksine Zehra (5) çevresi olan şekillere kapalı eğrileri de dahil etmiştir. Araştırmacı bir şeklin çevresi olması için gereken şartları sorunca aşağıdaki cevabı vermiştir:

> "Bir şeklin çevresi olması için kenarlarının birleşmiş olması gerekiyor. Böyle (daha önce çizdiği eşkenar dörtgeni gösteriyor), böyle (daha önce çizdiği açık şekli gösteriyor) ayırılmış değil. Kenarlarının değmesi lazım birbirine."

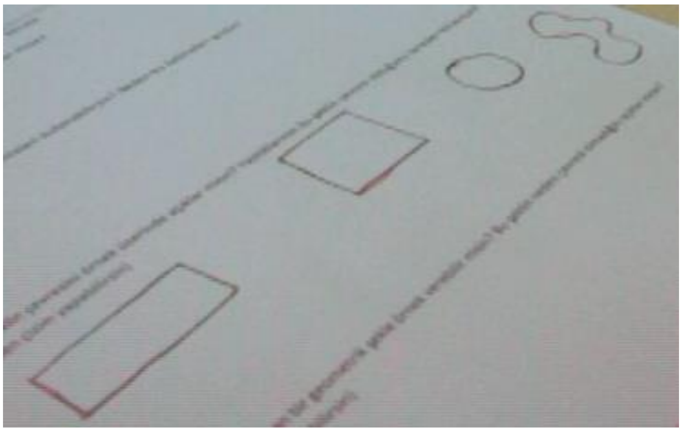
Şekil 4.72.'de Zehra'nın (5) son klinik görüşmede çevre kavramını açıklamak için çizdiği şekiller verilmiştir.



Şekil 4.72. *Zehra'nın (5) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

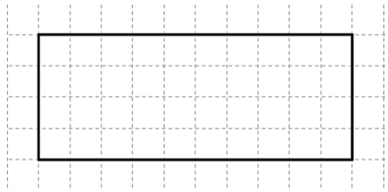
Çevre ölçmeyi gerektiren problemlerle karşılaştığında ise Zehra (5) sınırlar boyunca birim uzunlukları sayma veya kenar uzunluklarını belirleyip toplama stratejilerini kullanmıştır. Zehra (5) daha önce şekil kareli zeminde çizildiğinde hatalı olarak içindeki birim kareleri sayıp çevreyi ölçmeye çalışsa da artık problemin bağlamına değil kavrama odaklanmaktadır.

Katılımcılardan Neşe (5) çevreyi açıklaması istenince bir dikdörtgen çizmiş ve dikdörtgenin kenarları üzerinden geçerek çevresini göstermiştir. Neşe (5) çevreyi göstermek için şeklin sınırlarını işaret etmiştir. Araştırmacı yaptığı çizimleri açıklamasını istediğinde çevreyi "O şekil hangi şekilse onun mesela dikdörtgenin dikdörtgensel kısmı, karenin karesel kısmı.” şeklinde açıklamıştır. Ardından araştırmacı verdiği örneklerdeki gibi sadece çokgenlerin mi çevresi olduğunu sorunca “Hayır, mesela dairenin de çevresi vardır.” cevabını vermiştir. Düşüncesini açıklamak için bir daire çizmiş, kalemle sınırları üzerinden geçerek çevresini göstermiştir. Ardından “Bunu cetvelle ölçemeyebiliriz ama iple ölçerek cetvelin üstüne ipi koyarak çevresini bulabiliriz” şeklinde dairenin çevresinin nasıl ölçülebileceğini de açıklamıştır. Dairenin ardından bir kapalı eğri çizmiş, şeklin sınırları üzerinden geçerek çevresini göstermiştir. Şekil 4.73.’de Neşe’nin (5) çevre için çizdiği şekiller verilmiştir.



Şekil 4.73. Neşe’nin (5) *son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

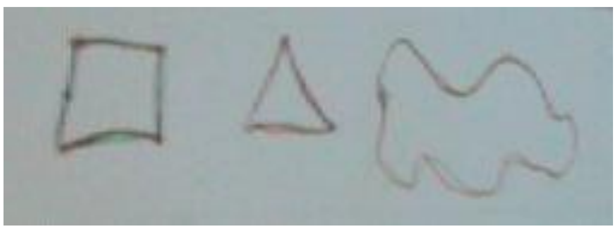
Neşe (5) kendisine gösterilen şekillerin çevresi olduğuna nasıl karar verdiğini “Çünkü her kenarı kapalı. Ama bununki açık olduğu için bunun çevresi yoktur. Bunların hepsinin çevresi vardır.” şeklinde açıklamıştır. Bir şeklin çevresi olması için gereken şartları “Kenarlarının kapalı olması” şeklinde açıklamıştır. Neşe (5) daha önce şekiller kareli zeminde çizildiğinde birim kareleri sayarak çevreyi ölçmeye çalışsa da artık bağlama değil kavrama göre çözüm yapmaktadır. Örneğin Şekil 4.74.’de gösterilen kareli zemine çizilmiş dikdörtgenin çevre uzunluğunu hesaplaması istenince önce kenar uzunluklarını belirlemiş, ardından karşılıklı kenar uzunluklarını toplamış ve son olarak bulduğu değerleri birbiriyle toplamıştır (10+10=20, 4+4=8, 20+8=28). Çevre ölçmeyle ilgili diğer problemlerde de kenar uzunluklarını belirledikten sonra toplamıştır. Neşe (5) ilk klinik görüşmede çevre ve alan kavramlarını birbirine karıştırsa da artık bu kavramların farklı olduğunun bilincindedir.



Şekil 4.74. *Kareli zemine çizilmiş dikdörtgen*

Neşe (5) ilk klinik görüşmede zorlandığı sabit çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenler çizmesini gerektiren problemi bu kez doğru bir şekilde çözebilmiştir. Neşe (5) çevresi 10 birim olan dikdörtgenler için kenar uzunlukları 4 ile 1 birim ve 3 ile 2 birim olan dikdörtgenleri çizmiştir. Yaptıklarının doğruluğunu savunmak için kenar uzunluklarını toplayarak çevre uzunluklarının on birim olduğunu göstermiştir. Daha fazla farklı dikdörtgen çizilemeyeceğini "Çünkü burada üçe iki yaptık, burada dörde bir yaptık. Düşünüyorum bulamadım. Onun için çizilemez." şeklinde açıklamıştır. Neşe (5) düşüncesinin doğruluğunu savunmak için örneklerden ve matematiksel ilişkilerden yararlanmıştır.

Katılımcılardan Fırat (6) çevreyi bir şeklin sınırları olarak açıklamıştır. Çevreyi göstermesi istendiğinde ise kalemle şekillerin sınırları üzerinden geçmiştir. Daha önce çevresi olan şekilleri çokgenlerle sınırlandırsa da artık eğriler de dahil tüm kapalı şekillerin çevresi olduğunu ifade etmektedir. Bir şeklin çevresi olup olmadığına nasıl karar verdiğini "Açıklık olmamasından" şeklinde açıklamıştır. Daha önce şekillerin kapalı olması yanında doğru parçalarından oluşması gerektiğini de düşünmekteydi. Öğretim seansları sonunda çevreyle ilgili kavram imajını eğriler de dahil tüm kapalı şekilleri içerecek şekilde değiştirmiştir. Şekil 4.75.'de Fırat'ın (6) son klinik görüşmede çevre kavramı için çizdiği şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.75. *Fırat'ın (6) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

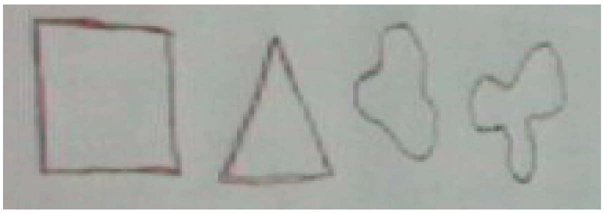
Fırat (6) çevreyi ölçmek için kenar uzunluklarını toplama yöntemini kullanmaktadır. Örneğin dikdörtgenlerin çevre uzunluğunu ölçerken komşu iki kenarın uzunluğunu ölçüp toplamış, diğer kenar çiftinin uzunlukları toplamının da aynı olacağını söylemiştir. Daha önce şeklin çizilmiş olduğu zemine göre birim kareleri sayma eğilimi göstermiş olsa da artık bu hatayı devam ettirmemektedir. Sabit çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenler çizmesi istendiğinde ise ancak dördüncü denemesinde başarılı olabilmiştir. Çizilebilecek tüm dikdörtgenleri çizmiş olsa da kendisi bunun farkına varamamıştır. Hepsini çizdiğinden emin olup olmadığı sorulunca "Vardır hocam ama benim aklıma gelmiyor" cevabını vermiştir. Fırat (6) burada belirli bir strateji izlemeden rastgele denemelerle çözüm yapsa da çevre kavram imajı formal tanımla uyumlu hale gelmiştir. Bu sayede daha önce çözümsüz bıraktığı problemleri çözebilmiştir.

Ceylan (6) çevreyi açıklarken belirli örnekler üzerinden hareket etmiştir. Araştırmacı tüm şekilleri kapsayacak şekilde nasıl açıklayabileceğini sorunca, aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

> "Sınırlı bir bölge içerisinde olan her şeye çevre denir" cevabını vermiştir. O bölgenin neresinin çevre olduğunu "Bir yerden … bir başka bir, bir noktadan bir noktaya kadar gelen yerine … (araştırmacı bir noktadan bir noktaya nasıl gideceğini sorunca) Sınırlarından gitmemiz gerekiyor."

Yaptığı açıklamadan görüldüğü gibi Ceylan (6) çevreyi sözel olarak açıklamakta zorlanmış, matematiksel dili yeterince kullanamamıştır. Bunun üzerine, araştırmacı düşüncesini örnek üzerinde göstermesini isteyince, bir kare çizerek kalemle sınırları üzerinden geçmiştir. Üzerinden geçtiği yerin şeklin çevresi olduğunu söylemiştir. Araştırmacı verdiği örnekteki gibi sadece kenarı, köşesi olan şekillerin mi çevresi olduğunu sorunca Ceylan (6) "hayır" diyerek kapalı bir eğri çizmiştir. Şeklin çevresini sınırları üzerinden geçerek göstermiştir. Bu şeklin çevresiyle ilgili "olur ama mesela bunları (üçgen ve kare) cetvelle ölçüyorsak bunu ip ya da başka bir şeyle ölçebiliriz… ya da mesela bu demirden yapılmış diyelim, demiri açarız, onu cetvelle ölçeriz, yine onun çevresinin ne kadar olduğunu buluruz." açıklamasını yapmıştır. Görüldüğü gibi öğretim seanslarında yaptığı uygulamalar katılımcının açıklamalarını etkilemiştir. Düşüncesini desteklemek için daha önce öğretim seanslarında karşılaştığı örnekleri kullanmıştır.

Ceylan (6) kendisine gösterilen şekillerden sadece açık olan şeklin çevresi olmadığını söylemiştir. Neden çevresi olmadığını "Çünkü bunu mesela şuradan başladık diyelim gittik gittik gittik burada duruyoruz, karşıya geçemiyoruz. Mesela bir karınca olduğunu düşünsek şuradan yolun burasında kalır. Geri evine dönemez. Öyle bir şey olarak düşündüm. Çünkü burası boş olduğundan dolayı bunun çevresi olmuyor." şeklinde açıklamıştır. Katılımcının buradaki açıklaması da yine öğretim seanslarında araştırmacının çevre kavramını kazandırmak için kullandığı "karıncanın izlediği yol" benzetiminden etkilenmiştir. Çevreyi ölçmek için diğer katılımcılar gibi önce kenar uzunluklarını belirleyip ardından bu değerleri toplamıştır. Çevre uzunluğunun bu şekilde bulunacağını nasıl bildiği sorulunca "Eğer içindeki kareleri sayarsak onun alanını bulmuş oluyoruz, o yüzden." cevabını vermiştir. Kenar uzunluklarını belirlemek için kenar boyunca yer alan birim kareleri saydığını söylemiştir. Katılımcı öğretim seansları uygulanmadan önce çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanırken, artık bu iki kavramın farklı olduklarını vurgulayan açıklamalar yapmaktadır. Matematiksel dili etkili şekilde kullanamasa da söylediklerinden iki kavramı birbirinden ayırdığı anlaşılmaktadır. Şekil 4.76.'da Ceylan'ın (6) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.76. *Ceylan'ın (6) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

Katılımcılardan Can (7) da çevreyi bir şeklin sınırları olarak ele almaktadır. Çevreyle ilgili düşüncesi araştırmacıyla aralarında geçen aşağıdaki diyalogda daha açık bir şekilde görülmektedir:

> Araştırmacı: Bir şeklin çevresi denildiğinde aklına ne geliyor? Ne anlıyorsun bundan?
>
> Can: Hocam bir çevre deyince hocam aklıma hocam mesela bir karenin sınırları geliyor.
>
> Araştırmacı: İlla bir kare mi olması gerekiyor?
>
> Can: Hayır hocam, farklı bir şekil, mesela yamuk da olur. Böyle yamuk yumuk şekiller de olur. Ama hocam tek bir şeyi var açık olmaması.
>
> Araştırmacı: Anladım, yani o şeklin çevresi denildiğinde ben nereyi anlamalıyım, mesela eğri büğrü bir şekil olsa?
>
> Can: Hocam sınırları.

Çevresi olmayan bir şekle örnek vermesi istendiğinde ilk olarak açık bir eğri çizmiştir. Bu şeklin neden çevresi olmadığını "Çünkü hocam şurası, yani şurası hocam boş. Yani hocam arada bir çizgi yok. Yani hocam bunun sınırları tam eşleşmiyor." diyerek açıklamıştır. Can (7) şeklin açık bölümüne bir doğru parçası çizerek bu durumda çevresi olacağını belirtmiştir. Araştırmacı ilk klinik görüşmede çemberin çevresi olmayacağını söylediğini, şimdi neden fikrini değiştirdiğini sorunca aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

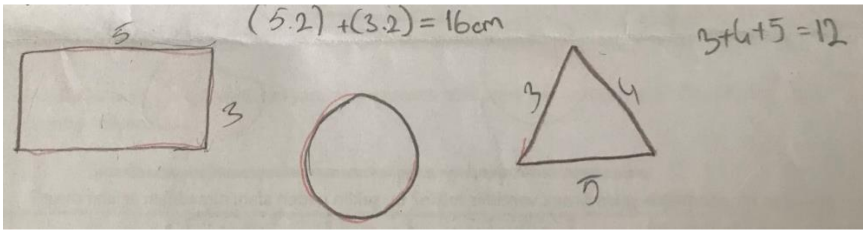
> "Hocam şimdi öğrendim ki hocam bir şeklin… çevresi olması için kapalı olması lazım. Mesela hocam bu şekil de yamuk bir şekil (kapalı eğriyi gösteriyor) ama onun da şekli var. Hocam bu da bir yani bu da bir daire hocam, bunun da şekli var mesela. Hocam yeter ki açık olmaması lazım."

Yukarıdaki açıklamalarından anlaşıldığı gibi Can (7), ilk klinik görüşmede kavram imajı prototip çokgenlerle sınırlıyken, öğretim seansları sonrasında kavram imajını tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde değiştirmiştir. Şekil 4.77.'de Can'ın (7) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller gösterilmektedir.

Şekil 4.77. *Can'ın (7) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

Can (7) çevreyi ölçmek için sınır boyunca birim uzunlukları saymış veya kenar uzunluklarını belirleyip toplamıştır. İlk klinik görüşmede katılımcı, problemin sunulduğu bağlam birim kareler içerdiğinde çevre uzunluğu yerine alan ölçüsünü hesaplarken, öğretim seansları sonrasında iki kavramın anlamlarını, farklılıklarını keşfetmiş ve başlangıçtaki kavram imajlarını bu yeni bilgilerle yapılandırmıştır. Can (7) sabit çevre uzunluğuna sahip iki dikdörtgeni çizdikten sonra araştırmacı çevresi aynı olan bu şekillerin alanlarının da aynı olup olmadığını sorunca "Bence farklıdır… Çünkü hocam şimdi alanla çevre aynı olmadığı için, hocam çevre sınırları bir şeklin, hocam alansa iç kısımları. O yüzden farklı hocam." cevabını vermiştir. Can (7) öğretim seanslarından önce çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanıyorken, artık bu iki kavramın farklılıklarını kavramların anlamlarına dayanarak açıklayabilmektedir.

Katılımcılardan Gülce (8) ise çevreyi diğerlerinden daha farklı bir şekilde açıklamıştır. Öncelikle çevre denildiğinde ne anladığını "Kenardaki uzunlukların toplamı, kenar uzunluklarının toplamı daha doğrusu" şeklinde açıklamıştır. Katılımcının başlangıçtaki çevre ölçmeye dayalı kavram imajı öğretim seansları sonrasında da etkisini sürdürmektedir. Katılımcının düşüncesini daha iyi anlayabilmek amacıyla araştırmacı bir şeklin çevresi olması için mutlaka kenarları mı olması gerektiğini sorunca “İlla kenar değil mesela bir daire, yuvarlak şekiller de olabilir.” cevabını vermiştir. Bunun üzerine araştırmacı çevreyi daha genel bir ifadeyle açıklamasını isteyince “Bir şeklin kapalı olduğu sürece, mesela o şekil açık olmadığı, tam bir şekil oluşturduğu sürece o şeklin uzunluğu mesela çevresini verir.” şeklinde açıklamıştır. Açıklamadan anlaşıldığı gibi katılımcının başlangıçtaki sadece hesaplayabileceği şekillerle sınırlı olan kavram imajı formal tanıma uygun olarak tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde yeniden düzenlenmiştir. Çevreyi bir şekil üzerinde göstermesi istenince Gülce (8) ilk olarak bir dikdörtgen çizmiş ve kenarlarına 5 ve 3 sayılarını yazmıştır. Şeklin çevresini göstermesi istenince kalemle kenarları üzerinden geçerek “Şu kenarlarının toplamı, uzunluklarının toplamı.” demiştir. İşlem olarak (5.2) + (3.2) = 16 cm yazmıştır. Çevresi olmayan bir şekle örnek vermesi istenince Gülce (8) açık bir eğri çizmiş ve neden çevresi olmadığını “Mesela bu şeklin eğer çevresi olabilmesi için şu iki köşenin kapanması lazım ki (bir doğru parçasıyla açık bölümü kapatıyor) o şekil tam bir şekil oluştursun ve o şeklin çevresi olsun.” şeklinde açıklamıştır. Şekil 4.78.’de Gülce’nin (8) son klinik görüşmede çevre kavramını açıklamak için çizdiği şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.78. *Gülce’nin (8) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

Gülce (8) bir şeklin çevresi olması için gereken şartları “O şeklin tam kapanması ve o şeklin tam bir şekil olması.” şeklinde sıralamıştır. Kendisine gösterilen şekillerin çevresi olduğuna nasıl karar verdiğini şu şekilde açıklamıştır:

> “Çünkü tüm şekli tam bir şekil halini almış ve hepsinde bir açıklığı falan yok. Hani mesela yamuklukları da farklı bir şekilde ölçebiliriz, şu düz olmayan kısımları da farklı bir şekilde ölçebiliriz. Ama bunları (açık şekil) ölçemeyiz çünkü düz de gidebilir mesela ya da böyle uzun bir şekilde de gidebilir. Onu bilmediğimiz için bu şeklin çevresini ölçemeyiz.”

Gülce (8) ilk klinik görüşmede çevresi olmadığını düşündüğü eğrilerin çevre uzunluklarını son klinik görüşmede, “İpi tam bu şekil haline getirebiliriz üzerinde. Ondan sonra şeklini cetvelle ölçüp çevresini bulabiliriz.” şeklinde ölçebileceğini söylemiştir.

Öğretim seanslarındaki etkinlikler sonrasında çevre kavram imajı formal tanıma uygun olacak şekilde değişmiştir. Diğer katılımcıların aksine çevrelerini karşılaştırması istenen dikdörtgen ve karenin eşit çevre uzunluğuna sahip olduğunu tahmin etmiştir. Araştırmacı neden böyle düşündüğünü açıklamasını isteyince şu açıklamayı yapmıştır: “Mesela buradaki kısaltılmış (karenin bir kenarı ile dikdörtgenin kısa kenarını karşılaştırıyor) ama sanki şuradaki buradaysa uzatılmış gibi (karenin bir kenarı ile dikdörtgenin uzun kenarını karşılaştırıyor) dikdörtgen oluşmuştur. Bunları saydığımızda da aynı olabilir.” Gülce (8) çevre uzunluğunu hesaplamak için daha önce de yaptığı gibi kenar uzunluklarını belirlemiş ve toplamıştır. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğunu “Çünkü çevresi sadece kenar uzunluklarının toplamıdır ve buradaki kenar uzunlukları ise bu birimleri (dikdörtgenin uzun kenarı üzerinde birim uzunlukları gösteriyor) sayarak bulabiliriz.” şeklinde açıklamıştır. Diğer katılımcılar sabit bir çevre uzunluğuna sahip tüm dikdörtgenleri çizip çizmediklerinden emin olamazken Gülce (8) bunu şu şekilde açıklamıştır: “Çünkü sadece iki sayının on olması gerekiyordu. Mesela beş, beş daha on olabilir ama iki sınırla onu beş yapamam. Biri denedim, ikiyi, üçü ve dördü de denedim. Başka da olmuyor.” Katılımcı, çizimlerinin doğruluğunu savunmak için matematiksel ilişkilerden yararlanmış, akıl yürütme yoluyla ulaştığı sonuçları açıklamıştır.

4.3.1.2. *Dış sınırlar kavram imajı*

Katılımcıların ikisi (Filiz (8) ve Mısra (7)) dış sınırlar kavram imajına sahiptir. Bu kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi açıklarken kapalı şekillerin sınırlarının biraz dışında onunla aynı biçimde ama ondan ayrı bir olgu olarak ele almaktadırlar. Çizim yaparak şekillerin çevresini göstermeleri istendiğinde şeklin sınırlarının biraz dışında onunla aynı biçime sahip yeni bir şekil çizmişlerdir. Çevreyi ölçmeleri gereken durumlarda ise, sınır kavram imajına sahip katılımcılarla aynı yöntemleri uygulayarak, birim uzunlukları saymış veya kenar uzunluklarını belirleyip toplamışlardır. Katılımcıların öğretim seanslarından önce sahip oldukları çevreye yönelik etraf kavram imajının etkisi hala sürmektedir. Buna rağmen çevreyi önceden olduğu gibi bir şeklin sınırlarının dışındaki yakın bölge anlamıyla değil, dış sınırlarının uzunluğu olarak düşünmektedirler. Kavram imajlarının yapısı çevreyi bir bölge yerine uzunluk olarak ele alacak şekilde değişmiştir.

Örneğin bu kavram imajına sahip katılımcılardan Filiz (8) çevre denildiğinde ne anladığını “Mesela bir kare var, o karenin dış kısımları çevre.” şeklinde açıklamıştır.

Araştırmacı çizerek göstermesini isteyince bir kare çizip “Bunun dış kısımları böyle” diyerek kenarlarının hemen dışına birer çizgi çizip çevresini göstermiştir. Filiz (8) daha sonra kendisine gösterilen şekillerin çevresini belirtmek için de yine sınırların biraz dışına sınırı takip eden çizgiler çizmiştir. Yaptığı bu çizimlerin ardından araştırmacıyla aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır.

Araştırmacı: Yani bu kenarın dışında bir şey mi bu?

Filiz: Evet

Araştırmacı: Kenar değil, kenarın dışı. Ne kadar dışı olduğuna nasıl karar veriyorsun?

Filiz: Yani hemen şöyle

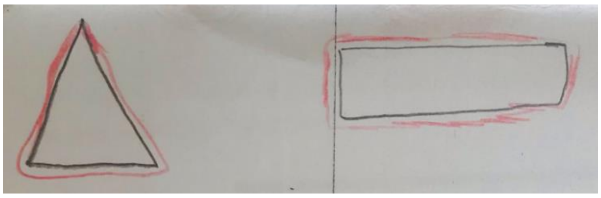
Araştırmacı: Şöyle derken?

Filiz: Yani çizgiden hemen yani sonra başlayan.

Araştırmacı: İşte ne kadar mesafe bırakacağını nereden biliyorsun?

Filiz: Çünkü alanın dışına çıkıyoruz. Direkt oradan başlıyor.

Görüldüğü gibi Filiz (8) hem açıklamalarında hem de yaptığı çizimlerde çevreyi şeklin sınırları dışında, şekilden ayrı olarak ele almaktadır. Şekil 4.79.’da Filiz’in (8) son klinik görüşmede çevre kavramını açıklamak için çizdiği şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.79. *Filiz’in (8) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

Uygulama öncesinde yapılan klinik görüşmede Filiz (8) kapalı eğrilerin çevresi olmadığını düşünmekteydi. Bu düşüncesinin öğretim seansları sonrasında değişip değişmediğini anlamak için araştırmacı sadece kenarı, köşesi olan şekillerin mi çevresi olduğunu sorunca Filiz (8) “Yani eğer, mesela diyelim bir yeri açıksa onun çevresi olmaz.” cevabını vermiştir. Araştırmacı bu kez daire gibi kapalı eğriler için ne düşündüğünü sorunca “Olmaz, yani daire çünkü nasıl desem … şey o düz değil yuvarlak, ondan dolayı.” cevabını vermiştir. Filiz (8) öğretim seanslarında daire de dahil tüm kapalı eğrilerin çevreleri olduğunu söylemiş ve çevrelerini ölçmüş olsa da bunu son klinik görüşmeye yansıtamamıştır. Filiz’in (8) öğretim seanslarından önceki düşüncelerinin direnç gösterdiği, öğretim seanslarındaki tecrübelerinden edindiği bilgileri içselleştirip kavram imajına dahil edemediği anlaşılmaktadır. Ardından araştırmacı çevresi olmayan bir şekle örnek vermesini isteyince Filiz (8) doğru parçalarından oluşan açık bir şekil çizmiştir. Filiz (8) bu şeklin neden çevresi olmadığını aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

> "Mesela bu buradan şöyle burası açık diyelim. Mesela buradan (şeklin sınırı boyunca ilerliyor) gidiyoruz çevre olarak, ama yani buradan (açık bölümü gösteriyor) geçmemiz lazım geri dönebilmek için ama yok yani. O yüzden çevresi yoktur."

Filiz (8) bir şeklin çevresi olabilmesi için kapalı olması gerektiğini öğretim seanslarındaki tecrübelerine dayanarak açıklayabilmiştir. Ancak katılımcı kapalı eğrilerin çevrelerine odaklanan öğretim seanslarına rağmen uygulama öncesindekilere benzer düşünceleri yinelemiştir. Kendisine gösterilen şekillerden daire ve daire diliminin alanı olsa da çevresi olmadığını söylemiştir. Düzensiz kapalı eğrinin ise hem çevresi hem alanı olduğunu söylemiştir. Ardından araştırmacıyla aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır.

> Araştırmacı: Bunun (daire dilimi) da eğri bölümleri var bunun da (düzensiz kapalı eğri). Bunun (daire dilimi) neden çevresi olmadığını düşünüyorsun, ya da bunun (daire)? üçünde de eğri bölümler var. Bu ikisi neden farklı?
>
> Filiz: Daire olduğu için değişik oluyor; ama galiba bunda da yok. Çünkü yine bu da şey yapamayız.
>
> Araştırmacı: Nasıl, ne yapamayız?
>
> Filiz: Çevresi yani olmayabilir.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Filiz: Çünkü yine bunlar gibi aynı şekilde.

Yukarıdaki konuşmadan anlaşılacağı gibi Filiz (8) fikrini değiştirerek başlangıçta çevresi olduğunu söylediği düzensiz kapalı eğrilerin de çevresi olmadığını ifade etmiştir. Dairenin çevresi hakkındaki düşüncesi diğer kapalı eğrilerin çevreleriyle ilgili düşüncesini etkilemiştir. Katılımcının öğretim seansları öncesinde sahip olduğu düşünceler, yeni edindiği bilgilere karşı direnç göstermektedir.

Filiz (8) kendisine gösterilen açık eğrinin de çevresi olmadığını söylemiştir. Eğer şekil kapalı olsaydı çevresi olacağını söylemiştir. Araştırmacı bu şekilde de eğri bölümler olduğunu, sorun olup olmayacağını sorunca Filiz (8) bu kez onun da çevresi olmayabileceğini söylemiştir. Aşağıdaki diyalog Filiz'in (8) eğrisel şekiller hakkındaki düşüncesini ortaya koymaktadır.

> Araştırmacı: Niye bunlarda fikrini değiştirdin? Bu üçünün (kapalı eğriler) farkı nedir bu ikisinden (çokgenler)?
>
> Filiz: Bunlar düz, çevresini tamamlayabiliyoruz. Ama bunlar biraz değişik oluyor.
>
> Araştırmacı: Yani değişik olunca çevresi olmaz mı?
>
> Filiz: …
>
> Araştırmacı: Bir şeklin çevresi olması için gereken şartlar nelerdir?

Filiz: Açık olmaması, etrafının yani çevresinin bulunması.

Araştırmacı: Bunların (kapalı eğriler) etrafı yok mu? Açık değiller.

Filiz: Evet. Ama yani …

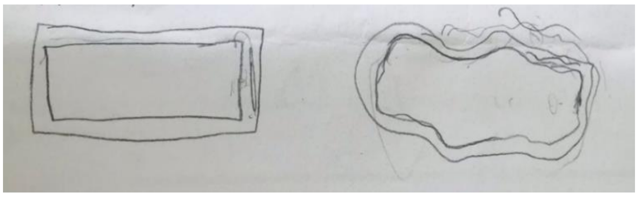
Araştırmacı: Sence bu üçünün çevresi yok mudur?

Filiz: ıı (hayır anlamında başını sallıyor)

Görüldüğü gibi Filiz (8) şekillerin çevresi olması için kapalı olmaları gerektiğini belirtip eğrilerin de kapalı olduklarını önce kabul etmesine rağmen sonra karar değiştirip çevreleri olmadığını ifade etmiştir. Filiz (8) öğretim seanslarında yapılan uygulamalara rağmen alışık olmadığı görünüme sahip şekillerin çevresi olmadığını düşünmeye devam etmektedir. Öğretim seanslarında edindiği tecrübeler daha önce sahip olduğu algıları değiştirmekte yeterli olamamıştır.

Filiz (8) çevreyi ölçerken şekillerin kenarları boyunca birim kareleri saymıştır. Şeklin çevresinin başka bir yöntemle bulunup bulunamayacağı sorulunca cetvelle de bulabileceğini söylemiştir. Cetvelle her bir kenar uzunluğunu dış taraftan ölçüp bulduğu değerleri toplayacağını belirtmiştir. Katılımcı derslerden aşina olduğu çokgenlerin çevresini belirlemek ve ölçmek konusunda sorun yaşamamıştır. İlk klinik görüşmede oluşturmakta zorlandığı sabit bir çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenleri bu kez doğru bir şekilde çizebilmiştir. Araştırmacı bu dikdörtgenlerin alan ölçülerinin de çevre uzunlukları gibi eşit olup olmayacağını sorunca "Alanları iç kısımları. O yüzden iç kareleri saymamız gerekiyor." cevabını vermiştir. Ardından söylediğini yaparak dikdörtgenlerin alan ölçülerini 4 ve 6 bulmuştur. Buna göre, katılımcının ilk klinik görüşmede birbiri yerine kullandığı çevre ve alan kavramlarının anlamını ve farklılıklarını öğretim seansları sonrasında keşfettiği anlaşılmaktadır.

Bu kavram imajına sahip diğer katılımcı olan Mısra (7) da çevreyi şeklin dışında, onunla aynı biçime sahip; fakat ondan ayrı bir olgu olarak ele almaktadır. Filiz'den (8) farklı olarak Mısra (7) eğriler de dahil bütün kapalı şekillerin çevresi olduğunu düşünmektedir. Şekil 4.80.'de Mısra'nın (7) son klinik görüşmede çevre kavramını açıklamak için çizdiği şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.80. *Mısra'nın (7) son klinik görüşmede çevre için çizdiği şekiller*

Yukarıdaki açıklamalarda görüldüğü gibi katılımcıların çevre ile ilgili kavram imajları öğretim seansları sürecinde değişime uğramıştır. Katılımcılar başlangıçta çoğunlukla prototip çokgenlerle sınırlı olan kavram imajlarını formal tanıma uygun olarak tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde yeniden yapılandırmışlardır. Öğretim seanslarına rağmen bazı katılımcıların geçmiş öğrenimlerinden kaynaklanan düşünceleri direnç göstermiş, değişimi sınırlandırmıştır. Kavram imajlarındaki değişimin daha net görülebilmesi için Tablo 4.9.'da katılımcıların uygulama öncesi ve sonrasında çevreye yönelik kavram imajları bir arada verilmiştir.

Tablo 4.9. *Katılımcıların uygulama öncesi ve sonrasında çevreye yönelik kavram imajları*

Sınıf düzeyi	Katılımcı	Uygulama Öncesi Kavram İmajı	Uygulama Sonrası Kavram İmajı
5	Zehra	Çevre ölçümü	Sınır
	Neşe	Çevre ölçümü	Sınır
6	Ceylan	Etraf	Sınır
	Fırat	Etraf	Sınır
7	Mısra	Çevre ölçümü	Dış sınırlar
	Can	Etraf	Sınır
8	Gülce	Çevre ölçümü	Sınır
	Filiz	Etraf	Dış sınırlar

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi Mısra (7) ve Filiz (8) dışındaki katılımcılar öğretim seansları sonrasında kavram imajlarını çevre kavramının formal tanımına uygun bir şekilde yeniden yapılandırmışlardır. Mısra (7), çevreyi halen şeklin biraz dışında, şekille aynı biçimde, ancak ayrı bir olgu olarak düşünse de kavram imajını tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde genişletmiştir. Bu nedenle çevreyle ilgili problemleri çözerken sorun yaşamamıştır. Filiz (8) ise kavram imajına kapalı eğrileri dahil etmediği için problemleri çözerken hatalı yaklaşımlar sergilemiştir. Filiz'in (8) uygulama öncesindeki kavram imajının içerdiği bilgiler yeni edindiği bilgilerle çelişmiş, katılımcı tercihini eski bilgilerinden yana yapmıştır. Hatalı olsalar da eski bilgiler kavram imajında daha baskın olduğu için bunları doğruları ile değiştirmek oldukça güçtür. Öğretim seansları kapsamında yapılan çalışmalar Filiz (8) için yeterli olmamıştır. Katılımcının kavram imajındaki hata ve sınırlılıkların uzun yıllar boyunca kökleşip değişime dirençli hale gelmesi, aritmetik işlemlerdeki ve çevreyle ilişkili diğer kavramlardaki yetersizliği de katılımcının kavram imajını değiştirmesi önündeki engeller arasındadır.

4.3.2. Uygulama sonrasında alana yönelik kavram imajları

Katılımcıların alan kavramıyla ilgili uygulama sonrası kavram imajları tek bir başlık altında ele alınmıştır: iç bölge kavram imajı. İç bölge kavram imajına sahip katılımcılar alan kavramının kendisine, diğer bir deyişle kavramın anlamına odaklanmaktadırlar. Alan, katılımcılar için herhangi bir ölçme veya hesaplama yapılmasa da anlam taşımaktadır. Katılımcılar açıklamalarında alan kavramını bir şeklin sınırlarının içinde kalan bölge ile ilişkilendirmektedirler. Yaptıkları çizimlerde de alanı şekillerin sınırları içinde kalan bölgeyi tarayarak göstermektedirler. Tablo 4.10.'da katılımcıların uygulama sonrasında sahip oldukları alana yönelik kavram imajları özetlenmiştir.

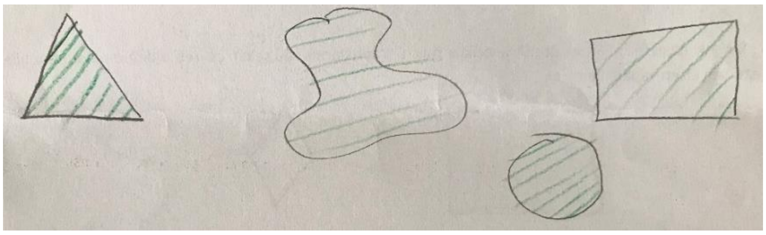
Tablo 4.10. *Katılımcıların uygulama sonrası alana yönelik kavram imajları*

Sınıf düzeyi	Katılımcı	Kavram imajı
5	Zehra	İç Bölge
	Neşe	İç Bölge
6	Ceylan	İç Bölge
	Fırat	İç Bölge
7	Mısra	İç Bölge
	Can	İç Bölge
8	Gülce	İç Bölge
	Filiz	İç Bölge

4.3.2.1. *İç bölge kavram imajı*

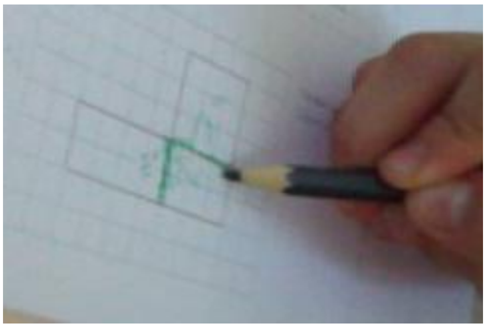
Öğretim seansları sonrasında yapılan klinik görüşmelerden elde edilen veriler incelendiğinde tüm katılımcıların iç bölge kavram imajına sahip olduğu görülmüştür. Katılımcılar alanı herhangi bir kapalı şeklin sınırları içinde kalan bölge ile ilişkilendirmiştir. Katılımcıların artık alanı hesaplanması gereken bir değer (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) veya bir şeklin sınırları dışındaki bölge (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) olarak düşünmedikleri belirlenmiştir. Aşağıda her bir katılımcının düşüncelerine ayrıntılı olarak yer verilmiştir.

Katılımcılardan Zehra (5) alan denildiğinde ne anladığını şu şekilde açıklamıştır: “Alan çevresinin içinde kalan bölüm… Yani mesela bu masanın çevresi yani şu sınırları içerisinde kalan iç bölümü.” Alanı örnek üzerinde göstermesi istenince hem çokgenler hem de kapalı eğriler çizerek bu şekillerin iç bölgelerini tarayıp alanı göstermiştir. Her ne kadar kapalı eğrilerin alanı olduğunu söylese de çemberi bunlardan ayrı tutmuştur. Araştırmacı alanı olmayan şekillere örnek vermesini isteyince “Çember vardır. Çünkü çemberin içi boş bir yuvarlaktır çember. Ama dairenin alanı vardır. Çünkü dairenin içi doludur.” açıklamasını yapıp bir çember çizmiştir. Ardından daireyi çizip iç bölgesini tarayarak alanını göstermiştir. Katılımcının algısı çemberin iç bölgesi olmadığı yönünde olduğundan, çemberin alanı olmadığını düşünmektedir. Zehra (5) çemberle birlikte açık şekillerin de alanı olmadığını söylemiştir. Örnek olarak çizdiği açık bir şeklin neden alanı olmadığını “Çünkü kapladığı bir alan yok. Yani çevresi olamaz, çevresi olmadığı için yani şurası birleşmiş olsaydı alanı da olacaktı.” şeklinde açıklamıştır. Zehra (5) bir şeklin çevresi olması için gereken şartları “Bir şeklin alanı olması için sadece birleşmiş olması gerekiyor. Bir de içi dolu olması gerekiyor.” şeklinde açıklamıştır. Katılımcının açıklamalarından anlaşıldığı gibi alanın kapalı şekillere özgü bir nitelik olduğunu kabul etmekte, alanı kapalı şekillerin iç bölgesi ile ilişkilendirmektedir. Şekil 4.81.’de Zehra’nın (5) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller gösterilmektedir.



Şekil 4.81. *Zehra’nın (5) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

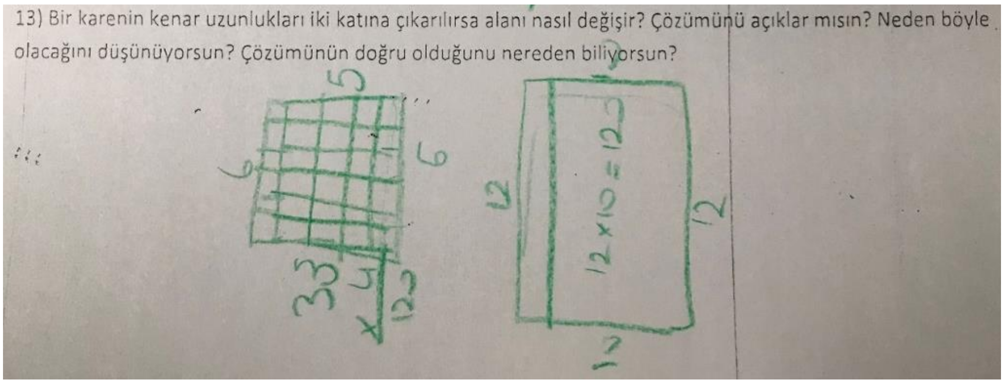
Zehra (5) alanı ölçmek için şekillerin içindeki birim kareleri sayma yöntemini kullanmıştır. Kareli kâğıda çizilmiş L biçimindeki şeklin alan ölçüsünü önce iç bölgesindeki birim kareleri birer birer sayarak bulmuştur. Araştırmacı daha farklı nasıl bulabileceğini sorunca “(Şekli bir dikdörtgen ve bir kareye ayırıyor.) Mesela ilk başta bunları (dikdörtgen parçanın sütunlarını gösteriyor) ikişer ikişer sayardım. Sonra bunu (kare bölümü gösteriyor) da bulurdum. Eklerdim, 23 çıkacaktır.” cevabını vermiştir. Araştırmacı daha farklı nasıl bulabileceğini sorunca iki dikdörtgen parçaya ayırarak bunların alan ölçülerini hesaplayıp toplayacağını belirtmiştir. Şekil 4.82.’de Zehra’nın (5) L biçimindeki şeklin alanını ölçmek için yaptığı çizim gösterilmektedir.



Şekil 4.82. *Zehra’nın (5) L biçimindeki şeklin alanını ölçmek için yaptığı çizim*

Zehra (5) ilk klinik görüşmede sabit bir alan ölçüsüne sahip farklı şekiller oluşturmada başarılı olamasa da son klinik görüşmede sabit bir alan ölçüsüne sahip tüm dikdörtgenleri ve bir karmaşık şekli çizmiştir. Dikdörtgenlerin alan ölçüsünü nasıl bulduğunu şu şekilde açıklamıştır: “Burada burayı üç birim (sütun) burayı da dört birim (satır) tutum. Dörtle üçü çarpınca on iki çıkıyor.” Karmaşık şeklin alanını ise birim kareleri ritmik sayarak ölçmüştür. Katılımcı, daha önce anlamını bilmeden kullandığı dikdörtgenin alan formülünü, artık alan ve birim kavramlarının anlamına değinerek uygulamaktadır. Zehra (5) daha önce alanı olmadığını düşündüğü kapalı eğrinin alanı olduğunu söylemiş ve alanı şeklin iç bölgesi olarak göstermiştir. Alanı nasıl ölçtüğünü şu şekilde açıklamıştır: “Burada ilk başta tam olan birim kareleri saydım. Sonra yarım, yani tam olmayanları saydım ve ikiye böldüm. Çünkü mesela bu karenin eşi, yani tam olmayan şeklin eşi şurada veya daha başka bir yerlerde olabilir.” Zehra (5), alan kavramının anlamına ve alan korunumuna değinerek, öğretim seanslarında uyguladığı yöntemi burada da kullanmıştır.

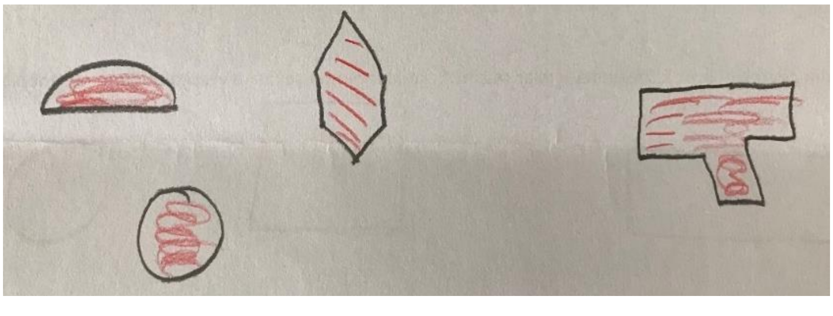
Zehra (5) ilk klinik görüşmede kenar uzunlukları iki katına çıkarılan karenin alan ölçüsünün de iki katına çıkacağını söylemiş olsa da bu kez alan ölçüsünün dört katına çıkacağını belirtmiştir. Bu düşüncesini şu şekilde açıklamıştır: “Alanı 4 katına çıkar. Çünkü çevresi 2 katına çıkınca alanı önceki görüşmemizde yaptığımız gibi çevresi 2 katına çıkıyor alanı daha fazla. İki katına çıkmıyor yani.” Araştırmacı düşüncesini şekil üzerinde göstermesini isteyince Şekil 4.83.’de gösterilen çizim ve hesaplamaları yapmıştır.



Şekil 4.83. *Zehra'nın (5) son klinik görüşmede benzer dikdörtgenlerin alanları arasındaki ilişkiyi göstermek için yaptığı çizim ve hesaplamalar*

Zehra (5) buradaki düşüncesini "Mesela bu kare diye düşünürsek bunun çevresini iki katına çıkardığımızda daha büyük bir kare elde edeceğiz. Şunun alanını da gösterelim (karenin içine yatay ve dikey çizgiler çizerek birim kareler oluşturmaya çalışıyor) şöyle yaparsak. Şöyle diyelim alanı. Alanı şuradaki kısımlar oldu (şeklin iç bölgesinde çizdiği kareleri gösteriyor)." şeklinde açıklamıştır. Çizdiği şeklin alan ölçüsünü 30 birim kare olarak hesaplamıştır (5x6=30). Araştırmacı son durumdaki şekli de çizmesini istemiştir. Öğrenci kenar uzunluklarına 12 ve 10 yazdığı dikdörtgenin alan ölçüsünü 120 bulmuştur. Tahmin ettiği gibi 4 katına çıktığını belirtmiştir. Buna göre, Zehra'nın (5) öğretim seansında edindiği bilgiyi kavram imajına dahil ettiği anlaşılmıştır.

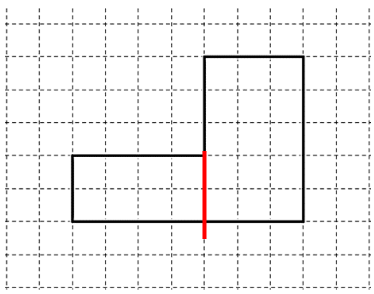
Katılımcılardan Neşe (5) alan denildiğinde ne anladığını şu şekilde açıklamıştır: "Kapalı olan şekillerin iç kısmı… mesela bir karenin iç kısmı karenin alanı oluyor." Alan yerine "şeklin iç kısmı" kelimelerini kullanabileceğini "Çünkü alan bir şeklin iç kısmı olduğu için o şekilde de denilebilir veya alan da denilebilir." şeklinde açıklamıştır. Çizim yaparak alanı göstermesi istenince hem çokgenler hem de kapalı eğriler çizerek iç bölgelerini taramıştır. Şekil 4.84.'de Neşe'nin (5) alan için çizdiği şekiller gösterilmiştir.



Şekil 4.84. *Neşe'nin (5) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

Neşe (5) Şekil 4.84.'de gösterilen alan için çizdiği şekillere nasıl karar verdiğini "Çünkü hepsinin kenarları kapalı veya bu şekilde (daireyi gösteriyor) kapalı olduğu için alanı oluyor. Ama bir tarafı açık olsaydı alanı olmazdı." diyerek açıklamıştır. Neşe (5) kendisine gösterilen şekillerden sadece açık şeklin alanı olmadığını söylemiştir. Bu şeklin neden alanı olmadığını şöyle açıklamıştır: "Bu şeklin alanı yoktur. Çünkü sınırlar içerisinde değil. Eğer bu şekilde olsaydı (açık bölümü bir doğru parçasıyla kapatıyor) alanı olurdu." Neşe (5) bir şeklin alanı olması için gereken şartları "Yine çevredeki gibi kapalı olması yeterlidir." diyerek açıklamıştır. Yukarıdaki açıklamalardan anlaşıldığı gibi katılımcının alan ile ilgili kavram imajı formal tanıma uygun olarak bütün kapalı eğrileri içerecek şekilde değişmiştir. Katılımcının yeni kavram imajına göre bir şeklin alanı olması için kapalı olması yeterlidir.

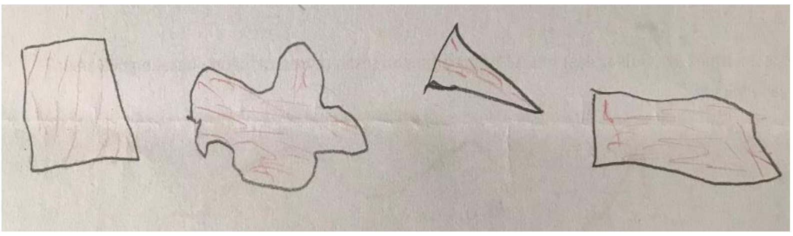
Neşe (5) alanı ölçmek için birim kareleri tek tek sayma, satır/sütunlar boyunca ritmik sayma veya birer satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarpma yöntemlerini kullanmıştır. Bazen bu yöntemleri bir arada kullanarak çözüm yapmıştır. Örneğin kareli zemine çizilmiş L biçimindeki şeklin alan ölçüsünü hesaplarken birim kareleri bazen ritmik, bazen tek tek sayarak 23 bulmuştur. Daha farklı nasıl bulabileceği sorulunca "Önce buraya bakmadan burayı (soldaki parça) sayarak, sonra burayı (sağdaki parça) da ekleyerek bulabilirim" cevabını vermiştir. Neşe (5) burada Şekil 4.85.'de gösterilen şekli iki dikdörtgen parçaya ayırıp her bir parçanın alan ölçüsünü hesapladıktan sonra toplayacağını ifade etmiştir.



Şekil 4.85. *Neşe'nin alanını ölçtüğü L biçimindeki şekil*

Neşe (5) sabit bir alan ölçüsüne sahip dikdörtgenler oluşturması istendiğinde kenarların çarpımından hareket etmiştir. Nasıl düşündüğünü şu şekilde açıklamıştır: "İkilerde yaptık, üçlerde bunu yaptık, dörtlerde yine bu var, beşlerde on ikiyi vermiyor, altılarda da yine bunu yaptık, yedilerde de devamında da zaten on iki yok." Çizdiği bu dikdörtgenlerin farklı duruşlardaki hallerini de çizebileceğini söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı onların farklı dikdörtgenler olup olmayacağını sorunca “Onlar farklı olmaz. Bunların sadece döndürülmüş hali.” cevabını vermiştir. Neşe (5) ilk klinik görüşmede sabit bir alan ölçüsüne sahip farklı dikdörtgenler oluşturmakta başarılı olamasa da öğretim seansları boyunca edindiği tecrübeler sonrası bunu başarabilmiştir. Daha önce rastgele sayılarla deneyerek çözmeye çalıştığı problemi artık sistematik bir şekilde akıl yürüterek çözmektedir. Ayrıca artık bir şeklin döndürülmesinin onu farklı bir şekil yapmadığını keşfetmiştir. Kenar uzunlukları iki katına çıkarılan bir karenin alan ölçüsünün başlangıca göre nasıl değişeceği sorulunca Neşe (5) dört katına çıkacağını söylemiştir. Bu sonuca nasıl ulaştığını “Çünkü sayıyı, sayıyı kendisiyle çarpınca dört oluyor. İkiyle ikiyi çarpınca dört oluyor. Dört katına çıkar.” şeklinde açıklamıştır. Neşe (5) şeklin kenarları üç katına çıkarılsaydı alanın 9 katına çıkacağını söylemiştir. Öğretim seansları kapsamında yaptığı genellemeyi buradaki problem durumunda kullanabilmiştir.

Katılımcılardan Fırat (6) alanı “bir şeklin iç kısımları” şeklinde açıklamıştır. Alanı örnek üzerinde göstermek için hem çokgenler hem de kapalı eğri çizmiş ve çizdiği bu şekillerin iç bölgesini taramıştır. Araştırmacı Fırat’a (6) bazı arkadaşlarının alan ve çevrenin aynı anlama geldiğini düşündüğünü söylemiş, bu konudaki fikrini sormuştur. Fırat (6) “Bence yanlış. Bunun çevresi buralarıyken (şeklin sınırlarını gösteriyor), alanı içi.” cevabını vermiştir. Daha önce sınır bölgesi kavram imajına sahip olan ve iki kavramı birbirine karıştıran Fırat (6) artık bu kavramların farklı olduklarını tanımlarına dayanarak açıklayabilmektedir. Şekil 4.86.’da Fırat’ın (6) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller gösterilmiştir.



Şekil 4.86. *Fırat’ın (6) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

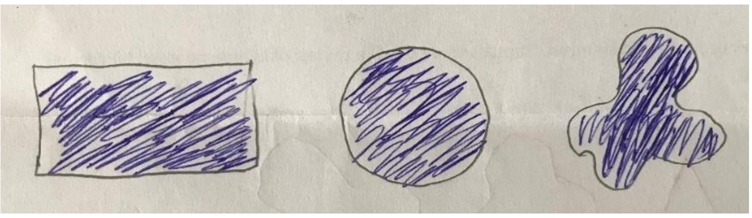
Fırat (6) kendisine gösterilen şekillerden sadece açık olanın alanı olmadığını söylemiştir. Bir şeklin alanı olması için kapalı olmasının yeterli olduğunu belirtmiştir. Katılımcının başlangıçtaki alan kavram imajı öğretim seansları sonrasında tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde değişmiştir. Dikdörtgenin alanını ölçmek için satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarpma yöntemini kullanmıştır. Örneğin dikdörtgen ve karenin alanını karşılaştırması istenen soruda dikdörtgenin satır ve sütunundaki birim kare sayılarını çarpıp alan ölçüsünü 7 x 3 = 21 birim kare bulmuştur. Neden çarpma yaptığı sorulunca "yedi, on dört, yirmi bir" şeklinde ritmik sayma yapmıştır. Karenin alan ölçüsünü bulmak için yine aynı yöntemi uygulayarak 25 bulmuştur. Diğer sorularda karşılaştığı şekillerin alan ölçülerini bulmak için de ritmik sayma yönteminden faydalanmıştır. Örneğin aynı alan ölçüsüne sahip dikdörtgenler oluştururken satırları yineleyerek alan ölçülerinin eşitliğini göstermiştir. Kenar uzunlukları 3 ve 4 birim olan dikdörtgeni çizmiş ve "Üç, altı, dokuz, on iki" şeklinde satırları yineleyerek alan ölçüsünü hesaplamıştır. Katılımcı daha önce anlamını bilmeden kullandığı dikdörtgenin alan formülünü artık satır ve sütunlardaki birim kare sayıları ile ilişkilendirerek uygulamaktadır.

Fırat (6) ilk klinik görüşmede alanı olmadığını düşündüğü kapalı eğrinin alanı olduğunu söylemiş, alanın şeklin iç bölgesi olduğunu tarayarak göstermiştir. Alan ölçüsünü şeklin sınırları içinde kalan birim kareleri sayarak bulabileceğini söylemiştir. Önce tam olan birim kareleri saymış, ardından kesirli birimleri bir tam oluşturacak şekilde birleştirerek üzerine eklemiştir. Katılımcı burada alan kavramının anlamı ve alan korunumunu kullanarak problemi çözmüştür.

Fırat (6) kenar uzunlukları iki katına çıkarılan karenin alan ölçüsünün başlangıca göre nasıl değişeceği sorulunca "Hocam alanı dört kat artar. Hocam geçen hafta öyle yapmıştık hocam hep doğru çıktı öyle." cevabını vermiştir. Bunun doğruluğunu kanıtlaması istenince çizerek gösterebileceğini söylemiştir. Fırat (6) önce kenar uzunlukları 3 ve 5 birim olan dikdörtgen çizmiştir. Araştırmacı soruda kare denildiğini hatırlatınca bu şekli 5 birimlik kareye dönüştürüp alan ölçüsünü 25 bulmuştur. Ardından iki katına çıkarılmış halini çizip alan ölçüsünü 100 birim kare bulmuş ve alan ölçüsünün dört katına çıktığını söylemiştir. Araştırmacı kenar uzunlukları beş katına çıkarılsaydı alan ölçüsünün nasıl değişeceğini sorunca alan ölçüsünün on katına çıkacağını, kenar uzunlukları üç katına çıkarılsaydı alan ölçüsünün 6 katına çıkacağını söylemiştir. Fırat (6) ilk soruya doğru yanıt vermiş gibi görünse de aslında hatalı bir genelleme yaptığı anlaşılmıştır. Öğretim seansında doğru bir genellemeye ulaşsa da bunu klinik görüşmeye tam olarak yansıtamamıştır.

Katılımcılardan Ceylan (6) alan denildiğinde ne anladığını "içi dolu olan şekiller" şeklinde açıklamıştır. Alanın o şekillerin neresi olduğu sorulunca "İç bölgesi. Bir önceki şekil şunda gösterdiğimiz gibi. Mesela bunun içini renkli kalemle boyasak bunun bir alanı olmuş olacak." cevabını vermiştir. Araştırmacı içi boyanmadığında alanı olmayacağını mı düşündüğünü sorunca "Olmaz, çünkü eğer içi boyalı olmazsa onun sadece bir çevresi olur." cevabını vermiştir. Katılımcı öğretim seansları sırasındaki düşüncesini devam ettirmektedir. Alanı örnek üzerinde göstermesi istenince hem çokgen hem de kapalı eğriler çizerek bu şekillerin iç bölgesini taramıştır.

Ceylan (6) alanı olmayan şekillere örnek vermesi istenince kapalı bir eğri çizmiştir. Bu şeklin neden alanı olmadığını "Çünkü bunun içini boyadığımızda alanı oluyor, ama kâğıt üzerinde düşünmezsek bunun alanı olmuyor." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı daha önce çizdiği kapalı eğri ile bunun farkını sorunca "Birinin içinin dolu olması boyalı olması, diğerininkinin boş olması" cevabını vermiştir. Daha farklı bir örnek vermesi istenince bir yay çizmiştir. Bu şeklin neden alanı olmadığını "çünkü boyamak istesek hem dışarı taşar hem de belirli bir şeklin mesela alanını ölçmek istedik, alanını ölçemeyiz burası boş olduğu için." şeklinde açıklamıştır. Buna göre bir şeklin alanı olması için gereken şartları "içinin taralı bir şekilde yani boyalı olması gerekiyor, dolu olması gerekiyor. Bu şekiller (açık şekilleri gösteriyor) gibi böyle bırakılmaması gerekiyor." şeklinde sıralamıştır. Katılımcının başlangıçtaki alan kavram imajı öğretim seansları sonrasında kapalı eğrileri de içerecek şekilde değişmiştir. Ancak katılımcı öğretim seanslarında olduğu gibi bir şeklin alanı olması için kapalı olması yanında iç bölgesinin de dahil edilmesi gerektiğini düşünmektedir. Şekil 4.87.'de Ceylan'ın (6) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller gösterilmiştir.

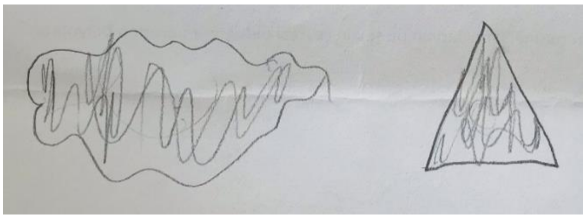


Şekil 4.87. *Ceylan'ın (6) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

Ceylan (6) dikdörtgenin alan ölçüsünü hesaplamak için ritmik sayma veya satır ile sütundaki birim kareleri çarpma yöntemlerini kullanmıştır. Örneğin alan ölçüsü 12 birim kare olan dikdörtgenleri çizmesi istendiğinde ilk olarak kenar uzunluğu üç birim olan bir kare çizmiştir. Araştırmacı şeklin alanını göstermesini isteyince yanlış olduğunu söyleyip şekli kenar uzunlukları dört ve üç birim olan dikdörtgene dönüştürmüştür. İlk çizdiği şekilde çevreyle karıştırdığını, onun alan ölçüsünün dokuz olduğunu şimdikinin on iki olduğunu söylemiştir. Ceylan (6) burada dörder ritmik sayarak alan ölçüsünü bulmuş, dört ve üçü çarparak da kısa yoldan bulabileceğini belirtmiştir. Bunun ardından kenar uzunlukları 2 ve 6 birim olan dikdörtgeni de aynı yöntemi kullanarak çizmiştir. Araştırmacı daha farklı bir dikdörtgen olup olmadığını sorunca "Bence başka yoktur. Çünkü ikiyi kullandık, ikişer ikişer saydığımızda. Bunun tersini yapsak yine bunun aynısını yapmış oluruz. İkiyle altıyı eledik, dörtle üçü de eledik. Yedi yedi saysak, yedi olmuyor. Sekiz yapsak olmuyor. Beş yapsak o hiç olmuyor zaten." cevabını vermiştir. Araştırmacı birer birer sayıp sayamayacağını sorunca "Olur." diyerek kenar uzunlukları bir ve on iki birim olan dikdörtgeni çizmiştir. Artık hepsini çizdiğini söylemiştir. Yukarıdaki açıklamalarından anlaşıldığı gibi katılımcı dikdörtgenin alan formülünü satır ve sütunlardaki birim kare sayılarıyla ilişkilendirmiştir. Ayrıca bu bilgiyi problem çözümünde sistematik bir şekilde akıl yürüterek kullanabilmiştir.

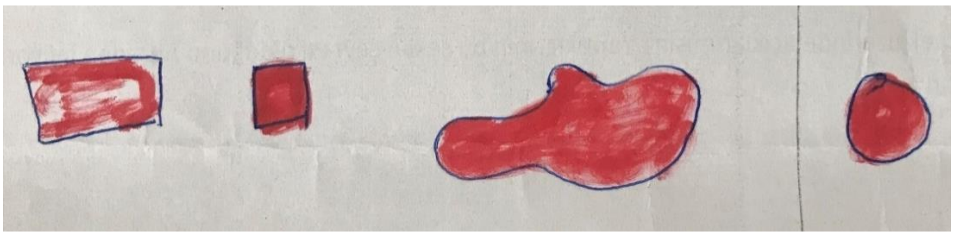
Ceylan (6) ilk klinik görüşmede alanı olmadığını düşündüğü kapalı eğrinin alanı olduğunu ve alanın iç bölgesi olduğunu söylemiştir. Alanı ölçmek için önce tam olan birim kareleri saymış ardından kesirli birimleri bir tam oluşturacak şekilde birleştirip üzerine eklemiştir. Katılımcı problemin çözümünde alan kavramının anlamından ve alan korunumundan faydalanmıştır. Ceylan (6) ilk klinik görüşmede olduğu gibi bir karenin kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa alan ölçüsünün de iki katına çıkacağını söylemiştir. Nasıl emin olduğu sorulunca yapıp gösterebileceğini söylemiş ve bir kare çizerek kenarlarına 3 yazmıştır. Ardından bir kare daha çizip kenarlarına 6 yazmıştır. İlk karenin alan ölçüsünü hesaplamak için dörtle üçü çarpmıştır. Araştırmacı şeklin alanını göstermesini isteyince "iç bölgesi" demiştir. İç bölgesini bulmak için neden dörtle üçü çarptığı sorulunca cevap verememiştir. Ardından daha önceki şekillerin alan ölçüsünü birim kareleri sayarak bulduğunu söylemiş ve şeklin içine birim kareler çizerek alan ölçüsünü dokuz bulmuştur. İkinci karenin de içine birim kareler çizerek alan ölçüsünü otuz altı bulmuştur. Her iki alanı karşılaştırarak alan ölçüsünün iki katına çıkmadığını, dört katına çıktığını söylemiştir. Öğretim seansında kenar uzunlukları ve alan ölçüsü arasında kurduğu ilişkiyi klinik görüşmeye taşıyamamıştır. Ancak çizim ve hesaplama yaptıktan sonra doğru cevaba ulaşabilmiştir.

Mısra (7) alanı kapalı şekillerin iç bölgesi ile ilişkilendirmiştir. Bir şeklin alanı olması için kapalı olmasının yeterli olduğunu ifade etmiştir. Açık şekillerin çevresi ve alanı olmadığını düşünmektedir. Katılımcının başlangıçtaki alan kavram imajı, kavramın formal tanımına uygun olarak, tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde yeniden düzenlenmiştir. Şekil 4.88.'de Mısra'nın (7) alan kavramını açıklamak için çizdiği şekiller gösterilmiştir.



Şekil 4.88. *Mısra'nın (7) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

Katılımcılardan Can (7) alanı "Alan denildiğinde hocam bir şeklin iç kısımları" şeklinde açıklamıştır. Bu düşüncesinin nedenini şu şekilde açıklamıştır: "Çünkü hocam alanla çevre aynı olmadığı için çevre bir şekli sınırları ama alansa bir şeklin iç kısımları." Can (7) başlangıçta sahip olduğu formal tanımdan uzak sınır bölgesi kavram imajını yeni edindiği bilgilerle doğru bir şekilde yapılandırmıştır. Alanı şekil üzerinde çizerek göstermesi istendiğinde hem çokgenler hem de kapalı eğriler çizerek bu şekillerin iç bölgesini taramıştır. Bu şekillerin alanı olduğuna nasıl karar verdiğini "Çünkü hocam bu şekillerin hepsi hocam kapalı bir şekil. Yani hocam hiçbiri açık değil. Yani hocam açık olsaydı yine alanı olmazdı hocam." şeklinde açıklamıştır. Kendisine gösterilen şekillerden sadece açık olanın alanı olmadığını söylemiştir. Bu şeklin neden alanı olmadığını "Çünkü hocam şurası açık" şeklinde açıklamıştır. Şekil kapalı olsaydı alanı olacağını söylemiştir. Şekil açık olduğunda alanın bulunamayacağını belirtmiştir. Şekil 4.89.'da Can'ın (7) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller gösterilmiştir.



Şekil 4.89. *Can'ın (7) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

Can (7) kareli zemine çizilmiş dikdörtgen ve karenin alan ölçülerinin eşit olacağını tahmin etmiştir. Bunun nedenini çevre kavramıyla ilgili çözdüğü soruda yaptıklarına dayandırarak "Hocam az önceki gibi yaptığımızda eşit çıkmıştı. Yani yine eşit çıkacağını düşünüyorum." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı şekillerin alanlarını göstermesini isteyince "Aaa bir dakika eşit çıkmaz hocam. Çünkü hocam çevreyle alan aynı değil, aynı olmadığı için karıştırdım onu. Bence hocam bu (dikdörtgen) daha küçük çıkar… çünkü hocam hani kısa olduğu için hocam" açıklamasını yapmıştır. Araştırmacı ölçme yaparak tahminini kontrol etmesini istemiştir. Can (7) "Hocam ilk önce uzun kenarla, tüm kenarları ölçüp iç kısımdaki kareleri sayarız hocam. Hocam direkt hani saymaya hiç gerek yok direkt uzun kenarla kısa kenarı çarparız, buluruz hocam." şeklinde alan ölçüsünü nasıl bulacağını açıklamıştır. Ardından söylediği işlemleri yaparak dikdörtgenin alan ölçüsünü 21, karenin alan ölçüsünü 25 birim kare olarak hesaplamıştır. Can (7) alan ölçüsünü birim kareleri sayarak ya da kenar uzunluklarını çarparak bulabileceğini söylemiştir. Alan ölçüsü 12 birim kare olan dikdörtgenler çizmesi istendiğinde bu durumu "Yani hocam bir şeklin iç kısmındaki karelerin on iki tane olması demek." şeklinde açıklamıştır. Buna rağmen alan ölçüsü 12 birim kare olan sadece bir dikdörtgen (2x6) çizebilmiştir. Can (7) daha farklı dikdörtgenler olsa da kendisinin aklına gelmediğini söylemiştir. Bu problemi tam olarak çözememiş olsa da katılımcının alan kavramını şeklin sınırları içindeki birim kare sayısı ile ilişkilendirdiği anlaşılmaktadır.

Kenar uzunlukları iki katına çıkarılan bir karenin alan ölçüsünün başlangıca göre nasıl değişeceği sorulduğunda Can (7) başlangıçta alan ölçüsünün de iki katına çıkacağını söylemiştir. Ardından çizerek göstermesi istenmiştir. Bir kare çizerek kenarlarına 5 yazmıştır. Bu karenin alan ölçüsünün 20 olduğunu söylemiştir. Araştırmacı karenin alanını göstermesini isteyince Can (7) "Şu iç kısımları" diyerek şeklin iç bölgesini taramıştır. Bunun üzerine araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Araştırmacı: 20'yi nasıl buldun Can?

Can: Hocam şu …

Araştırmacı: Bunları (kenarlara yazdığı 5'leri gösteriyor) topladın mı?

Can: Evet

Araştırmacı: Alan kenar uzunluklarının toplamı mıdır?

Can: (Hayır anlamında başını sallıyor)

Araştırmacı: Niye topladın?

Can: O çevreyi bulmak için de

Araştırmacı: Ben sana çevresini mi sordum?

Can: Pardon alanını bulmak için

Araştırmacı: Bunun alanı nedir?

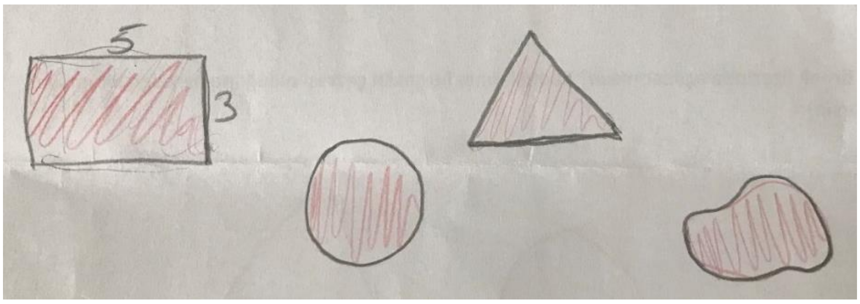
Can: Hocam bunun alanı… hocam yani burası beşse burası da beş olmuyor mu?

Araştırmacı: Orada bir sıkıntı yok zaten.

Can: Haaa hocam bunun alanı 25.

Yukarıdaki konuşmanın ardından Can (7) iki kenar uzunluğunu çarparak alan ölçüsünü bulduğunu söylemiştir. Araştırmacı kenar uzunlukları iki katına çıkmış halini de çizmesini istemiştir. Can (7) yeni karenin kenar uzunluklarının 10, alanının 100 olduğunu söylemiştir. Alan ölçüsünün kaç katına çıkmış olduğu yeniden sorulunca alan ölçüsünün iki katına çıkmadığını söylemiştir. 100'ün 25'in 4 katı olduğunu belirtmiştir. Katılımcı, öğretim seansında keşfettiği kenar uzunlukları ve alan ölçüsü arasındaki ilişkiyi son klinik görüşmede kullanamamıştır. Ancak çizim ve hesaplama yaparak doğru cevaba ulaşabilmiştir.

Katılımcılardan Gülce (8) ilk klinik görüşmede olduğu gibi kavramı açıklarken ölçme ve hesaplamayı ön planda tutmuştur. Alan denildiğinde ne anladığını "Şeklin iç tarafının hesaplanması." şeklinde açıklamıştır. Alanı şekil üzerinde göstermesi istendiğinde ilk olarak bir dikdörtgen çizerek kenarlarına 5 ve 3 yazmıştır. Şeklin alanını göstermesi istendiğinde "Bu şeklin şurası iç yüzeyi." diyerek şeklin iç bölgesini taramıştır. Bu iç yüzeyin ölçüsünü nasıl bulacağını "Buradaki kısa kenarla uzun kenarı çarparak bulabiliriz." şeklinde açıklamıştır. Bu örneğin ardından hem çokgen hem de kapalı eğrileri örnek vermiş, alanlarını göstermek için çizdiği bu şekillerin iç bölgelerini taramıştır. İlk klinik görüşmede alan ölçülerini hesaplayamayacağı için alanlarının olmadığını düşündüğü kapalı eğrileri artık alanı olan şekillere dahil etmektedir. Bir şeklin alanı olması için gereken şartları "Bir şeklin çevresini bulurken gene yaptığımız gibi alanda da o şeklin açıkta kalmayıp mesela bir şekil oluşturup o kenarlarının tam olarak kapanması lazım." şeklinde sıralamıştır. Şekillerin alanı olduğuna nasıl karar verdiğini "Çünkü çevresi olan şekillerin alanı da vardır ve bu şekilleri mesela sayılarla da ölçebiliriz, başka bir şekilde de ölçebiliriz aynı şekilde. Ama buradakine gelince (açık şekli gösteriyor) çevredeki gibi burası nasıl bir şekil alabileceğini bilmediğimiz için bu şeklin alanı da çevresi de yoktur." şeklinde açıklamıştır. Yukarıdaki açıklamalardan anlaşıldığı gibi, katılımcının kavram imajında ölçme ve hesaplama halen baskın olsa da artık kavramın formal tanımına uygun olarak tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde yeniden yapılandırılmıştır. Şekil 4.90.'da Gülce'nin (8) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller gösterilmiştir.



Şekil 4.90. *Gülce'nin (8) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

Gülce (8) kareli zemine çizilmiş dikdörtgen ve karenin alanlarından hangisinin daha küçük olduğu sorulduğunda karenin alanının daha küçük olacağını tahmin etmiştir. Tahmininin nedenini "Çünkü alanı bu iç yüzeyi, uzunluğu değil. İkisini farklı bir sonuç elde edebiliriz bence." şeklinde açıklamıştır. Tahminini ölçerek kontrol ettiğinde dikdörtgenin alan ölçüsünü 21, karenin alan ölçüsünü 25 birim kare bulmuştur. Dikdörtgenin alan ölçüsünü iki kenar uzunluğunu çarparak bulduğunu söylemiştir. Alan ölçüsünü nasıl bulduğunu şu şekilde açıklamıştır: "Alanı bu iç yüzeyidir ve bu iki sayıyı uzun ve kısa kenarı çarparak iç yüzeyini bulabiliriz ya da birim kareleri sayarak da bulabiliriz… Çünkü bu yatay kısımda yedi tane ve bundan da üç tane vardır ya da bu yatay kısma baktığımızda her birinde üç tane ama yedi tane vardır her birinden. Öyle hepsini hesaplayarak yine yirmi bir elde edebiliriz." Gülce (8) daha sonra karenin alan ölçüsünü de aynı yöntemle bulmuştur. İlk klinik görüşmede dikdörtgenin alan formülünü ezbere kullanmakta, bu formülün bileşenlerini açıklayamamaktaydı. Yapılan öğretim seansları sonunda artık bu formülü neden kullandığını ve bileşenlerinin dikdörtgen ile bağlantısını açıklayabilmektedir.

Gülce (8) aynı alan ölçüsüne sahip farklı dikdörtgenleri çizmesi istendiğinde dikdörtgenleri belirlemek için kenarların çarpımına odaklanmış ve tüm dikdörtgenleri doğru bir şekilde çizebilmiştir. Yaptıklarının doğruluğundan nasıl emin olduğunu "Dikdörtgenlerde iki kenarın çarpımı olduğu için sadece o sayıları uzunluğuna göre ayarlamak yeterli kalıyor. Çünkü alanı sadece iki kenarın çarpımı olacaktı." şeklinde açıklamıştır. Gülce (8) düşüncesinin doğruluğunu savunurken matematiksel ilişkileri ve akıl yürütmeyi kullanmaktadır. Daha önce alanı olmadığını düşündüğü kareli zemine çizilmiş kapalı eğrinin alanı olduğunu söylemiş ve bu şeklin alanını iç yüzeyi olarak göstermiştir. Şeklin alanını ölçmek için ilk olarak tam olan birim kareleri saymış, ardından kesirli birimleri bir tam oluşturacak şekilde birleştirip üzerine eklemiştir. Problemi çözmek için alan kavramının anlamı ve alan korunumundan faydalanmıştır.

Gülce (8) bir karenin kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa alan ölçüsünün dört katına çıkacağını tahmin etmiştir. Buna nasıl karar verdiğini "Çünkü her bir kenarı iki katına çıkacak ve dört kenarı olduğu için de dört katına çıkabilir bence." şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı çözümünü şekil üzerinde açıklamasını istemiştir. Gülce (8) bir kare çizerek kenarına 3 yazmıştır. Bu şeklin alan ölçüsünün 9 birim kare olduğunu söylemiştir. Kenar uzunluklarının iki katına çıktığı durumu göstermek için de bir kare çizerek kenarına 6 yazmıştır. Bu şeklin alan ölçüsünün de 36 birim kare olduğunu söylemiştir. Yaptığı çizim ve işlemler sonucunda tahmininin doğru olduğunu çünkü 36'nın 9'un 4 katı olduğunu belirtmiştir. İlk klinik görüşmede çizim ve hesaplama yaparak cevaplayabildiği bu soruyu öğretim seansları sonrası yaptığı genellemeye dayanarak çizim veya işlem yapmadan, akıl yürüterek cevaplayabilmiştir.

Katılımcılardan Filiz (8) daha önce sınır bölgesi kavram imajına sahipken, son klinik görüşmede alanı "Alan da mesela bir şeklin iç kısmı, iç kısmının tamamı" şeklinde açıklamıştır. Ardından araştırmacı burada bahsettiği şekli biraz daha açıklamasını istemiştir. Aşağıdaki diyalog Filiz'in düşüncesini ortaya koymaktadır:

Araştırmacı: Nasıl bir şekil olmalı bu?

Filiz: Yani …

Araştırmacı: Herhangi bir şekil olur mu?

Filiz: Olur

Araştırmacı: Eğri olsa?

Filiz: Olur

Araştırmacı: Çevrede olmaz demiştin. Alanın farkı nedir?

Filiz: Çevre dış kısımları, alan da sadece iç kısımları tamamlayan.

Araştırmacı: Yani eğri bir şeklin dış kısmı yok mudur?

Filiz: Vardır.

Bu konuşmanın ardından araştırmacı alanı olan bir şekil çizmesini isteyince Filiz (8) bir dikdörtgen çizmiş ve "Bu şeklin alanı vardır. Bu iç kısımları… iç kısımlarını tamamlayan yerdir." diyerek şeklin iç bölgesini tarayıp alan olarak göstermiştir. Filiz (8) daha sonra farklı çokgenleri de örnek olarak çizmiş ve alanlarını iç bölgelerini tarayarak göstermiştir. Araştırmacı dairenin alanı olup olmadığını sorduğunda ilk klinik görüşmenin aksine "İç kısımları olur." diyerek şeklin iç bölgesini tarayıp alanını göstermiştir. Katılımcının alan kavram imajı formal tanıma uygun olarak kapalı eğrileri de içerecek şekilde değişmiştir. Araştırmacı bu aşamada katılımcının eğrisel şekillerin çevresinin olmadığı düşüncesine geri dönmüştür. Filiz’in (8) bu konudaki düşüncesini aşağıdaki diyalog otaya koymaktadır:

Araştırmacı: Neden çevresinin olmayacağını düşünüyorsun bu şekillerin?

Filiz: Bilmem, daire kafamı karıştırıyor benim.

Araştırmacı: Yani hesaplayamayacağın için mi? Öyle mi düşünüyorsun?

Filiz: Evet.

Araştırmacı: Hesaplanamayan şeylerin yani senin hesaplayamayacağın bir şeklin çevresi olmaz mı diye düşünüyorsun, yoksa başka bir nedeni mi var?

Filiz: Bilmem.

Görüldüğü gibi Filiz (8) hala kapalı eğrilerin çevresi konusunda tereddüt yaşamaktadır. Bu şekillerin alanlarının olduğunu söylemekle birlikte çevreleri olduğunu kabul etmemektedir. Filiz (8) tüm şekillerin alanı olduğunu düşünmektedir. Araştırmacı alanı olmayan bir şekil olup olamayacağını sorduğunda “Yoktur galiba çünkü alanı … mesela çevrede bir tarafı açık kaldığı zaman onun çevresi yoktu ama bu kısımlarda iç kısımlar olduğu için hep” açıklamasını yapmıştır. Fakat daha sonra fikrini değiştirip araştırmacının kendisine gösterdiği şekillerden sadece açık olanın alanı olmadığını belirtmiştir. Daireyle ilgili olarak ise “Yani bunun çevresi yok ama alanı var.” demiştir. Bir şeklin alanı olması için kapalı olmasının yeterli olduğunu belirtmiştir. Şekil 4.91.’de Filiz’in (8) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller gösterilmiştir.

Şekil 4.91. *Filiz’in (8) son klinik görüşmede alan için çizdiği şekiller*

Filiz (8) alanı ölçmek için şekillerin içindeki birim kareleri sütunlar boyunca birer birer sayarak ilerlemiştir. Araştırmacı alan ölçüsünü bulurken bu birim kareleri sayması gerektiğini nereden bildiğini sorunca “Yani çünkü bunların içini kapsıyor, her biri bir birim olarak. Yine buradan aslında göstermiş oluyor iç kısımları çünkü hepsini kaplıyor.” cevabını vermiştir. Öğretim seanslarında birimleri satır ve sütunlar halinde sayarak alan ölçüsünü hesaplasa da burada tek tek sayma yöntemine geri dönmüştür. Filiz (8) alan ölçüsü 12 birim kare olan dikdörtgenleri çizmesi istenince “Yani iç kısmı 12 olacak” diyerek soruyu nasıl anladığını açıklamıştır. İlk olarak kenar uzunlukları 3 ve 4 birim olan dikdörtgeni çizmiş ve içindeki birim kareleri sayarak alan ölçüsünün 12 birim kare olduğunu göstermiştir. Ardından aynı ölçülerdeki dikdörtgeni yatay konumda çizmiştir. Araştırmacı bu iki dikdörtgenin farkını sorunca “biri dik, biri yatay” cevabını vermiştir. Bu dikdörtgenleri farklı kabul edip edemeyeceği sorulunca “İkisi aynı çıktığı için hayır… yani iç kısımları, alanı 12 bunun, bunun da 12. Ama bu dik, bu da yatay farkı bu yani.” cevabını vermiştir. Daha sonra kenar uzunlukları 2 ve 6 birim olan dikdörtgen çizmiş ve içindeki birim kareleri sayarak alan ölçüsünün 12 birim kare olduğunu göstermiştir. Daha farklı bir dikdörtgen olsa da kendisinin aklına gelmediğini söylemiştir. Alan ölçüleri aynı olan iki farklı dikdörtgenin (3x4 ve 2x6) çevre uzunluklarının da aynı olup olmadığı sorulunca Filiz (8) eşit çıkmayacaklarını aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

> “Çünkü burası 6, burası 3 birim. Yani çevre dışında kaldığı için, mesela burayı saydığımız zaman 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (kenar uzunlukları 3 ve 4 birim olan dikdörtgenin çevresini sınır boyunca birim kareleri sayarak ölçüyor) … 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 (kenar uzunlukları 2 ve 6 birim olan dikdörtgenin çevresini sınır boyunca birim kareleri sayarak ölçüyor).”

Yaptığı açıklamalardan anlaşıldığı gibi Filiz (8) öğretim seansları sonrasında çevre ve alan kavramlarının anlamlarını ve farklılıklarını keşfetmiş, problem çözümünde bu bilgilerini kullanabilmiştir.

Filiz (8) ilk klinik görüşmede alanı olmadığını söylediği kapalı eğrinin alanı olduğunu söylemiş ve alanı “iç kısımları” olarak açıklamıştır. Şeklin alan ölçüsünü yaklaşık 20 birim kare olarak tahmin etmiştir. Hesaplayıp kontrol etmesi istenince Filiz (8) kesirli birimleri bir tam olacak şekilde birleştirerek, tam olanları ise birer birer saymış ve alan ölçüsünü 42 birim kare olarak ölçmüştür. Başlangıçtaki kavram imajında kapalı eğrileri alanı olmayan şekiller olarak sınıflandırmış olsa da öğretim seansları sonrasında bu durum değişmiştir. Ayrıca kesirli birimlerle yaptığı işlemlerden alan korunumunu kazandığı anlaşılmaktadır.

Kenar uzunlukları iki katına çıkarılan bir karenin alan ölçüsünün başlangıca göre nasıl değişeceği sorulunca Filiz (8) soruyu çizim yaparak çözmeye çalışmış ve iki kare çizmiştir. Araştırmacı soruyu anlaması için başlangıçtaki halini gösteren karenin kenar uzunluğuna 3, son durumdaki halini temsil eden karenin kenar uzunluğuna 6 yazmış ve alan ölçüsünün nasıl değişeceğini sormuştur. Filiz (8) “O zaman iki katına çıkar” cevabını vermiştir. Araştırmacı düşüncesinin doğruluğunu kanıtlamasını istemiştir. Filiz (8) bir açıklama yapamayınca araştırmacı karelerin içine kenar uzunluklarına uygun birim kareleri çizerek şekillerin alanlarını ölçmesini istemiştir. Filiz (8) karelerin alanlarını birim kareleri sayarak sırasıyla 9 ve 36 olarak ölçmüştür. Alanın iki katına çıkmadığını, dört katına çıktığını söylemiştir. Görüldüğü gibi Filiz (8) öğretim seansı kapsamında edindiği tecrübeleri son klinik görüşmeye aktaramamıştır. Kendisiyle bu konuda iki öğretim seansı yapılmasına rağmen edindiği bilgileri içselleştiremediği, kavram imajına dahil edemediği anlaşılmıştır.

Yukarıdaki açıklamalardan anlaşıldığı üzere katılımcıların alan kavramına yönelik kavram imajları öğretim seansları sürecinde değişime uğramıştır. Başlangıçta, birkaç çokgen ile sınırlı olan kavram imajlarının son durumda formal tanıma uygun olarak tüm kapalı eğrileri içerdiği görülmüştür. Önceden çevre ile karıştırılsa da artık çevre ile alanın farklı nitelikler olduğunun keşfedildiği, alanın bir şeklin sınırları içinde kalan bölge ile ilişkilendirildiği anlaşılmıştır. Bu süreçte yaşanan değişimin daha net görülebilmesi için katılımcıların uygulama öncesi ve sonrasındaki kavram imajları Tablo 4.11.'de gösterilmiştir.

Tablo 4.11. *Katılımcıların uygulama öncesi ve sonrası alana yönelik kavram imajları*

Sınıf düzeyi	Katılımcı	Uygulama Öncesi Kavram İmajı	Uygulama Sonrası Kavram İmajı
5	Zehra	Alan Ölçümü (1a)	İç Bölge
	Neşe	Alan Ölçümü (1a)	İç Bölge
6	Ceylan	Sınır Bölgesi	İç Bölge
	Fırat	Sınır Bölgesi	İç Bölge
7	Mısra	Alan Ölçümü (1b)	İç Bölge
	Can	Sınır Bölgesi	İç Bölge
8	Gülce	Alan Ölçümü (1b)	İç Bölge
	Filiz	Sınır Bölgesi	İç Bölge

Tablo 4.10. ve Tablo 4.11.'de görüldüğü gibi son klinik görüşmelerde çevre ile ilgili formal tanıma uygun kavram imajlarına sahip olmayan iki katılımcı bulunsa da alan ile ilgili tüm katılımcılar forma tanıma uygun kavram imajlarına sahiptir. Özellikle uygulama öncesinde sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcıların böyle bir değişim göstermesi dikkat çekicidir.

4.3.3. Uygulama sonrasında kanıt şemaları

Uygulama sonrasında yapılan klinik görüşmelerden elde edilen veriler incelendiğinde katılımcıların yaptıkları çözümlerin doğruluğunu kanıtlamak için dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarını kullandıkları görülmüştür. İlk klinik görüşmelerde analitik kanıt şemasını kullanan hiçbir katılımcı yoktur. Öğretim seansları sonrasında katılımcıların çevre ve alan kavramlarıyla ilgili kavram imajlarının değişmesiyle kendi bilgilerine olan güvenleri artmış ve analitik kanıt şemasını kullanmaya başlamışlardır.

Dışsal kanıt şemalarından sadece otoriter kanıt şemasının kullanıldığı belirlenmiştir. Otoriter kanıt şemasının ise yalnızca bir katılımcı tarafından kullanıldığı görülmüştür. Otoriter kanıt şemasını kullanan katılımcı (Fırat (7)) düşüncelerinin doğruluğunu öğretmenine ve ondan öğrendiklerine dayandırmıştır. Düşüncesini savunurken derste öğretmeninden böyle öğrendiğini dile getirmiştir.

Deneysel kanıt şemalarından algısal ve örnek temelli/tümevarımsal kanıt şemalarının katılımcılar tarafından kullanıldığı görülmüştür. Algısal kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Filiz (8)) düşüncelerini savunurken mevcut olan veya kendilerinin oluşturduğu bir çizimi kullanmışlar, açıklamalarını bu çizim üzerinden yapmaya çalışmışlardır. Örnek temelli/ tümevarımsal kanıt şemasını tüm katılımcıların kullandığı belirlenmiştir. Katılımcılar düşüncelerinin doğru olduğunu kanıtlamak için birkaç farklı örnek vermişler, açıklamalarını da bu örneklere dayandırmışlardır.

Analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasının katılımcılar tarafından kullanıldığı belirlenmiştir. Bu kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Can (7), Gülce (8)) düşüncelerini savunurken kavramların (kişisel) tanımlarını, işlem özelliklerini ve işlemler arası ilişkileri kullanmışlardır. Uygulama öncesinde katılımcılardan hiçbirinin bu kanıt şemasını kullandığı görülmemiştir. Ancak öğretim seanslarında yaşadıkları deneyimler sonrası katılımcıların kendi bilgilerine olan güvenleri arttıkça bu kanıt şemasını daha çok kullanmaya başlamışlardır. (Kanıt şemalarıyla ilgili ayrıntılı bilgi için bkz. s. 26-35) Tablo 4.12.'de katılımcıların uygulama sonrasında sahip oldukları kanıt şemaları özetlenmiştir.

Tablo 4.12. *Katılımcıların uygulama sonrasında kanıt şemaları*

Sınıf Düzeyi	Katılımcı	Kanıt Şeması
5	Zehra	Algısal, Örnek Temelli, Dönüştürülebilen
	Neşe	Algısal, Örnek Temelli, Dönüştürülebilen
6	Ceylan	Algısal, Örnek Temelli
	Fırat	Otoriter, Algısal, Örnek Temelli
7	Mısra	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen
	Can	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen
8	Gülce	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen
	Filiz	Algısal, Örnek Temelli

4.3.3.1. Dışsal kanıt şemaları

Uygulama sonrası yapılan klinik görüşmelerde katılımcılardan sadece Fırat'ın (6) dışsal kanıt şemalarından otoriter kanıt şemasını kullanmaya devam ettiği görülmüştür. Her ne kadar çevre ve alan kavramlarının anlamlarını ve özelliklerini dile getirip kullansa da bu düşüncelerinin doğruluğunu savunurken öğretmeninden (araştırmacı) derste bu şekilde öğrendiğini söyleyerek bunu dayanak olarak göstermektedir. Uygulama öncesinde tercih edilen alışkanlık edinilmiş/ritüel kanıt şeması ise son klinik görüşmelerde hiçbir katılımcı tarafından kullanılmamıştır.

4.3.3.1.1. Otoriter kanıt şeması

Katılımcılardan Fırat (6) ilk klinik görüşmede yaptığı gibi otoriter kanıt şemasını kullanmaya devam etmektedir. Bir dikdörtgenin çevre uzunluğunu şeklin kenar uzunluklarını toplayarak hesapladıktan sonra araştırmacı çevrenin bu şekilde bulunduğundan nasıl emin olduğunu sorunca "Hocam siz öğrettiniz, sayarak." cevabını vermiştir. Ancak Fırat (6) ilk klinik görüşmenin aksine çevre kavramının kendisi için anlamını söyleyebilmiş ve şeklin çevresini doğru olarak gösterebilmiştir. Ayrıca çevre uzunluğunu birimleri saymak yerine cetvelle kenar uzunluklarını ölçüp toplayarak da bulabileceğini ifade etmiştir. Buna rağmen düşüncesinin doğruluğunu savunması gerektiğinde öğretmeninden bu şekilde öğrenmesine dayandırmaktadır. Katılımcı kavram imajını yeni bilgilerle yapılandırmış olsa da hala kendi bilgisine olan güveni düşüktür. Bu nedenle öğretmenini düşüncelerinin doğruluğunu savunmak için dayanak olarak göstermektedir.

4.3.3.2. Deneysel kanıt şemaları

Uygulama sonrası yapılan klinik görüşmelerde katılımcılar düşüncelerinin doğruluğunu savunurken çoğunlukla deneysel (algısal ve örnek temelli) kanıt şemalarına başvurmuşlardır. Katılımcılar algısal kanıt şemasını genelde bir şeklin çevresi veya alanı olup olmadığına karar vermede kullanmışlardır. Algısal kanıt şemasını kullanan katılımcılar zihinlerindeki tek bir görüntüyü esas alarak düşüncelerinin doğruluğunu savunmuşlardır. Örnek temelli kanıt şemasını kullanan katılımcılar ise bir veya daha fazla örnek vererek düşüncelerinin doğruluğunu kanıtlamaya çalışmışlardır. Aşağıda katılımcıların düşüncelerini yansıtan durumlar ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

4.3.3.2.1. Algısal kanıt şeması

Son klinik görüşmede algısal kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Filiz (8)) çevre veya alan kavramıyla ilişkilendirdikleri bir zihinsel görüntü üzerinden düşüncelerinin doğruluğunu savunmuşlardır. Bu kanıt şeması uygulama öncesinde de tercih edilmiştir. Ancak daha önce katılımcıların savunmalarındaki gerekçeler kavram imajlarının sınırlılıklarını yansıtırken, öğretim seansları sonrasında formal tanıma uygun halde yapılandırdıkları kavram imajları çoğunlukla doğru gerekçeler sunmalarını sağlamıştır.

Örneğin Zehra (5) alanı olmayan şekillere örnek vermesi istenince “Çember vardır. Çünkü çemberin içi boş bir yuvarlaktır çember. Ama dairenin alanı vardır. Çünkü dairenin içi doludur.” açıklamasını yapıp bir çember çizmiştir. Ardından daireyi çizip iç bölgesini tarayarak alanını göstermiştir. Araştırmacı hangisinin çember, hangisinin daire olduğunu nasıl bildiğini sorunca “Çünkü çember olunca sadece içi boş bir yuvarlak oluyor. Daire olunca içi dolu bir yuvarlak.” cevabını vermiştir. Yaptığı açıklama incelendiğinde Zehra’nın (5) zihnindeki çember imajına dayanarak savunma yaptığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle algısal kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Benzer şekilde Ceylan (6) alanı olmayan şekillere örnek vermesi istenince kapalı bir eğri çizmiştir. Bu şeklin neden alanı olmadığını “Çünkü bunun içini boyadığımızda alanı oluyor, ama kâğıt üzerinde düşünmezsek bunun alanı olmuyor.” şeklinde açıklamıştır. Araştırmacı şu anda çizdiği şeklin kâğıt üzerinde olduğunu söyleyip, neden alanı olmadığını düşündüğünü, daha önce çizdiği kapalı eğri ile bunun farkını sorunca “Birinin içinin dolu olması boyalı olması, diğerininkinin boş olması.” cevabını vermiştir.

Buna göre Ceylan'ın (6) da zihnindeki bir görüntüye dayanarak savunma yaptığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle algısal kanıt şemasını kullandığı düşünülmektedir.

4.3.3.2.2. Örnek temelli/tümevarımsal kanıt şeması

Katılımcıların son klinik görüşmede en sık kullandığı kanıt şemalarından biri örnek temelli kanıt şeması olmuştur. Tüm katılımcıların bu kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Öğretim seansları kapsamında araştırmacı düzenlediği etkinliklerde örnekler üzerinden öğrencileri genelleme yapmaya yönlendirmiş veya öğrencilerin düşüncelerinin aksine bir örnek göstererek onların hatalarını fark etmelerini sağlamaya çalışmıştır. Uygulama öncesinde ve sırasında formal kanıt eğitimi almayan katılımcıların bu deneyimler sonucunda örnek temelli kanıt şemasına yöneldikleri düşünülebilir. Örnek temelli kanıt şeması uygulamadan önce de tercih edilen bir kanıt şeması olmuştur. Ancak daha önce katılımcılar savunmalarında kavram imajlarının sınırlılıklarını yansıtan örnekler vermişlerdir. Öğretim seansları sonrasında formal tanıma uygun halde yapılandırdıkları kavram imajları çoğunlukla doğru örnekler vermelerini sağlamıştır.

Örneğin Zehra (5) kareli kâğıda çizilmiş dikdörtgen ve karenin çevrelerini karşılaştırması istenince ilk olarak dikdörtgenin çevre uzunluğunun daha fazla olacağını tahmin etse de ölçtüğünde çevrelerin eşit olduğunu bulmuştur. Araştırmacı Zehra'dan (5) kendisinin başlangıçtaki tahmini gibi düşünen bir arkadaşını ikna etmesini isteyince "Mesela şimdi burada bulduğumuz gibi tek tek çevresini hesaplamasını isterim. Bunun kaç birim olduğunu bulursa bunun da bulmasını isterim. Eşit çıkarsa yani başka şekillerle de örnek verebiliriz." diyerek örnekler üzerinden bir açıklama yapacağını belirtmiştir. Görüldüğü gibi Zehra (5) kendi çözüm yöntemlerini örnek göstererek farklı düşünceye sahip arkadaşını ikna etmede kullanmaktadır.

Katılımcılardan Ceylan (6) da örnek temelli kanıt şemasını kullanmıştır. Kendisine gösterilen şekillerin çevresi olduğundan nasıl emin olduğunu "Çünkü bir önceki yaptıklarımızda da bu şekiller üzerinde ölçümler yapmıştık. Mesela bu şekilleri iple ya da demirden açıp, o yüzden hepsinde ölçmüştük böyle yamuk şekillerin bir de bunların çevresi olduğunu oradan biliyorum." şeklinde açıklamıştır. Ceylan (6) savunmasında daha önce öğretim seanslarında karşılaştığı şekilleri örnek göstermektedir.

Fırat'a (6) kenar uzunlukları iki katına çıkarılan karenin alan ölçüsünün başlangıca göre nasıl değişeceği sorulunca "Hocam alanı dört kat artar." cevabını vermiştir. Bu sonuca nasıl ulaştığını "Hocam geçen hafta öyle yapmıştık hocam hep doğru çıktı öyle."

şeklinde açıklamıştır. Düşüncesinin doğruluğunu kanıtlaması istenince çizerek gösterebileceğini söylemiştir. Fırat (6) önce kenar uzunlukları 3 ve 5 birim olan dikdörtgen çizmiştir. Araştırmacı soruda kare denildiğini hatırlatınca bu şekli 5 birimlik kareye dönüştürüp alan ölçüsünü 25 bulmuştur. Ardından kenar uzunlukları iki katına çıkarılmış halini çizip alan ölçüsünü 100 birim kare bulmuş ve alan ölçüsünün dört katına çıktığını söylemiştir. Görüldüğü gibi Fırat (6) düşüncesinin doğruluğunu savunurken hem daha önce öğretim seanslarında karşılaştığı hem de yeni oluşturduğu durumları örnek göstermiştir.

Gülce (8) bir dikdörtgenin çevre uzunluğunu bulmak için kenar uzunluklarını toplama yöntemini kullanmıştır. Araştırmacı bazı arkadaşlarının şekillerin içindeki birim kareleri sayarak çözüm yaptığını söyleyince "Yok, o alanı verir, olmaz öyle." demiştir. Bu arkadaşlarını nasıl ikna edeceğini "İlk önce şu kenar uzunluklarını saydırıp hepsini toplatarak yaptırırım. Ondan sonra içindeki birim kareleri sayarak yaptırmaya çalışırım. İkisi aynı olmayacağından, hani kenar uzunlukları çevresini, birim kareler ise alanını vermiş olduğunu açıklayabilirim." şeklinde açıklamıştır. Görüldüğü gibi Gülce (8) kendisi gibi düşünmeyen arkadaşlarını bir örnek üzerinden açıklama yaparak ikna etmeye çalışmıştır. Buna göre örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

4.3.3.3. Analitik kanıt şemaları

Uygulama sonrası yapılan klinik görüşmelerde katılımcılar analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanmışlardır. Bu kanıt şemasını kullanan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Can (7), Gülce (8)) düşüncelerini savunurken kavramların (kişisel) tanımlarını, kavramlar arasındaki ilişkileri, işlem özelliklerini ve işlemler arasındaki ilişkileri dayanak olarak göstermişlerdir. Öğretim seansları sürecinde edindikleri tecrübelerle katılımcıların kavram imajları değişmiş, bununla birlikte kendi bilgilerine olan güvenleri artmıştır. Katılımcıların kavram imajlarını yeni bilgilerle yapılandırıp kendi bilgilerine güvenmeye başlamaları ve düşüncelerinin doğruluğunu savunma konusunda deneyim kazanmaları dönüştürülebilen kanıt şemasını daha çok kullanmalarını sağlamış olabilir.

4.3.3.3.1. Dönüştürülebilen kanıt şeması

Uygulama öncesinde yapılan ilk klinik görüşmelerde katılımcılardan hiçbiri dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanmamıştır. Son klinik görüşmelerde ise (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Can (7) ve Gülce (8)) dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanarak düşüncelerinin doğruluğunu savunmuşlardır. Öğretim seansları süresince edindikleri tecrübelerle katılımcıların kavram imajları değişmiş, kavram imajlarındaki sınırlılıklar ve hatalar büyük oranda ortadan kalkmıştır. Bunun sonucunda katılımcıların kendi bilgilerine olan güvenleri artmıştır. Dolayısıyla düşüncelerinin doğruluğunu savunurken artık dışsal dayanaklar yerine kendi keşfettikleri bilgileri öne sürmeye başlamışlardır. Katılımcıların kavram imajları formal tanıma uygun hale geldikçe ve düşüncelerinin doğruluğunu savunma konusunda deneyim kazandıkça dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanma sıklıkları artmıştır.

Örneğin Neşe (5) daha önce bir dikdörtgenin alanını çevresiyle eşdeğer görmekteydi. Son klinik görüşmede dikdörtgenin alanını ölçerken içindeki birim kareleri ritmik sayarak hesapladıktan sonra yaptıklarının doğruluğunu savunmak için “Yediyle üçü çarparak da bulabilirdim. Bunları sayarak da tek tek de sayabilirdim.” açıklamasını yapmıştır. Alan ölçüsünü hesaplamak için üç yöntemin de kullanılabileceğini belirtmiştir. Bu yöntemleri kendisi gibi düşünmeyen arkadaşlarını ikna etmek için de kullanabileceğini söylemiştir. Bu arkadaşlarını ikna etmek için “Tek tek sayarak gösterebilirim. Sonra, çarparak. Ritmik sayarak gösterebilirim.” açıklamasını yapmıştır. Ayrıca çarpma işleminde kullandığı sayıların satır ve sütundaki birim kare sayılarını gösterdiğini ifade etmiştir. Neşe’nin (5) yaptığı açıklamalardan anlaşılacağı üzere alan ölçüsünü hesaplamak için geliştirdiği algoritmaların birbiriyle ilişkisini düşüncesini savunmak için kullanmaktadır. Buna göre dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Zehra (5) L biçimindeki bir şeklin alan ölçüsünü hesaplarken araştırmacı mümkün olduğunca farklı yoldan çözüm yapmasını istemiştir. Zehra (5) ilk olarak şeklin içindeki birim kareleri tek tek saymış, ardından şekli bir kare ve bir dikdörtgene ayırarak her bir şeklin alan ölçüsünü ritmik sayma yoluyla bulup toplamıştır. Son olarak şekli iki farklı dikdörtgene ayırmış, her bir şeklin alan ölçüsünü ritmik sayma yoluyla bulup toplamıştır. Araştırmacı kendisi gibi düşünmeyen bir arkadaşını ikna etmesini isteyince “Çünkü ilk başta bu şekil çıkınca karşılarına tek tek saymasını isterim. Sonra şöyle bölünce burayı ve burayı toplamasını, sonra böyle bölünce toplamasını isterim.” cevabını vermiştir. Zehra (5) bir örnek üzerinden farklı düşünen arkadaşını ikna etmeye çalıştığı için örnek temelli kanıt şemasını kullandığı söylenebilir. Bunun yanında şeklin alanını ölçmede farklı yöntemler kullanmış ve bu yöntemleri birbiriyle ilişkilendirmiştir. Ayrıca kullandığı yöntemler alan korunumunu da içermektedir. Bu nedenle dönüştürülebilen kanıt şemasını da kullandığı söylenebilir.

Katılımcılardan Can (7) çevreyi ölçerken şeklin sınırları boyunca birim uzunlukları saymıştır. Araştırmacı farklı fikirler için nasıl düşündüğünü ortaya çıkarmak için aşağıdaki konuşmayı yapmıştır.

> Araştırmacı: Bazı arkadaşların şöyle dışarıdaki şu kareleri (sınırı dışarıdan takip eden birim kareleri gösteriyor) sayarak çevreyi bulduklarını söylediler. Sence doğru olabilir mi?
>
> Can: Bence yanlış hocam… çünkü hocam biz çevreyi buluyoruz. Yani dış kısmını bulmuyoruz ki. Yani o yüzden hocam kenar uzunluklarını sayabiliriz. Ama hocam bazı arkadaşlarımızın dediği gibi iç kısımdan sayarsak da bu sefer de alanı bulmuş oluruz.

Yukarıdaki konuşmadan anlaşıldığı üzere Can (7) kendisi gibi düşünmeyen arkadaşlarının hatasını göstermek için çevre ve alan kavramlarının farklılıklarını vurgulamıştır. Matematiksel dili uygun bir şekilde kullanamasa da açıklamasından çevre ve alan kavramlarının şeklin farklı nitelikleri olduğunu vurgulamaya çalıştığı anlaşılmaktadır. Can (7) çevreyi şeklin sınırı, alanı ise iç bölgesi ile ilişkilendirmiş ve bunu savunmasında dile getirmiştir. Buna göre dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Gülce (8) kendisinden çevre uzunluğu on birim olan dikdörtgenleri oluşturması istendiğinde kenar uzunlukları 1×4, 2×3 birim olan dikdörtgenleri çizmiştir. Araştırmacı çevre uzunluğu on birim olan dikdörtgenlerin hepsini çizdiğinden nasıl emin olduğunu sorduğunda Gülce "Çünkü sadece iki sayının on olması gerekiyordu. Mesela beş, beş daha on olabilir ama iki sınırla onu beş yapamam. Biri denedim, ikiyi, üç ve dördü de denedim. Başka da olmuyor." cevabını vermiştir. Burada öğrenci dikdörtgenin karşılıklı kenar uzunluklarının eşitliğini göz önüne alarak toplamları çevre uzunluğunun yarısı olan (bu durumda 5) sayıları bulmaya çalışmıştır. Buna göre çevre kavramının tanımını ve işlemler arası ilişkileri kullanarak savunma yaptığı için dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı söylenebilir.

Katılımcıların kullandıkları kanıt şemaları öğretim seansları sürecinde edindikleri tecrübeler sonucunda değişim göstermiştir. Bu süreçte düşüncelerinin doğruluğunu savunma konusunda deneyim kazanmışlar, keşfettikleri yeni bilgilerle kavram imajlarını yeniden yapılandırmışlardır. Öğretim seansları kapsamında yaşadıkları bu tecrübelerden sonra, katılımcıların kullandığı kanıt şemalarının başlangıçtakilerden farklı olduğu belirlenmiştir. Bu değişimin daha net anlaşılabilmesi için Tablo 4.13.'de ilk ve son durumdaki kanıt şemaları bir arada sunulmuştur.

Tablo 4.13. *Katılımcıların uygulama öncesi ve sonrasında kanıt şemaları*

Sınıf Düzeyi	Katılımcı	Uygulama Öncesi Kanıt Şeması	Uygulama Sonrası Kanıt Şeması
5	Zehra	Örnek temelli, Algısal (Geçerli olmayan)	Algısal, Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
	Neşe	Örnek temelli, Algısal (Geçerli olmayan)	Algısal, Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
6	Ceylan	Alışkanlık Edinilmiş, Örnek Temelli (Geçerli olmayan)	Algısal, Örnek Temelli (Geçerli)
	Fırat	Otoriter, Alışkanlık Edinilmiş (Geçerli olmayan)	Otoriter, Algısal, Örnek Temelli (Geçerli)
7	Mısra	Otoriter, Algısal (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
	Can	Alışkanlık Edinilmiş, Algısal (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
8	Gülce	Alışkanlık Edinilmiş, Örnek Temelli (Kısmen geçerli)	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
	Filiz	Otoriter (Geçerli olmayan)	Algısal, Örnek Temelli (Kısmen geçerli)

Tablo 4.13.'de görüldüğü gibi katılımcıların son klinik görüşmelerde kullandığı kanıt şemaları başlangıçtakinden oldukça farklıdır. İlk klinik görüşmelerde, katılımcıların sundukları gerekçeler kavram imajlarının sınırlılığını yansıtmakta, birçok kavram yanılgısı ve hatalı düşünce içermektedir. Katılımcılar genellikle düşüncelerinin doğruluğunu dışsal bir otoriteye, derslerde yaptıkları benzer çözümlere veya sezgilerine dayandırmışlardır. Bu nedenle yaptıkları savunmalardaki gerekçelerin matematiksel olarak doğru olmadığı söylenebilir. Son klinik görüşmelerde otoriter, algısal ve örnek temelli kanıt şemaları kullanılmaya devam edilse de savunma için sunulan gerekçeler değişmiştir. Bu kanıt şemaları katılımcıların yeni bilgilerle yapılandırılmış kavram imajlarıyla desteklenmiştir. Örneğin katılımcı algısal kanıt şemasını kullanmış olsa da düşüncesinin dayanağı olan zihinsel imgesi kavramın formal tanımına uygun olarak değiştiği için sunduğu gerekçe matematiksel olarak anlamsız değildir. Başka bir katılımcı örnek temelli kanıt şemasını kullanırken yaptığı açıklamada kavramın anlamına değinmiş veya kavramların farklılıklarını vurgulamıştır. Böylece verdiği örnekleri matematiksel olarak doğru bir yapıya dayandırmıştır. Dönüştürülebilen kanıt şeması ise tanımlara ve matematiksel ilişkilere dayandığı için matematiksel olarak doğru kabul edilmektedir.

Tablo 4.13.'de dikkat çeken bir diğer unsur ortaokul düzeyinde formal olarak kanıt öğretimi yapılmadığı halde Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Can (7) ve Gülce (8)'nin dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanıyor olmalarıdır. Öğretim seansları kapsamında katılımcılara doğrudan kanıt eğitimi verilmemiş, yalnızca çözümlerinin doğruluğunu savunmaları ve düşüncelerini açıklamaları beklenmiştir. Çözümlerinin sorgulanması başlangıçta katılımcıları şaşırtsa da uygulama sürecinde bu duruma uyum sağlamışlardır. Araştırmanın bulguları yapılan bu müdahalenin katılımcıların kanıt şemalarının değişmesinde etkili olduğunu göstermiştir. Özellikle 5. sınıf düzeyindeki katılımcıların gösterdiği bu değişim dikkat çekicidir. Bu durum doğru deneyimler sağlandığında ortaokul düzeyindeki öğrencilerle kanıt öğretiminin etkili bir şekilde yapılabileceğini göstermektedir.

Katılımcıların kanıt şemalarındaki değişimde çözümlerinin sorgulanması yanında çevre ve alan kavram imajlarında yaşanan değişim de etkili olmuştur. Uygulama öncesinde çevre ölçümü ve alan ölçümü kavram imajına sahip olan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) arasında deneysel kanıt şemalarından örnek temelli ve algısal kanıt şemaları ön plana çıkmaktadır. Yine uygulama öncesinde etraf ve sınır bölgesi kavram imajlarına sahip katılımcılar (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) arasında ise dışsal kanıt şemalarından alışkanlık edinilmiş (ritüel) kanıt şeması ön plandadır. Öğretim seansları kapsamında edindikleri tecrübeler sonrasında katılımcıların kavram imajlarında ve kanıt şemalarında değişim yaşanmıştır. Uygulama sonrasında sınır ve iç bölge kavram imajlarına sahip olan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Gülce (8)) en fazla deneysel kanıt şemalarından örnek temelli kanıt şemasını kullanmışlardır. Bunun yanında analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasını da kullanmışlardır. Uygulama sonrasında çevre ile ilgili dış sınırlar, alan ile ilgili iç bölge kavram imajına sahip olan katılımcılar (Mısra (7) ve Filiz (8)) ise çoğunlukla örnek temelli kanıt şemasını kullanmışlardır. Örnek temelli kanıt şeması hem uygulama öncesi hem de uygulama sonrasında katılımcılar tarafından tercih edilmiştir. Ancak başlangıçta kavram imajları doğru gerekçelendirmeler sunmalarına engel olurken uygulama sonrasında formal tanıma uygun olarak yapılandırdıkları kavram imajlarını matematiksel olarak anlamlı kanıtlar sunmalarını sağlamıştır. Aynı durum algısal kanıt şeması için de geçerlidir. Kavram imajlarında yaşanan bu olumlu değişim katılımcıların analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasını da kullanmalarını sağlamıştır. Katılımcılar kavram tanımlarını, özelliklerini, kavramlar ve işlemler arasındaki ilişkileri savunmalarında dayanak olarak göstermişlerdir. Tablo 4.14. de katılımcıların uygulama sürecindeki kavram imajları ve kanıt şemaları özetlenmiştir.

Tablo 4.14. *Katılımcıların uygulama sürecindeki kavram imajları ve kanıt şemalarının özeti*

Sınıf Düzeyi	Katılımcı	İlk Kavram İmajı		Son Kavram İmajı		İlk Kanıt Şeması	Son Kanıt Şeması
		Çevre	Alan	Çevre	Alan		
5	Zehra	Çevre Ölçümü	Alan Ölçümü (1a)	Sınır	İç Bölge	Örnek temelli, Algısal (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Algısal, Dönüştürülebilen (Geçerli)
	Neşe	Çevre Ölçümü	Alan Ölçümü (1a)	Sınır	İç Bölge	Örnek temelli, Algısal (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Algısal, Dönüştürülebilen (Geçerli)
6	Ceylan	Etraf	Sınır bölgesi	Sınır	İç Bölge	Alışkanlık Edinilmiş, Örnek Temelli (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Algısal (Geçerli)
	Fırat	Etraf	Sınır bölgesi	Sınır	İç Bölge	Otoriteye Bağlı, Alışkanlık Edinilmiş (Geçerli olmayan)	Otoriteye Bağlı, Örnek Temelli, Algısal (Geçerli)
7	Mısra	Çevre Ölçümü	Alan Ölçümü (1b)	Dış sınırlar	İç Bölge	Otoriteye Bağlı, Algısal (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
	Can	Etraf	Sınır bölgesi	Sınır	İç Bölge	Alışkanlık Edinilmiş, Algısal (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
8	Gülce	Çevre Ölçümü	Alan Ölçümü (1b)	Sınır	İç Bölge	Alışkanlık Edinilmiş, Örnek Temelli (Kısmen geçerli)	Örnek Temelli, Dönüştürülebilen (Geçerli)
	Filiz	Etraf	Sınır bölgesi	Dış sınırlar	İç Bölge	Otoriteye Bağlı (Geçerli olmayan)	Örnek Temelli, Algısal (Kısmen geçerli)

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu bölümde araştırmadan elde edilen sonuçlar açıklanmıştır. Öncelikle katılımcıların çevre ve alan kavramları ile ilgili uygulama öncesindeki kavram imajları ve kanıt şemalarına ilişkin sonuçlar ele alınmıştır. Ardından öğretim seansları sırasında katılımcıların kavram imajları ve kanıt şemalarındaki değişimlere ilişkin sonuçlar sunulmuştur. Son olarak katılımcıların çevre ve alan kavramları ile ilgili uygulama sonrasındaki kavram imajları ve kanıt şemalarına ilişkin sonuçlar ele alınmıştır.

5.1.1. Uygulama öncesine ilişkin sonuçlar

Katılımcılarla yapılan ilk klinik görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesiyle uygulama öncesinde katılımcıların çevre ile ilgili temelde iki kavram imajına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Bunlar etraf ve çevre ölçümü kavram imajlarıdır. Etraf kavram imajına sahip katılımcıların çevre kelimesinin günlük hayattaki kullanımını esas alarak bir şeklin etrafındaki yakın bölge veya dış bölgesi olarak algıladıkları belirlenmiştir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların ise işlemsel düşüncenin ağır bastığı eylem odaklı bir yaklaşım sergileyerek çevreyi hesaplanması gereken sayısal bir değer olarak ele aldıkları belirlenmiştir.

Etraf kavram imajına sahip katılımcıların (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) çevreyi günlük hayattaki anlamıyla algıladıkları, dolayısıyla uzunlukla ilgili bir kavram olan çevreyi hatalı olarak bir şeklin dış bölgesi ile (alan) ilişkilendirdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcıların herhangi bir ölçme veya hesaplama yapmadan sadece çevreyi işaret edip açıkladıkları; ancak çevreyi hatalı olarak günlük hayattaki anlamıyla şeklin dışındaki yakın bölge olarak düşündükleri belirlenmiştir. Bu imaja sahip katılımcıların bir şeklin çevresinin ne anlama geldiğini göstermek için çizdikleri şeklin kenarlarının dışını işaret ettikleri belirlenmiştir. Bunun için şeklin etrafını çevreleyecek şekilde kapalı eğriler çizdikleri görülmüştür. Bu nedenlere dayanarak etraf kavram imajının formal tanımdan oldukça uzak ve hatalı ilişkilendirmeler (çevre ile dış bölgeyi) içerdiği olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Etraf kavram imajına sahip katılımcıların düşüncelerini açıklarken çokgenler veya onlara çokgeni anımsatan şekiller çizdikleri belirlenmiştir. Katılımcıların bir şeklin çevresi olup olmadığına karar verirken şeklin doğru parçası (kenar) içerip içermediğine odaklandıkları görülmüştür. Katılımcıların sahip olduğu etraf kavram imajı şeklin kapalı olması gerekliliğini içerse de formal tanımın işaret ettiği tüm kapalı şekilleri içermemektedir. Örneğin Ceylan'ın (6) kavram imajı çokgenlerle sınırlıdır, hiçbir kapalı eğriyi içermemektedir. Katılımcıya göre kenar ve köşesi olmayan şekillerin çevresi de yoktur. Bu nedenle etraf kavram imajının prototip çokgenlerle (özellikle kare, dikdörtgen ve üçgen) sınırlı olduğu söylenebilir.

Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)), kavramın anlamından ziyade uyguladıkları eylemlere odaklandıkları belirlenmiştir. Katılımcıların çevre kavramını hesaplanması gereken bir değer olarak algıladıkları, hesaplama eyleminin arkasındaki kavramsal yapıyı henüz tam anlamıyla oluşturamadıkları görülmüştür. Bu kavram imajına sahip katılımcıların bir şeklin çevresini açıklamak için çokgenler (genellikle üçgen, dikdörtgen ve kare) çizdikleri, bu çokgenlerin kenarlarına rastgele uzunluk değerleri atayarak topladıkları görülmüştür. Özellikle üst sınıflardaki katılımcıların (Mısra (7) ve Gülce (8)) ise dikdörtgen, kare veya düzgün bir çokgen için ezberledikleri formül ve algoritmaları kullandıkları tespit edilmiştir. Bunlara uygun olarak sözlü açıklamalarında da işlemsel düşünce baskındır.

Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların düşüncelerini açıklarken çizdikleri şekillerin genellikle matematik derslerinden aşina oldukları dikdörtgen, kare veya üçgen olduğu görülmüştür. Yaptıkları çizim ve açıklamalara uygun olarak bir şeklin çevresi olması için kapalı olması yanında en az bir doğru parçası içermesi gerektiğini düşündükleri belirlenmiştir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi şeklin kenar uzunlukları ile ilişkilendirseler de hesaplama eylemini ve işlemsel düşünceyi ön plana çıkarmaktadırlar. Bu düşüncelerine uygun olarak katılımcılar çevresini hesaplamayı bilmedikleri kapalı eğriler gibi şekillerin çevresi olmadığını iddia etmektedirler. Tüm bu nedenlerle çevre ölçümü kavram imajının, çevreyi kenar uzunlukları ile ilişkilendirmiş olsa da formal tanımın işaret ettiği tüm kapalı şekilleri içermediği için eksik ve sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Katılımcıların ilk klinik görüşmelerde belirli bir çevre uzunluğuna sahip tüm dikdörtgenleri oluşturamadıkları belirlenmiştir. Katılımcıların ya çevre yerine alanı hesapladıkları için hiçbir dikdörtgeni doğru şekilde oluşturamadıkları ya da bir tek dikdörtgen oluşturmanın yeterli olduğunu düşündükleri görülmüştür. Çok azının çizdiği ikinci dikdörtgen ise çoğunlukla ilk çizdiklerinin 90^0 döndürülmüş hali olmuştur.

Katılımcıların, kavram imajları veya sınıf düzeyleri fark etmeksizin, çevre ve alanı birbiri yerine kullandıkları, bu kavramları birbirine karıştırdıkları belirlenmiştir. Etraf kavram imajına sahip katılımcıların (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) bu iki kavramın aynı anlama geldiğini düşündükleri tespit edilmiştir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5) ve Mısra (7)) ise hesaplamayı bilmedikleri durumlarda veya problemin sunulduğu bağlama göre çevre yerine alanı (veya tam tersi) kullanma eğiliminde oldukları görülmüştür.

Katılımcılardan Neşe (5) ve Gülce (8)'nin bir şekli oluşturan parçaların çevreleri toplamının şeklin çevresine eşit olacağını düşündükleri belirlenmiştir. Katılımcıların alan korunumunu aşırı genelleyerek çevre için de benzer bir sonucun oluşacağını düşündükleri söylenebilir.

Uygulama öncesinde katılımcıların alan ile ilgili temelde iki kavram imajına sahip olduğu görülmüştür. Bunlar sınır bölgesi ve alan ölçümü kavram imajlarıdır. Sınır bölgesi kavram imajına sahip olan katılımcıların işlemler yerine kavramın anlamına odaklansalar da kavrama atfettikleri anlamın formal tanıma uygun olmadığı, çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullandıkları görülmüştür. Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların ise işlemsel bir yaklaşım sergileyerek alanın nasıl hesaplanacağına vurgu yaptıkları belirlenmiştir.

Alan kavramıyla ilgili sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) herhangi bir ölçme veya hesaplama yapmadan sadece alanı işaret edip açıklamışlardır. Ancak katılımcıların bir şeklin alanını göstermek için hatalı olarak şeklin sınırlarının dışını işaret ettikleri görülmüştür. Katılımcıların çevre ve alan kavramlarını birbirine eş gördükleri, bu düşüncelerine uygun olarak alanı hesaplarken çevreyi hesaplamak için kullandıkları algoritmaları uyguladıkları belirlenmiştir. Ayrıca katılımcıların alan ile ilgili kavram imajlarının aşina oldukları çokgenler ve onlara çokgenleri anımsatan şekillerle sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Buna göre katılımcıların sahip oldukları sınır bölgesi kavram imajının formal tanımdan oldukça uzak olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) alanı açıklarken ölçme, hesaplama ve bir sonuç bulmaya odaklandıkları görülmüştür. Katılımcıların muhakeme anlayışları eylem odaklıdır. Buna göre alanı açıklamak için genellikle bir dikdörtgen çizdikleri, şeklin kenar uzunluklarına sayısal değerler atayarak alanı hesaplamaya çalıştıkları görülmüştür. Bu amaçla daha önce ezberledikleri algoritma ve formülleri uygulamışlardır. Bu algoritmaların bir kısmı alan hesaplama için doğruyken bir kısmı alan için yanlış olup aslında çevre hesaplama için kullanılanlardır. Bu nedenle bu kavram imajı 1a) hatalı alan ölçümü ve 1b) kısmen doğru alan ölçümü olmak üzere iki alt başlıkta ele alınmıştır.

Hatalı alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların (Zehra (5) ve Neşe (5)) matematiksel olarak anlamsız algoritma ve formülleri uyguladıkları, çevreyi hesaplamak için geçerli algoritmaları alanı hesaplamak için kullandıkları belirlenmiştir. Katılımcıların, alanı şeklin iç bölgesi ile ilişkilendirmiş olsalar da kavram imajlarında ölçme ve hesaplamanın daha baskın olduğu görülmüştür. Buna uygun olarak sözlü açıklamalarında, yaptıkları hesaplamaları işaret ederek, alan ve çevrenin aynı anlama geldiğini ve birbiri yerine kullanılabileceğini ifade ettikleri belirlenmiştir. Kavram imajlarının birbiriyle çelişen iki yapı içerdiği, ancak katılımcıların bu çelişkiyi ortadan kaldırmak yerine alan hesaplama için gerekli algoritmayı bilmedikleri durumda çevre hesaplama yolunu tercih ettikleri görülmüştür. Katılımcıların çizim ve açıklamaları incelendiğinde kavram imajlarının aşina oldukları çokgenler ve kısmen daire ile sınırlı olduğu görülmüştür. Bu kavram imajının formal tanımın işaret ettiği tüm şekilleri içermediği için sınırlı olduğu ve çevre hesaplamada kullanılan formüllerin hatalı uygulamalarını içerdiği söylenebilir. Tüm bunlar dikkate alındığında bu kavram imajının formal tanımdan oldukça uzak olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Kısmen doğru alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların (Mısra (7) ve Gülce (8)) kavram imajlarının sadece alan formüllerini bildikleri temel geometrik şekillerle sınırlı olduğu belirlenmiştir. Ayrıca bu formülleri uygun olmayan durumlara genelledikleri görülmüştür. Bu kavram imajına sahip katılımcıların alanı şeklin iç bölgesi ile ilişkilendirmiş olsalar da kavram imajlarında ölçme ve hesaplamanın daha baskın olduğu tespit edilmiştir. Bu kavram imajının, formal tanımın işaret ettiği tüm şekilleri içermediği için sınırlı ve formüller uygun olmayan durumlara genellendiği için hatalı uygulamalar içeren bir kavram imajı olduğu söylenebilir.

Beşinci sınıf düzeyindeki iki katılımcının (Zehra (5) ve Neşe (5)) hatalı alan ölçümü kavram imajına sahip olduğu, yedinci (Mısra (7)) ve sekizinci (Gülce (8)) sınıf düzeyindeki katılımcıların ise kısmen doğru alan ölçümü kavram imajına sahip olduğu belirlenmiştir. Katılımcıların altı ve yedinci sınıf düzeyinde çokgenler ve dairenin alanına yönelik öğretim almaları nedeniyle kavram imajlarının sınıf düzeyleri arasında farklılık gösterdiği düşünülmektedir. Uygulamanın yapıldığı tarihlerde katılımcılar matematik derslerinde çevre ve alan ile ilgili öğretim görmemiş olsalar da daha önceki tecrübeleri bu farklılığa sebep olmuş olabilir.

Katılımcılardan Filiz (8) çevre uzunluğunu ölçmeyle ilgili uygulamalar sırasında cetvelle ölçme yapmakta zorlanmıştır. Filiz (8) şekillerin kenar uzunluklarını belirleme, farklı uzunluk birimlerini dönüştürmede sorun yaşamıştır. Bu durum katılımcının uzunluk kavram imajının eksik ve sınırlı olmasının çevre kavram imajını da etkilediğini göstermiştir. Ayrıca Neşe (5) ve Filiz (8) kapalı eğrilerin alanlarını ölçerken alan birimlerini kesirli olarak ifade etmekte zorlanmışlardır. Kesir kavram imajlarındaki eksiklik katılımcıların alan kavram imajlarını da etkilemiştir. Görüldüğü gibi birbiriyle ilişkili olan kavramlara ait kavram imajlarından birinin eksik ve sınırlı olması diğerlerini de etkilemektedir.

Katılımcıların sınıf düzeyi ve kavram imajları fark etmeksizin kenar uzunluğu ile alan arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşündükleri görülmüştür. Bunun nedenlerinden birinin, katılımcıların alan ve çevreyi birbirine eşdeğer gördükleri için alan kavramını iki yerine tek boyutlu olarak ele almaları olduğu düşünülmektedir. Katılımcılardan sadece Gülce (8) örnek bir durum oluşturarak kenar uzunluğu ve alan arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığını açıklayabilmiştir.

Katılımcıların çevreye yönelik kavram imajları ile alana yönelik kavram imajları paralellik gösterdiği belirlenmiştir. Çevreye yönelik çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların alana yönelik olarak da alan ölçümü kavram imajına sahip oldukları görülmüştür. Yine çevre için etraf kavram imajına sahip katılımcıların alan için sınır bölgesi kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Buna göre katılımcıların çevre ve alan kavram imajları arasında bir bağlantı olduğu düşünülmektedir.

Katılımcıların hesaplama yapamayacaklarını düşündükleri şekillerin çevresi ve alanı olmadığını ifade ettikleri görülmüştür. Bir şeklin çevre veya alanını hesaplayabilmeleri için de şeklin kenarları (en az bir tane) olması gerektiğini düşünmektedirler. Bu durumun sınıflarda ve ders kitaplarında çevre ve alan ile ilgili verilen örneklerin çoğunlukla çokgenlerden ibaret olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Etraf kavram imajına sahip katılımcıların zihinlerinde çevreyi şeklin dış bölgesi ile ilişkilendirdikleri belirlenmiştir. Bu durum çevre kavramının günlük hayatta yakın bölge anlamındaki kullanımından kaynaklandığı düşünülebilir. Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların ise ölçme ve hesaplama eylemlerinin gerisinde alanı şeklin iç bölgesi ile ilişkilendirdikleri belirlenmiştir.

Katılımcıların bir şeklin çevre veya alanını ifade ederken ya hiç birim kullanmadıkları ya da hatalı birim kullandıkları görülmüştür. Genellikle sayısal bir değerin çevre veya alanı ifade etmek için yeterli olduğunu düşünmektedirler. Bir şeklin çevre veya alanı için herhangi bir birim belirtmeye ihtiyaç duymamışlardır.

Farklı sınıf düzeylerinde olsalar da çevre ve alan ile ilgili aynı kavram imajına sahip katılımcılar olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların sahip oldukları kavram imajlarının birçok ortak sınırlılık ve hatalı anlayış içerdiği görülmüştür. Buna göre katılımcıların kavram imajlarının sınıf düzeyinden ziyade o kavramla ilgili tecrübelerinden, bilgi düzeylerinden ve anlayışlarından etkilendiği söylenebilir.

Uygulama öncesinde katılımcıların yaptıkları çözümlerin doğruluğunu kanıtlamak için dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları belirlenmiştir. Katılımcılardan hiçbirinin analitik kanıt şemalarını kullanmadığı görülmüştür. Katılımcılar tarafından dışsal kanıt şemalarından otoriter (Fırat (6), Mısra (7) ve Filiz (8)) ve alışkanlık edinilmiş/ ritüel (Fırat (6), Ceylan (6), Can (7) ve Gülce (8)) kanıt şemaları kullanılmıştır. Deneysel kanıt şemalarından ise algısal (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Can (7)) ve örnek temelli/tümevarımsal (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Gülce (8)) kanıt şemaları kullanılmıştır.

Otoriter kanıt şemasına sahip katılımcıların (Fırat (6), Mısra (7) ve Filiz (8)) yaptıkları çözümleri doğrulama konusunda oldukça isteksiz davrandıkları görülmüştür. Bu katılımcıların kendi bilgilerine güvenmedikleri, daha bilgili olduğunu düşündükleri bir yakınlarını veya öğretmenlerini çözümlerinin doğrulayıcısı olarak gösterdikleri belirlenmiştir. Bu kanıt şemasını kullanan katılımcıların başkalarından edindikleri bilgileri özümsemeden, ezberleyerek uygulamaya çalıştıkları düşünülmektedir.

Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasına sahip katılımcıların (Fırat (6), Ceylan (6), Can (7) ve Gülce (8)) yaptıkları çözümlerin doğruluğunu çevre veya alanı hesaplamada kullandıkları formül ve algoritmalara dayandırdıkları görülmüştür. Bu katılımcıların her zaman kullandıkları, aşina oldukları bu yöntemlerin, matematiksel olarak yanlış da olsalar, doğru olduğunu düşündükleri belirlenmiştir.

Algısal kanıt şemasını kullanan katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Can (7)) çözümlerinin doğruluğunu savunurken kendi oluşturdukları veya hazırda olan bir çizimi dayanak olarak gösterdikleri belirlenmiştir. Bu kanıt şemasını kullanan katılımcıların, zihinlerindeki prototip çokgen algısına göre bir şeklin çevresi veya alanı olduğuna karar verdikleri ve bu düşüncelerini savundukları görülmüştür. Buna göre katılımcıların bir kavramla ilgili sahip oldukları kavram imajları ve bu imajların içerdiği bilgiler onların kanıt şemalarını da etkilemektedir.

Örnek temelli kanıt şemasını kullanan katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Gülce (8)) çözümlerinin doğruluğunu savunurken bir veya daha fazla örnek kullandıkları belirlenmiştir. Bu kanıt şemasını kullanan katılımcıların düşüncelerini doğrulayan birkaç örnek sunmanın yaptıkları çözümün doğruluğunu kanıtladığını düşündükleri görülmüştür. Örneğin Gülce (8) çözümünün doğru olduğunu kanıtlamak için birden fazla örnek vermiştir. Bu örneklerin her biri doğru olduğu için savunduğu düşüncenin de doğru olacağını öne sürmüştür. Katılımcılar verdikleri birkaç örnek üzerinden bir genellemeye varmaya çalışmışlardır. Katılımcıların düşüncelerinin doğruluğunu savunurken verdikleri bu örnekler onların kavram imajlarının bir parçasıdır.

5.1.2. Öğretim seanslarına ilişkin sonuçlar

Katılımcılarla yürütülen öğretim seanslarından elde edilen verilerin incelenmesiyle aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Etraf kavram imajına sahip katılımcılardan çevresi olduğunu bildikleri şekillerle çevresi olmadığını iddia ettikleri kapalı şekilleri karşılaştırmaları istenmiştir. Bu sayede şekillerin benzer özelliklerine vurgu yapılarak daha önce çevresi olmadığını düşündükleri şekillerin de çevresi olduğunu keşfetmeleri sağlanmıştır. Katılımcıların kavram imajlarının sadece prototip çokgenler yerine tüm kapalı şekilleri içerecek şekilde değiştiği belirlenmiştir. Katılımcıların eğrilerin uzunluklarının ölçülemeyeceği, dolayısıyla çevreye dahil edilemeyeceğine dair algılarını değiştirmek için onlara iple çevreleyerek ölçme yöntemi önerilmiştir. Bu şekilde eğrilerin uzunluklarını ölçebilen katılımcıların çevre kavram imajlarına kapalı eğrileri de dahil ettikleri belirlenmiştir.

Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar araştırmacı tarafından hesaplama yapmak yerine şeklin sınırlarına odaklanmalarını sağlayan çevreleme eylemine yönlendirilmiştir. Katılımcıların alışkın oldukları çokgenlerden alışkın olmadıkları düzensiz eğrilere doğru ilerleyen bir süreç sonunda çevreyi hesaplanması gereken bir değer olarak görmek yerine bir şeklin sınırları olarak algılamaya başladıkları görülmüştür. Uygulanan öğretim seansları sonunda çevre ile ilgili kavram imajlarının artık tüm kapalı şekilleri içerdiği belirlenmiştir. Bir şeklin çevresi olup olmadığını belirlerken hesaplanabilir olması yerine şeklin kapalı olmasına dikkat etmeye başladıkları görülmüştür. İşlemsel bir anlayışla ele aldıkları çevre kavramını artık basit bir hesaplamadan ziyade tüm kapalı şekillere ait bir nitelik olarak algıladıkları sonucuna varılmıştır.

Kapalı eğrilerin çevresinin olmadığını düşünen katılımcıların düşüncelerini değiştirmek için iple çevreleyerek ölçme dışında telden yapılmış şekiller de kullanılmıştır. Katılımcılar bu şekilleri cetvelle uzunluklarını ölçebilecekleri düz bir hale getirip ölçmüşlerdir. Şeklin ilk ve son halinin uzunluğunun değişmeyeceğini ifade etmişlerdir. Bu sayede düzensiz kapalı eğrilerin çevrelerinin olmadığı düşüncesinden vazgeçtikleri belirlenmiştir.

Araştırmanın başında birim karelerden oluşan veya kareli zemine çizilen şekiller katılımcılara alan kavramını çağrıştırmıştır. Katılımcılar, bu tür çizimleri gördüklerinde kendilerinden açıkça çevreyi bulmaları istense de birim kareleri saymaya yönelmişlerdir. Ancak, öğretim seansları süresince araştırmacının çevre kelimesine vurgu yapması, çevrenin ne anlama geldiğini tekrar tekrar sorması ve farklı birçok şeklin çevresini göstermelerini istemesi üzerine birim kareler yerine şeklin sınırları boyunca birim uzunlukları saymaya başladıkları belirlenmiştir.

Uygulama öncesinde katılımcılar aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturamamışlardır. Bu algıyı değiştirmek için araştırmacı öğretim seansları kapsamında eşit uzunluktaki ip veya tel parçalarından farklı şekiller oluşturmuş ve katılımcılardan bunların çevre uzunluklarını karşılaştırmalarını istemiştir. Tüm katılımcılar ip veya tel parçalarının başlangıçtaki uzunluklarının değişmediğini, dolayısıyla şekillerin çevrelerinin eşit olduğunu belirtmişlerdir. Bunun yanında katılımcılar birim uzunluğa sahip çubuklarla aynı çevre uzunluğuna sahip birçok farklı şekil oluşturmuşlardır. Bu öğretim seansı sonrasında katılımcıların aynı çevreye sahip birbirinden farklı birçok şekil olabileceğini kabul ettikleri ve değerlendirme aşamasında kendilerinin de böyle şekiller oluşturabildikleri görülmüştür. Ayrıca oluşturdukları şekiller incelendiğinde önceden olduğu gibi sadece prototip çokgenler değil, daha karmaşık şekiller oldukları belirlenmiştir.

Uygulama öncesinde ve öğretim seansları sırasında bir şeklin çevresinin onu oluşturan parçaların çevreleri toplamına eşit olduğunu düşünen katılımcılar bulunmaktaydı. Bu katılımcılar, şeklin bütünü yerine onu oluşturan parçalara odaklandıkları için, şeklin çevresini gösterirken iç bölgesinde kalan ve aslında çevreye dahil olmayan uzunlukların da üzerinden geçerek onları çevreye dahil etmişlerdir. Katılımcıların bu algısını değiştirmek amacıyla araştırmacı onları şekli tek bir bütün olarak düşünmeye yönlendirmiştir. Ardından bu bütünün sınırlarını göstermelerini istemiş, böylece çevre ile sınır arasındaki ilişkiyi hatırlatmıştır. Katılımcıların şekli bir bütün olarak ele aldıklarında iç bölgede kalan uzunlukları çevreye dahil etmedikleri belirlenmiştir.

Katılımcıların neredeyse tamamı (Gülce (8) hariç) bir şekil parçalanıp yeniden düzenlendiğinde çevresinin değişmeyeceğini, çünkü her iki durumda da aynı parçaların kullanıldığını söylemiştir. Bunun nedenlerinden birinin alan korunumunu aşırı genellemeleri olabileceği düşünülmüştür. Katılımcıların bu düşüncesini değiştirmek amacıyla araştırmacı aynı parçaları kullanarak farklı şekiller oluşturmuş ve katılımcılardan çevreleri ölçüp karşılaştırmalarını istemiştir. Katılımcıların somut materyaller üzerinde yaptıkları ölçüm sonucunda düşüncelerinin hatalı olduğunu deneyimleyip fikirlerini değiştirdikleri belirlenmiştir. Düşüncelerinin aksine bir örnekle karşılaştıklarında ilk anda şaşırsalar da çevrelerin neden farklı olduğunu matematiksel olarak açıklayabildikleri görülmüştür.

Katılımcıların kenar uzunlukları arasında belirli bir oran olan iki şeklin çevreleri arasında da aynı oranın bulunduğunu doğru bir şekilde ifade ettikleri belirlenmiştir.

Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar uygulama öncesinde alan ile çevreyi birbirine karıştırmakta ve bu iki kavramı aynı şekilde göstermekteydiler. Her iki kavramın da şeklin sınırları ile ilgili olduğunu düşünmekteydiler. Çevreyle ilgili yapılan öğretim seansları sonunda bu algının büyük oranda değiştiği belirlenmiştir. Katılımcıların çevre ve alanın farklı kavramlar olduğunun bilincinde oldukları görülmüştür. Çevreyi şeklin sınırları, alanı ise sınırların içinde kalan bölge ile ilişkilendirdikleri belirlenmiştir. Ayrıca açık şekillerin alanı olmadığını, çünkü belirli bir sınırları olmadığını ifade etmişlerdir.

Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar, kavram imajlarındaki sınırlılıkları ortadan kaldırmak ve kavram imajlarını formal tanıma yaklaştırmak için, araştırmacı tarafından şekillerin yer kaplama özelliğine dikkat etmeye yönlendirilmiştir. Böylece alanını hesaplamak için bir formül veya algoritma bilmedikleri şekillerin de alanı olduğunu kabul ettikleri görülmüştür. Kavram imajları sadece hesaplamayı bildikleri çokgenlerle sınırlı olan bu katılımcıların öğretim seansları sonrasında kavram imajlarına tüm kapalı şekilleri dahil ettikleri belirlenmiştir.

Açık şekillerin de alanı olduğunu düşünen katılımcının (Can (7)) düşüncesini değiştirmek için araştırmacı ona şeklin bir yüzeyi sınırlayıp sınırlamadığını sormuştur. Katılımcının yaptığı açıklamalar şekil açık olsa da zihninde ona bir sınır belirlediğini göstermiştir. Araştırmacı onun belirlediği bu hayali sınırın aslında olmadığını keşfetmesi için şeklin açık kısmına dikkat çekmiş, şekli sınırlayan bir hat olup olmadığını sormuştur. Bunun ardından katılımcı böyle bir sınırın ve şeklin alanının olmadığını söylemiştir. Katılımcının zihninde oluşturduğu sınıra göre verdiği cevabı araştırmacının yönelttiği derinlemesine soruların ardından değiştirdiği görülmüştür.

Katılımcıların tamamının birim karelerle şekilleri kaplayıp şeklin içerdiği birim kareleri sayarak alanı kolaylıkla hesaplayabildikleri görülmüştür. Birim kareler yerine üçgen veya daire birimleri kullanmanın tüm yüzeyi kaplamayacağı, boşluklar bırakacağı için uygun olmayacağını belirtmişlerdir. Bir şeklin alanını ölçmek için yüzeyini eş birimlerle çakışma veya boşluk olmadan tamamen kaplayıp, birim kare sayısını alan ölçümü olarak ifade etmişlerdir.

Katılımcıların dikdörtgenin alanı için satır-sütun yapısını kolaylıkla fark ettikleri belirlenmiştir. Satır veya sütunları ritmik sayarak alanı hesaplayabileceklerini keşfetmeleri zor olmamıştır. Sadece Filiz (8) ritmik saymadan sonra çarpma işlemine geçişte sorun yaşamıştır. Çarpma yoluyla da aynı sonuca ulaşabileceğini deneyimlese de bu yöntem yerine ritmik saymayı kullanmayı tercih etmiştir. Diğer katılımcıların ise önce dikdörtgeni kapladıkları birim dizisini satır veya sütunlar halinde ritmik sayarak, sonra birer satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarparak alanı ölçtükleri görülmüştür.

Katılımcıların tamamı başlangıçta hesaplanamayacağını düşündükleri için kapalı eğrilerin alanı olmadığını belirtmişlerdir. Bu düşünceyi değiştirmek için araştırmacı birim karelere ayırdığı şeffaf bir yüzeyi kullanarak kapalı eğrilerin alanlarını ölçebilmelerini sağlamıştır. Kapalı eğrilerin alanını hesaplamak için katılımcılar birim kareli yüzeyi şekil üzerine yerleştirip şeklin sınırları içinde kalan birim kareleri saymışlardır. Alanı bu şekilde ölçebildiklerini görünce katılımcıların başlangıçtaki düşüncelerini değiştirdikleri görülmüştür.

Başlangıçta kesirli birimleri nasıl hesaplayacakları konusunda zorluk yaşasalar da tüm katılımcıların bunun üstesinden geldiği görülmüştür. Bir kısmı kesirli birimlerin sayısının yarısını tam birimlerin sayısına ekleme yöntemini tercih etmiştir. Diğerleri ise her bir kesirli birimi tam bir birim yapacak eşleşmeler belirleyerek hareket etmiştir. Katılımcıların alan birimlerinin parçalanıp birleştirilmesi konusunda sorun yaşamazlarken bu parçaları sayısal olarak ifade etmede sorun yaşadıkları görülmüştür. Bunun sebeplerinden birinin katılımcıların kesir kavram imajlarındaki sınırlılıklar olduğu düşünülmektedir.

Katılımcılar alanları karşılaştırırken şekillerin görünümlerine odaklanarak tahminde bulunmuştur. Yaptıkları ölçümlerle tahminlerini kontrol ederek her seferinde biraz daha iyi tahminler yapmaya başlamışlardır.

Katılımcıların alan korunumu konusunda sorun yaşamadığı belirlenmiştir. Aynı parçalar kullanılarak farklı bir şekil oluşturulsa da alanın değişmeyeceğini ifade etmişlerdir. Alan korunumuyla ilgili düşüncelerinin doğruluğunu savunmak için şekil yer değiştirdiğinde (ötelendiğinde) alanının değişmeyeceğini ifade etmişler, başlangıçtaki şekil ile parçaları üst üste çakıştırmışlar veya her iki şeklin alanlarını birim kareler yardımıyla hesaplamışlardır. Başlangıçta alanın değişeceğini tahmin eden katılımcıların ise birim kareler yardımıyla ölçüm yaptıktan sonra fikirlerini değiştirdikleri görülmüştür.

Katılımcılar başlangıçta alanları aynı olan şekillerin çevrelerinin de her zaman aynı olacağını tahmin etmişlerdir. Öğretim seansları kapsamında araştırmacıyla birlikte somut nesnelerle yaptıkları uygulamalar sonucunda bunun her zaman doğru olmadığını deneyimlemişlerdir. Katılımcıların aynı alana sahip olacak şekilde oluşturdukları şekillerin çevrelerinin bazen farklı bazen aynı değerleri aldığını tecrübe etmelerinin fikirlerini değiştirmelerine neden olduğu görülmüştür. Aynı çevreye sahip şekiller oluşturup alanlarını karşılaştırmayı içeren uygulamalar sonucunda da benzer sonuçlara ulaştıkları belirlenmiştir.

Katılımcıların neredeyse tamamı (Gülce (8) hariç) ilk klinik görüşmelerde kenar uzunlukları ve alan arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Araştırmacı öğrencilerin bu düşüncelerini değiştirmek amacıyla onlardan birçok şeklin kenar uzunluklarını belirli bir katına çıkararak bu durumda alanın nasıl değişeceğini tahmin etmelerini ve hesaplamalarını istemiştir. Birçok örnek durum sonunda katılımcıların çoğunun kenar uzunlukları ile alan arasındaki karesel ilişkiyi keşfettiği belirlenmiştir. Katılımcıların uygun matematik dilini kullanamasalar da aradaki ilişkiyi anlayıp uygulayabildikleri görülmüştür.

Alan kavramı ile ilgili öğretim seansları sonunda katılımcılar alanı bir şeklin sınırları içinde kalan bölge ve onun ölçümü şeklinde ifade etmişlerdir. Uygulamadan önce sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar böyle bir ilişkilendirmeyi yapamamışlar, çevre ile alanın aynı anlama geldiğini ifade etmişlerdir. Ancak çevre ve alanla ilgili öğretim seansları sonrasında bu hatalarının üstesinden gelmiş ve kavram imajlarını formal tanıma uygun olarak yapılandırmışlardır. Daha önce alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar ise bu ilişkiyi kısmen kurmuş olsalar da kavram imajlarında ölçme ve hesaplama daha ön planda olmuştur. Öğretim seansları sonrasında ise kavram imajlarında alan kavramının anlamı daha öncelikli hale gelmiştir.

Katılımcıların, hangi sınıf düzeyinde olursa olsun, somut materyaller kullanıldığında kavramları ve kavramlar arasındaki ilişkileri daha kolay keşfettikleri görülmüştür. Bu nedenle öğretim seansları boyunca araştırmacı katılımcıların kavram imajlarını formal tanıma yaklaştırmak ve kavram imajlarının içerdiği sınırlılıkları gidermek amacıyla somut materyallerden yararlanmıştır.

Araştırmacı sorduğu sorularla öğretim seansları boyunca katılımcıları uyguladıkları yöntemleri ve buldukları sonuçları sorgulamaya yönlendirmiştir. Her problem durumu için çözümlerinin doğruluğundan nasıl emin olduklarını sorarak onları çözüm yöntemlerini açıklayıp savunmaya zorlamıştır. Öğretim seansları kapsamında dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarının kullanıldığı belirlenmiştir. Katılımcıların başlangıçta en sık başvurduğu deneysel kanıt şemalarından biri olan algısal kanıt şeması olmuştur. Bu durum araştırmacının katılımcılardan şekiller üzerinde çevre ve alanı göstermelerini istemesinden kaynaklanmış olabilir. Katılımcılara yöneltilen soruların onları algısal kanıt şemasını tercih etmeye yönelttiği söylenebilir.

Öğretim seansları kapsamında tüm katılımcıların örnek temelli kanıt şemasını kullandığı belirlenmiştir. Öğretim seansları kapsamında araştırmacının katılımcılara farklı örnekler göstererek, katılımcıların önceki hatalı düşüncelerini değiştirmeye çalışması onları örnek temelli kanıt şemasını kullanmaya yöneltmiş olabilir.

Katılımcılar öğrendikleri yeni bilgilerle kavram imajlarını değiştirip geliştirdikçe kendi bilgilerine olan güvenleri artmıştır. Bunun sonucunda otoriter kanıt şemasını kullanmaktan büyük oranda (Neşe (5) ve Fırat (6) hariç) vazgeçmişlerdir. Bunun yerine yeni oluşturdukları kişisel kavram tanımlarını, işlemler arasındaki ilişkileri, keşfettikleri özellikleri kullanmaya başlamışlardır. Bu işaretler dönüştürülebilen kanıt şemasına geçiş yaptıklarının göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretim seansları kapsamında tüm katılımcıların dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığı belirlenmiştir.

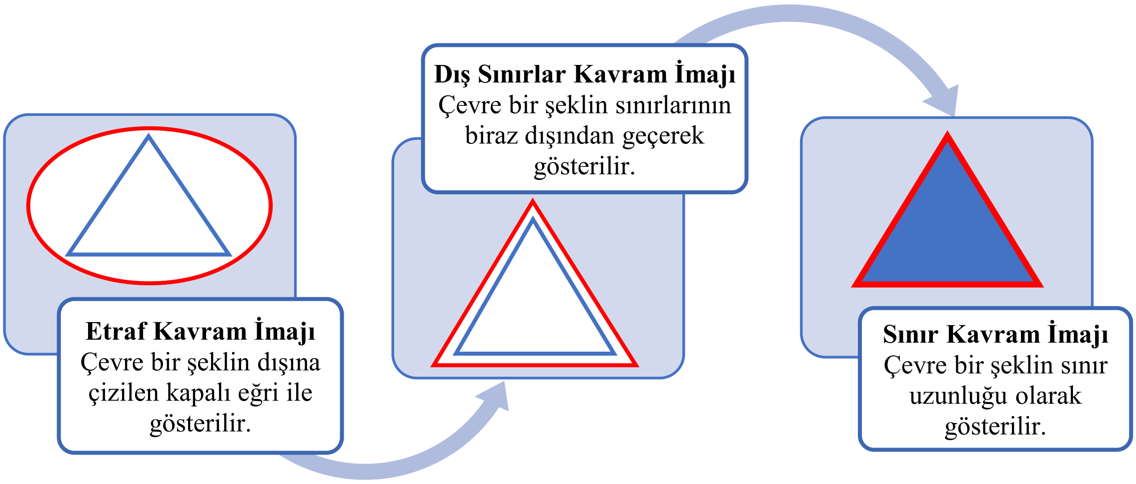
5.1.3. Uygulama Sonrasına İlişkin Sonuçlar

Katılımcılarla yapılan son klinik görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesiyle aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Katılımcıların çevre kavramıyla ilgili sınır ve dış sınırlar olmak üzere iki kavram imajına sahip oldukları görülmüştür. Sınır kavram imajına sahip katılımcıların çevreyi kapalı bir şeklin sınırları olarak düşündükleri belirlenmiştir. Dış sınırlar kavram imajına sahip katılımcıların ise, çevreyi kapalı şekillerin sınırlarının hemen dışında, şekille aynı biçime sahip; ama şekilden ayrı bir olgu olarak düşündükleri belirlenmiştir.

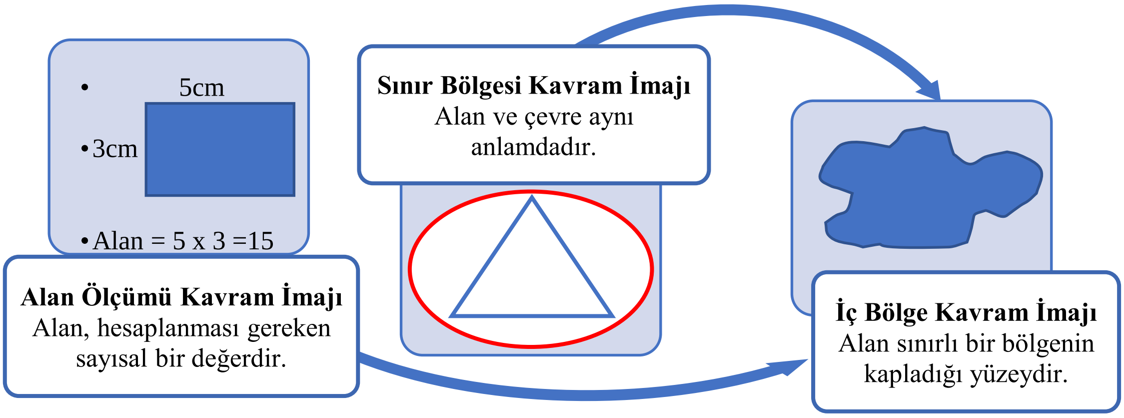
Katılımcılardan altısının (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Gülce (8)) sınır kavram imajına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu kavram imajına göre çevre kapalı bir şeklin sınırlarıdır. Buna uygun olarak katılımcılar çevreyi kapalı şekillerin sınırları üzerinden geçerek göstermişlerdir. Çevreyi ölçmeleri gereken problemlerle karşılaştıklarında ise şeklin sınırı boyunca birim uzunlukları sayma veya kenar uzunluklarını belirleyip toplama yöntemlerini kullanmışlardır. Uygulamadan önce katılımcılar şekil kareli zeminde çizildiğinde içindeki birim kareleri saymaya yönelseler de artık problemin sunulduğu bağlama değil kavramın anlamına odaklanmaktadırlar. Uygulamadan önce katılımcılar kapalı eğrilerin çevresi olmadığını iddia etseler de son klinik görüşmelerde bir şeklin çevresi olması için kapalı olmasının yeterli olduğunu ifade etmişlerdir. Tüm bunlar dikkate alındığında sınır kavram imajının formal tanıma uygun olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Katılımcıların ikisinin (Filiz (8) ve Mısra (7)) dış sınırlar kavram imajına sahip olduğu belirlenmiştir. Çizim yaparak şekillerin çevresini göstermeleri istendiğinde şeklin sınırlarının biraz dışında onunla aynı biçime sahip yeni bir şekil çizdikleri görülmüştür. Çevreyi ölçmeleri gereken durumlarda ise sınır kavram imajına sahip katılımcılarla aynı yöntemleri uygulamışlardır. Buna göre sınır kavram imajına sahip katılımcıların düşüncelerinde uygulamadan önceki etraf kavram imajının etkilerinin devam ettiği belirlenmiştir. Örneğin Mısra'nın (7) başlangıçtaki kavram imajına uygun şekilde çevreyi bir şeklin dışında, ondan ayrı bir olgu olarak düşündüğü ancak bu durumun son klinik görüşmede çevre ile ilgili problemleri çözmesinde sorun oluşturmadığı görülmüştür. Mısra (7) kavram imajını tüm kapalı eğrileri içerecek şekilde değiştirmiştir; ancak halen şekillerin çevresini onlardan ayrı bir olgu olarak ele almaktadır. Katılımcılardan Filiz'in (8) ise kapalı eğrilerin çevrelerine odaklanan öğretim seanslarına rağmen bu konuda uygulama öncesindekine benzer düşünceleri yinelediği, kapalı eğrilerin çevresiyle ilgili tereddütleri olduğu tespit edilmiştir. Filiz'in (8) daha önce sahip olduğu artık kalıplaşmış olan etraf kavram imajını değiştirmek için araştırma kapsamında uygulanan öğretim seanslarının yeterli olmadığı anlaşılmıştır. Şekil 5.1.'de katılımcıların çevre ile ilgili kavram imajlarının değişim süreci gösterilmiştir.



Şekil 5.1. *Çevre ile ilgili kavram imajlarının değişim süreci*

Katılımcıların alan kavramıyla ilgili uygulama sonrası kavram imajları tek bir başlık altında ele alınmıştır: iç bölge kavram imajı. Katılımcılar açıklamalarında alan kavramını bir şeklin sınırları içinde kalan bölge olarak ifade etmişlerdir. Yaptıkları çizimlerde de alanı şekillerin iç bölgesini tarayarak göstermişlerdir. Bir şeklin alanı olması için kapalı olmasının yeterli olduğunu ifade etmişlerdir. Alanı ölçmek için şekillerin içindeki birim kareleri sayma yöntemini kullanmışlardır. Bunun için ritmik sayma veya çarpma işleminden faydalanmışlardır. Tüm bunlar dikkate alındığında iç bölge kavram imajının formal tanıma uygun olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İlk klinik görüşmelerde alan ölçümü kavram imajına sahip olan katılımcıların (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Gülce (8)) kavram imajlarında işlemsel düşünce baskın olsa da alanı çokgenlerin iç bölgesiyle ilişkilendirdikleri belirlenmiştir. Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcıların (Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Filiz (8)) ise alan ve çevreyi birbirinden ayıramadıkları görülmüştür. Özellikle sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcıların öğretim seansları sonrasında düşüncelerinde görülen bu değişim dikkate değerdir. Şekil 5.2.'de katılımcıların alan ile ilgili kavram imajlarının değişim süreci gösterilmiştir.



Şekil 5.2. *Katılımcıların alan ile ilgili kavram imajlarının değişim süreci*

Sınıf düzeyleri arttıkça katılımcıların çevre ve alan kavramlarıyla ilgili sahip olduğu algıları değiştirmenin daha zorlaştığı görülmüştür. Özellikle 7. ve 8. sınıf düzeyindeki katılımcıların (Filiz (8) ve Mısra (7)), öğretim seanslarında hatalı olduğunu tecrübe etmelerine rağmen, önceki düşüncelerine bağlı kaldıkları belirlenmiştir. Kalıplaşmış yargılara sahip bu katılımcıların düşüncelerini değiştirmekte araştırma kapsamında uygulanan öğretim seansları bazı noktalarda yeterli olamamıştır. Daha küçük sınıf düzeylerindeki katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Fırat (6)) ise karşılaştıkları yeni fikirlere daha kolay uyum sağlamışlardır.

Öğretim seansları sonrasında katılımcılar alan ve çevrenin farklı kavramlar olduğunun bilincindedirler. Kavramlar arasındaki farklılıkları açıkça ifade edebildikleri, problem durumlarında uyguladıkları ve düşüncelerinin doğruluğunu savunmak için kullanabildikleri görülmüştür. Örneğin Can (7) ilk klinik görüşmede çevre için etraf, alan için sınır kavram imajına sahipti. Bu kavram imajları doğrultusunda Can (7) çevre ve alan kavramlarını birbiri yerine kullanmakta, ikisinin aynı anlama geldiğini ifade etmekteydi. Öğretim seansları sürecinde iki kavramın anlamlarını ve farklı niteliklerini keşfetmiştir. Böylece son klinik görüşmede çevre ve alan kavramlarını formal tanıma uygun şekilde açıklayabilmiş, farklı oldukları noktaları vurgulamıştır. Ayrıca kavramların anlamlarını problemlerin çözümünde ve çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamada kullanmıştır.

İlk klinik görüşmelerde farkında olmadıkları benzer çokgenlerin kenar uzunluğu ile alan arasındaki karesel ilişkiyi öğretim seansları kapsamında karşılaştıkları birçok örnek durum üzerinden bir genelleme yaparak keşfetmişlerdir. Örneğin ilk klinik görüşmede düşüncelerinin doğruluğunu savunurken otoriter ve algısal kanıt şemalarını kullanan

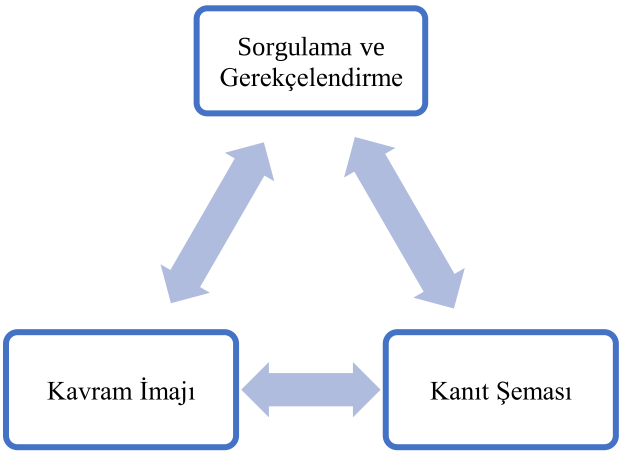
Mısra (7) son klinik görüşmede benzer çokgenlerin kenar uzunluğu ile alanları arasındaki ilişkiyi belirlemek için örnek durumları inceleyip genelleme yapmıştır. Başlangıçta alan kavram imajı formal tanımdan uzak ve sınırlı olduğu için geçerli bir kanıt sunmakta zorlanmıştır. Ancak öğretim seansları süresince edindiği tecrübelerle kavram imajını formal tanıma uygun olarak yeniden yapılandırmış ve bunu geçerli kanıtlar oluşturmak için kullanabilmiştir.

Katılımcıların son klinik görüşmelerde dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarını kullandıkları belirlenmiştir. Dışsal kanıt şemalarından otoriter kanıt şemasını kullanan bir tek katılımcı (Fırat (6)) olsa da bu kanıt şeması katılımcı için eskisi kadar baskın değildir. Katılımcı çevre ve alan kavramlarının anlamlarını ve özelliklerini dile getirip kullansa da düşüncelerinin doğruluğunu savunurken öğretmenini (araştırmacı) dayanak olarak göstermektedir. Uygulama öncesinde tercih edilen dışsal kanıt şemalarından alışkanlık edinilmiş/ritüel kanıt şeması ise son klinik görüşmelerde hiçbir katılımcı tarafından kullanılmamıştır.

Tüm katılımcıların örnek temelli kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Örnek temelli kanıt şeması katılımcıların en sık kullandığı kanıt şeması olmuştur. Öğretim seansları kapsamında araştırmacının örnekler üzerinden katılımcıları genelleme yapmaya yönlendirmesi veya onların düşüncelerinin aksine bir örnek vererek hatalarını göstermesi katılımcıları bu kanıt şemasını kullanmaya yönlendirmiş olabilir. Uygulamadan önce katılımcılar savunmalarında kavram imajlarının sınırlılıklarını yansıtan örnekler vermişlerdir. Öğretim seansları sonrasında formal tanıma uygun halde yapılandırdıkları kavram imajları çoğunlukla doğru örnekler vermelerini sağlamıştır. Deneysel kanıt şemalarından algısal kanıt şeması da katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Filiz (8)) tarafından kullanılmaya devam edilmiştir. Katılımcılar çevre veya alan kavramıyla ilişkilendirdikleri bir zihinsel görüntü üzerinden düşüncelerinin doğruluğunu savunmuşlardır. Uygulama öncesinde katılımcıların savunmalarındaki gerekçeler kavram imajlarının sınırlılıklarını yansıtırken, öğretim seansları sonrasında formal tanıma uygun halde yapılandırdıkları kavram imajları çoğunlukla doğru gerekçeler sunmalarını sağlamıştır.

Son klinik görüşmelerde analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasına geçiş yapan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Can (7), Gülce (8)) da bulunmaktadır. Katılımcılar düşüncelerini savunurken kavramların (kişisel) tanımlarını, kavramlar arasındaki ilişkileri, işlem özelliklerini ve işlemler arasındaki ilişkileri dayanak olarak göstermişlerdir. Katılımcıların, öğretim seansları kapsamında düşüncelerinin doğruluğunu savunmada kazandıkları deneyimlerin yanında, kavram imajlarında yaşanan değişim de onların kullandıkları kanıt şemalarını etkilemiştir. Kavram imajları yeni keşfettikleri bilgilerle zenginleştikçe kendi bilgilerine olan güvenleri artmıştır. Dolayısıyla düşüncelerinin doğruluğunu savunurken artık dışsal dayanaklar yerine kendi keşfettikleri bilgileri öne sürmeye başlamışlardır. Bu nedenle ilk klinik görüşmelerin aksine son klinik görüşmelerde dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanan katılımcılar bulunmaktadır.

Araştırma sürecinde araştırmacının katılımcıların yaptığı çözümleri sorgulaması onları düşünmeye sevk etmiştir. Çözümleri üzerinde belki de ilk kez bu kadar derin düşünen katılımcılar farkındalık geliştirmeye başlamışlardır. Bu farkındalıkla birlikte kavramların anlamlarını, özelliklerini, kavramlar arası ilişkileri, işlemlerin özelliklerini ve işlemler arasındaki ilişkileri keşfetme yolunda ilk adımı atmışlardır. Katılımcıların kavram imajları araştırmacının onları sorgulama ve gerekçelendirme yapmaya (kanıt şeması) yönlendirmesiyle birlikte yapısal değişime uğramaya başlamıştır. Bu değişim bir anda gerçekleşmemekte, süreç boyunca yeni keşifler yapıldıkça bir döngü halinde devam etmektedir. Şekil 5.3.'de kanıt şemaları ile kavram imajları arasındaki bu etkileşim gösterilmiştir.



Şekil 5.3. *Kanıt şemaları ile kavram imajları arasındaki etkileşim*

5.2. Tartışma

Araştırmanın bu bölümünde araştırmadan elde edilen bulgular, literatürde yer alan daha önceki araştırmaların sonuçları ile karşılaştırılarak tartışılmıştır. Araştırma sorularına uygun olarak, öncelikle katılımcıların çevre ve alan kavramları ile ilgili uygulama öncesinde sahip oldukları kavram imajları ve kanıt şemalarına ilişkin bulgular tartışılmıştır. Ardından öğretim seansları sırasında katılımcıların kavram imajları ve kanıt şemalarındaki değişimlere ilişkin bulguların tartışılmasına geçilmiştir. Son olarak katılımcıların çevre ve alan kavramları ile ilgili uygulama sonrasındaki kavram imajları ve kanıt şemalarına ilişkin bulguların tartışılmasına yer verilmiştir.

5.2.1. Uygulama Öncesine İlişkin Tartışma

İlk klinik görüşmelerden elde edilen verilere göre katılımcıların çevreyle ilgili temelde iki kavram imajına (etraf ve çevre ölçümü) sahip oldukları belirlenmiştir. Çevre ile ilgili etraf kavram imajına sahip katılımcılar çizdikleri çokgenlerin dış bölgesine şekli içine alacak biçimde kapalı eğriler çizerek çevreyi göstermişlerdir. Bu imaja sahip katılımcılar çevreyi günlük hayattaki etraf anlamıyla ilişkilendirmiş, dolayısıyla çevreyi bir şeklin dış bölgesi olarak algılamışlardır. Bu durumun nedenlerinden biri dilimizde çevre ve etraf kelimelerinin aynı anlamda kullanılıyor olmasıdır. Türk Dil Kurumu [TDK] sözlüğünde çevre kelimesinin anlamı "**1.** *isim* Bir şeyin yakını, dolayı, etraf, periferi. **7.** *isim, matematik* Düzlem üzerindeki bir şekli sınırlayan çizgi." olarak açıklanmaktadır (https://sozluk.gov.tr/ 1/05/2021). Katılımcılar kelimeyi matematiksel anlamı yerine günlük hayattaki anlamıyla ele aldıkları için uzunlukla ilgili bir kavram olan çevreyi hatalı bir şekilde şeklin dışındaki yakın bölge ile yani alan kavramıyla ilişkilendirmişlerdir. Bu araştırmada olduğu gibi Tossavainen, Suomalainen ve Mäkäläinen (2016) öğretmen adaylarının alanla ilgili kavram imajlarını inceledikleri çalışmalarında günlük dil ve matematiksel dil arasındaki farklılıkların alan kavramı ile ilgili karışıklıklara neden olduğunu ifade etmişledir.

Uygulama öncesinde çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar işlemsel bilgiye dayanan bir anlayış benimsemişler, kavramın anlamı yerine uyguladıkları eylemlere odaklanmışlardır. Çizdikleri çokgenlerin (genellikle dikdörtgen ve kare) çevresini göstermeleri istendiğinde şekillerin kenarlarına rastgele sayısal değerler atayıp bu değerleri toplamışlardır. Benzer şekilde Machaba'nın (2016) çalışmasına katılan 10. sınıf öğrencileri formül kullanmadan çevreyi açıklayamamış, birçoğu çevre kavramının ne anlama geldiğini bilmeden sadece işlem yapmıştır. Bu araştırmada da katılımcılar doğrudan bir hesaplama yapılması istenmediği halde çevreyi açıklamak amacıyla kenar uzunluklarına rastgele sayısal değerler atayıp bu değerleri toplamışlardır. Katılımcılar çevre kavramını ezberledikleri algoritmaları takip ederek adım adım uyguladıkları işlemler olarak düşünmektedirler. Buna göre çevre kavramını bir eylem olarak ele aldıkları için APOS teorisinin (Dubinsky ve Harel, 1992) eylem (action) düzeyinde bulundukları söylenebilir.

Özellikle çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar çevre ile toplama işlemini ilişkilendirmiş olsalar da neyi neden yaptıklarını açıklayamamışlardır. Ölçmeyle ilgili kavramların öğretiminde genellikle işlemsel bilgiye ağırlık verilmesi ve diğer konulardan yalıtılarak sınırlandırılması nedeniyle kavramsal anlayışın işlemsel yeterliliğe göre daha az geliştiği düşünülmektedir (Smith vd., 2013, Barrett vd., 2012 ve Tan Şişman ve Aksu, 2012). Bu görüşe uygun olarak öğrencilerin çevreyle ilgili işlemsel beceri gerektiren, formüle dayalı soruların çözümünde başarılı oldukları, kavramsal düşünmeyi gerektiren sorularda ise başarı yüzdesinin düştüğü belirlenmiştir (Dağlı ve Peker, 2012). Matematik öğretim programında ilkokul 3. sınıf düzeyinde çevreyi sezdirmeye yönelik kazanımlar yer alsa da sonraki düzeylerde kazanımlar sadece ölçme ve hesaplamaya vurgu yapmaktadır (MEB, 2018). Sınıflardaki öğretimin de buna paralel şekilde yapıldığı düşünüldüğünde bu durumun çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların çevreyi açıklarken ölçme, hesaplama ve işlemlere atıfta bulunmalarına neden olduğu söylenebilir.

Hem çevre ölçümü hem de etraf kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi açıklamak için yaptıkları çizimlerde genellikle matematik derslerinden aşina oldukları çokgenleri (dikdörtgen, kare, üçgen) kullanmışlardır. Barrett vd. (2006) 2-10. sınıf düzeyinden öğrencilerle yürüttükleri çalışmanın sonucunda çevre ölçümünün çokgenler ve sayı şemalarının önceki gelişimlerine bağlı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu durum öğretmen adaylarında bile benzerlik göstermektedir. Yenilmez ve Çiftçi (2014) lise matematik öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmada katılımcıların çevresi olan şekilleri belirlemeleri istendiğinde tamamı çokgenleri seçse de bazılarının düzgün olmayan kapalı şekilleri seçmedikleri belirlenmiştir. Katılımcıların %11'i sadece çokgenlerin çevresi olduğunu düşünmektedir. Öğretmen adaylarının böyle bir yanılgıya sahip olması düşündürücüdür. Bu araştırmadaki katılımcılar da çevreyi açıklamak için çokgenlerden yararlanmışlardır. Çevre ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar çevreyi çizdikleri çokgenlerin kenar uzunluklarıyla ilişkilendirseler de açıklamalarında hesaplama ve işlemsel düşünce ön plandadır. Etraf kavram imajına sahip katılımcılar ise bir şeklin çevresi olup olmadığına karar verirken şeklin doğru parçası (kenar) içerip içermediğine dikkat etmişlerdir. Buna göre katılımcıların çevre ile ilgili kavram imajlarının çokgen ile ilgili kavram imajlarından etkilendiği söylenebilir. Katılımcılar kavram imajlarının prototip çokgenlerle sınırlı olması, aşırı özelleme yaparak sadece çokgenlerin çevresi olabileceğini düşünmeleri nedeniyle kapalı eğrilerin çevresi olmadığını ifade etmişlerdir. Yenilmez ve Çiftçi'nin (2014) araştırmasına katılan öğretmen adaylarının çevreyle ilgili algılarına dayanarak göreve başladıktan sonra da sınıflarında çevre ile ilgili verdikleri örneklerde sadece çokgenleri kullanmaları öğrencilerinin kavram imajlarını sınırlayacaktır.

Uygulama öncesinde kavram imajları veya sınıf düzeyleri fark etmeksizin katılımcıların çevre ile alan kavramını birbirine karıştırdığı, bu kavramları birbiri yerine kullandıkları belirlenmiştir. Çevre ölçümü kavram imajına sahip olanlar bu kavramların farklı nitelikler olduğunu tahmin etseler de hesaplama yaparken birbiri yerine kullanmış ve yanlış çözümler yapmışlardır. Etraf kavram imajına sahip olanlar ise bu kavramların tamamen aynı anlama geldiğini düşünmektedir. Benzer sonuçlara Abed ve Alkhateeb (2003), Dağlı ve Peker (2012), Kidman ve Cooper (1997), Moreiara ve Contente (1997), Outhred ve Mitchelmore (2000), Sarama ve Clements (2009), Tan Şişman ve Aksu (2009), Zacharos (2006) yaptıkları çalışmalarda ulaşmışlardır. Araştırmacılar çalışmalarına katılan öğrencilerin kavramsal temeller olmadan hesaplamaya dayalı yaklaşımlar izlemeleri sonucunda çevre ve alan kavramlarını birbirine karıştırdıklarını tespit etmişlerdir. Çevre ve alanın birbirine karıştırılması hatası yaygın olmakla birlikte oldukça kalıcıdır. Barrett vd. (2017), dört yıl süren boylamsal çalışmalarına katılan iki öğrencinin uygulanan öğretime rağmen bir dikdörtgenin çevresini alanı olarak ifade ettiklerini belirtmişlerdir.

İlk klinik görüşmelerde katılımcıların büyük çoğunluğu soruların içerdiği kavramlara değil sorunun bağlamına odaklanmışlardır. Örneğin birim kareli zemin üzerine çizilmiş dikdörtgen ve karenin çevrelerini karşılaştırmaları istendiğinde neredeyse hepsi şeklin sınırları içindeki birim kareleri saymaya yönelmiştir. Soruda açıkça çevreleri karşılaştırmaları istense de katılımcıların dikkatini çeken birim kareler olmuş, dolayısıyla alan ölçmeye yönelmişlerdir. Daha önce yapılan birçok çalışmada da uzunluk ve alanın birlikte ele alındığı sorularda öğrencilerin kare bölgelerin kenar uzunluklarından (çevre) ziyade birim kareleri (alan) saydıkları belirlenmiştir (Battista vd., 1998; Moreira ve Contente, 1997; Nitabach ve Lehrer, 1996; Tan Şişman ve Aksu, 2009). Bir problemin sunuluş şekli veya içerdiği ip uçları bireylerin zihinlerinde bazı bilgileri tetikleyebilmektedir. Mamona-Downs ve Papadopoulos'un (2006) araştırmasındaki bir öğrenci problemin sunumunda noktalı kâğıt kullanılmasından etkilenerek alan ölçmeyle ilgili önceden karşılaştığı yöntemler arasından birini (noktaları birim kareye tamamlayıp sayma) uygulamayı seçmiştir. Bu araştırmada da öğrenciler birim kareli kâğıt gördüklerinde soruda açıkça çevreyi bulmaları istense de şeklin sınırları içinde kalan birim kareleri saymaya (alan) yönelmişlerdir.

Katılımcılar belirli bir çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenleri oluşturmakta zorlanmışlardır. Katılımcılar bir tek dikdörtgeni oluşturmakla yetinmiştir. Araştırmacının başka bir tane daha çizmelerini istemesi üzerine çizdikleri ikinci dikdörtgen genellikle ilkinin döndürülmüş halini göstermektedir. Benzer bir durumu Barrett vd. (2006) çalışmalarında gözlemlemiştir. Çalışmalarına katılan 2-10. sınıf düzeyinden öğrencilerden çevresi 24 birim olan üçgen veya dörtgenler oluşturmaları istenmiştir. Küçük sınıflardaki (2-3) öğrenciler somut materyallerle çalışmaya yönelmiş, orta sınıflar (5-6) somut materyali referans alarak birkaç çizim yapmış ve üst sınıflar (8-10) ise sayısal işlemlere eğilim göstermişlerdir. Öğrencilerin somut materyale erişimleri olması belirli bir çevreye sahip şekiller oluşturmalarını kolaylaştırsa da büyük çoğunluğu tüm şekilleri oluşturamamıştır. Bu araştırmada katılımcılara çizim yapmaları için kareli bir zemin verilmiştir. Bu durumun çözümlerini kolaylaştırması beklendiği halde katılımcılar tüm dikdörtgenleri oluşturamamışlardır. Benzer bir çalışmada Chappell ve Thompson (1999) ortaokul öğrencilerinden çevreleri 24 birim olan bir şekil çizmelerini istediklerinde, birçoğu alanları 24 birim kare olan şekiller çizmiştir. Bu araştırmada da katılımcılardan bazıları çevresi 10 birim olan dikdörtgenler yerine alanı 10 birim kare olan dikdörtgenler çizmişlerdir. Yukarıda belirtildiği gibi birim karelerin kullanılması katılımcıların çevre yerine alan kavramına yönelmelerine neden olmaktadır.

İlk klinik görüşme sonuçlarına göre katılımcıların alan ile ilgili temelde iki kavram imajına (sınır bölgesi ve alan ölçümü) sahip olduğu belirlenmiştir. Alan kavramıyla ilgili sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar alanı açıklamak için tıpkı çevrede olduğu gibi çizdikleri çokgenlerin sınırlarının dışındaki bölgeyi işaret etmişlerdir. Zacharos (2006) da çalışmasında öğrencilerin alanı göstermeleri istendiğinde alan yerine çevre üzerinde yoğunlaşarak şeklin ana hatlarını taradıklarını belirlemiştir. Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcıların alanı hesaplarken de çevre için kullandıkları algoritmaları uyguladıkları görülmüştür. Bu katılımcıların çevre ve alanı hem işlemsel hem de kavramsal olarak birbiri yerine kullandığı belirlenmiştir. Daha önce yapılan çalışmalarda da birçok öğrencinin dikdörtgenin alanını belirlemek için çevre hesaplamaya ilişkin algoritmaları uyguladıkları görülmüştür (Cavanagh, 2007; Kidman ve Cooper, 1997, Kidman, 1999 ve Tan Şişman ve Aksu, 2009). Özellikle alışkın olmadıkları şekiller söz konusu olduğunda öğrencilerin alan yerine çevreyi hesapladıkları görülmüştür (Cavanagh, 2007). Bu araştırmada da sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar şeklin alanı ile ilgili ezberledikleri algoritmayı anımsamadıklarında veya şekil onlara yabancıysa alan yerine çevre hesaplamaya yönelmişlerdir.

Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar işlemsel bir yaklaşım sergileyerek alanın nasıl hesaplanacağına vurgu yapmışlardır. Katılımcılar alanı açıklarken ölçme, hesaplama ve bir sonuç bulma arayışındadırlar. Alanı açıklamak için çizdikleri çokgenlerin kenarlarına rastgele sayısal değerler atayarak alanı hesaplamaya çalışmışlardır. Katılımcılar alan kavramını ezberledikleri algoritmaları takip ederek adım adım uyguladıkları işlemler olarak düşünmektedirler. Buna göre alan kavramını bir eylem olarak ele aldıkları için APOS teorisinin (Dubinsky ve Harel, 1992) eylem (action) düzeyinde bulundukları söylenebilir. Benzer şekilde Kaya (2019) çalışmasına katılan 6. sınıf öğrencilerinden birçoğunun alan kavramının anlamını tam olarak bilmediğini, problemde verilenlerin mantığını anlamadan sayılarla bir sonuca ulaşma gayretinde olduklarına dikkat çekmiştir. Machaba (2016) çalışmasına katılan 10. sınıf öğrencilerinin formül kullanmadan alanı tanımlayamadığını belirlemiştir. Huang ve Witz (2013) çalışmalarına katılan 22 dördüncü sınıf öğrencisinden 9'unun alan kavramını işlemsel olarak açıklayabildiğini, kavramı ölçmeden ayrı düşünemediğini tespit etmiştir. Benzer sonuçlar sadece ortaokul düzeyiyle sınırlı değildir. Öğretmen adaylarıyla yürütülen bir çalışmada katılımcıların %27'sinin alan tanımlarını dikdörtgen veya dairenin alan formülü ile ilişkilendirdikleri belirlenmiştir (Tossavainen, Suomalainen ve Mäkäläinen, 2016). Lisans öğrencileriyle yürütülen bir başka çalışmada öğrencilerin cevaplarının kavramlardan çok formüllerle ilişkili olduğu tespit edilmiştir (Abed ve Alkhateeb, 2003). Bu araştırmadaki alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar hesaplama için daha önceden bildikleri algoritma veya formülleri kullanmışlar; fakat anlamlarını veya neden kullandıklarını açıklayamamışlardır. Benzer şekilde Cavanagh (2007) çalışmasında 7. sınıf öğrencisi 12 katılımcının 9'unun dikdörtgenin alan formülünde neden uzunluk ve genişliğin çarpıldığını açıklayamadığını ifade etmiştir. Bu durumun nedenlerinden biri olarak müfredat içeriği görülmektedir. İşlemsel becerilere vurgu yapılması, bunun yanında kavramlara çok az yer verilmesi öğrencilerin kavramsal anlayışının sığ kalmasına yol açmaktadır (Smith, Males ve Gönülateş, 2016).

Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar alanı açıklamak için daha önce ezberledikleri algoritma ve formülleri kullanmışlardır. Kullandıkları algoritmaların bir kısmı alan hesaplama için doğruyken bir kısmı aslında çevre hesaplama için doğrudur. Bu nedenle alan ölçümü kavram imajı, 1a) hatalı alan ölçümü ve 1b) kısmen doğru alan ölçümü olmak üzere iki alt başlıkta ele alınmıştır. Her iki durumda da katılımcılar alanı şeklin iç bölgesi ile ilişkilendirmiş olsalar da kavram imajlarında ölçme ve hesaplama daha baskındır.

Hatalı alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların imajları matematiksel olarak anlamsız algoritma ve formülleri içermektedir. Bu katılımcıların çevre ve alanı işlemsel olarak birbiri yerine kullandıkları, alan kavramını kenar uzunlukları toplamı şeklinde ele aldıkları görülmüştür. Benzer şekilde Cavanagh (2007) araştırmasına katılan birçok 7. sınıf öğrencisinin alana başvurması gereken durumlarda çevreden söz ettiğini belirlemiştir. Kidman ve Cooper (1997) araştırmalarına katılan 4., 6. ve 8. sınıf öğrencilerinin yaklaşık yarısının alan kavramını, dikdörtgenin kenar uzunlukları toplamı şeklinde ifade ettiklerini belirtmiştir. Cullen vd. (2018) 2-5. Sınıf öğrencileriyle yürüttükleri araştırmada bazı öğrencilerin alan ve çevreyi karıştırmak, cetvel kullanmada hata yapmak gibi sahip oldukları kavram yanılgılarının gelişimlerine engel olduğunu tespit etmişlerdir. Kaya (2019) 6. sınıf öğrencilerinin alan ölçme ile ilgili problem çözme becerilerini incelediği çalışmasında öğrencilerin çözümlerini kontrol ederken alan yerine çevreyi hesapladıklarını belirlemiştir. Yeterli kavramsal temeller olmadan formüllere ve hesaplamaya dayalı yaklaşımların üzerinde durulması alan-çevre karmaşasına neden olmaktadır (Baturo ve Nason, 1996; Stephan ve Clements, 2003; Tan Şişman ve Aksu, 2016; Zacharos, 2006). Buna rağmen bir öğrencinin çevre ve alanı karıştırması, alanı bir şeklin iki boyutlu niteliği olarak tanımadığını kesin olarak göstermemektedir. Bu durum öğrencinin bir işlemi ezberci bir şekilde uygulamasından (alan için toplama mı, yoksa çarpma mı yapılmalı?), ilişkili bir niteliğe (uzunluk) aşırı odaklanmasından veya temel birim kavramlarını anlamamasından kaynaklanabilir (Cullen ve Barrett, 2020, s. 86). Bu araştırmada alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcılar alanın şeklin iç bölgesi ile ilişkili olduğunu bilseler de algoritmaları ezberci bir şekilde takip ettikleri, birim kavramını tam olarak oluşturamadıkları için çevre ve alanı birbirine karıştırmışlardır.

Kısmen doğru kavram imajına sahip katılımcıların imajları sadece alan formüllerini bildikleri şekillerle (kare, dikdörtgen, üçgen) sınırlıdır. Ayrıca bu formülleri uygun olmayan durumlara (diğer çokgenler) genelledikleri belirlenmiştir. Önceki araştırmalarda da öğrencilerin dikdörtgenin alan formülünü uygun olmayan durumlara aşırı genelledikleri tespit edilmiştir (Cavanagh, 2007; Machaba, 2016; Zacharos 2006). Dikdörtgenin alan formülünün arkasındaki satır-sütun yapısını keşfetmek öğrenciler için pek de kolay değildir. Birçok öğrenci formülü, alan ölçmeyi anlamak için gerekli olan birim tanımlama, birimleri koordine etme, birimlerle iki boyutlu uzayda satır-sütun dizisi oluşturma, doğrusal ve alan birimlerini ilişkilendirme gibi temel fikirleri anlamadan kullanmaktadır (Battista, 2004; Kara vd., 2011; Outhred ve Mitchelmore, 2000; Stephan ve Clements, 2003).

İlk klinik görüşme verilerine göre katılımcıların neredeyse tamamı kenar uzunlukları ile alan arasında doğrusal bir ilişki olduğunu ifade etmişlerdir. Bunun nedenlerinden biri, katılımcıların alan ve çevreyi birbirine eş gördükleri için alanı tek boyutlu olarak ele almaları olabilir. Van Dooren vd. (2004) araştırmalarında doğrusallık yanılsaması (illusion of linearity) olarak isimlendirdikleri bu yanılgıyı ele almışlardır. Bu yanılsamayı gidermek için sekizinci sınıf öğrencileriyle yürüttükleri eğitim sonrasında deney grubundaki öğrencilerin çoğunun orantı içermeyen durumlarda orantı stratejilerini kullanma sıklığının düştüğü görülmüştür. Buna rağmen öğrenciler orantılı ve orantısız durum ve ilişkilerin derin bir kavramsal anlayışını her zaman göstermemiştir. De Bock, Verschaffel ve Janssens (1998) ise araştırmalarında, iki benzer geometrik şeklin uzunluk ve alanları ile ilgili matematik problemlerine odaklanmışlardır. Buna göre araştırmaya katılan 8. ve 10. sınıf öğrencilerinin çoğunun orantılı maddeleri doğru çözebildiğini, oysa orantısız maddelerin nadiren doğru çözüldüğünü tespit etmişlerdir. Kidman (1999) alan ölçmede toplamsal kuralları kullanan 4, 6 ve 8. sınıf öğrencilerinin dikdörtgenin kenar uzunlukları iki katına çıkarıldığında alanın da iki katına çıkacağına inandıklarını belirlemiştir. Benzer bir soruyu Çavuş Erdem (2018) çalışmasına katılan öğrencilere yönelttiğinde, öğrencilerin sayısal örneklerle ilişkiyi yorumlamaya çalıştıklarını ve doğru sonuca ulaşamadıklarını tespit etmiştir. Bu araştırmanın katılımcıları da benzer düşüncelerle kenar uzunlukları iki katına çıkarılan karenin alanının da iki katına çıkacağını tahmin etmişlerdir.

İlk klinik görüşmelerde katılımcıların çevre ve alan kavramlarını açıklamak için çizdikleri örnekler dikdörtgen, kare ve üçgen gibi derslerde sıklıkla karşılaştıkları çokgenler olmuştur. Katılımcıların kavram imajları kapalı eğrileri içermemektedir. Bu durumun temelinde hesaplama yapamayacaklarını düşündükleri şekillerin çevresi ve alanını görmezden gelme eğilimleri yatmaktadır. Bir şeklin çevre veya alanını hesaplayabilmeleri için şeklin kenarları (en az bir tane) olması gerektiğini düşünmektedirler. Benzer bir şekilde Tan şişman ve Aksu (2009) ortaokul düzeyinde yürüttükleri çalışmada öğrencilerin kare gibi aşina oldukları çokgenlerin çevresini hesaplamada oldukça başarılı olmalarına rağmen tüm kenar uzunlukları verilse de alışkın olmadıkları bir şeklin çevresini hesaplamada başarılarının düştüğünü belirtmişlerdir. Bu araştırmadaki katılımcılarla benzer olarak Machaba (2016) çalışmasına katılan 10. sınıf öğrencilerinin düzensiz bir şeklin (yaprak gibi) uzunluk ve genişliği olmadığı için alanı da olmadığını düşündüğünü belirtmiştir. Bu düşünceler sadece ortaokul ve lise öğrencileriyle sınırlı değildir. Yew vd. (2011) matematik öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmada sekiz katılımcının ancak yarısının çevresi olan tüm şekilleri belirleyebildiğini ifade etmişlerdir. Öyle ki katılımcılardan biri sadece sıklıkla kullanılan üçgen, daire ve yamuk şekillerinin çevresi olduğunu düşünmektedir. Yenilmez ve Çifti (2014) lise matematik öğretmen adaylarının bir kısmının çevre ve alan hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip olduğu görülmüştür. Katılımcılardan bazıları üç boyutlu şekillerin çevre ve alanlarının olamayacağını düşünürken, bazıları da kapalı eğrilerin çevre ve alanlarının olmayacağını belirtmişlerdir. Ancak katılımcıların tamamının bütün kapalı basit şekillerin çevresi olduğunu düşündüğü belirlenmiştir. Tossavainen, Suomalainen ve Mäkäläinen (2016) öğretmen adaylarının alanla ilgili kavram imajlarını inceledikleri çalışmada, katılımcılar çokgenlerin alanıyla ilgili sorun yaşamasalar da sadece üç katılımcının düzensiz bir düzlemsel şeklin alanı olabileceğini ifade ettiğini belirtmişlerdir. Düzensiz düzlemsel şekillerin alanı olduğunu kabul etseller bile sadece yaklaşık bir tahminde bulunabileceklerini eklemişlerdir. Benzer düşüncelerle bu çalışmadaki katılımcılar da kapalı eğrilerin çevresi ve alanı olmadığını ifade etmişlerdir.

Özellikle çevre ölçümü ve alan ölçümü kavram imajlarına sahip katılımcılar zihinlerinde çevreyi şeklin dışı, alanı şeklin içi ile ilişkilendirmiştir. Alan kavramının bu çalışmada olduğu gibi öğrenciler tarafından şekillerin iç bölgesi ile ilişkilendirildiğini tespit eden birçok araştırmacı olmuştur. Örneğin, Cavanagh (2007) 7. sınıflarla yürüttüğü çalışmasında katılımcıların yarıdan çoğunun alanı bir şeklin “içindeki yer” olarak tanımladığını belirlemiştir. Herbst (2005) çalışmasına katılan lise öğrencilerinin, genellikle bir şeklin etrafındaki mesafe olarak yorumlanan çevreyle karşılaştırırken, alanı bir şeklin içindeki boşluk miktarı olarak ifade ettiklerini belirtmiştir.

Katılımcılar çevre ve alan için ya hiç birim kullanmamışlar ya da hatalı birim kullanmışlardır. Genellikle sayısal bir değerin çevre veya alanı ifade etmek için yeterli olduğunu düşünmüşlerdir (Clements ve Sarama, 2009). Benzer şekilde Bragg ve Outhred (2000, 2001, 2004) pek çok öğrencinin uzunluk ölçmeyi sadece belirli kuralları uygulayarak bir nesne boyunca birimleri sıralamak ve ortaya çıkan sayıyı söylemek şeklinde algıladığını ifade etmiştir. Bu öğrenciler ölçme ile ilgili testlerde ve etkinliklerde yeterli başarı gösterseler de öğrencilerin ölçme sürecinde neyi neden saydıklarından emin olamadıklarını belirtmiştir. Ayrıca Tan Şişman ve Aksu (2009) ile Cavanagh (2007) birçok ortaokul öğrencisinin uzunluk ve alan ölçü birimlerinde zorluk yaşadığını, ölçümlerini uygun birimlerle ifade edemediklerini tespit etmiştir. Thompson (2000, s. 33) çocukların genellikle alanı tek boyutlu nesneler olarak ele aldığını belirtmiştir. Buna göre alan, bir bölgeyi doldurmak için gerekli olan kare sayısı olarak düşünülmektedir. Ancak, buradaki birim kareler boyutu olmadan sadece nesne olarak ele alınmaktadır. Araştırmacı öğrencilerin kavramsal bir alan anlayışı geliştirmeleri için, iki uzunluğu çarpmanın nasıl bir dikdörtgen oluşturduğunu ve birim karenin kenar uzunluklarını anlamaları gerektiğini ifade etmiştir.

İlk klinik görüşmelerden elde edilen veriler incelendiğinde, farklı sınıf düzeylerinde olsalar da çevre ve alan ile ilgili aynı kavram imajına sahip katılımcılar bulunduğu görülmektedir. Benzer şekilde farklı sınıf düzeylerindeki katılımcıların sahip oldukları kavram imajları birçok ortak sınırlılık ve hatalı anlayış içermektedir. Cullen ve Barrett (2020) 1, 3, 5 ve 7. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada öğrencilerin alan öğrenme düzeylerini belirlemişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin alan öğrenme düzeyleri arttıkça birim türleri arasında doğru cevapların ve çizimlerin sayısı artsa da sınıf düzeyleri için bunun geçerli olmadığını tespit etmişlerdir. Buna göre, öğrencilerin alan öğrenme düzeyleri boyunca ilerlemesini etkileyen tek başına yaş veya biyolojik olgunlaşma değildir; bunun yerine tecrübe ve öğretim gereklidir. Bu araştırmanın sonuçları da tek başına sınıf düzeyinin çevre ve alan kavram imajlarını doğru yapılandırmak için yeterli olmadığını göstermiştir.

Uygulama öncesinde katılımcıların yaptıkları çözümlerin doğruluğunu kanıtlamak için dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları belirlenmiştir. Bu araştırmaya benzer sonuçlara Yıldız ve Şengül (2017) çalışmalarına katılan 8. sınıf öğrencilerinin araştırma kapsamında uygulanan eğitimden önce genellikle dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıklarını belirlemişlerdir. Benzer şekilde Yılmaz (2021) yaptığı ön klinik görüşmelerde araştırmanın katılımcısı olan 7. sınıf öğrencilerinin sayı problemi ve önermesinde tümevarımsal muhakeme yoluyla belirli örneklerin doğruluğuna odaklanarak deneysel doğrulama yaptıklarını belirlemiştir. Araştırmanın katılımcılarının kanıtın doğru olduğuna ikna olma alt işlevini gösterseler de açıklama işlevi bakımından eksik oldukları görülmüştür. Farklı sınıf düzeylerinden öğrencilerle ve matematik öğretmen adaylarıyla yapılan çalışmalarda da katılımcıların çoğunlukla dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları belirlenmiştir (Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014). Bu araştırmadaki katılımcılardan hiçbiri analitik kanıt şemalarını kullanmamıştır. Katılımcılar tarafından dışsal kanıt şemalarından otoriteye bağlı ve alışkanlık edinilmiş/ ritüel kanıt şemaları kullanılmıştır. Deneysel kanıt şemalarından ise algısal ve örnek temelli/tümevarımsal kanıt şemaları kullanılmıştır. Daha önce yapılan araştırmalara benzer şekilde katılımcılar aynı anda biden fazla kanıt şemasının özelliğini göstermiştir (Çontay, 2017; Flores, 2006; Harel ve Sowder, 1998).

Otoriteye bağlı kanıt şemasına sahip katılımcılar yaptıkları çözümleri doğrulama konusunda oldukça isteksiz davranmışlardır. Bu katılımcılar kendi bilgilerine güvenmemiş, daha bilgili olduğunu düşündükleri bir yakınlarını veya öğretmenlerini çözümlerinin doğrulayıcısı olarak göstermişlerdir. Bu kanıt şemasını kullanan katılımcılar başkalarından edindikleri bilgileri özümsemeden, ezberleyerek uygulamaya çalışmışlardır (Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003; Flores, 2002; Pala ve Narlı, 2018; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Sowder ve Harel, 1998).

Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasına sahip katılımcılar yaptıkları çözümlerin doğruluğunu çevre veya alanı hesaplamada kullandıkları formül ve algoritmalara dayandırmışlardır. Bu katılımcılar her zaman kullandıkları, aşina oldukları bu yöntemlerin, matematiksel olarak geçerli olmasa da doğru olduğunu düşünmektedirler. Sowder ve Harel'a (1998) göre alışkanlık edinilmiş kanıt şemasını kullanan öğrenciler argümanın doğruluğu yerine argümanın görüntüsünden etkilenerek karar vermektedirler. Çontay (2017) çalışmasına katılan öğretmen adaylarının iki farklı kanıt şemasına ilişkin tepkileri aynı anda ortaya koydukları durumlarda kanıt şemalarından birinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğunu belirlemiştir. Bu öğretmen adaylarının sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aradıkları, ispatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullandıkları, kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırdıkları, ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargıladıkları ve genel ifadelerle yüzeysel deliller sundukları belirlenmiştir. Pala ve Narlı (2018) çalışmalarına katılan öğretmen adaylarının %9'unun alışkanlık edinilmiş kanıt şemasını kullandığını belirlemişlerdir.

Algısal kanıt şemasını kullanan katılımcılar çözümlerinin doğruluğunu savunurken kendi oluşturdukları veya hazırda olan bir çizimi dayanak olarak göstermişlerdir (Flores, 2002). Bu kanıt şemasını kullanan katılımcılar, zihinlerindeki prototip çokgen algısına göre bir şeklin çevresi veya alanı olduğuna karar vermiş ve bu düşüncelerini savunmuşlardır. Bu nedenle sundukları gerekçeler matematiksel olarak geçersizdir. Sowder ve Harel (1998) özellikle geometri derslerinde öğrencilerin başkalarını ikna etmek için bir veya birkaç çizim yapabileceklerini ifade etmişlerdir. Yılmaz (2021) yaptığı ön testte geometriyle ilgili önermelerde katılımcı 7. sınıf öğrencilerinden bazılarının ön bilgi eksikliklerinden dolayı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıklarını, bazılarının ise prototip çizimler üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptıklarını saptamıştır. Araştırma kapsamında öğrencilerin kanıt şemaları belirlenmemiş olsa da algısal kanıt şemasına uygun işlemler ve açıklamalar yaptıkları söylenebilir.

5.2.2. Öğretim Seanslarına İlişkin Tartışma

Katılımcılardan Filiz'in (8) öğretim seanslarının başında çevre kavramının temelini oluşturan uzunluk kavramı ile ilgili sorun yaşadığı görülmüştür. Filiz (8) cetvelle bir şeklin kenar uzunluğunu ölçerken başlangıç noktasına dikkat etmeden, sadece kenarın sonuna denk gelen cetveldeki sayıyı uzunluk olarak belirlemiştir. Uzunluğu belirlerken sayısal ölçümü birim yineleme süreciyle ilişkilendirememiştir (Barrett ve Clements, 2003; Eames, 2014). Bu araştırmadaki katılımcılardan Filiz (8) gibi pek çok öğrenci cetvelle ölçüm yaparken sorun yaşamaktadır. Bazı öğrenciler çizgiler arasındaki boşlukları sayarken bazıları cetvel üzerindeki çizgileri saymaktadır (Kamii, 1995). Hatta bazı öğrenciler cetvelle ölçüm yaparken hiçbir şeyin sayılmadığını, nesnenin sonuna denk gelen sayının o nesnenin boyu olduğunu düşünmektedirler (Bragg ve Outhred, 2004). Cetvelle ölçüm yaparken zorluk yaşayan bu öğrenciler cetvelin yinelenen birimler koleksiyonu olduğunu anlamamaktadır (Eames, 2014). Birçok öğrenci bir nesne boyunca belirli kurallar dahilinde birimleri sıralayıp ortaya çıkan sayıyı söylediklerinde uzunluğu ölçtüklerini düşünmektedir. Bu öğrenciler karşılaştıkları etkinlikleri doğru bir şekilde tamamlayıp ölçümü bulsalar da çoğu zaman neyi neden saydıkları hakkında bir fikirleri yoktur (Bragg ve Outhred, 2001). Matematik derslerinde işlemsel becerilere aşırı vurgu yapılması onların arkasında yatan kavramların anlaşılmasını güçleştirmektedir.

Çevre ölçümü (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7) ve Gülce (8)) kavram imajına sahip katılımcılar araştırmacı tarafından öğretim seansları boyunca hesaplama yapmaları yerine onları şeklin sınırlarına odaklanmaya zorlayan çevreleme eylemine yönlendirilmiştir. Buradaki çevreleme eylemi için Barrett vd.'nin (2006) çalışmasında daha önce uygulanan sınır boyunca yürüyen bir karıncanın hayal edilmesi benzetiminden yararlanılmıştır. Benzer bir uygulama Kobiela ve Lehrer'in (2019) araştırmasında da bulunmaktadır. Araştırmacılar alan ile çevre arasındaki farkı keşfetmeleri için öğrencilerle oluşturdukları bölgenin çevresini dolaşmışlardır. Yol boyunca birimleri sayan öğrenciler çevrenin uzunlukları birbirine ekleyerek yol boyunca dolaştıkları uzunlukları tek bir uzunluk haline getirdiğini ifade etmişlerdir. Bu araştırmada da katılımcılar alışkın oldukları çokgenlerden alışkın olmadıkları düzensiz eğrilere doğru ilerleyen bir süreç sonunda çevreyi hesaplanması gereken bir değer olarak görmek yerine bir şeklin sınırları olarak algılamaya başlamışlardır. Öğretim seansları sonunda katılımcıların çevre ile ilgili kavram imajlarının tüm kapalı şekilleri içerdiği belirlenmiştir. Öğretim seansları kapsamında bir şeklin çevresi olup olmadığını belirlerken hesaplanabilir olması yerine şeklin kapalı olmasına dikkat etmeye başlamışlardır. İşlemsel bir anlayışla ele aldıkları çevre kavramını artık basit bir hesaplamadan ziyade tüm kapalı şekillere ait bir nitelik olarak algılamaktadırlar.

Katılımcıların tamamının sahip olduğu, eğrilerin uzunluklarının ölçülemeyeceği, dolayısıyla çevreye dahil edilemeyeceğine dair algılarını değiştirmek için, onlara iple çevreleyerek ölçme ve telden yapılmış kapalı şekilleri düz hale getirip ölçme yöntemleri önerilmiştir. Katılımcılar kapalı şekillerin etrafını esnemeyen bir iple çevreleyip ipin uzunluğunu ölçerek veya telden yapılmış kapalı şekilleri cetvelle uzunluklarını ölçebilecekleri düz bir hale getirip ölçmüşlerdir. Şeklin ilk ve son halinin uzunluğunun değişmeyeceğini (uzunluk korunumu) ifade etmişlerdir. Bu yöntemlerle eğrilerin uzunluklarını ölçebildiklerini gören katılımcılar çevre kavram imajlarına kapalı eğrileri de dahil etmişlerdir. Benzer yaklaşımların Bachour, Braun ve Tyminski'nin (2016) çalışmalarına katılan üçüncü sınıf öğrencilerinin düzensiz şekilleri olan iki gölün çevrelerini karşılaştırmak için kullandıkları belirlemişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin çevreleri karşılaştırmak için ip, bloklar ve cetvel kullandıklarını belirlemişlerdir. Bu öğrenciler çevreyi ölçmek için şeklin etrafını iple çevreleyip ipin uzunluğunu cetvelle ölçerek sayısal değerleri karşılaştırmışlar veya doğrudan gölleri çevreleyen iplerin uzunluklarını karşılaştırmışlardır. Çevreyi ölçmek için blokları kullanan öğrenciler ise benzer şekilde göllerin çevresi boyunca yerleştirdikleri blokların uzunluklarını ölçerek sayısal değerleri karşılaştırmışlardır.

Uygulama öncesinde katılımcılar aynı çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturamamışlardır. Bu algıyı değiştirmek için araştırmacı öğretim seansları kapsamında eşit uzunluktaki ip veya tel parçalarından farklı şekiller oluşturmuş ve katılımcılardan bunların çevre uzunluklarını karşılaştırmalarını istemiştir. Tüm katılımcılar ip veya tel parçalarının başlangıçtaki uzunluklarının değişmediğini (uzunluk korunumu), dolayısıyla şekillerin çevrelerinin eşit olduğunu belirtmişlerdir. Bunun yanında katılımcılar birim uzunluğa sahip çubuklarla aynı çevre uzunluğuna sahip birçok farklı şekil oluşturmuşlardır. Barrett vd. (2006) çalışmalarında öğrencilerin belirli bir çevre uzunluğuna sahip dikdörtgen ve üçgenler oluşturmalarını istemişlerdir. Araştırmacılar bu araştırmanın sonuçlarına benzer şekilde ilk ve ortaokul düzeyindeki öğrencilerin somut nesne (pipet) kullanarak problemi çözmeye çalıştıklarını belirlemişlerdir. Bu araştırmadaki katılımcılar somut nesneler kullanılarak gerçekleştirilen bu öğretim seansının devamında kareli ve noktalı kâğıt üzerinde aynı çevre uzunluğuna sahip birçok farklı şekil oluşturabilmiştir. Ayrıca, oluşturdukları şekillerin önceden olduğu gibi sadece prototip çokgenler değil, daha karmaşık şekiller olduğu görülmüştür.

Uygulama öncesinde ve öğretim seansları sırasında bir şeklin çevresinin onu oluşturan parçaların çevreleri toplamına eşit olduğunu düşünen katılımcılar (Neşe (5) ve Gülce (8)) bulunmaktaydı. Bu katılımcılar şeklin bütünü yerine onu oluşturan parçalara odaklandıkları için şeklin çevresini gösterirken iç bölgesinde kalan uzunlukların da üzerinden geçerek onları çevreye dahil etmişlerdir. Abed ve Alkhateeb (2003) çalışmalarında lisans öğrencilerinden bir köşesinden eşkenar üçgen şeklinde bir parça kesilen dikdörtgenin çevre ve alanını nasıl bulacaklarını açıklamalarını istemişlerdir. Bu durumda geriye kalan şeklin çevresini bulmak için 71 öğrenciden 18'i üçgenin çevresini dikdörtgenin çevresinden çıkarmayı önermiştir. Bu çalışmadaki bazı katılımcılar da benzer olarak bir şeklin çevresini bulmak için onu oluşturan parçaların çevrelerini toplamışlardır. Katılımcıların bu algısını değiştirmek amacıyla araştırmacı somut nesneler üzerinden ölçümler yaptırarak onları düşüncelerinin aksi örneklerle yüzleştirmiştir. Araştırmacı, parçalara odaklanmaları yerine, onları şekli bir bütün olarak düşünmeye yönlendirmiştir. Ardından bu bütünün sınırlarını göstermelerini istemiş, böylece çevre ile sınır arasındaki ilişkiyi hatırlatmıştır. Bunun üzerine katılımcılar düşüncelerinin hatalı olduğunu fark edip başlangıçtaki fikirlerini değiştirmişlerdir.

Katılımcıların çevre kavramına ait kavram imajları formal tanıma yaklaşıp içerdiği hata ve sınırlılıklar giderilince araştırmacı alan kavramıyla ilgili öğretim seanslarına başlamıştır. İlk klinik görüşme sonuçlarına göre katılımcılar alan kavramına yönelik sınır bölgesi ve alan ölçümü kavram imajlarına sahiplerdi. Sınır bölgesi kavram imajına sahip katılımcılar uygulama öncesinde alan ile çevreyi birbirine karıştırmakta ve bu iki kavramı aynı şekilde göstermekteydiler. Her iki kavramın da şeklin sınırları ile ilgili olduğunu düşünmekteydiler. İlköğretim düzeyindeki birçok öğrencinin alanı ölçmek için hatalı bir şekilde uzunluk birimlerini veya işaretleyicileri (cetveldeki çizgiler veya geometri tahtasındaki çiviler gibi) saydıkları daha önceki araştırmalardan bilinmektedir (Kamii ve Kysh, 2006; Lehrer, Jenkins ve Osana, 1998). Huang ve Witz (2013) dördüncü sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada 22 öğrenciden 12'sinin bir üçgenin çevre ve alanını ölçme arasındaki farkları açıkça belirtebildiğini ifade etmiştir. Bu araştırmada çevreyle ilgili yapılan öğretim seansları sonunda katılımcıların başlangıçtaki algılarının büyük oranda değiştiği belirlenmiştir. Alan ile ilgili öğretim seansları başladığında katılımcıların yaptıkları açıklamalardan çevre ve alanı farklı kavramlar olarak ele aldıkları anlaşılmıştır. Çevreyle ilgili öğretim seansları bile iki kavram arasındaki farkları keşfetmeleri için büyük bir fırsat yaratmıştır.

Alan ölçümü kavram imajına sahip katılımcıların kavram imajlarındaki sınırlılıkları ortadan kaldırmak ve kavram imajlarını formal tanıma yaklaştırmak için, araştırmacı şekillerin yer kaplama özelliğine dikkat çekmiştir. Katılımcılardan birçok farklı şeklin yer kaplayıp kaplamadığını belirlemeleri, eğer kaplıyorsa bunu şekil üzerinde göstermeleri ve gösterdikleri bu bölge ile alanı ilişkilendirmeleri istenmiştir. Böylece alanını hesaplamak için bir formül veya algoritma bilmedikleri şekillerin de alanı olduğunu kabul etmişlerdir. Kavram imajları sadece alanını hesaplamayı bildikleri çokgenlerle sınırlı olan bu katılımcılar öğretim seansları sürecinde kavram imajlarına tüm kapalı şekilleri dahil etmişlerdir. Huang ve Witz (2013) çalışmalarına katılan 22 dördüncü sınıf öğrencisinden 13'ünün alan için "düzlemsel bir şeklin miktarı" gibi kavramsal bir yorum yapabildiğini belirlemişlerdir. Diğer 9 öğrencinin ise alan kavramını alan ölçümü ile karıştırdığı, uzunluğun genişlikle çarpımının alan ve çevreyi temsil ettiğine inandığı veya alanı bir nesne olarak ele aldığı görülmüştür. Kobiela ve Lehrer (2019) ise çalışmalarında alanın yer kaplama özelliğini dinamik bir anlayışla ele almışlar, öğrencilerin boyama ve süpürme hareketleriyle istenen alana sahip bölgeler oluşturmasını sağlamışlardır. Öğretimin başlangıcında, öğrencilerin alan ve alanı ölçmeyle ilgili yorumları, önceki eğitimlerini yansıtan bir şekilde dikdörtgenin alan formülüne odaklanmıştır. Öğretimde kullanılan boyama ve süpürme hareketi, bir uzunluğun diğerine taşınmasıyla veya sürüklenmesiyle üretilen ve aynı tür birimler tarafından ölçülen yeni alan yorumlarını teşvik etmiştir. Brady ve Lehrer (2020) ise çalışmalarında alanı hem somut hem de sanal ortamda boyama ve süpürme hareketi ile ele almışlardır. Sanal ortam öğrenci tarafından belirlenen ölçeklerde, boyutlarda ve hassasiyet seviyelerinde süpürülmüş şekillerin üretimini sağlamıştır. Görüldüğü gibi alanı bir şeklin sınırları içindeki yüzey ile ilişkilendiren etkinlikler öğrencilerin alan kavramını doğru yapılandırmasını kolaylaştırmaktadır.

Araştırmacı katılımcılara bir bölgenin alanını ölçmek için üçgen, kare ve daire birimler sunduğunda katılımcıların ilk yöneldiği genellikle birim kareler olmuştur. Eğer alanı ölçülecek şekil dikdörtgen değilse tercihlerini o şekle benzeyen birimden yana kullanmışlardır. Fakat bölgeyi kaplarken birim kareler yerine üçgen veya daire birimleri kullanmanın boşluklar bırakacağı, tüm yüzeyi kaplamayacağı için uygun olmayacağını belirtmişlerdir. Farklı şekiller mevcut olduğunda, öğrencilerin genellikle hedef alana benzeyen birimler (üçgen şekiller için üçgen birimler) seçtikleri önceki araştırmalarda da görülmüştür (Lehrer, Jenkins ve Osana, 1998). Katılımcılar birim karelerle şekilleri kaplayıp şeklin içerdiği birim kareleri sayarak alanı kolaylıkla hesaplayabilmişlerdir. Daha önce yapılan birçok araştırmada da somut birim kareler verildiğinde öğrencilerin bir bölgenin alanını ölçebildikleri görülmüştür (Lehrer, 2003; Outhred ve Mitchelmore, 2000). Katılımcılar bir şeklin alanını ölçmek için yüzeyini eş birimlerle çakışma veya boşluk olmadan tamamen kaplamak gerektiğinin farkındadırlar. Ayrıca, yüzeyi kaplayan birim kare sayısını alan ölçümü olarak ifade etmişlerdir.

Öğretim seanslarında katılımcılara sağlanan somut birim kareler, birim kareli ve noktalı kâğıt ile birim kareli şeffaf yüzey gibi materyaller onları satır ve sütunlar oluşturmaya yöneltmiştir. Cullen ve Barrett (2020) öğrencilere ızgaralı bölgeler verilmesinin onları, birim şekline bakılmaksızın (birimler kare şeklinde olmasa da), satır ve sütunlar boyunca düzenlenmiş birim koleksiyonları oluşturmaya yönlendirdiğini belirtmişlerdir. Bazı araştırmacılar ise öğrencilere birim karelerin hazır olarak verilmesinin onları dizi yapısını kavramsal olarak anlamadan, zihinsel birleşik birimler oluşturmadan sadece bu yapıyı taklit etmeye yönlendirebileceğini ifade etmişlerdir (Lehrer, 2003; Outhred ve Mitchelmore, 2000; Sarama ve Clements, 2009). Bu araştırmada katılımcılara önce somut birim karelerle destek verilerek birim kavramını, birleşik birimleri ve satır-sütun yapısını keşfetmeleri sağlanmıştır. Ardından birim kareli kâğıt ve birim karelere ayrılmış şeffaf yüzey kullanılarak bu keşiflerini uygulamaya yönlendirilmişlerdir.

Araştırmacı, önce katılımcıların dikdörtgenlerin alanını ölçebilmeleri için yeterli sayıda birim kare vermiştir. Katılımcılar birer birer veya ritmik sayarak dikdörtgeni kaplayan birim kare sayısını bulmuşlardır. Sonraki aşamada araştırmacı tüm yüzeyi kaplamaya yetmeyecek sayıda birim kare verince birim kareleri birer satır ve sütun boyunca yerleştirmişlerdir. Ardından satır veya sütunları ritmik sayarak alanı hesaplayabileceklerini keşfetmişlerdir. Bu aşamadan sonra katılımcılar dikdörtgeni kaplayan birim dizisini satır veya sütunlar halinde ritmik saymışlar, sonraki adımda birer satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarpmayla ilişkilendirmişlerdir. Ardından birim kare sayılarının kenar uzunluklarıyla ilişkisini keşfetmişlerdir. Araştırmanın bulguları alan ölçme öğrenme yörüngeleri ile ilgili literatürle uyumludur. Öğrenme yörüngelerinde de öğrencilerin alanı önce birimler koleksiyonu, ardından satır ve sütunlardan oluşan bir dizi ve son olarak çarpımsal bir yapı olarak gördükleri belirlenmiştir (Barrett, Clements ve Sarama, 2017; Battista, 2004, 2007; Sarama ve Clements, 2009). Battista (2007, s. 897-898), öğrencilerin birim kare dizilerini anlamlı bir şekilde sıralayabilmesini beş aşamada ele almıştır. Buna göre, başlangıçta öğrenciler bir dizi içindeki birim kareleri koordine edemezler ve yaptıkları numaralandırma sistematik değildir. Daha sonra zihinsel modelin kavramsallaştırılmasıyla alanı satır ve sütunlardan oluşan bir dizi olarak hayal edebilir, tek tek birimler yerine satır ve sütunlar gibi kompozit birimler kullanarak numaralandırma yapabilirler. Sonunda şemaları yansıtma ve analiz yapabilecekleri bir soyutlama düzeyine ulaştığında numaralandırma stratejisi ile mekansal yapılanma arasındaki bağlantıyı anlayabilirler. Bu araştırmadaki katılımcıların kullandığı yöntemler öğretim seansları sürecinde yukarıda sıralanan düzeylere uygun şekilde ilerlemiştir.

Katılımcılardan sadece Filiz (8) satır-sütun ilişkisinden çarpma işlemine geçişte sorun yaşamıştır. Çarpma yoluyla da aynı sonuca ulaşabileceğini deneyimlese de bu yöntemi kullanmak yerine ritmik sayma yöntemini kullanmayı tercih etmiştir. Clements vd. (2018) 1, 2, 3. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri araştırmada deney gruplarında yineleme ve bölümleme stratejilerine dayalı videolar kullanmışlardır. Araştırmanın sonucunda her iki strateji doğru cevaplar üzerinde benzer etkiye sahip olsa da alt bölümlere ayırma stratejisinin yineleme stratejine göre kavramsal yaklaşımları desteklemede daha etkili olduğunu belirlemişlerdir. Bu araştırmadaki Filiz (8) gibi düşünen öğrenciler için alt bölümlere ayırma yöntemini içeren uygulamalar onların kavram imajlarının değişimi için daha etkili olabilir.

Katılımcıların neredeyse hepsi başlangıçta hesaplanamayacağını düşündükleri için kapalı eğrilerin alanı olmadığını belirtmiştir. Bu düşünceyi değiştirmek için araştırmacı birim karelere ayrılmış şeffaf bir yüzeyi kullanarak kapalı eğrilerin alanlarını ölçebilmelerini sağlamıştır. Kapalı eğrilerin alanını hesaplamak için katılımcılar birim kareli yüzeyi şekil üzerine yerleştirip şeklin sınırları içinde kalan birim kareleri saymışlardır. Bu aşamada birimleri tek tek ve ritmik saymaya geri dönmüşlerdir. Alanı bu şekilde ölçebildiklerini görünce katılımcılar başlangıçtaki düşüncelerini değiştirmiş, kapalı eğrilerin de alanı olduğunu kabul etmişlerdir. Benzer şekilde Bachour, Braun ve Tyminski (2016) çalışmalarına katılan üçüncü sınıf öğrencilerinin düzensiz şekilleri olan iki gölün alanını karşılaştırırken tüm yüzeyi mümkün olduğunca az boşluk bırakarak kaplamak için birim küpler veya bloklar kullandıklarını belirlemişlerdir. Ardından öğrencilerin alanı büyük olan gölü belirlemek için küp veya blokları saydıkları görülmüştür. Wickstrom, Fulton ve Carlson (2017) çalışmalarına katılan öğretmen adayları arasından bazılarının alanı ölçmek için bölgeyi birim karelere böldükten sonra tüm birimleri saydıklarını belirlemişlerdir. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adaylarının birimler ile alan arasındaki ilişkiyi belirlemek için çizimlere bağımlı oldukları görülmüştür. Sınıf düzeyleri değişse de öğrenciler alışkın olmadıkları kapalı eğrilerin alanını ölçmek için benzer stratejiler izlemektedirler.

Özellikle kapalı eğrilerin alanını ölçerken karşılarına çıkan kesirli birimler başlangıçta zorluk çıkarsa da katılımcılar bu durumun üstesinden gelebilmiştir. Bir kısmı kesirli birimlerin sayısının yarısını tam birimlerin sayısına ekleme yöntemini tercih etmiştir. Diğerleri ise her bir kesirli birimi tam bir birim yapacak eşleşmeler belirleyerek hareket etmiştir. Katılımcılar alan birimlerinin parçalanıp birleştirilmesi konusunda sorun yaşamazlarken bu parçaları sayısal olarak ifade etmede sorun yaşamışlardır. Bunun sebeplerinden biri katılımcıların kesir kavram imajlarındaki sınırlılıklar olabilir. Bu araştırmada olduğu gibi Symons (2011) sınıfındaki öğrencilerin düzensiz bir şeklin alanını ölçebilmesi için şeklin yüzeyini bir ızgara ile kaplamayı önermiştir. Bu yöntemi uygulayan öğrencilerin bazıları kısmi karelerin sayısının yarısını tam karelere eklemiştir. Bazıları ise kısmi kareleri kesirlerle ifade edip toplam alanı hesaplamışlardır. Cavanagh (2007) araştırmasında 7. sınıf öğrencilerinin alan ölçme anlayışlarını incelemiştir. Öğrenciler alan ölçmek için cetvel veya santimetrekarelere ayrılmış şeffaf bir yüzey kullanmışlar veya şeklin içinde satır-sütunlardan oluşan bir ızgara yapısı oluşturmuşlardır. Her ne kadar bu çalışmada kapalı eğrilere yer verilmemiş olsa da öğrencilerin üçgenlerin alanını ölçerken bile kesirli birimlerde zorluk yaşadıkları görülmüştür. Mamona-Downs ve Papadopoulos'un (2006) araştırmasındaki öğrencilerden biri de alan ölçmede kesirli birimleri kullanmada zorluk yaşamıştır. Üçüncü sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada Casa, Spinelli ve Gavin (2006) düzensiz kapalı şekillerin alanlarını ölçmek için nasıl stratejiler kullandıklarını araştırmışlardır. Öğrencilerden biri sadece tam birimleri sayıp kısmi birimleri göz ardı ederken bir başkası kesirlerle ilgili bilgisini kullanarak birleştirilebilen kısmi birim kare çiftlerini eşleştirmiştir. Bunun yanında dikdörtgen dizileri oluşturup hesaplama için satır-sütun yapısını kullanan öğrenciler de olmuştur.

Katılımcıların birçoğu alanları karşılaştırırken şekillerin görünümlerine odaklanarak tahminde bulunmuştur. Yaptıkları ölçümlerle tahminlerini kontrol ederek her seferinde biraz daha iyi tahminler yapmaya başlamışlardır. Eames vd. (2020) çalışmalarında 4. sınıf öğrencilerinin alan tahminlerinin gelişimini incelemişlerdir. Başlangıçta öğrencilerin küçük dikdörtgenlerin alanlarını tahmin etme performansları orta ve büyük dikdörtgenlere göre daha iyidir. Öğretim yapılan gruptaki öğrencilerin orta ve büyük boyutlu dikdörtgen kategorilerindeki alan tahmin performansında önemli iyileşme göstermiştir. Fakat bu iyileşme küçük dikdörtgen alanlarını tahmin etmede görülmemiştir. Son durumda öğrenciler küçük dikdörtgenlerin alanlarını tahmin ederken orta ve büyük dikdörtgenlere göre önemli ölçüde daha iyi performans göstermişlerdir. Ayrıca öğretimle birlikte çok yüksek tahminlerin büyük ölçüde azaldığı belirlenmiştir. Bu araştırmada da katılımcılar alanları tahmin etmede deneyim kazandıkça, her seferinde gerçek değere daha yakın tahminlerde bulundukları görülmüştür.

Katılımcıların alan korunumu konusunda sorun yaşamadıkları belirlenmiştir. Buna göre aynı parçalar kullanılarak farklı bir şekil oluşturulsa da alanın değişmeyeceğini ifade etmişlerdir. Alan korunumuyla ilgili düşüncelerinin doğruluğunu savunmak için şekil yer değiştirdiğinde (ötelendiğinde) alanının değişmeyeceğini ifade etmişler, başlangıçtaki şekil ile parçaları üst üste çakıştırmışlar veya her iki şeklin alanlarını ölçüp karşılaştırmışlardır. Dördüncü sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada Huang ve Witz (2011) alan ölçme ile ilgili geometrik işlem ve hareketler, sayısal hesaplamalar ve bunların birleşiminden oluşan üç öğretim yaklaşımı kullanmışlardır. Öğrencilerin alanları ölçmek için ayrıştırma, yeniden birleştirme ve üst üste getirme geometrik işlemlerini kullanmanın öneminin farkında oldukları görülmüştür. Sayısal hesaplamalarla geometrik hareketleri birleştiren bir öğretim alan öğrencilerin daha üst düzey problemleri çözme ve çözümlerini gerekçelendirmede daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Mamona-Downs ve Papadopoulos'un (2006) araştırmasında da öğrencilerden biri alanları karşılaştırmak için şekillerden birini bölgelere ayırmış ve daha sonra bu bölgeleri diğer şeklin üzerine taşımıştır. Öğrenci, taşıma sonrasında artan parça olmadığı için bu şekillerin alanlarının aynı olduğunu ifade etmiştir. Bu araştırmadaki katılımcılar da ayrıştırma, yeniden birleştirme ve üst üste getirme stratejilerini uyguladıkları belirlenmiştir.

Bu araştırmada şekiller parçalara ayrılıp yeniden düzenlendiğinde başlangıçta alanın değişeceğini tahmin eden az sayıda katılımcı ise birim kareler yardımıyla ölçüm yaptıktan sonra fikirlerini değiştirmişlerdir. Araştırmacı bu katılımcıların fikirlerini değiştirmek için onları aksi bir örnek durumla karşılaştırmıştır. Lise ve üniversite düzeyindeki öğrenciler bile alan korunumunu belirlemek için kesip yapıştırma veya görsel tahminlerde bulunma gibi informal sezgisel yöntemlere başvurmaktadırlar. Bu durum öğrencilerin ileri düzeylerde bile algısal kanıt şemasını kullanmaya devam ettikleri şeklinde yorumlanmıştır. Öğrencilerin alan eşitliğini eşlik kavramıyla ilişkilendirerek eş olmayan şekillerin eşit alanlara sahip olamayacağını düşündükleri tespit edilmiştir (Kospentaris, Spyrou ve Lappas, 2011). Bu çalışmadaki katılımcıların alanın korunmadığını düşünme sebeplerinden biri de şeklin görünümünün değişmesi olabilir. Başlangıçtakinden farklı bir görünümde olduğu için alanın değişeceğini tahmin etmiş olabilirler. Alan korunumunun anlaşılmasında karşılaştırılan şekillerin türünün etkili olduğunu gösteren çalışmalar da bulunmaktadır. Örneğin Kordaki (2003), çalışmasına katılan öğrencilerin paralelkenar için alan korunumunu kabul etseler de üçgenler söz konusu olduğunda zorluk yaşadıklarını belirtmiştir. Bu çalışmada da katılımcılar dikdörtgen dışındaki şekillerin alanlarını belirlemede ve hesaplamada zorluk yaşamışlardır. Korunumla ilgili etkinlik de paralelkenar ve düzensiz bir şekli içerdiği için alanın değişmeyeceğini kabul etmekte sorun yaşamış olabilirler.

Katılımcılar başlangıçta aynı alana sahip şekillerin çevrelerinin de her zaman aynı olacağını tahmin etmişlerdir. Bu yanılgının sezgisel olarak "aynı A, aynı B" şeklinde düşünmelerinden kaynaklandığı söylenebilir (Stavy ve Tirosh, 2000). Öğretim seansları kapsamında araştırmacıyla birlikte somut nesnelerle yaptıkları uygulamalar sonucunda bunun her zaman doğru olmadığını deneyimlemişlerdir. Katılımcıların aynı alana sahip olacak şekilde oluşturdukları şekillerin çevrelerinin bazen farklı bazen aynı değerleri aldığını tecrübe etmeleri fikirlerini değiştirmede etkili olmuştur. Aynı çevreye sahip şekiller oluşturup alanlarını karşılaştırmayı içeren uygulamalar sonucunda da benzer sonuçlara ulaştıkları belirlenmiştir. Farklı yaş gruplarıyla yürütülen birçok çalışmada benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Chappell ve Thompson (1999) ortaokul öğrencilerinden belirli bir çevre uzunluğuna sahip şekiller çizmelerini istediklerinde, birçoğu çevre yerine alanı aynı olan şekiller çizmiştir. Şekillerin çevreleri aynı olsa da farklı alanlara sahip olabileceğini, araştırmaya katılan çok az sayıda öğrenci gösterebilmiş veya açıklayabilmiştir. Bu yanılgı daha üst öğrenim düzeylerinde bile kendisini göstermektedir. Tossavainen, Suomalainen ve Mäkäläinen (2016) öğretmen adaylarının alanla ilgili kavram imajlarını inceledikleri çalışmada bazı katılımcıların düzensiz bir düzlemsel şeklin alanını ölçebilmek için şekli düzenli hale dönüştürmeye çalışırken çevre sabit tutulduğunda alanın da değişmeyeceğini varsaydıklarını tespit etmişlerdir.

Katılımcıların neredeyse tamamı (Gülce (8) hariç) ilk klinik görüşmelerde kenar uzunlukları ve alan arasında doğrusal bir ilişki olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Günlük yaşamda, okullardaki fen ve matematik öğretiminde ve bilimsel alanda doğrusal ilişkilerin geniş bir uygulama alanına sahip olması bireylerin her alanda doğrusallığı uygulama eğilimine yol açabilmektedir. Doğrusallığın bu şekilde yanlış kullanımına yönelik çeşitli örneklerle farklı yaş seviyelerinde, matematik veya diğer bilim dallarında karşılaşılabilmektedir (Van Doren vd., 2004). Doğrusallığın yaygın kullanımı bu hatalı düşüncenin nedenlerinden biri olsa da bir başka neden uzunluk ve alan kavramlarının yeterli düzeyde anlaşılmaması olabilir. Bu nedenle araştırmacı katılımcıların düşüncelerini değiştirmek amacıyla onlardan birçok şeklin kenar uzunluklarını belirli bir katına çıkararak bu durumda alanın nasıl değişeceğini tahmin etmelerini ve hesaplamalarını istemiştir. Öğretim seansı kapsamında inceledikleri birçok örnek durum sonunda katılımcıların çoğu (Filiz (8) hariç) kenar uzunluğu ile alan arasındaki karesel ilişkiyi keşfetmiştir. Katılımcıların çoğu uygun matematik dilini kullanamasalar da aradaki ilişkiyi anlayıp uygulayabilmişlerdir. 8. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada Van Doren vd. (2004) doğrusallık yanılgısını ortadan kaldırmak için 10 derslik bir öğretim yapmışlardır. Öğretim sonrasında öğrencilerin doğrusal çözüm yöntemlerini doğrusal olmayan maddelere daha az uyguladıkları görülmüştür. Ancak son test ve kalıcılık testinde, deney grubu öğrencilerinin orantılı problemler üzerinde daha fazla hata yapmaya başladıkları, yeni öğrendikleri stratejileri daha önce çok iyi çözdükleri orantılı problemlere aşırı genelledikleri belirlenmiştir. Uygulanan öğretim sonrasında bile öğrenciler orantılı ve orantılı olmayan durumları ayırt etmede zorlanmışlardır. Görüldüğü gibi öğrencilerde kavramsal bir değişim yaratmak pek kolay değildir.

Araştırmacı öğretim seansları boyunca sorduğu sorularla katılımcıları uyguladıkları yöntemleri ve buldukları sonuçları sorgulamaya yönlendirmiştir. Her problem durumu için çözümlerinin doğruluğundan nasıl emin olduklarını sorarak onları çözüm yöntemlerini açıklayıp düşüncelerini savunmaya zorlamıştır. Katılımcıların başlangıçta en sık başvurduğu kanıt şeması algısal kanıt şeması olmuştur. Bu durumun nedenlerinden biri öğretim seanslarının içeriğinde araştırmacının katılımcılardan şekiller üzerinde çevre ve alanı göstermelerini istemesinden kaynaklanmış olabilir. Bu nedenle katılımcılar algısal kanıt şemasını kullanma eğilimi göstermiş olabilirler.

Öğretim seansları boyunca araştırmacının katılımcılara farklı örnekler göstererek düşüncelerini değiştirmeye çalışması, onları örnek temelli kanıt şemasını kullanmaya yöneltmiş olabilir. Kanıt şemalarıyla ilgili daha önce yapılan pek çok çalışmada ortaokul öğrencilerinin çoğunlukla deneysel argümanlar ve gerekçelendirmeler sundukları, örnekler üzerinden doğrulama eğiliminde oldukları belirlenmiştir (Aylar, 2014; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009; Şen ve Güler, 2015; Yılmaz, 2021). Sowder ve Harel (1998) örnek temelli kanıt şemasının matematiksel varsayımların deneysel doğasını anlamak için önemli olduğunu belirtmişlerdir. Bu araştırmadaki tüm katılımcılar öğretim seansları sürecinde örnek temelli kanıt şemasını en az bir kez kullanmıştır.

Katılımcılar öğrendikleri yeni bilgilerle kavram imajlarını değiştirip geliştirdikçe kendi bilgilerine olan güvenleri artmıştır. Bunun sonucunda otoriter kanıt şemasını kullanmaktan büyük oranda (Neşe (5) ve Fırat (6) hariç) vazgeçmişlerdir. Bunun yerine yeni oluşturdukları kişisel kavram tanımlarını, işlemler arasındaki ilişkileri, keşfettikleri özellikleri kullanmaya başlamışlardır. Bu işaretler dönüştürülebilen kanıt şemasına geçiş yaptıklarının göstergesi olarak kabul edilmiştir. Flores (2006) çalışmasına katılan ortaokul ve lise düzeyinden öğrencilerden dönüştürülebilen kanıt şemasını kullananların diğerlerine göre daha genel argümanlar sunduklarını belirlemişlerdir. Bu öğrenciler genel duruma yönelik akıl yürütmelerini kavramlara ve kavramların birbiriyle ilişkisine dayandırmışlardır.

Bu araştırmadaki tüm katılımcılar öğretim seansları sürecinde dönüştürülebilen kanıt şemasını en az bir kez kullanmıştır. Bu durumun bir nedeni de öğretim seansları kapsamında katılımcılara matematiksel fikirlerini savunmaları ve kanıtlamalarını gerektiren bir ortam sunulmasıdır. Yılmaz (2021) çalışmasında 7. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdiği sorgulama temelli öğretimle birlikte öğrencilerin yaptıkları kanıt ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna olduklarını belirlemiştir. Ayrıca öğrencilerin matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğuna dair kavrayış sağlamaları ve kanıt yaparken kullandıkları bir kavramın sonuçlarını görmeleri sayesinde bu kavram hakkında daha fazla bilgi sahibi olmalarının sağlandığı tespit edilmiştir. Kanıtın analiz edilmesi sonucu argümandaki anahtar kavramın genellenmesi ile öğrencilerin matematiksel keşif yapmalarının sağlandığı görülmüştür. Ayrıca bazı uygulamalarda öğrencilerin yaptıkları kanıtların matematiksel kavramlar arasındaki ilişkileri görünür hale getirdiği belirlenmiştir. Görüldüğü gibi doğru deneyimler sayesinde ortaokul öğrencilerinin kanıt yapması ve bu kanıtlama sürecinde kavramlar ve kavramlar arası ilişkileri keşfetmesi sağlanmıştır. Huang ve Witz (2011) dördüncü sınıf düzeyinde yürüttükleri çalışma sonucunda, öğrencilerin alan ölçme formüllerini anlamasını sağlamak için, sayısal hesaplamaları geometrik hareketlerle birleştiren bir öğretim yaklaşımı yanında, onların matematiksel fikirlerini kanıtlamalarını ve gerekçelerini sözlü olarak açıklamalarını gerektiren bir ortam yaratılmasını önermişlerdir. Barak (2018, s. 197-205) öğretmen adaylarıyla yürüttüğü çalışmasında katılımcıların genel olarak sınıf düzeyleri arttıkça matematiksel dili kullanma, ispatın formal kısmını oluşturma ve problem merkezli kısmını çözmek için gerekli olan kavramsal ve işlemsel bilgileri ile bu bilgileri kullanma becerilerinin geliştiğini tespit etmiştir. Buna rağmen tüm soruları doğru yanıtlayabilen bir katılımcı olmaması katılımcıların yeterli kavramsal bilgiye sahip olmamalarının ispatlama süreçlerinde başarısız olmalarına neden olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Bu araştırmanın katılımcılarının sınıf düzeyleri ile kanıt şemaları arasında böyle bir ilişki kurulamamış olsa da katılımcıların kavram imajları formal tanıma yaklaştıkça kullandıkları kanıt şemalarının dışsal şemalardan deneysel ve analitik şemalara doğru değiştiği tespit edilmiştir.

5.2.3. Uygulama Sonrasına İlişkin Tartışma

Öğretim seanslarının ardından yapılan son klinik görüşmeler incelendiğinde katılımcıların çevre kavramıyla ilgili sınır ve dış sınırlar olmak üzere iki kavram imajına sahip oldukları görülmüştür. Sınır kavram imajına sahip katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6), Fırat (6), Can (7) ve Gülce (8)) çevreyi formal tanıma uygun olarak bir kapalı şeklin sınırları olarak düşünmektedirler. Dış sınırlar kavram imajına sahip katılımcılar (Filiz (8) ve Mısra (7)) çevreyi kapalı şekillerin sınırlarının hemen dışında, şekille aynı biçime sahip; ama şekilden ayrı bir olgu olarak düşünmektedirler. Dış sınırlar kavram imajına sahip katılımcıların düşüncelerinde uygulamadan önceki etraf kavram imajının etkileri devam etmektedir.

Katılımcıların alan kavramıyla ilgili uygulama sonrası iç bölge kavram imajı olmak üzere tek bir kavram imajına sahip oldukları belirlenmiştir. Katılımcılar açıklamalarında alan kavramını bir şeklin sınırları içinde kalan bölge olarak ifade etmişlerdir. Yaptıkları çizimlerde de alanı şekillerin iç bölgesini tarayarak göstermişlerdir. Tomooğlu ve Kurtuluş (2020) 6. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada üçgen ve paralelkenarın alanını ölçmeye yönelik 5E öğretim modeline uygun bir öğretim planlamışlardır. Uygulanan öğretimle birlikte öğrencilerin alanı ölçmek için şekillerin sınırları içinde kalan birim kareleri saydıkları belirlenmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin alan ile şeklin sınırları içindeki bölgeyi ilişkilendirdiği söylenebilir. Çavuş Erdem (2018) çalışmasına katılan öğrencilerin uygulama öncesi yüzeysel, dışa bağımlı ve hatalı olan bilgilerinin, matematiksel modelleme etkinlikleri içeren alan ölçme öğretimi sonrasında daha kavramsal, içe dönük ve doğru bir yapıya dönüştüğünü ifade etmiştir. Uygulama öncesinde alanı en x boy olarak algılayan öğrencilerin, algısının değiştiği ve alanı bir bölge olarak açıkladıkları görülmüştür.

Katılımcılar alanı ölçmek için şekillerin içindeki birim kareleri sayma yöntemini kullanmışlardır. Bu amaçla dikdörtgenler için satır veya sütunlar boyunca ritmik sayma veya birer satır ve sütundaki birim kare sayılarını çarpma işleminden faydalanmışlardır. Wickstrom, Fulton ve Carlson (2017) çalışmalarına katılan öğretmen adaylarının bir bölgenin alanını ölçmek için kenar uzunlukları boyunca birim kareler çizerek ritmik sayma veya çarpma yaptıklarını belirlemişlerdir. Araştırmacılar alan ölçmeyi anlamak için alan birimleri ve yinelemenin yanı sıra uzunluk, genişlik ve birim kareler arasındaki sayısal ilişkileri anlamanın önemine vurgu yapmışlardır. İşlemsel beceriler alan kavramının özellikleri ile koordine edildiğinde alan kavramı ve alan ölçme daha sağlam bir şekilde anlaşılmaktadır (Barrett vd., 2011; Barrett, Clements ve Sarama, 2017).

Sınıf düzeyleri arttıkça katılımcıların çevre ve alan kavramlarıyla ilgili sahip olduğu algıları değiştirmek daha zorlaşmıştır. Özellikle 7. ve 8. sınıf düzeyindeki katılımcıların (Filiz (8) ve Mısra (7)), öğretim seanslarında hatalı olduğunu tecrübe etmelerine rağmen, önceki düşüncelerine bağlı kaldıkları belirlenmiştir. Kalıplaşmış yargılara sahip bu katılımcıların düşüncelerini değiştirmekte araştırma kapsamında uygulanan öğretim seansları bazı noktalarda yeterli olamamıştır. Örneğin Filiz (8) son klinik görüşmede uygulama öncesine benzer şekilde, kapalı eğrilerin çevresi olmadığını söylemiştir. Katılımcının çevreyle ilgili yerleşmiş algısı yeni bilgilere karşı direnç göstermektedir. Yıllar süren deneyimler sonucu inşa edilen kavram imajlarının (Akkoç, 2008) nispeten kısa süreli bir öğretimle değiştirilmesi oldukça zordur. Daha küçük (5 ve 6) sınıf düzeylerindeki katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Ceylan (6) ve Fırat (6)) ise karşılaştıkları yeni fikirlere daha kolay uyum sağlamışlardır.

İlk klinik görüşmelerde farkında olmadıkları kenar uzunluğu ile alan arasındaki karesel ilişkiyi öğretim seansları kapsamında karşılaştıkları birçok örnek durum üzerinden bir genelleme yaparak keşfetmişlerdir. Katılımcıların büyük çoğunluğu bu genellemeyi son klinik görüşmelerde de kullanabilmiştir. Benzer şekilde Çavuş Erdem'in (2018) alan ölçmeyi matematiksel modelleme etkinlikleriyle ele alan çalışmasında uygulama sonrasında öğrencilerin birim kare kullanarak kenar uzunluğu ile alan arasındaki fonksiyonel ilişkiyi görebildikleri ve açıklayabildikleri belirlenmiştir. Van Doren vd. (2004) 8. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada doğrusallık yanılgısını ortadan kaldırmak için 10 derslik bir öğretim yapmışlardır. Öğretim sonrasında öğrencilerin doğrusal çözüm yöntemlerini doğrusal olmayan maddelere daha az uyguladıkları görülmüştür. Ancak uygulanan öğretime rağmen öğrencilerin orantılı ve orantılı olmayan durumları ayırt etmede zorlandıkları belirlenmiştir.

Katılımcılar son klinik görüşmelerde uygulama öncesinde olduğu gibi birden çok kanıt şemasını kullanmışlardır. Katılımcıların kullandığı kanıt şemaları kendilerine yöneltilen sorulara göre değişiklik göstermiştir. Aydoğdu, Olkun ve Toluk (2003) çalışmalarına katılan 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin konu ve problemin bağlamına göre kullandıkları kanıt şemalarının farklılaştığını belirtmişlerdir. İskenderoğlu (2010) da çalışmasına katılan öğretmen adaylarının farklı problemler için genellikle farklı kanıt şemalarını kullandıklarını ifade etmiştir.

Son klinik görüşmelerde otoriteye bağlı kanıt şemasını kullanan bir tek katılımcı (Fırat (6)) olsa da bu kanıt şeması katılımcı için eskisi kadar baskın değildir. Bu durumun nedenlerinden biri katılımcıların kavram imajlarında yaşanan değişim sonrasında kendi bilgilerine olan güvenlerinin artması olabilir. Daha önce farklı sınıf düzeylerinden öğrencilerle ve öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmalarda katılımcıların dışsal kanıt şemasını kullanma eğiliminde oldukları görülmüştür (Pala ve Narlı, 2018; Yıldız ve Şengül, 2017). Sarı Uzun ve Bülbül (2013) öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmada uygulanan öğretim deneyi sonrasında katılımcıların kanıtlama becerilerinin geliştiğini belirlemişlerdir. Bunun nedenlerini katılımcıların görüşmelerde, sorulara verdikleri yanıtlar üzerinde düşünmeleri, kendi yanıtlarını kontrol etmeleri, araştırmacının sorularıyla açıklama ve gerekçelendirme yapmaları olarak sıralamışlardır. Bu araştırmada da araştırmacının katılımcılardan çözümlerinin doğruluğunu kanıtlamalarını istemesi onları çözümleri üzerinde derinlemesine düşünmeye yöneltmiş ve süreç sonunda daha geçerli savunmalar yapmalarını sağlamıştır.

Tüm katılımcıların örnek temelli kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Bu durumun nedeni öğretim seansları boyunca araştırmacının onları örnekler üzerinden genelleme yapmaya yönlendirmesi veya düşüncelerinin aksine bir örnekle yüzleştirerek hatalarını keşfetmeye teşvik etmesi nedeniyle örnek temelli kanıt şemasına alışmaları olabilir. Uygulamadan önce katılımcılar savunmalarında kavram imajlarının sınırlılıklarını yansıtan örnekler vermişler, öğretim seansları sonrasında ise formal tanıma uygun halde yapılandırdıkları kavram imajları çoğunlukla doğru örnekler vermelerini sağlamıştır. Kanıt şemalarıyla ilgili daha önce yapılan pek çok çalışmada ortaokul, lise ve lisans düzeyindeki öğrencilerin çoğunlukla deneysel argümanlar ve gerekçelendirmeler sundukları, örnekler üzerinden doğrulama eğiliminde oldukları belirlenmiştir (Arslan ve Yıldız, 2010; Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003; Aylar, 2014; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009; Martin ve Harel, 1989; Özer ve Arıkan, 2002; Pala ve Narlı, 2018; Şen ve Güler, 2015). Bu çalışmanın aksine Yılmaz (2021) ise 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama uygulamaları içeren öğretim sonrasında öğrencilerin deneysel doğrulama yapma oranının tamamen ortadan kalkmasa da azaldığını tespit etmiştir. Uygulama sonrasında öğrencilerin tümdengelimsel muhakemeyi tercih etme eğiliminde oldukları görülmüştür.

Son klinik görüşmelerde analitik kanıt şemalarından biri olan dönüştürülebilen kanıt şemasına geçiş yapan katılımcılar (Zehra (5), Neşe (5), Mısra (7), Can (7), Gülce (8)) bulunmaktadır. Özellikle 5. sınıf düzeyindeki katılımcıların bu kanıt şemasını kullanabiliyor olmaları dikkat çekicidir. Öğretim seansları boyunca katılımcılar kavram imajlarını yeni bilgilerle yeniden yapılandırmış, böylece kendi bilgilerine olan güvenleri artmıştır. Bunun sonucunda düşüncelerinin doğruluğunu savunurken kişisel kavram tanımlarını, kavramlar arasındaki ilişkileri, işlem özelliklerini ve işlemler arasındaki ilişkileri kullanmaya başlamışlardır (Flores, 2002). Benzer şekilde Yılmaz (2021) araştırmasında uyguladığı kanıtın sosyal yönleri ile matematiksel yönlerini birleştiren öğretimin, öğrencilerin tümdengelimsel muhakemelerini güçlendirdiği belirlenmiştir.

Aydoğdu, Olkun ve Toluk (2003) çalışmalarına katılan 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin çok azının analitik kanıt şemasını kullandığını belirlemişlerdir. Bu öğrenciler çözümlerinin neden doğru olduğunu matematiksel sonuçları kullanarak kendi ifadeleriyle açıklamışlardır. Ülker (2018) çalışmasına katılan 7. sınıf öğrencilerinin gerçek hayat durumlarını içeren problem durumlarına dayalı sözsüz ispatlarında süreç içinde olumlu bir gelişme gösterdiğini belirlemiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin ispata yönelik çıkarımda bulunma, çıkarımı kontrol etme, matematiksel dili kullanma, genelleme gibi becerilerinde; aritmetik, cebir ve geometri arasında ilişkiler kurmada başarılarının arttığı görülmüştür. Yıldız ve Şengül (2017) çalışmalarına katılan 8. sınıf öğrencilerinin (hem DNR tabanlı eğitim alan deney grubu hem de normal eğitimlerine devam eden kontrol grubu) en çok dışsal kanıt şemasını kullandığını; fakat deney grubundaki öğrencilerin analitik kanıt şemasını daha fazla kullandığını belirlemişlerdir. Deney grubundaki öğrencilerin uygulanan öğretim sonrasında doğrulama gerektiren problemleri daha az boş bıraktıkları ve doğrulama için mantıksal çıkarımlara başvurdukları görülmüştür.

Yukarıdakilere benzer sonuçlara öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmalarda da ulaşılmıştır. Barak (2018) çalışmasına katılan öğretmen adaylarının sınıf düzeyleri arttıkça ispat yapmaları için gerekli olan kavramsal bilgilerinin, bu bilgileri kullanma becerilerinin ve ispatın formal kısmını oluşturma başarılarının arttığını belirlemiştir. Sarı, Altun ve Aşkar (2007) ise çalışmalarına katılan öğretmen adaylarının ders başarısı ile kanıtlama sürecindeki başarılarının paralel olduğunu belirtmişlerdir. Çalışmadaki yüksek başarılı katılımcının tanım ve teoremler arasında bağlantılar kurarak kanıtlama yaptığını, dolayısıyla dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığını ifade etmişlerdir. Çontay (2017) çalışmasına katılan öğretmen adaylarından dönüştürülebilen kanıt şemasını kullananların ispatlarını doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırdıklarını ifade etmiştir. Bu öğretmen adayları başkalarını ikna edebilmek için kullandıkları ifadelerde mantıksal akıl yürütmeden yararlanmışlardır. İskenderoğlu (2010) çalışmasına katılan öğretmen adaylarının en çok analitik, en az deneysel kanıt şemalarını kullandığını belirlemiştir. Pala ve Narlı (2018) çalışmalarına katılan öğretmen adaylarının %17'sinin dönüştürülebilen kanıt şemasını kullandığını belirlemişlerdir. Bunun yanında çalışmada üzerinde durulan sonsuzluk ve sayılabilirlik kavramları ile ilgili yanılgıya sahip öğretmen adaylarının ispatı oluşturamadıkları görülmüştür. Görüldüğü üzere, bireylerin sahip olduğu kavramsal anlayış, kanıtlama süreçlerini ve bu süreçte kullandıkları kanıt şemaları üzerinde etkilidir (Harel, 2001).

5.3. Öneriler

Bu bölümde araştırmanın sonuçlarına ve gelecekte yapılabilecek benzer araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.3.1. Araştırmanın sonuçlarına yönelik öneriler

Araştırma sonucunda, matematik öğretim programında ilkokul 3. sınıftan itibaren yer alan çevre ve alan kavramlarının katılımcılar tarafından yeterince anlaşılmadığı görülmüştür. Bu araştırmanın sonuçlarının da gösterdiği gibi ancak doğru deneyimlerle karşılaşan bireyler uygun kavram imajları oluşturabilmektedir. Aksi halde bireylerin kavram imajlarındaki eksik, hatalı ve sınırlı bilgiler kalıplaşmakta ve değişime direnç göstermektedir. Bu durumun önüne geçilebilmesi için kavramla ilk karşılaşmanın yaşandığı 3. sınıf düzeyi oldukça önemlidir. Bu araştırmada olduğu gibi 3. sınıf düzeyinde çevre kavramı tanıtılmadan önce bir bölgenin sınırlarını belirlemeye, göstermeye, çizmeye yönelik çalışmalar yaptırılması, ardından sınır ile çevrenin ilişkilendirilmesi etkili olabilir. Kavram bu şekilde tanıtıldıktan sonra çevresi olan ve olmayan şekillere örnek verilmesi kavramın bir bölgenin sınırı ile ilişkisini pekiştirecektir. Burada çevresi olan şekillerin ortak özelliği (sınırlı olması) vurgulanmalıdır. Örneklerde çevresi olmayan şekillere yer verilmesi öğrencilerin sınırlı olma özelliğini keşfetmelerine fayda sağlayacaktır. Kavramın anlamı öğrenciler tarafından özümsendikten sonra çevre ölçmeye yönelik etkinliklere geçilmesi daha uygun olacaktır. Öğretmenlerin her aşamada öğrenci çözümlerinin nedenlerini sorgulaması önemlidir. Böylece şans eseri bulunan doğru sayısal değerlerin hatalı anlayışları gizlemesinin önüne geçilebilir. Alan kavramı için de benzer bir yol haritası izlenmesi etkili bir öğretim ortamı sağlayabilir.

Araştırma kapsamında kavram imajı ve kanıt şemaları teorik çerçevelerine dayalı yürütülen öğretim sürecinin katılımcıların çevre ve alan kavramlarıyla ilgili algılarını bu kavramların formal tanımlarına uygun olacak şekilde değiştirdiği görülmüştür. Bu doğrultuda çevre ve alan kavramlarıyla ilgili öğretimin planlanmasında ölçmeye dayalı işlem ve hesaplamalardan ziyade kavramsal yapının vurgulanmasıyla öğrencilerin eksik ve sınırlı kavram imajları oluşturmalarının önüne geçilebilir. Bu konuda öğretmenlerin, öğrencilerinin çevre ve alan kavramlarını anlayışlarıyla ilgili mevcut durumu belirleyip buna uygun olarak derslerini planlamasıyla, müdahale edilmediği için öğrencilerin üst sınıflara taşıdığı ve değiştirmesi zaman geçtikçe daha da zorlaşan kavram yanılgılarının ve sınırlılıkların ortadan kaldırılması sağlanabilir.

Öğrencilerin çevre ve alan kavramlarını öğrenmesinde yol gösterici olan sınıf ve matematik öğretmenlerinin bu kavramların kavramsal yapısı, öğrencilerin anlayışları ve kavram yanılgıları hakkında bilgi sahibi olmaları beklenmektedir. Ancak öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmalar bu beklentinin her zaman gerçekleşmediğini göstermektedir. Bu nedenle eğitim fakültelerinde kavram imajı-kavram tanımı teorik çerçevesi, temel matematik kavramlarının yapısı, öğrencilerin bu kavramları anlayışları ve sahip oldukları kavram yanılgıları konularında sınıf ve matematik öğretmen adaylarına eğitim verilerek ilerleyen dönemde göreve başlayacak bu öğretmen adaylarının sınıflarındaki öğretimi buna uygun olarak planlanması sağlanabilir. Ayrıca görevde olan öğretmenler için de hizmet içi eğitimler düzenlenerek bu konuda farkındalık oluşturmaları sağlanabilir. Öğretmenlerin derslerini planlarken öğrencilerinin sınıf seviyesinden ziyade mevcut bilgi düzeylerini göz önüne almaları gerektiği vurgulanmalıdır. Bu araştırmanın sonuçlarında da görüldüğü gibi kavram imajlarındaki eksiklik ve sınırlılıklar erken tespit edildiğinde daha kolay ortadan kaldırılabilmektedir.

Matematik dersi öğretim programları genel anlamda kavramsal anlayışa vurgu yapsa da çevre ve alan kavramları ölçme bağlamında ele alındıkları için öğretimde işlemler ve hesaplamalar ön plana çıkmaktadır. Bu durumun önüne geçmek için tüm sınıf düzeylerinde kavramsal öğrenmeye vurgu yapan kazanım açıklamaları eklenmesi sağlanabilir. Özellikle mesleğe yeni başlayan, tecrübesiz öğretmenlerin başvurabileceği kılavuzlar hazırlanarak öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenirken hangi süreçlerden geçtikleri, nerelerde zorlandıkları, nasıl kavram yanılgılarına sahip olduklarıyla ilgili bilgiler verilebilir.

Bu araştırmada yürütülen öğretim sürecinde kanıt şemaları teorik çerçevesinden de yararlanılmıştır. Buna göre uygulanan öğretimin katılımcıların çözümlerini doğrulama süreçlerini uygulama öncesine göre değiştirdiği görülmüştür. Katılımcıların kavram imajları formal tanıma yaklaştıkça analitik kanıt şemalarını daha fazla kullandıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda öğretmen adaylarına ve öğretmenlere kanıtlama ve kanıt şemaları ile ilgili eğitimler verilebilir. Böylece öğretmenlerin, öğrencilerinin anlama ve düşünme yollarını ortaya çıkarabilecekleri, sorgulama ve muhakeme yapmalarını sağlayarak kanıtlama becerilerini geliştirebilecekleri öğrenme ortamları oluşturmaları sağlanabilir. Formal kanıt öğretimi lise düzeyinde başlasa da bu çalışmanın sonuçlarının da gösterdiği gibi ortaokul düzeyindeki öğrenciler de uygun deneyimler sayesinde doğru gerekçelendirmeler üretebilir. Böylece öğrenciler lise düzeyindeki formal kanıtları daha kolay anlayabilirler ve formal kanıt yapmaya daha kolay uyum sağlayabilirler.

Araştırma sonucunda öğrencilerin çevre ve alan kavramlarıyla ilgili sorun yaşamalarının nedenlerinden birinin günlük dil ile matematiksel dil arasındaki farklılıklar olduğu ortaya çıkmıştır. Öyle ki bazı öğrencilerin çevreyi günlük dildeki "etraf, yakın dış bölge" anlamıyla ele aldıkları için hatalı kavram imajlarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu durumun önüne geçilebilmesi için öğretmenlerin bu konunun farkında olması ve günlük dil ile matematiksel dil arasındaki farklılığa dikkat çekmesi yararlı olabilir.

Araştırma kapsamında uygulanan öğretim sürecinde katılımcıların yaş ve sınıf düzeyi fark etmeksizin somut materyallerle desteklendiğinde kavramları ve kavramlar arası ilişkileri daha kolay kavradıkları görülmüştür. Buna göre öğretmenler her sınıf düzeyinde özellikle kavramsal bilgi eksikliği olan öğrencilerini somut materyaller kullanmaya teşvik edebilirler.

Araştırmanın katılımcıları bireysel öğrenme hızlarına göre ilerlemişlerdir. Burada belirleyici olan sınıf düzeyinden ziyade katılımcının kavramsal ve işlemsel bilgi düzeyleri olmuştur. Buna göre öğretmenlerin derslerini planlarken farklı bilgi düzeylerine ve öğrenme hızlarına sahip öğrencilerini göz önünde bulundurmaları faydalı olabilir.

5.3.2. Gelecek araştırmalara yönelik öneriler

Bu araştırmada, katılımcıların çevre ve alan kavramlarına yönelik kavram imajları belirlenmiştir. Başka kavramlara yönelik benzer araştırmalar tasarlanabilir. Ayrıca çevre ve alan kavramlarıyla birlikte hacim kavramına yönelik kavram imajları da belirlenerek aralarındaki ilişkileri ortaya çıkarmaya yönelik araştırmalar tasarlanabilir.

Bu araştırmada ortaokul düzeyindeki katılımcıların kanıt şemaları belirlenmiş; fakat katılımcılara bu konu ile ilgili doğrudan bir öğretim yapılmamıştır. Katılımcılara onların sınıf düzeylerine uygun olarak tasarlanmış kanıt öğretiminin yapıldığı benzer bir çalışma tasarlanabilir.

Bu araştırma, bireysel bir öğretim deneyi olarak tasarlanmıştır. Bireysel öğretim deneyi yerine tüm sınıfla yürütülen öğretim deneyinin kullanıldığı benzer araştırmalar tasarlanabilir. Böylece kavram imajları ve kanıt şemaları üzerinde sınıf içi iletişimin etkisi ortaya çıkarılabilir.

Bu araştırmada katılımcılar ortaokul 5, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencileriyle sınırlıdır. Farklı sınıf düzeylerinde benzer araştırmalar gerçekleştirilebilir.

KAYNAKÇA

Abed, A.S. and Alkhateeb, H.M. (2003). Area and perimeter calculations by education majors’. *Perceptual and Motor Skills,* 97, 1265-1266.

Ağaçdiken, F. (2021). *5.sınıf öğrencilerinin alan kavramını dinamik matematik yazılımı destekli öğretim ortamında oluşturma süreçleri: dikdörtgen durumu,* Yüksek Lisans Tezi. Samsun: On Dokuz Mayıs Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü.

Akkoç, H. (2008). Pre-service mathematics teachers’ concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857-878. http://dx.doi.org/10.1080/00207390802054458 Erişim Tarihi: 29/07/2015

Aktuna, H.E. (2013). *6. sınıf öğrencilerinin etnomatematik etkinlikleriyle olan etkileşimleri ve bu etkinlikleri algılayışları*, Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Alkan, S. (2019). *Dijital olarak tasarlanmış bir eğitsel oyun ortamında ortaokul öğrencilerinin alan kavramının gelişiminin incelenmesi*, Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479–488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005) .Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, *Ege Eğitim Dergisi,* (6) 1: 25–37.

Altun, M. (2014). *Ortaokulllarda (5,6,7,8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi*. (10. Baskı) Bursa:Alfa Akademi.

Ardiansari, L., Suryadi, D., & Dasari, D. (2020). The Concept Image of Students and Teachers about the Equal Sign. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(12), 6751-6764. DOI: 10.13189/ujer.2020.081240.

Arslan, S., ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, *35*(156), 17-31.

Avgören, S. (2011). *Farklı Sınıf Seviyelerindeki Öğrencilerin Katı Cisimler (Prizma, Piramit, Koni, Silindir, Küre) ile İlgili Sahip Oldukları Kavram İmajı.* Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Aydoğdu, T. Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri. *Eğitim Araştırmaları, 4*(12), 64-74.

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi*, Doktora Tezi. Ankara: Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Aztekin, S. (2008). *Farklı Yaş Gruplarındaki Öğrencilerde Yapılanmış Sonsuzluk Kavramlarının Araştırılması*. Doktora Tezi. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Bachour, R., Braun, S. and Tyminski, A.M. (2016). Which lake is bigger?. *Teaching Children Mathematics*, 23 (4), 212-214.

http://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.23.4.0212 Erişim Tarihi: 17/12/2016

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* [Mathematics education from theory to practice]. Trabzon: Derya Publishing.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education.* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.

Barak, B. (2018). *Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi,* Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Barrett, J.E. and Clements, D.H. (2003). Quantifying path length: Fourth-grade children’s developing abstractions for linear measurement. *Cognition and Instruction, 21*(4), 475–520.

Barrett, J.E., Clements, D.H., Klanderman, D., Pennisi S.J. and Polaki, M.V. (2006). *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(3), 187-221.

Barrett, J.E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D.H., Klanderman, D., Miller, A.L. and Rumsey, C. (2011). Children’s unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43,* 637–650.

Barrett, J.E., Sarama, J., Clements, D.H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C. and Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 28-54.

Barrett, J.E., Cullen, C.J., Miller, A.L., Eames, C.L., Kara, M. and Klanderman, D. (2017). Area in the middle and later elementary grades. Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume. *Journal for research in mathematics education monograph series*, *16*, 105-127.

Barrett, J.E., Clements, D.H. and Sarama, J. (2017). Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume. In B. Herbel-Eisenmann (Ed.), *Journal for research in mathematics education* (Vol. 16, pp. 254). National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M.T., Clements, D.H., Arnoff, J., Battista, K. and Borrow, C.V.A. (1998). Students' spatial structuring and enumeration of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education,29,* 503–532.

Battista, M.T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement, *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 185–204.

Battista, M.T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (s. 843-908). Charlotte, NC: NCTM.

Baturo, A., and Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 235–268.

Bayram, G. ve Duatepe Paksu, A., 2018, *Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Paralelkenara İlişkin Yaptıkları Çizimler Bağlamında Kavram İmajları ve Bu Dörtgen için Yaptıkları Tanımlar,* 27. Uluslararası Eğitim Bilimleri Kongresi, 1799-1812.

Biber, A.Ç. (2010). *Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkilerin incelenmesi.* Doktora Tezi. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Bilir, C. K. (2018). *Pre-Service Teachers' Understanding the Measurement of the Area of Rectangles,* Doktora Tezi, Purdue University.

Bingölbali, E. and Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 19–35.

Bingölbali, E. (2016). Kavram tanımı ve kavram imajı. *Matematik eğitiminde teoriler,* 135-148.

Bozkurt, A. ve Koç, Y. (2012). İlköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin prizma kavramına dair bilgilerinin incelenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 12(4), 2941-2952.

Brady, C. and Lehrer, R. (2020). Sweeping area across physical and virtual environments. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(3).

Bragg, P. and Outhred, L. (2000). What is taught versus what is learnt: The case of linear measurement. In Mathematics Education Beyond 2000, *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, Fremantle, Australia, J. Bana and A. Chapman (Ed.), Vol. 1, pp. 112-18. Sydney: MERGA.

Bragg, P. and Outhred, L. (2001). So that's what a centimetre looks like: Students' understandings of linear units. In van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Proceedings of the 25th International conference fort he Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.209-216). Utrecht, The Netherlands.

Bragg, P. and Outhred, L. (2004). A measure of rulers - the importance of units in a measure. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 159–166.

Casa, T.M., Spinelli, A.M. and Gavin, M.K. (2006). This about covers it! Strategies for finding area. *Teaching Children Mathematics*, 13 (3), 168-173.

Cavanagh, M. (2007). *Year 7 students' understanding of area measurement*. Mathematics Education Research Group of Australasia, Annual Conference. Milton, K., Reeves, H. and Spencer, T. (eds.). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers, 136-143.

Cavanagh, M. (2008). Area measurement in year 7. *Reflections*, *33*(1), 55-58.

Ceylan, T. (2012) *Geogebra Yazılımı Ortamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Geometrik İspat Biçimlerinin İncelenmesi,* Yüksek Lisans Tezi, Ankara: Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Chappell, M.F. and Thompson, D.R. (1999). Take time for action: Perimeter or area? Which measure is it?. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5 (1), 20-23.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 547-589.

Clements, D.H. and Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 299-317.

Clements, D.H. and Sarama, J. (2009). Learning trajectories in early mathematics-Sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of Language and Literacy Development* (pp. 1-6). London, On: Canadian Language and Literacy Research Network. http://literacyencyclopedia.ca/pdfs/topic.php?topId=270 Erişim Tarihi:29/07/2015

Clements, D.H., Sarama, J. and Miller, A.L. (2017). Area. In J.E. Barrett, D.H. Clements, and J. Sarama (Eds.), *Children's measurement: a longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume* (pp. 71–82). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics [JRME Monograph No. 16].

Clements, D.H., Sarama, J., Van Dine, D.W., Barrett, J.E., Cullen, C.J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A.L. and Eames, C.L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children, *Journal of Mathematical Behavior*, 50, 23–41.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboration with teachers. In A.E. Kelly and R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-333). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Cobb, P. and Steffe, L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (2), 83-94.

Creswell, J.W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri*, (Çev. M. Bütün ve S.B. Demir). Siyasal Kitabevi. (Orijinal çalışmanın yayın tarihi 2013)

Cullen, A.L., Eames, C.L., Cullen, C.J., Barrett, J.E., Sarama, J., Clements, D.H. and Van Dine, D.W. (2018). Effects of three interventions on children's spatial structuring and coordination of area units, *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, *49*(5), 533-574.

Cullen, A.L. and Barrett, J.E., 2020, Area measurement: Structuring with nonsquare units, *Mathematical Thinking and Learning*, 22:2, 85-115.

Çavuş Erdem, Z. (2018). *Matematiksel modelleme etkinliklerine dayalı öğrenim sürecinin alan ölçme konusu bağlamında incelenmesi,* Doktora tezi, Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman.

Çetin, N. (2009). The performans of undergraduate students in the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 40(3), 323-330.

Çontay, E.G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları*, Doktora Tezi. Denizli: Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Dağlı, H. (2010). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin çevre, alan ve hacim konularına ilişkin kavram yanılgıları*, Yüksek Lisans Tezi. Afyonkarahisar: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Dağlı, H. ve Peker, M. (2012). İlköğretim 5. sınıf öğrencileri geometrik şekillerin çevre uzunluğunu hesaplamaya ilişkin ne biliyor?. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi*, 5(3), 330-351.

De Bock, D., Verschaffel, L. and Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65-83.

Dede, Y., Bayazit, İ. ve Soybaş, D. (2010). Öğretmen adaylarının denklem, fonksiyon ve polinom kavramlarını anlamaları, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 18 (1), 67-88.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma, *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4 (2), 47-71.

Deniz, Ö. (2014). *8. sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Dorko, A.J. (2012). *Calculus Students' Understandıng of Area and Volume in Non-Calculus Contexts*, Master Dissertation, The University of Maine.

Dubinsky, E. and Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemoiogy and pedagogy, MAA Notes,* 25 (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dündar, S. (2015). Matematik öğretmeni adaylarının eğim kavramına ilişkin bilgileri, *Eğitimde Kuram ve Uygulama,* 11(2), 673-693.

Eames, C.L. (2014). *Investigating children's intuitıve and analytical thinking about path length as a developmental phenomenon*. Doctoral Dissertation, Illinois State University.

Eames, C.L., Barrett, J.E., Cullen, C.J., Rutherford, G., Klanderman, D., Clements, D.H., Sarama, J. and Van Dine, D.W. (2020). Examining and developing fourth grade children's area estimation performance. *School Science and Mathematics*, 120, 67–78.

Ergin, A.S. (2014). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik cisimler üzerindeki imgeleri ve sınıflama stratejileri*. Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Erşen, Z.B. ve Karakuş, F. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının dörtgenlere yönelik kavram imajlarının değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 4(2), 124-146.

Fernandez, C., De Bock, D., Verschaffel, L. and Van Dooren, W. (2014). Do students confuse dimensionality and "directionality"?. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 166–176.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true?, *Teaching Children Mathematics,* 8(5), 269–274.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?, *School Science and Mathematics,* 106(3), 124-132.

Garrett, S.K. (2010). *Reform mathematics teaching and how it helps students understand the concept of area*, Master dissertation, Lakehead University, Ontario.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics,* 1(3), 4-11.

Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş*. (Çev. A. Ersoy ve P. Yalçınoğlu). Anı Yayıncılık. (Orijinal çalışmanın yayın tarihi 2011)

Gökdal, N. (2004). *İlköğretim 8. sınıf ve ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin alan ve hacim konularındaki kavram yanılgıları*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Grant, T. J. and Kline, K. (2003). Developing building blocks of measurement with young children. *Learning and teaching measurement*, 46-56.

Gutiérrez, A. and Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(3), 253-275.

Gülkılık, H. (2008). *Öğretmen adaylarının bazı geometrik kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram imajlarının ve imaj gelişiminin incelenmesi üzerine fenomenografik bir çalışma.* Yüksek Lisans Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Güzel, M. (2014). *İlköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin prizma ve silindir kavramlarına dair kavram imajlarının incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep: Gaziantep Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In Schoenfeld, A.H., Kaput, J. and Dubinsky, E. (Eds.), *Research in College Mathematics Education III*, 234-283. Providence, RI: AMS

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In Campbell, S. and Zazkis, R. (Eds.), *The learning and teaching of number theory,* 185-212. Dordrecht: Kluwer.

Herbst, P. (2005). Knowing about "equal area" while proving a claim about equal areas, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25 (1), 11- 56.

Huang, H.M.E. and Witz, K.G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: a curriculum and teaching experiment, *Learning and Instruction*, 21, 1-13.

Huang H.M.E. and Witz K.G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems, *Journal of Curriculum and Teaching*, 2 (1), 10-26.

Huang, H.M.E. (2014). Third to fourth grade students' conceptions of multiplication and area measurement, *ZDM Mathematics Education*, 46, 449–463.

Izsak, A. (2005). "You have to count the squares": Applying knowledge in pieces to learning rectangular area, *Journal of the Learning Sciences*, 14(3), 361-403.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları*, Doktora Tezi, Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

İskenderoğlu, T. ve Baki, A. (2010). *Dördüncü Sınıf İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları*. 9. Matematik Sempozyumu, Trabzon.

İskenderoğlu, T. ve Baki, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin nicel analizi, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri,* 11(4), 2275-2290.

İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. Bingölbali, E., Arslan, S. ve Zembat, İ.Ö. (Ed.) *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 65-84). Ankara: Pegem Akademi.

Kabael, T., Barak, B. ve Özdaş, A. (2015). Öğrencilerin limit kavramına yönelik kavram imajları ve kavram tanımları. *Anadolu International Journal of Educational Sciences*, 5(1), 88-114.

Kamii, C. (1995). *Why is the use of a ruler so hard?*. Paper presented at the 17th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, The Ohio State University, Columbus, OH.

Kamii, C. and Clark, F.B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics, 97*(3),116–121.

Kamii, C. and Kysh, J. (2006). The difficulty of "length x width": Is a square the unit of measurement?, *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105-115.

Kaplan, H.A. (2008). *İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin "basamak" ve "basamak değeri" kavramları ile ilgili zihinsel yapılarının incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kara, M., Eames, C.L., Miller, A.L., Cullen, C.J. and Barrett, J.E. (2011). Developing an understanding of area measurement concepts with triangular units. In Wiest, L.R.and Lumberg, T. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1015–1023). Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Kaya, D. (2019). 6. sınıf öğrencilerinin alan ölçme ile ilgili problem çözme becerileri. *International Journal of Educational Studies in Mathematics, 6*(4), 144-171.

Kaymakçı Üstüner, K. (2022). *İnternette yayınlanan ortaokul matematik ders anlatım videolarındaki analojilerin kavram tanımı ve kavram imajı çerçevesinde incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kelly, A. E. and Lesh, R.A. (2000). Teaching experiments. In A.E. Kelly and R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 192-195). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kidman, G. and Cooper, T. J. (1997). Area integration rules for grades 4, 6 and 8 students. In *Proceedings of the 21st international Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland* (pp. 136-143).

Kidman, G. C. (1999). Grade 4, 6 and 8 students' strategies in area measurement. *Making the difference*, 298-305.

Knuth, E., Choppin, J. and Bieda, K. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. In Blanton, M., Stylianou, D. and Knuth, E. (Ed.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (153–212). NY: Routledge.

Kobiela, M. and Lehrer, R. (2019). Supporting dynamic conceptions of area and its measure. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(3), 178-206.

Kordaki, M. and Potari, D. (1998). Children's approaches to area measurement through different contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(3), 303-316.

Kordaki, M. and Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(1), 65-100.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 177-209.

Kospentaris, G., Spyrou, P. and Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.

Kozulin, A. and Kazaz, S. (2017). Developing the concept of perimeter and area in students with learning disabilities (LD). *European Journal of Psychology of Education*, 32(3), 353-366.

Köse, N.Y. ve Tanışlı, D. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıkları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(3), 1203-1230.

Kunt, A. and Keşan, C. (2020). Investigation of middle school 8th grade students' orientations to mathematical proof schemas by using artificial neural network model. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education (IJTASE)*, *9*(2), 52-62.

Larsen, B. (2006). *Math handbook for water system operators: Math fundamentals and problem solving*. USA, Outskirts Press.

Lee, W-I. (1999). *The relationship between students' proof writing ability and Van Hiele levels of geometric thought in a college geometry course* Doctoral Dissertation. University of Northern Colorado, USA.

Lehrer, R., Jenkins, M. and Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In Lehrer, R. and Chazan, D. (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, 137-168. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In Kilpatrick, J., Martin, W.G. and Schifter, D.E. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 179-192. Reston, VA: NAtional Council of Teachers of Mathemetics.

Liu, Y. and Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes, *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40, DOI:10.1080/24727466.2013.11790328

Lubienski, S. (2003). Is our teaching measuring up? Race-, SES-, and gender-related gaps in measurement achievement. In Clements, D.H. and Bright, G. (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook* (pp. 282-292). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathemetics.

Machaba, F. (2005). *Insights and misconceptions that grade 10 learners in one school in Soshanguve have with the concepts of area and perimeter*. Unpublished BEd Honours project. Faculty of Education, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.

Machaba, F.M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of grade 10 learners. *Pythagoras*, *37*(1), a304.

Macit, E., ve Altay, B., 2020, 6. Sınıf Öğrencilerinin Kesir Kavram İmajlarının İncelenmesi (Kesrin Farklı Anlamları Temelinde). *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *7*(14), 104-118.

Mamona-Downs, J. and Papadopoulos, I. (2006). The problem-solving element in young students' work related to the concept of area, Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. and Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 121-128. Prague: PME.

Martin, W. G. and Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, *20*(1), 41-51.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013). *Okul öncesi öğretim programı.* Devlet Kitapları Müdürlüğü, Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *İlkokul ve ortaokul matematik dersi 1-8.sınıflar öğretim programı*, Ankara.

Moreira, C. Q. and Contente, M. D. R. (1997). The role of writing to foster pupil's learning about area. In *Proceedings of the 21st PME International Conference* (Vol. 3, pp. 256-263).

Mulligan, J.T., Prescott, A., Mitchelmore, M.C. and Outhred, L. (2005). Taking a closer look at young students' images of area measurement. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 10(2), 4-8.

Nitabach, E. and Lehrer, R. (1996). Research into practice: developing spatial sense through area measurement. *Teaching Children Mathematics*, 2, 473-476.

Nunes, T., Light, P., Mason, J. and Allerton, M. (1994). *The role of symbols in structuring reasoning: Studies about the concept area*. In da Ponte, J. and Matos, J. (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 255–262). Lisbon: PME.

Olkun, S., Çelebi, Ö., Fidan, E., Engin,Ö. ve Gökgün, C. (2014). Birim kare ve alan formülünün Türk öğrenciler için anlamı. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [Hacettepe University Journal of Education]*, *29*(1), 180-195.

Outhred, L. and Mitchelmore, M. (1996). *Children's intuitive understanding of area measurement*. In Puig, L. and Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 91–98). Valencia: PME.

Outhred, L. and Mitchelmore, M. (2000). Young children’s intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for research in mathematics education*, 31(2), 144-167.

Outhred, L., and Mitchelmore, M. C. (2004). Student’s structuring of rectangular arrays. In Proceedings of *the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norway: Bergen, 465-472.

Öner, A. (2013). *Bilgisayar Destekli Öğretimin İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Trigonometrik Fonksiyonların Periyotlarıyla İlgili Kavram İmajlarına Etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Konya: Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Ören, D. (2007). *An Investigation of 10th Grade Students Proof Schemes in Geometry With Respect to Their Cognitive Styles and Gender*. Master Dissertation. Ankara: Middle East Technical University, The Graduate School of Natural and Applied Science.

Özaltun Çelik, A. and Bukova Güzel, E. (2017). Revealing Özgur’s thoughts of a quadratic function with a clinical interview: Concepts and their underlying reasons. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES),* 3(1), 122-134.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Ankara, Bildiriler Kitabı, 2, 1083-1089.

Paksu, A.D., Musan, M., İymen, E. ve Pakmak, G.S. (2012). Sınıf öğretmeni adaylarının boyut konusundaki kavram görüntüleri, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34, 53-68.

Pala, O. and Narlı, S. (2018). Prospective mathematics teachers’ proving approaches and difficulties related to equivalence of infinity sets. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT),* 9(3), 449-475.

Panorkou, N. (2020). Reasoning dynamically about the area of a rectangle: The case of Lora and Isaac, *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 257–292.

Rickard, A. (1996). Connections and confusion: Teaching perimeter and area with a problem-solving oriented unit. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 303-327.

Rösken, B. and Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students’ learning of integral calculus, *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 181-204.

Sarama, J. and Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*, New York:Taylor & Francis.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: örnek olay çalışması, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi,* 40(2), 295-319.

Sarı Uzun, M. ve Bülbül, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretme deneyi, *Eğitim ve Bilim*, 38(169), 372-390.

Sevgi, S. and Orman, F. (2020). Eighth grade students' views about giving proof and their proof abilities in the geometry and measurement, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2020.1782493

Simon, M.A. and Blume, G.W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 472-494.

Simon, M.A. and Blume, G.W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior,* 15(1), 3–31.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. *Handbook of research design in mathematics and science education*. Kelly, A.E. and Lesh, R.A. (Eds.). 335-359. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum.

Skemp, R. (1987). *The psychology of teaching mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Smith, J.P., Males, L.M., Dietiker, L.C., Lee, K. and Mosier, A. (2013). Curricular treatments of length measurement in the United States: Do they address known learning challenges? *Cognition & Instruction*, 31, 388–433.

Smith, J.P., Males, L.M. and Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(4), 239–270.

Sowder, L. and Harel, G., 1998. Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670–675.

Stavy, R. and Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules.* New York, NY: Teachers College Press.

Steffe, L.P. and Thompson, P.W. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements.* Lesh, R. and Kelly, A.E. (Eds.), Research design in mathematics and science education (267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stephan, M., and Clements, D.H. (2003). Linear and area measurement in prFilizdergarten to grade 2. In Clements, D.H. and Bright, G. (Eds.), *Learning and teaching measurement, 2003 yearbook of the National Council of teachers of mathematics* (pp. 3–16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Strutchens, M.E., Martin, W.G. and Kenney, P.A. (2003). What students know about measurement: Perspectives from the NAEP. *Learning and Teaching Measurement: NCTM*, 197-208.

Süzer, V. (2011). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı ile ilgili kavram tanımı ve imajları üzerine bir durum çalışması*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Symons, D. (2011). Using Microsoft Word to teach area. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 16(3), 20-24.

Şahin, H. (2022). *Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlere ilişkin kavram imajlarının incelenmesi,* Yüksek Lisans Tezi, Sakarya: Sakarya Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Şen, C. and Güler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research,* 3(9), 617-631.

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Tan Şişman, G. ve Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online. 8*(1), 243-253.

Tan Şişman, G. (2010). *Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Uzunluk, Alan ve Hacim Ölçüleri Konusundaki Kavramsal ve İşlemsel Bilgileri ve Sözel Problemleri Çözme Becerileri*, Doctoral Dissertation, Ankara: Middle East Thecnical University, The Graduate School of Social Sciences.

Tan Şişman, G. and Aksu, M. (2012). The length measurement in the Turkish mathematics curriculum: Its potential to contribute to students' learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 363-385.

Tan Şişman, G. and Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293-1319.

Thompson, A.G., Philipp, R.A., Thompson, P.W. and Boyd, B. (1994). Calculational and conceptial orientations in teaching mathematics. *1994 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. (2000). What is required to understand fractal dimension? *Mathematics Educator*, 10(2), 33–35.

Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri, *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi,* 19 (2), 81-103.

Tomooğlu, Ö. ve Kurtuluş, A. (2020). Altıncı sınıfta üçgen ve paralelkenarın alanını ölçmeye yönelik 5E öğretim modelinin kullanılması: Bir eylem araştırması. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Türk Dünyası Uygulama ve Araştırma Merkezi (ESTÜDAM) Eğitim Dergisi, 5* (2), 184-205.

Tossavainen, T., Suomalainen, H. and Mäkäläinen, T. (2016). Student teachers' concept definitions of area and their understanding about two dimensionality of area, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1254298.

Tsamir, P. and Mandel, N. (2000). The intuitive rule same A - same B: The case of area and perimeter. In Nakahara, T. and Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225–232). Hiroshima: PME.

Ubuz, B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16-17, 95-104.

Ubuz, B., 2017, Dörtgenler arasındaki ilişkiler: 7. sınıf öğrencilerinin kavram imajları, *Yaşadıkça Eğitim*, 31(1), 55-68.

Ulusoy, F. (2020). Prospective early childhood and elementary school mathematics teachers' concept images and concept definitions of triangles. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 1-22.

Uygan, C., Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(2)*,* 137-157.

Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı.* Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. and Bay-Williams, J. M. (2013). İlkokul ve ortaokul matematiği, (Çev. S. Durmuş (Ed.)), Nobel Akademik Yayıncılık. (Orijinal çalışmanın yayın tarihi 2010)

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. and Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change, *Learning and Instruction*, 14, 485–501.

Vinner, S. and Hershkowitz, R. (1980). Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. *Proceedings of the Fourth International Conference of P.M.E., Berkeley,* 177-184.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S. and Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, *20*(4)*,* 356-366.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, *Advanced Mathematichal Thinking*, 11, 65-81.

Vinner, S. (1994). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking (2nd ed.)*. Dordrecht: Kluwer.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.

Whitenack, J. W. and Yackel, E. (2002). Making mathematichal arguments in the primary grades: The importance of explaining and justifying one's ideas. *Theaching Children Mathematics*, 8(9), 524-527.

Wickstrom, M. H., Fulton, E. W. and Carlson, M. A. (2017). Pre-service elementary teachers' strategies for tiling and relating area units. *Journal of Mathematical Behavior*, 48, 112–136.

Wilder, J. T. (2014). *How Children Quantify Area*, Doctoral Dissertation, The University of Alabama, Birmingham.

Wood, T., Cobb, P. and Yackel, E. (1990). The contextual nature of teaching: Mathematics and reading instruction in one second-grade classroom. *JSTOR: The Elementary School Journal*, 90(5), 497-513.

Yanık, H.B. (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations, *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 33–50.

Yenilmez, K. ve Çiftçi, Ş. K. (2014). Lise öğretmen adaylarının çevre ve alan kavramlarına ilişkin bilgilerinin belirlenmesi. *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama [Journal of Education and Humanities: Theory and Practice]*, 5(10), 23-35.

Yew, W. T., Zamri, S. N. A. S. and Lian, L. H., 2011, Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of perimeter, *SAINSAB*, 14, 67-78.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (7. Baskı), Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım Yakar, Z. ve Albayrak, M. (2019). Alan ölçmenin basamaklı öğretim yöntemiyle öğretiminin öğrenci başarısına etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *34*(2), 565-585. doi: 10.16986/HUJE.2018044393

Yıldız, F. ve Şengül, S. (2017). DNR tabanlı öğretimin 8. sınıf öğrencilerinin anlama ve düşünme yollarına etkisinin incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies,* 56, 83-130.

Yılmaz, T. Y. (2021). *7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerinin ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerinin incelenmesi.* Doktora Tezi, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Yiğit Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(7), 1028-1047.

Yuzawa, M., Bart, W.M. and Yuzawa, M. (2000). Development of the ability to judge relative areas role of the procedure of placing one object on another, *Cognitive Development*, 15, 135-152.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measuring and student failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 224–339.

Zembat, İ.Ö. (2012). *Ölçme, Temel Bileşenleri ve Sık Karşılaşılan Kavram Yanılgıları*, Bingölbali, E. ve Özmantar, M.F. (ed.), İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri, (127-154), Ankara: Pegem Akademi.

Zhang, X., Clements, M.A. (Ken), Ellerton, N.F., (2015), Enriching student concept images: Teaching and learning fractions through a multiple-embodiment approach, *Mathmatics Educational Research Journal*, 27,201–231.

Zhou, W. (2012). *Dimensions and levels of students' understanding of area measurement*, Doctoral Dissertation, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee.

EKLER

EK-1. Anadolu Üniversitesi Etik Kurulu Kararı

Evrak Kayıt Tarihi: 27.03.2018	Protokol No: 35673	Tarih: 26.04.2018

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU

KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Ortaokul Öğrencilerinin Çevre ve Alan ile İlgili Kavram İmajlarının ve Kanıt Şemalarının Araştırılması
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Doç. Dr. H. Bahadır YANIK
TEZ YAZARI:	Özlem GELİCİ
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

Pro (Başkan ...)	**Prof.Dr. Esra CEYHAN** (Eğitim Fak.)
Prof.Dr. Münevver ÇAKI (Güzel Sanatlar Fak.)	(İkt. ve İdari Bil. Fak.)
Prof.Dr. Handan DEVECİ (Eğitim Fak.)	**Prof.Dr. Emel ŞIKLAR** (İkt. ve İdari Bil. Fak.)

EK-2. Hatay Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Belgesi

T.C.
HATAY VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 32889839-604.01.01-E.12366934 27.06.2018
Konu : Özlem GELİCİ'nin
Araştırma İzin Onayı

VALİLİK MAKAMINA

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi İskenderun Nuri Üysen Ortaokulu Matematik Öğretmeni Özlem GELİCİ "Ortaokul Öğrencilerinin Çevre ve Alan İle İlgili Kavram İmajlarının ve Kanıt Şemalarının Araştırılması" başlıklı anket çalışmasını 2017/2018-2018/2019 eğitim öğretim yılları güz ve bahar dönemlerinde İlimiz İskenderun İlçesinde bulunan İskenderun Nuri Üysen Ortaokulunda eğitim gören 5, 6, 7 ve 8. Sınıf öğrencilerine uygulamak istemektedir.

Söz konusu çalışma ile ilgili olarak komisyonumuzca inceleme yapılmış olup, "Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 22.08.2017 tarihli ve 35558626-10.06.01-E.12607291 ve 2017/25 nolu Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri Genelgesine" uygun olduğundan, ilgilinin İskenderun İlçesinde bulunan İskenderun Nuri Üysen Ortaokul idaresinin uygun göreceği tarih ve saatlerde, çalışma yapmasını, olurlarınıza arz ederim.

Mustafa KÖSE
İl Milli Eğitim Şube Müdürü

OLUR
27.06.2018

Kemal KARAHAN
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

EK-2. (Devam) Hatay Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

T.C.
HATAY VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 32889839-604.01.01-E.12399131 27.06.2018
Konu : Özlem GELİCİ'nin
Araştırma İzin Onayı

İSKENDERUN KAYMAKAMLIĞINA
(İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü)

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi İskenderun Nuri Üysen Ortaokulu Matematik Öğretmeni Özlem GELİCİ'nin "Ortaokul Öğrencilerinin Çevre ve Alan İle İlgili Kavram İmajlarının ve Kanıt Şemalarının Araştırılması" başlıklı anket çalışmasını 2017/2018-2018/2019 eğitim öğretim yılları güz ve bahar dönemlerinde İlimiz İskenderun İlçesinde bulunan İskenderun Nuri Üysen Ortaokulunda eğitim gören 5, 6, 7 ve 8. Sınıf öğrencilerine uygulaması ile ilgili alınan 27/06/2018 tarihli ve 12366934 sayılı Valilik Onayı ekte gönderilmiştir.

Bilgi ve gereğini rica ederim.

Kemal KARAHAN
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

Ek :
1-Valilik Onayı (1 sayfa)
2-Anket Formu (13 sayfa)

Ürgen Paşa Mah. Şehit İsmail Yıldırım Sok.
Hatay İl MEM Sitesi No:21
Elektronik Ağ: stratejigelistirme31@meb.gov.tr
e-posta: hatay@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Zişan ÖNDAŞ-Memur (1133)
Tel: (0 326) 227 68 68
Faks: (0 326) 227 69 69

EK-2. (Devam) Hatay Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

T:C:
İSKENDERUN KAYMAKAMLIĞI
İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 62340095-604.01.01-E.12439820

28.06.2018

Konu : Özlem GELİCİ'nin
Araştırma İzin Onayı

NURİ ÜYSEN ORTAOKULU MÜDÜRLÜĞÜNE

Okulunuzun Matematik Öğretmeni Özlem GELİCİ'nin "Ortaokul Öğrencilerinin Çevre ve Alan İle İlgili Kavram İmajlarının ve Kanıt Şemalarının Araştırılması" başlıklı anket çalışmasını 2017/2018-2018/2019 eğitim öğretim yılları güz ve bahar dönemlerinde okulunuzda eğitim gören 5, 6, 7 ve 8. Sınıf öğrencilerine uygulaması ile ilgili alınan 27/06/2018 tarihli ve 12366934 sayılı Valilik Onayı ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinize gereğini rica ederim.

Ahmet YANMAZ
Müdür a.
Şube Müdürü

Ek :
1-Yazı (1 sayfa)
2-Valilik Onayı (1 sayfa)
3-Anket Formu (13 sayfa)

Adres: Çay Mah. Ulucami Cad. No:65 İSKENDERUN
Elektronik Ağ: iskenderun.meb.gov.tr
e-posta: iskenderun31_strateji@meb.gov.tr

Bilgi için: Memur Mustafa DAĞLI
Tel: 0 (326) 614 29 76
Faks: 0 (326) 614 29 73

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 5fd2-636e-3ca9-91f5-cc62 kodu ile teyit edilebilir.

EK-3. Veli Bilgilendirme ve Yazılı İzin Formu

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "Ortaokul Öğrencilerinin Uzunluk, Çevre ve Alan ile İlgili Kavram İmajlarının ve Kanıt Şemalarının Araştırılması" adlı doktora tez çalışması için belirlenen öğrencilerin uzunluk, çevre ve alan ile ilgili görüşlerini almaktır.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ve ses kayıt cihazı ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır.

İzniniz olmadığı takdirde, öğrencinizin ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılacaktır. Öğrenci istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Görüşülen Öğrencinin Velisi	Görüşmeci: Özlem GELİCİ
	Nuri Üysen Ortaokulu matematik öğretmeni
	Tel: 0506 889 56 03
Tarih:	E posta: ozlemgelici@gmail.com

EK-4. Öğrenci Bilgilendirme ve Yazılı İzin Formu

Merhaba,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğin ilgi ve bana ayırdığın zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve senin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "Ortaokul Öğrencilerinin Uzunluk, Çevre ve Alan ile İlgili Kavram İmajlarının ve Kanıt Şemalarının Araştırılması" adlı doktora tez çalışması için belirlenen öğrencilerin uzunluk, çevre ve alan ile ilgili görüşlerini almaktır. Araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceğin görüşlerinin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum.

Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmelerimizi video kamera ve ses kayıt cihazı ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşmeler, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır.

İznin olmadığı takdirde, ismin bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılacaktır. İstediğin zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilirsin. Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim sana verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanı rica ediyorum.

Araştırmama katıldığın ve bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığın için teşekkür ederim.

Görüşülen Öğrenci

Tarih:

Görüşmeci: Özlem GELİCİ
Nuri Üysen Ortaokulu matematik öğretmeni
Tel: 0506 889 56 03
E posta: ozlemgelici@gmail.com

EK-5. Yazılı Değerlendirme Aracı

SORULAR (1. BÖLÜM)

1. Bir şeklin çevresi denilince ne anlıyorsun? Açıklar mısın?

2. Çevre yerine başka hangi kelimeleri kullanabilirsin? Neden bu kelimeleri seçtin?

3. Bir şeklin çevresini örnek üzerinde açıklar mısın? Yaptıklarının bu şeklin çevresi olduğunu nereden biliyorsun? (İstersen çizim yapabilirsin)

4. Çevresi olmayan bir geometrik şekle örnek verebilir misin? Bu şeklin neden çevresi olmadığını açıklar mısın? (İstersen çizim yapabilirsin)

5. Çevreyle ilgili yukarıdakilerden başka bildiğin bir şey varsa yazar mısın?

6. Bir şeklin alanı denilince ne anlıyorsun? Açıklar mısın?

7. Alan yerine başka hangi kelimeleri kullanabilirsin? Neden bu kelimeleri seçtin?

8. Bir şeklin alanını örnek üzerinde açıklar mısın? Yaptıklarının bu şeklin alanı olduğunu nereden biliyorsun? (İstersen çizim yapabilirsin)

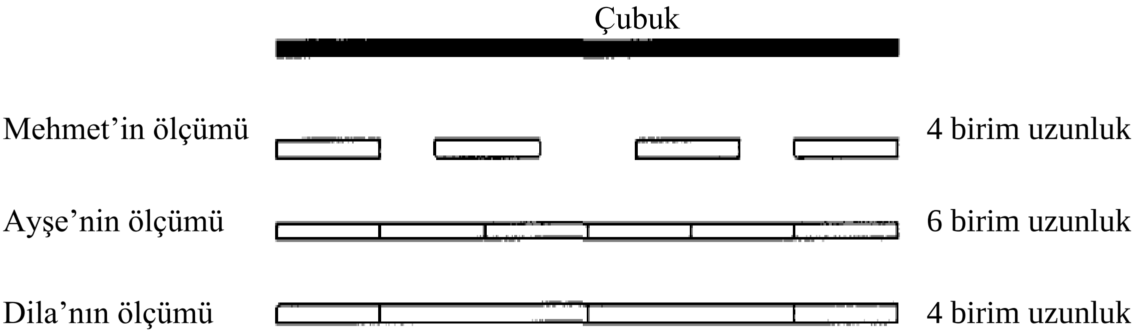
9. Alanı olmayan bir geometrik şekle örnek verebilir misin? Bu şeklin neden alanı olmadığını açıklar mısın? (İstersen çizim yapabilirsin)

10. Alanla ilgili yukarıdakilerden başka bildiğin bir şey varsa yazar mısın?

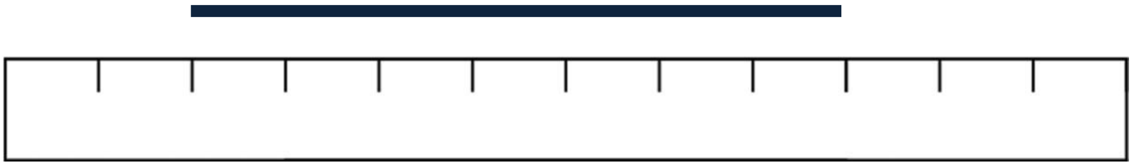
EK-5. (Devam) Yazılı Değerlendirme Aracı

SORULAR (2. BÖLÜM)

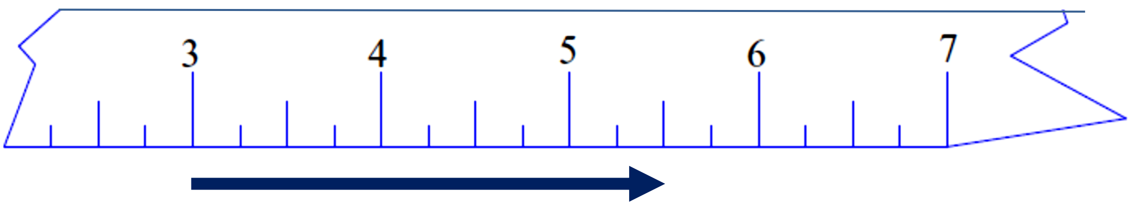
1) Aşağıdaki şekilde Mehmet, Ayşe ve Dila'nın bir çubuğun uzunluğunu ölçerek buldukları sonuçlar gösterilmiştir. Hangi öğrencinin ölçümü en doğrudur? Diğerleri nerede yanlış yapmıştır? Neden böyle düşünüyorsun? Çözümünün doğru olduğunu nereden biliyorsun?



2) Aşağıdaki çubuğun ve okun uzunluklarını yazarak bu sonuca nasıl ulaştığını açıklar mısın? Ölçümünün doğru olduğunu nereden biliyorsun?



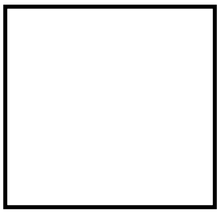
Çubuğun Uzunluğu:

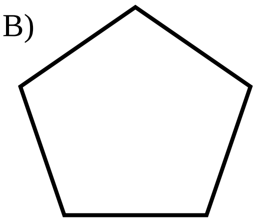


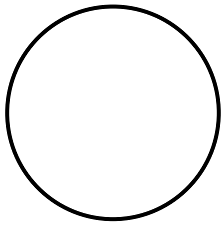
Okun Uzunluğu:

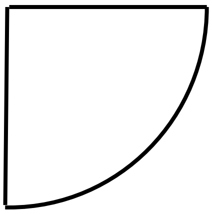
EK-5. (Devam) Yazılı Değerlendirme Aracı

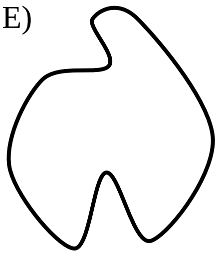
3) Aşağıda verilen şekillerin her birinin çevresini gösterir misin? Gerekirse çizim yapabilir ya da sadece yazarak ifade edebilirsin. Her bir şekil için ayrı ayrı açıklama yapmalısın.

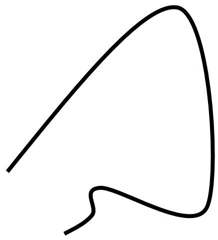
A) 

B) 

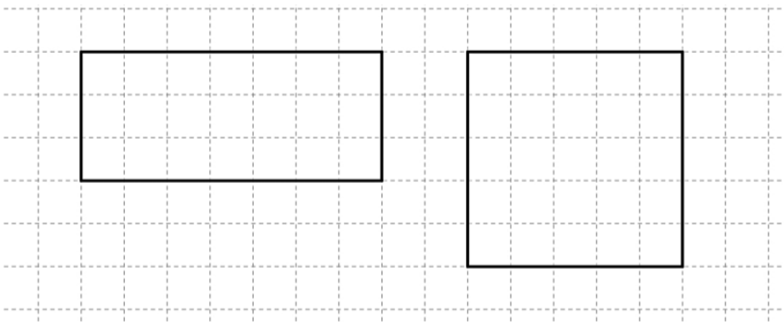
C) 

D) 

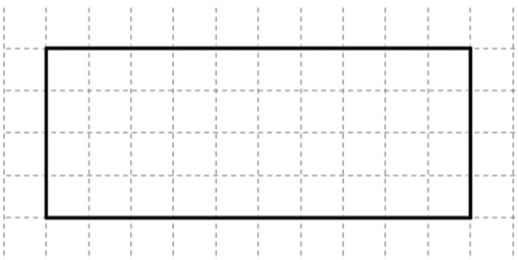
E) 

F) 

4) Ayşe elindeki çıtalarla aşağıdaki çerçeveleri yapmıştır. Bu çerçevelerden hangisi daha büyük çevre uzunluğuna sahiptir? Çözümünü açıklar mısın? Çözümünün doğru olduğunu nereden biliyorsun?



5) Aşağıda gösterilen şeklin çevre uzunluğu kaç birimdir? Çözümünü açıklar mısın? Yaptıklarının doğru olduğunu nereden biliyorsun?

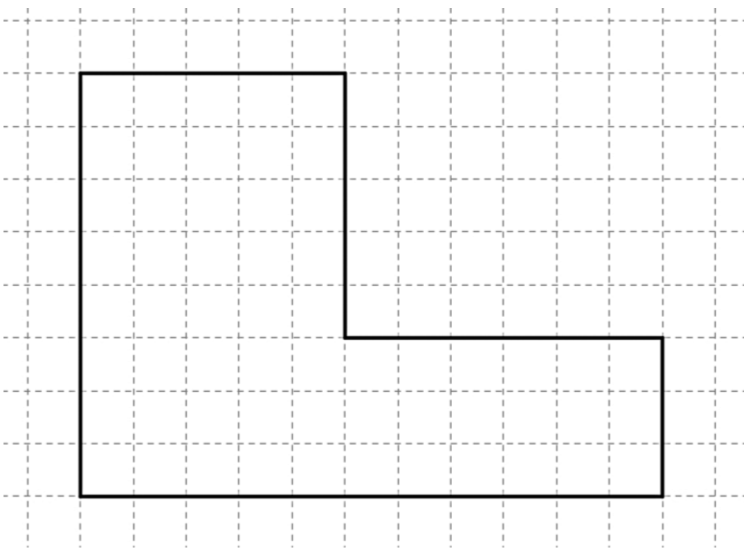


EK-5. (Devam) Yazılı Değerlendirme Aracı

6) Çevre uzunluğu 10 birim olan birbirinden farklı tüm dikdörtgenleri aşağıdaki kareli bölüme çizebilir misin? Çözümünü açıklar mısın? Yaptıklarının doğru olduğunu nereden biliyorsun?

1br

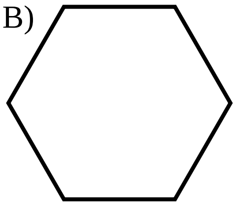
7) Aşağıda gösterilen şeklin çevre uzunluğu kaç birimdir? Çözümünü açıklar mısın? Yaptıklarının doğru olduğunu nereden biliyorsun?

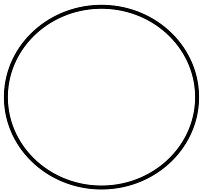


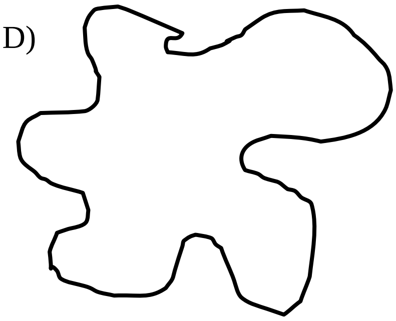
EK-5. (Devam) Yazılı Değerlendirme Aracı

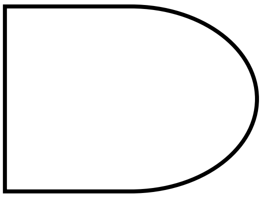
8) Aşağıda verilen şekillerin her birinin alanını gösterir misin? Gerekirse şekiller üzerinde çizim yapabilir ya da sadece yazarak ifade edebilirsin. Her bir şekil için ayrı ayrı açıklama yapmalısın.

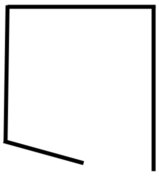
A) 

B) 

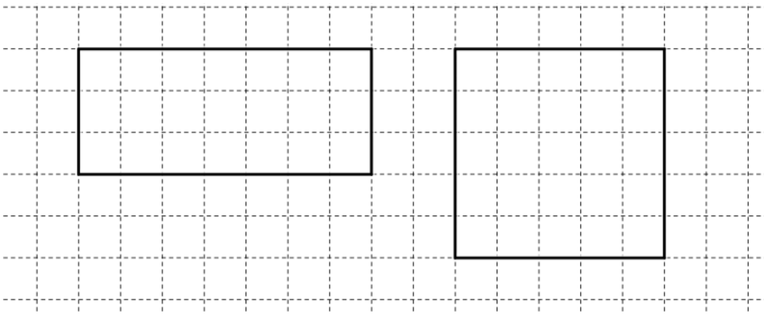
C) 

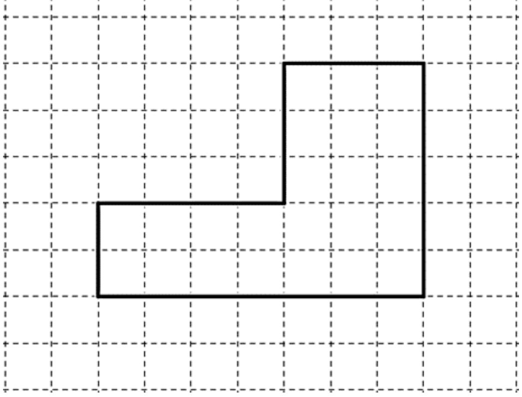
D) 

E) 

F) 

9) Ahmet proje ödevi için aşağıdaki şekillerde gösterilen iki parça karton kesmiştir. Bu kartonlardan hangisi daha küçük bir alana sahiptir? Çözümünü açıklar mısın? Çözümünün doğru olduğunu nereden biliyorsun?



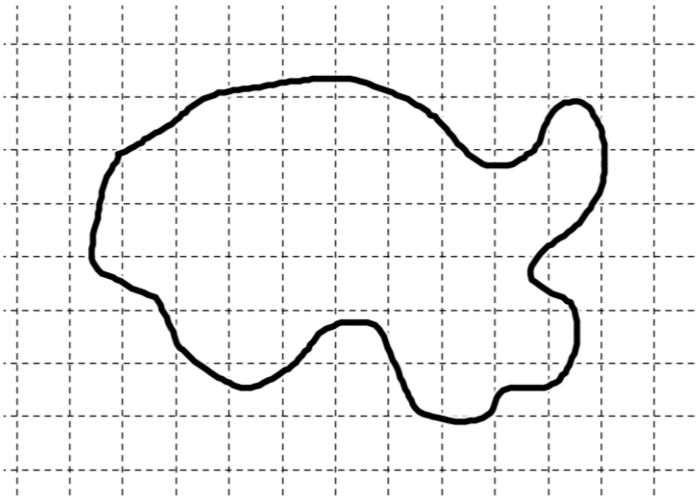
10) 

Yandaki şeklin alanı kaç cm^2 dir? Çözümünü açıklar mısın? Çözümünün doğru olduğunu nereden biliyorsun?

EK-5. (Devam) Yazılı Değerlendirme Aracı

11) Alanı 12 br^2 olan birbirinden farklı tüm dikdörtgenleri aşağıdaki kareli bölüme çizebilir misin? Çözümünü açıklar mısın? Yaptıklarının doğru olduğunu nereden biliyorsun?

12) Aşağıda gösterilen şeklin alanı yaklaşık kaç birim karedir? Çözümünü açıklar mısın? Yaptıklarının doğru olduğunu nereden biliyorsun?



13) Bir karenin kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa alanı nasıl değişir? Çözümünü açıklar mısın? Neden böyle olacağını düşünüyorsun? Çözümünün doğru olduğunu nereden biliyorsun?

EK-6. Çevreye Yönelik Birinci Öğretim Seansı Örneği

Hedef: Katılımcıların prototip çokgenlerle sınırlı olan çevre kavram imajlarını formal tanıma uygun olarak kapalı eğriler ve birleşik şekilleri de içerecek şekilde değiştirmek. (Nguyen' den (2010, s. 227) uyarlanmıştır.)

Araştırmacı tarafından telden yapılmış üçgen, kare, dikdörtgen, yamuk, paralelkenar, beşgen, altıgen, çember gibi sıklıkla karşılaştığı şekiller, bunların birleşiminden oluşan şekiller ve kapalı eğriler masaya konulur. Öğrencinin aşina olduğu çokgenlerle başlayıp, birleşik şekiller ve kapalı eğrilerle devam eden bir sıralama izlenir. Araştırmacı her bir şekil için sırasıyla aşağıdaki soruları yöneltir.

A: Bu şeklin sence çevresi var mıdır? Neden böyle düşünüyorsun? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

(Eğer öğrenci şeklin çevresi olmadığını söylerse veya şeklin bir kısmının (örneğin eğri olan kısmın) çevreye dahil olmadığını söylerse şekil üzerinde yürüyen bir karıncanın başladığı noktaya dönüp dönemeyeceği sorulur. Karıncanın ilerlediği yolu göstermesi istenir. Karıncanın bu hareketinin şeklin hangi niteliğini gösterdiği sorulur. Bu hareketle şekil arasında bir bağlantı kurması istenir. Eğer bu bağlantıyı kuramazsa bir şeyi çevrelemekten ne anladığı sorulur. Bir şekli çevrelemekle karıncanın yaptığı hareketin benzeyip benzemediği sorulur.)

A: Şeklin çevresini gösterir misin? Bunun doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

(Eğer öğrenci hesaplayamayacağı için çevresi olmadığını söylerse hesaplamayı düşünmeden sadece çevresinin olup olmadığının söylemesi istenir.)

Yukarıda sıralanan her bir şeklin çevresi olup olmadığına karar verip varsa çevresini gösterdikten sonra aşağıdaki aşamaya geçilir. Karşılaştığı örnek durumlar üzerinden çevrenin genel bir açıklamasını yapması istenir. Çevresi olan ve olmayan şekillere örnek vermesi istenir. Son olarak bir şeklin çevresi olması için gereken özellikleri sıralaması istenir.

EK-6. (Devam) Çevreye Yönelik Birinci Öğretim Seansı Örneği

A: Çevre denilince aklına neler geliyor? Neden bu kelimeleri seçtin? Bunların çevreyle ilişkisi nedir?

A: Çevreye örnek verebilir misin? Başka ne örnek olabilir? Bu şekillerin çevresi olduğuna nasıl karar verdin? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

(Burada öğrenciye kalem, kâğıt, tel, sayma çubuğu, oyun hamuru, ip gibi malzemeler verilerek söylediği örneği çizmesi veya modellemesi istenecektir.)

A: Çevresi olmayan bir şey söyleyebilir misin? Başka ne olabilir? Bu şekillerin çevresi olmadığına nasıl karar verdin? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Bir şeklin çevresi olması için gerekli şartlar nelerdir?

Bundan sonraki sorular öğretim bölümünün amacına ulaşıp ulaşmadığını belirlemek için sorulacak değerlendirme sorularıdır. Eğer öğrenci yeterli cevaplar veremezse bir sonraki görüşmede aynı kavramlar üzerinde yeniden durulacaktır. Eğer öğrenci yeterli cevaplar verirse bir sonraki aşamaya geçilecektir.

A: Geometri tahtası üzerinde çevresi olan bir şekil oluşturur musun? Bu şeklin çevresini gösterir misin? Bu şeklin çevresi olduğuna nasıl karar verdin? Nasıl bir şekil olsaydı çevresi olmazdı? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Oyun hamurunu kullanarak çevresi olan bir şekil oluşturur musun? Bu şeklin çevresini gösterir misin? Bu şeklin çevresi olduğuna nasıl karar verdin? Nasıl bir şekil olsaydı çevresi olmazdı? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Kâğıt üzerine çevresi olan bir şekil çizer misin? Bu şeklin çevresini gösterir misin? Bu şeklin çevresi olduğuna nasıl karar verdin? Nasıl bir şekil olsaydı çevresi olmazdı? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Birçok şeklin çevresini gösterdin. Yaptıklarını da düşünerek çevrenin ne olduğunu yeniden açıklar mısın? Çevrenin ne olduğunu bilmeyen bir arkadaşına çevreyi nasıl anlatırdın? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

EK-7. Alana Yönelik Birinci Öğretim Seansı Örneği

Hedef: Katılımcıların prototip çokgenlerle sınırlı, formal tanımdan uzak olan alan kavram imajlarını formal tanıma uygun olarak kapalı eğriler ve birleşik şekilleri de içerecek şekilde değiştirmek.

Araştırmacı tarafından üçgen, kare, dikdörtgen, yamuk, paralelkenar, beşgen, altıgen, daire gibi sıklıkla karşılaştığı şekiller masaya konulur. Araştırmacı sırasıyla her bir şekil için sonraki soruları yöneltir.

A: Bu şeklin alanı var mıdır? Neden böyle düşünüyorsun? Şeklin alanını gösterir misin? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun? (Eğer öğrenci hesaplayamayacağı için alanı olmadığını söylerse hesaplamasını değil sadece alanı olup olmadığının sorulduğu belirtilir. Bir şeklin alanı olması için gerekli şartların neler olabileceği sorulur.)

Araştırmacı telden yapılmış, kapalı eğrileri sırasıyla gösterir. Her bir şekil için sonraki soruları yöneltir.

A: Bu şeklin alanı var mıdır? Neden böyle düşünüyorsun? Şeklin alanını gösterir misin? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun? (Eğer öğrenci hesaplayamayacağı için alanı olmadığını söylerse hesaplamasını değil sadece alanı olup olmadığının sorulduğu belirtilir. Bir şeklin alanı olması için gerekli şartların neler olabileceği sorulur.)

A: Geometri tahtası üzerinde alanı olan bir şekil oluşturur musun? Bu şeklin alanını gösterir misin? Bu şeklin alanı olduğuna nasıl karar verdin? Nasıl bir şekil olsaydı alanı olmazdı? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Oyun hamurunu kullanarak alanı olan bir şekil oluşturur musun? Bu şeklin alanını gösterir misin? Bu şeklin alanı olduğuna nasıl karar verdin? Nasıl bir şekil olsaydı alanı olmazdı? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Kağıt üzerinde alanı olan bir şekil çizer misin? Bu şeklin alanını gösterir misin? Bu şeklin alanı olduğuna nasıl karar verdin? Nasıl bir şekil olsaydı alanı olmazdı? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

EK-7. (Devam) Alana Yönelik Birinci Öğretim Seansı Örneği

Bundan sonraki sorular öğretim bölümünün amacına ulaşıp ulaşmadığını belirlemek için sorulacak değerlendirme sorularıdır. Eğer öğrenci yeterli cevaplar veremezse bir sonraki görüşmede aynı kavramlar üzerinde yeniden durulacaktır. Eğer öğrenci yeterli cevaplar verirse bir sonraki aşamaya geçilecektir.

A: Birçok şeklin alanını gösterdin. Yaptıklarını da düşünerek alanın ne olduğunu açıklar mısın? Bunu alanın ne olduğunu bilmeyen bir arkadaşına nasıl anlatırdın? Alan denilince aklına neler geliyor? Neden bu kelimeleri seçtin? Bunların alanla ilişkisi nedir? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Alanı olan bir şekle örnek verebilir misin? Başka ne örnek olabilir? Bu şekillerin alanı olduğuna nasıl karar verdin? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun? (Burada öğrenciye kalem, kâğıt, tel, sayma çubuğu, oyun hamuru, ip, geometri tahtası gibi malzemeler verilerek söylediği örneği çizmesi veya modellemesi istenecektir.)

A: Alanı olmayan bir şekil söyleyebilir misin? Başka ne olabilir? Bu şekillerin alanı olmadığına nasıl karar verdin? Bu düşüncenin doğru olduğundan nasıl emin oluyorsun?

A: Bir şeklin alanı olması için gerekli şartlar nelerdir?