MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İNTEGRAL KAVRAMI İLE İLGİLİ KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Rahime YILMAZ

Eskişehir 2022

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İNTEGRAL KAVRAMI İLE İLGİLİ KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Rahime YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Haziran 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Rahime YILMAZ' ın "Matematik Öğretmen Adaylarının İntegral Kavramı İle İlgili Kavramsal ve İşlemsel Bilgilerinin İncelenmesi" başlıklı tezi 09/05/2022 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği''nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı- Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)		....
Üye		....
Üye		....

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İNTEGRAL KAVRAMI İLE İLGİLİ KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİLERİNİN İNCELENMESİ

Rahime YILMAZ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Haziran 2022
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU

Bu araştırmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının integral kavramına yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda, araştırmanın çalışma grubunu 2019-2020 eğitim öğretim yılında bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı birinci sınıfında öğrenim gören 30 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın modeli nitel araştırma olup veriler açık uçlu sorulardan elde edilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular içerik analizi kullanılarak çözümlenmiştir. Verilen cevaplar doğrultusunda integral kavramını anlamaya yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerinde eksikliklerin olduğu gözlenmiştir. Ayrıca; formül, teorem, gündelik yaşam uygulamaları ve konuya dair yaklaşımları sebebiyle öğretim prosedürlerinde zor olarak değerlendirilmekte, öğretmen adayları için anlamlandırma açısından zorluklarla karşılaşılmaktadır. Araştırmanın son bölümünde ise bulgular ve sonuçlar doğrultusunda araştırmacılara ve eğitimcilere; ‘‘integral kavramının öğrenilme süreci öğretim stratejilerine ışık tuttuğundan, limit-türev-seriler-diziler-fonksiyon kavramlarıyla arasındaki ilişkilerin kurulması ve günlük yaşam problemlerinde yorumlanması ve gerçek yaşamla ilişkili senaryolar olması’’ başta olmak üzere birtakım önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Kavram, İntegral kavramı, Kavram tanımı, Kavramsal bilgi İşlemsel bilgi

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE CONCEPTUAL AND PROCESSAL KNOWLEDGE OF MATHEMATICS TEACHER CANDIDATES REGARDING THE CONCEPT OF INTEGRAL

Rahime YILMAZ

Department of Mathematics Education

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, June 2022

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Gonca İNCEOĞLU

The aim of this research is to examine the conceptual and operational knowledge of prospective mathematics teachers about the concept of integral. For this purpose, the study group of the research consists of 30 pre-service teachers studying in the first year of the Primary Education Mathematics Teaching Program of a state university in the 2019-2020 academic year. The model of the research is qualitative research and the data were obtained from open-ended questions. The findings of the research were analyzed by content analysis. In line with the answers given, it has been observed that there are deficiencies in their conceptual and operational knowledge about understanding the concept of integral. Moreover; It is considered as difficult in teaching procedures due to formula, theorem, daily life practices and approaches to the subject, and difficulties are encountered in terms of interpretation for teacher candidates. In the last part of the study, in line with the findings and results, researchers and educators; Since the learning process of the concept of integral sheds light on teaching strategies, some suggestions are given, especially the establishment of relations between the concepts of limit-derivative-series-sequences-function and their interpretation in daily life problems and scenarios related to real life.

Keywords: Concept, Integral concept, Concept definition, Conceptual knowledge, Operational knowledge

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve araştırmam boyunca değerli bilgilerini ve tecrübelerini benimle paylaşan, ihtiyaç duyduğum her anda saat ve mekan mefhumu gözetmeksizin değerli görüşlerini aktaran saygın, kıymetli ve danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU'na teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Teşekkürlerin yetersiz kalacağı, beni bu günlere sevgi ve saygı ortamında yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan biricik ailem, annem Sezgi YILMAZ, babam Hilmi YILMAZ, abim Mehmet YILMAZ'a sonsuz teşekkür ederim.

Rahime YILMAZ

... / ... / 2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" ile tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Rahime YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Σ	:	Toplam Sembolü
$\int$	:	İntegral
$\forall$	:	Her
MEB	:	Milli Eğitim Bakanlığı
ÖA	:	Öğretmen Adayı

1. GİRİŞ

Tarih boyunca insanlığın gelişimini amaç edinen tüm eğitim felsefeleri, düşünmeyi geliştirilmesi gereken en önemli beceri olarak tanımlamış, düşünmenin sistematik gelişimine yardımcı olması açısından matematik, okutulması gereken temel dersler arasında yerini almıştır. Geleceğin bilimi olarak bilinen matematik, hayatımızı zenginleştiren insani bir çaba olduğuna inanan birçok kişinin matematiğe olan bakışı matematiği nasıl öğrendiği ile ilgilidir. Matematiğin herkes tarafından öğrenilebileceğini ve matematik yeteneğinin kalıtımsal olmadığını bilmek önemlidir.

Temel bir yaşam becerisi olan matematik, her ne kadar zor ve oluşturulan ön yargılarla çekimser yaklaşılan bir disiplin gibi bazı kesimlerce addedilse de günlük hayattaki rolü ve etkisi bakımından önemi büyüktür. Hemen hemen hayatımızın her alanında yer alan matematik sevilen, ilgi duyulan ve merak konusu olan bir bilim dalıdır.

Matematik eğitimi diğer bilim dalları gibi tüm dünyada devamlı değişen ve gelişen bir yapıya sahiptir ve bu süreçte kişinin ihtiyaçları, zaman, toplum, çevresel ve teknolojik gelişmelere bağlı olarak gerçekleşmektedir. Bilim dalları içinde temel yapıya sahip matematiğin araç olarak kullanılması, öğretilmesi ve öğrenilmesi anlamında güçlükler olduğu çeşitli araştırma ve örneklemelerden anlaşılmaktadır (Hernández, Levy, Felton-Koestler ve Zbiek, 2017).

Yükseköğretimde yer alan Analiz dersi karşımıza Genel Matematik, Matematik I vb. farklı isimlerle çıkmakta, yalnızca matematik bölümünde değil İşletme, İktisat ve Fen Bilimlerinde de yararlanıldığı ve bu bölümlerde de üniversite eğitiminin ilk yıllarında verilen ders olarak bilinmektedir. Analiz dersi üst düzey matematiksel yetileri içeren bir ders olduğu için, öğrencilerin yalnızca bir bölümü, ders sonunda kavramsal anlama becerilerine sahip olmaktadır (Hernández, Levy, Felton-Koestler ve Zbiek, 2017). Yapılan araştırmalar öğretimin yalnızca işlemsel bilgi düzeyinde kalmayarak, kavramsal anlama yetisinin anlama seviyesinin yükseltilmesi ve farklı alanlar arasında geçiş yeteneklerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

Toplumun genelinde matematiğin okulda görülen, belli bir düzen ve mantıksal sıralamaya sahip kavramlar ve işlemler üzerine kurulu sembolik bir eğitim alanı olarak algılandığı görülmektedir (Raitta, Gittings ve Geiger, 2011). Halbuki matematik, gündelik yaşamda önemi olan, doğum anından başlayıp eğitim hayatı boyunca süregelen hayatın bir parçası olarak karşımıza çıkmaktadır (Peker ve Mirasyedioğlu, 2003).

Matematik, öğrencinin ilgisine ve ihtiyacına dayalı olarak, öğrencinin matematiksel düşünmesini geliştirmeyi hedef alan, öğrencinin potansiyelini yükseltmeyi hedefleyen eğitim sisteminde ihtiyaç duyulan alanların başında yer alır (Raitta, Gittings ve Geiger, 2011). "Matematiğin öğretiminde, küçük yaşlarda, somut deneyim ve işlemlerden başlansa da zihinsel bir sistem olarak soyut düşünmenin etkisi kaçınılmazdır. Başta simgesel gösterimler kullanılmadan da matematik yapılabilse de simgeleştirme soyutlamayı kolaylaştırdığı için, ileri matematik için vazgeçilmezdir" (Lingefjärd ve Holmquist, 2005).

Matematik üzerine araştırma yapanların ortak fikir birliğine varamadığı bir tanım olan ileri matematiksel düşünme 1980'lerden bu yana üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. 'İleri' kelimesinin tam olarak neyi nitelediği konusundaki belirsizlik araştırmacıların farklılaştığı noktaların başında gelmektedir. Bazı araştırmacılar ileri matematiksel düşünmeyi lise ve lisans düzeyi matematikte ya da profesyonel bir çalışma alanı olarak kullanır (Sertöz, 2013). Bu da 'ileri matematik' fikrini öne çıkarmaktadır.

Akıl yürütme ve subjektif farklı ispat metotları kullanılarak doğruluğu kanıtlanmış verileri ve bilgileri açıklayan matematiksel kavramlar, insan beyninin -en azından başlangıç aşamasında- somut nesneler üzerinde gerçekleştirdiği eylemler ile oluşturduğu soyut yapılardır. Matematiksel kavramların doğası gereği soyut olduğu bununla beraber soyut matematiksel kavramlar ifadesi ile daha çok görsel veya fiziksel temsilinin mümkün olmadığı durumları tanımlamaktadır.

Matematiksel kavramların anlatımı ve kullanımı öğrencilerin karşılaştıkları günlük hayattaki durumları ile ilgili tasvirleme, gözlem analizi, grafiklerle algıyı güçlendirme gibi konular aracılığıyla matematiği anlayarak öğrenmelerini kolaylaştırır (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010).

Bu bölümde araştırmanın problemi, amacı, önemi, sınırlılıklar ve tanımlar yer almaktadır.

1.1. Araştırmanın Problemi

Matematik; bireylerin nesnel, sistematik ve mantıklı şekilde düşünmesini sağlayan, fikir üretmenin yanında doğruluğu öne çıkaran soyut bir alandır. Matematiğin en dikkat çeken bölümü dil ve mantıktan başka bir bilim alanına sahip olmaksızın tanımlı ya da tanımsız kavram değerleri, bağımsız teorileri ve önermeleri ile fiziki dünya ile teknolojinin birleşimidir (King, 1999).

Matematiğin kısa bir tanımı olmamakla birlikte, daha çok öğrenci gruplarının, bireylerin algılama ve özetleme biçimlerine göre farklılıklar taşır (Jöreskog ve Sörbom, 1993). Matematiğin ve bünyesinde bulunan kavramların ayrıntılar içermesi, matematik öğretiminin en büyük engeli olarak karşımıza çıkmaktadır (Judd, Eliot ve Kidder, 1991).

Yapılmış olan matematik eğitimi çalışmalarında matematiğin öğrenimi ve öğretimi ile ilgili olan pedagojik, psikolojik ve epistemolojik çalışmalarla öğrenimi kolaylaştırmayı amaçlamaktadır (Jöreskog ve Sörbom, 1993). İntegral kavramının anlamlandırılmasındaki eksiklik birden fazla araştırmacı tarafından kabul edilmiştir. İntegral ve integral-alan arasındaki ilişkisine dair kavramsal anlamanın yetersiz olması karşılaştıkları problem durumlarını daha iyi yorumlayabilme ve çözüm üretebilme de öğrencilere güçlük çıkaracağı aşikârdır (Kim ve Kim, 2005).

Öğrenciler tarafından herhangi bir matematik kavramına ilişkin yaşanan zorluklar öğrencilerin tutumlarına, kaygılarına, matematikten korkmalarına ve farklı duygular yaşamalarına neden olmaktadır (Lederman ve Leederman, 2015). Aynı şekilde integral kavramı üzerinde de öğrenciler tarafından yaşanılacak zorluklar neticesinde tutum değişikliklerine yol açabileceği düşünülmektedir. Yapılan araştırmada matematik öğretmeni adaylarının integral kavramı üzerine kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Yeni kavramların öğrenilmesinde sahip olunan ön birikimler bazen yanlış öğrenmelere sebep olabilir. Öğrenci bir problemi çözerken veya bir işlemi yürütürken mantığına ve önceki birikimlerine göre hareket edebilir ancak bilimsel geçerliliğinin olmadığını anlamayabilir. Olağan durumlarda kavramsal hatalar oluşabilir. Bu duruma dair integral kavramı örnek verilebilir (Lesh ve Doerr, 2013b).

Araştırma amacı doğrultusunda günlük hayatta karşılığı olan ve matematikte önemli bir yere sahip "integral" kavramı ele alınmış olup bu kavram doğrultusunda da matematik öğretmen adaylarının kavramsal ve işlemsel bilgileri araştırılmıştır. Öğrencilerin, matematiksel düşünme becerisi ile konuya hakim, donanımlı birer eğitici kimlik kazanmalarını hedefleyen matematik programı; matematiksel kavramlara ve aralarındaki ilişkiye dayanarak temelde yer alan matematiksel işlemler akabinde matematiksel anlamlara dikkat çekmektedir. Programda bilgi odaklı ve işlemsel bilgiyle hareket eden öğretimden ziyade matematiksel kavramların sınıf içi tartışmalarla beraber anlamlandırıldığı, kavramsal ve işlemsel bilginin birlikte olduğu, dengeli şekilde yürütüldüğü bir yaklaşım ana amaç olarak belirlenmiştir. Yine bu programla öğrencilerin informal tecrübelerinden ve sezgilerinden yola çıkarak matematiksel anlam oluşturmaları ve konuya bir soyutlamayla yaklaşmaları hedeflenmektedir (Hoffman ve Brahier, 2008).

Öğretmen adayları, otoritelere bağlı kalmak yerine matematiksel düşünmeye alıştırıldığında matematiği daha kolay ve daha etkili bir şekilde öğreneceklerdir. Böylece yeni deneyimlerin kavranabildiği, özümsenebildiği ve açıklamaların yer aldığı bir yapı oluşturarak matematiksel konu ile ilgili planlı bir anlayış geliştirebileceklerdir. Matematik eğitiminde kavramsal öğrenme ve matematiksel anlam oluşturmanın gerçekleşebilmesi için öğrencilerin aktif olmalarını sağlayan bazı stratejilere ihtiyaç duyulabilir (Blitzer, 2003).

Gerçekleştirilen bu çalışmanın temel konusu: "Matematik öğretmen adaylarının integral kavramı ile ilgili kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesi" olup, konunun aydınlatılmasına yönelik cevap ararken bazı alt problemler de oluşturulmuştur.

1. Matematik öğretmeni adaylarının integral kavramı ile ilgili kavramsal bilgileri nasıldır?
2. Matematik öğretmeni adaylarının integral kavramı ile ilgili işlemsel bilgileri nasıldır?

1.2. Araştırmanın Amacı

Günümüzde gelişmiş toplumlarda bireylerden günlük hayatta yaşadıkları problemleri çözebilmeleri, problemlerin çözümünde özgün, pratik, işe yarar, uygulanabilir çözüm yolları üretmeleri beklenmektedir. Matematik öğretiminde bireyler karmaşık bir problemle karşılaştıklarında, problemin çözümüne dair birtakım işlemler yapıp formül geliştirebilirler. Bu durum öğrencilerin günlük hayatta karşılaştıkları problemlere eleştirel bir bakış açısıyla yaklaşması açısından oldukça önemlidir.

Eğitim programının tüm safhasında matematik öğretimini kolaylaştırmak ve etkisini artırmak için birden fazla nitelik belirlenmektedir (Ma ve Xu, 2004). Öğrencilerin matematiksel kavramlarının bilincinde olması, problem çözüm yetisine katkıda bulunmasıyla birlikte öğrencilerin kişisel gelişimine etki ederek mutluluk duygularının artmasında olumlu etken olarak sayılabilir (Lesh ve Harel, 2003). Matematiği öğrenme karmaşık sarmal bir yapının sonunda gerçekleşeceği gibi bu yapı temel matematik kavramlarının kazanılmasından çok fazlasını içinde barındırır (Lingefjärd ve Holmquist, 2005).

Matematiksel ilişkilendirme, akıl yürütme, problem çözme, matematiği iletişimin bir dili olarak kullanabilme ve modelleme yetileri matematiğin öğrenme ve çözme süreçlerinin ana unsurları arasında yer alır. Bu yetilerin, öğretmenin matematiğinin taklidinin yapıldığı, matematik formüllerinin nedenlerinin araştırılmadan ezberlendiği ortamlarda gelişmesi elbette kolay değildir (Sevimli, 2013). Matematik öğrenmek, aklı kısaca basmakalıp bilgilerle beslemek değildir. Öğrencinin bu bilgiyi kendi düşüncelerini ortaya koyacak ve problem çözümünde kullanacak şekilde olması gerekir (Rowland, 2006).

Matematik eğitiminin ayrıntılı bir öğrenme sürecini kapsadığı ve matematik biliminde kavramların detaylı bir şekilde anlatılmadığı, işlemlerin ise ezberlendiği saptanmıştır. Bununla birlikte işlemlerin kavramsal bilgiden eksik ya da çok daha az kısmına sahip olarak işlemleri kullanan öğrencileri bulmak şaşırtıcı değildir. Öğrencilerin çoğunluğu kullandıkları işlemlerde kavramların aktif olarak kullanıldığının farkında değildirler (Cho ve Kim, 2015).

Matematikte konunun öğrenilmesi ve anlaşılabilmesi, öğrenci tarafından konu ve içeriğindeki kavramların net olarak bilinmesiyle doğru orantılıdır. Konunun bütünlüğü tanım, kavram ve kavramları yorumlayabilmek için ayrıntılı öğrenilmesi gerekmektedir. Öğrencinin nasıl öğrendiği, öğretmenin nasıl anlattığı ve öğrettiği sonunda ise problemi çözmede kullandığı yol ve tekniklerden yararlandıklarını bilmek için, işlemsel ve kavramsal matematik öğrenmeyi açıklamak gereklidir (Shavelson, Phillips, Towne ve Feuer, 2003).

Matematik eğitiminde yapılan araştırmaların ortak amacı içinde bulunduğu durum ve koşula sahip bilgiyi kullanarak problem çözebilecek birey yetiştirme olarak ifade edilebilir. Bu bağlamda matematik eğitiminin bireylere sadece öğretim programlarında yer alan konuların çözümünün kazandırmasının yanında bireylerin karşılaştıkları sorunların çözümü için akıl yürütme, modelleme, genelleme ve problem çözme becerilerinin gelişiminin sağlanması gerekmektedir (MEB, 2018).

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmeni adaylarının integral kavramına yönelik kavramsal ve işlemsel bilgilerinin incelenmesidir.

Bu araştırmadan elde edilecek bulguların, kavramsal ve işlemsel bilginin kullanımına katkı sağlayarak ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel düşünme becerilerine ve neden-sonuç kurma yetilerinin gelişimine yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Yapılan araştırmada, Analiz derslerinde önem arz eden ve öğrenim aşamasında formüllerle dolu, zor ve soyut bir kavram gibi görülen integral kavramı üzerinde durulmuştur. Genel olarak integral problemlerinde, öğretmen adaylarının haiz olduğu kavram tanımı, kavram ve işlem bilgisi arasındaki ilişkinin araştırılarak çalışmanın odağı belirlenmiştir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Matematik; kavramları ve işlemsel bilgiyle çözmeyi ilke edinen bireyin fiziki dünya ile farklı bir bakış açısıyla yorumlama ve karşılaştırma yapması gereken özel bir alanı ifade eder. Matematik eğitimi alanında, öğrencilerin matematik kavramlarını günlük hayat ile ilişkilendirebilmesi, kavramların birbirleriyle olan ilişkilerini saptayabilmeleri önemli kazanımlar olarak ifade edilebilir (Peker ve Mirasyedioğlu, 2003).

Matematik eğitimi alanında ortaöğretim ve lisans seviyelerinde gösterilen Analiz dersi, insan aklının en büyük başarılarından biri olarak görülmektedir. Analiz; matematik dışında mühendislik, fizik, biyoloji ve birçok sosyal bilimlerde kullanılması çok güçlü bir disiplin olduğunu da göstermektedir (Peker ve Mirasyedioğlu, 2003). Analizin temel konularından birisi olarak kabul edilen ve içerisinde limit, türev, değişim oranı gibi pek çok konuyu barındıran integralin kavramsal olarak anlaşılması Analiz için oldukça önemlidir. İçerik olarak integral kavramının anlaşılması, Analiz disiplinine etkisi bakımından kritik bir öneme sahiptir (Raitta, Gittings ve Geiger, 2011).

İntegral kavramının doğası gereği öğrenciler tarafından zor bir kavram olarak algılanması içinde formül, teorem, gündelik hayat varyasyonları, alanlararası kullanımları ve konuya dair yaklaşım önerileri barındırmasıyla ilgilidir (Rounds ve Hendel, 1980). İntegral kavramı için yaşanan zorluklar neticesinde matematik eğitimcileri birçok araştırmalar yapmışlar ve yaşanan olumsuzlukların arkasında yatan sebepleri belirleyerek yapılabilecekler hakkında düşüncelerini sunmuşlardır (Schermelleh, Engel ve Moosbrugger, 2003).

İntegralin kavramsal anlamasının gerçekleşmediği, işlemsel anlama ile yürütülen öğretim süreçlerinde integral kavramının öğrencilerde kaygı, olumsuz tutum gibi durumlara da neden olduğu düşünülebilir ki; bu düşünce zor bir matematik kavramının öğretim sürecinde öğrencilerin sıklıkla yaşadığı bir döngünün sonucudur (Raitta, Gittings ve Geiger, 2011). Bununla birlikte matematiğin hayatımızla iç içe olmasına rağmen matematiksel kavramların günlük hayatta kullanılmayan, soyut kavramlar olarak görülmesi de önemli bir sorun olarak düşünülebilir.

Özetle alanyazın incelenmesi sonucunda ortaya çıkan durumlar ve bu durumlar neticesinde araştırmanın önemi şu şekilde ifade edilebilir: İntegral kavramı ve integral kavrama ait anlama güçlüğü ile yapılan birçok araştırma öğretmenler, öğretmen adayları ve öğrenciler arasında örneklem içeren gruplara yapılmış ancak kavramsal ve işlemsel bilgileri birlikte inceleyecek çalışmalara, yapmış olduğumuz literatür taramaları ya da bahse konu üzerinde herhangi bir çözüme yönelik planlı bir araştırmayla karşılaşmadığımızdan yapılmış olan araştırma bu konudaki eksikliği kısmen gidermek için yapılmıştır.

Araştırma sürecinde integral kavramının öğretmen adaylarına yönelik bilimsel çalışmaların ortaya koyacağı sonuçların öğretmen yetiştiren kurumlara yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Bu araştırma ile öğretmen adaylarının karşılaştıkları problemleri yorumlayabilme, kavram-işlem becerisi ve çözüm üretebilme süreçlerindeki gelişimleri incelenecek ve olumlu-olumsuz yanları ortaya konmaya çalışılacaktır.

1.4. Sınırlılıklar

Araştırmanın sınırlılıkları kapsamında bu çalışma;

- Zaman Açısından Sınırlandırma: 2019-2020 eğitim öğretim yılını kapsamaktadır.
- Mekân Açısından Sınırlandırma: Türkiye'de eğitim öğretim faaliyetlerini yürüten okullar arasında Eskişehir'de bulunan Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı birinci sınıfında okuyan Analiz II dersini alan 30 öğretmen adayından elde edilen veriler ile sınırlıdır.
- İçerik Açısından Sınırlandırma: Uzaktan eğitimle yapılan öğretimle sınırlıdır.

1.5. Tanımlar

Kavram: Nesnelerin veya olayların benzer özelliklerini içine alan genel bir çatı altında birleştiren genel tasarıdır (Sowder, Armstrong, Lamon, Simon ve Thompson, 1998).

Kavram Tanımı: Kavramı ayrıntıları ile açıkça, dolambaçsız ve doğru bir şekilde belirten kelimelerin bütünüdür (Vinner, 1983).

İşlemsel Bilgi: Tanımların, sembollerin ve izole edilmiş becerilerin derinlemesine bir inşaya odaklanmadan açıklayıcı bir biçimde, kavramlar arası bağ kurma eğilimi (Hiebert ve LeFevre, 1986).

Kavramsal Bilgi: Kavramın tanımını ya da anlamını bilmek değil kısacası kavramlar arasındaki karşılıklı ilişkileri ve geçişleri yorumlayabilmektir (Skemp, 1978).

Kavramsal anlama: Kavramlar arasında geçişleri sağlayarak eski ve yeni bilgileri ilişkilendirerek, matematiksel kavramların, süreçlerin ve tanımların zihinde anlamlandırılma sürecidir (Yudariah, Yusof ve Tall, 1999).

İşlemsel anlama: Problem çözme sürecinde, sembol, matematiksel dil, algoritma, formül, kural ve prosedürlerinin bilinmesidir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

2. ALANYAZIN İNCELENMESİ

2.1. Kavram Tanımı

Matematik konuları diğer derslere bakıldığında güçlü bir sarmal yapıya sahiptir. Bunun sebebi matematiğin sürdürülebilir, gelişimsel, sıralı ve yığılmalı bir bilim olmasıdır. Buradan hareketle özel bir matematik kavramı, içeriğindeki kavramlar detaylı incelenmeden öğrenilemez ve öğretilemez (Cho ve Kim, 2015).

Bilişsel becerilerin gelişmesi ise kavramların iç içe geçmesi ile gerçekleşir. Kavramlar günlük olağan deneyimleri sınıflayarak aklın temelini oluştururlar. Kavram bilgisinin anlaşılmasını kolaylaştıracak öğretmenin özellikle öğrencilere yönelik konu ile ilgili tanımlamaları yerinde yapması gereklidir. Kavramın ne içerdiği ne içermediğinin anlatımı ve enine boyuna kavramın açıklanması gerekir (Comrey ve Lee, 1992). Matematik tek başına bağımsız bir dildir ve fazlasıyla temel kavramlara sahiptir (Cho ve Kim, 2015). Kavram bilgisine sahip olmak onun adını, tanımını bilmek değil, kavramlar arasındaki ilişkiyi ve karşılıklı geçişleri görmektir (Simon ve Blume, 1994).

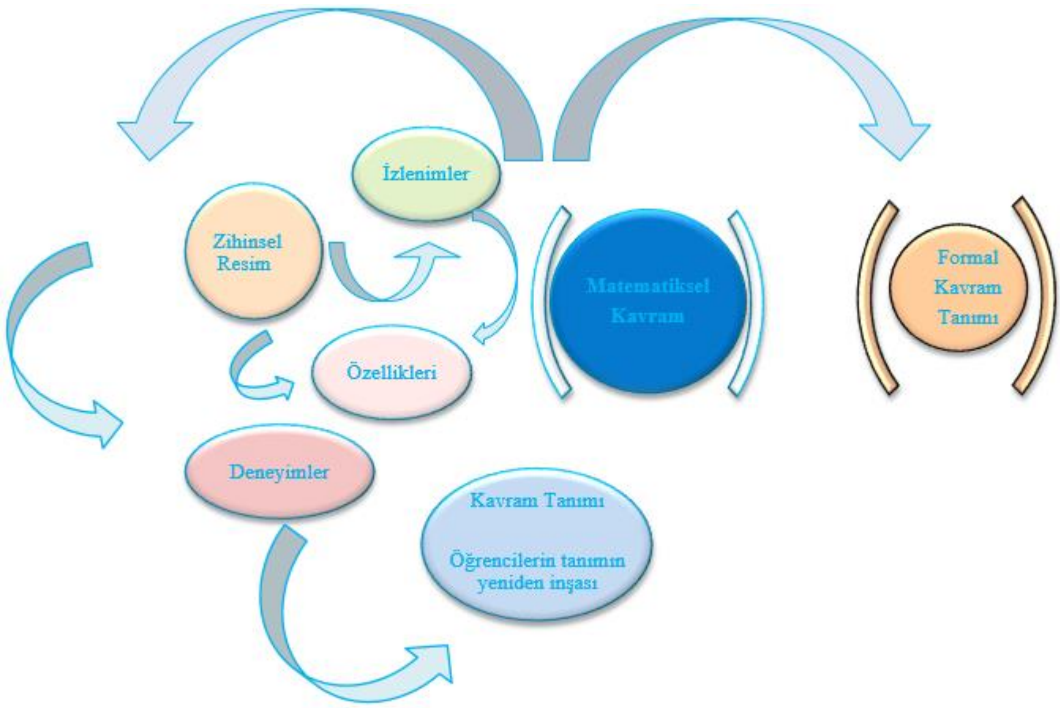
Kavramlar tek başına anlam ifade etmediği gibi kavramın anlaşılması, taşıdığı anlamla ilişkilendirilirse gerçekleşir. Kavramın anlamını tanımlayabilmek için farklı alanlarla ilişkilendirmesi gerekir. Kavram bilgisi kavramın anlamına ışık tutar (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010). İnsanoğlu geçmişte yaşadıklarından dersler alır ki matematikte eski bilgilerle bütünleşir.

Matematiksel bilgiler yeniyle eskinin birlikte uyumudur. Eski ve yeni bilginin uyumu ilişkilendirilirse kavramsal anlama kolaylaşır, öğrencinin eğitimi ve başarıya karşı hazırlanması bunun yanında sadece formül bilerek hesap yapması değil matematiğin mantığını ve anlamını kavramasına bağlıdır (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010).

Öğrenim sürecinde ortaya çıkan kavram, prensip ya da bilgiler ile önceki bilgiler arasında anlamlı bir bağlam kurulmuşsa anlamlı öğrenme gerçekleşir. Bu bağlamda, bilinç ile bilgi arasında kalan anlam olmaktadır (Keller ve Hirsch, 1998). Kavramların öğrenilmesi ve hangi anlamı kapsadığı önem arz eder. Bağlamların öğrenilmesi önermenin bütününü nasıl kullanıldığının ve öğrenildiğinin göstergesidir (Hiebert ve Lefevre, 1986).

Matematik eğitiminin işlemsel bir öğrenme olduğu ve matematik derslerinde kavramsal düzeyde işlenmediği buna dayanarak işlemlerinde öğrenilmek yerine daha çok ezbere dayalı bir sistemin olduğu yapılan araştırmalarla ortaya çıkmıştır. Bunun sonucunda öğrencilerin kavramsal bilgiden uzak ya da çok daha azını bilen öğrenci bulmak son derece şaşırtıcı bir durum değildir. Şu durumda bile bazı öğrencilerin kullandıkları işlemlerin temelinde kavramların olduğunu bilmemektedirler (Cho ve Kim, 2015).

İlk ve orta dereceli okullarda matematiğin kavramsal anlamının öğretilmesi ayrıca bu düzeydeki öğrencileri eğitecek olan öğretmenlerin yetiştirilmesinden geçer. Öğretmenlerin kavramsal bilgiye hakim olmaları yanı sıra bu bilgileri etkin bir şekilde öğrencilere aktarabilme yetilerinin gelişmiş olması önem arz etmektedir (Camacho, Depool ve Santos-Trigo, 2009).



Şekil 2.1. *Kavram ve kavram tanımının örneklendirilmesi* (Tall ve Vinner, 1981).

Araştırmacılar için öğrencilerin kavramlara dönük tanımlamaları merak konusu olmuştur. Önceki yıllarda baz alınan "sonucu doğru bulma veya istenen cevabı söyleme" iken; son yıllarda "sürecin nasıl oluştuğu" temel alınmaya başlamış olup integral kavramı üzerinde yapılan analizler neticesinde öğrenciler üzerinde bilişsel bir karmaşıklık ortaya çıkmaktadır. Öğrencilerde genel olarak integralin kavram tanımı *"türevin tersi"* şeklinde yapılır ve birden fazla yöne sahip olabilir.

2.2. Kavramsal Bilgi ve İşlemsel Bilgi

Matematikte bir kavramı öğrenebilmek için o kavramın içerisindeki ifadeleri ve kavramların birbirleri ile olan ilişkisini bilmek gerekir. Kavram öğreniminin istenilen düzeyde olması için kavramın tanımı ve diğer kavramlarla ilişkisini göz ardı etmemek öğrenme için kaçınılmazdır (Creswell ve Plano Clark, 2007).

Temel kavram ve becerilerin kazanılması matematiğin öğrenilmesini kolaylaştırır. Yapılan çalışmalarda matematikte neyin öğrenilmesi gerektiği ve işlemleri öğrenmenin ötesine geçilme gerekliliği ihtiyacı doğmuştur (Sevimli, 2013). Yenilenen eğitim programlarımızın içeriğinde de belirtildiği üzere formüllere bağlı matematik öğretiminden ve işlemsel bilgiye yönelik kurallardan daha çok öğrencilerin doğrudan katılımının bulunduğu, matematiksel kavramların sınıf ortamında düşüncelerle desteklenerek anlaşılabilirliği, işlemsel ve kavramsal bilginin sentezlendiği öngörülmüştür. Matematik eğitimi uzmanları ise kavramsal ve işlemsel bilgiyi ikiye ayırarak matematiksel bilgiyi tanımlamaktadır (Shavelson, Phillips, Towne ve Feuer, 2003).

Kavramsal bilgi ve anlama, matematiksel kavramları ve bunların bileşenlerini farkına vararak, sembolik ifadelerle anlatma, matematiksel işlemlerin yöntemlerini kavrama; metotlar, semboller, kavramlar arasında bağlantı ve ilişki kurma olarak ifade edilebilir (Comrey ve Lee, 1992). Kavramsal anlama, kavramsal bilgi ve işlemsel bilginin dengelenmesiyle kazanılmaktadır ve öğrencilere problem çözme becerisi kazandırmada önemli rol oynamaktadır (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010).

İşlemsel bilgi ise işlemi oluşturan iki ayrı bölümle açıklanmaktadır. İşlemsel bilginin birinci bölümü matematikte yer alan sembol ve dilini ifade eder. Matematik sembolleri konunun detayına inmeden özetlenmesini yapar sonuç verirler ancak açıklama yeterli değildir. İşlemsel bilginin ikinci bölümünde kuralları, matematik problemlerini sonuca ulaştırmak için kullanılan yöntemleri, somut nesnelerden yapılacak işlemleri, görsel şekilleri, mantıksal duyguları veya matematiksel sistemin standart olmayan diğer nesnelerini içerir (Shavelson, Phillips, Towne ve Feuer, 2003).

Skemp (1971) kavramsal bilgi; “neyi, nasıl ve ne ile yapacağını anlaması”, işlemsel bilgiyi ise; “kuralların ne ifade ettiğini bilmeden kullanma yeteneği” olarak ifade etmektedir.

Mccormick (1997) ise diğer bir yaklaşımla işlemsel bilginin neyi-nasıl yapılacağını, kavramsal bilgiyi ise disiplinler arası ilişkilendirme evresi olarak tanımlamaktadır.

Hiebert ve Lefevre (1986) ise işlemsel bilgiyi matematiğin sembolik dili ve problemleri çözebilmek amacıyla işlem ve kurallar bütünü, kavramsal bilgiyi ise özel bir ağın parçaları arası uyumu olarak tanımlamaktadır.

Ersoy (2002) ise iki tür matematiksel bilgiden söz ederken, kavramsal bilgiyi "birey tarafından subjektif anlamlı ilişki" olarak, işlemsel bilgiyi ise "matematiksel bilgiyi anlamada ifade edilen simgeler bütünü" diye belirtmektedir. Kavramsal ve işlemsel bilginin aralarındaki ilişkiyi ise aşağıdaki gibi ifade etmektedir.

> "Matematik öğrenmede hem işlemsel hem de kavramsal bilgiye gereksinim vardır. Kavramsal bilgi işlemsel bilgiye anlam kazandırarak ona destek olur. Kavramsal bilgi işlemsel bilgiden daha önemli ya da bunun tersi düşünülmemelidir. Algoritmalar ve bu süreçte izlenen adımlar, işlemsel bilgileri yansıtırlar. Kavramsal bilgiden yoksun işlemsel bilgiler matematik öğretiminin özüne terstir. İşlemsel bilgi ezberlenerek öğrenilirken, kavramsal bilgi anlamayı gerektirir. Bu nedenle, kavramsal bilginin edinilmesi daha uzun süre alır ve daha karmaşık süreçler içerir (Ersoy, 2002)."

Skemp (1976), kavramsal bilgi kuramı yerine ilişkisel öğrenme kuramını benimsemiş, bilginin var oluş süreci içerisinde bilginin kendi kurduğu düzende diğer bilgi bağları sayısının etkili olacağını belirtmiştir.

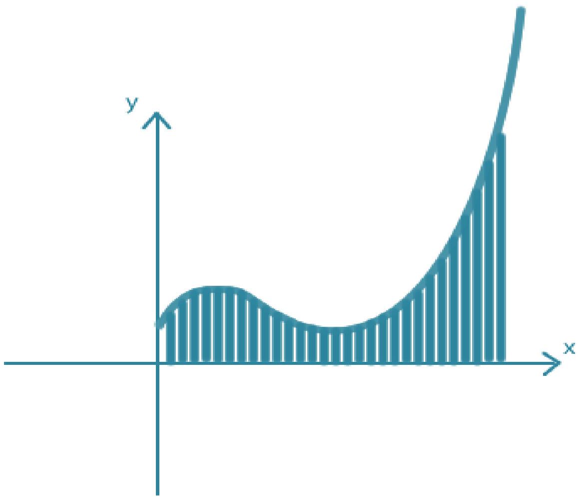
İşlemsel ve kavramsal bilgi birbirlerine bağlı ve birbirlerini tanımlayan iki bilgi türüdür. Kuralların neden ve niçinlerinin detaylandıramadığı bir işlemsel bilgi döngüsü olurken, neden ve niçinlerin açıklandığı an ise kavramsal öğrenme gerçekleşmesi son derece doğaldır (Camacho, Depool ve Santos-Trigo, 2009). Bu sebeple kavramsal bilgi işlemsel bilgiler içerirken kavramsal anlama neyi, niçini ve nedeninin farkında olmalarını işlemsel anlama ise kuralların nedenler olmadan uygulanmasıdır.

Kavramsal ve işlemsel bilginin birleşimiyle öğrencilerin farklı yeteneklerini ön plana çıkararak, varsayımlarla desteklemelerini, genelleme kurallarını ve alanlar arası ilişkilendirme yapmalarını kolaylaştırmaktadır (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010). Bu bağlamda matematiği öğrenmek için kavramsal ve işlemsel bilginin varlığıyla, iki tür bilginin öğretilmesi gereklidir. Matematikte kullanılan kavramlar özellikle soyut, karmaşık ve hiyerarşiktir (Creswell, 2003).

2.3. İntegral Kavramı ve Tarihsel Gelişimi

Analizinin temel kavramları olan limit, türev ve integral işlem boyutunda ezberlenen kavramlar olarak görülse de içerdikleri kavramsal yapının matematiksel düşüncenin gelişimi ve fiziksel dünyada uygulanması için onları vazgeçilmez kılmakta ve bunları matematikteki diğer kavramlardan biraz farklı bir yere koymaktadır (Cooney, Beckmann, Lloyd, Wilson ve Zbiek, 2010).

İlginç bir biçimde integral kavramının ortaya çıkışı türev kavramının ortaya çıkışından daha eskiye dayanmaktadır. Bugün bize bu durum biraz tuhaf gelse de, aslında doğal olanı da budur. Çünkü hız hesaplamalarından önce alan ve hacim hesaplamaları önem kazanmıştır. Aslında her iki hesaplama da sonsuz küçüklükle ilgilidir. Türevde sonsuz küçük bir aralıkta değişim hızı hesaplanırken, integralde sonsuz küçük alanlar toplanmaktadır.



Şekil 2.2. *Eğri altındaki kalan alan*

Kenarları doğru parçalarından oluşan çokgenlerin ve dairenin alanını hesaplama ile ilgili kayıtlarla çok eski matematik dokümanlarında karşılaşmak mümkündür. İlk hacim ve alan hesaplarının ipuçlarına Eski Mısır'da, MÖ 1800'de kesik piramit üzerinde yapılan çalışmalarda rastlanmaktadır. MÖ 370 yılında Euksodus ve MÖ 300 yılında Arşimet'in üçgensel bir bölgenin ağırlık merkezini bulma, dairenin alanı ile çevresi arasındaki oran, bir kürenin alanı ve hacmi gibi problemlerle ilgilendiği bilinmektedir. Ancak Eski Yunan matematikçilerin sonsuzluk kavramından kaçındıkları, dolayısıyla da Riemann toplamında karşımıza çıkan sonsuz küçük kavramının henüz o dönemlerde ortaya çıkmadığı söylenebilir.

Arşimet'in çalışmalarından esinlenen bazı matematikçilerin de bazı geometrik cisimlerin alan ve hacimlerini Riemann toplamına benzer yöntemlerle ve limit kavramını kullanarak hesapladıkları görülmektedir. Örneğin ünlü bir matematikçi ve fizikçi olan İnb al-Haytham'ın bir doğru ile sınırlanmış parabolün doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesapladığı bilinmektedir. Bu da aslında günümüzde $\int_{-a}^{a}(a^2\ x^2)^2dx$ integral hesabına karşılık gelmektedir.

Yine XVII. yüzyılda bazı Avrupalı matematikçilerin (Cavalieri, Torricelli ve Roberval gibi) y = x^n (n doğal sayı) eğrisinin altındaki kalan alan ile ilgilendikleri ve yaklaşık olarak bu alanı hesaplayabildikleri görülmektedir. Benzer şekilde Pascal (1623-1662), sıfırdan π'ye kadar sinüs fonksiyonu grafiğinin altındaki kalan alanı yarım dairelerle hesaplamaya çalışmıştır. Ancak bu çalışmaların hepsinde geometrik yaklaşımlar yardımıyla hesaplamaların yapıldığına ve kullanılan yöntemlerde herhangi bir genellemeye gidilemediği görülmektedir. Ayrıca bu çalışmaların hiçbirisinde ne integral kavramı ne de özellikleri ile ilgili herhangi bir ilgiye rastlanmamaktadır. Bugün bildiğimiz anlamda integral ve türev kavramları ile ilgili Analizin Temel Teoremi için 1665'i ve Newton'u beklemek gerekmiştir. Bundan 10 yıl kadar sonra Leibniz aynı şeyleri Newton'dan bağımsız olarak bulmuştur (Matematik Dünyası, 2011-II).

Leibniz ve Newton, bir eğri altındaki alanın türevin tersi alınarak bulunabileceğini kanıtlamışlardır. Oldukça basit bir teknik geliştirerek analizin geometri dalından bağımsız şekilde gelişmesini hızlandırmışlardır. Newton, 1664-1690 yılları arasında integral ile bir kısım özelliklerini genelleştirerek ifade etmiştir. Toplam şeklinde verilen fonksiyonların integralinin ayrı olarak integral değerlerinin toplanabileceği ve üstel fonksiyonların integrali ile bağlantılı kurallar mevcuttur.

İntegral kavramının tarihsel gelişimine baktığımızda sonuç olarak şunu söyleyebiliriz: Alan hesaplarında geometrik yaklaşım ve grafiklerin kullanımı integral kavramının meydana gelmesini hızlandırmış ve kavramın anlaşılır olmasını sağlamıştır. İntegralin uygulamalarının farklı alanlarda kullanıldığı gibi örneğin istatistik, fizik, mekanik, astronomi alanı araştırmasında bulunan matematikçiler arasında motivasyonlarının göstergesi durumuna gelmiştir. Bunun sonucu olarak integral kavramı analizin en önemli kavramlarından biri olarak yerini almakta ve farklı alanlarda uygulamalarına ilişkin çalışmalara devam edilmektedir.

2.3.1. İntegral kavramı

Fizik, mühendislik, ekonomi ve istatistik gibi birçok alanda çeşitli problem bağlamlarında ve yaşamımızın pek çok yerinde temel oluşturan uygulamalara sahip Analizin önemli kavramlarından biri olan integral kavramı türev gibi limit kavramına dayanmasının yanında türeve benzer biçimde farklı temsillerde farklı yorumlara sahip bir kavramdır. İntegral, gökdelenlerden köprülerin inşaasına, yükseklere çıktıkça ortaya çıkan hava basıncından enerji tüketim ortalamalarına ve baraj kapaklarına uygulanan kuvvetlere kadar değişen büyüklükleri hesaplamada kullanılan önemli bir araçtır.

İntegral kavramının altında yatan temel düşünce bir parçayı onu daha küçük parçalara bölerek ve sonra her parçayı toplayarak etkili bir şekilde hesaplayabilmedir. İntegral kavramı tarihsel olarak ilk önce alan belirlemede ortaya çıktığından alan kavramına yer verilmesi kavramın öğrenilmesi açısından önemli olabilir. Öğrenciliğimizin ilk yıllarından itibaren bazı alan hesaplamalarını yaptığımızdan, alan hesabı hepimiz için kolay ve sıradan gelebilir. Ancak alan ölçümü uzunluk ölçümünden zordur. Örneğin bir ipi bir çemberin çevresine dolayarak çemberin çevre uzunluğunu ölçebilirken bu çemberle sınırlanan dairenin alanını ölçmek daha zordur. Çünkü uzunluk ölçmek için metre gibi gayet basit bir araç kullanılabilirken ‘alan ölçen’ metre gibi pratik bir araç yoktur.

2.3.1.1. *Eğriler arasındaki alanlar*

Tanım1:

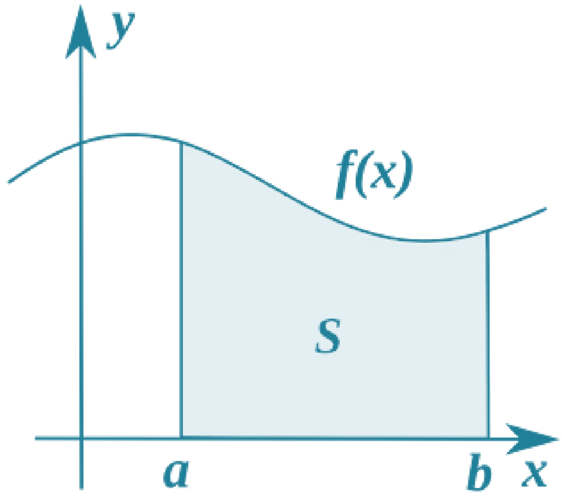
- $f(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

Verilen her $\in > 0$ sayısına bir $\delta > 0$ sayısı karşılık gelir öyle ki, $[a, b]$’nin $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölünüşü ve c_k’ nın $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında her seçimi için

$$| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta_{x_k} - \mathrm{I} \,| < \in$$

koşullarının sağlanması durumunda f’ nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki belirli integrali I’dır (Thomas, Weir, Hass ve Giordano, 2009).

- Bir aralıkta sınırlı bir fonksiyon için ele alınan ve geometrik olarak yorumlandığında fonksiyonun aralıktaki grafiği olan eğri ile integraldeki bağımsız değişkene karşılık gelen eksen arasındaki alandır.



Şekil 2.3. *Bir fonksiyon eğrisinin altında kalan alan*

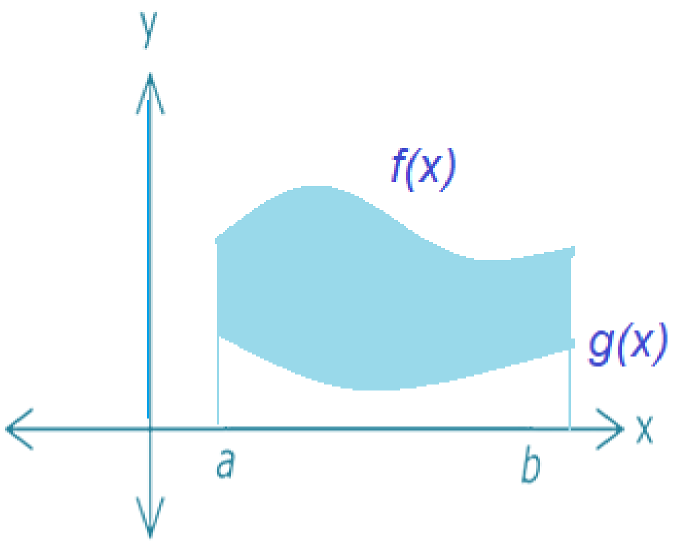
f, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_{x_k}=1$$

limiti varsa, bu limite f' nin a dan b ye kadar integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir. Bu durumda f, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde *integrallenebilirdir* denir.



Şekil 2.4. $y = f(x)$ *eğrisinin altında kalan alan*

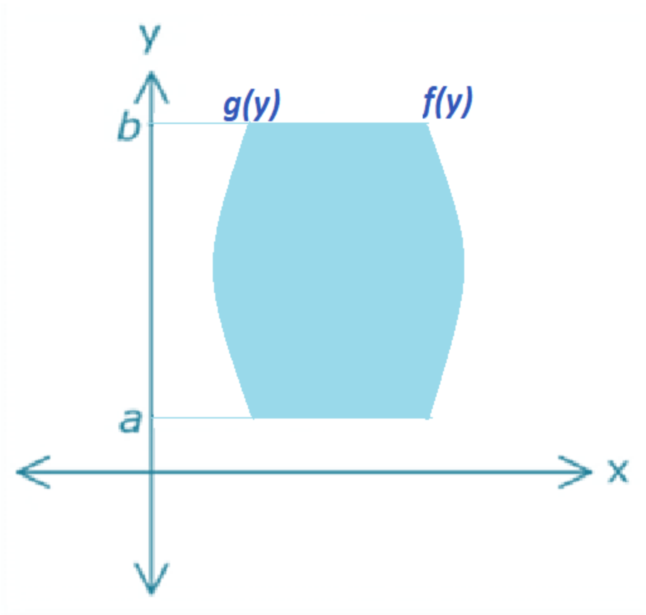
Üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan $y = g(x)$ eğrisi, soldan ve sağdan $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan bir bölgenin alanını integral yardımıyla bulmak için aşağıdaki tanım kullanılır.

Tanım2: Eğer f ve g, $[a, b]$ aralığı boyunca $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere sürekli ise bu durumda

$a'dan\ b'ye\ kadar\ y = f(x)\ ve\ y = g(x)\ eğrileri\ arasındaki\ bölgenin\ alanı,$

$(f - g)$' nin a' dan b'ye kadar integralidir:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



Şekil 2.5. *$x = f(y)$ ve $x = 0$ eğrisi altında kalan alan*

Eğer bir bölgenin sınır eğrileri y' nin fonksiyonları ile tanımlanmış ise, yaklaşım dikdörtgenleri düşey olma yerine yatay olur ve temel formülde x yerine y vardır ve sınırlanan bölgenin alanını bulmak için aşağıdaki formül kullanılır:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Bu denklemde f her zaman sağ taraftaki eğriyi ve g de sol taraftaki eğriyi gösterir. Bu nedenle $f(y) - g(y)$ negatif olmayan bir değerdir.

2.3.1.2. *Yapılan araştırmalar*

Tall ve Vinner'ın (1981) yapmış olduğu çalışma birçok kavram imajı çalışmasına esin kaynağı olmuştur. Araştırmacılar bu çalışmada kavram tanımı ve kavram imajını ayrıntılı bir şekilde anlatmış, potansiyel ve bilişsel çatışma faktörlerinden söz etmişlerdir. Ardından bazı uygulamalı müfredat problemlerinden yola çıkarak öğrenci yanıtlarını kavram tanımı ve kavram imajı yapısı gözüyle irdelemişlerdir.

Gülkılık'ın (2008) çalışması önemli kavram imajı çalışmalarından biri olarak literatürde yerini almıştır. Çalışma bir devlet okulunun matematik öğretmenliği lisans eğitimi alan 5 öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiş, katılımcıların çember, açı ve geometrik yer kavramları ile ilgili kavram imajları incelenmiş daha sonra araştırma için temel alınan üç aylık bir eğitim dönemi sonucunda öğretmen adayların kavram imajlarının gelişimi irdelenmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının cevapları fenomenografik yöntemlerle kategorilere ayrılmış ve Tall ve Vinner (1981) tarafından geliştirilen kavram tanımı ve kavram imajı yapısı temel alınarak analiz edilmiştir.

Soğancı (2006), matematik öğretmeni adaylarının matematiksel yaklaşımlarını konu alan tezinde kavram imajı ve kavram tanımı yapısını irdelemiştir. 7 matematik öğretmen adayı ile yapılan görüşmeler sonucu veri analizini fenomenografik yöntemle yaptığı, öğretmen adaylarının yalnızca tanımla kavramı öğrenemedikleri, tanımı örnekler ve uygulamalar ile güçlendirmesini gerektiği, hatta öğretmen adaylarının problem çözümü sürecinde sadece kavram tanımını veya kavram imajını kullandığı, bazen ise ikisini birden kullandıklarını belirtmiştir.

Rasslan ve Tall (2002), belirli integral kavramı üzerine bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Çalışmada, tanımlar ve tanımın zihinde oluşan yansımaları, 41 lise öğrencisinde test edilmiştir. Belirli integral kavramına yönelik öğrencilerin zihninde beliren bilişsel şemanın keşfi için bir anket dizayn edilmiştir. Sorulardan biri öğrencilerin belirli integral kavramının tanımını bilip bilmediklerini kontrol etmeyi amaçlamaktadır. Diğer 5 tanesi ise, öğrencilerin belirli integral kavramı ile nasıl çalıştıkları ve nasıl tanımla ilişkilendirdiklerini sınıflandırmak için dizayn edilmiştir. Sonuçta 41 öğrencinin sadece 7 tanesinin tanımı bildiği belirtilmiştir.

Orton (1983) tarafından 110 öğrenciyle yapılan çalışmada belirli integralin anlamlandırılmasında öğrencilerin güçlük yaşadığını ifade eden, bu güçlüklerin öğrencilerin integrali Riemann toplamının limiti olarak algılayamadıkları için oluştuğunu ortaya koymuştur. Ayrıca çalışmasında, öğrencilerin çoğunluğunun verilen bir Riemann toplamının hesaplanmasında zorluk yaşadıklarını ve Riemann toplamları ile yapılan hesaplamaların limit işleminden dolayı kesin bir sonuç oluşturmadığını ve sadece yaklaşık bir değer olduğunu ifade ettiklerini belirtmiştir.

Yee ve Lam (2008) tarafından yapılan çalışmada tek değişkenli fonksiyonlarda integral kavramı ile ilgili öğrencilerdeki öğrenme güçlükleri araştırılmıştır. Elde edilen bulgulardan hareketle tek değişkenli analiz konusunda öğrencilerin öğrenme zorluklarının devam ettiği görülmüştür. Temel cebirdeki eksiklik, öğrencilerdeki integral kavram imajını da olumsuz yönde etkilemiştir.

Grundmeier, Hansen ve Sousa (2006), 52 öğrenci ile yapılan çalışmasında öğrencilerin integralin tanımına dair bilgilerinin ve integral almak için kullanılan integrasyon tekniklerine ilişkin performanslarının yüksek olduğunu buna karşın integral kavramının tanımlamasında eksikliklerinin olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca öğrencilerin eğri altında kalan alanın bulunmasında kullanılabilecek yöntemler hakkında da eksiklikler yaşadıklarını ifade etmişlerdir.

Rösken ve Rolka (2007) çalışmalarında öğrencilerin belirli integral ile ilgili kavramsal öğrenmelerini analiz etmeyi amaçlamışlardır. Ayrıca Tall ve Vinner (1981) bahsetmiş olduğu kavram tanımı ve kavram imajı yanı sıra öğrencilerin problem çözme yetkinliğini de araştırmışlardır. Bir Alman okulunda 12. sınıfta öğrenim görmekte olan 24 öğrenci ile çalışmalarını gerçekleştirmişlerdir. Kapsamlı bir anket yardımıyla verileri toplamışlardır. Araştırma sonucunda ise kavramsal öğrenme ve kavram imajının birbirine bağlı olduğunu ve bu durumun öğrencilerin öğrenmesinde önemli bir rol oynadığını belirtmişlerdir. Ayrıca amaçlanan ve gerçekleşen bilginin birbirinden farklı olabileceğini ve bu durumun öğrenciler için zorluklara neden olabileceğini belirtmişlerdir.

Ferrini-Mundi ve Graham (1994) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin integral kavramının da içinde yer aldığı analizin temel kavramlarını ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi anlamalarını ortaya koyabilmeyi amaçlayan 6 öğrenci ile görüşme yapmış ve bu öğrencilerden bir tanesinin performansını detaylı bir şekilde incelemiştir. Çalışma sonunda, öğrencilerin integrali işlemsel bir amaç güderek kullanıldığını ve işlemsel bir süreç için kullanılan bir işaret olarak ifade edildiğini ortaya koymuştur.

Ergene (2019) tarafından yapılan çalışmada gerçek hayattan problemlerin bulunduğu, matematik ve fizik bilimleriyle bağlantılı modellemelerin birleştiği ayrıca belirli integralin anlamları detaylı incelenerek ve uygulamanın integrale karşı algı, yöntemle birlikte etkisinin amacı anlatılmaktadır. Araştırmada karma yöntem kullanılmış ve araştırma deseni bütünleşik karma desen olarak benimsenmiştir. Araştırmada nicel veriler tek gruplu ön test-son test deneysel çalışma olarak, nitel veriler ise durum çalışmasıyla toplanmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu Marmara Bölgesinde yer alan bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan 28 kişiden oluşan öğretmen adayları oluşturmaktadır. Araştırma içeriğinde parçalamanın fikri, Riemann toplamları ve Riemann toplamlarının belirli integralle ilişkisi bununla birlikte hangi adımların gözlemlendiği öğretim uygulamasıyla belirli integralin kavramsal anlaması için etkili olmuştur.

Aydeniz (2011) araştırmasında matematik öğretmen adaylarının eğim konusundaki kavram imajlarını tespit etmeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda 5 matematik öğretmen adayıyla görüşme yapmıştır. Görüşmeler sonucunda elde ettiği verileri ve öğretmen adaylarının yazılı dokümanlarından elde ettiği verileri nitel araştırma yöntemlerinden biri olan içerik analizi ile çözümlemiştir. Araştırmanın sonucunda ise öğretmen adaylarının eğim kavramını sıklıkla trigonometrik ve fiziksel temsiller ile eşleştirdiğini belirtmiştir.

Süzer (2011) çalışmasını 8 bayan 2 erkek olmak üzere 10 lise öğrencisi ile yürütmüştür. Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı ile ilgili kavram tanımı ve imajlarını ortaya çıkarmak ve konu ile ilgili bir durum çalışmasının amaçlandığı çalışmada veriler; görüşmeler, yazılı dokümanlar ve gözlemle toplanmıştır. Araştırmadan elde edilen veriler Tall ve Vinner (1981) tarafından geliştirilen kavram tanımı ve kavram imajı temel alınarak analiz edilmiştir. Analizler sonucunda öğrencilerin 9. sınıfta fonksiyon kavramını yeni öğrendikleri için kavram imajlarının yetersiz kaldığı, birçok öğrencinin öğretmenin derste anlattığı tanımların, derste verdiği örneklerin dışına çıkamadığı ve öğrencilerin fonksiyon kavramını sadece küme çizerek tanımladığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu çalışmadan elde edilen diğer bulgu öğretmenlerin ve öğrencilerin fonksiyon kavram tanımı ile kavram imajını doğrudan birbirini etkilediğidir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin öğretmenlerinin kavram imajı çerçevesinde bir kavram imajı oluşturduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bozkurt ve Koç (2012) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinde prizma kavramını nasıl tanımladıklarını incelemeyi amaçlamıştır. Açık uçlu sorulardan oluşan test ve mülakat yoluyla toplanan veriler ışığında öğretmen adaylarının prizmayı tanımlamakta sıkıntı yaşadıkları ve matematiksel dili kullanmada yeterli olmadıkları belirtilmiştir.

McGehee (1990) çalışmasında öğretmenlerin çoğunun işlemsel bilgiye kavramsal bilgiden daha çok sahip olduklarını ifade etmiş, öğrencilerin işlemsel bilgi sorularında yüksek başarı gösterdikleri, fakat uygulama ve analiz gerektiren soruları çözmek için şemalara ilişkin farklı bölümleri ilişkilendirmede güçlükler yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Toluk Uçar (2011) sınıf ve matematik öğretmeni adayları ile gerçekleştirdiği çalışmanın sonucunda, kesirler ile ilgili olarak hazırlanan sorulara kavram tanımı açıdan matematik öğretmeni adaylarının sınıf öğretmeni adaylarına göre daha yüksek performansa sahip olduklarını belirttiği ve yalnızca üçte birinin kavramsal düzeyde açıklama yapabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının yeterli seviyede matematiksel anlamaya sahip olmadıklarını ve öğretmen olduklarında öğrencilere kural ezberletme tarafı olduklarını belirtmiştir.

Faulkenberry (2003) 15 öğretmen adayının rasyonel sayılar kavramının kavramsal ve işlemsel bilgisi üzerine gerçekleştirdiği çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının yüksek oranda işlemsel bilgiye hakim olduklarını, fakat problem çözme sürecinde kullandıkları işlemleri ifade etmekte zorlandıklarını belirtmiştir.

Kridler (2012) matematik müfredatlarının, işlemsel ve kavramsal bilgilerden hangisini geliştirmeye odaklanması gerektiği konusu ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Çalışmasını bir ortaokulda matematik öğretmenliği yapmakta olan 5 öğretmen ile gerçekleştirmiştir. Çalışmasında öğretmenlerin, öğrencilerin işlemsel ve kavramsal bilgilerini eş zamanlı olarak geliştirme süreçlerini incelenmiştir. Çalışmada yer alan öğretmen adaylarından 3 tanesi işlemsel ve kavramsal bilgiyi eş zamanlı olarak ilerletemediklerini ve sadece müfredatta yönelik ders işlediklerini ifade etmişlerdir.

3. YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Yöntemi ve Modeli

Bu araştırma nitel bir araştırmadır. Nitel araştırma bireylerin oluşturdukları anlamları inceleyerek alana özgü açıklama ya da teori geliştirme sürecidir. Merriam ve Tisdell (2015), nitel araştırmayı "bireylerin deneyimlerini nasıl yorumladıklarını, dünyalarını nasıl yapılandırdıklarını ve deneyimlerine ne anlam yüklediklerini kavramaya çalışan araştırma yaklaşımı" olarak tanımlamıştır. Yıldırım ve Şimşek (2013)'e göre de nitel araştırma "gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, olguların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği bir araştırma" olarak tanımlanır.

Bu yöntemin seçilmesinin sebebi, matematik öğretmen adaylarının matematik bilgisinin genel değerlendirilmesi değil, Analizin temel konularından birisi olarak kabul edilen ve içerisinde limit, türev, değişim oranı gibi pek çok konuyu barındıran integral kavramının kavramsal ve işlemsel bilgi yönünden incelenmesinin amaçlanmasıdır.

İlköğretim matematik öğretmenliği adaylarının integral kavramına ilişkin kavramsal ve işlemsel bilgilerini incelemeyi amaçlayan bu araştırmada elde edilen verilerin toplanması, analizi ve yorumlanması için eğitim araştırmalarında kullanılan nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır**.**

3.2. Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın çalışma grubunu 2019-2020 eğitim öğretim yılında bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı birinci sınıfında öğrenim gören 30 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmaya katılan katılımcıların, seçilmesinde amaçlı örnekleme yönteminden faydalanılmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden birisi olan "kolay ulaşılabilir durum örneklemesi" yöntemi kullanılmıştır. Bu örnekleme yönteminde amaç, araştırılacak konu ya da bağlamın özelliklerine uygun olarak çalışma grubunu belirlemektir.

Katılımcıların özellikleri arasında konuya dair ön bilgilerinin olması, hazırbulunuşluk düzeylerinin belirli bir seviyede olması, uzaktan eğitim ile verilen derse düzenli olarak devam etmesi, dersin mantığının farkında olmaları sayılabilir. Bu yüzden araştırma sürecinde araştırma problemine çözüm bulabilmek amacıyla araştırmaya katılacak örneklemin seçimi araştırma için en önemli adımdır.

Bahse konu çalışmanın etik olması açısından öğretmen adaylarının isimleri hiçbir yerde kullanılmamıştır. Her öğretmen adayı kodlanmış ve çalışma sonuna kadar bu kodlar kullanılmıştır.

Tablo 3.1. *Çalışma grubunda yer alan öğretmen adaylarının Analiz II dersi başarı notları*

Öğretmen adayı	Başarı notu	Öğretmen adayı	Başarı notu
M1	CB	M16	BA
M2	BB	M17	CB
M3	BC	M18	AA
M4	BB	M19	CB
M5	BA	M20	BC
M6	BB	M21	BB
M7	BA	M22	BC
M8	BB	M23	BC
M9	BB	M24	CB
M10	BC	M25	BB
M11	BC	M26	BA
M12	BC	M27	BA
M13	BB	M28	BA
M14	BB	M29	BB
M15	BA	M30	BB

Öğretmen adaylarının Analiz dersini başarı ile geçmiş olmaları, araştırmacıların tecrübeleri ve gözlemleri ile integral konusunda zorluk ve güçlük yaşamaları, öğretim uygulaması ve veri toplama sürecinde gönüllü oldukları için sorun yaşanmayacağının düşünülmesi ve araştırma sürecinde kolay ulaşılabilir bir çalışma grubu olması araştırma grubunun seçiminde rol oynayan etmenler olmuştur.

3.3. Araştırmanın Veri Toplama Aracı

Bilimsel araştırma sürecinde araştırma amacına uygun ve araştırma problemlerine cevap bulacak şekilde veri toplama araçlarının oluşturulması ya da seçilmesi gerekmektedir. Veri toplama araçları seçilirken araştırma yöntemi ve araştırma deseninin de dikkate alınması öngörülmektedir. Araştırma yöntemlerine göre; nicel bir araştırmada genellikle anketler, ölçekler, testler kullanılırken, nitel araştırmalarda açık uçlu sorular, gözlemler, görüşmeler, mülakatlar ve çeşitli notlar kullanılmaktadır.

Bu araştırmada, araştırma odağı ve araştırma problemlerine uygun olarak araştırma yöntemi ve deseni belirlenmiş ve veri toplama araçlarına karar verilmiştir.

Karar sürecinde veri toplama araçlarının psikometrik nitelikleri açısından geçerli, güvenilir ve kullanışlı olmasına dikkat edilmiştir.

Veriler açık uçlu sorulardan oluşan bir uygulama sınavıyla toplanılmıştır. Daha sonra uygulama kâğıtları araştırmacı ve araştırmacının tez danışmanı tarafından isimleri kapalı olacak bir şekilde kodlar verilerek detaylı şekilde incelenmiştir. Bu elde edilen veriler bulguların yorumlanmasında kullanılmıştır.

Veri toplama araçlarında, matematiksel problemlerin kullanılması ve kullanılan bilgi türünü belirlemede açık uçlu sorular yardımıyla veriler toplanarak problem çözümlerinden yararlanılmıştır.

3.4. Verilerin Analizi

Nitel veri analizinde genel olarak içeriğe yönelik veri analizi yapılmakta ve ortaya çıkan verilerin düzenlenmesi, yorumlanması ve özetlenmesi analizin temel unsurları arasında bulunmaktadır (Büyüköztürk, 2012). Toplanan verilerin detaylı olarak analiz edilmesi için içerik analizi gereklidir. Önceden belli olmayan izdemin ve kapsamın sonucuna varmayı gerektirir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

İçerik analizi belirli kurallar ve kodlamalar ile metin içerisinde boyut olarak küçük içerik sınıflandırılmasıyla sistematik, yinelenebilir bir yöntem olarak tanımlanır. Araştırmacı analiz öncesi kategorileri belirler. Araştırmacı, toplanan betimsel bilgilerle konusuna hakim olur ve analizler devam ederken sınıflandırma sonucu ortaya çıkar (Büyüköztürk, 2016).

Planlama içinde verilerin analizinde toplanan veriler, detaylı şekilde anlatılarak tasvirlenmiş, kodlanma sonucunda belli temaların içinde kategorize edilerek ilişkilendirme suretiyle yoruma açık hale getirilmiştir.

Öğretmen adaylarının arasında yapılan görüşmelerde verilerin çözümlenmesinde ve sonuca varılmasında içerik analizi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarından tanımlardan yola çıkılarak nasıl anladıklarını, anlatmaları istenmiştir. Öğretmen adayları bir taraftan tanımların bulunduğu kısmı belirtirken diğer taraftan da açıklamak istedikleri kısımları eklemek koşuluyla, yapmaları belirtilmiştir. Tanımda yer alan sembolik öğelerin anlamı ve bunlarla ilişkileri sorgulanmıştır.

Analiz dersini veren öğretim görevlisi ve katılımcılar arasında amaçlı örnekleme yöntemine göre; sınav öncesinde katılımcılarla görüşülmüş, sınav sonunda almış oldukları başarı notları incelenmiştir.

Öğretmen adaylarımızın uygulama sırasındaki sınav kâğıtlarındaki açık uçlu sorulara verdikleri cevaplar üzerinden içerik analizi ayrıntılı olarak yapılmıştır. Veri toplama sürecinde ana uygulamada, öğretmen adaylarının integrale yönelik düşünceleri, bilgileri, kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi becerilerinin belirlenmesi hedef alınmıştır.

Tablo 3.2. *Açık uçlu soruların içeriği ve amaçları*

Soru No	Soru İçeriği	Amaç
1	Belirsiz integralin türev ile ilişkisi	Belirsiz integralin kavramsal olarak anlamlandırılma süreci
2	·Belirli integralin integral hesabının temel teoremi olarak anlamlandırılması ·Belirli integralin alt toplam ve üst toplam olarak anlamlandırılması ·Belirli integralin geometrik yorum olarak anlamlandırılması ·Belirli integralin Riemann toplamı olarak anlamlandırılması	Belirli integralin farklı bağlamlarda kullanımı
3	Belirli integralin eğri altında kalan alan ile ilişkilendirilmesi	Belirli integralin işlemsel olarak anlamlandırılması

Açık uçlu soruların yer aldığı bölümde, belirsiz integralin türev ile ilişkisi, belirli integralin farklı bağlamlarda kullanımı, eğri altında kalan alan ile ilişkisi düşünülerek sorular oluşturulmuştur.

4. BULGULAR VE YORUM

İntegral kavramı ile ilgili kavramsal ve işlemsel bilgilerin incelendiği açık uçlu sorular aşağıda yer almaktadır.

4.1. Bulgular ve Yorum

Bu bölümde elde edilen verilerin analizine, analiz sonucunda ortaya çıkan bulgulara ve bulgulara ait yorumlara değinilmiştir.

Öğretmen adaylarına yazılı olarak açık uçlu sorular sorulmuştur. Bu sorular öğretmen adaylarının cevapları ışığında doğru yapanlar, kısmen doğru yapanlar, yanlış yapanlar olarak kategorilere ayrılmış frekansı ve yüzdeleri hesaplanmıştır. Bu verilerin incelenmesi aşağıda verilmiştir.

4.1.1. Birinci alt probleme ilişkin bulgular

Araştırma kapsamında belirlenen alt problemlerden ilki olan "Matematik öğretmeni adaylarının integral kavramı ile ilgili kavramsal bilgileri nasıldır?" sorusuna ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

- **Soru1:** "Belirsiz integral kavramını tanımlayınız. Türev kavramı ile ilişkisini açıklayınız" araştırma sorusuna verilen yanıtların incelenmesi

Öğretmen adaylarına sorulan birinci sorunun amacı belirsiz integral kavramının türev kavramı ile ilişkisine yönelik verilen cevapların kavramsal bilgi açısından incelenmesidir. Öğretmen adaylarının verdiği cevaplardan çıkarılan sonuçların verileri 'tam yapanlar, kısmen doğru yapanlar, yanlış yapanlar' olarak üç kategoriye ayrılmıştır. Tablo 4.1'de öğretmen adaylarının yanıtlarının frekans ve yüzdelik dağılımları verilmiştir.

Tablo 4.1. *Belirsiz integral kavramının tanımına ilişkin verilen cevapların analizi*

	Öğretmen Adayı	**Frekans**	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	M1, M2, M3, M4, M5,M7, M9, M10, M12, M13, M15, M16, M17, M18, M19, M20, M21, M22, M23, M24, M28, M29	22	73
Kısmen doğru yapanlar	M6, M8, M10, M14, M25, M27	6	20
Yanlış yapanlar	M26, M30	2	7
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %73'ü belirsiz integral kavramı tanımına yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. %7'si yanlış, %20'si kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

22 öğrenci belirsiz integral kavramı tanımını ''f'in tanım aralığındaki her x değerinde $F'(x) = f(x)$ oluyorsa $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ters türevi denir. f'in x'e göre bütün ters türevlerinin kümesine f'in x'e göre belirsiz integrali denir ve $\int f(x)dx = F(x) + c$ '' biçiminde tanımlamışlardır.

Kısmen doğru yapan 6 öğrenci ise sadece sözel olarak ''türevi bilinen bir fonksiyonun, türevi alınmadan önceki halini bulma işlemi'' olarak belirsiz integral kavramını ifade etmişlerdir.

Yanlış yapan 2 öğrenci ise belirsiz integral kavramını tanımlayamamışlardır. 'Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)'$in belirsiz integrali denir' şeklinde ifade etmişlerdir.

Tablo 4.2. *Belirsiz integral kavramının türev ile ilişkisine verilen cevapların analizi*

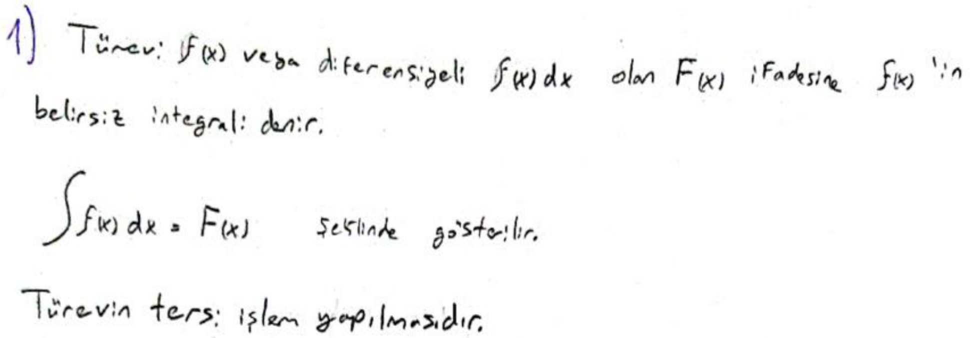
	Öğretmen Adayı	**Frekans**	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	M11, M13, M19, M27	4	10
Kısmen doğru yapanlar	M7, M9, M14, M25, M26, M30	6	20
Yanlış yapanlar	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M8, M10, M12, M15, M16, M17, M18, M20, M21, M22, M23, M24, M28, M29	20	70
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %10'u belirsiz integral kavramının türev ile ilişkisine yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. %70'i yanlış , %20'si kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

Belirsiz integral kavramı tanımını tam olarak doğru yapanların oranı %73 olup belirsiz integral kavramının türev kavramı ile ilişkisini tam yapanların oranı %10'dur. Burada asıl şaşırtıcı olan durum öğretmen adayları belirsiz integral kavram tanımını tam olarak ifade edebiliyorken türev ile ilişkisini yeterli düzeyde ifade edemedikleri görülmüştür. Buradan da anlaşılacağı gibi, belirsiz integral kavramının kavranıp türev ile ilişkisinin tam anlamıyla kavramada eksikliklerin olduğu gözlenmektedir.

Bu kategori bağlamında öğretmen adaylarından biri olan M1'in, belirsiz integral kavramı tanımını ifade ederken, belirsiz integral kavramının türev ile ilişkisini açıklayamadığı görülmektedir.

Öğretmen adaylarının belirsiz integral ve türev arasındaki ilişkiyi açıklamak için kullandıkları genellikle integral türevin tersidir bilgisini kalıp olarak kullandıkları görülmüştür. Buradan da öğretmen adaylarının tanımı sadece integral türevin tersidir şeklinde yaptıkları için başka bir kavramla ilişki kurmada zorlandıkları sonucuna ulaşılabilir.



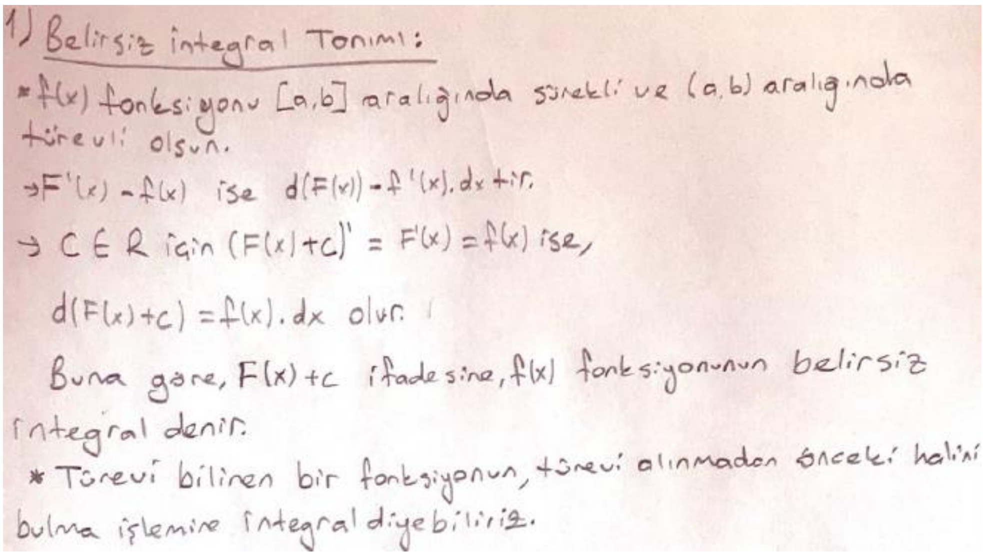
1) Türev: $f(x)$ veya diferensiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)$'in belirsiz integrali denir.

$\int f(x)\,dx = F(x)$ şeklinde gösterilir.

Türevin tersi işlem yapılmasıdır.

Şekil 4.1.*Öğretmen adayı M26'nın soru 1'e ait cevabı*

Şekil 4.1. de öğretmen adayı M26'nın belirsiz integral kavramını kendi yorumuyla yüzeysel olarak açıklamaya çalışırken yanlış tanımladığı ve c sabitini eklemediği görülmektedir. Belirsiz integralin türev ile ilişkisini açıklarken de 'türevin tersi işlem' olarak ifade etmiştir. M26 kodlu öğretmen adayının integral konusunu tam anlamıyla kavrayamadığı görülmektedir.



1) Belirsiz integral Tanımı:

* $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevli olsun.

→ $F'(x) = f(x)$ ise $d(F(x)) = f'(x).dx$ tir.

→ $c \in R$ için $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$ ise,

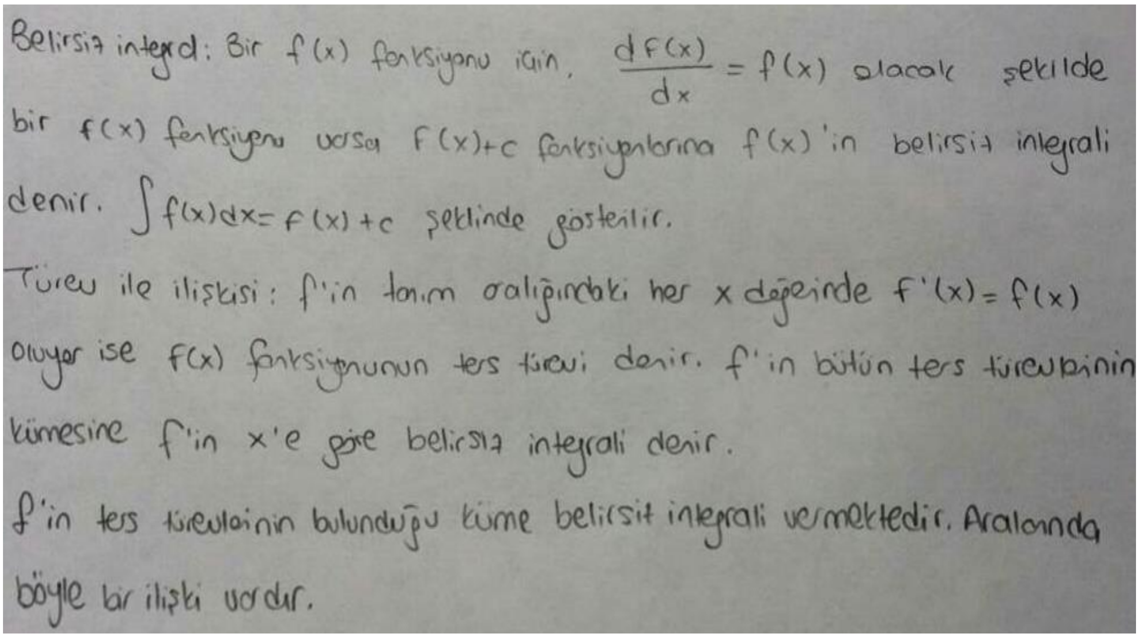
$d(F(x)+c) = f(x).dx$ olur.

Buna göre, $F(x)+c$ ifadesine, $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integral denir.

* Türevi bilinen bir fonksiyonun, türevi alınmadan önceki halini bulma işlemine integral diyebiliriz.

Şekil 4.2.*Öğretmen adayı M30'un soru 1'e ait cevabı*

Şekil 4.2. deki öğretmen adayı M30'un belirsiz integral kavram tanımını kendi cümleleri ile informal tanım yapmaya çalışmış olup, türev ile ilişkisini de ''türevi bilinen bir fonksiyonun, türevi alınmadan önceki halini bulma işlemine integral diyebiliriz'' şeklinde ifade ettiği görülmüştür.



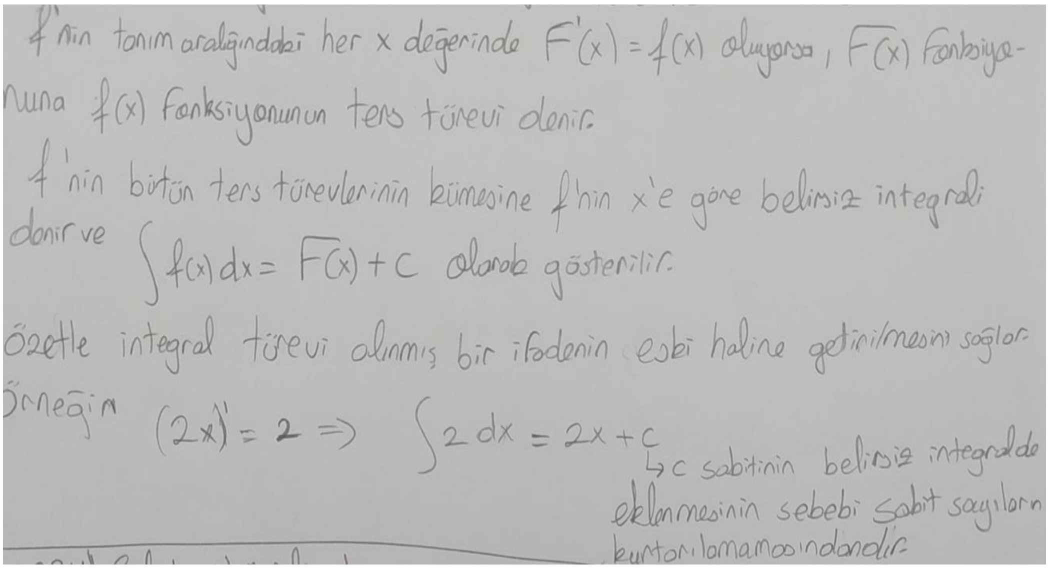
Belirsiz integral: Bir $f(x)$ fonksiyonu için, $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu varsa $F(x)+c$ fonksiyonlarına $f(x)$'in belirsiz integrali denir. $\int f(x)dx = F(x)+c$ şeklinde gösterilir.

Türev ile ilişkisi: f'in tanım aralığındaki her x değerinde $F'(x) = f(x)$ oluyor ise $F(x)$ fonksiyonunun ters türevi denir. f'in bütün ters türevlerinin kümesine f'in x'e göre belirsiz integrali denir.

f'in ters türevlerinin bulunduğu küme belirsiz integrali vermektedir. Aralarında böyle bir ilişki vardır.

Şekil 4.3.*Öğretmen adayı M9'un soru 1'e ait cevabı*

Şekil 4.3. deki öğretmen adayı M9'un belirsiz integral kavram tanımını kendi cümleleri ile informal tanım yapmaya çalışarak ifade etmiş olup, türev ile ilişkisini de 'ters türevlerinin bulunduğu küme' olarak ifade ettiği görülmüştür.



f'nin tanım aralığındaki her x değerinde $F'(x) = f(x)$ oluyorsa, $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ters türevi denir.

f'nin bütün ters türevlerinin kümesine f'nin x'e göre belirsiz integrali denir ve $\int f(x)dx = F(x)+C$ olarak gösterilir.

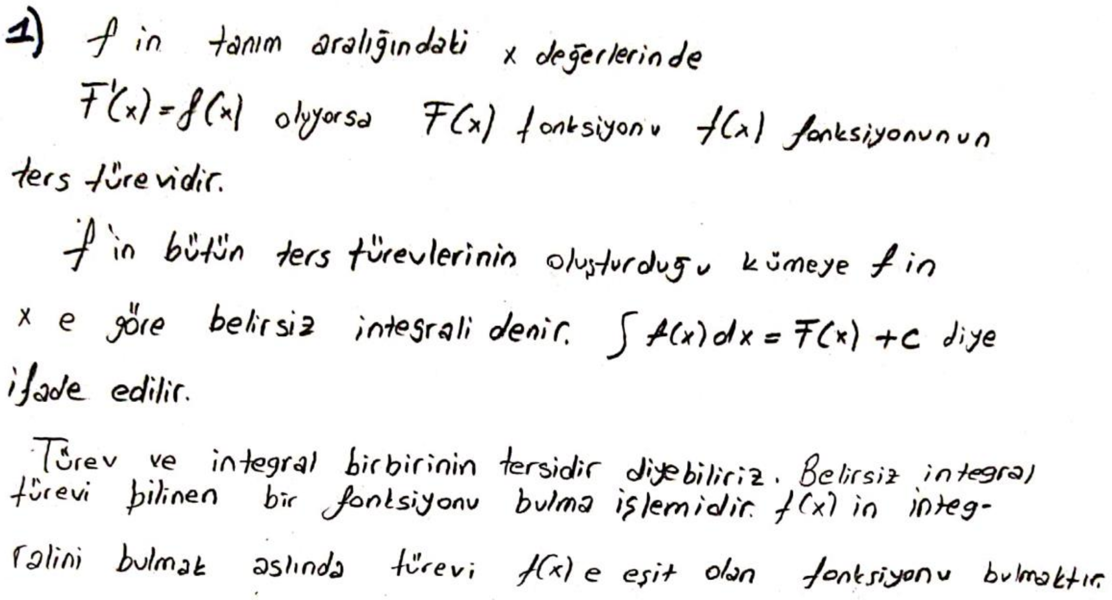
Özetle integral türevi alınmış bir ifadenin eski haline getirilmesini sağlar.

Örneğin $(2x)' = 2 \Rightarrow \int 2\,dx = 2x+c$

↳ c sabitinin belirsiz integralde eklenmesinin sebebi sabit sayıların kurtarılamamasındandır.

Şekil 4.4.*Öğretmen adayı M19'un soru 1'e ait cevabı*

Şekil 4.4. de öğretmen adayı M19'un belirsiz integral kavramını formal olarak tanımlamış türev ile ilişkisini 'integral türevi alınmış bir ifadenin eski haline getirilmesini sağlar' şeklinde ifade edip örnek vererek açıkladığı görülmektedir. Belirsiz integralin türev ile ilişkisini $(2x)' = 2 \quad \rightarrow \quad \int 2dx = 2x + c$ bu şekilde örnekle göstermiştir. Bu da öğretmen adayı M19'un c sabitini 'belirsiz integralde eklenmesinin sebebi sabit sayıların kurtarılamamasındandır' biçiminde bir ifade kullandığı görülmektedir.



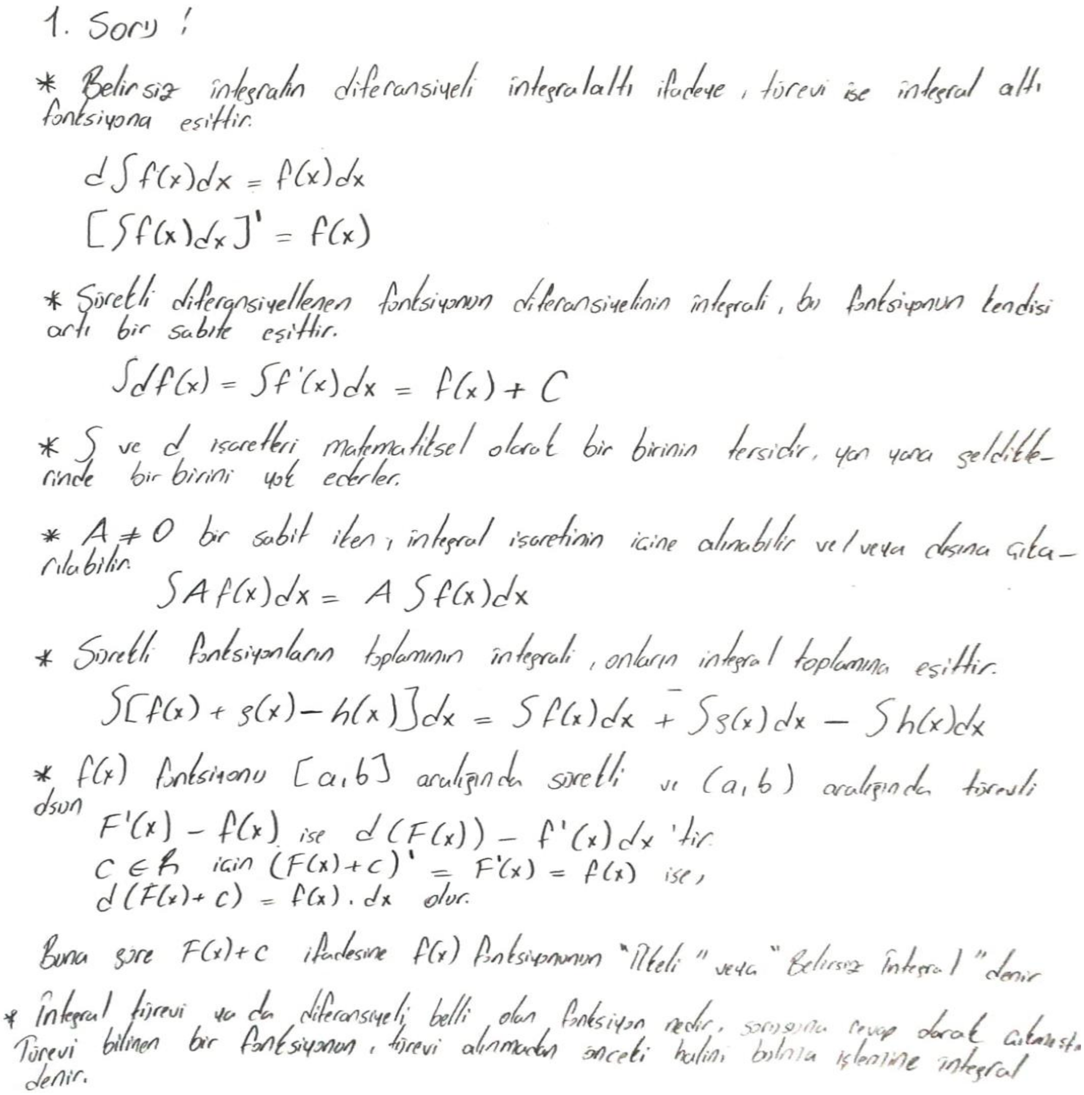
1) f in tanım aralığındaki x değerlerinde $F'(x)=f(x)$ oluyorsa $F(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun ters türevidir.

f in bütün ters türevlerinin oluşturduğu kümeye f in x e göre belirsiz integrali denir. $\int f(x)dx = F(x)+c$ diye ifade edilir.

Türev ve integral birbirinin tersidir diyebiliriz. Belirsiz integral türevi bilinen bir fonksiyonu bulma işlemidir. $f(x)$ in integralini bulmak aslında türevi $f(x)$ e eşit olan fonksiyonu bulmaktır.

Şekil 4.5.*Öğretmen adayı M13'ün soru 1'e ait cevabı*

Şekil 4.5. deki öğretmen adayı M13'ün belirsiz integral kavram tanımını formal olarak tanımlamış türev ile ilişkisini de 'belirsiz integral türevi bilinen bir fonksiyonu bulma işlemi ve birbirlerinin tersi' olarak ifade ettiği görülmektedir. Öğretmen adayı M13 belirsiz integral kavramının tanımını "$f(x)$ in integralini bulmak aslında türevi $f(x)$ e eşit olan fonksiyonu bulmaktır" şeklinde ifade etmiştir.



1. Soru :

* Belirsiz integralin diferansiyeli integral altı ifadeye, türevi ise integral altı fonksiyona eşittir.

$d\int f(x)dx = f(x)dx$

$[\int f(x)dx]' = f(x)$

* Sürekli diferansiyellenen fonksiyonun diferansiyelinin integrali, bu fonksiyonun kendisi artı bir sabite eşittir.

$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$

* $\int$ ve d işaretleri matematiksel olarak bir birinin tersidir, yan yana geldiklerinde bir birini yok ederler.

* $A \neq 0$ bir sabit iken, integral işaretinin içine alınabilir ve/veya dışına çıkarılabilir.

$\int A f(x)dx = A\int f(x)dx$

* Sürekli fonksiyonların toplamının integrali, onların integral toplamına eşittir.

$\int[f(x)+g(x)-h(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx - \int h(x)dx$

* $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevli olsun

$F'(x) - f(x)$ ise $d(F(x)) - f'(x)dx$ 'tir.

$C \in R$ için $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$ ise,

$d(F(x)+c) = f(x).dx$ olur.

Buna göre $F(x)+c$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun "İlkeli" veya "Belirsiz İntegral" denir.

* İntegral türevi ya da diferansiyeli belli olan fonksiyon nedir, sorusuna cevap olarak çıkmıştır. Türevi bilinen bir fonksiyonun, türevi alınmadan önceki halini bulma işlemine integral denir.

Şekil 4.6.*Öğretmen adayı M27'nin soru 1'e ait cevabı*

Şekil 4.6. da öğretmen adayı M27'nin belirsiz integral kavramının türev ile ilişkisini kendi ifadeleriyle ve formüllerle ifade etmiştir. M27 kodlu öğretmen adayı 'integral türevi ya da diferansiyeli belli olan fonksiyon nedir, sorusuna cevap olarak çıkmıştır', 'belirsiz integralin diferansiyeli integral altı ifadeye, türevi ise integral altı fonksiyona eşittir' ve '$\int$ ve d işaretleri matematiksel olarak birbirinin tersidir, yan yana geldiklerinde birbirlerini yok ederler' ifadelerini kullanıp aynı zamanda belirsiz integral kavramını 'ilkeli' olarak ifade etmiştir.

- **Soru2:** "Belirli integral kavramını tanımlayınız. Geometrik yorumunu açıklayınız" araştırma sorusuna verilen yanıtların incelenmesi

Öğretmen adaylarına sorulan ikinci sorunun amacı belirli integral kavramının farklı bağlamlarda anlamlarını ve geometrik yorumuna yönelik verilen cevapların kavramsal bilgi açısından incelenmesidir. Öğretmen adaylarının cevaplarından çıkarılan sonuçların verileri 'tam yapanlar, kısmen doğru yapanlar, yanlış yapanlar' olarak üç kategoriye ayrılmıştır. Tablo 4.3. de öğretmen adaylarının yanıtlarının frekans ve yüzdelik dağılımları verilmiştir.

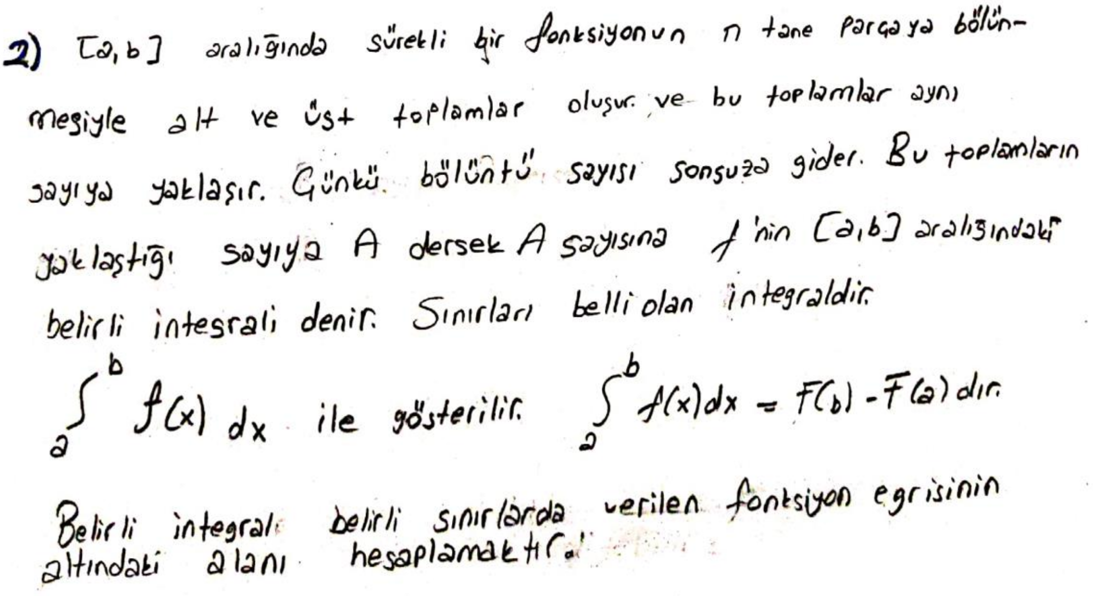
Tablo 4.3. *Belirli integral kavramı tanımına yönelik integral hesabının temel teoremine verilen cevapların analizi*

	Öğretmen Adayı	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	M1, M2, M3, M4, M6, M7, M10, M11, M12, M14, M15, M16, M17, M18, M19, M20, M21, M22, M23, M25, M26, M27, M30	23	77
Kısmen doğru yapanlar	M13	1	3
Yanlış yapanlar	M5, M8, M9, M24, M28, M29	6	20
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %77'si belirli integral kavramı tanımına yönelik integral hesabının temel teoremi sorusuna tam olarak doğru cevap vermiştir. % 20'si yanlış , %3'ü kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

Bu verilere göre integral hesabının temel teoremini 23 öğrenci doğru bir şekilde tanımlarken, 1 öğrenci kısmen doğru tanımlamış, bu 6 öğrenci ise belirli integral kavramını yanlış tanımlamışlardır.

Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde çoğunun integral hesabının temel teoremini doğru ifade ederek belirli integral kavramını açıkladıkları görülmüştür.



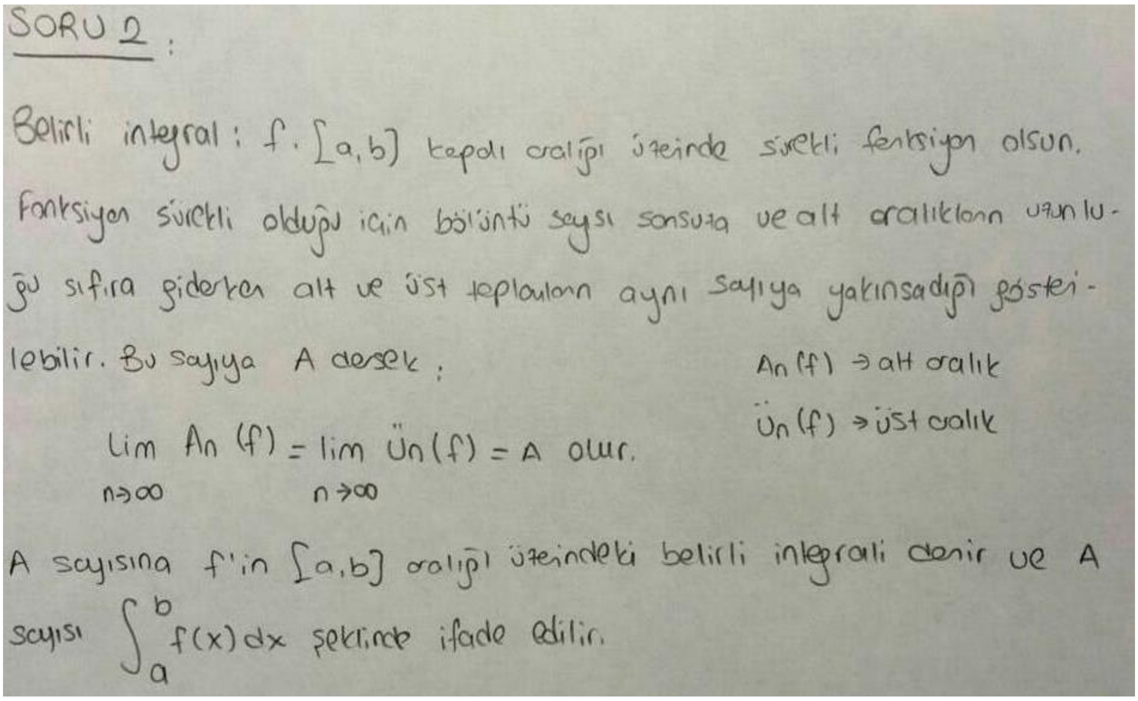
2) [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyonun n tane parçaya bölünmesiyle alt ve üst toplamlar oluşur, ve bu toplamlar aynı sayıya yaklaşır. Çünkü bölüntü sayısı sonsuza gider. Bu toplamların yaklaştığı sayıya A dersek A sayısına f'nin [a,b] aralığındaki belirli integrali denir. Sınırları belli olan integraldir.

$\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterilir. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dır.

Belirli integral belirli sınırlarda verilen fonksiyon egrisinin altındaki alanı hesaplamaktır.

Şekil 4.7.*Öğretmen adayı M13'ün soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.7. deki öğretmen adayı M13 belirli integral kavramı tanımına yönelik integral hesabının temel teoremini kendi yorumları ile bölüntü kavramından bahsederek "$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$" bu şekilde ifade etmiştir. M13 kodlu öğretmen adayının belirsiz integral kavramıyla ilişki kurduğunu göstermektedir.



SORU 2:

Belirli integral: f. [a,b] kapalı aralığı üzerinde sürekli fonksiyon olsun. Fonksiyon sürekli olduğu için bölüntü sayısı sonsuza ve alt aralıkların uzunluğu sıfıra giderken alt ve üst toplamların aynı sayıya yakınsadığı gösterilebilir. Bu sayıya A dersek;

An (f) ⇒ alt aralık

Ün (f) ⇒ üst aralık

$\lim_{n \to \infty} An(f) = \lim_{n \to \infty} Ün(f) = A$ olur.

A sayısına f'in [a,b] aralığı üzerindeki belirli integrali denir ve A sayısı $\int_a^b f(x)dx$ şeklinde ifade edilir.

Şekil 4.8.*Öğretmen adayı M9'un soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.8. deki öğretmen adayı M9'un belirli integral kavramı tanımına yönelik integral hesabının temel teoremini kullanmadığı kendi ifadeleriyle Riemann toplamını doğru bir şekilde ifade ettiği kullandığı görülmektedir. Öğretmen adayı M9 integral hesabının temel teoremini kullanmadan 'bölüntü sayısının sonsuza ve alt aralıkların uzunluğu sıfıra giderken aynı sayıya yakınsar' şeklinde alt toplam ve üst toplam yoluyla belirli integral kavramını tanımlamıştır.

Tablo 4.4. *Belirli integral kavramı tanımına yönelik alt toplam ve üst toplam tanımını kullanarak verilen cevapların analizi*

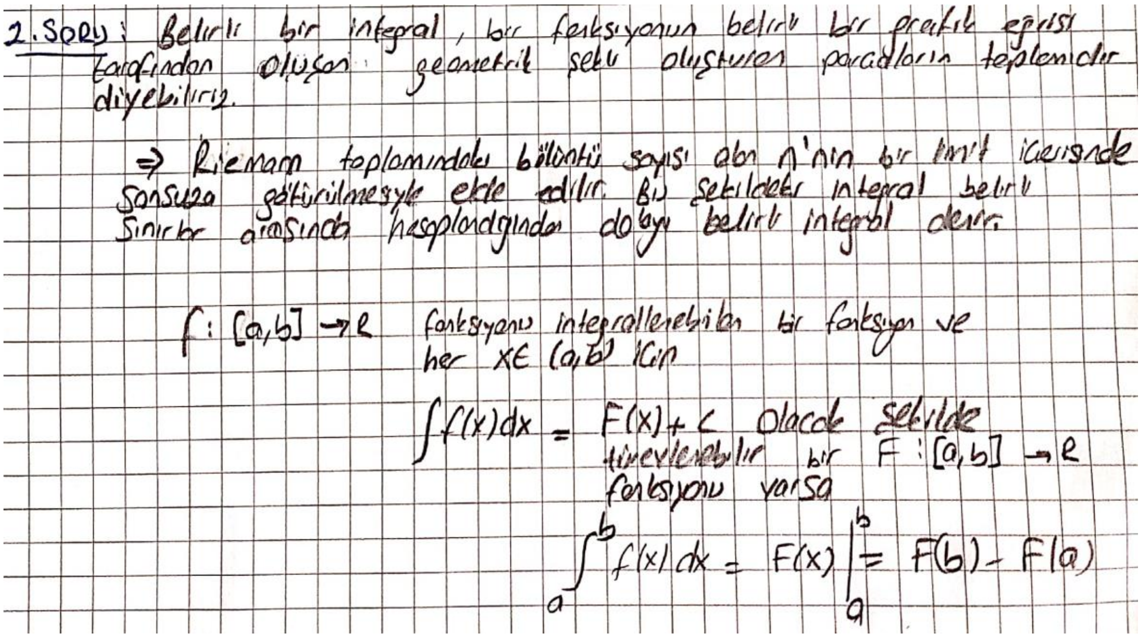
	Öğretmen Adayı	**Frekans**	**Yüzde (%)**
Alt toplam ve üst toplamı tanımlayanlar	M5, M8, M18, M20, M27, M28, M29	7	24
Kısmen doğru tanımlayanlar	M1, M9, M12, M13	4	13
Alt toplam ve üst toplamı tanımlayamayanlar	M2, M3, M4, M6, M7, M10, M11, M14, M15, M16, M17, M19, M21, M22, M23, M24, M25, M26, M30	19	63
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %24'ü belirli integral kavramı tanımına yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. %63'ü yanlış, %13'ü kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

Bu verilere göre alt toplam ve üst toplamı 7 öğrenci doğru bir şekilde tanımlarken, 4 öğrenci kısmen doğru, 19 öğrenci ise belirli integral kavramını tanımlarken alt toplam ve üst toplamı kullanmamışlardır.

Öğretmen adaylarının %63'ü hem kavramsal hem de işlemsel bilgiyi içeren soruya yanlış cevap vermiştir. 30 öğrenciden 7 öğrenci bu soruyu tam doğru olarak cevaplamıştır. Bu oranın oldukça düşük olduğu görülmektedir. Adayların alt toplam ve üst toplamı tanımlarken formal tanımın uygulanması aşamasında güçlük yaşadıkları görülmektedir. Adayların çoğunun alt toplam ve üst toplamı kavramlarını açıklamada öğretmen adaylarının yanlış ve hatalı olarak ifade ettikleri görülmüştür.

Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde çoğunun alt toplam ve üst toplam kavramlarını yanlış tanımladıkları görülmüştür.



2. Soru: Belirli bir integral, bir fonksiyonun belirli bir grafik eğrisi tarafından oluşan geometrik şekli oluşturan parçaların toplamıdır diyebiliriz.

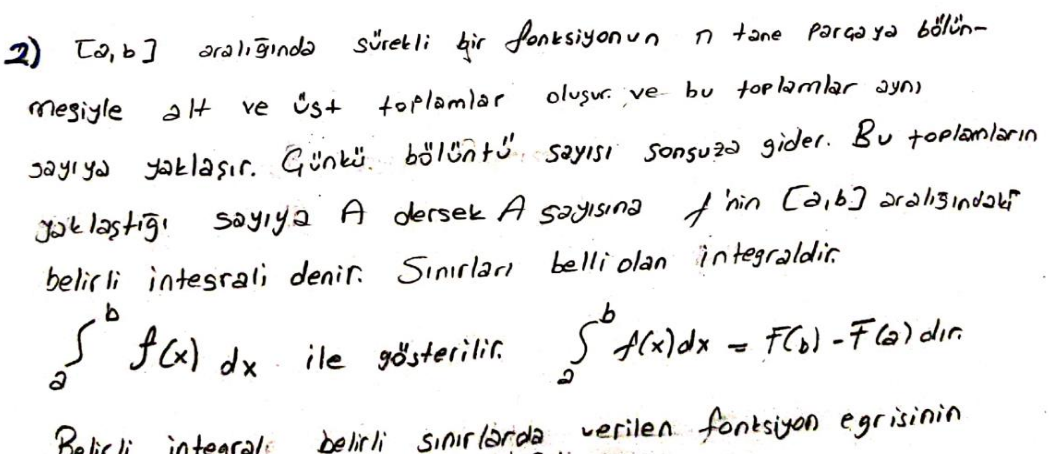
⇒ Riemann toplamındaki bölüntü sayısı olan n'nin bir limit içerisinde sonsuza götürülmesiyle elde edilir. Bu şekildeki integral belirli sınırlar arasında hesaplandığından dolayı belirli integral denir.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon ve her $x \in (a,b)$ için $\int f(x)dx = F(x) + c$ olacak şekilde türevlenebilir bir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Şekil 4.9.*Öğretmen adayı M14'ün soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.9. daki öğretmen adayı M14'ün belirli integral kavramı tanımına yönelik alt toplam ve üst toplam ifadesini kullanmadığı, Riemann toplamından bahsettiği ve integral hesabının temel teoremini ifade ettiği görülmektedir. Öğretmen adayı M14 belirli integral kavramını 'belirli sınırlar arasında hesaplandığından dolayı denir' şeklinde ifade etmiştir.



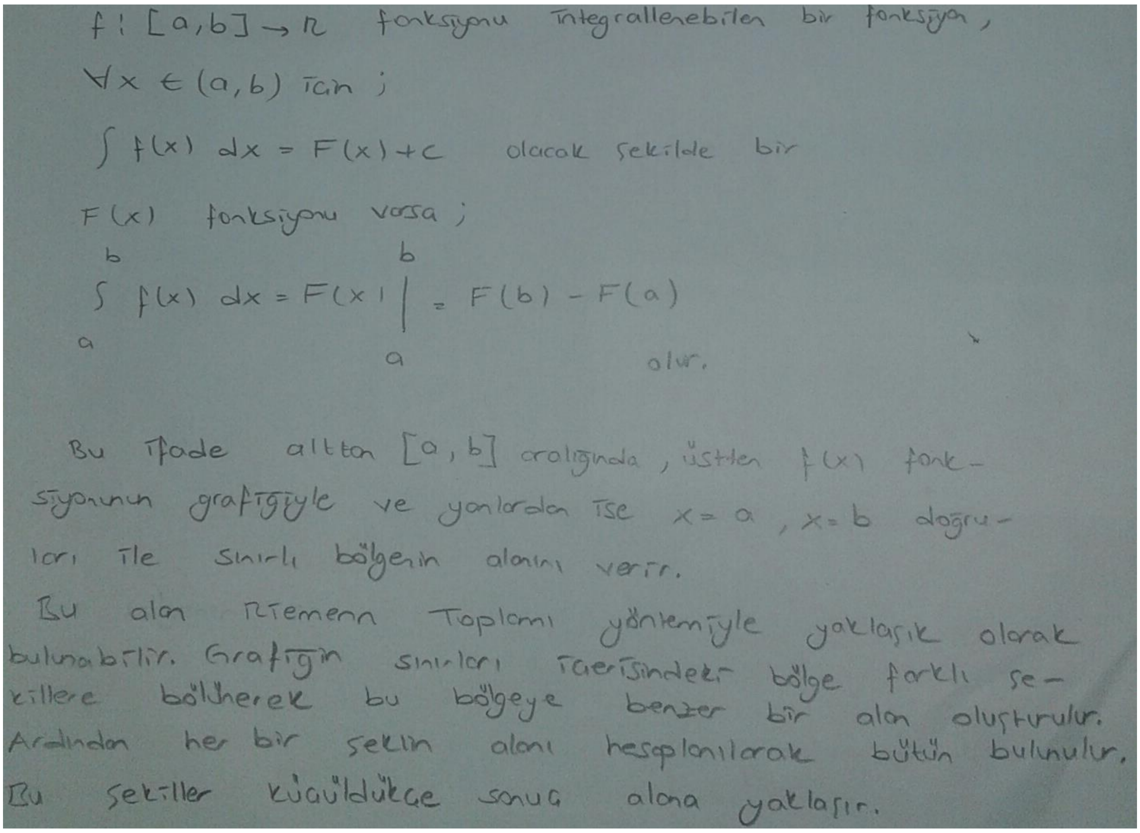
2) $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonun n tane parçaya bölünmesiyle alt ve üst toplamlar oluşur ve bu toplamlar aynı sayıya yaklaşır. Çünkü bölüntü sayısı sonsuza gider. Bu toplamların yaklaştığı sayıya A dersek A sayısına f'nin $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali denir. Sınırları belli olan integraldir.

$\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterilir. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dır.

Belirli integral belirli sınırlarda verilen fonksiyon eğrisinin altındaki alanı hesaplamaktır.

Şekil 4.10.*Öğretmen adayı M13'ün soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.10. daki öğretmen adayı M13'ün belirli integral kavramı tanımına yönelik alt toplam ve üst toplam ifadesini formal tanım olarak vermediği kendi cümleleri ile yapmaya çalışarak informal tanım olarak sözel açıkladığı görülmektedir. Öğretmen adayı M13 alt toplam ve üst toplamı bölüntü sayısının sonsuza gitmesi durumunda bu toplamların aynı sayıya yaklaşmasından bahsetmiştir.



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon,
$\forall x \in (a,b)$ için ;
$\int f(x)\,dx = F(x)+c$ olacak şekilde bir
$F(x)$ fonksiyonu varsa ;
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ olur.

Bu ifade alttan $[a,b]$ aralığında, üstten $f(x)$ fonk-siyonunun grafiğiyle ve yanlardan ise $x=a$, $x=b$ doğru-ları ile sınırlı bölgenin alanını verir.
Bu alan Riemenn Toplamı yöntemiyle yaklaşık olarak bulunabilir. Grafiğin sınırları içerisindeki bölge farklı şe-killere bölünerek bu bölgeye benzer bir alan oluşturulur. Ardından her bir şeklin alanı hesaplanılarak bütün bulunulur. Bu şekiller küçüldükçe sonuç alana yaklaşır.

Şekil 4.11.*Öğretmen adayı M11'in soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.11. deki öğretmen adayı M11'in belirli integral kavramı tanımına yönelik alt toplam ve üst toplam ifadesini kendince tanımladığı görülmektedir. M11 kodlu öğretmen adayı integral hesabının temel teoreminden yola çıkarak alt toplam ve üst toplamı 'bu ifade alttan $[a,b]$ aralığında, üstten $f(x)$ fonksiyonunun grafiğiyle ve yanlardan ise $x=a, x=b$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını verir' şeklinde ifade etmiştir. 'Grafiğin sınırları içerisindeki bölge farklı şekillere bölünerek bu bölgeye benzer bir alan oluşturulur. Ardından her bir şeklin alanı hesaplanılarak bütün bulunulur. Bu şekiller küçüldükçe sonuç alana yaklaşır' ifadesini kullanmıştır.

Tablo 4.5. *Belirli integral kavramının geometrik yorumuna verilen cevapların analizi*

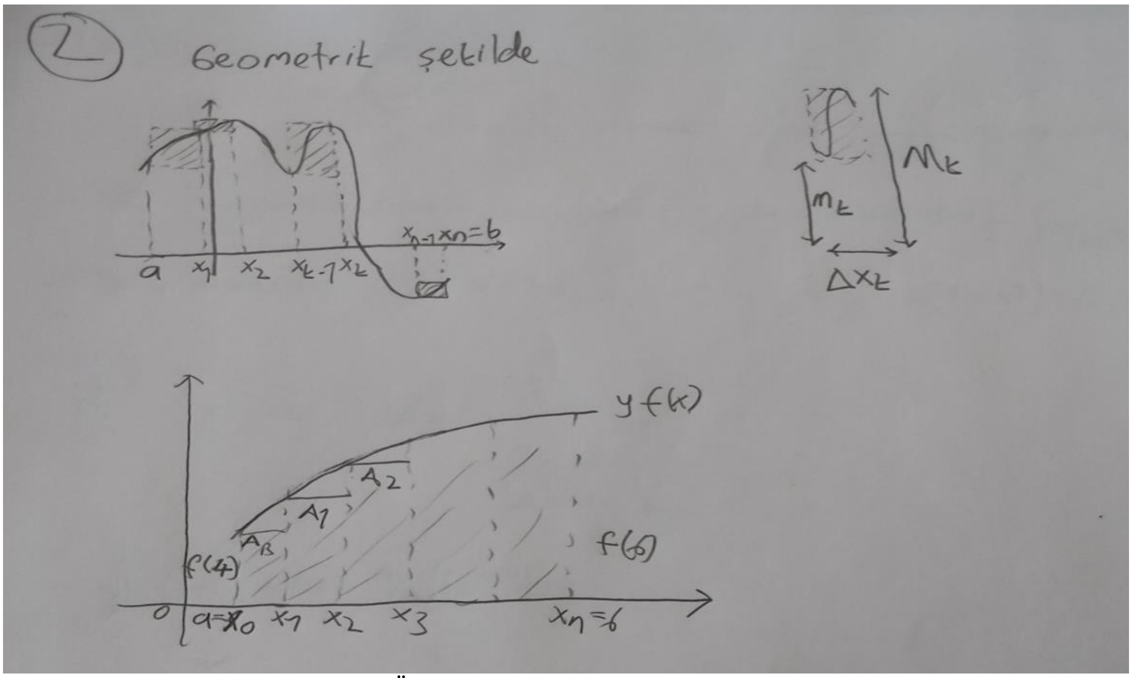
	Öğretmen Adayı	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	M4, M5, M6, M8, M9, M11, M16, M17, M18, M21, M22, M23, M27, M29, M30	15	50
Kısmen doğru yapanlar	M2, M3, M7, M10, M19, M20, M25, M26, M28	9	30
Yanlış yapanlar	M1, M12, M13, M14, M15, M24	6	20
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %50'si belirli integral kavramının geometrik yorumuna yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. %20'si yanlış , %30'u kısmen doğru olarak yorumlamıştır.

Bu verilere göre geometrik yorumu 15 öğrenci doğru bir şekilde tanımlarken, 9 öğrenci kısmen doğru tanımlamış, 6 öğrenci ise bu araştırma sorusunu yanlış cevaplandırmıştır.

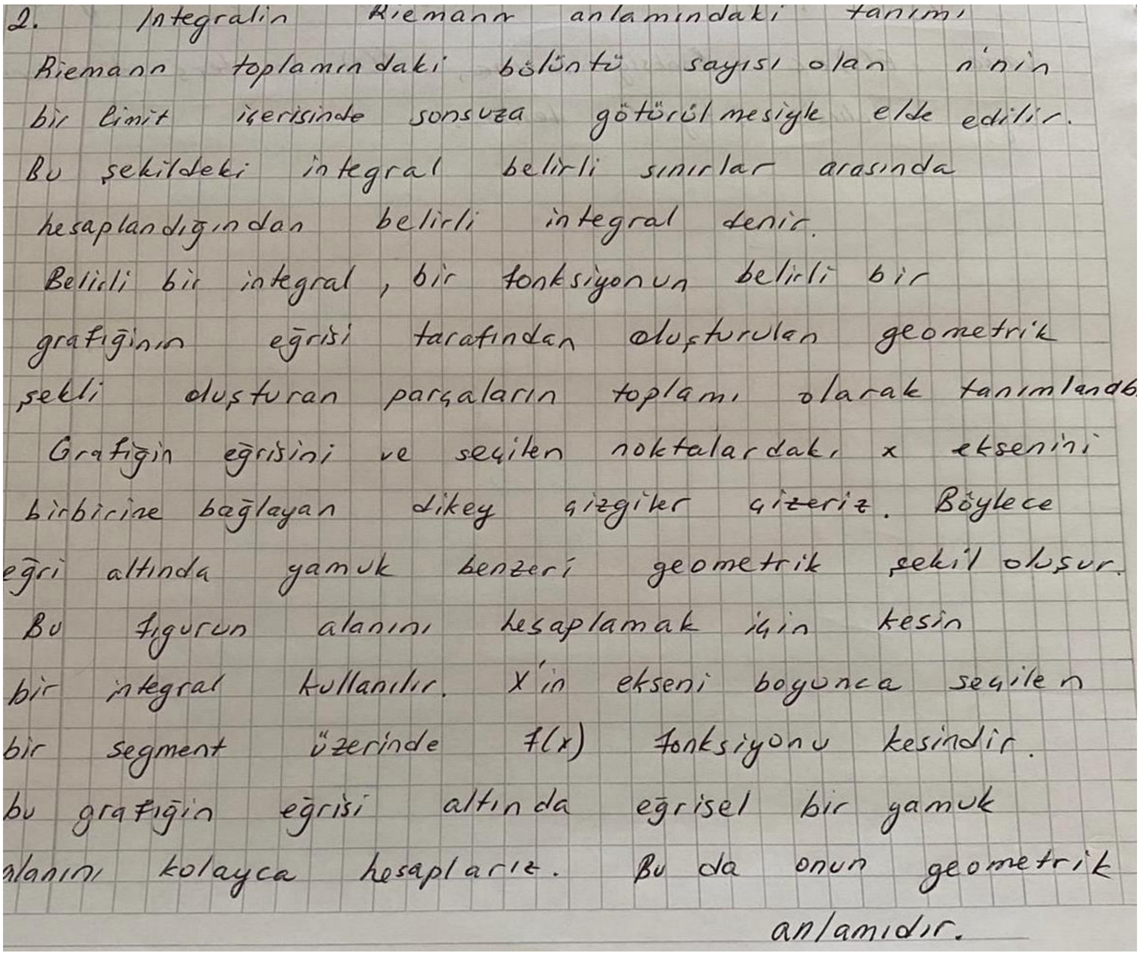
Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde belirli integralin geometrik yorumunda %50 oranında öğretmen adayı 'eğri altındaki alan' ifadesini kullanmışlardır. Diğer sorularla karşılaştırıldığında doğru cevap vermelerinin daha yüksek olduğu görülmüştür.

Bulgular göstermektedir ki öğretmen adaylarının, integral konularında fonksiyonun cebirsel hali yerine geometrik yorumunu yaptıklarında görsellik etkisi bakımından daha başarılı oldukları gözlemlenmiştir.



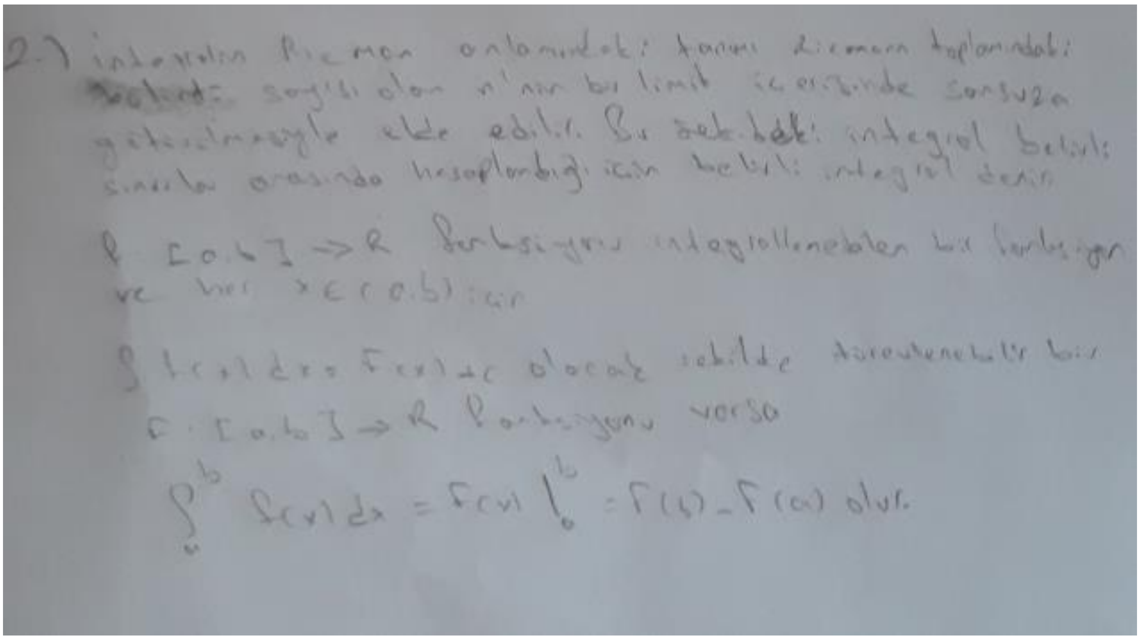
Şekil 4.12.*Öğretmen adayı M28'in soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.12. de öğretmen adayı M28 belirli integralin geometrik yorumunu şekil üzerinde alt dikdörtgenlerin ve üst dikdörtgenlerin alanlarını oluşturarak açıklamaya çalışmıştır. M28 kodlu öğretmen adayı farklı iki şekil üzerinde alt dikdörtgenlerin alanları ve üst dikdörtgenlerin alanlarını oluşturarak belirli integralin geometrik yorumunu ifade etmiştir.


2. Integralin Riemann anlamındaki tanımı
Riemann toplamındaki bölüntü sayısı olan n'nin
bir limit içerisinde sonsuza götürülmesiyle elde edilir.
Bu şekildeki integral belirli sınırlar arasında
hesaplandığından belirli integral denir.
Belirli bir integral, bir fonksiyonun belirli bir
grafiğinin eğrisi tarafından oluşturulan geometrik
şekli oluşturan parçaların toplamı olarak tanımlandı.
Grafiğin eğrisini ve seçilen noktalardakı x eksenini
birbirine bağlayan dikey çizgiler çizeriz. Böylece
eğri altında yamuk benzeri geometrik şekil oluşur.
Bu figurun alanını hesaplamak için kesin
bir integral kullanılır. X'in ekseni boyunca seçilen
bir segment üzerinde f(x) fonksiyonu kesindir.
bu grafiğin eğrisi altında eğrisel bir yamuk
alanını kolayca hesaplarız. Bu da onun geometrik
anlamıdır.

Şekil 4.13.*Öğretmen adayı M24'ün soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.13. de öğretmen adayı M24'ün belirli integralin geometrik yorumunu informal olarak açıklamaya çalışmıştır. Aynı zamanda Riemann toplamını da tanımladığı görülmektedir. M24 kodlu öğretmen adayı belirli integralin geometrik yorumunu 'grafiğin eğrisini ve seçilen noktalardaki x eksenini birbirine bağlayan dikey çizgiler çizeriz. Böylece eğri altında yamuk benzeri geometrik şekil oluşur. bu figürün alanını hesaplamak için kesin bir integral kullanılır. x'in ekseni boyunca seçilen bir segment üzerinde $f(x)$ fonksiyonu kesindir. Bu grafiğin eğrisi altında eğrisel bir yamuk alanını kolayca hesaplarız' şeklinde ifade etmiştir.



Şekil 4.14.*Öğretmen adayı M15'in soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.14. de öğretmen adayı M15'in belirli integrali geometrik olarak yorumlayamadığı görülmüştür. Fakat Riemann toplamı ve integral hesabının temel teoremini tanımladığı görülmektedir. M15 kodlu öğretmen adayının Riemann toplamı ve belirli integral kavramını tanımladığı görülmektedir geometrik olarak yorum bilgisi eksik kalmıştır.

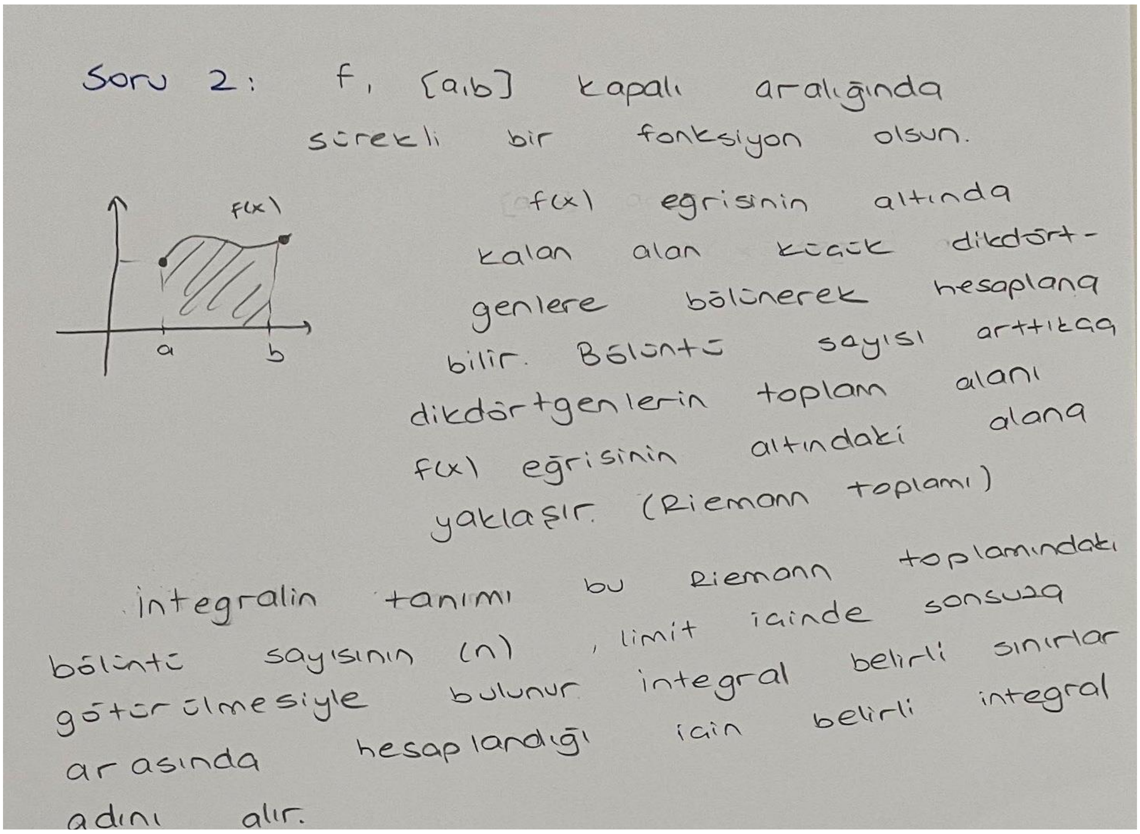
Tablo 4.6. *Belirli integral kavramı tanımına yönelik Riemann toplamına verilen cevapların analizi*

	Öğretmen Adayı	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	M8,	1	3
Kısmen doğru yapanlar	M4, M6, M7, M10, M18, M20, M21, M22, M25, M26, M27, M28, M29	13	44
Yanlış yapanlar	M1, M2, M3, M5, M9, M11, M12, M13, M14, M15, M16, M17, M19, M23, M24, M30	16	53
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %3'ü yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. %53'ü yanlış , %44'ü kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

Bu verilere göre Riemann toplamını sadece 1 öğrenci doğru tanımlarken, 13 öğrenci kısmen doğru, 16 öğrenci ise yanlış olarak tanımlamıştır.

Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde çoğunun Riemann toplamını ifade edemedikleri(açıklayamadıkları) ve başarısız oldukları görülmüştür.



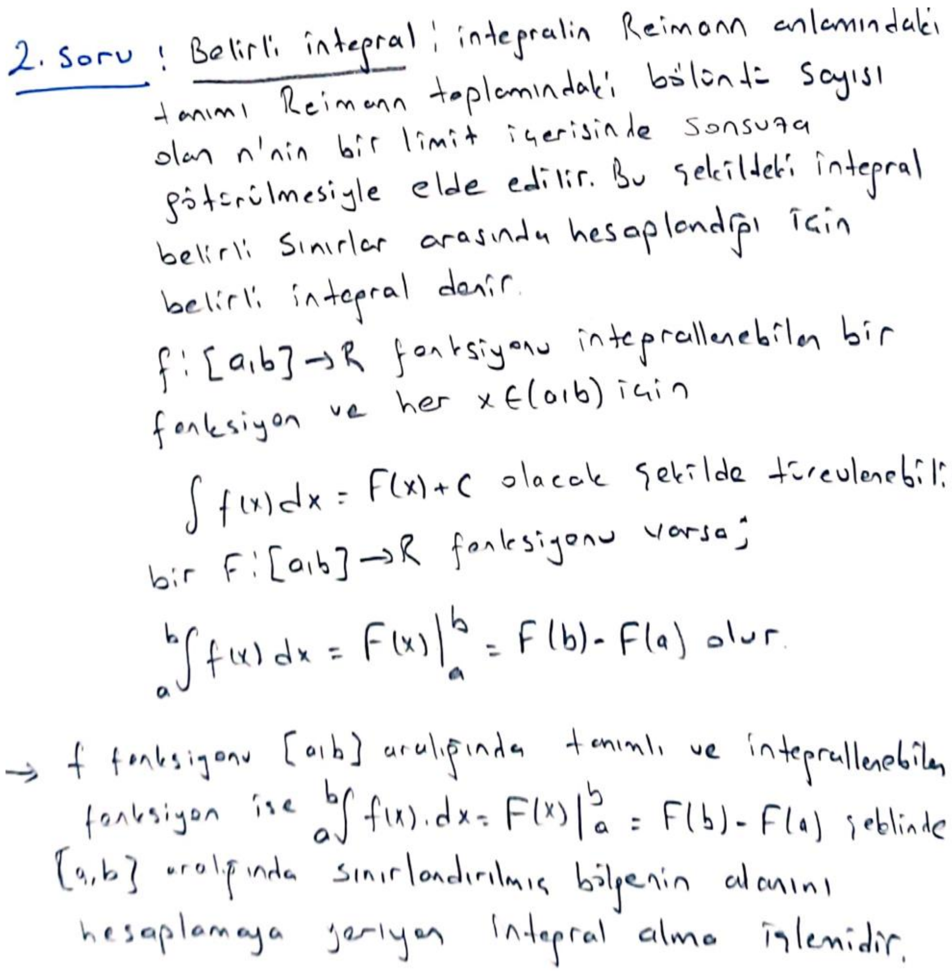
Soru 2: f, [a,b] kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

f(x) eğrisinin altında kalan alan küçük dikdört-genlere bölünerek hesaplana bilir. Bölüntü sayısı arttıkça dikdörtgenlerin toplam alanı f(x) eğrisinin altındaki alana yaklaşır. (Riemann toplamı)

integralin tanımı bu Riemann toplamındaki bölüntü sayısının (n), limit içinde sonsuza götürülmesiyle bulunur. integral belirli sınırlar arasında hesaplandığı için belirli integral adını alır.

Şekil 4.15.*Öğretmen adayı M4'ün soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.15. de öğretmen adayı M4 belirli integrali Riemann toplamını informal olarak açıklamaya çalışmıştır. Ancak öğretmen adayı M4 sadece eğri altındaki küçük dikdörtgenlerin alanının hesaplanmasında Riemann toplamının kullanıldığını ifade etmiştir. Öğretmen adayı M4 'bölüntü sayısı arttıkça dikdörtgenlerin toplam alanı $f(x)$ eğrisinin altındaki alana yaklaşır' biçiminde görüşünü ifade etmiştir.



2. Soru: Belirli integral: integralin Reimann anlamındaki tanımı Reimann toplamındaki bölüntü sayısı olan n'nin bir limit içerisinde sonsuza götürülmesiyle elde edilir. Bu şekildeki integral belirli sınırlar arasında hesaplandığı için belirli integral denir.

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon ve her $x \in (a,b)$ için

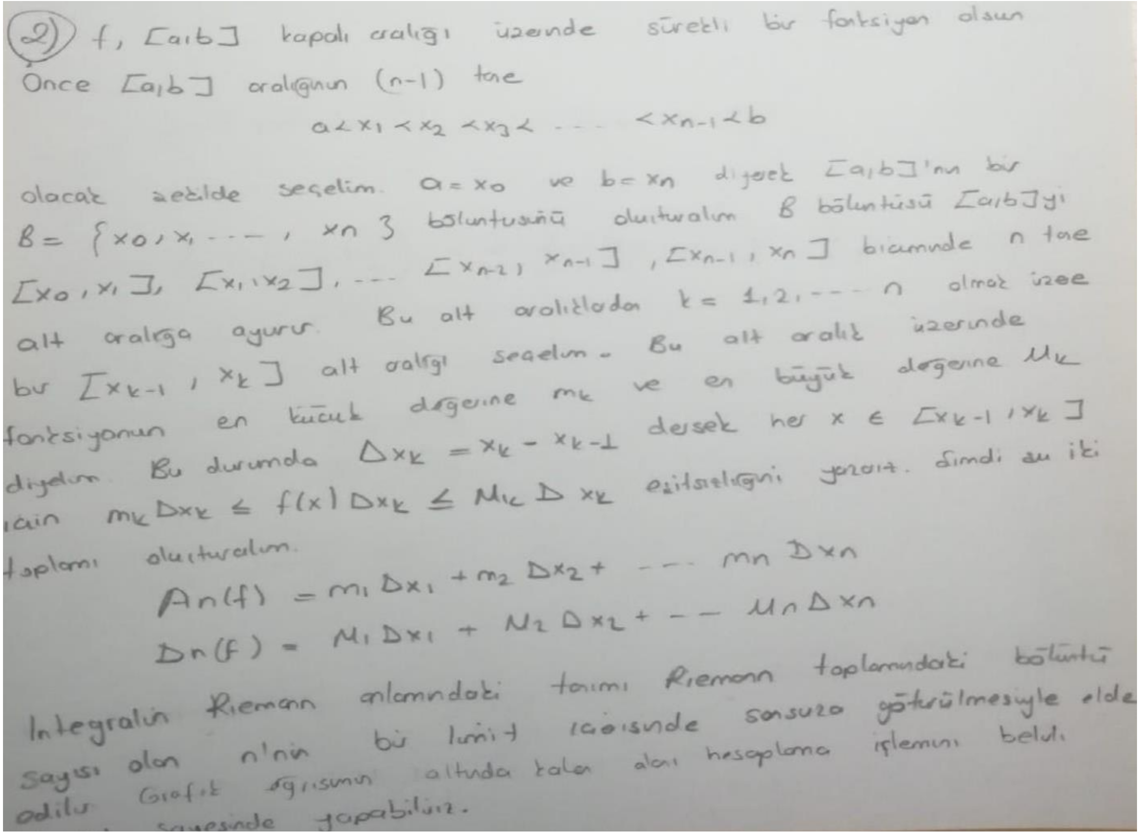
$$\int f(x)dx = F(x)+C$$ olacak şekilde türevlenebilir bir $F:[a,b]\to R$ fonksiyonu varsa;

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$ olur.

→ f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyon ise $\int_a^b f(x).dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ şeklinde $[a,b]$ aralığında sınırlandırılmış bölgenin alanını hesaplamaya yarayan integral alma işlemidir.

Şekil 4.16.*Öğretmen adayı M6'nın soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.16. da öğretmen adayı M6 belirli integral Riemann toplamını formal bir tanım yerine kendi anladığınca informal bir tanım yapmıştır. M6 kodlu öğretmen adayı "integralin Reimann anlamındaki tanımı Reimann toplamındaki bölüntü sayısı olan n'in bir limit içerisinde sonsuza götürülmesiyle elde edilir. Bu şekildeki integral belirli sınırlar arasında hesaplandığı için belirli integral denir" gibi bir cümleyle belirli integral kavramını ifade etmiştir.



(2) f, [a,b] kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun
Önce [a,b] aralığının (n-1) tane
$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < b$
olacak şekilde seçelim. $a = x_0$ ve $b = x_n$ diyerek [a,b]'nin bir
$B = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölüntüsünü oluşturalım. B bölüntüsü [a,b]'yi
$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n]$ biçiminde n tane
alt aralığa ayırır. Bu alt aralıklardan $k = 1, 2, \dots n$ olmak üzere
bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığı seçelim. Bu alt aralık üzerinde
fonksiyonun en küçük değerine m_k ve en büyük değerine M_k dersek her $x \in [x_{k-1}, x_k]$
diyelim. Bu durumda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ eşitsizliğini yazalım. Şimdi şu iki
için $m_k \Delta x_k \leq f(x)\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$
toplamı oluşturalım.
$$A_n(f) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots m_n \Delta x_n$$
$$D_n(f) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots M_n \Delta x_n$$
İntegralin Riemann anlamındaki tanımı Riemann toplamındaki bölüntü
sayısı olan n'nin bir limit içerisinde sonsuza götürülmesiyle elde
edilir. Grafik eğrisinin altında kalan alanı hesaplama işlemini belirli
sayesinde yapabiliriz.

Şekil 4.17.*Öğretmen adayı M8'in soru 2'ye ait cevabı*

Şekil 4.17. de öğretmen adayı M8, $[a, b]$ kapalı aralığının bir parçalanışını tanımlamış $[a, b]$ kapalı aralığını alt aralıklara ayırmış, alt aralıklara bölmüş ve bu alt aralıklardan fonksiyonun en küçük ve en büyük değerlerini tanımlamıştır. M8 kodlu öğretmen adayı buna bağlı olarak da alt toplamı ve üst toplamı tanımlamış ve ‘‘integralin Riemann anlamındaki tanımı toplamlarındaki bölüntü sayısı olan n'nin bu limit içerisinde sonsuza götürülmesi ile elde edilir’’ ifadesini kullanmıştır. M8 kodlu öğretmen adayı Riemann toplamını informal biçiminde ifade etmiş buna dayalı olarak da belirli integral kavramını informal bir biçimde tanımlamıştır.

Tablo 4.7. *Belirli integral kavramı tanımına verilen cevapların sınıflandırılması*

	Tam yapanlar		Kısmen doğru yapanlar		Yanlış yapanlar		Genel Toplam
	Frekans	Yüzde (%)	Frekans	Yüzde (%)	Frekans	Yüzde (%)	Yüzde (%)
İntegral Hesabının Temel Teoremi	23	73	1	3	6	20	30
Alt Toplam ve Üst Toplamı	7	24	4	13	19	63	30
Geometrik Yorum	15	50	9	30	6	20	30
Riemann Toplamı	1	3	13	44	16	53	30

Belirli integral kavramının sınıflandırılması ise integral hesabının temel teoremini tam yapanlar "f, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in (a, b)$ için $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = f(x)$ olacak biçimde sürekli bir $F : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu varsa, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$' dır" şeklinde ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının %76'sı integral hesabının temel teoremini yapmıştır. Katılımcılar integral hesabının temel teoremini yapmaya özen göstermiş ancak tam olarak doğru yapanların oranı %73'tür. Öğretmen adaylarının belirsiz integral kavramıyla ilişkilendirebildikleri söylenebilir.

Alt toplam ve üst toplama değinerek tanım yapan katılımcı sayısı %37'dir. Ancak katılımcıların %24'ü alt toplam ve üst toplamı tam olarak doğru ifade etmiştir. Bu da alt toplam ve üst toplamı açıklamada güçlük çektikleri söylenebilir.

Belirli integralin geometrik yorumunu yaparken ise öğretmen adayları kendi cümlelerini kullanarak informal tanım yapmışlardır. Belirli integral kavramını sadece 'eğri altındaki kalan alan' ve 'sınırları olan integral' olarak ifade etmişlerdir.

Riemann toplamına değinerek tanım yapan katılımcı sayısı %47'dir. Ancak katılımcıların %3'ü Riemann toplamını tam olarak doğru ifade etmiştir. Bu da öğretmen adaylarının belirli integralin anlamlandırılmasında Riemann toplamını formül ya da teorem olarak gördüklerinden kavramsal olarak ne anlama geldiğini düşünememişlerdir.

4.1.2. İkinci alt probleme ilişkin bulgular

Araştırma kapsamında belirlenen alt problemlerden ikincisi olan "Matematik öğretmeni adaylarının integral kavramı ile ilgili işlemsel bilgileri nasıldır?" sorusuna ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

Soru 3: "A bölgesi, $y = x$ ve $y = 2 - x^2$ eğrileri ile sınırlanan bir bölge olmak üzere;

- A bölgesini koordinat düzleminde çiziniz.
- A bölgesinin alanını veren integrali $\int_a^b f(x)dx$ şeklinde ifade ediniz.
- A bölgesinin alanını veren integrali $\int_c^d g(y)dy$ şeklinde ifade ediniz."

araştırma sorusuna verilen yanıtların incelenmesi

a) A bölgesini koordinat düzleminde çiziniz.

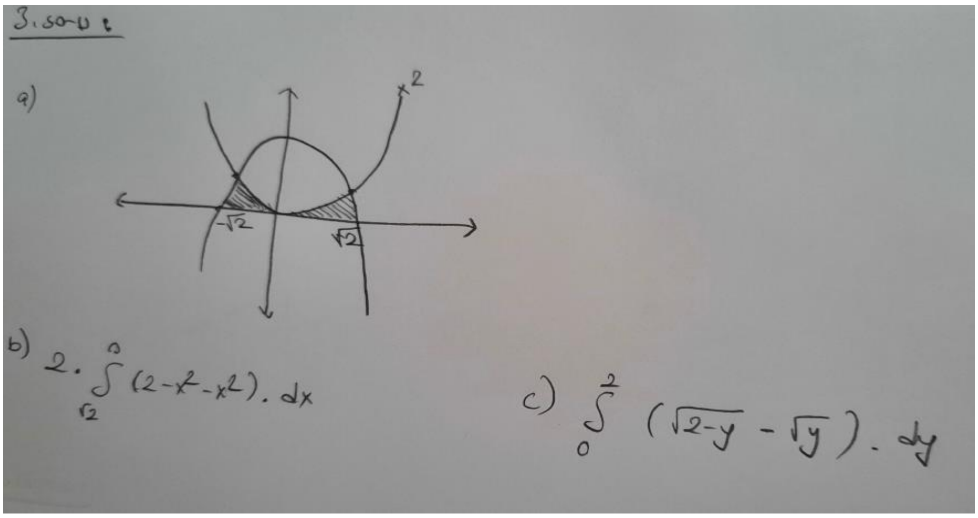
Tablo 4.8. *3/a sorusuna verilen cevapların analizi*

	Öğretmen Adayı	**Frekans**	**Yüzde (%)**
Grafiği doğru çizenler	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8, M9, M10, M11, M12, M13, M14, M15, M16, M17, M18, M19, M21, M22, M23, M24, M25, M26, M27, M28, M29, M30	29	97
Grafiği yanlış çizenler	M20	1	3
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %97'si belirli integral kavramı grafik çizimine yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiştir. %3'ü yanlış olarak çizmişlerdir.

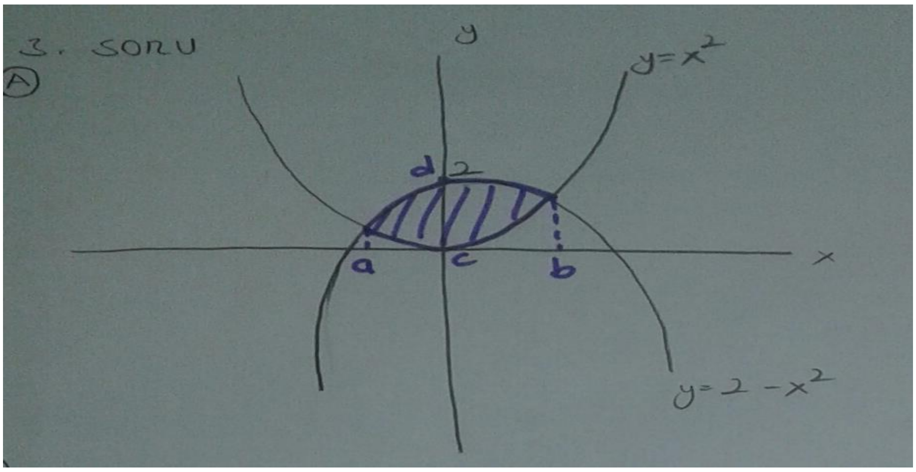
Bu verilere göre grafik çizimini 29 öğrenci doğru çizerken, sadece 1 öğrenci yanlış olarak çizmiştir.

Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde öğretmen adaylarının çoğunun grafiği doğru bir şekilde çizdiği görülmüştür.



Şekil 4.18. *Öğretmen adayı M20'nin soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.18. de öğretmen adayı M20'nin iki eğrinin grafiğini doğru çizmesine rağmen taralı alanı doğru olarak belirleyemediği için kapalı bölgenin alanını veren integrali doğru bir şekilde ifade edememiştir. M20 kodlu öğretmen adayı taralı bölgeyi belirleyemediğinden ve kapalı bölgenin alanını veren integrali doğru bir şekilde çizilmediğinden dolayı integral sınırlarını yanlış olarak belirlemiştir.



Şekil 4.19.*Öğretmen adayı M11'in soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.19. da öğretmen adayı M11'in taralı alanı ve kapalı bölgenin alanını veren fonksiyonları doğru olarak belirlediği ancak integralin sınırlarını belirleyemediği görülmektedir. M11 kodlu öğretmen adayı bölgeyi doğru bir biçimde çizmiş fakat iki eğrinin ara kesit noktalarını doğru olarak belirleyemediğinden dolayı bu noktaları a, b, c ve d biçiminde ifade etmiştir. Buna göre öğretmen adayı M11'in integral sınırlarını belirlediği gözlemlenmiştir.

b) A bölgesinin alanını veren integrali $\int_a^b f(x)dx$ şeklinde ifade ediniz.

$\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyona dair öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar değerlendirilmiştir. İşlemsel ve kavramsal bilgiyi ölçmeye yönelik bu soruda öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.9. da verilmiştir.

Tablo 4.9. *3/b sorusuna verilen cevapların analizi*

	Öğretmen Adayı	Frekans	Yüzde (%)
Tam yapanlar	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8, M9, M10, M11, M13, M14, M15, M16, M17, M19, M21, M22, M23, M24, M25, M26, M27, M28, M29, M30	28	94
Kısmen doğru yapanlar	M12	1	3
Yanlış yapanlar	M20	1	3
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %94'ü bağımsız değişkenin x olması durumunda $\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu belirleyebilmiş ve tam olarak doğru cevap vermiştir. %3'ü yanlış, %3'ü kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

Bu verilere göre bağımsız değişkenin x olması durumunda $\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu 28 öğrenci doğru belirlerken, 1 öğrenci kısmen doğru, 1 öğrenci ise yanlış olarak belirlemiştir.

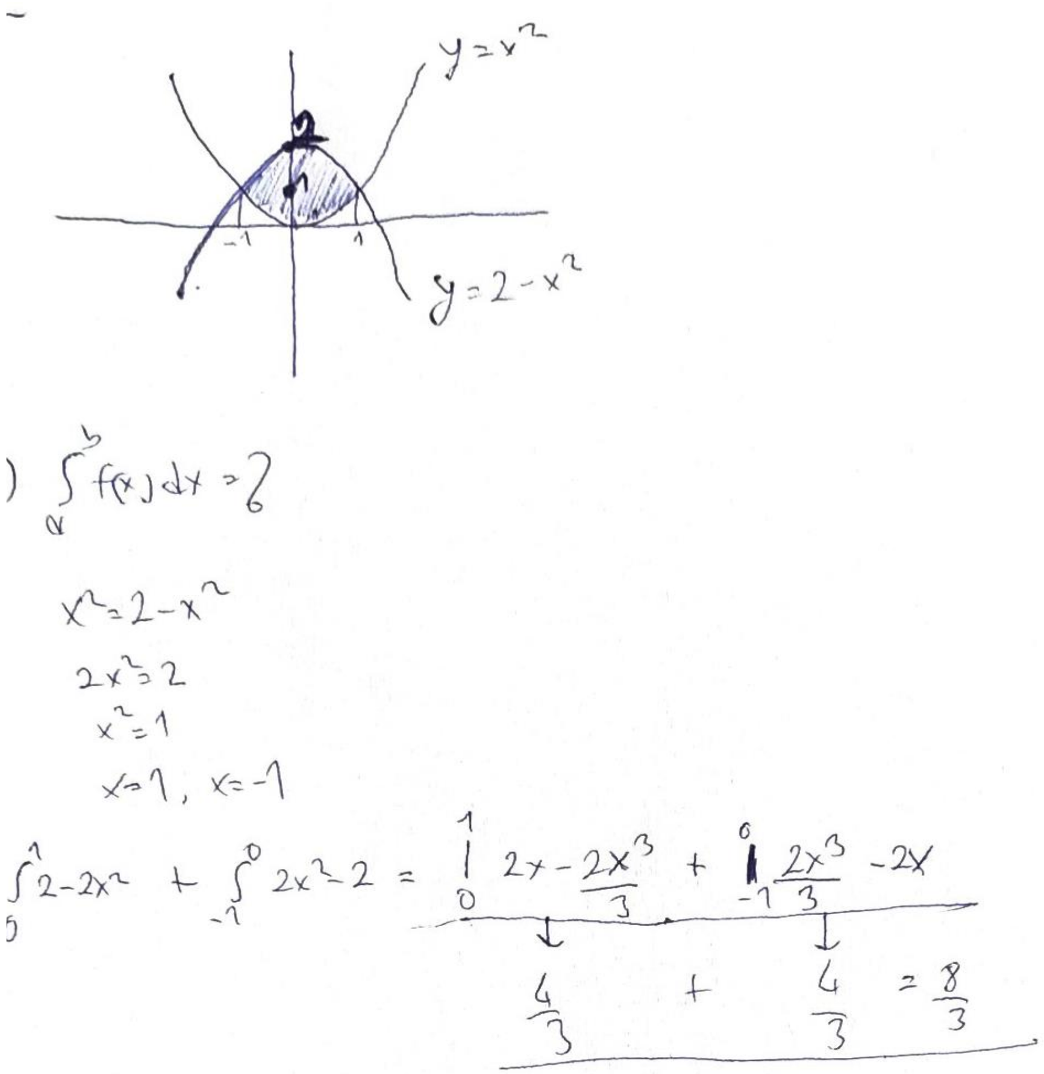
Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde çoğunun bağımsız değişkenin x olması durumunda $\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu ifade ettikleri görülmüştür.

Tablo 4.10. *3/b sorusuna verilen cevapların sınıflandırılması*

	Tam yapanlar		Kısmen doğru yapanlar		Yanlış yapanlar		Genel Toplam
	Frekans	Yüzde (%)	Frekans	Yüzde (%)	Frekans	Yüzde (%)	Yüzde (%)
Bölgenin 2 eş parçadan oluştuğunu ifade edenler	-	-	-	-	-	-	-
Bölgenin 2 eş parçadan oluştuğunu ifade edemeyenler	14	48	15	52	-	-	29
2 eş parçayı yanlış anlayanlar	2	67	1	33	-	-	3

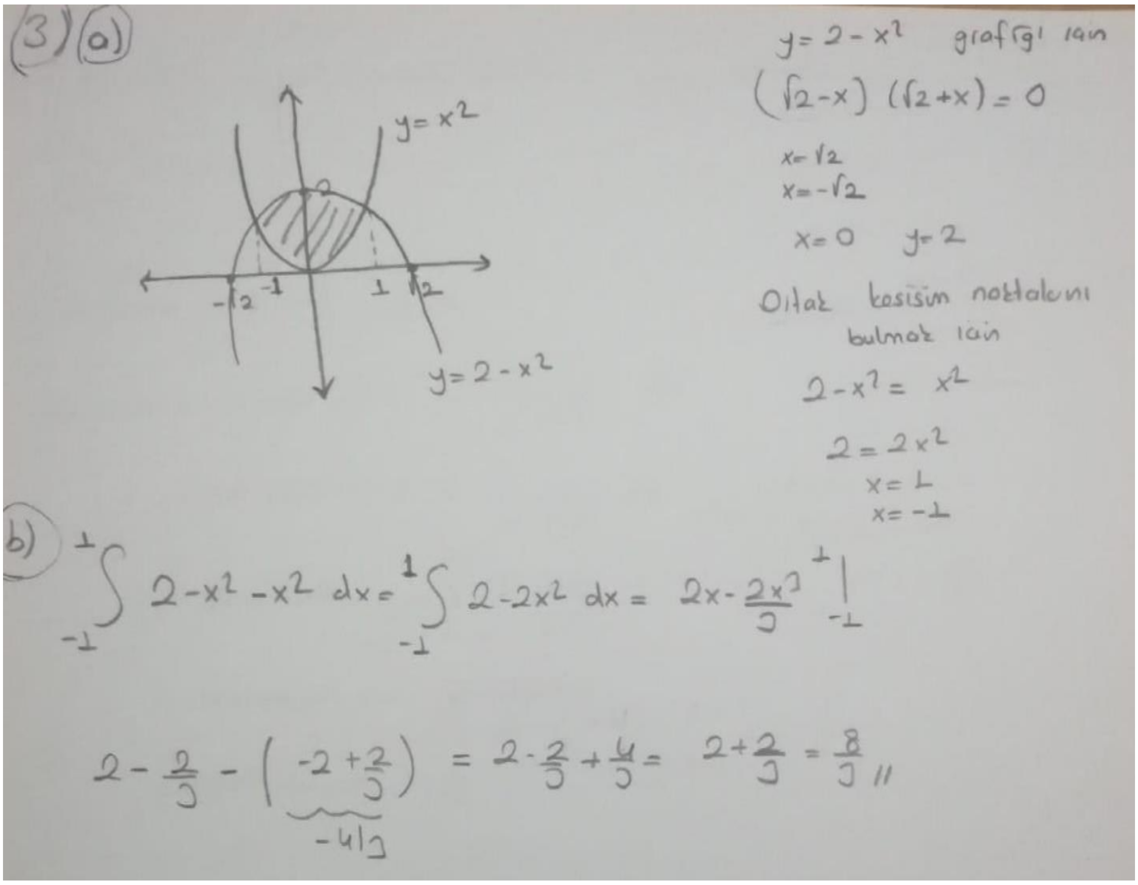
Tablo 4.10. da öğretmen adaylarının $\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyona verdikleri cevapların analizinin genel bir dağılımı gözükmektedir. Bu öğretmen adayları arasında taralı bölgenin iki eş parçadan oluştuğunu ifade eden olmamış yani $2\int_0^1 (Y_{\text{üst}} - Y_{alt})dx$ şeklinde ifade edemedikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının %48'i taralı bölgenin alanını dx diferansiyeline göre iki eş parçadan

oluştuğunu ifade edemeyip soruyu tam olarak doğru cevaplandırmış, %52’si ise kısmen doğru cevaplandırmıştır. Öğretmen adaylarından sadece 2 tanesi iki eş parçadan oluştuğunu ifade etmiş ama yanlış anlayıp sonucu doğru çözmüşlerdir.



Şekil 4.20.*Öğretmen adayı M12’nin soru 3’e ait cevabı*

Şekil 4.20. de öğretmen adayı M12’nin taralı bölgenin alanını dx diferansiyeline göre ifade etmesi istenen soruda iki eğrinin ara kesit noktalarını belirlediği ve taralı bölgenin alanını dx diferansiyeli olarak ifade ettiği görülmektedir. M12 kodlu öğretmen adayının üstten $y = x^2$ eğrisi ve alttan $y = 2 - x^2$ eğrisi ile sınırlanan bölgenin alanını ifade edemediği ve integral fonksiyonunu $\int_0^1 2 - 2x^2 + \int_{-1}^0 2x^2 - 2$ şeklinde ifade ettiği gözlemlenmiştir.



Şekil 4.21. *Öğretmen adayı M8'in soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.21. de verilen örneğe göre M8 kodlu öğretmen adayı taralı bölgenin alanını dx diferansiyeline göre ifade etmesi istenen soruda verilen fonksiyonu ve taralı bölgenin alanını dx diferansiyeli olarak ifade etmiştir. Aynı zamanda öğretmen adayı M8 iki eğrinin ara kesit noktalarını belirlediği, integralin sınırlarını doğru belirlediği ve integral fonksiyonunu $\int_{-1}^{1} 2-x^2-x^2\,dx$ şeklinde ifade ettiği görülmektedir. Fakat M8 kodlu öğretmen adayının soruyu anlamlandıramadan tek adımda bölgenin alanını hesapladığı ve sonuca ulaştığı görülmektedir.

c) A bölgesinin alanını veren integrali $\int_c^d g(y)dy$ şeklinde ifade ediniz.

$\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyona dair öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar değerlendirilmiştir. İşlemsel ve kavramsal bilgiyi ölçmeye yönelik bu soruda öğretmen adaylarının verdiği cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları Tablo 4.11. de verilmiştir.

Tablo 4.11. *3/c sorusuna verilen cevapların analizi*

	Öğretmen Adayı	**Frekans**	**Yüzde (%)**
Tam yapanlar	M5	1	3
Kısmen doğru yapanlar	M2, M3, M4, M7, M8, M10, M11	7	23
Yanlış yapanlar	M1, M6, M9, M10, M12, M13, M14, M15, M16, M17, M18, M19, M20, M21, M22, M23, M24, M25, M26, M27, M28, M29, M30	22	74
Genel Toplam		30	100

Öğretmen adaylarının %3'ü bağımsız değişkenin y olması durumunda $\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu belirleyebilmiş ve tam olarak ifade etmiştir. %74'ü yanlış, %23'ü kısmen doğru olarak cevaplandırmıştır.

Bu verilere göre bağımsız değişkenin y olması durumunda $\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu sadece 1 öğrenci doğru belirlerken, 7 öğrenci kısmen doğru, 22 öğrenci ise yanlış olarak belirlemiştir.

Bu cevapları ayrıntılı olarak incelediğimizde çoğunun bağımsız değişkenin y olması durumunda $\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu ifade edemedikleri görülmüştür.

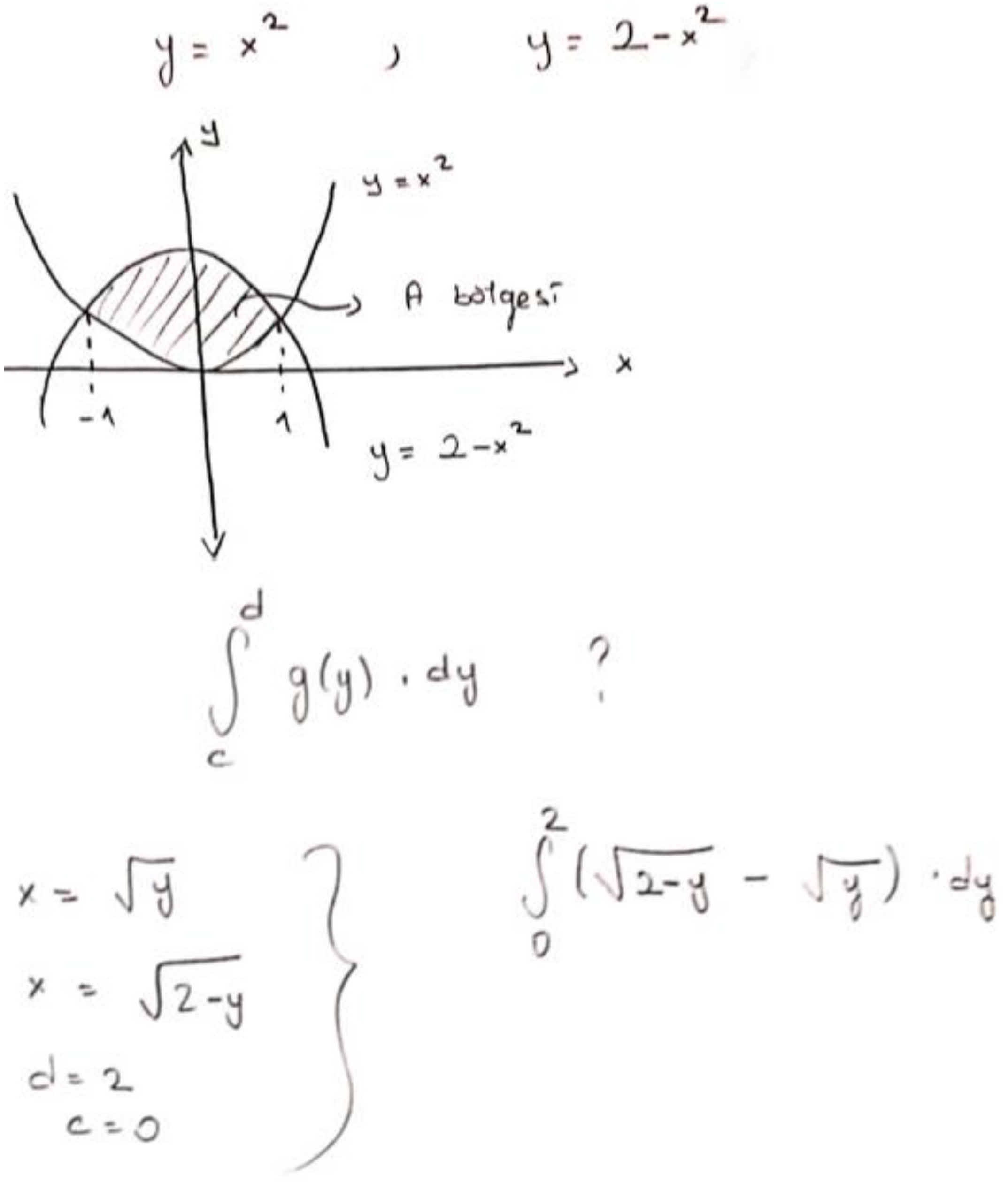
Öğretmen adaylarının sorular içerisinde en çok zorlandığı veya yanlış yaptığı sorulardan birisi olduğu açıkça görülmektedir.

Sonuç olarak bu sorunun çözümünde öğretmen adaylarının (dx diferansiyeline göre) $y = f(x)$ biçiminde integral alırken üstteki $y = x^2$ eğrisinden alttaki $y = 2 - x^2$ eğrisini çıkardıkları fakat (dy diferansiyeline göre) $x = g(y)$ biçiminde integral alırken sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisinden soldaki $x = \sqrt{2 - y}$ eğrisini çıkaramadıkları gözlemlenmiştir.

Tablo 4.12. *3/c sorusuna verilen cevapların sınıflandırılması*

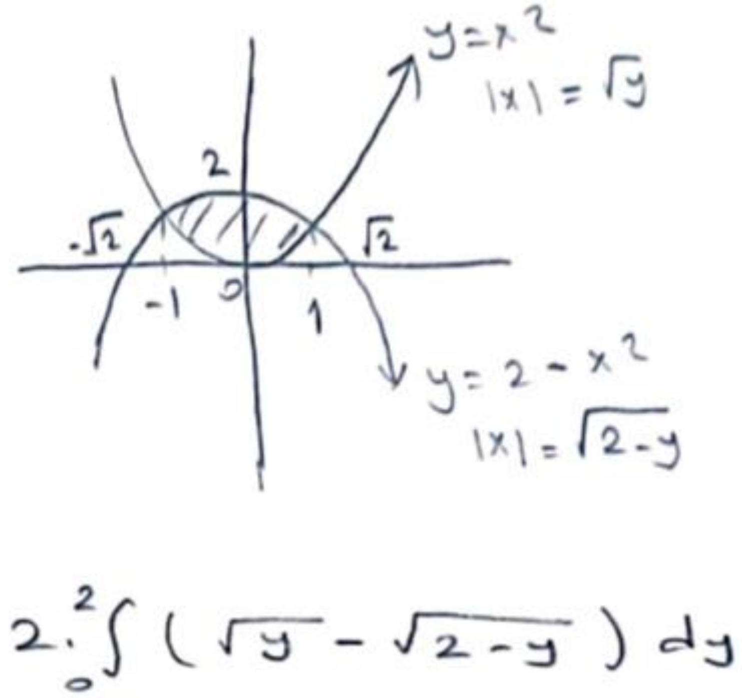
	Tam yapanlar		Kısmen doğru yapanlar		Yanlış yapanlar		Genel Toplam
	Frekans	**Yüzde (%)**	**Frekans**	**Yüzde (%)**	**Frekans**	**Yüzde (%)**	**Yüzde (%)**
Diferansiyel dy olduğunda integralin sınırlarını doğru belirleyenler	2	7	3	10	23	83	28
$x = g(y)$fonksiyonunu doğru belirleyenler	22	79	4	14	2	7	28
Sağdaki eğriden soldaki eğriyi çıkartması gerektiğini yapabilenler	2	100	-	-	-	-	2

Tablo 4.12. de öğretmen adaylarının $\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyona verdikleri cevapların analizinin genel bir dağılımı gözükmektedir. Öğretmen adaylarının %79'u $x = g(y)$ biçiminde verilen fonksiyonu doğru bir şekilde belirleyebilmiştir. Öğretmen adaylarının %83'ünün diferansiyel dy olduğunda integralin sınırlarını doğru belirleyemedikleri gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarından sadece 2 tanesi bağımsız değişken y olduğunda sağdaki eğriden soldaki eğriyi çıkartması gerektiğini ifade etmiştir.



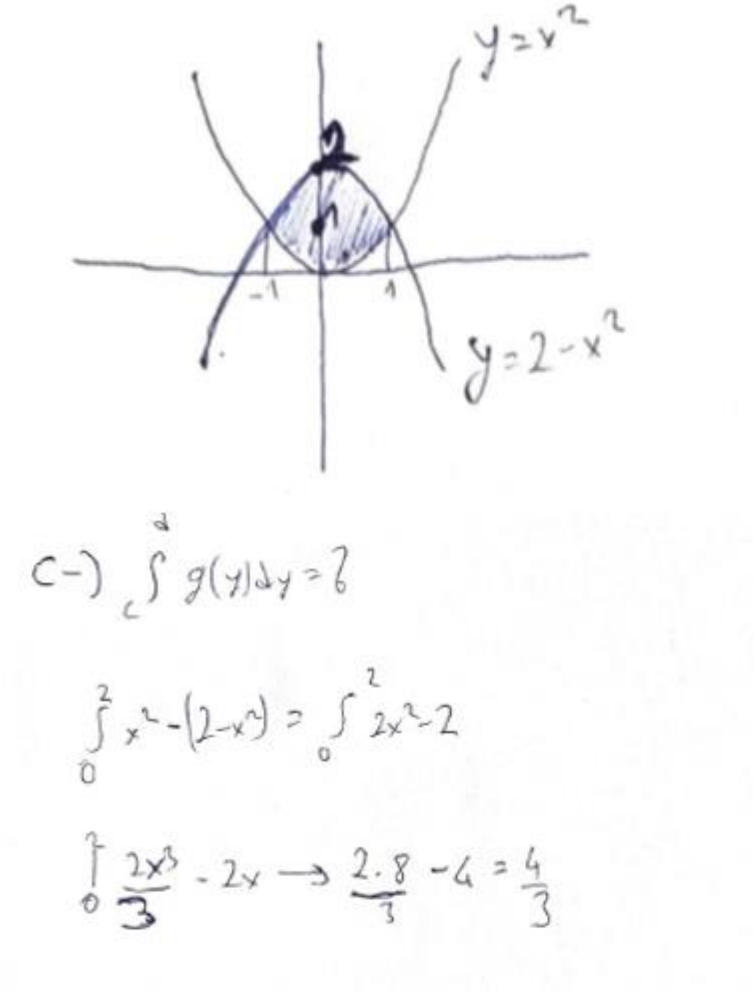
Şekil 4.22.*Öğretmen adayı M2'nin soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.22. de öğretmen adayı M2'nin eğri grafikleri taralı bölgenin alanını dy diferansiyeline göre ifade etmesi istenen soruda verilen fonksiyonu ve taralı bölgenin alanını dy diferansiyeli olarak ifade etmiştir. M2 kodlu öğretmen adayının iki eğrinin ara kesit noktalarını belirlemeye çalıştığı, sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisinden soldaki $x = \sqrt{2 - y}$ eğrisini çıkarmak yerine soldaki $x = \sqrt{2 - y}$ eğrisinden sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisini çıkarttığı ve integralin sınırlarını doğru belirlediği görülmektedir. Bu öğretmen adayı M2'nin $\int_c^d (\sqrt{2 - y} - \sqrt{y}) dy$ bilgisine sahip olduğu gözlenmiş ancak integrali iki adımda hesaplamadığı gözlemlenmiştir. M2 kodlu öğretmen adayının $\int_0^2 (\sqrt{2-y} - \sqrt{y})\,dy$ olarak ifade ettiği görülmüştür.



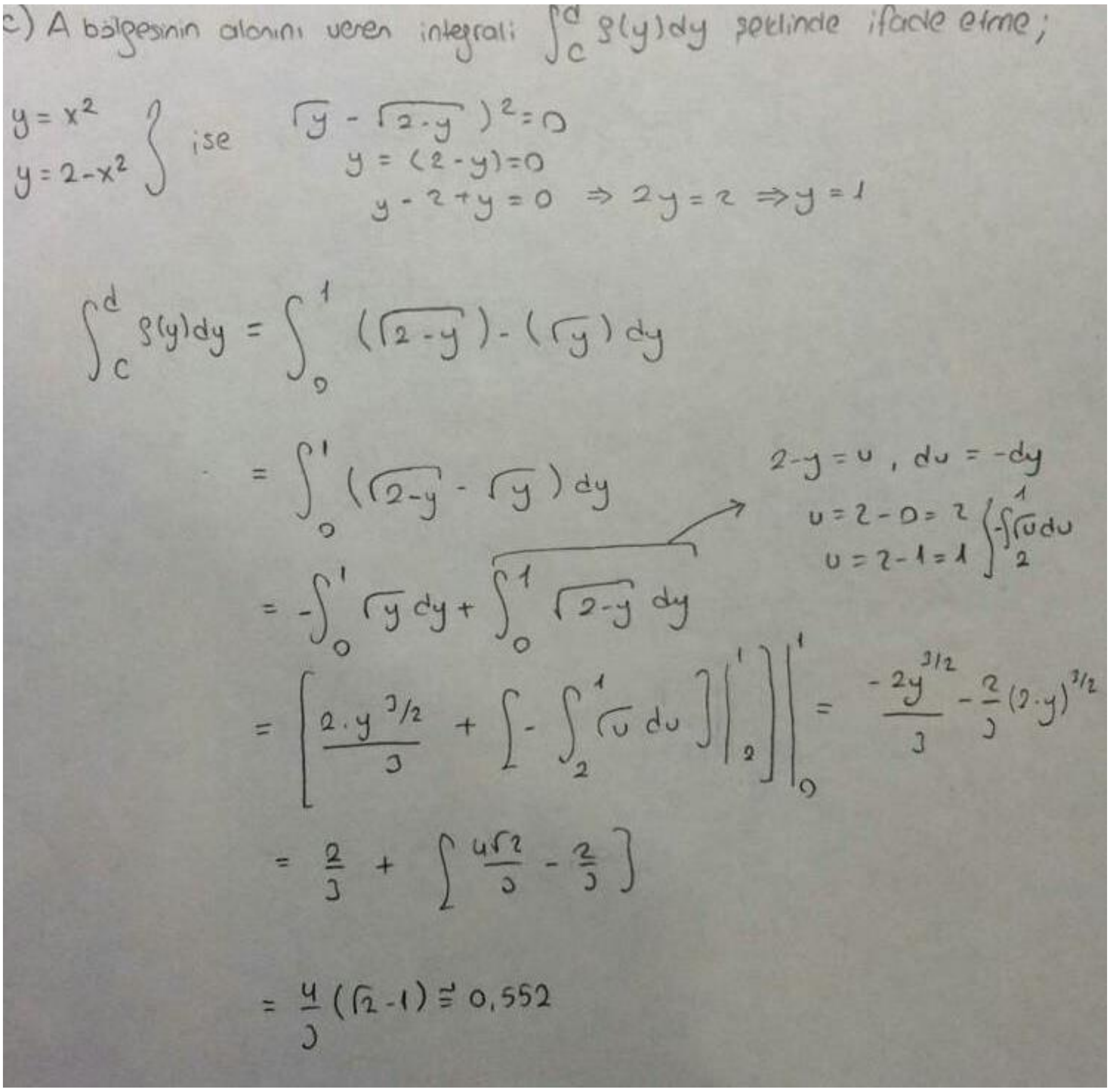
Şekil 4.23.*Öğretmen adayı M6'nın soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.23. de öğretmen adayı M6'nın taralı bölgenin alanını dy diferansiyeline göre ifade etmesi istenen soruda verilen fonksiyonu ve taralı bölgenin alanını dy diferansiyeli olarak ifade etmiştir. M6 kodlu öğretmen adayının sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisinden soldaki $x = \sqrt{2-y}$ eğrisinden çıkardığı ve integralin sınırlarını doğru belirlediği görülmektedir. Bu öğretmen adayı M6 iki eş parçadan oluştuğunu gözlemlediği, tek adımda bölgenin alanını hesaplamaya çalıştığı, $\int_c^d (\sqrt{2-y} - \sqrt{y})dy$ bilgisine sahip olduğu, ancak sadece $2\int_0^2 (\sqrt{y} - \sqrt{2-y})\,dy$ bu şekilde ifade edip bıraktığı görülmüştür.



Şekil 4.24.*Öğretmen adayı M12'nin soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.24. de öğretmen adayı M12'nin taralı bölgenin alanını dy diferansiyeline göre ifade etmesi istenen soruda fonksiyonu $x = g(y)$ biçiminde yazmadığı, bağımsız değişkeni y olarak belirleyip buna dayalı fonksiyonu belirlemediği gözlenmiştir. M12 kodlu öğretmen adayı istenilen biçimde integrali alınacak fonksiyonu $x = g(y)$ biçiminde ifade etmediği ve integrali alınacak fonksiyonu $y = f(x)$ biçiminde ifade edip sınırları da buna göre ifade edip integral almaya çalıştığı görülmüştür. M12 kodlu öğretmen adayının $\int_0^2 x^2 - (2 - x^2)$ bu şekilde yanlış ifade edip sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmüştür. Ayrıca M12 kodlu öğretmen adayı kapalı bölgenin alanını integral yardımıyla hesaplarken bağımsız değişkenin ve bağımlı değişkenin değiştiğinde ne olduğuna dikkat etmediği yani istenen biçimde ifade etmediği görülmüştür.



c) A bölgesinin alanını veren integrali $\int_c^d g(y)dy$ şeklinde ifade etme;

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2-x^2 \end{array}\right\} \text{ ise} \quad \begin{array}{l} (\sqrt{y} - \sqrt{2-y})^2 = 0 \\ y = (2-y) = 0 \\ y - 2 + y = 0 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

$$\int_c^d g(y)dy = \int_0^1 (\sqrt{2-y}) - (\sqrt{y})\, dy$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{2-y} - \sqrt{y})\, dy$$

$$2-y = u, \quad du = -dy$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2-0 = 2 \\ u = 2-1 = 1 \end{array}\right\} -\int_2^1 \sqrt{u}\, du$$

$$= -\int_0^1 \sqrt{y}\, dy + \int_0^1 \sqrt{2-y}\, dy$$

$$= \left[\frac{2 \cdot y^{3/2}}{3} + \left[-\int_2^1 \sqrt{u}\, du \right] \Big|_2^1 \right] \Bigg|_0^1 = \frac{-2y^{3/2}}{3} - \frac{2}{3}(2-y)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} + \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right]$$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) \cong 0,552$$

Şekil 4.25.*Öğretmen adayı M9'un soru 3'e ait cevabı*

Şekil 4.25. de öğretmen adayı M9'un taralı bölgenin alanını dy diferansiyeline göre ifade etmesi istenen soruda verilen fonksiyonu ve taralı bölgenin alanını dy diferansiyeli olarak ifade etmiştir. M9 kodlu öğretmen adayının iki eğrinin ara kesit noktalarını yanlış belirlediği ve integralin sınırlarını doğru belirleyemediği görülmektedir. Bu öğretmen adayı M9 tek adımda bölgenin alanını hesaplamaya çalıştığı, sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisinden soldaki $x = \sqrt{2-y}$ eğrisinden çıkardığı ve yanlış kullandığı, iki bölgenin olduğunu algılayamadığı, $\int_0^1 (\sqrt{2-y}) - (\sqrt{y})dy$ bu şekilde yanlış ifade edip sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmüştür.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmada elde edilen bulgulara dayanarak ulaşılan sonuçlara yer verilecektir. Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, hem bu uygulamaya hem de bu konuda çalışma yapmak isteyen araştırmacılara ve eğitimcilere yönelik önerilere de yer verilmektedir.

5.1. Sonuçlar

Matematik eğitimi alanında önemli bir kavram olan integral kavramının doğası gereği, Riemann toplamı ile ilişkisi düşünüldüğünde kavramın öğretim sürecinde geometrik yorum, integral hesabının temel teoremi, alt toplam ve üst toplam ile zenginleştirilmiş bir öğretim uygulamasının oluşturulabileceği düşüncesini doğurmuştur.

Literatür taraması yapıldığında çalışmada, integral kavramının öğretmen adayları tarafından anlamının anlaşılması, türev ile ilişkisi, geometrik yorumu, integral hesabının temel teoremi, alt toplam ve üst toplam, Riemann toplamı, grafik çizimi, iki eğri arasında kalan alan araştırma sürecinde üzerinde durulan konular arasında yerini almıştır.

Bu çalışmanın 1. sorusundan öğretmen adaylarının integral kavramını anlamlandırmaları ve türevle ilişkisinden elde edilen verilerin sonuçları aşağıdaki gibi açıklanabilir.

- Öğretmen adaylarının %73'ü belirsiz integral kavramını tam olarak doğru yanıtladıkları halde türevle ilişkisini %10'u doğru yanıtladığı görülmektedir. Öğretmen adayları integralin kavram tanımını ifade ederken türevle ilişkisini ifade etmede güçlük çekmektedir. İntegralin özelinde türev kavramı ile anlatılan cebirsel işlemi kısaca tanımını yapmakta, ancak kavramın anlamını ilişkilendirememekte ve yanlış olarak ifade etmektedir.
- Öğretmen adaylarının integralin ne anlama geldiğinin, türev ile olan ilişkisinin net olarak açıklanmadığı ve hemen hepsinin aynı cevapları verdiği görülmüştür. Bunun nedeni olarak da uzaktan(online) eğitim almış olmaları söylenebilir. Bu öğretmen adayları kavramlar arasında ilişki kurma, çıkarımda bulunma ve bilgileri manipüle etme konusunda başarısız olmuşlardır. Öğretmen adayları integral kavramını türev kavramıyla

ilişkilendirmekte güçlük çekmekte, türevi bilinen bir fonksiyonun türevi alınmadan önceki halini bulma işlemi olduğunu tam anlamlandıramadan ifade etmişlerdir. Öğretmen adayları integralin türevin tersi bir işlem olduğunu, yüzeysel olarak tanımlasa da bilgiyi yeterince anlamlandıramadıkları görülmüştür.

- Öğretmen adaylarının integral kavramını diferansiyel kavramıyla ilişkilendirmekte ve kullanmakta güçlük çekmektedirler.

Öğretmen adaylarının belirsiz integral kavramını tanımlamaları istendiğinde genellikle formal tanıma başvurdukları görülmüştür. Öğretmen adayları belirsiz integral kavramını 'f' in tanım aralığındaki her x değerinde $F'(x) = f(x)$ oluyorsa $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ters türevi denir. f' in x' e göre tüm ters türevlerinin kümesine f' in x' e göre belirsiz integrali denir ve $\int f(x)dx = F(x) + c$ ' biçiminde tanımlamışlardır. Yine elde edilen bulgulara göre ilgili matematiksel kavramlara yönelik bazı öğretmen adaylarının yanlış kavram bilgisine sahip olduğu ve bunları ifade ederken matematiksel dili yanlış kullandıkları görülmüştür.

Alanyazında yer alan farklı çalışmalarda da benzer şekilde sonuçlara ulaşıldığı görülmektedir. Buna benzer çalışmalardan biri olan Grundmeier, Hansen ve Sousa (2006), öğrencilerin integralin tanımına dair bilgilerinin ve integral almak için kullanılan integrasyon tekniklerine ilişkin performanslarının yüksek olduğunu buna karşın integral kavramının tanımlamasında eksikliklerinin olduğunu ortaya koymuştur. Otterburn ve Nicholson (1976) çalışmasında öğrencilerin kendi müfredat kapsamındaki matematik konularını ve kavramlarını genelde bildiklerini ancak bu bilgilerini ifade etmede oldukça zorlandıklarını ve yanlış ifadeler kullandıklarını belirlemiştir. Dolayısıyla, bu çalışmalardan elde edilen sonuçlarla benzer olduğu görülmüştür.

Bu çalışmanın 2. sorusundan öğretmen adaylarının belirli integral kavramını anlamlandırmaları ve geometrik yorumundan elde edilen verilerin sonuçları aşağıdaki gibi açıklanabilir.

- Öğretmen adaylarının %77'si belirli integral kavramı tanımına yönelik integral hesabının temel teoremine doğru cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar incelendiğinde, integral hesabının temel teoremini doğru ifade ederek belirli integral kavramını açıkladıkları gözlenmiştir.

- Öğretmen adaylarının %24'ü belirli integral kavramı tanımına yönelik alt toplam ve üst toplamı doğru tanımlamış, %63'ü yanlış tanımlamıştır. Öğretmen adaylarının formal tanımını ifade edemediği kendi cümleleri ile ifade etmeye çalışırken yanlış tanım yaptıkları gözlenmiştir. Öğretmen adaylarının yanıtlarına bakıldığında çoğunun matematiksel öğrenmeyi kuralları, bağlantıları ve formülleri öğrendikten sonra bunları yüzeysel ve informal olarak ifade ettikleri görülmüştür. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının matematiksel bilgileri yüzeysel öğrendiklerini ortaya koymaktadır.
- Öğretmen adaylarının %50'si belirli integral kavramının geometrik yorumuna doğru cevap vermişlerdir. Diğer sorularla karşılaştırıldığında doğru cevap vermelerinin daha yüksek olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları integral kavramını genellikle 'eğri altında kalan alan' olarak nitelendirmişlerdir. Bu ifade kavramın öğrenilmesi için yetersiz olmakla birlikte çeşitli yanılgılara yol açabilir. Literatür incelendiğinde elde edilen sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Rasslan ve Tall (2002), "öğrencilerin çoğunun belirli integrali anlamlı olarak tanımlayamadıklarını ve daha geniş bağlamda alan ve belirli integral hesaplamalarında anlama sorunları yaşadıklarını" ortaya koymuş ve öğrencilerin kavram imajlarının belirli integrali eğri altındaki kalan alan olarak sınırlı olduğunu vurgulamıştır. Benzer bir durumda Sealey (2008)'in çalışmasında, öğretmen adaylarının integrali eğri altında kalan alan olarak açıklamaları integral kavramı hakkında sınırlı bir anlamaya sahip olduklarını göstermektedir.
- Öğretmen adaylarının %53'ü belirli integral kavramı tanımına yönelik Riemann toplamına yanlış cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının Riemann toplamına verdiği cevaplar incelendiğinde sorulara doğru cevap veren öğrenci sayısının az olduğu ve öğrencilerin buldukları cevapları yorumlama konusunda problem yaşadıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarından sadece 1 tanesi belirli integrali açıklarken Riemann toplamını kullanmıştır. Belirli integralin anlamlandırılmasında öğrencilerin güçlük yaşadığını ifade eden Orton (1983), bu güçlüklerin öğrencilerin integrali Riemann toplamının limiti olarak algılayamadıkları

için oluştuğunu ortaya koymuştur. Ayrıca Orton (1983) çalışmasında, öğrencilerin çoğunluğunun verilen bir Riemann toplamının hesaplanmasında zorluk yaşadıklarını ve Riemann toplamları ile yapılan hesaplamaların limit işleminden dolayı kesin bir sonuç oluşturmadığını ve sadece yaklaşık bir değer olduğunu ifade ettiklerini belirtmiştir. Yapılan çalışmanın bu çalışmadan elde edilen sonuçlarla benzer olduğu görülmüştür.

Öğretmen adayları Analizin nemli teoremlerinden integral hesabının temel teoremi ile ($\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$) Riemann toplamları ile belirli integral arasındaki eşitliği birlikte düşünerek $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta_{x_k} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ eşitliğini oluşturamamışlardır. Bu ifadenin öğretmen adayları tarafından oluşturulmaması ise belirli integralin anlamlandırılamadığını göstermektedir. Bu ifadeyi tam olarak anlamlandıramayan öğretmen adayları için fonksiyon, dizi, seri, limit ya da türev kavramları ile ilgili bilgilerinin eksik olduğu düşünülebilir. Bu durum ayrıca çok az öğrenci tarafından integralin Riemann toplamları ile açıklandığı Gonzalez-Martin ve Camacho (2004) tarafından yapılan araştırma ile de benzerlik göstermektedir.

Bu çalışmanın 3. sorusundan öğretmen adaylarının grafik çizimi ve işlem bilgisi içeren sorulardan elde edilen verilerin sonuçları aşağıdaki gibi açıklanabilir.

- Öğretmen adaylarının %97'si belirli integral kavramı grafik çizimine yönelik soruya tam olarak doğru cevap vermiş, %3'ü yanlış olarak çizmişlerdir. Öğretmen adaylarından sadece 1 tanesi iki eğrinin grafiğini doğru çizmesine rağmen taralı alanı doğru olarak belirleyemediği için kapalı bölgenin alanını veren integrali de doğru bir şekilde ifade edememiştir. Bazı öğretmen adayları da bölgeyi doğru çizmiş ama iki eğrinin ara kesit noktalarını belirleyemediği için kavramları tam olarak kavrayamamış ve öğrenememiş olmaları gözlenmiştir.
- Öğretmen adaylarının %94'ü $\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyona dair soruya doğru cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının çoğunun $\int_a^b f(x)dx$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu ifade ettikleri(açıkladıkları) görülmüştür. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar incelendiğinde, eğri grafikleri $y = f(x)$ biçiminde verildiği zaman taralı bölgenin alanını dx diferansiyeli olarak ifade ettiği,

bağımsız değişkenin x olduğu fonksiyonlara göre integral sınırlarını belirledikleri, bölgenin x ekseni üzerine izdüşümünü alındığında bölgenin alanını veren integrali alınacak fonksiyonu üstteki (eğriyi) fonksiyondan alttaki fonksiyonu çıkararak belirledikleri halde bazı öğretmen adaylarının alttaki fonksiyondan üstteki fonksiyonu çıkarttığı gözlenmiştir. Bu durum Ferrini-Mundi ve Graham (1994) tarafından yapılan araştırma ile yüzeysel de olsa benzerlik göstermektedir. Ferrini-Mundi ve Graham (1994) öğrencilerin integrali işlemsel bir amaç güderek kullanıldığını ve işlemsel bir süreç için kullanılan bir işaret olarak ifade edildiğini ortaya koymuştur.

- Öğretmen adaylarının %74'ü $\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyona dair soruya yanlış cevap vermişlerdir. Öğretmen adaylarının çoğunun $\int_c^d g(y)dy$ biçiminde integrali alınacak fonksiyonu ifade edemedikleri (açıklayamadıkları) görülmüştür. Öğretmen adaylarının yer alan sorular içerisinde en zorlandığı ve yanlış yaptığı iki sorudan birinin bu soru olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar incelendiğinde, $\int$ f(x)dx integralindeki sahip oldukları üstteki $y = x^2$ eğrisinden alttaki $y = 2 - x^2$ eğrisini çıkarmaları gerektiği bilgisini kullandıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının $x = g(y)$ biçiminde fonksiyonu ifade edebildikleri, sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisinden soldaki $x = \sqrt{2-y}$ eğrisini çıkarmaları gerekirken soldaki $x = \sqrt{2-y}$ eğrisinden sağdaki $x = \sqrt{y}$ eğrisini çıkardıkları bu yüzden yanılgıya düştükleri görülmüştür. Bu durumu Artigue (1991), öğrencilerin birçoğunun bir eğri altındaki alanı bulmada rutin işlemleri uygulayabilmelerine rağmen işlemlerini nadiren açıklayabildiklerini ortaya koymuştur. Ayrıca Artigue (1991), bazı öğrencilerin bu işlemleri niçin yaptıklarını fark etmediklerini de ifade etmiştir. Dolayısıyla buradaki sonuçların yüzeysel de olsa, bu çalışmadan elde edilen sonuçlarla benzer olduğu görülmüştür.

Kavramsal bilgi içeren soruların öğrenciler tarafından fazla oranda yanlış yapılması ve işlemsel bilgiye dayalı soruların doğru ya da yanlış yüzdelerinin yüksek olmasına rağmen öğrencilerin bu yolla kendine güvenlerinin yüksek olduğu görülmektedir. Görüldüğü gibi bu güven de tek başına işlem bilgisi gerektiren soruların doğru cevaplandırılmasına yetmemektedir. Matematiksel bilgileri ağırlıklı olarak işlemsel nitelikte olan öğretmen adayları yukarıdaki çözümlerden de görüldüğü gibi çoğu zaman kullandıkları işlemlerin arkasında matematiksel kavramların olduğunun farkında olmazlar. Matematiği işlemsel olarak algılayan bu gruptan öğrencileri Schoenfeld (1985), matematiğin bir anlamı olduğundan habersiz bireyler olarak tanımlamaktadır. Bu tür işlem bilgisine güvenen öğretmen adaylarına göre matematik yapmak anlamsız işlemlerin, sembollerin ezberlenerek öğrenilmesi ve kullanılmasıdır.

Öğretmen adaylarının geçmiş deneyimlerinde karşılaştıkları problemleri incelemeden ve ilişkilendiremeden sahip oldukları bilgiyle yeni problemlerde çözümlemeye uyarladıkları görülmektedir. Ayrıca, çoğu öğretmen adayının soruda verilen integralin sınırlarını doğru belirleyemediğini ve çözüme devam etmediğini göstermektedir. Ferrini-Mundi ve Graham (1994) araştırmasından elde ettiği bulgularla benzerlik göstermektedir.

Matematiğin dilini oluşturan sembollerin anlamlarının bilinmemesi ve yanlış imgelenmesi öğretmen adaylarının cebirsel yanılgılara sahip olduğunu göstermektedir. Öğretmen adaylarının işlem ve kavram yanılgılarının olması öğrencilerin bilgiyi aktarıldığı gibi değil kendilerine göre anlamlandırarak aldıklarını göstermektedir. Bazı öğretmen adaylarının problemde verilenleri ilişkilendiremeyip rastgele çözüm yolları oluşturmaları geçmiş tecrübelerini yaşadıkları yeni durumlara taşıyamadıklarını göstermektedir. Bu öğretmen adayları aynı zamanda öğrendikleri bilgileri karşılaştıkları yeni durumlara aktarmakta ve bu durumlar ile ilişkilendirmekte güçlük çekmektedirler.

Bu çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak öğretmen adaylarının integral kavramı tanımına, integral-türev arasındaki ilişkinin belirtilmesine, belirli integral kavramı tanımına yönelik geometrik yorumu, integral hesabının temel teoremi, alt toplam ve üst toplam, Riemann toplamı, grafik çizimi ve iki eğri altında kalan alan bilgilerinin hepsinin aynı anda incelendiği böyle bir araştırmaya alanyazında rastlanılmadığı görülmüştür.

5.2. Öneriler

Bu çalışmanın ışığı altında eğitimcilere ve araştırmacılara faydalı olacağı düşünülen bazı önerilerle bu bölüme son verilecektir.

- Thomas (1991)'a göre integral kavramı çok önemli bir matematiksel araçtır ve anlaşılması hemen hemen matematiğin tüm dallarındaki daha üst düzeydeki çalışmalar için bir gerekliliktir. İntegral kavramı çok geniş ve kapsamlı bir konudur. Bu yüzden öğrencilerin "integralin aslında ne olduğu" ile ilgili inançlarının sınıf ortamında günlük uygulamalarla desteklenmesi gerekmektedir. Kavramın öğrenilme süreci öğretim stratejilerine ışık tutması gerektiğinden, limit-türev-seriler-diziler-fonksiyon kavramlarıyla arasındaki ilişkilerin kurulması ve günlük yaşam problemlerinde yorumlanması ve gerçek yaşamla ilişkili senaryolar olmalıdır.

- Çalışmanın sonuçlarında görüldüğü üzere öğretmen adaylarının integral kavramı ve kavramsal anlama seviyelerinin yeterli olmadığı görülmektedir. İntegral kavramının özelinde, matematiğin anlamlı öğretilmesi ve öğrenilmesi ayrıca farklı çalışma alanlarıyla ilişkilendirilmesi ilgili öğreticilerin matematik bilgilerinin yeterliliği önem arz etmektedir. Öğrencilerin matematiği daha anlamlı öğrenmeleri için performanslarının artırılması bireysel katkı sağlayacak ve konuya hakim olmayı sağlayacak ve konuyu sevdirecektir. Bunun için matematik öğrenimiyle birlikte öğreticiler kavramsal algıya önem vermeli, kavramların gündelik yaşamda ve alan dışında farklı alanlarla bağlamının anlamlı öğrenilmesine çalışılmalıdır. Kavram tanımları ve özellikleri belirli örneklemlerle açıklanırken sınırlı olarak anlatılmamalıdır.
- Öğrencilerin öğrenmelerinin anlamlı olabilmesi için rutin olmayan problemleri, kavramın farklı bağlamlarda kullanılan örneklemeleri ya da teknolojiyi esas alan bir öğretim yöntemi ortaya çıkarılabilir. Bir kavramın öğretim yöntemi incelenerek deneysel bir alan oluşturulabilir, bahse konu yapılan hatalar içinde öğrencilerin işlemsel ve kavramsal bilgilerinin yeterliliği gözlemlenebilir.
- Matematiksel anlama öğrenci değerlendirme aşamasında hesaplama yaparken formüllerle birlikte doğruyu bulması yeterli olmamakla birlikte kavramsal yapıları, işlemlerin nerden geldiğine ve matematiksel düşünmesine bağlıdır. Genellikle müfredat programı alıştırma türleri içinde yer alan örneklerde de işlemsel bilgisinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Oysaki işlemsel bilgi yerine kavramsal bilginin neden-

niçini sorgulanırsa öğrenci yorum gücünü artıracak konunun içeriğini kolayca giriş yapmış olacaktır.

- Bu özel çalışma yalnızca 1.sınıf olan ilköğretim matematik öğretmenliği 30 öğrenci ile sınırlıdır. Buradan hareketle yapılacak her farklı çalışma Anadolu, Fen ve Özel Liseleri baz alarak farklı alan ve bölümlerde öğrenim gören öğrencilerle de değerlendirebilir.

KAYNAKÇA

Artigue, M. (1991). Analysis. In I.D. Tall & S. Vinner (Eds.), Advanced mathematical thinking (s. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academics.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. ve Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Aydeniz, F. (2011). *Öğretmen adaylarının eğim kavramı ile ilgili sahip oldukları kavram imajlarının ve matematiksel anlayışlarının incelenmesi üzerine bir durum çalışması.* Ankara: Gazi Üniversitesi. Eğitim Bilimleri Enstitsü.

Balcı, M. (2007). *Genel Matematik 1.* Ankara: Balcı Yayınları.

Bozkurt, A. ve Koç, Y. (2012). Investigating first year elementary mathematics teacher education student's knowledge of prism. *Educational Sciences: Theory and Practice,* 12, 2949-2952.

Blitzer, R. (2003). *Thinking mathematically.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Büyüköztürk, Ş. (2012). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı*. (16.Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Büyüköztürk, Ş. (2016). *Bilimsel araştırma* yöntemleri. Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Camacho, M., Depool, R. and Santos-Trigo, M. (2009). Student's use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 35-67.

Cho, E. and Kim, S. (2015). Cronbach's coefficient alpha: Well known but poorly understood. *Organizational Research Methods*, 18(2), 207-230.

Comrey, A.L. and Lee, H.L. (1992). *A first course in factor analysis*, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Cooney, T. J., Beckmann, S., Lloyd, G.M., Wilson, P.S. and Zbiek, R.M. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J.W. and Plano Clark, V.L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Çakıroğlu, E. (2013). Matematiksel kavramların tanımlanması. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 1-13). Ankara:Pegem Yayınları.

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Ergene, Ö. (2019). *Matematik öğretmeni adaylarının Riemann toplamlarını kullanarak modelleme yoluyla belirli integrali anlama durumlarının incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. İstanbul: Marmara Üniversitesi.Eğitim Bilimleri Entitüsü

Ersoy, Y. (2002). Matematik okuryazarlığı-II: Hedefler, geliştirilecek yetiler ve beceriler. (Düzenleme: O. Çelebi, Y. Ersoy, G. Öner) *Matematik Etkinlikleri Sempozyum-2002 Bildiriler Kitabı,* Ankara: Matematikçiler Derneği Yayınları.

Faulkenberry, E.E.D. (2003). *Secondary mathematics preservice teacher's conceptions of rational* numbers. Doctoral Dissertation, Oklahoma:Oklahoma State University,

Ferrini-Mundy, J. and Graham, K.G. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In J.J. Kaput and E. Dubinsky (Ed.), *Research Issues in Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results*, Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Gall, D.M., Borg, R.W. and Gall, P.J. (1996). *Educational Research: An Introduction* (6th ed). New York: Longman.

González-Martín, A.S. and Camacho, M. (2004). What is first-year mathematics student's actual knowledge about improper integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 35, No.1, 73–89.

Grundmeier, G.A., Hansen, J. and Sousa, E. (2006). An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. *Primus: Problems, Resources And İssues İn Mathematics Undergraduate Studies,* 16(2), 178-191.

Gülkıllık, H. (2008). *Öğretmen adaylarının bazı geometrik kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram imajlarının ve imaj gelişiminin incelenmesi üzerine fenomenografik bir çalışma*. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Hernández, M.L., Levy, R., Felton-Koestler, M.D. ve Zbiek R.M. (2017). Mathematical modeling in the high school curriculum. *Mathematics Teacher*. Vol.110, No.5. 336-342.

Hiebert, J. and Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. *The case of mathematics,* New York.

Hoffman, L.R. and Brahier, D.J. (2008). Improving the planning and teaching of mathematics by reflecting on research. *Mathematics Teaching İn The Middle School,* 13(7), 412-417.

Jöreskog, K.G. and Sörbom, D. (1993). *A program for multivariate data screening and data summarization*. Mooresville, IN: Scientific Software.

Judd, C.M., Eliot, E.R. and Kidder, H. (1991). *Research methods in social relations*. New York: Harcourt Brace Jovanovich College PupHshers.

Kabael, U.T. (2017). *Genel matematiksel kavramlar süreçleri ve öğretim yaklaşımları.* Ankara: Pegem Yayınları.

Keller, B.A., and Hirsch, C.R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal in Mathematics Education Science Technology,* 29 (1), 1-17.

Kim, H.S. and Kim, Y. M. (2005). Models of instruction technology for mathematics. *Key Engineering Materials,* Vols. 277-279, pp 219-225.

King, J. P. (1999). *Matematik sanatı* (Çev: N. Arık). Ankara: TÜBİTAK Yayınları.

Kridler, P.G. (2012). *Procedural and conceptual knowledge: A balanced approach.* Fairfax: George Mason University.

Lederman N.G. and Leederman. J.S. (2015). What is a therotical framework? A practical answer. *Journal Science Teacher Education,* 26, 593-597.

Lesh, R. and Doerr, H. (2013a). *Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving* içinde (s. 3-34). New York and London: Routledge Taylor ve Francis Group.

Lesh, R. and Doerr, H. (2013b). In what ways does a models and modeling perspective move beyond costructivism. içinde (s. 519-556). New York and London: Routledge Taylor ve Francis Group.

Lesh, R. and Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual developing. *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (2 ve 3), 157-189.

Lingefjärd, T. and Holmquist, M. (2005). To assess student's attitudes, skills and competencies in mathematical modeling. T*eaching Mathematics and Its Applications*, 24 (2–3), 123–133.

Ma, X. and Xu, J. (2004). The Causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis. *Journal of Adolescence*, 27 (2), 165-179.

McCormick, A. (1997). Classroom management problems, strategies and influences in physical education. *European Physical Education Review,* 3(2), 102-115.

McGehee, J.J. (1990). *Prospective secondary teacher's knowledge of the function concept.* Doctoral Dissertation, USA:University of Texas.

Merriam, S.B. and Tisdell, E.J. (2015). *Qualitative research: A quide to design and implementation* (4th edition). San Francisco: Jossey-Bass.

Milli Eğitim Bakanlığı. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı.* Ankara.

Nesin, A. (2011). İntegral *Matematik Dünyası Dergisi II,* 20 87.

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics,* 14 (1), 1-18.

Otterburn, M.K. and Nicholson, A.R. (1976). The language of (CSE) mathematics. *Mathematics in School,* 5, 18-20.

Peker, M. and Mirasyedioğlu, Ş. (2003). Lise 2. sınıf öğrencilerinin matematik dersine yönelik tutumları ve başarıları arasındaki ilişki. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.* 14 (14), 157-166.

Raitta, E.K.H., Gittings, M.J. and Geiger, C. (2011). Learning dimensional analysis through collaboratively working with manipulatives. *Journal of Chemical Education,* 88 (7), 910–915.

Rasslan, S. and Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In Cockburn A. and Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th PME,* 4, 89-96.

Rowland, D.R. (2006). Student diffculties with units in differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematics, Education, Science, and Technology,* 37 (5), 553-558.

Rounds, J.B. and Hendel, D.D. (1980). Measurement and dimensionality of mathematics anxiety. *Journal of Counseling Psychology*, 27 (2), 138-149.

Rösken, B. and Rolka, K. (2007). Integrating intuition: the role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast,* 3, 181-204.

Schermelleh-Engel, K. and Moosbrugger, H. (2003). Evaluating the fit of structural equation models: Tests of significance and descriptive goodness-of-fit measures. *Methods of Psychological Research Online*, 8 (2), 23-74.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando:Academic Press,

Sealey, V. (2008). *Calculus students' assimilation of the riemann ıntegral ınto a previously established limit structure.* Unpublished EdD. Arizona: Arizona State University.

Sertöz, S. (2013). *Matematiğin aydınlık dünyası*. Ankara: TÜBİTAK Yayınları.

Sevimli, E. (2013). *Bilgisayar cebiri sistemi destekli öğretimin farklı düşünme yapısındaki öğrencilerin integral konusundaki temsil dönüşüm süreçlerine etkisi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. İstanbul: Marmara Üniversitesi. Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Shavelson, R.J., Phillips, D.C., Towne, L. and Feuer, M.J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, 32 (1), 25–28.

Simon, M. ve Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25 (5), 472-494.

Skemp, R.R. (1971). *The psychology of learning mathematics.* New Jersey:Lawrence Erlbaum Associatives,

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26 (3), 9-15.

Soğancı, Ö. (2006). *Matematik öğreniminde ve öğretiminde öğretmen adaylarının matematiksel tanımlara yaklaşımları üzerine fenomenografik bir çalışma*. Ankara: Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. ve Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1, 127-155.

Süzer, V. (2011). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin fonksiyon kavramı ile ilgili kavram tanımı ve imajları üzerine bir durum çalışması*. Ankara: Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Tall, D. and Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Publisher in Educational Studies in Mathematics*, 22, 125- 147.

Thomas, G., Weir, M., Hass, J. and Giordano, F. (2009). *Thomas Calculus*. İstanbul: Beta Yayınları.

Toluk-Uçar, Z. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: öğretimsel açıklamalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics* Education, 2, 87-102.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 14, 293–305.

Yee N.K. and Lam T.T. (2008). Pre-university students'errors in ıntegration of rational functions and ımplications for classroom teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 31 (2), 100-116.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yudariah, B., Yusof, M. and Tall, D. (1999). Changing attitudes to unıversity mathematics through problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 37,67–82.

EKLER

EK-1 Açık Uçlu Sorular

1. Belirsiz integral kavramını tanımlayınız.

Türev kavramı ile ilişkisini açıklayınız.

2. Belirli integral kavramını tanımlayınız.

Geometrik yorumunu açıklayınız.

3. A bölgesi, $y = x$ ve $y = 2 - x^2$ eğrileri ile sınırlanan bir bölge olmak üzere;

a) A bölgesini koordinat düzleminde çiziniz.

b) A bölgesinin alanını veren integrali

$\int_a^b f(x)dx$ şeklinde ifade ediniz.

c) A bölgesinin alanını veren integrali

$\int_c^d g(y)dy$ şeklinde ifade ediniz.