7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KANITLAMA SÜREÇLERİNİN VE BU SÜREÇTE ORTAYA ÇIKAN KANIT İŞLEVLERİNİN İNCELENMESİ

Doktora Tezi

Tuğba Yulet YILMAZ

Eskişehir 2021

7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KANITLAMA SÜREÇLERİNİN VE BU SÜREÇTE ORTAYA ÇIKAN KANIT İŞLEVLERİNİN İNCELENMESİ

Tuğba Yulet YILMAZ

DOKTORA TEZİ
Matematik Eğitimi Doktora Programı
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ocak 2021

ÖZET

7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KANITLAMA SÜREÇLERİNİN VE BU SÜREÇTE ORTAYA ÇIKAN KANIT İŞLEVLERİNİN İNCELENMESİ

Tuğba Yulet YILMAZ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2021
Danışman: Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Matematiksel kanıt ve muhakeme matematiksel ifadelerin doğruluğunun ya da yanlışlığının ikna edici nedenlerle gerekçelendirilmesini sağlaması bakımından matematiksel anlamanın ayrılmaz parçaları olarak, özellikle son yıllarda matematik eğitimi araştırmalarının odak konuları haline gelmişlerdir. Bununla birlikte okullarda kanıt uygulamalarına neden yer verilmesi gerektiği, kanıtın amacının ne olduğu sorularının yanıtı kanıt işlevlerinde gizli olmasına karşın bu işlevlerin sınıf ortamında nasıl ele alınacağı konusunda fikir birliği bulunmamaktadır. Bu çalışmanın amacı 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama sürecini incelemek ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerini belirlemektir. Öğretim deneyi olarak tasarlanan bu çalışma küçük grup ve sınıf tartışmaları şeklinde yürütülen 12 haftalık sınıf uygulamaları ile gerçekleştirilmiş ve bu sınıftan 6 öğrenci muhakeme biçimlerini incelemek amacıyla odak olarak belirlenmiştir. Araştırmada ön ve son testler, odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşmelerin kayıtları, öğretim derslerinin video ve ses kayıtları ile çalışma kâğıtları veri kaynakları olarak kullanılmıştır. Bu araştırmanın bulguları; sosyal etkileşime dayalı sınıf çalışmalarının öğrencilerin kanıtlama süreçlerini olumlu yönde etkilediğini, tümdengelimsel muhakemelerini güçlendirdiğini göstermiştir. Bununla birlikte hem küçük grup hem de sınıf tartışmalarında ortaya çıkan kanıt işlevleri ile sosyal ve sosyo-matematiksel normların arasında ilişki olduğu gözlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel muhakeme, Kanıt, Kanıt işlevleri, Sosyal ve sosyo matematiksel normlar.

ABSTRACT

EXAMINING 7th GRADE STUDENTS OF THE PROVING PROCESSES AND THE FUNCTIONS OF PROOF IN THIS PROCESS

Tuğba Yulet YILMAZ

Department of Mathematics
Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, January 2021
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Mathematical proof and reasoning as integral parts of mathematical understanding in terms of ensuring that the correctness or falsity of mathematical expressions is justified for convincing reasons have become the focus of research on mathematical education, especially in recent years. However, although the answer to questions about why proof practices should be included in schools and what the purpose of proof is hidden in functions of proof, there is no consensus on how these functions should be handled in the classroom environment. The aim of this study is to examine the proving process of 7th-grade students and to determine the functions of proof emerging in this process. This study, which was designed as a teaching experiment, was carried out with 12-week classroom practices conducted in the form of small group and classroom discussions and 6 students from this class were determined as a focus to examine their reasoning styles. In the study; pre and post tests, recordings of pre, during and final clinical interviews with focus students, video and audio recordings of teaching lessons and worksheets were used as data sources. The findings of this study showed that classwork based on social interaction positively affected students' proving processes, strengthening their deductive reasoning. However, it has been observed that there is a relationship between the functions of proof and social and socio-mathematical norms in both small group and class discussions.

Key Words: Mathematical reasoning, Proof, Functions of proof, Social and socio-mathematical norms.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın gerçekleştirilmesi sürecinde birçok kişinin emeği ve katkısı bulunmaktadır. Öncelikle hem yüksek lisans hem de doktora öğrenimim boyunca engin bilgisinden faydalandığım, hem akademik hem manevi anlamda üzerimde büyük emeği olan tez danışmanım Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE'ye tezimin her aşamasında bana yol gösterdiği, bilgi ve tecrübesini paylaştığı ve rehber olduğu için tüm kalbimle saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesinde yer alarak, tez izleme sürecim boyunca değerli görüş ve önerileriyle tezime katkıda bulunan ve ihtiyaç duyduğumda bana fikirleriyle yön veren değerli hocalarım Prof. Dr. Dilek TANIŞLI ve Dr. Öğr. Üyesi E. Aysın ŞENEL'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tezimi savunma sürecinde yer alan, zaman ayıran ve değerli görüşleri ile doktora tezime katkı sağlayan çok değerli hocalarım Prof. Dr. Kürşat YENİLMEZ ve Prof. Dr. Zülbiye TOLUK UÇAR'a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Emeklerini hiçbir şekilde ödeyemeyeceğim değerli annem ve babam Sevim ve Müfit AKARSU'ya, varlıklarından güç aldığım sevgili kardeşlerim Begüm ve Şeyma AKARSU'ya, araştırmam boyunca her türlü desteğiyle yanımda olan sevgili eşim Mahir Leysan YILMAZ'a gösterdikleri sabır ve destekten dolayı teşekkürlerimi sunarım. Hazırladığım bu tezi bu süreçte kendisine yeterince zaman ayıramadığım, bu dünyadaki varlığıyla en büyük destekçim olan sevgili miniğim Ali İsmail YILMAZ'a armağan ediyorum.

Eskişehir, 2021

Tuğba Yulet YILMAZ

18/01/2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgilere ilişkin kayank gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

TuğbaYulet YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

<u>**Sayfa**</u>

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

ABİDE : Akademik Becerilerin İzlenmesi ve Değerlendirilmesi

CCSSI : Common Core State Standards Initiative

KARİDE : Kanıt Öğrenme Modeli

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

PISA : Programme for International Student Assesment

TDK : Türk Dil Kurumu

1. GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumuna, araştırmanın amacına, araştırmanın önemine, araştırmanın sınırlılıklarına ve araştırmadaki tanımlara yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Bilgi ve teknoloji toplumlarının ihtiyaçlarına yanıt verebilecek nitelikte, üst düzey bilişsel becerileri gelişmiş, bilimsel okuryazarlık becerilerine sahip olan, hem sorgulama hem de ikna yeteneği güçlü bireylerin yetişebilmesi, eğitimin her kademesinde geleneksel anlayışın dışına çıkılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu zorunluluk matematik öğretiminde de farklı yöntemlerin kullanılmasını, farklı öğrenme ortamlarının oluşturulmasını beraberinde getirmektedir. Nitekim öğrencilerin merak duygularının desteklendiği, kendi deneyimleri ile öğrendikleri, işbirliği yaparak problemler çözdükleri, tartışarak kendi argümanlarının doğruluğuna arkadaşlarını ikna ettikleri sınıf ortamları oluşturmak, günümüz eğitim anlayışının gerekleri arasında yerini almaktadır.

Kanıt; öğrencilerin muhakeme, eleştirel düşünme, iletişim kurma, matematiksel düşünmelerini doğrulamada kendilerine güven geliştirme, bir ifadeyi matematiksel ifadeye dönüştürebilme, matematiksel dili kullanabilme yani tam anlamıyla matematik yapma becerilerini desteklemektedir. Bu özellikler Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) tarafından ortaya konulan ve matematik eğitiminin temel amaçları arasında sıralanan matematiksel okuryazarlık becerisinin öğrencilere kazandırılması için gerekli özellikler iken bu araştırmada ortaya çıkarılması hedeflenen kanıt işlevleri ile de ilişkilidir.

NCTM (2000), beş temel süreç standardından biri olarak belirlediği muhakeme ve kanıt becerilerini; genellemeler hakkında varsayım oluşturabilme, bu varsayımları ve iddiaları değerlendirebilme, iddiaları formüle ederek tümdengelimsel ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilme olarak betimlemektedir. Bununla birlikte Matematikte Ortak Çekirdek Eyalet Standartlarında (Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010) problemleri çözmenin, argümanlar oluşturmanın, muhakeme ve iletişim kurmanın önemi vurgulanırken, matematik öğretmenlerinin her sınıf düzeyindeki öğrencide geliştirmeleri gereken çeşitli yetkinlikler de tanımlanmaktadır. Bu yetkinliklerden ilki öğrencilerin verilen problemi anlamaları ve çözmeye çalışmalarıdır. Öğrencilerin çözümün şekli ve anlamı hakkında varsayımlar üretmeleri ve bir çözüm yolu planlamaları belirtilir. Bu yetkinliklerden bir diğerinin muhakeme yapma, geçerli argümanlar oluşturma ve başkalarının muhakemesini eleştirme olduğu belirtilmektedir. Bu yetkinliklere sahip öğrenciler; varsayımları, tanımları ve argümanları oluştururken daha önce oluşturulmuş sonuçları anlar ve kullanır, varsayımlarda bulunabilir ve varsayımlarının doğruluğunu araştırmak için mantıklı ifadeler geliştirebilir, durumları parçalara ayırarak analiz edebilir, aksine örnekleri ayırt edebilir ve kullanabilir, sonuçlarının doğruluğunu başkalarına göstererek paylaşabilir ve başkalarının argümanlarına yanıt verebilirler. Matematiksel açıdan yetkin öğrenciler iki argümanın etkililiğini karşılaştırabilir, mantıksal açıdan doğru olanı, mantığı kusurlu olandan ayırt edebilir ve argümanda bir kusur varsa bunun ne olduğunu açıklayabilirler. Bu öğrenciler, başkalarıyla iletişim kurmaya, tartışmalarında ve kendi muhakemelerinde açık tanımlamalar kullanmaya çalışırlar. CCSSI (2010), matematiksel anlamda yetkin öğrencilerin sahip olduğu becerileri vurgularken matematiksel muhakeme, kanıt ve argüman oluşturmanın öğrenme-öğretme süreciyle nasıl bütünleştirilebileceğinin ipuçlarını vermekte ve bu ipuçları da bu araştırmaya yol göstermektedir.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme for International Student Assesment [PISA]) 2018 Türkiye ön raporunda, eğitimdeki uluslararası izleme araştırmalarının ülkelerin durumlarını görmeleri ve diğer ülkelerinki ile karşılaştırabilmelerine imkân tanıdığını belirterek, ülkelerin araştırma sonuçlarının eğitimde yapacakları iyileştirmelerde ve politika oluşturmada bir araç olarak kullanıldığını vurgulamaktadır. Bu rapora göre, Türkiye’nin matematik okuryazarlığı alanındaki performansının (79 ülke arasında 42. Sırada) 2015 yılına göre daha yüksek olduğu; ancak istenen düzeyde olmadığı görülmektedir (MEB PISA Raporu, 2019). MEB, PISA matematik okuryazarlığı alanında başarılı olabilmek için öğrencilerin muhakeme becerilerini, olayları açıklamak ve tahmin etmek için matematiksel kavramları, işlemleri kullanabilmeleri gerektiğini, bu sınavların öğrencilerin bildiklerinden ne kadar anlam çıkarabildiklerini ve yeni durumlarda matematik bilgilerini ne kadar iyi kullanabildiklerini ölçmeyi hedeflediklerini belirtmektedir (MEB PISA Raporu, 2019). Bununla birlikte bu raporda matematiksel süreçlerin temelini oluşturan matematiksel becerilerin arasında muhakeme ve kanıt, iletişim ve problem çözme süreçlerinin olduğu da görülmektedir.

Uluslararası izleme ve değerlendirme çalışmalarıyla beraber Türkiye’deki eğitim sistemini izleyip değerlendirebilmek için 2014 yılından itibaren milli bir sistem geliştirilmesi plânlanmış, 2016 yılında Akademik Becerilerin İzlenmesi ve

Değerlendirilmesi [ABİDE] çalışmasının ilk uygulaması yapılmıştır. Bu çalışmada matematik testi için öğrencilerin % 60'ının temelaltı ve temel düzeyde, yaklaşık % 29'unun orta düzeyde, yaklaşık % 11'inin ise ortaüstü ve ileri düzeyde yer aldığı görülmektedir (MEB ABİDE Raporu, 2017). Matematik testine ait yeterlik düzeyleri ve tanımları incelediğinde ortaüstü düzeydeki beceri içeriklerinin içinde, birden fazla çözüm yolu içeren, muhakeme yapmayı gerektiren problemlerde gerekli işlemleri yapabilme, kendi yorum ve muhakemesine bağlı olarak elde ettiği çıkarımlar arasında ilişki kurabilme becerisi yer almaktadır. İleri düzeydeki beceri içeriklerinin içinde ise bir çözümün, çıkarımın ya da stratejinin doğruluğunu ve geçerliliğini savunmak için matematiksel argümanlar üretebilme becerisi yer almaktadır. Bu nedenle ulusal sınavlarda başarıyı arttırmak için bu becerilerin geliştirilmesinin önemli olduğu düşünülmektedir (MEB ABİDE Raporu, 2017). Nitekim bu raporların sonuçları ve raporlarda sunulan beceri içerikleri bu araştırmada oluşturulan öğrenme ortamına yol göstermektedir.

Çeşitli eğitim politikaları belgeleri gibi (NCTM, 2000; CCSSI, 2010) pek çok matematikçi ve matematik eğitimcisi de muhakeme ve kanıt yapmanın önemini vurgulamaktadır. Örneğin Laborde (2000), matematiksel kanıtlar üretmenin muhakeme becerilerini geliştirdiğini ve öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmek için kanıtın bir araç olarak kullanabileceğini belirtirken, kanıt yapma sürecinde varsayımda bulunma, kanıt için bir strateji geliştirme, keşfetme ve genelleme becerilerini kullanabilmek için de muhakemenin bir araç olarak kullanılabileceğini vurgulamaktadır. Kanıtın matematik için bu denli önemli olmasının nedenleri arasında kanıt kavramının tek başına bir kavram olmasından ziyade matematiğin diğer tüm bağlamlarına uyan evrensel bir kavram olmasından kaynaklandığı belirtilmektedir (Knuth and Elliot, 1998; Stylianou vd., 2009). Balacheff (1991), matematiksel kanıt öğretme probleminin, kanıtın matematiksel bilginin kendisinin öğretilmesinden neredeyse bağımsız olarak ele alınması olduğunu belirtmekte, kanıtı matematiğin merkezine almak yerine tek başına bir konu olarak öğretilmesini eleştirmektedir. Oysaki kanıtın matematik eğitimine yaptığı en önemli katkılardan biri de matematik öğretim programında konular arasındaki ilişkileri vurgulamasıdır. Öğrencilere devamlı yeni bilgiler sunmak yerine öğrencilerin kanıt yaparak bu bilgiye erişmelerini sağlamak, öğrencilerin matematiği bir dizi ayrık konudan ziyade bir bütün olarak görmelerine yardımcı olmaktadır. Öğrencilerin matematiği, yeni bir ifadenin daha önce kanıtlanmış gerçeklerle gerekçelendirilebildiği bir disiplin olarak görmeleri, hem matematik okuryazarı olmaları hem de bir matematikçi gibi hissetmelerini sağlamak bakımından son derece önemlidir (Waring, 2001). Bütün matematiksel kavramların anlamlı bir şekilde öğrenilebilmesi için farklı eğitim kademelerinin programları arasında bir bağlantının olması gerekirken, özellikle ilköğretimden ortaöğretime geçen öğrencilerin kanıt öğrenirken çok fazla zorluk yaşadıkları, bunun nedeninin ise ilköğretim düzeyinde kanıt etkinlikleriyle yeterince karşılaşmamış olmalarından kaynaklı olduğu bildirilmektedir (Coe and Ruthven, 1994; Harel and Sowder, 1998).

Matematiğin merkezinde yer alan kanıtın neredeyse tüm düzeydeki öğrenciler tarafından zor olarak görüldüğü, öğrencilerin neyin kanıt sayılıp neyin sayılmayacağını ayırt edemedikleri, kanıta karşı önyargılarının olduğu birçok araştırma tarafından ortaya konulmuştur (Bieda and Lepak, 2014; Harel and Sowder, 1998; Mejia-Ramos and Inglis, 2009). Çoğu programın ve araştırmacının kanıt uygulamalarının anaokulundan başlaması gerektiğine vurgu yapmasına karşın, ortaokullarda matematik derslerinde öğrencilere varsayımda bulunma ve kanıt yapma fırsatları sunulmadığından, öğrencilerin kanıt sürecinde başarısız olmaları şaşırtıcı değildir (Boyle, 2012). Öğrencilerin kanıt yaparken zorluk çekmelerinin nedeninin çoğunlukla düşük başarı düzeyinden kaynaklanmadığını, kanıtın anlamını, amacını ve gerekliliğini göremedikleri için kanıta duyulan ihtiyacı algılayamamalarından kaynakladığını, bu motivasyon eksikliği ile öğrencilerin çoğunlukla dışsal kaynaklara bağlı olarak gerekçelendirme yaptıklarını belirten pek çok araştırmacı vardır (Balacheff, 1988; De Villiers, 1999; Subramanian, 2005). Bu araştırmalarda pek çok öğrencinin kanıtı sadece doğrulama amacı ile ya da öğretmenlerin isteği üzerine yaptığı belirtilmektedir. Matematik eğitimcileri, kanıtın okul matematiği ile bütünleştirilmesi gerektiği konusunda hem fikir olmalarına karşın, sınıfta kanıtın rolünün ne olduğu konusunda hala yanıtlanmamış birçok soru bulunmaktadır (Bartlo, 2013). Bununla birlikte kanıtın matematiksel bir ifadenin doğruluğuna bir topluluğu ikna edebilmek için kullanıldığı, ikna edici olabilmesi için kanıtın sunulduğu matematik topluluğun normlarına uygun olması gerektiği ve matematik tarihinde bu normların zamana ve kültüre bağlı olarak değiştiği gözlemlenmiştir (Zaslavsky vd., 2012). Bu durum matematik sınıfları bağlamında ele alındığında bir iddianın doğruluğunun onaylanabilmesi için yapılan kanıtın, sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normlarına uygun olması gerekmekte bununla birlikte zaman içinde kanıt bu normları değiştirmekte ve şekillendirmektedir. Tam da bu nedenlerden dolayı bu araştırmada Mason vd.'nin (2010, s. 87) kanıtlama süreci aşamalarından uyarlanarak sınıfta kanıt uygulamalarında kullanılan ve sosyo-matematiksel normlarla desteklenen yeni bir model oluşturulmuş ve bu model Kanıt Öğrenme Modeli [KARİDE] olarak adlandırılmıştır. KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında kanıt sosyal bir süreç olarak ele alınmış ve bu süreç içinde öğrencilerin kendileri için yeni olan problem durumlarıyla karşılaşmaları, bu problemlerin doğruluğunu araştırmaları, problemleri çözerken yaptıklarını ve söylediklerini devamlı gerekçelendirmeleri, buldukları sonuçların nedenlerini kendilerinin keşfetmeleri, matematiksel dili kullanarak birbirleriyle iletişim halinde olmaları ve tüm bu işlemleri belirli bir sistematik içinde yapmaları hedeflenmiştir. Aynı zamanda bu ortamda tartışmalardaki düzenliliği sağlama, matematiksel fikirleri destekleme, çürütme ve gerekçelendirmeyi sağlama, bu sınıfta geçerli kabul edilecek kanıt çerçevesinin sınırlarını oluşturma gibi pek çok nedenden ötürü sosyal ve sosyo-matematiksel normların geliştirilmesi planlanmıştır. Bu araştırmada KARİDE modeline göre oluşturulan öğrenme ortamında öğrencilerin muhakemelerinin incelenmesi, öğrencilerin kanıtın farklı anlam ve amaçlarının olduğunu görebilmeleri, kanıtın matematikte oynadığı rolü yani kanıtın işlevlerini anlamaları ve deneyimlemeleri hedeflenmiştir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın genel amacı, öğrencilerin çeşitli problem durumlarını analiz ettikleri, varsayımlar geliştirdikleri, muhakeme yöntemlerini kullanarak yaptıkları genellemeler sonucunda ürettikleri kanıtlarını savunup tartışabildikleri sosyal etkileşimin üst düzeyde olduğu bir sınıf ortamında öğrencilerin kanıtlama süreçlerini incelemek, bu süreçte kullandıkları muhakeme biçimlerini ve ortaya çıkan kanıt işlevlerini belirlemektir. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranmıştır:

- Öğrencilerin ön ve son testlerde kanıt sürecindeki muhakeme biçimleri nasıldır?
- Öğrencilerin ön, ara ve son klinik görüşmelerde kanıt sürecindeki muhakeme biçimleri nasıldır?
- Ön, ara ve son klinik görüşmelerde ortaya çıkan kanıt işlevleri nelerdir?

- Öğrencilerin kanıt deneyimi yaşadığı öğrenme ortamında muhakeme biçimleri nasıldır?
- Öğrencilerin kanıt deneyimi yaşadığı öğrenme ortamında ortaya çıkan kanıt işlevleri nelerdir?
- Öğrencilerin kanıt deneyimi yaşadığı öğrenme ortamında pekiştirilen ve ortaya çıkan sosyal ve sosyo-matematiksel normlar nelerdir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Matematiksel kanıtın matematiğin kalbi, ruhu, özü gibi benzetimlerle ele alınması (Ross, 1998; Schoenfeld, 2009; Tsamir vd., 2009) hiç şüphesiz kanıtın matematik yapma ve matematiksel anlamada oynadığı kritik role vurgu yapmaktadır (Knuth, 2002; Stylianides, 2007b).

Matematik sayılarla olan ilişkisi nedeniyle nicel bir bilim olarak görülmesine karşın tümdengelimsel muhakemeyle diğer nicel bilimlerden ayrılmaktadır. Hatta Duval (1995), yalnızca tümdengelimsel muhakemenin matematiksel olarak kabul edileceğini belirtmektedir (Jeannotte and Kieran, 2017). Sisteme eklenmesi önerilen yeni bir matematiksel bilginin, tümdengelimsel muhakeme ile kontrol edilerek tutarlılığı sağlamak için kanıtlama sürecinden geçmesi durumu, kanıtı matematiğin merkezine yerleştiren özelliklerden biridir (Bayazit, 2009). Çünkü matematik biliminin en önemli özelliklerinden biri, bu bilime dâhil olan bütün matematiksel nesnelerin, kendinden önce sisteme eklenenlerle ve kendinden sonra eklenecek olanlarla tutarlı bir bütün oluşturmasıdır. Matematiksel kanıtın sağladığı bu evrensel tutarlılık sayesinde matematik dili, farklı dillerde konuşan insanların aynı şeyleri anlayabileceği bir dil haline gelmiştir. Hanna ve Jahnke (1996), matematik bilimi içinde kanıtın muhakeme, gerekçelendirme ve genellemenin özel bir hali olarak öğretilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Reid ve Knipping (2010), öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme becerilerinin geliştirilmesinin kanıt öğretiminin temel amacı olarak düşünüldüğünü ve tümdengelimsel muhakemenin kanıt için bir gereklilik olduğunu belirtmektedirler. Brodie (2010) ise, gerekçelendirmenin matematiksel muhakemenin temel uygulama alanı olduğunu, Kilpatrick, Swafford ve Findell (2001, s. 116) da öğrencilerin kavramsal anlamalarının ve muhakeme becerilerinin gelişebilmesi için fikirlerini gerekçelendirmeleri ve açıklayabilmelerinin gerekli olduğunu savunmaktadırlar. Turğut, Yenilmez ve Uygan (2013), matematiksel kanıt süreçlerinin, öğrencilerin bir problem durumunu analiz etmesine, gözlenen verileri ilişkilendirerek varsayım geliştirmesine ve bu varsayımları test etmesine olanak verdiği için hem mantıksal düşünme adımlarının hem de yansıtıcı düşünmenin etkin bir biçimde gerçeklemesini sağladığını belirtmektedirler. Farklı araştırmacıların bakış açıları birleştirildiğinde kanıtın, matematiksel muhakemenin önemli ve gerekli bir parçası olduğu söylenebilir.

Matematik eğitimi araştırmalarında, öğrencilerin ileri düzey matematiksel kavramlarda gelişim gösterebilmeleri için ve özellikle de kendi kanıtlarını oluşturabilmeleri için mantıksal becerilerini geliştirmeleri gerektiği ifade edilmektedir (Savic, 2012, s. 4).

Öğrencilerin daha önce başkaları tarafından bulunup onlara sunulan matematiği pasif alıcı olarak almalarındansa, okullarda matematiksel kanıt sayesinde uğraşarak çıkarımlarda bulunabilecekleri ve böylece matematiğe karşı olumlu tutum geliştirebilecekleri bir ortam hazırlanabilir. Zaslavsky vd., (2012), okullarda öğretilen kanıt ile öğrencilerin matematikçilerinkine benzer muhakeme deneyimi yaşamalarını, matematiksel bilginin doğasını ve matematikteki sonuçların nedenlerini anlamalarını, aynı zamanda mantıksal düşünme süreçlerini öğrenmelerini, iletişim becerisi kazanmalarını ve gizil bir biçimde de olsa problem çözme süreçlerini öğrenmeleri gerektiğini belirtmektedirler. Bu anlamda kanıt, öğrencilerin matematiği doğru, etkili ve faydalı bir şekilde kullanmalarını, matematiğin tarihsel gelişim sürecini, matematiğin gelişimine katkı sağlayan bilim insanlarını, bu bilim insanlarının çalışmalarını tanımalarını ve bu sayede matematiğe değer vermelerini sağlarken aynı zamanda problemlere farklı açılardan bakarak problem çözme becerilerinin gelişmesine de yardımcı olmaktadır. Bu araştırmada öğrencilerin problem durumları üzerinden kendi varsayımlarını oluşturmalarına, ilk keşif heyecanını yaşamalarına, özelde kanıta genelde matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmelerine olanak sağlayan bir ortam oluşturulmaya çalışılmıştır.

Kanıt, matematiksel düşünmenin temel bileşenleri olan varsayımda bulunma, keşfetme, ilişkilendirme, genelleme, açıklama, iletişim, tümevarımsal-tümdengelimsel muhakeme, formel ve informel muhakeme gibi üst düzey matematiksel etkinlikleri de içinde barındırmaktadır (Liu, 2003). Bu çalışmada öğrencilerin muhakeme becerilerini kullanarak kanıtlama deneyimi yaşamalarına özen gösterilmesinin yanında, KARİDE modeli çerçevesinde bu deneyimlerini grup ve sınıf tartışmalarıyla, sosyal etkileşimin üst seviyede olduğu sosyal bir ortamda yaşamalarına da özen gösterilmiştir. Çünkü

Gholamazad (2005), öğrencilerin kanıt yapamama nedenleri arasında kanıtın sosyal yönünün ihmal edilmesi olduğunu belirtmekte, öğrencilerin yaptıkları kanıtların kendileri için ikna edici olmasının yanında, bu kanıtı başka bir kişi okuduğu zaman bu kişi için de ikna edici olması gerektiğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte Healy ve Hoyles (2000), matematik eğitiminin temel amaçlarından birinin öğrencileri matematiksel tartışma ve kanıtlama sürecine dâhil etmek olduğunu belirtmektedirler. Bu nedenle KARİDE modeli oluşturulurken öğrencilerin tartışmalarına önem verilmiş, hem grup içinde birbirlerini ikna etmeleri hem de sınıf tartışmalarında farklı grupların birbirlerini ikna etmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin birlikte çalışarak problemlerle uğraşmalarını, birbirlerinin varsayımlarını değerlendirmelerini, birbirlerini kendi oluşturdukları argümanlarla ikna etmeye çalışmalarını, birbirleriyle sürekli etkileşim halinde olmalarını sağlayan sosyal etkileşime dayalı sınıf ortamı yaratmada kanıtın altın madeni olduğu düşünülmektedir. Bu görüşü destekleyen pek çok araştırma da mevcuttur (Selden and Selden, 2009; Weber and Alcock, 2004).

Kanıt yapma uzun yıllar boyunca sadece lise ve üniversite düzeyindeki öğrencilerin muhakemeleri ile ilişkilendirilmiştir. Ancak küçük çocuklarda görülen doğrulama yapma, başkalarını kendi çözümüne ikna etme, başkalarının varsayımlarını çürütme eylemlerinin, ileri düzeyde muhakemenin sonucu olduğuna dair göstergeler, küçük çocukların da kanıt yapabileceği fikrini matematik eğitiminin gündemine sokmuş, küçük çocukların da kanıtı anlayabileceği pek çok araştırmacı tarafından belirtilmiştir (Lampert, 1990; Maher and Martino, 1996; Stylianides, 2007a; Yackel and Hanna, 2003). Ancak ne yazık ki ilkokulda ve ortaokulda öğretim, aritmetiksel kavramlara, hesaplamalara ve algoritmalara çok fazla yer vermekte, kanıt ihmal edilmektedir. Bununla birlikte bu öğrencilerden ortaöğretime ve üniversiteye başladıklarında, aniden kanıtları anlamaları, yazmaları, bu matematiksel dile alışmaları beklenmektedir. Birçok araştırmacı yaptıkları araştırmalarda bu öğretim şeklinin birçok ülkede yaygın olduğunu gösteren bulgular bulmuşlardır (Ball vd., 2002; Uhlig, 2002; Weist, 2015). Ayrıca bazı araştırmacılar kanıt kavramının okul matematiğinde, matematiksel aktivitelerden uzak sadece formel bir süreç anlayışıyla sunulmasının öğrencilerin matematik yapmalarının önünde engel olacağını belirtmişlerdir (Leron, 1983; Movshovitz-Hadar, 1988; Stylianides and Stylianides, 2006; Volmik, 1988). Bu durumu destekleyen De Villiers (1990), farklı düzeylerdeki öğrencilerin algılama ve bilişsel düzeyleri farklı olacağından kanıtın her düzeye uygun olarak öğretilmesine vurgu yapmaktadır. Bu nedenle bu araştırmada kanıt ortaokul öğrencilerinin düzeyine uygun olan; ancak matematik biliminin gerekleri ile çelişmeyen, sınıf topluluğu tarafından kabul edilen ifadelerin, sınıfın ulaşabileceği muhakeme biçimlerinin, sınıfın düzeyine uygun argüman temsil şekillerinin kullanıldığı, öğrenciler tarafından yapılan geçerli ve ikna edici olan tüm argümanlar olarak kabul görmüştür.

Öğretmen adaylarının, öğretmenlerin ve farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin kanıt şemalarını, kanıt düzeylerini, bir sınıf topluluğunun kanıtları şekillendirme ve onaylamadaki rolünü ortaya koyan çok sayıda araştırma yapılmıştır (Almeida, 2000; Balacheff, 1988; De Villiers, 1990; Harel and Sowder, 1998; Knuth, 2002; Stylianides, 2007a; 2007b; Stylianides and Ball, 2008; Waring, 2001; Weber, 2004a). Ayrıca farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin kanıt yaparken yaşadıkları zorlukları ortaya koyan pek çok araştırma yapılmıştır (Chazan, 1993; Harel and Sowder, 1998; Moore, 1994; Weber, 2002). Matematik eğitiminde kanıtın işlevlerini farklı şekillerde sınıflandırarak ya da farklı isimlerle ele alarak bir teorik yapı oluşturan araştırmacılarla beraber (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000), bu işlevlerle öğrencilerin kanıta yükledikleri anlamı ilişkilendiren, kanıtın işlevlerine yönelik inançlarının neler olduğunu ortaya koyan araştırmalar da mevcuttur (Cilli-Turner, 2017; Stylianou, Blanton and Rotou 2015). Ancak ortaokul öğrencilerinin kanıtlama süreçlerinde ortaya çıkan kanıt işlevlerini ve bu işlevlerle ilişkili olduğu düşünülen normları belirlemeye yönelik bir araştırmaya rastlanmamıştır. Oysaki Harel ve Sowder (1998) okullarda genellikle öğrenciler için kanıtın ne anlama geldiğine, öğrencilerin zihnindeki matematiksel doğrulamanın nasıl olduğuna ve öğrencilerin kanıt yaparken hangi davranışları sergilediklerine önem verilmediğini savunmaktadırlar. Aynı zamanda farklı araştırmacıların öğrencilerin kanıtı anlamaları için öncelikle çeşitli işlevlerini anlamaları, kanıtın öğretmenlerin sınıflarında öğrencileriyle işlevini, önemini, sınırlarını tartışmaları gerektiği ve matematiksel anlamayı desteklemesi nedeniyle öncelikli olarak matematik eğitiminde kanıt kullanmanın en etkili yollarını bulmak gerektiğini belirttikleri görülmektedir (De Villiers, 1990; Hanna, 2000). Kanıtın matematik biliminde oynadığı rolün matematik sınıflarına da yansıması böylece kanıtın matematik sınıflarında daha anlamlı bir etkinlik olabilmesi için kanıt işlevlerinin kullanılması görüşünü destekleyen pek çok araştırmacı mevcuttur (Hanna, 1995; Knuth, 2002). Bu araştırmanın hem matematik alanına hem de ortaokul matematik sınıflarında kanıtın işlevlerinin nasıl ele alınacağını göstermesi bakımından matematik programlarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma 2019-2020 eğitim öğretim yılı, Eskişehir ili merkezinde bulunan bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencilerden elde edilen nitel veriler ile sınırlıdır. Bununla birlikte araştırma 7. sınıf öğrencilerinin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan doğrudan kanıt, aksine örnek vererek kanıt, tüketerek kanıt ve varlık kanıtları ile sınırlıdır.

1.5. Tanımlar

Aksiyom: Doğru olduğu kanıtlanmadan kabul edilen, başlangıçta doğru olduğu varsayılan önermelerdir (Karaçay, 2009).

Argüman: Başkalarını bir iddianın geçerliliği hakkında ikna etmek amacıyla yapılan açıklama dizisidir (Bieda and Lepak, 2014). Bir kişinin, bir şeyin doğru ya da gerçek olduğunu göstermek için kullandığı sebep ya da sebeplerdir (Oxford advenced learner's dictionary, 2010).

Argümantasyon: Bir fikir ayrılığını çözmeyi amaçlayan konuşmaların bütünü, bir iddianın kabul edilmesi ya da reddedilmesi için yapılan sosyal ve sözel mantık faaliyetidir (Van Eemeren and Grootendorst, 1999). Bir teoriyi, eylemi, düşünceyi desteklemek için kullanılan mantıksal argümanlardır (Oxford advenced learner's dictionary, 2010).

Sınıf mikrokültürü: Sınıf içindeki müşterek davranış ve etkileşim desenleri, bilişsel yapılar ve bu sosyal bağlam içinde öğrenilen duyuşsal kavrayışlardır (Toluk-Uçar, 2016).

Önerme: Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren ifadelerdir (Karaçay, 2009).

Problem: Ne yapılacağının hemen kestirilemediği, cevaplanması zor ya da sonucu belirsiz sorulardır (Altun, 2012).

Teorem: Kanıtlanabilen bilimsel önermelerdir (Karaçay, 2009).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

Düşünme insanoğlunun çevresini anlamak ve çevresini kontrol altına almak için kullandığı bir problem çözme etkinliğidir (Burton, 1984). Matematiğin her şeyden önce bir düşünme yolu olması matematik bilimi ile düşünme arasında köprü kurulmasını sağlamaktadır. Matematik formel düşünme kültürü olarak; bir tür zihinsel aktivite olarak; varsayımları, kanıtları ve reddetmeyi içeren bir sosyal yapı olarak; farklılıklar, benzerlikler örüntülerle ilişkili olan sayıların, imajların ve nesnelerin somut ve zihinsel temsili olarak görülmektedir (Bayazit, 2009). Yıldırım (1996) matematiği; sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama bilimi olarak tanımlamıştır.

Henderson vd. (2003) matematiksel düşünmeyi; matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin problemlerin çözümünde doğrudan ya da dolaylı olarak uygulanması olarak tanımlamaktadır. Bununla birlikte Mubark (2011), matematiksel düşünmenin soyutlama, çıkarım yapma, mantıksal analiz, muhakeme, örüntü arama, matematiksel kanıtlama, genelleme bileşenlerini kapsadığını belirtmektedir. Liu (2003) ise matematiksel düşünmenin tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formal ve informal muhakeme, doğrulama gibi karmaşık süreçlerin birleşim kümesi olduğunu belirtmektedir. Burton (1984) matematiksel düşünme sürecinin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ile doğrulama ve ikna etme bileşenlerini kapsadığını belirtmektedir. Bununla birlikte Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse (2020), matematiksel düşünme ve matematiksel muhakemenin iç içe geçtiğini, matematiksel muhakemenin matematiksel kavramların, yapıların, ilişkilerin ve bunlara dayalı sonuçların sentezlenmesinde kilit taşı olduğunu belirtmektedirler. Matematiksel muhakeme ve kanıt matematiksel kavramların birbirleri ile olan ilişkilerinin fark edilmesini ve bu sayede önceki bilgiler üzerine yeni bilgilerin inşa edilmesini sağladığı için, matematiksel kavramaların anlam kazanması ve matematiksel düşünmenin gerçekleşmesi bakımından son derece önemlidir (De Villiers, 1990; Flores, 2002).

2.1. Matematiksel Muhakeme

Matematiğin kendine özgü yapısından kaynaklı olarak gerçeklere bir takım deneylerle değil muhakeme ile ulaşıldığı söylenebilir. Ball ve Bass (2003), matematiği anlama, kullanma ve matematiksel bilginin yeniden oluşturulması için muhakeme yapılması gerektiğine vurgu yapmaktadır. Matematiksel muhakeme matematik eğitiminde çok yaygın olarak kullanılan bir terim olmasına karşın, kesin bir tanımı olmamakla beraber *düşünmek* ile eş değerde görülmekte ve öğrencilerin çeşitli düşünme ve anlam verme süreçlerine dâhil olmaları ile açıklanmaktadır (Lithner, 2008; Mata-Pereira and Pedro da Ponte, 2017). Brodie'ye (2010) göre bir problemi çözme, kendini ya da bir başkasını bir iddianın doğruluğuna ikna etme, birbirinden farklıymış gibi görünen bir takım fikirleri tutarlı bir bütüne dönüştürme gibi çeşitli amaçlara hizmet etmek için geliştirilen birbiriyle ilişkili düşünme yolları ya da argümanlardır. Matematiksel muhakeme, matematiğin nesneleri ile ilgili muhakeme, yani eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü semboller, tanımlar, ilişkiler gibi araçlarını ve tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme gibi düşünme tekniklerini kullanarak yeni bilgiler elde etme sürecidir (Brodie, 2010; MEB, 2013). Özellikle matematik sınıflarında öğrencilerin matematiksel muhakeme yapmaları ve muhakemelerinin gelişimi çeşitli program ve belgeler tarafından önerilse de (CCSSI, 2010; MEB, 2013; NCTM, 2000) matematiksel muhakemenin tanımı, bileşenleri ve nasıl geliştirilmesi gerektiği üzerinde çok farklı görüşler bulunmaktadır. Bazı araştırmacılar matematiksel muhakemenin yapısal yönüne vurgu yaparken, bazı araştırmacılar matematiksel muhakeme sürecindeki eylemlere vurgu yapmakta, bazıları ise bu iki yönü birlikte ele almaktadırlar (Jeannotte and Kieran, 2017). Matematiksel muhakemenin yapısal yönü, muhakeme yaparken ortaya çıkan argümanların yapısı ve bunların birbirleriyle ilişkisini açıklamanın bir yolu olarak görülebilir (Jeannotte and Kieran, 2017). Matematiksel muhakemenin yapısal yönüne vurgu yapan Reid ve Knipping (2010), muhakeme türlerini; tümdengelimsel (deductive), tümevarımsal (inductive), geri çıkarımsal (abductive) ve analoji ile muhakeme olmak üzere dörde ayırmakta ve muhakeme türleri arasında ayırım yapabilmek için muhakemenin kullanıldığı durumların, kuralların ve sonuçların nasıl olduğunu araştırmak gerektiğini belirtmektedirler.

Tümdengelimsel muhakeme, sonuçlara ulaşmada kesinlik içeren tek muhakeme çeşidi, bilinen bir durumdan yeni ve özel bir sonuca ulaşma sürecidir (Reid and Knipping, 2010). Bu süreçte bir ifadenin doğruluğu, doğruluğu daha önceden bilinen bir ifadeye dayanılarak savunulur (Long, De Temple and Millman, 2015). Örneğin iki tek sayının toplamının çift olduğuna ilişkin tümdengelimsel muhakeme sürecinde öğrencilerin kullandığı argümanlar aşağıdaki şekilde olabilir (Reid and Knipping, 2010):

- Bir tek sayı herhangi bir sayının iki katından bir fazladır (2n + 1 ile ifade edilen tek sayının tanımına dayalı kural).
- İki tek sayının toplamı iki çift sayının toplamı + 1+1'dir (Önceki ifadeden, 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 1 + 1).
- 2n + 2m = 2(n + m) çift sayıdır.

Tümevarımsal muhakeme, özel durumlardan genel kurallara doğru ilerleyen, bilinenlerden yola çıkarak bilinmeyen hakkında çıkarımda bulunmayı sağlayan muhakemedir (Reid and Knipping, 2010). Belirli örneklerden elde edilen bilgilere dayanarak genel bir sonuç çıkarılır. Tümevarımsal muhakeme sadece görünen şeyin doğru olduğunu gösterebilir; ancak tüm durumlar incelenmediği için varsayımın doğruluğu hakkında kesin bilgi vermeyebilir. İşte doğru görünen; ancak henüz tam anlamıyla doğruluğu gösterilememiş bu genel duruma varsayım adı verilir (Long vd., 2015). Bu muhakeme bilimsel bilgiyi oluşturmak ve düzenlemek için kullanılabilir. Örneğin 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144… gibi bir sayı dizisi verildiğinde tümevarımsal muhakeme sürecinde öğrencilerin kullandığı argümanlar aşağıdaki şekilde olabilir (Reid and Knipping, 2010):

- Bu sayıların çoğu tektir.
- Bu sayıların üçlü grupları alındığında "tek, tek, çift" örüntüsü vardır.
- Bu sayıların sonraki üçlüsü, eğer dizi genişletilirse, "tek, tek, çift" örüntüsü olacaktır.
- Dizi genişletilirse, bu sayıların tüm üçlüleri "tek, tek, çift" örüntüsü olacaktır.

İlk iki sonuçta gözlem, birkaç özel durumun ortak bir özelliği paylaşmasına dayalı olarak bir varsayımda bulunma iken üçüncü sonuç özelden özele tümevarımın bir örneği, dördüncü sonuç ise bir genellemedir. Reid ve Knipping (2010), tümevarımsal muhakeme ve tümdengelimsel muhakemenin ilişkili olduğunu belirtmektedirler. Örneğin bir örüntü verildiğinde gözlemlenen özel durumlar incelenerek varsayımda bulunulur (tümevarımsal muhakeme), daha sonra varsayım mantıksal yollarla (tümdengelimsel muhakeme) test edilir. Tümdengelimsel yolla kanıtlanan varsayım artık genelleme olur. Örneğin; 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81… karesel sayıları ele alındığında bu sayıların sırayla 4'ün katı ve 4'ün herhangi bir katının 1 fazlası olduğu düşünülebilir. Bu durumda tümevarımsal muhakeme ile tüm karesel sayılar için ya 4'ün herhangi bir katı ya da 4'ün her herhangi bir katının 1 fazlası varsayımında bulunulabilir. Bu örnek için tümevarımsal muhakeme ve tümdengelimsel muhakemeyi birlikte kullanan öğrencilerin argümanları aşağıdaki şekilde olabilir (Reid and Knipping, 2010):

- n herhangi bir tam sayı ise, n^2 ya 4' ün bir katıdır ya da 4'ün herhangi bir katından 1 fazladır.
- 4'ün katı ise $n^2= 4k$ ya da $n^2=4k+1$ $k€ Z$
- Tam kare sayılar 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49… sayıları ya 4'ün katı ya da 4'ün katından 1 fazladır.
- O zaman iki durum olabilir: n çift olabilir. Bu durumda n=2r (çift sayı tanımı)
- n tek olabilir n=2s+1 (tek sayı tanımı, tümdengelimsel muhakeme)
- Eğer $n = 2r \rightarrow n^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Bu durumda, $n^2 = 4j$ olur ($j = r^2$)
- *Eğer* $n = 2s + 1 \rightarrow n^2 = (2\ s + 1)^2 = 4s^2 + 4\ s + 1 = 4(\ s^2 + s\ ) + 1$
- $n^2 = 4k + 1$ olur ($k = s^2 + s$) olur.

Geri çıkarımsal muhakeme, tümdengelimsel muhakemenin tersidir. Başlangıç noktası şaşırtıcı bir durumun gözlemi olan geri çıkarımsal muhakemenin amacı bu şaşırtıcı durumun daha az şaşırtıcı olması için bir kural ortaya atılmasıdır. Örneğin n tane insan tokalaştığı zaman meydana gelen tokalaşma sayısı istendiğinde geri çıkarımsal muhakeme sürecinde öğrencilerin kullandığı argümanlar şu şekilde olabilir (Reid and Knipping, 2010):

- 26 kişi için tokalaşma sayısı 25 + 24 + 23 + … + 2 + 1 = 325 hesap makinasıyla toplanarak bulunabilir. Daha kısa bir yol düşünüldüğünde;
- 25 +1=26, 24+2=26, 23+3=26…13.26 – 13= 325
- 26 insan için tokalaşma sayısı olan 325'i, 26. 13 =338'den 26'nın yarısı olan 13 çıkarak bulunur.
- O zaman n kişi olduğunda $n\ .\frac{n}{2}\ -\frac{n}{2}$ olur.

Duval (1995), sadece tümdengelimsel muhakemenin matematiksel olarak kabul edileceğini belirtirken farklı araştırmacılar geri çıkarımsal muhakemenin matematiksel keşif yapmada etkili olduğunu düşünmektedir (Jeannotte and Kieran, 2017).

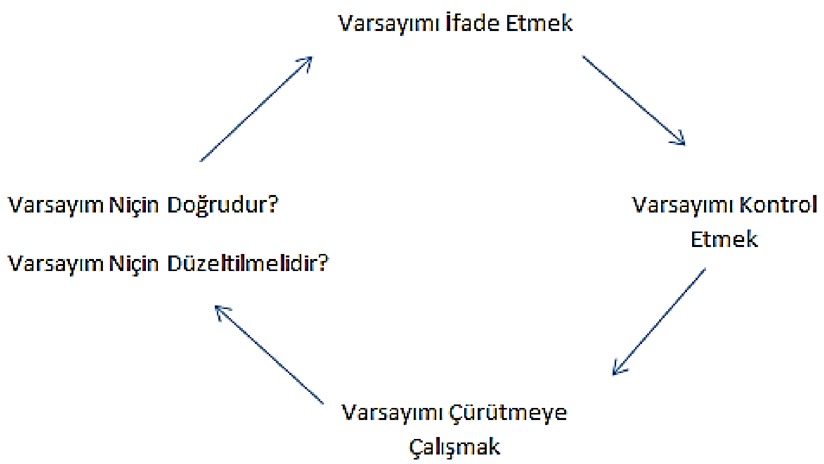
Analoji ile muhakeme, iki durum arasındaki benzerliğe dayanarak varsayımda bulunmayı, daha az bilinen bir durum hakkındaki bir şeyi iddia etmek için iyi bilinen bir durumu kullanmayı içerir. Örneğin iki tek sayının toplamının neden çift sayı olduğunu açıklamak için analoji ile muhakeme sürecinde öğrencilerin kullandığı argümanlar şu şekilde olabilir (Reid and Knipping, 2010):

- İki tek sayının toplamı çifttir.
- Çünkü negatif ve negatifin çarpımı pozitiftir.
- Birbirine benzediği için iki tek sayısın da toplamı çift olur.

Matematiksel muhakemenin yapısının anlaşılması çok önemli olmasına karşın okul matematiğinde öğrencilerin matematiksel muhakeme sürecinde ortaya çıkan eylemlerini anlamak için yapısal yönün tek başına yeterli olmadığını düşünen farklı araştırmacılar matematiksel muhakemenin süreç yönüne de vurgu yapmaktadırlar (Jeannotte and Kieran, 2017). Ayrıca yapısal yönün, matematiksel muhakemenin süreç yönünün bir parçası olduğunu, süreç yönünün ise yapıların oluşumunda gerekli olduğunu belirtmektedirler. Jeannotte ve Kieran (2017), matematiksel muhakemenin süreç yönünü "benzerlik ve farklılıkların araştırılma süreci" ile "doğrulamanın araştırılma süreci" olmak üzere iki grup şeklinde ele alırken benzerlik ve farklılıkların araştırılma sürecini genelleme yapma, düzenliliği betimleme, varsayım oluşturma, sınıflandırma ve karşılaştırma eylemlerinin oluşturduğunu belirtmektedirler. Bununla birlikte, doğrulamanın araştırılması sürecini ise gerekçelendirme ve kanıt eylemlerinin oluşturduğunu, örneklendirmenin ise her iki sürecin de eylemi olduğunu belirtmektedirler. Benzerlik ve farklılıkların araştırılma süreci ile ilişkili olan eylemler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Genelleme: Bir nesneyi içeren düşünceden aynı nesneyi içeren düşünceler dizisine ya da bir dizi düşünceden, daha karmaşık düşünceler dizisine geçiş yapmaktır (Polya, 1957). Bir grup nesnenin ortak özelliğini ifade etme süreci, belirli bir nesne kümesi için geçerli olan özellik ya da işlemin daha geniş bir nesne kümesi için de geçerli olduğunu göstermektir (Carraher, Martinez and Schliemann, 2008; Dörfler, 1991). Yıldırım (1996) da benzer şekilde genellemenin incelenen konu özelinde mevcut nesne ya da ilişkinin gözlemi sonucu oluşan ve o nesne ya da ilişkinin parçası olduğu tüm sınıf hakkında doğru olduğu düşünülen bir yargı olduğunu belirtmektedir.

Varsayımda Bulunma: Varsayım gözlemlere dayanan kanıtlanmamış durumlar olarak tanımlanırken varsayımların ortaya atıldığı ve incelendiği süreç de varsayımda bulunma süreci olarak nitelendirilebilir (Larson, Boswell and Stiff, 2001). Mason vd., (2010), varsayımı mantıklı görünen; ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış matematiksel cümleler olarak, varsayımda bulunmayı ise bir şeyin doğru olduğunu tahmin etme ya da hissetme ve bunun doğruluğunu araştırma süreci olarak tanımlamaktadırlar. Mason vd., (2010), varsayımda bulunmayı Şekil 2.1.'deki gibi döngüsel bir süreçle açıklamışlardır:



Şekil 2.1. *Varsayımda bulunma süreci (Mason vd., 2010)*

Şekil 2.1'de verilen döngüye göre doğru olduğuna inanılan varsayımlar ifade edilir. Her ne kadar doğru olduğuna inanılsa da zihinsel belirsizliği ortadan kaldırmak için bilinen pek çok durumla doğruluğu kontrol edilir. Daha sonra varsayımı çürütebilecek aksine bir örnek araştırılır, varsayımın yanlış olduğu tespit edilirse düzeltilir, düzeltilemiyorsa yeni bir varsayım ortaya atılır. Varsayımın doğru olduğuna yeterince ikna olunmuşsa, bu varsayım çözümü oluşturacak olan bir dizi varsayım arasında yerini alır (Mason vd., 2010).

Düzenliliği Betimleme: Benzerliklerin ya da farklılıkların araştırılması sonucu ortaya çıkan, matematiksel nesneler arasındaki değişmeyen özelliklerin keşfedilmesini sağlayan matematiksel muhakeme eylemlerinden biridir. Düzenliliği betimleme sürecinde bazı varsayımlar oluşturulabilir ve test edilebilir. Bu eylemler hem varsayımda bulunmada hem de genelleme sürecinde etkin rol oynamaktadır (Jeannotte and Kieran, 2017).

Karşılaştırma: Matematiksel muhakeme sürecinde ortaya çıkan matematiksel nesnelerin benzerliklerin ve farklılıkların araştırılması olan karşılaştırma örnekleme ve varsayımda bulunma ile ilişkilendirilmekte, varsayımda bulunabilmek için belirli örneklerin karşılaştırılması gerektiği savunulmaktadır. Ayrıca örüntülerin tanımlanması için durumların ya da örneklerin karşılaştırılmasının gerekli olduğu; ancak yeterli olmadığı belirtilmektedir (Jeannotte and Kieran, 2017).

Sınıflandırma: Matematiksel nesneler arasındaki benzerliklerin ve farklılıkların araştırılmasıyla ortaya çıkan, bir grup nesnenin matematiksel özellikler ve tanımlara dayalı olarak bir araya gelmesi ve ayrılmasıdır. Matematiksel muhakeme sürecinde ortaya çıkan eylemlerden biri olarak kabul edilen sınıflandırma aynı zamanda karşılaştırma, varsayımda bulunma ve genelleme ile ilişkilendirilmektedir (Jeannotte and Kieran, 2017).

Doğrulamanın araştırılma süreci ile ilişkili olan eylemler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Gerekçelendirme: Bir varsayımın doğruluğunun belirlenmesi ve bu varsayımın doğruluğunun kişinin kendini ya da bir başkasını ikna edecek nedenlerle sunulmasıdır. Bu nedenlerin daha önce kabul edilmiş kavramlara, işlemlere, matematiksel fikirlere özelliklere dayalı olması gerekir (Harel and Sowder, 1998). Gerekçelendirme kabulleri ve matematiksel muhakeme türlerini kullanarak bir iddianın doğruluğunu (ya da yanlışlığını) gösteren bir argümandır (Staples, Bartlo, and Thanheiser, 2012, s. 448). Bir şeyin doğruluğunu gösteren gerekçenin ortaya konulması bilişsel bir süreç iken başkalarını buna ikna etmeye çalışmak sosyal bir süreçtir (Liang Chua, 2017).

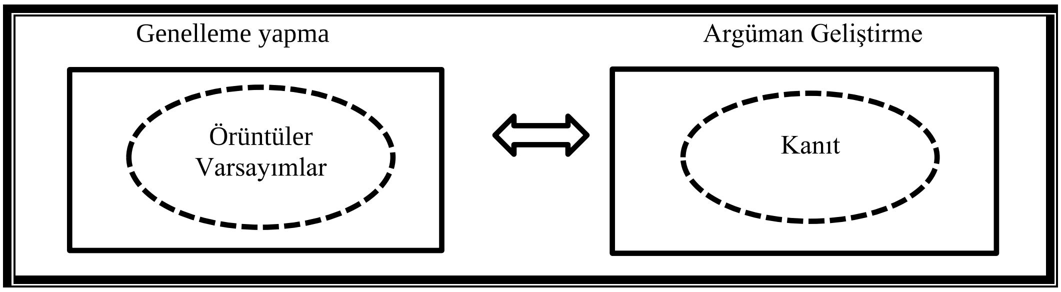
Kanıtlama: Bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüphelerden kurtulmak için kişinin kendini ya da bir başkasını ikna etme sürecidir (Harel and Sowder, 2007). Duval (1995), matematiksel muhakemeyi öğrencilerin kanıt sürecini öğrenmeleri ile eşdeğer görmektedir (Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2020).

Hem benzerlik ve farklılıkların araştırılma süreci ile hem de doğrulamanın araştırılma süreci ile ilişkili olan eylemler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Örnekleme: Matematiksel muhakeme sürecinde ortaya çıkan eylemlerden biri olan örnekleme bu süreçte ortaya çıkan diğer eylemleri de desteklemektedir. Bir problem hakkında veri elde edilmesini sağlarken, örüntülerde benzerliklerin ve farklılıkların araştırılması sürecinde kullanılır, doğrulama yapma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçlerinde de katkı sağlar (Jeannotte and Kieran, 2017).

Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse (2020), matematiksel muhakeme sürecinde ortaya çıkan bu eylemlerin matematiksel zihnin dönüşümü olarak ele alınmasının, yani öğrenenlerin varsayım oluşturma, varsayımları test etme, genelleme yapma, gerekçelendirme ve ikna etme süreçlerinin tümdengelim, tümevarım, analoji yoluyla ya da geri çıkarımsal muhakeme ile sonuçlanabileceğini belirtmektedirler. Benzer şekilde Stylianides (2010), matematikte yeni bilginin üretilmesi ve doğrulanmasında genelleme yapma ve argüman geliştirme eylemleri arasında geçişler yapılması gerektiğini belirtmekte ve bu ilişkiyi Şekil 2.2.’deki gibi göstermektedir:

Muhakeme ve Kanıt



Şekil 2.2. *Matematikte yeni bilginin üretilmesi ve doğrulanması (Stylianides, 2010)*

Şekil 2.2'de görüldüğü gibi Stylianides (2010), bu geçişler esnasında matematikçilerin önemli gerçekleri anlamlı örüntüler şeklinde düzenlediğini, daha sonra bu örüntüleri varsayımda bulunmak için kullandıklarını ifade etmektedir. Bu aşamadan sonra ise argümanlar geliştirerek varsayımlarını anlamlandırmaya çalıştıklarını ve bu argümanlardan bazılarının da kanıt olarak ifade edilebileceğini belirtmektedir.

Öğrencilerin matematiksel muhakeme yapabilmek için fikirlerini açıklamaları, farklı düşünceler ile karşılaşmaları, başkalarının fikirlerini değerlendirmeleri, kendi fikirlerinin doğruluğunu gerekçelerle savunabilmeleri yani tartışarak yeni matematiksel fikirler üretebilmeleri son derece önemlidir. Tartışmalar yapılması, argümanlar sunulması, doğru ve yanlış argümanların ayırt edilmesi öğrencilerin kanıt yapabilmeleri için gerekli olan muhakeme becerilerinin gelişimine yardımcı olmaktadır (Knuth, 2002). Nitekim matematiksel kanıtın süreç olarak nitelendirilmesini sağlayan en önemli unsur muhakemedir. Tam da bu sebeple matematiksel kanıt, tümevarım ve tümdengelime dayalı muhakeme çeşitlerini içeren bir yapı olarak tanımlanmaktadır (Almeida, 1996; Jahnke, 2010; Reid, 2002).

2.2. Kanıt ve Kanıtlama

Kanıt her şeyden önce bir insan aktivitesidir, öyle ki küçük çocukların dil gelişimini kazanmalarıyla beraber en çok sordukları soru olan "Neden?" sorusu insanların doğuştan getirdikleri merak yeteneği, kesinliği görmek ve ikna olmak istemesinin bir göstergesidir (Stylianou vd., 2009).

Kanıt; test, onaylama ya da gösterme anlamına gelen Latince "probare" sözcüğünden türetilmiştir. Kanıt bir şeyin doğru olduğunu gösteren bilgi, bir iddianın doğru ya da gerçek olup olmadığını test etme süreci iken, kanıtlamak ise kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, bir şeyin doğruluğunu kanıtla ortaya koyma eylemidir (Cambridge Advanced Learner’s Dictionary, 2013; Oxford advenced learner’s dictionary, 2010; Türk Dil Kurumu [TDK], 2018).

Hersh (1993), kanıtın bir şeyin gerçekliğini ya da varlığını gösteren ikna edici argüman olduğunu söylemektedir. Porteous (1994) da benzer bir yaklaşımla bir durumun kanıtının, onun doğruluğunu gösteren gerekli ve yeterli bir ifade olduğunu belirtmektedir. Tall (1998) ise kanıtı, bir varsayımı açıklamak için mantıksal bir yol izleme ve varsayımlara dayanarak sonuca niçin ve nasıl ulaşıldığına dair açıklama yapma olarak tanımlamaktadır. Bell’e (1976) göre kanıt başlangıç noktası, doğruluğu daha önceden kanıtlanmış ya da genel olarak kabul edilmiş gerçekler, prensipler olan, bitiş noktası ise sonuç olan birbirine bağlı ifadelerdir. Baki (2006) ise bir iddianın kapsandığı tüm şartlar altında genelliğinin ortaya konabilmesine o iddianın kanıtı demektedir.

Kanıt ve kanıtlamanın farklı bakış açıları ile ele alınmasından ve matematik eğitimi alan-yazını açısından matematiksel kanıtı tartışmadan önce bu kavramın tarihsel gelişimini incelemenin daha iyi olacağı düşünülmüştür. Tarihçilere ve matematikçilere göre kanıtın ortaya çıkışına dair üç farklı tez vardır (Jahnke, 2010): Sosyo-politik teze göre, matematiksel kanıtın kökeni ile Yunan demokrasisinin sağladığı konuşma özgürlüğü arasında bir ilişki vardır. Politik ve sosyal düzlemde, farklı siyasi partilerin kendi argümanlarıyla kendi görüşlerini savunmaları, yani politik tartışmalar matematiksel kanıt için bir model oluşturmuştur (Jahnke, 2010). Bir diğer tez olan felsefenin etkisi tezi, matematiksel kanıtın temelini filozofların söylemlerinden aldığını savunur. Bu tez aslında matematiksel muhakemenin Platon ve Aristoteles’in çalışmalarında olduğu gibi, Yunan filozofları tarafından geniş bir şekilde tartışıldığı gerçeğiyle desteklenmiştir. İçsel tez ise, kanıtın Yunanlı matematikçilerin Babil ve Mısır matematiğini incelerken buldukları boşlukları ortadan kaldırma zorunluluğundan ortaya çıktığını savunur (Jahnke, 2010): Şöyle ki; Antik Mısırlılar, Babilliler ve Çinliler için, gözleme dayalı doğrulamalar matematiksel ifadeleri kanıtlamada yeterliyken, Antik Yunan matematikçileri için matematiksel gerçekleri belirlemenin bu yolu tatmin edici değildir. Çünkü matematik diğer bilimlerden oldukça farklıdır. Bazen bütün doğal sayılar kümesi üzerinde ya da bütün üçgenler gibi sonsuz sayıda eleman üzerinde çalışmak gerekmektedir. Yani bir gerçek ortaya konulduğu zaman bu durumun istisnasız her örnek için geçerli olması gerekir. Ancak bir durum için, sonsuz elemanı olan bir kümenin bütün elemanları deneysel doğrulamayla nasıl kontrol edilebilir ki?

Antik Yunanlı matematikçiler, ne kadar kapsamlı gözlem ve deneysel doğrulama yapılırsa yapılsın, bu şekilde gösterilen matematiksel doğruların her zaman şüpheye açık olacağını fark etmişlerdir. Sonuçların geçerliliğinin, herhangi bir bireyin deneyimine, sezgisine ya da varsayımlarına bağlı olmadığı bugünkü anlamda matematiksel kanıtın ilk izlerine Antik Yunan matematiğinde rastlamak mümkündür. Böylelikle artık mantıksal olanla mantıksal olmayan arasındaki farkın ayrımına varılmış, Thales ile başlayan matematiğin mantıksallaşma süreci, Öklid geometrisiyle günümüze kadar ulaşmıştır. Elementler kitabını yazan Öklid, geometriyi doğruluğu kabul edilen az sayıda temel ifadeye ve bu temel ifadelerden yararlanarak doğruluğu kanıtlanan diğer ifadelere dayandırmıştır. Böylece sağlam bir kule olan aksiyomatik sistemin temelleri atılmıştır.

Yıldırım (1996), Öklid'in kullandığı bu tümdengelimsel mantığın matematiğe, hiçbir düşünce alanında örneği gösterilemeyen mantıksal bir bütünlük, bu bütünlük içinde de doğruluk, kesinlik ve zorunluluk kazandırdığını belirtmektedir. Hanna ve Barbeau (2002) ise Öklid'in aksiyomatik yapısının sadece tarihsel bir önemi olmadığını aynı zamanda matematiksel yapının merkezini oluşturduğunu belirtmektedirler. Çünkü modern matematiksel yapılar da kendi aksiyomları üzerinden tanımlanır. Bu aksiyomların birbiriyle tutarlı, başka teoremlerin türetilmesini sağlamaya elverişli olacak şekilde zengin olması gerekir. Bu sistemlerde de sınırlı sayıda aksiyomdan, uygun çıkarsama kurallarını kullanarak mantıksal adımlarla doğrulanan önerme, doğru kabul edilir.

Farklı araştırmacıların kanıtın farklı yönlerine odaklanmalarından kaynaklı olarak tek bir kanıt tanımı yapmak mümkün değilken, bu durumun etkilerinin matematiksel kanıt için de geçerli olduğu görülmektedir. Matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından ele alınan matematiksel kanıtın formel kanıttan, bir topluluğu ikna eden argümanlara kadar geniş bir aralığı olduğu böylece matematikçilerin yaptığı matematiksel kanıt tanımı ile çoğu matematik eğitimcisi tarafından benimsenen okul matematiğindeki matematiksel kanıt tanımlarının farklı odak noktalara sahip olduğu söylenebilir. Matematiksel kanıtın farklı bakış açılarıyla ele alınıyor olması, farklı tanımlarının yapılması ve bunun sonucu olarak da kanıtın nelerden oluştuğu ve kişinin birini ikna ederken kullandığı argümanlardan hangisine kanıt denilebileceğinin de birçok farklı yanıtının olması olağan bir durumdur. Matematiksel kanıtın geleneksel tanımlarında daha çok kesinliğin ve kanıt yazma biçimin ön plana çıktığı görülmektedir.

Bu tanımlarda kanıtın matematiksel yönlerine odaklanılmakta, tümdengelimsel argümanlara ve çıkarım kurallarına vurgu yapılmaktadır. Örneğin Hilbert'e göre matematiksel kanıt, sonuncunun kanıtlanan teorem olduğu ve her birinin birer aksiyom ya da önceki formüllere çıkarım kurallarının uygulanması sonucu oluştuğu bir iddialar dizisidir (Dawson, 2006, s. 270). Benzer şekilde Dede ve Karakuş (2014, s. 67) matematiksel kanıtı bir önermenin doğruluğunun, önceden bilinen bir ya da daha fazla önerme ile ilişkilendirilip mantıksal bir takım çıkarımlar yardımı ile gösterilmesi olarak tanımlamaktadırlar. Hanna (1990) "kanıt yapmak için kanıt" ve "matematiksel anlamayı sağlamak için kanıt" ayrımını yaparak formel kanıtı (kanıt yapmak için kanıt) formel mantıkta teorik bir kavram, ilk ifadenin bir aksiyom olduğu, takip eden ifadelerin her birinin ya bir aksiyom ya da çıkarım kuralları uygulanarak önceki ifadelerden türetilen ifadeler olduğu ve son cümlenin ise kanıtlanmak istenen ifade olduğu kanıtlar olarak tanımlamaktadır.

Bununla birlikte tanımlarında matematiksel kanıtın matematiksel muhakemenin ürünü olması durumuna vurgu yapan pek çok matematik eğitimcisi mevcuttur. Örneğin Jahnke (2010), matematiksel kanıtı, tümevarım ve tümdengelime dayalı muhakemeyi içeren bir yapı olarak tanımlamaktadır. Benzer şekilde Hanna (1996), kullanılan tüm bilgilerin ve muhakeme kurallarının net bir şekilde gösterildiği, bir ifadenin gerçekliğini ortaya koyan mantıksal bir argüman olarak; Heinze ve Reiss (2003) tümdengelimsel muhakeme örüntüsü olarak tanımlamaktadırlar. Csikos (1999) ise matematiksel kanıt tanımını kanıtı oluşturan bileşenler üzerinden yaparak muhakeme sürecine vurgu yapmaktadır. Bu bileşenleri kanıtlanacak ifade, kanıtlama sürecinde kullanılan aksiyomlar ya da daha önceden doğruluğu kanıtlanmış ifadeler ve kanıtlama sürecinde kullanılan çıkarım kuralları olarak belirterek, kanıtlanacak ifadelerin daha önceden doğruluğu kanıtlanmış ifadeler (ya da aksiyomlar) yardımıyla tümdengelimsel ve tümevarımsal muhakeme yapılarak kanıtlandığını vurgulamaktadır. NCTM (2000) matematiksel kanıtı, belirli muhakeme ve gerekçelendirme biçimlerini sergilemenin formel bir yolu olarak tanımlamaktadır. Toker (2020, s. 461) ise matematiksel düşünmeye ve muhakemeye vurgu yaptığı tanımında kanıtı, öğrencilerin muhakeme yapmaları, düşüncelerini nedenleriyle birlikte açıklamaları, varsayımda bulunmaları, çıkarım yapmaları, düşüncelerini test etmeleri ve sonuca ulaşmaları gibi matematiksel düşünceyi ve söylemleri geliştirebilecek bir araç olarak tanımlamaktadır.

Tüm bu tanımlarla birlikte matematiksel kanıtın sosyo-kültürel yönlerine vurgu yaparak bir kanıt tanımı ortaya koyan pek çok araştırmacı mevcuttur. Örneğin Almeida (2003) matematiksel kanıtı, bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistem içine yerleştirmek olarak tanımlayarak matematiksel kanıtın sosyal yönüne vurgu yapmaktadır. Benzer şekilde Hersh (2009) matematiksel kanıtı, ilgili kavramları anlayan herkesi ikna eden ve aksine tek bir örnek bile verilemeyen kesin bir argüman olarak, Maher (2009) ise çocukların iddialarını tümdengelimsel argümanlarla haklı göstermeye çalıştıkları özel bir matematiksel aktivite olarak tanımlamaktadır. Stylianides (2007b, s. 291) sosyal olarak inşa edilen ve geçerliliği sınıf normlarına bağlı olan kanıt tanımında, matematiksel kanıtın aşağıdaki özellikleri sağlayan iddialar dizisinden oluşan matematiksel bir argüman olduğunu belirtmektedir:

- *Sınıf topluluğu tarafından daha fazla gerekçeye ihtiyaç duyulmadan kabul edilen ifadeler kümesi (set of accepted statements) kullanılır:* Matematiksel bağlamda tanımlar, aksiyom ve teoremler bu kapsamda ele alınmaktadır. Kabul edilen bu ifadeler yardımıyla diğer teoremlerin kanıtları yapılır. Kabul edilmiş ifadeler kümesi sınıf düzeyine göre farklılık gösterebilir. Örneğin bir üçgenin iç açılarının ölçüsünün 180^o olması üniversite öğrencileri için kanıtlanması gereken bir teorem iken ortaokul öğrencileri için herhangi bir doğrulama gerektirmeden kabul edilen ifadelerin içine alınabilir.
- *Sınıf topluluğu tarafından bilinen ve geçerli kabul edilen ya da sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan argümantasyon biçimleri (modes of argumentation) kullanılır*: Matematiksel bağlamda mantık kurallarının kullanımı, verilen ifadenin olası tüm durumlarda incelenmesi, genel ifadelerin türetilmesi için tanımların kullanımı, aksine örneğin sunulması, bir çelişki elde edilmesi gibi uygulamalar bu kapsamda ele alınmaktadır. Ancak her düzeyde kanıt öğretiminin yapılabilmesi için geçerli olan argümantasyon biçimlerini o düzeydeki öğrencilerin anlayabileceği seviyeye indirmek önemlidir.
- *Sınıf topluluğu tarafından bilinen ya da sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği temsil biçimleri (modes of argument representation) ile iletilir:* Matematiksel bağlamda sözel anlatım, sembolik dil kullanımı, şekiller, tablo, diyagram kullanımı bu kapsamda ele alınmaktadır. Burada önemli olan

sınıfın düzeyine göre, aynı geçerli muhakeme biçimine dayalı olan farklı temsil biçimlerinin öğrenciler tarafından kullanılabileceği gerçeğinin göz ardı edilmemesi gerektiğidir.

Bu araştırmada Stylianides (2007b) tarafından kullanılan tanımın okul matematiğinde kanıtlama sürecinde ortaya çıkan ve sınıf topluluğu tarafından geçerli kabul edilen kanıtı temsil eden en ayrıntılı tanım olduğu düşünülmüş ve bu tanım bu araştırma kapsamında ele alınacak matematiksel kanıtın çerçevesini oluşturmuştur.

Bununla birlikte matematiksel kanıtı bir süreç olarak gören araştırmacılar bu sürecin aşamalarını da tanımlamışlardır. Örneğin Baki (2006), matematiksel kanıtların doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç aşamada tamamlandığını belirtmektedir. Matematiksel kanıtın ilk aşamasında iddianın doğruluğu araştırılır, ikinci aşamasında iddianın neden doğru olduğu açıklanır. Üçüncü aşama olan soyutlama aşamasında ise matematiksel dil kullanılarak ve genelleme koşulları içerisinde matematiksel ifadeler soyutlanır (Baki, 2006). Tall (1998) ise matematiksel kanıtların, varsayımın mantıksal adımlar zinciri ile doğruluğunu göstermek ve varsayımın neden doğru olduğunu anlatmak şekilde iki aşamada tamamlandığını belirtmektedir. Perry vd., (2009), kanıtlama sürecinin ilk aşamasının varsayım üretimini sağlayan eylemlerden oluştuğunu (bir düzenliliğin aranması ve bunun keşfi, varsayımların formüle edilmesi ve bu varsayımların doğru olduğunu gösteren argümanlar sunulması) savunmaktadırlar. İkinci aşamanın ise kanıtı oluşturacak fikirlerin araştırılması, düzenlenmesi ve sunulması eylemlerini içerdiğini belirtmektedirler. Lee (2002) ise matematiksel kanıtların birbirinden farklı; ancak birbirleri ile ilişkili olan üç aşamada yapıldığını belirtmektedir. Bunları; kanıtı yapılacak teoremin araştırılması, kanıtın organizasyonu ve diğer kişilere anlatılması olarak ifade etmektedir. Buna göre bir matematikçi matematiksel kanıt sürecinde öncelikle problemi ya da varsayımı incelemekte, varsayımın doğru olup olmadığını ve bilinen teoremlerden nasıl çıkarılabileceğini araştırmaktadır. Bu aşama bir kanıt bularak ya da varsayımı çürüterek sona ermektedir. Bu aşamada yapılan analizi, kanıtın organizasyonu takip etmekte, bu aşamada analiz sonuçları tümdengelimsel argüman haline getirilmektedir. Son olarak tümdengelimsel olarak düzenlenmiş kanıt dersler ya da yayınlar aracılığıyla diğer insanlara iletilmektedir (Lee, 2002). Dogan (2015) özellikle okul matematiğindeki kanıt etkinliklerinde birbirinden bağımsız olmayan iç içe geçmiş üç aşamalı kanıt yapma sürecine dikkat çekmektedir: a) inceleme ve varsayımda bulunma, b) gerekçelendirme ve kanıt, c) değerlendirme. Buna göre inceleme ve varsayımda bulunma aşamasında öğrenciler verilen kanıt problemlerini (etkinliklerini) inceleyerek, gözlemler yaparak, problemi anlamaya çalışır ve varsayım oluştururlar. İkinci aşamada öğrencilerin varsayımlarının doğruluğunu gerekçelendirmeleri ve argümanlarının doğruluğuna önce kendilerini sonra da arkadaşlarını ikna etmeleri gerekmektedir. Bu aşamada her öğrenci formel bir kanıt yapamayabilir; ancak kanıt etkinliklerine aktif bir şekilde katılarak argümanlar oluşturmaları, matematiksel fikirlerini gerekçeleriyle açıklamaları ve doğal olarak iletişim kurmaları da gelişimleri için değerlidir. Üçüncü aşama olan değerlendirme aşamasında ise ikinci aşamada sunulan gerekçelerden hangilerinin geçerli bir matematiksel argüman olduğu sınıfça tartışılıp değerlendirilir. Dogan (2015), kanıtlama etkinliklerinin bu aşamalarına aktif katılan öğrencilerin matematiği anlamlı bir şekilde öğrenme fırsatı elde edebileceklerini vurgulamaktadır. Bununla birlikte bu aşamaların birinden diğerine geçişin her zaman net çizgilerle ayrılmadığını bazı öğrencilerin inceleme ve varsayımda bulunma aşamasında gerekçelendirme yapabilecekleri gibi gerekçelendirme ve kanıt aşamasında da yeni bir varsayım oluşturabileceklerini belirtmektedir. Kanıtı bir süreç olarak değerlendiren araştırmacılardan olan Harel ve Sowder (1998), bu sürecinin iki aşamalı olduğunu savunmaktadırlar. İlk aşama bir kişinin ya da grubun bir varsayımın doğru olduğuna dair kendi şüphelerinden kurtulması yani kişinin (ya da grubun) bu varsayımın doğru olduğuna kendisini ikna etmesidir. İkinci aşama ise kişinin (ya da grubun) bu varsayımın doğru olduğuna bir başkasını ikna etmesidir ki bu aşama kanıtın sosyal yönüne işaret etmektedir. Benzer şekilde kanıtı sosyal-matematiksel bir süreç olarak değerlendiren Mason vd. (2010, s. 87) kanıt yapma sürecinin üç aşamalı olduğunu belirtmektedirler. Bu aşamalar sırasıyla a) kendini ikna etme, b) arkadaşını ikna etme ve c) şüpheci birini ikna etme olarak adlandırılmaktadır.

Kanıtın ve matematiksel kanıtın tanımı konusunda matematik eğitiminde birbirinden farklı görüşler olduğu gibi kanıt yöntemlerine ilişkin de alan-yazında pek çok sınıflama yapıldığı ve bu konuda netleşemeyen bir tablo olduğu görülmektedir.

2.2.1. Kanıt yöntemleri

Alan-yazında kanıt yöntemleri ile ilgili pek çok sınıflama olduğu belirlenirken, bazı sınıflamalarda aynı esasa dayalı olan kanıt yöntemlerinin farklı isimlerle ele alındığı da görülmektedir. Örneğin Rossi (2006), kanıt yöntemlerini aşağıdaki şekilde sınıflamıştır:

- Doğrudan Kanıt
- Dolaylı Kanıt (Çelişki yöntemi - Proof by Contradiction)
- Özel kanıt yöntemleri
    - Tümevarım
    - Varlık kanıtları
    - Durumlarla kanıt
    - Teklik kanıtları

Özer, Çoker ve Taş (2010) ise kanıt yöntemlerini aşağıdaki gibi sınıflamıştır:

- Doğruluk çizelgeleri
- Doğrudan kanıt
- Dolaylı kanıt
- Olmayana ergi yöntemi ile kanıt
- Tümevarım

Stefanowicz (2014) ise kanıt yöntemlerini aşağıdaki şekilde ayırmıştır:

- Doğrudan kanıt
- Aksine Örnek Verme
- Çelişki yöntemi (Proof by Contradiction)
- Karşıt tersi (Proof by Contrapositive)
- Durumlarla kanıt
- Tümevarım

Bayazıt (2017) kanıt yöntemlerini aşağıdaki gibi sınıflamıştır:

- Doğrudan kanıt
- Tümevarımla kanıt
- Olmayana ergi yöntemi ile kanıt
- Çelişki bulma yöntemi ile kanıt
- Aksine örnekle kanıt

Bu araştırmada farklı araştırmacıların kanıt yöntemleri incelenerek kapsamlı bir sınıflandırma oluşturulmuştur. Buna göre kanıt yöntemleri tümevarımla kanıt, doğruluk çizelgeleri ve tümdengelimle kanıt olarak üç temel gruba ayrılmıştır. Tümdengelim yöntemi; doğrudan kanıt, tüketerek kanıt, varlık kanıtları, aksine örnek verme, karşıt tersi ile kanıt ve olmayana ergi yöntemi ile kanıt olarak aşağıdaki gibi ayrılmıştır:

- Tümevarımla kanıt
- Doğruluk çizelgeleri
- Tümdengelimle kanıt
    - Doğrudan kanıt
    - Tüketerek kanıt
    - Varlık kanıtları
    - Aksine örnek verme
    - Karşıt tersi ile kanıt
    - Olmayana ergi yöntemi ile kanıt

Tümevarımla Kanıt Yöntemi: Bu yöntem P_1, P_2, P_3, . . . , P_n, . . . önermelerinden oluşan bir kümedeki bütün önermelerin doğru olduğunu kanıtlamak için kullanılır. İlk önce P_1 önermesinin doğru olduğu kanıtlanır, sonra P_k önermesinin doğru olduğu kabul edilir ve son olarak P_{k+1} önermesinin doğru olması gerektiği gösterilir (Stefanowicz, 2014).

Doğruluk Çizelgeleri: Verilen önermelerden, bağlaçlarla bileşik önermelerin oluşturulduğu ve oluşturulan bileşik önermelerin değerlerinin, verilen önermelerin değerleri ile bulunduğu kanıt yöntemidir (Pierce, 2011).

Tümdengelimle Kanıt Yöntemleri: Doğrudan kanıt, tüketerek kanıt, varlık kanıtları, aksine örnek verme, karşıt tersi ile kanıt ve olmayana ergi yöntemi ile kanıt olarak ayrılmıştır.

Doğrudan Kanıt: En temel kanıt yöntemidir, p önermesi doğru olduğu kabul edilerek, q önermesinin doğruluğu bilinen tanım, teorem ve kurallar kullanılarak kanıtlanmasıdır (Stefanowicz, 2014). Aşağıda doğrudan kanıt yöntemiyle kanıtlanan bir önerme gösterilmiştir:

Önerme: x tek bir tamsayı ise x^2 de tek bir tamsayıdır.

Kanıt:

- x tek bir tamsayı olsun.
- Tek tamsayı tanımına göre x =2a + 1 olacak şekilde bir a € Z vardır.
- $x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2 (2a^2 + 2a) + 1$
- Böylece $b = 2a^2 + 2a$ olmak üzere $x^2 = 2b + 1$ yazılabilir.
- O halde $x^2 = 2b + 1$ olacak şekilde bir b € Z vardır.
- Bu nedenle x^2 tektir.

Tüketerek Kanıt (Durumlarla Kanıt): Bu kanıt yönteminde, önermenin tanımlandığı kümede tüm durumlar tek tek denenerek önermenin doğru olduğu gösterilir (Stefanowicz, 2014). Aşağıda tüketerek kanıt yöntemiyle kanıtlanan bir önerme gösterilmiştir:

Önerme: 3'ün katı olmayan n tamsayıları için n^2 de 3'ün katı değildir.

Kanıt:

- n, 3'ün katı değilse iki durum söz konusudur:
- Durum 1: $n = 3m + 1$ olacak şekilde m tam sayıları vardır.
- $n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$, $k= 3m^2 + 2m$, $n^2= 3k + 1$
- Durum 2: $n = 3m + 2$ olacak şekilde m tam sayıları vardır
- $n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$, $k=3m^2 + 4m + 1$, $n^2= 3k + 1$. Her iki durumda da n^2, 3'ün katı değildir.

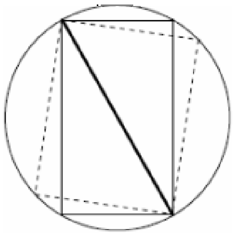
Varlık Kanıtları: Önermelerin çoğu $\forall x$, $p(x) \rightarrow q(x)$ şeklinde evrensel niceleyicilerin kullanıldığı önermeler olarak olsa da bazen $\exists x$, $r(x)$ şeklinde varlıksal niceleyicilerin kullanıldığı önermeler de matematikte kullanılmaktadır. Bu önermelerin kanıtları varlık kanıtları yoluyla yapılabilir (Rossi, 2006). Varlık önermelerinin kanıtı için tek bir örnek vermek yeterlidir. Aşağıda varlık kanıt yöntemiyle kanıtlanan bir önerme gösterilmiştir:

Önerme: Çift olan bir asal sayı vardır.

Kanıt:

- 2 hem çift hem de asal bir sayıdır.

Aksine Örnek Verme: Verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren en az bir örnek bularak gerçekleştirilen kanıt türüdür (Stefanowicz, 2014). Peled ve Zaslavsky (1997), verilen önermenin yanlış olduğunu gösteren aksine örnekleri özel örnekler, yarı genel örnekler ve genel örnekler olarak üçe ayırmaktadırlar. Buna göre özel aksine bir örnekle kanıt, önermenin yanlış olduğunu gösteren tek bir örneği kanıt olarak göstermedir. Yarı genel aksine bir örnekle kanıt bir önermenin neden yanlış olduğunu yani aksine örneğin varsayımla nasıl çeliştiğini göstermedir. Genel aksine örnekle kanıt ise bir önermenin neden yanlış olduğunu gösterme ve yalnızca tek bir aksine örneği değil, aksine örneklerin tüm alanı için daha fazla aksine örnek üretme stratejileri de veren kanıtlardır. Örneğin, "Köşegenleri eş olan dikdörtgenler her zaman eştir." şeklinde verilen bir önermenin yanlış olduğunu kanıtlamak için bazı özel dikdörtgenler örnek olarak verilebilir. Ancak Şekil 2.3.'te görüldüğü gibi önermenin neden yanlış olduğunu açıklayan, ayrıca aynı köşegen ile sonsuz sayıda dikdörtgen de çizilebileceğini gösteren aşağıdaki kanıt genel aksine örnekle kanıt olarak nitelendirilebilir (Peled and Zaslavsky, 1997):



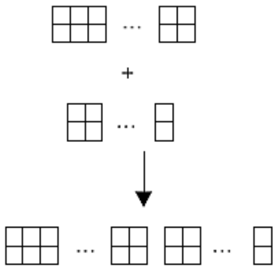
Şekil 2.3. *Genel aksine örnekle kanıt örneği* (*Peled and Zaslavsky, 1997)*

Karşıt Tersi İle Kanıt (Proof by Contrapositive): Bu kanıt yönteminde p→q koşullu önermesi verildiğinde, q önermesinin doğru olmadığı kabul edilir ve p önermesinin de yanlış olduğu gösterilir. $p \rightarrow q \equiv q' \rightarrow p'$ olacak şekilde iki bileşik önermenin denkliğinden yararlanılır (Stefanowicz, 2014).

Olmayana Ergi Yöntemi İle Kanıt (Çelişki Yöntemi-Proof by Contradiction): Kanıtlanmak istenilen önermenin yanlış olduğunu kabul edip, bunun bir çelişkiye yol açtığını göstermektir (Stefanowicz, 2014).

Tüm bu formel kanıt yöntemlerinin yanı sıra matematik eğitiminde farklı araştırmacılar tarafından okullarda özellikle ilköğretim çağındaki küçük çocukların anlayabileceği düzeyde görsel, açıklayıcı kanıtlara da yer verilmesi gerektiği şeklinde bir görüş vardır (Hanna, 1990; 2000; Raman, 2002). Bu araştırmacıların bir kanıtın sadece formel ya da sadece informel olması dışında önemli olanın, kanıtın hem matematiksel gerçeklerle çelişmemesi hem de kanıtın doğasının ve kanıtlanan ifadenin anlamının anlaşılması olduğunu savundukları, açıklayıcı olan, kabul edilebilir bütün kanıt uygulamalarına özellikle ilköğretimde yer verilmesi gerektiğini belirttikleri görülmektedir. Bu kanıtlardan olan görsel kanıtlar, uygulamalı kanıtı da bünyesinde barındıran ve varsayımların görsel öğelerle doğrulanmasını içeren kanıttır (Tall, 1998). Görsel kanıta bir örnek Schifter'ın (2009) araştırmasından verilebilir. Bu araştırmada, ilkokul üçüncü sınıf öğrencisi "İki çift sayının toplamı çifttir." önermesini Şekil 2.4'te gösterildiği gibi görsel kanıt yaparak kanıtlamıştır:

- Bu sayılar çift sayı olduğu için ikisi de şekildeki gibi 2'şer 2'şer sayılabilir.
- Bunları bir araya getirdiğimizde sonuç yine 2'şer 2'şer sayılabilir. O zaman bu iki sayının toplamı da çift sayıdır.

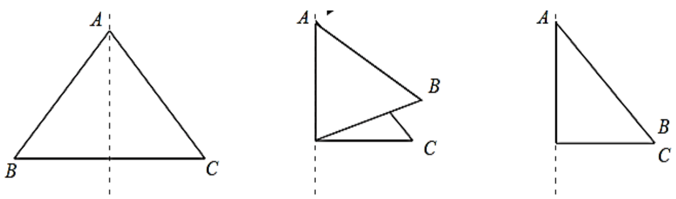


Şekil 2.4. *"İki çift sayının toplamı çifttir." önermesinin görsel kanıtı (Schifter, 2009)*

Benzer şekilde Hersh (2009) "İki sayının çarpımı ile bu sayıların yerleri değiştiğinde elde edilen çarpımın sonucu birbirine eşittir." önermesini ilkokul düzeyindeki bir öğrencinin her biri 24 tane top içeren 97 satır ile her biri 97 top içeren 24 satırın aynı şey olduğunu resim çizerek ve bu resmi döndürerek gösterebildiğini belirtmektedir. Araştırmacı bu çözümün bu düzey için de bir kanıt olduğunu belirtmekte, aynı zamanda tümevarımla kanıt gerektiren değişme özelliğini çocukların bu düzeyde ancak bu şekilde kanıtlayabileceğini ifade etmektedir.

Tall (1998), görsel kanıtların bazen daha ilkel olabileceğini, bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi için görsel ve sözel desteklerle beraber, gerekli ilişkileri göstermesi için fiziksel harekete de ihtiyaç duyulabileceğini belirtmiştir. Buna göre eşkenar bir üçgenin iç açılarının eş olması önermesinin görsel kanıtını Şekil 2.5'teki gibi göstermiştir:

- Kâğıttan bir eşkenar üçgen kesilir.
- Simetri ekseninden katlandığı zaman eşit uzunluktaki kenarlar ve eşit ölçüdeki açılar eşleşir.



Şekil 2.5. *"Eşkenar üçgenin iç açıları eştir." önermesinin görsel kanıtı (Tall, 1998)*

Bazı sözel-açıklayıcı argümanların bir teoremin neden doğru olduğunu açıklayabilme özelliğinin olduğu görülmektedir. Hanna (1990; 2000) açıklama özelliği olan yani bir teoremin doğruluğunun yanında neden doğru olduğunu gösteren kanıtların ilköğretim matematik derslerinde kullanılmasına vurgu yapmaktadır. Aşağıda "İki tek sayının toplamı çifttir." önermesi için yapılabilecek açıklayıcı kanıt örneği sunulmuştur:

Önerme: İki tek sayının toplamı çifttir.

Kanıt:

- İki tek sayının toplamı çifttir. Çünkü bir tek sayı, çift bir sayı ile 1'in toplamıdır. 3=2+1, 5=4+1 gibi
- İki tek sayıyı topladığımızda bu çift sayıları ve 2 tane de 1'i toplarız.
- 2 tane 1'in toplamı 2 olur. İki çift sayının toplamı da çift olduğu için sonuç çifttir.

Bu araştırmada tümdengelimsel muhakemenin yapıldığı görsel ve sözel argümanlar geçerli kanıt kapsamında değerlendirilmiştir. Matematiksel kanıtın farklı tanımlarının yanında kanıtın matematik sınıflarında oynadığı role farklı anlamlar yükleyen, kanıtın bu sınıflarda daha anlamlı bir aktivite olarak ele alınması için önemli işlevlerini tanımlayan araştırmacılar vardır.

2.2.2. Kanıt işlevleri

De Villiers (1990), kanıt işlevlerinin; yapılan kanıtın hangi amaca hizmet ettiği, kanıtın sınıfta hangi rolü oynadığı, kanıtı yapan ya da yapılan bir kanıtı yorumlayan kişinin bu kanıta hangi anlamı yüklediği ile ilgili olduğunu belirtmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin kanıtı anlamaları için öncelikle çeşitli işlevlerini yani kanıtın sınıfta oynadığı rolü, kanıtın amacını anlamaları gerektiğini; ancak bu şekilde kanıtın önemini görebileceklerini ve kanıt yapmak için motive olacaklarını vurgulamaktadır. İşlevler matematik eğitimi alan-yazınında "kanıt işlevleri", "kanıtın rolü", "kanıtın amacı" gibi farklı şekillerde çoğunlukla birbirlerinin yerine kullanılarak isimlendirilmektedir (De Villiers, 1990; Hanna, 2000). Hemmi (2010), öğrencilerin kanıtın işlevlerini deneyimlemelerinin öğrencilerin kanıtı anlamalarını ve kanıt uygulamalarına katılımlarını desteklediğini belirtmektedir. Kanıtın matematik biliminde oynadığı rolün matematik sınıflarına da yansıması böylece kanıtın matematik sınıflarında daha anlamlı bir etkinlik olabilmesi için bu işlevlerin kullanılması görüşünü destekleyen pek çok araştırmacı mevcuttur (Hanna, 1995; Knuth, 2002). Birçok matematik eğitimcisi ve matematikçi sınıflarda ve çeşitli matematiksel topluluklarda kanıtın farklı rollerini ya da işlevlerini farklı şekillerde sınıflandırmışlardır. De Villiers (1990) kanıt işlevleri konusundaki öncü çalışmasında kanıtın matematikte "doğrulama", "açıklama", "iletişim", "buluş" ve "sistematikleştirme" olmak üzere beş farklı rolü olabileceğini belirtmektedir. Farklı araştırmacıların da De Villiers'ın (1990) bu işlevlerine farklı eklemeler yaptıkları görülmektedir. Hanna (2000) ikna etme, deneysel bir teorinin inşası, tanımların doğrulanması ve entelektüel zorluk işlevlerini eklerken Yackel ve

Cobb (1996) ise özerklik kazanma işlevini eklemiştir. Bununla birlikte kanıt işlevleri konusunda en çok kabul gören çerçevenin De Villiers'ın (1990) çerçevesi olduğu ve farklı araştırmacıların matematik eğitiminde ya da matematik sınıflarında kanıt işlevlerini tartışmak için bu çerçeveyi kullandıkları görülmektedir (Bartlo, 2013; Hanna, 2000; Herbst, Miyakawa and Chazan, 2010). Bu çerçevenin bileşenleri aşağıda tartışılmıştır.

2.2.2.1. Doğrulama işlevi

Kanıt bir varsayımın tüm durumlar için doğru olduğunu göstermek amacıyla kullanılabilir. Doğrulamanın kanıt işlevlerinden biri olduğunu belirten pek çok araştırmacı (Bell, 1976, s. 24; Cilli-Turner, 2017; Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Hanna, 1983; Knuth, 2002) mevcuttur. Harel ve Sowder (1998), doğrulamayı kişinin kendini ya da bir başkasını bir varsayımın doğruluğuna ikna etmek ya da inandırmak olarak tanımlamışlardır. Doğrulama *tümevarımla ilişkili doğrulama* ve *tümdengelimle ilişkili doğrulama* şeklinde ikiye ayrılmaktadır. Tümevarımla ilişkili doğrulama genel bir duruma dayalı bir varsayımı açıklamak için özel bir durumu gözlemleme üzerine kurulurken, tümdengelimle ilişkili doğrulama kanıt ile eş değer görülmektedir (Tanışlı, Yavuzsoy-Köse ve Camci, 2017). Kanıt, doğrulama için gerekli bir ön koşul olmamasına karşın, doğrulama kanıt için bir ön koşuldur. Çünkü matematikçiler doğruluğuna ikna olmadıkları varsayımları değil, doğru olduğuna kendilerini ikna ettikleri varsayımları kanıtlamaktadırlar (Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Hanna, 1983; Knuth, 2002). Doğrulama bir kişiyi bir ifadenin doğru ya da yanlış olduğuna ikna etmek için yapılmaktadır. Fen bilimleri ile matematik bilimi arasındaki en önemli fark bir iddianın doğrulanmasında ortaya çıkmaktadır. Fen bilimlerinde iddialar deney ve gözlemlerle doğrulanırken, matematiksel ve mantıksal iddialar ise kanıtla doğrulanmaktadır (Herbst vd., 2010).

De Villiers (1990) kanıtın doğrulama işlevinin matematik biliminde, bir iddia hakkındaki şüphelerden kurtulmak ve bir iddianın doğru olduğunu onaylamak olmak üzere iki farklı şekilde hizmet ettiğini savunmaktadır. Bartlo (2013), doğrulama işlevini "*doğru olduğuna ikna olma*" ve "*doğruluğunu onaylama*" olarak detaylandırmaktadır. Doğru olduğuna ikna olma, kanıtın matematik sınıflarında öğrencileri iddiaların ya da teorilerin doğru olduğuna ikna etmesi alt işlevini, doğruluğunu onaylama ise bu iddia ve teorilerin doğruluğunu onaylamalarını sağlama alt işlevini ifade etmektedir. Bu çerçeveye göre, kitap ya da öğretmen gibi bir otoritenin bir iddianın doğruluğunu kabul etmesi bazı öğrencilerin ikna olması için yeterli olmasına karşın bazı öğrenciler için yeterli olmayabilir. Bununla birlikte bazı öğrenciler tümdengelimsel bir kanıt ile bir ifadenin doğru olduğuna ikna olabilirlerken bazı öğrenciler informel bir kanıtla bir iddianın doğruluğuna ikna olabilmektedir. Eğer öğrenciler dış kaynaklara bağımlı olmadan kendi kanıtları ile bir iddianın doğru olduğuna dair inanç geliştirebilirlerse entelektüel özerklik kazanabilirler. Bu şekilde öğrenciler kendilerine sunulan matematiği ezberleyerek değil kendi matematiklerini yaratarak matematik öğrenebilir, kanıt sayesinde matematiksel fikirlerin doğruluğuna ikna oldukları için özerk öğrenenler olabilirler (Bartlo, 2013). Yackel ve Cobb (1996) argümantasyon ile entelektüel özerkliğin gelişimi arasındaki ilişkiyi araştırdıkları araştırmalarında, araştırmanın başında bir ifadenin doğru olduğuna ikna olabilmek için herhangi bir dış kaynağa bağımlı olan ilköğretim öğrencilerinin, daha sonra kendi yaptıkları doğrulamalarla matematiksel fikirlerin doğruluğuna ikna olduklarında entelektüel özerklik kazandıklarını belirtmişlerdir. Bu anlamda kanıt öğrencilerin kendi matematiksel fikirlerinin doğru olduğuna ikna olmalarını sağlayarak özerkliklerinin gelişmesinde büyük rol oynamakta ve böylece *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevine hizmet etmektedir (Bartlo, 2013). Kanıt bir ifadenin doğruluğuna kişisel anlamda ikna olmayı sağlamakla beraber bu fikir sınıf tartışmasına açıldığında ve sınıf tarafından kabul edildiğinde bu ifadenin doğruluğu onaylanmış olur ve bu fikir sınıfın ortak kabulü haline gelir. Kanıt bu şekilde kullanıldığında bir iddianın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmekte ve sınıfın ortak bilgi birikiminin oluşmasına yardımcı olmaktadır (Bartlo, 2013).

Herbst vd., (2010), çalışmalarında, doğrulama işlevinin sınıf ortamında oynadığı rolü bir hikâye ile resmetmişlerdir. Buna göre bir öğretmen öğrencilerinden ikizkenar bir yamuğun kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesi sonucu oluşan dörtgenin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlamalarını ister. Sınıftaki A öğrencisi, ikizkenar yamuğun kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesi sonucu oluşan dörtgenin ardışık kenarlarının eş olduğu gözlemini ifade eder. B öğrencisi orta noktaların birleştirilmesi ile oluşan bu dörtgenin her zaman paralelkenar olduğunu iddia eder. C öğrencisi ise bu öğrenciler tarafından yapılan gözlemlerden yola çıkarak paralelkenar olduğu için karşılıklı kenarlarının eş olduğunu ve ardışık kenarları da eş olduğu için bütün kenarlarının eş olduğunu yani bu dörtgenin eşkenar olduğunu belirtir. Bu durumda öğretmen C öğrencisine, B öğrencisinin varsayımını kanıt yaparken kullanamayacağını, çünkü bunun doğruluğunun henüz kanıtlanmadığını belirtir. Böylece öğretmen matematiksel olarak doğruluğu henüz kanıtlanmamış; ancak öğrencinin doğruluğuna ikna olduğu bir argümanı reddeder. Buna göre hikâyede C öğrencisi önce B öğrencisinin varsayımının doğruluğunu araştırır. Hikâyedeki öğretmenin tepkisi ile öğrencilerin bir ifadenin doğru olarak kabul edilebilmesi için bir kanıtın varlığına ihtiyaç duyulduğunu anlamaları sağlanır. Bu sayede C öğrencisi, B öğrencisinin varsayımını kullanabilmesi için önce bu varsayımın doğruluğunu kanıtlamaya çalışır. Öğretmenin C öğrencisinin argümanını reddetmesi ve C öğrencisinin, B öğrencisinin varsayımını kanıtlamaya çalışması kanıtın doğrulama işlevinin sınıf ortamında oynadığı rolü göstermektedir.

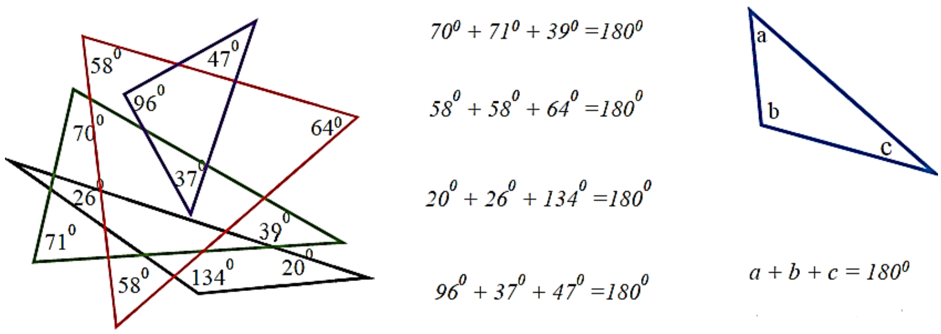
Mantıksal olarak tümdengelimsel bir kanıt istense de psikolojik olarak deneysel doğrulama ya da sezgisel anlamaya ihtiyaç olabilir. Bu nedenle kanıtlamaya başlamadan önce yapılan deneysel doğrulamalar kişiye motivasyon sağlayabilir. Deneysel doğrulama bir varsayımın birkaç özel durumla doğrulanmasından sonra bu varsayımın doğru olması hakkında bir iddiada bulunmak olarak tanımlanmaktadır (Balacheff, 1988). Matematikçiler yeni bir teoremle karşılaştıklarında sadece kanıt yapmaya çalışmazlar, aynı zamanda deneysel doğrulamalarla aksine örnekler oluşturmaya çalışırlar. Çünkü bu tür doğrulamalar gizli çelişkileri, hataları ya da gösterilmemiş varsayımları ortaya çıkarabilir. Bu sayede matematikçiler bazen eski kanıtları yeniden düzenleyebilir ya da yenilerini inşa etmelerini gerektiren aksine örnekler üretebilirler. Bu doğrulama sürecinde varsayımların yanlış anlaşılmaması tümdengelimli gerekçelendirme süreci kadar önemli bir rol oynamaktadır (Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Hanna, 1983; Knuth, 2002). Bu nedenle öğrencilerin bir varsayımı bazı özel durumlarla doğrulamalarına izin vermek varsayıma güven duymalarını ve ilk şüphelerinin yok olmasını sağlayarak öğrencilerin bu varsayımı kanıtlamak için inanç kazanmalarını sağlamaktadır. Bazen bir gösterim bir ifadenin doğrulanması için yeterli olabilmesine karşın, başkasını ikna etmek için yeterli değildir. Deneysel doğrulama ile bir varsayımın doğruluğuna ikna olmak mümkün olsa da, bu genellikle varsayımın neden doğru olduğu hakkında bilgi vermemektedir. Daha fazla örnek göz önüne alındığında deneysel doğrulama ile varsayımın doğruluğuna olan inanç artabilir; ancak bütün durumlar için bu varsayımın doğru olup olmadığı konusunda belirsizlik devam eder. Bununla birlikte kanıtın amacı sadece bir varsayımın doğru olduğuna inanmak olduğunda kanıtın doğası gözden kaçırılmış olur. Çünkü öğrencilerin doğru olduğuna inandıkları varsayımın neden doğru olduğunu da açıklamaları gerektiği bilinci, öğrencileri tümdengelimsel bir kanıt aramaya motive eder. İşte bu noktada kanıtın açıklama işlevi devreye girmektedir (Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Hanna, 1983; Knuth, 2002).

2.2.2.2. Açıklama işlevi

Kanıt bir varsayımın neden doğru olduğuna dair bir kavrayış elde etmek amacıyla kullanılabilir. Açıklamanın kanıt işlevlerinden biri olduğunu belirten pek çok araştırmacı (Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Hanna, 1983; Hersh, 1993; Knuth, 2002) mevcuttur. Harel (2013, s. 128) açıklama terimini bir varsayımın doğru ya da yanlış olma nedenini anlamak için yapılan zihinsel eylem olarak tanımlamaktadır. Herbst vd., (2010) açıklamanın kelime anlamı olarak matematiksel bir kavramın belirli bir özelliğinin, bu kavramın diğer özellikleri ile nasıl ilişkili olduğunun gösterilmesi olduğunu belirtmektedirler. Matematik biliminde matematiksel ifadeler bu bilimin yapısından kaynaklı olarak matematiksel kavramlar aracılığı ile birbirleriyle bağlantılıdır. Bu nedenle kanıt, bir yandan matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklama, öte yandan da bu ifadenin ne anlama geldiğini anlama imkânı sunarak, birbirleri ile ilişkili olan matematiksel bilgiyi temsil etmede bir araç olarak kullanılabilir (Herbst vd., 2010). Açıklama işlevi, bir varsayım kanıtlanırken bu kanıtta yer alan kavramların hem birbirleri ile hem de bu varsayım ile nasıl ilişkili olduğunu görünür hale getirmektedir ki bu da öğrencilerin matematiği anlamlı öğrenmelerine yardımcı olmaktadır. Bu işlev birçok matematikçi için doğrulama işlevinden daha önemli ve iyi bir kanıtın da temel kriteridir. Çünkü kanıtın bu rolü oynayabilmesi için kişinin kanıtında kullandığı nesneleri, bu nesnelerin özelliklerini, nesnelerin birbirleri ile ilişkisini iyi bilmesi gerekmektedir (Hanna, 1983; 2000). Bununla birlikte böyle bir kanıtta elde edilen sonucun kanıtın içindeki ilişkileri görünür kılması bilginin sistematikleştirilmesine katkı sunmaktadır (Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Hersh, 1993; Knuth, 2002; NCTM, 2000).

De Villiers'a (1990) göre açıklama işlevi hem bir iddianın neden doğru olduğuna dair bir kavrayış sağlamakta, hem de bir fikrin daha önceden bilinen bir sonucun sonucu olduğuna dair bir anlayış sağlamaktadır. Açıklama işlevini Bartlo (2013), "*kavrayış sağlama*" ve "*sonuçları görme*" olarak detaylandırmaktadır. Bartlo'ya göre (2013) öğrenciler çoğu zaman deneysel doğrulamalar ile bir iddianın doğru olduğuna ikna olabilmekte; ancak bu doğrulamalar öğrencilerin problemdeki matematiği anlamalarına yardımcı olmamaktadır. Oysaki öğrencilerin kanıt yaparken kullandıkları kavramlar ve işlemler hakkında derin bilgi sahibi olmaları gerekmektedir ki bu durum bir iddianın neden doğru olduğuna ve nasıl çalıştığına dair kavrayış sağlamakta ve *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmektedir (Bartlo, 2013). Bununla birlikte öğrenciler bir teoremi herhangi bir kanıtta kullandıkları zaman o teoremin sonuçlarını görebilme ve böylece o teoremi daha iyi anlama fırsatı elde edebilirler ki bu durum *sonuçları görme* alt işlevi olarak hizmet etmektedir. Özellikle aynı tanım ya da teoremlerin farklı kanıt problemlerinde farklı şekillerde yer alması bu tanım ya da teoremlerin anlamlarının ve sonuçlarının daha net görülmesini sağlamaktadır (Bartlo, 2013).

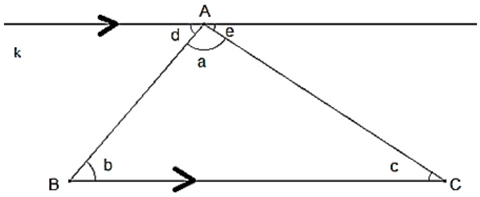
Shongwe (2019) kanıtın açıklama işlevine ışık tutmak için Şekil 2.6'da verilen tümevarımsal muhakeme örneği ile Şekil 2.7.'de verilen tümdengelimsel muhakeme örneğini kullanmıştır. Şekil 2.6'da verilen örnekte dinamik geometri ortamında çizilen çeşitli üçgenler gözlemlenmiş ve bu gözlemlere dayalı olarak genelleme yapılmıştır. Elde edilen genelleme "Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180^{o}'dir." şeklinde tümevarımsal muhakeme kullanılarak ifade edilmiştir:



Şekil 2.6. *Tümevarımsal muhakeme örneği (Shongwe, 2019)*

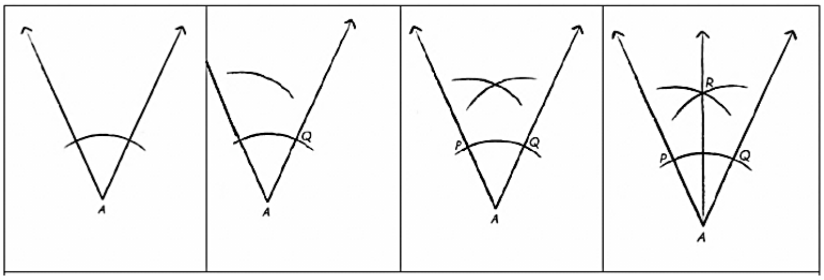
Bu durum "Neden bütün üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı 180^{o}'dir?" sorusunu doğurmuştur. Tümevarımsal muhakeme ile elde edilen varsayım Şekil 2.7'de görüldüğü gibi tanımlar, teoremler ve postulatlar ilişkilendirilerek, tümdengelimsel muhakeme ile kanıtlanmıştır. Bu kanıtta daha önce kanıtlanmış olan iç ters açı teoreminin sonucu gözlemlenmiştir. Bu kanıt bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının neden 180^{o} olduğunu aydınlatmaktadır:

- k// BC
- d+a+e= 180º (Doğru açı tanımı)
- d=b ve e=c (Paralel iki doğru üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan iç ters açılar birbirine eştir.)
- Sonuç: a+b+c = 180º (Yerine koyma aksiyomu)



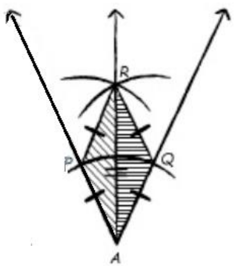
Şekil 2.7. *Tümdengelimsel muhakeme örneği* (*Shongwe, 2019)*

Herbst vd., (2010) çalışmalarında, açıklama işlevi için bir öğretmenin öğrencilerinden Şekil 2.8.'de verilen adımları incelemelerini istediği örneği verir:



Şekil 2.8. *Açıortay çizme adımları* (*Herbst vd., 2010)*

Şekil 2.8'e göre birinci adımda pergelin ucu açının tepe noktası olan A noktasına konularak açının kenarlarını kesen bir yay çizilir ve açıyı kesen noktalar P ve Q olarak belirlenir. Daha sonra pergelin ucu sırayla P ve Q noktalarına konularak açının iç kısmında kesişen iki yay çizilir ve kesiştikleri nokta R olarak belirlenir. Son olarak R ve A noktasından geçen bir ışın çizilir. Öğretmen öğrencilerden bu adımları incelemelerini ve inşa edilen [AR'nın açıortay olduğunu kanıtlamalarını ister. Buna göre öğrenciler Şekil 2.9.'da görüldüğü gibi R noktası ile sırasıyla P ve Q noktalarını doğru parçaları ile birleştirerek ortak bir kenarları olan iki üçgen oluştururlar. Buna göre oluşturulan şekilde $P\hat{A}R$ ile $Q\hat{A}R$'nin eş olduğunu göstermeleri gerekir:



Şekil 2.9. *[AR'nın açıortay olması ile RPAQ eşkenar dörtgeni arasındaki ilişki* (*Herbst vd., 2010)*

Bunun için öğrenciler başlangıçta aynı yayın açının kenarlarını kesmesinden yola çıkarak [PA] ile [QA]'nın eş olduğunu belirtirler. Benzer şekilde R noktasını oluşturmak için kullanılan yayların aynı olmasından yola çıkarak [PR] ile [RQ]'nın eş olduğunu belirtir ve $\overset{\Delta}{APR}$ ile $\overset{\Delta}{AQR}$'nin eş olduğu sonucuna ulaşırlar. Böylece öğrenciler üçgenlerin eşliği yardımıyla $P\hat{A}R$ ile $Q\hat{A}R$'nın eş olduğunu yani [AR'nın açıortay olduğunu kanıtlamış ve eşkenar dörtgenlerin köşegenleri ile ilgili özellikleri görmüş olurlar. Bu örnekte olduğu gibi öğrencilerin kanıt yaparken birçok kavramı ilişkilendirmesi, kanıtın açıklama işlevini görünür kılmaktadır.

Lockhart (2002), matematiğin açıklama sanatı olduğunu ve öğrencilerin bu etkinliğe katılma fırsatı ellerinden alındığında aslında matematiğin kendisinden -kendi problemlerini ortaya koymak, kendi varsayımlarını ve keşiflerini yapmak, yanlış yapmak, yaratıcı bir şekilde hayal kırıklığına uğramak, ilham almak, kendi açıklamalarını, kanıtlarını bir araya getirmek- yoksun bırakılacağını savunmaktadır. Sınıfta, kanıtın ele alması gereken asıl soru "neden" sorusu olduğu için eğitim alanında ilk önce odaklanılması gereken ve en önemli olan işlev, kanıtın açıklama işlevi olarak görülmektedir. Dreyfus (1999), kanıtlama ve açıklama arasında yakın bir ilişki olduğunu, bunların anlama süreçlerinde iç içe geçtiğini savunmaktadır. Bir teorem hem kanıtlanırken hem de açıklanırken, amacın "neden" sorusuna yanıt vermek olduğunu, hatta açıklamanın bazen kanıtın ötesine geçtiğini, kanıtlamada kanıtın ana fikrini vurgulayan bir açıklama istendiğini belirtmektedir. Çünkü açıklama işlevi, temel matematiksel ilişkileri görünür kılmaktadır. Bununla birlikte bir varsayımın neden doğru olduğunu göstermek yeni keşiflere de yol açmaktadır (Hanna, 2000).

2.2.2.3. İletişim işlevi

Kanıt matematiksel düşüncenin iletilmesi amacıyla kullanılabilir. İletişimin kanıt işlevlerinden biri olduğunu belirten pek çok araştırmacı (Cilli-Turner, 2017; Dennis, 2000; De Villiers, 1999; Knuth, 2002) mevcuttur. İletişim kanıtta ulaşılan sonuçların paylaşılmasını, tartışılmasını, doğruluğunun farklı kişilerce kabul edilmesini ya da reddedilmesini kapsamaktadır (Herbst vd., 2010). Matematiğin sosyal bir bilgi olmasından kaynaklı olarak, matematiksel kanıt hem geçmişteki hem de günümüzdeki matematikçiler için, bazı ifadelerin geçerliliğini ortaya koymanın yanı sıra diğer matematikçilerle iletişim kurmanın bir aracı olarak da görülmektedir (Balacheff, 1991). Geçmişte de günümüzde de matematikçiler kendi sonuçlarını yayımladıktan sonra matematik topluluğu tarafından neyin doğru kabul edileceği belirlenmekte, hatalar tanımlanmakta ve düzeltilmektedir. Ayrıca bir matematikçinin kanıtı farklı bir matematikçinin farklı bir teoremle ilgili olan kanıtını tamamlamak için ihtiyaç duyduğu yeni bir yaklaşım ya da tekniği gösterebilmektedir (Cadwallader Olsker, 2011).

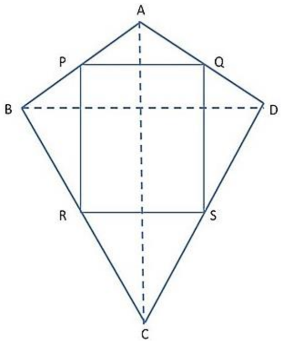
İletişim, fikirlerin başkalarına aktarılarak ya da başkalarıyla paylaşılarak hem formüle edilmesini hem de biçimlendirilmesini ifade etmektedir. Kanıt aynı zamanda matematik alanında bir tartışma forumu oluşturarak sosyal etkileşimin bir şekli olarak görülebilir, bu sayede hatalar tanımlanabilir ya da karşı örneğin keşfedilmesiyle varsayımın reddedilmesine katkıda bulunabilir (De Villiers, 1990). Bartlo (2013), iletişim işlevini "*söylem biçimini ortaya çıkarma*" ve *"tartışma ortamı yaratma"* olarak detaylandırmaktadır. Kanıt, matematikçiler arasında olduğu gibi öğretmen ile öğrenci arasında ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçları iletmenin benzersiz bir yolu, aynı zamanda öğrencilerin hatalarını düzeltebilecekleri kritik tartışmaların yapılacağı bir forumdur. Bartlo'ya (2013) göre öğrencilerin bir konu hakkındaki gerekçeleri aslında o konuyu nasıl kavradığıyla ilişkilidir. Dolayısıyla öğrenciler kanıt yaparken fikirlerini ilettiğinde, söylem biçimleri sayesinde öğrencilerin kanıt içinde kullanılan tanımlarla, teoremlerle ya da kavramlarla ilgili anlama boşlukları ortaya çıkar ki bu da öğretmene değerlendirme fırsatı verir. Benzer şekilde öğrenciler başka öğrencilerin gerekçelerini değerlendirerek anlamaya çalıştığında hem yeni öğrenme fırsatları elde edebilirler hem de farklı gerekçeler arasında ilişki kurabilirler. Öğrenciler birbirlerinin iddialarını çürütmeye çalıştığında daha güçlü matematiksel argümanlar üretebilirler. Matematikçilerin farklı çözüm stratejileri öğrenmek için başka matematikçilerin kanıtlarını incelemesi gibi sınıf ortamında öğrenciler birbirlerinin kanıtlarını inceleyerek probleme farklı bakış açılarıyla yaklaşabilirler (Bartlo, 2013). Bu sayede tek bilgi kaynağının öğretmen olduğu geleneksel anlayıştan çok farklı, öğrencilerin hem kendi deneyimleri ile hem de akranları sayesinde bilgiye ulaştıkları bir sınıf ortamı yaratılmış olur. İkinci olarak kanıt *tartışma ortamı yaratma* olarak da hizmet edebilir. Öğrenciler kanıt yaparken birbirleriyle fikirlerini paylaştıklarında hem kendi argümanlarındaki hem de diğer öğrencilerin argümanlarındaki tutarsızlıkları görme fırsatı elde ederler. Öğrencilerin tartışma ortamında karşı argümanlara yanıt verirken kendi argümanlarını gözden geçirmeleri ve düzeltmeleri yeni öğrenme fırsatları yaratabilir (Bartlo, 2013). Sınıf ortamında kanıtın iletişim işlevi sayesinde bir yandan öğrenci kendi öğrenme süreci ile ilgili kendi değerlendirmesini yapabilirken, diğer yandan öğretmen hem öğrencileri hem de kendi öğretimini değerlendirebilir (Stables, 2014). Öğrencilerin "neden" sorusu ile ilgili olan sezgisel düşünceleri, başkalarına aktarılacağı zaman daha sistematik olabilir, daha iyi açıklamalarla değiştirilebilir (Zaslavsky vd., 2012). Bununla birlikte matematiksel fikirleri başkalarının bakış açılarından dinlemek, görmeye ve anlamaya çalışmak, kişinin kendi düşüncelerini geliştirmesine ve ilişkilendirmesine olanak sağlayabilir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2009).

Matematiksel bilginin toplumda yayılması sosyal bir süreç olduğu için kanıt sosyal bir iletişim biçimi olarak görülebilir. Çoğu zaman kanıt süreci, matematikçiler tarafından yapılan bir kanıtın, diğer matematikçilerin bu kanıtın varlığına ikna olmaları ile tamamlanır. Benzer şekilde sınıf ortamında kanıt hem argümanların iletilmesini hem de öğrencilerin birbirleri ile nasıl iletişim kuracaklarını göstermesi bakımından önemlidir (Herbst vd., 2010). Kanıtın sunduğu sosyal etkileşim, öğrencilerin başkalarının görüşünü dinleme, kendi düşüncelerini ifade etme, iş birliği yapma, ortak çözüm üretme gibi sınıf sosyal normlarının şekillenmesini sağlayabilir.

2.2.2.4. Buluş (Discovery) işlevi

Kanıt yeni sonuçların keşfinde, icadında ya da yeni varsayımların üretilmesinde rol oynamaktadır. Stylianides'e (2009) göre yeni sonuçlar, öğrencilerin yaptıkları kanıt sonucunda kendi bilgilerine ekledikleri yeni bilgilerini ifade etmek için kullanılmaktadır. Matematik tarihinde, bir teorem kanıtlanırken yeni gerçeklerin keşfedildiğini gösteren birçok örnek vardır. Teoremlerin çoğu, kanıtın yapımıyla doğrulanmadan önce sezgiler ya da deneysel yöntemler aracılığıyla keşfedilmiştir. Bununla birlikte kanıt sayesinde daha genel bir durum için bir varsayımın sonuçları analiz edilebilir. Kanıt sadece daha önce keşfedilen sonuçların doğrulanmasını değil, aynı zamanda yeni sonuçların keşfedilmesini ve analiz edilmesini de kapsamaktadır (De Villiers, 1990). Bartlo (2013) buluş işlevini *"keşif yapma"* ve *"analiz yapma"* olarak detaylandırmıştır. Matematik alanında buluş işlevi matematik bilimi için yeni olan sonuçların keşfedilmesini, yapılan kanıtın analiz edilerek matematikçilerin sonuçlarını genellemesini ifade ederken, sınıf ortamında buluş işlevi öğrencilerin kendileri için yeni olan bilgileri keşfetmesini, kendi kanıtlarındaki argümanın anahtar kavramını farklı şekillerde kullanabilmelerini ifade etmektedir. İlk olarak kanıt öğrencilerin var olan bilgilerinin sonuçlarının etkisini fark ederek keşfetmeyi sağlar. Öğrenciler kanıt yaparken önce kendilerinde olan bilgiler ile çalışmaya başlarlar, daha sonra kendileri için yeni olan bilgiler keşfettiklerinde eski bilgileri ile yeni olanlar arasında ilişki kurarak kendi bilgilerini genişletir, yani bir kavramı diğerinin üzerine inşa ederler. Böylece öğrencilerin kanıt yaparken var olan bilgilerinin sonuçlarını keşfederek yeni matematiksel fikirler öğrenmeleri durumunda kanıt *keşif yapma* olarak hizmet eder (Bartlo, 2013). Buluş yapmanın yollarından bir tanesi var olan bilgilerin sonuçlarını keşfetmek iken diğeri de yapılan bir kanıtı analiz ederek sonuçların genellenmesini sağlamaktır. Yapılan kanıtın analiz edilmesi, yeni kavramlara olan ihtiyacı ortaya çıkarıp bu kavramların öğrenilmesi konusunda öğrenciyi motive eder, kanıtın özünü anlamalarını sağlar ki bu durumda kanıt *analiz yapma* olarak hizmet eder. Hatta bazen kanıt yaparken ortaya çıkan bir argümandaki anahtar kavramın genellenmesiyle kanıtlanandan daha güçlü bir matematiksel ifade keşfedilebilir (Bartlo, 2013). Bartlo (2013), Şekil 2.10.'da verilen "ABCD deltoidinin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulan PQSR dörtgeni dikdörtgendir." önermesinin kanıtında kullanılan anahtar kavramın deltoidin köşegenlerinin dik kesişmesi olduğunu belirtmiş ve aşağıdaki gibi göstermiştir:

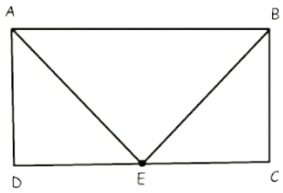
- $\overset{\Delta}{ABD}$ için PQ = $\frac{1}{2}$ BD ve PQ//BD (Orta nokta teoremi)
- $\overset{\Delta}{BCD}$ için RS = $\frac{1}{2}$ BD RS//BD (Orta nokta teoremi)
- PQ//RS ve PQ=RS
- $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$, $s(B\hat{A}C) = s(D\hat{A}C)$
- AC, $\overset{\Delta}{ABD'}$ nin açıortayı
- AC $\perp$ BD ve PQ $\perp$ RS, PQSR dikdörtgendir.



Şekil 2.10. *ABCD deltoidinin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek oluşturulan PQSR dörtgeni (Bartlo, 2013)*

Şekil 2.10'da gösterildiği gibi genellenebilir anahtar kavram sayesinde bu önermenin kanıtı, köşegenleri dik kesişen bütün dörtgenlerde kenarların orta noktaları birleştirilerek oluşan dörtgenin dikdörtgen olmasının fark edilmesiyle sonuçlanabilir.

Herbst vd., (2010) çalışmalarında, keşif işlevinin sınıf ortamında oynadığı rolü bir örnek üzerinde açıklamışlardır. Buna göre bir öğretmen öğrencilerine Şekil 2.11'deki gibi bir ABCD dikdörtgeni çizer ve ABCD dikdörtgeninin DC kenarı üzerindeki E noktasının orta nokta olduğunu, $\overset{\wedge}{AEB}$'nin ise 90^{o} olduğunu belirtir:



Şekil 2.11. *ABCD dikdörtgeninde ne kanıtlanabilir?(Herbst vd., 2010)*

Daha sonra öğrencilerine Şekil 2.11'deki dikdörtgende AB ve BC kenarlarının uzunlukları hakkında neyi kanıtlayabileceklerini sorar, böylece öğrencilerinden önce bir varsayım oluşturmalarını bekler. Bunun üzerine A öğrencisi *"$\overset{\Delta}{ADE}$ ve $\overset{\Delta}{BCE}$ ikizkenar üçgen olduğu için BC kenarının uzunluğu DC kenarının uzunluğunun yarısıdır. Bu nedenle BC kenarının uzunluğunun, AB kenarının uzunluğunun yarısı olduğu gösterilebilir."* şeklinde bir iddiada bulunur. Buna göre, A öğrencisi $\overset{\Delta}{ADE}$ ve $\overset{\Delta}{BCE}$'nin hem eş hem de ikizkenar üçgenler olduğunu fark ederek BC kenarının uzunluğunun, AB kenarının uzunluğunun yarısı olduğunun kanıtlanabileceğini belirtir. Bu örnek hem kanıtın keşif işlevinin matematiksel önermelerin kaynağı olabileceğini göstermesi bakımından, hem de öğretmenlerin öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yaptıklarını gözlemleyebilmelerini sağlaması bakımından önemlidir.

Schoenfeld'a (1994) göre matematikçiler bir şeyin doğru olduğunu öğrenmek istediklerinde ve bunun nedenini merak ettiklerinde sezgiler geliştirmek için örnekleri araştırır, daha sonra sonucu kanıtlamaya çalışırlar. Kanıt üretmek bir anlamda yapıyı keşfetme çabası olarak görülebilir, çünkü sonuca ulaşma yolunu ve içindeki parçaların bu yola uyuşma sebebi araştırılır ve kanıtlama ya da reddetme çabası keşfin bir biçimi haline gelir. Herbst vd., (2010) keşif işlevinin bir yandan yeni matematiksel ifadelerin keşfedilmesi ile ilişkili olduğunu, öte yandan ise öğrencilerin bu ifadeleri mantığa uygun olarak algılamalarını sağladığını belirtmektedirler. Rav (1999), kanıtın yeni bağlamsal ilişkilere, problemlerin çözümü için yeni yöntemlere ve yeni matematiksel kavrayışlara kapı açması sebebiyle, kanıtın bir işlevinin de matematiksel bilginin sınırlarının genişletilmesi olduğunu savunmaktadır.

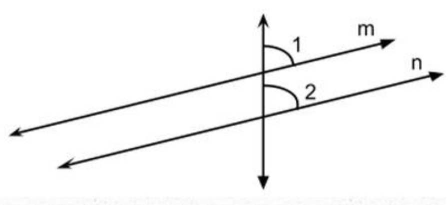
2.2.2.5. Sistematikleştirme işlevi

Kanıt sonuçların tümdengelimsel bir sistem içinde düzenlenmesinde rol oynamaktadır. Sistematikleştirmenin kanıt işlevlerinden biri olduğunu belirten pek çok araştırmacı (De Villiers, 1990; Dennis, 2000; 1999; Hanna, 1983; 1990; Knuth, 2002) mevcuttur. Sistematikleştirme, aksiyomlar, tanımlar ve teoremlerden oluşan tümdengelimli sistemde ulaşılan sonuçların düzenlenmesi, kanıt yaparken kullanılan matematiksel ifadelerin diğer ifadelerden türetilmesi anlamına gelmektedir (Herbst vd., 2010). De Villiers (1990) sistematikleştirmeyi, ilişkisiz gibi görünen tanım, teorem ve aksiyomlar arasındaki ilişkilerin tümdengelimli bir sistem içinde organize edilmesi olarak tanımlamakta ve kanıtın bunu sağlayan tek araç olduğunu belirtmektedir. Kanıtın sistematikleştirme aracı olduğunu gösteren en klasik örnek Öklid'in Elementleridir. Öklid kendinden önce kanıtlanan teoremleri bir araya getirmiş ve bu teoremlerin tanımlardan, aksiyomlardan ve postulatlardan nasıl elde edildiğini gösterecek şekilde sistematik bir yapıda Elementlerde sunmuştur (CadwalladerOlsker, 2011). De Villiers'a (1990) göre kanıt mantıksal ve matematiksel tutarsızlıkları görünür hale getirebilir, ilişkisiz gibi görünen kavramlar, ifadeler, teoremler arasında ilişki kurabilir. Ayrıca bir konunun altında yatan yapıyı ortaya çıkarabilir, matematiğin hem içindeki hem de dışındaki konulara matematiksel fikirlerin uygulanmasını sağlayabilir ve yeni bakış açıları sağlayan ya da mevcut olanlardan daha ekonomik, zarif ve güçlü olan alternatif tümdengelimli sistemlerin oluşturulmasına yardımcı olabilir. Bartlo (2013) sistematikleştirme işlevini *"tutarsızlıkları ortaya çıkarma", "ilişkileri ortaya çıkarma", "küresel perspektif sağlama", "uygulama"* ve *"alternatif sistemlerin ortaya çıkmasını sağlama"* olarak detaylandırmaktadır. Bartlo'ya (2013) göre kanıt tutarsızlıkları ortaya çıkarır ve bu özellikle sınıf ortamında öğrencilerin aksine örnek verdikleri durumlarda gerçekleşir. Ayrıca kanıt öğrencilerin kendi kişisel matematik sistemlerindeki tutarsızlıkları, kendi mantıksal ve matematiksel kusurlarını görebilmelerini sağlayarak matematik öğrenmelerine yardımcı olabilir. Öğrenciler kendi sistemlerindeki tutarsızlıkları fark ettiklerinde yaşadıkları dengesizlikten kurtulmak için bilgilerini tekrar yapılandırırlar. Böylece kanıt *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet eder. Öğrenciler kanıt yaparken yanlış iddialarda bulunduklarında verilen aksine örneklerle kendi teorilerindeki tutarsızlıklardan kurtulup mevcut bilgilerini yeniden düzenlemek zorunda kalabilirler (Bartlo, 2013). Bartlo (2013), çalışmasında sunduğu bir örnekte öğrencilerden köşe sayısı bilinen bir çokgenin köşegen sayısını hesaplamaları istendiğinde, öğrencilerin ürettiği çeşitli varsayımların öğretmen tarafından aksine örnek verilerek çürütüldüğünü belirtmiştir. Bu durumda bazı öğrenciler aksine örneklere itiraz ederek verilen aksine örnekleri çürütmeye çalışmış, bazı öğrenciler ise sunulan aksine örnekler ışığında problemdeki köşegen, çokgen gibi kavramların tanımlarını tekrar gözden geçirmiştir. Böylece öğrencilerin kendi sistemlerindeki tutarsızlıkları görmeleri, yeni varsayımlar üretebilmeleri sağlanmıştır (Bartlo, 2013). Kanıt ayrıca kavramlar arasındaki ilişkileri görünür hale getirerek bilginin sistematikleştirilmesini sağlamaktadır. Çünkü öğrenciler kanıt yaparken önceki bilgilerini yeni bilgiler yaratabilmek için genişletir, ilişkisiz gibi görünen ifadeleri ilişkilendirebilir ve kendi kavram ağlarını oluşturabilirler. Böylece hem bildikleri kavramları ilişkilendirerek hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek matematik öğrenebilirler. Ayrıca öğretmenlerin, öğrencilerin yeni öğrendikleri ile daha önce bildikleri teorem, tanım ve aksiyomları nasıl ilişkilendirdiklerini görebilmeleri sağlanır, böylece kanıt *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet eder (Bartlo, 2013). Kanıtın, bir konunun altında yatan ve konuyla ilgili diğer tüm özelliklerin elde edileceği aksiyomatik yapıyı ortaya çıkararak bilginin sistematikleştirilmesini sağlaması kanıtın *küresel perspektif sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmektedir (Bartlo, 2013). De Villiers'ın matematikçilerin kanıt sayesinde elde ettikleri fikirleri matematiğin hem içinde hem de dışında uygulayabilmelerini, Bartlo

(2013) sınıf ortamına taşıyarak kanıtın, öğrencilerin çözümlerini genellemelerine yardımcı olduğunu, böylece karşılaştıkları farklı problemlere de bu çözümleri uygulayabildiklerini, bir kuralın farklı durumlarda nasıl uygulanabileceğini fark edebildiklerini yani kanıtın *"uygulama"* alt işlevi olarak hizmet ettiğini belirtmektedir. De Villiers'ın kanıtın alternatif tümdengelim sistemlerin oluşturulmasına yardımcı olmasını, Bartlo (2013) sınıf ortamına taşıyarak öğrencilerin kanıt problemleri çözerken yeni çözüm stratejileri, yeni düşünme biçimleri geliştirebildiklerini, yani kanıtın *alternatif sistemlerin ortaya çıkmasını sağlama* alt işlevi olarak hizmet ettiğini belirtmektedir.

Bir teorem kanıtlanırken diğer teoremlere ihtiyaç duyulması, önermelerin denkliğinin gösterilmesi, sistematik mantık kuramayan öğrencilerin kanıtlarını tamamlayamaması kanıtın sistematikleştirme işlevini görünür kılmaktadır. Kanıt bir konunun altında yatan aksiyomatik yapıyı ortaya çıkararak geniş çaplı bir bakış açısıyla bakılmasını sağlar. Bu sayede elde edilen bir sonuç daha geniş bir bilgi bütünü ile birleşir. Bu yönüyle kanıt öğrencilerin matematiksel sistemin nasıl olduğunu görmeleri bakımından önemlidir (Dennis, 2000; De Villiers, 1990; 1999; Hanna, 1983; 1990; Knuth, 2002).

Öğrenciler kanıt yaparken farklı bilgiler edinebilir ve bu bilgilerin mantıksal bir yapı içinde tekrar düzenlenmesi gerekebilir (Herbst vd., 2010). Herbst vd., (2010) çalışmalarında, sistematikleştirme işlevinin sınıf ortamında oynadığı rolü bir örnek ile göstermişlerdir. Buna göre bir öğretmen öğrencilerine Şekil 2.12'de görüldüğü gibi "Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan yöndeş açılar eştir." şeklindeki yöndeş açılar postulatını sunar:



Şekil 2.12. *Yöndeş açılar postulatı*

Daha sonra öğretmen öğrencilerden "Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan iç ters açılar birbirine eştir." şeklinde verilen teoremi kanıtlamalarını ister. Buna göre öğrenciler, bu teoremin kanıtını yaparken öğretmenin daha önce verdiği postulatı kullanırlar. Bu sayede öğrencilerin postulat ve teorem arasındaki ilişkiyi görebilmeleri, kanıt yapabilmeleri için bu ilişkileri tümdengelimsel sistem içinde kullanmaları gerektiğini fark edebilmeleri sağlanır.

De Villiers (1999), kanıtın işlevlerinin birbirinden ayrıldığı durumlar olmasına karşın pek çok durumda iç içe geçtiğini bazı durumlarda bir işlevin diğerlerinden daha baskın olduğunu, bazı durumlarda birkaç işlevin aynı anda ortaya çıkabileceğini bazı durumlarda ise hiçbir işlevin ortaya çıkmayabileceğini belirtmektedir.

Hanna (2000), sınıfta kanıtın rolünü ortaya koymaya çalışırken matematik derslerindeki kanıtlarda kanıtın işlevlerine aynı ağırlığın verilmesi mümkün olmasa bile, işlevlerin hepsinin yansıtılması gerektiğini belirtmektedir. En iyi kanıtın, bir teoremin doğru olduğunu kanıtlayan kanıt olmadığını aynı zamanda bu kanıtın kanıtlanmış olan teoremin anlamını anlamada yardımcı olması gerektiğini savunmakta; ancak böyle bir kanıtın daha ikna edici ve daha fazla keşiflere yol açabildiğini belirtmektedir (Hanna, 2000). Tablo 1.1'de Bartlo (2013) tarafından sunulan kanıt işlevleri, her bir işlevin alt işlevleri ve bu işlevlerin göstergeleri özetlenmiştir:

Tablo 1.1. *Kanıt işlevleri ve alt işlevleri (Bartlo, 2013)*

Kanıt İşlevleri	Kanıtın Alt İşlevleri	Alt İşlev Göstergeleri
Doğrulama	Doğru olduğuna ikna olma (Conviction)	Kanıt matematik sınıflarında öğrencileri varsayımların ya da teorilerin doğru olduğuna ikna ederek, öğrencileri şüpheden kurtarmaktadır.
	Doğruluğunu onaylama (Confirmation)	Kanıtlanan bir ifadenin doğruluğunun sınıf tarafından kabul edilmesiyle bu ifadenin doğruluğu onaylanmış olur ve bu fikir de sınıfın ortak kabulü haline gelir.
Açıklama	Kavrayış sağlama (Insight)	Kanıt matematiksel bir olgunun neden doğru olduğuna ve nasıl çalıştığına dair kavrayış sağlamaktadır.
	Sonuçları görme (Consequences)	Kanıt yaparken kullanılan bir kavramın sonuçlarını görmek öğrencilerin bu kavram hakkında daha fazla bilgi sahibi olmalarını sağlamaktadır.
İletişim	Söylem biçimini ortaya çıkarma (Form of discourse)	Kanıt öğretmen ile öğrenci ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamaktadır.
	Tartışma ortamı yaratma (Forum for debate)	Kanıt öğrencilerin hatalarını düzeltebilecekleri kritik tartışmaların yapılacağı bir tartışma ortamı yaratılmasını sağlamaktadır.
Buluş	Keşif yapma (Exploration)	Kanıt öğrencilerin var olan bilgilerinin sonuçlarını keşfederek yeni matematiksel fikirler öğrenmelerini sağlamaktadır.
	Analiz yapma (Analysis)	Kanıt bir argümanın yeni sonuçların oluşturulmasını sağlayacak genellenebilir anahtar kavramını ortaya çıkarmaktadır.
Sistematikleştirme	Tutarsızlıkları ortaya çıkarma (Inconsistencies)	Kanıt öğrencilerin kendi matematik sistemlerindeki tutarsızlıkları görmelerini sağlayarak matematik öğrenmelerine yardımcı olmaktadır.

Tablo 1.1. (Devam) *Kanıt işlevleri ve alt işlevleri (Bartlo, 2013)*

	İlişkileri ortaya çıkarma (Connections)	Kanıt kavramlar arasındaki ilişkileri görünür hale getirerek bilginin sistematikleştirilmesini sağlamaktadır.
	Küresel perspektif sağlama (Global perspektif)	Kanıt bir konunun altında yatan ve konuyla ilgili diğer tüm özelliklerin elde edileceği aksiyomatik yapıyı ortaya çıkararak bilginin sistematikleştirilmesini sağlamaktadır.
	Uygulama (Application)	Kanıt öğrencilerin çözümlerini genellemelerine yardımcı olarak, karşılaştıkları farklı problemlere de bu çözümleri uygulayabilmelerini, bir kuralın farklı durumlarda nasıl uygulanabileceğini fark etmelerini sağlamaktadır.
	Alternatif sistemlerin ortaya çıkmasını sağlama (Alternative systems)	Kanıt yeni düşünme biçimlerinin geliştirilmesini yeni tümdengelimsel sistemlerin ortaya çıkmasını sağlamaktadır.

Kanıt yapmanın matematik için ne kadar önemli olduğu farklı araştırmacılar tarafından ortaya konulurken kanıtın sınıflardaki öğrencilere ulaşabilmesinin yolu hiç şüphesiz bunu destekleyecek olan öğretim programlarıdır. Bu nedenle matematik öğretim programlarında kanıtın yolcuğunun ele alınması gerektiği düşünülmüştür.

2.2.3. Kanıtın matematik öğretim programlarındaki yeri ve önemi

Özellikle son yıllarda tüm dünyada kanıtların öğretilmesi ve öğrenilmesi ile ilgili çalışmaların sayısında bir artış olmuş, 1990 ve 1999 arasında matematik eğitiminin önde gelen dergilerinde bu konuyla ilgili yüzlerce araştırma yazısı yayınlanmıştır. Buna ek olarak, 1997'den beri Nicolas Balacheff'in *"Matematiksel Kanıtın Öğretimi ve Öğreniminde Uluslararası Bülten"* adlı sitesi bugüne kadar binlerce kez ziyaret edilmiştir. Bunlar, kanıtın matematik eğitiminde önemli bir konu olduğuna dair kesin işaretlerdir (Hanna, 2000).

Stylianou vd., (2009), kanıtın reform çalışmalarından önce, sadece lise geometrisinde yerini bulduğunu, diğer derslerde çok nadir ortaya çıktığını ve ilköğretimde neredeyse hiç görülmediğini belirtmektedirler. Ancak reform çalışmaları ile beraber anaokulundan liseye kadar, çocuğun bütün matematik eğitimi boyunca, öğretim programında kanıtın var olması gerektiği ile ilgili alınan kararlar kanıta olan bakış açısını değiştirmiştir. Sınıfta kanıtın rolünün algılanmasındaki değişiklikler matematik öğretim programında dünya çapındaki reformların ve bu yüzyılda matematik felsefesindeki değişikliklerin doğal sonucudur (Almeida, 1996). Farklı ülkelerde çalışan araştırmacılar yıllar içerisinde kanıt ile sınıftaki uygulamalar arasında kopukluk olduğunu rapor etmiştir. Bu değişimle ilgili İngiliz öğretim programını inceleyen

Waring (2001), 1960’lı yıllara kadar, İngiliz okullarında öğrencilere aritmetik yerine, teoremlerin kanıtları da dâhil Öklid geometrisi öğretildiğini belirtmektedir. Daha sonra bu eğitimin diğer düşünce alanlarına aktarılmasının çok sınırlı olması da dâhil pek çok nedenden ötürü, Öklid kanıtlarına çok az yer verilerek, dönüşüm geometrisinin ilgi gördüğünü belirtmektedir. İngiliz Ulusal Öğretim Programı (1988) matematiksel kavramların bilgisine ve işlemlere vurgu yapmakta ve kanıt ulusal testlerde nadiren görülmektedir (Waring, 2001). Ancak bu duruma karşı çıkan bazı araştırmacılar olmuştur. Örneğin, Dowling matematik derslerinde tümdengelimin var olmadığını ve bir varsayımın ifade edildiğini ve sadece deneysel olarak test edildiğini gözlemlemiş (Dowling and Noss, 1990), Perks ve Prestage (1995) ise öğretim programının ve sınavların kanıtlara yeteri kadar özen gösterilmemesi ile ilgili endişelerini dile getirmişlerdir. Ayrıca Londra Matematik Derneği, Matematik Enstitüsü ve Kraliyet İstatistik Kurumu, Ekim 1995’te yayımladıkları ortak bir makalede bu eğilime tepki göstererek, Ulusal Öğretim Programı’nın kanıtı da içerecek şekilde değişimini önermiş ve öğrencilerin üniversite matematiğine yeterince hazırlayamadıkları için okulları eleştirmiştir (Hanna, 2000). Yeniden düzenlenen İngiliz Ulusal Öğretim Programı’nda öğrencilerin kanıt fikirleriyle erken yaşta karşılaşmaları vurgulanırken, yıllarca kanıtın ihmal edilmesinin sınıflarda çok az kanıt deneyimleri olan öğretmenlerin yaratılmasına neden olduğu söylenmiştir. Bunun sonucu olarak, bu öğretmenlerin sadece okul matematiğinde kanıtın önemli rolünün farkında olmalarının yeterli olmayacağı, aynı zamanda kanıt kavramını öğretebilmek için öğretim stratejilerinin geliştirilmesinde pratik desteğe ihtiyaç duyacaklarının aşikâr olduğu belirtilmiştir (Waring, 2001).

Amerika Birleşik Devletleri’nde de durum farklı değildir. 1950 ve 60’lı dönemlerde modern matematik olarak adlandırılan teorik matematiğin yapısının daha soyut olması nedeniyle aksiyomatik yöntem ve formel kanıt tüm matematik konularının ve matematiksel düşünmenin merkezine yerleştirilmiştir (Hanna, 1983). 1962’de, 65 matematik eğitimcisi, pedagojik nedenlerden dolayı matematiğe bu kadar formel yaklaşımın fazlalığını kınamış ve özellikle ortaokulda sadece formel kanıtı vurgulamanın uygunluğunu sorgulayan bir bildiri yayınlamışlardır (Hanna, 1983). Hatta NCTM (1989) tarafından hazırlanan standartlar ilk yayımlandığında, kanıt kavramının geleneksel uygulamalar içerdiği, kanıtın Öklid geometrisinin aksiyomatik sistemine dayalı olması çok fazla eleştiri almış ve pedagojik açıdan yanlış bulunmuştur (Hanna, 1983). Bir dönem de kanıtın öğrenci merkezli yaklaşıma aslında uygun olmadığını, kanıt öğretiminin otoriter bir yaklaşım olduğunu savunan görüşler ortaya çıkmıştır. Bunun üzerine Hanna (1995) kanıtın, kullanılan tüm bilgilerin ve tüm muhakeme kurallarının açıkça ortaya konulduğu, eleştiriye açık, şeffaf bir argüman olduğunu, kanıtın öğrencilere her şeyin nedenini kendilerinin ortaya çıkarabileceği mesajını verdiğini belirtmiştir. Bu yüzyılın sonlarına doğru artık bir düşünme biçimi olarak tümdengelim yöntemine daha fazla önem verme şeklinde bir başka eğilim ortaya çıkmaya başlamıştır. Böylece son yayımlanan NCTM (2000) raporunda, mantık ve kanıtın anaokulundan 12. sınıfa kadar her seviyedeki matematik öğretim programının bir parçası olması önerilmiştir. Bu rapora göre öğrencilerden beklenen davranışlar şu şekilde belirtilmiştir:

- Muhakeme ve kanıtın matematiğin temel yönlerinden biri olduğunu görmek
- Matematiksel varsayımları yapmak ve araştırmak
- Matematiksel argümanları ve kanıtları geliştirmek ve değerlendirmek
- Çeşitli türdeki muhakeme ve kanıtlama yöntemlerini seçmek ve kullanmak.

Dünyada yaşanan değişimle beraber farklı araştırmacıların muhakeme ve kanıtın öğretim programlarında yer almasının gerekliliğine vurgu yapmasına karşılık MEB (2018) Matematik Dersi Öğretim Program'ları incelediğinde muhakeme ve kanıtın yeterli düzeyde ele alınmadığı görülmektedir. İlk ve ortaokullar için yayımlanan matematik dersi öğretim programında muhakeme ve kanıt, *"Kuralı verilen sayı ve şekil örüntülerinin istenen adımlarını oluşturur."*, *"Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur."* kazanımlarıyla ele alınmıştır. Bu programda Türkiye Yeterlilikler Çerçevesinde [TYÇ], sekiz başlık altında ele alınan yetkinliklerden biri de matematiksel yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinlikler olarak belirtilmiştir. Buna göre matematiksel yetkinlik, günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözmek için matematiksel düşünme tarzını geliştirme ve uygulama, düşünme (mantıksal ve uzamsal düşünme) ve sunmanın (formüller, modeller, kurgular, grafikler ve tablolar) matematiksel modlarını kullanma beceri ve isteğini içermektedir. Bilimde yetkinlik ise soruları tanımlamak ve kanıta dayalı sonuçlar üretmek amacıyla doğal dünyanın açıklanmasına yönelik bilgiden yararlanma beceri ve isteği olarak açıklanmaktadır (MEB, 2018). Bu başlık altında mantıksal düşünme ve kanıta dayalı sonuçlar üretilmesine vurgu yapılmasına karşın programda kanıt yeterli düzeyde ele alınmamıştır. Yine aynı programda, "Genel Amaçlar ve Temel İlkeler" doğrultusunda Matematik Dersi Öğretim Programı'nın ulaşmaya çalıştığı özel amaçlarda öğrencilerin matematiksel okuryazarlık becerilerinin geliştirilmesi ve bu becerilerin etkin bir şekilde kullanılabilmesi vurgulanmaktadır (MEB, 2018). Ayrıca problem çözme sürecinde öğrencilerin kendi düşünce ve muhakemelerini rahatlıkla ifade edebilmesi, başkalarının matematiksel muhakemelerindeki eksiklikleri ya da boşlukları görebilmesi amaçlanmaktadır. Bununla birlikte muhakeme ile kanıt yapabilme arasındaki güçlü ilişkinin, birçok araştırmanın bulguları arasında yer alması (Knuth, 2002; Stover, 1989), matematiksel kanıtın belirli muhakeme ve gerekçelendirme biçimlerini sergilemenin formel bir yolu olması, problem çözme sürecinde varsayımı açıklamak için mantıksal bir yol izleme ve varsayımlara dayanarak sonuca dair açıklama yapma olarak tanımlanması, kanıtın tam olarak programda vurgulanan amaçlara hizmet ettiğini göstermektedir. Program matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilmeyi, matematiğin anlam ve dilini kullanarak insan ile nesneler arasındaki ilişkileri ve nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini anlamlandırabilmeyi, kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilmeyi amaçlamaktadır. Bir kanıtın geçerli olabilmesi için kanıt yaparken kullanılan muhakemelerin, sözel anlatım, sembolik dil, tablo, diyagram gibi temsil biçimleri ile iletilmesi gerektiğinden aslında kanıt, programda vurgulandığı gibi kavramların farklı temsil biçimleri ile iletilmesi amacına da hizmet etmektedir. Program, öğrencilerin, matematiği öğrenirken deneyimleriyle matematiğe yönelik olumlu tutum geliştirmelerini, sistemli, dikkatli, sabırlı olma özelliklerinin geliştirilmesini, araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma becerilerinin geliştirilmesini, matematiğin insanlığın ortak bir değeri olduğunun bilincinde olarak matematiğe değer verilmesini amaçlamaktadır. Tam da bu nedenlerden dolayı öğrencilerin kanıt mantığını öğrenmeleri gereklidir. Çünkü kanıt ileri matematiksel düşünmeyi geliştirmenin yanı sıra öğrencilerin matematiksel bilginin oluşum sürecinin nasıl olduğunu kavramalarını sağladığı için onları matematik tarihine ve matematikçilere yaklaştırabilir, matematikçilerin çalışma şeklinde olduğu gibi sistemli sabırlı araştırmacı ve üretimci olmalarını sağlayabilir (Waring, 2001). Görüldüğü gibi matematiksel kanıt, ulaşılmaya çalışılan özel amaçlara ve yetkinliklere ne kadar hizmet ederse etsin yıllardır hak ettiği yeri programlarda bulamamıştır. Ne yazık ki, MEB (2018) İlkokul ve Ortaokul Matematik Programı'nın kanıt konusunda çok eksik olduğu görülmüştür.

Daha önceki yıllarda uygulanmakta olan MEB (2013) Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda ise kanıt muhakeme ile birlikte matematiksel süreç becerilerinin içinde yer almış, öğrencilerin matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilmeleri, matematiksel bir önermeyi kanıtlama sürecinde uygun kanıt yöntemini seçebilmeleri vurgulanmıştır. Yine aynı programda kanıt, öğretmenlere yol gösterici olması için sunulan ölçme-değerlendirme sürecinde kullanılabilecek örnek soruların arasında varsayımda bulunma, genelleme, formel ve informel kanıtlar yazma bilişsel sınıflamasında yer almıştır. Ayrıca 11. sınıfta "Mantık" alt öğrenme alanında "Açık Önermeler ve İspat Teknikleri" konusunun altında "*Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir.*", "*Mantık kurallarını basit teoremlerin ispatlarında kullanır.*", *"Tümevarım yöntemi ile ispat yapar."* kazanımları ile ele alınmıştır. Bu kazanımlar altında aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan kanıt ve çelişki yoluyla kanıt yöntemlerinin öğretilmesi vurgulanmıştır. Oysaki günümüzde kullanılmakta olan MEB (2018) Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda kanıt 9. sınıfta "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanının "Mantık" alt öğrenme alanında "Önermeler ve Bileşik Önermeler" konusunun altında sadece "*Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar.*" kazanımı ile ele alınmıştır. MEB (2018) Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi Öğretim Programında ise 9. sınıfta "Sayılar ve Cebir" öğrenme alanının "Mantık" alt öğrenme alanında "Açık Önermeler ve İspat Teknikleri" konusunun altında "*Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar.*" kazanımı ile ele alınmıştır.

Yurtdışında kanıtın rolünün algılanmasındaki değişiklikler matematik öğretim programlarında reformlar yapılmasını sağlarken, ülkemiz bu konuda ne yazık ki ilerleme gösterememiştir. Oysaki programlar öğretmenlerin öğretim uygulamalarının ve bunun sonucu olarak da öğrencilerin gerekçelendirme ve kanıtı öğrenmelerinin belirleyici faktörlerinden biri olduğu için, öğretim programlarının muhakeme ve kanıtı desteklemesi önemlidir. Bununla birlikte birçok matematik eğitimi araştırması ilkokul ve ortaokul öğrencilerinin de kanıt kavramını kavramsallaştırabilmeleri için matematik öğretmenlerinin sınıflarda kanıtın öğretilmesi için tutarlı öğretim yapmalarını önermiştir (Ball and Bass, 2003; Reid, 2002; Stylianides, 2007a; 2007b; Stylianides and Stylianides, 2008; Zack, 1997). Çünkü sadece hazır bilgilerin kullanımından ziyade bir şeyin nasıl ve neden olduğunu araştırma alışkanlığının kazanılması erken dönemlerde gerçekleşebilir. İlkokul ve ortaokulda öğrencilerde gerekçelendirme becerisinin gelişimi, öğrencilerin daha sonraki yıllarda çeşitli kanıt yöntemlerini kullanarak kendi kanıtlarını yapabilmelerini sağlamaktadır.

2.2.4. Çocukların kanıtı anlamaları

NCTM (2000), okul öncesi çocuklarının, matematiksel sonuçları bulmak ve bu sonuçların doğruluğuna ikna olmak için kendi yöntemleri olduğunu, örüntüleri tanıma ve sınıflama mantığına sahip olduklarını, örneklerden hareketle genellemeler yapabildiklerini belirtmektedir. İlkokul düzeyindeki öğrencilerin ise matematiksel ilişkiler hakkında fikirler üretebildiği, çeşitli matematiksel argümanlar ileri sürebildiği, özel örneklerden bir genellemeye ulaşılmasının her zaman mümkün olmadığını görebildiği belirtilmektedir. İlkokul düzeyinde karşımıza çıkabilecek kanıtın informel, sadece muhakeme ve argüman oluşturmaya dayalı olduğu söylenebilir. Bu düzeydeki çocukların doğuştan getirdikleri soru sorma, açıklama, gerekçelendirme yapma yeteneklerini destekleyici sınıf ortamları oluşturularak mantıksal argümanlar geliştirebilmeleri sağlanabilir (Stylianou vd., 2009). Ortaokuldaki öğrenciler ise matematiksel ifade ve önermelerini savunabilir, örüntüler aracılığıyla matematiksel ilişkileri göstermek için tümevarıma dayalı mantığı kullanabilir, matematiksel ifadeleri sembolik dil kullanarak gösterebilir, formel yönden eksiklikleri olsa da kabul edilebilir tümdengelimsel kanıt yapabilirler (NCTM, 2000). Dede ve Karakuş'un (2014, s. 65) da belirttiği gibi bu dönemde yapılan kanıtlarda formel anlamda eksiklikler olabilmesine karşın, uygun bir fikir sunma, sunulan fikri test etme ve başkalarının değerlendirmesi için mantıksal açıklamalar yapma gibi önemli eylemler gerçekleşebilir. Öğrencilerin kanıt stratejileri öncelikle ve ağırlıklı olarak deneyseldir ve her öğrencinin deneysel stratejilerden tümdengelim stratejilerine geçişi kolay olmasa da, Chazan (1993) öğrencilerin bir süre sonra sadece örnekleri inceleme yöntemine karşı şüphe duyacaklarını ve tümdengelimin gücüne yavaş yavaş inanmaya başlayacaklarını belirtmiştir.

Derek (2011) anasınıfından 12. sınıfa kadar olan öğrencilerin kanıt yapabileceklerini örneklemek adına aynı problemi farklı sınıf düzeylerine uyarlayarak, anasınıfından 12. sınıfa kadar olan öğrencilerin muhakemelerini, üçgen ve kare karşılaştırmasına verebilecekleri olası yanıtlar üzerinden açıklamıştır. Buna göre tüm sınıf düzeyindeki öğrencilere Şekil 2.13.'te gösterilen üçgen ve kare verilmiştir:

Şekil 2.13. *Üçgen ve karenin karşılaştırılması* (*Derek, 2011)*

Buna göre Derek (2011) anaokulu–2. sınıf düzeyindeki öğrencilere "Şekildeki beyaz üçgen siyah kareden küçük müdür?" diye sorulabileceğini ve çocukların bu iki şekil arasında basit düzeyde karşılaştırma yapabileceğini, büyüklük–küçüklük ilişkisini sadece modelin görünümüne bakarak söyleyebileceklerini belirtir. Bu düzeydeki öğrencilerin, nesneleri üst üste koyarak karenin üçgenden daha büyük olduğu şeklinde muhakeme yapabilmeleri gerektiğini vurgulamaktadır. 3. sınıf-4. sınıf düzeyindeki öğrencilere aynı şekil verilerek "Bütün kenarlarının uzunluğu 3 cm olan üçgen mi, bir kenar uzunluğu 3 cm olan kare mi daha büyüktür?" diye sorulabilir. Çünkü bu düzeydeki öğrenciler geometrik şekillerin isimlerini ve özelliklerini ayrıca bu şekillerin farklı özelliklerini (kenar, alan gibi) temsil eden sayıları da bildikleri için doğru muhakeme yapabilirler. Yani bu düzeydeki bir öğrenci bütün açıları ve bütün kenar uzunlukları eşit olan dörtgenin kare olduğunu, aynı zamanda alanın ne anlama geldiğini bilir. 5. sınıf–8. sınıf düzeyindeki öğrencilere aynı şekil verilerek "Kenar uzunlukları eşit olan bir eşkenar üçgenin alanı mı yoksa karenin alanı mı daha büyüktür?" diye sorulabilir. Bu düzeydeki öğrenciler problemde verilen şekillerin özelliklerini tanıyabilir ve bunları temsil eden sayılar kullanabilirler. Ayrıca, problemdeki geometrik şekillerin alanlarını temsil eden formüller hakkında bilgi sahibi oldukları için bu formülleri cebirsel olarak karşılaştırabilirler. Yapılabilecek en yaygın muhakeme, özel sayılarla başlamak ve genel olarak ilişki hakkında varsayımda bulunmaktır. Öğrencilerin bu şekilde genel formüllerden muhakeme yapabilmelerinin yanında, görselleştirme yöntemlerini ya da yazılımları kullananların sezgisel muhakemeleri de geçerli argümanlar olarak kabul edilebilir. 9. sınıf-12. sınıf düzeyindeki öğrencilere "Bir kenarının uzunluğu n olan bir eşkenar üçgenin alanının bir kenar uzunluğu n olan bir karenin alanından küçük olduğunu gösterin." diye sorulduğunda bu düzeydeki öğrenciler de özel örneklerle kanıt yapmaya başlayabilir. Ancak bu düzeydeki öğrencilerin genelleme yaparak varsayımda bulunmaları ve sadece alan formüllerini kullanarak varsayımlarını gerekçelendirmeleri gerekmektedir.

İlköğretim düzeyinde kanıtlara odaklanan Stylianides ve Stylianides (2009) erken yaşlarda genelleme yapma eğiliminin kanıt olarak isimlendirilebileceğini vurgulamaktadırlar. Stylianides (2007a), 3.sınıf öğrencilerinin muhakeme yeteneklerini incelemiş, bu öğrencilerin öğretmen desteğiyle kanıt kabul edilen argümanlar oluşturabildiklerini göstermiştir. Bu sebeple ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin matematiği anlamalarını sağlamak için kavramların, teoremlerin, kuralların öğretiminde kanıt yapılmasını önermiştir. Görüldüğü gibi araştırmalar küçük çocukların kendileri için gerçek ve anlamlı olan durumlarda mantıksal muhakeme yeteneğine sahip olduklarını ve bu nedenle de kanıt yapabileceklerini göstermektedir. Bununla birlikte son yıllarda pek çok araştırmacı çocukların kanıt yapabilme becerilerinin gelişimsel bir ilerleme gösterdiğini, bu nedenle öğrencilerin kanıta başlangıç noktası olarak örnekleri kullanmaları ve böylece deneysel düşünmeden mantıksal düşünmeye geçiş yapmalarını önermektedir (Alcock and Inglis, 2008; Iannone vd., 2011; Lockwood, Ellis and Lynch, 2016; Knuth, Zaslavsky and Ellis, 2019; Pedemonte and Buchbinder, 2011; Weber, Inglis and Mejia-Ramos, 2014). Bu modellerde araştırmacılar çocukların kanıt yapımına deneysel doğrulamalar yani örneklerle başlamalarının olağan bir durum olduğunu belirtmektedirler. Öğrencilerin gerekçelendirme ve kanıtlamadaki yetkinliklerinin gelişimsel bir ilerlemeyi takip ettiği belirtilmekte, matematiksel gerekçelendirme anlayışının daha özel ve informel olandan, tümdengelimli ve daha genele doğru ilerlemesi olağan görülmektedir (Simon and Blume, 1996, s. 9). Örneğin Piaget öğrencilerin deneysel düşünmeden mantıksal-tümdengelimsel düşünmeye nasıl ilerlediğini gösterdiği çalışmasında, bir kanıtı inşa edebilme becerisinin üç aşamada geliştiğini savunmaktadır (Battista and Clement, 1995):

Aşama 1: Bir kanıt problemiyle karşılaşan öğrencilerin öncelikle problemi anlamak için topladıkları çeşitli veriler ya da inceledikleri örnekler ayrı ve ilişkisiz olarak kabul edilir. Keşif bir plan olmadan rastgele ilerler, sonuçlar çelişkili olabilir. Örneğin, öğrencilerden bir üçgenin üç iç açısını komşu açı olacak şekilde yan yana getirmeleri, ne elde ettiklerini açıklamaları ve başka durumlar için de tahminde bulunmaları istendiğinde, öğrenciler hemen genelleme yapamazlar. Ayrıca açıların ölçüsünün farkında değildirler, açıların sırasının değişmesi durumunda doğru bir açının oluşup oluşmayacağından emin değildirler ve modelin neden oluştuğunu belirlemeye çalışmazlar.

Aşama 2: Bu aşamaya geçebilen öğrenciler bir yandan tahmin yapmak için deneysel sonuçları kullanırken bir yandan da tahminlerinin doğruluğunu göstermeye çalışırlar. Ancak sadece doğruluğuna inandıkları önermeleri mantıklı bir şekilde düşünüp yine sadece onlar hakkında bilgi edinmeye çalışırlar. Örneğin açılar görevinde, öğrenciler her yeni örnek için açıları analiz etmeye çalışırlar; ancak üç açının ölçüsü arasındaki ilişkiyi hemen göremedikleri için, genellikle sadece açıların görünümüne odaklanırlar ve yavaş yavaş üç açı arasında bir ilişki kurarlar. Öğrencilerin, herhangi bir üçgenin iç açılarının doğru bir açı oluşturduğuna inanmalarını sağlayan tümevarım, onları yeni üçgenlerin açıları hakkında düşünmeye yönlendirir.

Aşama 3: Bu aşamaya geçen öğrenciler ise, mantıksal bir sonuç çıkarmak için bir şeyin basitçe doğru olduğu inancından, bir şeyin mutlaka doğru olması gerektiği inancına geçiş yaparlar. Artık öğrencilerin varsayımlara dayanan formel, tümdengelimsel muhakeme yapabilmeleri gerekir. Örneğin, açılar görevinde öğrenciler, bir üçgenin üç iç açısının doğru açı oluşturduğuna dair deneysel genellemelerinin ötesine geçerek, herhangi bir üçgenin iç açılarının toplamının mutlaka doğru açı oluşturduğu genellemesini yapabilirler. Bu ilişkinin gerekli olduğunu görebilirler, çünkü bu öğrenciler bir üçgenin iç açılarının doğru açıyı oluşturan bütünler parçalardan oluşması gerektiğini bilirler. Dahası ölçüleri toplamları 180^{o}'den büyük olan üç açının bir üçgen oluşturamayacağını da bilirler (Battista and Clement, 1995).

Deneysel argümanlardan kanıta geçişi benimseyen araştırmacılar, öğrencilerin kanıt problemini anlamaları ve kendilerini ikna edebilmeleri için örneklerden yararlanarak muhakeme yapmalarını önerirken, daha sonra atılacak ikinci adımın bu örnekler yardımıyla kanıta ulaşmak ve bu deneysel argümanların kanıt oluşturmayacağını bilmek olduğunu da vurgulamaktadırlar. Son yıllarda örnekler ve kanıt arasındaki ilişkiyi inceleyen pek çok araştırma yapılmıştır (Alcock and Inglis, 2008; Iannone vd., 2011; Knuth vd., 2019; Lockwood vd., 2016; Pedemonte and Buchbinder, 2011; Weber vd., 2014). Özellikle doğru, amaçlı kullanılan ve rastgele değil de bir strateji kullanılarak seçilen örneklerin, öğrencilerin kanıtlamayı öğrenmelerinde güçlü bir araç olduğu belirtilmekte, bu örneklerin varsayım oluşturmada etkili olduğu ve varsayım oluşturmanın da kanıt üretmede kritik rol oynadığı düşünülmektedir (Ozgur vd., 2019). Kanıt yapabilmek için örneklerin etkili bir şekilde kullanılması aslında yeni bir konu değildir, pek çok matematikçi de kanıta başlarken örneklerden yararlanmaktadır (Lockwood vd., 2016; Lynch and Lockwood, 2019).

Örneğin Epstein ve Levy (1995) çoğu matematikçinin belirli örnekler üzerinde düşünmede çok zaman harcayarak onları analiz ettiklerini ve matematikteki ilerlemede matematikçilerin örneklerle deneme yapmalarının katkısı olduğunu belirtmektedir. Pedemonte ve Buchbinder (2011) araştırmalarında bazı örneklerin varsayım oluşturmada öğrencilere yardımcı olduğunu; ancak bu varsayımları nasıl kanıtlayacakları konusunda yardımcı olmadığını, bazılarının ise hem varsayım üretmede hem de bu varsayımları nasıl kanıtlayacakları konusunda yardımcı olduğunu belirtmişlerdir. Lockwood vd., (2016) özellikle varsayımlar oluşturmaya çalışılırken örneklerden yararlanmanın kritik öneme sahip olduğunu belirtmişlerdir. Simon ve Blume (1996) da benzer şekilde öğrencilerin gerekçelendirmelerinin deneysel argümanlardan kanıta doğru ilerleyebileceğini belirtmekte ve öğrencilerin matematiksel gerekçelendirmelerinin tümevarımdan tümdengelime ve daha genele doğru olduğunu vurgulamaktadırlar. Örnek kullanımını destekleyen araştırmacıların da belirli bir strateji kullanılarak seçilen genel örneklerin öğrencileri kanıta götüreceği ortak görüşüne sahip oldukları açıktır. Bununla ilgili olarak Knuth vd., (2019) verilen genel bir örneğin varsayımın neden doğru olduğunu açıklayabileceğini ve öğrencilerin kanıt yapmalarına yardımcı olabileceğini belirtmektedirler. Alcock ve Inglis (2008) yaptıkları araştırmada sağlam ve mantıksal olarak tutarlı gerekçeler üretebilen öğrencilerin teoremi anlamada, varsayımları test etmede, argümanları kontrol etmede ve aksine örneklerin oluşturulması gibi birçok amaçla örneklerden faydalandıklarını belirtmektedirler. Bir örnek, öğrencinin özel bir durumdan genel yapıyı tanımlamasına yardımcı olmakta, bu yapı da genellikle kanıt için bir kavrayış sağlamaktadır. Önemli olan öğrencilerin matematiksel anlamda olgunlaştıkça daha genel argümanlar oluşturabilmeleridir. Çünkü deneysel argümanlar, genellemenin kapsadığı tüm olası durumların yalnızca bir alt kümesi için doğruluğun kontrol edilmesini sağlaması bakımından geçerli değildir. Ancak kanıtlar, genelleme kapsamındaki tüm durumları göz önünde bulundurarak matematiksel genellemelerin geçerliliği için güvenli yöntemler sunmaktadır (Stylianides and Stylianides, 2009). Benzer şekilde Battista ve Clement (1995) kanıt öğretimi yapılırken, öğrencilerin görsel gerekçeleri ve deneysel düşünmeyi kullanmasına izin verilmesi gerektiğini, çünkü bu düşüncelerin daha üst düzey düşünmenin temelini oluşturduğunu belirtmektedirler. Daha sonra öğrencilerin aşamalı olarak görsel ve deneysel gerekçelerin eksikliklerini anlamaya yönlendirilmesini ve böylece formel kanıtın bazı kritik bileşenlerini keşfetmeye ve kullanmaya başlamalarını önermektedirler.

Örnek kullanımını destekleyen araştırmacıların, deneysel doğrulamaların kanıt olmadığı ve geçerli kanıt olarak kabul edilmeyeceği ortak görüşüne sahip olduğu açıktır. Bununla birlikte örnekler hem varsayım oluşturmada, hem varsayımın neden doğru olduğu konusunda fikir vermede, hem de deneysel muhakemeden tümdengelimsel muhakemeye geçiş sürecinde yardımcı olmaktadır (Ozgur vd., 2019).

Bu araştırmada amacına uygun yapılan tümevarımsal muhakemenin teoremlerin anlamını keşfetmede, varsayımlar oluşturmada, varsayımların düzenlenmesinde ya da çürütülmesi için aksine örnek oluşturmada, kişinin kendini ikna etmesinde, tümdengelimli bir kanıtın oluşumunu destekleyecek genel fikirlerin üretimini sağlamada yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Birçok araştırmacı öğrencilerin kanıtın doğasını anlamama, kanıt yapamama, kanıtları anlamak yerine ezberleme yöntemini benimseme gibi durumlarının nedeninin, kanıtın doğasına aykırı olan, öğrencileri pasifleştiren öğretim yöntemi olduğunu belirtmişlerdir (Alcock and Weber, 2005; Almeida, 2000; 2003; Selden and Selden, 1995; Weber, 2004b). Bu nedenle bu araştırmada sosyal etkileşimin üst düzeyde olduğu bir sınıf ortamında, öğrencilerin kanıtlama deneyimini en doğru şekilde yaşamaları için araştırmacının benimsediği kanıt kavramına uygun olarak ve kanıt işlevleri de göz önünde bulundurularak KARİDE modeli tasarlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin kanıt deneyimi yaşamalarını sağlayacak bir öğrenme ortamı hazırlanırken yapılması gereken ilk işin o sınıfa ait normların oluşturulması olduğu düşünülmüştür. Çünkü bilinmektedir ki öğretmenlerin sınıflarında düzenli olarak yaptığı uygulamalar bir süre sonra o sınıfa özgü kuralların, öğretmenden ve öğrenciden beklenen davranışların yani o sınıfın normlarının oluşmasını sağlamaktadır (Toluk-Uçar, 2016). Bununla birlikte tarihsel olarak bakıldığında kanıt daima matematiksel bir ifadenin doğruluğuna bir topluluğu ikna edebilmek için kullanılmış ve ikna edici olabilmesi için kanıtın sunulduğu matematik topluluğun normlarına uygun olması gerekmiştir. Matematik tarihinde bu normların zamana ve kültüre bağlı olarak değiştiği gözlemlenmiştir. (Zaslavsky vd., 2012). Bu durum sınıf ortamına uyarlandığında bir iddianın doğruluğunun onaylanabilmesi için yapılan kanıtın sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normlarına uygun olması gerekmekte ve ayrıca zaman içinde kanıt bu normları değiştirmekte ve şekillendirmektedir.

2.3. Sosyal ve Sosyo-Matematiksel Normlar

Bilişsel yapılandırmacı kuramının öncüsü olan Piaget, öğrenmenin bilişsel yönüne odaklanarak, bilginin birey tarafından pasif olarak alınmadığını, bireyin bilgiyi kendi yaşantıları hakkında muhakeme yapma sürecinde aktif olarak oluşturduğunu savunmaktadır (Von Glasersfeld, 1995). Piaget'den farklı olarak öğrenmeye sosyal bir pencereden bakan ve sosyokültürel yapılandırmacı kuramın öncüsü olan Vygotsky, bireyin kendisi sosyal bir varlık olduğu için, öğrenmenin de sosyal olarak gerçekleştirilen etkinliklere dayalı olarak oluşturulan bilgiler üzerinde gerçekleştiğini vurgulamaktadır. Bu kuramda sosyal etkileşimin ve kültürün önemi vurgulanarak bireyin yaşamı boyunca sosyal yapılar içerisinde akran ya da kendinden daha bilgili kişilerle iletişiminin öğrenmede önemli bir rolü olduğu belirtilmektedir (Cobb, 2007).

Bununla birlikte yapılandırmacılığın bilişsel yönü ile sosyal yönünü birleştiren Yackel ve Cobb (1996) bu iki perspektif arasında karşılıklı bir ilişki olduğunu, öğrenmenin bu ilişki sayesinde gerçekleştiğini, yani öğrenmede hem aktif bireysel yapılandırma hem de bireylerin karşılıklı etkileşiminin önemli olduğunu vurgulamaktadırlar. Bu çerçevede öğrenciler bir yandan kendi anlamalarını aktif olarak inşa ederlerken bir yandan da bu anlamlar bir sınıf kültüründeki sosyal etkileşimler tarafından şekillenmektedir. Kendi teorik perspektiflerinin temellerini yapılandırmacılığa, sembolik etkileşimciliğe (öğrenmenin, öğrenci ve öğretmen tarafından birlikte oluşturulan sınıf kültüründe etkileşimli olarak oluşturulması) ve etnometodolojiye (bireylerin yaşadıkları dünyayı nasıl betimlediklerinin, nasıl anlamlandırdıklarının incelenmesi) dayandırmaktadırlar (Toluk-Uçar, 2016). Cobb ve Yackel (1996) kendi çalışmalarında sınıf düzeyindeki bireysel ve kollektif etkinlikleri analiz etmek için Tablo 2.1.'de sunulan yorumlayıcı çerçeveyi kullanmışlardır:

Tablo 2.1. *Sınıf düzeyinde bireysel ve kollektif etkinliklerin analizi için yorumlayıcı çerçeve (Cobb ve Yackel, 1996)*

Sosyal Perspektif		Psikolojik Perspektif
Sınıf sosyal normları	⇔	Öğrencinin kendi rolü, diğerlerinin rolü ve matematiksel etkinliğin doğasına ilişkin inançları
Sosyo-matematiksel normlar	⇔	Matematiksel inançlar ve değerler
Sınıf matematiksel uygulamaları	⇔	Matematiksel kavrayışlar ve etkinlikler

Tablo 2.1.'de görüldüğü gibi yorumlayıcı çerçeve, matematiksel etkinliğe ilişkin olarak sosyal ve psikolojik perspektiflerin birlikle ele alındığı bir yaklaşımdır. Bu

çerçevede sosyal ya da psikolojik perspektiften biri ihmal edildiğinde öğrenmenin yeterince açıklanamayacağı vurgulanmaktadır. Yorumlayıcı çerçevedeki sosyal perspektif; sınıf sosyal normları, sosyo-matematiksel normlar ve sınıf matematiksel uygulamaları gibi kollektif etkinliklerin analizine olanak sağlamaktadır. Psikolojik perspektif ise öğrencinin ve öğretmenin kendi rollerine ve matematiksel etkinliğin genel doğasına ilişkin inançlar, matematiksel inançlar ve değerler, öğrencilerin matematiksel kavrayışları ve etkinliklerin analizine olanak sağlamaktadır (Cobb and Yackel, 1996). Sınıfta öğretmen ve öğrencilerin karşılıklı iletişim ve etkileşimleri sonucunda ortaya çıkan karşılıklı beklentiler, yazılı olmayan kurallar sosyal norm olarak ifade edilmektedir (Yackel and Cobb, 1996). Sosyal normlar zorlayıcı soru sormak, çözüm yöntemini açıklamak, arkadaşını sözü bitene kadar dinlemek, anlaşılmayan noktaları sormak, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturmak gibi bir sınıf topluluğu (öğretmen ve öğrenciler) tarafından zaman içinde oluşturulan, sınıf etkinliklerindeki düzenliliği betimleyen ve pek çok bilimin öğreniminde ortaya çıkan kurallar bütünüdür (Yackel and Cobb, 1996). Sosyo-matematiksel normlar ise matematik disiplinine özgü sosyal normlardır. Örneğin matematiksel açıdan geçerli bir açıklama yapma, matematiksel bir probleme birden fazla çözüm sunma, etkili ve farklı matematiksel çözüm sunma gibi matematik öğrenme ortamının kendine özgü bağlamı içinde şekillenen sosyal normlardır (Yackel and Cobb, 1996). Sosyal perspektif içinde yer alan sınıf matematiksel uygulamaları ise matematiksel muhakemelerin yapıldığı, öğretmen ve öğrencilerin problemleri, bu problemlerin çözüm yöntemlerini tartıştığı sınıf ortamında öğrencilerin topluluk olarak matematiksel gelişimlerini nasıl gerçekleştirdiklerinin analiz edilmesini sağlamaktadır (Cobb and Yackel, 1996). Görüldüğü gibi tablonun her satırı karşılıklı ilişkiyi göstermektedir. Örneğin sınıf matematik uygulamaları ile öğrencilerin matematiksel kavrayışları ve etkinlikleri arasında karşılıklı ilişki söz konusudur. Öğrencilerin muhakemeleri, sınıftaki matematiksel uygulamaların gelişimine olanak sağlarken aynı zamanda bu matematiksel uygulamalar sayesinde öğrenciler kendi kavrayışlarını ve etkinliklerini gözden geçirir. Böylece öğrencilerin matematiksel fikirlerinin oluşumu sınıf mikrokültürünün sosyal boyutlarıyla ilişkili olarak yorumlanmaktadır. Bu ilişkide bir yandan öğrencilerin bireysel olarak matematiksel etkinliklere aktif katılımı sınıf matematiksel uygulamalarının ve sınıf kültürünün oluşmasına katkı sağlarken bir yandan da bu uygulamalar öğrencilerin sonraki matematiksel etkinliğini şekillendirmektedir (Cobb and Yackel, 1996). Bununla birlikte sınıfta matematiksel inanç ve değerler ile sosyo-matematiksel normlar aynı zamanda sınıf normları ile öğrencinin kendi rolü, öğretmen ve diğer öğrencilerin rolü ve öğrencinin matematiksel etkinliğin doğasına ilişkin inançları karşılıklı etkileşim içindedir.

Sosyal ve sosyo-matematiksel normlar kanıt bağlamında ele alındığında öncelikle kanıt yaparken, bir yandan iddialar gerekçelendirilmekte bir yandan da uygun gerekçelerin kriterleri belirlenmektedir (Yackel and Cobb, 1996). Sosyo-matematiksel normlar olarak belirlenen bu kriterler sınıf tartışmalarına rehberlik etmektedir. Bu araştırma özelinde düşünüldüğünde öğrencilerin matematik yapmalarına olanak sağlayan öğrenme ortamında sosyal ve sosyo-matematiksel normların geliştirilmesi gerektiği düşünülmüştür. Çünkü öncelikle öğrencilerin kanıt yapabilmeleri için kanıtın varlığından haberdar olmaları ve kanıta duyulan ihtiyacın farkında olmaları çok önemlidir. Bu farkındalık için öğretmenin her matematik dersinde, öğrencilere önceden bildikleri ya da yeni öğrendikleri kavramları açıklama, yeni öğrendikleri ilişkilere neden sorusunu sorma alışkanlığı kazandırmaya çalışması önemlidir. Bu alışkanlığı kazandırmak için öncelikle öğretmenin kendisinin derslerinde, öğrenciler için yeni olan her kavramı, her olguyu, her ilişkiyi uygun gerekçelerle sunmanın önemini fark ettirmeye çalışması gerekmektedir. Öğretmen bunu yaparken aslında o sınıfta geçerli argüman olarak nelerin kabul göreceğini de açıkça gösterir. Bu sebeple matematik derslerinde "*Ne düşündüğünü açıklar mısın?, Bu sonucu nasıl bulduğunu açıklar mısın?, Bir örnek vererek ya da şekil çizerek fikrini destekler misin?, Beni düşüncenin doğruluğuna nasıl ikna edersin?,*" gibi soruların kullanılması bu sınıfta oluşturulması istenen sosyal ve sosyo-matematiksel normları pekiştirir.

2.4. İlgili Çalışmalar

Son yıllarda hem ulusal hem de uluslararası alan-yazında ilköğretimden yükseköğretime kadar her düzeyde kanıta ilişkin birçok araştırma gerçekleştirilmiş ve gerçekleştirilmektedir. Öncelikle uluslararası alan-yazın incelendiğinde yapılan araştırmaların farklı odak noktaları olduğu görülmüş ve bu araştırmanın amacına uygun olacak şekilde, çalışmalar içinden odak noktaları kanıt işlevleri, kanıt öğretimi, kanıt şemaları, kanıt düzeyleri, küçük çocukların tümdengelimsel kanıtı anlamaları olan çalışmalar seçilmiştir.

Uluslararası alan-yazında kanıt işlevleri ile ilgili teorik çerçeve sunan pek çok araştırmacı olmasına karşın (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000) sınıf ortamında kanıt işlevlerine odaklanan çalışmaların sayısının az olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, bu çalışmaların da çoğunlukla lisans öğrencileri ile yapıldıkları belirlenmiş ve bu çalışmalar aşağıda sunulmuştur (Bleiler-Baxter and Pair, 2017; Cilli-Turner, 2017; Stylianou, Blanton and Rotou, 2015).

Kanıt işlevleri ile ilgili çalışma yapan araştırmacılardan biri olan Cilli-Turner (2017) sorgulama temelli öğretimin lisans öğrencilerinin kanıt işlevi kavramları üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Çalışmada benzer özelliklere sahip kontrol ve deney grupları oluşturulmuş, bu gruplara çalışmanın başında kanıt işlevleri anketi uygulanmış ve aralarında anlamlı bir farkın olmadığı görülmüştür. Kontrol grubunda geleneksel eğitime devam edilirken deney grubunda 16 hafta boyunca sorgulamaya dayalı öğrenme ve Moore tekniği kullanılarak bir öğretim deneyi yapılmıştır. Çalışmada her ders öncesinde öğrencilere sınıf dışında kanıtlamaları gereken bir kanıt problemi sunulmuştur. Öğrenciler 3-4 kişilik gruplara ayrılmış ve her bir öğrenci sınıf dışında yaptığı kanıtı derste arkadaşlarına sunmuştur. Diğer öğrenciler kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlar, anlamadıkları yerleri sormuşlardır. Grup tartışmasından gelen dönütlerle öğrenciler kanıtlarını düzeltmiş ve son şeklini tekrar sunmuşlardır. Bu şekilde tartışma kanıtın geçerliği hakkında üzerinde görüş birliğine varıncaya kadar devam etmiştir. Öğretim deneyinin sınıf uygulamaları bittikten sonra öğrencilerin kanıt işlevi ile ilgili algılarını ortaya çıkarmak için öğrencilere anket tekrar uygulanmıştır. Araştırmanın sonunda kanıt işlevlerinden entelektüel meydan okuma, iletişim ve özerklik maddelerinde kontrol ve deney grupları arasında anlamlı bir fark olduğu diğer işlevlerde anlamlı bir fark olmadığı belirlenmiştir. Kontrol ve deney grupları arasında özellikle iletişim işlevinde anlamlı bir fark olması geleneksel eğitimin kanıtın iletişim yönünü engellediğine bağlanmıştır. Araştırmada özellikle öğrencilerin kanıtlarını sınıf dışında yapmalarının öğrencilerin özerklik duygusuna katkıda bulunduğu ve yaptıkları küçük grup tartışmalarının da entelektüel meydan okuma işlevinin ortaya çıkmasına katkıda bulunduğu belirtilmiştir.

Stylianou vd., (2015) lisans öğrencilerinin kanıt olarak kabul ettikleri argümanların özellikleri, kanıtın doğası, kanıt öğrenme ve kanıt öğretimi hakkındaki inançları (kendi rolleri ve öğreticinin rolleri), kanıt olarak seçilen argümanlarla kanıt hakkındaki inançlarının nasıl ilişkili olduğunu açıklamak için bir araştırma yapmışlardır. Araştırma, altı farklı üniversitede 535 erken dönem lisans öğrencisi (lisans birinci ya da ikinci sınıf öğrencisi) ile yapılmıştır. Sonuçlar, erken dönem lisans öğrencilerinin matematiksel kanıt yapma konusunda zorluk yaşadıklarını göstermektedir. Bununla birlikte, çok sayıda öğrenci kanıt yapma konusunda zorluk yaşamasına rağmen bu öğrencilerden verilen argümanları değerlendirmeleri istendiğinde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel argümanları kesin olarak nitelendirdikleri, deneysel argümanları ise sınırlı olarak nitelendirdikleri görülmüştür. Araştırmada yüksek başarılı öğrencilerin %86'sının, düşük başarılı öğrencilerin ise %56'sının kanıtların sadece varsayımların doğrulanmasını sağlamadığını, aynı zamanda yeni fikirlerin açıklanmasını ve iletilmesini sağladığını belirttikleri yani kanıtın doğrulama işlevinin yanı sıra açıklama ve iletişim işlevini vurguladıkları görülmüştür. Bununla birlikte öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel argümanları açıklayıcı olarak görmedikleri, bunun yerine sözlü argümanları daha açıklayıcı gördükleri belirlenmiştir.

Kanıt işlevleri ile ilgili başka bir çalışmada Bleiler-Baxter ve Pair (2017) kanıtın doğrulama, açıklama, sistematikleştirme, keşif ve iletişim rollerinin ortaya çıkmasını sağlayan sınıf içi etkinliklerin neler olduğunu araştırmışlardır. Bunun için 13 lisans öğrencisinden dönem sonu ödevi olarak De Villiers'in (1990) makalesini okumalarını, kantın beş rolünün her birini kendi sözcükleriyle özetlemelerini ve varsa her bir rolle ilişkili olduğunu düşündükleri sınıf içi etkinlikleri açıklamalarını istemişlerdir. Öğrencilerin, doğrulama işlevi için varsayımda bulunma ve problem durumları üzerinde çalışma, açıklama işlevi için tartışma ve problem durumları üzerinde çalışma arasında ilişki kurdukları belirlenmiştir. Ayrıca sistematikleştirme işlevi için problem durumları üzerinde çalışmanın, keşif işlevi için varsayımda bulunma ve problem durumları üzerinde çalışmanın, iletişim işlevi için, tartışma, problem durumları üzerinde çalışma ve eleştirmenin etkili olduğu tespit edilmiştir. Araştırmada öğrencilerin kanıtın tüm işlevleri ile en çok problem durumları üzerinde çalışma arasında ilişki kurduğu görülmüştür. Bununla birlikte doğrulama ve keşif işlevi ile varsayımda bulunma arasında, açıklama ve iletişim işlevi ile de tartışma arasında en fazla ilişki kurduğu görülmüştür.

Kanıt işlevleri ile ilgili çalışma yapan Bartlo (2013) ise kanıtın ortaokul matematik sınıflarında öğrenmeyi nasıl desteklediğini kanıt işlevleri perspektifinden ele almış ve çalışmasında De Villiers'ın kanıt işlevlerini sınıf ortamına uyarlayarak detaylandırmıştır. İşlevleri alt işlevlere ayıran Bartlo (2013) buluş işlevinin alt işlevlerinden birinin analiz yapma olduğunu belirtmiştir. Buna göre öğrencilerin kanıtlama etkinliklerine katıldıkları derslerde, kanıt yaparken problemlerdeki anahtar fikirleri belirleyebildiklerini, bu anahtar fikirleri genelleyebildiklerini, farklı problemlere uygulayabildiklerini ve bu fikirlerinin temelini keşfedebildiklerini belirlemiştir. Çalışmasında yapılan kanıtın analiz edilerek kanıt yaparken ortaya çıkan anahtar kavramın genellenmesiyle, kanıtlanandan daha güçlü matematiksel ifadelerin keşfedilebileceğini göstermiştir. Bu anahtar kavramların öğrenci öğrenmesini desteklediğini belirterek kanıt yapma ile matematik öğrenme arasındaki ilişkiyi sınıf uygulamalarından örnek durumlarla desteklemiştir. Bu örneklerden birinde öğrencilerin kanıt yaparken çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini öğrendiklerini göstermiştir. Sınıf tartışmalarında öğrencilerin genel olarak önce deneysel doğrulamalar yaptıkları, daha sonra bazı öğrencilerin genelleyici örnekler kullanarak gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Son olarak ise bazı öğrencilerin bir toplamı 2 ile çarpma ile toplanan sayıların ayrı ayrı 2 ile çarpımlarını toplamanın aynı olduğunu keşfettikleri görülmüştür.

Uluslararası alan-yazında sınıftaki kanıt uygulamalarının, çeşitli öğretmen eylemlerinin ve sınıf mikrokültürünün çeşitli düzeylerdeki öğrencilerin kanıt şemalarını, kanıt ve gerekçelendirme anlayışlarını ve kanıt becerilerini değiştirdiğini gösteren pek çok çalışma yapılmıştır (Blanton, Stylianou and David, 2009; Conner, 2007; Harel and Rabin, 2010; Martin vd., 2005; Martin and McCrone, 2003; Ozgur, 2017; Tanışlı, 2016). Bu araştırmada öğretim uygulamalarında ortaya çıkan kanıt işlevlerine, sosyal ve sosyo-matematiksel normlara odaklanıldığı için bu çalışmaların incelenmesinin önemli olduğu düşünülmüş ve bu çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Bu çalışmalardan birinde Blanton vd., (2009, s. 290-306), öğrencilerin kanıtı nasıl öğrendiklerini anlamak, kanıt becerisinin nasıl geliştiğini ortaya koymak için bir sınıftaki öğretimleri bir yıl boyunca incelemiş ve lisans düzeyinde araştırmacı-öğretmenin söylemleri ile öğrencilerin kanıt yapma yeterlilikleri arasındaki ilişkiyi bir öğretim deneyi tasarlayarak araştırmışlardır. Öğretim deneyinde öğretmen her derste sınıfa bir problem sormuş, ardından önce küçük grup tartışmaları daha sonra sınıf tartışmalarına rehberlik etmiş, öğrencilerin muhakemelerini açıklamaları ve birbirlerinin açıklamalarını ve gerekçelerini anlamlandırmaları ve kendi görüşlerini savunarak diğerlerinin görüşlerini çürütmeleri için fırsat vermiştir. Buna göre kanıt yapma becerisinin gelişebilmesi için öğretimsel yapıyı *işlemsel ifadeler, kolaylaştırıcı ifadeler, didaktik ifadeler* ve *yönlendirici ifadeler* olmak üzere dört farklı şekilde incelemişlerdir. Araştırmacılar bu dört farklı ifade türü ile öğrencilerin kanıtı anlamaları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Sonuç olarak öğrencilerden yeni fikriler paylaşmalarını, fikirlerini detaylandırmalarını, gerekçelendirmelerini isteyen öğretmen yönlendirmelerinin öğrencilerin kanıt öğrenmedeki gelişimlerinde etkili olduğunu göstermişlerdir. Bununla birlikte özellikle işlemsel ve kolaylaştırıcı yönlendirmelerin öğrencilerin varsayımlar üretmelerini sağlamada etkili olduğunu belirtmişlerdir.

Conner (2007) yaptığı çalışmada bir sınıfta gözlemlenen argümantasyon ile ortaokul matematik öğretmen adaylarının kanıt ve gerekçelendirme anlayışları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Buna göre öğretmenlerin kanıt yapma yeteneklerinin, kanıt anlayışlarının yani kanıta yükledikleri anlamın, kanıtın işlevleri hakkındaki düşüncelerinin kanıt öğretimlerine yön verdiğini göstermiştir. Bir öğretmenin özellikle kanıt işlevleri hakkındaki düşüncelerinin sınıftaki uygulamaları ve bu uygulamaların da öğrencilerin kanıt anlayışlarını etkilediğini belirtmiştir.

Harel ve Rabin (2010) yaptıkları durum çalışmasında, iki lise cebir öğretmeninin sınıf uygulamalarını bir eğitim-öğretim yılı boyunca gözlemlemişlerdir. Buna göre sınıf uygulamasının öğrencilerin kanıt şemalarını nasıl şekillendirdiğini ve öğretmenlerin sınıftaki matematiksel doğrunun tek kaynağı olduğu normunu oluşturan öğretim uygulamalarının neler olduğunu belirlemişlerdir. Buna göre Harel ve Rabin (2010), öğretmenin öğrencilerin sorularına kısa ve yönlendirici yanıtlar vermesi, öğrenciler arasında minimum düzeyde iletişim olması, öğretmenin gerekçelerinin tümdengelimden çok deneysel olması, öğretilen içeriğin gerekçelendirilmesine entelektüel anlamda ihtiyaç duyulmaması gibi uygulamaların öğrencilerde otoriter kanıt şemasının oluşumuna neden olduğunu belirtmişlerdir.

Sınıf uygulamalarının öğrencilerin kanıt şemalarını nasıl şekillendirdiğini gösteren bir başka çalışmada Martin vd., (2005), sosyal bir bağlamda öğretmen ve öğrenci eylemleri arasındaki bağlantıları inceleyerek, öğretmen uygulamaları ile öğrencilerin kanıt anlayışını ilişkilendirmişlerdir. Geometrik kanıtın öğrenimi ve öğretiminde etkin rol oynayan öğrenci ve öğretmen eylemlerinin ne olduğunu araştırdıkları çalışmalarında araştırmacılar, bir ortaokul geometri sınıfındaki öğrencileri ve öğretmeni dört ay boyunca gözlemlemişlerdir. Öğrencilerin matematiksel varsayımları oluşturdukları, gerekçelendirdikleri ve ürettikleri kanıtları tartıştıkları sınıf ortamını, öğrencilerin eylemlerini, öğretmenin eylemlerini ve bu ortamın sosyal yönlerini yorumlamışladır. Öğretmen tarafından yapılan pedagojik seçimlerin ve oluşturulan sınıf ortamının öğrencilerin kanıt ve muhakeme becerilerini geliştirmede önemli rol oynadığını belirtmişlerdir. Öğretmenin, açık uçlu görevler seçmesi, muhakeme yapma sorumluluğunu öğrenciye yükleyerek onları teşvik etmesi, öğrenci argümanlarını analiz etmesi ve öğrencilere rehberlik etmesi sonucunda, öğrencilerin aksiyomatik kanıt şemalarının geliştiğini göstermişlerdir.

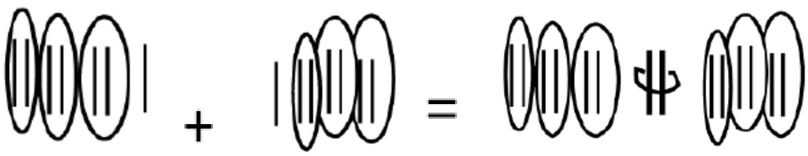
Sınıf uygulamaları ve kanıt oluşturma ile ilgili bir başka çalışmada, Martin ve McCrone (2003) öğrencilerin geometride kanıt oluşturma becerisini etkileyebilecek sınıf faktörlerini incelemişlerdir. Araştırmada öğrencilerin kanıta dayalı geometri derslerinde kanıt oluşturma becerilerinin psikolojik yönlerini karakterize etmeyi ve öğrencilerin geometrik kanıt oluşturma becerilerini, sınıf mikrokültürü ve öğretmenlerin pedagojik tercihleriyle ilişkilendirmeyi amaçlamışlardır. Araştırmacılar çalışmalarında özellikle, sosyal normlar, sosyo-matematik normlar ve sınıf matematik uygulamalarından oluşan sınıf mikrokültürü ile öğretmenin görev seçimi, günlük rutini, öğretim stratejileri ve beklentilerinden oluşan öğretmenin pedagojik seçimleri olmak üzere iki önemli faktöre odaklanmışlardır. Araştırmacılar sınıf mikrokültürünün öğrencilerin kanıt oluşturma becerilerini etkilediğini, ayrıca öğretmenlerin pedagojik seçimlerinin de hem sınıf mikrokültürünü hem de öğrencilerin kanıt yapma becerilerini etkilediğini göstermişlerdir. Buna göre öğretmenlerin, belirli bir strateji gerektiren kanıtları kullanmayı seçmeleri, öğrenciler çalışmaya başlamadan önce gerekli kanıt stratejilerinin bir modelini göstermeleri, kanıtın genel mantıksal yapısından çok ayrıntılarına odaklanmayı seçmeleri gibi pedagojik seçimleri olduğu belirlenmiştir. Çalışmada öğretmenlerin seçimlerinin sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normlarını ayrıca öğrencilerin kanıt yazma becerilerini etkilediği görülmüştür. Öğrenciler daha önceden mantıksal bir taslağı verilmeyen kanıt problemleriyle karşı karşıya kaldıklarında çoğunlukla muhakeme yapamamışlardır. Bu durumun öğretmenlerin, öğrencilerin argümanlarını değerlendirmede ve sorularını yanıtlamada tek otorite olmasından, öğrencilerin gerekçelendirme yaparken bile öğretmeni taklit etmesinden kaynaklandığı belirtilmiştir. Öğrenciler kanıt yaparken çoğunlukla öğretmenin gösterdiği iki sütunlu formatta kanıt yazmaları gerektiğini, bunun dışında yazılan kanıtın geçerli olmayacağı yönünde algı geliştirmişlerdir.

Öğretmenlerin öğretim uygulamalarının öğrencilerin kanıt öğrenmeleri üzerinde önemli ölçüde etkili olduğunu gösteren araştırmalardan biri de Ozgur (2017) tarafından yapılmıştır. Ozgur (2017) bir sınıftaki lise öğrencileri ve bu sınıfın matematik öğretmeniyle yaptığı araştırmasında sosyo-matematiksel normlar, öğretmenin kanıt ve gerekçelendirme üzerindeki vurgusu ve öğretici uygulamalar gibi sınıf faktörleri ile öğrencilerin kanıt kavramlarının gelişimi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin kanıta ilişkin görüş ve anlayışlarının, öğretim programı, öğretmenlerin öğretimsel vurguları, kanıt kavramları ve uygulamaları gibi sınıf faktörleriyle ilgili olduğu gösterilmiştir. Araştırmada matematik öğretmeninin bir iddianın yalnızca doğru olduğunu göstermek yerine, neden doğru olduğunu da anlamanın önemini derslerinde vurguladığı, öğrencilerini varsayımlarını araştırmak, iddialarını gerekçelendirmek ve genelleme yapmak için teşvik ettiği, kabul edilebilir bir gerekçe ve kanıtın ne olduğu konusunda net beklentiler belirleyerek öğrencilerinin kanıt anlayışlarını destekleyebildiği belirtilmiştir. Ayrıca sınıf faktörlerinin öğrencilerin tümdengelimsel kanıt şemasının gelişimini teşvik ettiği ve aynı zamanda bu faktörlerin öğrencilerin otoriter ve deneysel kanıt şemalarından uzaklaşmasını sağladığı gösterilmiştir.

Tanışlı (2016), ortaokul öğrencilerinin ve öğretmenlerinin verilen matematiksel ifadelere ilişkin muhakeme ve kanıtlama süreçlerini belirlemek için 2 ortaokul matematik öğretmeni ile bu öğretmenlerin 6., 7., 8. sınıfına devam eden ve her sınıftan üç öğrenci olmak üzere toplam 18 öğrenci ile çalışmıştır. Araştırma verilerinin toplanmasında klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Buna göre bazı öğrencilerin hatalı ya da öğretmen, ders kitabı gibi bir otoriteyi referans göstererek muhakeme yaptıkları, kanıtlama sürecinde öğrencilerin doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç eylem gerçekleştirdikleri, ayrıca deneysel, sezgisel ya da mantıklı olmayan gerekçeler sunarak kanıt kapsamına alınmayan argümanlar oluşturdukları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin çoğunun doğrulama ve açıklama yaparken ağırlıklı olarak örnek verme ya da deneme/yanılma yoluna gittikleri, yanı sıra genel olarak düşük ve orta başarı düzeyinden bazı öğrencilerin de doğrulama yaparken hatalı yol izledikleri görülmüştür. Diğer taraftan öğretmenlerin de genel olarak kanıt yapma eğilimlerinin daha çok doğrulama ve açıklama düzeyinde yer aldığı ve matematiksel ifadeleri kanıtlama sürecinde öğrencileri ile benzer düşünme yapılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Araştırmacı bu sonuçlara dayalı olarak muhakeme ve kanıtın ayrı bir konu alanı olarak ele alınmadan matematiksel içeriğin merkezine konulmasını yani matematik öğretiminin doğal akışı içine dâhil edilmesi gerektiğini vurgulamıştır.

Bununla birlikte uluslararası alan-yazında birçok araştırma küçük çocukların da kanıtı anlayabildiğini, bu çocuklarda tümdengelimsel kanıtın gelişebileceğini göstermektedir (Ball vd., 2002; Cry, 2011; Komatsu, 2005; Maher and Martino, 1996). Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin kanıtlama süreçlerine odaklanıldığı için bu çalışmaların incelenmesinin önemli olduğu düşünülmüş ve bu çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

İlkokul düzeyindeki çocuklarda tümdengelimsel kanıtın gelişebileceğini gösteren Ball vd. (2002) üçüncü sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakemeye yönelik eğilimlerini değerlendirmişlerdir. Araştırmada öğrencilerden "*İki tek sayının toplamı çifttir.*" önermesini kanıtlamaları istenmiştir. Bazı öğrencilerin 3 + 5 = 8, 9 + 7 = 16 gibi örnekler verdikleri ve bu örneklerin bazı öğrenciler için kanıt niteliğinde olduğu görülmüştür. Ancak bir gün sonra araştırmacılar sınıfta bir kanıt elde edildiğini fark etmişlerdir. Öğrencilerin Şekil 2.14'te görüldüğü gibi çubuklar yardımıyla sayıları çiftler halinde grupladıkları, her iki sayıda gruplanmayan tek çubukları ise kendi aralarında gruplayıp bir çift elde ettikleri belirlenmiştir:

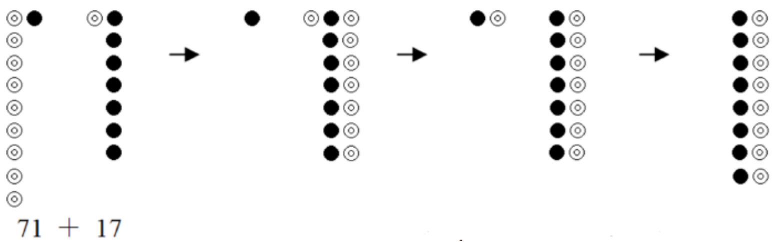


Şekil 2.14. "*İki tek sayının toplamı çifttir." önermesinin çubuklar yardımıyla görsel kanıtı (Ball vd., 2002)*

Araştırmacılar öğrencilerin, sayıların yapılarına dayalı mantıksal bir argüman oluşturabilmeleri için tek ve çift sayıların tanımlarını paylaştıklarını, ayrıca öğrencilerin kanıtın sonsuz sayıda durum için işe yarayacağına ikna olduklarını belirtmişlerdir. Bu özel örnekte öğrencilerin, önceki matematiksel kavramlarını kullanarak argümanları düşünme, inceleme ve oluşturma yeteneğinin geliştirildiği belirtilmiştir.

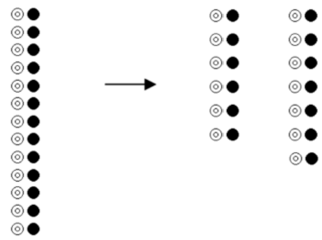
Cry (2011), öğrencilerde tümdengelimsel muhakemenin geliştirilmesine yönelik olarak, 11-12 yaş arasında olan 25 tane 6. sınıf öğrencisiyle 8 ders, toplam 4 ay süren bir çalışma yapmıştır. Araştırmada öncelikle tümdengelimsel muhakemenin kendiliğinden ortaya çıkışını sağlayacak ve pratik geometriden, teorik geometriye geçişi teşvik edecek sekiz görev tasarlanmıştır. Etkinlikler Kanada İlköğretim Programı'yla ve öğrenci seviyesiyle uyumlu olarak seçilmiş ve yeni konu başlıkları eklenmemiştir. Verilen görevlerde öğrencilerin görsel algıya dayalı olarak ve ölçüm yaparak elde ettikleri sonuçların kesinliğinden şüphe duymaları ve böylece ölçüme dayalı çıkarımda bulunmanın sınırlarını fark etmeleri sağlanmıştır. İlk dört etkinlikten sonra öğrencilerin gerekçelendirmelerinde büyük bir ilerleme kaydedilmiş, 50 öğrenciden 42'sinin tümdengelimsel muhakeme yapmaya başladığı görülmüştür. Çalışmanın sonunda öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ölçme ve görsel algıya dayalı çıkarımda bulunmanın sınırlarını gördüğü, bunun yerine tümdengelimsel mantığa dayalı çıkarımda bulunmaya başladıkları görülmüştür.

Komatsu (2005), 5. sınıf öğrencilerinin doğru olduğunu ve kanıtladıklarını düşündükleri varsayımlarına aksine örnekler verildiğinde öğrencilerin varsayımlarını nasıl düzenlediklerini ve kanıtlarını nasıl gözden geçirdiklerini araştırmıştır. İki Japon 5. sınıf öğrencisi ile örnek olay çalışması olarak gerçekleştirilen çalışmada öğrencilerden, "İki basamaklı bir sayı ile bu sayının basamaklarının yer değiştirmesi ile oluşan sayının toplamı nedir?" problemi ile uğraşmaları, ardından elde ettikleri sonuca yönelik yorumlarda bulunmaları ve bir genelleme yapmaları istenmiştir. Öğrenciler ilk olarak 52, 26, 13, 71 gibi sayılarla denemeler yapmışlar ve bu sayılar ile bu sayıların basamaklarının yerlerinin değiştirilmesi sonucu elde edilen sayıları topladıklarında 52 + 25 = 77, 26 + 62 = 88, 31 + 13 = 44 ve 71+17=88 sonuçlarına yani tüm sayıların birler ve onlar basamağının aynı sayıdan oluşacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu sonucu kanıtlamak için öğrenciler Şekil 2.15'teki gibi renkli pulları kullanmışlardır:



Şekil 2.15. *71+17 işleminin renkli pullarla gösterimi* (*Komatsu, 2005)*

Şekil 2.15'te görüldüğü gibi öğrenciler 71+17 sayılarını ele almışlar, bu sayılardaki birlikler ve onlukları farklı renklerdeki pullarla göstermişler ve birlikleri kendi aralarında, onlukları kendi aralarında toplayarak sonucun 88 olduğunu, birler ve onlar basamağının her zaman aynı sayıdan oluşacağını belirtmişlerdir. Bunun üzerine araştırmacı öğrencilerden kullandıkları yöntemi 85+58 işlemi için de uygulamalarını istemiştir. 85+58=143 örneği öğrencilerin iddialarını çürütmüş ve öğrencilerin iddialarını gözden geçirmelerini sağlamıştır. Öğrenciler önce iddialarının neden yanlış olduğunu tartışmışlar, daha sonra yine renkli pullarla 85+58 işlemini Şekil 2.16'daki gibi modellemişlerdir:



Şekil 2.16. *85+58 işleminin renkli pullarla gösterimi* (*Komatsu, 2005)*

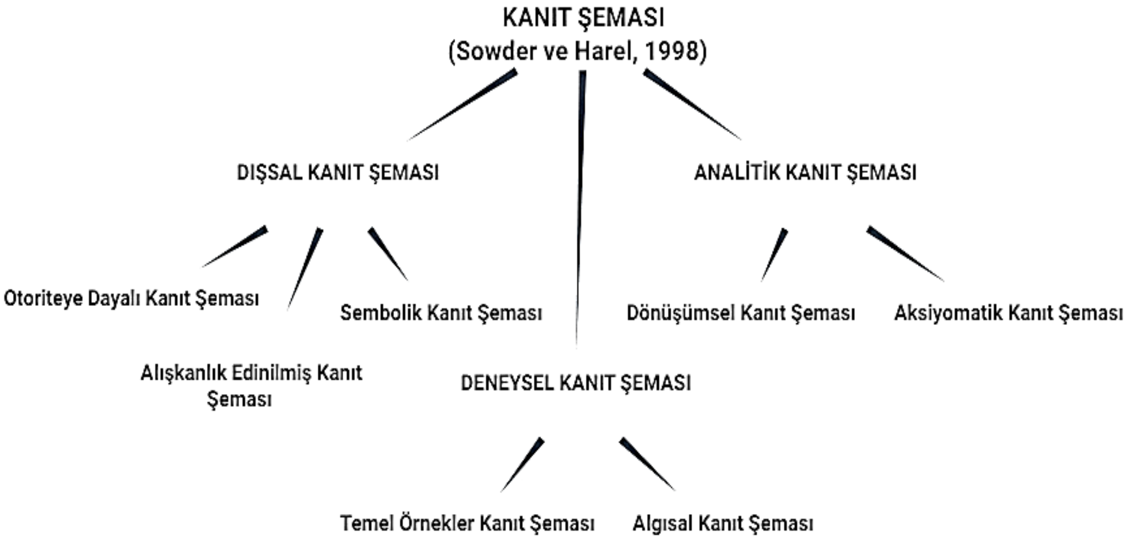
Bunun üzerine öğrenciler Şekil 2.16'da görüldüğü gibi bir birlik ile bir onluğu çiftler halinde göstererek 13 tane 11 çifti elde etmişler ve böylece iki sayının toplamının bu sayıları oluşturan rakamların toplamının 11 katı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Araştırmacının sunduğu aksine örnek öğrencilerin varsayımları ve kanıtlarını geliştirmeye yönelik bir katkı sunmuştur.

Maher ve Martino (1996), Stephanie adında bir çocuk ile 1. sınıftan 5. sınıfa kadar, 5 yıllık bir örnek olay çalışması gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalarında Stephanie'nin matematiksel gerekçelendirme fikrinin gelişimi incelenmiş, bazen tüm sınıf tartışmaları, bazen küçük grup tartışmaları, bazen de sadece Stephanie ile bireysel görüşmeler yapılarak veri toplanmıştır. Bu çalışmada 2. sınıfta *"3 tişört ve 2 pantolon ile kaç farklı kombinasyon yapılır?"*, 3. sınıfta *"3 tişört ve 2 pantolon ile kaç farklı kombinasyon yapılır?"*, 4. sınıfta "*Mavi ve kırmızı renk küplerden oluşan 3 küp yüksekliğinde kaç farklı kule yapılır?"* sorusu sorulmuş sonra bu problem 4 küp yüksekliğinde, 5 küp yüksekliğinde ve 6 küp yüksekliğinde kulelere genişletilmiştir. Öğrenci ilk açıklamalarını 1. sınıfta yapmaya, 4. sınıfta ise daha kapsamlı savunmalar yapmaya başlamıştır. Stephanie'nin 5. sınıfa geldiğinde savunma yapmaktan kanıt yapmaya geçtiği, bu problemlerin çözümlerini doğrulamak yani tüm kulelerin çizildiğini kanıtlamak için kendi kanıt yöntemini kendisinin keşfettiği ve böylece arkadaşlarını ikna ettiği gözlenmiştir.

Uluslararası alan-yazında pek çok araştırmacı öğrencilerin kanıtları anlama ve kanıt oluşturabilme süreçlerini değerlendirmek için farklı kanıt kategorileri ve kanıt şemaları belirlemişlerdir. Araştırmacılar öğrencilerin, matematiksel kanıtlama sürecinde karşılaştıkları güçlükleri gidermek, kanıtla ilgili anlamalarını ve kanıtlama becerilerini geliştirebilmek için öncelikle öğrencilerin kanıt yaparken sergiledikleri davranışların betimlenmesi gerektiğini düşünmüşlerdir. Bu nedenle bu davranış biçimlerini tanımlamaya yönelik çeşitli kanıt şemaları oluşturmuşlardır. Alan yazın incelendiğinde, öğrencilerin kanıt sürecinde kullandıkları argümanların doğruluğuna yönelik kendilerini ve başkalarını ikna ederken temel aldıkları yaklaşımları inceleyen pek çok araştırma yapıldığı, bu araştırmalara dayalı olarak kanıt şemaları ve kanıt düzeyleri belirlendiği görülmüştür (Balacheff, 1988; Flores, 2002; 2006; Knuth, Choppin and Bieda, 2009; Sowder and Harel, 1998; Waring, 2001). Bu araştırmada da öğrencilerin kanıtlama süreçlerindeki muhakeme biçimleri incelendiği için bu çalışmaların incelenmesinin önemli olduğu düşünülmüş ve bu çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Balacheff (1988, s. 216-225), yaşları 13 ve 14 arasında değişen, 28 ortaokul öğrencisi ile yaptığı deneysel çalışmada öğrencilerden bir çokgenin köşegenlerinin sayısını bulmak için bir formül geliştirmelerini ve bu formülü gerekçelendirmelerini istemiştir. Öğrencilerin matematiksel ifadelerin doğruluğunu savunurken kullandıkları gerekçeleri araştırdığı araştırmasında daha çok sözlü etkileşim gerektiren, ortaya çıkan tartışma aracılığıyla öğrencilerin aldıkları kararların altında yatan süreçlerin görünür olmasına olanak sağlayan sosyal bir ortamdan yararlanmıştır. Çalışmada öğrencilerin probleme verdikleri yanıtları sınıflandırarak, kanıtlarını pragmatik kanıtlar ve kavramsal kanıtlar olarak ikiye ayırmıştır. Pragmatik kanıtları, acemi deneycilik (naive empricism), kritik deneyim (crucial empricism), genelleyici örnek (generic examples) olarak üçe ayırırken, kavramsal kanıtları ise düşünce deneyi (thought experiment) ve açıklamalar üzerine hesaplamalar (calculation on statements) olmak üzere iki sınıfa ayırmıştır. Bu çalışmaya göre acemi deneycilik, rastgele seçilen belirli sayıdaki durumun doğrulanmasının ardından sonucun doğruluğunun iddia edildiği en ilkel yöntemdir. Kritik deneyim rastgele değil de bir gerekçe sunularak stratejik bir örneğin doğrulanmasıyla genelleme yapıldığı yöntemdir. Genelleyici örnek bir sınıfın karakteristik özelliklerini taşıyan genel bir örneğin işlemler ya da dönüşümlere dayanılarak seçildiği ve genel bir örneğe dayalı argümanların geliştirildiği yöntemdir. Düşünce deneyi önermelerin altında yatan anlamlarının ortaya çıkarıldığı, gerekçelendirmenin nesnelerin özelliklerinin analizine dayandığı ve özelliklerin genel formüllerle ifade edildiği, genel semboller ve tümdengelimsel akıl yürütmenin kullanıldığı yöntemdir. Açıklamalar üzerine hesaplamalar tanımlara ya da açık karakteristik özelliklere dayanan, ifadeler üzerinde çıkarımsal hesaplamalar sonucunda ortaya çıkan kanıtlardır. Araştırmada acemi deneycilik ile kritik deneyim arasında ilişki olduğu, öğrencilerin varsayımların genelliğini göstermek için acemi deneycilikten kritik deneyime geçiş yaptıkları, aynı zamanda kavramsal kanıtları kullanan öğrencilerin bile varsayımın doğruluğuna olan inançlarını arttırmak için stratejik örnekler seçebilecekleri belirtilmiştir. Bununla birlikte araştırmada genelleyici örnek yönteminde, kullanılan örneğin genel özelliklerinin analiz edilmesi gerektiği için bu yöntemin pragmatik kanıtlar ile kavramsal kanıtlar arasında geçiş aşaması olduğu belirtilmiştir.

Kanıt şemalarına ilişkin ilk teoriyi alan-yazına kazandıran Sowder ve Harel (1998) lisans öğrencilerinin matematiksel bir ifadenin doğruluğuna ilişkin kendilerini ve başkalarını ikna ederken kullandıkları gerekçelerin matematiksel geçerlik düzeyini belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla üç yıl süren öğretim deneyi çalışmalarında lisans öğrencilerinin savunmalarını sınıflandırmışlar ve buna kanıt şeması adını vermişlerdir. Bu modele göre öğrencilerin birini ikna ederken ya da kendileri ikna olurken kullandıkları yöntemler zamana ve kültüre göre farklılık gösterebilir. Bununla birlikte bir öğrencinin farklı problemlerde farklı kanıt şemaları kullanabileceğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin kanıtlama sürecindeki eylemlerinden türetilen bu şemalardaki sınıflandırma aynı zamanda öğrencilerin zihinsel aşamalarını göstermektedir. Sowder ve Harel (1998) öğrencilerin kanıt şemalarını Şekil 2.17'de görüldüğü gibi dışsal kanıt şeması, deneysel kanıt şeması ve analitik kanıt şeması olmak üzere üç sınıfa ayırmışlardır:



Şekil 2.17. *Sowder ve Harel'ın (1998) kanıt şeması*

Dışsal kanıt şemasında, öğrencinin kendisini ya da başkalarını ikna etmeye çalışması dış kaynaklara bağımlıdır. Bu şema otoriteye dayalı kanıt şeması, alışkanlık edinilmiş kanıt şeması ve sembolik kanıt şeması olarak üç sınıfa ayrılmıştır. Otoriteye dayalı kanıt şemasında öğrenci sonuçları gerekçelendirirken kitaba, daha önce yapılan örneklere, öğretmenin ya da sınıf arkadaşlarının ifadelerine başvurmaktadır. Teoremlerin ezberlenmesi, formüllerin ya da kuralların uygulanması bu şemanın özelliğidir. Alışkanlık edinilmiş kanıt şemasında öğrenci, kanıtın görüntüsünden, alışılagelen formatlarından etkilenerek karar vermekte, tümevarımsal muhakeme kullanmaktadır. Bu kanıt şemasında öğrencilerin tanıdık kanıt süreçlerini kullanması muhtemeldir. Sembolik kanıt şemasında ise öğrenci sembolleri anlamlarından uzak ve durum içerisindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden ele almaktadır. İyi bilinen sembolik algoritmaların kullanılması bu şemanın özelliğidir. Deneysel kanıt şemasında doğrulamalar sadece fiziksel gerçekler ya da duyusal deneyimlere dayanılarak yapılır. Deneysel kanıt şeması, temel örnekler kanıt şeması ve algısal kanıt şeması olarak ikiye ayrılır. Temel örnekler kanıt şemasında öğrenci bir ya da birden fazla örneğin yeterli olduğunu düşünmekte, örnekler göstererek diğerlerini ikna etmeye çalışmaktadır. Bu şemadaki çözümler özellikle aksine örneklerle bir durumun doğrulanmasında ya da çürütülmesinde matematiksel olarak geçerli olabilir. Algısal kanıt şemasında ise öğrenci doğrulamalar yaparken ilk öğrenmeleri sonucu zihninde oluşan gösterimleri kullanabilir, çizimlerle diğerlerini ikna etmeye çalışabilir, bir durumun doğru ya da yanlış olduğunu sezinleyebilir; ancak buna ilişkin güçlü bir kanıt bulamaz. Analitik kanıt şemasında öğrenci doğrulamalarını tümdengelimsel muhakeme yoluyla yapmakta ve matematiksel ilişkileri kullanmaktadır. Analitik kanıt şeması, dönüşümsel kanıt şeması ve aksiyomatik kanıt şeması olmak üzere ikiye ayrılır. Dönüşümsel kanıt şemasında öğrencinin gerekçeleri, bir durumun genel yönleriyle ilgilidir. Öğrencinin argümanları genel olmakla birlikte, tahminleri ve tahminlerine dayalı çıkarımları tümdengelimsel muhakemeye dayanmaktadır. Dönüşümsel kanıt şemasının en önemli üç özelliği genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarımdır. Aksiyomatik kanıt şemasında ise öğrenci doğrulamalarını, tanımsız terimler, aksiyomlar kullanarak, yani kanıtını aksiyomatik sistemi kullanarak yapmaktadır.

Sowder ve Harel (1998) ilk kanıt şemalarını lisans öğrencilerinin doğrulamaları yoluyla elde etmiş olsalar da araştırmacılar ilköğretim ve lise öğrencileriyle yaptıkları çalışmalarda da öğrencilerin aynı şemaları kullandıklarını göstermişlerdir. Örneğin Flores (2002) nitel yöntemlerle yürüttüğü çalışmasında, ilköğretimde farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin, matematiksel bir ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu nasıl bildiklerini, bir ifadenin doğruluğunu nasıl gerekçelendirdiklerini ve neden doğru olduğuna nasıl ikna olduklarını belirlemiş ve yanıtları sınıflamıştır. Araştırmada belirlenen sınıflamanın Sowder ve Harel'ın (1998) kanıt şemaları sınıflandırmasına uyduğu belirlenmiştir. Çalışmada, öğrencilerin matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklamada zorlandıkları, birçok öğrencinin matematikte öğrendikleri hakkında sorular sorulmasından rahatsızlık duydukları ve öğrencilerin çoğunlukla matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ailelerinin, öğretmenlerinin ve kitaplarının söylemlerine dayandırdıkları, öğrencilerin matematiksel kavramlar arasında ilişki kuramadığı belirlenmiştir. Flores (2006) bir başka çalışmasında 5. sınıftan 12. sınıfa kadar 70 öğrencinin gerekçelendirmelerini ve kanıt şemalarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmada öğrencilere daha önce öğrendikleri kurallar ve işlemler hakkında sorular sorularak, öğrendikleri bu işlemlerin ve kuralların doğruluğundan nasıl emin oldukları belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmada öğrencilerin çoğunlukla dışsal kanıt şemalarından otoriter kanıt şemasını kullandıkları ve çoğunlukla öğretmen ya da ders kitaplarını otorite olarak gördükleri belirlenmiştir. Bununla birlikte yine birçok öğrencinin deneysel kanıt şemalarını kullandıkları, bu kanıt şemasındaki öğrencilerin bazılarının sayısal örneklerini tek bir hesaplamaya bağlarken, bazılarının sayısal örnekler kullanarak genellemelerini gerekçelendirdikleri belirlenmiştir.

Waring (2001) kanıt ihtiyacının gerekliliğinden başlayarak kanıt kavramlarının geliştirilmesini, ardından kanıtın doğasının anlaşılmasını ve son olarak öğrencilerin kanıt oluşturma yeterliliğini açıklayan bir çerçeve geliştirmiş ve öğrencilerin kanıt düzeylerini altıya ayırmıştır. Waring'e (2001) göre Seviye 0'da öğrenciler kanıtın gerekliliğinin, hatta varlığının bilincinde değildirler. Bu seviyedeki öğrenciler ya gerekçelendirme yapmazlar çünkü buna ihtiyaç duymazlar ya da matematiksel olmayan gerekçelendirmeler yapabilirler. Seviye 1'de öğrenciler kanıt kavramının farkındadırlar; ancak birkaç özel durumu kontrol etmenin kanıt olarak yeterli olduğunu düşünmektedirler. Seviye 2'de öğrenciler, birkaç özel durumun kontrol edilmesinin kanıtla eşdeğer olmadığının farkındadırlar, daha çeşitli, rastgele seçilmiş örneklerin kontrol edilmesini ya da kanıt için genel bir örnek kullanılmasını düşünürler. Ancak bu seviyede kullanılan argümanlar deneysel olmamasına karşın geçerli de değildir. Seviye 3'te öğrenciler, geçerli bir kanıt yapamamalarına rağmen, genel bir kanıtın gerekliliğinin farkındadırlar ve uygun bir zorluk seviyesinde bir kanıt oluşturulmasını anlayabilirler. Seviye 4'te öğrenciler, genel bir kanıtın gerekliliğinin farkındadırlar ve bu tür kanıtları sınırlı sayıda, muhtemelen aşina oldukları bağlamlarda oluşturabilirler. Seviye 5'te öğrenciler, genel bir kanıtın gerekliliğinin farkındadırlar ve bu tür kanıtları, bilinmeyenler de dâhil olmak üzere çeşitli bağlamlarda oluşturabilirler. Waring (2000) Seviye 1'deki öğrencilerin çoğu durumda, deneysel gerekçelendirme yaptıklarını ve bu deneysel gerekçelendirmeleri arasında farklılıklar olabileceğini ifade etmiştir. Seviye 5'deki öğrencilerin ise en üst düzey yani tümdengelimsel kanıt yapabildiklerini belirtmiştir. Bununla birlikte Waring'in (2000) kanıt düzeyi çerçevesi pek çok araştırmacı tarafından öğrencilerin kanıt düzeylerini belirlemek için kullanılmıştır. Örneğin Knuth vd., (2012) ortaokul öğrencileri ile gerçekleştirdikleri çalışmada verilerin analizinde Waring'in (2000) kanıt düzeylerinden yola çıkarak öğrencilerinin dört farklı kanıt düzeyinde olduklarını saptamışlardır. Bu düzeylerden Kanıt düzeyi 0'da öğrenciler kanıt yapacaklarından ve hatta kanıtın gerekliliğinden habersizdirler. Kanıt düzeyi 1'de öğrenciler kanıt yapacaklarından haberdardırlar ama birkaç örnek denemenin kanıt olduğunu düşünmektedirler. Kanıt düzeyi 2'de ise öğrenciler birkaç örneği denemenin kanıt olmadığının farkındadırlar; ancak geçerli bir kanıt sunamamaktadırlar. Kanıt düzeyi 3'te öğrenciler geçerli bir kanıt sunabilmektedir. Araştırmada öğrencilerin genel olarak kanıt yapmakta ve genel argümanlar üretmede zorluk yaşadıkları, genel argüman üretmeye çalışan öğrencilerin oranının 6. sınıftan 8.

sınıfa doğru arttığı belirtilmiştir. Bununla birlikte araştırmanın sonunda öğrencilerin kanıt yapabilmeleri için özellikle sınıflarda kanıtın ne anlama geldiğini bilmeleri gerektiği, bunun için de öğrencilerin ve öğretmenlerin kanıtın sınıflarda oynadığı rolü anlamaları gerektiği, sınıflarda kanıtın rolünü ortaya çıkaracak öğretim programlarının hazırlanması gerektiği önerilmiştir.

Öğrencilerin kanıt şemalarını ve düzeylerini inceleyen araştırmaların yanında, kanıt öğretiminde uygulanan çeşitli yöntemlerin kanıt yapma başarısına etkisini inceleyen araştırmalar da mevcuttur. Bu araştırmalarda, öğrencilerin kanıt yapma becerilerinin nasıl geliştirilebileceğine yönelik önerilerde bulunularak çeşitli modeller ortaya konulmuştur. Bu araştırmada kanıt öğrenme modelinin planlanmasında bu çalışmalardan yararlanılmıştır. Öncelikle Robert Lee Moore adlı matematikçinin, lisans ve lisansüstü eğitim kademeleri için geliştirdiği Moore modeli (Texas modeli), birçok kanıt öğretimi modeline ilham kaynağı olmuştur. Bu model keşfederek öğrenme temelli, sorgulamaya dayalı, öğrenci merkezli, Sokratik ve yapılandırmacı felsefeye uygun olarak hazırlanmıştır. Matematiksel muhakeme becerisini geliştirmeyi temel alan bu model, problemleri çözmek ve teoremleri kanıtlamak için çeşitli teknikler üretebilme, varsayımda bulunabilme, tutarlı bir argüman sunabilme yeteneğini geliştirme üzerine yoğunlaşmıştır. Bu modelde her öğrenci mümkün olduğunca çok sayıda problem çözer ya da teorem kanıtlar. Her teorem ya da problem için, her öğrenci tahtada, kendi kanıtını ya da çözümünü sunar. Bu çözümler sırasında sınıftan kimse müdahale etmez. Kanıt bittikten sonra arkadaşları ya da öğretmenleri soru sorabilir, tartışma yapılabilir. Öğrencilerin sınıf dışında bu problemleri tartışmalarına izin verilmez. Hem öğretmenleri etkilemek hem de arkadaşının çözdüğü problemden daha zor problemleri çözmek için öğrenciler arasında rekabet vardır. Öğrenci tahtada kanıtını sunarken hata yapıyorsa düzeltmesi için fırsat verilir, düzeltemezse başka bir arkadaşından çözüm sunması istenir (Dancis and Davidson, 1970). Neil Davidson adlı matematikçi ise 1967 yılında Moore modelini lisans derslerinde daha fazla öğrencinin olduğu sosyal bir ortama uyarlayarak kendi modelini geliştirmiştir. Modelin adı Küçük Gruplarla Keşif Modeli'dir. Bu modelde sınıftaki öğrenciler, 3 ya da 4 kişilik küçük gruplara ayrılır. Her bir gruba daha önce çözmedikleri kendileri için yeni olan bir kanıt problemi verilir. Öğrenciler birlikte tartışarak teoremleri kanıtlamaya çalışır ve yaptıklarını tahtada sınıfa sunar. Her bir grubun çalışma alanı için tahtada kendi bölümü vardır ve üyeler her problem için tahtaya kendi gruplarının çözümünü yazarlar. Öğretmen tahtadaki kanıtları (ya da çözümleri) kontrol eder ve iyileştirme önerileri verir. Eğer bir grup bir problemle ilgili sorun yaşıyorsa, öğretmen ayırt edici bir soru sorabilir ya da gerekirse gruba bir ipucu verebilir. Problem çözme etkinliklerine geçmeden önce öğretmen öğrencilere bir grupta nasıl işbirliği içinde çalışılacağını anlatır, grup içinde herkesin katıldığı ve kimsenin grup lideri olmadığı bir ortam hazırlanır. Öğrencilerin öğretmenlerine, grubuna ya da bütün sınıfa rahatça soru sorabileceği, fikirlerini rahatça açıklayabileceği bir sınıf ortamı oluşturulur. Ayrıca bu modelin farklı seviyedeki öğrencilere de uygulanabilmesi mümkündür. Küçük gruplarla keşif yönteminin, problem çözmede bireysel yetenekleri ve özgüveni geliştirdiği öne sürülmüş, çoğu öğrencinin küçük grup yöntemiyle matematik öğrenmekten keyif aldığı belirtilmiştir (Dancis and Davidson, 1970).

Kanıt öğretimine yönelik model geliştiren başka bir araştırmacı olan Dean (1996), lisans öğrencilerinin kanıt yapmada başarılı olabilmelerini sağlamak için Schoenfeld'ın ve Polya'nın problem çözme adımlarına benzeyen Süper Öğrenci (SS-Super Student) adında bir model geliştirmiştir. Kendi derslerinde kullandığı ve öğrencilerinin bir derste çözdükleri kanıt problemlerinin sayısını arttırdığını ileri süren Dean'in (1996) modelinin aşamaları aşağıda sunulmuştur:

Açma: Öğrencilerin, kanıtlanacak teoremin (ya da önerme) ne ifade ettiğini anlamaya çalıştıkları aşamadır. Bu aşamada öğrenci, teoremi anlamak için birçok şey yapabilir. Örneğin teoremi birçok kere okuyabilir. Ancak bu okuma sıradan bir okumadan farklı anlamlı bir şekilde yapılmalıdır. Öğrenci teoremi anlamak için teoremi kendi sözleriyle ifade edebilir, teorem ile ilgili birçok örnek incelenebilir.

Beyin fırtınası: Bu aşama modelin en uzun aşamasıdır. Birinci aşamada öğrenci teoremi anlayıp teoremde kanıtlanması istenen şey hakkında fikir sahibi olduktan sonra bireysel beyin fırtınalarına geçilir. Bu aşamada önerme ile ilgili olan kavram ve tanımlar hatırlanmaya çalışılır, birçok varsayım ve çıkarım kombinasyonu oluşturulur, tahminlerde bulunulur, tahminler test edilir.

İddiayı Destekleme: Öğrencilerin "Evet işte bu!" dedikleri aşamadır. Bu aşamada öğrenciler varsayımlarını sonuca bağlayan bir çıkarım zincirini keşfeder ya da teoremi dolaylı olarak çözerler. Düşünme süreçlerinde değişim meydana gelir, yaratıcı düşünmeden eleştirel düşünmeye geçiş yapılır.

İkna: Öğrencilerin bir önceki aşamada elde ettikleri çıkarımların geçerli olduğunu gördükleri aşamadır. Argümanlarının doğruluğunu göstermek için neden ya da nedenler sunarlar. Öğrenciler argümanlarının doğru olması konusunda dikkatli olmalı, eleştirel muhakeme yapabilmelidirler. Bu aşamada başarılı olunamazsa yani argümanlar doğru değilse açma ya da beyin fırtınası aşamasına geri dönülebilir. Çünkü öğrenci ya problemi yanlış anlamıştır ya da farklı bir yaklaşım denemek zorundadır.

Yansıtma: Çok az öğrenci bu aşamaya ve bir sonraki aşamaya geçebilir. Kanıt değerlendirildikten ve geçerli bir argüman oluşturulduğuna ikna olunduktan sonra, öğrenciler genellikle problemden uzaklaşır. Çok az öğrenci, teoremi kanıtlayacakları başka bir yol olup olmadığı üzerinde düşünür.

Genişletme: Bu aşama biraz daha matematikle profesyonel olarak ilgilenenlerin geçebildiği bir aşamadır. Kanıtlanan teoremin farklı matematiksel sistemlerde de geçerli olup olmadığı araştırılır. Örneğin bir teorem, tam sayılar kümesinde geçerli bir teorem ise bu teoremin rasyonel sayılar kümesinde de geçerli olup olmadığı araştırılabilir. Ya da düzlemde kanıtlanan bir geometrik teorem üç boyutlu uzaya genişletilmeye çalışılır.

Schabel (2005), lisansüstü öğrencileriyle sayı teorisi derslerinde bir öğretim deneyi yaptığı çalışmasının sonunda geliştirdiği eğitimsel modelin kanıt öğretimindeki etkisini incelemiştir. Schabel (2005) öncelikle üç pilot çalışma yapmış ve bu çalışmalarda, tasarladığı öğretim modelini test etmiştir. Çalışmasının sonunda modelin öğrencilerin kanıt yazma becerilerini ve kavramsal anlamayı geliştirdiğini belirtmiştir. Bu modelde küçük grup çalışmaları ve tüm sınıf tartışması yapılmış, öğrenciler örnekler ve aksine örnekler oluşturmaları için teşvik edilmişlerdir. Modelin altı aşaması aşağıda sunulmuştur:

Sınıf oturumları, küçük grup çalışması, sınıf tartışması ve minimal düzeyde ders anlatımı içerir: Bir öğretim sadece ders anlatımından oluşmaz, sınıfta geçen zamanda sadece öğretmenin matematiksel fikirlerinin duyulması değil, öğrencilerin de matematiksel fikirleri aktif olarak inşa etmesi sağlanmalıdır. Öğretmen bir problem verdiğinde önce öğrencilerin birkaç dakika üzerinde bireysel çalışmaları ve problemi anlamaları sağlanmalıdır.

Öğretmen öğrencileri örnek ve aksine örnekler oluşturmaları için teşvik eder: Öğrencilerin kanıt yapamamalarının nedeni kavramları, tanımları, teoremleri anlamak ve kanıtları keşfetmek için kendi örneklerini oluşturamamalarıdır. Kendi örneklerini oluşturabilen öğrencilerin kavramsal anlayışları daha güçlüdür. Öğrencilerin probleme örnek ya da aksine örnek vermeleri ve bu örneklerinin grup içinde değerlendirilmesi sağlanmalıdır.

Öğrenciler varsayımlar oluşturmaya teşvik edilir: Öğrenciler, akranları tarafından sunulan varsayımları, öğretmen tarafından sunulan varsayımlara göre daha fazla araştırma eğilimi göstermektedirler. Çünkü bir öğrenci bir varsayımda bulunduğunda, diğer öğrenciler için bu gerçekten bir varsayım iken, öğretmen bir varsayım önerdiğinde bazı öğrenciler bunu bir olgu olarak görebilmektedir. Bununla birlikte bir öğrenci bir varsayımda bulunduğunda, problemi daha fazla sahiplenmekte ve dolayısıyla çözmek için daha fazla motive olmaktadır.

Öğrenciler varsayımlarını kanıtlarlar ya da en azından kanıt yazılmasına yardımcı olurlar: Öğrenciler kendi varsayımlarını oluşturarak ve bu varsayımları doğrulayarak, kendi gerçekleri için kişisel anlamda ikna olurlar. Ayrıca öğrenciler kendi bilgilerini kendileri inşa ederek daha iyi öğrendikleri için, başkalarının yaptığı kanıtı izleyerek kanıt yazmayı öğrenmeleri pek mümkün değildir. Bu nedenle öğrencilerin sınıftaki kanıt yazma sürecine dâhil olmaları gerekir.

Ödevler, hesaplamaları ve kanıtları içerir: Öğrencilere verilen kanıt yazma görevleri öğrencilerin kavramları tanımlamalarına, öğretmenlerin öğrencilerin yanlış kavramlarını belirleyebilmelerine yardımcı olur.

Öğrenciler birbirlerinin ödevlerini gözden geçirirler: Öğrencilerin birbirlerinin ödevlerini gözden geçirmesi, çeşitli çözüm yaklaşımları okumalarına, anlamalarına ve bu çözümlerin geçerli olup olmadığını belirlemelerine olanak tanır.

Sınıflarda uygulanacak kanıt öğretim modellerinin yanı sıra özellikle son yıllarda öğrencilerin çözüm yaparken kullandıkları örnekler ile ve kanıt yapabilmeleri arasındaki ilişkiyi inceleyen pek çok araştırma yapılmıştır (Ellis vd.,, 2012; Lockwood, Ellis and Lynch, 2016; Ozgur vd., 2019).

Ellis vd., (2012) yaptıkları çalışmada 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin varsayımları incelerken ve uygun gerekçelendirmeler yaparken kullandıkları örnek çeşitlerini ve bu örneklerin kullanım amacını ortaya koymayı amaçlamışlardır. Buna göre klinik görüşmeler yoluyla öğrencilere çeşitli varsayımlar sunulmuş, öğrencilerden bu varsayımları incelemeleri, örneklerle test etmeleri ve uygun gerekçelerle gerekçelendirmeleri istenmiştir. Öğrenciler örneklerini seçtikten sonra öğrencilere bu örnekleri seçme nedenleri sorulmuştur. Araştırmada on üç farklı örnek çeşidi kullanıldığı ve bu örneklerden en fazla, birbirinden farklı özelliklere (tek-çift sayı, negatif- pozitif sayı gibi) sahip örnekler olan *farklı örnekler* örnek çeşidinin tercih edildiği belirlenmiştir. Ayrıca, araştırmada ikinci en çok kullanılan örnek türünün varsayım hakkında genel bir argüman üretilmesini sağlayan *genelleyici örnekler* olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte aynı araştırmada öğrencilerin örnekleri en fazla varsayımın geçerli olup olmadığını test etmek amacıyla kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin, kendilerini ya da başkalarını varsayımın doğru olduğuna ikna etmek, varsayımı anlamak, genel bir argümanı desteklemek, varsayımı çürütmek, varsayımın doğru olduğunu göstermek gibi farklı amaçlarla örnekler kullandıkları ortaya konulmuştur.

Lockwood vd., (2016) ise matematikçilerin kanıt yaparken kullandıkları örneklerin özelliklerini ve örnek kullanma yaklaşımlarını belirlemeyi amaçladıkları araştırmalarında farklı üniversitelerde görev yapan 220 matematikçi ile çalışmışlardır. Araştırmada açık uçlu sorulardan oluşan anket ve görüşmeler yoluyla veri toplanmıştır. Katılımcılara bir varsayımı incelerken ya da test ederken örnekleri nasıl seçtikleri, seçerken nasıl bir strateji kullandıkları sorulmuştur. Matematikçilerin kanıt yaparken kullandıkları örnekler Tablo 2.2.'de gösterildiği gibi belirlenmiştir:

Tablo 2.2. *Seçilen örnekler ve örneklerin kullanım amacı (Lockwood vd., 2016)*

Stratejik Örnek Seçimi	Örneklerin Kullanım Amacı
Genelliği ve karmaşıklığı arttıran örnekler	Bir varsayımın doğru mu yanlış mı olduğunu tespit etmek için örnekler kullanmak
Uç örnekler	Bir varsayımı daha iyi anlamak için örnekler kullanmak
Matematiksel özelliklerinden yararlanılarak seçilen örnekler	Bir varsayımın kanıtı hakkında fikir edinmek için örnekler kullanmak
Çalışılan alana yakınlık durumuna göre seçilen örnekler	Varsayımı çürütmek için olası aksine örnekleri aramak için örnekler kullanmak

Ozgur vd., (2019, s. 284–303) 12 ortaokul öğrencisi, 16 lise öğrencisi ve 10 lisans öğrencisi ile yarı yapılandırılmış, göreve dayalı görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Görüşmelerde öğrencilere, varsayımları keşfetmelerinde, geliştirmelerinde ve gerekçelendirmelerinde örneklerin kullanımını ortaya çıkarmak için özel olarak tasarlanmış görevler sunulmuştur. Araştırmada öncelikle doğru ve yanlış kanıt yapan öğrencilerin kanıtları incelenerek, bu iki grubun örnek kullanım amaçları ve örnek kullanma stratejileri karşılaştırılmıştır. Araştırmanın bulguları incelendiğinde, örneklerin tüm öğrenciler için yararlı olduğu; ancak örneklerin öğrenciler tarafından farklı işlevleri olduğu görülmüştür. Bazı öğrenciler örnekleri varsayımların doğruluğunu test etmek için kullanırken, bazı öğrencilerin örnekleri genelleme ve gerekçelendirme yapabilmek için kullandıkları görülmüştür. Bununla birlikte bazı öğrenciler örnekleri problemi anlamak için kullanırken bazı öğrenciler genel bir argüman oluşturmak için kullanmışlardır. Öğrencilerin doğru ve yanlış kanıtları karşılaştırıldığında örnekleri seçme ve kullanmada uyguladıkları stratejilerde farklılıklar olduğu görülmüştür. Araştırmada özellikle doğru, amaçlı kullanılan ve rastgele değil de bir strateji kullanılarak seçilen örneklerin kanıtlamayı öğrenmelerinde güçlü bir araç olduğu belirtilmiştir.

Kanıtın tüm kademelerde matematik öğretiminin bir parçası olması gerektiği ile ilgili vurgunun artmasıyla birlikte tüm dünyada olduğu gibi Türkiye'de de ortaokul düzeyinde kanıt çalışmalarının sayısında bir artış olmuştur. Bu çalışmaların kanıt becerisini geliştirmek, öğrencilerin kanıt şemalarını belirlemek, kanıt becerisini değerlendirmek, kanıta yönelik tutumları belirlemek, matematik başarısıyla kanıt yapabilme arasındaki ilişkiyi belirlemek gibi farklı odak noktaları vardır. Bu araştırma, ortaokul düzeyinde gerçekleştirildiğinden ulusal alan-yazındaki araştırmalar içinden ortaokul düzeyi ile ilgili olanlar aşağıda sunulmuştur.

Arslan (2007) ortaokul öğrencilerinde muhakeme ve kanıtlama düşüncesinin gelişimi üzerinde yaptığı araştırmasında 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme ve kanıt düşüncelerindeki gelişimi, hem nicel hem de nitel verileri kullanarak incelemiştir. Farklı ortaokullarda öğrenim gören 679 öğrencinin muhakeme yöntemleri, kanıtları ve problem çözmeleri arasındaki ilişkiler, farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin muhakeme ve kanıtlarındaki gelişim, muhakeme ve kanıt düzeyleri ve kullandıkları muhakeme türleri belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilere beş sorudan oluşan veri toplama aracı uygulanmış ve 36 öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın verileri analiz edildiğinde öğrencilerin muhakeme düzeylerinin düşük olduğu, verilen ifadenin doğruluğunu göstermede tercih ettikleri kanıt türünün sınıf seviyesi ile değiştiği, 6. ve 7.sınıfların daha çok görsel ve örneklerle doğrulama yaptıkları, 8. sınıf öğrencilerinin ise cebirsel kanıtı tercih ettikleri görülmüştür.

Aydoğdu İskenderoğlu (2003) 5. sınıftan 9. sınıfa kadar, her sınıf düzeyinden 4 öğrenci olmak üzere toplam 20 öğrencinin matematik problemlerini çözerken nasıl gerekçelendirmeler yaptıklarını, sonuçları doğrularken hangi kanıt şemalarını kullandıklarını belirlemek amacıyla öğrencilerle klinik görüşmeler yapmıştır. Çalışmada ortaya çıkarılan kanıt şemalarının Harel ve Sowder'ın (1998) kanıt şeması sınıflandırması ile uyumlu olduğu belirtilmiştir. Çalışmada öğrencilerin sonuçlarını gerekçelendirirken en çok dışsal otoriter kanıt şeması ile deneysel temel örnekler kanıt şemalarını kullandıkları saptanmıştır. Çok az öğrencinin analitik aksiyomatik kanıt şemasını kullandıkları ve öğrencilerin alt sınıflarda iken daha çok deneysel şemaları kullandıkları belirtilmiştir.

Aylar ve Şahiner (2016) kanıt becerisini geliştirmek için uyguladıkları kanıt öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin kanıt becerileri ve kanıta yönelik tercihlerinde ne yönde değişiklikler meydana getireceğini incelemişlerdir. Araştırma iki farklı ortaokulda, toplam 48 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Eylem araştırması olarak kurgulanan araştırmada veri toplamak için hazır bulunuşluk testi ve kanıt testi ile yarı yapılandırılmış görüşmeler kullanılmış, ardından 13 hafta süren, 14 ayrı dersi kapsayan ve öğrencilerin kanıt becerilerini geliştirmeyi amaçlayan kanıt öğretimi uygulamasına geçilmiştir. Araştırmada hazır bulunuşluk testinden elde edilen verilerde öğrencilerin kanıta yönelik sınırlı bilgilerinin olduğu, sembolik dili kullanamadıkları, önermeleri büyük oranda ya boş bıraktıkları ya da doğru olan önermeleri örnek vererek doğruladıkları belirtilmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin hiçbirinin, doğru bir önermenin kanıtını yapamamalarına karşın aksine örnek vermeleri gereken bir önerme sunulduğunda öğrencilerin büyük bir kısmının önermeyi kanıtladıkları belirtilmiştir. 13 hafta boyunca ele alınan problemler üzerinden, sınıfta deneysel doğrulama ile kanıt arasındaki fark tartışılmış, "doğrudan kanıt", "durum yoluyla kanıt", "karşı örnek vererek kanıt" ve "tüketerek kanıt" yöntemleri ele alınmıştır. Gerçekleştirilen uygulamanın ardından öğrencilerin kanıt becerisinde gelişim gözlenmiştir. Öğrencilerin kanıt yapacakları önermelere ilişkin tercihlerinde kullanılacak kanıt yönteminden ziyade, kanıtı yapılacak önermenin öğrenciler için anlaşılır olmasının etkili olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin doğru bir önermenin kanıtında örnek vererek doğrulama eğilimlerinde azalma olduğu saptanmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin en başarısız oldukları kanıt yönteminin durum yolu ile kanıt yöntemi olduğu belirlenmiştir.

Şen ve Güler (2015) ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin kanıt becerilerini ve kanıt şemalarını inceledikleri çalışmalarında 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlarını Harel ve Sowder'ın (1998) kanıt şemalarını kullanarak analiz etmişlerdir. Çalışmanın verileri iki aşamada toplanmıştır. İlk olarak, araştırmacılar tarafından geliştirilen kanıt şeması testi, rastgele seçilen sekiz ortaokuldan 250 öğrenciye uygulanmış ve bu öğrencilerin yanıtları kanıt şemalarına göre sınıflandırılmıştır. İkinci aşamada, yanıtları farklı kanıt şemalarına ait olan 9 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda, öğrenciler tarafından üretilen kanıtların genel olarak dışsal ve deneysel kanıt şemalarına ait olduğu görülmüştür. Bu bulguya paralel olarak, öğrencilerin kanıtlama becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna varılmıştır. Aynı zamanda araştırmada 7. sınıf öğrencilerinin aksiyomatik kanıt şemalarını kullanamamalarının hem bulundukları sınıf düzeyi ile hem de eğitim programları ile ilgili olduğu belirtilmiştir.

Zaimoğlu (2012) 8. sınıf öğrencilerinin geometrik kanıt ve muhakeme sürecini, temsil biçimlerine olan eğilimlerini tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakeme doğrultusunda incelemeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından 6. ve 7. sınıf geometri öğrenme alanı ve kazanımlarına uygun, geometri temelli, üçgen ve açıların ön planda tutulduğu toplam sekiz açık uçlu soru hazırlanmıştır. Araştırma sonuçları genel olarak, bilinen doğrulardan yeni bir doğru çıkarma durumunun az da olsa gerçekleştiğini gösterirken, doğruya dolaylı yollardan (olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma yöntemi) ulaşma durumunun neredeyse hiç gerçekleşmediğini göstermektedir. Öğrencilerin sayısal örneklemeyi ve görsel kanıtı daha çok tercih ettikleri, cebirsel kanıtı ise çok az tercih ettikleri belirlenmiştir. Araştırmacı sayısal örnekleme kategorisinde, öğrencilerin örnekleyerek, deney, gözlem ve ölçmeye dayalı kanıtlama yoluna gittiklerini, yani tümevarımsal muhakeme yapmaya eğilimli olduklarını saptamıştır. Bununla birlikte görsel kanıt kategorisinde öğrencilerin, doğrudan sembolik çıkarım yaptıklarını; ancak kanıtın açıklama boyutunda yetersiz kaldıklarını ortaya koymuştur. Cebirsel kanıt kategorisinde öğrencilerin cebirsel ifade ve işlemleri tam kavrayamadıklarını göstermiş, bununla birlikte cebirsel kanıt yapan öğrencilerin açıklamalarının yeterli; ancak sistematikleştirme boyutunda olmadıklarını ortaya koymuştur.

Zeybek ve Üstün (2019) 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki kanıt seviyelerini belirlemeyi amaçladıkları çalışmalarında üç kız ve üç erkek öğrenciden oluşan toplamda altı 7. sınıf öğrencisi ile çalışmışlar ve araştırmalarında durum çalışması modelini kullanmışlardır. Çalışmada veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış bireysel görüşme formları kullanılmış, formlar hazırlanırken Harel ve Sowder'ın (1998) kanıt şemaları temel alınmıştır. Çalışmanın sonunda öğrencilerin verilen matematiksel ifadeleri kanıtlarken argüman oluşturmada zorlandıkları, sunulan matematiksel ifadeler için argüman geliştirebilen öğrencilerin argümanlarının ise deneysel düzeyde olduğu görülmüştür. Öğrencilerin doğru matematiksel ifadeler için çeşitli düzeylerde hazırlanmış argümanlardan, çoğunlukla deneysel düzeydeki argümanları en ikna edici buldukları, yanlış olan matematiksel ifadenin kanıtında ise öğrencilerin çoğunun aksine örnek oluşturabildikleri gözlemlenmiştir.

Hem uluslararası hem de ulusal alan-yazın incelendiğinde öğrencilerin kanıt yapmalarına olanak sağlayan bir öğrenme ortamı oluşturmanın, bu ortamda öğrencilerin kanıtlama süreçlerini incelemenin, ortaya çıkan kanıt işlevlerini ve normları belirlemenin yeni bir araştırma sorusu olduğu ve alana katkı sağlayacağı düşünülmüştür.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeline, katılımcılarına, verilerin toplanmasına, araştırma ortamına, araştırmacının rolüne, pilot çalışmaya, öğretim sürecine, veri analizine ve araştırmanın geçerlik ve güvenirliğine yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada öğrencilerin kanıtlama süreçlerine ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerine ve sınıf normlarına odaklanılmıştır. Bu odaklanmanın detaylı olarak incelenmesi ve değerlendirilebilmesi için verilerin toplanması, çözümlenmesi ve analiz süreçlerinde nitel araştırma yaklaşımları benimsenmiştir. Nitel araştırma yaklaşımları son yıllarda özellikle eğitim alanında sıklıkla kullanılmakta ve matematik eğitiminde de bu yaklaşımlardan olan öğretim deneyi ve klinik görüşmelerden yararlanıldığı görülmektedir. Nitel araştırma yaklaşımları içinde yer alan modeller incelendiğinde, araştırmanın amacına en uygun olan modelin, özellikle matematik eğitiminde betimleme ve yorumlamalar ile bir model oluşturma imkânı tanıyan öğretim deneyi olduğu görülmüştür (Wood, Cobb and Yackel, 1990, s. 500). Öğretim deneyinin öğrenciler ve araştırmacı-öğretmen arasında uzun süreli etkileşime dayalı ardışık öğretim oturumlarından oluşması, bu oturumlardaki etkinliklerin öğrencilerden gelen dönütlerle değiştirilebilir ve geliştirilebilir olması, öğrenenin öğrenme düzeyinin ve gelişiminin belirlenmesine olanak tanıması, araştırmacının aynı zamanda öğretmen rolünde olması bu modelin benimsenmesini sağlamıştır (Steffe and Thompson, 2000). Çünkü bu araştırmada öğrencilerin genelde matematiği, özelde muhakemeyi, gerekçelendirmeyi ve kanıtı nasıl öğrendiğinin modellenmesi ve ortaya çıkan kanıt işlevlerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır.

Öğretim deneyi, klinik görüşme tekniğinden üretilmiştir. Klinik görüşmeler öğrencilerin mevcut bilgilerini detaylı incelemek için kullanılırken, öğretim deneyi öğrencilerin matematiksel bilgilerinin ortaya çıkarılması ile bu bilgilerin etkilenme yollarının ve durumlarının belirlenmesi, tasarlanan öğretim ortamında öğrencilerdeki gelişimin nasıl olduğunun incelenmesi açısından klinik görüşmeden daha kapsamlıdır (Steffe and Thompson, 2000). Öğrencilerin sahip olduğu matematik bilgisi ile araştırmacıların bu öğrenci bilgisini nasıl yorumladıkları arasındaki fark bu yöntemin temel dayanaklarından biridir. Öğrencilerin sahip olduğu matematik bilgisi, matematiksel etkinliklerle uğraşırken yaptıkları ve söyledikleri ile belirlenebilmekle birlikte, öğretim deneyinde araştırmacıların temel amaçlarından biri öğrencilerin sahip olduğu matematiğe dayanan modeller kurmaktır. Araştırmacılar öğrencilerin matematiğini öğrenme girişimlerinde öğrencilerin o anki düşünceleri yenilemelerini cesaretlendirecek etkileşim yolları ve durumlar yaratmaya çalışırlar. Öğrencilerin düşüncelerini değiştirmeleri öğretim deneyi için istenen bir sonuçtur. Öğretim deneyi bu yönüyle klinik görüşmeden ayrılır (Steffe and Thompson, 2000).

Matematik eğitimi araştırmacılarının öğretim deneyi yöntemini kullanmalarındaki öncelikli amaç, öğrencilerin matematiksel öğrenmelerini ve muhakemelerini birinci elden deneyimlemektir. Çünkü öğrenmeye yönelik öğretim süreci olmadan araştırmacıların öğrencilerin kurdukları kavramları, işlemleri, zihinsel süreçleri anlamaları için sağlam bir temel oluşturulamamakta yani araştırmacılar öğrencilerin zihinsel süreçlerine dâhil olamamaktadırlar (Steffe and Thompson, 2000). Ayrıca araştırmacıların öğretimde yaşadıkları zorluklar, öğrencilerin matematiksel yapılarını anlamak için gerekli olduğundan bu süreçteki zorluklar öğretim deneyi yöntemini değerli kılmaktadır. Öğretim deneyi yöntemi yeni öğretim programını, yeni bir öğretim modelini, yaklaşımını ya da tekniklerini doğal sınıf ortamında uygulayabilme ve öğrencilerin zihinsel gelişiminin nelerden etkilendiğini derinlemesine inceleyebilme olanağı sunmaktadır. Öğretim deneyi sürecinde araştırmacıların kendi matematiksel gerçekliklerinden bağımsız, öğrencilerin fiziksel ve sosyo-kültürel çevreleri içindeki etkileşimlerinin bir sonucu olarak matematiği yapılandırmalarına odaklanılmaktadır (Steffe and Thompson, 2000).

Öğretim deneyleri, araştırmacının öğretim sürecini tasarladığı, öğretimdeki etkinlikleri organize ettiği, temel olarak keşfedici yapıda olduğu ve öğrencilerdeki kavram gelişimini izlemeyi amaçladığı kavramsal bir araçtır. Yani öğretim deneyinde ardışık öğretim etkinlikleri sayesinde öğrencilerin zaman içinde gelişen öğrenme durumları analiz edilmektedir. Öğretim deneyinde nitel veriler; klinik görüşmeler, gözlemler, alan notları ve öğretme olaylarının kayıtlarından elde edilir. Ayrıca öğretim süresince yapılan kayıtlar, öğretim deneyinin geçmişe dönük analizinin yapılmasında kullanılır. Bu süreç boyunca araştırmacı varsayımlarını test eder ve geliştirir. Klinik görüşmelerde olduğu gibi ilgi odağı öğrencilerin muhakemeleridir (Steffe and Thompson, 2000). Bu araştırmada da bir yandan öğrencilerin zaman içinde muhakemelerindeki değişim ve kanıt öğrenme durumları analiz edilirken diğer yandan bu ortamdaki kanıt işlevlerine ve sınıf normlarına odaklanılmıştır. Bu gelişimin ve değişimin betimlenmesi açısından öğretim oturumlarına başlamadan önce ön test ve klinik görüşmeler yapılmıştır.

Öğretim deneyi dört temel aşamayı içeren bir döngü olarak ifade edilebilir. Cobb (2000) bu aşamaları a) varsayımlara dayalı öğretim sürecinin tasarlanması ve planlanması, b) sınıf içinde uygulanması, c) geriye dönük analizi ve d) bilişsel yapıların modellenmesi olarak ifade etmektedir.

Öğretim deneyi boyunca araştırmacı öğrencilerle olan deneyimlerini zihinsel olarak kaydedebilir; ancak video kayıtlarını izlediğinde, öğrencilerle çalışırken öğrenilenlerin çoğunun kendiliğinden olduğunu ve farkındalığının dışında öğrenildiğini görebilir. Araştırmacı video kayıtlarını seyrederek öğrencinin matematiğini geriye dönük ve ileriye dönük olarak analiz etme avantajına sahiptir. Böylelikle etkileşim halindeyken araştırmacı-öğretmenin farkında olmadığı öğrenci eylemleri ortaya çıkabilir. Ya da araştırmacı- öğretmen kayıtları izlerken daha önce hiç deneyimlemediği bir durumla karşılaşabilir ve öğrencinin matematiğindeki gelişime çok farklı bir yorum getirebilir. Her şekilde araştırmacının yapmaya çalıştığı şey öğretim deneyi boyunca öğrencinin kendi matematiğini inşa ederken kullanılan bu modelin unsurlarını oluşturmaktır (Steffe and Thompson, 2000).

Bu araştırmada öğretim deneyinin döngüsü dikkate alınarak öncelikle öğrenci matematiğinin gelişimine yönelik varsayımlar oluşturulmuştur. Bu varsayımlar ışığında uygun öğrenme ortamı hazırlanmış ve öğretim gerçekleştirilmiştir. Sonra verilerin analizinden elde edilen bulgularla varsayımlar tekrar gözden geçirilmiş, ileriye dönük yeni varsayımlar oluşturulmuş, yani bir sonraki oturumun varsayımları elde edilmiştir. Bu analizler her oturumun ve görüşmenin sonunda tekrarlanmıştır.

3.2. Araştırmanın Katılımcıları

Nitel araştırmalarda amaç genelleme değil, bütüncül bir resim elde etmek olduğu için, çalışılan konuyu derinlemesine ve tüm ayrıntıları ile incelemek amaçlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu nedenle bu araştırmada amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına, olgu ve olayların keşfedilmesine ve açıklanmasına olanak vermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Araştırmada katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır. Buradaki ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da önceden hazırlanmış bir ölçüt listesinden yararlanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 112). Tüm sınıf düzeylerinde kanıt öğretimi yapılması gerektiği ve her sınıf düzeyine uygun kanıt etkinlikleri yapılabileceği araştırmalarla desteklendiği için (De Villiers, 1999; NCTM, 2000) ve ortaokul öğrencilerde tümdengelimsel muhakemenin gelişiminde kritik bir dönem olduğu için (Epp, 1998) bu çalışmanın ortaokul öğrencileri ile yapılmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Bununla birlikte 7. sınıf öğrencileri informel kanıt ile formel kanıt arasında geçiş evresinde bulundukları ve matematiksel kanıt kavramı ile tanışmamış olmaları nedeniyle kanıta karşı ön yargısız oldukları için ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin kanıt deneyimi yaşamaları hedeflenmiştir. Araştırmacı tarafından belirlenen ölçütlerden bir diğeri de, araştırmacının matematik ve matematik uygulamaları derslerinin öğretmenliğini yaptığı sınıfı seçmiş olmasıdır. Dolayısıyla araştırmacı tanıdığı ve önceden gözlemlemiş olduğu sınıflar arasından hem kendini iyi ifade edebilen öğrencilerin olduğu hem de çalışma için gönüllü olan bir sınıf seçmiştir. Bu çalışmada araştırmacı-öğretmenin bağlı olduğu üniversiteye etik kurul izni için ve katılımcılar ortaokul öğrencileri olduğundan Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğü'ne araştırma izni için başvuru yapılmıştır. Her iki birim de bu araştırmanın yapılmasında bir sakınca görmemiş ve Eskişehir ilinde bulunan bir devlet ortaokulunda ön ve son testler, görüşme ve gözlem ile araştırma kapsamındaki verilerin toplanmasına izin vermişlerdir. Buna göre etik kurul izni belgesi EK 1'de ve Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden alınan araştırma izni belgesi EK 2'de sunulmuştur. Araştırmaya başlamadan önce katılımcılara araştırmanın amacı hakkında ve elde edilen verilerin sadece araştırma kapsamında kullanılacağına dair bilgilendirme yapılmış ve hem katılımcılardan hem de velilerinden araştırmaya katılımlarına ilişkin gerekli izinler alınmıştır. Bu amaçla hazırlanan Araştırmaya Gönüllü Katılım Formu EK 3'te ve Veli İzin Formu ise EK 4'te sunulmuştur.

Buna göre 2019-2020 eğitim öğretim yılında, Eskişehir ilinde, bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7. sınıf öğrencileri katılımcı olarak seçilmiştir. Bu sınıfta 15 kız 16 erkek olmak üzere toplam 31 öğrenci bulunmaktadır. Bulgular sunulurken sınıfta hiçbir öğrencinin gerçek isimleri kullanılmamış olup, öğrencilere kod isimler verilmiştir. Bu araştırmada araştırmanın amaçlarından bir tanesi de öğrencilerin kanıt deneyimi yaşadıkları öğrenme ortamında sınıf mikrokültürünün önemli bir parçası olan sosyal ve sosyo-matematiksel normların belirlenmesi olduğundan, öğretim yapılmadan önceki sınıf kültürünün betimlenmesinin gerekli olduğu düşünülmüştür. Araştırmacı-öğretmen bu sınıftaki öğrencilerin daha önceki yıllarda derslerine girmemiştir. Bu sebeple öğretmenin araştırmaya başlamadan önceki süreçte gözlemlerine ve öğrencilerin söylemlerine dayanarak sınıf mikrokültürü tanımlanmıştır. Öncelikle sınıftaki öğrencilerin açıklama ve gerekçelendirme yapma, kendi görüşünü savunma ya da karşıt görüş oluşturma konusunda hem eksikliklerinin hem de çekingenliklerinin olduğu söylenebilir. Bununla birlikte daha önce grup çalışması yaptıkları tespit edilmiş; ancak bu çalışmaların yüzeysel olduğu, açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme, gruptaki herkesin düşüncesini tek tek söylemesi, işbirliği yapma konusunda eksikliklerinin olduğu belirlenmiştir. Aynı zamanda öğrencilerin görüşleri alındığında bir problemi birden fazla yolla çözmeye gerek duymadıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte ön test, kanıta giriş dersi ve ön görüşmelerde öğrencilerin deneysel doğrulamayı kanıt olarak kabul etme ve cebirsel ifadeleri çözümlerinde kullanmayı tercih etmeme durumlarının olduğu belirlenmiştir. Tüm bu durumlar göz önünde bulundurularak araştırmacı tarafından bu sınıfta oluşturulması istenen sosyal ve sosyo-matematiksel normların çerçevesi çizilmiştir. Araştırmada dört farklı küçük grup oluşturulmuştur. Küçük gruplar oluşturulurken ön testlerdeki başarı düzeyi ölçütünün yanında öğrencilerin birbirleriyle uyumlu olarak çalışabilmeleri ve birbirleriyle daha rahat şekilde iletişim kurabilmeleri de dikkate alınmıştır. Araştırmayı desteklemesi için yapılan klinik görüşmede, görüşme yapılacak odak öğrencilerin belirlenmesinde de ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bunun için öncelikle ön test sonuçlarına göre sınıftaki öğrencilerin başarı düzeyi belirlenmiştir. Ön testte sorulan 12 problem/önermeye verilen yanıtlardan 6 ve daha üstü doğru yanıtı olanlar yüksek başarı düzeyinde, 4 ya da 5 doğru yanıtı olanlar orta başarı düzeyinde, 4'ün altında doğru yanıtı olanlar ise düşük başarı düzeyinde kabul edilmiştir. Ön test sonuçlarına göre gönüllü öğrenciler arasından 2 başarı düzeyi yüksek, 2 başarı düzeyi orta ve 2 başarı düzeyi düşük öğrenci odak öğrenci olarak seçilmiştir. Odak öğrenciler seçilirken, ön test sonuçlarına göre başarı düzeyi yüksek öğrencilerin arasından matematik dilini doğru kullanma, ön testteki tanımları anlama ve doğru kullanma, matematiksel gerekçelendirmeler yapabilme, düşüncelerini rahat ifade edebilme durumları da dikkate alınarak 2 başarı düzeyi yüksek öğrenci odak olarak belirlenmiştir. Bununla birlikte sınıftaki öğrencilerin büyük çoğunluğunun ön test sonuçlarına göre orta başarı düzeyinde olduğu belirlenmiş ve bu öğrenciler arasından düşüncelerini rahat ifade edebilen 2 başarı düzeyi orta öğrenci odak olarak belirlenmiştir. Ayrıca ön test sonuçlarına göre düşük başarı düzeyinde olan öğrencilerin arasından en az iki problem ya da önermeye doğru yanıt veren ve düşüncelerini rahat ifade edebilen 2 başarı düzeyi düşük öğrenci odak olarak seçilmiştir. Seçilen 6 öğrenciden 3'ü kız, diğer 3'ü erkek öğrencidir. Bununla birlikte araştırmanın gerçekleştirildiği okul, sosyo-ekonomik durumu orta ve düşük seviyedeki bir bölgede yer almaktadır. Odak öğrencilerin sosyo-ekonomik durumlarının ise orta düzeyde olmasına dikkat edilmiştir. Araştırmanın öğretim uygulamaları aşamasında, odak grupların başarı düzeylerini eşitlemek adına belirlenen 6 odak öğrenciden başarı düzeyi düşük, başarı düzeyi orta ve başarı düzeyi yüksek olan 1'er öğrenci bir grupta, diğer üçü de diğer grupta olacak şekilde oturmuşlardır. Bu dağıtıma göre Esra, Eylül ve Bahri Turunçgiller grubunda, Elif, Mehmet ve Yağız Efsanevi Matematikçiler grubunda yer almıştır. Klinik görüşmelere katılan öğrencilerin isimleri, doğum yılları, öğretim uygulamalarında bulundukları gruplar ve ön test sonuçlarına göre başarı düzeyleri Tablo 3.1'de verilmiştir:

Tablo 3.1. *Odak öğrencilerin özellikleri*

Öğrencilerin Kod İsimleri	Doğum Yılı	Bulundukları Grupların İsimleri	Ön Test Sonuçlarına Göre Başarı Düzeyi
Bahri	2007	Turunçgiller	Yüksek
Elif	2007	Efsanevi Matematikçiler	Düşük
Esra	2007	Turunçgiller	Düşük
Eylül	2007	Turunçgiller	Orta
Mehmet	2007	Efsanevi Matematikçiler	Orta
Yağız	2007	Efsanevi Matematikçiler	Yüksek

3.3. Verilerin Toplanması

Araştırmada veriler; tüm sınıfla yapılan ön-son testler, odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön-ara-son klinik görüşmeler, öğretim uygulamalarının ses ve video kayıtları, küçük grup tartışmalarında etkinliklerde kullanılan çalışma kâğıtları ve araştırmayı desteklemesi amacıyla araştırmacının ve öğrencilerin tuttukları günlüklerden elde edilmiştir. Veri toplama araçları aşağıda ayrıntılı olarak sunulmuştur.

3.3.1. Ön-son test

2019-2020 eğitim öğretim yılında öğretim uygulamalarına başlamadan önce toplam 12 problem/önermeden oluşan bir ön test öğrencilere uygulanmıştır. Öğretimden sonra aynı test son test olarak da uygulanmıştır. Ön-son test hazırlanırken Stylianides'in (2007b) kanıt çerçevesi göz önünde bulundurularak öğrencilerin bildikleri ifadeler topluluğu, öğrencilerin kavrayabilecekleri argümantasyon biçimleri ve temsil şekilleri yani 7. sınıf öğrencilerinin özellikleri göz önünde bulundurulmuştur. İlk aşamada, araştırmacı tarafından hazırlanan ön test çalışmanın odak katılımcılarını belirlemeye ve öğrencilerin kanıtla ilgili mevcut bilgi ve becerilerini ortaya çıkarmaya yönelik olarak 31 öğrenciye yazılı olarak uygulanmıştır. Pek çok araştırmacı öğrencilerin kanıt yapmada zorlanmalarının arkasında yatan nedenlerden biri olarak öğrencilerin kanıtı yapılacak kavramlar hakkındaki ön bilgilerinin yanlış ya da yetersiz olduğuna vurgu yapmaktadır (Harel and Sowder, 1998; Moore, 1994). Bu faktörün araştırmayı etkilememesi için ön-son testte öğrencilerin bildikleri kavramlarla çalışmalarına dikkat edilmiştir. Soruların hazırlanmasında öğrencilerin 7. sınıftan önceki sınıf kazanımları ile ilgili en temel ve basit yargıların içerilmesine ve alan-yazında benzer yaş grubuna uygulanan matematiksel kanıt problemleri ile uyumlu olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca iki alan uzmanından problemlerin anlaşılır olması, öğrenci seviyesine uygunluğu, öğrenci muhakemelerini ortaya çıkarmaya elverişli olması, gözden kaçmış olabilecek muhtemel kavram yanılgıları noktalarında dönütler vermeleri istenmiştir. Verilen dönütlere göre düzenlenen testin pilot çalışması yapılmış, pilot çalışma verileri de göz önünde bulundurularak sorular tekrar düzenlenmiştir. Düzenlenen son hali bir alan uzmanına daha sunulmuştur. Uzman görüşleri ve pilot çalışma bulguları göz önünde bulundurularak ön-son testten pilot çalışmada öğrencilerin yaklaşık % 90'ı tarafından anlaşılmayan 2 problem ve bir önerme çıkarılmıştır. Aynı zamanda bir problem cümlesi ile bir önermede yanlış anlaşılmalar olduğu fark edilerek düzenlemeler yapılmış, problem ve önerme daha anlaşılır hale getirilmiş ve testin son hali oluşturulmuştur.

Ön-son testin birinci problemi öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları beklenen bir sayı problemidir. Problem 1 aşağıda sunulmuştur:

PROBLEM 1. Ali bir oyun bulur. Bir tam sayı alır ve 5 ile çarpar, sonra 12 ekler. Daha sonra başlangıçtaki sayıyı çıkarır ve sonucu 4'e böler. Cevabın, her zaman ilk sayıdan 3 fazla olduğunu fark eder. Ayşe ise bunun hep bu şekilde sonuçlanacağını düşünmediği için ilk sayıdan başka bir sayı dener. Ali ve Ayşe sonucun her zaman ilk sayıdan 3 fazla olacağına karar verirler. Sence haklılar mı? Bir arkadaşını sonucun her zaman ilk sayının üç fazlası olacağına nasıl ikna edersin?

Ön-son testin birinci problemi hazırlanırken 6. sınıf *cebir* öğrenme alanı dikkate alınmıştır. Problem bu öğrenme alanının alt öğrenme alanlarından biri olan *cebirsel ifadelerde* bulunan "Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar." ve "Cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar." kazanımlarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Ön-son testin ikinci problemi, içinde farklı önermelerin olduğu bir problemdir. Bu önermeler öğrencilerin doğrudan kanıt, tüketerek kanıt ve aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerdir. Problem 2 aşağıda sunulmuştur:

PROBLEM 2: Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur? Nedenleri ile birlikte yazın.

a) Bir sayı başka bir sayıdan daha büyükse, büyük olan sayı her zaman daha fazla çarpana sahiptir.
b) İki tek sayının toplamı çifttir.
c) Her sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir.
d) İkinin katı olan bir sayı her zaman 4'ün de bir katıdır.
e) $A = \{1,2,3,4,5\}$ ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise, $n^2 - n + 11$ sayısı her zaman bir asal sayıdır.
f) Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90^o olan bütün dörtgenler dikdörtgendir.
g) Her kare bir paralelkenardır.
h) Karşılıklı kenarları paralel olan bütün dörtgenler paralelkenardır.
i) Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenler paralelkenardır.

Ön-son testin ikinci probleminde a ve d şıkkındaki önermelerde 6.sınıf *sayılar ve işlemler* öğrenme alanında bulunan *çarpanlar ve katlar* alt öğrenme alanındaki "Doğal sayıların çarpanlarını ve katlarını belirler." ve "İki doğal sayının ortak bölenleri ile ortak katlarını belirler, ilgili problemleri çözer." kazanımları dikkate alınmıştır. Ön-son testin ikinci probleminde b ve c şıklarındaki önermelerde 3. sınıf *sayılar ve işlemler* öğrenme alanında bulunan *doğal sayılar* alt öğrenme alanındaki "Tek ve çift doğal sayıları kavrar." kazanımı dikkate alınmıştır. Bu problemin e şıkkındaki önermede 6.sınıf *sayılar ve işlemler* öğrenme alanında bulunan *doğal sayılarla işlemler* alt öğrenme alanındaki “Bir doğal sayının kendisiyle tekrarlı çarpımını üslü ifade olarak yazar ve değerini hesaplar.” ve *çarpanlar ve katlar* alt öğrenme alanındaki “Asal sayıları özellikleriyle belirler.” kazanımları dikkate alınmıştır. Bu problemin f, g, h ve i şıklarındaki önermelerde 5. sınıf *geometri* öğrenme alanı dikkate alınmıştır. Bu öğrenme alanının alt öğrenme alanlarından biri olan *üçgen ve dörtgenlerde* bulunan “Dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen ve yamuğun temel elemanlarını belirler ve çizer.” ve “Üçgen ve dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını belirler ve verilmeyen açıyı bulur.” kazanımları dikkate alınmıştır.

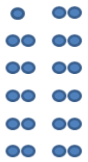
Ön-son testin üçüncü problemi öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları beklenen bir geometri problemidir. Problem 3 aşağıda sunulmuştur:

PROBLEM 3: Bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?

Bu problemde 5. Sınıf *geometri* öğrenme alanında bulunan *üçgen ve dörtgenler* alt öğrenme alanındaki “Açılarına ve kenarlarına göre üçgenler oluşturur, oluşturulmuş farklı üçgenleri kenar ve açı özelliklerine göre sınıflandırır.” ve “Üçgen ve dörtgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını belirler ve verilmeyen açıyı bulur.” kazanımları dikkate alınmıştır.

Ön-son testin dördüncü problemi bir kanıt değerlendirme problemidir. Bu problemde öğrencilerden, verilen önermeye yönelik sunulan 3 farklı argümanı değerlendirmeleri istenmiştir. Bunlardan birisi örnek vererek doğrulama yapılan deneysel argüman (Mehmet), bir diğeri görsel anlatım yolu ile sunulan görsel argüman (Buse) ve son olarak da doğrudan kanıtın yapıldığı cebirsel argüman (Cem)’dır. Bu problemde öğrencilere önerme için sunulan argümanlardan hangisinin en ikna edici olduğu sorulmuştur. Problem 4, Tablo 3.2.’de sunulmuştur:

Tablo 3.2. *Ön-son testin dördüncü problemi*

<table>
<tr><th colspan="3">PROBLEM 4</th></tr>
<tr><td colspan="3">Bir öğretmen öğrencilerinden bir tek sayı ile bir çift sayının toplamının her zaman tek bir sayı olacağına kendisini ikna etmelerini istiyor. Buna göre öğrenciler aşağıdaki cevapları veriyorlar. Sen öğretmen olsaydın hangi cevap ya da cevaplar seni ikna ederdi, nedenleri ile açıklar mısın?</td></tr>
<tr><td>Mehmet'in cevabı
Bence doğru; ben şu örnekleri denedim, 12 ve 13 sayılarını aldım, daha sonra da 136 ve 379 sayılarını topladım.
12+ 13 = 25
136 + 379 = 515
25 ve 515 sayıları tek sayılar oldukları için soruda verilen ifade doğrudur. İki sayı örneği denedim, ikisinde de tek sayıya ulaştım.</td><td>Buse'nin cevabı
Bence doğru; herhangi bir tek sayı ile herhangi bir çift sayıyı şöyle gruplandırabiliriz:

Tek sayıları ikişerli gruplandırdığımızda her zaman geriye 1 kalır, çift sayılarda ise kalan olmaz. Bir tek ile bir çift sayıyı toplarsam tüm sayılar ikili gruplandırılır ancak 1 yine açıkta kalır, bu yüzden sonuç her zaman tek sayı çıkar.</td><td>Cem'in cevabı
Bence doğru; tüm çift sayılar 2m ile tek sayılar, 2n + 1 şeklinde gösterilebilen sayılardır.
Bu iki sayıyı topladığımda
(2n + 1) + (2m) = (2n + 2m) + 1 = 2n + 2m + 2 = 2 (n + m) + 1 şeklinde bir tek sayı elde ederim.</td></tr>
</table>

Bu problemde 3. sınıf *sayılar ve işlemler* öğrenme alanında bulunan doğal sayılar alt öğrenme alanındaki "Tek ve çift doğal sayıları kavrar." ve 6. sınıf *cebir* öğrenme alanında bulunan *cebirsel ifadeler* alt öğrenme alanındaki "Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar." kazanımları dikkate alınmıştır.

3.3.2. Klinik görüşmeler

Öğrencilerin kanıtlama sürecindeki muhakeme biçimlerini izleyebilmek ve varsayım oluşturabilmek için klinik görüşmeler araştırmanın başında ön klinik görüşme olarak, ortasında ara klinik görüşme olarak ve sonunda son klinik görüşme olarak yapılmıştır.

Klinik görüşme daha önce planlanmış bir şekilde bir ya da birden fazla görev (sorular, problemler ya da etkinlikler) aracılığıyla görüşmeci ile öğrencinin karşılıklı etkileşime girdiği bir tekniktir (Goldin, 2000). Matematik eğitimi araştırmacıları tarafından yaygın olarak kullanılan klinik görüşme yöntemi, matematiksel görevler ya da problemlerin çözüm sürecinde öğrencilerin anlama ve düşünme yollarını derinlemesine incelemek amacıyla kullanılmaktadır (Koichu and Harel, 2007). Düşünmenin doğasını anlamak için klinik görüşme tekniğini geliştiren Piaget, matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmaları da büyük ölçüde etkilemiş, böylece klinik görüşmeler matematiksel bilginin altında yatan zihinsel sürecin anlaşılması için tercih edilen bir yöntem olmuştur (Ginsburg, 1981). Matematik eğitiminde klinik görüşmelerin asıl amacı öğrencilerin stratejilerini, bilgi yapılarını ya da becerilerini ortaya çıkarmak, belirli bir öğretimin etkililiğini araştırmak, gelişim sürecini daha iyi anlamak ya da problem çözme davranışlarını araştırmaktır. Öğrencilerin problem çözme süreçlerini ve bu süreç içerisindeki davranışlarını ayrıntılı inceleme ve araştırma klinik görüşmelerle mümkün olmaktadır (Karataş ve Güven, 2003).

Klinik görüşmeler esnasında veriler daha sonra analiz edilmek için ses kayıt cihazı, video kamera, gözlemci notu ve öğrenci çalışmaları ile toplanabilir. Klinik görüşme, matematiksel problem çözmenin ve matematik öğrenmenin yapısı üzerinde sistematik gözlemler yapabilmek için bir araştırma aracı olarak hizmet etmektedir. Bununla birlikte, matematik eğitimi uygulamalarının gelişimi ya da öğrencilerin bilgilerinin tanımlanması için bir değerlendirme aracı olarak da kullanılabilir. Matematiksel görevlerin yapısı, sırası, içeriği daha önce yapılan araştırmanın bulgularına göre ve temel alınan ölçütlere göre yeniden düzenlenebildiği için matematiksel öğrenme ortamlarının kontrol edilebilmesini de mümkün kılmaktadır (Goldin, 2000). Klinik görüşme *deneme, gözlemleme* ve *çözüm yolunun istenmesi* olmak üzere üç temel tekniği içerir (Ginsburg, 2004'ten aktaran Tanışlı, 2008). Deneme, öğrencinin düşünmesi ile ilgili varsayımları aydınlatmak için planlanan görev ya da seçilen testlerin dikkatli bir şekilde uygulanması iken gözlemleme, örüşmeci tarafından öğrencinin bir problemi çözerken davranışlarının yakın bir şekilde incelenmesidir. Çözüm yolunun istenmesi ise "Çözümü nasıl buldun?" sorusu ile öğrencinin çözüm yolunun istenmesidir (Ginsburg, 2004'ten aktaran Tanışlı, 2008). Bu araştırma sürecinde deneme, gözlemleme ve çözüm yolunun istenmesi tekniklerinin üçü de kullanılmıştır.

Hunting (1997), klinik görüşmelerde kullanılan soruların doğasının ve düzenlenmesinin görüşmeci için kritik öneme sahip olduğunu ve klinik görüşmelerde soruların genellikle aşağıdaki özelliklere sahip olması gerektiğini belirtmektedir:

- Sorular, öğrencilerin yanıtlarında kendi tercih ettikleri yolları seçme özgürlüğüne sahip olabilmesi için açık uçlu olmalıdır.
- Sorular, düşünme sürecinin açıklanabilmesi için maksimum düzeyde tartışmaya ve diyaloga olanak sağlamalıdır.
- Sorular, hem öğrenci hem de görüşmeciye kendi düşünme süreçlerini yansıtmaları için izin vermelidir.

Bu bağlamda bu araştırmada, klinik görüşmeden önce, araştırmanın amacına ve öğrencilerin ön bilgilerine uygun bir şekilde görüşme soruları belirlenmiştir. Görüşme öncesi öğrenciler motive edilmiş, kendilerini rahat hissetmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin, düşünme süreçlerini açıklanabilmeleri için maksimum düzeyde tartışmaya ve diyaloga olanak sağlanmıştır. Öğrencilere uygun olarak seçilen görevler üzerinde öğrencilerin özgürce düşüncelerini ifade etmeleri sağlanmış ve yeterli süre verilmiştir. Öğrencilere klinik görüşmeler esnasında *"Ben senin düşünce tarzını öğrenmeye çalışıyorum. O yüzden bu soruyu çözerken yüksek sesle düşüncelerini benimle paylaşır mısın?", "Ne yaptığını yüksek sesle söyler misin?", "Bunu nasıl düşündüğünü açıklar mısın?", "Nasıl çözdüğünü açıklayabilir misin?", "Nasıl biliyorsun?", "Nasıl karar verdin?", "Neden böyle düşündün?", "Bulduğun sonucun doğru olduğuna emin misin?"* şeklinde soru biçimleri kullanılmıştır. Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın ise, *"Tekrar açıklar mısın?"* gibi alternatif ve sonda sorular da sorulmuştur (Clement, 2000, s. 572). Yine yönlendirme yapmaksızın "*çok güzel", "aferin", "bravo", "tabi, olabilir*" gibi cesaretlendirici sözel ipuçları da kullanılmıştır.

Klinik görüşmede matematiksel görevler; özel ölçütler ve daha önce yapılmış araştırma sonuçları, içerik, ortam, düzen ve yapıya bağlı olarak hazırlanabilir. Aşağıda klinik görüşmede kullanılan görevlerin seçimi ve gelişiminde dikkate alınacak ölçütler verilmiştir (Hunting, 1997, s. 151):

Zaman: Görüşme süresi, öğrencinin yaşına bağlıdır. 10-12 yaşındaki çocuklarla 35-50 dk., görüşme yapılabilir. Görüşmelerde öğrencilerin kıpırdanmaları konsantrasyonlarının azaldığını göstermektedir. Klinik görüşmelerde önemli olan mevcut zamanda maksimum bilgiyi elde etmektir.

Ön Bilgi: Öğrencilerin çalışmaları, öğretmen gözlemleri gibi değerlendirme biçimleri öğrencilerin ön bilgilerinin belirlenmesinde yol gösterir. Görüşmede kapsamlı bir görev hazırlamak, öğrenciyi tanımakla, diğer bir deyişle ön bilgisi hakkında bilgi sahibi olmakla mümkündür.

Yenilik: Görüşmede, bir görevin öğrencinin ilgisini çekmesi önemlidir. Verilen görev öğrenci için ne kadar yeni ise öğrencinin ilgisini çekme ihtimali o kadar artacaktır.

İçerik: Görev, öğrencinin matematiksel düşüncesini ortaya çıkaracak şekilde düzenlenmeli ve öğrenci için gerçeğe uygun bir ortam oluşturulmalıdır.

Araştırma Temeli: Matematikçi ya da matematikçiler tarafından yapılan araştırmalardaki görevlerin detaylı mantıksal analizleri yapıldığı için görevlerin hazırlanmasında konuyla ilgili yapılmış araştırmaları incelemek oldukça önemlidir.

Bu araştırmada görüşme süresi öğrencilerin yaşına uygun bir biçimde belirlenmiş ve öğrencilerin dikkatinin dağıldığı anda görüşmeye ara verilmiştir. Görüşme soruları öğrencilerin ön bilgileri dikkate alınarak ve ilgilerini çekecek şekilde hazırlanmıştır. Araştırmada ön test uygulandıktan sonra sınıftaki öğrencilerin tamamının kâğıtları ayrıntılı bir biçimde incelenmiş ve odak öğrenciler olarak belirlenen altı öğrenci ile öğretim uygulamaları öncesinde ön klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilerin ön test ile toplanan yazılı verilerini daha açıklayıcı hale getirmek, problemlere/önermelere verilen yanıtları daha doğru yorumlamak, nasıl düşündüklerini açığa çıkarmak ve kanıt işlevlerini görünür hale getirmek amaçlanmıştır. Bu sebeple ön klinik görüşmelerde, ön testte bulunan ve doğrudan kanıt yapmayı gerektiren dört problem/önerme (Problem 1, Önerme 2b, Önerme 2f, Problem 3) seçilen altı odak öğrenciye sorulmuştur. Ön görüşmelerde öğrenciler, kendi yanıtlarını kontrol etmiş, çözümlerini nedenleri ile birlikte açıklamış ve bazen de hatalarını fark ederek düzeltmişlerdir.

Ara ve son klinik görüşme görevleri hazırlanırken araştırmanın amaçları, alan-yazın taramasından elde edilen veriler, İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda belirtilen kazanımlar, öğrenci etkinlik kitapları, kanıta yönelik yapılmış araştırmalar, pilot çalışma bulguları ve uzman görüşleri dikkate alınmıştır. Ara ve son klinik görüşme görevleri için iki alan uzmanından problemlerin anlaşılır olması, öğrenci seviyesine uygunluğu, öğrenci muhakemelerini ortaya çıkarmaya elverişli olması, gözden kaçmış olabilecek muhtemel kavram yanılgıları noktalarında dönütler vermeleri istenmiştir. Verilen dönütlere göre düzenlenen ara ve son klinik görüşmelerin pilot çalışması yapılmış, pilot çalışma verileri de göz önünde bulundurularak sorular tekrar düzenlenmiştir. Düzenlenen son hali bir alan uzmanına daha sunulmuştur. Uzman görüşleri ve pilot çalışma bulguları göz önünde bulundurularak, ara klinik görüşme sorularından biri öğrencilerin hiçbiri çözemediği için çıkarılmış, geometri probleminde anlaşılmayan noktalar olduğu fark edilerek problem daha anlaşılır hale getirilmiştir. Son klinik görüşme sorularından sayı problemi kısaltılmış ve görüşme sorularının son hali oluşturulmuştur. Ara klinik görüşmelerde öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken bir sayı ve bir geometri problemi sorulmuştur. Tablo 3.3.'te ara klinik görüşme soruları verilmiştir:

Tablo 3.3. *Ara klinik görüşme soruları*

Ara Klinik Görüşme Soruları	
PROBLEM 5: İki basamaklı bir sayı ile bu sayının rakamlarının yer değiştirmesi sonucu oluşan sayının toplamı hakkında ne söylersin?	**PROBLEM 6:** Kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgenin her bir kenarı önce iki katına çıkarılıyor ve alan ve çevredeki değişim gözleniyor. Sonra sırayla 3 katına, 4 katına, 5 katına… çıkarılıp alan ve çevredeki değişim gözleniyor. a ve b kenarlarının her biri n katına çıkarılırsa alan ve çevredeki değişim nasıl olur?

Son klinik görüşmeler, öğretim deneyi tamamlandıktan ve son test uygulandıktan sonra gerçekleştirilmiştir. Son klinik görüşmelerde öğrencilere bir örüntü problemi, doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri ve bir sayı problemi sorulmuştur. Tablo 3.4.'te son klinik görüşme soruları verilmiştir:

Tablo 3.4. *Son klinik görüşme soruları*

Son Klinik Görüşme Soruları		
PROBLEM 7: Aşağıda ilk üç adımı verilen örüntünün 4. adımını çiziniz ve genel terimini bulunuz.  1. Adım 2. Adım 3. Adım	**PROBLEM 8:** Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı ile bu açılara komşu olmayan bir dış açının ölçüsü arasındaki ilişki sence nasıldır?	**PROBLEM 9:** Her n ve m doğal sayısı için $3^n + 5^m$ sayısının tek ya da çift olması hakkında ne söylersin?

Her bir katılımcıyla yapılan bireysel görüşmeler, süre sınırlaması yapılmadan gerçekleştirildiğinden, katılımcının durumuna göre farklı sürelerde tamamlanmıştır. Öğrencilerin yaş düzeyleri göz önüne alınarak oturumlar 30-40 dakika arasında yapılmış, gerek duyulduğunda oturumlara ara verilmiştir. Tablo 3.5’te öğrenciler ile gerçekleştirilen toplam klinik görüşme süreleri verilmiştir:

Tablo 3.5. *Öğrencilerle yapılan klinik görüşme süreleri*

Öğrenci İsimleri	Ön Görüşme	Ara Görüşme	Son Görüşme
Elif Hayat	40’ 33’’	59’ 45’’	58’ 40’’
Bahri	43’ 54’’	57’ 34’’	64’ 20’’
Esra	41’ 19’’	63’ 28’’	61’10’’
Yağız	40’ 30’’	59’ 53’’	63’27’’
Eylül	44’ 22’’	61’19’’	59’ 38’’
Mehmet	42’ 53’’	63’ 16’’	57’ 41’’

3.3.3. Araştırmacı günlüğü

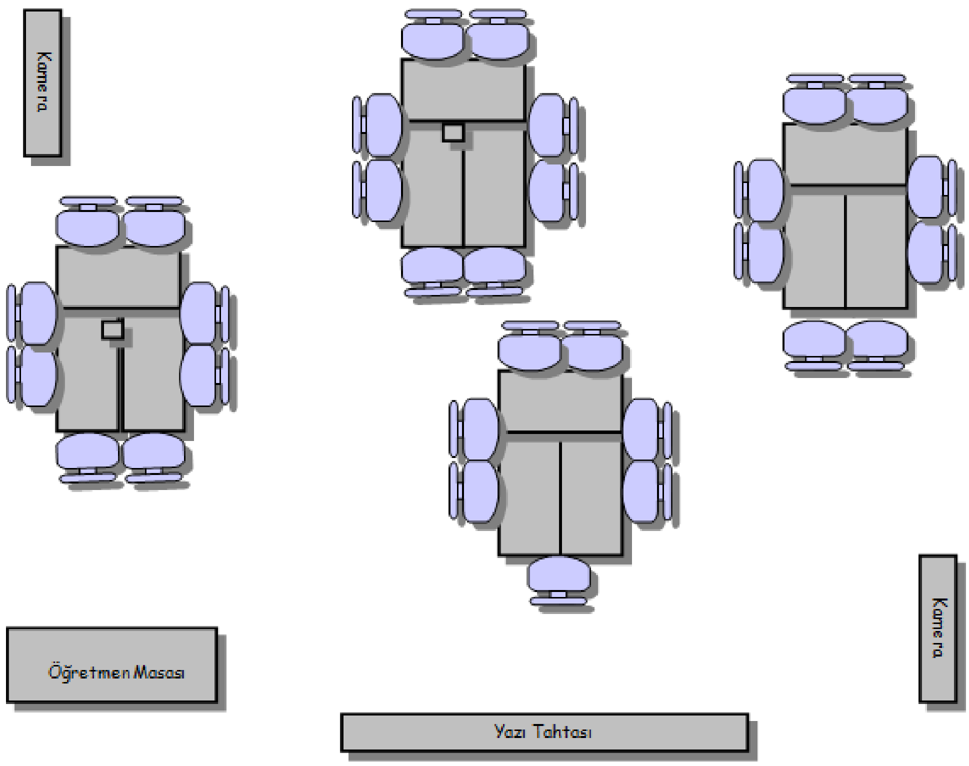
Araştırmacı günlüğü öğretim deneyi sürecini yöneten araştırmacı-öğretmen tarafından tutulmuştur. Araştırmacı günlüğü, araştırmanın tüm boyutları ile ilişkili gözlemlerin ve görüşlerin kaydedildiği bir defterdir (Tanışlı, s. 65). Araştırmacı, araştırma süreci boyunca yapacağı klinik görüşmeler öncesi ve sonrasında ayrıca öğretim bölümleri öncesi ve sonrasında günlük tutmuştur. Araştırmacı katılımcılarla ilgili gözlemlerini, yapılan klinik görüşmelerle ilgili ilk değerlendirmelerini, öğretim bölümlerinde yaşananları günlüğüne not etmiştir. Araştırmacı-öğretmen aynı zamanda öğretim bölümlerinde, katılımcı öğrencilerin hem kendi grup arkadaşları hem de diğer gruplardan öğrencilerle olan etkileşimlerini, sınıf tartışmaları esnasında öğrencilerin duyuşsal özelliklerini ve öğrencilerin problemleri çözerken yaşadıkları güçlükleri de not etmiştir. Araştırmacı günlüğü araştırmaya destek veri sunması amacıyla tutulmuştur.

3.3.4. Öğrenci günlükleri

Öğrenci günlüğü, öğrencilerin, araştırma süresince araştırma konusu, yapılan görüşmeler, araştırmacı ile öğrencinin iletişimi gibi pek çok konuda duygu ve düşüncelerin kaydedildiği bir defterdir (Tanışlı, 2008). Öğrenci günlükleri öğretmenlere, öğrencilerinin bilgilerini, ilgilerini, ihtiyaçlarını, duygularını ve düşüncelerini kavrama olanağı sağlar (Jewell and Tichenor, 1994’ten aktaran Yavuzsoy-Köse, 2008). Bu araştırmada haftalık öğretim sürecinin sonunda öğrencilerden, o gün yapılan kanıt etkinliği ile ilgili düşüncelerini yazmaları istenmiştir. Öğrenciler günlüklerini ders bittikten sonra yazarak, bu günlükleri bir gün sonra araştırmacıya teslim etmişlerdir. Öğrenci günlükleri araştırmaya destek veri sunması amacıyla tutulmuştur.

3.4. Araştırma Ortamı

Araştırmanın uygulaması 2019-2020 öğretim yılı güz döneminde Eskişehir ili merkezindeki bir devlet ortaokulunda 7. sınıfa devam eden öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Bu okulun seçilmesinde araştırmacının kendisinin öğretmenlik yaptığı okul olması etkili olmuştur. Araştırma ortamı olarak öğretimin uygulandığı sınıf ve klinik görüşmelerin yapıldığı sınıf olmak üzere iki farklı sınıf kullanılmıştır. Öğretimin uygulandığı sınıfta oturma düzeni olarak bireysel ve grupla çalışma yapmaya elverişli olan çok gruplu yerleşim düzeni benimsenmiş ve Şekil 3.1.'de sunulmuştur:



Şekil 3.1. *Öğretimin gerçekleştirildiği sınıf ortamında oturma düzeni*

Şekil 3.1.'de görüldüğü gibi, bu sınıfta etkinlikler sırasında kullanılan video kameralar öğrencileri, araştırmacıyı ve tahtayı görebilecek ve öğrencilerin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Bununla birlikte odak grupların masalarına dikkatlerini dağıtmayacak şekilde ses kayıt cihazı yerleştirilmiştir. Araştırma sürecinde klinik görüşmeler ise öğrencilerin kendilerini rahat hissettikleri, sessiz bir ortam olan okulun satranç sınıfında yapılmıştır. Görüşmeler sırasında, görüşmecinin öğrenci ile yüz yüze gelebildiği ve aynı zamanda öğrencinin yaptıklarını rahat görebildiği bir oturma düzeni oluşturulmuştur. Görüşmeler sırasında kullanılan ses kayıt cihazı öğrencinin dikkatini dağıtmayacak şekilde masaya yerleştirilmiştir.

3.5. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacı, alanda zaman harcayan, araştırma kapsamındaki kişilerle doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimlerini toplanan verilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 43). Öğretim deneyinde araştırmacı aynı zamanda öğretmen olduğu için araştırmacı-öğretmen tüm süreç boyunca öğrencilerle etkileşim halinde olmuş, araştırma sürecinin tüm aşamalarında tarafsızlığını korumuş, görüşmeci olarak öğrencilerle görüşmüş, görüşmeler sırasında öğrencilerin düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak sorular yöneltmiştir. Hem sınıf ortamında hem de görüşmeler esnasında öğrencilerin muhakemelerini ortaya çıkarmak için rahat ve etkileşimli bir ortam yaratmıştır. Yüksek lisans tezinde çok çözümlü problemler ve yaratıcılık üzerine çalışan araştırmacı aynı zamanda bağlı bulunduğu üniversitede doktora eğitimi süresince "Matematikte Kavram Analizi", "Matematik Eğitimi Teorilerine Giriş" "Matematik Dili ve Kavram Bütünlüğü", "Matematik Eğitiminde Araştırma", "Nitel Araştırma Yöntemleri" ve "Matematiksel Kanıt" derslerini almıştır.

3.6. Pilot Çalışma

Bu araştırmada yapılacak öğretim uygulamalarının işlevselliğinin belirlenmesi, uygulama esnasında ortaya çıkabilecek problemlerin tespit edilmesi ve gerekiyorsa yeniden düzenlenmesi için pilot çalışma yapılmıştır. Bununla birlikte pilot çalışmada ön-son testin, klinik görüşme sorularının, ders içinde kullanılacak etkinliklerin değerlendirilmesi ve geçerlik-güvenirlik çalışmaları yapılmıştır. 2018-2019 eğitim öğretim yılında Eskişehir il merkezindeki bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 7/A sınıfı öğrencileri, bu araştırmanın pilot çalışmasında katılımcı olarak yer almışlardır. Pilot çalışma yapılan sınıfta 16 kız 14 erkek öğrenci olmak üzere 30 öğrenci vardır.

Pilot çalışmada ilk olarak hazırlanan ön test iki alan uzmanının görüşüne sunulmuş ve alan uzmanlarından gelen öneriler doğrultusunda düzenlenerek 30 öğrenciye uygulanmıştır. Ön test ile toplanan yazılı verileri daha açıklayıcı hale getirmek ve ölçme aracında yer alan sorulara verilen yanıtları daha doğru yorumlamak için ön test sonuçlarına göre belirlenen öğrencilerle klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşme yapılacak öğrenciler gönüllü öğrenciler arasından 2 başarı düzeyi yüksek, 2 başarı düzeyi orta ve 2 başarı düzeyi düşük olan öğrenci odak olarak seçilmiştir. Seçilen 6 öğrenciden 3'ü kız ve diğer 3'ü erkek öğrencidir. Sınıf çalışmalarında odak gruplar oluşturulurken bu odak öğrencilerden 3'ü bir odak grupta diğer 3'ü de diğer odak grupta yer alacak şekilde gruplara dağıtılmışlardır. Odak grupların da başarı düzeylerini eşitlemek adına başarı düzeyi düşük, başarı düzeyi orta ve başarı düzeyi yüksek olan 1'er öğrenci bir grupta, diğer 3'ü de diğer grupta olacak şekilde oturmuşlardır.

Çalışmada önce öğretimin amaçları belirlenmiş, ardından bu amaçlara uygun olacak şekilde sınıf etkinlikleri oluşturulmuştur. Ayrıca sınıf etkinlikleri hazırlanırken ön test ve ön klinik görüşmelerden elde edilen veriler ve İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı göz önünde bulundurulmuştur. Öğretim uygulamalarına geçmeden önce 16 saatten oluşan 8 haftalık ders planı hazırlanmıştır. Ders planı matematik eğitimi alanında çalışmalarını yürüten iki uzmana sunularak uzmanların görüşü alınmıştır. Daha sonra hazırlanan etkinliklerin öğrenciler tarafından anlaşılır olup olmadığını, öğrencilerin muhakeme yapmalarını sağlayacak nitelikte olup olmadığını, öğrencilerin düşünmelerini ortaya çıkarabilecek ve etkili öğretimi sağlayacak nitelikte olup olmadığını belirlemek için pilot çalışmanın öğretim uygulamaları aşamasına geçilmiştir. Pilot çalışma uygulaması video kaydına alınmış, bu kayıtlar çözümlenmiş ve araştırmacı, tez danışmanı ve bir öğretim üyesi ile birlikte değerlendirilerek gerçekleştirilecek ana uygulamaya son şekli verilmiştir. Pilot çalışma sonucunda araştırmacının gözlemleri, tasarlanan öğrenme ortamında öğrencilerden ya da uygulamalardan dolayı ortaya çıkan durumlar ve öğrencilerin yaptığı çalışmaların her biri değerlendirilerek ders planı tekrar gözden geçirilmiştir. Aynı şekilde öğrenme ortamında kullanılan etkinlikler, ön-son test ve klinik görüşme sorularına son halleri verilmiştir. Pilot çalışmadan elde edilen bulgular ışığında, veri toplama araçlarındaki problemlerden bazıları değiştirilmiş, ders içi etkinliklerden bazıları zamanın yeterli gelmediği görülerek çıkarılmıştır. Ayrıca pilot çalışma sayesinde, araştırmacı-öğretmen deneyim kazanmış ve üstleneceği rolü değerlendirme imkânı bulmuştur.

3.7. Öğretim Bölümleri

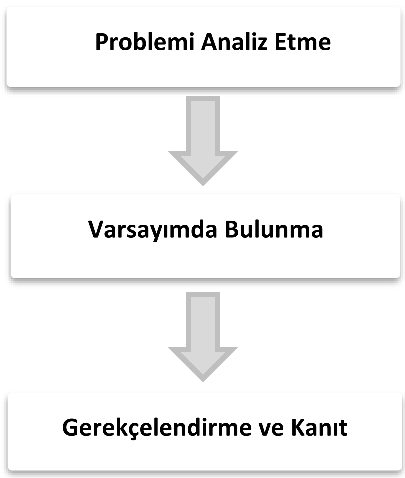
Pilot çalışma bulgularına göre gözden geçirilen ve tekrar düzenlenen öğretim deneyinin uygulaması yapılmıştır. Öncelikle araştırmacı–öğretmen aynı zamanda öğrencilerin matematik ve matematik uygulamaları derslerinin öğretmenidir. Matematik ya da matematik uygulamaları derslerinde kanıt program dışı bir başlık olarak uygulanmamış, matematik uygulamaları derslerinde problem çözme etkinliği olarak öğrencilere sunulmuştur. 12 hafta süren öğretim uygulamalarına başlamadan önce sınıfta matematiksel olarak geçerli kabul edilecek bir argümanın özelliklerini, argümantasyon yönteminin (doğrudan kanıt, aksine örnek verme gibi) ve argüman temsil biçimlerinin (cebirsel, görsel, sözel temsiller gibi) ne olduğunun çerçevesinin çizilmesi (Stylianides, 2007b) için 2 ders saati süren kanıta giriş dersi yapılmıştır. Kanıta giriş dersinde sınıfa “Kanıt (ispat) nedir ve matematiksel kanıt nedir?” diye sorulmuş ve öğrencilerin görüşleri alınmıştır. Bunun üzerine bu sınıfta hangi argümanların kanıt olarak kabul göreceğinin anlaşılması için Stylianides’in (2010) kanıt olan ve olmayan argümanlar ayrımını gösteren örneğinden faydalanılmış ve *“Ardışık iki tek doğal sayının toplamı 4'ün katıdır.”* önermesi öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin örnek vermenin kanıt yapmadaki sınırlı rolünü anlamaları, gerekçe olmadan geçerli kabul edilecek bir argümanın özelliklerini (tek-çift sayı tanımı gibi), argümantasyon yöntemlerinin (doğrudan kanıt) ve temsil biçimlerinin (görsel, cebirsel temsil) sınırlarını çizmek için önermenin kanıtı yapılmıştır. Ayrıca kanıt yaparken problemi (önermeyi) anlamak için örneklerden yararlanılabileceği, bu örneklerin stratejik örnekler olmasının önemli olduğu belirtilmiş; ancak örneklerle denemenin bu sınıfta geçerli bir kanıt yöntemi olarak kabul edilmeyeceği vurgulanmıştır. Daha sonra bir önermenin doğruluğunu göstermek için örnek vermenin yeterli olmadığı; ancak yanlış olduğunu göstermek için aksine bir örnek vermenin yeterli olduğu vurgulanmış ve aksine örnek verme yöntemi öğrencilere tanıtılarak bu sınıfta geçerli kabul edilecek argümantasyon yöntemlerinden biri daha öğrencilere sunulmuştur. Bununla birlikte ders boyunca öğrencilerin ulaştıkları sonuçların neden doğru olduğunu açıklamaları gerektiği belirtilerek açıklama ve gerekçelendirme ile geçerli bir matematiksel kanıt sunma, yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma, deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme gibi sosyal ve sosyo-matematiksel normların sınıf normu olması için ilk adım atılmıştır.

Ön test, ön görüşmeler ve kanıta giriş dersi aracılığıyla belirlenen eksikliklerin giderilmesi, öğrencilerin kanıtlama süreçlerindeki muhakemelerinin incelenmesi, bu süreçte doğrulama, açıklama, iletişim, buluş ve sistematikleştirme işlevlerinin ortaya çıkarılması, aynı zamanda araştırmacı-öğretmen tarafından belirlenen sınıf normlarının pekiştirilmesi amacıyla öğretim aşamasına geçilmiştir. 12 hafta boyunca haftada bir gün iki ders saati olmak üzere toplam 24 ders saati olacak şekilde sınıf çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Her bir öğretim oturumu önceki oturumdan elde edilen tahminlerin kontrolünü içermiştir. Sınıf çalışmalarında kullanılan etkinliklerin seçiminde öğrencilerin uygulamanın başladığı süreçte bildikleri, öğretim programı içerisinde önceki ders yıllarında işlemiş oldukları konular ve süreç devam ederken öğretim programı içerisindeki konular dikkate alınmıştır. Öğretim oturumlarında yapılacak olan etkinliklerin belirlenmesinde bir önceki öğretim ile bir sonraki öğretim oturumları da dikkate alınmıştır. Bu öğretimlerde odak olarak belirlenen grupların kanıt yapma süreçlerine dikkat edilmiş, odak grupların tartışmaları ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Sınıf çalışmalarında öğrencilerin bireysel gelişimiyle ilgili olarak da bilgi elde edinilmesi gerektiğinden öğrenciler hem bireysel, hem de gruplar halinde farklı kanıt problemleri üzerinde çalışmışlardır. Bununla birlikte araştırmada benimsenen ve öğretim uygulamalarında kullanılan model aşamaları ile birlikte sonraki bölümde sunulmuştur.

3.7.1. KARİDE modelinin aşamaları

Daha önce de belirtildiği gibi bu araştırmada Stylianides (2007b, s. 291) tarafından ortaya konulan ve kanıtın sosyal yönleri ile matematiksel yönlerini birleştiren kanıt tanımı benimsenmiştir. Buna göre sınıftaki kanıt etkinliklerinde, tüm sınıf tarafından kabul edilen ve daha fazla gerekçeye ihtiyaç olmaksızın geçerli olan tanımlar, aksiyomlar, teoremler kullanılır. Örneğin bir kanıt etkinliğinde kullanılan tek-çift sayı tanımları bu kapsamda yer almaktadır. İkinci olarak tüm sınıf tarafından bilinen ya da sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan muhakeme yöntemleri ile kanıt yapılır. Bu çalışmada deneysel doğrulama geçerli bir kanıt yöntemi değil, sadece problemi ya da önermeleri anlamak için kullanılan bir doğrulama yöntemi olarak ele alınmıştır. Bununla birlikte doğrudan kanıt, tüketerek kanıt, varlık kanıtları ve aksine örnek verme sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan muhakeme yöntemleri kapsamında ele alınmıştır. Son olarak öğrencilerin kanıtlarını iletirken sınıf düzeyleri de göz önünde bulundurularak sözel, görsel ya da cebirsel temsil biçimlerinden yararlanmalarına olanak tanınmıştır. Alan-yazında kullanılan ve temsillerin bir durumun tüm örneklerini kapsaması durumu olarak ifade edilen genelleyici örnekler (Balacheff, 1988; Ellis vd., 2012) bu araştırmada geçerli ve ikna edici kanıt kapsamında ele alınmıştır. Örneğin görsel temsiller kullanılarak sunulan genelleyici bir örnek bu araştırmada geçerli kabul edilmiştir.

Bu araştırmada, öğrencilerin kanıt yaptığı bir sınıf ortamı oluşturmaya çalışılırken öncelikli hedef öğrencilerin kanıtın farklı işlevlerini deneyimlemelerini sağlayarak bu işlevleri ön plana çıkarmaktır. Farklı araştırmacıların sınıflarda kanıt öğretiminin başarıya ulaşabilmesi için, bu öğretimin işbirlikli ve araştırma biçimli olarak uygulanmasına, belirli bir problem durumu üzerinde birçok öğrencinin farklı varsayımlarda bulunması, bu varsayımları araştırması ve varsayımların doğruluğunun geçerli argümanlar ile ortaya konulması gerektiğine vurgu yaptıkları, kanıtı bir problem çözme aktivitesi olarak gördükleri belirlenmiştir (Bell, 1976; Furinghetti and Morselli, 2009; Hanna and De Villlers, 2012; Shipley, 1999). Bununla birlikte incelenen kanıt öğretim modellerinin büyük çoğunluğunda (Dean, 1996; Schabel, 2005; Selden and Selden, 2009) kanıt öğretimine bir kanıt problemiyle başlandığı için bu araştırmada her bir kanıt etkinliği bir problemle başlamıştır. Ayrıca öğrencilerin bir matematikçi gibi yeniden keşif yapmaları için varsayım oluşturma içeren problemlerin kanıtın öğreniminde daha uygun olacağı düşünülmüştür. Böylece öğrencilerin kanıtı, kendilerinin de matematik yaparken çokça kullandıkları sistemli bir problem çözme etkinliği olduğunu görmeleri istenmiştir. Şekil 3.2.'de sınıfta kanıt etkinliklerinin uygulanması için üç aşamalı bir kanıtlama süreci oluşturulmuştur:



Şekil 3.2. *Kanıtlama sürecinin aşamaları*

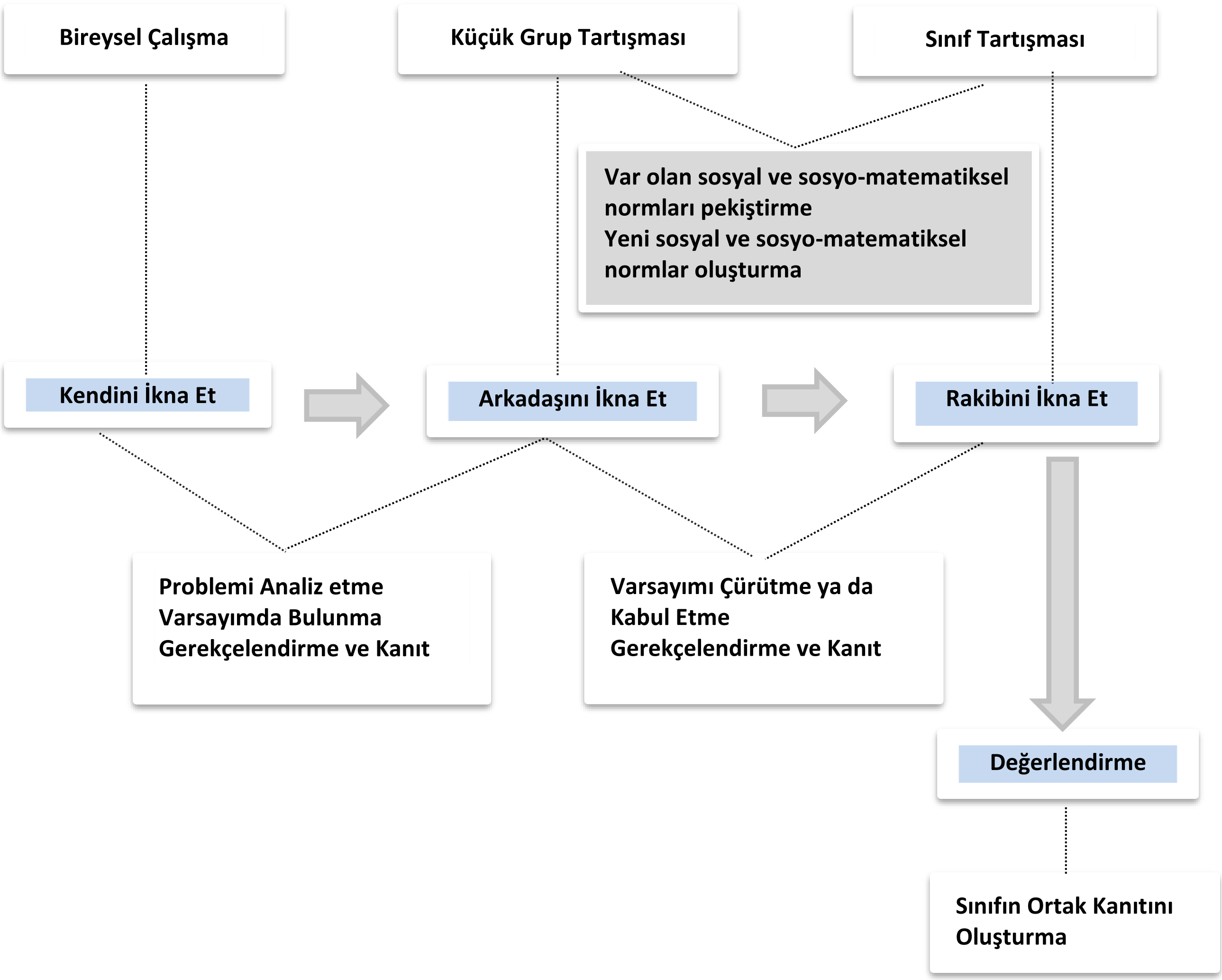
Şekil 3.2.'de görüldüğü gibi kanıtlama sürecinin üç aşaması a) problemi analiz etme, b) varsayımda bulunma ve c) gerekçelendirme ve kanıt olarak belirlenmiş ve aşağıda detaylandırılmıştır:

Problemi Analiz Etme: Bu aşama öğrencilerin problemi analiz etmek için gerçekleştirdikleri eylemlerden oluşur. Bunun için, bireysel olarak problemi okuma, anlamaya çalışma, problemdeki ilişkileri bulmaya çalışma, örnekleri analiz etme, yani örneklerle deneysel doğrulamalar yapma, aksine örnekleri bulmaya çalışma, özel bir şekil gibi herhangi bir görselden yararlanma gibi eylemler gerçekleştirilir. Problemin anlaşılabilmesi için tümevarımsal muhakemeden yararlanılabilir. Bu nedenle öğrencilerin deneysel ya da görsel argümanlardan yararlanmalarına izin verilir. Öğrencilerin önce rastgele örnekler seçmesi olağan bir durumken bu aşamada özellikle doğru, amaçlı kullanılan ve rastgele değil de bir strateji kullanarak örnekler seçmeyi öğrenmeleri beklenir. Öğrencilerin seçeceği örneklerin, varsayımlar oluşturmaları için yardımcı olacağı düşünülmektedir. Eğer sunulan kanıt problemi aksine örnek verme yöntemiyle çözülecekse, bu aşamada öğrenciler kullandıkları stratejik örneklerle kanıtı sonlandırabilirler. Bu aşamada öğrenciler elde ettikleri verilere bağlı olarak önce çeşitli iddialar ortaya atabilirler. Daha sonra ürettikleri farklı iddialarını mantıksal bir zincir halinde düzenleyerek varsayımda bulunmak için kullanabilirler. Problemi analiz etme aşamasında incelenen belirli örneklerden hareketle, bu örnekler arasındaki temel ilişkiler açığa çıkarılır. Öğrencilerin seçtikleri stratejik örnekler yardımıyla bu ilişkilerin diğer durumlar için de geçerli olup olmadığı araştırılır. Bu aşamada keşfedilen ilişkilerin bir sonraki aşamada matematiksel dil kullanılarak ifade edilmesi beklenir.

Varsayımda Bulunma: Önceki aşamada yeterli sayıda örnek incelendikten ve bu örnekler arasındaki ilişkiler keşfedildikten sonra, bu ilişkilere dayalı olarak bir yargıya varılabilir. Öğrencilerin gözlemlerine dayanan kanıtlanmamış durumlar varsayım olarak ifade edilir. Varsayımda bulunma sürecinde öğrenciler daha önceki aşamada olduğu gibi varsayımlarını test etmek için örneklerden yararlanabilir, varsayımlarını çürütebilecek aksine bir örnek araştırılabilirler. Yani öğrenciler varsayımlarını deneysel yöntemlerle doğrulamaya, kendi kendilerini varsayımlarının doğru olduğuna ikna etmeye çalışabilirler. Eğer varsayımın yanlış olduğu tespit edilirse düzeltebilir ya da yeni bir varsayım oluşturabilirler. Bu aşamada varsayımların kesinleşmesi gerekir. Öğrenciler varsayımda bulunma aşamasında, problemi analiz etme aşamasına dönerek farklı ilişkiler keşfetmeye çalışabilir, yeni örnekler üzerinde çalışarak farklı varsayımlarda bulunabilirler. Öğrencinin bu aşamada varsayımının doğru olduğuna kendini ikna etmiş olması gerekir.

Gerekçelendirme ve Kanıt: Önceki aşamada oluşturulan varsayımın doğruluğunun gerekçelendirildiği aşamadır. Bu aşamada öğrencilerin varsayımlarının neden doğru ya da neden yanlış olduğunu açıklamaları yani kanıt yapmaları gerekmektedir. Gerekçe olarak kullanılan tanımın, özelliğin ya da kuralın doğru olması önemlidir. Bu aşamada öğrencilerin yaptığı doğrulamalar deneysel ise kabul edilmez. Öğrenci bu aşamada tıkandığında, varsayımda bulunma aşamasına dönerek varsayımını tekrar inceleyebilir, gerekirse yeni örnek durumlar üzerinde çalışabilir ve yeni varsayım ortaya atarak bu varsayımı kanıtlayabilir.

Bu araştırmada kanıt sosyo-matematiksel bir süreç olarak ele alınmış ve sınıftaki kanıt uygulamalarında kullanılacak KARİDE (Kendini-Arkadaşını-Rakibini İkna Et-Değerlendirme-Modeli) modeli oluşturulmuştur. KARİDE modelinin aşamaları Şekil 3.3.'te sunulmuştur:



Şekil 3.3. *KARİDE modelinin aşamaları*

Şekil 3.3'te görüldüğü gibi sınıfta kanıt öğrenme modelinin aşamaları a) Kendini ikna et, b) Arkadaşını ikna et, c) Rakibini ikna et ve d) Değerlendirme şeklinde tanımlamıştır. Kendini ikna et aşaması bireysel çözümlerin yapıldığı aşamadır. Bu süreçte öğrencilerden beklenen, verilen problemi (önermeyi) incelemeleri, anlamaya çalışmaları ve matematiksel varsayımlar oluşturmalarıdır. Bu süreçte öğrencilerden problemi okuma, anlamaya çalışma, problemdeki ilişkileri bulmaya çalışma, örnekleri analiz etme, örneklerle deneysel doğrulamalar yapma, aksine örnekleri bulmaya çalışma, bir görselden yararlanma eylemlerini gerçekleştirmeleri beklenmektedir. Öğrencilerin problemi analiz etmek için inceledikleri belirli örneklerden hareketle, bu örnekler arasındaki temel ilişkileri açığa çıkarmaları, seçtikleri örnekler yardımıyla bu ilişkilerin diğer durumlar için de geçerli olup olmadığını araştırmaları ve bu temel ilişkilere ait sezgileri açık bir şekilde ifade etmeleri gerekmektedir. Öğrencilerin daha sonra bu ilişkilere dayalı olarak bir yargıya varıp bunu varsayım olarak ifade etmeleri beklenmektedir. Kendini ikna et aşamasında gerçekleştirilen eylemler öğrenciden öğrenciye göre değişiklik gösterebilir. Verilen süre içerisinde, bazı öğrenciler sadece problemi analiz etmek için örneklerden yararlanırken, bazı öğrenciler örneklerdeki ortak özellikleri belirleyip genelleme yapabilir, bazı öğrenciler ise süreci tamamlayarak kanıt yapabilirler. Bu aşamada sınıftan alınan örnek bir fotoğraf Görsel 3.1'de sunulmuştur:

Görsel 3.1. *Kendini ikna et aşaması*

Arkadaşını ikna et aşaması küçük grup tartışmalarının yapıldığı aşamadır. Bu süreçte öğrencilerden beklenen, bireysel çalışmalarında oluşturdukları varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte grup arkadaşlarına açıklamaları ve bir sonraki aşamada sınıf tarafından değerlendirilecek matematiksel bir sonuca varmış olmalarıdır. Bu aşamada öğrencilerin her biri grup arkadaşlarını kendi yaptığı çözümün doğruluğuna ikna etmeye, kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütmeye çalışır. Bireysel çalışmalarda çözüm yapamayan öğrenciler küçük grup tartışmalarında diğer arkadaşlarının çözümlerini değerlendirerek ya da birlikte çözüm üreterek kanıt yapmaya çalışırlar. Sosyal etkileşimin üst düzeyde olduğu küçük grup tartışmaları, bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam eder. Bu aşama boyunca öğretmen gruplar arasında dolaşarak öğrencilerin çözüm yaklaşımlarını gözlemler, gerektiğinde öğrencilere düşüncelerini genişletmek için sorular sorar, her bir grup üyesinin çözümünü arkadaşlarıyla paylaşması, fikirlerini nedenleriyle beraber açıklaması, iş birliği yapmaları, anlamadıkları noktaları birbirlerine sormaları, diğer grup üyelerinin arkadaşlarını sözü bitene kadar dinlemeleri, birbirlerini ikna etmeleri konusunda cesaretlendirir. Böylece sınıf normlarının oluşumunu pekiştirir. Bu aşamada sınıftan alınan örnek fotoğraflar aşağıda verilen Görsel 3.2. ve Görsel 3.3'.te sunulmuştur:

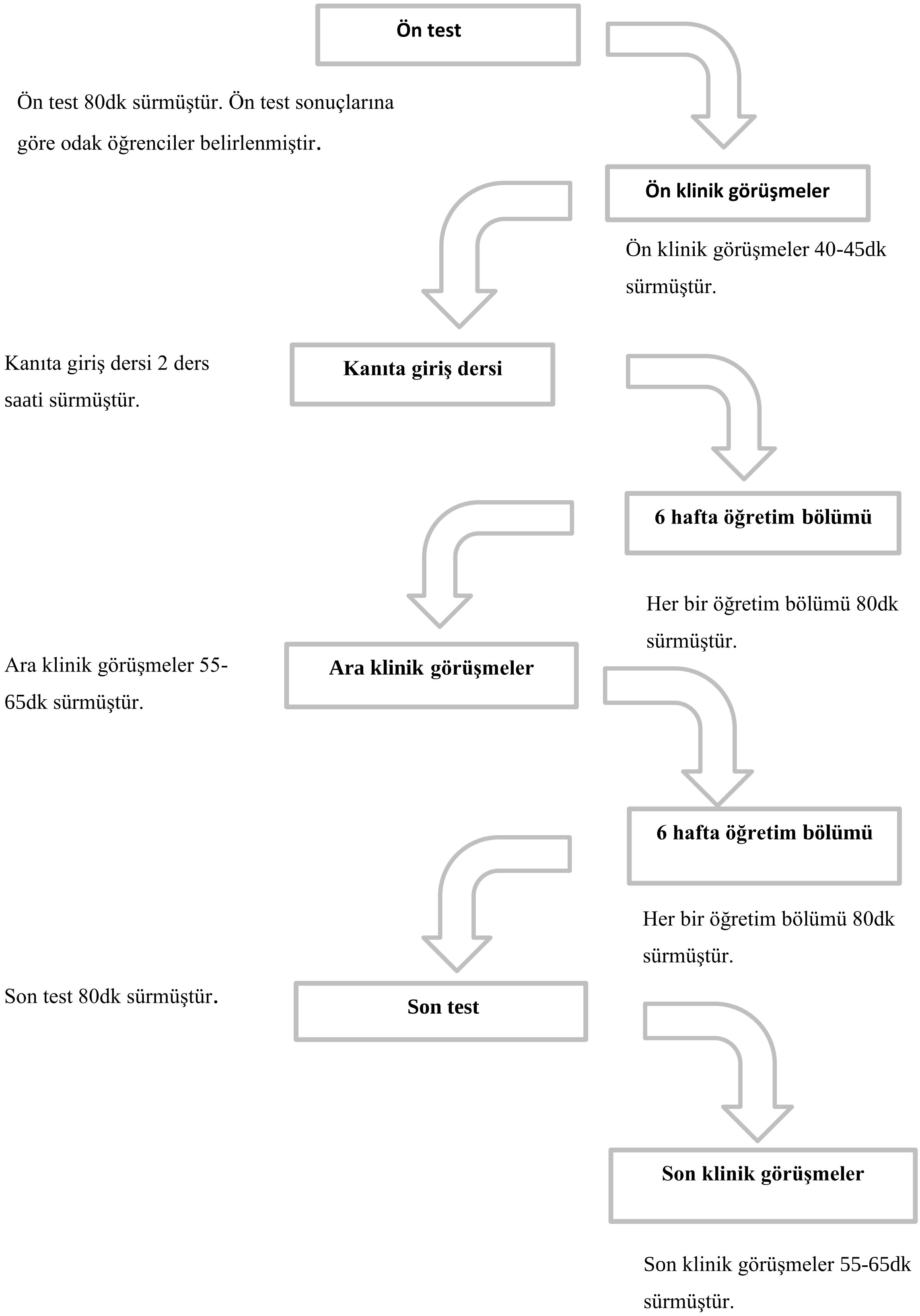
Görsel 3.2. *Arkadaşını ikna et aşaması 1*

Görsel 3.3. *Arkadaşını ikna et aşaması 2*

Rakibini ikna et aşaması her bir grubun oluşturdukları argümanların geçerli bir kanıt olup olmadığının sınıf ortamında tartışıldığı aşamadır. Öncelikle her bir gruptan, sınıf tartışmasında grubun ortak fikirlerini söyleyecek bir grup sözcüsü seçmeleri ve gruptaki her bir öğrencinin sürece katılımını sağlamak için her bir derste grup sözcülerinin dönüşümlü olarak değişmesi istenir. Bu aşamada öğrencilerden beklenen, her bir grubun kendi varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıklamalarıdır. Öğrenciler çözümlerini tahtada sunarken diğer öğrenciler çözüm yapan kişiye "Bunun doğru olduğunu nasıl biliyorsun?", "Bunun neden doğru olduğunu açıklar mısın?", "Bunun doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsun?" gibi sorular sorabilir. Bu aşamada grupların sözcüleri tahtada çözümlerini sunduktan sonra öğretmen her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetler, ortaya atılan düşünceleri daha açık ve anlaşılır hale getirmek adına sorular sorar, önemli noktaları tekrar eder, böylece sunulan açıklamanın diğer öğrenciler tarafından değerlendirilmesini sağlar. Öğretmen bu eylemleri her çözümden sonra tekrar ederek sınıf tartışmalarının sürekliliğini sağlayabilir. Öğretmen her bir grup sözcüsü çözümünü yaptıktan sonra "Bu çözüm sizi ikna etti mi?" diye sorup ve sınıf tartışmasını başlatır. Sınıf tartışmaları esnasında tüm sınıfın soruları alınıp yanıtlanır, öğrencilerin düşüncelerini ifade etmesi, anlamadıkları noktaları sormaları sağlanır, her grup kendi argümanını savunur, karşı tarafın argümanını ise çürütmeye çalışır.

Modelin son aşaması ise değerlendirme aşamasıdır. Grup tartışmalarının ardından öğretmen, grupların oluşturdukları argümanları değerlendirir ve sınıfın ortak kanıtına karar verilir. Bu aşamada öğretmen sadece sonuçların doğruluğunu değil, doğru ve hatalı varsayımları, argümanda kullanılan tanımların, özelliklerin, teoremlerin doğruluğunu, muhakeme yöntemlerinin (tümdengelim, aksine örnek verme vb.) ve kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu (cebirsel, görsel, sözel temsiller) yani tüm kanıt sürecini değerlendirir.

Öğretim deneyine ilişkin verilerin toplanmasında temel araç öğretim bölümüne ilişkin gözlem, video ve ses kayıtları ile çalışma kâğıtları olduğu için toplanan veriler her bir öğretim bölümünün ardından analiz edilmiş ve analizlerden elde edilen bulgularla öğrencilerin tümdengelimsel muhakemelerindeki gelişim, sınıf ortamında belirlenen kanıt işlevleri ve normlar ortaya konulmuştur. Böylece bir sonraki öğretimin de planlaması yapılmıştır. Sınıf çalışmalarının 6. haftasının tamamlanmasından sonra belirlenen 6 odak öğrenciyle ara klinik görüşmeler, 12. haftanın tamamlanmasından sonra da son test uygulanmış ve son klinik görüşmeler yapılmıştır. Uygulamaların zaman ve içerik bağlamında görselleştirilmiş hali Şekil 3.4.'te sunulmuştur:



Şekil 3.4. *Öğretim deneyinin uygulama süreci*

Bununla birlikte uygulamaların tamamının yapıldığı tarih ve uygulamaların süresi Tablo 3.6’da sunulmuştur:

Tablo 3.6. *Veri toplama takvimi*

Tarih	Uygulamalar	Süre
9 Eylül 2019-13 Eylül 2019	Ön test uygulandı.	80dk
16 Eylül 2019- 20 Eylül 2019	Ön klinik görüşmeler yapıldı.	40-45dk
23 Eylül 2019- 27 Eylül 2019	Kanıta giriş dersi yapıldı.	80dk
30 Eylül 2019- 04 Ekim 2019	Problem 1 uygulandı.	80dk
07 Ekim 2019- 11 Ekim 2019	Problem 2 uygulandı.	80dk
14 Ekim 2019- 18 Ekim 2019	Problem 3 uygulandı.	80dk
21 Ekim 2019- 25 Ekim 2019	Problem 4 uygulandı.	80dk
28 Ekim 2019- 01 Kasım 2019	Problem 5 uygulandı	80dk
04 Kasım 2019- 08 Kasım 2019	Problem 6 uygulandı	80dk
04 Kasım 2019- 08 Kasım 2019	Ara klinik görüşmeler yapıldı.	55-65dk
11 Kasım 2019- 15 Kasım 2019	Problem 7 uygulandı.	80dk
25 Kasım 2019- 29 Kasım 2019	Problem 8 uygulandı.	80dk
02 Aralık 2019- 06 Aralık 2019	Problem 9 uygulandı.	80dk
09 Aralık 2019- 13 Aralık 2019	Problem 10 uygulandı.	80dk
16 Aralık 2019- 20 Aralık 2019	Problem 11 uygulandı.	80dk
23 Aralık 2019- 27 Aralık 2019	Problem 12 uygulandı.	80dk
30 Aralık 2019- 03 Ocak 2020	Son test uygulandı.	80dk
30 Aralık 2019- 03 Ocak 2020	Son klinik görüşmeler yapıldı.	55-65dk

3.8. Veri Analizi

Nitel veri analizi; araştırmacının verileri düzenlediği, analiz birimlerine ayırdığı, sentezlediği, biçimleri ortaya çıkardığı, önemli değişkenleri keşfettiği ve hangi bilgileri rapora yansıtacağına karar verdiği bir süreçtir (Bogdan and Biklen, 1992). Nitel veri analizinde genel olarak tümevarımcı bir analiz yöntemi kullanılır. Öncelikle çeşitli yöntem ve teknikler yardımı ile toplanan veriler incelenir, veri seti içinde yer alan ve araştırma konusu ile ilgisi olduğu düşünülen kelime, cümle ve paragraflar analiz birimi olarak ayıklanır ve bu analiz birimleri isimlendirilerek kodlanır. Daha sonra farklı kodlar arasındaki ilişki yapıları tanımlanarak alt temalar, farklı alt temalar arasındaki ilişki yapıları tanımlanarak da temalar oluşturulur (Özdemir, 2010). Bu araştırmada ön-son testlerin analizi, öğretim uygulamalarının video ve ses kayıtlarının analizi, ön-ara-son klinik görüşmelerin analizi yapılmıştır. Öğretim deneyinin analizinde sürekli analiz (ongoing analysis) ve geriye dönük analizler (retrospective analysis) olmak üzere iki önemli analiz düzeyi kullanılır. Sürekli analiz öğrencilerle birlikte yapılan öğretim dersleri arasında ve bu dersler süresince gerçekleştirilirken geriye dönük analiz ise birbirini izleyen bir dizi öğretim derslerinin tamamı üzerinde gerçekleştirilir (Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2013). Araştırmanın sürekli analiz sürecinde her dersin sonunda araştırmacılar kaydedilen videoları izleyerek elde ettikleri sonuçları, alan notlarını ve sınıf ortamındaki gözlemlerini ayrıntılı olarak tartışmışlar, gerekli gördükleri düzenlemeleri gerçekleştirmişlerdir. Geriye dönük analizde ise toplanan bütün veriler (ön test-son test, ön-ara-son klinik görüşme, öğretim süreci) analiz edilmiştir. Görüşmelerin ve sınıf uygulamalarının analizi yapılmadan önce elde edilen verilerin dökümü ve kontrolü yapılmıştır. Döküm sırasında, her bir konuşma olduğu gibi hiçbir düzeltme yapılmadan, görüşmeci-görüşen sırasıyla, araştırmacı tarafından hazırlanan bir forma yazılmıştır. Daha sonra tüm oturumların ses ve video kayıtları, sosyal etkileşimin ön planda olduğu ortamda öğrencilerin birbirleriyle tartışmalarını, kanıtlama süreçlerini ve gerçekleştirdikleri etkinlikleri betimleyerek yorumlamak amacıyla analiz edilmiştir. Grup tartışmalarının ve tüm sınıfın ses ve video kayıtları ve öğrencilerin çalışmalarının bulunduğu kâğıtlar analiz edilmek üzere alınmıştır.

Kodlama, veri analizinde veriler arasında yer alan anlamlı bölümlere isim atama işlemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Nitel veri analizinde kodlama sürecine verilerin kavramsallaştırılması ile başlanır, gözlemler, cümleler, paragraflar ya da benzer nitelikteki olaylar aynı isim verilerek kavramsallaştırılır ve kodlar belirlenir. Daha sonra birbiri ile ilişkili kodlar kendi aralarında gruplandırılarak alt temalar ve bu alt temalar arasındaki ilişki yapıları belirlenerek temalar oluşturulur (Strauss and Corbin, 1990'dan aktaran Özdemir, 2010). Burada kodların bir araya getirilmesine ve incelenip ortak yönler bulunmasına tematik kodlama denilir. Tematik kodlama için ortaya çıkan kodların benzerlik ve farklılıklarının saptanması ve birbiriyle ilişkili olan kodların bir araya getirilebilecek türden temaların belirlenmesi gerekir (Karataş, 2015). Temalar ise araştırma verilerinden ortaya çıkarılan kavramlar olarak tanımlanır (Bogdan and Biklen, 1998). Bu araştırmada da toplanan veriler derinlemesine analiz edilerek bu verilerin altında yatan ve belirgin olmayan kavramlar ve bunlar arasındaki ilişkiler kodlama aracılığıyla ortaya çıkarılmıştır. Araştırmacı tarafından daha önce alan-yazın taraması yapılarak belirlenmiş olan genel çerçeve içerisinde kodlama yapılmıştır. Bu bağlamda kodlar yazılırken hem katılımcıların kullandığı (yazdığı) ifadelerden yararlanılmış, hem de alan-yazında daha önce belirlenmiş kavramlara başvurularak isimler oluşturulmuştur.

Daha sonra kodlar bir araya getirilip incelenmiş ve ortak yönleri bulunmaya çalışılmıştır. Ortak yönleri olan veriler gruplandırılarak araştırmanın alt temaları oluşturulmuştur. Ardından bu alt temaların da benzerlik ve farklılıkları ortaya konularak temalar oluşturulmuş ve birbiriyle ilişkili ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmiştir. Ayrıca araştırmada ortaya çıkan temaların altında yer alan verilerin anlamlı bir bütün oluşturup oluşturmadığı incelenmiş ve temaların araştırmada elde edilen verileri anlamlı bir biçimde açıklayabilmesine, kendi aralarında anlamlı bir bütün oluşturmalarına dikkat edilmiştir. Bu anlamda yapılan kodlama hem iç tutarlılığı hem de dış tutarlılığı yansıtmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Verilerin analiz edilmesi aşamasında yapılacak güvenirlilik çalışmalarından biri de kodlama güvenirliğidir. Bu sebeple bu araştırmada araştırma verileri üzerinde araştırmacı ve bir alan uzmanı ayrı ayrı çalışarak, temaları, alt temaları ve kodları oluşturmuşlardır. Daha sonra araştırmacı ve alan uzmanı birbirinden bağımsız olarak yaptıkları analizleri dikkate alarak elde ettikleri sonuçları tartışmış ve ön-son test, klinik görüşmeler ile öğretim uygulamalarına ilişkin tema, alt tema ve kodları yeniden biçimlendirmişlerdir. Güvenirliği sağlamak amacıyla iki araştırmacının gerçekleştirdiği kodlamalar karşılaştırılarak görüş birliği ve görüş ayrılığı tespit edilerek görüş ayrılığı olan kodlar üzerinde tartışılarak uzlaşmaya varılmıştır. Daha sonra farklı bir alan uzmanının görüşleri alınmış ve araştırmacı tema, alt tema ve kodların yazımına son şeklini vermiştir.

Kodlama işleminin ardından araştırmada ortaya çıkan kodlar, alt temalar ve temalar arası ilişkiler şekil ve tablo kullanılarak görsel hale getirilmiştir. Öğrencilerin ön-son testteki problem/önermeler için yaptıkları çözümler incelenerek kodlar belirlenmiştir. Kodlar arasındaki uyumdan dolayı tablolar oluşturulurken doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemleri/önermeleri, doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermeleri, doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemi, aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermeler, tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önerme ve kanıt değerlendirme problemi şeklinde birleştirilerek ele alınmıştır. Tablo 3.7.'de öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken sayı problemi/önermesine ilişkin kodlamalar sunulmuştur:

Tablo 3.7. *Ön-son testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi/önermesine ilişkin kod, alt tema ve temalar*

Temalar	**Alt Temalar**	**Kodlar**	**Alt Kodlar**
Problemin/Önermenin Yapısının Anlaşılması	Problemi/Önermeyi Anlama		
	Problemi/Önermeyi Anlamama	Problem Cümlesini/Önermeyi Yanıtsız Bırakma	
		Problem Cümlesini/ Önermeyi Tekrar Yazma	
		Problemdeki/Önermedeki Verileri Eksik Kullanma	
Probleme/Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji		
	Hem Aritmetiksel Hem Cebirsel Strateji	İşlem Hatası Yapma	
	Cebir Öncesi Strateji		
	Cebirsel Strateji	İşlem Hatası Yapma	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama	Bir Örnekle Deneme	
		Birden Fazla Örnekle Deneme	Rastgele Örnek Seçme
			Stratejik Örnek Seçme
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme	Çarpım- çarpan ilişkisi bilgisi eksikliği	
		Tek–çift sayı bilgisi eksikliği	
	Tümdengelimsel Muhakeme	Görsel Kanıt Yapma	
		Doğrudan Kanıt Yapma	

Tablo 3.8'de öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken geometri önermelerine ilişkin kodlamalar sunulmuştur:

Tablo 3.8. *Ön-son testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerine ilişkin kod, alt tema ve temalar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar
Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	
	Önermeyi Anlamama	Önermeyi Yanıtsız Bırakma
		Önermeyi Tekrar Yazma
		Önermenin Öncülünü Anlamama
Muhakeme	Kapsadığı Dörtgeni Aksine Örnek Vererek Hatalı Gerekçelendirme	Hatalı Niceleyici Kullanma
	Hatalı Çizime Dayalı Gerekçelendirme	Hatalı Niceleyici Kullanma
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme	Tanım Bilgisi Eksikliği
		Özellik Bilgisi Eksikliği
		Açı- paralellik bilgisi eksikliği
	Prototip Çizim Üzerinde Sembollerle Gerekçelendirme	
	Tümdengelimsel Muhakeme	Tanım Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme
		Özellik Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme
		Kapsadığı Dörtgene Dayalı Gerekçelendirme

Tablo 3.9.'da öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken geometri problemine ilişkin kodlamalar sunulmuştur:

Tablo 3.9. *Ön-son testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemine ilişkin kod, alt tema ve temalar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar
Problemin Yapısının Anlaşılması	Problemi Anlama	
	Problemi Anlamama	Problemi Yanıtsız Bırakma
		Dik Üçgeni İhmal Etme
Probleme Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	
	Cebirsel Strateji	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama	Üçgenin İç Açılarının Toplamını 180° Almama
		Üçgenin İç Açılarının Toplamını 180° Alma
	Tümdengelimsel muhakeme	Sayısal İfadenin Kullanıldığı Şekille Desteklenmiş Gerekçelendirme
		Sayısal İfadenin Kullanıldığı Şekille Desteklenmiş Gerekçelendirme

Tablo 3.10.'da öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelere ilişkin kodlamalar sunulmuştur:

Tablo 3.10. *Ön-son testte aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermelere ilişkin kod, alt tema ve temalar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar
Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	
	Önermeyi Anlamama	Önermeyi Yanıtsız Bırakma
		Önermeyi Tekrar Yazma
Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	
	Hem aritmetiksel hem cebirsel strateji	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama	Yalnızca Önermeyi Doğrulayan Örnek Verme
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme	Çarpan–bölen bilgisi eksikliği
		Ardışık sayı bilgisi eksikliği
	Tümdengelimsel Muhakeme	Yalnızca Aksine Örnek Verme
		Hem Doğrulayan Örnek, Hem de Aksine Örnek Verme

Tablo 3.11'de öğrencilerin tüketerek kanıt yapmaları gereken önermeye ilişkin kodlamalar sunulmuştur:

Tablo 3.11. *Ön-son testte tüketerek kanıt yapma önermesine ilişkin kod, alt tema ve temalar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar
Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	
	Önermeyi Anlamama	Önermeyi Yanıtsız Bırakma
		Önermeyi Tekrar Yazma
		Verilerin Dışına Çıkma
		Verileri Eksik Kullanma
		Değişkeni Hatalı Kullanma
		n^2'yi Dikkate Almama
Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	İşlem Hatası Yapma
		İşlem Hatası Yapmama
Muhakeme	Deneysel Doğrulama	Bir Örnekle Deneme
		Birden Fazla Örnekle Deneme
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme	Asal Sayı Bilgisi Eksikliği
	Tümdengelimsel muhakeme	Tüketerek Kanıt Yapma

Tablo 3.12'de kanıt değerlendirme problemine ilişkin kodlamalar sunulmuştur:

Tablo 3.12. *Ön-son testte kanıt değerlendirme problemine ilişkin kod ve tema tablosu*

Temalar	Kodlar
Deneysel Argümanı İkna Edici Bulma	Deneysel Argümanın Açıklık, Anlaşılırlık ve Kolaylığına Dayalı Gerekçelendirme
Görsel Argümanı İkna Edici Bulma	Görsel Argümanın Açıklık, Anlaşılırlık ve Mantıklı Olmasına Dayalı Gerekçelendirme
Cebirsel Argümanı İkna Edici Bulma	Cebirsel Argümanın Genellenebilirliğine Dayalı Gerekçelendirme
	Cebirsel Argümanın Genellenebilirlik, Kesinlik ve Sadeliğine Dayalı Gerekçelendirme

Bununla birlikte öğrencilerin hem klinik görüşmelerde hem de öğretim uygulamalarında problem/önermeler için yaptıkları çözümler ve tartışmalar incelenerek kanıt işlevlerine ilişkin kodlar belirlenmiş ve Tablo 3.13.'te sunulmuştur:

Tablo 3.13. *Klinik görüşmelerde ve öğretim uygulamalarında belirlenen kanıt işlevlerine ilişkin kod, alt tema ve temalar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar
Doğrulama	Doğru olduğuna ikna olma	Öğrencinin yaptığı çözüm sayesinde varsayımının doğru olduğuna ikna olmasını sağlama
	Doğruluğunu onaylama	Bir ifadenin doğru olduğunun sınıf tarafından onaylanmasını sağlama
Açıklama	Kavrayış sağlama	Varsayımın neden doğru olduğunun gerekçelendirilmesini sağlama
	Sonuçları görme	Kanıt yaparken kullanılan bir kavramın (teorem, tanım…) sonuçlarının görülmesini sağlama
İletişim	Söylem biçimini ortaya çıkarma	Öğretmen ile öğrenci ya da öğrenci ile öğrenci arasında iletişim kurulmasını sağlama
	Tartışma ortamı yaratma	Tartışmaların yapıldığı bir ortam oluşmasını sağlama
Buluş	Analiz yapma	Yapılan kanıtın analiz edilmesiyle yeni ve genellenebilir bir anahtar kavramın keşfedilmesini sağlama
Sistematikleştirme	Tutarsızlıkları ortaya çıkarma	Aksine örneklerle tutarsızlıkların ortaya çıkarılmasını sağlama
	İlişkileri ortaya çıkarma	Kanıt yaparken kavramlar arasındaki ilişkilerin kullanılmasını sağlama
	Uygulama	Çözümleri genelleyerek çözümün benzer bir probleme uygulanmasını sağlama

Öğretim uygulamalarında belirlenen normlara ilişkin tema ve alt temalar ise Tablo 3.14.'te sunulmuştur:

Tablo 3.14. *Öğretim uygulamalarında belirlenen normlara ilişkin alt tema ve temalar*

Temalar	Alt Temalar
Sosyal Normlar	Açıklama ve gerekçelendirme
	İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme
	Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme
	Farklı çözümler sunma
	Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi
	Ortak sonuca ulaşma
	Anlaşılmayan noktaları sorma
	Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme
	Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma
Sosyo-matematiksel Normlar	Geçerli bir matematiksel kanıt sunma
	Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma
	Farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma
	Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme
	Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma
	Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Bu araştırmada ortaya çıkan kodlar, alt temalar ve temalar arası ilişkiler araştırma soruları altında yorumlanmış ve karşılaştırılmıştır.

3.9. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik kavramları; inandırıcılık (iç geçerlilik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlılık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). İnandırıcılık, araştırmacının elde ettiği bulguların gerçekliğine, benzer ortamlarda sonuçların geçerliğine, süreçlerin birbiri ile tutarlı olmasına, verilerin nesnel bir yaklaşımla toplanmasına ve yine nesnel bir yaklaşımla sonuçlar ortaya konulmasına ilişkin kanıtların sunulmasını ifade eder (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 265). Bu araştırmada, araştırmacı veri toplama sürecinde katılımcılarla etkileşimde olmuş, araştırma ortamında uzun süre kalarak olay, olgu, durum ve yorumları katılımcıların bakış açısıyla ortaya koymuştur. Ayrıca çeşitli veri toplama araçlarıyla farklı türde veriler toplamıştır. Araştırmada veri analizinin güvenirliği için iki ayrı alan uzmanından yardım alınmıştır. Araştırmada gerçekleştirilen tüm öğretim etkinlikleri, ön-son testler ve klinik görüşmeler araştırmacı ve bir alan uzmanı tarafından ayrı ayrı kodlanmış, bağımsız olarak yapılan kodlamalar karşılaştırılıp benzerlik ve farklılıklar karşılaştırılarak nedenleri üzerine tartışılmıştır. Bununla birlikte bu iki kodlayıcı arasında yüksek düzeyde uyum bulunmuştur. Kodlamaların düzenlenmiş hali farklı bir alan uzmanına sunulmuş, onun görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılarak kodlamalara son hali verilmiştir. Aktarılabilirlik, yansız seçilen bir örneklemden elde edilen sonuçların evrene genellenebilirliğidir. Nitel araştırmalarda araştırma sonuçlarının doğrudan benzer durumlara genellenmesi mümkün değil; ancak bu tür ortamlara sonuçların uygulanabilirliğine ilişkin geçici yargılara ulaşılması ve test edilebilecek hipotezler oluşturulması mümkündür (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 269). Bu nedenle bu araştırmada sonuçların aktarılabilirliğini artırmak için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmış, katılımcıları belirleme ölçütleri, katılımcıların özellikleri, öğretim ortamı ve süreç ayrıntılı betimlenmiş, araştırmanın sınırlılıkları açıkça ortaya konulmuş, araştırma sonuçlarının hangi bağlamda ele alınıp yorumlanabileceği belirtilmiştir. Tutarlılık araştırmaya dışarıdan bir gözle bakılması ve araştırmacının araştırma etkinliklerinde tutarlı olup olmadığını ortaya koymasıdır. Veri toplama araçlarının oluşturulması, verilerin toplanması ve analizi aşamalarının detaylı açıklanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 272). Bu araştırmada tutarlılığın sağlanması için veri toplama araçlarının özellikleri, veri analizi ile ilgili aşamalar ayrıntılı bir biçimde tanımlanmış ve araştırma sürecinde veriler video ile kayıt edilmiştir. Teyit edilebilirlik, araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtması ve araştırmacının öznel yargılarından ve varsayımlarından uzak olmasını ifade eder. Nitel araştırmacının ulaştığı sonuçları topladığı verilerle sürekli teyit etmesi ve bu çerçevede okuyucuya mantıklı bir açıklama sunabilmesi gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 272). Bu araştırmada öznel yargılardan uzak durulmaya çalışılmış ve farklı araştırmacılarla bağımsız bir şekilde çalışılmıştır. Örneğin öğretim deneyinin tüm oturumları, oturumlarla eş zamanlı olarak alan uzmanı ile tartışılmış, öğretim oturumlarının video kayıtları uzman ile izlenerek görüşleri alınmıştır. Aynı zamanda araştırma sürecinde, gerektiğinde farklı araştırmacılara inceletilmek üzere elde edilen tüm veriler denetim altına alınmıştır.

4. BULGULAR VE YORUMLAR

Araştırma sonucunda elde edilen bulgular "Öğrencilerin ön test ve ön klinik görüşme sonuçlarına ilişkin bulgular", "Öğrencilerin ara klinik görüşmelerine ilişkin bulgular", "Öğretim uygulamalarına ilişkin bulgular", "Öğrencilerin son test sonuçlarına ilişkin bulgular" ve "Öğrencilerin son klinik görüşmelerine ilişkin bulgular" olmak üzere 5 ana başlık altında toplanmış ve sunulmuştur.

4.1. Ön Test ve Ön Klinik Görüşme Sonuçlarına İlişkin Bulgular

Ön test ve ön klinik görüşme sonuçlarına ilişkin bulgular sunulurken problemler/önermeler kendi aralarında problemin/önermenin çözümünde kullanılması gereken kanıt türüne göre ayrılmış, "Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren problemler/önermeler", "Aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermeler" ve "Tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önerme" olarak ele alınmıştır. Son problem olan kanıt değerlendirme problemi ise tek başına ele alınmıştır. Öğrencilerin ön test için yaptıkları çözümler, "Problemin/önermenin yapısının anlaşılması", "Probleme/önermeye uygun strateji kullanma" ve "Muhakeme" olmak üzere üç aşamada incelenmiştir. Problem çözme sürecinin ilk aşaması problemi anlama olduğu için ilk olarak öğrencilerin problemi/önermeyi anlamaya yönelik gösterdikleri eylemler incelenmiştir. Öğrencilerin problemi/önermeyi yanıtlamaları, verilen yanıtlarda verilenler ile istenilenleri doğru belirleyebilmeleri ve bu verileri doğru kullanabilmeleri problemi/önermeyi anladıklarının göstergesi olarak kabul edilmiştir. İkinci olarak problemi/önermeyi anlayan öğrencilerin bu problemleri/önermeleri çözerken kullandıkları stratejiler yani öğrencilerin verilenler ile istenilenler arasında nasıl bağlantı kurduğu incelenmiştir. Çözüm stratejilerinden sonra da öğrencilerin her bir problem/önerme için yaptıkları muhakemeler ortaya konulmuştur.

Bununla birlikte bu bölümde odak öğrencilerinin kanıtlama süreçlerini inceleme ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerini belirlemek amacıyla yapılan ön klinik görüşmelerden elde edilen bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir. Öğrencilerin ön test ile toplanan yazılı verilerini daha açıklayıcı hale getirmek, problemlere/önermelere verilen yanıtları daha doğru yorumlamak, nasıl düşündüklerini açığa çıkarmak ve kanıt işlevlerini görünür hale getirmek amacıyla ön klinik görüşmelerde, ön testte bulunan ve doğrudan kanıt yapmayı gerektiren dört problem/önerme (Problem 1, Önerme 2b, Önerme 2f, Problem 3) seçilen 6 odak öğrenciye sorulmuştur.

4.1.1. Ön test ve ön klinik görüşmelerde doğrudan kanıt yapmayı gerektiren problemlere/önermelere ilişkin bulgular

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren problemler/önermeler sayı ve geometri problemleri/önermeleri olarak iki ayrı başlık altında ele alınmıştır.

4.1.1.1. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine/önermesine ilişkin bulgular

Problem 1, (*P.1: Ali bir oyun bulur. Bir tam sayı alır ve 5 ile çarpar, sonra 12 ekler. Daha sonra başlangıçtaki sayıyı çıkarır ve sonucu 4'e böler. Cevabın, her zaman ilk sayıdan 3 fazla olduğunu fark eder. Ayşe ise bunun hep bu şekilde sonuçlanacağını düşünmediği için ilk sayıdan başka bir sayı dener. Ali ve Ayşe sonucun her zaman ilk sayıdan 3 fazla olacağına karar verirler. Sence haklılar mı? Bir arkadaşını sonucun her zaman ilk sayının üç fazlası olacağına nasıl ikna edersin*?) ve Önerme 2b (*Ö.2b: İki tek sayının toplamı çifttir.*) öğrencilerin doğrudan kanıt yapmalarını gerektiren sayı problemi ve önermesidir.

4.1.1.1.1. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine/önermesine ilişkin ön test bulguları

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine/önermesine ilişkin ön testte öğrencilerin bu problem ve önermenin doğruluklarını araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu problem ve önerme için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.1.'de verilmiştir:

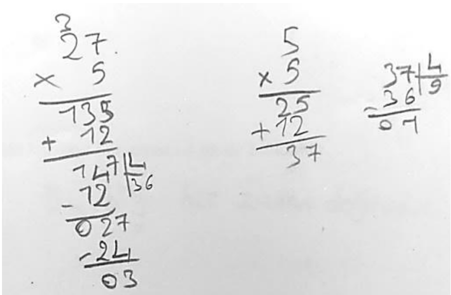
Tablo 4.1. *Öğrencilerin ön test Problem 1 ve Önerme 2b'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Problemin/Önermenin Yapısının Anlaşılması	Problemi/Önermeyi Anlama	**P.1** % 70,9 (22 kişi)		
		Ö.2b % 90,3 (28 kişi)		
	Problemi/Önermeyi Anlamama **P.1** %29,0 (9 kişi) **Ö.2b** % 9,6 (3 kişi)	Problemi/Önermeyi Yanıtsız Bırakma	**P.1** % 3,2 (1kişi)	
			Ö.2b % 3,2 (1 kişi)	
		Problem/Önerme Cümlesini Tekrar Yazma	**P.1** % 3,2 (1kişi)	
		Problemdeki/Önermedeki Verileri Eksik Kullanma	**P.1** % 22,5 (7 kişi)	
			Ö.2b % 6,4 (2 kişi)	
Probleme/Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	**P.1** % 58,0 (18 kişi)		
		Ö.2b % 90,3 (28 kişi)		
	Hem Aritmetiksel Hem Cebirsel Strateji	**P.1** % 9,6 (3kişi)		
	Cebir Öncesi Strateji	**P.1** % 3,2 (1kişi)		
Muhakeme	Deneysel Doğrulama **P.1** % 67,7 (21 kişi) **Ö.2b** % 83,8 (26 kişi)	Bir Örnekle Deneme	**P.1** % 12,9 (4 kişi)	
			Ö.2b % 9,6 (3 kişi)	
		Birden Fazla Örnekle Deneme **P.1** % 54,8 (17 kişi) **Ö.2b** % 74,1 (23 kişi)	Rastgele Örnek Seçme	**P.1** % 41,9 (13 kişi)
				Ö.2b % 54,8 (17 kişi)
			Stratejik Örnek Seçme	**P.1** % 12,9 (4 kişi)
				Ö.2b % 12,9 (6 kişi)
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme **P.1** % 3,2 (1kişi) **Ö.2b** % 6,4 (2 kişi)	Çarpım- çarpan ilişkisi bilgisi eksikliği	**P.1** % 3,2 (1 kişi)	
		Tek – çift sayı bilgisi eksikliği	**Ö.2b** % 6,4 (2 kişi)	

Tablo 4.1.'de görüldüğü gibi, problemi/önermeyi anlamayan öğrenciler için "problemi/önermeyi yanıtsız bırakma", "problem cümlesini/önermeyi tekrar yazma" ve "problemdeki/önermedeki verileri eksik kullanma" olmak üzere üç farklı durumun olduğu saptanmıştır. Problemi/önermeyi anlayan öğrencilerin ise "aritmetiksel strateji", "hem aritmetiksel hem cebirsel strateji" ve "cebir öncesi strateji" olmak üzere üç farklı strateji kullanarak problemi/önermeyi çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin muhakemeleri incelediğinde ise muhakemelerinin "deneysel doğrulama" ya da "mantıksal olmayan gerekçelendirme" olmak üzere iki farklı şekilde olduğu görülmektedir. Deneysel doğrulama yapan öğrencilerin "bir örnekle deneme" ve "birden fazla örnekle deneme" olmak üzere iki farklı şekilde deneme yaptıkları görülmüştür. Birden fazla örnekle deneme yapan öğrencilerin ise "rastgele örnek seçme" ve "stratejik örnek seçme" olmak üzere iki farklı şekilde örneklerini seçtikleri

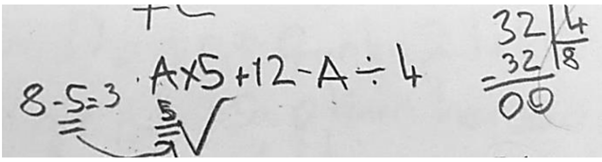
belirlenmiştir. Öğrencilerin yaptıkları çözümler incelendiğinde genel olarak problemi/önermeyi anlama aşamasında başarılı oldukları, bununla birlikte öğrencilerin ağırlıklı olarak çözüm için aritmetiksel strateji kullandıkları ve muhakemelerinde ise çoğunlukla birden fazla örnekle deneysel doğrulama yaptıkları görülmüştür. Bu sorularda öğrencilerin genel olarak örneklerle problemin/önermenin doğruluğunu ve yanlışlığını sınama eğilimde oldukları bu nedenle genellemeye ulaşma çabalarının eksik kaldığı ve kanıt yapamadıkları belirlenmiştir.

Tablo 4.1. incelendiğinde Problem 1'de öğrencilerin % 29'unun problemi anlamadığı belirlenirken bu öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun problemdeki verileri eksik kullandığı saptanmıştır. Örneğin İdris, aldığı sayıları 5 ile çarpıp, 12 eklemiş ve sonra da çıkan sonucu 4'e bölmüş, yani başlangıçtaki sayıyı çıkarmayı ihmal ederek problemdeki verileri eksik kullanmıştır. İdris'in yaptığı çözüm Görsel 4.1'de örnek olarak sunulmuştur:



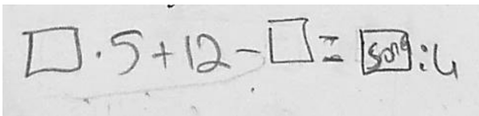
Görsel 4.1. *İdris'in ön test Problem 1'de çözümü*

Problem 1'i anlayan öğrencilerin yaptıkları çözümler incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun problemi çözerken içinde herhangi bir değişkenin ya da sembolün kullanılmadığı, çeşitli aritmetiksel işlemlerin ve özel örneklerin olduğu aritmetiksel stratejileri kullandıkları görülmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin 3'ünün hem aritmetiksel hem de cebirsel strateji kullandığı görülmektedir. Örneğin Görsel 4.2.'de olduğu gibi Nejat, problemi çözmek için değişken kullanmış ve sonra bu değişkenin yerine bir sayı koyarak çözüm yapmıştır:



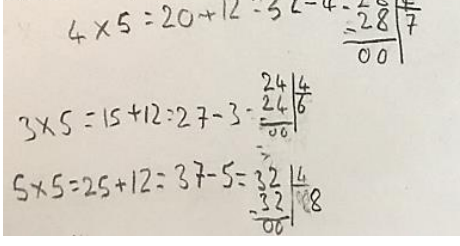
Görsel 4.2. *Nejat'ın ön test Problem 1'de çözümü*

Bir öğrencinin ise cebir öncesi strateji kullandığı görülmektedir. Cebir öncesi strateji kullanan Azra Görsel 4.3'te olduğu gibi değişken yerine kutu modeli koyarak problemi çözmeye çalışmış ve *"Bu oyunu devam ettiririm. Bu sayede farklı sayılar koyarak 3 fazlası olacağına ikna ederim.*" şeklinde gerekçelendirme yapmış; ancak herhangi bir doğrulama yapamamıştır:



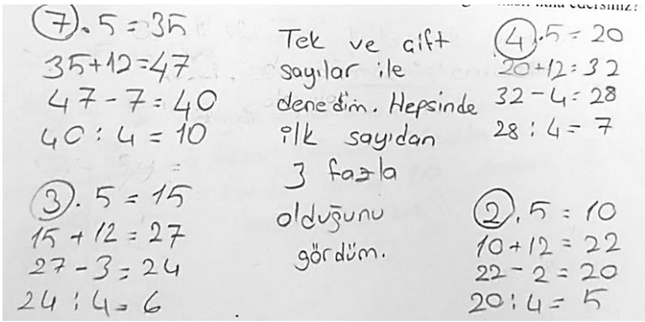
Görsel 4.3. *Azra'nın ön test Problem 1'de çözümü*

Öğrencilerin Problem 1'deki muhakemeleri incelendiğinde yaklaşık % 68'inin deneysel doğrulama yaparak problemi çözmeye çalıştıkları, bu öğrencilerin büyük bir kısmının ise birden fazla örnekle deneme yaparak problemi doğruladıkları görülmektedir. Birden fazla örnekle deneme yapan öğrencilerin bir kısmı stratejik örnekler seçerek deneme yaparken, çoğunluğunun ise rastgele örnekler seçerek deneme yaptığı görülmüştür. Örneğin Enes Görsel 4.4'te sunulduğu gibi rastgele seçtiği örneklerle doğrulama yapmış ve her seferinde seçtiği ilk sayıyı değiştirerek problemi çözeceğini belirtmiştir:



Görsel 4.4. *Enes'in ön test Problem 1'de çözümü*

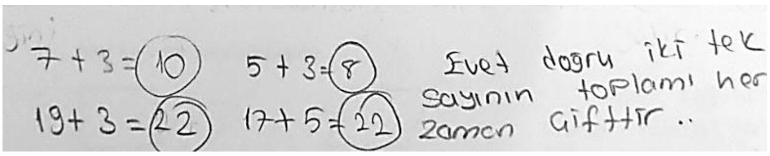
Stratejik örnekler seçerek deneme yapan 4 öğrenciden biri olan Nefise Görsel 4.5.'te sunulduğu gibi stratejik olarak tek ve çift sayılarla doğrulama yapmayı tercih etmiştir:



Görsel 4.5. *Nefise'nin ön test Problem 1'de çözümü*

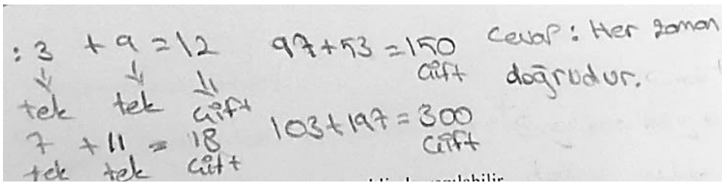
Problem 1'de öğrencilerden biri probleme çarpım-çarpan ilişkisi bilgisi eksikliğinden kaynaklı, mantıksal olmayan gerekçelendirme yapmıştır. Mantıksal olmayan gerekçelendirme yapan İrem'in "*Kendinden büyük bir sayıyla çarpıldığı için sonuç her zaman fazla çıkar.*" düşüncesi tam sayılar ile sınırlıdır.

Önerme 2b'de öğrencilerin yaklaşık % 90'ının önermeyi anladığı görülmekte iken, bu öğrencilerin tamamı aritmetiksel stratejiler kullanarak önermeyi çözmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde yaklaşık % 84'ünün deneysel doğrulama yaparak önermeyi doğruladıkları görülmektedir. Bu öğrencilerin büyük bir çoğunluğu birden fazla örnek seçerek önermeyi doğrulamışlardır. Birden fazla örnekle doğrulama yapan öğrencilerin çözümleri incelendiğinde 17'sinin rastgele örnekler seçtiği, 6'sının ise stratejik örnekler seçtiği görülmektedir. Buna göre rastgele örnekler seçen öğrencilerden olan Büşra'nın rastgele seçtiği tek sayıları toplayarak önermeyi doğruladığı Görsel 4.6'da sunulmuştur:



Görsel 4.6. *Büşra'nın ön test Önerme 2b'de çözümü*

Stratejik örnekler seçerek doğrulama yapan öğrencilerden Asya'nın bir basamaklı, iki basamaklı, üç basamaklı tek sayıları toplayarak doğrulama yaptığı görülmüştür. Asya'nın çözümü Görsel 4.7'de sunulmuştur:

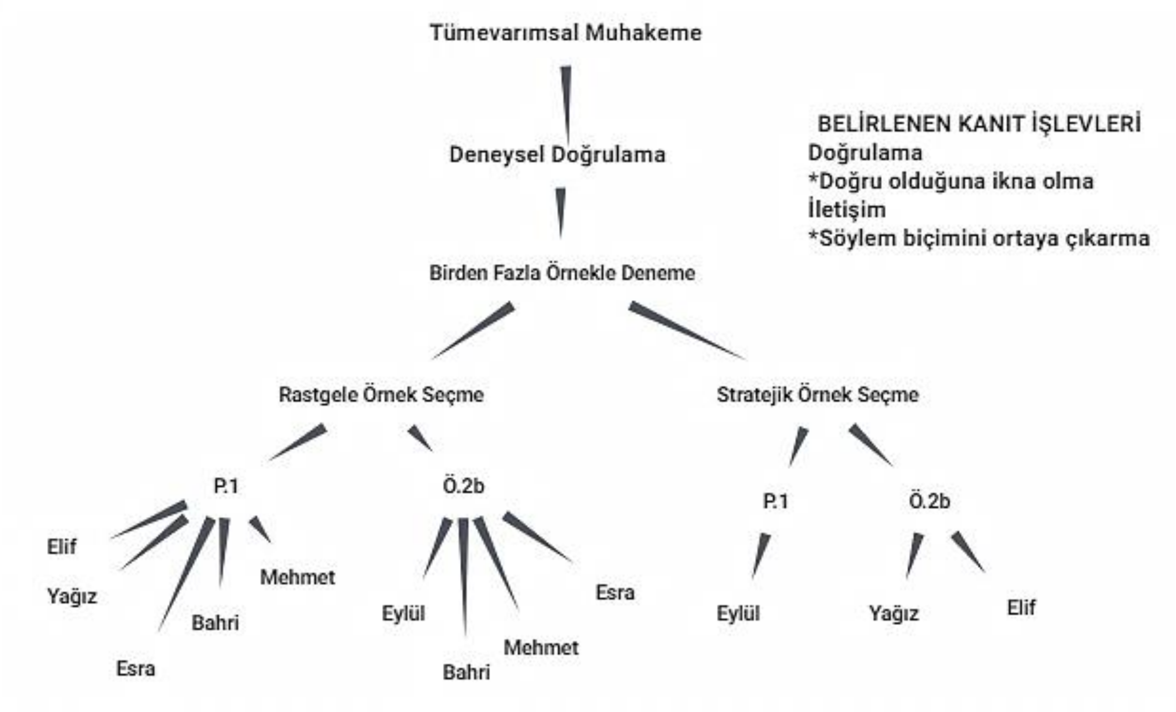


Görsel 4.7. *Asya'nın ön test Önerme 2b'de çözümü*

Bununla birlikte öğrencilerden 2'sinin tek- çift sayı bilgisi eksikliğinden kaynaklı, mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları görülmektir. Örneğin Berat, "*Hayır değildir, sayıdan sayıya fark eder, her tek aynı değildir.*" şeklinde mantıksal olmayan bir gerekçelendirme yapmıştır.

4.1.1.1.2. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine/önermesine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön klinik görüşme bulguları

Odak öğrencilerin Problem 1 ve Önerme 2b'yi çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.1.'de gösterilmiştir:

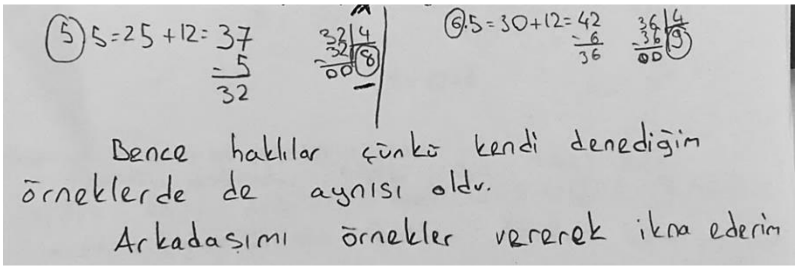


Şekil 4.1. *Öğrencilerin ön klinik görüşmede Problem 1 ve Önerme 2b'yi çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.1.'de görüldüğü gibi öğrencilerin tamamı ön testte olduğu gibi Problem 1 ve Önerme 2b'de tümevarımsal muhakeme kullanmışlardır. Öğrencilerin tümevarımsal muhakeme ile belirli örneklerin doğruluğuna odaklanarak deneysel doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin deneysel doğrulama kapsamında iki farklı şekilde örneklerini seçtikleri görülmüştür. Öğrencilerin bir kısmının rastgele seçtikleri örneklerle doğrulama yaptıkları, bazılarının ise stratejik örneklerle doğrulama yaptıkları saptanmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin genel olarak rastgele seçtikleri birkaç örnek ile doğrulama yapma eğiliminde oldukları görülmektedir.

Problem 1 ve Önerme 2b kanıt işlevleri özelinde değerlendirildiğinde öğrencilerin varsayımlarının doğruluğuna deneysel doğrulama yaparak ikna oldukları görülmektedir. Burada kanıt, doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilerin açıklamalarından da anlaşılacağı üzere deneysel doğrulama ile bir varsayımın doğruluğuna ikna olmak mümkün olsa da, bu genellikle varsayımın neden doğru olduğu hakkında bilgi vermemektedir. Bu sebeple öğrencilere varsayımlarının neden doğru olduğu sorulduğunda öğrenciler gerekçelendirme yapamamışlar, kavramlar arasında ilişki kuramamışlar, ya denedikleri örneklerden çıkan sonuçlara göre açıklama yapmışlar ya da matematiksel olmayan açıklamalar yapmışlardır. Kanıt ön görüşmelerde öğrenciler ile öğretmen arasında iletişim kurmaya olanak tanıdığı için en çok iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma* olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede öğrencilerin kanıta yüklediği anlamı ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin tamamı matematiksel ifadelerin doğruluğunu birkaç örnekle göstermenin yeterli olduğunu düşünmektedir.

Problem 1'de 6 öğrenciden 5'inin rastgele örnek seçtiği, birinin ise (Eylül) stratejik örnek seçtiği belirlenmiştir. Rastgele örnek seçerek deneysel doğrulama yapan öğrencilerden biri olan Bahri Görsel 4.8'de sunulduğu gibi sırasıyla 5 ve 6 örnekleri ile doğrulama yapmıştır. Denediği örneklerde sonucun, ilk sayının 3 fazlası çıkması üzerine bütün sayılarda böyle olacağına kendisi ikna olmuş ve arkadaşlarını da örnekler vererek ikna edeceğini belirtmiştir. Bu sebeple öğrencinin yanıtı doğru kabul edilmemiştir. Bahri'nin ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.8. *Bahri'nin ön klinik görüşmede Problem 1'de çözümü*

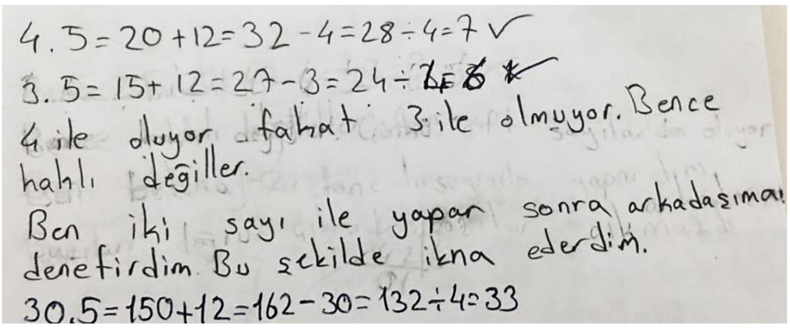
Bahri: Ben örnekler vererek yaptım.
A: Neden örnekler verdin?
Bahri: Örnekler vermeden bulamayacağımı düşündüm.
A:Hangi örnekleri verdin?
Bahri: İlk başta bir sayı seçtim 5'i seçtim 3 fazlası çıktı, ne olur ne olmaz dedim 6'yı da denedim yine 3 fazlası çıktı.
A: İki sayıyla denedin. Denediğin sayılarda her zaman 3 fazlası mı çıktı?
Bahri: Evet
A: Peki bu seni her zaman doğru olacağına ikna etti mi?
Bahri: İki tanesi oldu diğerleri de olur diye düşündüm.
A: Peki beni sonucun her zaman 3 fazlası olacağına daha farklı bir şekilde ikna eder misin beni?
Bahri: Yani mesela daha fazla mı örnek vereyim. İsterseniz garanti olsun diye 7'yle de yapabilirim.
A: Peki örnek vermeden daha farklı nasıl ikna edersin beni?
Bahri: Ama nasıl yapabilirim ki başka türlü olmaz bence. Onlar da bir sayı tutmuş ben de bir sayı verdim.
A: Bütün tam sayılar için geçerli olur mu?
Bahri: Olur bence.
A: Neden bütün tam sayılar için doğru olur?
Bahri: Bilmiyorum ki, yani işte benim denediklerimde oldu.
A: Peki neden sence 3 fazlası çıkıyor her zaman?
Bahri: Mesela 12'yi 4'e bölünce de 3 çıkıyor ya, ondan olabilir mi acaba? Ama emin değilim.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi belli değerler için bulduğu sonuçların ilk tuttuğu sayının 3 fazlası olması, Bahri'yi bütün tam sayılar için her zaman bu şekilde olacağına ikna etmiştir. Bununla birlikte öğrenci bu varsayımının her zaman doğru olmasını denediği örneklere bağlamış, örnekler vermekten başka bir çözüm yönteminin olmadığını düşünmüştür. Öğrenciye bu problemde sonucun her zaman ilk tutulan sayının 3 fazlası çıkmasının nedeni sorulduğunda Bahri, problemde verilen sayılar arasında 3 sonucunun çıkmasını sağlayacak bir ilişki kurarak hatalı açıklama yapmıştır. Bahri'nin deneysel doğrulama yaparak bütün tam sayılar için sonucun her zaman ilk tutulan sayının 3 fazlası olacağına ikna olması, kanıtın doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Problem 1'de benzer şekilde denedikleri rastgele örneklerle deneysel doğrulama yapan ve sonucun her zaman ilk tutulan sayının 3 fazlası olduğunu örneklere dayandırarak belirten Yağız varsayımının neden doğru olduğunu gerekçelendirememiş, verilen sayılar arasında 3 sonucunun çıkmasını sağlayacak bir ilişki kurarak hatalı açıklama yapmıştır. Yağız'ın ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

…
A:Sence neden her zaman üç fazlası çıkıyor?
Yağız: Başlangıçtaki sayı çıkarıldığı için olabilir mi?
A: Nasıl?
Yağız: Yani başlangıçtaki sayı çıkarıldığında 4-1 olarak düşünürsek 3 çıktığı için sonuç da 3 fazlası çıkar diye düşünüyorum.
…

Yağız'ın deneysel doğrulama yaparak bütün tam sayılar için sonucun her zaman ilk tutulan sayının 3 fazlası olacağına ikna olması, kanıtın doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğru olduğuna ikna olma* olarak hizmet etmiştir. Benzer şekilde Elif, Esra ve Mehmet'in de denedikleri rastgele örneklerle deneysel doğrulama yaptıkları ve sonucun her zaman ilk tutulan sayının 3 fazlası olacağına ikna oldukları görülmüştür. Öğrencilerden sadece Eylül Görsel 4.9.'da sunulduğu gibi ön testte belirlediği rastgele örneklerin birinde deneme yaparken işlem hatası yaptığını fark etmiş, işlem hatasını düzeltmiş; ancak varsayımın doğru olduğundan şüphelenerek stratejik örnekler seçmeyi tercih etmiştir. Eylül'ün ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



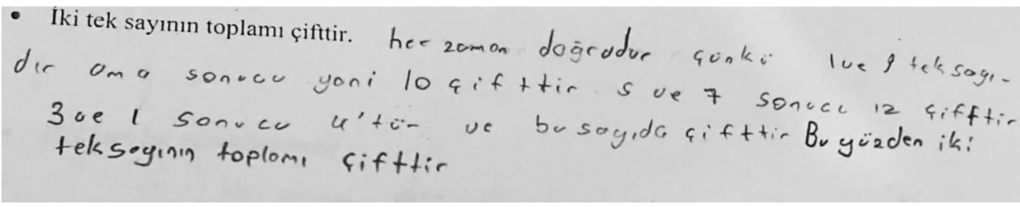
Görsel 4.9. *Eylül'ün ön klinik görüşmede Problem 1'de çözümü*

A: Yaptığın çözümü biraz anlatır mısın?
Eylül: Bence haklı değiller. Ben 4'le yaptım 3 fazlası çıktı ama 3'le denedim olmadı. O yüzden bence her zaman 3 fazlası çıkmaz.
A:Tamam yaptığın çözümü bir daha kontrol eder misin?
Eylül: (Tekrar yaptı) Hımm 3 fazla çıktı. Yanlışlık yapmışım heyecandan. O zaman her zaman olur.
A: İki sayıyla denedin 3 fazlası çıktı her zaman böyle olacağına ikna oldun mu?

Eylül: Şimdi düşününce tam ikna olmadım, şimdi böyle tek basamaklılarla oldu ama belki iki basamaklılarda olmayacak. Ben bir de mesela 30'la deneyeyim.
A: Tamam dene istersen.
Eylül: (30'la denedi) 33 çıktı. Yine 3 fazla çıktı. Şimdi ikna oldum. Her zaman 3 fazlası çıkıyor.
A: Şimdi üç örnekle denedin, bütün tam sayılarda her zaman 3 fazlası olacağına ikna oldun mu?
Eylül: Evet oldum.
A: Peki beni örnek vermeden daha farklı bir şekilde ikna etmeni istesem.
Eylül:…
A: Peki, neden her zaman ilk sayının 3 fazlası olur?
Eylül: Ben bir basamaklıyla da iki basamaklıyla da denedim. Demek ki bütün sayılarda böyle olacak. Ama tam neden böyle bilmiyorum. Aklıma başka bir şey gelmiyor.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi, Eylül'ün stratejik örneklerinde, bir basamaklı ve iki basamaklı sayılar için bulduğu sonuçların varsayımının doğruluğunu göstermesinde yeterli olacağını düşündüğü söylenebilir. Eylül'ün deneysel doğrulama yaparak bu problemde bütün tam sayılar için sonucun her zaman ilk tutulan sayının 3 fazlası olacağına ikna olması, kanıtın doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ancak öğrenci varsayımının neden doğru olduğunu gerekçelendirememiş, denediği örneklere dayalı bir açıklama yapmıştır.

Önerme 2b'de öğrencilerin sadece tümevarımsal muhakeme ile deneysel doğrulama yaparak önermenin doğruluğunu gösterdikleri belirlenmiştir. Önerme 2b'de 6 öğrenciden 4'ünün (Eylül, Bahri, Mehmet ve Esra) örneklerini rastgele seçtikleri belirlenmiştir. Rastgele örnekler seçerek deneysel doğrulama yapan öğrencilerden biri olan Mehmet Görsel 4.10.'da sunulduğu gibi denediği örneklerde sonucun çift sayı çıkması üzerine iki tek sayının toplamının her zaman çift olduğunu belirtmiştir. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.10. *Mehmet'in ön klinik görüşmede Önerme 2b'de çözümü*

A: Nasıl çözdüğünü açıklar mısın?
Mehmet: Her zaman doğru dedim ben çünkü 1 ve 9'un toplamı 10 çift, 1 ve 3, 4 çıkıyor, 5 ve 7, 12 yani çift çıkıyor.
A: Birkaç durumla denemişsin çift çıkmış, sence bütün tek sayılar için böyle mi?
Mehmet: Evet çünkü 3 örnekle öyle çıktı.
A: Üç örnekle denemek seni ikna etti mi?

Mehmet: Yani bence hep öyle olur.
A: Peki beni örnek vermeden farklı bir şekilde yine iki tek sayının toplamının çift çıkacağına ikna edebilir misin?
Mehmet: …
A: Tek ve çift sayı tanımını yapar mısın?
Mehmet: 1,3,5,7 gibiler tek sayı, 2,4,6,8, gibiler çift sayı.
A: Peki neden sence iki tek sayıyı toplayınca çift çıkar?
Mehmet: Mesela n harfi m'nin yarısı gibi, iki n'yi birleştirince m oluyor. Bu da böyle bence iki tek birleşince çift oluyor.
A: İki n'yi yan yana koyunca m çıkıyor diye mi düşünüyorsun?
Mehmet: Evet iki tek de böyle çift oluyor.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi üç örnekle deneme yapan Mehmet sonucun her zaman çift sayı olacağına ikna olmuştur. Ayrıca öğrenciden varsayımının doğruluğunu gerekçelendirmesi istendiğinde, iki n harfinin birleşince m harfi olması şeklinde algıya dayalı matematiksel olmayan bir açıklama yapmıştır. Mehmet'in deneysel doğrulama yaparak iki tek sayının toplamının her zaman çift sayı olacağına ikna olması, kanıtın doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Mehmet'in kanıta yüklediği anlamı, hem de önermede kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Mehmet matematiksel ifadelerin doğruluğunu birkaç örnekle göstermenin yeterli olduğunu düşünmektedir. Ayrıca Mehmet tek-çift sayı tanımı sorulduğunda "*1,3,5,7 gibiler tek sayı, 2,4,6,8, gibiler çift sayı."* şeklinde tek ve çift sayılara örnek vermiş; ancak tek ve çift sayı tanımını yapamamıştır.

Önerme 2b'de rastgele örneklerle deneme yapan öğrencilerden biri olan Eylül de benzer şekilde varsayımının doğruluğunu gerekçelendirmesi istendiğinde *"Çünkü iki tane tek insan evlenince de çift oluyor. Onun gibi"* şeklinde gerçek hayattaki kullanımı ile matematiksel olmayan bir açıklama yapmıştır. Eylül'ün ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

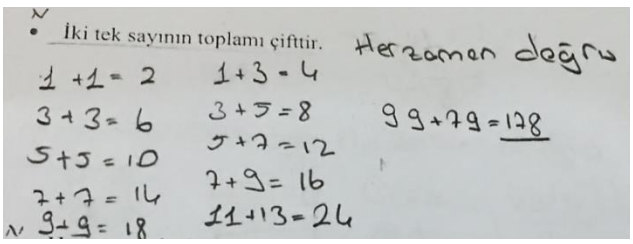
…
Eylül: Mesela 3'le 9'u denesem 12 oldu çift, 7'yle 5'i denesem 12 çıktı çift oldu. Her zaman çift oldu.
A: Örneklerini nasıl seçtin?
Eylül: Yani aklıma ilk bunlar geldi. Fark etmez diye düşündüm.
A: Peki neden iki tek sayının toplamı her zaman çift olur sence?
Eylül: Çünkü 2 tane tek bir insan evlenince de çift oluyor. Onun gibi.
A: Peki sence örnek vermeden başka bir yol ile çözebilir misin?
Eylül: Örnek vermeden nasıl olacak ki, 2 tek sayı diyor bunu da örnekle gösterebiliriz.
A: Tek sayı nedir, çift sayı nedir?

Eylül: Tek sayılar 1'den başlar 1,3,5,7 yani böyle hep 2 ekleriz. Çiftler 2'den başlar 2,4,6,8 yine hep 2 ekleriz.

Eylül'ün deneysel doğrulama yaparak iki tek sayının toplamının her zaman çift sayı olacağına ikna olması, kanıtın doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Eylül matematiksel ifadelerin doğruluğunu birkaç örnekle göstermenin doğru olduğunu düşünmektedir. Ayrıca Eylül'e tek-çift sayı tanımı sorulduğunda "*Tek sayılar 1'den başlar 1,3,5,7 yani böyle hep 2 ekleriz. Çiftler 2'den başlar 2,4,6,8 yine hep 2 ekleriz"* şeklinde tek ve çift sayılara örnek vermiş, hem tek sayıların hem de çift sayıların 2'şer 2'şer arttığını ve çift sayıların 2'den başladığını belirtmiştir.

Rastgele örneklerle deneme yapan Bahri ve Esra'nın Önerme 2b'de çok benzer çözümler yaptıkları, denedikleri örneklerin sonucunun çift sayı çıkması üzerine iki tek sayının toplamının her zaman çift olacağına ikna oldukları görülmüştür. İki tek sayınının toplamının neden her zaman çift sayı olduğu sorulduğunda her iki öğrencinin de kullandıkları örneklere dayalı bir açıklama yaptıkları, önermenin neden doğru olduğunu gerekçelendiremedikleri görülmüştür.

Önerme 2b'de deneysel doğrulama yapan öğrencilerden 2'sinin (Elif ve Yağız) ise stratejik örnek seçtikleri ve bu stratejik örneklerle doğrulama yaptıkları saptanmıştır. Bu öğrencilerden Elif, Önerme 2b'nin doğruluğunu göstermek için Görsel 4.11.'de sunulduğu gibi önce bir basamaklı aynı tek sayıları toplamış, sonra bir basamaklı farklı tek sayıları toplamış, sonra da iki basamaklı farklı tek sayıları toplamıştır. Elif'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.11. *Elif'in ön klinik görüşmede Önerme 2b'de çözümü*

A: Yaptığın çözümü bana biraz anlatır mısın?
Elif: Her zaman doğru dedim ben. İlk başta böyle sayıları denedim. Aynı sayıları topladım. Sonra böyle olmaz dedim birbirinden farklı sayıları denedim, sonra iki basamaklı da olsun dedim 99 ve 79'u denedim hep çift çıktı. Yani her zaman çift çıkar.
A: Tek ve çift sayı tanımını yapar mısın?

Elif: Mesela 10 çift yani 2'nin katı. Ama 3, 5 gibi 2'nin katı değilse tek olur.
A: Peki o zaman örnek vermenin dışında başka nasıl düşünebilirsin?
Elif: Bence tek yol bu.
A: Tamam peki sence neden iki tek sayıyı toplayınca sonuç çift çıkıyor?
Elif: Yani bu matematiğin kendisiyle ilgili bir şey 1'le 1'i kim toplarsa toplasın sonuç 2 çıkar yani çift olur. Herkesin bildiği bir şey yani.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Elif örnek vererek doğrulama yapmanın tek yol olduğunu düşünmektedir. Elif'in deneysel doğrulama yaparak iki tek sayının toplamının her zaman çift sayı olacağına ikna olması, kanıtın doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğru olduğuna ikna olma* olarak hizmet etmiştir. Öğrenciden varsayımının doğruluğunu gerekçelendirmesi istendiğinde iki tek sayının toplamının çift olacağını herkesin bildiğini, bu durumun matematiğin kendisiyle ilgili bir şey olduğunu belirtmesi aslında öğrencinin entelektüel anlamda kanıta ihtiyaç duymadığının göstergesidir. Ayrıca Elif tek-çift sayı tanımını "*Mesela 10 çift yani 2'nin katı. Ama 3, 5 gibi 2'nin katı değilse tek olur."* şeklinde yaparak, sadece tek ve çift sayılara örnek vermemiş aynı zamanda 2'nin katı olan sayıların çift, 2'nin katı olmayan sayıların tek sayı olduğunu da belirtmiştir.

Stratejik örnekler seçen Yağız da yaptığı deneysel doğrulama ile iki tek sayının toplamının her zaman çift sayı olacağına ikna olmuştur. Yağız tek ve çift sayı tanımını "*2'nin katı olanlar çift sayı, 2'nin katı olmayanlar tek sayıdır"* şeklinde doğru tanımlamıştır. Öğrenciye bu önermenin neden doğru olduğu sorulduğunda *"Yaptığım örneklerde hep çift çıktı, bundan sonra da öyle olacak"* şeklinde denediği örneklere dayalı bir açıklama yapmış; ancak gerekçelendirme yapamamıştır.

4.1.1.2. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerine/problemine ilişkin bulgular

Önerme 2f (*Ö.2f: Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90° olan bütün dörtgenler dikdörtgendir.*), Önerme 2g, (*Ö.2g: Her kare bir paralelkenardır.*), Önerme 2h, (*Ö.2h: Karşılıklı kenarları paralel olan bütün dörtgenler paralelkenardır.*), Önerme 2i, *(Ö.2i: Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenler paralelkenardır.)* önermeleri ile Problem 3 *(P.3: Bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?)* öğrencilerin doğrudan kanıt yapmalarını gerektiren geometri önermeleri/problemidir.

4.1.1.2.1. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerine/problemine ilişkin ön test bulguları

Öğrencilerin doğrudan kanıt yamaları gereken geometri önermelerini doğrulamak ve Problem 3'ü çözmek için yaptıkları çözümler incelendiğinde kodlar arasındaki uyumdan dolayı önermeler birlikte ele alınırken Problem 3 tek başına ele alınmıştır. Öğrencilerin ön testte Önerme 2f, Önerme 2g, Önerme 2h ve Önerme 2i'nin doğruluklarını araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu önermeler için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.2.'de verilmiştir:

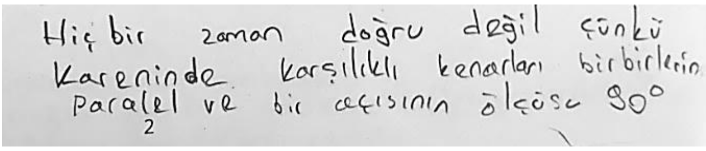
Tablo 4.2. *Öğrencilerin ön test Önerme 2f, Önerme 2g, Önerme 2h ve Önerme 2i'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	**Ö.2f** % 77,4 (24 kişi)	
		Ö.2g % 77,4 (24 kişi)	
		Ö.2h % 61,2 (19 kişi)	
		Ö.2i % 64,5 (20 kişi)	
	Önermeyi Anlamama **Ö.2f** % 22,5 (7 kişi) **Ö.2g** % 22,5 (7 kişi) **Ö.2h** % 38,7 (12 kişi) **Ö.2i** % 35,4 (11 kişi)	Önermeyi Yanıtsız Bırakma	**Ö.2f** % 19,3 (6 kişi)
			Ö.2g % 19,3 (6 kişi)
			Ö.2h % 25,8 (8 kişi)
			Ö.2i % 25,8 (8 kişi)
		Önermeyi Tekrar Yazma	**Ö.2f** % 3,2 (1 kişi)
			Ö.2g % 3,2 (1 kişi)
			Ö.2h % 9,6 (3 kişi)
			Ö.2i % 6,4 (2 kişi)
		Önermenin Öncülünü Anlamama	Hatalı niceleyici Kullanma **Ö.2h** % 3,2 (1 kişi)
			Ö.2i % 3,2 (1 kişi)
Muhakeme	Kapsadığı Dörtgeni Aksine Örnek Vererek Hatalı Gerekçelendirme **Ö.2f** % 58,0 (18 kişi) **Ö.2g** % 12,9 (4 kişi) **Ö.2h** % 16,1 (5 kişi) **Ö.2i** % 22,5 (7 kişi)	Hatalı Niceleyici Kullanma	**Ö.2f** % 32,2 (10 kişi)
			Ö.2i % 9,6 (3 kişi)
	Hatalı Çizime Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2f** % 3,2 (1 kişi)	
		Hatalı Niceleyici Kullanma	**Ö.2g** % 3,2 (1kişi)
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme **Ö.2h** % 6,4 (2 kişi) **Ö.2i** % 12,9 (4 kişi)	Tanım Bilgisi Eksikliği	**Ö.2h** % 3,2 (1kişi)
			Ö.2i % 3,2 (1kişi)
		Özellik Bilgisi Eksikliği	**Ö.2h** % 3,2 (1kişi)
			Ö.2i % 3,2 (1kişi)
		Açı- paralellik bilgisi eksikliği	**Ö.2i** % 6,4 (2 kişi)
	Prototip Çizim Üzerinde Sembollerle Gerekçelendirme	**Ö.2f** % 6,4 (2 kişi)	
		Ö.2g % 25,8 (8 kişi)	
		Ö.2h % 6,4 (2 kişi)	
		Ö.2i % 6,4 (2 kişi)	
	Tümdengelimsel Muhakeme **Ö.2f** % 9,6 (3 kişi) **Ö.2g** % 35,4 (11 kişi) **Ö.2h** % 32,2 (10 kişi) **Ö.2i** % 22,5 (7 kişi)	Tanım Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2g** % 25,8 (8 kişi)
			Ö.2h % 29 (9 kişi)
			Ö.2i % 6,4 (2 kişi)
		Özellik Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2f** % 9,6 (3 kişi)
			Ö.2g % 9,6 (3 kişi)
			Ö.2h % 3,2 (1kişi)
			Ö.2i % 9,6 (3 kişi)
		Kapsadığı Dörtgene Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2i** % 6,4 (2 kişi)

Tablo 4.2.'de görüldüğü gibi önermeyi anlamayan öğrenciler için "önermeyi yanıtsız bırakma", "önermeyi tekrar yazma" ve "önermenin öncülünü anlamama" olmak

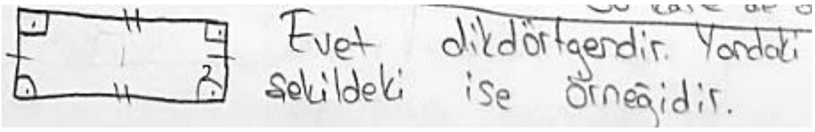
üzere üç farklı durumun olduğu belirlenmiştir. Önermeyi anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde “kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme”, “hatalı çizime dayalı gerekçelendirme”, “mantıksal olmayan gerekçelendirme”, “prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme” ve “tümdengelimsel muhakeme” yaptıkları görülmektedir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin “tanım bilgisine dayalı gerekçelendirme”, “özellik bilgisine dayalı gerekçelendirme” ve “kapsadığı dörtgene dayalı gerekçelendirme” olmak üzere üç farklı şekilde gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Bu önermeler bir bütün olarak değerlendirildiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeleri anladığı söylenebilir. Bununla birlikte özellikle dörtgenler arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişkilerin belirlenememesinden kaynaklı olarak öğrencilerin sıkıntı yaşadıkları saptanmıştır. Ayrıca öğrencilerin bu önermelerde ön bilgi eksikliğinden dolayı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıkları gözlenmiştir. Bununla birlikte bu önermeleri tümdengelimsel muhakeme yaparak kanıtlayan öğrencilerin olduğu da görülmüştür.

Tablo 4.2. incelendiğinde Önerme 2f’yi anlamayan 7 öğrenciden 6’sının önermeyi yanıtsız bıraktığı, birinin ise önermeyi tekrar yazdığı belirlenmiştir. Önerme 2f’yi anlayan öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermedeki özelliklere sahip olan dörtgenlerin tamamının dikdörtgen olmadığını, karenin de bu özellikleri sağladığını belirttikleri, dikdörtgenin kapsadığı dörtgen olan kareyi aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden bazılarının hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirttikleri, bazılarının ise önermenin doğru olmadığını belirttikleri görülmüştür. Dikdörtgen ve kare arasında doğru ve kapsayıcı hiyerarşik ilişki kuramayan ve önermenin doğru olmadığını belirten öğrencilerden biri olan Bahri’nin çözümü örnek olarak Görsel 4.12.’de sunulmuştur:



Görsel 4.12. *Bahri’nin ön test Önerme 2f’de çözümü*

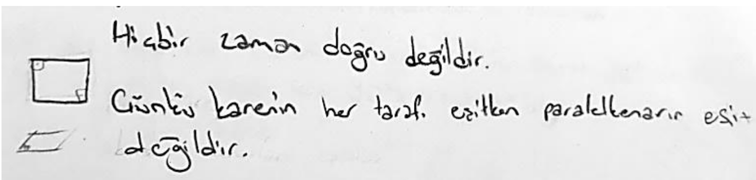
Önerme 2f’yi anlayan öğrencilerden birinin hatalı çizime dayalı gerekçelendirme, 2’sinin ise prototip çizime dayalı sembollerle gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Prototip çizime dayalı gerekçelendirme yapan öğrencilerden Azra, bir dikdörtgen prototipi çizerek ve bu çizim üzerinde kullandığı semboller ile önermenin doğruluğunu savunmuştur. Azra'nın çözümü Görsel 4.13'te sunulmuştur:



Görsel 4.13. *Azra'nın ön test Önerme 2f'de çözümü*

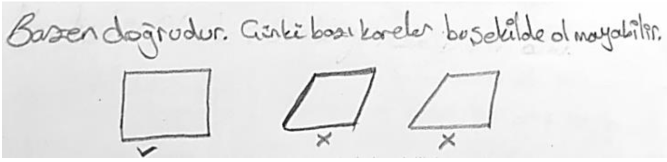
Önerme 2f için öğrencilerden 3'ünün kanıt yaptığı ve bu öğrencilerin tümdengelimsel muhakemelerinin dörtgenlerin özellikleri bilgisine dayalı olduğu görülmektedir. Örneğin Seher, kenarların paralelliği ile karşılıklı kenar uzunluğu ve açı ölçüleri arasında ilişki kurarak *"Her zaman doğrudur, çünkü bir açısı 90°, karşılıklı kenarları paralel ise diğerleri de 90° olur, karşılıklı kenarları da eşit olur. Hepsi dikdörtgenin özelliği."* şeklinde gerekçelendirme yapmıştır.

Önerme 2g'yi öğrencilerin yaklaşık % 77'sinin anladığı görülürken bu öğrencilerden 4'ünün karenin paralelkenar olmadığını belirttikleri diğer bir ifade ile paralelkenarın kapsadığı dörtgen olan kareyi aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Esra, karenin bütün kenar uzunluklarının eşit olması nedeniyle karenin paralelkenar olmadığını, bu sebeple bu önermenin hiçbir zaman doğru olmayacağını belirtmiştir. Esra'nın çözümü Görsel 4.14.'te sunulmuştur:



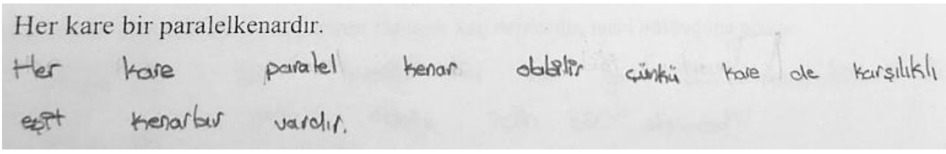
Görsel 4.14. *Esra'nın ön test Önerme 2g'de çözümü*

Önerme 2g'de öğrencilerden birinin hatalı çizime dayalı gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. Hatalı çizime dayalı gerekçelendirme yapan Asya, karşılıklı kenarları paralel olmayan bir takım dörtgenler çizerek bunların kare olduğunu iddia etmiş, aynı zamanda hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirtmiştir. Asya'nın çözümü Görsel 4.15'te sunulmuştur:



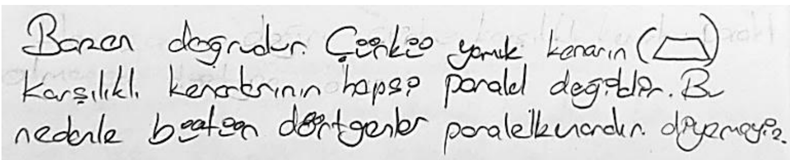
Görsel 4.15. *Asya'nın ön test Önerme 2g'de çözümü*

Önerme 2g'de, 8 öğrencinin prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı, 11 öğrencinin ise tümdengelimsel muhakeme yaptıkları görülmektedir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin tanım bilgisine ya da özellik bilgisine dayalı gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Yusuf, karenin karşılıklı kenarlarının uzunluğunun eşit olması özelliği ile paralelkenar arasında ilişkilendirme yaparak karenin de paralelkenar olabileceğini belirtmiştir. Yusuf'un yaptığı çözüm örnek olarak Görsel 4.16.'da sunulmuştur:



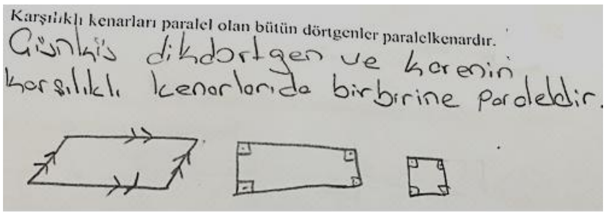
Görsel 4.16. *Yusuf'un ön test Önerme 2g'de çözümü*

Önerme 2h'de öğrencilerin yaklaşık % 39'unun önermeyi anlamadığı belirlenirken bu öğrencilerden birinin önermenin öncülünü anlamadığı belirlenmiştir. Öncül olarak verilen karşılıklı kenarların paralelliğini anlamayan İrem, bütün dörtgenlerin karşılıklı kenarlarının paralel olmadığını belirterek sadece bir çift kenarı paralel olan yamuk örneğini vermiş, aynı zamanda hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirtmiştir. İrem'in çözümü Görsel 4.17.'de sunulmuştur:



Görsel 4.17. *İrem'in ön test Önerme 2h'de çözümü*

Önerme 2h'yi anlayan öğrencilerden 5'inin paralelkenarın kapsadığı dörtgenleri aksine örnek vermek için kullandıkları görülmüştür. Paralelkenarın kapsadığı dörtgenleri aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yapan öğrencilerden biri olan Elif, Görsel 4.18.’de verildiği gibi dikdörtgen ve karenin de bu özellikleri sağladığını bu yüzden karşılıklı kenarları paralel olan bütün dörtgenlerin paralelkenar olmadığını belirterek önermenin doğru olmadığını söylemiş ve hatalı gerekçelendirme yapmıştır:



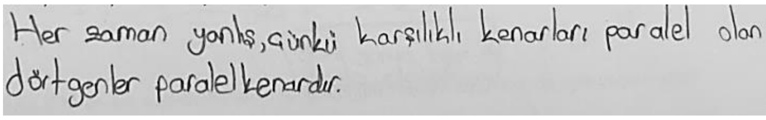
Görsel 4.18. *Elif’in ön test Önerme 2h’de çözümü*

Önerme 2h’de öğrencilerden 2’sinin mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı görülürken bu öğrencilerden birinin tanım bilgisi eksikliğinden diğerinin ise özellik bilgisi eksikliğinden kaynaklı, mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Ezel’in *“Her zaman doğru çünkü dörtgenler birbirine paraleldir.”* şeklinde aşırı genelleme yaptığı görülmüştür.

Bununla birlikte Önerme 2h’de öğrencilerin yaklaşık % 32’sinin tümdengelimsel muhakeme ile kanıt yaptığı belirlenmiştir. Bu öğrencilerin büyük çoğunluğunun gerekçelerinde tanım bilgisini, bir öğrencinin ise özellik bilgisini kullandığı görülmüştür. Özellik bilgisine dayalı gerekçelendirme yapan Müjgan’ın karşılıklı uzunlukları eşit olan kenarların aynı zamanda paralel de olacağını belirterek *“Her zaman doğrudur, çünkü karşılıklı eşit kenarlar paralel olur. Bunlar da paralelkenar olur.”* şeklinde açıklama yaptığı görülmüştür.

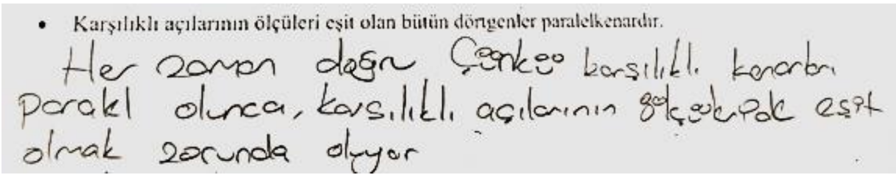
Önerme 2i’de öğrencilerin yaklaşık % 35’inin önermeyi anlamadığı, bu öğrencilerden birinin de önermenin öncülünü anlamadığı belirlenmiştir. Önermeyi anlayan öğrencilerin 7’sinin paralelkenarın kapsadığı dörtgenleri aksine örnek vermek için kullandıkları ve hatalı gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden 3’ünün hatalı niceleyici kullanarak önermenin bazen doğru olduğunu belirttikleri, diğerlerinin ise önermenin yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür. Önermenin yanlış olduğunu belirten Mehmet, *“Doğru değildir çünkü kare ve dikdörtgenin de karşılıklı açılarının ölçüleri eşittir.”* şeklinde gerekçelendirme yapmıştır.

Önerme 2i’de mantıksal olmayan gerekçelendirme yapan 4 öğrenciden 2’sinin açı-paralellik bilgisi eksikliğine dayalı olarak mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Yağmur, açı ile paralellik arasında ilişki kuramadığı için, karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenlerin paralelkenar olduğunu, bu nedenle önermenin her zaman yanlış olduğunu belirterek mantıksal olmayan gerekçelendirme yapmıştır. Yağmur’un çözümü Görsel 4.19’da sunulmuştur:


Her zaman yanlış, çünkü karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenler paralelkenardır.

Görsel 4.19. *Yağmur’un ön test Önerme 2i’de çözümü*

Önerme 2i’de, 2 öğrencinin prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. Kanıt yapan 7 öğrencinin ise tümdengelimsel muhakemeleri incelendiğinde tanım bilgisine, özellik bilgisine ya da paralelkenarın kapsadığı dörtgenlere dayalı olmak üzere üç farklı şekilde gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Görsel 4.20’de sunulduğu gibi İrem, karşılıklı kenarların paralel olma durumu ile karşılıklı açıların ölçülerinin eşitliği arasında ilişki kurarak özellik bilgisine dayalı gerekçelendirme yapmış ve bu dörtgenin her zaman paralelkenar olduğunu belirtmiştir:


• Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenler paralelkenardır.

Her zaman doğru Çünkü karşılıklı kenarları paralel olunca, karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olmak zorunda oluyor

Görsel 4.20. *İrem’in ön test Önerme 2i’de çözümü*

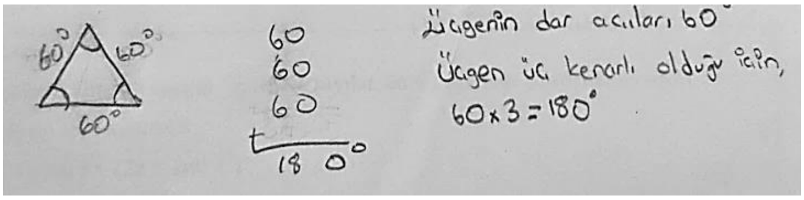
Problem 3 (*P.3: Bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?*) öğrencilerin doğrudan kanıt yapmalarını gerektiren bir geometri problemidir. Öğrencilerin bu problemin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu problem için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.3.’te verilmiştir:

Tablo 4.3. *Öğrencilerin ön test Problem 3'te problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Problemin Yapısının Anlaşılması	Problemi Anlama	% 64,5 (20 kişi)	
	Problemi Anlamama % 35,4 (11 kişi)	Problemi Yanıtsız Bırakma	% 9,6 (3 kişi)
		Dik Üçgeni İhmal Etme	% 25,8 (8 kişi)
Probleme Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	% 64,5 (20 kişi)	
Muhakeme	Bir Örnekle Deneysel Doğrulama % 32,2 (10 kişi)	Üçgenin İç Açılarının Toplamını 180º Almama	% 9,6 (3 kişi)
		Üçgenin İç Açılarının Toplamını 180º Alma	% 22,5 (7 kişi)
	Tümdengelimsel muhakeme % 32,2 (10 kişi)	Sayısal İfadenin Kullanıldığı Şekille Desteklenmiş Gerekçelendirme	% 32,2 (10 kişi)

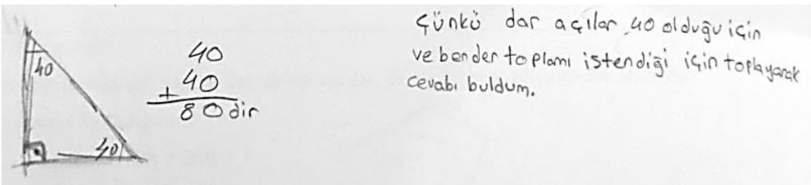
Tablo 4.3. incelendiğinde problemi anlamayan öğrenciler için "problemi yanıtsız bırakma" ve "dik üçgeni ihmal etme" olmak üzere iki farklı durumun olduğu görülmüştür. Problemi anlayan öğrencilerin çözüm için geliştirdikleri stratejiler incelediğinde çözümlerinde sadece "aritmetiksel strateji" kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde ise "deneysel doğrulama" yaptıkları ya da "tümdengelimsel muhakeme" ile kanıt yaptıkları belirlenmiştir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin kanıtlarında sayısal ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Problem 3 genel olarak değerlendirildiğinde, bu problem için dikkat çekici bulgulardan birinin deneysel doğrulama yapan öğrencilerin tamamının özel olarak ikizkenar dik üçgen örneğini kullanmaları olduğu söylenebilir. Ayrıca bu problem öğrencilere sunulan doğrudan kanıt yapma problemleri arasında kanıt yapabilme yüzdesi yüksek olan problemlerden biridir.

Tablo 4.3'te görüldüğü gibi öğrencilerin yaklaşık % 35'inin problemi anlamadığı, problemi anlamayan öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun problemde verilen dik üçgeni ihmal ettikleri belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Müjgan'ın Görsel 4.21.'de sunulduğu gibi deneysel doğrulama yapmaya çalıştığı; ancak problemdeki dik üçgeni ihmal ettiği görülmüştür:



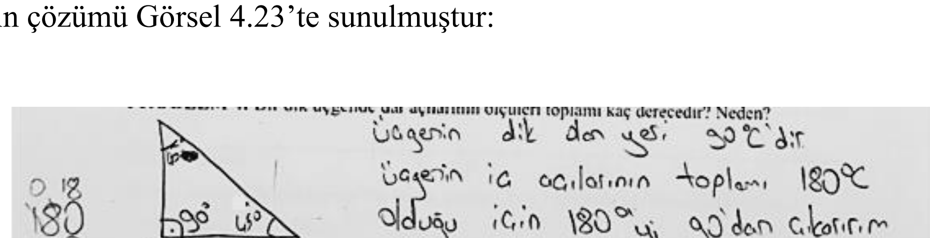
Görsel 4.21. *Müjgan'ın ön test Problem 3'te çözümü*

Problemi anlayan öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullandığı, bu öğrencilerin yarısının tek örnekle deneysel doğrulama yaparak problemi çözdükleri belirlenmiştir. Deneysel doğrulama yapan öğrencilerden 3'ünün üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını 180^{o} olarak almadığı belirlenmiştir. Örneğin Mert, dik açılı üçgenin dar açılarının ölçülerinin her birini 40^{o} alarak deneysel doğrulama yapmaya çalışmıştır. Mert'in çözümü Görsel 4.22.'de sunulmuştur:



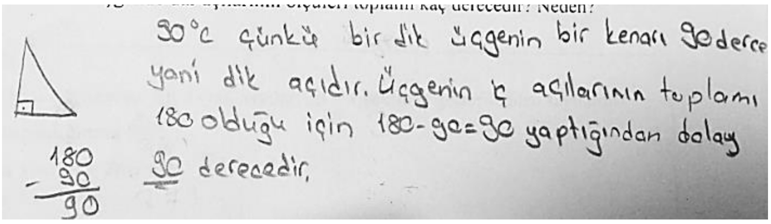
Görsel 4.22. *Mert'in ön test Problem 3'te çözümü*

Bir örnekle doğrulama yapan öğrencilerden 7'sinin dik açının 90^{o} ve bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamının 180^{o} olduğu ön bilgisinden hareket ettikleri; ancak ikizkenar dik üçgen örneğini kullanarak doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Azra, dik açılı üçgende bir tane 90^{o} olduğu için geriye 90^{o} kaldığını göstermiş; ancak bu 90^{o}'yi 2'ye bölerek her bir iç açının 45^{o} olduğunu belirtmiştir. Azra'nın çözümü Görsel 4.23'te sunulmuştur:



Görsel 4.23. *Azra'nın ön test Problem 3'te çözümü*

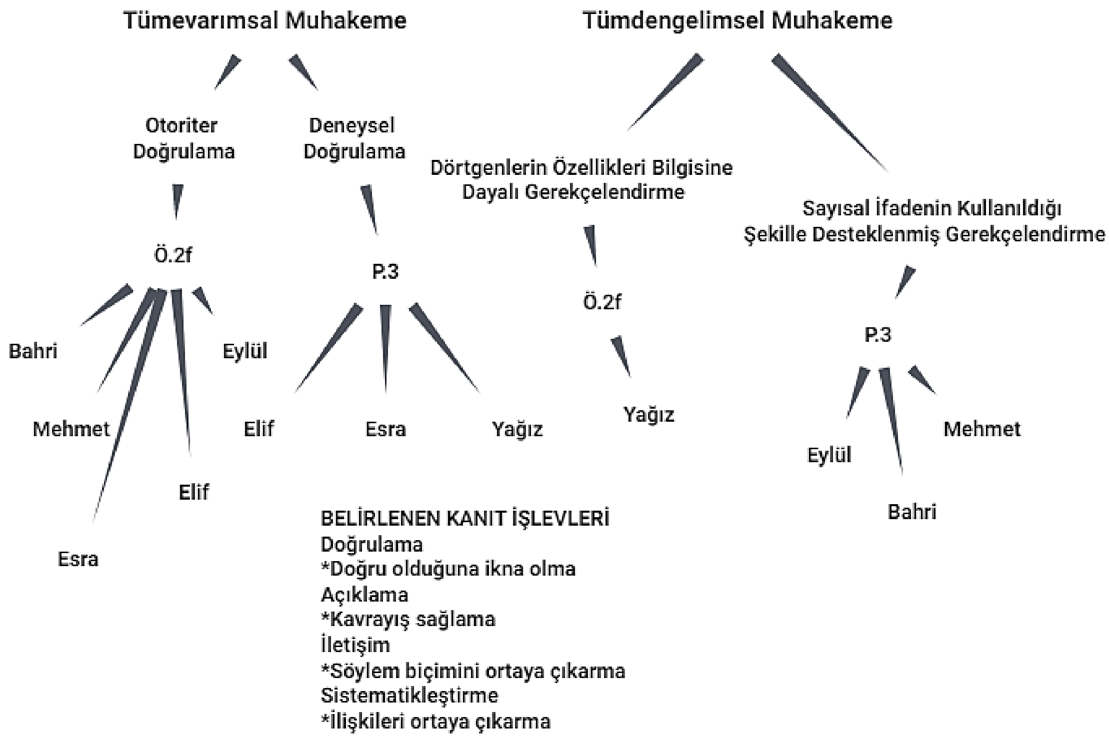
Problem 3 için öğrencilerin yaklaşık % 32’sinin tümdengelimsel muhakeme yaptıkları belirlenirken öğrencilerin gerekçelerinin sayısal ifadenin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçeler olduğu görülmüştür. Bu öğrenciler dik üçgende, dik açının 90° ve bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180° olduğu ön bilgisinden hareket etmişlerdir. Dar açıların ölçüleriyle dik açının ölçüsünün toplamının 180° olabilmesi için dar açıların ölçüleri toplamının 90° olduğu genellemesine ulaşmışlardır. Kanıt yapan öğrencilerin hiçbiri cebirsel ifadelerle kanıt yapma yolunu seçmemiş olsalar da açıklamaları yeterli görülmüştür. Bu öğrencilerden Ceren’in çözümü örnek olarak Görsel 4.24.’te sunulmuştur:



Görsel 4.24. *Ceren’in ön test Problem 3’te çözümü*

4.1.1.2.2. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermesine/problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön klinik görüşme bulguları

Ön klinik görüşmelerde odak öğrencilere doğrudan kanıt yapılmasını gerektiren geometri önermelerinden Önerme 2f (*Ö.2f: Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90° olan bütün dörtgenler dikdörtgendir.*) ve Problem 3 *(P.3: Bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?)* sorulmuştur. Odak öğrencilerin Önerme 2f ve Problem 3’ü çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.2.’de gösterilmiştir:



Şekil 4.2. *Öğrencilerin ön klinik görüşmede Önerme 2f ve Problem 3'ü çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi odak öğrencilerin bu önerme ve problemde ön testte olduğu gibi tümevarımsal muhakeme ve tümdengelimsel muhakeme olmak üzere iki farklı şekilde muhakeme yaptıkları görülmüştür. Tümevarımsal muhakeme yöntemini kullanan öğrencilerin otoriter doğrulama ve deneysel doğrulama yaptıkları, tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin ise önermede dörtgenlerin özellikleri bilgisine dayalı gerekçelendirme yaptıkları, problemde ise sayısal ifadenin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir.

Bu önerme ve problem kanıt işlevleri özelinde değerlendirildiğinde, öğrencilerin otoriter doğrulama ve deneysel doğrulama yaptıkları önermelerde, önceki bildiklerine ya da deneysel doğrulama sonuçlarına dayalı olarak varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları, kanıt yapabildikleri sorularda ise yaptıkları kanıtın sonucuna dayalı olarak varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yaparak kanıt yapabildiği önerme ve problemde matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte öğrenciler bu önerme ya da problemi çözerken kanıt öğrenciler ile öğretmen arasında iletişim kurmaya olanak tanıdığı için iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma* olarak hizmet etmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin hem bildikleri kavramları ilişkilendirdikleri hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek varsayımlarını gerekçelendirdikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Önerme 2f'de 6 öğrenciden 5'inin tümevarımsal muhakeme, bir öğrencinin (Yağız) ise tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenmiştir. Tümevarımsal muhakeme yapan öğrencilerin tamamının doğrulamalarında, önceki öğrenmelerini benzer formatta dönüşüm yapmadan kullandıkları yani otoriter doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerin tamamı önceden öğrendikleri dikdörtgen ve karenin özellikleri bilgisini kullanmış; ancak aralarında kapsayıcı hiyerarşik ilişki kuramamışlardır. Bu öğrencilerin bir açının 90^o olması ve karşılıklı kenarların paralel olması durumundan diğer açıların da 90^o olmasına ulaşabildikleri yani açı ve paralellik arasında ilişki kurabildikleri belirlenmiştir. Ancak dörtgenleri sadece harici tanımları üzerinden ele aldıkları, böylece dörtgenleri birbirleriyle ilişkilendirmeden tek tek özelliklerini belirterek tanımladıkları, önceden bildiklerini mantıksal yapı içinde düzenleyerek kare ve dikdörtgen arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişkiye dönüştüremedikleri, bu sebeple de önermenin yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür. Bu öğrencilerden biri olan Bahri'nin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

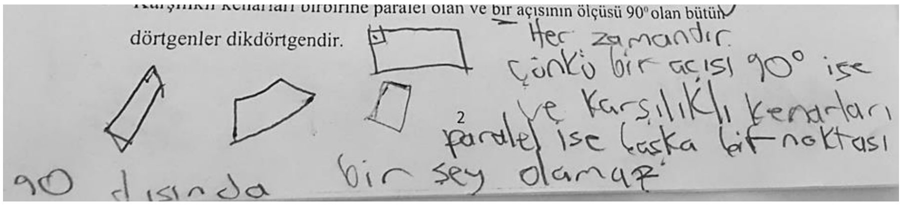
> **A**: Ne düşündüğünü bir de burada açıklar mısın?
> **Bahri:** Bence doğru değil. Çünkü karenin de böyledir.
> **A:** Nasıl anlamadım karenin de böyledir dedin yani ne demek istiyorsun?
> **Bahri:** Yani karenin de karşılıklı kenarları paralel ve bir açısı 90. Yani sadece dikdörtgen değil kare de olur.
> **A**: Yani sence bu ifade doğru değil mi?
> **Bahri:** Evet bütün dörtgenler dikdörtgen diyor burada ama değil, kare de olur dikdörtgen de olur.
> **A:** Kare ve dikdörtgen tanımını nasıl yaparsın?
> **Bahri:** Kare bütün kenarları eşit açıları da 90 olan, dikdörtgen ise karşılıklı kenarları eşit ve açıları 90.
> **A:** Peki kare ve dikdörtgen arasında nasıl bir ilişki var?
> **Bahri:** Birinin bütün kenarları eşit diğerinin bir uzun bir kısa kenarı var.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi öğrencinin otoriter doğrulama yaparak çözümünün doğruluğuna ikna olduğu görülmektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna* *olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Bahri'nin önermede kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğrenci kareyi aksine örnek vermek için kullanmış, böylece önermenin her zaman doğru olmadığını belirtmiştir. Öğretmen kare ve dikdörtgenin tanımını ve kare ile dikdörtgen arasındaki ilişkiyi sorduğunda Bahri bu dörtgenlerin harici tanımını yaparak *"Kare bütün kenarları eşit açıları da 90^o olan, dikdörtgen ise karşılıklı kenarları eşit ve açıları 90^o"* olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin bu dörtgenleri birbirleriyle ilişkilendirmeden tek tek özelliklerini belirterek tanımlaması, önceden bildiklerini mantıksal yapı içinde düzenleyerek, kare ve dikdörtgen arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişkiye dönüştüremediğini göstermektedir. "*Birinin bütün kenarları eşit diğerinin bir uzun bir kısa kenarı var."* şeklindeki açıklamaları ise önceden öğrendiği dikdörtgen prototipi ile kareyi örtüştüremediğini göstermektedir.

Benzer şekilde otoriter doğrulama yapan Mehmet Önerme 2f'de karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90^0 olan bütün dörtgenlerin dikdörtgen olmadığını, kare de olabileceğini belirtmiştir. Öğrenci kareyi aksine örnek vermek için kullanmış, böylece önermenin her zaman doğru olmadığını belirtmiştir. Bunun üzerine dikdörtgen ve kare arasındaki ilişki sorulduğunda *"Yani az önce dediğim gibi sorudaki şartlar ikisi için de geçerli. Çünkü tanımlarını yapınca öyle yapmıştık. Karede bütün kenarları eşit, diğerinde bir uzun kenar bir kısa kenar var. Ama açılar ikisinde de 90^o."* açıklamasını yapmıştır. Görüldüğü gibi özellikle "*tanımlarını yapınca böyle yapmıştık.*" cümlesi Mehmet'in otoriter doğrulama yaparak çözümünün doğruluğuna ikna olduğunu göstermektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Mehmet'in önermede kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğretmen kare ve dikdörtgenin tanımını ve kare ile dikdörtgen arasındaki ilişkiyi sorduğunda Mehmet bu dörtgenlerin harici tanımını yaparak *"Karede bütün kenarları eşit, diğerinde bir uzun kenar bir kısa kenar var. Ama açılar ikisinde de 90^o"* olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin Bahri'nin çözümünde olduğu gibi bu dörtgenleri birbirleriyle ilişkilendirmeden tek tek özelliklerini belirterek tanımlaması, önceden bildiklerini mantıksal yapı içinde düzenleyerek, kare ve dikdörtgen arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişkiye dönüştüremediğini, önceden öğrendiği dikdörtgen prototipi ile kareyi örtüştüremediğini göstermektedir.

Eylül ise "*Çünkü mesela kare de böyledir. Yani bu yazılanlar kare için de geçerlidir. O yüzden hepsi dikdörtgen olmaz. Kenarları eşit olsa bu kare de olur.*" şeklinde açıklama yapmıştır. Esra ve Elif'in de çok benzer açıklamalar ile otoriter doğrulama yaptıkları belirlenmiştir.

Tümdengelimsel muhakeme yapan tek öğrenci olan Yağız'ın Görsel 4.25'te sunulduğu gibi Önerme 2f'de bir açının 90^o olması ve karşılıklı kenarların paralel olması durumundan diğer açıların da 90^o olmasına, ayrıca paralellikten karşılıklı kenar uzunluklarının da eşit olmasına ulaştığı görülmektedir. Öğrenci tanımları, özellikleri tümdengelimli bir sistem içinde organize etmiştir. Yağız'ın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

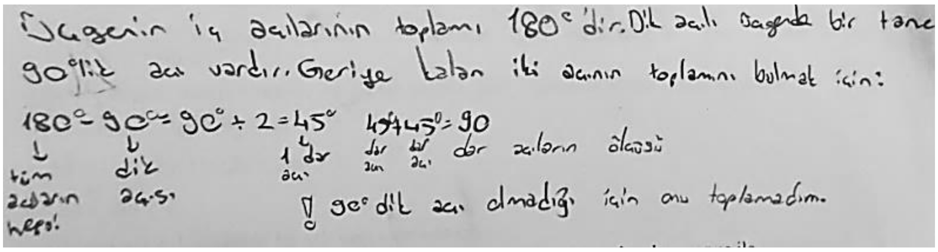


Görsel 4.25. *Yağız'ın ön klinik görüşmede Önerme 2f'de çözümü*

> **Yağız:** Ben buna her zaman doğru dedim.
> **A:** Neden?
> **Yağız:** Çünkü burası 90^o ise karşı taraf paralel olduğu için o da 90^o olur. Mesela paralelkenarda karşılıklı kenarlar paraleldir ancak bir açısı 90^o olmayabilir. Karşılıklı kenarlar paralelse karşılıklı kenar uzunlukları da eşittir. Yani o yüzden her zaman dikdörtgendir. Kare de olabilir zaten kare de özel bir dikdörtgendir.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Yağız'ın dikdörtgenin özellikleri bilgisine dayalı gerekçelendirme yaptığı, bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaştığı ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlediği görülmüştür. Yağız'ın karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90^o olan bütün dörtgenlerin dikdörtgen olduğunun doğruluğuna yaptığı kanıt sayesinde ikna olduğu görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencinin karenin de bir dikdörtgen olduğunu bildiği görülmektedir. Ayrıca öğrencinin paralellik-açı ilişkisi, paralelkenar, dikdörtgen, kare tanımı gibi daha önce öğrendiği birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandığı ve varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi Problem 3'te 6 öğrenciden 3'ünün (Elif, Esra ve Yağız) tümevarımsal muhakeme, diğer 3'ünün (Bahri, Eylül ve Mehmet) ise tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenmiştir. Tümevarımsal muhakeme yapan öğrencilerin tamamının ikizkenar dik üçgen özel örneği üzerinden deneysel doğrulama yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden biri olan Esra Görsel 4.26.'da sunulduğu gibi ikizkenar dik üçgende dik açının 90^{o} ve bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180^{o} olduğu ön bilgisinden hareket etmiş, kalan 90^{o}'lik açıyı 2'ye bölerek her bir iç açının 45^{o} olduğunu göstermiştir. Sonrasında 45^{o} ile 45^{o}'yi toplayarak bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamının 90^{o} olduğunu belirtmiştir. Esra'nın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.26. *Esra'nın ön klinik görüşmede Problem 3'te çözümü*

A: Tam olarak ne yaptığını açıklar mısın?
Esra: Üçgenin dik olan açısı 90^{o}, iç açıların toplamı 180^{0}, çıkardım 90^{0} kaldı. Sonra bunu 2'ye böldüm. 45^{o} çıktı. İkisinin toplamı dediği için 45'le 45'i toplarız 90^{o} çıkar.
A: Tamam şimdi anlamaya çalışıyorum. Önce 180'den 90'ı çıkardın 90 kaldı. Sonra neden bunu 2'ye böldün?
Esra: İşte o iki açının ne olduğunu bulmak için. Onlar da 45^{o} çıktı. Sonra 45'le 45'i toplayınca 90 oldu. O yüzden dik üçgende kalan iki açının toplamı 90^{o} dedim.
A: Peki sence neden bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamı 90^{o} olur?
Esra: Çünkü hocam 45'le 45'i topladım isterseniz 2'yle de çarparak düşünebiliriz. 45'le 2'yi çarpınca 90 çıkar. O yüzden.
A: Tamam peki senin yaptığın ikizkenar üçgende 90 çıktı ya tüm ikizkenar dik üçgenlerde böyle olur mu? Nasıl emin olabilirsin?
Esra: Olur bence birinde oldu, diğerlerinde de aynı olur. Ben bunu hesaplaması kolay diye yaptım. Başka dik üçgenler versem mesela 60 olsa bir iç açısı diğer 30 olsa yine aynısı olur.

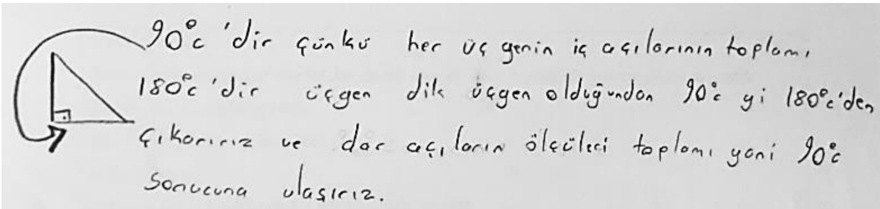
Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Esra, ikizkenar dik üçgen özel örneğini kullanarak bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamının 90^o olduğu varsayımını deneysel doğrulamıştır. Öğrencinin yaptığı deneysel doğrulama sayesinde bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamının 90^o olduğu varsayımının doğruluğuna ikna olduğu görülmüştür. Kanıt burada d*oğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Problem 3'te benzer çözümleri Elif ve Yağız da yapmıştır. Elif *"Öyle olur çünkü 45'le 45'in toplamı 90 olur. 180'den 90 çıkınca geriye 90 kalır."* şeklinde ikizkenar üçgen özel örneği üzerinden açıklama yapmış, başka dik açılı üçgenlerde de deneyebileceğini hepsinde sonucun 90^o çıkacağını belirtmiştir. Benzer çözümü yapan Yağız'a 90^o'yi 2'ye bölme nedeni sorulduğunda öğrenci aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

…
Yağız: Çünkü iki açı var.
A: Neden bu iki açının eşit olduğunu düşündün.
Yağız: Kolay olur diye 45-45 dedim. Sonra iki 45'i toplayınca 90 olur.
A: Neden bir dik üçgende dar açıların toplamı 90^o olur sence?
Yağız: Çünkü önce 180'den 90'çıkarıyoruz. Sonra 2'ye bölüp tekrar toplayınca sonuç 90 çıkıyor.
A: Bütün dik üçgenler için geçerli olduğunu düşünüyor musun?
Yağız: Düşünüyorum hocam. Başka örneklerde de denesek aynı sonuç çıkar.

Yukarıdaki alıntılardan görüldüğü gibi Elif ve Yağız'ın yaptıkları deneysel doğrulama sayesinde bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamının 90^o olduğu varsayımının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada d*oğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Esra, Elif ve Yağız'ın hem problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını hem de kanıta yükledikleri anlamı ortaya çıkarmıştır. Öğrenciler dik üçgende dik açının 90^o ve bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180^o olduğu ön bilgilerine sahipler; ancak bir dik üçgende dar açıların toplamını genel bir dik üçgen üzerinden değil, özel bir dik üçgen olan ikizkenar dik üçgen aracılığıyla göstermeyi tercih etmişlerdir. Öğrenciler özel bir dik üçgenle doğrulama yapmanın tüm dik üçgenler için yeterli olduğunu düşünmektedirler. Bununla birlikte bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamının neden 90^{o} olduğu sorulduğunda öğrencilerin kullandıkları örneğin sonucuna dayalı açıklama yaptıkları, neden her zaman 90^{o} olduğunu gerekçelendiremedikleri görülmüştür.

Bununla birlikte Problem 3'te öğrencilerden 3'ünün (Bahri, Eylül ve Mehmet) tümdengelimsel muhakeme yaptıkları görülmüştür. Öğrenciler tümdengelimsel muhakeme yaparken sözel ifadelerini şekille desteklemişler; ancak cebirsel temsil kullanmamışlardır. Örneğin Mehmet Görsel 4.27.'de sunulduğu gibi dik açının 90^{o} ve bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180^{o} olduğu ön bilgisinden hareket ederek, dar açıların ölçüleriyle dik açının ölçüsünün toplamının 180^{o} olabilmesi için dar açıların ölçüleri toplamının 90^{o} olduğu genellemesine ulaşmıştır. Bu nedenle Mehmet'in bu problemde belirli bir örnek kullanmadan tümdengelim bir argüman yoluyla doğrulama yaptığı söylenebilir. Nitekim Mehmet'in yanıtı doğru kabul edilmiştir. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.27. *Mehmet'in ön klinik görüşmede Problem 3'te çözümü*

…
Mehmet: Şöyle yaptım her üçgenin açılarının toplamı 180^{o}'dir. Üçgen dik üçgen olduğu için 180'den 90'ı çıkarırız geriye 90^{o} kalır. Bu da diğer dar açıların toplamı olur. Mesela şekille de gösterdim burası zaten 90 olur. Yani bütün dik üçgenlerde böyle olması gerekir. Bütün dik üçgenlerde geriye kalan iki dar açının toplamı da 90^{o}olur.

Benzer şekilde Bahri ve Eylül de belirli örneklerden bağımsız tümdengelimsel muhakeme yapmışlar ve tümdengelimsel muhakeme yaparken şekille desteklenmiş sözel açıklamalardan yararlanmışlardır. Mehmet, Eylül ve Bahri'nin yaptıkları kanıt sayesinde bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamının 90^{o} olduğu varsayımının doğru olduğun ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Mehmet, Eylül ve Bahri'nin problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ve nasıl ilişkilendirdiğini ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, dik üçgenin özellikleri gibi daha önce öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandıkları ve varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

4.1.2. Ön testte aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermelere ilişkin bulgular

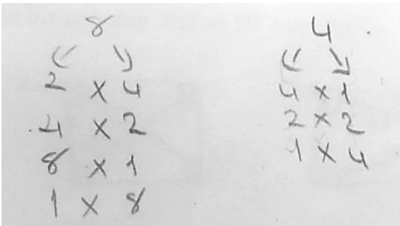
Önerme 2a, (*Ö.2a: Bir sayı başka bir sayıdan daha büyükse, büyük olan sayı her zaman daha fazla çarpana sahiptir.*), Önerme 2c, (*Ö.2c: Her sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir.*) ve Önerme 2d, (*Ö. 2d: İkinin katı olan bir sayı her zaman 4'ün de bir katıdır.*) önermeleri öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerdir. Öğrencilerin bu önermelerin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu önermeler için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.4.'te verilmiştir:

Tablo 4.4. *Öğrencilerin ön test Önerme 2a, Önerme 2c ve Önerme 2d'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	**Ö.2a** % 61,2 (19 kişi)	
		Ö.2c % 64,5 (20 kişi)	
		Ö.2d % 90,3 (28 kişi)	
	Önermeyi Anlamama **Ö.2a** % 38,7 (12 kişi) **Ö.2c** % 35,4 (11 kişi) **Ö.2d** % 9,6 (3 kişi)	Önermeyi Yanıtsız Bırakma	**Ö.2a** % 12,9 (4 kişi) **Ö.2c** % 25,8 (8 kişi) **Ö.2d** % 6,4 (2 kişi)
		Önermeyi Tekrar Yazma	**Ö.2a** % 25,8 (8 kişi) **Ö.2c** % 9,6 (3 kişi) **Ö.2d** % 3,2 (1 kişi)
Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	**Ö.2a** % 61,2 (19 kişi)	
		Ö.2c % 64,5 (20 kişi)	
		Ö.2d % 90,3 (28 kişi)	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama **Ö.2a** % 12,9 (4kişi) **Ö.2c** % 6,4 (2 kişi) **Ö.2d** % 16,1 (5 kişi)	Yalnızca Önermeyi Doğrulayan Örnek Verme	**Ö.2a** % 2,9 (4 kişi) **Ö.2c** % 6,4 (2 kişi) **Ö.2d** % 16,1(5 kişi)
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme **Ö.2a** % 16,1 (5kişi) **Ö.2c** % 38,7 (12 kişi) **Ö.2d** % 22,5 (7 kişi)	Çarpan – bölen bilgisi eksikliği	**Ö.2a** % 16,1 (5 kişi) **Ö.2d** % 22,5 (7 kişi)
		Ardışık sayı bilgisi eksikliği	**Ö.2c** % 38,7 (12 kişi)
	Tümdengelimsel Muhakeme **Ö.2a** % 32,2 (10 kişi) **Ö.2c** % 19,3 (6 kişi) **Ö.2d** % 51,6 (16 kişi)	Yalnızca Aksine Örnek Verme	**Ö.2a** % 16,1 (5 kişi) **Ö.2c** % 3,2 (1 kişi) **Ö.2d** % 9,6 (3 kişi)
		Hem Doğrulayan Örnek, Hem de Aksine Örnek Verme	**Ö.2a** % 16,1 (5 kişi) **Ö.2c** % 16,1 (5 kişi) **Ö.2d** % 41,9 (13 kişi)

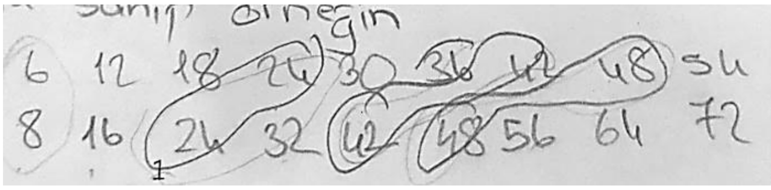
Tablo 4.4. incelendiğinde önermenin yapısını anlamayan öğrenciler için "önermeyi yanıtsız bırakma" ya da "önermeyi tekrar yazma" olmak üzere iki farklı durumun olduğu görülürken, önermeyi anlayan öğrencilerin "aritmetiksel strateji" kullanarak önermeleri çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte bu öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde "deneysel doğrulama", "mantıksal olmayan gerekçelendirme" ve "tümdengelimsel muhakeme" olmak üzere üç farklı durumun olduğu görülmektedir. Aksine örnek vererek kanıt yapma önermeleri genel olarak değerlendirildiğinde, bu önermelerde kanıt yapan öğrenci sayısının diğer problemlere ya da önermelere göre daha fazla olduğu, ayrıca öğrencilerin bu önermelerin her zaman doğru olmadığını göstermek için aksine örnek vermenin yanında önermeyi doğrulayan örnekler de kullanma eğiliminde oldukları söylenebilir.

Tablo 4.4.'te görüldüğü gibi Önerme 2a'da öğrencilerin yaklaşık % 38'inin önermeyi anlamadığı, bu öğrencilerin önemli bir kısmının önermeyi tekrar yazdıkları görülmektedir. Önermeyi anlayan öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullanarak önermeyi çözmeye çalıştıkları görülmektedir. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 4’ünün deneysel doğrulama yaptıkları ve yalnızca önermeyi doğrulayan örnek vererek önermenin her zaman doğru olduğunu kabul ettikleri belirlenmiştir. Bu öğrenciler aksine örnek verme eğiliminde bulunmamış, denedikleri bir örneğin önermeyi doğrulamasıyla yetinerek önermenin her zaman doğru olduğunu savunmuşlardır. Örneğin Büşra, 8 ve 4’ün çarpan sayılarını karşılaştırarak büyük olan sayının her zaman daha fazla çarpana sahip olduğu gerekçesini sunmuş, bu nedenle önermenin her zaman doğru olduğunu belirterek Görsel 4.28’de sunulan çözümü yapmıştır:



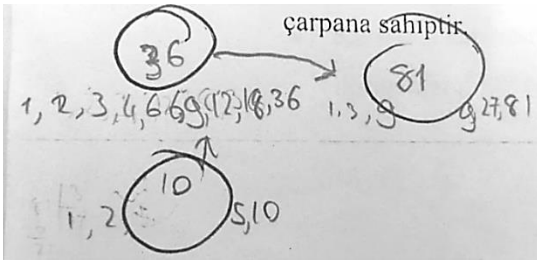
Görsel 4.28. *Büşra’nın ön test Önerme 2a’da çözümü*

Önerme 2a’da, 5 öğrencinin çarpan-bölen bilgisi eksikliğinden kaynaklı, mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları görülmektedir. Bu öğrencilerden biri olan Ceren’in Görsel 4.29.’da sunulduğu gibi 6 ve 8’in çarpanları yerine ortak katlarını aldığı ve ortak katların sayısının da eşit olduğu şeklinde gerekçelendirme yaptığı görülmektedir:



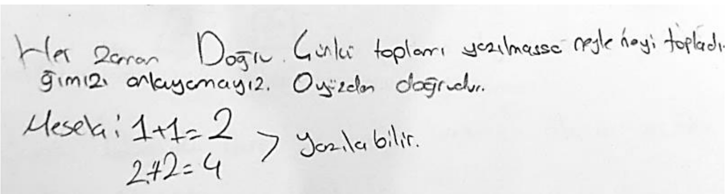
Görsel 4.29. *Ceren’in ön test Önerme 2a’da çözümü*

Önerme 2a’da öğrencilerin yaklaşık % 32’sinin ise tümdengelimsel muhakeme yaptıkları görülmektedir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin yarısının yalnızca aksine örnek vererek kanıt yaptıkları, yarısının ise hem aksine örnek verdiği hem de önermeyi doğrulayan örnek vererek önermenin her zaman doğru olmadığını gösterdikleri görülmektedir. Örneğin Bahri, Görsel 4.30.'da sunulduğu gibi 36 ve 10 ile 36 ve 81'in çarpan sayılarını karşılaştırmıştır. 36 ve 10'un çarpan sayılarını karşılaştırdığında 36'nın daha fazla çarpana sahip olduğunu belirtmiştir. Öğrenci 36 ve 81'in çarpan sayılarını karşılaştırdığında 81'in 36'dan büyük olmasına karşın 36'nın daha fazla çarpanı olduğunu göstererek bu önermenin her zaman doğru olmadığını yani yanlış olduğunu belirtmiştir:



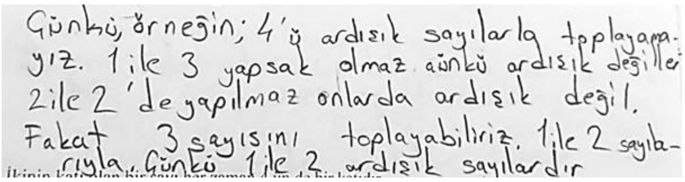
Görsel 4.30. *Bahri'nin ön test Önerme 2a'da çözümü*

Önerme 2c incelendiğinde öğrencilerin yaklaşık % 35'inin önermeyi anlamadıkları görülmektedir. Önermeyi anlayan öğrenciler aritmetiksel strateji kullanırken, bu öğrencilerin büyük çoğunluğunun ardışık sayı bilgisi eksikliğinden kaynaklı, mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları görülmektedir. Mantıksal olmayan gerekçelendirme yapan öğrencilerden biri olan Melisa'nın Görsel 4.31'de sunulduğu gibi ardışık sayılar yerine 1 ve 1 ile 2 ve 2'yi örnek olarak verdiği görülmektedir:



Görsel 4.31. *Melisa'nın ön test Önerme 2c'de çözümü*

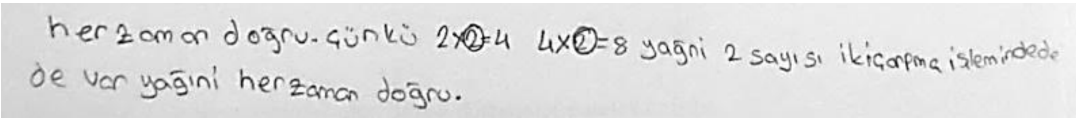
Önerme 2c'de sadece 6 öğrencinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı, bunlardan 5'inin hem doğrulayan örnek hem de aksine örnek verdiği görülmektedir. Bu öğrencilerden Eylül Görsel 4.32'de sunulduğu gibi 4 sayısının ardışık sayıların toplamı şeklinde yazılamayacağını; ancak 3 sayısının yazılabileceğini göstererek önermenin her zaman doğru olmadığını yani yanlış olduğunu belirtmiştir:



Günkü, örneğin; 4'ü ardısık sayılarla toplayama-
yız. 1 ile 3 yapsak olmaz. günkü ardısık değiller
2 ile 2'de yapılmaz onlarda ardısık değil.
Fakat 3 sayısını toplayabiliriz. 1 ile 2 sayıla-
rıyla. Günkü 1 ile 2 ardısık sayılardır

Görsel 4.32. *Eylül'ün ön test Önerme 2c'de çözümü*

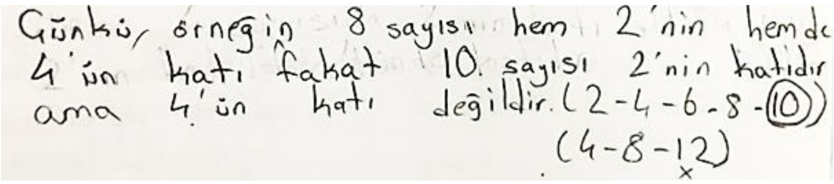
Önerme 2d incelendiğinde öğrencilerin yaklaşık % 90'ının önermeyi anladığı ve bu öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullandığı görülmektedir. Bu öğrencilerden 7'sinin çarpan-bölen bilgisi eksikliğinden kaynaklı, mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Mert 4'ün ve 2'nin 2 katını alarak her ikisinde de 2 çarpanının ortak olduğunu böylece önermenin her zaman doğru olduğunu savunmuştur. Mert'in çözümü Görsel 4.33.'te sunulmuştur:



her zaman doğru. günkü 2x2=4 4x2=8 yagni 2 sayısı iki çarpma isleminde de
de var yagini herzaman doğru.

Görsel 4.33. *Mert'in ön test Önerme 2d'de çözümü*

Önerme 2d'de tüm öğrencilerin yaklaşık % 52'sinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı ve bunların büyük bir çoğunluğunun hem doğrulayan hem de aksine örnek vererek önermenin her zaman doğru olmadığını kanıtladıkları yani önermenin yanlış olduğunu belirttikleri görülmüştür. Örneğin Eylül Görsel 4.34.'te sunulduğu gibi 8 sayısının hem 2'nin hem de 4'ün katı olduğunu; ancak 10 sayısının sadece 2'nin katı olduğunu, 4'ün katı olmadığını belirterek önermenin her zaman doğru olmadığını belirtmiştir:



Günkü, örneğin 8 sayısı hem 2'nin hem de
4'ün katı fakat 10 sayısı 2'nin katıdır
ama 4'ün katı değildir. (2-4-6-8-10)
(4-8-12)

Görsel 4.34. *Eylül'ün ön test Önerme 2d'de çözümü*

4.1.3. Ön testte tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önermeye ilişkin bulgular

Önerme 2.e (*Ö. 2e: A = {1,2,3,4,5} ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise,* n^2*-n + 11 sayısı her zaman bir asal sayıdır.*) öğrencilerin tüketerek kanıt yapmaları gereken bir önermedir. Öğrencilerin bu önermenin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu önerme için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.5.'te sunulmuştur:

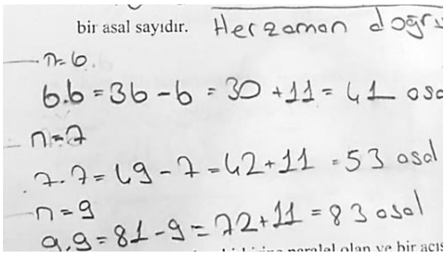
Tablo 4.5. *Öğrencilerin ön test Önerme 2e'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	% 32,2 (10 kişi)	
	Önermeyi Anlamama % 67,7 (21 kişi)	Önermeyi Yanıtsız Bırakma	% 29 (9 kişi)
		Önermeyi Tekrar Yazma	% 6,4 (2 kişi)
		Verilerin Dışına Çıkma	% 16,1 (5 kişi)
		Verileri Eksik Kullanma	% 3,2 (1 kişi)
		Değişkeni Hatalı Kullanma	% 6,4 (2 kişi)
		n^2'yi Dikkate Almama	% 6,4 (2 kişi)
Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji % 32,2 (10 kişi)	İşlem Hatası Yapma	% 6,4 (2 kişi)
		İşlem Hatası Yapmama	% 25,8 (8 kişi)
Muhakeme	Deneysel Doğrulama % 9,6 (3 kişi)	Bir Örnekle Deneme	% 3,2 (1 kişi)
		Birden Fazla Örnekle Deneme	% 6,4 (2 kişi)
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme	Asal sayı bilgisi eksikliği	% 9,6 (3 kişi)
	Tümdengelimsel muhakeme	Tüketerek Kanıt Yapma	% 12,9 (4 kişi)

Tablo 4.5. incelendiğinde önermeyi anlamayan öğrenciler için "önermeyi yanıtsız bırakma", "önermeyi tekrar yazma", "verilerin dışına çıkma", "verileri eksik kullanma", "değişkeni hatalı kullanma", "n^2'yi dikkate almama" olmak üzere altı farklı durumun olduğu görülmektedir. Önermeyi anlayan öğrencilerin "aritmetiksel strateji" kullandıkları görülürken muhakemelerinde "deneysel doğrulama", "mantıksal olmayan gerekçelendirme" ve "tümdengelimsel muhakeme" olmak üzere üç farklı durumun olduğu belirlenmiştir. Önerme 2.e genel olarak değerlendirildiğinde, bu önerme

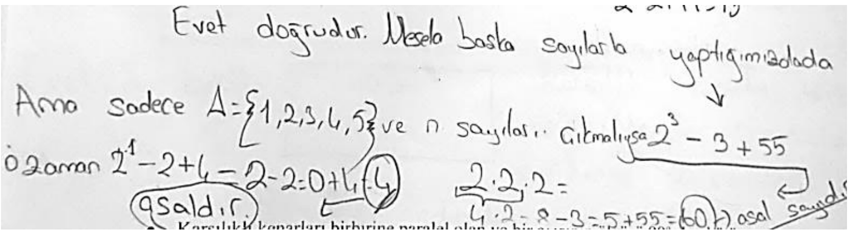
öğrencilere sunulan problemler/önermeler içinde önermeyi anlamama yüzdesinin en yüksek olduğu önermedir. Ayrıca bu önermede tüketerek kanıt yapan öğrenci yüzdesinin oldukça düşük olduğu söylenebilir.

Tablo 4.5.’te görüldüğü gibi öğrencilerin yaklaşık % 68’inin önermeyi anlamadığı belirlenmiştir. Önermeyi anlamayan öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ise önermeyi yanıtsız bıraktıkları belirlenirken bu öğrencilerden 5’inin problemdeki verilerin dışına çıktığı görülmektedir. Örneğin Elif verilen kümenin elemanlarının dışına çıkarak 6, 7 ve 8 sayıları ile verilen önermeyi doğrulamaya çalışmıştır. Elif’in çözümü Görsel 4.35.’te sunulmuştur:



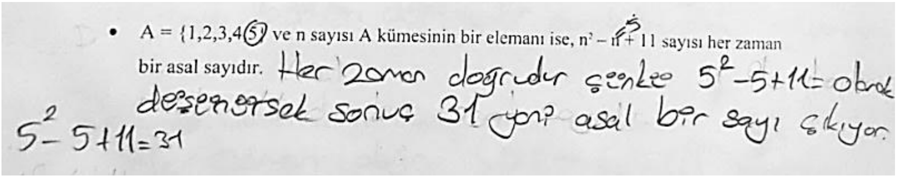
Görsel 4.35. *Elif’in ön test Önerme 2e’de çözümü*

Önermeyi anlamayan öğrencilerden birinin verileri eksik kullandığı, 2’sinin değişkeni hatalı kullandığı, birinin ise önermedeki n^2’yi dikkate almadığı görülmektedir. Bu öğrencilerden Azra n^2 yerine n^1 ve n^3 kullanmış, rastgele işlemler yapmış ve çıkan sonuçları da asal sayı olarak değerlendirmiştir. Azra’nın çözümü Görsel 4.36.’da sunulmuştur:



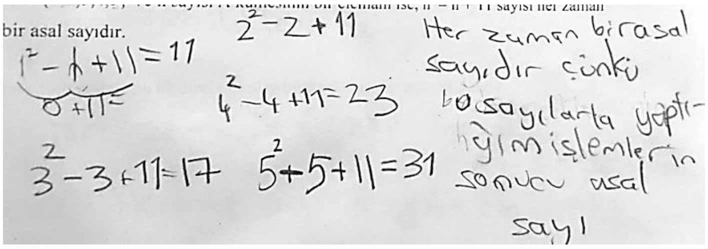
Görsel 4.36. *Azra’nın ön test Önerme 2e’de çözümü*

Önermeyi anlayan öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullandığı görülürken, bu öğrencilerden 2’sinin işlem hatası yaptığı belirlenmiştir. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 3’ünün deneysel doğrulama yaptığı, bu öğrencilerden birinin tek bir örnekle deneyerek genelleme yaptığı görülmektedir. Tek bir örnekle deneme yapan İrem'in kümenin elemanlarından biri olan 5'i seçerek önermeyi doğruladığı ve bu önermenin her zaman doğru olduğunu savunduğu görülmüştür. İrem'in çözümü Görsel 4.37'de sunulmuştur:



Görsel 4.37. *İrem'in ön test Önerme 2e'de çözümü*

Öğrencilerden 3'ünün asal sayı bilgisi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları görülmekte iken öğrencilerden sadece 4'ünün tüketerek kanıt yaptığı belirlenmiştir. Tüketerek kanıt yapan öğrencilerden olan Yağız kümedeki elemanların tamamını kullanarak doğrulama yapmış ve sonuçların asal sayı çıkması üzerine bu önermenin her zaman doğru olduğunu kabul etmiştir. Yağız'ın çözümü Görsel 4.38'de sunulmuştur:



Görsel 4.38. *Yağız'ın ön test Önerme 2e'de çözümü*

4.1.4. Ön testte kanıt değerlendirme problemine ilişkin bulgular

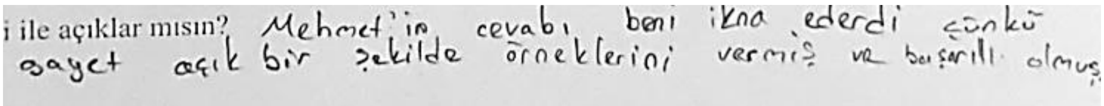
Problem 4 kanıt değerlendirme problemidir. Bu problemde öğrencilerden, verilen önermeye *(Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı her zaman çift sayıdır.)* yönelik sunulan üç farklı argümanı değerlendirmeleri istenmiştir. Bunlardan biri örnek vererek doğrulama yapılan deneysel argüman (Mehmet), bir diğeri görsel anlatım yolu ile sunulan görsel argüman (Buse) ve son olarak da doğrudan kanıtın yapıldığı cebirsel argüman (Cem)'dır. Bu problemde öğrencilere önerme için sunulan argümanlardan hangisinin en ikna edici olduğu sorulmuştur. Öğrencilerin değerlendirmeleri ile yanıtlarını destekledikleri gerekçelerinin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.6.'da sunulmuştur:

Tablo 4.6. *Öğrencilerin ön test Problem 4'te kanıt değerlendirme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Deneysel Argümanı İkna Edici Bulma	Deneysel Argümanın Açıklık, Anlaşılırlık ve Kolaylığına Dayalı Gerekçelendirme	% 51,6 (16 kişi)
Görsel Argümanı İkna Edici Bulma	Görsel Argümanın Açıklık, Anlaşılırlık ve Mantıklı Olmasına Dayalı Gerekçelendirme	% 45,1 (14 kişi)
Cebirsel Argümanı İkna Edici Bulma	Cebirsel Argümanın Genellenebilirliğine Dayalı Gerekçelendirme	% 3,2 (1 kişi)

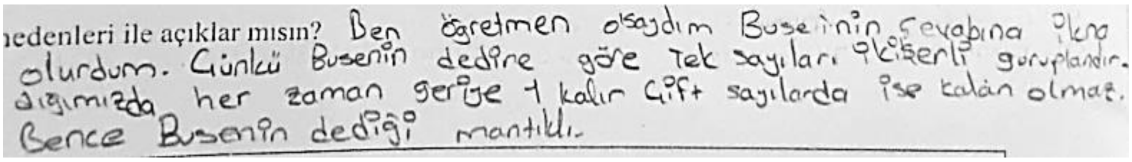
Tablo 4.6.'da görüldüğü gibi "deneysel argümanı ikna edici bulma", "görsel argümanı ikna edici bulma" ve "cebirsel argümanı ikna edici bulma" olmak üzere üç farklı durumun olduğu belirlenmiştir. Bu problem genel olarak değerlendirildiğinde, öğrencilerin kendilerine verilen argümanları değerlendirmelerine ilişkin düşünceleri incelendiğinde, öğrencilerin büyük bir kısmı deneysel argümanı ve görsel argümanı ikna edici bulmuşlardır. Bununla birlikte genel olarak cebirsel argümanın kullanıldığı doğrudan kanıtı ikna edici bulmamış ayrıca bu kanıtın zor, anlaşılmaz olduğunu da belirtmişlerdir.

Problem 4'te öğrencilerin yaklaşık % 52'sinin deneysel argümanı daha ikna edici bulduğu görülmektedir. Bu öğrencilerin değerlendirmeleri incelendiğinde deneysel argümanın daha açık, daha anlaşılır ve daha kolay olduğuna dayalı gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Deneysel argümanı açık ve anlaşılır bulan çoğu öğrencinin de cebirsel argümanların kullanıldığı doğrudan kanıtı karışık ve mantıksız olarak ifade ettikleri görülmüştür. Bahri'nin açıklaması örnek olarak Görsel 4.39.'da sunulmuştur:


i ile açıklar mısın? Mehmet'in cevabı beni ikna ederdi çünkü
gayet açık bir şekilde örneklerini vermiş ve başarılı olmuş

Görsel 4.39. *Bahri'nin ön test Problem 4'te çözümü*

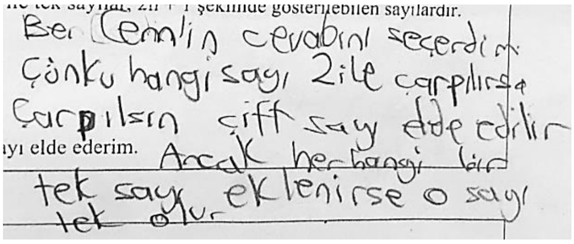
Öğrencilerin yaklaşık % 45'inin ise görsel argümanı daha ikna edici bulduğu görülürken değerlendirmeleri incelendiğinde görsel argümanın daha açık, daha anlaşılır ve daha mantıklı olmasına dayalı gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden Esra'nın açıklaması Görsel 4.40.'ta sunulmuştur:



ıedenleri ile açıklar mısın? Ben öğretmen olsaydım Busenin cevabına ikna olurdum. Çünkü Busenin dediğine göre tek sayıları ikişerli gruplandırdığımızda her zaman geriye 1 kalır çift sayılarda ise kalan olmaz. Bence Busenin dediği mantıklı.

Görsel 4.40. *Esra'nın ön test Problem 4'te çözümü*

Öğrencilerden sadece birinin cebirsel argümanı genellenebilir bir yargı içerdiği için ikna edici bulduğu görülmüştür. Yağız aşağıda görüldüğü gibi doğrudan kanıtta verilen 2(n+m)+1 cebirsel gösterimini *"Hangi sayı 2 ile çarpılırsa çarpılsın çift sayı elde edilir; ancak bir tek sayı eklenirse o sayı tek olur."* şeklinde yorumlamıştır. Yağız'ın açıklaması Görsel 4.41.'de sunulmuştur:



... 2n+1 şeklinde gösterilebilen sayılardır.
Ben Cemilin cevabını seçerdim. Çünkü hangi sayı 2ile çarpılırsa çarpılsın çift sayı elde edilir
ıyı elde ederim.
Ancak herhangi bir tek sayı eklenirse o sayı tek olur

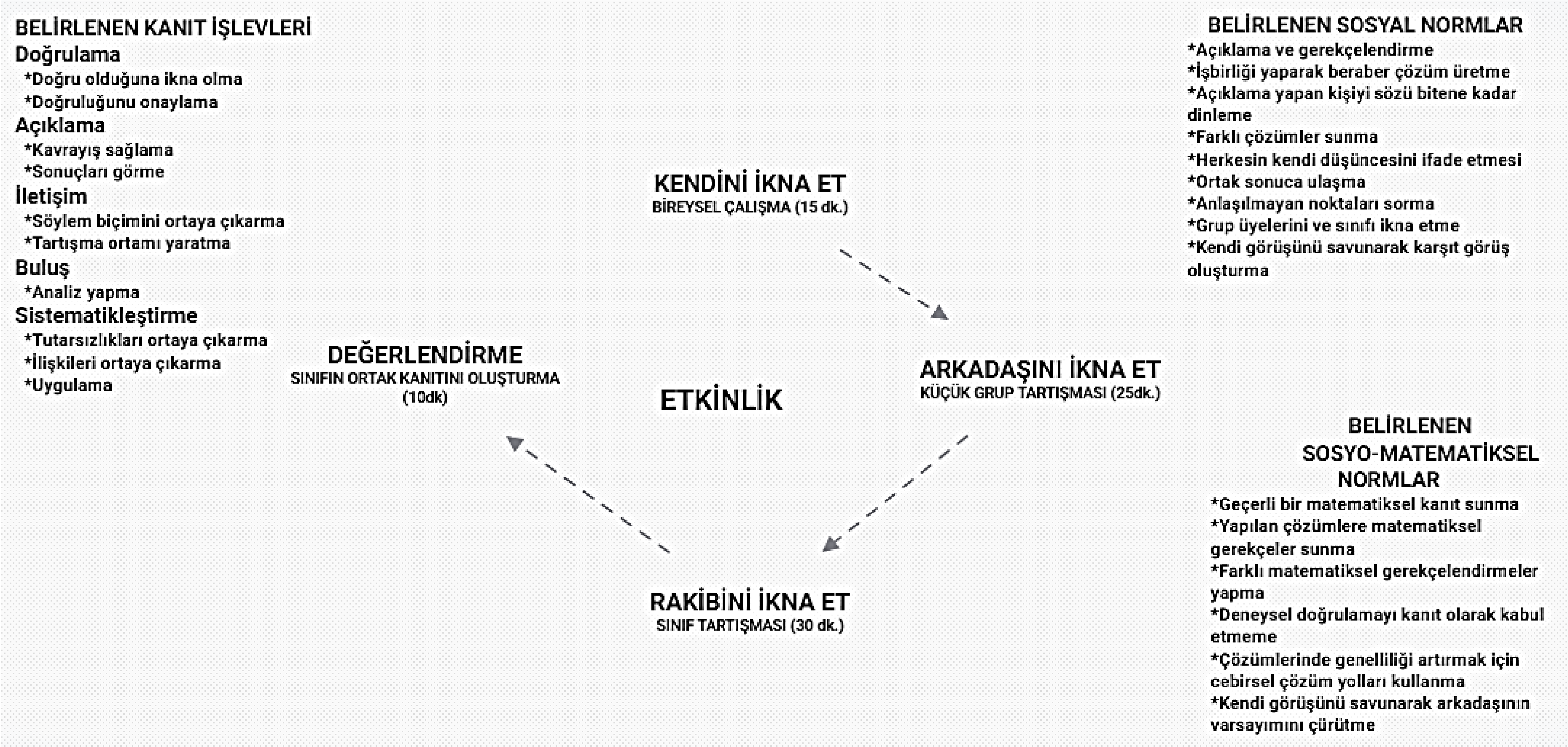
Görsel 4.41. *Yağız'ın ön test Problem 4'te çözümü*

Bir bütün olarak ön test ve ön klinik görüşmede verilen yanıtlar dikkate alındığında, öğrencilerin genel anlamda örnek vererek deneysel doğrulama yapma eğiliminde oldukları, cebirsel strateji kullanmayı tercih etmedikleri, bunun yerine çözümlerinde aritmetiksel stratejileri kullandıkları görülmektedir. Bununla birlikte öğrenciler, doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı probleminde ve önermesinde kanıt yapamamışlardır. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri probleminde ve önermelerinde sayıları az da olsa tümdengelimsel muhakeme yaparak kanıt yapan öğrencilerin olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerde diğer problem/önermelere göre daha başarılı oldukları söylenebilir. Tüketerek kanıt yapmaları gereken önermede ise kanıt yapan öğrenci sayısının çok az olduğu saptanmıştır. Kanıt değerlendirme probleminde öğrenciler deneysel argümanların kullanıldığı örnek vererek doğrulamayı ikna edici olarak seçme eğilimini sürdürürken cebirsel argümanların kullanıldığı doğrudan kanıtı ise genel olarak karışık ve zor olarak nitelendirmişler ve bu çözümü ikna edici olarak değerlendirmemişlerdir.

Ön test ve ön klinik görüşmelerin ardından araştırmanın öğretim uygulamaları bölümüne geçilmiştir.

4.2. Öğretim Uygulamalarına İlişkin Bulgular

Öğretim uygulamalarının başında sınıf *Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller, Çalışkan Arılar* ve *Starlar* olmak üzere dört küçük gruba ayrılmış ve küçük gruplardan Turunçgiller ile Efsanevi Matematikçiler odak gruplar olarak belirlenmiştir. Bu grupların her birinde üçer odak öğrenci bulunmaktadır. Öğretim uygulamalarında kullanılan KARİDE modelinin aşamaları ile öğretim sürecinin tamamında ortaya çıkan kanıt işlevleri, sosyal ve sosyo-matematiksel normlar Şekil 4.3.'te gösterilmiştir:



Şekil 4.3. *KARİDE modelinin aşamaları ile öğretim sürecinde ortaya çıkan kanıt işlevleri, sosyal ve sosyo-matematiksel normlar*

4.2.1. İlk altı haftanın öğretim uygulamalarına ilişkin bulgular

Bu bölümde toplam on iki hafta süren öğretim uygulamalarının ilk altı haftasına ilişkin bulgular sunulmuştur.

4.2.1.1. Birinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

Birinci hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.7.'de görüldüğü gibi öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken bir problem sorulmuştur. Öğretimin sonunda küçük gruplardan Starlar ve Turunçgiller gruplarının kanıt yapamadığı, Çalışkan Arılar grubunun görsel kanıt yaptığı, Efsanevi Matematikçiler grubunun ise doğrudan kanıt yaptığı belirlenmiştir.

Tablo 4.7. *Birinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

<table>
<tr><th colspan="2">Etkinlik</th></tr>
<tr><td colspan="2">* Bir tam sayıya bu sayıdan iki önceki tam sayı ve bu sayıdan iki sonraki tam sayı ekleniyor. Bu toplam hakkında ne söylersiniz?</td></tr>
<tr><th colspan="2">Etkinliğin Odağı</th></tr>
<tr><td colspan="2">*Matematiksel varsayım geliştirme
*Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme
• Cebirsel temsil kullanarak doğrudan kanıt yapma
• Görsel temsil kullanarak görsel kanıt yapma</td></tr>
<tr><th colspan="2">Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma</th></tr>
<tr><td colspan="2">* Problemi analiz etmek için rastgele birden fazla örnekten yararlanma
* Bir tam sayıya bu sayıdan iki önceki tam sayı ve bu sayıdan iki sonraki tam sayı eklendiğinde toplamın ilk sayının 3 katı olduğu varsayımında bulunma</td></tr>
<tr><th>Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması</th><th>Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi</th></tr>
<tr><td>*Tam sayı ve 3'e bölünebilme bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup)
*Önce rastgele, sonra stratejik örneklerden yararlanarak sonucun ilk sayının üç katı olduğu varsayımında bulunma (Her iki odak grup)
*Deneysel doğrulama yapma (Turunçgiller grubu)
*Cebirsel temsil kullanarak doğrudan kanıt yapma (Efsanevi Matematikçiler grubu)</td><td>*Arkadaşlarını stratejik örnekler seçmeye teşvik etme (Her iki odak grup)
*Varsayımın doğruluğunun gerekçelendirilmesi gerektiğinin farkında olma (Turunçgiller grubu)
*Örnek vererek geçerli kanıt yapamadıklarının farkında olma (Turunçgiller grubu)
*Arkadaşlarını cebirsel temsil kullanmaya teşvik etme (Efsanevi Matematikçiler grubu)</td></tr>
</table>

Tablo 4.7. (Devam) *Birinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

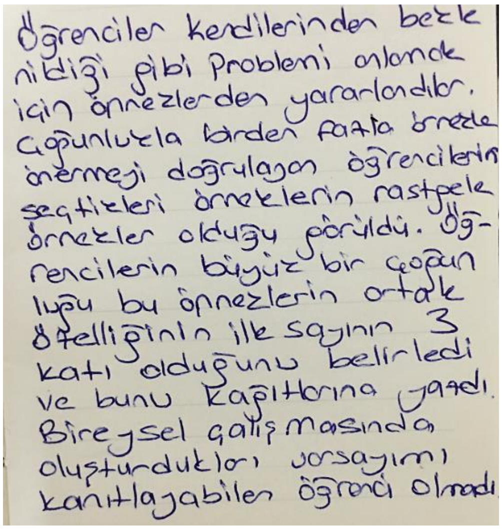
Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları
*Tam sayı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) *Genelleyici örnekler kullanarak görsel kanıt yapma (Çalışkan Arılar grubu) *Cebirsel temsil kullanarak doğrudan kanıt yapma (Çalışkan Arılar ve Efsanevi Matematikçiler grubu) *Deneysel doğrulama yapma (Turunçgiller grubu ve Starlar grubu)	*Genelleyici örneği ikna edici bulmama *Deneysel doğrulamayı geçerli bir kanıt olarak kabul etmeme *Aksine örnek vererek iddiayı çürütme *Cebirsel temsil kullanılarak yapılan doğrudan kanıtı geçerli ve ikna edici kanıt olarak kabul etme	*Varsayımın farklı bir şekilde gerekçelendirilmesini isteme

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin, teoremlerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*Tutarsızlıkları ortaya çıkarma

Öğretmenin Pekiştirmeye Çalıştığı Sosyal Normlar	Öğretmenin Pekiştirmeye Çalıştığı Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Farklı çözümler sunma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne yazdığı bireysel çalışmaların değerlendirmesi Görsel 4.42.'de sunulmuştur:


Öğrenciler kendilerinden bek-
nildiği gibi Problemi anlamak
için örneklerden yararlandılar.
Çoğunlukla birden fazla örnekle
önermeyi doğrulayan öğrencilerin
seçtikleri örneklerin rastgele
örnekler olduğu görüldü. Öğ-
rencilerin büyük bir çoğun
luğu bu örneklerin ortak
özelliğinin ilk sayının 3
katı olduğunu belirledi
ve bunu kağıtlarına yazdı.
Bireysel çalışmasında
oluşturdukları varsayımı
kanıtlayabilen öğrenci olmadı

Görsel 4.42. *Birinci hafta bireysel çalışmaların değerlendirilmesine ilişkin öğretmenin günlüğü*

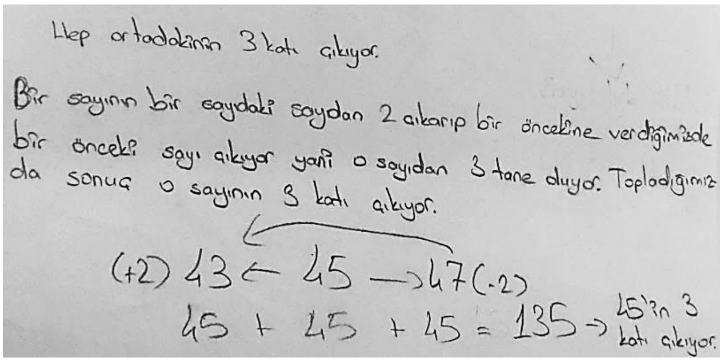
Öğretmenin günlüğünde de belirttiği gibi öğrenciler problemi analiz etmek için rastgele örnekler seçerek önermeyi doğrulamışlar ve bu örneklerin ortak özelliğinin bu üç sayının toplamının ilk sayının üç katı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında öğretmen gruplar arasında dolaşarak öğrencileri her bir grup üyesinin çözümünü arkadaşlarıyla paylaşması, fikirlerini nedenleriyle beraber açıklaması, iş birliği yapmaları, anlamadıkları noktaları birbirlerine sormaları, diğer grup üyelerinin arkadaşlarını sözü bitene kadar dinlemeleri, birbirlerini ikna ederek ortak çözüm bulmaları konusunda cesaretlendirmiştir. Aynı zamanda öğretmen deneysel doğrulamayı geçerli kanıt yöntemi olarak kabul etmemeleri, matematiksel gerekçelendirmeler yapmaları, farklı çözümler düşünmelerini de vurgulayarak normları pekiştirmeye çalışmıştır. Öğretmen notlarında da belirttiği gibi bu aşamada grup üyelerinin bireysel çalışmalarında problemi analiz etmek için yararlandıkları örnekleri grupla paylaştıkları ve sonucun ilk sayının üç katı olduğunu iddia ettikleri görülmüştür. Bu örneklerin rastgele örnekler olduğu görülmektedir. Öğrencilerin daha sonra iki basamaklı sayılar, sıfır, negatif sayılar, tek-çift sayılar gibi stratejik örneklerle deneme yaparak varsayımlarını güçlendirdikleri saptanmıştır. Odak grupların seçtikleri örneklerin tamamında sonuç ilk sayının üç katı çıktığı için iddiaları varsayıma dönüşmüştür. Bu aşamadan sonra iki grup arasında farklılıklar söz konusu olmuştur. Turunçgiller grubunun kanıt yapamadığı, Efsanevi Matematikçiler grubunun ise cebirsel temsil kullanarak varsayımlarının doğruluğunu kanıtladıkları görülmüştür.

Turunçgiller grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

> **Öğrenci:** Ahmet başla herkes tek tek söylesin dedi hoca.
> **Öğrenci:** Ben bir sayı yerine 8 aldım, 2 eksiği 6, 2 fazlası 10 oldu topladım 24, yani 8'in 3 katı çıktı.
> **Öğrenci**: Aynen üç katı ben de buldum da. Ama nedenini bulmamız lazım. Yani neden 3 katı çıkıyor hoca nedenleriyle demişti. Sen nasıl yaptın?
> **Öğrenci:** Ben de 3 katı buldum. Mesela 5 aldım. 3 ve 7 ile toplayınca 15 yine 3 katı.
> **Öğrenci:** Hep 3 katı çıkıyor.
> **Öğrenci:** Tamam da bu neden sayılmıyor sen yine bir örnekle gösterdin. Eylül de söylesin. Herkesin tek tek söylemesi gerekiyormuş.
> **Öğrenci**: Ben de örnekle yaptım. Bir basamaklıda 3 katı çıkıyor, iki basamaklıda da üç basamaklıda da.
> **Öğrenci:** Ben 300'le de denedim oluyor.
> **Öğrenci:** Asalla deneyelim. İlk sayı 2 olsa bakalım ne olacak?
> **Öğrenci:** 0 ve 4, toplam 6 çıktı yine 3 katı. Şimdi ortaya attığımız şey 3 katı olması ya onun nedenini bulmamız lazım.
> **Öğrenci:** Durun bence kendimizi çürütecek örnek verelim bari. Var mı?
> **Öğrenci:** -5'i deneyelim, -3, -7, -15 yine oldu.
> **Öğrenci**: Şimdi bence bizim bu şeyimiz doğru yani 3 katı olduğu doğru ama bizim bunu kanıtlamamız gerekiyor. Örnek kanıt sayılmıyor demişti ya hoca bir de sonsuz sayı var.
> **…**
> **Öğrenci:** Biz bulamadık ya. Bence bizi çok çabuk çürütecekler.
> **Öğrenci:** Biz ne diyeceğiz nedenini bulamadık.
> **Öğrenci:** Sadece 3 katı oldu diyeceğiz. Örnekleri vereceğiz ama kabul etmeyecekler.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenciler öğretmenin söylemleriyle birlikte, küçük grup tartışmalarında işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, düşüncelerini paylaşmaları için kendi grup arkadaşlarını teşvik etmişlerdir. Öğrenciler grup tartışması boyunca birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normlarının göstergesidir. Turunçgiller grubunun küçük grup tartışmalarında dikkat çekici bulgulardan biri deneysel doğrulama yaptıkları için, özel bir durumdan elde edilen sonucun kanıt olarak kabul edilmeyeceğinin yani sınıf tartışmalarında rakip grupları ikna edemeyeceklerinin farkında olmalarıdır. Bu durum geçerli bir kanıt yapamasalar bile kanıt ile örnekle doğrulama arasındaki farkı öğrendiklerinin bir göstergesidir. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

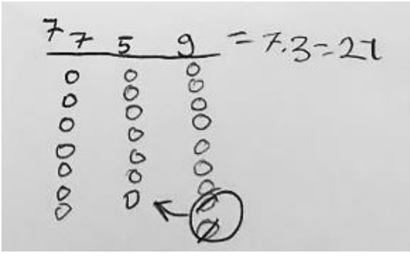
Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca öğretmen, her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlenmiş, önemli noktaları vurgulamış ve grup sözcüleri çözümlerini bitirdikten sonra sınıfa "Bu çözüm sizi ikna etti mi?" diye sorarak sınıf tartışmasını başlatmıştır. Her bir grup sözcüsünün yaptığı gerekçelendirme üzerinde durularak, bu gerekçelendirilmiş açıklamaların kabul görüp görmediği sınıf tarafından tartışılmıştır. Küçük gruplardan ilk olarak Çalışkan Arılar grubu çözümünü sunmuştur. Grup sözcüsü önce problemi anlamak için örnekler kullandıklarını, bu örneklerin tamamında verilen üç sayının toplamının, ilk tuttukları sayının üç katı olduğunu bulduklarını ifade etmiştir. Grubun problemi analiz etme aşamasında çeşitli örnekler yardımıyla varsayımda bulundukları görülmektedir. Daha sonrasında ise yaptıkları işlemi toplar kullanarak görsel hale getirdiklerini, en büyük sayıdaki fazla iki topu en küçük sayıya aktardıklarında üç tane ortadaki sayıdan elde ettiklerini göstermiştir. Bu gruptan bir öğrencinin kâğıdına yaptığı çözüm genelleyici örneği örneklendirmesi bakımından önemli görülmüş ve Görsel 4.43'te sunulmuştur:



Görsel 4.43. *Çalışkan Arılar grubunun genelleyici örneği*

Çalışkan Arılar grubu rakibini ikna et aşamasında genelleyici örneklerden hareketle tüm durumlara genelleme yapabilmelerini sağlayan örnekleri kullanarak görsel kanıt yapmışlardır. Grup sözcüsünün yaptığı çözüm Görsel 4.44.'te sunulmuştur.

Grup üyelerinin tamamının bu çözüm üzerinde görüş birliğine vardıkları grup sözcüsü tarafından belirtilmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir. Çalışkan Arılar grubu çözümünü sunduktan sonra sınıf tartışmasının bir kısmı aşağıdaki şekilde gelişmiştir:



Görsel 4.44. *Birinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

> **Öğrenci:** Ben ikna olmadım, çünkü milyonlarca sayı var ama sen sadece bir örnekle gösterdin.
> **Grup sözcüsü:** Tamam ama hangi sayı olursa o en büyükteki 2 top en küçüğün yanına gider. Gönderirsek üçü de ilk tuttuğum sayıya eşit olur. İstersen senin istediğin bir sayıyla da gösterebilirim.
> **Öğrenci:** Ama yine iki örnek olur o zaman. Sonsuz tane sayıyla deneyemezsin ki.
> **Öğrenci (Grubun başka bir üyesi):** Ama hocam bu tam örnek değil ki. Şimdi burada 2 topu oraya gönderiyoruz, hangisi olursa olsun yine 2 topu en küçük sayının yanına göndeririz yine aynı şey olur. Yani x'le de aynısı olur.
> **Öğretmen:** Tamam o zaman göster x'le arkadaşını ikna et.
> **Grup sözcüsü:** (-2) +(+2) = 0 oluyor. x, x, x, kalıyor. O da 3 tane x oluyor. Yani 3.x oluyor.
> **Öğretmen:** Neden her zaman 3 katı çıkıyor bir daha açıklar mısın arkadaşına?
> **Grup sözcüsü:** Hocam aslında şöyle hep en küçük ile en büyük arasında 4 top fark var. O zaman ben en büyükteki 2 topu en küçüğe gönderdiğimde üç tane aynı sayıda top olur. Bu yüzden hep ortadakinin 3 katı olur.

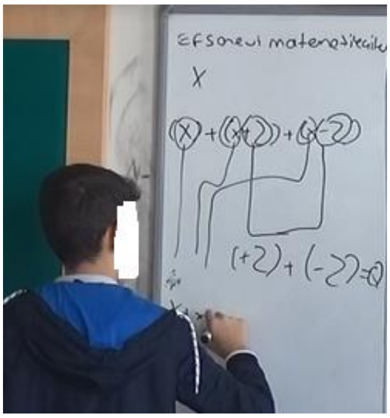
Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi grup sözcüsünün yaptığı çözüme matematiksel gerekçeler sunarak geçerli bir matematiksel kanıt sunmaya çalıştığı belirlenmiştir. Öğrencilerin söylemlerinden deneysel doğrulamayı kanıt olarak kabul etmedikleri, kendi görüşlerini savunarak arkadaşının varsayımını çürütmeye çalıştıkları gözlemlenmiştir. Bu durumlar öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *açıklama ve gerekçelendirme, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normları ile *geçerli bir matematiksel kanıt sunma, yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma, deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme, kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normlarının göstergesidir. Bununla birlikte grup sözcüsü yaptığı kanıta arkadaşını ikna edemeyince öğretmenin teşvikiyle farklı bir kanıt sunmuştur. Öğretmen bu şekilde bir ifadenin farklı şekillerde gerekçelendirilebileceğini öğrencilere göstermek istemiştir. Böylelikle *farklı çözümler sunma* sosyal normuna ve *farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma* sosyo-matematiksel normuna vurgu yapmıştır. Öğrencinin çözümünde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yollara başvurduğu görülmüştür. Bu durum öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *çözümlerinde genelliliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normuna hizmet etmiştir. Öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan kendi varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları görülmektedir. Ayrıca öğretmenin neden sorusunu sormasıyla öğrencinin yaptığı işlemi nedeniyle beraber açıkladığı görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğru olduğuna ikna olma ve* açıklama işlevinin alt işlevlerinden *kavrayış* işlevine hizmet etmektedir. Bütün sorular alındıktan ve tüm sınıf ikna olduktan sonra Turunçgiller grubunun çözümüne geçilmiştir.

Turunçgiller grubunun sözcüsü toplamın her zaman ilk tutulan sayının 3 katı olduğunu belirtmiş ve deneysel doğrulama ile sınıfı kendi çözümlerinin doğruluğuna ikna etmeye çalışmıştır. Sınıfın tepkisi bu grubun gerekçesinin sınıf tarafından belirlenen geçerli kanıt için yeterli olmadığını göstermektedir. Bunun üzerine gruba farklı bir çözümlerinin olup olmadığı sorulmuş ve başka çözümlerinin olmadığı belirlenmiştir. Turunçgiller grubu deneysel doğrulama yaptıkları için bu çözüm sınıf tarafından ikna edici ve geçerli kanıt olarak kabul edilmemiştir. Bu durum öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Bununla birlikte grup üyesi bu çözümün kabul edilmeyeceğini bildiklerini; ancak başka çözüm bulamadıklarını ifade etmiştir. Turunçgiller grubunun çözümünün ardından Starlar grubunun çözümüne geçilmiştir.

Starlar grubunun sözcüsü de toplamın her zaman ilk tutulan sayının 3 katı olduğunu belirtmiş, deneysel doğrulama ile sınıfı kendi çözümlerinin doğruluğuna ikna etmeye çalışmış; ancak grubun gerekçesi sınıf tarafından kabul edilmemiştir. Bunun üzerine gruba farklı bir çözümlerinin olup olmadığı sorulmuş ve Starlar grubunun sözcüsü bir sayı yerine kutucuk sembolünü kullanarak farklı bir çözüm daha sunacağını belirtmiştir. Ancak grubun, verilen sözel problemi matematik diline uygun yazmada yetersiz kaldığı için varsayımını doğrulayamadığı görülmüştür. Grup sözcüsü ilk sayıdan iki önceki sayıyı -2■, iki sonraki sayıyı ise +2■ olarak göstermiş, -2■ ile+2■'nun birbirini götürdüğünü ve sonucun ■ olduğunu söylemiştir. Daha sonra ilk sayının yani ■'nun 2 fazlası ile deneme yapmış, aynı şekilde üç sayıyı toplayarak (2■+■+4■=7■) çıkan sonucun ilk yaptığı işlemin 6 fazlası olduğunu belirtmiştir. Grup sözcüsünün bir sayının 2 eksiği yerine -2 katını aldığı, bir sayının 2 fazlası yerine de +2 katını aldığı, iki farklı toplama işlemi yaparak, çıkan sonucun biri ■, diğeri 7■ çıktığı için ilk toplamın 6 fazlası olduğunu iddia ettiği görülmektedir. Bunun üzerine sınıf tartışmasının bir kısmı şu şekilde gelişmiştir:

…
Öğrenci: Ama zaten ilk yaptığının sonucu ■ olmaz ki zaten üç sayı var, o kutuları da toplaman lazımdı.
Grup sözcüsü: Ama -2■ ile+2■'yu toplayınca 0 oluyor bir ■ daha ekleyince ■ oluyor.
Öğrenci: Düşün mesela ilk sayın 8 olsaydı yine sonuç 8 mi çıkacaktı? Diyelim ki 8'in 2 eksiği 6, iki fazlası 10 toplayınca yine 8 mi çıkar?
Grup sözcüsü: Biz aslında örneklerle 3 katı bulduk ama kanıtlamak için herhangi bir sayı yerine ■'yu kullanınca böyle çıkıyor.
Öğrenci: Orada -2 ile +2 birbirini götürürse sadece kutular kalırsa yani 3 tane kutu kalması gerekir.
Grup sözcüsü: Orada 2■ ile+2■ birbirini götürüyor sadece bir ■ kalıyor.
Öğrenci: Hocam bir sayıyla örnek verirse ben ikna olacağım.
Grup sözcüsü: Mesela 21 alalım iki önceki sayı 19, iki sonraki sayı 23. Bunları toplarsak 63 yapar. Mesela bundan iki büyük sayıyı denersek yani ilk sayı 23 olursa iki eksiği 21, iki fazlası 25 olur sonuç 63'ün 6 fazlası yani 69 olur. İsterlerse çift sayı ile de deneyebilirim.
Öğretmen: Yani arkadaşımız iki örnekle deniyor aralarındaki farkın 6 olacağını iddia ediyor.
Öğrenci: Ama sizin yaptığınızla ■'la gösterdiğiniz farklı oluyor. ■'la gösterdiğinizde ilk toplam yine ■ çıkmıştı. Mesela 21'le yaptıklarında sonuç 63 çıktı, yani 21'in 3 katı, ama ■'la gösterdiğinizde yine ■ çıkmıştı. O yüzden kendileri ile çelişiyorlar.
Grup sözcüsü: Evet hocam zaten ben de tam ikna olmamıştım yaptığım çözüme.

Starlar grubu ikna edici ve geçerli bir kanıt sunamadıklarını fark etmişlerdir. Sınıftaki öğrenciler farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlar, bu grubunun varsayımını çürüten aksine örnekler vermişlerdir. Bu durumlar öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normunun ve *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Aksine örnekler grup sözcüsünün kendi mantıksal tutarsızlıklarını fark etmesini sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Bunun üzerine diğer odak grup olan Efsanevi Matematikçiler grubunun çözümüne geçilmiş ve grup sözcüsünün yaptığı çözüm Görsel 4.45.'te sunulmuştur. Efsanevi matematikçiler grubunun sınıf tartışmasının bir bölümü aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.45. *Birinci hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun sınıf tartışması*

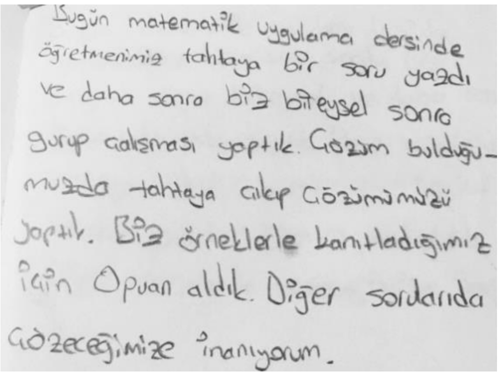
Grup sözcüsü: Biz bu sonucun her zaman ilk tuttuğumuz sayının 3 katı olduğunu bulduk.
Öğretmen: Neden her zaman 3 katı olduğunu açıklar mısın?
Grup sözcüsü: Biz önce örneklerle gösterdik bir çift ve bir tek sayı örnek verdik. Bu örneklerde üç katı çıktı. Sonra örnek kanıt olmuyor demiştiniz o yüzden şöyle yaptık. Şimdi bir tane sayı düşünelim bu sayı x olsun, bu sayının 2 fazlası ve 2 eksiğini yazalım x+2, x-2, bunları toplayalım, +2 ve -2'nin toplamı 0 oldu. x'leri toplarsak 3x oldu.
…
Öğrenci: Hocam nedenini bir daha açıklayabilir mi ben ikna olmadım.
Grup sözcüsü: Çünkü ortaya bir sayı yazıyoruz sonra bundan iki önceki sayı ortadakinin 2 eksiği oluyor ve iki sonraki sayı da ortadakinin 2 fazlası oluyor. Yani topladığımızda aslında 3 tane ortadaki sayıyı toplamış oluruz. (+2) ile (-2) birbirini götürür. Bu yüzden hangi sayı olursa olsun sonuç her zaman, tutulan ilk sayının 3 katı çıkıyor.

Sınıf tartışmalarında bütün sınıfın Efsanevi Matematikçiler grubunun çözümüne ikna oldukları görülmüştür. Efsanevi Matematikçilerin bu problemde kullandıkları örneklerin sonuçlarının ortak özelliğinin ilk sayının üç katı olduğunu belirttikleri ve bu varsayımın tüm durumlar için doğru olduğunu kanıtlamaları gerektiğinin bilincinde oldukları görülmüştür. Öğrencilerin yaptığı deneysel doğrulamalar şüphelerinden kurtulmalarını ve bu varsayımı kanıtlamak için inanç kazanmalarını sağlamıştır. Bununla birlikte yaptıkları kanıt ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna olmuşlardır. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ayrıca sınıfın grup sözcüsünden tekrar gerekçelendirme istemesiyle öğrencinin bu varsayımın neden doğru olduğunu gerekçelendirebildiği, yaptığı cebirsel işlemleri de nedenleriyle birlikte açıklayabildiği görülmektedir. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* alt işlevine hizmet etmektedir.

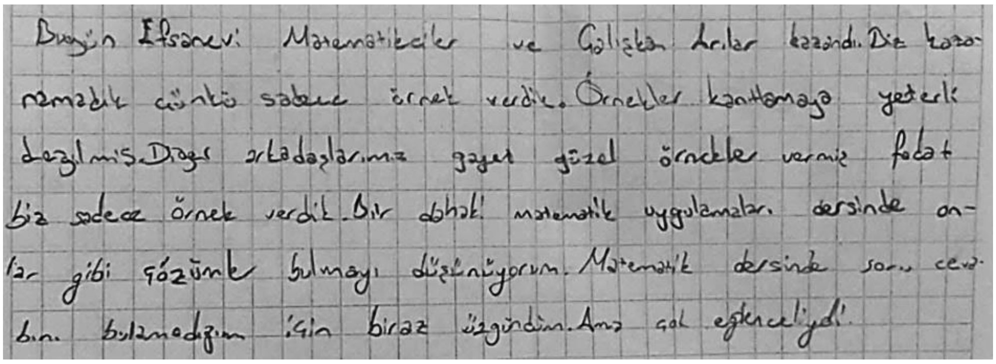
Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında öğretmen ile öğrenci arasında ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamaktadır. Sınıf tartışmalarında öğrenciler çözüm yaparken öğretmenin ve rakip gruplardan öğrencilerin sorduğu sorular, çözüm yapan grubun öğrencilerinin kendi çözümleri içinde kullandıkları tanım, teorem ya da kavramlarla ilgili anlama boşlukları olup olmadığını belirlemeye yardımcı olmuştur. Böylece bu kanıt etkinliği, öğrencilerin hatalarının farkına varıp bunları düzeltebilecekleri, tartışmaların yapıldığı bir tartışma ortamı yaratılmasını sağlamaktadır. Kanıt bu şekilde iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiştir. Değerlendirme aşamasında öğretmen sınıf tarafından paylaşılan tüm argümanları değerlendirmiştir. Sunulan argümanların matematiksel olarak geçerliğini değerlendirirken kullanılan yöntemin ve temsil biçiminin de matematiksel açıdan doğruluğunu sorgulayarak bu sınıfta kabul edilecek kanıt çerçevesinin oluşmasına yardımcı olmuş ve sınıfın ortak kanıtını sınıfla birlikte oluşturmuştur. Kanıt burada doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Şimdi ben bütün grupların çözümlerini değerlendireceğim ve sınıfın ortak kanıtını oluşturacağız. Örnek vermek kanıt olarak kabul edilemez. Örnek vermeyi problemi analiz etme aşamasında kullanabilirsiniz. Sizin varsayım oluşturmanıza yardımcı olur. Örneklerle kendinizi varsayımınızın doğru olduğuna ikna edebilirsiniz; ancak arkadaşınızı ya da rakibinizi geçerli bir kanıt sunarak ikna etmeniz gerekir. Yaptığınız denemeler sonucunda hep 3 katı oluyorsa bunun bütün sayılar için doğru olduğunu kanıtlamanız gerekir. Bu yüzden Turunçgillerin kanıtını kabul etmiyoruz. Starlar grubu da örneklerle gösterdiler sonra başka bir çözüm yolu denediler; ancak iddiaları hatalıydı. Zaten siz onların iddiasını çürüttünüz. Şimdi Çalışkan Arılara baktığımız zaman onlar da önce sayılarla başladılar bu sayıları görsellerle gösterdiler ve her zaman fazlalık olan iki topun en küçük sayının yanına gideceğini böylelikle birbirine eşit olan üç sütun top olacağını söylediler. Ayrıca ek olarak cebirsel gösterim de kullandılar. Çalışkan Arıların da kanıtını geçerli kabul ediyoruz. Çünkü verdikleri örnek aslında tüm tamsayılar için geçerli bir örnektir. Efsanevi Matematikçiler örnekler kullanarak bir varsayımda bulunmuşlar, her zaman ilk tutulan sayının üç katı olacağını söylediler. Sonra bunu cebirsel ifadelerle bütün tam sayılar için kanıtladılar. Bunu geçerli kanıt olarak kabul ediyoruz.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerin günlüklerinden alınan örnekler Görsel 4.46. ve Görsel 4.47.'de sunulmuştur:


Bugün matematik uygulama dersinde öğretmenimiz tahtaya bir soru yazdı ve daha sonra biz bireysel sonra gurup çalışması yaptık. Çözüm bulduğumuzda tahtaya çıkıp çözümümüzü yaptık. Biz örneklerle kanıtladığımız için 0 puan aldık. Diğer sorularıda çözeceğimize inanıyorum.

Görsel 4.46. *Birinci hafta öğrenci günlüğü örneği 1*


Bugün Efsanevi Matematikçiler ve Çalışkan Arılar kazandı. Biz kazanamadık çünkü sadece örnek verdik. Örnekler kanıtlamaya yeterli değilmiş. Diğer arkadaşlarımız gayet güzel örnekler vermiş fakat biz sadece örnek verdik. Bir dahaki matematik uygulamaları dersinde onlar gibi çözüm bulmayı düşünüyorum. Matematik dersinde soru cevabını bulamadığım için biraz üzgündüm. Ama çok eğlenceliydi.

Görsel 4.47. *Birinci hafta öğrenci günlüğü örneği 2*

4.2.1.2. İkinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

İkinci hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.8.’de görüldüğü gibi öğrencilere aksine örnek vererek kanıtlamaları gereken bir önerme sunulmuştur. Öğretimin sonunda küçük grupların tamamının aksine örnekler vererek kanıt yaptıkları belirlenmiştir.

Tablo 4.8. *İkinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik
* Tüm n tamsayıları için, $n^3 \geq n^2$’dir.
Etkinliğin Odağı
*Verilen önermenin doğruluğunu inceleme • Aksine örnek vererek kanıt yapma * Önermeyi n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$, n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$ olarak güncelleme
Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma
* Önermeyi anlamak için rastgele birden fazla örnekten yararlanma * Birden fazla aksine örnek vererek kanıt yapma

Tablo 4.8. (Devam) *İkinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi
*Önermenin mantıksal yapısını çözme (Her iki odak grup) *Tam sayı, doğal sayı, bir tam sayının karesi-küpü bilgilerini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) * "Her" niceleyicisini doğru kullanma (Her iki odak grup) * Birden fazla aksine örnek vererek kanıt yapma (Her iki odak grup) *Önermeyi, n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$, n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$ olarak güncelleme (Her iki odak grup)	*Yalnızca önermeyi doğrulayan bir örnek vererek önermenin her zaman doğru olduğunu iddia etme (Her iki odak grup) *Küp kareden büyük olduğu için önermenin her zaman doğru olduğunu iddia etme (Efsanevi matematikçiler grubu) *Önermedeki değişkeni hatalı kullanma (Turunçgiller grubu) * Hatalı iddiaları aksine örnek vererek çürütme (Her iki odak grup) *Arkadaşlarını stratejik örnekler seçmeye teşvik etme (Her iki odak grup) *Önermenin neden yanlış olduğunun gerekçelendirilmesi gerektiğini belirtme (Efsanevi matematikçiler grubu) *Arkadaşlarını cebirsel temsil kullanmaya teşvik etme (Efsanevi matematikçiler grubu)

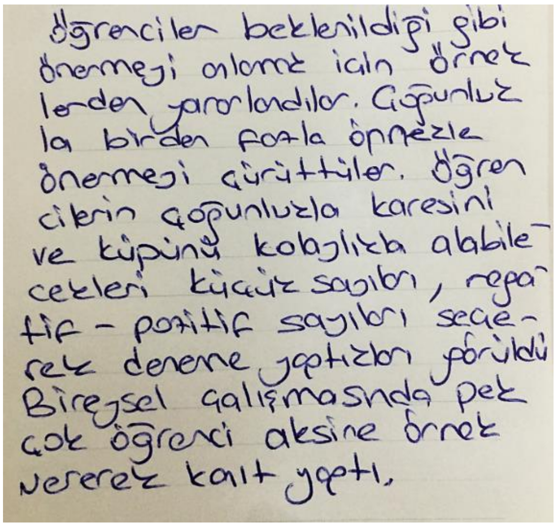
Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları
*Önermenin mantıksal yapısını çözme (Tüm gruplar) *Tam sayı, doğal sayı, bir tam sayının karesi-küpü bilgilerini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) *"Her" niceleyicisini doğru kullanma (Tüm gruplar) *Birden fazla aksine örnek vererek kanıt yapma (Tüm gruplar) *Önermeyi, n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$, n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$ olarak güncelleme (Tüm gruplar)	*Otoriteye dayalı gerekçelendirmeyi geçerli kabul etmeme *Karesi ile küpü birbirine eşit olan sayıların örneklendirilmesini isteme	*Önermenin neden yanlış olduğunu sorma *Önermenin yanlış olması için tek bir aksine örneğin yeterli olup olmadığını sorma *Önermenin doğru olabilmesi için nasıl güncellenebileceğini sorma

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*Tutarsızlıkları ortaya çıkarma

Öğretmenin Pekiştirmeye Çalıştığı Sosyal Normlar	Öğretmenin Pekiştirmeye Çalıştığı Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Farklı çözümler sunma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne yazdığı bireysel çalışmaların değerlendirmesi Görsel 4.48'de sunulmuştur:


öğrenciler beklenildiği gibi
önermeyi anlamak için örnek
lerden yararlandılar. Çoğunluk
la birden fazla örnekle
önermeyi çürüttüler. Öğren
cilerin çoğunluğuyla karesini
ve küpünü kolaylıkla alabile
cekleri küçük sayıları, nega
tif - pozitif sayıları seçe-
rek deneme yaptıkları görüldü
Bireysel çalışmasında pek
çok öğrenci aksine örnek
vererek kanıt yaptı.

Görsel 4.48. *İkinci hafta bireysel çalışmaların değerlendirilmesine ilişkin öğretmenin günlüğü*

Öğretmenin günlüğünde belirttiği gibi öğrenciler bireysel çalışmalarında önermeyi anlamak için pek çok örnekten yararlanmışlar ve bu örneklerle önermenin yanlış olduğunu fark etmişlerdir. Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında öğretmen bir önceki hafta yaptığı gibi gruplar arasında dolaşarak öğrencileri her bir grup üyesinin çözümünü arkadaşlarıyla paylaşması, fikirlerini nedenleriyle beraber açıklaması, iş birliği yapmaları, anlamadıkları noktaları birbirlerine sormaları, diğer grup üyelerinin arkadaşlarını sözü bitene kadar dinlemeleri, birbirlerini ikna ederek ortak çözüm bulmaları konusunda cesaretlendirmiştir. Aynı zamanda birinci haftada olduğu gibi öğretmen deneysel doğrulamayı geçerli kanıt yöntemi olarak kabul etmemeleri, matematiksel gerekçelendirmeler yapmaları, farklı çözümler düşünmelerini de vurgulayarak normları pekiştirmeye çalışmıştır. Öğretmen notlarında da belirttiği gibi bu aşamada grup üyelerinin bireysel çalışmalarında problemi analiz etmek için yararlandıkları örnekleri grupla paylaştıkları, bu örneklerin çoğunlukla kare ve küplerini kolaylıkla alabilecekleri negatif ve pozitif sayılar olduğu görülmüştür.

Küçük grup tartışmalarında dikkat çeken bulgulardan biri Turunçgiller grubunda bir öğrencinin değişkeni hatalı kullanması olmuştur. Bu öğrenci önermede kullanılan "n" için n'nin karesini aldığında farklı bir sayı küpünü aldığında farklı bir sayı kullanmıştır. Bu durum grup arkadaşları tarafından düzeltilmiş, öğrencinin önermeyi doğru anlaması sağlanmıştır. Aşağıda bu tartışmanın bir kesiti sunulmuştur:

> …
> **Öğrenci:** Ben daha küçük de buldum. Mesela n'ye bir 2 verelim karesi 4 olur, bir de 1 verelim küpü 1 olur. O zaman küpü daha küçük olur.
> **Öğrenci:** Hayır sen yanlış yapmışsın bak ikisi de n olacak aynı sayı bunlar. Karesini de küpünü de alınca aynı sayıyı kullanmalısın.
> **Öğrenci:** Hım aynı sayı olması mı lazım? Ben öyle düşünmemiştim.
> **Öğrenci:** Baksana iki tarafta da n var. Farklı sayı olsaydı hoca oraya başka harf koyardı.
> …

Ayrıca farklı odak gruplardan iki öğrencinin yalnızca önermeyi doğrulayan örnek vererek bu önermenin her zaman doğru olduğunu ifade ettikleri; ancak arkadaşları tarafından bu iddialarının aksine örnekler verilerek çürütüldüğü belirlenmiştir. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo matematiksel normunun göstergesidir. Efsanevi matematikçiler grubunun küçük grup tartışmasında bir öğrenci, küp kareden büyük olduğu için bir sayının küpünün karesinden her zaman daha büyük olduğunu iddia etmiş; ancak bu iddiası da arkadaşları tarafından aksine örnek verilerek çürütülmüştür. Her iki gruptaki bu durumlar öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğrencilerin arkadaşlarının iddialarını çürütmek için verdikleri aksine örnekler, bu öğrencilerin kendi mantıksal tutarsızlıklarını fark etmelerini sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Efsanevi matematikçiler grubunun tartışmasının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

> **Öğrenci:** Ben şey yaptım, normal tam sayılar olursa yani 2 ya da 4 falan doğru oluyor küpü daha büyük çıkıyor ama -2 falan olunca küçük çıkıyor. 1 olunca da eşit oluyor.
> **Öğrenci:** Hoca negatif ya da pozitif demiyor bütün tam sayıları düşünmemiz gerekiyor.
> **Öğrenci:** Ben anlatayım şimdi, küp kareden büyük olduğu için her zaman büyük diyorum ama 1'de eşit çıkıyor.
> **Öğrenci:** Ama sen negatifleri düşünmüyorsun.
> **Öğrenci:** Negatif pozitif fark etmez.

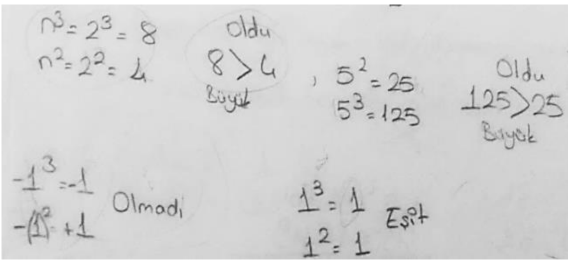
Öğrenci: Hayır eder. -2'yi alınca karesi 4 oluyor -2 çarpı -2, +4 olur çünkü ama küpü -8 oluyor, küpü küçük çıkıyor.
Öğrenci: Benim negatif örnek vermek gelmedi aklıma.
…

Odak gruplardaki öğrencilerin büyük çoğunluğunun doğal sayı, pozitif tam sayı, negatif tam sayı bilgisine sahip oldukları, gerekli işlemsel bilgiyi ve "her" niceleyicisini doğru kullandıkları görülmüştür. Her iki odak grubun verilen önermenin yanlış olduğunu göstermek için aksine örnek verme yöntemini bildikleri görülmüştür. Bununla birlikte her iki odak grubun, aksine örnek vererek önermeyi çürütmenin yanında önermenin neden doğru olmadığını da açıkladıkları, n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$ olduğu, n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$ olduğu sonucuna ulaştıkları görülmüştür. Bu durum öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Aynı zamanda bu durumlar açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ayrıca Efsanevi matematikçiler grubunun çözümlerinde cebirsel ifadelerden de yararlandıkları görülmüş, bu durum *çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak ele alınmıştır. Efsanevi matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

…
Öğrenci: Ben şöyle yaptım negatiflerde denedim pozitiflerde denedim her zaman olmuyor.
Öğrenci: Yani bazen mi diyorsun sen de?
Öğrenci: Evet. Pozitiflerde oluyor. Negatiflerde olmuyor.
Öğrenci: Ben de her zaman büyük ya da eşit çıkmıyor bende küçük bile çıktı.
Öğrenci: O zaman hocanın yazdığı şey yanlış olabilir.
Öğrenci: Bak 0'la da deneyelim
Öğrenci: 0'da ikisi de 0 çıkıyor.
Öğrenci: Negatiflerde her zaman n'nin karesi daha büyük oluyor. Mesela -2'de küpü -8 çıkıyor, karesi 4 çıkıyor. O zaman şimdi biz negatiflerde her zaman yanlış diyeceğiz.
Öğrenci: Şimdi hoca tahtaya bütün tam sayılarda küpü büyüktür yazmış ya. Hocanın yazdığı şey yanlış oluyor. Biz tahtada negatif tam sayılarda karesi daha büyük diyelim.
Öğrenci: Ama neden -2 sadece bunu göstermeyelim başka da deneyelim.
Öğrenci: -5'te de öyle çıkıyor.
Öğrenci: Peki hoca neden negatiflerde öyle çıkıyor derse ne diyeceğiz?
Öğrenci: Çünkü mesela -10'la -10'u çarpınca 100 pozitif oluyor. Ama küpünde -1000 negatif oluyor.
Öğrenci: Hepsinde aynı çıkıyor işte ama örnekle göstermeyelim. Şöyle yapacağız tahtada. Mesela n negatif ise n. n olursa pozitif olur çünkü negatifle negatifin çarpımı pozitif. Ama n. n. n olursa sonuç negatif çıkar çünkü negatifle negatifin çarpımı pozitif, sonra bir daha negatifle çarpıyor sonuç negatif. Zaten sayı pozitif ise pozitifi kaç kere çarparsak yine pozitif.

Yukarıdaki tartışmada görüldüğü gibi birlikte öğrenciler küçük grup tartışmalarında, işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, düşüncelerini paylaşmaları için kendi grup arkadaşlarını teşvik etmişlerdir. Öğrenciler grup tartışması boyunca birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normlarının göstergesidir. Bununla birlikte küçük grup çalışmalarında Efsanevi matematikçiler grubunun yaptıkları kanıt ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları ve öğrencilerin varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* ve *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca öğretmen her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlenmiş, önemli noktaları vurgulamış ve grup sözcüleri çözümlerini bitirdikten sonra sınıfa "Bu çözüm sizi ikna etti mi?" diye sorarak sınıf tartışmasını başlatmıştır. Her bir grup sözcüsünün yaptığı gerekçelendirme üzerinde durularak, bu gerekçelendirilmiş açıklamaların kabul görüp görmediği sınıf tarafından tartışılmıştır. Bütün gruplar önermenin yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmenin neden sorusunu sormasıyla birlikte öğrencilerin, örnekler kullanarak deneme yaptıklarını; ancak önermenin negatif tam sayılarda doğru olmadığını, pozitif sayılarda ve 0'da doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Sınıf tartışmalarında Çalışkan Arılar grubunun yaptığı çözüm Görsel 4.49.'da sunularak bu grubun sınıf tartışmasının bir bölümü aşağıda verilmiştir:



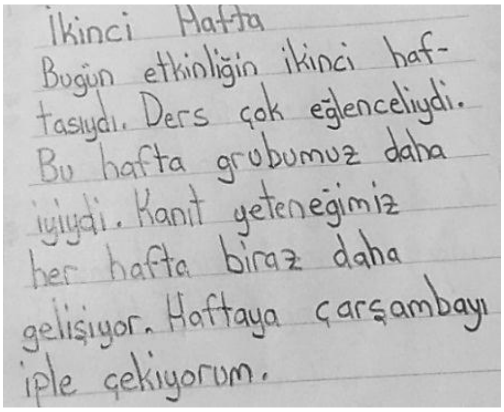
Görsel 4.49. *İkinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Hocam biz buna yanlış diyoruz çünkü bu bütün tamsayılar için doğru değildir.
Öğretmen: Neden?
Grup sözcüsü: Pozitif tam sayıyla denediğimizde 2^3= 8 oluyor, 2^2=4 oluyor. Mesela 5^2=25 5^3=125 125, 25'ten büyük olduğu için bu da oldu. Yani pozitif tam sayılarda her zaman büyük çıkıyor. Negatif tam sayılarda ise tam tersi oluyor. $(-1)^3$= -1, $(-1)^2$= +1 yani daha küçük oluyor. Sizin yazdığınız şeyde bütün tam sayılar için diyor o yüzden bizce doğru değil.
Öğretmen: …Evet ikna oldunuz mu? Soru soralım.
Öğrenci: Negatiflerde her zaman küçük olur diyorsun pozitiflerde her zaman büyük diyorsun; ancak 0 ve +1'i unutuyorsun. Bak problemde büyük eşit koymuş hoca. Yani sizin grubunuz hiçbir zaman eşit olmayacağını mı iddia ediyor?
Grup sözcüsü: Hocam +1'de ve 0'da her zaman eşit çıkar kâğıda yapmıştık burada söylemeyi unuttum. Mesela 1^3=1,1^2=1 eşit çıktı.
Öğretmen: Tamam doğru siz şimdi çürüttünüz benim yazdığımı. Çözümünüz doğru. Peki neden sence benim iddiam pozitif tam sayılarda ve 0'da oluyor da negatiflerde olmuyor?
Grup sözcüsü: Hocam bir kural yazmıştık derste bununla ilgili, sayı negatif tam sayı ise üssü çift olunca pozitif, üssü tek olunca negatif diye. Pozitif de zaten tek çift fark etmiyor her zaman pozitif. Deftere yazmıştık.
Öğrenci: Hocam ama kural, formül söylemek olmaz demiştiniz.
Öğretmen: Tamam o zaman bu kuralın nedenini açıklar mısın?
Grup sözcüsü: Hocam çünkü negatifle negatifin çarpımı pozitif olur. Sonra bir daha negatifle çarpınca sonuç negatif olur. Zaten negatif sayılar pozitiften büyüktür. O yüzden diyorum ben.
Öğretmen: Tamam bir soru daha neden birden fazla örnekle deneme yaptınız Tek bir örnekle çürütmek yeterli olmaz mı?
Grup sözcüsü: Hocam o zaman niye başka örnek vermediniz, biz ikna olmadık derlerdi o yüzden.
Öğretmen: Peki benim yazdığım şey yanlış diyorsun ya doğrusunu söyler misin nasıl olurdu?
Grup sözcüsü: n mesela 0, 1,2, gibi olsa küpü karesine eşit ya da büyük ve n negatif bir tam sayı olsa o zaman da küpü karesinden küçük.

Bu tartışmada dikkat çekici bulgulardan biri, öğrencinin çözümünün doğruluğunu gerekçelendirirken daha önce derste işlenen ve deftere yazılan kurala atıfta bulunması ve başka bir gruptan öğrencinin otoriteye bağlı olarak yapılan açıklamayı kabul etmemesidir. Bunun üzerine grup sözcüsünün yaptığı çözümü nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında öğretmen ile öğrenci arasında ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamaktadır. Sınıf tartışmalarında öğrenciler çözüm yaparken öğretmenin ve rakip gruplardan öğrencilerin sorduğu sorular, çözüm yapan grubun öğrencilerinin kendi çözümleri içinde kullandıkları tanım, teorem ya da kavramlarla ilgili anlama boşlukları olup olmadığını belirlemeye yardımcı olmuştur. Böylece bu kanıt etkinliği, öğrencilerin hatalarının farkına varıp bunları düzeltebilecekleri, tartışmaların yapıldığı bir tartışma ortamı yaratılmasını sağlamaktadır. Kanıt bu şekilde iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Değerlendirme aşaması ile birlikte n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$ olduğu, n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$ olduğu sonucuna ulaşılmış ve bu önermenin yanlış olduğu kanıtlanmıştır. Bu kanıt sınıfın ortak kanıtı haline gelmiştir. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Şimdi ben bütün grupların çözümlerini değerlendireceğim ve sınıfın ortak kanıtını oluşturacağız. Hepiniz benzer çözümler yaptınız. Ben bütün tam sayılar için $n^3 \geq n^2$ olduğu iddiasında bulunmuştum. Sizler tam sayı, pozitif tam sayı, negatif tam sayının tanımını biliyorsunuz. Sonra bütün gruplar bir tam sayının karesinin ve küpünün nasıl alınacağını da biliyorsunuz. Daha önce de söylemiştik bir kanıt problemini anlamak için örneklerden yararlanırız diye. Siz de örnekler vererek bu iddiamın yanlış olduğunu kanıtladınız. Bunun için tek bir aksine örnek vermek yeterlidir. Siz birden fazla aksine örnekle denediniz emin olmak için. Ama şöyle düşünün her tamsayı ya da bütün tamsayılar için bu böyledir diye bir iddia varsa bu iddiayı sağlamayan tek bir örnek vermek bu iddiayı çürütür. Ama geçen derste de söylediğim gibi doğru olduğunu göstermek istediğimiz zaman bir ya da birkaç örnek yeterli olmaz. Ayrıca örnekler vererek benim iddiamı çürütmenin dışında şu sonuca ulaştınız, n doğal sayı ise $n^3 \geq n^2$ ve n negatif bir tam sayı ise $n^3 < n^2$'dir.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerden birinin günlüğüne *"Bugün çok mutluyum. Çünkü 10 puan kazandık. Kendi başıma bir kanıt bulmak zor oluyor ama grup çalışmasında güzel yaptığımızı düşünüyorum. Ben bu dersi çok sevdim ve bir iddiayı nasıl çürütmemiz gerektiğini de öğrendim. Bundan sonraki uygulamalarda daha iyi olacağımıza eminim."* şeklinde yazdığı görülmüştür. Başka bir öğrencinin günlüğünden alınan örnek Görsel 4.50.'de sunulmuştur:

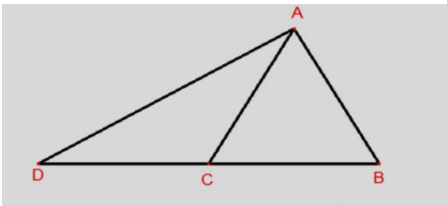


Görsel 4.50. *İkinci hafta öğrenci günlüğü örneği*

4.2.1.3. Üçüncü hafta öğretimine ilişkin bulgular

Üçüncü hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.9.'da görüldüğü gibi öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken ve Cry'ın (2011) çalışmasından uyarlanan bir geometri problemi sunulmuştur. Öğretimin sonunda küçük gruplardan sadece Turunçgiller ve Efsanevi Matematikçiler gruplarının doğrudan kanıt yaptıkları görülmüştür.

Tablo 4.9. *Üçüncü hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik

$*\ \overset{\Delta}{ADB}$dik üçgen, m$(\widehat{DAC})$ =30^0, $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ABD})$ = 60^0 ve $\lvert AB \rvert$=6 cm'dir. Buna göre D açısının ölçüsü ve │DC│ hakkında ne söyleyebilirsiniz?
Etkinliğin Odağı
*Matematiksel varsayımlar geliştirme * Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme • Doğrudan kanıt yapma
Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma
* Cetvel ve açıölçer kullanarak şekil üzerinde ölçüm yapma * Problemi analiz etmek için verileri şekil üzerine yerleştirme *Tümdengelimsel yöntemler kullanarak $m(\widehat{ADB})$'nün 30º olduğunu belirleme

Tablo 4.9. (Devam) *Üçüncü hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	**Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**
*Dik, eşkenar ve ikizkenar üçgenin açı ve kenar özellikleri, üçgenin iç açıları toplamı, doğru açı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) *Cetvel ve açıölçer kullanarak ölçüm yapmanın kanıt olmadığının farkına varma (Her iki odak grup) *Tümdengelimsel yöntemler kullanarak $\overset{\Delta}{ABC}$ 'nin eşkenar üçgen, $m(\overset{\wedge}{ADB})$'nün 30° ve $\overset{\Delta}{ADC}$ 'nin ikizkenar üçgen olduğunu belirleme (Her iki odak grup)	*Ölçüme dayalı olarak $\vert DC \vert$ 'nun 6 cm olduğunu iddia etme (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Görsel algıya dayalı olarak $\vert DC \vert$ 'nun, $\vert AB \vert$ 'dan daha büyük olduğunu iddia etme (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Görsel algıya dayalı olarak $\vert DC \vert$ 'nun $\vert CB \vert$ 'a eşit olduğunu iddia etme (Her iki odak grup) *Ölçüm yapma ve görsel algıya dayalı çıkarımda bulunmayı geçerli bir yöntem olarak kabul etmeme (Her iki odak grup) *Arkadaşlarını tümdengelimsel yöntemler kullanarak çıkarım yapmaya teşvik etme (Her iki odak grup)

Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Dik, eşkenar ve ikizkenar üçgenin açı ve kenar özellikleri, üçgenin iç açıları toplamı, doğru açı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Turunçgiller ve Efsanevi matematikçiler grubu) *$m(\overset{\wedge}{ADB})$'nün 30° olduğunu kanıtlama, görsel algıya dayalı olarak $\vert DC \vert$ 'nun 6 cm olduğunu iddia etme; ancak gerekçelendirme yapamama (Çalışkan Arılar grubu) *$m(\overset{\wedge}{ADB})$'nün 30° olduğunu kanıtlama, üçgenlerin açılarının ölçüleri ile kenar uzunlukları arasında ilişki kurarak $\vert DC \vert$ 'nun 8 cm olduğunu iddia etme (Starlar grubu) * $\overset{\Delta}{ABC}$ 'nin eşkenar üçgen, $m(\overset{\wedge}{ADB})$'nün 30° ve $\overset{\Delta}{ADC}$ 'nin ikizkenar üçgen olduğunu kanıtlama (Turunçgiller ve Efsanevi Matematikçiler grubu)	*Görsel algıya dayalı çıkarımda bulunmayı geçerli kabul etmeme * Üçgenlerin açılarının ölçüleri ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkilendirme ile $\vert DC \vert$ 'nun 8 cm olduğu iddiasını çürütme	* $\vert DC \vert$ 'nun neden 6 cm olduğunu iddia ettiklerini sorma *İkizkenar üçgende hangi kenarların eş olması gerektiğini sorma

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama *Sonuçları görme	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*İlişkileri ortaya çıkarma *Tutarsızlıkları ortaya çıkarma

Öğretmenin Pekiştirmeye Çalıştığı Sosyal Normlar	**Öğretmenin Pekiştirmeye Çalıştığı Sosyo-matematiksel Normlar**
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

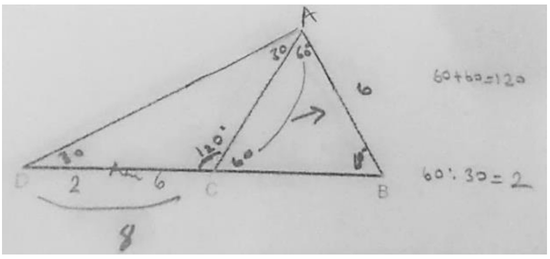
Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne *"Sınıfta pek çok öğrencinin bireysel çalışmasında cetvel ve açıölçer kullanarak ölçümler yaptıkları daha sonra tümdengelimsel yöntemler kullandıkları görüldü. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu verileri problem üzerinde yerine yerleştirdi ve D açısının ölçüsünü 30^o olarak belirledi. Bireysel çalışmasında DC doğru parçasının uzunluğunu belirleyebilen bir öğrenciye rastlanmadı."* şeklinde yazdığı belirlenmiştir. Öğretmen bir önceki gün öğrencilerden yanlarında cetvel ve açıölçer getirebileceklerini belirtmiş ve günlüğüne yazdığı gibi bu şekilde ölçüm yapmanın belirsizliğini fark ederek tümdengelimsel yöntemlere başvurmalarının önünü açmıştır. Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında öğretmen daha önceki haftalarda olduğu gibi gruplar arasında dolaşarak öğrencileri her bir grup üyesinin çözümünü arkadaşlarıyla paylaşması, fikirlerini nedenleriyle beraber açıklaması, iş birliği yapmaları, anlamadıkları noktaları birbirlerine sormaları, diğer grup üyelerinin arkadaşlarını sözü bitene kadar dinlemeleri, birbirlerini ikna ederek ortak çözüm üretmeleri konusunda cesaretlendirmiştir. Aynı zamanda öğretmen deneysel doğrulamayı geçerli kanıt yöntemi olarak kabul etmemeleri, matematiksel gerekçelendirmeler yapmaları, farklı çözümler düşünmelerini de vurgulayarak normları pekiştirmeye çalışmıştır. Öğretmen notlarında da belirttiği gibi bu aşamada grup üyelerinin büyük bir çoğunluğunun bireysel çalışmalarında tümdengelimsel yöntemler kullanarak D açısının ölçüsünün 30^o olduğunu kanıtladıklarını ve bu sonucu arkadaşını ikna et aşamasında arkadaşlarına gösterdiklerini görmüştür. Ayrıca cetvel ve açıölçer kullanarak yaptıkları ölçümlerin birbirinden farklı olması sebebiyle ölçüm ve görsel algıya dayalı çıkarımda bulunmanın geçerli bir yöntem olmadığını fark ettikleri de görülmüştür. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun oluşumuna hizmet etmiştir. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

> **Öğrenci:** Ölçtünüz mü siz de, benim ki bir acayip çıktı, mesela soruda burası 6 cm demiş ama ölçünce 3 gibi bir şey çıkıyor.
> **Öğrenci:** Ben 3'ten fazla ölçtüm. Sonra ölçmeyi bıraktım. Kendi bildiğimle yaptım D'yi 60^o buldum. Herkes söylesin ne yaptığını.
> **Öğrenci:** Ben de ölçmeden yaptım bu üçgenin ($\overset{\Delta}{ABC}$) bütün kenarlarını 6 buldum.

Öğrenci: Evet o zaten eşkenar üçgen. Sen nasıl yaptın?
Öğrenci: Ben D açısını 24^o buldum. DAC açısını da 36^o buldum.
Öğrenci: Nasıl buldun ki öyle? Şimdi bak bu zaten dik üçgen burasını 60^o burayı da 30^o vermiş hoca, burası doğru açı yani 180^o, 180'den 60'ıçıkarırsak 120^o kalır, yani senin söylediğin çürüdü.
Öğrenci: Ben karıştırmışım orayı.
Öğrenci: Ben de şöyle yaptım önce açıları falan ölçmeye çalıştım sonra baktım olmayacak soruda verilenleri yazdım, 30^o vermiş burayı, 180'den 30'u çıkardım 150^o buldum, bu iki kalan açının toplamı oluyor. Sonra 180'den 150'yi çıkardım 30^o buldum yani D açısını 30^o buldum. Zaten C açısının ölçüsü de 120^o oluyor. DC kenarını bulamadım ama CB 6 olduğu için sanki DC de 6 olur diye düşünüyorum.
Öğrenci: Ben de önce yerleştirdim. D'yi 30^o buldum ama DC'yi bulamadım.
Öğrenci: Hani hatırlıyor musunuz taban yükseklik bir şey yapıyorduk, eşkenar üçgende burası 6 ise DC de 6 gibi geliyor bana. Yani yükseklik çizince tam orasına geliyordu üçgenin. Şimdi çizdim taban 6 ya, 3 cm- 3cm oldu.
Öğrenci: DC'yi nasıl buldun?
Öğrenci: DC 6 bence şekilde AB'yle aynı görünüyor, cetvelle ölçünce de aynı sanki ama nasıl 6 işte bilmiyorum.
Öğrenci: Ama şekle baksanıza sanki DC, AB den daha uzun görünüyor bana göre ölçmedim ama öyle sanki.
Öğrenci: Herkes bir şey söylüyor ya tahtada böyle dersek çözümü kabul etmezler. Görüntüsü önemli değil. Bence şekle bakarak söyleyemeyiz.
…
Öğrenci: Şimdi bakın bir şey gördüm buradaki ikizkenar üçgen o yüzden bu kenarların eşit olması gerekiyor yani 6 oluyor.
Öğrenci: Yani burası ikizkenar üçgen olduğu için mi 6 cm diyoruz?
Öğrenci: Evet aslında ikizkenarı şöyle buluyorsun burası zaten 30^o soruda verilmiş, D açısını da 30^o bulduk. İkisi de 30^o olduğu için ikizkenar. O yüzden de bu kenarlar eşit. Hatırlıyor musunuz geçen yıl Gözde hoca ikizkenar üçgenin böyle çaprazına oklar çizmişti (eşit açı karşısında eşit kenar demek istiyor) o kenarlar eşit oluyordu. Burada işte 30'lara oklar çizersek AC 6 cm olduğu için DC de 6 cm olur. İkna olmayan var mı?
Öğrenci: Ha evet ya nasıl göremedim ben çok kolaymış. Şimdi bakın bir daha anlatalım.
…

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenciler küçük grup tartışmalarında, işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, düşüncelerini paylaşmaları için kendi grup arkadaşlarını teşvik etmişlerdir. Öğrenciler grup tartışması boyunca birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normlarının göstergesidir. Bir öğrencinin D açısının ölçüsünü 24^o ve DAC açısının ölçüsünü 36^o olarak belirlemesi üzerine grup arkadaşı yaptığı gerekçelendirme ile arkadaşının mantıksal tutarsızlığını fark etmesini sağlamıştır. Kanıt burada *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Öğrencilerin yaptıkları çözüm sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan D açısının ölçüsünün 30^{o} olduğuna ve DC doğru parçasının uzunluğunun 6 cm olduğuna ikna oldukları görülmektedir. Bununla birlikte öğrencinin $\overset{\Delta}{ADC}$ üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu varsayımında bulunduktan sonra bu varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte arkadaşlarına açıkladığı da görülmektedir. Ayrıca öğrencilerin üçgenler ile ilgili bildikleri özellikleri, teoremleri kanıtlarında kullanmaları bunların sonuçlarını görmeyi sağlamaktadır. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* ve açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte bu durum öğretmenin pekiştirmeye çalıştığı *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen daha önceki haftalarda olduğu gibi bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini böylece sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Yine önceki haftalarda olduğu gibi her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlemiş ve “Bu çözüm sizi ikna etti mi?” diye sorarak sınıf tartışmasını başlatmıştır. Küçük gruplardan Çalışkan Arılar ve Starlar grubunun D açısının ölçüsünü doğru belirledikleri; ancak DC doğru parçasının uzunluğunu belirleyemedikleri görülmüştür. Çalışkan Arılar grubunun sözcüsü, D açısının ölçüsünü nasıl bulduklarını açıklamış, │DC│ ise 6 cm olduğunu tahmin ettiklerini; ancak neden 6 cm olduğunu açıklayamadıklarını söylemiştir. Bunun üzerine öğretmen │DC│ neden 6 cm olarak tahmin ettiklerini sorduğunda grup sözcüsü [DC] ile [CB]’nın uzunluklarının eşit gibi göründüğünü belirtmiştir. Grubun görsel algıya dayalı iddiada bulundukları; ancak bunu gerekçelendiremedikleri görülmüştür. Starlar grubunun ise Görsel 4.51.’de sunulduğu gibi üçgenlerin açılarının ölçüleri ile kenar uzunlukları arasında ilişkilendirme yaparak, │DC│’nun 8 cm olduğunu iddia ettikleri; ancak bu iddialarının doğru olduğuna sınıfı ikna edemedikleri belirlenmiştir. Starlar grubunun sınıf tartışmasının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

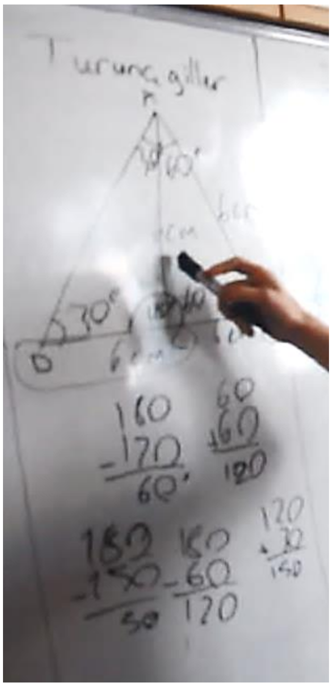


Görsel 4.51. *Üçüncü hafta Starlar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Hocam şimdi ACB üçgeninde 60'la 60'ı toplayınca 120 oluyor ve kenarları 6 cm. Aynı zamanda DCB açısı da 120, o zaman DC'nin birazı 6 olur, sonra 60'ı 30'a böldüm 2 çıktı, 6'ya 2 ekleyince DC'yi 8 bulduk.
Öğrenci: Hocam yani şimdi bu başka bir üçgen olsaydı da aynı şey mi olacaktı? Bir de niye 60'ı, 30'a böldünüz?
Grup sözcüsü: Hocam ben sadece bu üçgen için böyle düşündüm. Açılarla orantı yaptık.
Öğrenci: Hocam yaptığı çok saçma diyelim ki açısı 120^{o} olan kocaman bir üçgen var onun da mı 6 cm olur bir kenarı. Bence sadece açılara göre yapamaz.
Öğretmen: Yani ne demek istiyorsun?
Öğrenci: Şimdi hocam diyelim ki büyük bir üçgen var onun da bir açısı 30^{o} diğeri de 120^{o} olsun aynı bu sorudaki gibi. O zaman ona da mı 6 diyecekti bir kenarına. Açıları böyle olunca her zaman 6 olması şart mı?
Öğrenci: Bir de hocam 60'ı 30'a böldük 2 çıktı diye ekledik diyor ya bütün üçgenlerde bu geçerli mi?
Grup sözcüsü: Aslında hocam biz zaten DC'yi bulamadık. Ben de çok mantıklı bulmadım bu çözümü. Ama cevap vermemektense bunu yapalım dedik.
Öğretmen: Arkadaşımız diyor ki zaten ben kendimi de grubumu da ikna edemedim, ama ne yapıyorduk önce kendimizi sonra arkadaşımızı en son rakibimizi ikna ediyorduk.

Görüldüğü gibi grubun üçgenlerin açılarının ölçüleri ile kenar uzunlukları arasında ilişki kurarak $|DC|$'nun 8 cm olduğu iddiası, bu durumun bütün üçgenler için geçerli olmadığı belirtilerek ve farklı üçgenler örnek gösterilerek sınıf tarafından çürütülmüştür. Starlar grubu ikna edici ve geçerli bir kanıt sunamadıklarını fark etmişler ve bu çözümün doğruluğuna en baştan ikna olmadıklarını belirtmişlerdir. Sınıftaki öğrenciler farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlar, verdikleri farklı örneklerle Starlar grubundaki öğrencilerin kendi mantıksal tutarsızlıklarını fark etmelerini sağlamışlardır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Bununla birlikte Efsanevi Matematikçiler ve Turunçgiller grupları aynı çözümleri yaparak çözümlerinin doğruluğuna sınıfı ikna etmişlerdir.

Turunçgiller grubunun grup sözcüsünün yaptığı çözüm Görsel 4.52.’de verilmiş ve bu grubun sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.52. *Üçüncü hafta Turunçgiller grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: DAC açısının ölçüsü 30° demiş soruda, CAB ve ABD açıları da 60°. Hocam bu üçgenin açılarının toplamı 180, 60’la 60’ı topladık 120 oluyor, 180’den çıkardık 60 kaldı. Yani ACB açısı 60° oluyor. C açısı doğru açı olduğu için 180° oluyor, 180’den 60’ı çıkarınca 120 kalıyor, yani ACD açısı 120° oluyor. Şimdi 120 ile 30’u toplayınca 150 oluyor, 180’den çıkarınca da 30 kalıyor. Yani D açısı 30° oluyor.
Öğretmen: Bütün gruplar buraya kadar aynı şeyi yapmış. Peki DC için ne söylediniz?
Grup sözcüsü: Hocam ACB üçgeni eşkenar üçgendir, çünkü az önce söyledim açılarının hepsi 60°, o yüzden bütün kenarları 6 oldu. ADC üçgeninde bu iki açı ($\hat{ADC}$ ve $\hat{DAC}$) eşit ve 30° olduğu için bu da ikizkenar üçgen oluyor. O yüzden iki kenarı eşit oluyor. Yani AC 6 ise DC de 6 oluyor.
Öğretmen: Peki ADC ikizkenar üçgen, iki kenarı eşit olduğu için DC de 6 oldu diyorsun, peki neden DC 6 oluyor, AD 6 olamaz mı?
Grup sözcüsü: Hocam çünkü şekle bakınca AD daha uzun geldiği için.
Öğretmen: Sence o daha uzun geldi demek bir gerekçe mi? Şimdi bak iki kenarı eşit dediniz, ben de diyorum ki o zaman eşit kenarlardan biri neden AD olmasın?
Grup sözcüsü: Hocam çünkü karşılıklı kenarlar eşit olmalı.
Öğretmen: Ne demek karşılıklı kenarlar?
Grup sözcüsü: Yani 30’un karşındaki kenarlar aynı olmalı.
Öğretmen: Tamam arkadaşımız diyor ki yani ikizkenar üçgende eşit açıların karşısındaki kenarlar eşit olmalı. Tamam soru sormak isteyen var mı? Sizi ikna ettiler mi? Sanırım sınıf ikna olmuş.
Öğrenci: Hocam biz yapamamıştık ama şimdi onlar yapınca ben çok iyi anladım.

Yukarıdaki tartışmadan görüldüğü gibi öğrencilerin tümdengelimsel yöntemleri kullanarak yaptıkları çıkarımlar sayesinde çözümlerinin doğru olduğuna ikna oldukları belirlenmiştir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* işlevine hizmet etmiştir. Öğrencilerin problemi çözerken eşkenar ve ikizkenar üçgenin açı ve kenar özellikleri, dik üçgen tanımı, üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı, doğru açı tanımı gibi daha önce öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandıkları ve varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmüştür. Kanıt yaparken kullandıkları bu kavramların sonuçlarını görmeleri bu kavramlar hakkında daha fazla bilgi sahibi olmalarını sağlamıştır. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir. Bununla birlikte bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir.

Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında öğretmen ile öğrenci arasında ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamaktadır. Kanıt bu şekilde iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

Öğretmen: Şimdi ben bütün grupların çözümlerini değerlendireceğim ve sınıfın ortak kanıtını oluşturacağız. Şimdi önce bu problemi çözebilmek için bazı tanım ve özelliklerden yararlanmamız gerekiyor. Mesela bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, eşkenar üçgende bütün açı ve kenarların eş olması, ikizkenar üçgende taban açılarının eş olması ve eşit açıların karşısındaki kenarların eş olması gibi. Siz de bu bilgilerden bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından yararlanarak D açısının 30° olduğunu buldunuz. Ancak Starlar ve Çalışkan Arılar DC doğru parçasının uzunluğunu belirleyemediler. Çünkü eşkenar ve ikizkenar üçgenin açı ve kenar özelliklerini doğru kullanamadılar. Efsanevi Matematikçilerin ve Turunçgillerin yaptıkları çözümü doğru kabul ediyoruz. $\overset{\Delta}{ABC}$ eşkenar üçgen olduğu için bütün kenar uzunlukları eşittir $|AC| = |AB| = |BC|$ = 6 cm olur. $\overset{\Delta}{ADC}$'nin açılarının yerleştirdiğimizde $(A\hat{D}C) = (D\hat{A}C)$= 30° olduğu için bu üçgen ikizkenar üçgen olur. İkizkenar üçgenlerde eşit açıların karşısındaki kenarları uzunlukları eşit olduğu için $|AC|=|DC|$=6 cm olur.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve bir öğrencinin günlüğüne *"Bugün çok eğlenceliydi, bu uygulama başladığından bu yana kendimde olumlu bir değişiklik gördüm her öğretmen bir şey anlattığında ya da ders çalışırken bu neden böyle diye kendimi sorguluyorum ve cevabı bulmaya çalışıyorum."* şeklinde yazdığı görülmüştür.

4.2.1.4. Dördüncü hafta öğretimine ilişkin bulgular

Dördüncü hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.10.'da görüldüğü gibi öğrencilere hem aritmetiksel hem de cebirsel stratejiler kullanılarak çözülebilecek cebirsel-sözel bir problem sunulmuştur. Öğretimin sonunda küçük gruplardan sadece Turunçgiller grubunun genel bir çözüm yöntemi geliştirebildiği görülmüştür.

Tablo 4.10. *Dördüncü hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik
*Ali baba çiftliğinde tavuk ve tavşan beslemektedir. Tavuk ve tavşanların toplam kafa sayısı 37, toplam ayak sayısı ise 98'dir. Ali babanın çiftliğinde kaç tane tavuk ve tavşan vardır? Etkinliğin genişletilmesi: * Çiftlikteki tavuk ve tavşanların toplam kafa sayısı 40, toplam ayak sayısı 140 olsaydı ne olurdu? *Usta ve işçilerden oluşan 10 kişilik grup bir işten toplam 128 lira kazanıyor. Bir usta 20 lira bir işçi 8 lira alıyorsa bu grupta kaç işçi, kaç usta vardır?
Etkinliğin Odağı
*Genel bir çözüm yöntemi geliştirme *Belirlenen yöntemi benzer bir problemde uygulama
Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma
* Problemi analiz etmek için rastgele birden fazla örnekten yararlanma * Nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri doğru belirleyerek sistematik deneme yanılma yapma * Tavuk sayısını 25, tavşan sayısını ise 12 olarak belirleme

Tablo 4.10. (Devam) *Dördüncü hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	**Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) * Tavuk ve tavşan sayısını bulmak için önce rastgele deneme yanılma yapma, sonra sistematik deneme yanılma yapma (Her iki odak grup) * Tablo yaparak örüntü arama (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Çözüm yöntemi geliştirmek için problemi basitleştirme ve şekil çizme stratejilerinden yararlanma (Turunçgiller grubu) * Muhakeme yaparak genel bir çözüm yöntemi geliştirme (Turunçgiller grubu) *Belirlenen yöntemi benzer bir problemde uygulama (Turunçgiller grubu)	*Deneme yanılma stratejisi dışında bir yöntem geliştirmek için arkadaşlarını teşvik etme (Her iki odak grup) *Stratejik deneme yanılma yapmak için arkadaşlarını teşvik etme (Her iki odak grup) *Tablo yapmak için arkadaşlarını teşvik etme (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Şekil çizerek çözmek için arkadaşlarını teşvik etme (Turunçgiller grubu) *Problemi basitleştirmek için arkadaşlarını teşvik etme (Turunçgiller grubu) *Farklı problemlerin ortak çözüm yöntemini bulmak için arkadaşlarını teşvik etme (Turunçgiller grubu)	*Çiftlikteki tavuk ve tavşanların toplam kafa sayısının 40, toplam ayak sayısının 140 olması durumunda tavuk ve tavşan sayılarının ne olacağını sorma *Deneme yanılma yapmadan genel bir yöntem geliştirip geliştiremeyeceklerini sorma
Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) * Deneme yanılma stratejisini kullanarak problemlerdeki tavuk ve tavşan sayısını doğru belirleme (Tüm gruplar) *Muhakeme yaparak genel bir çözüm yöntemi geliştirme (Turunçgiller grubu)	*Deneme yanılma stratejisini ikna edici bulmama *Hayvan sayısının çok büyük olması durumunda deneme yanılmayı nasıl kullanacaklarını sorma *Turunçgiller grubunun çözümünü çok mantıklı bulma	*Nicelikler arası muhakeme yapıp yapamadıklarını belirlemek için deneme yanılmayı nasıl yaptıklarını sorma

Değerlendirme Aşaması

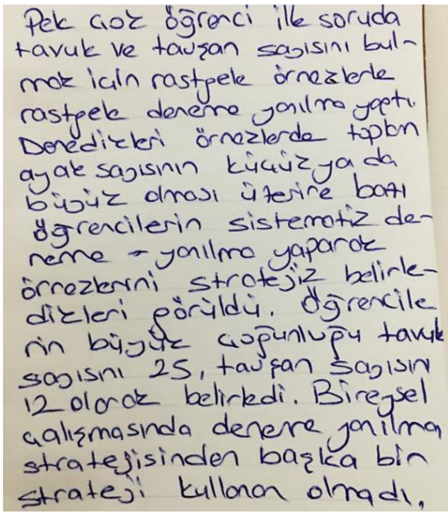
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme
*Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme
*Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri

DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*Uygulama

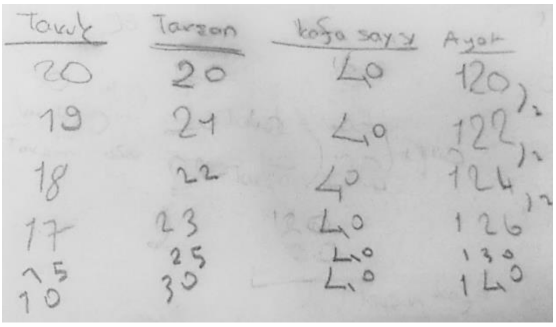
Belirlenen Sosyal Normlar	**Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar**
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne yazdığı bireysel çalışmaların değerlendirmesi Görsel 4.53.’te sunulmuştur:


Pek çok öğrenci ilk soruda
tavuk ve tavşan sayısını bul-
mak için rastgele örneklerle
rastgele deneme yanılma yaptı.
Denedikleri örneklerde toplam
ayak sayısının küçük ya da
büyük olması üzerine bazı
öğrencilerin sistematik de-
neme - yanılma yaparak
örneklerini stratejik belirle-
dikleri görüldü. Öğrencile
rin büyük çoğunluğu tavuk
sayısını 25, tavşan sayısın
12 olarak belirledi. Bireysel
çalışmasında deneme yanılma
stratejisinden başka bir
strateji kullanan olmadı.

Görsel 4.53. *Dördüncü hafta bireysel çalışmaların değerlendirilmesine ilişkin öğretmenin günlüğü*

Öğretmenin günlüğünde belirttiği gibi, öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun bireysel çalışmalarında, deneme yanılma yöntemini kullanarak tavuk sayısını 25, tavşan sayısını ise 12 olarak belirledikleri görülmüştür. Öğrenciler tavuk ve tavşan sayılarını bulmak için rastgele örneklerle deneme yanılma yapmışlardır. Denedikleri örneklerde toplam ayak sayısının küçük ya da büyük olması üzerine bazı öğrencilerin sistematik deneme yanılma yaparak stratejik örnekler seçtikleri görülmüştür. Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında öğretmen önceki haftalarda vurguladığı normların oluşmaya başladığını gözlemlemiştir. Küçük grup tartışmalarında odak gruplardaki öğrencilerin tavuk ve tavşan sayısını belirledikten sonra problemin bu kadar kolay olamayacağını, devamının olması gerektiğini söyledikleri görülmüştür. Turunçgiller grubundan bir öğrenci tavşan ve tavuk sayısını bulduklarını; ancak bu problemde tam olarak neyi göstereceklerini anlamadıklarını ifade etmiştir. Bunun üzerine öğretmen problemi genişleterek “*Bakın arkadaşınız diyor ki biz bulduk ama bunun altından ne çıkacak? O zaman söyleyeyim. Deneyerek buldunuz grupları* *dolaştım, çoğunuz tavşan ve tavuk sayısını bulmuşsunuz. Şimdi size bir soru daha soracağım. Çiftlikteki tavuk ve tavşanların toplam kafa sayısı 40, toplam ayak sayısı 140 olsaydı ne olurdu? Şimdi bunu da deneyerek yapabilirsiniz ama kısa sürede yapmanızı istersem ne yapacaksınız, birazdan belki benzer bir soru daha sorarım. Deneme yanılma yapmadan çözüm için bir yöntem geliştirmenizi ve bu yöntemle belirlediğiniz tavuk ve tavşan sayısının doğruluğuna beni ikna etmenizi istiyorum."* demiştir. Böylece öğretmen asıl amacın deneme yanılma yapmadan bir çözüm yöntemi geliştirmek, buldukları tavşan ve tavuk sayısının doğruluğuna öğretmeni ve sınıfı ikna etmek olduğunu belirtmiştir. Bu aşamadan sonra gruplardaki öğrencilerin farklı varsayımları değerlendirerek genel bir çözüm yöntemi bulmaya çalıştıkları görülmüştür. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarında ikinci problemi çözmek için tavuk sayısı, tavşan sayısı, toplam kafa sayısı ve toplam ayak sayısını gösteren bir tablo yaparak örüntü bulmaya çalıştıkları görülmüştür. Efsanevi Matematikçiler grubundan bir öğrencinin kâğıdındaki çözüm Görsel 4.54.'te sunulmuştur:



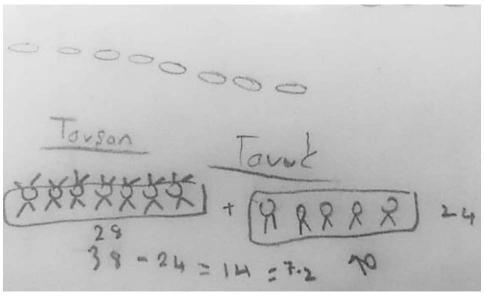
Görsel 4.54. *Dördüncü hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışması*

Görsel 4.54.'te görüldüğü gibi öğrenciler önce tavuk ve tavşan sayısını eşit kabul ederek denemeye başlamışlar, ayak sayısının problemde verilen sayıdan daha küçük çıkması üzerine tavuk sayısını azaltıp tavşan sayısını arttırmışlardır. Öğrencilerin tavuk sayısı, tavşan sayısı ve toplam ayak sayısı arasında ilişki kurabildikleri görülmektedir. Ancak doğru sonuca ulaşan Efsanevi Matematikçiler grubunun deneme yanılma dışında bir çözüm yöntemi geliştiremedikleri belirlenmiştir.

Turunçgiller grubunun ise birinci problemde olduğu gibi ikinci problemdeki tavşan ve tavukların sayısını stratejik örneklerle deneyerek buldukları daha sonra genel bir çözüm yöntemi geliştirmeye çalıştıkları ve deneme yanılma stratejisi dışında bir yöntem arayışında oldukları görülmüştür. Turunçgiller grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

> **…**
> **Öğrenci:** Bak dedim ben altından bir şey çıkacak diye.
> **Öğrenci:** Şimdi bizim bir şey geliştirmemiz lazım kısa yol lazım şimdi.
> **…**
> **Öğrenci:** Ya bak şimdi hoca diyor ki ben size bir soru daha vereceğim bunu bir dakika içinde çözün diyeceğim. Şimdi bizim de kısa yol bulmamız lazım. Yoksa çözemeyiz.
> **Öğrenci**: Yani bir formül geliştirmen gerekiyor ki bir dakikada çözebilesin.
> **Öğrenci:** Şimdi her birinde bir kafa olduğu için tavuk ve tavşanların toplam sayısı 40. Ayak da 140.
> **Öğrenci:** Deneyelim yine. Hangi sayılar oluyor?
> **Öğrenci:** Buldum galiba ben 30 tane tavşan 10 tavuk. Ama deneyerek buldum. Mesela ikisine de 20 verdim olmadı. Sonra değiştirdim.
> **Öğrenci**: Evet doğru 30'la 4'ü çarpınca 120, 10'la 2'yi çarpınca 20 toplam 140.
> **Öğrenci:** Tamam da sen yine sayı vermişsin öyle yapmamamız gerekiyor, bir yöntem geliştirmemiz gerekiyor. Yani hocanın istediği şey bence sadece bunun çözümü değil.
> **Öğrenci:** Bak şimdi ilk soruda 12 tavşandı ya, 25 de tavuk. Ardışık iki sayının toplamı bunu veriyor yani 12+13=25 oluyor.
> **Öğrenci:** O zaman hocanın yeni verdiğinde dene.
> **Öğrenci:** 10 tavuk 30 tavşan onda olmuyor.
> **Öğrenci:** Baksanıza her zaman aynısı büyük olmuyor. İlk soruda tavuk sayısı büyük, ikincisinde tavşan sayısı fazla oluyor.

Tartışmada, Turunçgiller grubunda bir öğrencinin şekil çizme fikrini sunmasıyla birlikte öğrencilerin 140 ayak çizmenin zor olacağını düşündükleri ve böylece bu problemin daha küçük sayıları içeren bir modelinden yararlandıkları belirlenmiştir. Buna göre öğrencilerin Görsel 4.55'te sunulduğu gibi çizdikleri kafalara önce 2 ayak çizerek, eksik ayak sayısından tavşan sayısını belirledikleri görülmüştür. Öğrencilerin çözüm stratejilerini düzenlerken bunu sistematik bir biçimde uygulamaya çalıştıkları, buldukları çözüm stratejisini algoritmik bir yaklaşım gibi birbirlerine sundukları, muhakeme yaparak buldukları çözüm yöntemini diğer probleme de uygulayarak modeller arasındaki ilişkiden faydalandıkları belirlenmiştir. Tartışmanın bu kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.55. *Dördüncü hafta Turunçgiller grubunun küçük grup tartışması*

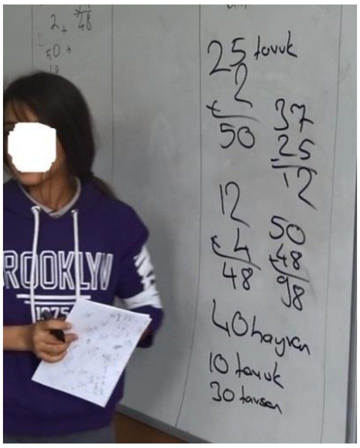
Öğrenci: Bence şekille deneyelim.
Öğrenci: Şekil strateji olur mu?
Öğrenci: Olabilir bence. Şimdi 40 tane yuvarlak yapalım bunlar kafa olsun. Ama 140 ayak nasıl çizeceğiz bilmiyorum.
Öğrenci: O zaman durun sayıları küçültelim. Mesela 12 tane olsun kafa sayısı. 5'le 7 alalım. Çizelim ayakları bence. 5 tavukta 10 ayak, 7 tavşan 28 ayak yani toplam 38 ayak.
Öğrenci: Şimdi üç tane soru oldu ya. Bizim bunların ortak yönünü bulmamız lazım.
Öğrenci: Önce hepsinde bir kafa var orası ikisinde de aynı. Ama ayaklar farklı. Tavuk da 4 ayaklı olsaydı keşke. Ama o zaman ayak sayısı fazla olurdu.
Öğrenci: Önce 2 ayak koyalım hepsine. O zaman 24 ayak olur.
Öğrenci: Öyle olmaz eksik çıktı.
Öğrenci: Kaç tane eksik çıktı baksanıza 38'den 24 çıkarsa 14 kaldı. Bak 14, 7'nin iki katı. Biz eksik ayak koyduk ya işte aslında onlar tavşanların sayısını bulmada işe yarıyor. Anladınız mı?
Öğrenci: Deneyelim o zaman hepsinde.
Öğrenci: Şimdi 40 taneye 2 ayak koysaydık 80 olurdu. 140-80= 60 kalıyor. İşte bu 60 aslında tavşanlara ait. O 60:2=30. Valla bulduk. (Gülüyorlar)
Öğrenci: İlk soruda ne oluyor? Onda da yapalım garanti olsun.
Öğrenci: Şimdi 37 tanede 2 ayak olsa, 74 olur. 98-74= 24 o da 12'nin iki katı. Tamamdır bu iş bu kadar.
Öğrenci: Şimdi anlatsana bir daha ben anlamadım.
Öğrenci: Şimdi hepsini 2 ayaklı yaptığımızda eksik ayak çıkıyor. O eksik olanı 2'ye böldük. Zaten başta onlara da 2 ayak yapmıştık ya, bir daha 2 ayak olursa toplam 4 ayaklı olurlar. Yani bunlar tavşan.
Öğrenci: Yani yöntem şu mu ilk önce kafa sayısı ile 2 çarpılır, sonra çıkan sonucu toplam ayaktan çıkarıp 2'ye bölüyoruz.
Öğrenci: Aynen. 37.2 =74, 98-74= 24 çıktı. Bu tavşan ayak sayısı. Sonra bunu 2'ye böleriz. 24:2= 12 çıktı. 12 tavşan 25 tavuk.
Öğrenci: Peki bunların hangisi tavuk hangisi tavşan?
Öğrenci: Şimdi bak o 2'ye böldüğümüz her zaman tavşan oluyor. Çünkü tavşanın 4 ayağı var.
Öğrenci: Neden 2 ye böldün?
Öğrenci: Çünkü tavşanların ayak sayısı 4 olduğu için. Bir kere 2 ayak yaptık ya onlara bir daha 2'ye bölersek her birine 4 ayak düşer.
Öğrenci: Şimdi hoca başka bir soru sorsa bir dakikada yaparız bence.

Bununla birlikte tartışma sırasında bir öğrencinin cebirsel yöntem kullanmayı önerdiği; ancak pek çok harf kullanmaları gerektiği için bu çözüm yönteminden vazgeçtikleri belirlenmiştir. Bu etkinliğin yapıldığı tarihte bir bilinmeyenli denklem çözmeyi henüz öğrenmemiş olan öğrencilerin verdikleri tepki doğal karşılanmıştır. Tartışmanın bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

> **…**
> **Öğrenci:** Peki hoca cebirsel derse. Onu da düşünelim. Mesela a kafa sayısı olsun. b de ayak sayısı. Biz a ile 2'yi çarparız buna c diyelim. b'den c'yi çıkarırız. Bu tavşan ayak sayısı olsun. Buna da d diyelim sonra d'yi 2 ye böleriz bu tavşan sayısı olur.
> **Öğrenci:** Bence bu çok karışık bir sürü harf oldu biz bunları öğrenmedik bunla anlatmayalım. İyi bir açıklama yaparsak kabul eder hoca.
> **…**

Görüldüğü gibi öğrenciler önceki haftalarda olduğu gibi küçük grup tartışmalarında, işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, düşüncelerini paylaşmaları için kendi grup arkadaşlarını teşvik etmişlerdir. Öğrenciler grup tartışması boyunca birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, grup üyelerini ikna etme, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normlarının göstergesidir. Öğrencilerin yaptıkları çözüm sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ayrıca buldukları çözüm yönteminde her bir işlemi nedenleriyle beraber açıkladıkları yani çözüm yönteminin nasıl işlediğine dair kavrayışa sahip oldukları da görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin alt işlevlerinden *kavrayış sağlama* alt işlevine hizmet etmektedir. Bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca öğretmen her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlenmiş, önemli noktaları vurgulamış ve grup sözcüleri çözümlerini bitirdikten sonra sınıfa "Bu çözüm sizi ikna etti mi?” diye sorarak sınıf tartışmasını başlatmıştır. Her bir grup sözcüsünün yaptığı gerekçelendirme üzerinde durularak, bu gerekçelendirilmiş açıklamaların kabul görüp görmediği sınıf tarafından tartışılmıştır. Küçük gruplardan sadece Turunçgiller grubunun bir yöntem geliştirdikleri diğerlerinin deneme yanılma yöntemi ile problemleri çözdükleri görülmüştür. Efsanevi Matematikçiler ve Starlar grubunun daha sistemli deneme yaparak; ancak Çalışkan Arılar grubunun rastgele denemeler yaparak sonuca ulaştıkları belirlenmiştir. Çalışkan Arılar grubunun yaptığı çözüm Görsel 4.56.’da sunulmuştur. Nitekim bu çözüm yöntemi sınıf tarafından eleştirilmiş ve bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun oluşumuna hizmet etmiştir. Çalışkan Arılar grubunun çözümü aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.56. *Dördüncü hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Hocam aslında biz de Starların yaptığı gibi yaptık. Yani toplamları 37 olacak şekilde denedik. Sonra 25’le 12’nin olduğunu gördük. 25 tavuk sayısı, 12 de tavşan sayısı oldu. 25.2= 50 12.4= 48 toplamları da 98 oldu. Yani diğer grubun aynısı. İkinci soruda da aynısını yaptık denedik ve 10’la 30’un doğru olduğunu gördük.
Öğretmen: Peki deneyerek yaparken nasıl bir yöntem izlediniz?
Grup sözcüsü: Hocam biz tüm sayıları denedik çıkıncaya kadar. Doğru sonuç bunlarla çıktı.
Öğretmen: Yani tüm sayıları derken mesela kaçtan başladınız hangilerini denediniz?
Grup sözcüsü: Hocam biz 1’den başladık. Yani tavuğa 1 dedik, tavşana 36 sonra baktık olmadı değiştirdik.
Öğretmen: Evet soruları alalım.
Öğrenci: Başka bir yolunuz var mı yani örneklerle denemeden tavuğun 10 tavşanın 30 olduğunu kanıtlar mısın?
Grup sözcüsü: Biz böyle yaptık. Hepimiz farklı sayılarla denedik. Birimiz 1’le birimiz 2’ye falan denedik. Doğru sonucu buluncaya kadar böyle yaptık.
Öğrenci: Siz dediniz ya 1’den başladık. Mesela bu Ali çok varlıklı bir kişi olsa mesela diyelim ki 1000 tane hayvanı olsa 1’den başlayarak nasıl deneyerek yapacaktınız? Zaten 15 dakika süremiz var bulabilir miydiniz?

Grup sözcüsü: Biz öyle düşündük, o kadar çok olsaydı belki bulamazdık. Yani deneyerek yapmaktan başka çözüm yolu bulamadık.
Öğrenci: Aslında hocam onlar da bizim yaptığımız gibi yapabilirlerdi. Tamam biz de bir çözüm yöntemi geliştiremedik ama biz daha yakın verdik sayıları. Biz mesela 1 olacağını hiç düşünmediğimiz için ikinci problemde 20 veya 30'dan başladık. Sonra ayak sayısı az çıkınca değiştirdik. Kısa sürede bulduk.
Öğretmen: Neden 1 olacağını hiç düşünmediniz?
Öğrenci: Hocam saçma olurdu çünkü. Bir de zaman kaybı olurdu.

Tartışmada görüldüğü gibi öğretmenin grup sözcüsüne deneme yaparken izledikleri yöntemi sorması üzerine grup sözcüsünün 1'den başlayarak tek tek denediklerini belirtmesi tavuk sayısı, tavşan sayısı ve toplam ayak sayısı arasında ilişki kuramadıklarının ve aritmetiksel stratejiyi bilinçli bir şekilde kullanmadıklarının göstergesi olarak kabul edilebilir. Nitekim bu durum öğrencilerin çok fazla deneme yapmasına ve uzun sürede problemi çözmelerine neden olmuştur. Diğer gruplardan öğrencilerin Çalışkan Arılar grubunun 1'den başlayarak tek tek deneme yapmalarını sorguladıkları, zamanlarını daha etkili bir şekilde kullanmaları için sistemli deneme yanılma yapmaları gerektiği konusunda kendi görüşlerini savundukları görülmüştür. Ayrıca bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir.

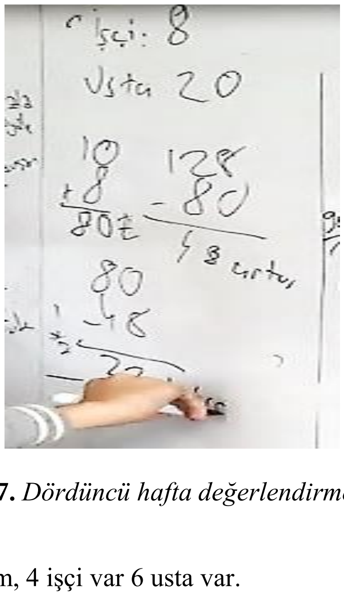
Çözüm için bir yöntem geliştiren Turunçgiller grubu kendi çözümlerini sunduktan sonra öğretmen bu çözüm yönteminin doğru olduğunu iyi bir açıklama yaparak kanıtlamalarını istemiştir. Grup sözcüsünün yanıtı aşağıda sunulmuştur.

…
Öğrenci: Hocam şimdi tavuk ve tavşan sayısı var bir de ayak sayısı var. Önce şöyle düşündük bu hayvanların hepsi tavuk ya da tavşan olsa çözmek kolay olurdu. Sonra dedik ki hepsini tavuk yapalım. Hepsi tavuk olduğunda tavuğun 2 ayağı olduğu için 2'yle çarparız. Bu sefer ayaklar eksik çıkar. İşte o eksik ayak sayısı bize tavşanları verir.
Öğretmen: Neden hepsini tavşan olarak düşünmediniz?
Öğrenci: Tavşan olarak da düşünülebilir. O zaman da ayak sayısı fazla çıkardı. Yapayım mı hocam. 40.4=160 işte fazla çıkıyor bu fazla çıkanlar tavuk olur. 160-140=20 çıktı. 20 ayak fazla çıktı demek ki bunlar tavuk olacak 20:2=10 işte tavuk 10 çıktı.

Turunçgiller grubunun dışında diğer gruplar ikna edici ve geçerli bir kanıt sunamadıklarını fark etmişler ve bütün gruplar Turunçgillerin çözüm yönteminin doğru olduğuna ikna olmuşlardır. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Bununla birlikte öğretmen benzer bir problem daha sorarak bu çözüm yöntemini uygulamalarını beklemiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Şimdi çocuklar hepiniz önce deneme yanılma yöntemini kullandınız. Zaten hep söylüyorum ya problemi anlamak için örneklerden yararlanabiliriz. Bu problemde de bütün gruplar önce deneme yanılma yöntemi ile tavuk ve tavşan ayak sayısını buldular. Ama denerken de dikkat etmeniz gereken bir nokta var. Hani geçen haftalarda da söyledim. Verdiğiniz örnekler rastgele örnek olmasın, stratejik örnek olsun. Burada bir sayı denediniz mesela tavuğa 10 dediniz, tavşan sayısını buldunuz sonra ayak sayısını buldunuz. Baktınız ki ayak sayısı olması gerekenden az çıktı, o zaman kimin daha çok ayağı var, tavşanın. Tavşan sayısını arttırıp tavuk sayısını azaltmak gerekir. Yani denerken de belli bir stratejimiz olsun. Şimdi problemi anlamak için denedik ama sürekli deneyerek bulamayız. Ya sayılar daha büyük olsaydı işimiz zor olurdu. Ben sizden deneme yapmadan bulduğunuz tavuk ve tavşan sayılarının doğruluğuna beni ikna etmenizi istedim. Turunçgiller belli bir yöntem geliştirdiler. Hepsini tavuk olarak düşünüp eksik ayak sayısını buldular ve eksik ayak sayısının tavşana ait olduğunu söyleyip tavşan ve tavuk sayısını buldular. 37.2= 74 oldu, yani tavukların ayak sayısı. 98 den 74'ü çıkarınca 24 çıktı. 24:2= 12 çıktı. 12 tavşan oldu, 25 de tavuk. Şimdi madem bu çözüm yöntemini herkes anladı. Son bir soru daha. Bakalım hangi grup bu problemi 2 dakika içinde çözecek. Usta ve işçilerden oluşan 10 kişilik grup bir işten toplam 128 lira kazanıyor. Bir usta 20 lira bir işçi 8 lira alıyorsa bu grupta kaç işçi kaç usta vardır?

Bu aşamada tüm sınıfın problemi çözmeye çalıştığı ve Efsanevi Matematikçiler grubunun problemi Görsel 4.57.'deki gibi çözdükleri belirlenmiştir. Grup sözcüsü çözümlerini yapmış ve sonrasında gelişen tartışma aşağıda sunulmuştur:



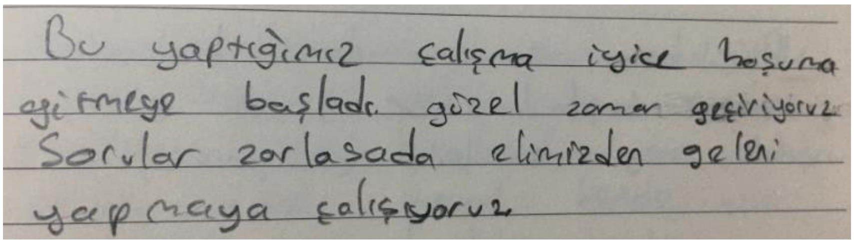
Görsel 4.57. *Dördüncü hafta değerlendirme aşaması*

Öğrenci: Biz bulduk hocam, 4 işçi var 6 usta var.

Öğretmen: Şimdi yöntem geliştirmenin ne kadar önemli olduğunu anladınız mı? Deneyerek yapsaydık ne kadar uzun sürecekti. Evet 4 işçi ve 6 usta olduğunu kanıtlayın o zaman.
Öğrenci: Hocam biz hepsini işçi olarak düşündük. 8'le 10'u çarptık 80 çıktı. 128-80=48, 80-48=32 lira işçi parası. 32:8=4 işçi çıkar.

Bu çözüm yönteminin doğruluğu tüm sınıf tarafından onaylanmıştır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bu problemde öğrencilerin kendi buldukları çözüm yöntemini genelleyerek karşılaştıkları farklı problemlerde kullandıkları, bir kuralın farklı durumlarda nasıl uygulanabileceğini fark ettikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *uygulama* alt işlevine hizmet etmektedir.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerin günlüklerinden alınan bir örnek Görsel 4.58.'de sunulmuştur:


Bu yaptıgımız çalışma iyice hoşuma
gitmeye başladı güzel zaman geçiriyoruz
Sorular zorlasada elimizden geleni
yapmaya çalışıyoruz

Görsel 4.58. *Dördüncü hafta öğrenci günlüğü örneği*

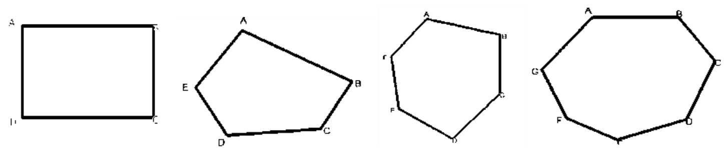
4.2.1.5. Beşinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

Beşinci hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.11'de görüldüğü gibi öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri problemi sunulmuştur. Öğretimin sonunda Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller ve Starlar gruplarının kanıt yapabildikleri görülmüştür.

Tablo 4.11. *Beşinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik

* Aşağıda bir dikdörtgen, bir beşgen, bir altıgen ve bir yedigen verilmiştir. Bu geometrik şekillerin iç açılarının ölçülerinin toplamını bulun.



Etkinliğin genişletilmesi:
*Bir otuzgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaçtır?
*n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kaçtır?
*Düzgün bir çokgenin bir iç açısının ölçüsünü nasıl buluruz?

Etkinliğin Odağı

*Matematiksel varsayım geliştirme
*Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme

- Bir çokgenin (konveks) iç açılarının ölçüleri toplamının (n-2).180 olduğunu doğrudan kanıt yaparak gösterme

*Geometri-cebir ilişkisi kurma: Cebirsel genellemenin geometrik açıklamasını yapma

Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma	**Bireysel Çalışmayı Yönlendiren Öğretmen Soruları**
* Problemi analiz etmek için çokgenler üzerinde rastgele çizimler yapma ve iç açıların her birine rastgele değerler verme *Çokgenleri farklı geometrik şekillere tamamlama (Beşgeni üçgene tamamlama vb.) *Çokgenleri farklı geometrik şekillere (üçgen ve dörtgen vb.) parçalama *Çokgenin rastgele seçilen birkaç köşesinden yararlanarak çokgeni üçgenlere parçalama *Çokgenin tek bir köşesinden yararlanarak çokgeni üçgenlere parçalama	*Hangi çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını bildiklerini sorma *Bildikleri çokgenlerden yararlanıp bilmediklerine ulaşıp ulaşamayacaklarını sorma
Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	**Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**
*Çokgenlerin kenar-köşe sayısı, köşegen özellikleri, üçgenin iç açıları toplamı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) * Herhangi bir çokgenin bir köşesinden çıkabilecek köşegenlerle oluşan üçgenler yardımıyla (n-2). 180 genellemesine ulaşma (Her iki odak grup) * Cebirsel genellemelerin geometrik açıklamasını yapma (Her iki odak grup)	*Ölçüm yapma ve görsel algıya dayalı çıkarımda bulunmayı geçerli bir yöntem olarak kabul etmeme (Turunçgiller grubu) *Arkadaşlarını çokgenleri üçgenlere parçalama konusunda teşvik etme (Her iki odak grup) *Çokgenin tek bir köşesinden, her köşesinden ya da rastgele seçilen birkaç köşesinden üçgenlere parçalama (Her iki odak grup) *Arkadaşlarını çokgenleri parçalarken tek bir köşeden çizilen köşegenlerle üçgenler oluşturmaları konusunda teşvik etme (Her iki odak grup) *Bir çokgenin farklı bir köşesini kullanarak üçgenler oluşturmanın, çokgende oluşan toplam üçgen sayısını etkilemeyeceğini belirtme (Her iki odak grup) *Arkadaşlarını cebirsel temsil kullanmaya teşvik etme (Her iki odak grup) *Çokgenlerin iç açılar toplamları arasında kat ilişkisi bulmaya çalışma (Turunçgiller grubu) *Varsayımın doğruluğunun gerekçelendirilmesi gerektiğinin farkında olma (Her iki odak grup) *Köşe sayısının 2 eksiği ile 180'i neden çarptığını gerekçelendirme (Her iki odak grup)

Tablo 4.11. (Devam) *Beşinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

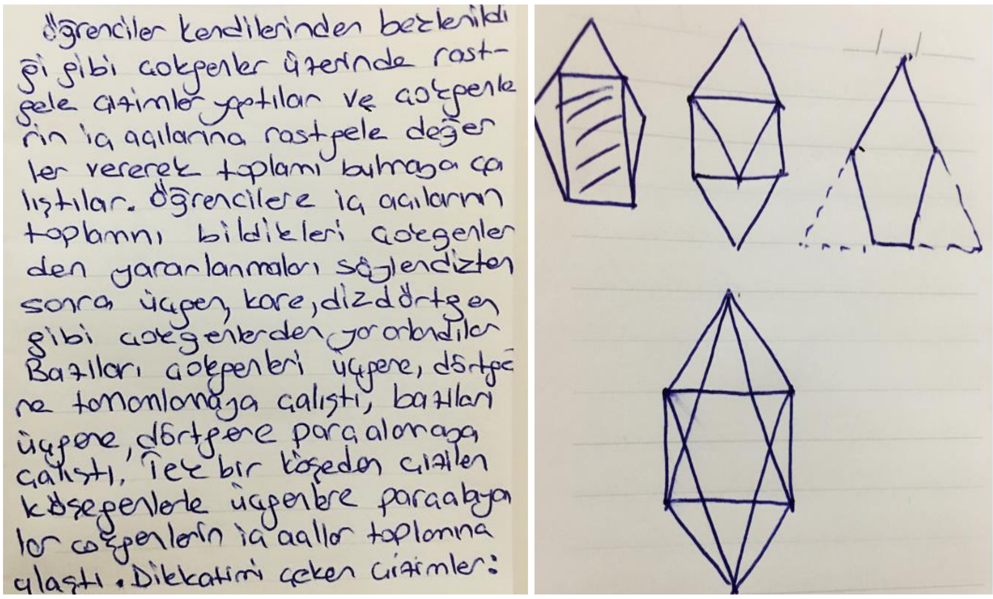
Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları
*Çokgenlerin kenar-köşe sayısı, köşegen özellikleri, üçgenin iç açıları toplamı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) *Bir çokgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının n.180 olduğu iddia etme (Çalışkan Arılar grubu) * Herhangi bir çokgenin bir köşesinden çıkabilecek köşegenlerle oluşan üçgenler yardımıyla (n-2). 180 genellemesine ulaşma (Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller ve Starlar grubu) *Cebirsel genellemelerin geometrik açıklamasını yapma (Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller ve Starlar grubu)	*Çokgenin rastgele seçilen birkaç köşesinden parçalamayı kabul etmeme *Bir çokgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının n.180 olduğu iddiasını çürütme	*Verilen dörtgeni neden dikdörtgen olarak düşündüklerini sorma *Verilen çokgenleri neden üçgenlere parçaladıklarını sorma *Verilen çokgenleri üçgenlere parçalarken nasıl bir yöntem tercih ettiklerini sorma * Çokgenleri üçgenlere parçalarken neden çokgenin tek bir köşesinden parçaladıklarını sorma

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, teoremlerin, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama *Sonuçları görme	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	* İlişkileri ortaya çıkarma * Tutarsızlıkları ortaya çıkarma *Uygulama

Belirlenen Sosyal Normlar	Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne yazdığı bireysel çalışmaların değerlendirmesi Görsel 4.59.'da sunulmuştur:


öğrenciler kendilerinden beklenildi-
ği gibi çokgenler üzerinde rast-
gele çizimler yaptılar ve çokgenle-
rin iç açılarına rastgele değer-
ler vererek toplamı bulmaya ça-
lıştılar. Öğrencilere iç açıların
toplamını bildikleri çokgenler-
den yararlanmaları söylendikten
sonra üçgen, kare, dikdörtgen
gibi çokgenlerden yararlandılar.
Bazıları çokgenleri üçgene, dörtge-
ne tamamlamaya çalıştı, bazıları
üçgene, dörtgene parçalamaya
çalıştı, Tek bir köşeden çizilen
köşegenlerle üçgenlere parçalaya-
lar çokgenlerin iç açılar toplamına
ulaştı. Dikkatimi çeken çizimler:

Görsel 4.59. *Beşinci hafta bireysel çalışmaların değerlendirilmesine ilişkin öğretmenin günlüğü*

Öğretmenin notlarında belirttiği gibi bireysel çalışmalarında öğrencilerin problemi analiz etmek için çokgenler üzerinde rastgele çizimler yaptıkları ve çokgenlerin iç açılarının her birine rastgele değerler vererek iç açılarının ölçüleri toplamını bulmaya çalıştıkları görülmüştür. Öğretmenin, iç açılarının ölçülerinin toplamını bildikleri çokgenlerden yaralanabileceklerini söylemesi üzerine bazı öğrencilerin verilen çokgenleri üçgenlere ya da dörtgenlere tamamlamaya çalıştıkları, bazılarının ise çokgenleri farklı şekillerde üçgenlere parçaladıkları görülmüştür. Bu aşamada çokgenleri tek bir köşeden çizilen köşegenlerle üçgenlere parçalamayı başaran öğrencilerin verilen çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamına ulaşabildikleri; ancak hiçbir öğrencinin (n-2).180 genellemesine ulaşamadığı görülmüştür. Öncelikle odak gruplardaki öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun çokgenleri üçgenlere parçalamayı tercih ettikleri, verilen çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmak için çokgenlerin köşegen sayısından ve üçgenin iç açıları ölçüleri toplamından yararlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin gerekli kavram ve işlem bilgisine sahip oldukları belirlenmiştir. Bir çokgenin farklı bir köşesini kullanarak üçgenler oluşturduklarını gözlemleyen öğrenciler (örneğin bir öğrenci A köşesinden çizilen köşegenlerle üçgen oluştururken, başka bir öğrenci B köşesinden çizilen köşegenlerle üçgen oluşturmuştur) hangi köşeyi seçtiklerinin oluşan üçgen sayısını değiştirmeyeceğini küçük grup tartışmalarında belirtmişlerdir. Bununla birlikte odak gruplardaki öğrencilerin çokgenleri üçgenlere parçalarken çokgenin tek bir köşesinden parçalama, çokgenin her köşesinden parçalama ve çokgenin rastgele seçilen birkaç köşesinden parçalama olmak üzere üç farklı strateji kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun çokgenleri parçalarken tek bir köşeden çizilen köşegenlerle üçgenler oluşturmaları gerektiğinin farkına vardıkları ve bu durumu nedenleriyle birlikte açıkladıkları gözlenmiştir. Bir çokgende aynı anda birkaç köşeden ya da her köşeden köşegen çizerek üçgenler oluşturan öğrencilerin stratejileri grup arkadaşları tarafından düzeltilmiştir. Odak küçük grupların verilen çokgenlerin iç açıları toplamını bulmak için kenar (ya da köşe) sayısının 2 eksiği ile 180'i çarpmaları gerektiği genellemesine ulaştıkları görülmüştür. Bununla birlikte Turunçgiller grubundan bir öğrencinin çokgenlerin iç açılar toplamları arasında kat ilişkisi bulmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Öğrenci dörtgenin, beşgenin, altıgenin ve yedigenin iç açılarının ölçülerini yazarak örüntü oluşturmaya çalışmıştır. Öğrencinin grup tartışmasındaki çözümü şu şekildedir:

> **…**
> **Öğrenci:** Bakın ben bir şey buldum. Bence tahtada bunu da sunalım. Şimdi siz bulduğunuz formülle dörtgeni 360, beşgeni 540, altıgeni 720, yedigeni de 900 buldunuz ya. Hepsinde zaten 180 ekliyorsun. Bunları alt alta yazdım sırayla. Şimdi dörtgen de 90'nın 4 katı oldu, beşgende 90'nın 6 katı, altıgende 90'nın 8 katı oldu. Yani hep 2 kat 2 kat artıyor.
> **Öğrenci:** Biz zaten genel bir şey bulduk. Sen yine örnekle yapıyorsun.
> **Öğrenci:** Bence de senin yaptığına gerek yok. Bir de bu bizimkinin aynısı. Baksana sen 90'nın 4 katı diyorsun ben 180'nin 2 katı diyorum. Aynı şeyleri söylemeye gerek yok bence.
> **…**

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenci çokgenlerin kenar sayıları ve iç açıları toplamını arasındaki ilişkiye odaklanarak bir kural oluşturmaya çalışmıştır. Ancak öğrencinin bu sayısal yaklaşımı grup arkadaşları tarafından kabul edilmemiştir. Aynı grupta bir öğrencinin açıölçer kullanarak dörtgenin iç açılarını ölçtüğünü ve açıların her birini 90^{o} bulduğunu, diğer çokgenleri de aynı şekilde bulabileceklerini söylemesi arkadaşları tarafından kabul görmemiş, bu durum için 3. hafta öğretimine vurgu yapılmıştır. Yine Turunçgiller grubundan bir başka öğrencinin görsel algıya dayalı olarak çokgenlerin iç açılarına değer vermesi de arkadaşları tarafından reddedilmiştir. Bu durumlar *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük grup tartışmaları devam ederken öğretmen problemi genişletmiş ve otuz kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmalarını istemiştir. Gruplardan birkaç öğrenci otuzgeni nasıl çizeceklerini, çizmenin çok zor olacağını söyleyince öğretmen, n kenarlı herhangi çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmak için genel bir formül geliştirmelerini istemiştir. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

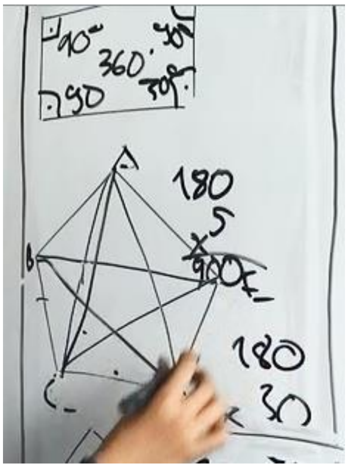
Öğrenci: Ben üçgen çizdim galiba siz de öyle yapmışsınız.
Öğrenci: Şimdi benim yaptığımda bir sürü üçgen çıktı. Hepsinin açısı 180, sen nasıl buldun ki o 540'ı. Bak burası bir üçgen burası bir üçgen.
Öğrenci: Ama yanlış çizmişsin. Yani yanlış bölmüşsün. Üçgen çizerken açının boşa gitmemesi lazım. Bir de üçgen çizerken şeye dikkat ettiniz mi mesela farklı üçgen de çizilebilir ama buradaki açı ne alaka. İç açısıyla ilgisi yok.
Öğrenci: Ben de üçgen oluşturdum. Mesela burada (beşgen) 3 üçgen oluşturdum. Burada da (altıgen) 4 üçgen çıktı. Yani hepsi 2 eksiği oluyor.
Öğrenci: Şimdi bir de ben şöyle düşümdüm, bu çokgenleri üçgenlere ayırdığımızda bir üçgeni bir defa kullandım ya, bir daha kullanmadım.
Öğrenci: Ben de şöyle yazdım çokgeni üçgenlere böleriz kaç üçgen varsa onla 180'i çarparız. Çünkü her üçgenin açısı 180.
Öğrenci: Ama bir şey söyleyeceğim dikdörtgeni de aynı yapmamız lazım. 90.4 yazmışsın.
Öğrenci: O zaman onu da 2 üçgene ayıralım. O zaman olur. Yani bakın kaç köşesi varsa onun 2 eksiği üçgen olur.
Öğrenci: Sen üçgenleri farklı bölmüşsün. Öyle yapılmaz bak buradaki açılar boşa gidiyor. Sen çok fazla bölmüşsün bu üçgeni saymamıza gerek olmuyor.
Öğrenci: Yani bak şöyle düşün bizden istenen açılar hangisi bu açılar ama sen ortadaki açıları da hesaplamışsın. Onlar bize dâhil değil. Sen fazladan bölmüşsün. İkna oldun mu?
Öğrenci: Tamam.
…
Öğrenci: Otuzgeni nasıl yapacağız?
Öğrenci: Onda da 30 köşe var 28'le 180'i çarpacağız.
Öğrenci: n'liyi nasıl yapacağız?
Öğrenci: O da aynı olur n'den 2 çıkarıp 180'le çarpacağız. Yani n-2 ile 180'i çarpacağız.
Öğrenci: Olmaz öyle. Hocanın n dediği kenar. Ama biz dedik ki köşe sayısının 2 eksiği ile 180'i çarpıyoruz.
Öğrenci: Tamam da kaç tane kenar varsa zaten o kadar köşe vardır. Bak beş kenar beş köşe. n kenarlı bir çokgende n-2 tane üçgen oluşur. Bir üçgenin iç açısı 180 ya o yüzden toplam iç açıyı bulmak için çarparız.
Öğrenci: Tamam o zaman.
Öğrenci: Mesela 100 kenarlı olsaydı 98'le 180'i çarpardık.
Öğrenci: Peki tahtada derlerse niye bu üçgenleri böyle böldün başka türlü bölmedin ne diyeceğim.
Öğrenci: Şöyle de fark etmez ki. Bak sen A'dan başladın ben B'den başladım ama aynı çıktı.
Öğrenci: Zaten hangisinden başlarsak hep iki köşe artıyor o iki köşeyle birleştiremiyoruz. O yüzden fark etmiyor.
Öğrenci: Bak mesela ben şimdi E den başlayayım yine dört tane oluştu. Yani hangisinden başlarsak başlayalım hep aynı şekilde oluyor. Ama şeye dikkat et mesela sadece bir noktayı kullanman lazım.
Öğrenci: Peki sizce hoca sorar mı neden 2 eksiği diye?
Öğrenci: Ya dedim ya, her zaman 2 köşeyi atlıyoruz üçgen çizince. Yani biz üçgen çizmek için çizgi çiziyoruz ya 2 tane köşeye çizemiyoruz.

Öğrenci: Bir de ilk de ki tahtada bir üçgenin açısı 180°, biz üçgeni bildiğimiz için üçgenlere böldük de ve her üçgenin bir başlangıç noktası olmak zorunda ben bu noktayı seçtim üçgenleri çizdim de. Başka noktalar da seçilebilir ama aynı çıkar de.

Yukarıdaki tartışmada *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normu gözlenmektedir. Her iki odak grubun hem sözel hem de cebirsel genellemeye ulaştıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları çözüm sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamının (n-2).180 olduğu genellemesine ulaşmaları ve bu genellemenin neden doğru olduğunu gerekçelendirmeleri kanıtın *doğru olduğuna ikna olma* ve *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma ve çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca öğretmen her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlenmiş, önemli noktaları vurgulamış ve grup sözcüleri çözümlerini bitirdikten sonra sınıf tartışmasını başlatmıştır. Küçük gruplardan üçünün kanıt yapabildiği; ancak Çalışkan Arılar grubunun kanıt yapamadığı belirlenmiştir. Çalışkan Arılar grubu dikdörtgenin iç açılarının ölçülerinin toplamını bulmak için dikdörtgenin bir iç açısının ölçüsü ile 4'ü çarptıklarını, beşgeni ise 5 üçgene parçalayabildiklerini ve bu yüzden 5 ile 180'i çarptıklarını ifade etmişlerdir. Çalışkan Arılar grubunun aynı anda farklı köşelerden köşegen çizerek üçgenler oluşturdukları görülmüş ve çözümleri Görsel 4.60'da sunulmuştur. Çalışkan Arılar grubunun bu durumu diğer çokgenlere de genellediği, bütün çokgenlerde açı sayısı ile 180'i çarptıkları görülmüştür. Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

Grup sözcüsü: Hocam dikdörtgenin açıları zaten hepsi dik olduğu için 90'la 4'ü çarpınca 360 çıkıyor.
Öğretmen: Nerden anladınız dikdörtgen olduğunu?
Grup sözcüsü: Çünkü dik görünüyor hepsi. Şimdi beşgenin beş açısı var, bu yüzden biz 180.5=900, altıgenin altı açısı olduğu için 180.6=1080 çıkıyor. Yedigende de 7 ile 180'i çarparız. Otuzgen de 30.180 olur, n kenarlı olunca da kaç kenarı varsa 180'le n'i çarparız. Yani biz n.180 diyoruz.
Öğretmen: Neden üçgenlere ayırdınız, nerden geldi aklınıza?
Grup sözcüsü: Hocam bizde ilk üçgene bölmeyi Yusuf yapmıştı. Biz ondan gördük. Bir de siz bildiğinizden yararlanın dediniz.
…
Öğrenci: Hocam neden beşgende 5'le çarptı?
Grup sözcüsü: Çünkü biz beşgeni beş üçgene ayırabildik. Üçgenlerin her birinin açılarının toplamı 180° olduğu için 5'le 180'i çarptık.
Öğretmen: Çizer misin beşgendeki 5 üçgeni?
Grup sözcüsü: Çizerim.

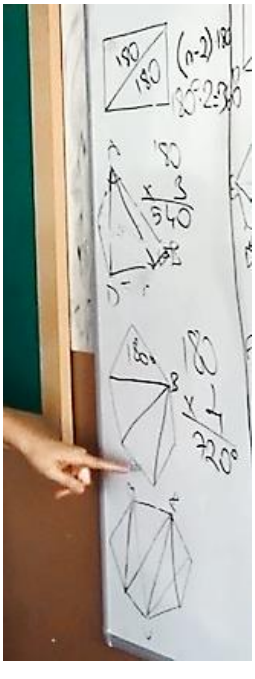


Görsel 4.60. *Beşinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: İşte böyle 5 üçgen çıkıyor. Yıldız çıkıyor.
Öğretmen: Üçgenlerin adlarını söyler misin?
Grup sözcüsü: ABC, CDE ABE ACD, AED, üçgeni. Beş üçgen oluştu.
Öğrenci: Hocam köşeleri birleştirerek yapmışlar ama orada bir sürü üçgen var. Sadece 5 tane yok ki. Tek bir köşeden başlamanız gerekirdi.
Grup sözcüsü: Biz sadece bunları gördük.
Öğrenci: Bir şey soracağım, beşgenin kaç iç açısı var?
Grup sözcüsü: Beş iç açısı var.
Öğrenci: Şimdi siz 900 bulmuşsunuz ya mesela bunun diyelim ki tüm açıları eşit olsun yani 900'ü 5'e bölünce her bir açısı 180 mi diyorsunuz? O açılar 180 gibi görünmüyor ama. Mantıklı düşününce 180 ise her bir iç açısı doğru açı olurdu.
Öğrenci: Bir de hocam dikdörtgende 90.4=360 dediler o zaman onda da diğerleri gibi 4.180 deseydiniz. Çünkü sizin bulduğunuz formül n.180 ya neden dikdörtgende farklı olsun ki o da bir çokgen.
Öğrenci: Hocam bir şey sormak istiyorum. Üçgenin iç açılarının toplamı kaç?

Grup sözcüsü: 180
Öğrenci: Tamam şimdi o zaman sizin yazdığınız formüle göre 3. 180 olur. Her türlü yanlış yapmışsınız.
Grup sözcüsü: Hocam bizimki çürüdü galiba.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi Çalışkan Arılar grubu iddialarının hatalı olduğunu fark etmişlerdir. Sınıftaki öğrenciler kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlar, arkadaşlarının varsayımını çürütmeye çalışmışlar ve grubun kendi mantıksal tutarsızlıklarını fark etmelerini sağlamışlardır. Grubun beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 900^{o} olduğunu iddia etmesi üzerine bir öğrencinin beşgenin bir açısının ölçüsünden yola çıkarak iddiayı çürütmesi, ayrıca başka bir öğrencinin de buldukları genellemeyi üçgene uyarlayıp iddiayı çürütmesi dikkat çekicidir. Kanıt burada *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Bununla birlikte doğru çözüm yapan gruplardan biri olan Starlar grubunun çokgenleri Görsel 4.61.'de sunulduğu gibi doğru bir şekilde üçgenlere parçaladıkları ve üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı yardımıyla çokgenlerin iç açılarının ölçülerini buldukları tespit edilmiştir. Starlar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.61. *Beşinci hafta Starlar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Hocam biz bu dikdörtgeni üçgenlere böldük, iki üçgen çıktı, üçgenin açılarının toplamı 180^{o}'dir. 180'le 180'i topladık 360 çıktı. Yani hocam diğerlerini de yapınca şöyle bir şey keşfettik kaç köşesi varsa onun iki eksiğiyle 180'i çarpınca iç açıların toplamı çıkıyor. Diğerlerini de gösterdik. Mesela beşgende 3 tane çıktı, 3'le 180'i çarptık 540 çıktı. Altıgende de 4 üçgen çıktı 4'le 180'i çarptık 720 oldu. Yedigende de 5'le 180'i çarptık 900 oldu. Otuzgenin 30 köşesi var iki eksiği 28 ile 180'i çarptık. n kenarlı olunca de (n-2). 180 oldu.
Öğretmen: Neden üçgenlere böldünüz yani nerden geldi aklınıza?
Grup sözcüsü: Çünkü üçgenin açılarının 180 olduğunu biliyorduk. Aslında önce ben mesela beşgeni bir üçgene sonra bir dörtgene ayırmıştım. Üçgenin 180 dörtgenin 360 toplayınca 540 olmuştu. Ama sonra şöyle düşündüm mesela ongen olsa bir üçgen ve bir dokuzgen olsa ben dokuzgenin açılarını bilmiyorum. O yüzden hepsini üçgene ayırdım.
Öğretmen: Peki üçgenlere ayırırken neden bu yolu tercih ettiniz?
Grup sözcüsü: Hocam mesela ben burada A köşesinden başladım, ama istersem B'den de başlayabilirim hangi köşeden başlarsak başlayalım hep aynısı oluyor. Yani beşgende mesela hep 3 üçgen çıkıyor.
Öğretmen: Peki neden sadece 3 üçgen, mesela beşgende E'den B'ye köşegen çizip orada da bir üçgen oluşturabilirdiniz.
Grup sözcüsü: O zaman bir sürü üçgen çıkartabiliriz. Ama oluşturduğumuz üçgenlerin açıları çokgenin açılarına dâhil olmuyor. Mesela önce A'dan başlayıp oluşturduk sonra silip B'den başlayıp oluşturduk yine üçgen sayısı aynı çıkıyor.
Öğretmen: Aynı anda hem A'dan başlayıp üçgenler oluştursak hem de B'den başlayıp üçgenler oluştursak hepsinin açılarını toplasak olmaz mı?
Grup sözcüsü: Hocam farklı şekil üzerinde farklı köşelerden başlayabiliriz yine aynı sonuç çıkıyor ama aynı soruda iki köşeden başlayamayız
Öğretmen: Neden?
Grup sözcüsü: Çünkü o zaman üçgenler üst üste geliyor açıları iki defa saymış oluruz.
Öğretmen: Evet bu çözüme ikna olmayan varsa itiraz edebilirsiniz.
Öğrenci: Hocam biz de onlar gibi yaptık çözümlerini doğru kabul ediyoruz. Ama bir şeyin nedenini tam açıklasınlar. Neden her zaman n-2 çıkıyor?
Grup sözcüsü: Mesela altıgende B noktasından başladık üçgen oluşturmaya, B noktası ile yanındaki bu noktayı yani A'yı ve diğer yanındaki noktayı yani C'yi birleştiremeyiz çünkü zaten bunlar birleşik kenar o yüzden her çokgende iki eksiğini alıyoruz.
Öğretmen: Peki (n-2).180'in bütün çokgenler için doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz?
Grup sözcüsü: Şimdi zaten bütün çokgenlerde kenar sayısının 2 eksiği kadar üçgen oluşur. Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 olduğu için de sonucu 180 ile çarpıyoruz.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğretmenin üçgenlere parçalamalarının nedenini sorgulaması üzerine grup sözcüsü, beşgeni bir üçgen ve bir dörtgen şeklinde parçaladığını, altıgeni de bir üçgen bir beşgen şeklinde parçaladığını; ancak kenar sayısı arttığında içerde oluşan çokgenin iç açılarının toplamını bulmanın zor olacağını düşünerek içerdeki çokgenleri de üçgenlere parçaladığını ifade etmiştir. Öğrencilerin herhangi bir çokgenin iç açılarının ölçülerini bulurken çokgenlerdeki köşegen özelliklerini ve üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamını kullandıkları görülmektedir. Öğrencilerin daha önce öğrendikleri kavramları ilişkilendirerek bu kanıtta kullanmaları, varsayımlarını nedenleriyle gerekçelendirmeleri, kanıtın açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ile *sonuçları görme* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri* *ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir. Ayrıca bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bununla birlikte öğretmen problemi genişleterek buldukları genel kuralın farklı bir durumda nasıl kullanılacağını görmelerini sağlamıştır. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Çalışkan Arılar dışında diğer gruplar aynı çözümü yaptılar. Önce çokgenin tek bir köşesini tepe noktası kabul ediyoruz ve çokgenin kenarlarını taban kabul eden üçgenler çiziyoruz. Dörtgenlerde 2 üçgen sığdığını, beşgenlerde 3 üçgen sığdığını, altıgende 4 üçgen sığdığını, yedigende ise 5 üçgen sığdığını belirliyoruz. Sonra her çokgende kenar sayısının 2 eksiği kadar üçgen olduğunu fark ediyoruz ve bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamının 180^o olduğunu bildiğimiz için (n-2).180 olduğunu söylüyoruz. Peki bunun bütün çokgenler için geçerli olduğunu nasıl söyleyebiliriz? Siz de açıkladınız aslında, köşegen çizerken bir noktanın ardışığı olan 2 köşeyi atlıyoruz ve her zaman köşe sayısının 2 eksiği kadar üçgen oluşturabiliyoruz. Peki şimdi bir soru daha bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsünü nasıl buluruz?
> **Öğrenci:** Bütün açıları eşit olur. Mesela üçgenin 60, karenin 90.
> **Öğretmen:** Tamam düzgün çokgenin bütün kenar uzunlukları ve açıları eştir. Peki herhangi bir düzgün çokgenin bir iç açısını nasıl buluruz?
> **Öğrenci:** Hocam ben az önce söylemiştim, Çalışkan Arılar yanlış formül söylediğinde farz edelim ki bunun açıları eşit olsun demiştim. O zaman bence böleriz.
> **Öğretmen:** Tamam neyi neye böleriz?
> **Öğrenci:** Açıların hepsini kaç açı varsa böleriz.
> **Öğretmen:** Yazabilir misin cebirselle?
> **Öğrenci:** Hocam yani (n-2).180 ya toplam bunu kaç kenarlıysa böleriz.
> **Öğretmen:** Aferin (n-2).180'i n'ye böleriz. Böylece bir iç açısını buluruz.

Bu problemde öğrencilerin kendi buldukları çözüm yöntemini genelleyerek karşılaştıkları farklı problemlerde kullandıkları, bir kuralın farklı durumlarda nasıl uygulanabileceğini fark ettikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin alt işlevlerinden *uygulama* işlevine hizmet etmektedir.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerden birinin günlüğünde *"Çarşamba günü çok eğlendim. Tuğba hoca bize tam* *hatırlamıyorum 4 ya da 5 tane geometrik şekil verdi ve bize bunların iç açılarının toplamını daha iyi bulmamız için bizden bir strateji geliştirmemizi istedi. Biz de (n-2).180 şeklinde bir strateji yani kısa yol bulduk ve 10 puan kazandık. Bu uygulamada ben çok eğleniyorum. Ayrıca kazanmayı çok istiyorum."* ifadelerini kullandığı görülmüştür.

4.2.1.6. Altıncı hafta öğretimine ilişkin bulgular

Altıncı hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.12'de görüldüğü gibi öğrencilere tüketerek kanıt yapmaları gereken bir sayı problemi sunulmuştur. Öğretimin sonunda sadece Efsanevi Matematikçiler grubunun tüketerek kanıt yapabildiği belirlenmiştir.

Tablo 4.12. *Altıncı hafta sınıf uygulamalarının özeti*

<table>
<tr><th colspan="2">Etkinlik</th></tr>
<tr><td colspan="2">*Bir tam sayının karesinin birler basamağındaki rakam, her zaman A= {0,1,4,5,6,9} kümesinin bir elemanıdır.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Etkinliğin Odağı</th></tr>
<tr><td colspan="2">* Verilen önermenin doğruluğunu inceleme
• Sonlu sayıdaki bir küme içerisinde yapılan kanıtta tüm ihtimalleri tüketerek kanıt yapma</td></tr>
<tr><th colspan="2">Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma</th></tr>
<tr><td colspan="2">* Problemi analiz etmek için önce rastgele sonra da stratejik birden fazla örnekten yararlanma
*Tüketerek kanıt yapma</td></tr>
<tr><th>Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması</th><th>Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi</th></tr>
<tr><td>*Önermenin mantıksal yapısını çözme (Her iki odak grup)
*Önermede verilen kavramları ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup)
*"Her" niceleyicisini doğru kullanma (Her iki odak grup)
* Kümenin sınırlı sayıda elemanı olduğunu fark etme (Her iki odak grup)
* {0,1,2,…9} kümesinin bütün elamanlarının karesinin her zaman {0,1,4,5,6,9} kümesinin elemanı çıktığını fark etme (Efsanevi Matematikçiler grubu)
*Tüketerek kanıt yapma (Efsanevi Matematikçiler grubu)
*Deneysel doğrulama yapma (Turunçgiller grubu)</td><td>*Arkadaşlarını stratejik örnekler seçmeye teşvik etme (Her iki odak grup)
*Örnek vererek geçerli kanıt yapamadıklarının farkında olma (Turunçgiller grubu)
*Varsayımın doğruluğunun gerekçelendirilmesi gerektiğinin farkında olma (Her iki odak grup)
*Aksine örnek vererek çürütülemeyen bir önermenin doğruluğunun kanıtlanması gerektiğini söyleme (Turunçgiller grubu)
*Bütün tam sayıların birler basamağının {0,1,2,…9} kümesinin bir elemanı olduğunu fark etme (Efsanevi Matematikçiler grubu)</td></tr>
</table>

Tablo 4.12. (Devam) *Altıncı hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Önermenin mantıksal yapısını çözme (Tüm gruplar) * Küme kavramı, tam sayı, rakam, bir tam sayının karesi bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) * "Her" niceleyicisini doğru kullanma (Tüm gruplar) * Kümenin sınırlı sayıda elemanı olduğunu fark etme (Tüm gruplar) *Deneysel doğrulama yapma (Turunçgiller, Çalışkan Arılar ve Starlar grubu) *Tüketerek kanıt yapma (Efsanevi Matematikçiler grubu)	*Negatif tam sayılarda da doğru olduğunun gösterilmesini isteme *Deneysel doğrulamayı geçerli bir kanıt olarak kabul etmeme *Önermenin doğruluğunun gerekçelendirilmesini isteme	*İddianın doğruluğunu kanıtlamak için bütün tam sayılarda doğru olduğunu göstermelerini isteme

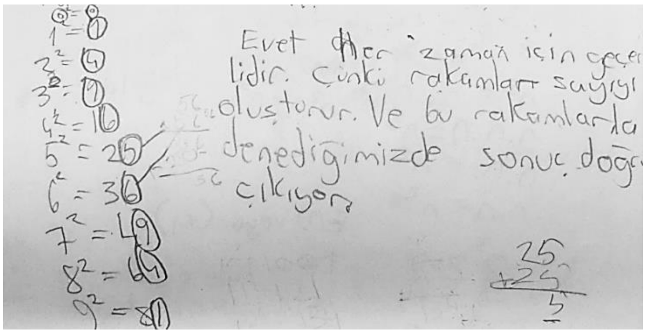
Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	* Tutarsızlıkları ortaya çıkarma

Belirlenen Sosyal Normlar	**Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar**
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Farklı çözümler sunma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmen günlüğüne *"Öğrencilerin bireysel çalışmalarında önce rastgele örnekler sonra stratejik örnekler seçerek önermeyi doğruladıkları görüldü. Öğrencilerden birinin 0'dan 9'a kadar olan rakamların karesini alarak önermeyi doğruladığı görüldü."* şeklinde yazarak bireysel çalışmaları değerlendirmiştir. Öğretmenin günlüğünde de belirttiği gibi öğrenciler problemi analiz etmek için önce rastgele örnekler seçerek sonra da stratejik örnekler seçerek önermeyi doğrulamışlardır. Öğrencilerden sadece birinin bireysel çalışmasında tüketerek kanıt yapabildiği belirlenmiştir. Bu öğrencinin Efsanevi

Matematikçiler grubunda olduğu tespit edilmiş ve öğrencinin yaptığı çözüm Görsel 4.62’de sunulmuştur:



Görsel 4.62. *Altıncı hafta Efsanevi Matematikçiler grubundan bir öğrencinin bireysel çalışması*

Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında öğrenciler denedikleri örneklerle önermenin çürümediğini fark ettikten sonra önermenin doğru olduğunu göstermenin yollarını araştırmaya başlamışlardır. Daha önceki haftalarda çözülen problemler gibi doğrudan kanıt yaparak ya da aksine örnek vererek kanıt yapamayacaklarını fark edip öğretmenden yardım istemişlerdir. Öğretmen tüm sınıfı, ikna edici bir gerekçe sunmaları konusunda motive etmiştir. Odak gruplardan Efsanevi Matematikçilerin tüketerek kanıt yaptıkları belirlenmiştir. Turunçgiller grubunda bir öğrencinin sayının karesinin birler basamağı yerine sayısının karesini kümede aradığı görülmüş, öğrencinin bu sayının kümede olmadığını belirterek önermenin yanlış olduğunu iddia ettiği saptanmıştır. Bu durum üzerine grup arkadaşı bu öğrencinin hatasını düzelterek önemeyi anlamasında yardımcı olmuştur. Ayrıca, Turunçgiller grubunun tartışmasında bir öğrencinin parantez olmadığı için -4’ün karesinin -16 olduğunu iddia etmesi üzerine grup arkadaşı bu iddiasını gerekçelendirerek çürütmüştür. Kanıt burada *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Turunçgiller grubunun küçük grup tartışmalarının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

…
Öğrenci: Şimdi ben bunu çürüttüm bile. Çürütmek için bir örnek vermek yeterli oluyor değil mi? Mesela 12 alalım karesi 144 bu rakamlardan biri değil.

Öğrenci: Hayır yanlış anlamışsın, birler basamağındaki rakam bunlardan biri olacak. Her sayı bu kümede olacak demiyor. Bak 144'ün sonu 4 yani oluyor.
Öğrenci: Peki hiç eksili sayıların karesine bakan var mı?
Öğrenci: Ben yazdım mesela 4'ün karesi 16, -4'ün karesi de 16. Aynı oluyor. Bence bu çürümüyor.
Öğrenci: -16 çıkmaz mı? Parantez yok.
Öğrenci: Hayır (-4). (-4) olarak düşüneceksin o da 16 çıkar. Sonu 6 çıktı. Bence her zaman doğru.

Bununla birlikte Turunçgiller grubunun stratejik örneklerle deneysel doğrulama yaptıkları, önermenin doğru olduğuna inandıkları; ancak geçerli bir kanıt sunamadıkları için sınıfı yaptıkları çözümün doğruluğuna ikna edemeyeceklerinin farkında oldukları görülmüştür. Turunçgiller grubunun tartışmasının bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

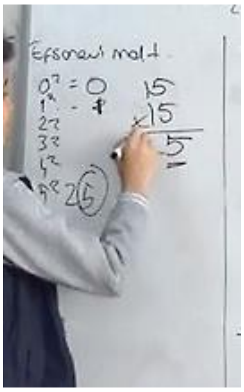
Öğrenci: Asal sayıları deneyelim mi?
Öğrenci: Mesela 3 ve 5'i deneyelim. 9 oluyor, 25 oluyor.
Öğrenci: 1 de oluyor.
Öğrenci: Şimdi bakın eğer çürütmeyeceksek kanıtlamamız gerekir.
Öğrenci: Çürümüyor zaten boşuna uğraşmayalım.
Öğrenci: Nasıl kanıtlayacağız. Örnek vererek olmaz. Bizimkini kabul etmeyecek o zaman.
Öğrenci: Ben 1'den 20'ye kadar yaptım, hepsi oluyor.
Öğrenci: Eksileri almamışsın.
Öğrenci: Gerek yok onları almaya karesi olduğu için her türlü artı çıkıyor.
Öğrenci: Peki nasıl kanıtlayacağız, cebirselle mi? Şekille de olur.
Öğrenci: Ama neden diye soracaklar ne diyeceğiz? Hocam cebirsel kanıt yapmak zorunda mıyız?
Öğretmen: Çocuklar kanıtı sadece cebir olarak düşünmeyin, beni ikna eden güzel bir açıklamayı da kanıt olarak kabul edeceğim.
…
Öğrenci: Bir de bu sayıların arasında 2, 3 ve 7 niye yok?
Öğrenci: Çünkü bir şeyle kendisini çarpınca birler basamağı 2 çıkmıyor. 3 ve 7 de olmuyor.
Öğrenci: O zaman ne diyelim?
Öğrenci: Şimdi, bizim bunu nasıl açıklamamız lazım. Çürütemedik, destekleyeceğiz de neden böyle oluyor.
Öğrenci: Bence biz her zaman doğru diyelim, bütün sayılarda böyle oluyor diyelim.
Öğrenci: Hoca bütün sayıları nasıl denedin der. Bunu kabul etmezler.
Öğrenci: Çünkü diyelim ki bizim denediğimiz bütün sayılarda karesinin birler basamağı bu kümeden çıktı. O zaman her zaman doğrudur diyelim.
Öğrenci: Denediğimiz diyorsun işte denemediklerimiz ne olacak. Puan alamayacağız bu hafta.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenciler küçük grup tartışmalarında işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, düşüncelerini paylaşmaları için kendi grup arkadaşlarını teşvik etmişlerdir. Öğrenciler grup tartışması boyunca birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme*, *herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi*, *anlaşılmayan noktaları sorma, grup* *üyelerini ikna etme, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Bununla birlikte her iki odak grubun önermenin mantıksal yapısını anladığı, önermede kullanılan kavram ve işlem bilgisine sahip oldukları ve "her" niceleyicisini doğru kullandıkları görülmüştür. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Turunçgiller, Çalışkan Arılar ve Starlar gruplarının denedikleri örnekler bu önermeyi doğruladığı için bu önermenin her zaman doğru olduğunu belirttikleri görülmüştür. Starlar grubunun sınıf tartışmasının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

> **Grup sözcüsü:** Hocam biz her zaman doğru olduğunu düşünüyoruz.
> **Öğretmen:** Neden her zaman doğru?
> **Grup sözcüsü:** Çünkü biz hangi sayıyı koyarsak koyalım birler basamağı bu sayılardan biri oluyor. Mesela 5 i alalım bunun karesi 25 oluyor. Sonu 5 oluyor. Ben şimdi 0 dan 9 a kadar yazayım. Mesela 74 alalım bunun birler basamağındaki sayı bu rakamlardan biri olacağı için bütün sayılarda oluyor.
> **…**
> **Öğrenci:** Negatif sayıları düşündünüz mü?
> **Grup sözcüsü:** Hocam biz pozitif sayılarda denedik negatif sayılarda denemedik.
> **Öğrenci:** Ama bütün tam sayılar diyor.
> **Grup sözcüsü:** Eksilerde de aynısı çıkıyor. Karesini aldığımız için bu denediklerimizin eksilerini alsak yine aynısı çıkar. Yani yine her zaman diyoruz. Yani buraya ne yazarsak yazalım karesi hep bu rakamlardan oluşuyor.
> **Öğrenci:** Neden her zaman bu rakamlardan oluşur hiç düşündünüz mü ben ikna olmadım.
> **Grup sözcüsü:** Hocam biz sizin dediğiniz gibi bir açıklama bulamadık ama hangi sayıyı denesek oldu. İki basamaklı üç basamaklı hepsi oldu.
> **Öğrenci:** Ama sonsuz sayı var hepsini denemiş olamazsınız.
> **Öğretmen:** Tamam ben şöyle sorayım gruba, bunun her zaman doğru olduğunu söylüyorsunuz ya bu iddianızın doğruluğunu kanıtlamak için tüm tam sayılarda doğru olduğunu nasıl açıklayabilirsiniz?
> **Grup sözcüsü:** Hocam biz böyle yaptık.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi Starlar grubu denedikleri sayıların tamamı bu önermeyi doğruladığı için bu önermenin doğru olduğunu belirtmişlerdir. Ancak diğer gruplardan öğrenciler bu iddianın doğruluğunu kanıtlamak için tüm tam sayılar için doğru olduğunu göstermek gerektiğini ve tüm tam sayılarla deneme yapmanın imkânsız olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bu söylemlerinden deneysel doğrulamayı kanıt olarak kabul etmedikleri, kendi görüşlerini savunarak daha genel bir açıklama bekledikleri gözlemlenmiştir. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük gruplardan sadece Efsanevi Matematikçiler grubunun Görsel 4.63’te sunulduğu gibi tüketerek kanıt yaptığı ve önermenin neden her zaman doğru olduğunu açıklayabildiği görülmüştür. Efsanevi Matematikçiler grubunun sınıf tartışmasının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:



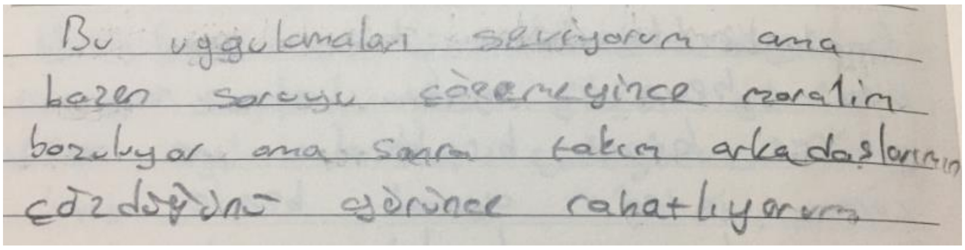
Görsel 4.63. *Altıncı hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun sınıf tartışması*

> **Grup sözcüsü:** Hocam biz de diğer gruplar gibi her zaman diyoruz. Çünkü 0’dan 9’a kadar tüm rakamları yazdık bunların karesini bulduk. Bulduğumuz sonuçların tamamı bu kümede oldu. Yani karelerini yazdığımızda her zaman bu kümenin elemanı çıktı. Hocam yani, bütün tam sayılar bu rakamlardan oluşur. 12 desek mesela sonu 2, 128 desek mesela sonu 8. Tüm sayılarla denediğimizde de oluyor. Mesela 15 olsun sonu 5 karesi de 125 yani yine bu kümenin elemanı.
> **Öğrenci:** Nasıl tüm sayıları denediniz? Siz de bize aynı soruyu sormuştunuz tüm sayıları denedik diye. Siz de denemişsiniz.
> **Grup sözcüsü:** Tüm sayıları denemedik, şimdi bütün tam sayıların birler basamağı 0’dan 9’a kadar olan rakamlardır, bu rakamların hepsini denedik yani 0’dan 9’a kadar olan rakamların karelerini yazdık tek tek, çıkan sonuçlara baktık hepsi 0,1,4,5,6,9’dan biri çıktı. Yani bu kümenin bir elemanı. O yüzden her zaman doğrudur diyoruz.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi grup sözcüsü bir tam sayının birler basamağındaki rakamın {0,1,2,….8,9} kümesinin elemanlarından biri olacağını belirtmiş ve bu kümenin elemanlarının karesini alarak olabilecek tüm ihtimalleri tüketmiştir. Öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde kendi varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları ve bu önermenin doğruluğunu nedeniyle beraber açıkladıkları görülmektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma ve kavrayış* işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Diğer gruplar Efsanevi Matematikçilerin yaptığı kanıtın doğruluğunu kabul etmişlerdir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Bu uygulama ile sonlu sayıdaki bir küme içerisinde yapılan kanıtta tüm ihtimalleri tüketerek kanıt tamamlanmış ve tüm sınıfın tahtada yazılanların dışında başka ihtimallerin olmayacağına ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Çocuklar kanıt problemleri birbirinden farklıdır. Bazılarında yanlış olduğunu göstermek için tek örnek vererek çürütmeniz yeterli olur. Bazılarında doğru olduğunu kanıtlamanız için cebirsel kanıt yapmanız gerekebilir. Ya da bir şekil çizerek görsel kanıt ya da iyi bir açıklama yaparsınız. Eğer iddianın doğruluğunu kanıtlamak istiyorsak tüm sayılar için doğru olduğunu göstermemiz gerektiğini biliyoruz. Bu soruda sayı kümemiz sınırlı bir küme. Şimdi hangi tam sayıyı alırsak alalım bu sayının birler basamağı, 0'dan 9'a kadar olan bir rakamdır. O zaman bütün tam sayıları düşünmemize gerek yok 0'dan 9'a kadar olan rakamları tek tek tüketmemiz yeterli olur. 0'dan 9'a kadar olan rakamların karelerini yazdığınız zaman her zaman {0,1,4,5,6,9} kümesinin elemanı çıktığını görürüz, o yüzden bu ifade her zaman doğrudur.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerin günlüklerinden alınan örnekler Görsel 4.64'te sunulmuştur:



Görsel 4.64. *Altıncı hafta öğrenci günlüğü örneği*

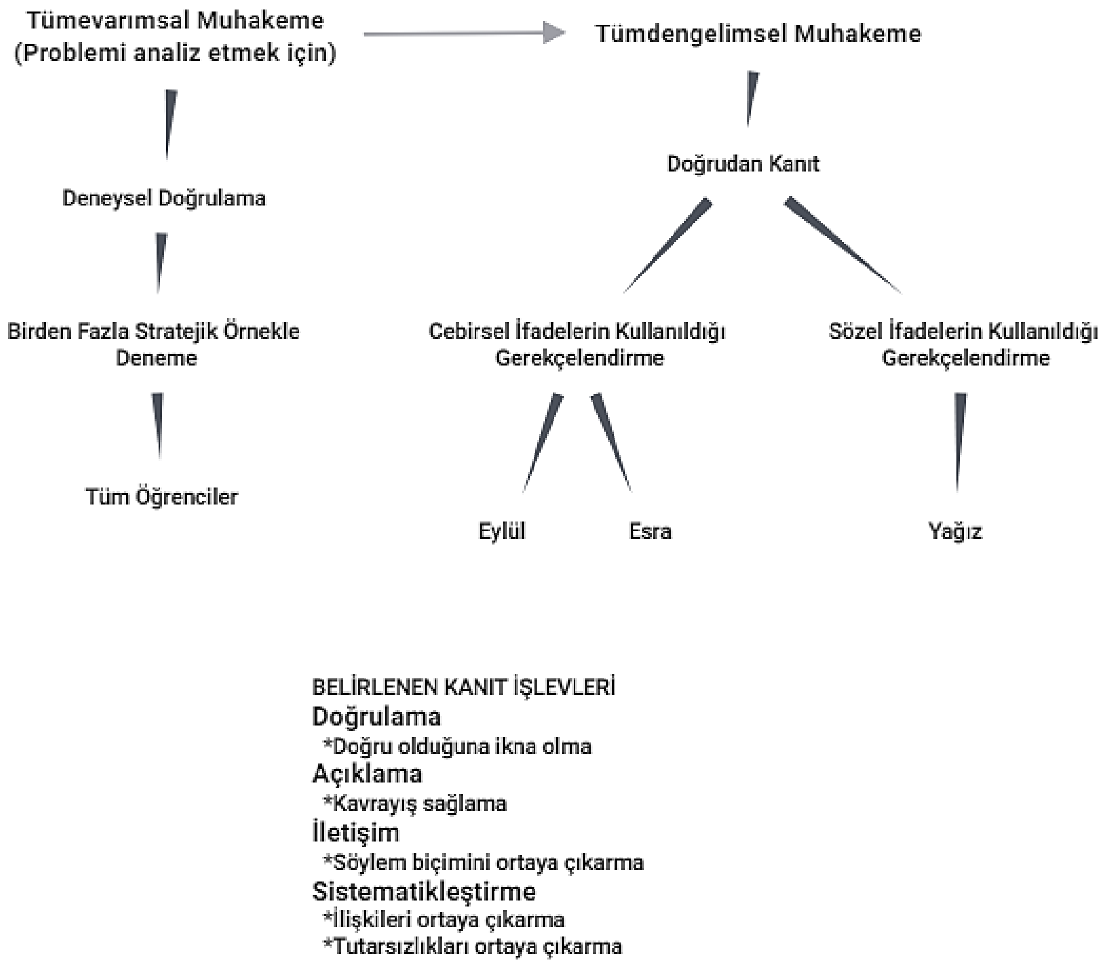
4.3. Ara Klinik Görüşme Sonuçlarına İlişkin Bulgular

Bu bölümde, 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama süreçlerini incelemek ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevlerini belirlemek amacıyla yapılan ara klinik görüşmelerden elde edilen bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir.

Ara klinik görüşmelerde öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken iki problem (Problem 5 ve Problem 6) sorulmuştur. Bu problemlerden biri sayı problemi diğeri ise bir geometri problemidir. Görüşmelerde 6 öğrenciden 2'si (Eylül ve Yağız) her iki problemde kanıt sürecini başarı ile tamamlamışlardır. Bununla birlikte öğrencilerden 3'ünün (Bahri, Elif ve Mehmet) sayı probleminde kanıt yapamadığı; ancak geometri probleminde kanıt yapabildikleri, birinin ise (Esra) sayı probleminde kanıt yapabildiği; ancak geometri probleminin kanıt sürecinde başarılı olamadığı görülmüştür. Ara klinik görüşmeler kanıt işlevleri bağlamında değerlendirildiğinde kanıt yapabilen öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt bu problemlerin çözüm sürecinde öğretmen ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamış, öğrenciler fikirlerini ilettiğinde, söylem biçimleri sayesinde öğrencilerin problemlerde verilen kavramları nasıl anladıkları ortaya çıkmıştır. Kanıt burada iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilerin iddialarını çürütmek için verilen aksine örnekler öğrencilerin kendi matematiklerindeki tutarsızlıkları görmelerini sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin hem bildikleri kavramları ilişkilendirdikleri hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek varsayımlarını gerekçelendirdikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

4.3.1. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşme bulguları

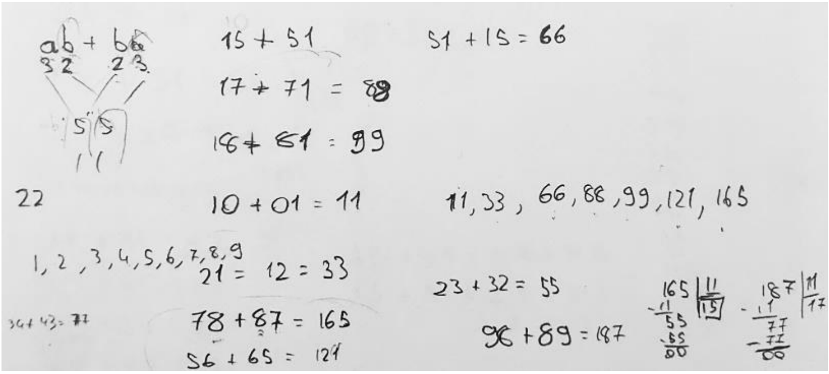
Ara klinik görüşmelerde sorulan problemlerden ilki olan Problem 5, Komatsu'nun (2005) çalışmasından uyarlanan ve öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken bir sayı problemidir *(P.5: İki basamaklı bir sayı ile bu sayının rakamlarının yer değiştirmesi sonucu oluşan sayının toplamı hakkında ne söylersin?)* Öğrencilerin Problem 5'i çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.4.'te gösterilmiştir:



Şekil 4.4. *Öğrencilerin ara klinik görüşmede Problem 5'i çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.4.'te görüldüğü gibi P.5'te öğrencilerin tamamının problemi analiz etmek için önce tümevarımsal muhakeme yaptıkları belirlenmiştir. Öğrenciler seçtikleri stratejik örneklerle deneysel doğrulama yapmışlardır. 6 öğrenciden 3'ünün (Eylül, Esra ve Yağız) örnekler yardımıyla oluşturdukları varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri belirlenirken 3'ünün (Bahri, Elif ve Mehmet) oluşturdukları varsayımlarını kanıtlayamadıkları görülmüştür.

Kanıt yapamayan öğrencilerden biri olan Bahri'nin Görsel 4.65.'te sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme ile problemi analiz etmeye çalıştığı belirlenmiştir. Bahri seçtiği stratejik örneklerle sonucun her zaman rakamları aynı olan iki basamaklı bir sayı olduğunu iddia etmiştir. Bunun üzerine Bahri'ye aksine bir örnek sunularak öğrencinin iddiası çürütülmüştür. Bahri'nin ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.65. *Bahri'nin ara klinik görüşmede Problem 5'te çözümü*

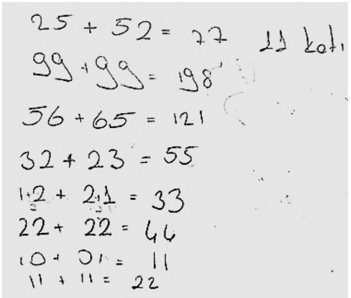
Bahri: Ben önce 15'i alayım. Yer değiştirince 51 olur. Toplayınca sonuç 66 çıktı. Problemi anlamak için birkaç tane örnek deneyeceğim hocam sonra aralarındaki bağlantıyı bulmaya çalışacağım.
A: Tamam dene.
Bahri: Bir tane de çift alayım. Bir tek bir çift olsun. 17 ve 71'in toplamı 88, 18 ve 81'i alınca da 99 oluyor.
A: Tamam ne düşünüyorsun?
Bahri: Şimdi şunu fark ettim iki sayının toplamı hep aynı çıkıyor. Rakamları aynı yani.
A: Tamam sonuç iki basamaklı rakamları aynı sayı çıkıyor diyorsun.
Bahri: Evet bir de 10'u deneyelim o da 1 çıkıyor sonuç da 11 çıkıyor. Mesela 21 ve 12'nin toplamı 33 çıktı. Yani tabi örnekle denemek olmaz başka bir şey bulmaya çalışacağım ama sanırım rakamları aynı sayılar olacak sonuç her zaman.
A: Peki 78'i dener misin?
Bahri: 78 ve 87, 165 olur. Bu sefer farklı oldu. Ben her zaman rakamları aynı olur demiştim olmadı. Siz beni çürüttünüz.
A: Neden öyle oldu sence?
Bahri: Mesela burada 1'le 7'yi toplayınca 8, 7'yle 1'i toplayınca yine 8 çıkıyor. Ama burada eldeli olduğu için farklı çıktı. Bir tane daha eldeli deneyeyim. 56 ve 65 = 121 çıktı.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi verilen aksine örnek hem öğrencinin iddiasını çürütmüş, hem de öğrencinin iddiasının neden yanlış olduğunu anlamasını sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bahri daha sonra, denediği örneklerdeki ortak özelliğin sonucun her zaman 11'in katı olduğunu fark etmiştir. Öğrencinin yaptığı tümevarımsal muhakeme varsayım oluşturmasını sağlamış ve öğrenci bu varsayımını çürütecek örnek arayışına girmiştir. Öğrenci varsayımını çürütemeyince kanıtlanması gerektiğini belirtmiş; ancak bu varsayımını kanıtlayamamıştır. Bahri'nin ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

> **A:** Çıkan sonuçlar sana bir şey ifade ediyor mu?
> **Bahri:** Şimdi çıkan sonuçları bir yazayım 11, 33, 88, 99, 121, 165 çıktı. Bence alt alta yazdığımızda hep aynı iki sayıyı topladığımız için burada rakamları aynı sayılar çıkıyor. Biraz büyütünce mesela burada 7'yle 8'i toplayınca 15, 8'le 7'yi de toplayınca 15 ama eldeyi aktarıyoruz. Yani aslında yine aynı çıkıyor sonuç. Yani iki basamaklı olanların ortak özelliği rakamları aynı olması.
> **A:** Tamam ama sadece iki basamaklı çıkmıyor sonuç, hepsi için genel bir varsayımın var mı?
> **Bahri:** Aslında şimdi bakınca şunlar 11'in katı. 11, 33, 88, 121 falan. 165'i bir bölüp deneyeyim. Evet o da 11'in katı. Yani hocam sonuç hepsinin 11'in katı olması.
> **A:** Yani yeni varsayımın toplamın 11'in katı olması mı?
> **Bahri:** Evet ama şimdi başka örneklerle önce bu varsayımı bir çürütmeye çalışayım bakalım çürüyecek mi? Mesela 23'ü alayım 32 toplam 55 o da 11'in katı çürümedi. 98'e bakayım. 89'la toplayınca 178 çıktı şimdi 11'e böleyim. Evet tam bölündü o da 11'in katı.
> **A:** Çürütemedin yani.
> **Bahri**: Evet her zaman 11'in katı çıkıyor. Ama şimdi sizi ikna etmem için kanıtlamam lazım değil mi? Şimdi cebirsellerle yapsak a desek birinci sayıya.
> **A**: a dediğin iki basamaklı bir sayı mı?
> **Bahri:** ab diyeyim ba da tersi olur. Yani hocam birler basamağında a ile b'yi, onlar basamağında yine a ile b'yi topluyoruz. Yani aynı iki sayıyı topladığımız için 11, 22, 33, 44, 55 gibi aynı sayılar çıkıyor bunlar da her zaman 11'in katı. Çünkü 11'in katlarını bulunca hep 1'le çarpıyoruz ya. Mesela 2 katında 2'yi önce bu 1'le sonra da bu 1'le çarpıyoruz. Hep 1'le çarptığımız için bu rakamlar aynı çıkıyor. Ama üç basamaklı olunca sıkıntı işte. Yapamadım hocam.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Bahri'nin tümevarımsal muhakeme ile sonucun her zaman 11'in katı olacağına ikna olduğu görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ancak öğrenci öğretmeni ikna edebilmek için kanıt yapması gerektiğinin bilincindedir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Bahri'nin kanıta yüklediği anlamı, hem de problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğrencinin söylemleri örnekler yardımıyla yapılan doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olmadığının farkında olduğunu, örnekleri problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için kullandığını göstermektedir.

Kanıt yapamayan öğrencilerden biri olan Elif de Bahri'nin çözümüne çok benzeyen bir çözüm yapmıştır. Elif Görsel 4.66'da sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme ile problemi analiz etmeye çalışmış, seçtiği örneklerde seçilen sayılar ile bu sayıların toplamı arasında bir kat ilişkisi bulmaya çalışmış; ancak denediği örneklerle kendi iddiasını çürütmüştür. Öğrencinin örnek seçerken önce aklına ilk gelen örneği seçtiğini daha sonra ise rakamları aynı sayılar, rakamları ardışık sayılardan oluşan sayılar gibi stratejik örnek seçtiği belirlenmiştir. Elif'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.66. *Elif'in ara klinik görüşmede Problem 5'te çözümü*

Elif: Soruyu anlamak için örnekle deniyorum. Mesela 25 yer değiştirince 52, toplayınca 77 olur. 99 alıyorum yer değiştirince yine 99 toplayınca 198 çıktı. 99 örneğinde 99'un 2 katı çıktı. Mesela 56'yı deneyelim. 56'yla 65'i toplayınca 121 çıktı.
A: Ne geçiyor aklından?
Elif: Belki ilk sayının üç katı ya da iki katıdır diye deniyorum. (Denedi)
A: Olmadı mı?
Elif: Olmadı.
A: Tamam çürüttün kendi iddianı. Peki örneklerle denerken neye dikkat ediyorsun?
Elif: Önce aklıma ilk geleni aldım, sonra rakamları aynı olanı aldım. Sonra rakamları ardışık olanları denedim.

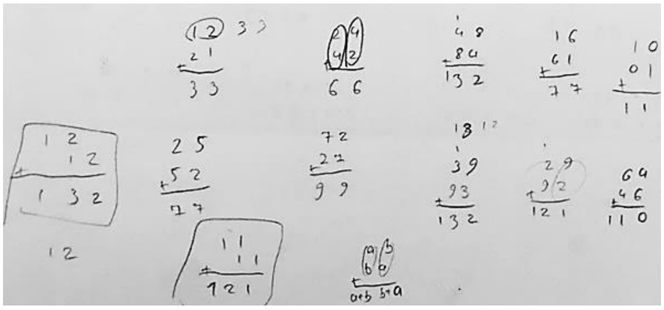
Elif daha sonra sonucun her zaman rakamları aynı olan iki basamaklı bir sayı olduğunu iddia etmiştir. Bu iddiasını bu iki sayı toplandığında hem birler hem de onlar basamağında aynı rakamların toplanması üzerinden açıklamıştır. Bunun üzerine Elif'e aksine bir örnek sunularak öğrencinin iddiası çürütülmüştür. Verilen aksine örnek hem öğrencinin iddiasını çürütmüş, hem de öğrencinin iddiasının neden yanlış olduğunu anlamasını sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Elif'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

Elif: 32'yi deneyelim 23'le toplayınca 55. Hep aynı sayı oluyor. Yani 2'yle 3'ü topluyorum sonra da 3'le 2'yi topluyorum aynı oluyor rakamları.
A: Tamam rakamları aynı oluyor diyorsun.
Elif: 12'yi deneyeyim 21'le toplayınca 33 oldu. Yani bir sayının rakamlarının yerini değiştirip topladığımızda çıkan sonucun rakamları hep aynı oluyor.
A: Neden aynı oluyor?
Elif: Çünkü 2'yle 1'i topluyoruz birler basamağında, burada da 1'le 2'yi topluyoruz. İkisi de 3 çıktığı için rakamları aynı.
A: Tamam ama mesela 198 ve 121'de aynı olmadı neden?
Elif: Evet bir düşüneyim. Çünkü onlar eldeli. 5'le 6'yı toplayınca 11, 6'yla 5'i toplayınca da 11 ama elde olduğu için farklı oluyor üç basamaklılarda.
A: Tamam şimdi daha genel bir şey bulalım. Hepsini kapsayacak bir şey.
…

Elif: Hocam aslında anlamaya çalışıyorum yani burada sanki bir örüntü gibi bir şey var. Önce örnekle onu keşfetmem lazım. Mesela 10'u deneyeyim. 10'la 01'i toplayınca 11 çıkıyor. 11'i deneyeyim 22 çıktı. Şimdi 11, 22, 33, 44,55 çıktı.
A: Yani nasıl bir şey var burada?
Elif: 11'er 11'er artıyor. Yani bunlar 11'in katı. 121'i böleyim 11'e deneyelim o da 11'in katı. 198'i deneyelim o da 11'in katı. Yani hepsi 11'in katı olacak. Ama işte nasıl göstereceğim?
…

Elif denediği örneklerdeki ortak özelliğin sonucun her zaman 11'in katı olduğunu fark etmiş; ancak yaptığı genellemeyi kanıtlayamamıştır. Elif'in tümevarımsal muhakeme yaparak sonucun her zaman 11'in katı olacağına ikna olduğu görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte öğrenci öğretmeni ikna edebilmek için kanıt yapması gerektiğinin bilincindedir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Elif'in kanıta yüklediği anlamı, hem de problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğrencinin söylemleri, örnekler yardımıyla yapılan doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olmadığının farkında olduğunu, örnekleri problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için kullandığını göstermektedir.

Kanıt yapamayan öğrencilerden bir diğeri olan Mehmet de Bahri ve Elif'in çözümlerine benzer bir çözüm yapmıştır. Öğrenci Görsel 4.67.'de sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme ile problemi analiz etmeye çalışmış ve örneklerini seçerken tek-çift sayı gibi farklı özellikte olmalarına dikkat ettiğini belirtmiştir. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.67. *Mehmet'in ara klinik görüşmede Problem 5'te çözümü*

Mehmet: Önce bir deneyeceğim örneklerle.
A: Neden önce örnek vermeyi düşünüyorsun?

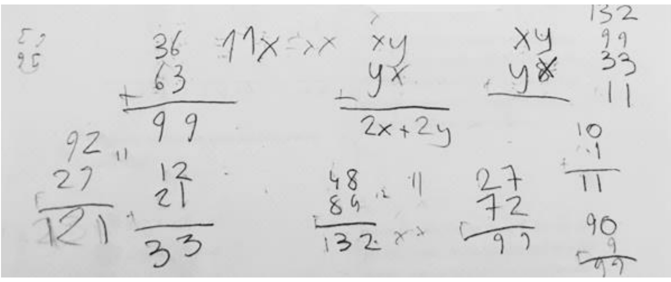
Mehmet: Soruyu anlamaya çalışıyorum. Şimdi 12 ve 21'i toplarsam 33 çıkar. Bir de 24'le 42'yi toplayayım. 66 çıktı. 48'i deneyeyim 84'le toplayayım. 132 çıktı, 16'yı deneyeyim 61'le toplayınca 77 çıktı. 25'i deneyeyim 52'yle toplayınca yine 77 çıktı. 72'yle 27'yi toplayınca 99 çıktı.
A: Örneklerini neye göre belirliyorsun?
Mehmet: Hepsi aynı olmasın dedim yani tek çift olsun büyük küçük olsun. Genel bir şeyler bulmaya çalışıyorum.
A: Var mı bir iddian?
Mehmet: Aslında şöyle düşündüm önce örneklere bakarak 33, 66, 77 hepsi aynı sayının iki kere yazımı ama 48'le 84'ü toplayınca olmadı.
A: İki kere yazımı derken tam olarak neyi kastediyorsun?
Mehmet: Yani mesela 1'le 2'yi toplayınca 3, 2'yle 1'i toplayınca da 3. Yani aynı sayılar çıktı. Ama 48 ve 84'te olmadı.
A: Neden olmadı orada?
Mehmet: Şimdi 4'le 8'in toplamı 12, 8'le 4'ün toplamı da 12 ama ne oluyor orada? Bir düşüneyim hocam. Ha tamam bir elde var diyoruz. İşte mesela 10'u geçmeyince yani toplamları 10'u geçmeyince elde olmayınca bu sayılar aynı çıkıyor. Böyle bir varsayımda bulunabilirdim ama işte sonucu 3 basamaklı olunca olmuyor. Sonucu 3 basamaklı olanları deneyeyim biraz. Mesela 39'la 93'ü toplayınca 132. Bir de 29'u deneyeyim 92 çıkıyor toplayınca 121.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Mehmet, denediği örneklerin sonuçlarına bakarak çıkacak sonucun rakamları aynı olan iki basamaklı bir sayı olduğunu düşündüğünü; ancak sonuç üç basamaklı olduğunda bu iddiasının doğru olmadığını fark ettiğini belirtmiş ve iki durum arasındaki farkı eldeli toplama ile açıklamıştır. Daha sonra Mehmet denediği örneklerdeki ortak özelliğin, sonucun her zaman 11'in katı olduğunu fark etmiştir. Öğrencinin yaptığı tümevarımsal muhakeme varsayım oluşturmasını sağlamış; ancak öğrenci oluşturduğu varsayımı kanıtlayamamıştır. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

A: Var mı bir iddian?
Mehmet: Aslında hocam şimdi fark ettim. Mesela 33 çıktı 66, 77, 121 çıktı. Şimdi bakınca bunlar 11'in katı gibi. Evet hocam 11'in katı çıkacak sonuçlar.
A: Peki neden her zaman sonuç 11'in katı?
Mehmet: İşte iki basamaklı olunca sonuç aynı sayılar olacak. 11'in bütün katlarında da aynı sayılar var 99'a kadar. Sonrakilerde zaten elde olacak.
A: Sence bu kanıt oldu mu?
Mehmet: Yok hocam şimdi örnek vermeden düşüneceğim. Şimdi ab ve ba dersek. Alt alta yazayım. Buranın toplamı a+b, burası da b+a yani aynı çıkıyor sonuç. Yani bu ikisinin toplamı 9'u geçmezse bir basamaklı bir sayı oluyor. İki tane aynı basamak yan yana geliyor. İki basamak aynı olunca da ne yaparsak yapalım bu 11'in katı olur. 9'u geçince de aslında aynı iki sayının toplamı oluyor ama işte sonuç 3 basamaklı oluyor. İşte burada tıkanıyorum. Yapamadım hocam.

Mehmet'in tümevarımsal muhakeme ile sonucun her zaman 11'in katı olacağına ikna olduğu görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

P.5’te tümdengelimsel muhakeme yapan 3 öğrenciden biri (Yağız) sözel ifadeler kullanarak doğrudan kanıt yapmış, 2’si (Esra ve Eylül) ise cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıt yapmıştır. Sözel argüman kullanarak kanıt yapan Yağız Görsel 4.68.’de sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme ile problemi analiz etmeye çalışmıştır. Öğrencinin önce xy ve yx şeklinde aldığı iki basamaklı sayıların toplamının 2x+2y oluğunu iddia ettiği; ancak bu iddiasını kendisinin çürüttüğü görülmüştür. Daha sonra ise seçtiği stratejik örneklerle sonucun iki basamaklı bir sayı olması yani eldesiz toplama olması durumunu ve eldeli toplama olması durumunu ayrı ayrı değerlendirmiştir. Yağız’ın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.68. *Yağız’ın ara klinik görüşmede Problem 5’te çözümü*

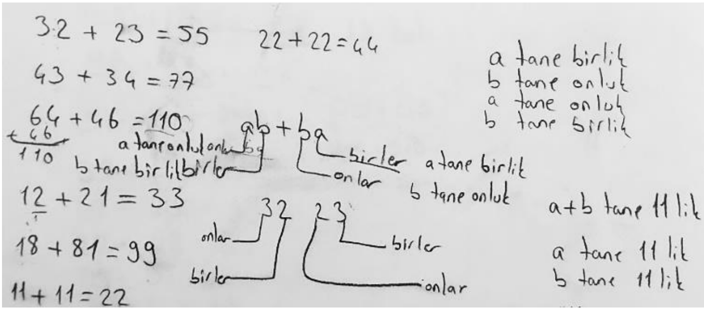
Yağız: 36’yı deniyorum önce.
A: Önce örnekle mi denemek istedin?
Yağız: Evet emin olmak istiyorum. Aklımda bir şey var. Belki yanlış olur diye deniyorum.
A: Ne var aklında?
Yağız: Aklımda şöyle bir şey var mesela xy gibi düşündüğümüzde bunların yeri değiştiğinde yx olur o zaman bunları toplarsak 2x+2y olur. Aklımda bu var. Ama emin değilim
A: Tamam bir iddian var şimdi bu iddianı örnekle test mi ediyorsun?
Yağız: Evet belki çürür. 36+63=99, 12+21=33 oluyor, 48+84=132 oldu. Tabi benimki çürüdü ama neden öyle olduğunu da anladım. Şimdi değiştiriyorum şöyle bir varsayımım var eğer elde olmazsa iki sayıyı toplayıp aşağı aynı sayıları yazıyoruz. Elde olunca elde eklenir ikinciye öyle yazılır. Yani 4’le 8’in toplamı 12, 8’le 4’ ün toplamı 12. 27+72=99. Şöyle bir varsayımım var x ve y’nin toplamı y ve x’in toplamı aynı.
A: Yani eğer elde yoksa iki basamaklı rakamları aynı bir sayı elde ederim mi diyorsun?
Yağız: Evet. Elde olduğunda mesela 4’le 8’in toplamı 12, 8’le 4’ün toplamı 12, eldeyi ekleyince 13 olur. Bir de şöyle bir şey var sonu 0 olduğunda mesela 10’la 01 olmayacağı için 1’i toplayınca 11 olur. 90 +9 =99 olur. Şimdi 11, 33, 99, 132 buldum çoğunlukla eldesi yoksa 11’in katı oluyor. Çünkü zaten 11’le herhangi bir sayıyı çarptığımızda rakamları aynı çıkar.
A: Her zaman 11’in katı mı diyorsun?
Yağız: Her zaman değil bazen mesela 132, 11’in katı değil galiba. 92’yle 29’u toplayınca 121, 132 de 11 fazlası olduğu için ha evet her zaman 11’in katı oluyor.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Yağız tümevarımsal muhakeme yaparak iki basamaklı bir sayı ile bu sayının rakamlarının yer değiştirmesi sonucu oluşan sayının toplamının her zaman 11'in katı olduğu varsayımında bulunmuş daha sonra öğrenci tümdengelimsel muhakemeye geçiş yapmıştır. Öğrencinin varsayımını sözel argümanlar kullanarak doğrudan kanıtladığı görülmüştür. Yağız'ın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

> **A:** Tamam şimdi sen örneklerle problemi anladın. Şimdi bana kanıt yapar mısın?
> **Yağız**: İki basamaklı bir sayı ile bu sayının rakamlarının yer değiştirmesi sonucu oluşan sayının toplamı eğer eldesi yoksa aynı iki rakamlı bir sayı olur. Bu sayı da her zaman 11'in katıdır. Şimdi xy +yx in toplamı her zaman 11'in katıdır. Çünkü x+y aynı sayı, y+x de aynı sayı. 11'in katları da böyledir. 11'in iki basamağı da 1 olduğu için, neyle çarparsak rakamları aynı oluyor.
> **A:** Şimdi 11'in katı olması ulaşacağın sonuç. Onu unutalım. xy ve yx hakkında konuşalım.
> **Yağız:** Şöyle aslında mesela benim yaptığım örneklerde 36'yı yazarsak 10,10,10 ve 1,1,1,1,1,1, yani 3 tane onluk, 6 tane birlik. 63 de 10,10,10,10,10,10, 1,1,1 yani 6 tane onluk 3 tane birlik. Mesela burada 3 tane 10, burada 3 tane birliği ayırırsam 33 olur, yani 11 in katı, diğerinde de 6 tane onluk ve 6 tane birliği ayırırsam 66 olur yani 11'in katı olur. Toplamı 99 olur.
> **A:** Tamam örnek vermeden açıklar mısın?
> **Yağız:** Yani bir rakam bir sayıda önce onlar basamağına geliyor, diğerinde birler basamağı oluyor. İkinci rakam da aynı şekilde birinde onlar basamağı birinde birler basamağı oluyor. Onlar basamağı ile birler basamağını topladığımızda bir şey oluyor. Ama tam açıklayamadım. Yani cebirle nasıl yapacağımı bilemedim.
> **A:** Gayet iyi gidiyorsun.
> **Yağız:** İşte her zaman aynı rakam bir onluk oluyor bir de birlik oluyor. Yani bu sayıdan 11'lik olur. Diğer rakam da aynı bir onlar basamağına bir birler basamağına geliyor. O da 11'lik olur. Sonuç da her zaman 11'in katı olur.
> **A:** 11'in kaç katı olur?
> **Yağız:** Yaptığım örneklerde her zaman rakamların toplamının 11 katı olmuş. Mesela 36 ve 63'te 6 ve 3'ün toplamı 9 sonuç da 99.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Yağız'ın yaptığı kanıt sayesinde varsayımının doğruluğuna ikna olduğu belirlenmiştir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencinin söylemleri sayesinde örnekler yardımıyla yapılan doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olmadığının farkında olduğu, örnekleri problemi analiz etmek için kullandığı saptanmıştır. Öğrenci 11'in katı, basamak kavramı gibi bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaşmış ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlemiştir. Öğrencinin daha önce öğrendiği birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandığı ve varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

P.5'te tümdengelimsel muhakeme yapan 2 öğrencinin ise (Eylül ve Esra) cebirsel argümanlar kullanarak doğrudan kanıt yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden Eylül Görsel 4.69'da sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme ile problemi analiz etmeye çalışmış, seçtiği stratejik örneklerle sonucun her zaman rakamları aynı olan iki basamaklı bir sayı olduğunu iddia etmiştir. Bu iddiasının verilen aksine bir örnek ile çürütülmesinden sonra denediği örneklerdeki ortak özelliğin sonucun her zaman 11'in katı olduğunu fark ettiği ve iki basamaklı bir sayı ile bu sayının rakamlarının yer değiştirmesi sonucu oluşan sayının her zaman 11'in katı olduğu varsayımında bulunduğu görülmüştür. Eylül'ün ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

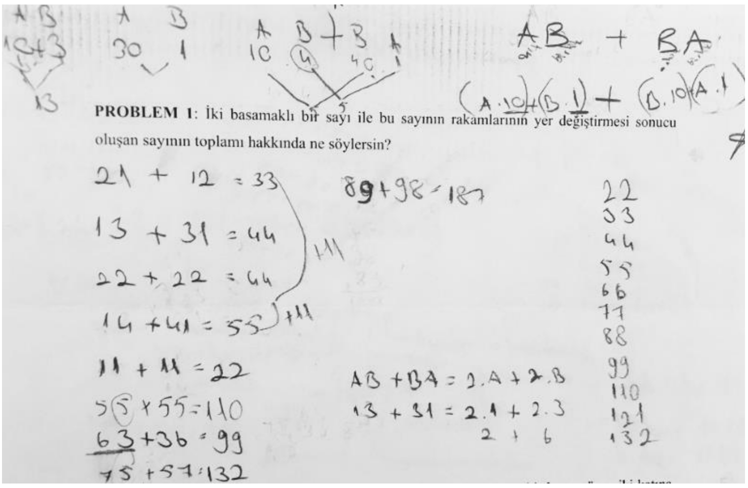


Görsel 4.69. *Eylül'ün ara klinik görüşmede Problem 5'te çözümü*

…
Eylül: 22'yi denersem 22'yle toplayınca 44 olur. 55, 77, 110, 33, 22, 44 diye gidiyor. Şimdi örüntü mü bulmam lazım. Hocam bunları küçükten büyüğe doğru dizince 22, 33, 44, 55 oldu. Bunlar da örüntü var sanki ama 77 olmaz orada 66 olmalıydı.
A: Nasıl yani örüntü mü var?
Eylül: 11'in katları galiba. 22 iki katı, 33 üç katı, 44 dört katı böyle devam ediyor. 77 de 7 katı. 110 da 11'in 10 katı oldu. Yani hep 11'in katı oldu.
A: Verdiğin örneklerle 11'in katı olduğunu bana gösterdin. Ama beni ikna edebilmen için şimdi neden 11'in katı olduğunu kanıtlaman gerekir. Örnek kullanmadan herhangi bir iki basamaklı sayı olarak düşün bakalım.
Eylül: Hocam cebirle yazayım en kolay a derim.
A: Biz iki basamaklı bir sayı alacağız cebirsel ifadeni ona göre düşün.
Eylül: Hocam o zaman bir basamağa a desek diğeri de b olur.
A: Tamam aferin sana. Şimdi bunları birleştirip iki basamaklı olarak düşündüğünde ne olur?
Eylül: a.b gibi mi ama arada çarpı olmaz sadece ab olur diğeri de ba olur.
A: Şimdi şunu göstermelisin ab ile ba toplandığında ne olur?
Eylül: ab ve ba'yı alt alta toplarsam yani a'yla b'yi toplayınca a+b çıkar sonra b ile a'yı toplayınca da b+a çıkar. Yani alt alta toplayınca iki basamak da aynı olur a+b olur. Yani az önce demiştim iki basamak da aynı sayı olur diye onu kanıtlamış oldum. Ama tabi üç basamaklı da var… Şimdi hocam ben yine örneklerle anlamaya çalışayım mesela 23'te 3 tane birlik var, 2 tane onluk var. 32'de 3 tane onluk 2 tane birlik. …ab ve ba olarak düşünürsem, ab'de b birler basamağı olur a da onlar basamağı olur. ba da ise b onlar basamağı olur ve a birler basamağı olur.
A: Tamam çok iyi gidiyorsun.
Eylül: Bence hocam a'ları ayrı b'leri ayrı toplarız. a'ları toplarsak a tane birlik + a tane onluk olur.
A: Tamam a tane birlik ile a tane onluğun toplamı ne olur?
Eylül: a tane 1'i düşününce bir de a tane 10'u düşünüce bunları birleştirince 10+1=11 olur o zaman a tane 11'lik olur. Diğeri de o zaman b tane 11'lik olur. Ha işte bu yüzden sonuç her zaman 11'in katı olur.

A: a tane 11'lik ile b tane 11'liği nasıl toplarsın?
Eylül: ab tane 11'lik. Yok pardon a+b tane 11'lik. Yani sonuç 11'in a+b katı olur.

Tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yapan Esra'nın da Eylül'ün çözümüne benzer bir çözüm yaptığı görülmüştür. Esra Görsel 4.70.'te sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme yaparak problemi analiz etmeye çalışmış, seçtiği stratejik örneklerle sonucun her zaman rakamları aynı olan iki basamaklı bir sayı olduğunu iddia etmiştir. Bu iddiasının verilen aksine bir örnek ile çürütülmesinden sonra denediği örneklerdeki ortak özelliğin sonucun her zaman 11'in katı olduğunu fark ettiği ve iki basamaklı bir sayı ile bu sayının rakamlarının yer değiştirmesi sonucu oluşan sayının her zaman 11'in katı olduğu varsayımında bulunduğu görülmüştür. Esra'nın ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.70. *Esra'nın ara klinik görüşmede Problem 5'te çözümü*

…
A: Peki senden bir şey isteyeceğim mesela örnekler verdin ya çıkan sonuçları inceler misin?
Esra: Tamam yazayım 33 çıktı, 44 çıktı, 22 çıktı, 55 çıktı, 110 çıktı, 99 çıktı. Mesela 44, 33'ten 11 fazla. 55 de 44'ten 11 fazla. Ha buldum. Aralarında hep 11 fark var. 11 artmış mesela 33 den 44 e. 99'dan 110'a 11 artmış, 110'la 11'i toplarsam 132. Hep 11,11 gidiyor.
A: Yani her zaman aralarında 11 fark var diyorsun.
Esra: Yani örüntü gibi. 11'in katı oluyor hepsi. 11 in 2 katı, 3 katı, 4 katı, gibi oluyor.
A: Tamam şimdi sen bir sayı ile bu sayının yerleri değiştiğinde oluşan sayının toplamının 11'in katı olduğuna kendini ikna ettin. Yani varsayımını örneklerle doğruladın peki bunu nasıl kanıtlarsın?
Esra: Yani genel olması için cebirselle gösterelim o zaman. Mesela A olsa biri diğeri de B olsa. Ama şimdi iki basamaklı olunca bunları nasıl yazacağız bilmiyorum.
A: Normal iki basamaklı bir sayı gibi düşün nasıl yazardın?
Esra: AB olsa o yer değiştirince BA olur. Bu ikisini toplarsam 2A+2B olur.
A: Tamam ikisini toplayınca 2A+2B diyorsun. Varsayımını örneklerle güçlendirir misin?

Esra: Mesela 13'ü deneyelim. A'ya 1 diyelim B'ye de 3 diyelim ama o zaman sonuç 44 çıkmıyor, 8 çıkıyor. Hımm çürüdü. O zaman toplamını yanlış yaptım.

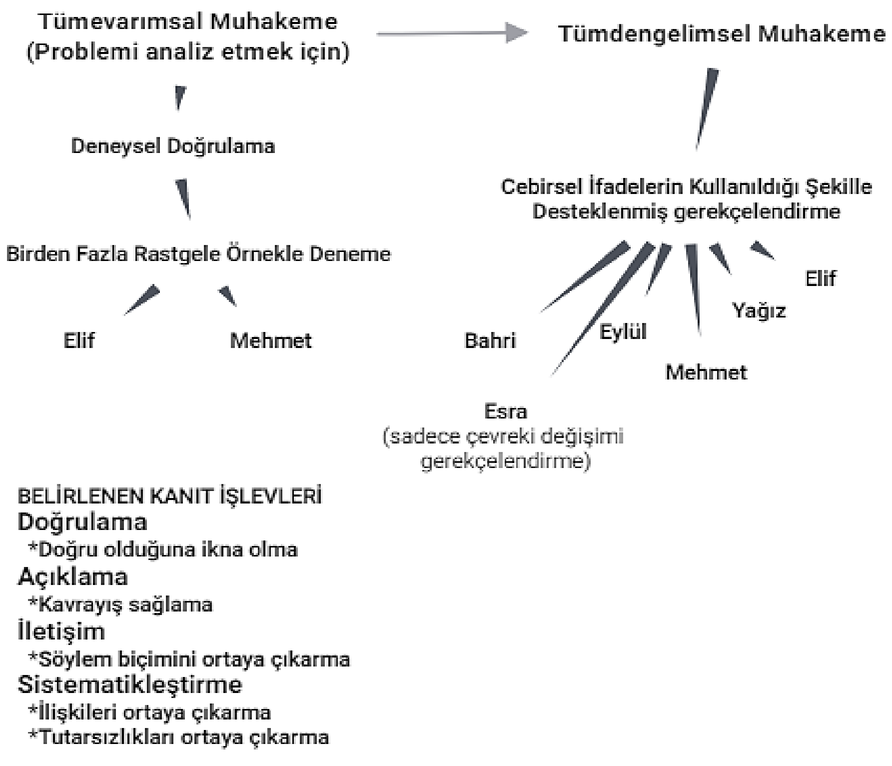
Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Esra önce AB ve BA şeklinde aldığı iki basamaklı sayıyı toplarken basamak kavramını dikkate almayarak toplamın 2A+2B oluğunu iddia etmiş; ancak bu iddiasını kendisi çürütmüştür. Öğrencinin tekrar tümevarımsal muhakeme yaparak AB+BA toplamına ulaşmak için tekrar örnekler kullandığı sonrasında tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülmüştür. Esra'nın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

…
Esra: Tamam bir daha deneyeyim AB ve BA'yı topluyoruz. Mesela normal sayı gibi düşüneyim. 13'ü 1 ve 3 diye ayıralım. 31 de 3 ve 1 oluyor. Şimdi bunları toplayınca 44 çıkacak. Ama nasıl olacak ki 4 ve 4 oluyor. Olmuyor. 44 elde etmem lazım. Ama bulamayacağım galiba.
A: Aslında çok yaklaştın. Doğru yolda ilerliyorsun.
Esra: Bir de 14'le deneyeyim aralarında bir bağ bulamadım. AB, 14 olsun BA da 41 olsun ikisini toplayınca 55 çıkacak. AB'nin içinde 1 ve 4 var. BA'nın içinde de 4 ve 1 var. Ama nasıl 55 olacak şimdi bu. Hocam şöyle mi? Burada 1 onluk 4 birlik ve 4 onluk ve 1 birlik var. Burada 1 tane onlukla 4 tane birliği toplayınca 14 oluyor 4 onlukla 1 birliği toplayınca 41 oluyor ikisini toplayınca 55 oluyor. 1 tane 10'lukla 4 tane onluğu toplayınca 5 onluk oluyor, 1 tane birlikle 4 tane birliği toplayınca 5 birlik çıkıyor. O zaman sonuç 55 çıktı. Mesela 63'le 36'yı düşününce 6 tane onlukla 3 tane onluğu toplayınca 9 onluk, 3 tane birlikle 6 tane birliği toplayınca da 9 birlik yani 99 çıkıyor.
A: Tamam AB üzerinden düşünelim o zaman tekrar. AB sayısında kaç tane onluk var?
Esra: Burada A onlar basamağı değil mi? O zaman A tane onluk B tane birlik var, A.10 onlar basamağı B.1 de birler basamağını verir. Diğerinde de B tane onluk A tane birlik var B.10 onlar basamağı, A.1 de birler basamağı olacak. Hocam A.10'la B.10 toplanır mı?
A: Sen söyler misin? Geçen yıl gördüğünüz cebirsel ifadeleri düşün biraz
Esra: O zaman B.1'le B.10 benzer olacaktı çünkü bu harfler aynı olunca benzer diyorduk. Mesela bunla bunu toplayınca 11 çıkıyor. Yani biz buraya ne yazarsak yazalım toplayınca hep 11 çıkıyor.
A: Neyle neyi toplayınca?
Esra: Yani burada 10'la 1'i toplayınca 11 tane B olacak, burada da 10'la 1'i toplayınca 11 tane A olacak. A ve B' ye ne yazarsak hep 11'le çarpıyoruz. Yani az önce örneklerde de aynısı çıkmıştı. 11'in katı diyorum ben hocam.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi hem Eylül'ün hem de Esra'nın yaptıkları kanıt sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları belirlenmiştir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilerin söylemleri sayesinde örnekler yardımıyla yapılan doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olmadıklarının farkında oldukları, örnekleri problemi analiz etmek için kullandıkları saptanmıştır. Öğrenciler 11'in katı, basamak kavramı, cebirsel ifadelerde toplama işlemi gibi bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaşmış ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlemişlerdir. Her iki öğrencinin de daha önce öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandıkları ve varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

4.3.2. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşme bulguları

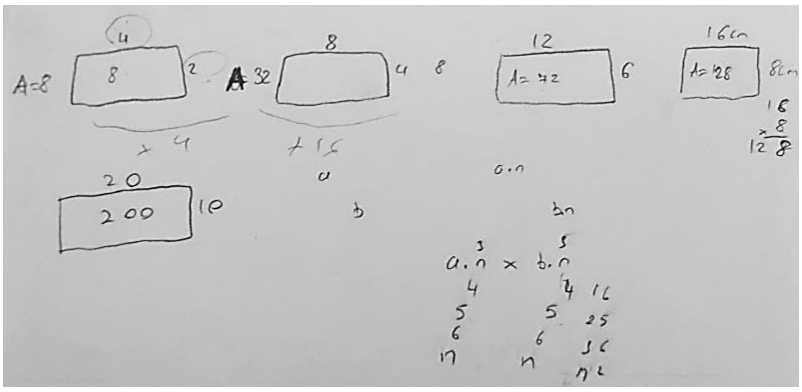
Ara klinik görüşmelerin ikinci problemi olan Problem 6 *(P.6: Kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgenin her bir kenarı önce iki katına çıkarılıyor ve alan ve çevredeki değişim gözleniyor. Sonra sırayla 3 katına, 4 katına, 5 katına… çıkarılıp alan ve çevredeki değişim gözleniyor. a ve b kenarlarının her biri n katına çıkarılırsa alan ve çevredeki değişim nasıl olur?)* öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri problemidir. Öğrencilerin Problem 6'yı çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.5.'te gösterilmiştir:



Şekil 4.5. *Öğrencilerin ara klinik görüşmede Problem 6'yı çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.5.'te görüldüğü gibi P.6'da 6 öğrenciden 2'sinin (Elif ve Mehmet) problemi analiz etmek için önce tümevarımsal muhakeme yaptıkları ve daha sonra tümdengelimsel muhakemeye geçiş yaparak kanıtlarını tamamladıkları belirlenmiştir. 3 öğrencinin ise (Bahri, Eylül ve Yağız) tümevarımsal muhakeme kullanmadan varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıtlayabildikleri belirlenmiştir. Öğrencilerden birinin (Esra) sadece çevredeki değişimi tümdengelimsel muhakeme ile kanıtlayabildiği; ancak alandaki değişimi kanıtlayamadığı görülmüştür.

Önce tümevarımsal muhakeme yapan öğrencilerin bu muhakemelerinin, varsayım oluşturmalarını sağladığı, daha sonra bu varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden biri olan Mehmet, Görsel 4.71.'de sunulduğu gibi rastgele bir dikdörtgen almış, bu dikdörtgenin kenar uzunluklarını sırasıyla 2 katına, 3 katına ve 4 katına çıkararak alandaki değişimi tümevarımsal muhakeme ile gözlemlemiştir. Öğrencinin daha sonra kenar uzunlukları n katına çıkan bir dikdörtgenin alanının n^2 katına çıkacağı varsayımında bulunduğu ve bu varsayımını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladığı görülmüştür. Mehmet cebirsel ifadeleri kullanarak ve şekillerden destek alarak gerekçelendirme yapmıştır. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



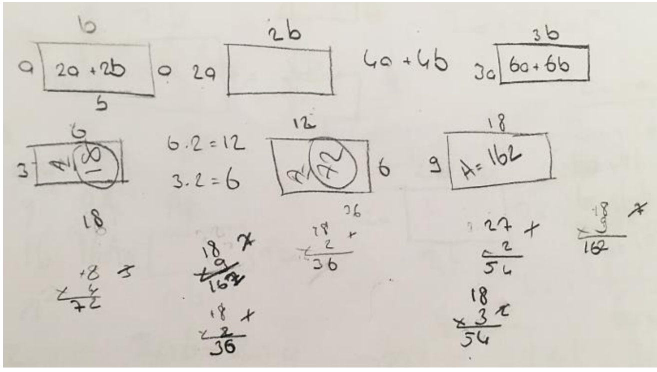
Görsel 4.71. *Mehmet'in ara klinik görüşmede Problem 6'da çözümü*

Mehmet: Önce bir dikdörtgen çizeyim uzun kenarı 4 olsun kısa kenarı 2 olsun. İki katına çıkarırsam uzun kenar 8 kısa kenar 4 olur. Birincinin alanı 8, ikincinin alanı 32 olur. Şimdi bir de ilk sayıların 3 katını alalım. 12 ve 6 alanı da 72 olur. 4 katına çıkınca bu 16 bu da 8 olur alanı da 128 olur. Şimdi birinciye bakınca 4 katına çıkmış, sonra 9 katı olmuş, diğeri de 16'yla çarpımı oldu. Yani kenarı 2 katına çıkarınca 4 katına çıkar, 3 katına çıkarınca 9 katına çıkar, 4 katına çıkarınca 16 katına çıkar.
A: Peki 5 katına çıkınca ne olur?
Mehmet: Onu da yapalım bu kenar 20 bu da 10 çıkar. Alan da 200 çıkar. Yani bölünce 25 katına çıkar.

A: Tamam yani nasıl değişiyor alan?
Mehmet: Kenarı 2 katına çıkarınca alan 4 katına, kenar 3 katına çıkınca alan 9, 4 katına çıkınca alan 16.
A: Peki neden böyle?
Mehmet: Çünkü 2'yle bir daha 2'yi çarpıyoruz 4 olur. 3 katına çıkınca 3'le 3'ü çarpınca 9 katına çıkıyor. 4 katına çıkınca 4'le 4'ü çarpınca 16 katına çıkıyor. 5 katına çıkarınca da 5'le 5'i çarpınca 25 katına çıkıyor. Yani bu kenar 2 katına çıkınca diğer kenarda 2 katına çıkıyor 2 defa 2'yi çarpıyoruz.
A: n katına çıkınca ne olur?
Mehmet: Hocam onda da karesi olacak n'nin.
A: Neden?
Mehmet: Şimdi a alırsam bunu da b alalım. Eğer n katına çıkarırsam n.a olur, bu da n.b olur. Alan da bunları çarpınca a.b. n.n olur. Yani iki defa n'i çarpıyoruz. n^2 olur. Yani alan da n^2 katına çıkar.

Öğrencinin çevredeki değişim için de benzer süreci izlediği ve kenar uzunlukları n katına çıkan bir dikdörtgenin çevresinin n katına çıkacağını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladığı görülmüştür. Mehmet'in yaptığı kanıt sayesinde varsayımının doğruluğuna ikna olduğu belirlenmiştir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Mehmet'in kanıta yüklediği anlamı, hem de problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğrencinin söylemleri sayesinde örnekler yardımıyla yapılan doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olmadığının farkında olduğu, örnekleri problemi analiz etmek için kullandığı saptanmıştır. Mehmet dikdörtgenin alanı ve çevresi, cebirsel ifadelerde toplama ve çarpma, üslü ifadelerde işlemler gibi bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaşmış ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlemiştir. Öğrencinin daha önce öğrendiği birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandığı ve varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

Aynı şekilde Elif'in de Görsel 4.72.'de sunulduğu gibi önce tümevarımsal muhakeme yaparak varsayımda bulunduğu ve bu varsayımını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladığı görülmüştür. Elif önce rastgele bir dikdörtgen almış, bu dikdörtgenin kenar uzunluklarını sırasıyla 2 katına ve 3 katına çıkararak çevredeki değişimi gözlemlemiştir. Öğrencinin daha sonra kenar uzunlukları n katına çıkan bir dikdörtgenin çevresinin n katına çıkacağı varsayımını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladığı görülmüştür. Elif cebirsel ifadeleri kullanarak ve şekillerden destek alarak gerekçelendirme yapmıştır. Elif'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.72. *Elif'in ara klinik görüşmede Problem 6'da çözümü*

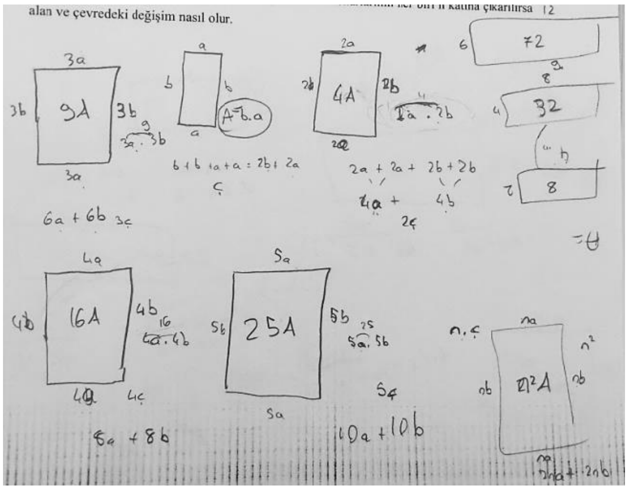
Elif: Şimdi bir dikdörtgen çizelim kısa kenarı a ve uzun kenarı b olsun. Her bir kenarı 2 katına çıkıyormuş. Şimdi bu kenara 3 bu kenara 6 desem iki katına çıkınca burası 6 ve burası 12 oluyor.
A: Tamam alan ve çevredeki değişim nasıl olur?
Elif: Çevreyi bulalım. Birincinin çevresi 3+6=9, 9+9=18 çıktı. Diğerinin 12+6=18 18.2=36 çıktı. Biri 18 diğeri 36 yani 2 katı oldu.
A: Peki her bir kenar 3 katına çıkarsa ne olur.
Elif: Burası 9 olur, burası 18 oldu. Çevresi 54 oldu. Yani 18.3 =54, ilk üçgenin 3 katı çıktı.
A: Tamam yani 4 katına çıktığında çevresi kaç katına çıkar?
Elif: 4 katına çıkar.
A: Tamam şimdi nedenini araştıralım.
Elif: Mesela bu kenar a ve b olursa. Çevresi 2 tane a ve 2 tane b olur.
A: Yani onu nasıl yazarız cebirsel olarak?
Elif: 2a+2b. Kenarları 2 katına çıkarıyorum, bu kenar 2a olur bu kenar da 2b olur. O zaman çevresi 4a+4b olur. Yani ilkinin 2 katı oldu. Şimdi 3 katına çıkınca burası 3a burası 3b olur. Çevresi de 6a+6b olur. 4 katına çıkınca ilkinin 4 katı olur.
A: Peki n herhangi pozitif bir tam sayı olsun kenar n katına çıkarsa çevre ne olur?
Elif: n katına çıkar.
A: Neden?
Elif: Yani kenarlar kaç katına çıkarsa çevresi de o kadar katına çıkar. O yüzden o da n katına çıkar yani 2a+2b demiştim buna n. (2a+2b) olur.

Çevredeki değişimi kanıtlayan Elif alandaki değişimi gözlemlerken önce hatalı bir iddiada bulunmuş, öğretmenin aksine örnek vermesi ile bu iddiasının hatalı olduğunu görmüştür. Verilen aksine örnek hem öğrencinin iddiasını çürütmüş, hem de öğrencinin iddiasının neden yanlış olduğunu anlamasını sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencinin tekrar tümevarımsal muhakeme yaptığı, kenar uzunlukları n katına çıkan dikdörtgenin alanının n^2 katına çıkacağı varsayımında bulunduğu ve bu varsayımını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladığı görülmüştür. Elif'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

> **A**: Tamam alana bakalım.
> **Elif:** Bunun alanı a.b, bunun 2a.2b, bunun 3a.3b
> **A:** 4 katına çıksa ne olurdu.
> **Elif:** 4a.4b
> **A:** Tamam alandaki değişim için ne dersin?
> **Elif:** Birer birer artmış. Yani bir ab iken sonra 2, sonra 3, sonra 4 olmuş
> **A:** Yani kenar iki katına çıkarsa alan kaç katına çıkar?
> **Elif:** 2 katına, 3 katına çıkarsa alan da 3 katına.
> **A:** Tamam senin yaptığın örnekler üzerinden yapalım. Bunun alanı nedir?
> **Elif:**18
> **A:** Peki kenarlar 2 katına çıktığında alan ne oluyor?
> **Elif**: 6.12=72
> A: Ama kenar uzunluğu 2 katına çıktığında senin dediğin gibi 2 katına çıkmadı bak bu 18 bu 72. Neden öyle oldu sence?
> **Elif:** Hımm 4 katına çıkıyor.
> **A:** Neden 4 katı.
> **Elif:** Diğerine bakayım. 162 çıkıyor. O da 18'e bölünce 9 çıkıyor. Yani 9 katı.
> **A**: Tamam 4 katına çıkınca kaç katına çıkar?
> **Elif**: 16
> **A:** Nerden buldun onu?
> **Elif:** Çünkü 2'nin karesi, 3 ün karesi bu da 4 ün karesi olacak.
> **A:** Nerden buluyorsun o kareleri?
> **Elif:** Buralar iki tane 2 var 2.2=4, 3.3.=9, 4.4.=16, 5.5.=25
> **A:** Tamam kenar uzunluğu n katına çıkarsa alan kaç katına çıkar?
> **Elif:** O zaman n.n olacak yani n'nin karesi. Yani n.a.nb olsa çarpılan iki tane n var o yüzden n'nin karesi olur bence.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Elif'in yaptığı kanıt sayesinde varsayımının doğruluğuna ikna olduğu belirlenmiştir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencinin söylemleri sayesinde örnekler yardımıyla yapılan doğrulamanın genelleme yapmak için yeterli olmadığının farkında olduğu, örnekleri problemi analiz etmek için kullandığı saptanmıştır. Elif dikdörtgenin alanı ve çevresi, cebirsel ifadelerde toplama ve çarpma, üslü ifadelerde işlemler gibi bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaşmış ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlemiştir. Öğrencinin daha önce öğrendiği birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandığı ve varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

P.6'da 3 öğrencinin sadece tümdengelimsel muhakeme ile alan ve çevredeki değişimi kanıtladıkları tespit edilmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Bahri Görsel 4.73.'te sunulduğu gibi kenar uzunlukları n katına çıkan bir dikdörtgenin çevresinin n katına çıkacağı varsayımını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtlamıştır. Öğrencinin cebirsel ifadeleri kullanarak ve şekillerden destek alarak gerekçelendirme yaptığı görülmüştür. Bahri'nin ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.73. *Bahri'nin ara klinik görüşmede Problem 6'da çözümü*

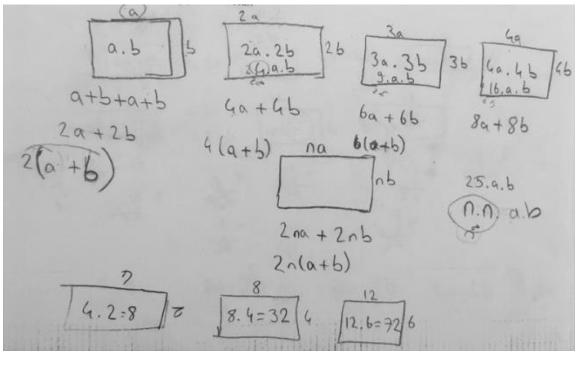
Bahri: Şimdi bir dikdörtgen alayım. Burası a ve burası b olsun. İki katına çıkınca 2a ve diğeri de 2b olur. Bunun çevresinde 2 tane a, 2 tane b var yani 2a +2b. Diğerinde de 2 tane 2a var yani 4a+4b olur. O zaman çevre 2 katına çıkar. Diğerleri de 3 katına 4 katına çıkacak galiba.
A: Tamam bunu göstermen gerekir.
Bahri: Burası 3a olur, burası da 3b olur. Çevre 3a+3a yani 6a, sonra 3b+3b yani 6b. Bu da 3 katı çıktı. Her bir kenarı 4 katına çıkarayım o da 8a+8b olacak yani ilk çevrenin 4 katı. 5 katına çıkınca 10a+10b olacak o da 5 katı. Yani kenarlar kaç katına çıkarsa çevre de o kadar katına çıkıyor.
A: Yani, ilk çevreye Ç dersen ikinci ne olur?
Bahri: 2.Ç diğeri de 3.Ç, 4.Ç,5.Ç diye gider.
A: Peki n herhangi bir pozitif bir tam sayı olsun, her bir kenarı n katına çıkarırsan çevre kaç katına çıkar?
Bahri: n. Ç olur.
A: Neden kanıtlar mısın?
Bahri: Bunun kenarı n.a olur, bunun kenarı n.b olur, çevresi de 2na+2nb oldu yani n katı oldu.
A: Tamam aferin sana peki alan için ne dersin?
Bahri: Şimdi bunun alanı ab olur. İkinci de 2a.2b, diğeri 3a. 3b, diğeri 4a.4b ve 5a.5b
A: Tamam değişim nasıl olur?
Bahri: Kenar iki katına çıkınca alan da 2 katı olur, 3 katına çıkınca alan da 3 katına çıkar. Yani n katına çıkınca da alan n katına çıkar. Yani çevreyle aynı oldu.
A: Tamam o zaman benim için bir dikdörtgen çiz. Kenarları 4 ve 2 olsun. Alanını bul, sonra kenarları 2 katına çıkar ve tekrar alanı bul.
Bahri: Şimdi bunun ilk alanı 8 olur, kenarlar 2 katına çıkarsa burası 8 burası 4 olur alan da 32 olur.

A: Ama sen alan iki katına çıkacak demiştin bak verdiğim örnekle seni çürüttüm. Sence neden öyle oldu?
Bahri: 3 katına çıkarayım. Bu 12 olur, bu da 6 olur alan 72 oldu. Şimdi ilkinde kenarları 2 katına çıkarınca 4 katına çıkmış, kenarlar 3 katına çıkınca da alan 9 katına çıkmış. Bence şey şimdi 2 kere 2 dört olur. 3'le 3'ü çarpınca da 9 olur. 4 katında da 16 olacak, 5 katını alınca da 25 olacak.
A: Neden öyle oluyor?
Bahri: Çünkü iki kenarı da 2 katına çıkarıyoruz. Yani ikisi de 2 katına çıkar iki tane 2 olduğu için. Diğerinde de iki tane 3'ü çarpıyoruz, yani 9 olur.

Görüldüğü gibi Bahri alandaki değişim için önce hatalı bir iddiada bulunmuştur. Öğretmen aksine bir örnek yardımıyla öğrencinin hatasını fark etmesini sağlamıştır. Verilen aksine örnek hem öğrencinin iddiasını çürütmüş, hem de öğrencinin iddiasının neden yanlış olduğunu anlamasını sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bunun üzerine öğrenci doğru varsayımda bulunmuş ve bunu kanıtlamıştır. Bahri'nin ifadeleri aşağıdaki gibidir:

A: n yine herhangi bir pozitif tam sayı olsun n katına çıkınca ne olur?
Bahri: n^2 olacak. Çünkü onda da iki tane n'yi çarpacağız o da n.n yani n^2 olur. İyi ki öğrenmişiz üslüleri.
A: Tamam ilk alan A ise diğerleri ne olur?
Bahri: Bu 4.A, bu 9.A, 16.A, 25.A ve n^2.A olur.
A: Çevrede kenarları 2 katına çıkarınca çevre de 2 katına çıktı ama alan 4 katına çıktı. Niye ikisi farklı?
Bahri: Çünkü çevrede topluyoruz ama alan da çarpıyoruz ya iki tane 2'yi çarpınca öyle olur.

Sadece tümdengelimsel muhakeme yaparak alan ve çevredeki değişimi kanıtlayan Eylül de Bahri gibi kenar uzunlukları n katına çıkan bir dikdörtgenin çevresinin n katına çıkacağı varsayımını tümdengelimsel muhakeme ile kanıtlamıştır. Görsel 4.74.'te sunulduğu gibi öğrencinin cebirsel ifadeleri kullanarak ve şekillerden destek alarak gerekçelendirme yaptığı görülmüştür. Eylül'ün ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.74. *Eylül'ün ara klinik görüşmede Problem 6'da çözüm*

…
Eylül: Çünkü 2 katına çıkınca çevre 2 katına çıkmıştı. Şimdi bunu şöyle yazabilir miyiz? 2n.(a+b) olur. İlki 2.(a+b) yani 2'ler aynı, (a+b)'ler aynı o zaman n katına çıkar.
A: Tamam aferin sana, alana bakalım.
Eylül: Bunun alanı a.b, bunun alanı 2a.2b, bunun 3a.3b, bunun 4a.4b olur. Yani 2 katına, 3 katına 4 katına çıkmış.
A: Tamam o zaman şu örneği yapalım. Bir kenarı 4 diğeri de 2 olsun. Alanını bul.
Eylül: 8 olur.
A: Şimdi kenarlarını 2 katına çıkar.
Eylül: Bu 8, bu da 4 oldu alan 32 oldu. Yani 4 katına çıktı.
A: Tamam 3 katına çıkar bakalım.
Eylül: Bu 12 olur bu da 6 olur alanı da 72 oldu yani 9 katına çıktı.
A: Ama sen 3 katına çıkar demiştin acaba neyi yanlış gördün? Peki 4 katına çıkarsa ne olur?
Eylül: 16
A: Aferin sana peki neden hemen 16 dedin?
Eylül: Kendiyle çarpımı olacak galiba. Çünkü bu örnekte kenarı 2 katına çıkarınca alan 4 katına çıkmış. Kenarı 3 katına çıkarınca da alan 9 katına çıkmış. Yani 2'yle 2'yi çarpınca 4 olur, 4ab olur, 3'le kendisini çarpınca 9ab olur, 4'le kendisini çarpınca 16ab olur.
A: Yani 5 katına çıksa ne olur?
Eylül: 25.a.b olur
A: Peki n katına çıkınca ne olur.
Eylül: n.n.a.b olur yani n^2.a.b olur. Yani hep kendiyle çarpımı katına çıkıyor. Bunda da n'nin kendiyle çarpımı katına çıkmış. n^2 katına çıkmış.

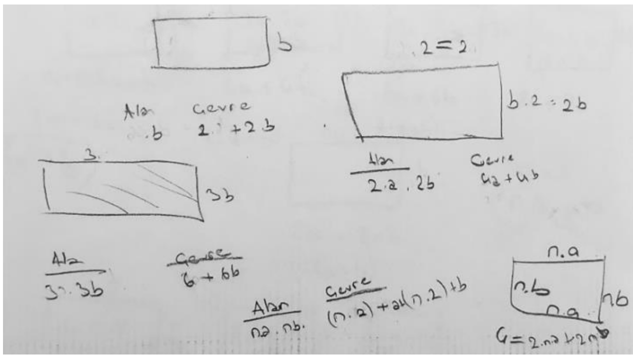
Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Eylül alandaki değişim için önce hatalı bir iddiada bulunmuştur. Öğretmen aksine bir örnek yardımıyla öğrencinin hatasını fark etmesini sağlamıştır. Verilen aksine örnek hem öğrencinin iddiasını çürütmüş, hem de öğrencinin iddiasının neden yanlış olduğunu anlamasını sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bunun üzerine öğrenci doğru varsayımda bulunmuş ve bunu kanıtlamıştır.

Yağız da Eylül'e çok benzer şekilde benzer şekilde cebirsel ifadeleri kullanarak ve şekillerden destek alarak gerekçelendirme yapmıştır. Yağız'ın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

…
Yağız: Birincinin iki katı kadar olur.
A: Neden?
Yağız: Çünkü bunda 2a+2b her birini iki katına çıkarıyoruz 4a+4b oluyor.
A: Üç katına çıkınca ne olur?
Yağız: Çevre de 3 katına çıkar.
A: Mesela ilk çevreye Ç dersek diğerleri ne olur
Yağız: 2Ç, 3 katına çıkınca 3Ç, 4 katına çıkınca 4Ç n katına çıkınca da n.Ç olur.
…
A: Peki n katına çıkınca alan ne olur?
Yağız: n kere n, n^2 olur.
A: Yani ilk alana A dersen diğerleri ne olur?
Yağız: 4A, 9A, 16A n^2A olur.

Bahri, Eylül ve Yağız'ın yaptıkları kanıt sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları belirlenmiştir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede bu öğrencilerin problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Üç öğrenci de dikdörtgenin alanı ve çevresi, cebirsel ifadelerde toplama ve çarpma, üslü ifadelerde işlemler gibi bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaşmış ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlemişlerdir. Öğrencilerin daha önce öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandıkları ve varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

Çevredeki değişimi tümdengelimsel muhakeme yaparak kanıtlayan Esra, Görsel 4.75.'te sunulduğu gibi cebirsel ifadeleri kullanarak ve şekillerden destek alarak gerekçelendirme yapmıştır. Esra'nın ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.75. *Esra'nın ara klinik görüşmede Problem 6'da çözümü*

Esra: Şimdi çizelim bunun bir kenarı a bir kenarı b olsun. Sonra 2 katına çıktı. Biraz daha büyük çizelim. Bu da a.2 ve b.2 oluyor. Alan da bunla bunu çarparız.
A: Neyle neyi çarparız?
Esra: a ve b'yi çarparız, çevrede de 2a+ 2b olur. İkincisinde 2a.2b olur. Çevrede 4a+4b olur.
A: Tamam.
Esra: Bir de 3 katı yapalım. Burası 3a oluyor burası da 3b. Alanda 3a.3b çevrede 6a+6b. Şimdi alanlar ab, 2a.2b, 3a.3b diye gidiyor yani ardışık olarak gitmişler. Alan giderek büyüyor.
A: Çevre nasıl oluyor?
Esra: Çevre de 4a+4b, 6a+6b.
A: Tamam peki kenarlar n katına çıkınca çevre ne olur?

Esra: n katına çıkınca na+nb olur. Bir de 2'yle çarparız iki kenar olduğu için 2na+2nb.
A: Mesela birinci çevreyi Ç ile göster desem diğerleri ne olur?
Esra: O zaman 2.Ç, 3.Ç, 4.Ç, 5.Ç olur, o zaman n katına çıkınca da n.Ç olur
A: Alandaki değişim nasıl olur?
Esra: Alan ab, 2a.2b, 3a.3b, 4a.4b. Hep ardışık olarak artıyor.
A: Nasıl ardışık?
Esra: 1,2,3,4 gibi olmuş. Yani n galiba olacak. Emin değilim.
A: Tekrar düşün istersen.
Esra: …Hocam onda kafam çok karıştı anlamadım.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Esra alandaki değişimi kanıtlayamamış kafasının karıştığını ifade etmiştir. Bununla birlikte çevredeki değişimi kanıtlayan Esra'nın kanıt sayesinde varsayımının doğruluğuna ikna olduğu belirlenmiş, *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi ortaya çıkmıştır. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Esra'nın kanıta yüklediği anlamı, hem de problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğrencinin kanıtını tamamlayamamasının nedeninin cebirsel ifadelerde çarpma bilgisi eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmüştür. Bununla birlikte Esra dikdörtgenin alanı ve çevresi, cebirsel ifadelerde toplama gibi bildiklerinden yola çıkarak bir sonuca ulaşmış ve kanıt yaparken bu bilgileri mantıksal bir yapı içinde düzenlemiştir. Öğrencinin daha önce öğrendiği birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandığı ve varsayımının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

4.4. Son Altı Haftanın Öğretim Uygulamalarına İlişkin Bulgular

Bu bölümde ara klinik görüşmelerin ardından, toplam on iki hafta süren öğretim uygulamalarının son altı haftasına ait bulgular sunulmuştur.

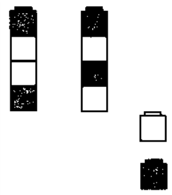
4.4.1. Yedinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

Yedinci hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.13.'te görüldüğü gibi öğrencilere Maher ve Martino'nun (1996) çalışmalarından uyarlanan ve tüketerek kanıt yapmaları gereken bir problem sorulmuştur. Öğretimin sonunda küçük gruplardan sadece Çalışkan Arılar grubunun tüketerek kanıt yapabildiği belirlenmiştir.

Tablo 4.13. *Yedinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik

*Elimizde istediğimiz sayıda siyah ve beyaz küpler var. Bu küpleri kullanarak kuleler yapacağız. Siyah ve beyaz küplerin her ikisinden de en az bir tane kullanmak şartı ile şekilde görüldüğü gibi dört küp yüksekliğinde kaç farklı kule yapabiliriz? Eğer beş küp yüksekliğinde kule yapmamız istenseydi kaç farklı kule yapabilirdik?



Etkinliğin Odağı

*Matematiksel varsayım geliştirme
*Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme

- Sistematik şekil çizerek tüketerek kanıt yapma

Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma

* Deneme yanılma yaparak 4 küp yüksekliğindeki kule sayısını doğru belirleme
* Deneme yanılma yaparak 5 küp yüksekliğindeki kule sayısını hatalı belirleme

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi	Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları
* Deneme yanılma yaparak 4 küp yüksekliğinde kule sayısını doğru belirleme (Her iki odak grup) * Deneme yanılma yaparak 5 küp yüksekliğinde kule sayısını hatalı belirleme (Her iki odak grup) * Kule sayıları arasında hatalı sayısal ilişki kurma (Efsanevi Matematikçiler grubu)	*Deneme yanılma stratejisi dışında bir yöntem geliştirmek için arkadaşlarını teşvik etme (Her iki odak grup) *Oluşturdukları kuleleri birbirleri ile karşılaştırarak kontrol etme (Her iki odak grup) *Arkadaşlarını kule sayıları arasında sayısal ilişki kurmaya teşvik etme (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Geçerli kanıt yapamadıklarının farkında olma (Her iki odak grup)	*Bütün kuleleri çizdiklerine nasıl ikna olduklarını sorma *Çizilen bir kulenin aynısını daha önce çizmediklerini nasıl anladıklarını sorma *Beş küp yüksekliğinde 20 kule olduğunu iddia ediyorlarsa bu iddialarını nasıl kanıtlayacaklarını sorma

Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi	Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları
* Deneme yanılma yaparak 4 küp yüksekliğinde kule sayısını doğru belirleme (Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller ve Starlar grubu) * Deneme yanılma yaparak 5 küp yüksekliğinde kule sayısını hatalı belirleme (Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller ve Starlar grubu) * Sistematik şekil çizerek tüketerek kanıt yapma (Çalışkan Arılar grubu)	*Deneme yanılma stratejisini ikna edici bulmama	* Kulelerin sayısının doğruluğundan nasıl emin olduklarını sorma

Değerlendirme Aşaması

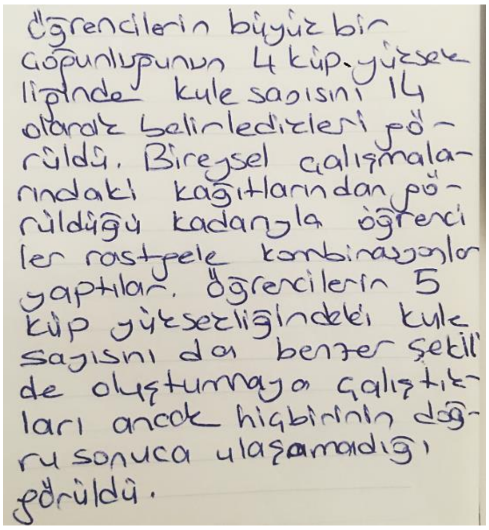
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme
*Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme
*Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Tablo 4.13. (Devam) *Yedinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Belirlenen Kanıt İşlevleri		
DOĞRULAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*Tutarsızlıkları ortaya çıkarma *Uygulama

Belirlenen Sosyal Normlar	Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Farklı çözümler sunma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne yazdığı bireysel çalışmaların değerlendirmesi Görsel 4.76.'da sunulmuştur:


öğrencilerin büyük bir
çoğunluğunun 4 küp yüksek
liğinde kule sayısını 14
olarak belirlediklerini gö-
rüldü. Bireysel çalışmala-
rındaki kağıtlarından gö-
rüldüğü kadarıyla öğrenci
ler rastgele kombinasyonlar
yaptılar. öğrencilerin 5
küp yüksekliğindeki kule
sayısını da benzer şekil
de oluşturmaya çalıştık-
ları ancak hiçbirinin doğ-
ru sonuca ulaşamadığı
görüldü.

Görsel 4.76. *Yedinci hafta bireysel çalışmaların değerlendirilmesine ilişkin öğretmenin günlüğü*

Öğretmenin günlüğünde belirttiği gibi öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun bireysel çalışmalarında dört küp yüksekliğindeki kule sayısını belirleyebilmek için rastgele kombinasyonlar yaptıkları ve tek tek bütün kuleleri deneyerek doğru sayıya ulaştıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte beş küp yüksekliğinde kuleler çizmeye başlayan öğrencilerin dört küp yüksekliğinde kuleleri çizebilmek için kullandıkları yöntemi denedikleri; ancak başarıya ulaşamadıkları gözlenmiştir.

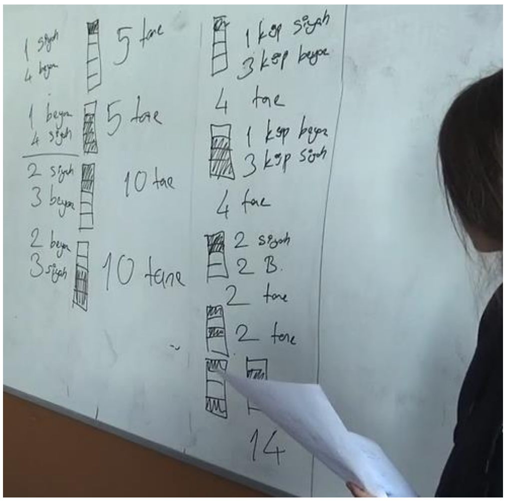
Küçük grup tartışmaları başladıktan sonra odak gruplardaki öğrencilerin dört küp yüksekliğindeki kulelerini birbirleriyle karşılaştırdıkları, oluşturdukları kombinasyonu daha önce çizdikleri ile karşılaştırarak kontrol ettiklerini söyledikleri ve bu şekilde birbirlerinin eksiklerini ve fazlalıklarını belirledikleri görülmüştür. Böylece kule sayısının 14 olduğu konusunda görüş birliğine vardıkları belirlenmiştir. Dört küp yüksekliğinde kule sayısının 14 olduğuna ikna olduktan sonra beş küp yüksekliğinde kule çizimine geçmişlerdir. Öğrenciler ön çalışmada yaptıkları gibi tek tek deneyerek kuleler oluşturmaya çalışmışlar, oluşturdukları kombinasyonu daha önce çizdikleri ve arkadaşlarının çizdikleri ile karşılaştırarak kontrol etmişler ve bu şekilde birbirlerinin eksiklerini ve fazlalıklarını belirlemeye çalışmışlardır. Öğretmen bütün sınıfa "Bütün kuleleri çizdiğinize beni nasıl ikna edeceksiniz?, "Çizdiğiniz bir kulenin aynısını daha önce çizmediğinizi nasıl anlıyorsunuz?", "Beş küp yüksekliğinde 20 kule olduğunu iddia ediyorsanız, bu iddianızı nasıl kanıtlarsınız?" gibi sorular sorarak öğrencileri genel bir yöntem bulmaları ve tüketerek kanıt yapmaları konusunda teşvik etmiştir. Bunun üzerine odak grupların tartışmalarında bütün kuleleri deneme yanılma yaparak doğru sonuca ulaşmalarının zor olduğunu fark ettikleri, daha genel bir yöntem araştırmaya başladıkları görülmüştür. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Ancak her iki odak grup da belirli bir yöntem geliştiremedikleri için beş küp yüksekliğindeki kule sayısını doğru olarak belirleyememişlerdir. Efsanevi Matematikçiler grubunun buldukları kule sayıları arasında sayısal ilişki aramaya yöneldikleri görülmüş, grup tartışmasının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

Öğrenci: 4'lü kuleleri kaç buldunuz?
Öğrenci: 12 buldum.
Öğrenci: Bence senin yaptığın gibi değil. Ben 14 buldum o zaman sen eksik bulmuşsun. Bak karşılaştıralım sen bu ikisini çizmemişsin.
Öğrenci: Ben de 14 buldum tek tek çizdim. Hepimizin aynı olmuş.
…
Öğrenci: Şimdi beşlilere bakalım.
Öğrenci: Tek tek çizelim yine. Ama uzun sürecek.
Öğrenci: Baksanıza hoca yine bir yöntem istiyor. Genel bir şey bulmaya çalışalım, o zaman 5'lileri de yapabiliriz.

Öğrenci: Peki şöyle olabilir mi 4.4.-2=14 çıkıyor.
Öğrenci: 5'te nasıl olacak diyorsun 5.5.-2= 23 yani öyle mi?
Öğrenci: İşte 5'lerin hepsini yapan biri olsaydı bunu kanıtlayabilirdik.
Öğrenci: Ya da (4-1). 4 yaparız sonra +2 deriz.
Öğrenci: O zaman o formülü 5'lilerde deneyince 5.4=20 20+2 =22 olacak.
Öğrenci: Ben 21 tane çizdim.
Öğrenci: Hadi bir tane daha çiz hadi, 1 tane daha bulursak formül doğru demek ki?
Öğrenci: Bakın 23 oldu. O zaman formül yanlış.
Öğrenci: Bence bu sayı daha da artacak.
Öğrenci: O zaman şöyle benim yaptığım gibi 4.4.-2 =14, 5.5.-2=23 ikisinde de oluyor.
Öğrenci: Tabi başka çıkmazsa. Nasıl bileceğiz peki başka çıkmayacağını?
Öğrenci: Çizerken nasıl bir şey yapıyorsun?
Öğrenci: Çiziyorum kafama göre sonra bakıyorum bu var mı yok mu kontrol ediyorum. Peki ben tahtaya kalksam bunların hepsini tek tek çizecek miyim?
Öğrenci: Yok işte formülle yapacağız.
Öğrenci: 2 tane daha bulduk. 25 oldu.
Öğrenci: O zaman 5'in karesi.
Öğrenci: O zaman diğeri de 4'ün karesi 16 olurdu. Bence biz bunu tam kanıtlayamadık.
Öğrenci: Hey bir tane daha çıktı. 26 oldu.
Öğrenci: Ben şöyle düşündüm şimdi 4'lülerde bir kareyi boyayınca 4 farklı oluyor ya o zaman 2 tane boyayınca 3 tane olsa, 3 tane boyayınca 2 tane olur. 4 tane boyayamayız zaten. Toplayayım 9 oldu. Olmadı. Bu da çürüdü.
Öğrenci: Bir tane daha çıktı. 28 oldu.
Öğrenci: Böyle tek tek çizmek çok karışık oluyor. Bence ikna edemeyeceğiz.
Öğrenci: Hiçbir şey yapamamaktansa şöyle diyelim, küp sayısı çift olunca 2'yi çıkarıyoruz diyelim 4.4. -2, tek olduğunda da 5.5.+ 3 diyelim.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi önceki haftalarda olduğu gibi öğrencilerin eylemleri *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, grup üyelerini ikna etme, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Öğrenciler çizdikleri 4 küp yüksekliğinde kuleleri birbirleri ile karşılaştırarak toplam 14 kule çizileceği konusunda görüş birliğine varmışlardır. Ancak beş küp yüksekliğinde kuleler çizerken sistematik olmayan çizimler yaptıkları, kule sayısını hatalı belirledikleri ve buldukları kule sayıları arasında sayısal ilişki kurmaya çalıştıkları görülmüştür. Bir öğrencinin 5 küp yüksekliğindeki kule sayısının 25 çıkması üzerine toplam kule sayısının kullanılan küp sayısının karesi olduğunu iddia ettiği; ancak arkadaşının 4 küp yüksekliğindeki kule sayısını aksine örnek vererek bu iddiayı çürüttüğü görülmüş ve bu durum *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* işlevi olarak ele alınmıştır. Öğrencilerin küp sayısı 4 olduğunda 4^2-2 tane, küp sayısı 5 olduğunda 5^2+3 tane kule oluştuğunu iddia ettikleri görülmüştür. Bununla birlikte öğrencilerin söylemlerinden kendi yaptıkları çözümün doğruluğuna ikna olmadıkları ve bu yüzden diğer grupları da ikna edemeyeceklerini düşündükleri görülmüştür.

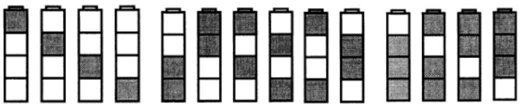
Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca öğretmen her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlenmiş, önemli noktaları vurgulamış ve grup sözcüleri çözümlerini bitirdikten sonra sınıfa “Bu çözüm sizi ikna etti mi?” diye sorarak sınıf tartışmasını başlatmıştır. Her bir grup sözcüsünün yaptığı gerekçelendirme üzerinde durularak, bu gerekçelendirilmiş açıklamaların kabul görüp görmediği sınıf tarafından tartışılmıştır. Sınıf tartışmalarında bütün grupların dört küp yüksekliğindeki kule sayısını 14 olarak belirledikleri; ancak beş küp yüksekliğindeki kule sayısında farklılıklar olduğu görülmüştür. Ayrıca Çalışkan Arılar grubu dışındaki grupların tüketerek kanıt yapamadığı, sistematik olmayan çizimler yaparak kule sayısını belirledikleri, deneyerek buldukları kule sayısı ile bir kural oluşturmaya çalıştıkları görülmüştür. Starlar grubu deneyerek 4 küp yüksekliğindeki kule sayısını 14 olarak, 5 küp yüksekliğindeki kule sayısını ise 32 olarak belirlediklerini belirtmişlerdir. Bunun üzerine Turunçgiller grubundan bir öğrenci kule sayısını 26 olarak belirlediklerini, Starlar grubunun fazla kule çizdiğini iddia etmiştir. Öğretmen kuleleri kontrol etmelerini istediğinde öğrenciler kâğıtlarda tek tek karşılaştırmaya çalışmışlar, hangi grubun hangi kuleyi eksik ya da fazla çizdiğini bulamamışlardır. Görsel 4.77.’de verildiği gibi sistematik şekil çizerek ve tüm ihtimalleri tüketerek kanıt yapan tek grup olan Çalışkan Arılar grubunun çözümü aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.77.*Yedinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

> **Grup sözcüsü:** Biz dörtlü kuleleri 14 bulduk. Bir siyah olduğunda üç küp beyaz olduğunda 4 farklı kule çıkar. Bunun tam tersi de aynı olur. Yani bir küp beyaz üç siyah olduğunda da 4 kule çıkar. Sonra 2 siyah 2 beyaz olduğunda önce bunları bitişik düşündüm, 2 siyah yukarıda 2 siyah aşağıda ve ortada diye 3 tane buldum. Sonra bir boşluk bıraktım aralarında bunlardan 2 tane buldum sonra da aralarında 2 boşluk bırakınca 1 tane buldum. Toplam 14 tane.
> **Öğretmen:** Tamam beş küpü yüksekliğini nasıl buldunuz?
> **Grup sözcüsü:** Beşli olduğunda 30 tane bulduk. 1 küp siyah, 4 küp beyaz olduğunda birer basamak siyahları her defasında aşağı indiriyoruz toplam 5 tane, bunun tam tersinde de yani 1 beyaz 4 siyah olduğunda da 5 tane çıkar. Sonra 2 küp siyah 3 küp beyaz olduğunda, önce bu siyah küpleri bitişik düşündük, sonra aralarında bir boşluk bıraktık, sonra 2 boşluk ve sonra 3 boşluk bıraktık ve toplam 10 tane çıktı. Sonra 2 beyaz 3 siyah olduğunda da aynı şey olacağı için o da 10 tane oldu. Toplam 30 oldu.
> **Öğretmen:** Evet 30 tane bulmuşlar sorusu olan var mı?
> **Öğrenci:** Hocam onlar da deneyerek yapmış biz de deneyerek çizebilirdik. Bizimkine itiraz ettiler ama.
> **Grup sözcüsü:** Ben hepsini denemedim ki yani 30 tane çizmeme gerek kalmadı. Siz tek tek çizmeye çalıştınız. Biz şöyle düşündük siyah ve beyaz küplerin her ikisinden de en az bir tane kullanmak şartı ile dediği için olabilecek durumlar zaten belli. 1 Beyaz-4 Siyah, 2 Beyaz – 3 Siyah, 3 Beyaz -2 Siyah, 4 Beyaz -1 Siyah. Şimdi zaten 1 Beyaz-4 Siyah kule sayısı ile 4 Beyaz -1 Siyah aynı olur. 2 Beyaz – 3 Siyah kule sayısı ile de 3 Beyaz -2 Siyah aynı olur. Hepsini toplayınca 30 çıkar.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Çalışkan Arılar grubunun sözcüsü 4 küp yüksekliğindeki kuleleri çizerken önce 1 küp siyah ve 3 küp beyaz olduğunda siyah küpleri birer birer aşağı indirdiğinde 4 farklı kule çizildiğini göstermiştir. Böylece öğrencinin 1 küp siyah ve 3 küp beyaz olduğunda çizilebilecek tüm ihtimalleri tek tek gösterdiği belirlenmiştir. Öğrenci 1 küp beyaz ve 3 küp siyah olduğunda da benzer şekilde beyaz küpleri birer basamak aşağı indirerek 4 farklı kule çizildiğini göstermiştir. Son olarak öğrencinin 2 küp beyaz ve 2 küp siyah olduğunda önce siyahları bitişik düşünerek (2 siyah küp üstte, 2 siyah küp ortada, 2 siyah küp altta), sonra da aralarında beyaz küpler olduğunu düşünerek toplam 6 farklı kule çizildiğini göstermiştir. Çalışkan Arılar grubunun sözcüsünün yaptığı bu çözüm Maher ve Martino (1996) tarafından Görsel 4.78.'deki şekliyle sunulmuştur.



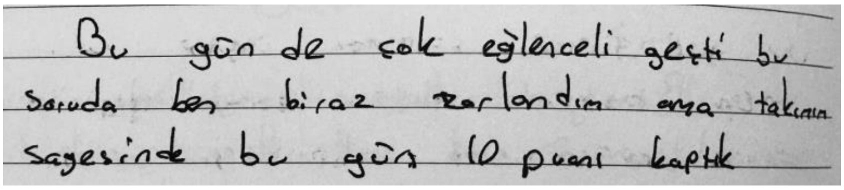
Görsel 4.78. *Kule problemi (Maher and Martino, 1996)*

Grup sözcüsünün beş küp yüksekliğindeki kule sayısını bulmak için de aynı yöntemi kullandığı görülmüştür. Kanıt burada öğrencilerin çözümlerini karşılaştıkları farklı problemlere de uygulayabilmelerini sağlayarak sistematikleştirme işlevinin *uygulama* alt işlevine hizmet etmiştir. Çalışkan Arılar grubunun sistematik şekil çizerek tüm ihtimalleri tükettiği ve bu kanıt sayesinde kendi varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları, yaptıkları çözümde işlem adımlarını tek tek gerekçelendirerek tüm sınıfı ikna ettikleri görülmektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Şimdi şöyle Çalışkan Arılar dışındaki grupların hiçbiri doğru sayıyı bulamadı. Mesela Starlar 32 olduğunu iddia etti, Efsanevi Matematikçiler 28 olduğunu iddia etti, sonra karşılaştırdınız ama eksiği fazlayı bulamadınız. Geçerli bir kanıt yapamadınız. Bu etkinlikte önemli olan bütün kuleleri çizdiğimizden, birbirinin aynısı kuleleri çizmediğimizden emin olmaktı. Bu sebeple sistematik olarak şekilleri çizerek bütün ihtimalleri tek tek elememiz gerekiyordu. Çalışkan Arılar hem doğru sayıya ulaştılar hem de bu sayıya ulaşmak için sistematik bir yöntemleri vardı. Toplam 30 kule oluşur dediler ve bunu kanıtladılar. Burada amacımız tüm ihtimalleri tüketmek. Önce 1 siyah, sonra 2 siyah,

sonra 3 siyah, sonra 4 siyah diye yazarız. 1 siyah 4 beyaz olduğunda toplam 5 kule olduğunu, bunun tersi durumda yani 1 beyaz 4 siyah olduğunda da toplam 5 kule olduğunu görürüz. 2 siyah ve 3 beyaz olduğunda toplam 10 kule olduğunu, bunun tersi durumda 2 beyaz ve 3 siyah olduğunda da 10 kule olduğunu görürüz. Yani olabilecek tüm ihtimalleri tek tek eleriz. Toplam sayıya bu şekilde ulaştığımız zaman arkadaşımızı ve rakibimizi bütün kuleleri çizdiğimize ikna ederiz.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerin günlüklerinden alınan bir örnek Görsel 4.79'da sunulmuştur:

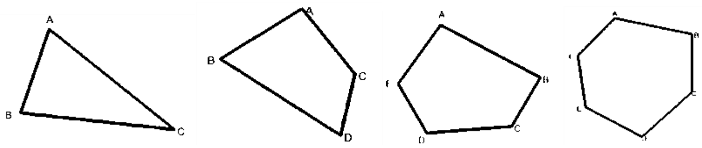

Bu gün de çok eğlenceli geçti bu
Soruda ben biraz zorlandım ama takımın
sayesinde bu gün 10 puanı kaptık

Görsel 4.79. *Yedinci hafta öğrenci günlüğü örneği*

4.4.2. Sekizinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

Sekizinci hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.14.'te görüldüğü gibi öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri problemi sunulmuştur. Öğretimin sonunda küçük gruplardan Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starlar gruplarının doğrudan kanıt yapabildiği belirlenmiştir.

Tablo 4.14. *Sekizinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik
* Aşağıdaki çokgenlerin her birinin dış açılarının ölçülerinin toplamı kaçtır?  Etkinliğin genişletilmesi: *Bir otuzgenin dış açılarının ölçülerinin toplamı kaçtır? *n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçülerinin toplamı kaçtır?
Etkinliğin Odağı
*Matematiksel varsayım geliştirme *Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme • Bir çokgenin (konveks) dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğunu doğrudan kanıt yaparak gösterme
Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma
* Deneysel doğrulama yaparak dış açıların ölçüleri toplamını 360° olarak belirleme • Eşkenar üçgen ya da dik üçgenden yararlanarak bir üçgenin dış açılarının ölçülerini belirleme • Kare ya da dikdörtgenden yararlanarak bir dörtgenin dış açılarının ölçülerini belirleme • Düzgün beşgen ve düzgün altıgenden yararlanarak bir beşgen ve bir altıgenin dış açılarının ölçülerini belirleme

Tablo 4.14. (Devam) *Sekizinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi	Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları
*Çokgenlerin kenar-köşe sayısı, doğru açı, çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) *Özel çokgenlerden yararlanarak bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^{o} olduğu genellemesine ulaşma (Her iki odak grup) *Bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^{o} olduğunu kanıtlama (Her iki odak grup)	*Örnek vermenin geçerli kanıt yöntemi olarak kabul edilmeyeceğinin farkında olma (Turunçgiller grubu) *Varsayımın doğruluğunun gerekçelendirilmesi gerektiğinin farkında olma (Her iki odak grup) *Arkadaşlarını cebirsel temsil kullanmaya teşvik etme (Her iki odak grup)	*Bir otuzgenin dış açılarının ölçülerinin toplamını sorma *n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçülerinin toplamını sorma
Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Çokgenlerin kenar-köşe sayısı, doğru açı, çokgenlerin iç açılarının ölçüleri bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) *Özel çokgenlerden yararlanarak bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^{o} olduğu genellemesine ulaşma (Tüm gruplar) *Düzgün çokgenlerden yararlanarak deneysel doğrulama yapma (Çalışkan Arılar grubu) * Bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^{o} olduğunu kanıtlama (Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starlar grubu)	*Deneyerek bir otuzgenin iç açılarının ölçüleri toplamını nasıl bulacaklarını sorma *Bütün çokgenlerin düzgün çokgen olmadığını belirtme *Deneysel doğrulamayı geçerli bir kanıt olarak kabul etmeme	*Denedikleri çokgenlerde dış açılarının ölçüleri toplamının 360^{o} çıkması durumunu bütün çokgenlere nasıl genellediklerini sorma *Deneysel doğrulamaya kendilerinin ikna olup olmadığını sorma *Köşe sayısıyla 180'i çarpıp sonuçtan (n-2). 180'i çıkardıklarında nasıl 360 elde ettiklerini sorma

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama *Sonuçları görme	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	* İlişkileri ortaya çıkarma, * Tutarsızlıkları ortaya çıkarma *Uygulama

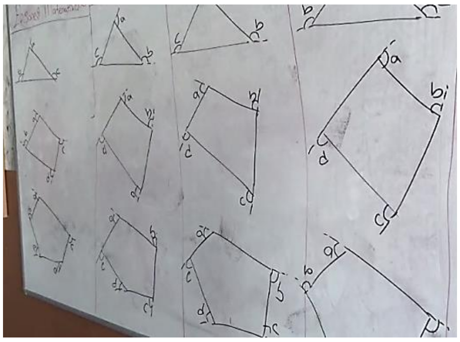
Belirlenen Sosyal Normlar	Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne "*Öğrenciler tahmin edildiği gibi özel çokgenlerden yararlanarak dış açıların ölçüleri toplamını 360^o olduğunu buldular. Birçok öğrenci eşkenar üçgenin iç açıları yardımıyla herhangi bir dış açıyı belirledi ve 3 ile çarptı. Birçok öğrenci kare ve dikdörtgenden yararlanarak dörtgenlerin dış açılarının toplamını buldu. Beşgen ve altıgende ise düzgün beşgen ve düzgün altıgenin bir iç açısını önceki hafta buldukları iç açılar toplamından yararlanarak buldular. Bireysel çalışmalarda deneysel doğrulama dışında bir yönteme rastlanmadı.*" şeklinde yazdığı görülmüştür. Öğretmenin günlüğünde de belirttiği gibi öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun bireysel çalışmalarında verilen çokgenlerin dış açılarının toplamını 360^o olarak belirledikleri görülmüştür. Öğrencilerin üçgenin dış açılarının toplamını belirleyebilmek için çoğunlukla özel bir üçgenin (eşkenar üçgen, dik üçgen gibi) iç açılarından yararlandıkları görülmüştür. Örneğin birçok öğrenci bir eşkenar üçgenin her bir iç açısını yazarak ve her bir köşedeki iç ve dış açıların ölçüleri toplamının 180^o olmasından faydalanarak üçgenin bir dış açısının ölçüsünü 120^o olarak belirlemişlerdir. Daha sonra 3 köşe olduğu için 120 ile 3'ü çarparak 360^o'ye ulaşmışlardır. Benzer şekilde dörtgenlerin dış açılarını belirleyebilmek için çoğunlukla kare ya da dikdörtgenden yararlanmışlardır. Dikdörtgenin ya da karenin her bir iç açısının ölçüsünün 90^o olmasından yararlanarak her bir dış açının ölçüsünün 90^o olduğu sonucuna ulaşmışlar ve 4 köşe olduğu için 90 ile 4'ü çarparak 360^o'ye ulaşmışlardır. Beşgen ve altıgende ise çoğunlukla düzgün beşgen ve düzgün altıgenden yararlandıkları fark edilmiştir. Öğrencilerin beşinci hafta uygulamasında öğrendikleri beşgen ve altıgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamını kullandıkları, bu toplamı kenar sayısına bölerek bir iç açıya ve bir iç açıdan da bir dış açıya ulaştıkları, bir dış açı ile kenar sayısını çarparak 360^o'ye ulaştıkları görülmüştür.

Küçük grup tartışmalarında odak gruplardaki öğrencilerin bireysel çalışmalarında verilen çokgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^o olduğu genellemesine nasıl ulaştıklarını arkadaşlarıyla paylaştıkları görülmüştür. Turunçgiller grubunun tartışmalarının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

Öğrenci: Ben şöyle yaptım hani diğer ders iç açıların ölçülerini bulmuştuk ya neydi o formül, ben o formülü unuttum o yüzden yine üçgenlere böldüm hepsinin iç açısını hesapladım. Mesela üçgen 180, dörtgen 360, beşgen 540 çıktı. Sonra kaç kenarlıysa ona böldüm yani hepsi eşit olsa diye düşündüm, eşkenar üçgen olsa 180'i 3'e böldüm 60, dörtgende de hepsi eşit olsa diye düşündüm 360'ı 4'e böldüm 90. Beşgeni de yaptım aynı şekilde bir açı 108 çıktı. Sonra bu sayıları 180'den çıkardım bir tane dış açıyı buldum. Mesela üçgende 120 çıktı. Sonra kaç tane 120 var 3 tane, çarptım 3'le 360 çıktı. Dörtgende 90 çıktı 90.4=360, beşgende 72 çıktı 72.5=360 Diğerlerini de yaptım hepsi 360.
Öğrenci: Ben de dış açılarının hepsini 360 buldum.
Öğrenci: Sen nasıl buldun?
Öğrenci: Ben rastgele sayılar verdim. Üçgene iç açıların toplamı 180 olacak şekilde sonra her bir dış açıyı topladım 360 çıktı. Dörtgende de rastgele sayı verdim yine 360 beşgende de 360. Hepsinde 360 çıkıyor ama nedenini kanıtlamamız lazım.
Öğrenci: Aynen ben de o diğer ders bulduğumuz formülü kullandım (n-2).180'i. Bununla iç açıların toplamını hesapladım yine tek tek. Sonra da iç açılara değer verdim senin gibi mesela üçgene 60, 60, 60 verdim. Dış açıları da çıkararak buldum toplam 360 çıktı. Mesela beşgenin de iç açılarının toplamı 540 çıkmıştı onu böldüm 5'e bir tane iç açı 108 çıktı. Sonra 180'den çıkarınca 72 kaldı. Bunla da 5'i çarptım 360 çıktı. Hepsini böyle yaptım hepsi 360.
Öğrenci: Bence de hepsi 360 ama neden hepsi 360 bulamadım.
Öğrenci: Ama baksanıza iç açıların hepsi artıyor 180, 360, 540 diye neden dış açıların hepsi aynı olsun ki?
Öğrenci: Hımm. Mantıklı. Şimdi bir daha bakalım o zaman. Şimdi bu ikisinin toplamının 180 olduğunu biliyoruz (Bir iç açı- bir dış açı). Hoca ne dedi bildiklerinizden yararlanın. Şimdi hepsine belli sayı verdiğimizde hepsinde deneyince 360 çıkıyor.
Öğrenci: Ama böyle sayılı olunca kabul etmez ben söyleyeyim.

Küçük grup tartışmaları devam ederken öğretmen bir otuzgenin ve n kenarlı herhangi bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamını bulmalarını istemiştir. Ayrıca tahtaya verilen çokgenleri çizerek Görsel 4.80'de sunulduğu gibi her bir dış açıyı harflendirmiştir:



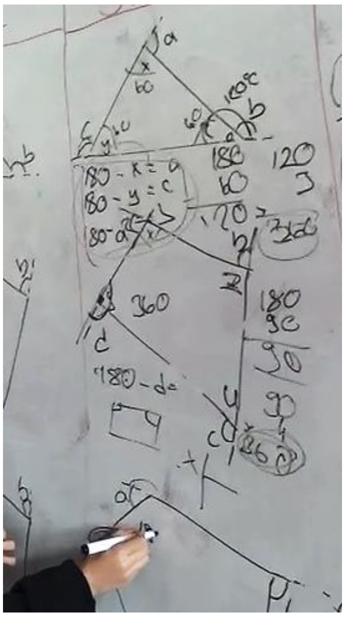
Görsel 4.80. *Sekizinci hafta çokgenlerin dış açıları problemi*

Bunun üzerine öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaya yöneldikleri belirlenmiştir. Odak grupların genellemelerinin bütün çokgenler için doğru olduğunu cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıt yaparak gösterdikleri görülmüştür. Ayrıca bu durum *çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Turunçgiller grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

Öğrenci: Bak çizdi tahtaya. Bence cebirsel ifade kullanacağız.
Öğrenci: Şimdi o zaman zaten hoca bu dış açıyı a vermiş, bu ikisinin de toplamı 180 olduğuna göre iç açılara da büyük A, B, C diyelim. Şimdi bu A+B+C =180 çünkü üçgenin iç açılarının toplamı 180º olduğu için. Şimdi bu küçük a'yı bulmak için 180 – A, küçük b'yi bulmak için 180-B, küçük c için de 180-C olur. İşte cebirsel ifade olunca böyle oluyor.
Öğrenci: Eee nerde 360'ı bulamadın.
Öğrenci: a=180-A, b=180-B , c=180-C, şimdi 180+180+180 desek 540 çıkıyor da 360'a nasıl ulaşacağız onu bulmamız lazım.
Öğrenci: Dörtgeni de yapalım oradan bir şey çıkar belki.
Öğrenci: Tamam yapayım onu da. a=180-A, b=180-B c=180-C d=180-D şimdi 180+180+180 +180 desek 720 çıkıyor. Şimdi 360 olması için 360'ı çıkarıyoruz.
Öğrenci: Tamam işte bakın üçgende 540 çıkıyor, 540'tan 180'i çıkarmamız lazım çünkü A, B, C'nin toplamı 180 çıkıyor. Şimdi bakın a=180-A, b=180-B, c=180-C, d=180-D yazıyoruz. 180'leri topluyoruz kendi aralarında yani 4 tane 180, 720 çıkıyor, A, B, C, D'yi de topluyoruz bunlar zaten iç açılar. İç açıların toplamı 360 olduğu için 720 -360=360 çıktı. İşte oldu.
Öğrenci: Beşgeni de yapalım. a=180-A, b=180-B, c=180-C, d=180-D, e=180- E yazıyoruz. 180'lerin toplamı kaç çıkıyor çarpın hadi.
Öğrenci: 5. 180= 900
Öğrenci: Tamam 900'den şimdi A+B+C+D+E'yi çıkarıyoruz bu beşgen ya beşgenin açılarının toplamı 540. Şimdi 900-540=360.
Öğrenci: Vay be kırk yıl düşünsem aklıma gelmezdi.
Öğrenci: Anladınız mı gerçekten?
Öğrenci: Ben gayet iyi anladım. Diğerlerini de tek tek yapmaya gerek yok bence artık hepsi aynı olacak. Otuzgeni nasıl yapacağız tek tek 30 açı 30 tane harf mi yazacağız. Alfabede 29 harf yok mu? (Gülüyorlar).
Öğrenci: Bence tek tek yazmayacağız. Şimdi şöyle 30.180 olacak çünkü 30 tane köşe var, sonra bundan iç açıların ölçüleri toplamını çıkaracağız. Yani nasıldı formül?
Öğrenci: (n-2).180 yani 28.180
Öğrenci: Tamam işte 30.180 den 28.180'i çıkaracağız. Keşke hesap makinesi olsa biri çarpsın.
...
Öğrenci: Bir şey söyleyeceğim bakın çarpmaya gerek yok. Baksana 30'dan 28 çıksa 2 kalır. 2.180=360 olur.
Öğrenci: Ha doğru ya gelmedi aklıma. O zaman n kenarlı olunca da n.180 sonra bundan (n-2).180'i çıkarırız. Benim bunda kafam karıştı. Nasıl çıkaracağız?
Öğrenci: İşte 30'da olduğu gibi n'den (n-2)'yi çıkarınca 2 kalır. Sen tahtada şöyle açıkla de ki hangi çokgen olursa kenar sayısıyla 180'i çarparız, sonra bundan sayıdan iç açıların toplamını çıkarırız. Sonuç da her zaman 360 çıkar.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrencilerin eylemleri *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, grup üyelerini ikna etme, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Her iki odak grubun hem sözel hem de cebirsel genellemeye ulaştıkları görülmüştür. Cebirsel ifadeleri kullanarak önce verilen çokgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamına, sonra otuzgenin dış açılarının ölçüleri toplamına, son olarak da n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamına ulaştıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları çözüm sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^o olduğu varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları görülmektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ayrıca buldukları çözüm yönteminde her bir işlemi nedenleriyle beraber açıkladıkları yani çözüm yönteminin nasıl işlediğine dair kavrayışa sahip oldukları da görülmüştür. Kanıt burada *kavrayış sağlama* alt işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğrencilerin örnek vermenin kanıt olmadığını bildiği, geçerli bir matematiksel kanıt sunmaları gerektiğinin farkında oldukları öğrencilerin tartışmalarından açıkça görülmüştür. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bir öğrencinin bir üçgenin iç açılarını 90^o, 30^o, 30^o olarak belirlemesi üzerine grup arkadaşı bu üçgenin iç açılarının toplamının 180^o olmadığını belirterek arkadaşının mantıksal tutarsızlığını fark etmesini sağlamıştır. Kanıt burada *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Ayrıca bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca öğretmen her bir grubun yaptığı çözümü tüm sınıfın anlayacağı şekilde özetlenmiş, önemli noktaları vurgulamış ve grup sözcüleri çözümlerini bitirdikten sonra sınıfa "Bu çözüm sizi ikna etti mi?" diye sorarak sınıf tartışmasını başlatmıştır. Öncelikle bütün grupların çokgenlerin kenar-köşe sayısı, doğru açı, çokgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı bilgisini ve işlemsel bilgiyi doğru kullandıkları belirlenmiştir. Küçük gruplardan Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starlar gruplarının geçerli ve ikna edici kanıt yaptığı, Çalışkan Arılar grubunun ise Görsel 4.81.'de sunulduğu gibi belirli örnekler üzerinden genelleme yaparak tüm çokgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^{o} olduğu sonucuna ulaştıkları; ancak ikna edici bir kanıt sunamadıkları belirlenmiştir. Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

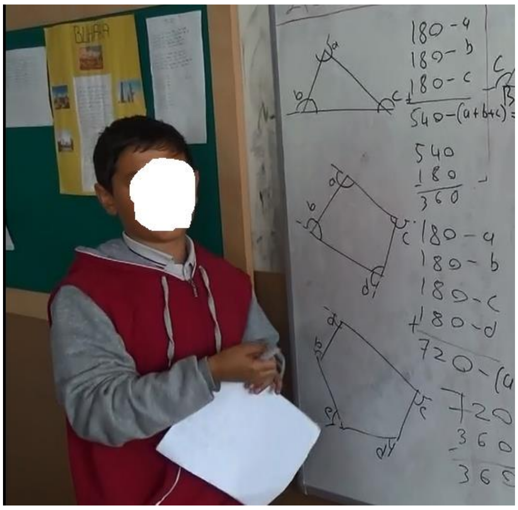


Görsel 4.81. *Sekizinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Hocam örnek vererek denedik. En kolayı olsun diye üçgende bunlara 60-60-60 verdik (iç açılara). 60-60 -60 hepsi 180 yapıyordu. Sonra burası doğru açı 180 olduğu için 60'ı çıkardık 120 kaldı. Diğerlerinde de çıkardık 120 kaldı. Bütün dış açıların toplamını bulmak için 3 tane 120'yi topladık ve 360 çıktı. Biz başka üçgenlerde de örnekle denedik hep 360 çıktı ama nedenini kanıtlayamadık.
Öğretmen: Arkadaşımız diyor ki biz birçok üçgenle denedik hepsinde 360 çıktı ama hep örnekle denedik diyor. Peki dörtgenlerde?
Grup sözcüsü: Dörtgende de hepsini 90 olarak aldık. Çünkü iç açıların toplamı 360^{o} olacağı için 4 iç açıyı 90 aldık. Sonra yine 180'den çıkarınca dış açıları 90 bulduk 4 tane 90 çıktı, dış açılar 360 çıktı. Bunu da 360 bulunca diğerlerinin hepsinde de 360 olabilir mi diye düşündük. Diğerlerinde de mesela beşgenin açılarının toplamını 540 bulmuştuk 5'e böldük 108 çıkar sonra 180'den 108'i çıkarınca 72 kaldı, 5 tane 72 oldu bu açılar. Yani 360.
…
Öğrenci: Peki bu mesela otuzgen olsaydı hepsine değer mi verecektiniz nasıl değer verecektiniz tek tek otuz açı var?
Grup sözcüsü: Şimdi geçen ders bulmuştuk otuzgenin iç açılarının toplamını ama şimdi tam olarak hatırlayamıyorum o formülle buluruz yine, mesela x olarak düşünürsek x'i 30 böleriz. Oradan bir iç açıyı buluruz. Sonra bir dış açıyı bulmak için 180'den o bulduğumuz iç açıyı çıkarırız mesela sonra da 30'la çarparak gösteririz. Yine 360 çıkar.
Öğretmen: Yani arkadaşlarımız düzgün çokgenlerden yararlanmışlar. Her bir düzgün çokgenin iç açılar toplamını kenar sayısına bölerek bir iç açısını buluruz sonra 180'den

çıkararak bir dış açısını belirleriz diyor. Sonra da bir dış açıyı kenar sayısıyla çarparız 360 çıkar diyor. İkna oldunuz mu?
Öğrenci: Hocam ben ikna olmadım. Sonuçta bütün çokgenler düzgün çokgen değil.
Öğrenci: Hocam bir de mesela genel bir formül söyleyemiyorlar.
Grup sözcüsü: Biz böyle düşündük başka bir şey bulamadık. Hepsinde 360 çıkınca kesin 360 olur dedik.
Öğretmen: Tamam peki sizin denediğiniz çokgenlerde 360^o çıktı, bütün çokgenler için 360^o olduğuna ikna oldunuz mu?
Öğrenci: Aslında hocam biz de başka bir yöntem olduğunu düşünüyoruz ama işte onu bulamadık yani verdiğiniz harflerle de yapmaya çalıştık ama çok karıştı. Zaten Yusuf da demişti sınıfı ikna edemeyiz diye.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi Çalışkan Arılar grubu düzgün çokgenler yardımıyla herhangi bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamını 360^o olarak belirlemişlerdir. Öğrencilerden biri otuzgenin dış açılarının ölçüleri toplamını nasıl bulacaklarını sorduğunda grup sözcüsü, iç açıların ölçüleri toplamı formülünden yararlanarak iç açılarının ölçüleri toplamını bulacaklarını, sonra bu sayıyı 30'a bölerek düzgün bir otuzgenin bir iç açısına ulaşacaklarını belirtmiştir. Daha sonra da bir iç açı yardımıyla bir dış açıyı belirleyeceklerini ve bir dış açıyı 30 ile çarptıklarında 360 sonucuna ulaşacaklarını söylediği görülmüştür. Öğrencilerin ulaştıkları genellemelerini düzgün çokgenleri kullanarak deneysel olarak doğruladıkları; ancak doğrudan kanıt yapamadıkları görülmüştür. Nitekim bu çözüm sınıf tarafından kabul edilmemiştir. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Ayrıca tartışmada görüldüğü gibi öğrencilerin farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunmaları, arkadaşlarının iddialarını çürütmeleri *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiş ve *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* işlevine hizmet etmiştir. Doğrudan kanıt yapan gruplardan biri olan Efsanevi Matematikçiler grubunun ise Görsel 4.82.'de sunulduğu gibi cebirsel ifadeler kullanarak önce üçgenin, dörtgenin ve beşgenin dış açılarının ölçüleri toplamına, ardından n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamına ulaştıkları görülmüştür. Efsanevi Matematikçiler grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.82. *Sekizinci hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180º'dir. Şimdi burada toplam bir 180 var, burada da bir tane 180 var burada da var. Yani burada iç ve dış açıların toplamı olarak toplamda üç tane 180 var. Bu 180'leri topluyoruz. 540 çıkıyor 540'tan a+b+c'yi çıkarıyoruz. Bu sonucun 180 olması gerekiyor. a,b,c'yi de eksi parantezine aldık. 540'tan 180'i çıkardık ve 360 bulduk.
Öğretmen: Tamam.
Grup sözcüsü: İkincisinde yani dörtgende de aynı şeyi yaptık burada toplamda iç ve dış açıların toplamı olarak 4 tane 180 var. Bunlardan dış açıları çıkarırsak geriye iç açıların toplamı kalır. 720-(a+b+c+d) =360 oluyor. Çünkü bunun iç açılarının toplamı 360'dir. Çünkü geçen hafta yapmıştık (n-2).180'den 360 bulmuştuk. İç ve dışların toplamı 720 olduğu için iç açıların toplamını çıkarınca geriye dış açılar kaldı. Sonuç da 360 çıktı. Beşgeni de yaptık aynı şekilde 180.5=900 oluyor, beşgenin iç açılarının toplamı 900 olduğu için 900-540=360oluyor.
Öğretmen: Peki hepsini tek tek yapacak mısın böyle genel bir şey söyleyebilir misin?
Grup sözcüsü: Evet hocam biz genel bir şey bulduk. Her bir köşedeki iç ve dış açıları topluyoruz, zaten bir iç açı ile bir dış açının toplamı 180, bu yüzden kaç tane köşe varsa onu 180'le çarpıyoruz. Bu toplamdan iç açıların ölçülerini çıkarıyoruz yani (n-2).180'i geriye her zaman 360 kalıyor.
Öğretmen: Evet var mı sorusu olan?
Öğrenci: Hocam biz anladık Çalışkan Arılar olarak.
Öğretmen: Ne anladınız?
Öğrenci: Hocam ilk önce üçgende üç köşe olduğu için 3 tane 180'i topladı 540 oldu, bundan da üçgenin iç açılarını çıkarınca geriye dış açılar kaldı.
Öğretmen: Peki ben son bir soru sorayım. Köşe sayısıyla 180'i çarpıyoruz sonra bu sonuçtan (n-2).180'i çıkardığımızda geriye her zaman 360 kalıyor dedin ya. Ben orayı tam anlamadım neden 360 kalıyor?
Grup sözcüsü: Hocam aslında işlemlerde yaptık onu. Yani hocam şimdi şöyle düşünün kaç tane n varsa onla 180'i çarptık ya sonra (n-2).180'i çıkarttık. Mesela bu 4'ten 2 çıkarmak gibi. n taneden n-2 tane çıktı. Geriye 2 kalır. Onla da 180'i çarpınca 360 olur.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi Efsanevi Matematikçiler grubunun çarpmanın çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğinden yararlanarak n.180-(n-2).180 işleminin sonucunun 360 olduğunu açıkladıkları görülmüştür. Öğrencilerin, hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında, doğru açı tanımı, kenar, köşe tanımı, herhangi bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı gibi daha önce öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullanmaları, varsayımlarını nedenleriyle gerekçelendirmeleri, kanıtın açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir. Ayrıca bu durum *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bu problemde öğrenciler 5. hafta kanıtladıkları bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kuralının farklı durumlarda nasıl uygulanabileceğini fark etmişlerdir. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin alt işlevlerinden *uygulama* işlevine hizmet etmektedir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Evet çocuklar Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starların yaptıkları çözümler doğru. Bugün önemli bir şey öğrendiniz bütün çokgenlerin dış açılarının toplamı 360°. Bunun böyle olduğunu belki daha önce de duymuştunuz ya da kitaplarda görmüştünüz ama bugün kendiniz yaparak öğrendiniz. Şimdi bildiklerimizi kullanarak bilmediklerimizi bulalım. Her bir köşe için düşündüğümüzde iç ve dış açıların toplamının 180° olduğunu biliyoruz. n kenarlı bir çokgenin n tane köşesi olduğunu da biliyoruz. Her bir köşede birbirinin bütünleri yani toplamları 180° olan iç ve dış açılar vardır. Bu durumda iç ve dış açıların toplamı n.180° olur, n.180'den iç açıların ölçülerinin toplamını çıkardığımızda yani (n-2).180'i çıkardığınızda 360 kalır. Çünkü n tane 180'den, (n-2) tane 180'i çıkardığımızda geriye 2.180=360 kalır. Bu yüzden bütün çokgenlerin dış açılarının toplamı 360°'dir.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerden birinin günlüğüne *"Eğlenceli geçti ve geçen senenin konu tekrarını yapmamı sağladı. Çünkü geometri konusunu birazcık unutmuşum ve tekrar hatırladım umarım uygulamanın sonuna kadar hep puan alırız."* şeklinde yazdığı görülmüştür.

4.4.3. Dokuzuncu hafta öğretimine ilişkin bulgular

Dokuzuncu hafta sınıf uygulamalarının özetinin sunulduğu Tablo 4.15.'te görüldüğü gibi öğrencilere, Liu, Tague ve Somayajulu'nun (2016) çalışmalarından uyarlanan bir önerme sunulmuştur. Öğrencilerden bu önermenin doğruluğuna yönelik olarak sunulan dört farklı argümanı değerlendirmeleri ve ikna ediciliği en yüksekten en düşüğe doğru sıralamaları istenmiştir. Öğretimin sonunda küçük gruplardan Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starlar gruplarının cebirsel argümanı en ikna edici buldukları, Çalışkan Arılar grubunun ise algısal argümanı en ikna edici buldukları belirlenmiştir.

Tablo 4.15. *Dokuzuncu hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik

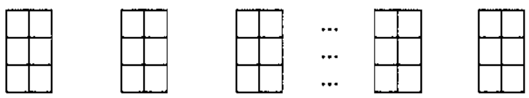
***** 6'nın katı olan her tam sayı 3'ün de bir katıdır.

Ali: 6'nın katı olan bazı sayıları denedim. Mesela 12, 60, 606 gibi ve bunların da 3'ün katları olduğunu gördüm. Bu yüzden bu ifade her zaman doğrudur.

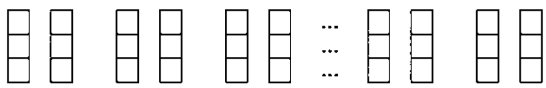
Ayşe: n bir tam sayı olmak üzere, 6'nın herhangi bir katını 6n olarak yazılabiliriz. 6n = 3 • 2n olduğunu biliyoruz ki bu 3'ün katıdır. Bu nedenle, 6'nın herhangi bir katı her zaman 3'ün de bir katı olmalıdır.

Ahmet: Elimizde 6'nın herhangi bir katı kadar kurabiyemiz olduğunu farz edelim. Bu kurabiyeleri, her birinde 6 tane olacak kadar birkaç kutuya paylaştıralım. Her bir kutuyu daha sonra içinde 3'er kurabiye olacak şekilde 2 kutuya paylaştırabiliriz. Aslında şu anda bütün kurabiyeleri her birinde 3 tane olacak şekilde paylaştırmış olduk. Bu nedenle, 6'nın herhangi bir katı her zaman 3'ün de bir katı olmalıdır.

Aslı: Aşağıdaki kare şeklindeki kartların toplam sayısı 6'nın katıdır.



Şimdi ben kare şeklindeki bu kartları aşağıdaki şekilde düzenleyebilirim.



Bu nedenle, 6'nın herhangi bir katı her zaman 3'ün de bir katı olmalıdır.
İkna ediciliği en yüksekten en düşüğe doğru sıralayınız.

Etkinliğin Odağı

*Verilen argümanları değerlendirme

Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma

*Deneysel argümanı ikna edici bulmama
*Cebirsel argümanı en ikna edici bulma
*Algısal argümanı en ikna edici bulma
*Algısal argüman ile görsel argümanı eşit derecede ikna edici bulma

Tablo 4.15. (Devam) *Dokuzuncu hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	**Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**
*Önermenin mantıksal yapısını çözme (Her iki odak grup) *Tam sayı, 6'nın katı olma, 3'ün katı olma bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) *"Her" niceleyicisini doğru kullanma (Her iki odak grup) * Deneysel argümanı ikna edici bulmama ve cebirsel argümanı en ikna edici bulma (Her iki odak grup) *Görsel argüman ile algısal argümanı eşit derecede ikna edici bulma (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Algısal argümanı görsel argümandan daha ikna edici bulma (Turunçgiller grubu)	*Arkadaşlarını cebirsel argümanın doğruluğunu kontrol etmeleri için teşvik etme (Efsanevi Matematikçiler grubu) *En genel çözümün cebirsel argüman olduğunu söyleme (Her iki odak grup) *Deneysel argümanın kimseyi ikna edemeyeceğini söyleme (Her iki odak grup) *Deneysel argümanın problemi anlamada yardımcı olduğunu söyleme (Her iki odak grup) *Görsel ve algısal argümanın çok açıklayıcı olduğunu söyleme (Efsanevi Matematikçiler grubu)

Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Önermenin mantıksal yapısını çözme (Tüm gruplar *Tam sayı, 6'nın katı olma, 3'ün katı olma bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) *"Her" niceleyicisini doğru kullanma (Tüm gruplar) *Cebirsel argümanı en ikna edici bulma (Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starlar grubu) *Algısal argümanı en ikna edici bulma (Çalışkan Arılar grubu) *Algısal argümanı görsel argümandan daha ikna edici bulma (Turunçgiller ve Starlar grubu) *Görsel argüman ile algısal argümanı eşit derecede ikna edici bulma (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Deneysel argümanı ikna edici bulmama (Tüm gruplar)	*Algısal argümanı neden en ikna edici bulduklarını sorma *Algısal argümanla görsel argümanı neden eşit derecede ikna edici bulmadıklarını sorma *Kanıt deyince akla ilk cebirsel argümanın geldiğini söyleme *Cebirsel argümanın en net ve genel argüman olduğunu söyleme	*Cebirsel argümanın doğruluğundan nasıl emin olduklarını sorma *Deneysel argümanı neden geçerli kanıt olarak değerlendirmediklerini sorma

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri		
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma

Belirlenen Sosyal Normlar	**Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar**
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Tablo 4.15.’te görüldüğü gibi öğrencilere sunulan argümanlardan Ali’nin argümanı birkaç örnekle deneysel doğrulamaların yapıldığı deneysel argüman, Ayşe’nin argümanı doğrudan kanıtın yapıldığı cebirsel argümandır. Sunulan argümanlardan Ahmet’in argümanı sezgiye, benzetmelere dayalı olan algısal argüman (Liu, Tague and Somayajulu, 2016), Aslı’nın argümanı ise görsel argümandır.

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmış ve bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin argüman değerlendirmelerini günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne *“Tahmin edildiği gibi öğrencilerin hiçbiri deneysel argümanı ikna edici bulmadı. Büyük bir çoğunluğun sıralamada cebirsel argümanı en başa yazıp, bu argümanı en ikna edici bulduğu görüldü. Öğrenciler arasında görsel ve algısal argümanın değerlendirilmesinde farklılıklar gözlendi.”* şeklinde yazdığı görülmüştür. Öğretmenin günlüğünde de belirttiği gibi öğrencilerin neredeyse tamamının deneysel argümanı ikna edici bulmadıkları ve büyük bir çoğunluğunun cebirsel argümanı en ikna edici bulduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte öğrenciler arasında en büyük farklılığın görsel argümanla algısal argümanın değerlendirilmesinde ortaya çıktığı belirlenmiştir.

Odak grupların kanıt değerlendirme süreçlerinin incelenmesiyle matematiksel bir argümanın doğruluğuna ya da yanlışlığına nasıl ikna oldukları ortaya çıkmıştır. Odak küçük grup tartışmalarında her iki odak grubun da en ikna edici argümanın cebirsel argüman olan Ayşe’nin argümanı olduğunu, ikna edici olmayan argümanın ise deneysel argüman olan Ali’nin argümanı olduğunu belirttikleri görülmüştür. Odak gruplar arasında görsel argüman olan Aslı’nın argümanı ile algısal argüman olan Ahmet’in argümanının ikna ediciliğini değerlendirmede farklılıklar olmuştur. Efsanevi Matematikçiler grubu görsel ve algısal argümanın ikna ediciliğini eşit kabul ederken Turunçgiller grubunun algısal argümanı daha ikna edici buldukları görülmüştür. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

Öğrenci: Önce herkes sıralamasını söylesin.
Öğrenci: Benim Ayşe, Aslı, Ahmet, Ali.
Öğrenci: Benim de öyle
Öğrenci: Benim Aslı, Ahmet, Ayşe, Ali
Öğrenci: Benim Ayşe, Aslı, Ahmet, Ali.
Öğrenci: Ben Ahmet’le Ayşe arasında kaldım pek fark göremedim.
Öğrenci: İkisi eşit yazalım o zaman.

Öğrenci: Ali kimseyi ikna edemez zaten. 3 sayıyla denemiş.
Öğrenci: Sen niye ilk başta Ayşe dedin?
Öğrenci: Çünkü o cebirle yapmış.
Öğrenci: Sadece cebirsel olduğu için mi Aslı dedin, sadece cebirsel yapmış diye bizi ikna edemez belki cebirseli yanlış. Doğru mu diye kontrol ettin mi?
Öğrenci: Sadece cebirsel olduğu için değil kontrol ettim doğru mu diye. Diyor ki 6'nın katı olan bir sayıyı 6n diye yazabiliriz. Sonra 6n = 3 • 2n demiş ya, yani bu 6'nın katı olan bir sayı 3'ün 2n katı demek olur. Mesela n, 1 olursa 3'ün 2 katı, n 2 olursa 3'ün 4 katı olur. Bence Ayşe en iyi çünkü onun yaptığını her şey için kullanabiliriz. En geneli Ayşe yapmış.
Öğrenci: Aslı da iyi anlatmış açıklama da yapmış. 6 sayısının içinde her zaman 3 olduğu için görseli doğru. Aslı'yı da her şeyde kullanırsın zaten nokta nokta koymuş istediğini yazabilirsin. Bence Aslı görseli düzgün anlatmış.
Öğrenci: Evet Aslı'yla Ahmet güzel anlatmış problemi anlamamı sağladı ama kanıt olarak en ikna edici Ayşe.
Öğrenci: Bence Aslı'yla Ahmet'in ki çok yakın. Neredeyse aynı şeyi anlatmışlar sadece Aslı şekil yapmış farklı olarak. Ahmet sözel olarak zihnimizde canlandırmamızı sağlamış.
Öğrenci: Şimdi o zaman herkes için Ali en sonda. İlk kim olacak şimdi?
Öğrenci: Bence Ayşe.
Öğrenci: Bence de Ayşe'yi en başa koyalım çünkü hem açıklayıcı hem de her şeyde kullanırız. Atıyorum mesela burada n yerine istediğimizi koyarız. Ama diğerlerinde 90 tane dedi diyelim 90 tane kutu ya da kurabiye mi çizeceğiz? Ama cebirselle yapınca istediğimizi koyarız.
Öğrenci: Evet doğru söylüyorsun bana da mantıklı geldi.
Öğrenci: Bence de ilk Ayşe olsun onun yaptığı çözüm kesin, sonra Aslı ile Ahmet eşit diyelim en sona Ali'yi koyalım.
Öğrenci: Ben de katılıyorum. En ikna edici Ayşe, Ahmet'le Aslı arasında seçim yapamıyorum eşitler bana göre. Ali'yi zaten kabul edemeyiz.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenciler küçük grup tartışmalarında, önceki haftalarda olduğu gibi işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlar, farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Öğrencilerin Ayşe'nin argümanı olan cebirsel argümanı en ikna edici argüman olarak kabul ettikleri, Aslı'nın argümanı olan görsel argüman ile ve Ahmet'in argümanı olan algısal argümanı eşit kabul ettikleri, Ali'nin deneysel argümanını ise ikna edici olarak kabul etmedikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin Ayşe'nin argümanını en ikna edici argüman olarak değerlendirmelerinin nedeninin cebirsel argümanın kesin ve genel bir argüman olması olmuştur. Öğrencilerin hiçbirinin Ali'nin argümanını ikna edici bulmamaları, üç sayıyla denemenin ikna etmek için yeterli olmadığını belirtmeleri deneysel doğrulama ile kanıt arasındaki farkı anlamış olmalarının göstergesidir. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bununla birlikte öğrenciler algısal argüman ile görsel argüman arasında seçim yapamamışlar, bu argümanların ikna ediciliğini eşit kabul etmişler ve bu argümanların problemi daha iyi anlamalarını sağladığını belirtmişlerdir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen önceki haftalardaki eylemlerini sürdürerek normları pekiştirmiştir. Bütün grupların önermenin mantıksal yapısını çözebildikleri, önermede kullanılan kavramları ve işlemsel bilgiyi, ayrıca "her" niceleyicisini de doğru kullandıkları görülmüştür. Bununla birlikte tüm grupların çözümlerini nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmüştür. Bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir.

Bütün grupların problemde üzerinde fikir birliğine vardığı durum deneysel argümanının ikna edici ve geçerli bir kanıt olmadığı yönündedir. Çalışkan Arılar grubu dışında tüm gruplar cebirsel argümanı en ikna edici bulmuş, Çalışkan Arılar grubu ise algısal argümanı en ikna edici bulmuştur. Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

Grup sözcüsü: Bizim grup sıralamamız Ahmet, Aslı, Ayşe ve Ali.
Öğretmen: Yani en ikna edici Ahmet, sonra Aslı, sonra Ayşe ve en az ikna edici olan Ali. Peki neden böyle sıraladınız?
Grup sözcüsü: Ali sadece örnekler vermiş bize, sadece örneklerle kanıtlayamaz. Ayşe cebirsel ifadeler kullanmış biz bunu doğru bir kanıt olarak kabul ediyoruz.
Öğretmen: Nasıl anladınız doğru olduğunu?
Grup sözcüsü: n herhangi bir sayı demiş ve 6.n= 3.2n demiş mesela n yerine herhangi bir sayı koyduk mesela 1 olsun. 6.1= 6 olur. 3.2.1 = 6 olur. Yani doğru yapmış. Ama bizi Aslı Ayşe'den daha çok ikna etti. Çünkü şekillerle göstermiş önce 6 kare olan şekiller çizmiş bunları 3'erli ayırabileceğimizi göstermiş. Yani çok anlaşılır. En çok ikna eden de ise Ahmet.
Öğretmen: Neden?
Grup sözcüsü: Çünkü Ahmet kurabiyeyle çok iyi anlatmış. Biz en çok onun çözümünde anladık. 6'nın katı kadar kurabiyeyi her birinde 6 tane olacak kadar kutulara paylaştırmış, sonra bu kutuları içinde 3'er kurabiye olacak şekilde 2 kutuya paylaştırmış. Mesela 18 kurabiye olsa 6'şar tane kurabiye olsun kutularda 3 kutumuz olur. Sonra demiş ki her birinde 3'er kurabiye varmış gibi düşünün biz de 18 kurabiyeyi 3'erli düşündük. Yine tam bir şekilde paylaştırabildik. Yani en ikna edici Ahmet. En açık şekilde o anlatmış.
Öğretmen: Evet sıralamayı Ahmet, Aslı, Ayşe, Ali diye yapıyorlar ikna oldunuz mu?

Öğrenci: Biz ikna olmadık. Siz sayı örneği verdiniz. Hocam Ahmet'in sözel olarak anlattığı şeyi gösterdiler. Yani Aslı'nın çözümünün aynısını yaptılar. Zaten Aslının yaptığı Ahmet'in söylediğinin görseli. Neden onu ilk sıraya koymadılar da Ahmet'i koydular.
Grup sözcüsü: Evet ama bize o daha açıklayıcı geldi.
Öğrenci: Hocam aslında Ahmet ve Aslı neredeyse aynı çözümü farklı şekillerde ele almışlar. Ahmet kurabiyeleri, Aslı da kartları paylaştırmış. Neden eşit kabul etmediler.
Grup sözcüsü: Çünkü Aslı bir sürü kart çizmişti ama Ahmet hiçbir şey çizmeden açıklayarak kanıt yapmış.
Öğrenci: Biz de Ahmet'i doğru bulduk ama Ayşe çok net bir kanıt yapmış. Kanıt deyince aklıma ilk Ayşe'ninki gelir benim. O yüzden biz bu çözümü kabul etmiyoruz.
Öğretmen: Ayşe'yi neden kabul etmediniz? Ayşe yanlış mı?
Grup sözcüsü: Hocam biz Ayşe'yi de doğru kabul ediyoruz. Mesela 6n demiş sonra 3. 2n demiş yani bir sayı 6'nın katıysa 3'ün de katıdır demek. Ama Ahmet çok iyi anlatmış zihnimizde canlandı, Aslı da öyle. Ayşe'nin ki zihinde canlanmıyor.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi Çalışkan Arılar grubu en ikna edici argümanın algısal argüman olduğunu, ikinci en ikna edici argümanın ise görsel argüman olduğunu belirtmişlerdir. Bununla birlikte öğrencilerin deneysel argümanı örneklerle kanıt olmayacağını savunarak ikna edici kabul etmedikleri, cebirsel argümanı doğru kabul ettikleri; ancak diğerlerini daha ikna edici buldukları görülmüştür. Öğrenciler bu argümanları, problemi zihinlerinde canlandırmalarını sağladıkları, daha somut oldukları ve problemi daha iyi anlamalarını sağladıkları için seçmişlerdir. Cebirsel argümanın doğruluğuna ikna olduklarını; ancak zihinlerinde canlanmasını sağlamadığı için diğerlerini daha ikna edici bulduklarını belirtmişlerdir. Sınıf tartışmaları esnasında diğer gruplardan öğrencilerin Çalışkan Arıların bu sıralamasını doğru kabul etmedikleri, cebirsel argümanın en genel kanıt olduğunu belirttikleri görülmüştür. Starlar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

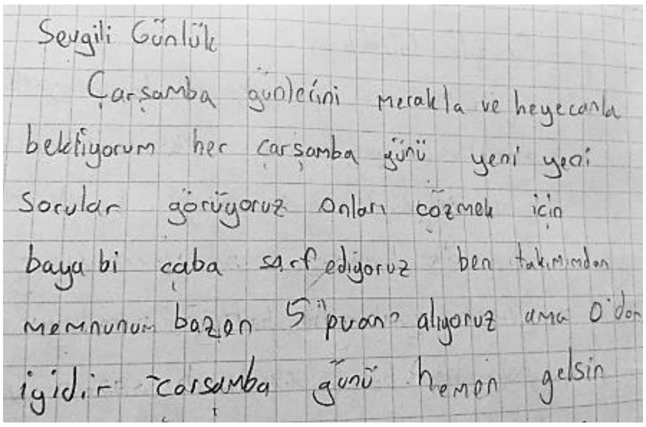
Grup sözcüsü: Bizim grup sıralamamız Ayşe, Aslı, Ahmet, Ali.
Öğretmen: Neden?
Grup sözcüsü: Hocam bu bir kanıt sorusu ve örneklerle bizi ikna edemeyecekleri için onu en sona koyduk. Sonra Ahmet'i üçüncü sıraya koyduk çünkü Ahmet sadece sözel ifade etmiş şekillerle gösterseydi bizi daha çok ikna ederdi. Aslı da Ahmet'in yaptığını şekillerle göstermiş yani daha ikna edici olmuş. Ayşe ise tam doğru çözümü yapmış, cebirsel ifadelerle göstermiş. Yani Ayşe genel bir strateji bulmuş. Mesela Ahmet'in kurabiyelerini sürekli böyle kutulara koyup yapsak bir sürü kutu olacak bir süre sonra tükenecek ne kadar kutu çizebiliriz ki ama Ayşe bir strateji uygulamış formül bulmuş. Aynı şey Aslı'nın çizdiği kartlar için de geçerli.
Öğretmen: Ayşe'nin çözümünün doğruluğundan nasıl emin oldunuz?
Grup sözcüsü: Ayşe 6n almış önce n istediğimiz tam sayı olabilir. 6n= 3. 2n'dir demiş. Bu şu anlama gelir yani 3'ün 2n katı 6n'ye eşit olmuş. Yani 6'nın hangi katı olursa olsun o mecburen 3'ün de katı olur demek. Burada n yerine istediğimiz sayıyı koyabiliriz mesela 3 koyalım. 6.3=3.2.3 olur. Yine eşit çıkar bunlar. Yani hem 3'ün katı hem 6'nın katı olur. Bütün tam sayılar için bu doğrudur.
Öğrenci: Hocam biz de Ayşe'nin kanıtını en ikna edici bulduk ama onlar Ahmet'inkine şekille göstermediği için net değil diyorlar ama Ahmet orada bir betimleme yapmış zihnimizde canlandırabiliriz çok kolay bir şekilde.

Grup sözcüsü: Evet o anlatmış ama Aslı gibi şekillerle gösterseydi daha net anlardık. Yani çok benziyor çözümler eşit diyebilirdik ama görsel olduğu için onu daha çok kabul ettik.
Öğrenci: Siz n yerine sayı koydunuz n yerine de sürekli bir sayı koyamayız ama. Yani n yerine 3 koydunuz doğru kabul ettiniz başka sayılarda da doğru olduğuna beni ikna eder misin?
Grup sözcüsü: Zaten formül şöyle 6n= 3.2n biz hangi sayı olursa olsun doğru olur. Çünkü her iki taraftaki n'ler aynı 3'le 2'yi çarpınca da 6 olur. Yani sayı örneği vermesek de formülün kesin doğru olduğunu görebiliriz. Bir de siz (Çalışkan Arılara hitaben) burada 18 kurabiye yaptınız kutulara koydunuz ya daha çok kurabiye olsaydı o zaman bunları kutulara çizmek yerine bu formülü kullanmak daha doğru geldi.
Öğrenci: Peki neden Aslı ve Ahmet'i eşit kabul etmediniz. Çünkü Ahmet de görsel eksik Aslı'da açıklama eksik yani ikisinde de bir şeyler eksik.
Grup sözcüsü: Biz Aslı'yı eksik görmüyoruz o hem şekille anlatmış açıklama da yapmış o yüzden Aslı Ahmet'ten daha ikna edici.

Sınıf tartışmasında görüldüğü gibi öğrenciler deneysel argümanın ikna edici olmadığı ve cebirsel argümanın en ikna edici olduğu konusunda görüş birliğine varmışlardır. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme ve çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Ancak gruplar algısal argüman ve görsel argümandan hangisinin daha ikna edici olduğu konusunda görüş birliğine varamamışlardır. Starlar grubu algısal argümanda sadece sözel ifade olduğu için görsel argümanın daha ikna edici olduğunu savunmuşlardır. Bununla birlikte tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenciler farklılıkların olduğu durumlarda kendi argümanlarının doğruluğunu savunmuşlar ve karşı grubun argümanını çürütmeye çalışmışlardır. Bu durumlar *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

Öğretmen: Şimdi ben size kendi yaptığım sıralamayı söyleyeyim. Bence Ayşe en ikna edici çözümü yapmış. Ali konusunda bütün sınıfın ortak görüşte olmasına sevindim çünkü örneklerle kanıt yapılmaz. Ahmet çok güzel bir açıklama yapmış, Ahmet'in açıkladığı şeyi Aslı da görsel olarak ifade etmiş. Bu iki çözüm problemi anlamanızı sağladı, zihninizde canlandırmanızı sağladı. Ancak ben en ikna edici kanıtı sordum. Şimdi, Ayşe en genel, en ikna edici, en kesin kanıtı yapmış çocuklar. Fark ettiyseniz neredeyse bütün gruplar Ahmet ve Aslı'nın çözümlerinin hangisinin ikna edici olduğu üstünde tartıştı. Bazılarınız kaç kurabiye dediniz bazılarınız kaç tane kart çizebiliriz dediniz. Ama Ayşe'nin kanıtı her yerde kabul görebilecek bir kanıttır. n herhangi bir tam sayı olmak üzere 6'nın katı olan bir sayıyı 6n olarak yazabiliriz. Sonra bu 6'yı da 3. 2 olarak yazabiliriz doğal olarak da 3. 2n diye yazılan şey aslında 3'ün 2n katı demektir. Yani 6'nın katı olan herhangi bir sayı 3'ün de bir katıdır.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerin günlüklerinden alınan bir örnek Görsel 4.83'te sunulmuştur:


Sevgili Günlük
Çarşamba günlerini merakla ve heyecanla bekliyorum her çarşamba günü yeni yeni sorular görüyoruz onları çözmek için baya bi çaba sarf ediyoruz ben takımımdan memnunum bazen 5 puanı alıyoruz ama O'da iyidir çarşamba günü hemen gelsin

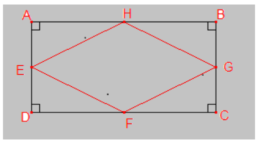
Görsel 4.83. *Dokuzuncu hafta öğrenci günlüğü örneği*

4.4.4. Onuncu hafta öğretimine ilişkin bulgular

Sınıf uygulamalarının özetinin Tablo 4.16.'da sunulduğu onuncu haftada öğrencilere doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri problemi sunulmuştur. Öğretimin sonunda küçük gruplardan Turunçgiller, Starlar ve Efsanevi Matematikçiler gruplarının doğrudan kanıt yapabildikleri görülmüştür.

Tablo 4.16. *Onuncu hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik



Şekildeki gibi bir dikdörtgenin kenarlarının orta noktaları birleştiğinde oluşan dörtgen hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Etkinliğin genişletilmesi:

* Bir karenin kenarlarının orta noktaları birleştiğinde oluşan dörtgen hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Tablo 4.16. (Devam) *Onuncu hafta sınıf uygulamalarının özeti*

<table>
<tr><th colspan="3">Etkinliğin Odağı</th></tr>
<tr><td colspan="3">*Matematiksel varsayımlar geliştirme
*Ulaşılan varsayımın her zaman geçerli olup olmadığını belirleme
• EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu doğrudan kanıt yaparak gösterme</td></tr>
<tr><th colspan="3">Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma</th></tr>
<tr><td colspan="3">*Kâğıdına EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu yazma
*Kâğıdına EFGH dörtgeninin paralelkenar olduğunu yazma
*Kenar uzunluklarına ve açıların ölçülerine rastgele değer verme</td></tr>
<tr><th>Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması</th><th colspan="2">Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi</th></tr>
<tr><td>*Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve dik üçgenin özellikleri, doğru açı, üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup)
*Dik üçgenlerin eşliği yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlama (Efsanevi Matematikçiler grubu)
*Dikdörtgenin simetri eksenleri yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlama (Turunçgiller grubu)</td><td colspan="2">*Görsel algıya dayalı olarak EFGH dörtgeninin karşılıklı açılarının eş olduğunu iddia etme (Her iki odak grup)
*Görsel algıya dayalı olarak EFGH dörtgeninin paralelkenar olduğunu iddia etme (Her iki odak grup)
* Görsel algıya dayalı olarak EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu iddia etme (Her iki odak grup)
*Görsel algıya dayalı çıkarımda bulunmayı geçerli bir yöntem olarak kabul etmeme (Her iki odak grup)
*Dik üçgenlerin eşliğini göstermek için örnek kullanma (Her iki odak grup)
*EFGH dörtgeninin karşılıklı açılarının eşliğini göstermek için örnek kullanma (Her iki odak grup)
* Arkadaşlarını cebirsel temsil kullanmaya teşvik etme (Efsanevi Matematikçiler grubu)
*Üçgenlerin eşliğini yazarken eş açılar karşısındaki kenarların eş olduğunu vurgulama (Efsanevi Matematikçiler grubu)</td></tr>
<tr><th>Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması</th><th>Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi</th><th>Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları</th></tr>
<tr><td>* Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve dik üçgenin özellikleri, doğru açı, üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Efsanevi Matematikçiler, Turunçgiller ve Starlar grubu)
* EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlayamama (Çalışkan Arılar grubu)
*Dikdörtgenin simetri eksenleri yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlama (Turunçgiller grubu)
*Dik üçgenlerin eşliği yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlama (Efsanevi Matematikçiler ve Starlar grubu)</td><td>*Üçgenlerin, sadece kenar uzunluklarının eşitliğinden yararlanarak eş olduğu iddiasını kabul etmeme
*Köşelerdeki üçgenlerin dikdörtgenin simetri eksenlerine göre simetrik olduğunu göstermelerini isteme</td><td>*Neden problemi görür görmez eşkenar dörtgen olduğunu iddia ettiklerini sorma
* Karşılıklı iki kenar uzunlukları eşit olan üçgenlerin hangi şart sağlanırsa eş üçgen olacağını sorma</td></tr>
<tr><th colspan="3">Değerlendirme Aşaması</th></tr>
<tr><td colspan="3">*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme
*Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme
*Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme</td></tr>
</table>

Tablo 4.16. (Devam) *Onuncu hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Belirlenen Kanıt İşlevleri				
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	KEŞİF	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama *Sonuçları görme	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*Analiz yapma	*İlişkileri ortaya çıkarma *Tutarsızlıkları ortaya çıkarma *Uygulama

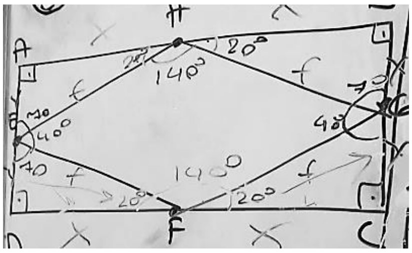
Belirlenen Sosyal Normlar	Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Farklı çözümler sunma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme * Farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne *"Öğrencilerin problem sorulur sorulmaz herhangi bir işlem yapmadan kâğıtlarına eşkenar dörtgen yazdıkları görüldü. Birkaç öğrencinin de paralelkenar yazdığı görüldü. Pek çok öğrenci dikdörtgenin kenar uzunluklarına ve köşelerdeki üçgenlerin açılarının ölçülerine değer verdi."* şeklinde yazdığı belirlenmiştir. Öğretmenin günlüğünde de belirttiği gibi bireysel çalışmalarında pek çok öğrenci görsel algıya dayalı olarak EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olabileceğini kâğıdına yazmıştır. Bununla birlikte bazı öğrencilerin kâğıtlarına paralelkenar olduğunu yazdıkları da belirlenmiştir. Öğrencilerin dikdörtgenin kenar uzunluklarına, köşelerde oluşan üçgenlerin açılarına farklı değerler vererek bu iddialarına gerekçe sunmaya çalıştıkları görülmüştür. Öğrencilerin küçük grup tartışmalarında EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğu varsayımında bulundukları ve bu varsayımlarını doğrudan kanıt yaparak kanıtladıkları görülmüştür. Her iki grubun da oluşan dik üçgenlerin eşliği yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtladıkları görülmüştür.

Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmasında öğrencilerden biri önce EFGH dörtgeninin şekilde karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit göründüğünü söyleyerek paralelkenar olduğunu iddia etmiş; ancak bu düşüncesi görsel algıya dayalı olduğu için ve farklı bir gerekçe sunmadığı için arkadaşları tarafından kabul edilmemiştir. Benzer şekilde başka bir öğrencinin de EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgene benzediğini söylemesi ve bu iddiasını sadece görsel algıya dayalı gerekçelendirmesi arkadaşları tarafından kabul edilmemiştir. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmasının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

> **…**
> **Öğrenci:** Bence paralelkenar. Dört açısı dört köşesi var karşılıklı açıları eşit gibi görünüyor.
> **Öğrenci**: Neden paralelkenar dedin?
> **Öğrenci:** İşte bu açılar birbirine eşit. (EFGH'nin karşılıklı açıları).
> **Öğrenci:** Bana da eşkenar dörtgen gibi göründü ama nasıl bilmiyorum.
> **Öğrenci:** İkiniz de aynı şeyi söylüyorsunuz. Öyle görünüyor diye bir şey olmaz.
> **…**

Ayrıca Efsanevi Matematikçiler grubunda bir öğrenci Görsel 4.84.'te sunulduğu gibi açıların ölçülerinin eşit olduğunu göstermek için açılara değer vermiştir. Grup arkadaşları örnekle kanıt yaptığını söyleyince öğrencinin bu sayıları sadece açıların ölçülerinin eşit olduğunu göstermek için kullandığını, hangi açıyı yazarsa yazsın aynı sonuca ulaşacaklarını söylemesi öğrencinin genelleyici örnek kullandığının göstergesidir. Bununla birlikte kenar uzunluklarının eşitliğini göstermek için yine değer kullanan öğrenci arkadaşları tarafından eleştirilince öğrencinin arkadaşlarını ikna etmek için kenar uzunluklarını değişken kullanarak gösterdiği tespit edilmiştir. Bu durum *çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmasının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.84. *Onuncu hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışması*

Öğrenci: Ben de paralelkenar olduğunu düşünüyorum çünkü burada EH mesela 5 ise EF de 5 olur. Yani bu kenarlar eşit olur. Bu şekil dikdörtgenin tam ortasına yerleştirilmiş. Bu mesafelerin eşit olması lazım.
Öğrenci: Paralelkenar da tüm kenarlar eşit değil ki?
Öğrenci: Tamam karşılıklı kenarlar eşit.
Öğrenci: Ama senin yaptığın kenarlar karşılıklı değil ki. EH ile FG karşılıklı olur. Ben eşkenar dörtgen dedim. Zaten iç açılarının toplamı 360. Karşılıklı açıları eşit şöyle bakın. Bu üçgenler aynı, mesela bu açıya 20 versek bu açı da 20, bu açıya 70 kalır burası da 70. Ayrıca burada 180^{o}'lik bir doğru açı olacağı için bu açılar eşit. Bence kenar uzunlukları eşit. Tam ortadan ikiye bölünmüş dikdörtgenin kenarları. Aynı zamanda bu bir paralelkenardır. Zaten eşkenar dörtgen de paralelkenardır.
Öğrenci: Peki şimdi bu üçgenlerdeki bu açıları eşit diyorsun ya bu iki üçgende bu açı 30 olamaz mı?
Öğrenci: Ya tabi ki olur istediğin sayıyı yaz. Ben hangi açı hangi açıya eşit görün diye öyle gösterdim. Toplamları 90 olan istediğin sayıyı al. Mesela bu parçalardan birine 5 desek zaten soruda verilmiş bunlar eşit burası da 5 olacak. Bu bir dikdörtgen olduğu için karşısı da 5 ve 5 olacak. Yani burası x ise burası da x. Bu kenar y ise bu kenar da y. Zaten soruda verilmiş. Bence içerdeki dörtgenin bu kenarı f ise bu da f.
Öğrenci: Neden işte buraların ikisi de f?
Öğrenci: Baksana tam ortaya çizilmiş bütün kenarların ortasına o yüzden bu mesafeler aynı olmalı.
Öğrenci: Tamam doğru diyor Mehmet. Bu açıya 20 desek bu açıya da 70 desek ikisinin toplamı 90 olacak çünkü. O zaman bu üçgende burası da 20 ve 70, diğer üçgenlerde de 20 ve 70. O zaman bu açılar aynı olacak. Çünkü 20 +20=40 o zaman bu açıya 140 kaldı, 70+70=140 o zaman bu açılara da 40 kaldı. Gördünüz mü karşılıklı açılar eşit, yani paralelkenar olduğundan emin olduk.
Öğrenci: Bu deneme yöntemi sayılmaz mı?
Öğrenci: Hayır sayılmaz, biz hangi açılar eşit onu göstermek için sayı kullandık sadece. Şimdi AD ve BC eşit olduğu için 6 cm dedik. O zaman 3 ve 3 diye ayrılacak hepsi. Şimdi diğerlerini de 5 ve 5 diye ayırmıştık. O yüzden buradaki üçgenlerde ikisinde de 3 ve 5, 3 ve 5. Bu yüzden F'den E'ye giden uzunluk ile H'den E'ye giden eşit olmalı. Tam karşısı da aynı olacak.
Öğrenci: Ama yine sayı verdin.
Öğrenci: Hayır size eşkenar dörtgen olduğunu göstermek için. Fark etmez ki hangi sayıyı koyarsak onun yerine yine aynı olacak. Çünkü bu üçgenlerin hepsi birbirine eşit üçgenler. Çünkü kenarların ikisi de ortadan ikiye ayrıldığı için bu üçgenlerin hepsi aynıdır.
Öğrenci: Ben ikna olmadım.
Öğrenci: Allah Allah. Ya çünkü üçgenlerde bu kenarların hepsi aynı bak senin için sayı vermeyeceğim. Şimdi bunların hepsi y, bunların hepsi x. Çünkü bu bir dikdörtgen. Bu üçgenlerin hepsi eşit üçgenler. Çünkü burası 20 ise burası da 20, burası da 140 kalır karşısı da aynı olur. Buralar da 70 olur. O yüzden bu üçgenlerin kalan kenarlarının da eşit olması gerekir. Açıları da yazdık işte. Bu eşkenar dörtgen oldu.
Öğrenci: Yani Mehmet şöyle diyor buradaki üçgenlerin hepsinin bir kenarı x ve bir kenarı y. Bir de hepsinin bu açısı 90 olduğu için bu üçgenler eşit üçgenler.
Öğrenci: Tabi yazarken şuna dikkat edeceğiz y kenarının hemen yanındaki açı 70 ise bu üçgenler eş olduğu için diğer üçgende de y'nin yanındaki açı 70 olmalı. Yani 70 her defasında x'in karşısına gelecek yoksa yanlış olur. Mesela bak bu açıya 20 dedim yanında x kenar var o zaman diğer üçgende de x'in yanındakine 20 deriz. Bu dört üçgenin bütün açıları ve kenarları eşit olduğu için eşit bu üçgenler. O zaman hepsinin bu kenarı f olur diyeceğiz. Bütün kenarları da eşit olduğu için eşkenar dörtgendir.

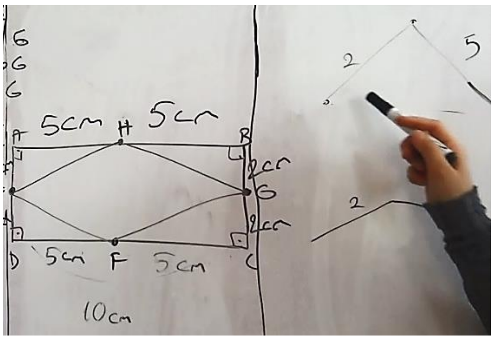
Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrenciler küçük grup tartışmalarında, işbirliği yaparak beraber çözüm üretmeye çalışmışlar, düşüncelerini paylaşmaları için kendi grup arkadaşlarını teşvik etmişlerdir. Öğrenciler grup tartışması süresince birbirlerini anlamaya çalışmışlar, anlaşılmayan noktaları birbirlerine sormuş ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlar, farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlardır. Bu durumlar *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Öğrencilerin dikdörtgenin köşelerinde oluşan üçgenlerin eşliği yardımıyla EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtladıkları görülmüştür. Bununla birlikte küçük grup çalışmalarında Efsanevi Matematikçiler grubunun yaptıkları kanıt ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları ve öğrencilerin varsayımlarının doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıkladıkları görülmektedir. Öğrencilerin dik üçgen tanımı, dikdörtgen tanımı, doğru açı tanımı, eşkenar dörtgenin özellikleri gibi önceden öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullandıkları görülmektedir. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma, kavrayış sağlama, sonuçları görme* ve *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Aynı zamanda bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından sınıf tartışmalarının yapıldığı rakibini ikna et aşamasına geçilmiştir. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Sınıf tartışmalarında tüm grupların EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğu varsayımında bulundukları görülmüştür. Öğretmen sınıf tartışmalarına başlamadan önce tüm gruplara küçük grup tartışmaları başlar başlamaz neden bu dörtgene eşkenar dörtgen dediklerini sormuş ve aşağıda görüldüğü gibi gruplardan eşkenar dörtgene benzediği için böyle bir iddiada bulundukları yanıtını almıştır:

> **Öğretmen:** Çözümlerinizi yapmadan önce tüm sınıfa bir soru sormak istiyorum. Ben bu soruyu sorar sormaz kâğıtlarınıza eşkenar dörtgen yazdığınızı gördüm. Neden?

Öğrenci: Hocam ben ilk başta eşkenar dörtgene benzediği için eşkenar dörtgen dedim. Ama matematikte benziyor diye bir şey olmayacağından başka şeyler buldum.
Öğrenci: Ben ilk gördüğümde hemen eşit olduğunu düşündüm kenarların o yüzden eşkenar dörtgen dedim.
Öğrenci: Eşkenar dörtgene benzediği için.
Öğretmen: Bence hepiniz görür görmez bunu eşkenar dörtgene benzettiniz ve bu yüzden eşkenar dörtgen yazdınız. Ama benziyor diye öyle kabul edilmez. Siz de bunu biliyorsunuz artık ve bu yüzden farklı şekillerde gerekçelendirdiniz. Yine de eşkenar dörtgen iddiasında bulunmanız kanıt yapmada size yardımcı oldu.

Küçük gruplardan sadece Çalışkan Arılar grubunun varsayımlarına geçerli ve ikna edici bir kanıt sunamadıkları, diğer grupların ise EFGH dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu kanıtladıkları görülmüştür. Çalışkan Arılar grubunun Görsel 4.85.'te sunulduğu gibi dikdörtgenin köşelerinde oluşan üçgenlerin açılarının ölçülerinin eşitliğini kullanmadan bu üçgenlerin eş olduklarını iddia ettikleri tespit edilmiştir. Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıda örnek olarak sunulmuştur:

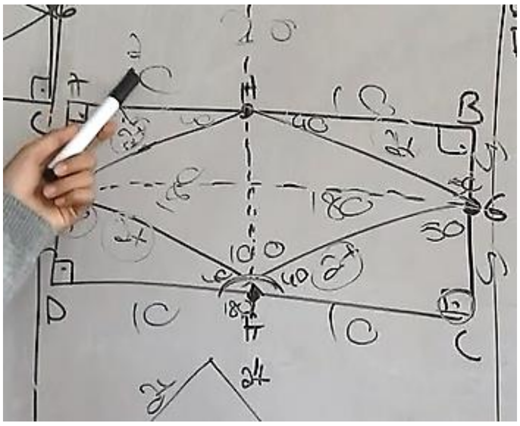


Görsel 4.85. *Onuncu hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Biz eşkenar dörtgen diyoruz. Çünkü ortadaki dörtgenin tüm kenar uzunlukları eşittir diyoruz.
Öğretmen: Neden bu dörtgenin tüm kenarları eşit?
Grup sözcüsü: Mesela DC'ye 10 cm desek F de tam ortada olduğu için DF ve FC 5'er cm olur. Aynı şekilde dikdörtgenin karşılıklı kenar uzunlukları birbirine eşit olduğu için AB de 10 olur ve 5'e 5 diye ayrılır. Sonra AD'nin uzunluğuna 4 desek AE ve ED 2'şer cm olur. Karşılıklı kenarlar eşit olduğu için BG ve GC de 2'şer cm olur. Şimdi bütün üçgenlere baktığımızda hepsinde bir kenar 5 cm bir kenar da 2 cm olduğu için bunlar da yani ortadaki dörtgenin kenarları da birbirine eşittir.
Öğretmen: Arkadaşımız diyor ki kenarlardaki dört üçgenin hepsinde bir kenar 5 cm, diğer kenar da 2 cm olduğu için bu üçgenlerin üçüncü kenarları da eşittir. Bu yüzden eşkenar dörtgen dedik diyor. İkna oldunuz mu?
Grup sözcüsü: Bu dörtgen eşkenar olduğu için doğal olarak paralelkenar da oluyor.
Öğrenci: Ben ikna olmadım hocam. Neden eşit tam açıklamıyor.
Grup sözcüsü: Açıkladım, çünkü bu üçgenlerin hepsinin bir kenarı 5 diğer kenarı da 2 o yüzden mecburen mesela EH ile HG eşit olmalı.

Öğrenci: Hocam ama başka bir şey daha var şimdi adını söylersem ipucu vermiş olurum. Ondan hiç bahsetmiyor sadece kenar diyor.
Öğretmen: Tamam ben bir soru sorayım. Şimdi iki üçgenin ikişer kenarları eşit olsun. Yani iki üçgen alalım her birinin kenar uzunluğu 2 ve 5 olsun bak tahtaya çizdiklerime o zaman her zaman üçüncü kenar da eşit midir? Ya da eşit olması için gerekli şart nedir?
Grup sözcüsü: Bilmiyorum hocam. Biz öyle düşünmedik.
Öğretmen: Grup size soruyorum. Şimdi siz diyorsunuz biz bu üçgenlere değer verip yaptığımızda bu kenarlar eşit olduğu için üçüncü kenar da eşittir. Ben de diyorum ki çizdiğim üçgenlere bakarak söyleyebilirsiniz böyle olursa, ne olursa olsun üçüncü kenar da her zaman aynı olur mu? Eşit olması için ne gerekir?
…
Öğrenci: Hocam nedenini söyleyemediler biz kabul etmiyoruz.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi Çalışkan Arılar grubu diğer grupların yaptığı gibi ABCD dikdörtgenin kenar uzunluklarına rastgele değerler vererek dikdörtgenin köşelerinde oluşan üçgenlerin eş olduğunu göstermek istemişler; ancak bu üçgenlerin açılarının eşliğini kullanmadıkları için bu çözüm kabul edilmemiştir. Öğretmen gruba iki kenar uzunluğu eşit olan iki üçgenin üçüncü kenarlarının uzunluğunun da her zaman eşit olmadığını göstermek için bir örnek vermiştir. Böylece öğretmen öğrencilerin dikkatini iki kenar arasında kalan açılara çekmeye çalışmış; ancak öğrencilerin bu açılardan yararlanmadıkları görülmüştür. Sınıftaki öğrenciler farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlar ve ikna olmadıklarını açıkça ifade etmişlerdir. Sınıf arkadaşları grubunun mantıksal tutarsızlıklarını fark etmesini sağlamıştır. Kanıt burada *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Aynı zamanda bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Doğru çözüm yapan Turunçgiller grubu, Starlar ve Efsanevi Matematikçiler gruplarından farklı olarak Görsel 4.86.’da sunulduğu gibi dikdörtgenin simetri ekseninden yararlanarak üçgenlerin eşliğini göstermişlerdir. Bu durum *farklı çözümler sunma* sosyal normu ile *farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Doğrudan kanıt yapan Turunçgiller grubunun sınıf tartışmasının bir kesiti aşağıda sunulmuştur.



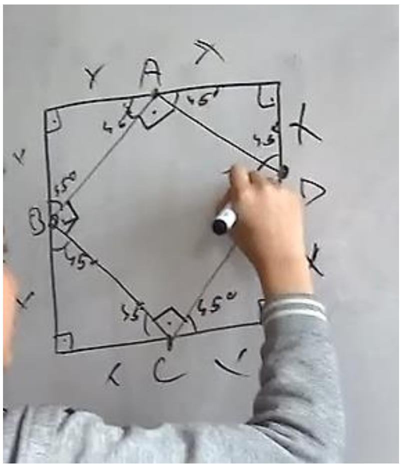
Görsel 4.86. *Onuncu hafta Turunçgiller grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Eşkenar dörtgen bulduk. Şimdi biz ilk başta bu kenarı 20 aldık, 10 ve 10 diye ayırdık. Diğer kenarı da 5 ve 5 diye ayırdık. Sonra bu kenarların eşit olduğunu düşündük (Eşkenar dörtgenin kenarları).
Öğretmen: Evet bu diğer iki grubun çözümüne benziyor yani değer verdiniz ve ikişer kenarları eşit olduğu için üçüncü kenarlar da eşit olur diyorlar ve eşkenar dörtgen diyorlar. Tam olarak gerekçeniz bu mu?
Grup sözcüsü: Hocam biz ayna olarak düşündük.
Öğretmen: Nasıl ayna yani?
Grup sözcüsü: Hocam bir ayna buradan geçiyor bir ayna da buradan geçiyor.
Öğretmen: Yani oradan bir ayna geçirdiniz ne oldu?
Grup sözcüsü: Yani ben aynaya baktığımda yine kendimi görüyorum. Bu şekil de aynaya baktığında yine kendisini görüyor. Mesela bu kenar 10 aynadan bakınca da bu kenar 10, bu kenar 5 aynadan bakınca da bu kenar 5 olur. 40 ve 40'ı toplarsak 80 olur 180'den çıkarınca burası da 100 olur.
Öğretmen: Neden orası da 40?
Grup sözcüsü: Çünkü buradan ayna geçiyor ya. Bu üçgen bu üçgenin yansımasıdır. 90 derece burada karşındaki 90 derece de burada. O yüzden burası 40 olursa karşındaki de 40 olur. Üçgenin diğer açılarını 50 aldık. Çünkü üçgenin iç açılarının toplamı 180 olacağından dolayı. Bu 50 derecenin karşısından da ayna geçtiği için yine bu açı da 50 oldu. Diğer açıya 40 kalır. Bu 40'ın yanından da ayna geçiyor o yüzden burası da 40 olur. 50'nin yanından da ayna geçiyor. Yani FCG üçgeni de aynada kendisine bakınca HBG üçgeni oluyor. Yine kenarları ve açıları eşit oldu. O yüzden bu üçgenlerin hepsi aynı üçgenler.
Öğretmen: Ayna fikri nerden geldi aklına. Bu arada ayna dediğimiz simetri. Senin çizdiklerin simetri ekseni yani.
Grup sözcüsü: Bilmiyorum hocam çok düşündük eşkenar dörtgen geldi aklımıza ama nedenini bulamıyorduk sonra bunu gördüm.
Öğrenci: Simetrik olduğunu kanıtlar mısın?
Grup sözcüsü: Kanıtladım zaten sen iyi dinlememişsin. Bak burada bir dik açı var, karşısında yine bir dik açı var. Kenarlar da 10 ve 10 olarak aynı. Bir de diğer kenarlar var 5 ve 5 olan. Bu yüzden burada bir ayna vardır. Ayna olduğu için de bu açı 40'sa karşısındaki de 40 olur.
Öğrenci: Tamam.
Öğrenci: Peki sen buna tam olarak eşkenar dörtgen diyebilir misin? Yani paralelkenar da olur mu?
Grup sözcüsü: Diyebilirim çünkü kenarları eşit, karşılıklı kenarları paralel, karşılıklı açıları eşit.
Öğrenci: Paralelkenarda da aynı şeyler var.
Grup sözcüsü: Zaten eşkenar dörtgen bir paralelkenardır.
Öğrenci: Hocam biliyor mu diye denemek için sordum.

Turunçgiller grubu simetri eksenini ayna olarak isimlendirerek $\overset{\Delta}{EDF}$'nin aynadan kendisine baktığında oluşan görüntüsünün $\overset{\Delta}{GCF}$ olduğunu belirtmişlerdir. Öğrenciler bu iki üçgenin karşılıklı iki kenarı ve bu kenarlar arasında kalan açıları eş olduğu için üçüncü kenarlarının da eş olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin dik üçgen, dikdörtgen, doğru açı tanımları, simetri ekseni gibi önce öğrendikleri birçok kavramı ilişkilendirerek bu kanıtta kullanmaları, varsayımlarını nedenleriyle gerekçelendirmeleri, kanıtın açıklama işlevinden *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevine ve sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir. Bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Tamam şimdi değerlendirelim. Hepiniz eşkenar dörtgen dediniz ama Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Starlar iyi gerekçelendirdiler. Çalışkan Arılar neden eşkenar dörtgen olduğunu tam olarak açıklayamadılar. Turunçgiller simetri eksenini kullanarak açıların ve kenarların eşliğini gösterdi. Efsanevi Matematikçiler ve Starlar da eş üçgenleri kullandılar. İki üçgende iki kenar uzunluğu eşit ve bu iki kenarın arasındaki açıların ölçüsü de eşit olduğu için bu üçgenler aynıdır dediler. Ayrıca açıları yerleştirirken de aslında şöyle yaptılar eşit kenarların karşısındaki açıları da eşit aldılar. Doğal olarak ortadaki dörtgeni eşkenar dörtgen buldular. Şimdi bu anlaşıldıysa bir soru daha soruyorum. Bir karenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimizde oluşan dörtgen hakkında ne söyleyebilirsiniz.? Tüm sınıfa soruyorum.

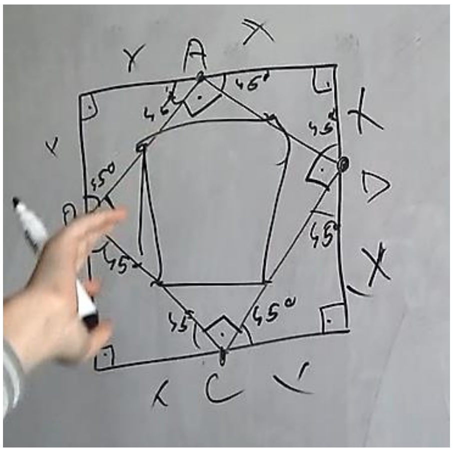
Öğretmenin değerlendirmesinde görüldüğü gibi öğretmen sınıfa bir karenin kenarlarının orta noktaları birleştirildiğinde oluşan dörtgenin ne olduğunu sormuştur. Bunun üzerine bir öğrencinin Görsel 4.87.'de sunulduğu gibi köşelerde oluşan üçgenlerin ikizkenar üçgen olduğunu göstererek oluşan dörtgenin kare olduğunu kanıtladığı görülmüştür. Bu problemde öğrencilerin kendi buldukları çözüm yöntemini genelleyerek karşılaştıkları farklı problemde kullanmaları sistematikleştirme işlevinin *uygulama* alt işlevine hizmet etmiştir. Tartışmanın bu kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.87. *Onuncu hafta değerlendirme aşaması 1*

Öğrenci: Kenarları eşit olurdu, karşılıklı açıları da eşit olurdu.
Öğrenci: Hiçbir şey değişmezdi yine eşkenar dörtgen olurdu sadece biraz daha küçülürdü.
Öğrenci: Evet yine eşkenar dörtgen olurdu yine kenarları eşit olurdu.
Öğrenci: Kenarda kalan üçgenlerin hepsi yine eş olurdu o yüzden yine eşkenar dörtgen olurdu.
Öğretmen: Peki o kenarda kalan üçgenler hakkında ne söylersiniz?
Öğrenci: Az önce kenarların uzunlukları farklıydı o yüzden birine x ve birine y diyorduk ama şimdi hepsine x diyoruz. Bu açıların her biri de 45^o olur.
Öğretmen: Gel göster tahtada.
Öğrenci: Yani üçgenler ikizkenar üçgen olur. Bu açıların da hepsi 90^o olur.
Öğretmen: Tamam bu dörtgen nedir?
Öğrenci: Karedir, çünkü kenar uzunlukları eşit ve açıları 90 olduğu için.
Öğretmen: Evet doğru bütün kenar uzunlukları eşit ve her bir açısının ölçüsü 90 olduğu için karedir.

Öğretmenin problemi genişletmesinin ardından bir öğrencinin Görsel 4.88'de sunulduğu gibi oluşan bu karenin kenarlarının orta noktaları birleştiğinde ortada oluşan dörtgenin de kare olacağı genellemesini yaptığı görülmüştür. Kanıt burada buluş işlevinin *analiz yapma* alt işlevi olarak hizmet etmektedir. Tartışmanın bu kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.88. *Onuncu hafta değerlendirme aşaması 2*

Öğrenci: Hocam ben size bir şey soracağım bunları da şöyle yapsaydık. Yani bunun da kenarlarının orta noktalarını da birleştirseydik bu da bir kare olur muydu?
Öğretmen: Evet ne dersiniz bu da bir kare olur muydu diyor?
Öğrenci: Kare olur. Çünkü bir önceki de karenin içinden çıkan bir kare olduğuna göre bu da bir kare olur.
Öğretmen: Bu böyle sonsuza kadar gider değil mi? Bunun içine de çizsek yine kenarların orta noktalarını birleştirip bu da bir kare olur.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerden birinin günlüğüne *"Bugünkü ders çok eğlenceliydi. Keşke her sene böyle şeyler yapsak bu dersin bana daha geniş çaplı düşünmek şeklinde bir etkisi oldu. Çünkü sorular kolay olsa da kimsenin anlatmadığı ve daha farklı bir varsayımda bulunmaya çalışıyoruz. Bu yüzden bugün çok güzel geçti."* şeklinde yazdığı görülmüştür.

4.4.5. On birinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

Sınıf uygulamalarının özetinin Tablo 4.17.'de sunulduğu on birinci haftada öğrencilere farklı niceleyiciler kullanılarak yazılmış üç farklı önerme sunulmuştur. Öğretimin sonunda bütün grupların birinci ve üçüncü önermeyi uygun kanıt yöntemlerini kullanarak kanıtladıkları görülürken, Starlar grubunun ikinci önermede doğru kanıt yöntemini kullanamadığı belirlenmiştir.

Tablo 4.17. *On birinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik
*Ardışık beş doğal sayının toplamı her zaman 5'in katıdır.
*Toplamı 6'nın katı olan üç ardışık tamsayı vardır.
*Ardışık dört doğal sayının toplamı her zaman 4'ün katıdır.

Tablo 4.17. (Devam) *On birinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinliğin Odağı
*Verilen önermelerin doğruluğunu inceleme • Birinci önermede doğrudan kanıt yaparak önermenin her zaman doğru olduğunu gösterme • İkinci önermede varlık kanıt yöntemini kullanarak önermenin doğru olduğunu gösterme • Üçüncü önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu gösterme

Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma
* Önermeleri anlamak için örneklerden yararlanma * Birinci önermede doğrudan kanıt yaparak önermenin her zaman doğru olduğunu gösterme * Birinci önermede genelleyici örnekler kullanarak önermenin her zaman doğru olduğunu gösterme * İkinci önermeyi aksine örnek vererek çürütmeye çalışma * İkinci önermede varlık kanıt yöntemini kullanarak önermenin doğru olduğunu gösterme * Üçüncü önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu gösterme

Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması	**Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**
*Önermelerin mantıksal yapısını çözme (Her iki odak grup) *Tam sayı, doğal sayı, ardışık sayı, 5'in katı, 6'nın katı, 4'ün katı bilgilerini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup) *"Her" niceleyicisini doğru kullanma (Her iki odak grup) *"Bazı" niceleyicisini doğru kullanma (Her iki odak grup) *Birinci önermede doğrudan kanıt yaparak önermenin her zaman doğru olduğunu gösterme (Her iki odak grup) *İkinci önermede varlık kanıt yöntemini kullanarak önermenin doğru olduğunu gösterme (Her iki odak grup) *Üçüncü önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu gösterme (Her iki odak grup)	*Birinci önermenin her zaman doğru olduğunu göstermek için genelleyici örnekler kullanma (Turunçgiller grubu) *Genelleyici örnekleri ikna edici bulmama (Turunçgiller grubu) *İkinci önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu iddia etme (Turunçgiller grubu) *İkinci önermeyi aksine örnek vererek çürütmeye çalışan arkadaşının iddiasını çürütme (Turunçgiller grubu) *Arkadaşlarına evrensel niceleyici ile varlık niceleyicisi arasındaki farkı açıklama (Her iki odak grup) *İkinci önermede ardışık üç tam sayının toplamının 6'nın katı olabilmesi için gerekli şartı açıklama (Turunçgiller grubu) *Üçüncü önermede önermenin neden yanlış olduğunu gerekçelendirilme (Efsanevi Matematikçiler grubu) *Arkadaşlarını cebirsel temsil kullanmaya teşvik etme (Her iki odak grup)

Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi**	**Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Tam sayı, doğal sayı, ardışık sayı, 5'in katı, 6'nın katı, 4'ün kanıt bilgilerini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar) *"Her" niceleyicisini doğru kullanma (Tüm gruplar) *"Bazı" niceleyicisini doğru kullanma (Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Çalışkan Arılar grupları) *Birinci önermede doğrudan kanıt yaparak önermenin her zaman doğru olduğunu, üçüncü önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu gösterme gösterme (Tüm gruplar) *İkinci önermede varlık kanıt yöntemini kullanarak önermenin doğru olduğunu gösterme (Turunçgiller, Efsanevi Matematikçiler ve Çalışkan Arılar grupları) *İkinci önermenin mantıksal yapısını anlamama ve önermeyi aksine örnek vererek çürütmeye çalışma (Starlar grubu)	*İkinci önermede "her" niceleyicisinin olmadığını vurgulama *İkinci önermeyi doğrulayan bir örneğin olup olmadığını sorma *Üçüncü önermede cebirsel temsil kullanan arkadaşına aksine tek bir örnek vermelerinin yeterli olduğunu söyleme *Üçüncü önermede aksine örnek vermek yeterli olsa da neden yanlış olduğunu gerekçelendirmek gerektiğini belirtme	*Önermelerin her birinin mantıksal yapısını sorma *Birinci ve ikinci önerme arasındaki anlamsal farklılığı sorma *Üçüncü önermenin neden yanlış olduğunu sorma

Tablo 4.17. (Devam) *On birinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Değerlendirme Aşaması
*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme *Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme *Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme

Belirlenen Kanıt İşlevleri			
DOĞRULAMA	AÇIKLAMA	İLETİŞİM	SİSTEMATİKLEŞTİRME
*Doğru olduğuna ikna olma *Doğruluğunu onaylama	*Kavrayış sağlama *Sonuçları görme	*Söylem biçimini ortaya çıkarma *Tartışma ortamı yaratma	*İlişkileri ortaya çıkarma *Tutarsızlıkları ortaya çıkarma

Belirlenen Sosyal Normlar	Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar
*Açıklama ve gerekçelendirme *İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme *Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme *Grubuyla düşüncelerini paylaşma *Farklı çözümler sunma *Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi *Ortak sonuca ulaşma *Anlaşılmayan noktaları sorma *Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme *Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma	*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma *Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma *Farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma *Çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma *Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne *"Örnekler sunulduktan sonra, öğrencilerin kendilerinden beklenildiği gibi örneklerle önermeleri anlamaya çalıştıkları görüldü. Birinci önermede çoğu öğrenci doğrudan kanıt yaptı. Bazı öğrenciler toplar kullanarak genelleyici örneklerle önermeyi kanıtladılar. İkinci önermede birkaç kişi önermenin doğru olduğunu kanıtladı. Pek çok öğrenci bu önermede aksine örnek vererek önermenin yanlış olduğunu yazdı. Üçüncü önermeyi öğrencilerin büyük bir çoğunluğu aksine örnek vererek kanıtladı."* yazdığı belirlenmiştir. Öğretmenin günlüğünde de belirttiği gibi bireysel çalışmalarında öğrencilerin önermeleri anlamak için örneklerden yararlandıkları belirlenmiştir. Birinci önermede pek çok öğrencinin önermeyi doğrudan kanıt yöntemiyle kanıtladığı, birkaç öğrencinin ise genelleyici örnekler kullanarak kanıtladığı görülmüştür. İkinci önermede öğrencilerin ardışık üç sayının toplamının 6'nın katı olmadığı durumlarla karşılaştıkları için önermenin yanlış olduğunu kâğıtlarına yazdıkları görülmüştür. Bununla birlikte sayıları az da olsa bazı öğrencilerin ikinci önermenin mantıksal yapısını çözebildiği ve önermeyi varlık kanıt yöntemi ile kanıtladıkları görülmüştür. Üçüncü önermeyi neredeyse sınıfın tamamı aksine örnek vererek çürütmüştür. Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında her iki odak grubun verilen önermelerin mantıksal yapısını anlayarak birinci ve ikinci önermelerin doğru önermeler olduğunu ve üçüncü önermenin ise yanlış bir önerme olduğunu kanıtladıkları görülmüştür. Turunçgiller grubunda bir öğrenci birinci önermenin her zaman doğru olduğunu göstermek için genelleyici örnekler kullanmıştır. Öğrenci aldığı 5 ardışık sayıda her zaman 5'in katı olan bir sayı bulunduğunu, diğer sayıların da 5'in katı olacak şekilde 2'şer 2'şer toplanabildiğini ifade etmiştir. Ancak öğrencinin bu çözümü arkadaşları tarafından örnek verme olarak değerlendirilmiş ve kabul edilmemiştir. Turunçgiller grubunun tartışmalarının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

…
Öğrenci: Ben örnek yaparak buldum. Birinci problemde her zaman dedim çünkü hep 5'in katı çıkıyor.
Öğrenci: Ama örnekle yapmışsın.
Öğrenci: Evet örnekle, mesela 1,2,3,4,5 olsun dedim. Zaten bunların hepsini tek tek toplamaya gerek yok. 1'le 4'ün toplamı 5, 2'yle 3'ün toplamı da 5 zaten bir de son sayı 5. Yani 3 tane 5 oldu. Mesela başka örnekte de denedim. 11, 12,13,14,15 olsun. 11'le 14'ün toplamı 25, 12 ile 13'ün toplamı da 25, bir de 15 var bu zaten 5'in katı yine 3 tane 5'in katı sayı çıktı. Hani buna benzer toplarla yapmışlardı hoca kabul etmişti.
Öğrenci: Örnekle kabul olmaz.
…

Bununla birlikte Turunçgiller grubunda birçok öğrenci birinci önerme için bireysel çalışmalarında cebirsel ifadeler kullanarak yaptıkları kanıtı arkadaşlarıyla paylaşmışlar ve birinci önermenin her zaman doğru olduğuna karar vermişlerdir. Bu durum *çözümlerinde genelliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir:

Öğrenci: Ben cebirselle yaptım. Mesela ardışık sayılar dediği için 1+a, 2+a, 3+a,4+a, 5+a sonra bunları topladım 15 +5a oluyor.
Öğrenci: Doğru seninki bence Bahri, çünkü 5a demek zaten bir sayının 5 katı demek sonra da 15 eklemişsin her türlü 5'in katı.
Öğrenci: Ben de öyle yaptım ama n'le yaptım 15+5n çıktı.
Öğrenci: Yani hepimiz birinciyi her zaman doğru mu bulduk?
Öğrenci: Öyle görünüyor.
…

İkinci önermede Turunçgiller grubunda bir öğrencinin önermedeki varlık niceleyici yerine evrensel niceleyici kullanıldığını düşündüğü yani önermenin mantıksal yapısını anlamadığı için önermeyi aksine örnek vererek çürütmeye çalıştığı görülmüştür. Başka bir öğrenci arkadaşına evrensel niceleyici ile varlık niceleyicisi arasındaki farkı anlatmış ve öğrencinin önermenin mantıksal yapısını anlaması sağlanmıştır. Öğrencilerin ikinci önermenin doğru olduğunu fark ettikleri, ayrıca neden doğru olduğunu da açıklayabildikleri belirlenmiştir. Öğrenciler kullandıkları cebirsel ifadelerde değişkene verdikleri değer tek sayı olduğunda 6'nın katı olduğunu, çift sayı olduğunda 6'nın katı olmadığını belirtmişlerdir. Öğrencilerin bu önermenin doğru olabilmesi için önermeyi sağlayan en az bir tam sayı olması gerektiğini anlayabildikleri görülmüştür. Turunçgiller grubunun tartışmasının bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

> **…**
> **Öğrenci:** Herkes ikna olduysa ikinciye bakalım.
> **Öğrenci:** Ben ikiyi yapamadım. Yani yine örnekle yaptım. Bazen oluyor ama cebirselle yapamadım.
> **Öğrenci:** Bence ikinci yanlış. Çünkü yanlış olduğunu göstermek için tek örnek yeterli. Ben örnek verdim 2,3,4 ardışık 3 sayı toplayınca 9 çıktı, yani 6'nın katı değil. O yüzden yanlış diyorum.
> **Öğrenci:** Ben ikinciye doğru diyorum. Çünkü toplamı 6'nın katı olan üç ardışık tamsayı vardır diyor, yani her zaman demiyor ki. Bence sen yanlış anlamışsın. Yani şöyle düşün böyle 3 ardışık sayı var mı yok mu? Var. O zaman doğru.
> **Öğrenci:** Diğerleri gibi düşündüm ben bunu yanlış anlamışım.
> **Öğrenci:** Sen ikinciyi cebirsel olarak ne yaptın?
> **Öğrenci:** Birincinin aynısı işte 3+a, 4+a, 5+a. Bunları toplayınca 12 +3a. a'ya değer verince bir oluyor bir olmuyor. Mesela 2 verince 6 oluyor, 6'nın katı oluyor ama 3 verince 9 oluyor o da olmuyor. Bazen olur bazen olmaz. Yani ikinci doğru aslında.
> **Öğrenci:** Ben de öyle yaptım n+n+1+n+2 dedim toplamları 3n+3 çıkıyor. Şimdi n, 1 olsa 6 oluyor, n, 2 olsa 9 oluyor yani olmuyor. O zaman her zaman doğru değil ama bu şekilde 3 ardışık tam sayı varsa ikinciye doğru deriz.
> **Öğrenci:** Tamam işte şöyle açıklayabiliriz. Mesela 9 çıkıyor dedin ya 6'nın katı olması için hem 2'nin hem 3'ün katı olması lazım. 9 da tek olduğu için olmuyor. Mesela 15, 6'nın katı değil. Mesela 36 oluyor. Hem 3'ün hem 6'nın katı.
> **Öğrenci:** Şimdi benim yaptığımda a yerine 2 verince oluyor ama 3 verince olmuyor. 4 verince oluyor ama 5 verince olmuyor. Şöyle diyelim o zaman, 12 zaten 6'nın katı ya ona bakmaya gerek yok. 3a eğer a çift olursa o zaman 6'nın katı oluyor. Ama a, tek olursa mesela olmuyor.
> **Öğrenci:** O zaman örnek vermeyelim sen kendininkini yaparsın tahtada de ki a tek olursa olmuyor, çift olursa oluyor.
> **…**

Bununla birlikte öğrenciler üçüncü önermenin hiçbir zaman doğru olmadığını belirtmişlerdir. Üçüncü önermede bazı öğrencilerin aksine örnek vererek önermeyi çürüttükleri, bazı öğrencilerin cebirsel ifadeleri kullanarak hiçbir zaman doğru olmadığını gösterdikleri, bir öğrencinin de genelleyici örnek kullanarak çizdiği toplar yardımıyla hiçbir zaman doğru olmadığını gerekçelendirdiği görülmüştür. Bu durumlar *farklı çözümler sunma* sosyal normu ile *farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Turunçgiller grubunun tartışmasının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

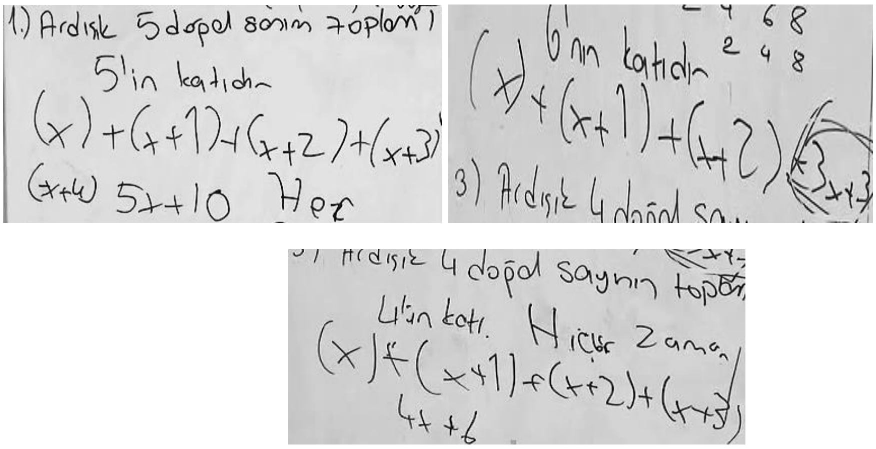
Öğrenci: Tamam ikinciyi de yaptık. Üçüncüyü ne buldunuz?
Öğrenci: Her zaman dediği için olmayan bir örnek vermek yeterli diye düşündüm ben o yüzden hiç uğraşamadım. 1,2,3,4 aldım. Toplam 10 çıktı yani yanlış diyorum.
Öğrenci: Bence de hiçbir zaman doğru değildir. Cebirselle yaptım ben. (a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)= 4a+10 oluyor. a, 3 olsun. 12 oluyor 10'la da toplayınca 22 olur. 4'ün katı olmuyor.
Öğrenci: Ben onu yuvarlaklarla yaptım. Bu üçünü 4'e tamamlayınca 4'ün katı olabilmesi için 2 tane top eksik kalıyor.
Öğrenci: Hem şekille hem cebirselle mi göstereceğiz tahtada.
Öğrenci: Eğer cebirselle anlamazlarsa şekille de gösteririz.
Öğrenci: O zaman cebirselde diyelim ki 4a hep 4'ün katı olur ama 10 ekleyince hiçbir zaman olmaz diyelim. Sen toplarla da göster istersen garanti olsun.

Önceki haftalarda olduğu gibi öğrencilerin tartışmaları *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normlarının ortaya çıktığının göstergesidir. Öğrencilerin yaptıkları çözüm sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna oldukları ve bu önermelerin neden doğru ya da yanlış olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin kanıtlarını yaparken pek çok kavram özellik ve teoremden yararlandıkları bunları ilişkilendirerek kanıtlarında kullandıkları görülmüştür. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* ve *kavrayış sağlama, sonuçları görme ve ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Aynı zamanda bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir.

Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Küçük grupların tamamının doğrudan kanıt yaparak birinci önermenin doğru olduğunu ve aksine örnek vererek üçüncü önermenin yanlış olduğunu gösterdikleri görülmüştür. Starlar grubu dışındaki diğer grupların varlık kanıt yöntemini kullanarak ikinci önermenin doğru olduğunu kanıtladıkları görülmüştür. Ancak Starlar grubunun ikinci önermede varlık niceleyici yerine evrensel niceleyici kullanıldığını düşündükleri için önermeyi aksine örnek vererek çürüttükleri görülmüştür. Grubun yaptığı bu çözüm sınıf tarafından kabul edilmemiştir. Starlar grubunun sınıf tartışmasının bir kesiti aşağıda sunulmuştur:

> **…**
> **Öğretmen:** Tamam ikinci problem nasıl?
> **Grup sözcüsü:** Biz yanlış diyoruz. Çünkü örnekle denediğimizde 3+4+5 aldığımızda 12 oluyor. Bu oluyor ama 12+13+14 olduğunda 39 çıkıyor bu olmuyor. Başka örneklerle de denediğimizde bazılarında oldu bazılarında olmadı o yüzden bu her zaman doğru değil dedik.
> **Öğrenci:** Hocam düzgün okumamışlar. İkinci de her zaman demiyor ki.
> **Grup sözcüsü:** Tamam ama işte biz olmayan bir örnek bulduk o zaman doğru olmaz. Çünkü ardışık üç tam sayının toplamı 6'nın katı diyor.
> **Öğrenci:** Hayır siz anlamamışsınız. Toplamı 6'nın katı olan üç ardışık tamsayı vardır diyor. Yani bir tane var mı yok mu ona baktınız mı?
> **Grup sözcüsü:** Hocam biz öyle düşünmüştük.
> **Öğretmen:** Peki şöyle sorayım birinci önermeyi ve ikinci önermeyi tekrar okur musunuz? Arada nasıl bir fark var.
> **Grup sözcüsü:** Hocam birinde ardışık beş doğal sayının toplamı her zaman 5'in katıdır diyor, diğerinde toplamı 6'nın katı olan üç ardışık tamsayı vardır diyor.
> **Öğretmen:** Anlamları arasında nasıl bir fark var?
> **Grup sözcüsü:** Yani birinde her zaman olacak diyor, diğerinde bir tane olması yeterli diyor. Biz yanlış anlamışız.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi sınıftaki öğrenciler farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmuşlar ve ikinci önerme için yapılan kanıtı ikna edici bulmamışlardır. Sınıf arkadaşlarının grubun iddiasını çürüterek grubun mantıksal tutarsızlıklarını ortaya çıkardıkları görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Aynı zamanda bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bununla birlikte Görsel 4.89.'da sunulduğu gibi üç önermeyi de doğru bir şekilde kanıtlayarak sınıfı ikna eden Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışmalarının bir kesiti aşağıdaki gibidir:



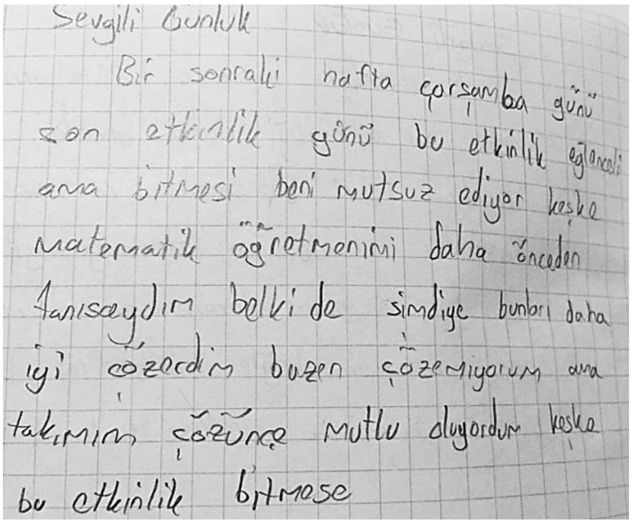
Görsel 4.89. *On birinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

Grup sözcüsü: Hocam bizim çözümümüz Turunçgillere benziyor. Bizim çözümümüz şuydu cebirsel ifade kısa öz ve net bir cevap verir. O yüzden cebirsel kullandık. Örnekle zaten kanıt yapamayız. Görsel çizerek de nereye kadar çizebiliriz diye düşündük. Birinci soru için (x)+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 5x+ 10. Bu da her zaman 5'in katıdır çünkü 5'le neyi çarparsak çarpalım 5'in katı oluyor. 10 da 5'in katı olduğu için bunların toplamı x ne olursa olsun 5'in katı oluyor.
Öğretmen: Tamam ikincide ne yaptınız?
Grup sözcüsü: Hocam ikinci de doğru. Çünkü (x)+(x+1)+(x+2)=3x+3 çıktı. Bu ardışık üç sayı çift-tek-çift ise olmuyor ama tek-çift-tek ise oluyor. Çünkü 6 çift bir sayı, çift-tek-çift olunca çiftle çiftin toplamı çift, tek ekleyince tek oldu o yüzden olmaz. O yüzden x tek olduğunda oluyor, çift olduğunda olmuyor. Hocam zaten her ne kadar örnekle kanıt yapılmasa da bir tane olan örnek bulsak bile doğru diye düşündük. Yine de cebirle yaptık. Tekle tekin toplamı çift oluyor. x çift olursa mesela 2,4, 6, 8 gibi sayılar olsa, 3x çift olur hatta 6'nın katı olur bir de 3 ekliyoruz o yüzden olmaz. O yüzden x tek olunca oluyor.
Öğretmen: Tamam üçüncüde ne yaptınız?
Grup sözcüsü: (x)+(x+1)+(x+2)+(x+3)= 4x+6 çıktı. Hiçbir zaman çünkü 4'le herhangi bir sayıyı çarptığımızda her zaman 4'ün katı çıkar. Ancak 6, 4'ün katı olmadığı için sonuç da 4'ün katı çıkmaz.
Öğrenci: Hocam üçüncüde tek bir örnek vermek yeterliydi bence bunlar biraz çözümü uzatmışlar.
Grup sözcüsü: Evet hocam öyle de yaptık biz, örnekle çürüttük ama siz neden yanlış diye soracaktınız baştan yapalım dedik.

Yukarıdaki tartışmada görüldüğü gibi öğrenciler yaptıkları kanıt ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna olmuşlardır. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Ayrıca öğrencilerin önermelerin yanlışlığını ve doğruluğunu nedenleriyle birlikte açıklayabildiği görülmektedir. Öğrencilerin kanıtlarını yaparken pek çok kavram özellik ve teoremden yararlandıkları bunları ilişkilendirerek kanıtlarında kullandıkları görülmüştür. Kanıt burada *doğru olduğuna ikna olma* ve *kavrayış sağlama, sonuçları görme ve ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Kanıt bu etkinlikte hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında öğretmen ile öğrenci arasında ya da öğrenci ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini, ayrıca öğrencilerin hatalarının farkına varıp bunları düzeltebilecekleri, tartışmaların yapıldığı bir tartışma ortamı yaratılmasını sağlamaktadır. Kanıt bu şekilde iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiştir. Değerlendirme aşamasında öğretmen sınıf tarafından paylaşılan tüm çözümleri değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını sınıfla birlikte oluşturmuştur. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Ayrıca bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

> **Öğretmen:** Aferin size birinci problemi hepiniz doğru çözdünüz. (x)+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) =5x+10 cebirsel ifadesi her zaman 5'in katıdır. Çünkü bu ifade 5.(x+2) şeklinde yazılır. x hangi doğal sayı olursa olsun 5 ile çarpıldığı için her zaman 5'in katıdır. İkinci problemi Starlar dışında hepiniz doğru çözdünüz. İkinci problemde toplamı 6'nın katı olan üç ardışık tamsayı vardır diyordu. Bu şu anlama gelir, bu şartı sağlayan en az bir durum varsa bu doğru olur. (x)+(x+1)+(x+2)=3x+3= 3.(x+1) olur. 6'nın katı olacak şekilde en az bir tane x var mı diye kontrol ediyoruz. x tek sayı olduğunda bu ifade 6'nın katı olur. O zaman bu da doğrudur. Üçüncü problemde ise her zaman 4'ün katı olduğunu iddia ediyor, o zaman olmayan bir örnek verirsek çürütmüş olur. Mesela 1+2+3 diyelim toplam 6 oldu, 4'ün katı değil. Cebirsel ifadelerle de gösterelim. (x)+(x+1)+(x+2)+(x+3)= 4x+6 bu ifade 4x +4+2 diye yazılır 4x+4 = 4(x+1) yani her zaman 4'ün katıdır; ancak 2 eklendiği için hiçbir zaman 4'ün katı değildir. Bu durumda bu yanlıştır.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerin günlüklerinden alınan bir örnek Görsel 4.90.'da sunulmuştur:

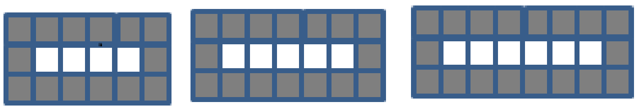


Görsel 4.90. *On birinci hafta Çalışkan Arılar grubunun sınıf tartışması*

4.4.6. On ikinci hafta öğretimine ilişkin bulgular

Sınıf uygulamalarının özetinin Tablo 4.18.'de sunulduğu on ikinci haftada öğrencilere bir örüntü problemi sunulmuştur. Öğretimin sonunda küçük grupların tamamının örüntünün genel kuralını belirleyebildikleri ve bu kuralı şekille ilişkilendirerek tümdengelimsel doğrulama yaptıkları görülmüştür.

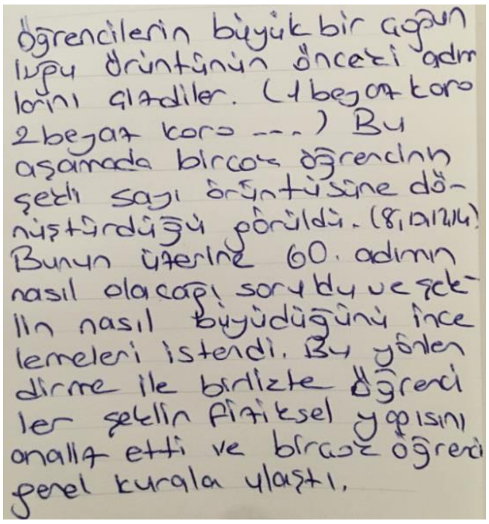
Tablo 4.18. *On ikinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

Etkinlik	
 *Ahmet şekildeki gibi beyaz karoların etrafına tek sıra halinde gri karolar döşüyor. *n tane beyaz karonun etrafına döşemek için kaç tane gri karo gereklidir?	
Etkinliğin Odağı	
*Genellemeye ulaşma *Örüntünün genel kuralını şekille ilişkilendirerek tümdengelimsel doğrulama yapma	
Kendini İkna Et Aşaması: Bireysel Çalışma	**Bireysel Çalışmayı Yönlendiren Öğretmen Soruları**
*Şekil örüntüsünün verilmeyen önceki adımlarını çizme *Şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek genel terimi bulmaya çalışma *Şekilsel muhakeme yaparak örüntünün genel kuralını belirleme	*60 tane beyaz karonun etrafına döşemek için kaç tane gri karo gerektiğini sorma *Sadece gri karo sayıları arasındaki farka odaklanarak 60.adımı nasıl bulacaklarını sorma *Şeklin nasıl büyüdüğünü sorma

Tablo 4.18. (Devam) *On ikinci hafta sınıf uygulamalarının özeti*

<table>
<tr><th colspan="2">Arkadaşını İkna Et Aşaması: Odak Küçük Grup Tartışması</th><th colspan="2">Odak Küçük Grup Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi</th></tr>
<tr><td colspan="2">* Örüntü kavramı, örüntünün genel terimini bulma bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Her iki odak grup)
*Şekilsel muhakeme yaparak örüntünün genel kuralını belirleme (Her iki odak grup)
* Örüntünün genel kuralını şekille ilişkilendirerek tümdengelimsel doğrulama yapma (Her iki odak grup)</td><td colspan="2">*6 beyaz karonun etrafına 18 gri karo döşendiği gerekçesiyle genel kuralın 3.n olduğunu iddia etme (Efsanevi Matematikçiler grubu)
*Genel kuralı 3.n olarak ifade eden arkadaşının iddiasını çürütme (Efsanevi Matematikçiler grubu)
*Şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek genel terimi bulmaya çalışma (Her iki odak grup)
*Şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmeyi örüntünün uzak adımını bulmanın zor olacağı gerekçesiyle kabul etmeme (Turunçgiller grubu)
*Örüntüyü analiz etme (Her iki odak grup)
*Şekilsel muhakeme yaparak örüntünün nasıl büyüdüğüne ilişkin iki farklı strateji ortaya koyma (Efsanevi Matematikçiler grubu)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Rakibini İkna Et Aşaması: Sınıf Tartışması</th><th>Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğrenci Düşüncesi</th><th>Sınıf Tartışmasını Yönlendiren Öğretmen Soruları</th></tr>
<tr><td colspan="2">* Örüntü kavramı, örüntünün genel terimini bulma bilgisini ve gerekli işlemsel bilgiyi doğru kullanma (Tüm gruplar)
*Örüntünün genel kuralını doğru belirleme (Tüm gruplar)
*Örüntünün genel kuralını şekille ilişkilendirerek tümdengelimsel doğrulama yapma (Tüm gruplar)</td><td>*Örüntünün genel kuralını doğrulamak için yapılan deneysel doğrulamayı kabul etmeme
* Örüntünün genel kuralını şekille ilişkilendirmelerini isteme</td><td>*Sabit kalan ve değişen karoların hangileri olduğunu sorma
*Yazdıkları kuralın doğruluğunu kanıtlamalarını isteme</td></tr>
<tr><th colspan="4">Değerlendirme Aşaması</th></tr>
<tr><td colspan="4">*Sınıf tarafından sunulan argümanlarda kullanılan tanımların, özelliklerin doğruluğunu değerlendirme
*Muhakeme yönteminin uygunluğunu değerlendirme
*Kullanılan temsil biçiminin doğruluğunu değerlendirme</td></tr>
<tr><th colspan="4">Belirlenen Kanıt İşlevleri</th></tr>
<tr><td>DOĞRULAMA</td><td>AÇIKLAMA</td><td>İLETİŞİM</td><td>SİSTEMATİKLEŞTİRME</td></tr>
<tr><td>*Doğru olduğuna ikna olma
*Doğruluğunu onaylama</td><td>*Kavrayış sağlama</td><td>*Söylem biçimini ortaya çıkarma
*Tartışma ortamı yaratma</td><td>*Uygulama</td></tr>
<tr><th colspan="2">Belirlenen Sosyal Normlar</th><th colspan="2">Belirlenen Sosyo-matematiksel Normlar</th></tr>
<tr><td colspan="2">*Açıklama ve gerekçelendirme
*İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme
*Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme
*Grubuyla düşüncelerini paylaşma
*Farklı çözümler sunma
*Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi
*Ortak sonuca ulaşma
*Anlaşılmayan noktaları sorma
*Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme
*Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma</td><td colspan="2">*Geçerli bir matematiksel kanıt sunma
*Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma
*Farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma
*Deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme
*Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme</td></tr>
</table>

Öğretmen sınıfa etkinliği sunduktan sonra bireysel çalışmaların yapılacağı kendini ikna et aşamasını başlatmıştır. Bu aşamada sınıf içinde dolaşarak öğrencilerin problemi analiz etmek için yaptıkları eylemleri gözlemlemiş ve günlüğüne not etmiştir. Öğretmenin günlüğüne yazdığı bireysel çalışmaların değerlendirmesi Görsel 4.91'de sunulmuştur:

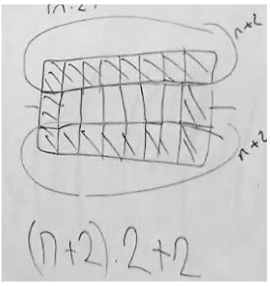

öğrencilerin büyük bir çoğun
luğu örüntünün önceki adım
larını çizdiler. (1 beyaz karo
2 beyaz karo ....) Bu
aşamada birçok öğrencinin
şekli sayı örüntüsüne dö-
nüştürdüğü görüldü. (8, 10, 12, 14)
Bunun üzerine 60. adımın
nasıl olacağı soruldu ve şek-
lin nasıl büyüdüğünü ince
lemeleri istendi. Bu yönlen
dirme ile birlikte öğrenci
ler şeklin fiziksel yapısını
analiz etti ve birçok öğrenci
genel kurala ulaştı.

Görsel 4.91. *On ikinci hafta bireysel çalışmaların değerlendirilmesine ilişkin öğretmenin günlüğü*

Öğretmenin günlüğünde belirttiği gibi öğrencilerin büyük bir çoğunluğu bireysel çalışmalarında problemi analiz etmek için önce 1 tane beyaz karonun, 2 tane beyaz karonun ve 3 tane beyaz karonun etrafına döşemek için gerekli olan gri karo sayısını incelemişler ve kâğıtlarına çizmişlerdir. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun şekil örüntüsünü doğrudan sayı örüntüsüne dönüştürme eğiliminde oldukları görülmüştür. Bunun üzerine öğretmenin bu şekilde 60. adımı nasıl bulacaklarını sorması ve şeklin nasıl büyüdüğünü incelemelerini istemesi üzerine öğrencilerin şekilsel muhakeme (her adımda şeklin fiziksel yapısını analiz etme ve şeklin nasıl büyüdüğüne ilişkin çıkarımda bulunma (Tanışlı ve Yavuzsoy-Köse, 2020)) yapmaya yöneldikleri görülmüştür. Bu şekilde birçok öğrencinin bireysel çalışmasında örüntünün genel kuralına ulaşabildiği; ancak bazı öğrencilerin de sayı örüntüsüne dönüştürme eğilimlerinin devam ettiği belirlenmiştir.

Küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşamasında her iki odak grubun örüntüdeki fiziksel yapıyı analiz ederek genel kuralı belirleyebildikleri ve genel kuralı şekille ilişkilendirerek tümdengelimsel doğrulama yapabildikleri görülmüştür.

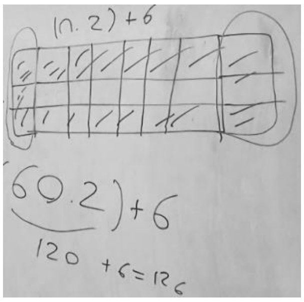
Bununla birlikte Efsanevi Matematikçiler grubunda öğrencilerin iki farklı şekilde şekli analiz ettikleri görülmüştür. Bu genelleme yollarından biri Görsel 4.92.'de sunulmuştur. Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarının bu kesiti aşağıda verilmiştir:



Görsel 4.92. *On ikinci hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışması 1*

Öğrenci: Ben anlatayım mı önce? Şimdi ben üç karo olunca kaç gri karo olur diye baktım 12 buldum. Sonra şöyle düşündüm. 6 beyaz karo var ya, etrafını kapladığımızda altta ve üstte iki fazlası oluyor. İki tane yanlarda oluyor. Beş karo olduğunda da altta ve üstte 7'şer tane var yanlarda da 2 tane. O zaman 60 tane olunca 62 tane üstte olacak 62 tane de altta olacak yanlarda da birer birer şunlar kalırdı yani 126 olur.
Öğrenci: Yani formülü söyle n'li olan formül ne?
Öğrenci: Şimdi şöyle yaptım. n+2 tane altta, n+2 tane üstte olacak bir de yanlarda 2 tane dedim o zaman (n+2).2+2 olur.
Öğrenci: Hayır yanlış yapmışsın sen n+2 demişsin ya şimdi beyaz karo n oluyor n+2 dediğin ne?
Öğrenci: Şu yanlarda var ya onları dedim.
Öğrenci: Bence yanlış şöyle olacak ben şimdi beyaz karoların toplamından altta ve üstte olacağı için n.2 dedim şu yanlardaki 6'yı da ekledim. n.2+6 oldu. Senin ki bana uymadı.
Öğrenci: Aslında Nefise'nin ki de doğru olabilir bence Yağız. Tamam ben de senin dediğin gibi yaptım, bizim yaptığımızda n.2+6 de doğru ama bu da doğru olabilir. Biz direkt bunu aldık beyazın sadece altını ve üstünü, o alttaki ve üstteki karoları ful almış.
Öğrenci: Ben zaten örnek vererek de yaptım. Doğru çıktı formülüm. Mesela 1'le 2'yle de yaptım. Hepsinde formül doğru çıktı.
Öğrenci: Dur bizim de yaptığımızı karolarla yap da kontrol edelim, ben 2 beyaz yaptım onu yapar mısın?
Öğrenci: Tamam. Şimdi 2+2=4 yapar 4.2=8 8+2 =10
Öğrenci: Evet formülü doğru çıkıyor ben de 10 bulmuştum. Seninki de doğru ama farklı sadece.

Efsanevi matematikçiler grubunun küçük grup tartışmalarında ortaya çıkan genelleme yollarından bir diğeri de Görsel 4.93.'te sunulmuş ve bu grubun farklı genelleme yolları üzerine tartışmaları aşağıda verilmiştir:



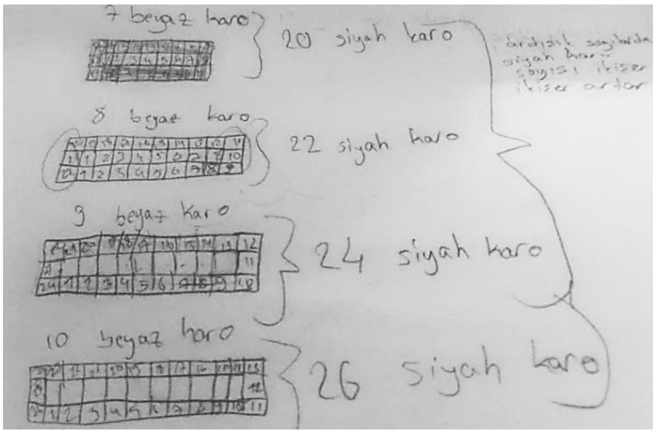
Görsel 4.93. *On ikinci hafta Efsanevi Matematikçiler grubunun küçük grup tartışması 2*

Öğrenci: Ben şöyle yaptım şu kenarlardaki 3'er taneyi ayırdım. Beyaz karoların üstünde ve altında beyaz karo kadar gri var dedim. Bu yüzden ilk başta 2.x yaptım sonra bunların yanlarını kaplamak için 3'er tane daha gerektiği için +6 yaptım.
Öğrenci: Benimki de seninkiyle aynı formülümüz. Burası n kadar olacak yani altta ve üstte n kadar olacak yanlarda da 3 ve 3 daha 6 yani 2x+6 ya da işte 2n+6. 60 olunca da zaten 126 çıkıyor.
Öğrenci: Aslında ben problemi görür görmez çözdüm ama sonra dedim ki bir kontrol edeyim o yüzden bir beyaz olduğunda 2 beyaz olduğunda ne oluyor onu da buldum.
Öğrenci: Ben de denedim onları da çizdim tek tek emin olmak için.
Öğrenci: İki tane formül bulduk diyelim.
Öğrenci: Ama bak biz +6 ekliyoruz ya Nefise'nin yaptığı çok garip duruyor.
Öğrenci: Bence sizinki de doğru ama benim ki de doğru. Ama neden öyle biliyor musun şimdi bak kaç tane beyaz varsa onun iki fazlasını alıyoruz bunlar altta ve üstteki griler oluyor. Sonra kalan 2'yi ekliyoruz.
Öğrenci: Bence burada doğru iki bakış açısı var biz bu kenarları çıkarıp bakmışız sen altı ve üsttün tamamını alıp bakmışsın.
Öğrenci: Evet siz öyle bölmüşsünüz parçalara, ben böyle bölmüşüm. Siz 6 karoyu direkt çıkararak bakmışsınız.
Öğrenci: Tamam ikisini de anlatalım.
Öğrenci: Aslında şimdi fark ettim Nefise'ninkiyle bizimki aynı ikisi de doğru. Çünkü o (n+2).2 yapmış ya burada 2 her ikisiyle de çarpılacak 2n+4 olacak sonra da 2 ekleyecek. Yani 2n +6 olacak. Yani ikisi de aynı ve doğru.
Öğrenci: Aaa evet aynı formülmüş. Sadece farklı şekillerde bölmüşüz o kadar. Tamam ikisini de anlatalım.
Öğrenci: Bakın Nefise o şekilde anlamış ona bu mantıklı geliyor bize de bu daha mantıklı geliyor. Sınıfta Nefise'ninkini daha iyi anlayanlar olabilir o yüzden ikisini de anlatalım.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi öğrencilerin eylemleri *işbirliği yaparak beraber çözüm üretme, herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi, anlaşılmayan noktaları sorma, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma, grup üyelerini ikna etme* sosyal normları ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesidir. Tartışmada dikkat çekici bulgulardan biri farklı öğrencilerin şekli farklı şekillerde analiz ederek farklı genelleme yolları keşfetmeleri olmuştur. Tartışmada görüldüğü gibi bir öğrenci şekli analiz ederken n. adımda (n+2) tane altta, (n+2) tane üstte ve 2 tane yanlarda gri karo olduğunu ve genel kuralın da (n+2).2+2 olarak bulduğunu belirtmiştir. Grubun diğer öğrencilerinin ise şekli analiz ederken n. adımda n tane beyaz karonun üstünde ve altında toplam 2n tane ve 6 tane de yanlarda gri karo olduğunu ve genel kuralı da 2n+6 olarak ifade ettikleri belirlenmiştir. Bu durum *farklı çözümler sunma* sosyal normunun ve *farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Tartışmanın ilk bölümünde bu öğrenciler arasında anlaşmazlık olsa da daha sonra şekli farklı şekillerde analiz edebileceklerini fark ettikleri ve ayrıca bu iki genel kuralın birbirine eşit olduğunu gördükleri belirlenmiştir. Efsanevi Matematikçiler grubunda bir öğrencinin 6 beyaz karonun etrafına 18 gri karo döşendiği gerekçesiyle genel kuralı 3.n olarak ifade ettiği görülmüştür. Bunun üzerine arkadaşlarının örüntünün önceki adımlarındaki beyaz ve gri karo sayıları arasındaki ilişkiye dikkat çektikleri ve öğrencinin bu iddiasını çürüttükleri görülmüştür. Kanıt burada öğrencinin kendi tutarsızlığını fark etmesini sağlayarak *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmektedir. Aynı zamanda bu durum *kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma* sosyal normu ile *kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Tartışmanın bu kesiti aşağıda sunulmuştur:

> **…**
> **Öğrenci:** Sen nasıl yaptın anlat.
> **Öğrenci:** Benimki hepinizden farklı bence. Ben Ahmet'in yaptığına göre 6 beyaz olduğunda 18 olmuş ya o yüzden 3 katı dedim.
> **Öğrenci:** Tamam 6 olunca 3 katı çıkıyor da diğerlerinde olmuyor. Baksana 5 beyaz karo olunca 16 gri karo var. 4 beyaz olunca 14 gri karo var senin ki olmuyor.
> **Öğrenci:** Tamam benim ki yanlış fark ettim zaten sizinkileri görünce.
> **…**

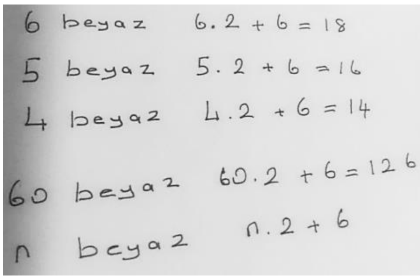
Her iki odak grupta birer öğrencinin arkadaşlarını verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek şeklin fiziksel yapısına dayalı sayısal ilişkiler kurmaya teşvik ettiği; ancak bu durumun arkadaşları tarafından kabul edilmediği, uzak adımı bulabilmek için şeklin fiziksel yapısının analiz edilmesi gerektiğinin farkında oldukları görülmüştür. Turunçgiller grubunun tartışmasının bir bölümünde bir öğrencinin Görsel 4.94.'te sunulduğu gibi şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürerek, terimler arasındaki sabit farkı bir önceki terime eklediği ve bu şekilde genel terimi bulmaya çalıştığı belirlenmiştir. Turunçgiller grubunun tartışmasının bu bölümü aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.94. *On ikinci hafta Turunçgiller grubunun küçük grup tartışması*

> **…**
> **Öğrenci:** Benimki de biraz farklı 7 beyaz olunca 20 dedim, 8 beyaz olunca 22 dedim, 9 beyaz olunca 24 dedim. Yani hep 2'şer artıyor mesela 10 beyaz olunca 26 olur diye düşündüm çizdim gerçekten 26 oldu. Sonra 3 beyazı, 2 beyazı, 1 beyazı da yaptım. Hep 2'şer artıyor.
> **Öğrenci:** Tamam onları biz de yaptık da senin yaptığın gibi 2, 2 artırarak nasıl bulacağız 60 beyazı. Tek tek sayacak mısın?
> **Öğrenci:** Bir de bence bu kanıt olmaz. Örnek vermek gibi düşün bunu. n'liyi bulamazsın bu şekilde.
> **Öğrenci:** Ama senin bu yaptığını da bizimkini test etmek için kullanırız. Mesela 7 beyaz olunca 20 bulmuş ya bizim formülde de 20 çıkıyor.
> **…**

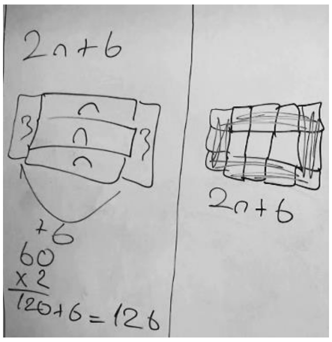
Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durum *ortak sonuca ulaşma* sosyal normunun göstergesidir. Küçük grup tartışmalarının ardından öğretmen sınıf tartışmasının yapıldığı rakibini ikna et aşamasını başlatmıştır. Öğretmen bütün sınıfın, her bir grup sözcüsünü, sözcülerin sözü bitene kadar dinlemesini sağlamıştır. Bu durum sınıfta *açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme* sosyal normunun oluşmasını sağlamıştır. Küçük grupların tamamının örüntünün genel kuralını doğru belirledikleri görülmüştür. Starlar grubunun sınıf tartışmasında grup sözcüsü Görsel 4.95.'te sunulduğu gibi adımlardaki değişen ve değişmeyen şekilleri belirlemiş ve bunları sayılarla ilişkilendirerek yazmıştır. Öğrencilerin şekilsel muhakemelerini sayısal ilişkiye dönüştürebildikleri ve örüntünün genel kuralını doğru belirledikleri görülmektedir. Starlar grubunun sınıf tartışmalarının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.95. *On ikinci hafta Starlar grubunun sınıf tartışması 1*

Grup sözcüsü: Hocam 6 tane beyaz karo olunca üstünde ve altında da 6 tane oluyordu. Sonra yanlarda da 3 ve 3, 6 tane karo olacağı için 6.2+6=18. Sonra 5 tane beyaz karo olunca üstünde ve altında da 5 tane oluyordu. Sonra yanlarda da 3 ve 3 toplam 6 tane var. Yani 5.2+6=16. 4 tane beyaz karo olunca üstünde ve altında da 4 tane oluyordu. Sonra yanlarda da 3 ve 3, 6 tane karo olacağı için 4.2+6= 14 oldu. 60'a geldiğimizde 60 tane beyaz olduğunda 60'ı 2'yle çarpıyoruz 120 oluyor. Yine 6'yı ekliyoruz 126. n tane beyaz karo olduğunda yani n. adımda n.2 +6 yaptık.
Öğretmen: Tamam peki önce şunu sorayım burada neler değişiyor neler sabit kalıyor?
Grup sözcüsü: 6'lar hep aynı kalıyor, ama n değişiyor, mesela 6. adımda farklı 5'te farklı.
Öğretmen: Peki bu yazdığınız kuralın her zaman doğru olduğunu nasıl kanıtlarsınız?
Grup sözcüsü: Yani hocam şimdi n.2 +6 yaptık ya denediğimizde oluyor. Mesela n, 6 olsa 18 oluyor saydığımızda da 18 olur. n, 5 olsa 16 olur şekilde saydığımızda da 16 olur.
…

Tartışmada görüldüğü gibi örüntünün genel kuralını şekille ilişkilendirerek doğrulama yapmadıkları ve deneyerek doğrulama yaptıkları konusunda grubu eleştirmişlerdir. Bu durum *deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bunun üzerine grup sözcüsünün Görsel 4.96.'da sunulduğu gibi genel kuralı şekille ilişkilendirerek doğrulama yaptığı görülmüştür. Bu durumlar *açıklama ve gerekçelendirme* sosyal normu ile *yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Starlar grubunun sınıf tartışmasının bu kesiti aşağıda sunulmuştur:



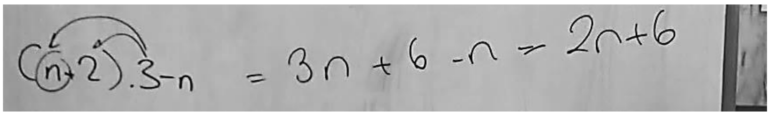
Görsel 4.96. *On ikinci hafta Starlar grubunun sınıf tartışması 2*

…
Öğretmen: İkna oldunuz mu?
Öğrenci: Değer vermeden nasıl ulaşabilirsiniz? Çünkü bence bu tam kanıt değil. Yani bu formülün tam doğru olduğunu nasıl söylersiniz?
Grubun diğer üyesi: Hocam ben Yağıza bir şey sorabilir miyim, sürekli değer vermeden nasıl bulabilirsiniz diye soruyor o cebirsel ifade zaten değer vermeden yapılmış demek değil mi?
Öğrenci: Hayır ama siz şey dediniz. Siz onlarla deneyerek cebire ulaştınız. Hocam sanki örneklerle bu sonuca ulaşmışlar gibi geldi. Hocam zaten tüm gruplar bu sonucu bulmuş gibi görünüyor biz sadece kuralın açıklanmasını istiyoruz.
Grubun diğer üyesi: Ama kanıt yapmak için önce örnekle deneyebiliriz.
Öğrenci: Tamam herkes kâğıdında örnekle denemiştir zaten tahtada daha iyi bir açıklama yapmak gerekiyor.
Öğrenci: Az önce Turunçgillerin yaptığı gibi n tane olduğunda ne olacağını göstermelisiniz o cebirsel ifadenin kanıtı. Hocam biz tam olarak neden örnek verdiniz demiyoruz, herkes problemi anlamak için örnek verebilir; ancak bu cebirsel ifadeyi kanıtlamanızı istedik. Hocam biz de örnek verdik problemi anlamak için ama örnekle o cebirsel ifadeyi kanıtlayamadılar ben onu diyorum. Sadece örnek verdiler.
Öğretmen: Yani Yağız diyor ki siz bize 4 beyaz karo olduğunda, 5 beyaz karo olduğunda, 6 beyaz karo olduğunda ne olacağını söylüyorsunuz bunun yerine şekli nasıl analiz ettiğinizi açıklayın diyor.
Grup sözcüsü: Tamam çizebilirim, n tane beyaz karo olunca üstünde ve altında n tane siyah karo oluyor kenarlarda da 6 tane oluyor. Yani 2n+6 oluyor.
Öğrenci: En başta böyle açıklasalardı daha iyi olurdu.

Yukarıdaki tartışmadan da görüldüğü gibi kanıt bu problemde hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir. Bütün gruplar çözümlerini sunduktan sonra değerlendirme aşamasına geçilmiş, öğretmen grupların çözümlerini tek tek değerlendirmiş ve sınıfın ortak kanıtını oluşturmuşlardır. Kanıt burada bu varsayımın *doğruluğunun onaylanması* işlevini görmüştür. Bu durum *geçerli matematiksel kanıt sunma* sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Öğretmenin değerlendirme aşamasındaki açıklaması aşağıda sunulmuştur:

Öğretmen: Tamam bütün gruplar neredeyse aynı çözümü yaptınız. n tane beyaz karo olunca etrafını kaplamak için 2n+6 gri karo olduğunu buldunuz. Burada n beyaz karo sayısı, 1'den başladığı için n'nin pozitif tam sayı olduğunu söylediniz. n tane beyaz karo olduğunda 2n+6 tane gri karo olduğundan nasıl emin olabiliyorsunuz diye sorduğumda bazılarınız problemdeki örnekleri kullanarak yaptınız; ancak açıklayıcı birkaç farklı çözüm de vardı. Burada önemli olan verilen şekilleri doğru analiz edebilmekti. Peki bu şekli daha farklı nasıl analiz edebiliriz?

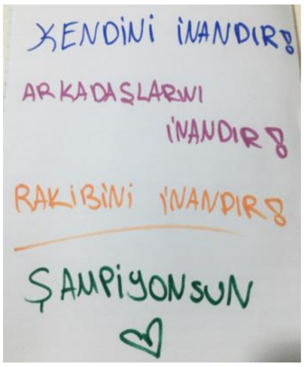
Değerlendirmede görüldüğü gibi öğretmen şeklin şimdiye kadar iki farklı şekilde analiz edildiğini bunlardan farklı olarak nasıl analiz edilebileceğini sormuştur. Bunun üzerine bir öğrenci Görsel 4.97.'de sunulduğu gibi şekli farklı bir şekilde analiz ederek üçüncü stratejiyi ortaya koymuştur:



Görsel 4.97. *On ikinci hafta değerlendirme aşaması*

Öğrenci: Hocam benim farklı bir çözümüm var. (n+2).3–n de diyebiliriz. Çünkü n+2 alttaki karoların tamamı oluyor, ortada ve üstte de olduğu için 3'le çarpıyoruz. Ortadaki beyazlar gereksiz olduğu için n tane beyaz karoyu çıkarıyoruz.
Öğretmen: Tamam bakalım doğru mu (n+2).3 –n = 3n +6-n=2n +6.
Öğrenci: Aynı sonuç oluyor.

Bununla birlikte bu uygulamanın ardından öğrencilerin günlükleri incelenmiş ve öğrencilerden birinin günlüğüne "*Bitmesine çok üzüldüğüm bir uygulama oldu. Bu uygulamanın bana katkıları olduğundan eminim. Başta zor gibi görünüyordu ama eğlenceli ve kolaydı. Bana katkılarından birisi de kamera karşısında konuşmak oldu.*" yazdığı görülürken, başka bir öğrencinin günlüğünden alınan örnek 4.98.'de sunulmuştur:



Görsel 4.98. *On ikinci hafta öğrenci günlüğü örneği*

4.5. Son Test Sonuçlarına İlişkin Bulgular

Son test sonuçlarına ilişkin bulgular sunulurken, ön testte olduğu gibi problemler/önermeler kendi aralarında problemin/önermenin çözümünde kullanılması gereken kanıt türüne göre ayrılmış, "Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren problemler/önermeler", "Aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermeler" ve "Tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önerme" olarak ele alınmıştır. Son problem olan kanıt değerlendirme problemi ise tek başına ele alınmıştır.

4.5.1. Son testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren problemlere/önermelere ilişkin bulgular

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren problemler/önermeler sayı ve geometri problemleri/önermeleri olarak iki ayrı başlık altında ele alınmıştır.

4.5.1.1. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine/önermesine ilişkin son test bulguları

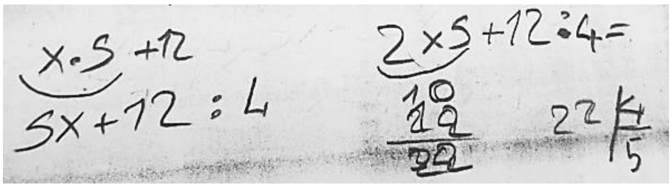
Ön testte de belirtildiği gibi Problem 1 (*P.1: Ali bir oyun bulur. Bir tam sayı alır ve 5 ile çarpar, sonra 12 ekler. Daha sonra başlangıçtaki sayıyı çıkarır ve sonucu 4'e böler. Cevabın, her zaman ilk sayıdan 3 fazla olduğunu fark eder. Ayşe ise bunun hep bu şekilde sonuçlanacağını düşünmediği için ilk sayıdan başka bir sayı dener. Ali ve Ayşe sonucun her zaman ilk sayıdan 3 fazla olacağına karar verirler. Sence haklılar mı? Bir arkadaşını sonucun her zaman ilk sayının üç fazlası olacağına nasıl ikna edersin*?) ve Önerme 2b (*Ö.2b: İki tek sayının toplamı çifttir.*) doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi ve önermesidir. Öğrencilerin bu problem ve önermenin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu problem ve önerme için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.19.'da verilmiştir:

Tablo 4.19. *Öğrencilerin son test Problem 1 ve Önerme 2b'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Problemin/Önermenin Yapısının Anlaşılması	Problemi/Önermeyi Anlama	**P.1** % 90,3 (28 kişi)	
		Ö.2b % 96,7 (30 kişi)	
	Problemi/Önermeyi Anlamama **P.1** % 9,6 (3 kişi) **Ö.2b** % 3,2 (1 kişi)	Problemi/ Önermeyi Tekrar Yazma	**P.1** % 3,2 (1 kişi)
			Ö.2b % 3,2 (1 kişi)
		Problemdeki/Önermedeki Verileri Eksik Kullanma	**P.1** % 6,4 (2 kişi)
Probleme/Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	**P.1** % 6,4 (2 kişi)	
		Ö.2b % 35,4 (11 kişi)	
	Cebirsel Strateji **P.1** % 32,2 (10 kişi) **Ö.2b** % 51,6 (16 kişi)	İşlem Hatası Yapma	**P.1** % 9,6 (3 kişi)
	Hem Aritmetiksel Hem Cebirsel Strateji **P.1** % 51,6 (16 kişi) **Ö.2b** % 9,6 (3 kişi)	İşlem Hatası Yapma	**P.1** % 9,6 (3 kişi)
Muhakeme	Deneysel Doğrulama **P.1** % 6,4 (2 kişi) **Ö.2b** % 22,5 (7 kişi)	Bir Örnekle Deneme	**P.1** % 6,4 (2 kişi)
		Birden Fazla Örnekle Deneme	Rastgele Örnek Seçme **Ö.2b** % 22,5 (7 kişi)
	Tümdengelimsel Muhakeme **P.1** % 64,5 (20 kişi) **Ö.2b** % 74,1 (23 kişi)	Görsel Kanıt Yapma	**Ö.2b** % 12,9 (4 kişi)
		Doğrudan Kanıt Yapma	**P.1** % 64,5 (20 kişi)
			Ö.2b % 61,2 (19 kişi)

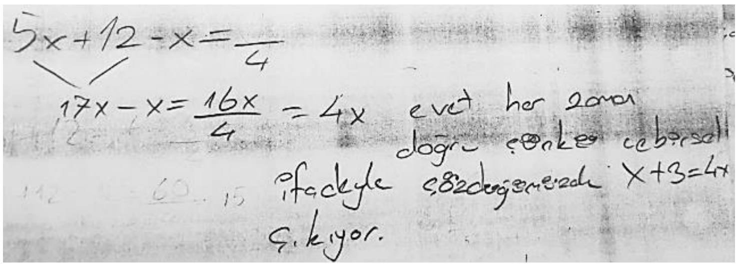
Tablo 4.19.'da görüldüğü gibi, problemi/önermeyi anlamayan öğrenciler için "problem cümlesini/önermeyi tekrar yazma" ve "problemdeki/önermedeki verileri eksik kullanma" olmak üzere iki farklı durumun olduğu saptanmıştır. Problemi/önermeyi anlayan öğrencilerin "aritmetiksel strateji", "hem aritmetiksel hem cebirsel strateji" ve "cebirsel strateji" olmak üzere üç farklı strateji kullanarak problemi/önermeyi çözmeye çalıştıkları görülmektedir. Bu öğrencilerin muhakemeleri incelediğinde ise muhakemelerinin "deneysel doğrulama" ve "tümdengelimsel muhakeme" olmak üzere iki farklı şekilde olduğu görülmüştür. Öğrencilerin bu problem ve önerme için yaptıkları çözümler genel olarak değerlendirildiğinde problemi/önermeyi anlama aşamasında başarılı oldukları söylenebilir. Öğrencilerin bu soruları çözmek için kullandıkları stratejiler incelendiğinde ağırlıklı olarak cebirsel strateji ya da hem cebirsel hem de aritmetiksel strateji kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde ise büyük bir çoğunluğun tümdengelimsel muhakeme yaparak görsel ya da doğrudan kanıt yaptığı belirlenmiştir.

Tablo 4.19. incelendiğinde Problem 1'de öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun problemi anladığı görülürken problemi anlamayan 3 öğrenciden birinin problem cümlesini tekrar yazdığı, 2'sinin ise problemdeki verileri eksik kullandığı belirlenmiştir. Verileri eksik kullanan öğrencilerden biri olan Mert, Görsel 4.99.'da görüldüğü gibi bir sayı alıp 5 ile çarpmış, 12 eklemiş; ancak başlangıçtaki sayıyı çıkarmayı ihmal ederek sonucu 4'e bölmeye çalıştığı için problemi çözememiştir:



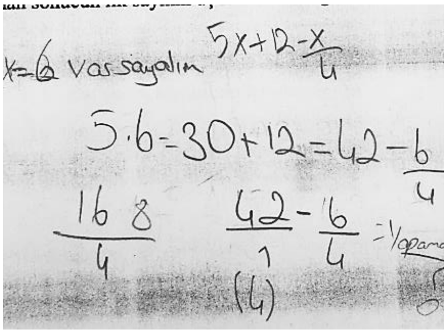
Görsel 4.99. *Mert'in son test Problem 1'de çözümü*

Problemi anlayan öğrencilerin yaptıkları çözümler incelendiğinde bu öğrencilerin büyük çoğunluğunun problemi çözerken cebirsel ya da hem cebirsel hem de aritmetiksel strateji kullandığı görülmektedir. Cebirsel strateji kullanan 10 öğrenciden 3'ünün işlem hatası yaptıkları için problemi çözemedikleri belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan İrem cebirsel ifadelerde toplama işleminde benzer olmayan terimleri toplayarak işlem hatası yapmış, bu nedenle problemi doğru yanıtlayamamıştır. İrem'in yaptığı çözüm Görsel 4.100.'de sunulmuştur:



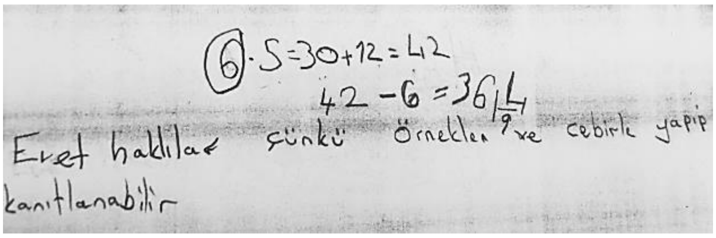
Görsel 4.100. *İrem'in son test Problem 1'de çözümü*

Hem cebirsel hem de aritmetiksel strateji kullanan 16 öğrenciden 3'ünün işlem hatası yaptığı görülmektedir. Bu öğrencilerden Azra'nın Görsel 4.101.'de sunulduğu gibi bir sayının 5 katını aldığı, 12 eklediği ve sadece problemde çıkarılması istenen başlangıçtaki sayıyı 4'e böldüğü görülmektedir. Azra hem cebirsel stratejisinde hem de deneysel doğrulamada aynı hatayı yaptığı için sonuca ulaşamamıştır:



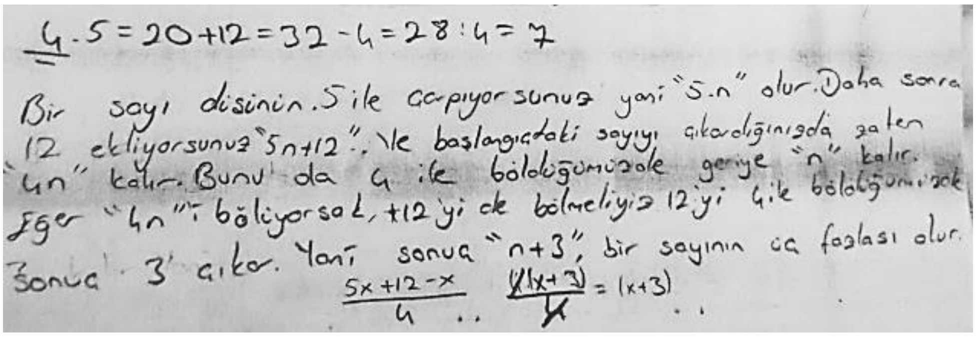
Görsel 4.101. *Azra'nın son test Problem 1'de çözümü*

Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 2 öğrencinin bir örnekle deneysel doğrulama yaptığı görülmektedir. Bu öğrencilerden Berat, Görsel 4.102.'de sunulduğu gibi bir örnekle doğrulama yaptıktan sonra sonucun her zaman ilk sayının 3 fazlası olması konusunda haklı olduklarını ve bunun cebirsel ifadelerle de kanıtlanabileceğini belirtmesine karşın doğrudan kanıt yapmamıştır:



Görsel 4.102. *Berat'ın son test Problem 1'de çözümü*

Problem 1'de, 20 öğrencinin tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yaptığı görülmektedir. Bu öğrencilerin çoğu hem aritmetiksel hem de cebirsel strateji kullanarak problemi çözmüşlerdir. Bu öğrenciler önce örneklerle doğrulama yapmış, ardından cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıtlarını tamamlamışlardır. Bu öğrencilerden biri olan Seher'in önce 4 sayısı ile deneysel doğrulama yaptığı, sonra tümdengelimsel muhakeme ile cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıt yaptığı görülmüştür. Seher'in çözümü Görsel 4.103'te sunulmuştur:



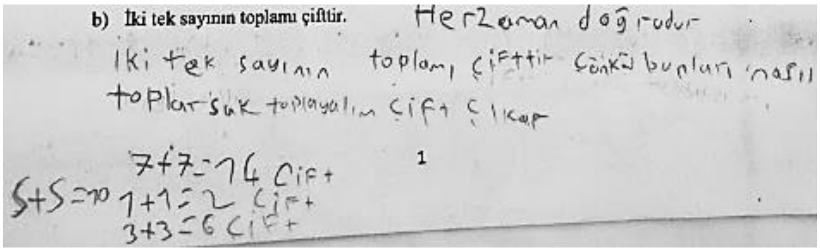
4.5=20+12=32-4=28:4=7

Bir sayı düşünün. 5 ile çarpıyorsunuz yani "5.n" olur. Daha sonra 12 ekliyorsunuz "5n+12". İle başlangıçtaki sayıyı çıkardığınızda zaten "4n" kalır. Bunu da 4 ile böldüğümüzde geriye "n" kalır. Eğer "4n"i bölüyorsak, +12'yi de bölmeliyiz 12'yi 4 ile böldüğümüzde sonuç 3 çıkar. Yani sonuç "n+3", bir sayının üç fazlası olur.

$\frac{5x+12-x}{4}$ .. $\frac{\cancel{4}(x+3)}{\cancel{4}} = (x+3)$

Görsel 4.103. *Seher'in son test Problem 1'de çözümü*

Önerme 2b'de ise öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun önermeyi anladığı görülürken, önermeyi anlamayan bir öğrencinin önermeyi tekrar yazdığı görülmektedir. Önerme 2b'de çözüm stratejileri incelendiğinde, öğrencilerin yaklaşık %52'sinin cebirsel strateji kullandıkları görülmektedir. Bununla birlikte öğrencilerden 3'ünün hem aritmetiksel hem de cebirsel strateji kullandığı, 11'inin ise sadece aritmetiksel strateji kullandığı saptanmıştır. Bu önerme için öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, deneysel doğrulama yapan 7 öğrencinin olduğu, deneysel doğrulamalarında birden fazla örnek kullandıkları ve bu örnekleri de rastgele seçtikleri belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Umut'un Görsel 4.104.'te sunulduğu gibi rastgele seçtiği örneklerle doğrulama yaptığı ve "*Çünkü bunları nasıl toplarsak toplayalım çift çıkar.*" şeklinde gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir:



b) **İki tek sayının toplamı çifttir.** Her zaman doğrudur

İki tek sayının toplamı çifttir çünkü bunları nasıl toplarsak toplayalım çift çıkar

7+7=14 çift

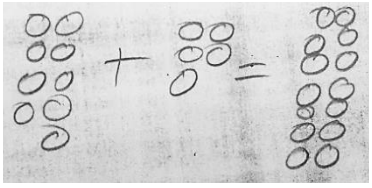
1

5+5=10 1+1=2 çift

3+3=6 çift

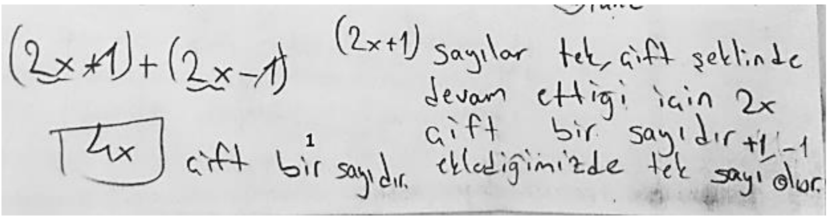
Görsel 4.104. *Umut'un son test Önerme 2b'de çözümü*

Önerme 2b'de, öğrencilerin yaklaşık %74'ünün tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülmüştür. Bu öğrencilerden 4'ünün görsel kanıt yaptığı, 19'unun ise doğrudan kanıt yaptığı belirlenmiştir. Görsel kanıt yapan öğrencilerden biri olan İrem, kullandığı genelleyici örnekle *"Her zaman doğru çünkü bir tek sayıyı 2'şerli gruplandırdığımızda 1 artıyor ve iki tek sayıyı topladığımızda arta kalan 1'ler de* *toplanıp çift oluyor."* şeklinde gerekçelendirme yapmıştır. İrem'in çözümü Görsel 4.105.'te sunulmuştur:



Görsel 4.105. *İrem'in son test Önerme 2b'de çözümü*

Önerme 2b'de doğrudan kanıt yapan öğrencilerin büyük çoğunluğunun cebirsel ifadeleri kullanarak kanıt yaptığı belirlenirken, bazılarının önce örneklerle doğrulama yaptığı sonra cebirsel ifadeleri kullanarak kanıt yaptıkları görülmektedir. Kanıt yapan öğrencilerden bazılarının iki çift sayıyı aynı çift sayı şeklinde aldığı (2n+1 ve 2n+1), bazılarının ardışık çift sayıları (2n+1 ve 2n-1) kullandığı, bazılarının farklı çift sayıları (2m+1 ve 2n+1) kullandığı görülmektedir. Ardışık çift sayıları kullanmayı tercih eden Eylül'ün çözümü örnek olarak Görsel 4.106.'da sunulmuştur:



Görsel 4.106. *Eylül'ün son test Önerme 2b'de çözümü*

4.5.1.2. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerine/problemine ilişkin son test bulguları

Önerme 2f (*Ö.2f: Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan ve bir açısının ölçüsü 90^o olan bütün dörtgenler dikdörtgendir.*), Önerme 2g (*Ö.2g: Her kare bir paralelkenardır.*), Önerme 2h, (*Ö.2h: Karşılıklı kenarları paralel olan bütün dörtgenler paralelkenardır.*), Önerme 2i, *(Ö.2i: Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenler paralelkenardır.)* önermeleri ile Problem 3 *(P.3: Bir dik üçgende dar açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?)* öğrencilerin doğrudan kanıt yapmalarını gerektiren geometri önermeleri/problemidir. Öğrencilerin bu önermeleri doğrulamak ve Problem 3'ü çözmek için yaptıkları çözümler incelendiğinde ön testte olduğu gibi kodlar arasındaki uyumdan dolayı önermeler birlikte ele alınırken Problem 3 tek başına ele alınmıştır. Öğrencilerin Önerme 2f, Önerme 2g, Önerme 2h ve Önerme 2i'nin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile önermeler için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.20.'de verilmiştir:

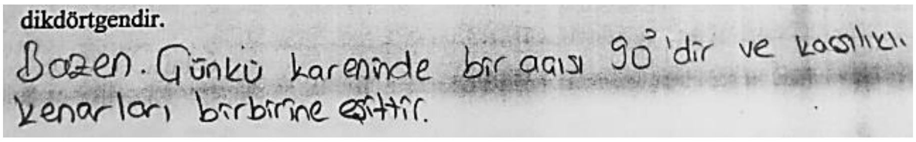
Tablo 4.20. *Öğrencilerin son test Önerme 2f, Önerme 2g, Önerme 2h ve Önerme 2i'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	**Ö.2f** % 90,3 (28 kişi)	
		Ö.2g % 77,4 (24 kişi)	
		Ö.2h % 70,9 (22 kişi)	
		Ö.2i % 70,9 (22 kişi)	
	Önermeyi Anlamama **Ö.2f** % 9,6 (3 kişi) **Ö.2g** % 22,5 (7 kişi) **Ö.2h** % 29 (9 kişi) **Ö.2i** % 29 (9 kişi)	Önermeyi Yanıtsız Bırakma	**Ö.2f** % 9,6 (3 kişi)
			Ö.2g % 16,1 (5 kişi)
			Ö.2h % 25,8 (8 kişi)
			Ö.2i % 19,3 (6 kişi)
		Önermeyi Tekrar Yazma	**Ö.2g** % 6,4 (2 kişi)
			Ö.2h % 3,2 (1 kişi)
			Ö.2i % 9,6 (3 kişi)
Muhakeme	Kapsadığı Dörtgeni Aksine Örnek Vererek Hatalı Gerekçelendirme	Hatalı Niceleyici Kullanma	**Ö.2f** % 9,6 (3 kişi)
		Hatalı Niceleyici Kullanma	**Ö.2h** % 9,6 (3 kişi)
		Ö.2i % 3,2 (1 kişi)	
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme	Açı- paralellik bilgisi eksikliği	**Ö.2f** % 6,4 (2 kişi)
			Ö.2i % 3,2 (1 kişi)
	Prototip Çizim Üzerinde Sembollerle Gerekçelendirme	**Ö.2f** % 12,9 (4 kişi)	
		Ö.2g % 9,6 (3 kişi)	
		Ö.2h % 6,4 (2 kişi)	
		Ö.2i % 12,9 (4 kişi)	
	Tümdengelimsel Muhakeme **Ö.2f** % 61,2 (19 kişi) **Ö.2g** % 67,7 (21 kişi) **Ö.2h** % 54,8 (17 kişi) **Ö.2i** % 51,6 (16 kişi)	Tanım Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2g** % 38,7 (12 kişi)
			Ö.2h % 16,1 (5 kişi)
			Ö.2i % 29,0 (9 kişi)
		Özellik Bilgisine Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2f** % 61,2 (19 kişi)
			Ö.2g % 29,0 (9 kişi)
			Ö.2h % 19,3 (6 kişi)
			Ö.2i % 3,2 (1 kişi)
		Kapsadığı Dörtgene Dayalı Gerekçelendirme	**Ö.2h** % 19,3 (6 kişi)
			Ö.2i % 19,3 (6 kişi)

Tablo 4.20.'de görüldüğü gibi, önermeyi anlamayan öğrenciler için "önermeyi yanıtsız bırakma" ve "önermeyi tekrar yazma" olmak üzere iki farklı durumun olduğu belirlenmiştir. Önermeleri anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde "kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme", "mantıksal olmayan gerekçelendirme", "prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme" ve "tümdengelimsel muhakeme" olmak üzere dört farklı durumun olduğu görülmektedir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin "tanım bilgisine dayalı

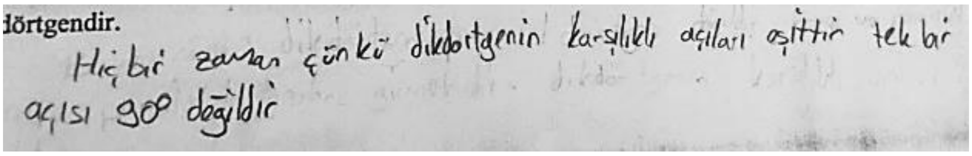
gerekçelendirme”, “özellik bilgisine dayalı gerekçelendirme” ve “kapsadığı dörtgene dayalı gerekçelendirme” olmak üzere üç farklı şekilde gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Bu önermeler bir bütün olarak değerlendirildiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeleri anladığı ve yine büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel muhakeme ile önermeleri kanıtladıkları belirlenmiştir.

Tablo 4.20. incelendiğinde öğrencilerin yaklaşık % 90’ının Önerme 2f’yi anladığı görülürken önermeyi anlamayan 3 öğrencinin önermeyi yanıtsız bıraktığı belirlenmiştir. Önerme 2f’yi anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, 3 öğrencinin dikdörtgenin kapsadığı dörtgen olan kareyi aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptıkları, dikdörtgen ve kare arasında doğru ve kapsayıcı hiyerarşik ilişki kuramadıkları, aynı zamanda hatalı niceleyici kullandıkları görülmüştür. Örneğin Yağmur Görsel 4.107.’de sunulduğu gibi karşılıklı kenarları birbirine paralel ve bir açısının ölçüsü 90° olan bütün dörtgenlerin dikdörtgen olmadığını, çünkü karenin de bu özellikleri sağladığını, bu yüzden bu ifadenin bazen doğru olduğunu belirterek hatalı gerekçelendirme yapmıştır:


dikdörtgendir.
Bazen. Çünkü karenınde bir açısı 90°'dir ve karşılıklı kenarları birbirine eşittir.

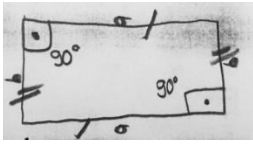
Görsel 4.107. *Yağmur’un son test Önerme 2f’de çözümü*

Önerme 2f’de, 2 öğrencinin açı-paralellik bilgisi eksikliğine bağlı olarak mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı görülmüştür. Örneğin Görsel 4.108.’de sunulduğu gibi Yunus’un dikdörtgenin sadece bir açısının değil bütün açılarının 90° olduğunu belirtmesi, paralellik ile açı arasında ilişki kuramadığının göstergesidir:


dörtgendir.
Hiç bir zaman çünkü dikdörtgenin karşılıklı açıları eşittir tek bir açısı 90° değildir

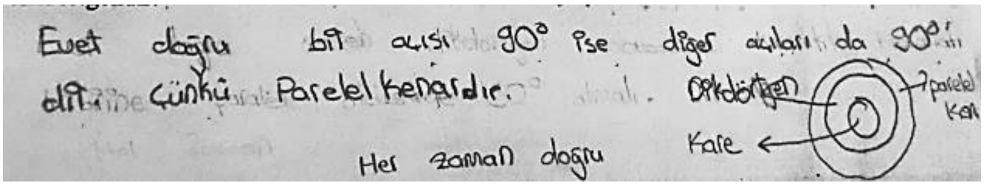
Görsel 4.108. *Yunus’un son test Önerme 2f’de çözümü*

Önerme 2f’de, 4 öğrencinin prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir. Bu öğrencilerin bir dikdörtgen prototipi üzerinde dikdörtgenin açılarının ölçülerinin 90^o olduğunu belirttikleri ve semboller kullanarak karşılıklı kenar uzunluklarını da eşit olarak işaretledikleri görülmüştür. Bu öğrencilerden biri olan Berat'ın çözümü Görsel 4.109.'da sunulmuştur:



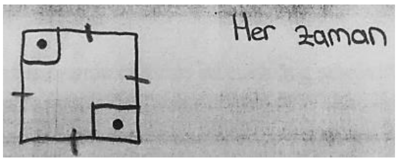
Görsel 4.109. *Berat'ın son test Önerme 2f'de çözümü*

Önerme 2f'de, öğrencilerin yaklaşık % 61'inin tümdengelimsel muhakeme yaptığı ve öğrencilerin gerekçelendirmelerinin dörtgenlerin özellikleri bilgisine dayalı olduğu görülmüştür. Örneğin Yusuf, Görsel 4.110.'da sunulduğu gibi dikdörtgenin bir açısının ölçüsü 90^o ise diğer açılarının her birinin ölçüsünün de 90^o olduğunu, çünkü dikdörtgenin aynı zamanda bir paralelkenar olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin çizdiği şemada paralelkenar, dikdörtgen ve kare arasında kapsayıcı hiyerarşik ilişkiyi gösterdiği görülmüştür:



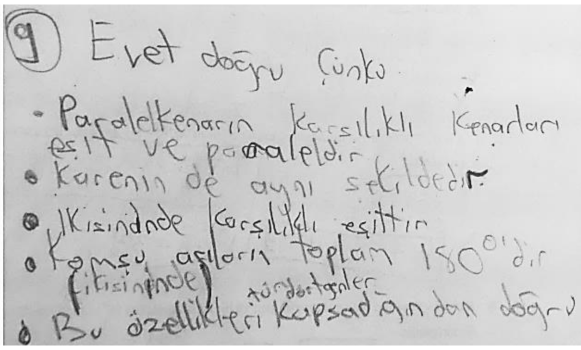
Görsel 4.110. *Yusuf'un son test Önerme 2f'de çözümü*

Önerme 2g'de öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeyi anladığı belirlenirken önermeyi anlamayan 7 öğrenciden 5'inin önermeyi yanıtsız bıraktığı, 2'sinin ise önermeyi tekrar yazdığı belirlenmiştir. Önermeyi anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 3 öğrencinin prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. Bu öğrencilerden Emirhan bir kare prototipi çizerek, her karenin bir paralelkenar olacağını bu prototip çizim üzerindeki sembollerle gerekçelendirmiştir. Emirhan'ın çözümü Görsel 4.111.'de sunulmuştur:



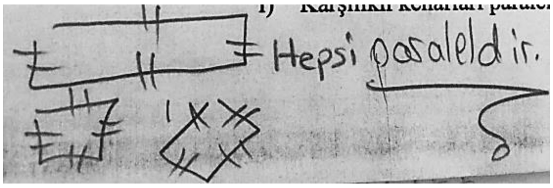
Görsel 4.111. *Emirhan'ın son test Önerme 2g'de çözümü*

Önerme 2g'de öğrencilerin yaklaşık % 68'inin tümdengelimsel muhakeme yaptığı ve bu öğrencilerden 12'sinin gerekçelendirmelerinin dörtgenlerin tanım bilgisine dayalı, 9'unun ise dörtgenlerin özellikleri bilgisine dayalı olduğu görülmüştür. Dörtgenlerin özellikleri bilgisine dayalı gerekçelendirme yapan öğrencilerden Yağız, kare ve paralelkenarın özelliklerini karşılaştırmış ve paralelkenarın özelliklerinin karenin özelliklerini kapsamasına dayalı olarak gerekçelendirme yapmıştır. Yağız'ın çözümü Görsel 4.112.'de sunulmuştur:



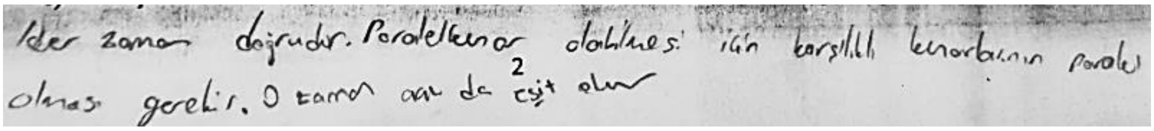
Görsel 4.112. *Yağız'ın son test Önerme 2g'de çözümü*

Önerme 2h'de öğrencilerin yaklaşık % 71'inin önermeyi anladığı görülürken önermeyi anlamayan 9 öğrenciden 8'inin önermeyi yanıtsız bıraktığı, birinin ise önermeyi tekrar yazdığı belirlenmiştir. Önerme 2h'de önermeyi anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 3'ünün paralelkenarın kapsadığı dörtgenlerden biri olan kareyi aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptıkları, dikdörtgen ve kare arasında kapsayıcı hiyerarşik ilişki kuramadıkları, aynı zamanda hatalı niceleyici kullandıkları görülmüştür. Örneğin Yunus, *"Bazen doğrudur çünkü karenin de karşılıklı kenarları paraleldir."* şeklinde hatalı gerekçelendirme yapmıştır. 2 öğrencinin ise prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir. Örneğin Azra dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare prototip çizimleri üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaparak bu dörtgenlerin tamamının paralelkenar olduğunu belirtmiştir. Azra’nın çözümü Görsel 4.113.’te sunulmuştur:



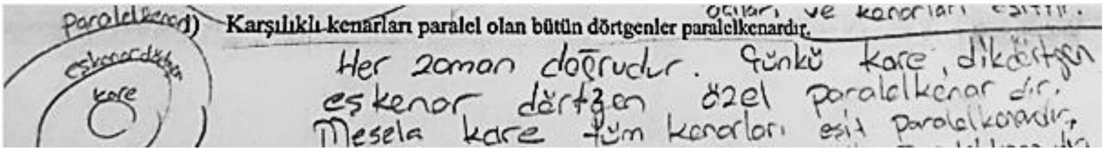
Görsel 4.113. *Azra’nın son test Önerme 2h’de çözümü*

Önerme 2h’de öğrencilerin yaklaşık % 55’inin tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülürken, bu öğrencilerden 5’inin dörtgenlerin tanım bilgisine, 6’sının dörtgenlerin özellik bilgisine ve 6’sının da paralelkenarın kapsadığı dörtgenlere dayalı gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. Paralelkenarın özellikleri bilgisine dayalı gerekçelendirme yapan öğrencilerden biri olan Esra, paralelkenarın karşılıklı kenarlarının paralel olması ile karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit olmasını ilişkilendirmiş ve önermenin her zaman doğru olduğunu belirtmiştir. Esra’nın çözümü Görsel 4.114.’te sunulmuştur:



Görsel 4.114. *Esra’nın son test Önerme2h’de çözümü*

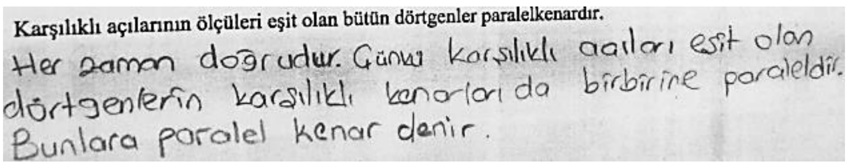
Paralelkenarın kapsadığı dörtgenlere dayalı gerekçelendirme yapan öğrencilerden Melisa, Görsel 4.115.’te sunulduğu gibi paralelkenarın kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgeni kapsamasına dayalı olarak gerekçelendirme yapmış ve önermenin her zaman doğru olduğunu belirtmiştir:



Görsel 4.115. *Melisa’nın son test Önerme 2h’de çözümü*

Önerme 2i’de öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeyi anladığı görülürken, önermeyi anlamayan 9 öğrenciden 6’sının önermeyi yanıtsız bıraktığı, 3’ünün ise önermeyi tekrar yazdığı belirlenmiştir. Önerme 2i’de önermeyi anlayan öğrencilerin kullandıkları muhakemeler incelendiğinde, bir öğrencinin paralelkenarın kapsadığı dörtgenlerden biri olan kareyi aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptığı görülmektedir. Kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek gerekçelendirme yapan Müjgan’ın “*Karenin de karşılıklı açıları eşittir ama paralelkenar değildir.*” şeklinde gerekçelendirme yaparak paralelkenar ve kare arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişki kuramadığı belirlenmiştir.

Önerme 2i’de bir öğrenci ise açı–paralellik bilgisi eksikliğine dayalı olarak mantıksal olmayan gerekçelendirme yapmıştır. Mantıksal olmayan gerekçelendirme yapan Yunus’un “*Karşılıklı kenarlar paralel olunca paralelkenar olur.*” şeklinde açıklama yapması açı ile paralellik arasında ilişki kuramaması olarak görülmüştür. Önerme 2i’de, 4 öğrencinin prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı belirlenirken, öğrencilerin yaklaşık % 52’sinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülmüştür. Bu öğrencilerin büyük çoğunluğunun dörtgenlerin tanım bilgisine dayalı gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir. Ayrıca bir öğrencinin dörtgenlerin özellikleri bilgisine, 6 öğrencinin ise paralelkenarın kapsadığı dörtgenlere dayalı gerekçelendirme yaptığı görülmüştür. Örneğin Yağmur, açı ile paralellik arasındaki ilişki üzerinden paralelkenarın tanımını yaparak gerekçelendirme yapmış ve önermenin her zaman doğru olduğunu belirtmiştir. Yağmur’un çözümü Görsel 4.116.’da sunulmuştur:



Karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan bütün dörtgenler paralelkenardır.

Her zaman doğrudur. Çünkü karşılıklı açıları eşit olan dörtgenlerin karşılıklı kenarları da birbirine paraleldir. Bunlara paralel kenar denir.

Görsel 4.116. *Yağmur’un son test Önerme2i’de çözümü*

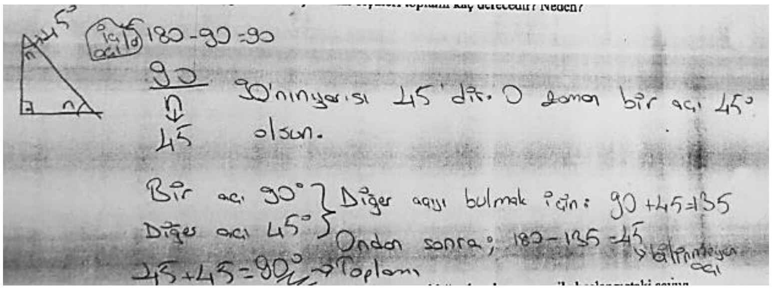
Problem 3 (*P.3: Bir dik üçgende dar açıların ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?*) öğrencilerin doğrudan kanıt yapmalarını gerektiren bir geometri problemidir. Öğrencilerin Problem 3’ün doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu problem için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.21.'de verilmiştir:

Tablo 4.21. *Öğrencilerin son test Problem 3'te problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Problemin Yapısının Anlaşılması	Problemi Anlama	% 83,8 (26 kişi)	
	Problemi Anlamama % 16,1 (5 kişi)	Problemi Yanıtsız Bırakma	% 6,4 (2 kişi)
		Dik Üçgeni İhmal Etme	% 9,6 (3 kişi)
Probleme Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	% 58 (18 kişi)	
	Cebirsel Strateji	% 25,8 (8 kişi)	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama % 12,9 (4 kişi)	Üçgenin İç Açılarının Toplamını 180^{o} Almama	% 3,2 (1 kişi)
		Üçgenin İç Açılarının Toplamını 180^{o} Alma	% 9,6 (3 kişi)
	Tümdengelimsel Muhakeme % 70,9 (22 kişi)	Sayısal İfadenin Kullanıldığı Şekille Desteklenmiş Gerekçelendirme	% 45,1 (14 kişi)
		Cebirsel İfadenin Kullanıldığı Şekille Desteklenmiş Gerekçelendirme	% 25,8 (8 kişi)

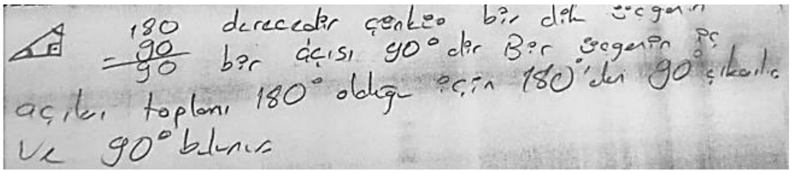
Tablo 4.21. incelendiğinde problemi anlamayan öğrenciler için "problemi yanıtsız bırakma" ve "dik üçgeni ihmal etme" olmak üzere iki farklı durumun olduğu görülmüştür. Problemi anlayan öğrencilerin çözüm için geliştirdikleri stratejiler incelediğinde çözümlerinde "aritmetiksel strateji" ya da "cebirsel strateji" olmak üzere iki farklı strateji kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde ise "deneysel doğrulama" ya da "tümdengelimsel muhakeme" yaptıkları belirlenmiştir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrenciler için "sayısal ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme" ya da "cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme" olmak üzere iki farklı durumun olduğu saptanmıştır. Problem 3'te genel olarak öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun kanıt yaptığı belirlenmiştir. Bu problemde öğrencilerin sadece aritmetik stratejilerle değil cebirsel stratejileri de kullanarak kanıt yapmaları dikkat çekicidir. Ayrıca deneysel doğrulama yapan öğrencilerin tamamı özel olarak ikizkenar dik üçgen örneğini kullanmışlardır.

Problem 3'te öğrencilerin yaklaşık % 84'ünün problemi anladığı belirlenirken, problemi anlamayan 5 öğrenciden 2'sinin problemi yanıtsız bıraktığı, 3'ünün ise dik üçgeni ihmal ettiği görülmüştür. Problemi anlayan öğrencilerin çözüm stratejileri incelendiğinde, büyük bir çoğunluğunun aritmetiksel strateji kullandığı görülürken, 8 öğrencinin cebirsel strateji kullandığı belirlenmiştir. Problem 3 için yapılan muhakemeler incelendiğinde, 4 öğrencinin bir örnekle deneysel doğrulama yaptığı belirlenirken, bu öğrencilerden birinin üçgenin iç açılar toplamını 180^o almadığı görülmüştür. Örnekle doğrulama yapan öğrencilerden 2'sinin dik açının 90^o ve bir üçgenin iç açıları ölçüleri toplamının 180^o olduğu ön bilgisinden hareket ettikleri; ancak ikizkenar dik üçgen örneğini kullanarak doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Ezel, dik açılı üçgenin bir iç açısının ölçüsünün 90^o olduğunu, böylece 180^o'den 90^o'yi çıkararak geriye 90^o kaldığını göstermiş, 90^o'yi 2'ye bölerek bir iç açının 45^o olduğunu belirtmiştir. Ezel'in çözümü Görsel 4.117.'de sunulmuştur:



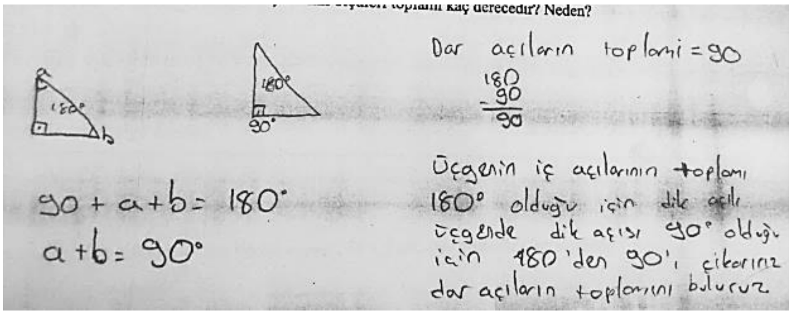
Görsel 4.117. *Ezel'in son test Problem 3'te çözümü*

Problem 3'te öğrencilerin yaklaşık % 71'inin tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülürken, bu öğrencilerden 14'ünün sayısal ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir. Bu öğrenciler dik üçgende, dik açının 90^o ve bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180^o olduğu ön bilgisinden hareket etmişlerdir. Dar açıların ölçüleriyle dik açının ölçüsünün toplamının 180^o olabilmesi için dar açıların ölçüleri toplamının 90^o olduğu genellemesine ulaşmışlardır. Bu şekilde sayısal ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yapan öğrenciler sözel olarak açıklamalar yapmışlardır. Bu öğrencilerden İrem'in yaptığı çözüm Görsel 4.118.'de sunulmuştur:



Görsel 4.118. *İrem'in son test Problem 3'te çözümü*

Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerden 8'inin ise cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yaptıkları görülmektedir. Bu öğrenciler dik üçgende, dik açının 90° ve bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğu ön bilgisinden hareket etmişlerdir. Dar açıların ölçülerini değişkenler kullanarak ifade eden bu öğrenciler, dik açı ile dar açıların ölçüleri toplamını 180°'ye eşitleyerek dar açıların ölçüleri toplamına ulaşmışlardır. Bu öğrencilerden Bahri'nin çözümü Görsel 4.119.'da örnek olarak sunulmuştur:



Görsel 4.119. *Bahri'nin son test Problem 3'te çözümü*

4.5.2. Son testte aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermelere ilişkin bulgular

Önerme 2a (*Ö.2a: Bir sayı başka bir sayıdan daha büyükse, büyük olan sayı her zaman daha fazla çarpana sahiptir.*), Önerme 2c (*Ö.2c: Her sayı ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabilir.*) ve Önerme 2d (*Ö. 2d: İkinin katı olan bir sayı her zaman 4'ün de bir katıdır.*) önermeleri öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerdir. Öğrencilerin bu önermelerin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu önermeler için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.22.'de verilmiştir:

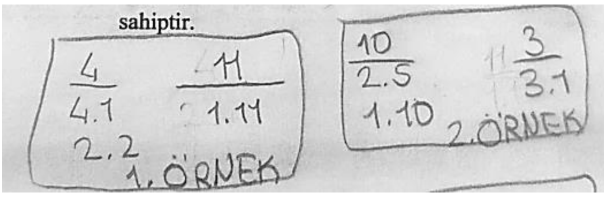
Tablo 4.22. *Öğrencilerin son test Önerme 2a, Önerme 2c ve Önerme 2d'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	**Ö.2a** % 90,3 (28kişi)	
		Ö.2c % 90,3 (28 kişi)	
		Ö.2d % 90,3 (28 kişi)	
	Önermeyi Anlamama **Ö.2a** % 9,6 (3 kişi) **Ö.2c** % 9,6 (3 kişi) **Ö.2d** % 9,6 (3 kişi)	Önermeyi Yanıtsız Bırakma	**Ö.2a** % 6,4 (2 kişi)
		Önermeyi Tekrar Yazma	**Ö.2a** % 3,2 (1 kişi)
			Ö.2c % 9,6 (3 kişi)
			Ö.2d % 9,6 (3 kişi)
Önermeye Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	**Ö.2a** % 90,3 (28 kişi)	
		Ö.2c % 77,4 (24 kişi)	
		Ö.2d % 90,3 (28 kişi)	
	Hem Aritmetiksel Hem Cebirsel Strateji	**Ö.2c** % 12,9 (4 kişi)	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama	Yalnızca Önermeyi Doğrulayan Örnek Verme	**Ö.2c** % 6,4 (2 kişi)
			Ö.2d % 6,4 (2 kişi)
	Mantıksal Olmayan Gerekçelendirme **Ö.2a** % 12,9 (4 kişi) **Ö.2c** % 6,4 (2 kişi) **Ö.2d** % 12,9 (4 kişi)	Çarpan – bölen bilgisi eksikliği	**Ö.2a** % 12,9 (4 kişi)
			Ö.2d % 12,9 (4 kişi)
		Ardışık sayı bilgisi eksikliği	**Ö.2c** % 6,4 (2 kişi)
	Tümdengelimsel Muhakeme **Ö.2a** % 77,4 (24 kişi) **Ö.2c** % 77,4 (24 kişi) **Ö.2d** % 70,9 (22 kişi)	Yalnızca Aksine Örnek Verme	**Ö.2a** % 45,1 (14 kişi)
			Ö.2c % 9,6 (3 kişi)
			Ö.2d % 9,6 (3 kişi)
		Hem Doğrulayan Örnek Hem de Aksine Örnek Verme	**Ö.2a** % 32,2 (10 kişi)
			Ö.2c % 67,7 (21 kişi)
			Ö.2d % 61,2 (19 kişi)

Tablo 4.22. incelendiğinde önermenin yapısını anlamayan öğrenciler için "önermeyi yanıtsız bırakma" ya da "önermeyi tekrar yazma" olmak üzere iki farklı durumun olduğu görülürken, önermeyi anlayan öğrencilerin "aritmetiksel strateji" kullanarak önermeyi çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte bu öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde "deneysel doğrulama", "mantıksal olmayan gerekçelendirme" ve "tümdengelimsel muhakeme" olmak üzere üç farklı durumun olduğu görülmektedir. Aksine örnek verme önermeleri genel olarak değerlendirildiğinde, bu önermelerde kanıt yapan öğrenci sayısının diğer problem ya da önermelere göre daha fazla olduğu söylenebilir. Ayrıca öğrencilerin bu önermelerin her zaman doğru olmadığını göstermek için aksine örnek vermenin yanında önermeyi doğrulayan örnekler de kullanma eğiliminde oldukları söylenebilir.

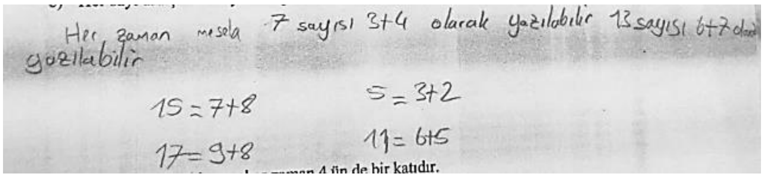
Önerme 2a'da öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeyi anladığı, önermeyi anlamayan 3 öğrenciden 2'sinin önermeyi yanıtsız bıraktığı bir öğrencinin ise önermeyi tekrar yazdığı görülmektedir. Önerme 2a için öğrencilerin kullandıkları stratejiler incelendiğinde öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullandığı görülmektedir. Bu önermede öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde ise 4 öğrencinin çarpan-bölen bilgisi eksikliğine dayalı olarak mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları görülmektedir. Örneğin Enes, *"Hiçbir zaman doğru değildir. Sayıların daha büyük olmasına gerek yok her sayı aynı sayılarla çarpılabilir."* şeklinde mantıksal olmayan gerekçelendirme yapmıştır.

Önerme 2a'da öğrencilerin yaklaşık % 77'sinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenirken bu öğrencilerden 14'ünün yalnızca aksine örnek vererek kanıt yaptığı, 10'unun ise hem doğrulayan örnek hem de aksine örnek vererek kanıt yaptığı belirlenmiştir. Öğrencilerin çoğunlukla aksine örnek vermek için asal sayıları kullandıkları görülmüştür. Örneğin Yusuf, 4 ile 11 ve 10 ile 3 sayılarının çarpan sayılarını karşılaştırarak önermenin her zaman doğru olmadığını göstermiştir. Yusuf'un yaptığı çözüm Görsel 4.120.'de sunulmuştur:



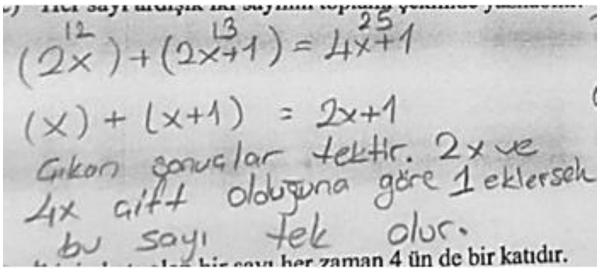
Görsel 4.120. *Yusuf'un son test Önerme 2a'da çözümü*

Önerme 2c'de öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeyi anladığı belirlenirken önermeyi anlamayan 3 öğrencinin önermeyi tekrar yazdıkları görülmektedir. Önermeyi anlayan öğrencilerin kullandıkları stratejiler incelendiğinde, büyük çoğunluğunun aritmetiksel strateji kullandığı, 4'ünün ise hem aritmetiksel hem de cebirsel strateji kullandığı görülmektedir. Önerme 2c'de öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 2 öğrencinin yalnızca önermeyi doğrulayan örnek vererek deneysel doğrulama yaptığı görülmektedir. Bu öğrenciler aksine örnek verme eğiliminde bulunmamış, denedikleri örneklerin önermeyi doğrulamasıyla yetinerek önermenin her zaman doğru olduğunu savunmuşlardır. Örneğin Yunus Görsel 4.121.'de sunulduğu gibi 7, 13, 15 gibi önermeyi doğrulayan tek sayıları örnek göstererek bu önermenin her zaman doğru olduğunu belirtmiştir:



Görsel 4.121. *Yunus'un son test Önerme 2c'de çözümü*

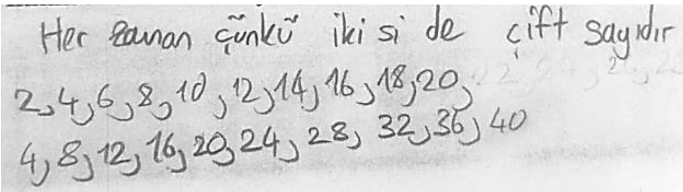
Önerme 2c'de öğrencilerden 2'sinin ardışık sayı bilgisi eksikliğine dayalı olarak mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı belirlenirken, öğrencilerin yaklaşık % 77'sinin tümdengelimsel muhakeme yaptığı görülmektedir. Tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin bir kısmı yalnızca aksine örnek vererek kanıt yaparken, büyük çoğunluğu ise hem doğrulayan örnek hem de aksine örnek vererek önermenin her zaman doğru olmayacağını göstermişler, yani önermenin yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Kanıtını hem cebirsel hem de aritmetiksel strateji kullanarak yapan öğrencilerin önermenin neden her zaman doğru olmadığını gerekçelendirmeleri dikkat çekicidir. Bu öğrencilerden Nefise cebirsel ifadelerle sadece tek sayıların ardışık iki sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini de ekleyerek önermenin her zaman doğru olmadığını göstermiştir. Nefise'nin yaptığı çözüm Görsel 4.122.'de sunulmuştur:



Görsel 4.122. *Nefise'nin son test Önerme 2c'de çözümü*

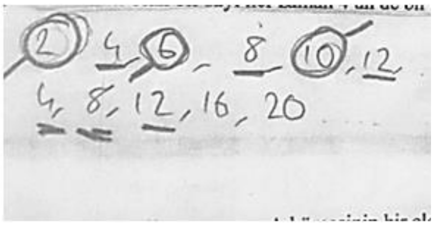
Önerme 2d'de öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeyi anladığı belirlenirken önermeyi anlamayan 3 öğrencinin önermeyi tekrar yazdıkları görülmektedir. Önermeyi anlayan öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullandığı belirlenmiştir. Önerme 2d'de öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde 2 öğrencinin yalnızca önermeyi doğrulayan örnek vererek deneysel doğrulama yaptığı görülmektedir. Bu öğrenciler aksine örnek verme eğiliminde bulunmamış, denedikleri bir örneğin önermeyi doğrulamasıyla yetinerek önermenin her zaman doğru olduğunu savunmuşlardır.

Öğrencilerden 4'ünün ise çarpan- bölen bilgisi eksikliğine dayalı olarak mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı belirlenmiştir. Bu öğrencilerden biri olan Yunus 2 ve 4'ün çift olmasından kaynaklı olarak bu önermenin her zaman doğru olduğunu savunmuştur. Yunus'un çözümü Görsel 4.123.'te sunulmuştur:



Görsel 4.123. *Yunus'un son test Önerme 2d'de çözümü*

Önerme 2d'de öğrencilerin yaklaşık % 71'inin tümdengelimsel muhakeme yaptığı, bunların büyük bir çoğunluğunun ise önerme için hem doğrulayan örnek hem de aksine örnek verdiği görülmüştür. Öğrenciler önermenin her zaman doğru olmayacağını göstererek, önermenin yanlış olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca bazı öğrencilerin, yalnızca aksine örnekler vermek yerine 2'nin katı olan bazı sayıların neden 4'ün de katı olmadığını açıklamaları dikkat çekicidir. Bu öğrencilerden Eylül, 2'nin ve 4'ün ortak katlarını yazarak, 2'nin katı olan; ancak 4'ün katı olmayan sayıları göstermiştir. Bununla birlikte öğrenci *"2'nin katları 2'şer 2'şer fakat 4'ün katları 2 kere 2'şer artıyor. O yüzden her zaman olmaz."* şeklinde gerekçelendirme yapmıştır. Eylül'ün çözümü Görsel 4.124.'te sunulmuştur:



Görsel 4.124. *Eylül'ün son test Önerme 2d'de çözümü*

4.5.3. Son testte tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önermeye ilişkin bulgular

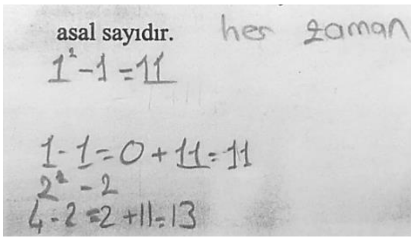
Önerme 2.e (*Ö. 2e: A = {1,2,3,4,5} ve n sayısı A kümesinin bir elemanı ise,* $n^2 - n + 11$ *sayısı her zaman bir asal sayıdır.*) öğrencilerin tüketerek kanıt yapmaları gereken bir önermedir. Öğrencilerin bu önermenin doğruluğunu araştırırken kullandıkları yaklaşımlar ile bu önerme için yapılan çözümlerin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.23.'te verilmiştir:

Tablo 4.23. *Öğrencilerin son test Önerme 2e'de problem çözme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

Önermenin Yapısının Anlaşılması	Önermeyi Anlama	% 80,6 (25 kişi)	
	Önermeyi Anlamama	Önermeyi Yanıtsız Bırakma	% 19,3 (6 kişi)
Probleme Uygun Strateji Kullanma	Aritmetiksel Strateji	%80,6 (25 kişi)	
Muhakeme	Deneysel Doğrulama % 9,6 (3 kişi)	Bir Örnekle Deneme	% 6,4 (2 kişi)
		Birden Fazla Örnekle Deneme	% 3,2 (1 kişi)
	Tümdengelimsel Muhakeme	Tüketerek Kanıt Yapma	% 70,9 (22 kişi)

Tablo 4.23. incelendiğinde önermeyi anlamayan öğrenciler için "önermeyi yanıtsız bırakma" olmak üzere tek durum söz konusudur. Önermeyi anlayan öğrencilerin aritmetiksel strateji kullandıkları belirlenmiştir. Önerme 2.e'de öğrencilerin muhakemelerinde ise "deneysel doğrulama" ya da "tümdengelimsel muhakeme" olmak üzere iki farklı durumun olduğu belirlenmiştir. Bu önermede öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tüketerek kanıt yaparak başarılı oldukları belirlenmiştir.

Önerme 2.e'de öğrencilerin büyük çoğunluğunun önermeyi anladığı görülürken önermeyi anlamayan 6 öğrencinin önermeyi yanıtsız bıraktığı belirlenmiştir. Önermeyi anlayan öğrencilerin aritmetiksel strateji kullandığı görülmüş, muhakemeleri incelediğinde ise 3 öğrencinin deneysel doğrulama yaptığı saptanmıştır. Bu öğrencilerden 2'sinin kümenin bir elemanı ile deneysel doğrulama yaptığı, birinin ise kümenin birkaç elemanı ile deneysel doğrulama yaptığı ve bu sayıların önermeyi doğrulaması üzerine önermenin her zaman doğru olduğunu belirttiği belirlenmiştir. Örneğin Yaren, kümenin 1 ve 2 elemanları ile doğrulama yaptıktan sonra önermenin her zaman doğru olduğunu belirtmiştir. Yaren'in çözümü Görsel 4.125.'te sunulmuştur:



asal sayıdır. her zaman

$1^2-1=11$

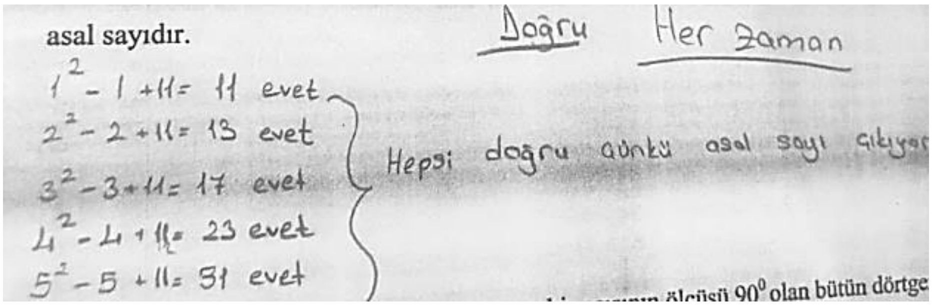
$1-1=0+11=11$

2^2-2

$4-2=2+11=13$

Görsel 4.125. *Yaren'in son test Önerme 2e'de çözümü*

Önerme 2.e'de öğrencilerin yaklaşık % 71'inin tümdengelimsel muhakeme ile tüketerek kanıt yaptığı belirlenmiştir. Örneğin Ceren, kümedeki elemanların tamamını tüketerek doğrulama yapmış ve sonuçların asal sayı çıkması üzerine bu önermenin her zaman doğru olduğunu kabul etmiştir. Ceren'in çözümü Görsel 4.126.'da sunulmuştur:



asal sayıdır. Doğru Her zaman

$1^2-1+11=11$ evet

$2^2-2+11=13$ evet

$3^2-3+11=17$ evet

$4^2-4+11=23$ evet

$5^2-5+11=31$ evet

Hepsi doğru çünkü asal sayı çıkıyo

ölçüsü 90^0 olan bütün dörtge

Görsel 4.126. *Ceren'in son test Önerme 2e'de çözümü*

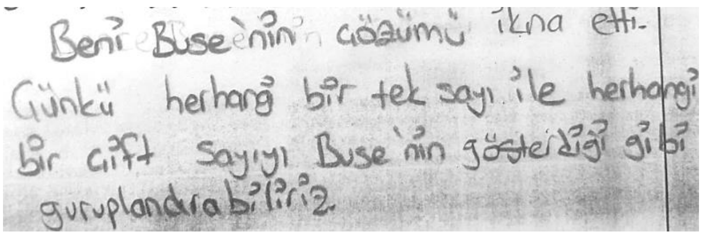
4.5.4. Son testte kanıt değerlendirme problemine ilişkin bulgular

Problem 4, bir kanıt değerlendirme problemidir. Bu problemde öğrencilerden verilen önermeye (*Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı her zaman çift sayıdır.)* yönelik sunulan 3 farklı argümanı değerlendirmeleri istenmiştir. Bunlardan birisi örnek vererek doğrulama yapılan deneysel argüman (Mehmet), bir diğeri görsel anlatım yolu ile sunulan görsel argüman (Buse) ve son olarak da doğrudan kanıtın yapıldığı cebirsel argüman (Cem)'dır. Bu problemde öğrencilere önerme için sunulan argümanlardan hangisinin en ikna edici olduğu sorulmuştur. Öğrencilerin değerlendirmeleri ile yanıtlarını destekledikleri gerekçelerinin kodlamalara göre öğrenci sayısı ve yüzdesi Tablo 4.24.'te sunulmuştur:

Tablo 4.24. *Öğrencilerin son test Problem 4'te kanıt değerlendirme süreci ve muhakemelerindeki frekans ve yüzdeler*

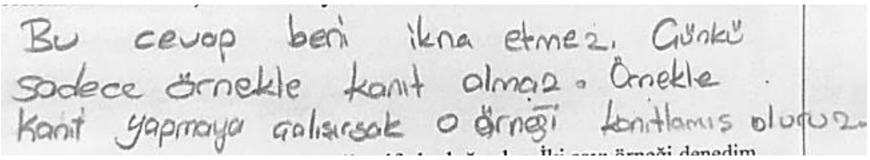
Görsel Argümanı İkna Edici Bulma	Görsel Argümanın Açıklık ve Anlaşılırlığına Dayalı Gerekçelendirme	% 9,6 (3 kişi)
Cebirsel Argümanı İkna Edici Bulma	Cebirsel Argümanın Genellenebilirlik, Kesinlik ve Sadeliğine Dayalı gerekçelendirme	% 90,3 (28 kişi)

Tablo 4.24. incelendiğinde "görsel argümanı ikna edici bulma" ve "cebirsel argümanı ikna edici bulma" olmak üzere iki farklı durumun olduğu görülmektedir. Bu problem genel olarak değerlendirildiğinde, öğrencilerin hiçbirinin deneysel argümanı ikna edici olarak görmediği, büyük bir kısmının doğrudan kanıtın yapıldığı cebirsel argümanı ikna edici kanıt olarak gördükleri belirlenmiştir. Tablo 4.24.'te sunulduğu gibi 3 öğrencinin görsel argümanı ikna edici bulduğu görülürken bu öğrencilerin değerlendirmeleri incelendiğinde, görsel argümanın açık ve anlaşılır olmasına dayalı gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir. Örneğin Berat *"Buse'nin cevabı bana en anlaşılır geldi. Mehmet örnek verdiği için olmaz. Cem de sonuç bulamamış gibi geldi."* şeklinde gerekçelendirme yapmıştır. Görsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerden biri olan Müjgan ise tek ve çift sayı tanımına vurgu yaparak tek ve çift sayıları Buse'nin gösterdiği gibi gruplandıracağını belirtmiştir. Müjgan'ın çözümü Görsel 4.127.'de sunulmuştur:


Beni Buse'nin çözümü ikna etti.
Çünkü herhangi bir tek sayı ile herhangi
bir çift sayıyı Buse'nin gösterdiği gibi
guruplandırabiliriz.

Görsel 4.127. *Müjgan'ın son test Problem 4'te çözümü*

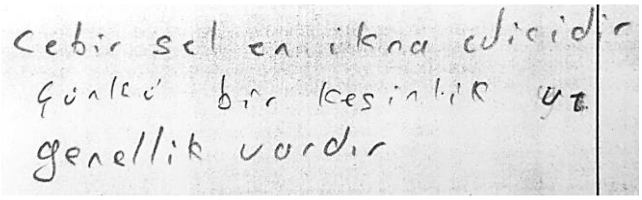
Problem 4'te öğrencilerin yaklaşık % 90'ının cebirsel argümanların kullanıldığı doğrudan kanıtı ikna edici bulduğu belirlenirken, öğrencilerin cebirsel argümanın genellenebilirlik, kesinlik ve sadeliğine dayalı gerekçelendirmede bulundukları görülmüştür. Cebirsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerden biri olan Nefise deneysel argümanın kendisini ikna edemeyeceğini, örnekle kanıt yapılamayacağını belirtmiştir. Nefise'nin çözümü Görsel 4.128.'de sunulmuştur:



Bu cevap beni ikna etmez. Çünkü
sadece örnekle kanıt olmaz. Örnekle
kanıt yapmaya çalışırsak o örneği kanıtlamış oluruz.

Görsel 4.128. *Nefise'nin son test Problem 4'te çözümü*

Cebirsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerden biri olan Mehmet ise görsel argümanın da ikna edici olduğunu, görsel argümana baktığında sonucun tek çıkabileceğini gördüğünü; ancak cebirsel argüman kadar ikna edici olmadığını belirtmiştir. Mehmet, cebirsel argümanın kendisini neden ikna ettiğini Görsel 4.129.'da açıklamıştır:



Cebirsel en ikna edicidir
çünkü bir kesinlik ve
genellik vardır

Görsel 4.129. *Mehmet'in son test Problem 4'te çözümü*

Bir bütün olarak son testte öğrencilerin verdikleri yanıtlar dikkate alındığında, öğrencilerin genel anlamda örnek vererek deneysel doğrulama yapmayı sadece problemi anlamak için kullandıkları, bununla birlikte deneysel doğrulamayı geçerli bir kanıt yöntemi olarak görmedikleri, ayrıca çözümlerinde aritmetiksel stratejilerin yanında cebirsel stratejileri de kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin genel olarak doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemlerinde/önermelerinde cebirsel ifadeler kullanarak kanıt yapabildikleri, geometri problemlerinde/önermelerinde de tümdengelimsel muhakeme ile kanıt yapabildikleri görülmektedir. Ayrıca öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerde diğer problem ve önermelere göre daha başarılı oldukları, büyük bir çoğunluğun aksine örnek vererek kanıt yaptığı söylenebilir. Öğrencilerin tüketerek kanıt yapmaları gereken önermede de genel olarak başarılı olduğu saptanmıştır. Kanıt değerlendirme probleminde ise öğrencilerin büyük bir çoğunluğu cebirsel argümanların kullanıldığı doğrudan kanıtı ikna edici bulurken, öğrencilerin hiçbirinin deneysel argümanların kullanıldığı örnek vererek doğrulamayı kanıt olarak değerlendirmemesi dikkat çekicidir. Bununla birlikte bütüncül bir şekilde değerlendirilmesi açısından araştırmanın ön ve son testinde öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapma oranları Tablo 4.25.’te sunulmuştur:

Tablo 4.25. *Ön ve son testin karşılaştırmalı sonuçları*

Problem ve Önermeler	**Ön Test**	**Son Test**
Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi	0	% 65
Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı önermesi	0	% 74
Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermeleri	% 25	% 59
Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemi	% 32	% 71
Aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermeler	% 34	% 75
Tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önerme	% 13	% 71

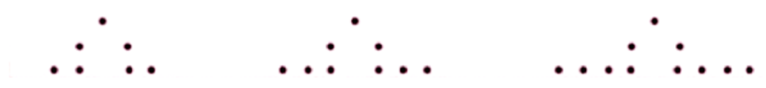
Tablo 4.25.’te görüldüğü gibi ön testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı probleminde öğrencilerin hiçbiri doğrudan kanıt yapamazken son testte bu oran yaklaşık % 65 olmuştur. Benzer şekilde ön testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı önermesinde öğrencilerin hiçbiri doğrudan kanıt yapamazken son testte bu oran yaklaşık % 74 olmuştur. Ön testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerinde öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapma oranlarının ortalaması yaklaşık % 25 iken son testte bu oran yaklaşık % 59 olmuştur. Ön testte doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri probleminde öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapma oranı yaklaşık % 32 iken son testte bu oran yaklaşık % 71 olmuştur. Ön testte aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermelerde öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapma oranlarının ortalaması yaklaşık olarak % 34 iken son testte bu oran yaklaşık % 75 olmuştur. Ön testte tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önermede öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapma oranı yaklaşık % 13 iken son testte bu oran yaklaşık % 71 olmuştur. Bununla birlikte ön testte kanıt değerlendirme probleminde cebirsel argümanı ikna edici bulma oranı yaklaşık % 3 iken son testte bu oran yaklaşık % 90 olmuş ve hiçbir öğrencinin son testte deneysel argümanı ikna edici bulmadığı belirlenmiştir.

4.6. Son Klinik Görüşme Sonuçlarına İlişkin Bulgular

Son klinik görüşmelerde öğrencilere üç problem (Problem 7, Problem 8 ve Problem 9) sorulmuştur. Bu problemlerden bir örüntü problemi, diğeri doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri problemi, sonuncusu ise doğrudan kanıt yapmaları gereken bir sayı problemidir. Son klinik görüşmeler kanıt işlevleri bağlamında değerlendirildiğinde, kanıt yapabilen öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri, kanıtlarında pek çok tanım, teorem ve özelliği kullanarak bunların sonuçlarını görebildikleri belirlenmiştir. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt bu problemlerin çözüm sürecinde öğretmen ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamış, öğrenciler fikirlerini ilettiğinde, söylem biçimleri sayesinde öğrencilerin problemlerde verilen kavramları nasıl anladıkları ortaya çıkmıştır. Kanıt burada iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin hem bildikleri kavramları ilişkilendirdikleri hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek varsayımlarını gerekçelendirdikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

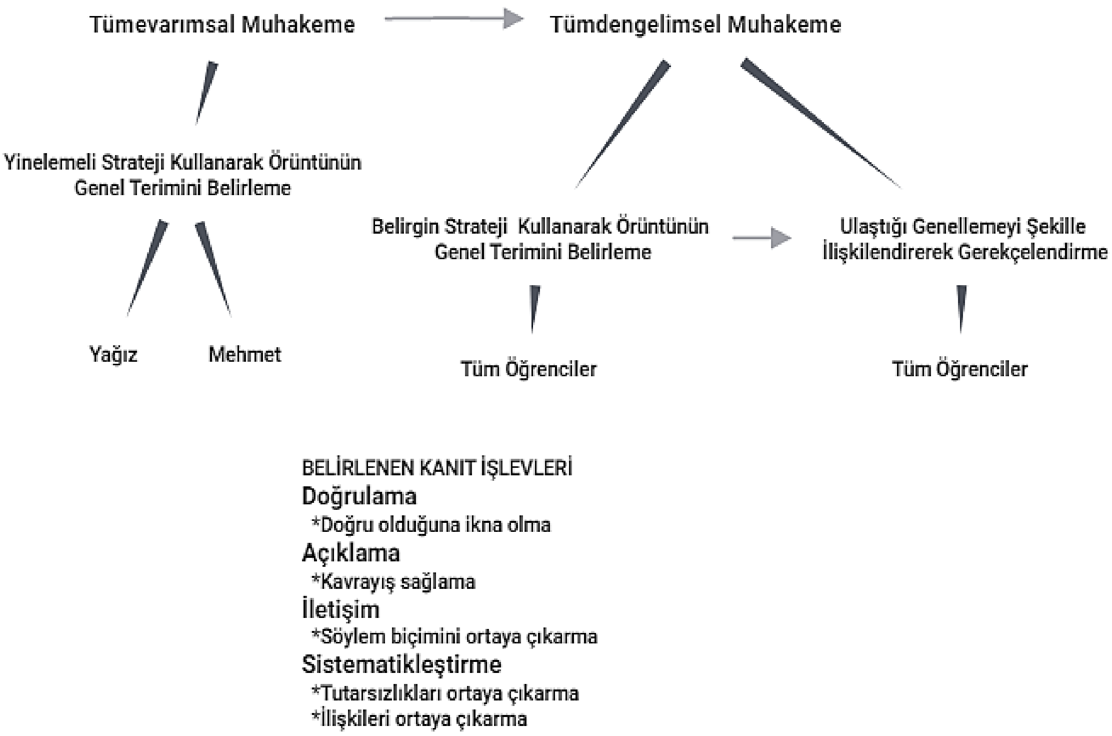
4.6.1. Örüntü problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşme bulguları

Problem 7 *(P.7: Aşağıda ilk üç adımı verilen örüntünün 4. adımını çiziniz ve genel terimini bulunuz.)*



1. Adım *2. Adım* *3. Adım*

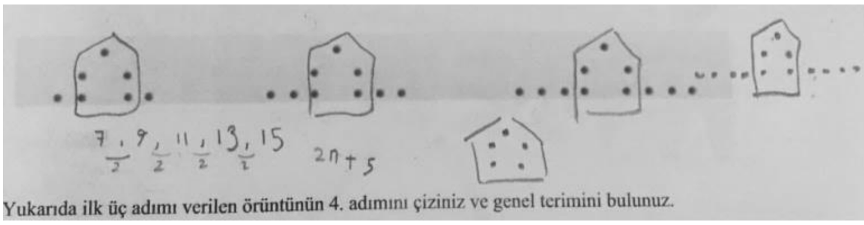
odak öğrencilere son klinik görüşmede sorulan bir örüntü problemidir. Öğrencilerin Problem 7'yi çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.6'da gösterilmiştir:



Şekil 4.6. *Öğrencilerin son klinik görüşmede Problem 7'yi çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.6.'da görüldüğü gibi öğrencilerin tamamının adımlardaki değişen ve değişmeyen şekilleri belirleyebildikleri, bunları sayılarla ilişkilendirerek yazdıkları, böylelikle örüntünün genel terimini buldukları ve tümdengelimsel muhakeme ile bu terimi şekille ilişkilendirebildikleri belirlenmiştir. 6 öğrenciden 2'sinin (Mehmet ve Yağız) örüntünün genel terimini bulmak için önce tümevarımsal muhakemeyi kullandıkları, daha sonra tümdengelimsel muhakemeye geçiş yaptıkları belirlenmiştir. 4 öğrencinin ise (Bahri, Elif, Esra ve Eylül) sadece tümdengelimsel muhakeme yaparak örüntünün genel terimini buldukları görülmüştür.

Önce tümevarımsal muhakeme yapan Mehmet ve Yağız şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşler, ardışık terimler arasındaki farka odaklanarak, adım sayısı ve adım sayısına karşılık gelen sayıyı ilişkilendirmeden yinelemeli strateji ile çözüme başlamışlardır. Araştırmacının yönlendirmesi ile öğrencilerin belirgin stratejiye geçiş yaparak şekli analiz ettikleri ve örüntünün genel terimini belirledikleri görülmüştür. Mehmet'in çözümü Görsel 4.130.'da sunulmuş ve görüşmesi örnek olarak verilmiştir:



Görsel 4.130. *Mehmet'in son klinik görüşmede Problem 7'de çözümü*

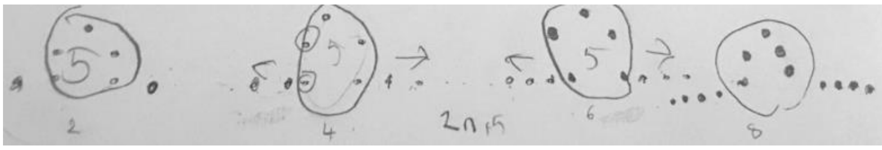
> **Mehmet:** Önce sayayım noktaları. İlkinde 7 tane var, ikincisinde 9, sonra 11 tane yani 4. adımı çizersem onda da 13 tane, sonra da 15 olur. Zaten ilk bakınca aradaki fark hemen görülüyor. Her defasında 2 tane artıyor. O zaman 2n'le başlarım sonra birinci adımda 7 olması için de 5 lazım 2n+5 genel terimi olur.
> **A:** Ama bunu bir kanıt problemi olarak düşünmemiz lazım. Bana bu örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili gözlemlerini anlatır mısın?
> **Mehmet:** Şimdi birinci adımda beşgen gibi şekil var sonra yanlarda 2 tane nokta var.
> **A:** Nasıl büyüyor örüntü, neresine ekleme yapılıyor her defasında?
> **Mehmet:** Şu yanlara ekleniyor. Bir tane buraya bir tane buraya ekliyor her defasında. Aslında şöyle bir şey de söyleyebiliriz. Şimdi birinci adımda 5'li sabit. Sonra sağa ve sola birer tane eklemiş yani 2 tane. Sonra ikinci adımda 5 sabit, birer tane daha eklemiş yani 4 olmuş, üçüncü adımda da 5'li sabit yanlarda 3'er var 6 olmuş. 4. adımda 5'li sabit yanlarda 8 tane olacak çizeyim mi hocam?
> **…**

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Mehmet araştırmacının yönlendirmesi ile örüntüyü analiz ederek adımlardaki değişen ve değişmeyen şekilleri belirleyebilmiş, bunları sayılarla ilişkilendirerek yazmış ve örüntünün yakın adımını doğru bir şekilde çizmiştir. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

> **…**
> **Mehmet:** Yani hep adım sayısının 2 katı kadar nokta oluyor aşağıda ama o 5'linin dışında. En sonda o 5'liyi de eklersem 2n+5 olur.
> **A**: 2n+5 olduğundan nasıl emin oluyorsun?
> **Mehmet:** Hocam çünkü bu örüntüde 5 sabit, her defasında 5'linin bir sağına bir soluna birer nokta konmuş, bu da adım sayısının 2 katı olur.
> **A:** Tamam şimdi o zaman soruyorum n nedir?
> **Mehmet:** n adım sayısı öyle öğrendiğimiz için.
> **A:** Tamam o zaman n nasıl bir sayıdır?
> **Mehmet:** Yani adım sayısı. Birinci adım, ikinci adım, üçüncü adım diye gidiyor.
> **A:** Kaçtan başlıyor?
> **Mehmet:** 1'den başlıyor istediğimiz kadar çizeriz tabi kâğıt yeterse.
> **A:** Önceki adımları çizebilir miyiz?
> **Mehmet:** Beşgen aynı kalınca şöyle çizebiliriz. (0. adımı çizdi)

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Mehmet şekil analizine dayalı olarak örüntünün genel terimini belirlemiş ve tümdengelimsel muhakeme yaparak örüntünün genel terimini şekille ilişkilendirmiştir. Öğrenciye örüntünün önceki adımları sorulduğunda, öğrenci örüntünün 0. adımını çizerek bu örüntünün ilk adımında ilk beş noktanın sabit kalacağını belirtmiştir. Öğrencinin yaptığı kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan örüntünün genel teriminin 2n+5 olduğu genellemesine ulaştığı ve genellemesini şekille ilişkilendirerek genellemenin doğru olduğuna ikna olduğu görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Mehmet'in, problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Mehmet'in kanıt yaparken örüntü kavramı, örüntünün yakın adımını bulma, örüntünün genel terimini bulma, değişken gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtında kullandığı, ulaştığı genellemenin neden doğru olduğunu açıklayabildiği görülmüştür. Kanıt burada *ilişkileri ortaya çıkarma ve kavrayış* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Yağız da benzer bir çözüm yaparak önce ardışık terimler arasındaki farka odaklanmıştır. Görsel 4.131.'de sunulduğu gibi öğrenci, adım sayısı ve adım sayısına karşılık gelen sayıyı ilişkilendirmeden yinelemeli stratejisi ile örüntünün genel teriminin nasıl bulunacağını göstermiş; ancak araştırmacının yönlendirmesi üzerine adım sayısı ile adım sayısına karşılık gelen sayılar arasında ilişki kurabilmiştir. Yağız'ın ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.131. *Yağız'ın son klinik görüşmede Problem 7'de çözümü*

Yağız: Şimdi ilk baktığımda altın yanlara doğru genişlediği görünüyor. Şimdi sayarsam noktaları 7, 9, 11 o zaman 4. adımda 13 olacak 2 tane daha eklenecek yanlara. Yani 2'şer 2'şer artacak her zaman. Ben önce bir 4. adımı çizeyim o da şöyle oluyor. Yani aslında hemen genel terimini bulabilirim ama siz onu kanıt olarak kabul eder misiniz?
A: Nasıl kısa yoldan mı?
Yağız: Evet 2'şer artıyor 2n'le başlarım. Birini adımda 7 olması için 5 eklerim. Yani adım sayısının 2 katının 5 fazlası oluyor her defasında yani 2n+5.
A: Sence bu çözümü kabul etmeli miyim?
Yağız: Yani evet test olsa olur da şimdi kanıt olduğu için olmaz.
A: Tamam bunu kabul edemem. Şekli analiz edelim. Neler değişiyor, neler aynı kalıyor?
Yağız: Şimdi ilk baktığımda mesela 1. adıma burada 5 tane sabit, yanlara 1'er tane eklemiş, sonra 2. adıma geçince yine 5 sabit bu sefer 1. adımdakine 1'er tane daha eklemiş, üçüncü adımda da bu 5 sabit sonra 2. adıma 1'er tane eklemiş. Yani 1. adımda 5 sabit +2, sonra 5 sabit +2+2, sonra 5 sabit +2+2+2 diyebiliriz.
A: Tamam adım sayısı ile nokta sayısı arasında nasıl bir ilişki var?

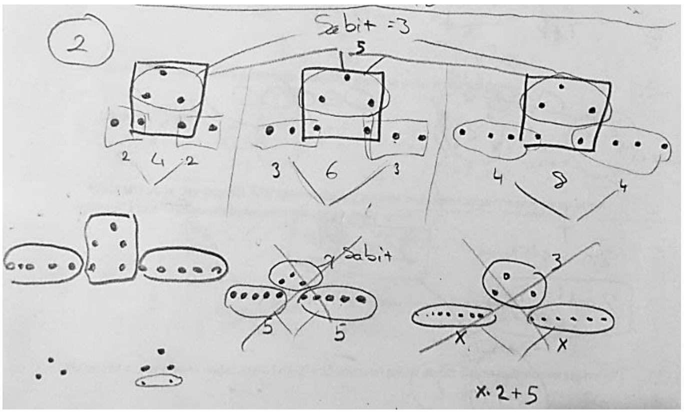
Yağız: Yani bütün adımlarda bu 5 tane sabit olacak, o yüzden bence ben değişenlere bakarak kural bulmaya çalışayım. Şimdi birinci adımda 2, sonra 4 sonra 6 olmuş ya yani göründüğü gibi adım sayısının 2 katı oluyor. Bu yüzden mesela n. adımda yine adım sayısının 2 katını alırız o da 2n olur bir de 5 ekleriz 2n+5 olur.
…

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Yağız şekil analizine dayalı olarak örüntün genel terimini belirlemiş ve tümdengelimsel muhakeme ile örüntünün genel terimi şekille ilişkilendirmiştir. Öğrenciye örüntünün önceki adımları sorulduğunda, öğrenci örüntünün 0. adımını çizerek bu örüntünün ilk adımında ilk beş noktanın sabit kalacağını, 0. adımdan önceki adımların çizilemeyeceğini, çünkü bu örüntünün sabit teriminin 0. adımdaki 5 nokta olduğunu belirtmiştir. Yağız'ın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

…
A: Peki o zaman sana şunu sorayım n nedir?
Yağız: Yani bilinmeyen herhangi bir adım sayısı. Mesela yerine istediğimizi yazarız 40. adımda kaç tane nokta olduğunu bulmak için n yerine 40 yazarız ya da 200 yazarız istediğimizi yazarız.
A: Tamam peki n sayısı için tam olarak ne söyleyebiliriz yani hangi sayı değerlerini alabilir?
Yağız: Birinci adımdan başladığı için 1'den başlar sonsuza gider yani doğal sayı pardon 0 olmadığı için pozitif sayılar olur.
A: 0. adım olmaz mı?
Yağız: Aslında ben bir yerde görmüştüm o soruda 0. adım, 1. adım diye gidiyordu. Ama burada bir bakayım aslında olur çünkü n yerine 0 yazınca 5 kalır. Yani sadece ilk işaretlediğimiz sabit 5 olur. O yüzden n doğal sayıdır.
A: Tamam daha önceki adımlar çizilebilir mi?
Yağız: Çizilemez çünkü bu örüntüde ilk 5'le başlıyoruz yani örüntünün çekirdeği gibi düşündüm ben o 5'i, sonra giderek büyüyor o yüzden olmaz.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Yağız'ın yaptığı kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan örüntünün genel teriminin 2n+5 olduğu genellemesine ulaştığı ve genellemesini şekille ilişkilendirerek genellemenin doğru olduğuna ikna olduğu görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencinin görüşmesinden görüldüğü gibi Yağız şekli analiz etmeden sadece ardışık terimler arasındaki farka odaklanarak bulduğu genel terimin öğretmen tarafından kabul edilmeyeceğini bilmektedir. Yağız'ın kanıt yaparken örüntü kavramı, örüntünün yakın adımını bulma, örüntünün genel terimini bulma, değişken gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtında kullandığı, ulaştığı genellemenin neden doğru olduğunu açıklayabildiği görülmüştür. Kanıt burada *ilişkileri ortaya çıkarma ve kavrayış* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

4 öğrencinin belirgin strateji kullanarak adım sayısı ve adım sayısına karşılık gelen sayı arasındaki ilişkiyi keşfettikleri, buna ilişkin bir varsayım oluşturdukları ve bu varsayımlarını kanıtladıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden 2'si (Bahri ve Esra) örüntüdeki değişen ve değişmeyen şekilleri analiz ederken önce her adımda üstteki 3 noktanın sabit olduğunu, birinci adımda altta 4 nokta, ikinci adımda altta 6 nokta, üçüncü adımda altta 8 nokta olduğunu ve her defasında yanlara birer nokta eklenerek örüntünün büyüdüğünü ifade etmişlerdir. Öğrenciler daha sonra şekli tekrar analiz etmişler, şekilde değişmeyen nokta sayısının her adımda 5 olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğrencilerden Bahri'nin çözümü Görsel 4.132.'de sunulmuş ve ilgili ifadeleri aşağıda verilmiştir:



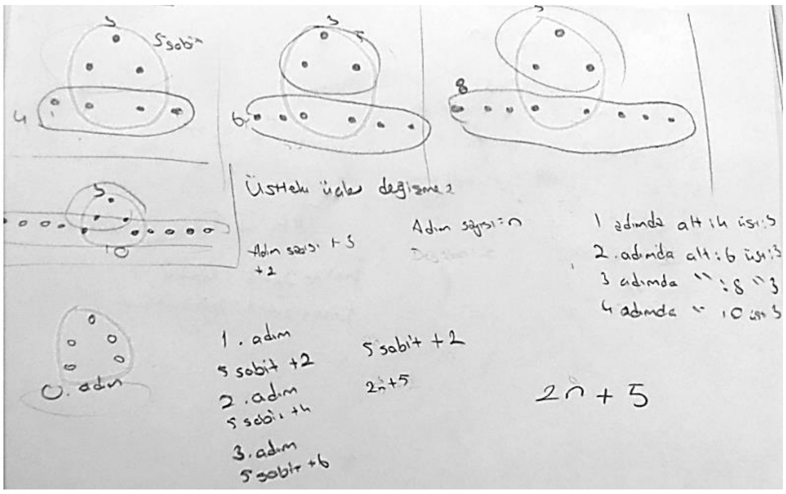
Görsel 4.132. *Bahri'nin son klinik görüşmede Problem 7'de çözümü*

Bahri: Şimdi hocam bu 3'ü sabittir hepsinde. Yani bu yukarıdaki üçü sabit diyorum.
A: Tamam yani yukarıdaki 3'ü değişmiyor diyorsun peki değişenlere bakalım.
Bahri: Şimdi birinci adımda altta 4 tane nokta var, ikinci adımda 6 tane var üçüncü adımda 8 tane var. Yani 2'şer 2'şer artıyor. O zaman 4. adımda altta 10 tane olacak. Mesela birinci adımda sağda 2 tane solda 2 tane, ikinci adımda sağda 3 tane solda 3 tane, 4. adımda sağda 5 tane solda 5 tane olacak. Yukarıda zaten hep 3 tane var. Yani şimdi hocam sağda x tane varsa solda da x tane var, yani 2x olur. Yukarıda da 3 tane var.
A: x dediğin ne?
Bahri: Yani mesela herhangi bir şekilde sağda x nokta varsa solda da x tane vardır. Yukarıda da 3 tane var. Birinci adımda sağda 2 tane var solda da 2 tane var, yani adım sayısının 1 fazlası. İkinci adımda sağda 3 solda 3 var ya yani adım sayısının bir fazlası kadar sağda ve solda nokta var.
A: Tamam x. adım için ne dersin?
Bahri: İşte o zaman da sağda x+1 olur solda da x+1 olur yukarıda da 3 tane var. Yani hepsini toplayayım şimdi x.2+5 olur. Bu da x. adım.
A: Peki 2x+5 dedin ya burada değişen ve değişmeyenlerin neler olduğunu söyler misin?
Bahri: Hocam x değişiyor o adım sayısı zaten 1 olur 2 olur, 3 olur. Ama 5 sabit.
A: Tamam az önce 3 sabit dedin şimdi 5 sabit diyorsun.
Bahri: Hocam aslında ben şimdi fark ettim de şöyle yapsam daha doğru. Ben bu 5'i alayım çünkü benim yazdığım formülde 5 sabit o zaman bir düşüneyim hocam…Şimdi 5 sabit

hepsinde birincide yanlarda 2 nokta, ikincide yanlarda 4 nokta falan. Ha tamam hocam 5 sabit yanlardaki nokta sayısı adım sayısının 2 katı oluyor.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Bahri örüntüdeki değişen ve değişmeyen şekilleri analiz ederken önce her adımda üstteki 3 noktanın sabit olduğunu söylemiş, örüntünün genel terimini 2n+5 olarak belirledikten sonra ise şekil ile genel terimi ilişkilendirirken şekilde değişmeyen nokta sayısının her adımda 5 olduğunu belirtmiştir. Bunun üzerine araştırmacının yönlendirmesi ile hem öğrencinin ilk iddiası çürümüş, hem de öğrenci iddiasının neden yanlış olduğunu anlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Esra da Bahri'nin çözümüne benzer bir şekilde, Görsel 4.133.'te sunulduğu gibi öncelikle her adımda üstteki 3 noktanın sabit olduğunu belirtmiş, daha sonra düşüncesini değişmeyen nokta sayısının her adımda 5 olduğu yönünde değiştirmiştir. Esra'nın çözümünün bir bölümü aşağıda sunulmuştur:



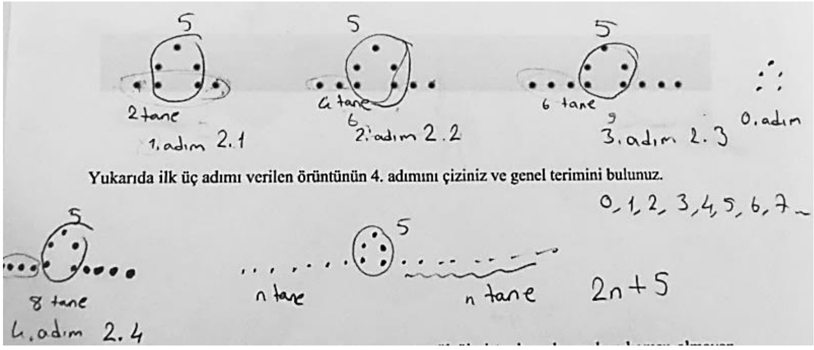
Görsel 4.133. *Esra'nın son klinik görüşmede Problem 7'de çözümü*

Esra: İncelediğimde şunu fark ettim mesela bunlar hiç değişmiyor yani bu üçlüler.
A: Tamam yuvarlak içine alalım.
Esra: Alta ise iki taraftan da hep 1'er tane eklemiş. Birinci adımda her bir yanda 2 tane var ikinci adımda 3 tane olmuş, sonra 4 tane sonra 5 tane olmuş. Sabit olanlar her zaman 3, şimdi birinci adımda 4 tane var, ikinci adımda 6 tane üçüncü adımda 8 tane var 4. adımda 10 tane var. Yani, bunlar 2'şer 2'şer artıyor.
Esra: Hocam değiştirmek istiyorum. Şimdi bu 5'liler sabit.
A: Neden değiştirdin?
Esra: Sanki daha doğru olacak. 1. adımda sağa bir sola bir koymuş yani 2 tane koymuş. İkinci adımda da 5 sabit sonra yanlara 1'er tane daha koymuş yani 2 ve 2 tane oldu toplam

4, 3. adımda 5 sabit yanlarda 3 ve 3 tane oldu toplam 6 oldu. O zaman n. adımda 5 sabit olacak, adım sayısını da 2 ile çarpıyoruz alttakileri bulmak için. O zaman 2n +5 olur.
A: Neden 2n dedin?
Esra: Çünkü her adımda alttaki yuvarlaklar adım sayısının 2 katı kadar olmuş. Mesela birinci adımda 2 olmuş, ikinci adımda 4 olmuş.
…

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Esra örüntünün nasıl büyüdüğünü analiz etmiş, bu analizine dayalı olarak örüntünün genel terimini belirlemiş ve tümdengelimsel muhakeme yaparak örüntünün genel terimini şekille ilişkilendirmiştir. Öğrenciye önceki adımları sorulduğunda Esra örüntünün 0. adımını çizmiş ve *"Bence daha fazla küçültemeyiz. Çünkü o zaman örüntü bozulur."* şeklinde n'nin 0'dan başladığını ifade etmiştir. Hem Esra'nın hem de Bahri'nin yaptıkları kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan örüntünün genel teriminin 2n+5 olduğu genellemesine ulaştıkları ve genellemelerini şekille ilişkilendirerek genel terimin doğru olduğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilerin görüşmesinden de görüldüğü gibi kanıt yaparken örüntü kavramı, örüntünün yakın adımını bulma, örüntünün genel terimini bulma, değişken gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtlarında kullandıkları, ulaştıkları genellemenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Kanıt burada *ilişkileri ortaya çıkarma ve kavrayış* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Elif ve Eylül çok benzer çözümler yapmışlardır. Her iki öğrencinin de örüntünün nasıl büyüdüğünü analiz ettikleri, bu analize dayalı olarak örüntün genel terimini belirledikleri ve tümdengelimsel muhakeme ile örüntünün genel terimini şekille ilişkilendirdikleri görülmüştür. Eylül'ün çözümü Görsel 4.134.'te sunulmuş ve ilgili ifadeleri aşağıda verilmiştir:



Görsel 4.134. *Eylül'ün son klinik görüşmede Problem 7'de çözümü*

Eylül: 4. adımı çizeyim önce.
A: Nasıl çizeceksin yani neye dikkat ediyorsun?
Eylül: Hocam şunlar hepsinde aynı kalıyor.
A: Neyler aynı kalıyor yuvarlak içine alır mısın?
Eylül: Buralar hepsinde 5 kalıyor. Bir taraftan 1 tane diğer taraftan da 1 tane olacak şekilde artıyor.
A: Nasıl yani gösterir misin?
Eylül: Yani yanlara doğru bir bir artıyor. Birinci adımda 2 tane oluyor. Sonra ikinci adımda bir bu tarafa bir de bu tarafa birer tane eklenmiş. Yani 4 tane olmuş. Üçüncü adımda da bir bu tarafa bir bu tarafa 1 tane daha eklenmiş yani 6 olmuş. O zaman dördüncü adımda 4 tane sağda 4 tane solda olacak ve 8 tane olacak.
A: Tamam peki adım sayısı ile nokta sayısını nasıl ilişkilendirirsin?
Eylül: n. adımı çizersek eğer şimdi ortada 5 tane oldu.
A: Tamam yanlarda nasıl olacak?
Eylül: Şimdi 1. adımda 2 tane var, 2.1 olur, 2. adımda 4 yani 2.2.olur, 3. adımda 6 yani 2.3 olur, hep adım sayısının 2 katı oluyor. Yani çizdiğimizde sağda n tane varsa solda da n tane olacak. Çünkü 4. adımda da bakın sağda 4 solda 4 olmuş.
A: Tamam n. adımı yazar mısın?
Eylül: 5 sabit n tane sağda n tane solda o yüzden 5+2n ya da 2n+5 diyebiliriz.
…

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Eylül önce örüntünün yakın adımını çizmiş, örüntüyü analiz ederek adımlardaki değişen ve değişmeyen şekilleri belirleyebilmiş, bunları sayılarla ilişkilendirerek yazmış ve örüntün genel terimini doğru bir şekilde belirleyebilmiştir. Eylül'e "n" değişkeninin ne olduğu sorulduğunda Eylül'ün ifadeleri aşağıdaki gibi olmuştur:

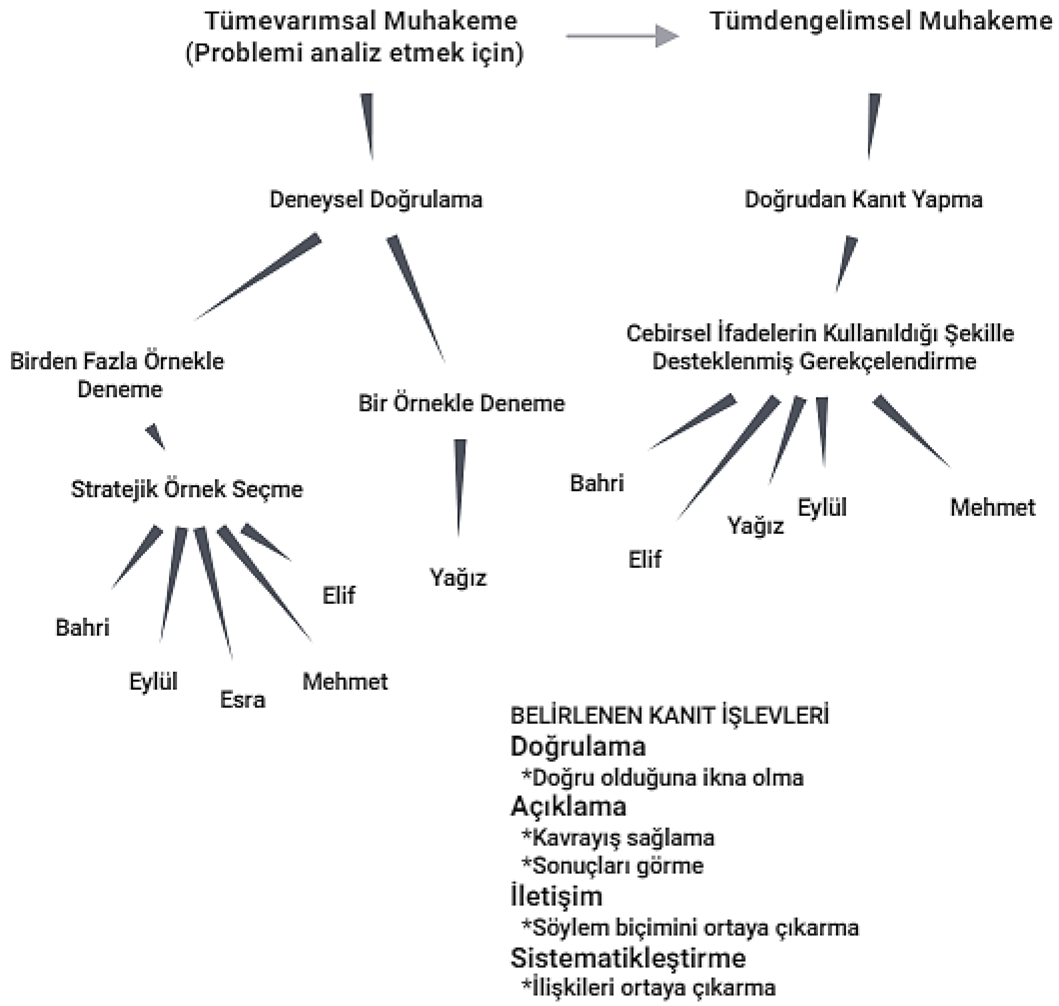
…
A: Tamam çok güzel peki n nasıl bir sayıdır?
Eylül: Bilinmeyen yani aslında her şey olur. Yani herhangi bir sayı olabilir. Bütün adımlar için kullanırız.
A: Tamam n. adım diyoruz doğru söylüyorsun peki n nasıl bir sayıdır? Yani tam sayı, doğal sayı rasyonel sayı bu şekilde düşünürsek nasıl bir sayıdır?
Eylül: Soruda 1'den başlamış o zaman 1'den başlar istediğimiz yere kadar gider.
A: Ben bütün adımları yazmamış olabilirim.
Eylül: Zaten biz 5. ya da 6. adımı falan çizebiliriz yani öncekiler de olur mu? Mesela 0. adım olsa 2.0=0 olur 5 eklersek 5 olur. O zaman sadece 5 tane olur. Yanlarda bir şey olmaz.

> Mesela -1'den başlayayım. Ama hocam o zaman 3 çıkıyor. Bence 0'dan başlar çünkü daha fazla top sayısı azalırsa buradaki sabit sayı 5 çıkmaz.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi öğrenci önce örüntünün -1. adımdan başlayabileceğini göz önünde bulundurmuş; ancak örüntünün bozulacağını düşünerek bu düşüncesinden vazgeçmiştir. Elif de Eylül'e çok benzer bir çözüm yapmış ve örüntünün önceki adımlarını çizerken örüntüyü -1. adımdan başlatmış ve -1. adımda 3 tane nokta kalacağını ifade etmiştir. Bunun üzerine öğretmen Elif'ten bulduğu genel terimi tekrar yorumlamasını ve değişen ve değişmeyen terimleri tekrar analiz etmesini istemiştir. Bunun üzerine Elif *"Hocam şimdi 2n+5 dedim ben genel terime burada n değişir yani adım sayısı ya, 1. adım olur, 2. adım olur yani bu değişir. Zaten 2'yle çarpıldığı için de 2n değişir 5 sabit kalıyor. Ha hocam anladım niye öyle dediğinizi. 5 sabit kalacak -1. adım olmaz diyorum."* şeklinde ifade etmiştir. Bu şekilde araştırmacının yönlendirmesi ile hem öğrencinin ilk iddiası çürümüş, hem de öğrenci iddiasının neden yanlış olduğunu anlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte her iki öğrencinin yaptıkları kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan örüntünün genel teriminin 2n+5 olduğu genellemesine ulaştıkları ve genellemelerini şekille ilişkilendirerek doğru olduğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Her iki öğrencinin kanıt yaparken örüntü kavramı, örüntünün yakın adımını bulma örüntünün genel terimini bulma, değişken gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtlarında kullandıkları, ulaştıkları genellemenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Kanıt burada *ilişkileri ortaya çıkarma ve kavrayış* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

4.6.2. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşme bulguları

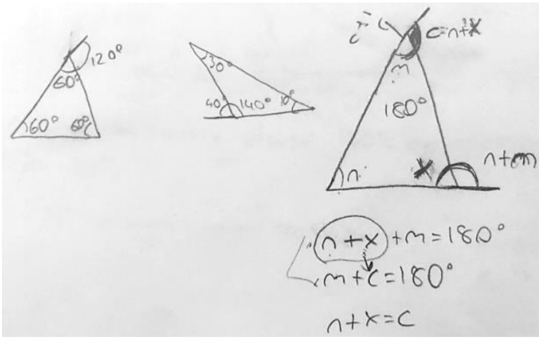
Problem 8 öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken bir geometri problemidir *(P.8: Bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamı ile bu açılara komşu olmayan bir dış açının ölçüsü arasındaki ilişki sence nasıldır?)*. Öğrencilerin Problem 8'i çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.7.'de gösterilmiştir:



Şekil 4.7. *Öğrencilerin son klinik görüşmede Problem 8'i çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.7.'de görüldüğü gibi P.8'de öğrencilerin tamamının problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için önce tümevarımsal muhakeme yaptıkları görülmüştür. 6 öğrenciden 5'inin (Bahri, Elif, Esra, Eylül ve Mehmet) birden fazla örnekle deneysel doğrulama yaptığı ve bu öğrencilerin tamamının stratejik örnekler seçtikleri belirlenmiştir. Bir öğrencinin (Yağız) ise tümevarımsal muhakemesinde bir örnekle deneysel doğrulama yaptığı görülmüştür. 6 öğrenciden 5'inin (Bahri, Elif, Eylül, Mehmet ve Yağız) örnekler yardımıyla oluşturdukları varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri belirlenirken birinin (Esra) oluşturduğu varsayımı kanıtlayamadığı görülmüştür. Öğrencilerin tamamının çözümlerinde hem görsel temsiller hem de cebirsel temsiller kullandıkları görülmüştür.

Stratejik örnekler seçerek deneysel doğrulama yapan öğrencilerden biri olan Bahri tümevarımsal muhakeme ile varsayım oluşturmuştur. Öğrenci Görsel 4.135'te sunulduğu gibi stratejik örnekler olarak eşkenar üçgen ve geniş açılı üçgen örneklerini seçmiştir. Bahri'nin açıklamalarından eşkenar üçgen seçmesinin nedeninin hesaplamaların kolay yapıldığı, akla ilk gelen basit bir üçgen olduğu, geniş açılı üçgen seçmesinin nedeninin ise daha önce seçtiği dar açılı üçgenden farklı olması olduğu görülmektedir. Bahri'nin ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.135. *Bahri'nin son klinik görüşmede Problem 8'de çözümü*

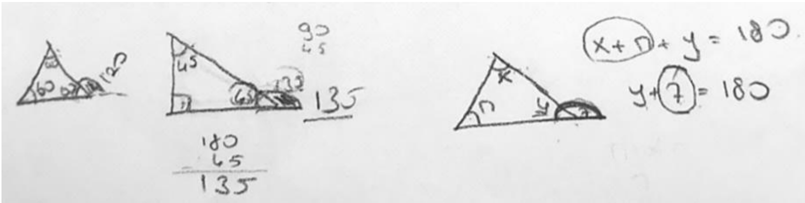
> **Bahri:** Hocam önce ben örnekle anlamaya çalışayım. Mesela eşkenar üçgende denersem şimdi iç açılarının hepsi 60°. Şu iki iç açının toplamı 120° olur. Burası bir doğru olduğu için burası 180° olur. Bu açı 60° olduğu için de burası 120° olur. Yani ikisinin toplamı dışarıdakine eşit oldu. Yani 60'la neyi toplasak 180 olur diye düşündüm. 120'yi toplarız.
> **A**: Neden eşkenar üçgende denedin?
> **Bahri**: En basitinde deneyeyim dedim. Zaten olmasaydı çürümüş olacaktı ama çürümedi. Bir de geniş açılı da deneyeyim.
> **A:** Neden geniş açılıda deneyeceksin?
> **Bahri**: Şimdi ilki eşkenardı yani dar açılı belki sadece dar açılılarda oluyordur o yüzden bir de bunu deneyeyim. 140° olsun, burası da 30° olsa iç açıların toplamı 180° olduğu için bu açıya 10° kalır. Şimdi ben bu iç açıyı alayım, burası 140° olduğu için burada da bir doğru var bunun dış açısı 40^0 olur. Aynı şekilde 10'la 30'u toplayınca da 40 olur. Yani sanırım ikisinin toplamı dışarıya eşit oluyor.
> **A:** Tamam yani varsayımın ne?
> **Bahri:** İki iç açının toplamının bir dış açıya eşit olması. Hocam mecburen böyle olmak zorunda çünkü şimdi zaten üçgenin iç açılarının toplamı 180°'dir. Bir de bir iç açıyla bir dış açıyı toplayınca da 180° çünkü orada bir doğru var.
> **…**

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Bahri genelleyici bir örnekten hareketle tüm durumlara genelleme yapmasını sağlayan bir açıklama yapmıştır. Ancak bu açıklamasını yeterli bulmayarak üçgenin iç açı ölçüleri toplamından elde ettiği bir denklem ile bir iç açıya komşu olan bir dış açının oluşturduğu doğrusal açıdan elde ettiği bir başka denklem oluşturmuş ve buradan iki iç açının ölçüleri toplamının komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olduğunu kanıtlamıştır. Bahri'nin ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

> …
> **A:** Tamam açıklamanı beğendim.
> **Bahri:** Ama şimdi kanıt yapayım. Buraya n, buraya m, buraya da x diyeyim. Bu üçgenin iç açılarının toplamı 180^o olur. O zaman n+x+m =180^o diyebiliriz. Şimdi bu m'nin yanındaki dış açıya da c diyeyim. O zaman m'le c'nin toplamı da 180^o. Şimdi kanıtlamam gereken bu ikisinin toplamının c'ye eşit olması yani n'le x'i toplayınca c olacak. Aslında doğru çünkü bu üçünün toplamı 180, m ile c'nin de toplamı 180 yani ayrı ayrı bunlar 180 ise mecburen n'le x'in toplamı c'ye eşit olmalı.
> **A:** Peki bu üçgenin diğer açıları için de geçerli midir? Yani m açısını değil de x açısını alsaydın x'in yanındaki dış açı da n ile m'nin toplamına eşit olur mu?
> **Bahri:** Olur hocam her türlü. Çünkü yine üçgenin iç açıları yani bu üçünün toplamı 180^o olacak, sonra yine x'le dış açının toplamı 180^o olacak o zaman mecburen bu dış açıya diğer iki iç açının toplamı kalır.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Bahri kanıtında hem görsel hem de cebirsel temsiller kullanarak gerekçelendirme yapmıştır. Öğrencinin yaptığı kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamının bu açılara komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olduğu varsayımının doğru olduğuna ikna olduğu görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğru olduğuna ikna olma* olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma* olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Bahri'nin kanıta yüklediği anlamı, hem de problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Bahri'nin genelleyici bir örnekten hareketle tüm durumlara genelleme yapmasını sağlayan bir açıklama yaptığı; ancak kendi açıklamasını yeterli bulmayarak daha genel ve kesin bir çözüm arayışına girdiği görülmektedir. Ayrıca Bahri'nin kanıt yaparken eşkenar üçgen, geniş açılı üçgen, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, doğru açı gibi pek çok kavramı, özelliği ve teoremi ilişkilendirerek kanıtında kullandığı görülmüştür. Öğrencinin yaptığı cebirsel işlemleri de nedenleri ile birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama ve sonuçları görme,* sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

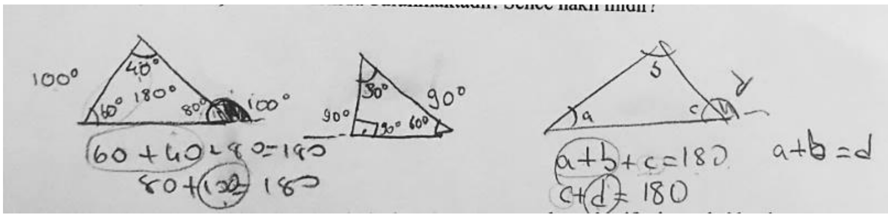
Stratejik örnekler seçerek deneysel doğrulama yapan öğrencilerden bir diğeri olan Elif tümevarımsal muhakeme yaparak varsayım oluşturmuştur. Öğrenci Görsel 4.136.'da sunulduğu gibi stratejik örnek olarak eşkenar üçgen ve dik açılı üçgen örneklerini seçmiştir. Elif'e eşkenar üçgen seçmesinin nedeni sorulduğunda öğrenci *"kolay üçgen"* ifadesini kullanmış, dik açılı üçgen seçmesinin nedenini ise daha önce seçtiği dik açılı üçgenden farklı bir üçgen seçmek istemesi olarak ifade etmiştir. Öğrencinin hem görsel hem de cebirsel temsiller kullanarak gerekçelendirme yaptığı görülmüştür. Elif'in ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.136. *Elif'in son klinik görüşmede Problem 8'de çözümü*

…
Elif: Hocam sonsuz tane üçgen çizebiliriz. O yüzden harfle alırsak bütün üçgenler için olur o. Bu açı x olsun burası da y olsun. y'nin yanındaki dış açıyı alınca o da z olsun. x+y+z= 180° olur. y+z de 180° olur. Bizim x+n, z'ye eşit midir onu kanıtlamalıyım. Yani örneklerle eşit olduğunu gördük ama nasıl eşit oluyor. Hocam bir düşünebilir miyim?
A: Düşünebilirsin.
Elif: Hocam içle dışın toplamı 180°. Yani bir tane iç açıyı alırsak üçgenin içinden geriye 2 tane iç açı kalır. Aynı şekilde bir içle bir dışın toplamı da 180° bir içi alırsak geriye bir dış kalır. Her ikisinde de 180'den aynı sayıyı çıkarıyoruz. O zaman yani 180'den mesela hep 60 çıkarıyoruz geriye hep 120 kalır. İşte geriye kalan iki iç açının toplamı olur bir de bir dış açı olur.

Stratejik örnekler seçerek deneysel doğrulama yapan öğrencilerden bir diğeri olan Eylül, Bahri ve Elif'in çözümlerine çok benzeyen bir çözüm yapmıştır. Eylül, Görsel 4.137.'de sunulduğu gibi önce dar açılı bir üçgen sonra dik açılı bir üçgen seçerek, bir üçgende iki iç açının ölçüleri toplamının bu açılara komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğu varsayımında bulunmuştur. Öğrencinin bu varsayımını cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıtladığı görülmüştür. Eylül'ün ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



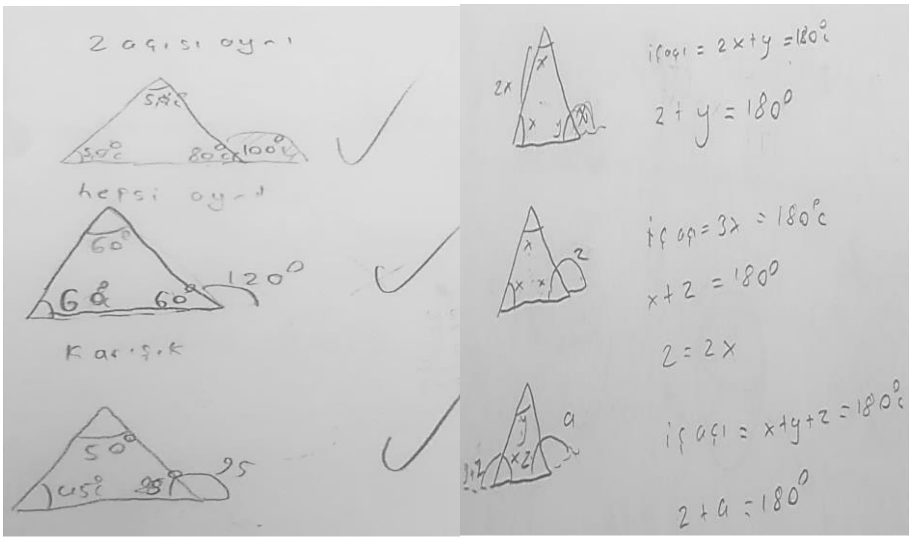
Görsel 4.137. *Eylül'ün son klinik görüşmede Problem 8'de çözümü*

…
A: Ne eşit çıktı?

Eylül: Yani iki iç açının toplamı bir dışa eşit oldu.
A: Tamam yani varsayımın tam olarak ne?
Eylül: İki iç açının toplamı her zaman bir dışa eşit olacak diyorum. Şimdi kanıtlamam lazım ama. Hocam mantıklı düşündüğümüzde mesela dik üçgende 30'la 60'ın toplamı 90, dışarıdaki 90. Çünkü üçünün toplamı 180^o olmalı. Diğerinde de aynı şey yani 40+60+100= 180^o olacak zaten 80'le 100 de 180 olmalı. Zaten 40'la 60'ı toplayınca da 100 olmalı. Yani eşit olmak zorunda.
A: Tamam genel bir üçgen üzerinde bana açıklar mısın?
Eylül: O zaman buraya a diyelim, bu açı b olsun bu açı da c olsun. Şimdi hocam örneklerle yaptığımızın aynısı. a+b+c=180 oluyor. Bu dış açı da d olsun c+d = 180 olur. Şimdi a+b=d olur. Çünkü birinci denklemde a+b ve c var, ikincide ise d ve c var. Yani c aynı sonuçlar da aynı hep 180 olmalı. O yüzden a+b ile d aynı olmalı.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Eylül üçgenin iç açı ölçüleri toplamından elde ettiği bir denklem ile bir iç açıya komşu olan bir dış açının oluşturduğu doğrusal açıdan elde ettiği bir başka denklem oluşturmuş ve buradan iki iç açının ölçüleri toplamının komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olduğunu doğrudan kanıtlamıştır. Öğrencinin hem görsel hem de cebirsel temsiller kullanarak gerekçelendirme yaptığı görülmüştür. Hem Elif'in hem de Eylül'ün yaptıkları kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamının bu açılara komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olduğu varsayımının doğru olduğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğru olduğuna ikna olma* olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede hem Elif'in hem de Eylül'ün problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Her iki öğrencinin de kanıt yaparken dar açılı üçgen, eşkenar üçgen, dik açılı üçgen, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, doğru açı gibi pek çok kavramı ve özelliği ve teoremi ilişkilendirerek kanıtlarında kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları cebirsel işlemleri de nedenleri ile birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin alt işlevlerinden *kavrayış sağlama ve sonuçları görme,* sistematikleştirme işlevinin alt işlevlerinden *ilişkileri ortaya çıkarma* olarak hizmet etmiştir.

Stratejik örnekler seçerek varsayım oluşturan ve bu varsayımını doğrudan kanıtlayan öğrencilerden bir diğeri olan Mehmet, Görsel 4.138'de sunulduğu gibi bir ikizkenar üçgen, bir eşkenar üçgen ve bir de çeşitkenar üçgenle deneysel doğrulama yapmıştır. Öğrencinin tümevarımsal muhakeme ile bir üçgende iki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğu şeklinde varsayımını oluşturduğu ve bu varsayımını doğrudan kanıtladığı görülmüştür. Ancak Mehmet doğrudan kanıt yaparken deneysel doğrulamada yaptığı gibi bir ikizkenar üçgen, bir eşkenar üçgen ve bir de çeşitkenar üçgen kullanarak doğrudan kanıt yapmıştır. Öğrencinin her üç üçgen için ayrı ayrı üçgenin iç açı ölçüleri toplamından elde ettiği denklemler ile bir iç açıya komşu olan bir dış açının oluşturduğu doğrusal açıdan elde ettiği denklemlerden yararlanarak iki iç açının ölçüleri toplamının komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olduğunu kanıtladığı görülmüştür. Mehmet'in ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.138. *Mehmet'in son klinik görüşmede Problem 8'de çözümü*

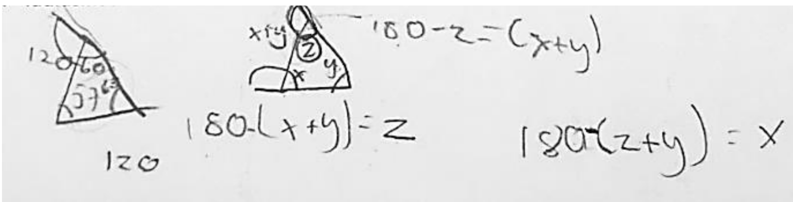
…

Mehmet: Yani örneklerde olduğu gibi iki iç açının toplamı her zaman bir dış açıya eşittir.
A: Herhangi bir dış açıya mı?
Mehmet: Yok komşusu olmayana eşittir. Şimdi o zaman örnekle yaptığımı cebirle yapmaya çalışayım. Şimdi buraya çizersek önce iki açısı aynı olsun. Yani önce ikizkenar, sonra eşkenarla deneyeyim sonra da üçü farklı olduğunda nasıl olur öyle yapayım. Şimdi bu açı x, bu açı da x olsun burası da y olsun. Dış açı da z olsun. Şimdi iç açıların toplamı 180° olduğu için x+x+y=180 olur. Bir de z+y=180 olur. Şimdi 2x+y=180 oldu bir de z+y=180 oldu. Şöyle söyleyebiliriz şimdi y'yi 180'e tamamlayan 2x var burada, diğerinde de y'yi 180'e tamamlayan z var. Yani bu ikisinin aynı olması gerekir. Yani z ve 2x in eşit olması gerekir. Yani kanıtladım ikizkenar üçgende.
A: Tamam.
Mehmet: Şimdi hepsini aynı alalım. Yani x, x, x, olarak alalım. Bu x'in dış açısına da z diyeyim. Şimdi burada iç açıların toplamı 3x oldu ve 3x=180 bir de x ve z'nin toplamı da 180 oldu. x+z=180 Şimdi yine aynı şey oldu, bu z'nin 2x eşit olması gerekir ki 3x=180 olsun.
A: Tamam
Mehmet: Bir de hepsi farklı olsun. Buna x, buna y, buna z dersem. Şimdi bu z'nin yanındakine de mesela a diyelim. İç açıların toplamı x+y+z=180 oldu. Bir de z+a=180 oldu. İşte burada a'nın x+y olması gerekir ki 180'e tamamlansın. Yani şöyle düşündüm

içeride üç tane açı var bunların toplamı 180, dışarıda ise bir dış açı var bir de yanında bir iç açı var yani iki tane açı var bunların da toplamı 180. Her iki durumda da toplamın 180 olabilmesi için o kalan 2 açı mecburen dışarıya eşit olmalı.
A: Tamam peki bir şey daha sorayım. Şimdi z'nin dış açısını kullandın ve y ile x'in toplamı a'ya eşit oldu. Peki diğer dış açılar için de böyle olur mu? Yani x'in dış açısı için yine aynısı olur mu?
Mehmet: Olur çünkü içeride x'le beraber y ve z'nin toplamı 180, yani üçünün toplamı 180 olur. Dışarıda ise x'le beraber bir dış açının toplamı 180. İşte iki toplamın da 180 olması için y ile z'nin toplamının dış açıya eşit olması gerekir. Yani açılar ne olursa olsun bütün üçgenlerde böyle olur. O yüzden her zaman doğrudur diyorum.
A: Tamam aferin sana. Peki bütün üçgenler için doğru olması için açıları x,y,z, alman yeterli değil miydi? Neden ikizkenar ve eşkenarla da denedin?
Mehmet: Hocam aslında siz söyleyince fark ettim. Uzattım sanırım. x,y,z diye alsam zaten diğerlerini de içine alırdı.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Mehmet kanıtında hem görsel hem de cebirsel temsiller kullanarak gerekçelendirme yapmıştır. Öğrenci farklı üçgenler üzerinde doğrudan kanıt yaptıktan sonra araştırmacının yönlendirmesi ile tek bir üçgende kanıt yapmasının yeterli olacağını fark etmiştir.

P.8'de sadece Yağız bir örnekle deneysel doğrulama yapmıştır. Öğrenci Görsel 4.139.'da sunulduğu gibi rastgele seçtiği bir örnek yardımıyla hem problemi analiz etmeye çalışmış hem de varsayım oluşturmuştur. Öğrencinin tümevarımsal muhakeme yaparak oluşturduğu varsayımını hem görsel hem de cebirsel temsiller kullanarak doğrudan kanıtladığı görülmüştür. Yağız'ın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:



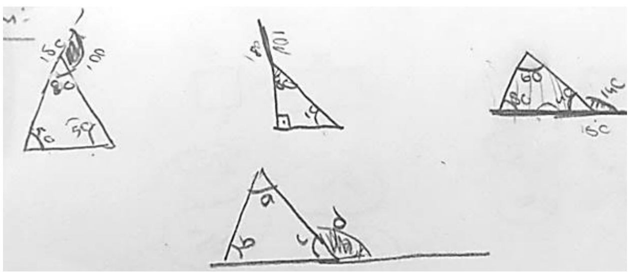
Görsel 4.139. *Yağız'ın son klinik görüşmede Problem 8'de çözümü*

Yağız: Bir düşüneyim. Bunu önce bir üçgen üzerinde gösterecek olursak burası 60^o olsun, burası 57^o olsun buraya da 63^o kalır. Şimdi şu ikisini komşu olarak düşünürüz yani 60^o ve dışındaki 120^o'yi. Zaten iç ve dış açının toplamının 180^o olması gerekir. Diğer ikisini, toplarsak 57^o ile 63'ü bu toplamda 120 olur. Yani eşit çıktı. Zaten mantıken düşündüğümüzde şimdi bu ikisinin toplamı 180^o zaten 180'den 60 çıkınca 120 kalıyor. Bir de bu üçünün de toplamı 180, 180 den 60'ı çıkarınca yine 120 kalır yani diğer iki iç açının toplamı olur bu da.
A: Tamam varsayımını söyler misin?
Yağız: Yani iki iç açının toplamı bir dış açıya eşit olacak ama şimdi sizi ikna etmem gerekecek. Şimdi şöyle yapsam bu üçgende bu açı x olsun, bu y bu da z olsun. Şimdi 180'den x+y çıkarılırsa z kalır. Çünkü üçünün toplamı 180 olduğu için. Aynı şekilde 180'den z'yi çıkarırsam x+y kalır. Bu durumda z demek ki x+y'ye eşittir. Yani 180'den bu ikisinin toplamını çıkarırsam z kalıyorsa neden 180'den z'yi çıkarınca bu ikisinin toplamı

yani x+y kalmasın ki? Zaten z ile yanındaki dış açı 180’dir. Bu yüzden dışındaki açı x+y olur.
A: Tamam şimdi sen z iç açısı ve onun yanındaki dış açı için doğru olduğunu gösterdin. Üçgenin diğer açıları için de geçerli olur mu?
Yağız: Fark etmez ki hangi açısını alırsak alalım aynı olur. Yani x’i alsam 180’den z+y’yi çıkarınca x kalır. 180’den x’i çıkarınca da z+y kalır. Bu yüzden bu kural hem bütün üçgenlerde hem de üçgenin tüm açıları için değişmez.

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi hem Mehmet’in hem de Yağız’ın yaptıkları kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan bir üçgenin iki iç açısının ölçüleri toplamının bu açılara komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olduğu varsayımının doğru olduğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede öğrencilerin problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Hem Mehmet hem de Yağız kanıt yaparken çeşitkenar üçgen, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, doğru açı gibi pek çok kavramı, özelliği ve teoremi ilişkilendirerek kanıtlarında kullanmışlardır. Öğrencilerin yaptıkları cebirsel işlemleri de nedenleri ile birlikte açıkladıkları görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin alt işlevlerinden *kavrayış sağlama ve sonuçları görme,* sistematikleştirme işlevinin alt işlevlerinden *ilişkileri ortaya çıkarma* olarak hizmet etmiştir.

Kanıt yapamayan tek öğrenci olan Esra ise deneysel doğrulama yaparken Görsel 4.140.’ta sunulduğu gibi ikizkenar, dik üçgen ve çeşitkenar üçgen örnekleri ile tümevarımsal muhakeme yaparak bir üçgende iki iç açının ölçülerinin toplamının kendilerine komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğu varsayımında bulunmuştur. Ancak öğrenci bu varsayımını kanıtlayamamıştır. Esra’nın ilgili ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



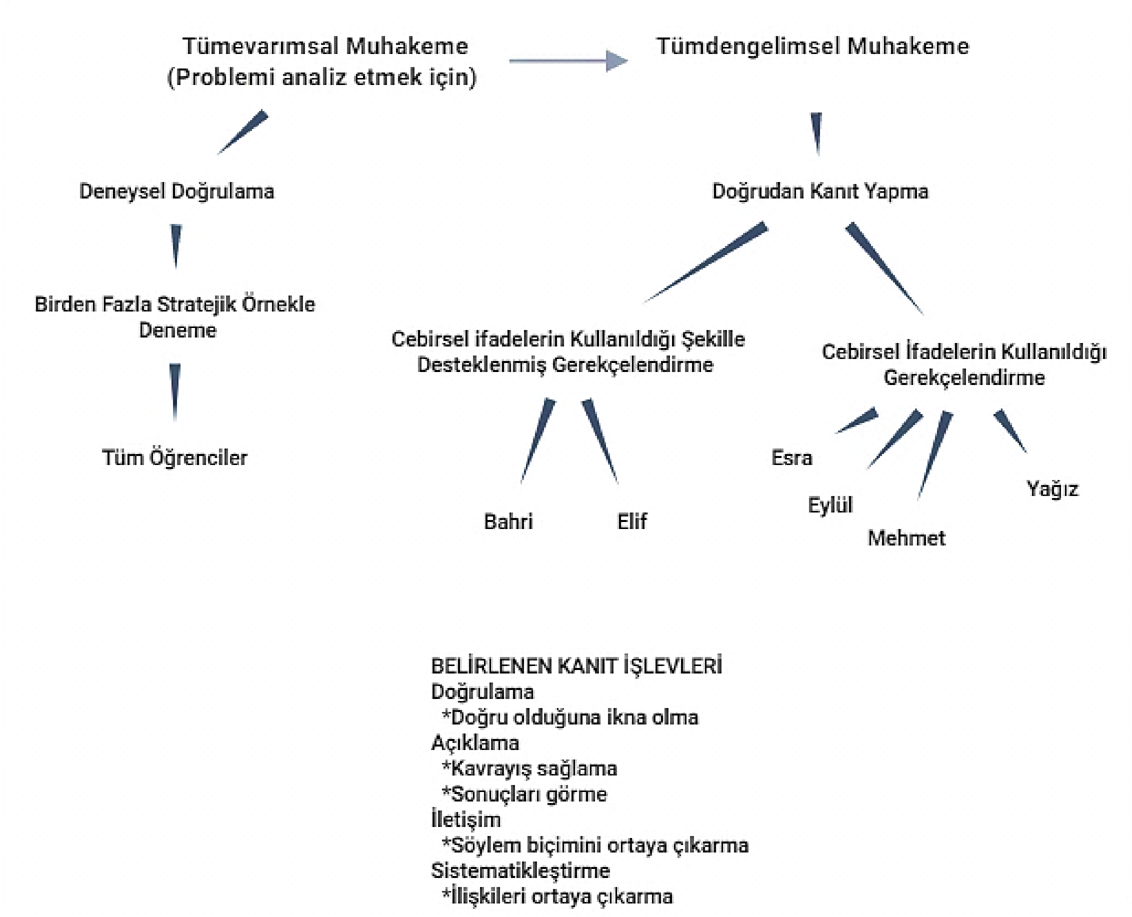
Görsel 4.140. *Esra’nın son klinik görüşmede Problem 8’de çözümü*

…
A: Evet üç örnekle yaptın, ne diyorsun?
Esra: O zaman iki iç açının toplamı bir dışa eşit olacak. Ama bu dış bu iç açılara komşu olmayan olacak.
A: Tamam şimdi bu varsayımını kanıtlaman lazım.
Esra: Bu sayıların yerine harfleri koyacağım. Burası a, burası b burası da c olsun. Bu dış açı da d olsun. Az önce örnekle yaptığım gibi yapacağım. Açıların toplamı 180° oluyor. Yani a+b+c =180 bir de c+d =180 olacak. Şimdi buradan sonra ne yapacağımı bilmiyorum ama…
A: Tamam çok güzel gidiyorsun.
Esra: Hocam çok harf var nasıl çözeceğim?
A: O harflerin hepsi neye eşit onu bulmayacağız ki? Biz sadece neden dış açıya eşit olduğunu açıklayacağız.
Esra: Yani a ve b'nin toplamı neden d oluyor?... Hocam çok kafam karıştı bu harflerle. Sayılarla kolaydı ama.
A: Sayıları kullanarak nasıl yaptın öyle düşünmelisin
Esra: …

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Esra yaptığı tümevarımsal muhakeme ile doğru bir varsayım oluşturmayı başarmıştır. Ancak öğrenci kullandığı harflerin kafasını karıştırdığını söyleyerek tümdengelimsel muhakemeye geçiş yapamamıştır. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Esra'nın problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Esra'nın ikizkenar üçgen, dik açılı üçgen, çeşitkenar üçgen, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, doğru açı gibi pek çok kavramı ve özelliği bildiği; ancak bu bildiklerini mantıksal bir yapı içinde düzenleyip kanıt yapamadığı görülmüştür.

4.6.3. Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşme bulguları

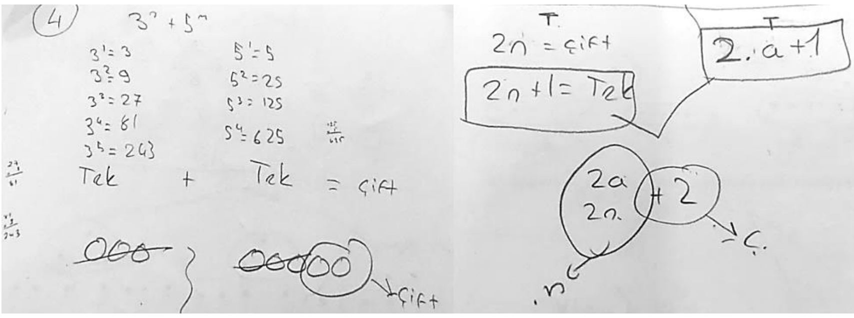
Problem 9 öğrencilerin doğrudan kanıt yapmaları gereken bir sayı problemidir *(P.9: Her n ve m doğal sayısı için $3^n + 5^m$ sayısının tek ya da çift olması hakkında ne söylersin?).* Öğrencilerin Problem 9'u çözme sürecindeki yaklaşımları ve bu süreçte ortaya çıkan kanıt işlevleri Şekil 4.8.'de gösterilmiştir:



Şekil 4.8. *Öğrencilerin son klinik görüşmede Problem 9'u çözme sürecindeki yaklaşımları ve belirlenen kanıt işlevleri*

Şekil 4.8.'te görüldüğü gibi P.9'da öğrencilerin tamamının problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için tümevarımsal muhakeme yaptıkları görülmüştür. Tümevarımsal muhakeme yapan öğrencilerin tamamının oluşturdukları varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri belirlenmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin tümdengelimsel muhakemelerini cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme ya da sadece cebirsel ifadelerin kullanıldığı gerekçelendirme yoluyla olmak üzere iki farklı şekilde yaptıkları belirlenmiştir.

Doğrudan kanıt yapan öğrencilerden 2'sinin (Bahri ve Elif) hem cebirsel ifadelerden hem de görsel temsillerden yararlandıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden biri olan Bahri Görsel 4.141.'de sunulduğu gibi önce tümevarımsal muhakeme yaparak n ve m yerine farklı doğal sayı değerleri vermiş ve böylece 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı olduğunu doğrulamıştır. Bununla birlikte öğrenci 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı çıkma nedenini de gerekçelendirmiştir. Bahri'nin ifadeleri aşağıdaki gibidir:



Görsel 4.141. *Bahri'nin son klinik görüşmede Problem 9'da çözümü*

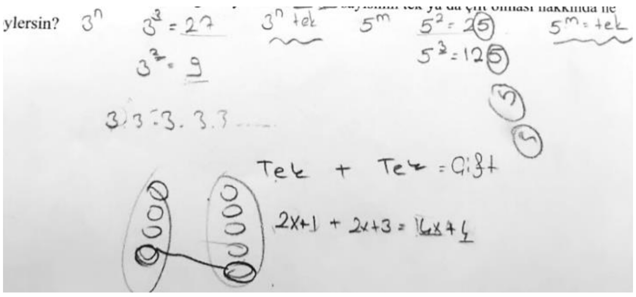
Bahri: Önce 3^n'i yazayım. n doğal sayı değil mi hocam?
A: Evet.
Bahri: Tamam şimdi $3^1 = 3$ olur, $3^2 = 9$ olur, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ olur. Yani bu yaptıklarımın hepsi tek çıktı. Çünkü hep 3'le çarptım bir sonrakini bulmak için.
A: Tamam 3^n için ne söylersin?
Bahri: O da tek olur çünkü 3'le önce 3'ü çarpıyoruz, sonra tekrar 3'le çarpıyoruz. Yani hep 3'le çarpıyoruz o yüzden tek çıkıyor.
A: Neden hep tek çıkıyor?
Bahri: Çünkü hep tekle teki çarpıyoruz. Yani hep 3'le çarpıyoruz hiç araya bir çift sayı girmediği için yani hiç çiftle çarpmadığımız için her zaman tek çıkıyor.
A: Tamam 5'in kuvvetleri için ne söylersin?
Bahri: Onu da yapayım. $5^1 = 5$, $5^2=25$, $5^3=125$, $5^4=625$ çıkıyor. Diğerinde olduğu gibi 5^m hep tek çıkıyor. Çünkü yine hep 5'le çarpılıyor. Bir de bunun birler basamağında her zaman 5 olur. O yüzden 5^m her zaman tek olur. Tekle tekin toplamı da çift olur.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Bahri 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı çıkma nedenini gerekçelendikten sonra iki tek sayının toplamının çift sayı olduğu varsayımında bulunmuş ve bu varsayımını hem görsel temsil hem de cebirsel temsil kullanarak kanıtlamıştır. Bahri'nin ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

…
A: Tamam tekle tekin toplamı neden çift onu da kanıtlamalısın.
Bahri: Şekille yapayım mı? Mesela burada 3 top olsun, burada da 5 top olsun. Bunları 2'li yaparsak hep çift olur.
A: Bir de daha genel bir kanıt yapar mısın?
Bahri: Tamam. n herhangi bir sayı olsun bunu birle toplarsak çift olur. Ama yok n çift olmalı. O zaman ben buna 2.n diyeyim. 2n+1 de tek olsun. Bu birinci tek sayı olsun. Diğerinin de farklı olması için a diyeyim 2a+1 olsun. Şimdi bunları toplarsam 2n ve 2a'nın toplamı zaten çift olur, çünkü ikisini de 2'yle çarpıyoruz. Sonra da 1'leri toplayınca 2 çıkar. Yani bunları toplayınca da çift olur.

Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi Bahri önce genelleyici bir örnek kullanmıştır. Öğrenci görsel temsiller kullanarak 3 ve 5 sayılarını göstermiş ve iki tek sayının toplamının çift sayı olması gerektiğini gerekçelendirmiştir. Ancak araştırmacının yönlendirmesi ile öğrencinin cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıt yaptığı belirlenmiştir. Öğrencinin yaptığı kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan $3^n + 5^m$ işleminin sonucunun çift olduğu varsayımının doğru olduğuna ikna olduğu görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede Bahri'nin problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Bahri'nin kanıt yaparken tek-çift sayı tanımı, üslü ifadeler, 3 ve 5 sayılarının kuvvetlerinin tek sayı olması gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtında kullandığı görülmüştür. Öğrencinin yaptığı cebirsel işlemleri de nedenleri ile birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama ve sonuçları görme,* sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Doğrudan kanıt yapan ve kanıtında hem cebirsel ifadelerden hem de görsel temsillerden yararlanan öğrencilerden bir diğeri olan Elif de Görsel 4.142.'de sunulduğu gibi önce tümevarımsal muhakeme yaparak 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı olduğunu doğrulamıştır. Bununla birlikte öğrenci 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı çıkma nedenini de gerekçelendirmiştir. Elif daha sonra iki tek sayının toplamının çift sayı olduğu varsayımında bulunmuş ve bu varsayımını hem görsel temsil hem de cebirsel temsil kullanarak kanıtlamıştır. Elif'in ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

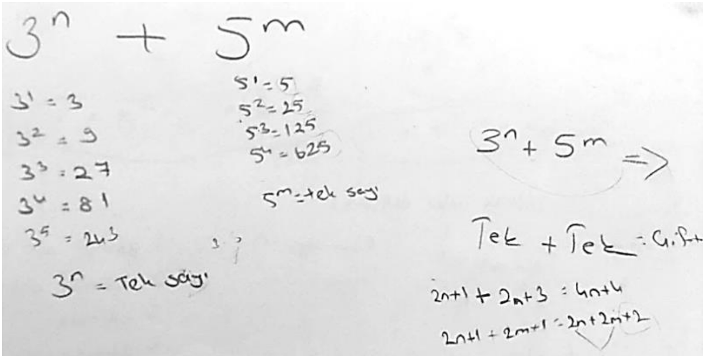


Görsel 4.142. *Elif'in son klinik görüşmede Problem 9'da çözümü*

Elif: n, 3 olursa sonuç 27 çıkar. n, 2 olursa sonuç 9 çıkar yani ikisinde de tek çıktı. 3^n olduğunda hep 3.3.3.3… diyoruz. Yani bir sonrakinde 27'yle 3'ü çarparız sonra yine 3'le çarparız. Hep 3'le çarpıyoruz. O yüzden tek çıkıyor. Çünkü tekle tekin çarpımı tektir.
A: Neden çift olmaz?
Elif: Çünkü çiftle çiftin çarpımı çifttir bir de çiftle tekin çarpımı çifttir. Ama burada hep tekle tekin çarpımı oluyor. O yüzden 3^n tek sayı.
A: Tamam 5^m için ne dersin?
Elif: $5^2 = 25$ olur. 5^3 de 125 olur. Sonra bunu da çarptığımızda 5 kere 5 hep 25 olduğu için kaç tane çarparsak çarpalım bu sonlar hep 5 çıkıyor. Yani 5^m de tektir.
A: Tamam şimdi ikisini de tek buldun. İki tek sayının toplamı için ne dersin?
Elif: Çift olur.
A: Neden?
Elif: Şekil çizebilir miyim?
A: Olur.
Elif: Mesela burada 3 tane top olsun burada 5 tane top olsun. Bu 5 taneden birini alıp 3'ün yanına gönderdiğimizde ikisi de 4 olur. Yani çift olur toplamları.
A: Tamam daha farklı nasıl kanıtlarsın?
Elif: Bir de cebirle yapayım. 2x her zaman çift olur o yüzden birinci tek sayıya 2x+1 diyelim, diğerine de 2x+3 diyelim. Topladığımızda 4x+4 olur. Yani 4'le çarpınca x ne olursa olsun çift çıkar, 4 de çift olduğu için toplayınca çift olur.
A: Neden birini 2x+1 diğerini 2x+3 aldın?
Elif: Fark etmez yani birini 2x-1 de alsak yine tek olur.

Yukarıdaki alıntıdan da görüldüğü gibi Elif önce genelleyici bir örnek kullanmıştır. Öğrenci görsel temsiller kullanarak 3 ve 5 sayılarını göstermiş ve iki tek sayının toplamının çift sayı olması gerektiğini gerekçelendirmiştir. Ancak araştırmacının yönlendirmesi ile öğrencinin cebirsel ifadeler kullanarak doğrudan kanıt yaptığı belirlenmiştir. Elif doğrudan kanıt yaparken iki tek sayıdan birini 2x+1 diğerini 2x+3 olarak ardışık sayıları kullanmayı tercih etmiştir. Öğrenciye bu tercihinin nedeni sorulduğunda fark etmeyeceğini belirtmiştir. Öğrencinin yaptığı kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan $3^n + 5^m$ sayısının çift olduğu varsayımının doğru olduğuna ikna olduğu görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Elif kanıt yaparken tek-çift sayı tanımı, üslü ifadeler, 3 ve 5 sayılarının kuvvetlerinin tek sayı olması gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtında kullandığı görülmüştür. Öğrencinin yaptığı cebirsel işlemleri de nedenleri ile birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama ve sonuçları görme,* sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

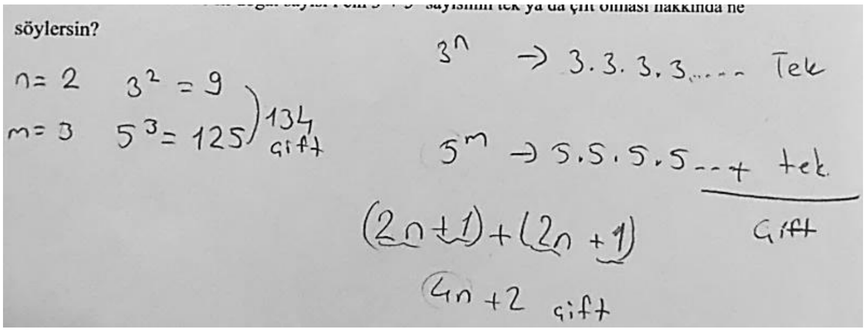
Doğrudan kanıt yapan öğrencilerden 4'ünün (Esra, Eylül, Mehmet ve Yağız) cebirsel ifadeleri kullanarak gerekçelendirme yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden biri olan Esra, Görsel 4.143.'te sunulduğu gibi doğrudan kanıt yaparken ardışık tek sayıları kullanmayı tercih etmiştir. Esra'ya bu tercihinin nedeni sorulduğunda ardışık sayıları aldığını; ancak bu şekilde almasa da sonucun değişmeyeceğini ifade etmiştir. Ayrıca Esra iki tek sayının toplamının çift olduğunu kanıtlarken kullandığı n ve m değişkenlerinin problemde verilen n ve m değişkenleri ile aynı olmadığını belirtmiştir. Esra'nın çözümü aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.143. *Esra'nın son klinik görüşmede Problem 9'da çözümü*

Esra: …Tekle tekin toplamı çifttir.
A: Tamam ama kanıt yapmalısın.
Esra: Biz çift sayıları 2n almayı öğrendik teki de 2n +1.
A: Evet öyle öğrettim ama burada öğretmenimiz öyle söyledi dersen kabul etmiyorduk değil mi nedenleriyle açıklar mısın?
Esra: Çünkü n ne olursa olsun 2 ile çarpınca çift olur sonra 1'le toplayınca da tek olur. O zaman biri 2n+1 olsun, diğeri de 2n+3 olsun. Toplayınca da 4n+4 oldu. Burada 4'ü bir sayıyla çarpınca yani 4'ün katları çifttir 4'le toplayınca da çifttir. Yani çift olur.
A: Neden birini 2n+1 diğerini 2n+3 aldın?
Esra: Yani ardışık aldım ben galiba ama öyle almasak da olur. Mesela 2n+1 olsun buna da farklı dersek 2m+1 olsun. Tabi hocam buradaki n ve m sorudakiyle aynı değil ben öylesine cebir olsun diye. Başka harf de olur. Şimdi toplayınca 2n+2m+2 olur. Yine sonuç çift olur. Çünkü 2'yle çarpıyoruz sonra 2'yle topluyoruz yani sonuç çift.

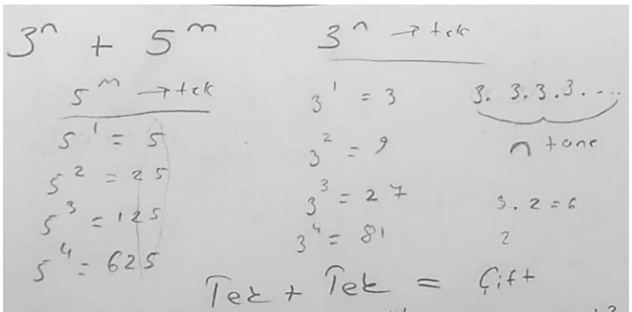
Yukarıdaki alıntıdan görüldüğü gibi öğretmen Esra'nın *"Biz çift sayıları 2n almayı öğrendik teki de 2n +1"* şeklindeki açıklamasını kabul etmemiş, bu durumda öğrenci tek ve çift sayı tanımlarından yararlanarak tek sayıların cebirsel gösterimini yazmış ve iki tek sayının toplamının çift sayı olduğunu kanıtlamıştır. Benzer şekilde cebirsel ifadeleri kullanarak gerekçelendirme yapan öğrencilerden bir diğeri olan Eylül ise Görsel 4.144.'te sunulduğu gibi iki tek sayının toplamının çift olduğunu kanıtlarken iki tek sayıyı aynı cebirsel temsili kullanarak ifade etmiştir. Öğrenciye bunun nedeni sorulduğunda, öğrenci fark etmeyeceğini, önemli olanın iki tek sayının toplamının çift olacağını göstermek olduğunu ifade etmiştir. Eylül'ün ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.144. *Eylül'ün son klinik görüşmede Problem 9'da çözümü*

…
Eylül: Cebirsel olarak gösterirsek n istediğimiz bir tam sayı olabilir. 2n çift sayı olursa ardışık sayılar da tek çift diye gittiği için 2n+1 de tek sayı olur. 2n+1'le 2n+1 i toplarsak 4n+2 olur. 4 çift olduğu için neyle çarparsak çarpalım çift çıkar 2'yle de toplarsak çift olur.
A: İkisini de 2n +1 aldın neden?
Eylül: Fark etmez diye düşündüm. Yani evet sanki burada aynı iki tek sayıyı almış gibi oldum ama önemli olan iki tek sayının toplamının çift olduğunu göstermek sonuçta.

Cebirsel ifadeleri kullanarak doğrudan kanıt yapan öğrencilerden bir diğeri olan Mehmet Görsel 4.145.'te sunulduğu gibi tümevarımsal muhakeme yaparak n ve m yerine farklı doğal sayı değerleri vermiş ve böylece 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı olduğunu doğrulamıştır. Bununla birlikte öğrenci 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin sonuçlarının tek sayı çıkma nedenini de gerekçelendirmiştir. Mehmet daha sonra iki tek sayının toplamının çift sayı olduğu varsayımında bulunmuş ve bu varsayımını cebirsel temsil kullanarak kanıtlamıştır. Mehmet'in ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

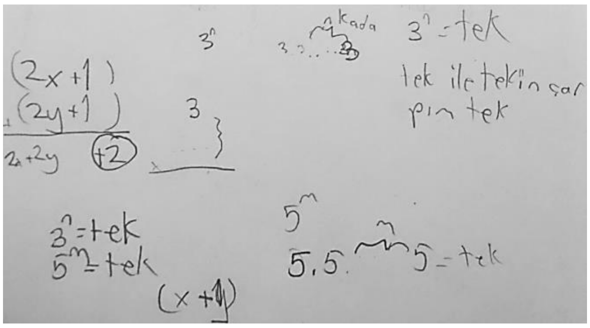


Görsel 4.145. *Mehmet'in son klinik görüşmede Problem 9'da çözümü*

…
Mehmet: İki tek sayının toplamı çifttir. Şimdi biz daha önce kanıtladık bunu diye hatırlıyorum yine de kanıtlayayım mı?

A: Evet.
Mehmet: O zaman çift sayı için 2n yani n ne olursa olsun 2'yle çarpıldığı için çift olur. O yüzden 2n+1 de tek sayı olur. Buna da m dersem mesela burası da aynı şekilde 2m+1 de tek olur. Şimdi toplarsak zaten 2n ve 2m'yi toplayamayız. Bunun sonucu 2n+2m+2 çıkar. Bu da çift olur. Çünkü çift sayıları topladık hep.

Mehmet'in yaptığı çözüme çok benzer bir çözüm yapan Yağız, Görsel 4.146.'da sunulduğu gibi önce 3^n üslü ifadesinin sonucunun tek sayı olduğunu; ancak iki tek sayının çarpımının tek sayı çıkması durumunu nasıl kanıtlaması gerektiğini bilmediğini belirtmiştir. Araştırmacının yönlendirmesi ile 3^n ve 5^m üslü ifadelerinin tek sayı olduğunu tümevarımsal muhakeme yaparak doğrulamış, bununla birlikte bu ifadelerin sonuçlarının tek sayı çıkma nedenini de gerekçelendirmiştir. Öğrenci daha sonra iki tek sayının toplamının çift sayı olduğu varsayımında bulunmuş ve bu varsayımını cebirsel temsil kullanarak kanıtlamıştır. Yağız'ın ifadeleri aşağıda sunulmuştur:



Görsel 4.146. *Yağız'ın son klinik görüşmede Problem 9'da çözümü*

…
Yağız: İlk başta şöyle söyleyebilirim bir tek sayı ile bir tek sayının çarpımı tek çıkar. Ama bunu nasıl kanıtlayacağımı bilmiyorum.
A: Tamam şimdi yavaş yavaş yapalım. 3^n hakkında konuşalım önce.
Yağız: 3'ün bütün kuvvetleri tek olur. Çünkü 3, 9, 27, 81 diye gidiyor yani benim ezberlediklerimin arasında hiç çift sayı yok ama tabi ezberlemediklerim de var ama yine de hep tek sayı çıkar.
A: Neden her zaman tek çıkar dedin?
Yağız: Çünkü 3.3.3.3… yani n tane çarparız. Bir sayının tek olmasını da birler basamağı belirler. Hep devamında 3'le çarpıyoruz. Yani burada bir 2 ya da 2'nin katı olmadığı için çift çıkmaz. Çarpmada çift olması için en az bir tane çiftle çarpması gerekirdi.
A: Tamam 5^m için ne söylersin?
Yağız: O da aynı şekilde olur. Onda da sürekli 5.5.5… diye gidiyor. Yani hep 5'le çarpıyoruz. 5, 25, 125 diye gidiyor. Zaten hep birler basamağı 5 olur.
A: Tamam şimdi toplam hakkında ne söylersin?
Yağız: İki tek sayının toplamı çift olur. Çünkü bunlardan biri x+1 olsun, diğeri de y+1 olsun toplarsak x+y+2 olur. Bu da çift olur.
A: x ve y için bir şey söylemedin yani tek mi çift mi belli değil mesela x 3 olsa y de 4 olsa toplamları 7, tek olur. Daha net ifade etmen lazım.

Yağız: O zaman 2x diyeyim çift diyorduk buna o zaman 2x+1 diyeyim birine tek sayıyı göstermek için, ve 2y+1 diyeyim. Toplamları 2x+2y+2 olur. Zaten 2x çift, 2y çift 2 de çift yani hepsinin toplamı da çift olur.

Yukarıdaki alıntılardan görüldüğü gibi öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan $3^n + 5^m$ sayısının çift olduğu varsayımının doğru olduğuna ikna oldukları görülmektedir. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt öğrenci ile öğretmen arasında fikirlerin iletilmesine olanak tanıdığı için iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma* olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede öğrencilerin problemde kullanılan kavramları nasıl anladığını ortaya çıkarmıştır. Öğrenciler kanıt yaparken tek-çift sayı tanımı, üslü ifadeler, 3 ve 5 sayılarının kuvvetlerinin tek sayı olması gibi pek çok kavramı ve özelliği ilişkilendirerek kanıtında kullandığı görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları cebirsel işlemleri de nedenleri ile birlikte açıkladığı görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama ve sonuçları görme,* sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde katılımcılarla yapılan ön-son testlerden, klinik görüşmelerden ve öğretim uygulamalarından elde edilen bulgulara dayanarak ulaşılan sonuçlara, bu sonuçların alan-yazındaki çalışmalarla karşılaştırılarak tartışılmasına ve önerilere yer verilmiştir.

5.1. Sonuçlar

Araştırmanın bu bölümünde araştırmadan elde edilen sonuçlar bulgulara paralel olacak şekilde beş başlıkta sunulmuştur.

5.1.1. Ön test ve ön klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

Ön testte öğrencilerin doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi ve önermesini anlama aşamasında genel olarak sıkıntı yaşamadıkları, bununla birlikte bu problem/önermeyi anlamayan öğrencilerin problemi ya da önermeyi yanıtsız bıraktıkları, tekrar yazdıkları ve verileri eksik kullandıkları saptanmıştır. Sayı problemi ve önermesini anlayan öğrencilerin ağırlıklı olarak çözüm için aritmetiksel strateji kullandıkları, sayıları az da olsa bazı öğrencilerin hem aritmetiksel hem cebirsel strateji ve cebir öncesi strateji kullandıkları saptanmıştır. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, çoğunlukla birden fazla örnekle deneysel doğrulama yaptıkları ve bazı öğrencilerin de ön bilgi eksikliğine dayalı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte öğrencilerden hiçbirinin bu problem ve önermede doğrudan kanıt yapamadığı saptanmıştır.

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi ve önermesine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön görüşmelerde öğrencilerin tamamının tümevarımsal muhakeme ile belirli örneklerin doğruluğuna odaklanarak deneysel doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin deneysel doğrulama kapsamında iki farklı şekilde örneklerini seçtikleri görülmüştür. Öğrencilerin genel olarak rastgele seçtikleri birkaç örnek ile doğrulama yapma eğiliminde oldukları, bazılarının ise stratejik örneklerle doğrulama yaptıkları saptanmıştır. Bu problem ve önerme kanıt işlevleri özelinde değerlendirildiğinde öğrencilerin varsayımlarının doğruluğuna deneysel doğrulama yaparak ikna oldukları görülmektedir. Burada kanıt, doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilere varsayımlarının neden doğru olduğu sorulduğunda, öğrenciler gerekçelendirme yapamamışlar, kavramlar arasında ilişki kuramamışlar, ya denedikleri örneklerden çıkan sonuçlara göre açıklama yapmışlar ya da matematiksel olmayan açıklamalar yapmışlardır. Öğrencilerin yaptıkları çözümlerin nedenlerini açıklamada yetersiz kalmaları kanıtın en önemli işlevi olarak görülen açıklama işlevi bakımından eksik olduklarını göstermektedir. Kanıt ön görüşmelerde öğrenciler ile öğretmen arasında iletişim kurmaya olanak tanıdığı için en çok iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğretmen bu sayede öğrencilerin kanıta yüklediği anlamı ortaya çıkarmıştır. Öğrencilerin tamamı matematiksel ifadelerin doğruluğunu birkaç örnekle göstermenin doğru olduğunu düşünmektedir.

Ön testte öğrencilerin doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerini ve problemi anlama aşamasında genel olarak sıkıntı yaşamadıkları, bununla birlikte bu önermeleri/problemi anlamayan öğrencilerin önermeleri ya da problemi yanıtsız bıraktıkları, bazı verileri ihmal ettikleri, önermeleri tekrar yazdıkları ve önermelerden bazılarının öncülünü anlamadıkları saptanmıştır. Geometri önermelerini anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, dörtgenler arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişkilerin belirlenememesinden kaynaklı, bir paralelkenarın kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptıkları, ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptıkları, bazılarının ise prototip çizimler üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptıkları saptanmıştır. Sayıları az da olsa bazı öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme ile önermeleri kanıtladıkları, bu öğrencilerin gerekçelendirmelerinde dörtgenlerin tanım bilgisine, özellik bilgisine ya da hiyerarşik ilişkilere dayalı gerekçelendirmeler yaptıkları saptanmıştır. Geometri probleminde ise problemi anlayan öğrencilerin tamamının aritmetiksel strateji kullandığı görülmüştür. Bu öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde bazılarının deneysel doğrulama yaptıkları, bazılarının ise tümdengelimsel muhakeme ile kanıt yaptıkları görülmüştür. Kanıt yapan öğrencilerin sayısal ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yaptıkları saptanmıştır.

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önerme ve problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön görüşmelerde öğrencilerin bu önerme ve problemde tümevarımsal muhakeme ve tümdengelimsel muhakeme olmak üzere iki farklı şekilde muhakeme yaptıkları görülmüştür. Tümevarımsal muhakeme yöntemini kullanan öğrencilerin, otoriter doğrulama ve deneysel doğrulama yaptıkları, tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin ise önermede dörtgenlerin özellikleri bilgisine dayalı gerekçelendirme yaptıkları, problemde ise sayısal ifadenin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir.

Odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin kanıtlama süreçlerinde ortaya çıkan kanıt işlevlerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Öğrencilerin otoriter doğrulama ve deneysel doğrulama yaptıkları problem ya da önermelerde önceki bildiklerine ya da deneysel doğrulama sonuçlarına dayalı olarak varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları, kanıt yapabildikleri problem ya da önermelerde ise yaptıkları kanıtın sonucuna dayalı olarak varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme ile kanıt yapabildikleri önerme ya da problemde matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Öğrenciler önerme ya da problemi çözerken, kanıt öğrenciler ile öğretmen arasında iletişim kurmaya olanak tanıdığı için iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Kanıt yapan öğrencilerin hem bildikleri kavramları ilişkilendirdikleri hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek varsayımlarını gerekçelendirdikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermelerde önermelerin yapısını anlamayan öğrenciler için önermeyi yanıtsız bırakma ve önermeyi tekrar yazma olmak üzere iki farklı durumun olduğu saptanmıştır. Önermeleri anlayan öğrencilerin aritmetiksel strateji kullanarak önermeleri çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde bazı öğrencilerin yalnızca önermeleri doğrulayan örnek vererek deneysel doğrulama yaptıkları, bazılarının ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptıkları, bazılarının ise tümdengelimsel muhakeme ile önermeleri kanıtladıkları saptanmıştır. Ayrıca tümdengelimsel muhakeme yapan öğrencilerin, bu önermelerin her zaman doğru olmadığını göstermek için aksine örnek vermenin yanında önermeyi doğrulayan örnekler de kullanma eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin en başarılı oldukları kanıtlama süreci, aksine örnek verme yönteminde gözlenmiştir.

Ön testte öğrencilerin çoğunluğunun tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önermeyi anlamada sıkıntı yaşadıkları belirlenmiştir. Bu önermeyi anlamayan öğrenciler için önermeyi yanıtsız bırakma, tekrar yazma, verilerin dışına çıkma, verileri eksik kullanma, ihmal etme, değişkeni hatalı kullanma olmak üzere altı farklı durumun olduğu saptanmıştır. Önermeyi anlayan öğrencilerin aritmetiksel strateji kullanarak önermeyi çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde bazılarının bir ya da birkaç örnekle deneysel doğrulama yaptığı, bazılarının ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı, bazılarının ise tümdengelimsel muhakeme ile önermeyi kanıtladığı saptanmıştır.

Kanıt değerlendirme probleminde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun deneysel argümanı ya da görsel argümanı ikna edici buldukları, sadece birinin cebirsel argümanı ikna edici bulduğu belirlenmiştir. Deneysel ya da görsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerin bu argümanların açık, anlaşılır, kolay ya da mantıklı olmasına dayalı gerekçelendirme yaptıkları, cebirsel argümanı ikna edici bulan öğrencinin ise bu argümanın genellenebilir oluşuna dayalı gerekçelendirme yaptığı saptanmıştır.

5.1.2. Öğretim uygulamalarına ilişkin sonuçlar

Öğretim uygulamaları KARİDE modeline uygun tamamlanmıştır. Bu modelin bireysel çalışmaların yapıldığı kendini ikna et aşamasında gerçekleştirilen eylemler öğrenciden öğrenciye değişiklik göstermiş, verilen süre içerisinde bazı öğrencilerin sadece problemi analiz etmek için örneklerden yararlandıkları tespit edilirken, bazı öğrencilerin örneklerdeki ortak özellikleri belirleyip genelleme yapabildikleri, bazı öğrencilerin ise süreci tamamlayarak kanıt yapabildikleri belirlenmiştir. Arkadaşını ikna et aşamasında öğrencilerin her biri grup arkadaşlarını kendi yaptığı çözümün doğruluğuna ikna etmeye, kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütmeye çalışmıştır. Bireysel çalışmalarda çözüm yapamayan öğrenciler küçük grup tartışmalarında diğer arkadaşlarının çözümlerini değerlendirerek ya da birlikte çözüm üreterek kanıt yapmaya çalışmışlardır. Küçük grup tartışmaları devam ederken öğretmen, grupların düşüncelerini genişletmelerini ve derinleştirmelerini sağlayacak şekilde sınıfa sorular sormuş, öğrencilerin birbirlerinin düşüncelerini sorgulamalarını ve birbirlerinden gerekçeler istemelerini vurgulamış, sınıfta devamlı "açıklayın" sözcüğünü kullanarak gerekçelendirme istediğinin altını çizmiştir. Bu durumlar sınıfta açıklama ve gerekçelendirme sosyal normu ile yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma sosyo-matematiksel normunu desteklemiştir. Küçük grup tartışmaları bütün grup üyelerinin üzerinde görüş birliğine vardığı ortak bir çözüm oluşturuncaya kadar devam etmiştir. Bu durumlar işbirliği yaparak beraber çözüm üretme ve ortak sonuca ulaşma sosyal normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Rakibini ikna et aşamasında öğretmen öğrencilerden tahtada çözüm yapan kişiye "Bunun doğru olduğunu nasıl biliyorsun?", "Bu iddianın doğru olduğunu gerekçelendirir misin?", "Bunun neden doğru olduğunu açıklar mısın?", "Bunun doğru olduğundan nasıl emin olabiliyorsun?" gibi sorular sormalarını istemiş, kendisi de benzer soruları sorarak ve sınıf tartışmasını yöneterek öğrencilere rehberlik etmeye çalışmıştır. Öğretmen, öğrenciler tahtada çözüm yaparken öğrencilerin kendi fikirlerini açıklamaları için onları cesaretlendirmiş; ancak herhangi bir öğrenciye ya da gruba doğru ya da yanlış şeklinde değerlendirmede ya da yönlendirmede bulunmamıştır. Bu durumlar herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi sosyal normunu desteklemiştir. Öğretmen sınıf tartışmalarında yönlendirici olmayan bir öğretim izleyerek öğrencilerinin yaptıkları çözümü açıklamaları, açıklamalarına gerekçe sunmaları, birbirlerini dinlemeleri, kendilerinin ve başkalarının argümanlarını değerlendirmeleri için motive edici bir rol üstlenmiştir. Bununla birlikte öğretmen öğrencilerin farklı çözüm yollarının olabileceğini görmeleri için sınıfta farklı temsillerin kullanılmasına, kanıt yaparken sonucun doğruluğunun farklı gerekçelerle, farklı şekillerde gösterilebilmesine olanak sağlamıştır. Bu durumlar açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme, farklı çözümler sunma sosyal normları ile farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma sosyo-matematiksel normlarının pekiştirilmesini sağlamıştır. Her bir grup sözcüsü çözümünü yaptıktan sonra "Bu çözüm sizi ikna etti mi?" diye sormuş ve sınıf tartışmasını başlatmıştır. Sınıf tartışmaları esnasında tüm sınıfın soruları alınıp yanıtlanmış, öğrencilerin düşüncelerini ifade etmesi, anlamadıkları noktaları sormaları sağlanmıştır. Her bir grup kendi argümanını savunmuş, karşı tarafın argümanını ise çürütmeye çalışmış, soru sormuş ve karşıt argümanlara yanıt vermiştir. Bu durumlar anlaşılmayan noktaları sorma, sınıfı ikna etme, kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma sosyal normları ile kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme sosyo-matematiksel normunu desteklemiştir. Hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında deneysel argümanlar geçerli kanıt yöntemi olarak kabul edilmeyerek ikna edici bulunmamış, öğrencilerin tümdengelimsel argümanları daha ikna edici buldukları, arkadaşlarını cebirsel ifadeler kullanmaya teşvik ettikleri belirlenmiştir. Bu durumlar geçerli bir matematiksel kanıt sunma, deneysel doğrulamayı kanıt olarak kabul etmeme ve çözümlerinde genelliliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma sosyo-matematiksel normlarını pekiştirmiştir. Değerlendirme aşamasında öğretmen tüm grupların çözümlerini değerlendirmiş, bu çözüm sınıfın ortak kanıtı haline gelmiştir. Bu durum geçerli matematiksel kanıt sunma sosyo-matematiksel normunun göstergesi olarak kabul edilmiştir. Bu araştırmada çalışmanın başında araştırmacı-öğretmenin pekiştirmek amacıyla benimsediği normlar ile araştırmanın sonuna kadar öğretmen ve öğrencilerin ortaya koyduğu normların uyumlu olduğu belirlenmiştir. Öğretimin ilk üç haftasında öğretmen tarafından devamlı tekrar edilen ve pekiştirilmeye çalışılan normların sonraki haftalarda tartışmalar esnasında kendiliğinden ortaya çıktığı gözlenmiştir.

Öğrencilerle gerçekleştirilen öğretim uygulamaları sonucunda ortaya çıkan sosyal normlara ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Açıklama ve gerekçelendirme
- İşbirliği yaparak beraber çözüm üretme
- Açıklama yapan kişiyi sözü bitene kadar dinleme
- Farklı çözümler sunma
- Herkesin kendi düşüncesini ifade etmesi
- Ortak sonuca ulaşma
- Anlaşılmayan noktaları sorma
- Grup üyelerini ve sınıfı ikna etme
- Kendi görüşünü savunarak karşıt görüş oluşturma

Öğrencilerle gerçekleştirilen öğretim uygulamaları sonucunda ortaya çıkan sosyo-matematiksel normlara ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Geçerli bir matematiksel kanıt sunma
- Yapılan çözümlere matematiksel gerekçeler sunma

- Farklı matematiksel gerekçelendirmeler yapma
- Deneysel doğrulamayı kanıt olarak kabul etmeme
- Çözümlerinde genelliliği artırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma
- Kendi görüşünü savunarak arkadaşının varsayımını çürütme

Öğrencilerle gerçekleştirilen öğretim uygulamaları sonucunda öğrencilerin kanıtlama süreçlerinde ortaya çıkan kanıt işlevlerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Öğrenciler yaptıkları kanıt ile herhangi bir otoriteye ihtiyaç duymadan varsayımlarının doğru olduğuna ikna olmuş ve sınıf tartışmalarında öğrencilerin yaptığı kanıt sınıf tarafından kabul edildiğinde bu varsayımın doğruluğu onaylanmış ve yapılan kanıt sınıfın ortak kanıtı haline gelmiştir. Kanıt burada doğrulama işlevinin alt işlevlerinden *doğru olduğuna ikna olma* ve *doğruluğun onaylanması* işlevini görmüştür.

Öğrencilerin kanıt etkinliklerinde matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğuna dair kavrayış sağlamaları ve kanıt yaparken kullandıkları bir kavramın sonuçlarını görmeleri ile bu kavram hakkında daha fazla bilgi sahibi olmalarının sağlanması kanıtın açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevine hizmet etmiştir.

Öğrenciler hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında gerekçelerini arkadaşlarına ve öğretmenlerine iletme fırsatı elde etmişlerdir. Sınıf tartışmalarında öğrencilerin karşı argümanlara yanıt verirken kendi argümanlarını gözden geçirmeleri ve düzeltmeleri diğer arkadaşlarının gerekçelerini değerlendirerek anlamaya çalışmaları sağlanmıştır. Kanıt burada iletişim işlevinin alt işlevlerinden *söylem biçimini ortaya çıkarma ve tartışma ortamı yaratma* olarak hizmet etmiştir.

Kanıtın analiz edilmesi ile ortaya çıkan argümandaki anahtar kavramın genellenmesi sayesinde öğrencilerin matematiksel keşif yapmaları sağlanmıştır. Kanıt burada buluş işlevinin *analiz yapma* alt işlevine hizmet etmiştir.

Öğrencilerin hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında arkadaşlarının varsayımlarını çürütmek için aksine örnekler vermeleri, öğrencilerin kendi matematiksel tutarsızlıklarını görerek matematik öğrenmelerini desteklemiştir. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinden *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir. Aynı zamanda bazı uygulamalarda öğrencilerin yaptıkları kanıtlar matematiksel kavramlar arasındaki ilişkileri görünür hale getirmiştir. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinden *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevine hizmet etmiştir.

Bununla birlikte bazı etkinliklerde kanıt, öğrencilerin çözümlerini genelleyerek karşılaştıkları farklı bir problemde de bu çözümleri uygulayabilme, bir kuralın farklı durumlarda nasıl uygulanabileceğini fark edebilme imkânı sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *uygulama* alt işlevine hizmet etmiştir.

5.1.3. Ara klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

Odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin muhakemelerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

*D*oğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşmelerde öğrencilerin tamamının problemi analiz etmek için tümevarımsal muhakeme yaptıkları belirlenmiştir. Bu aşamada öğrencilerin seçtikleri stratejik örneklerle deneysel doğrulama yaptıkları görülmüştür. 6 öğrenciden 3'ünün (Eylül, Esra ve Yağız) örnekler yardımıyla oluşturdukları varsayımlarını doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri, 3'ünün (Bahri, Elif ve Mehmet) oluşturdukları varsayımlarını kanıtlayamadıkları görülmüştür. Kanıt yapabilen öğrencilerin ikisinin (Eylül ve Esra) cebirsel ifadelerin kullanıldığı gerekçelendirme yoluyla tümdengelimsel muhakeme yaptıkları, birinin (Yağız) ise sözel ifadelerin kullanıldığı gerekçelendirme yoluyla tümdengelimsel muhakeme yaptığı belirlenmiştir.

*D*oğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşmelerde 6 öğrenciden 2'sinin (Elif ve Mehmet) problemi analiz etmek için tümevarımsal muhakeme ile seçtikleri rastgele örneklerle deneysel doğrulama yaptıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin örnekler yardımıyla oluşturdukları varsayımlarını doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri belirlenmiştir. 3 öğrencinin ise (Bahri, Eylül ve Yağız) tümevarımsal muhakeme kullanmadan varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıtlayabildikleri belirlenmiştir. Öğrencilerden birinin (Esra) ise sadece çevredeki değişimi tümdengelimsel muhakeme ile kanıtlayabildiği; ancak alandaki değişimi kanıtlayamadığı görülmüştür. Kanıt yapan öğrencilerin tamamının varsayımlarını cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yoluyla tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladıkları görülmüştür.

Odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin kanıtlama süreçlerinde ortaya çıkan kanıt işlevlerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Kanıt yapabilen öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Kanıt yapan öğrencilerin kanıtlarında matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri görülmüştür. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Kanıt bu problemlerin çözüm sürecinde öğretmen ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamış, öğrenciler fikirlerini ilettiğinde, söylem biçimleri sayesinde öğrencilerin problemlerde verilen kavramları nasıl anladıkları ortaya çıkmıştır. Kanıt burada iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Öğrencilerin iddialarını çürütmek için verilen aksine örnekler öğrencilerin kendi matematiklerindeki tutarsızlıkları görmelerini sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt yapan öğrencilerin hem bildikleri kavramları ilişkilendirdikleri hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek varsayımlarını gerekçelendirdikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

5.1.4. Son teste ilişkin sonuçlar

Öğrencilerin doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemi ve önermesini anlama aşamasında genel olarak sıkıntı yaşamadıkları, bununla birlikte bu problem ve önermeyi anlamayan öğrencilerin problemi/önermeyi yanıtsız bıraktıkları, tekrar yazdıkları ya da verileri eksik kullandıkları saptanmıştır. Anlayan öğrencilerin çözüm için aritmetiksel, cebirsel ve hem aritmetiksel hem de cebirsel strateji olmak üzere üç farklı strateji kullandıkları, sayıları az da olsa bazı öğrencilerin işlem hatası yaptıkları saptanmıştır. Öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde, az sayıda öğrencinin deneysel doğrulama yaptığı belirlenmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt ya da görsel kanıt yaptıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri önermelerini ve problemi anlama aşamasında genel olarak sıkıntı yaşamadıkları, bununla birlikte bu önermeleri ve problemi anlamayan öğrencilerin önermeleri ya da problemi yanıtsız bıraktıkları, problemde verileri ihmal ettikleri ve önermeleri tekrar yazdıkları saptanmıştır. Geometri önermelerini anlayan öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde az sayıda öğrencinin dörtgenler arasındaki kapsayıcı hiyerarşik ilişkilerin belirlenememesinden kaynaklı bir dörtgenin kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme yaptığı, bazı öğrencilerin ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirmeler yaptığı, bazılarının ise prototip çizimler üzerinde sembollerle gerekçelendirme yaptığı saptanmıştır. Bu önermelerde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel muhakeme ile önermeleri kanıtladıkları, gerekçelendirmelerinde ise dörtgenlerin tanım bilgisine, özellik bilgisine ya da hiyerarşik ilişkilere vurgu yaptıkları saptanmıştır. Geometri probleminde ise problemi anlayan öğrencilerin bazılarının aritmetiksel strateji, bazılarının ise cebirsel strateji kullandıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin muhakemeleri incelendiğinde öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel muhakeme ile kanıt yaptıkları, kanıtlarında sayısal ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme ve cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme olmak üzere iki farklı şekilde gerekçelendirme yaptıkları saptanmıştır.

Öğrencilerin aksine örnek vererek kanıt yapmayı gerektiren önermelerde önermeyi anlama aşamasında genel olarak sıkıntı yaşamadıkları, bununla birlikte önermeleri anlamayan az sayıda öğrencinin, önermeyi yanıtsız bıraktıkları ya da önermeleri tekrar yazdıkları saptanmıştır. Önermeleri anlayan öğrencilerin aritmetiksel strateji ve hem aritmetiksel hem de cebirsel strateji olmak üzere iki farklı strateji kullanarak önermeleri çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu önermelerde muhakemeleri incelendiğinde, az sayıda öğrencinin yalnızca önermeleri doğrulayan örnek vererek deneysel doğrulama yaptığı, bazılarının ise ön bilgi eksikliğinden kaynaklı mantıksal olmayan gerekçelendirme yaptığı saptanmıştır. Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel muhakeme yaptıkları belirlenirken, bu öğrencilerin önermelerin her zaman doğru olmadığını göstermek için aksine örnek vermenin yanında önermeyi doğrulayan örnekler de kullanma eğiliminde oldukları saptanmıştır.

Öğrencilerin çoğunluğunun tüketerek kanıt yapmayı gerektiren önermeyi anlama aşamasında genel olarak sıkıntı yaşamadıkları belirlenmiştir. Ancak az sayıda öğrencinin bu önermeyi anlamadığı ve önermeyi yanıtsız bıraktığı saptanmıştır. Önermeyi anlayan öğrencilerin aritmetiksel strateji kullanarak önermeyi çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu önermede muhakemeleri incelendiğinde sayıları az da olsa bazı öğrencilerin bir ya da birkaç örnekle deneysel doğrulama yapıkları, öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ise tümdengelimsel muhakeme ile önermeyi tüketerek kanıtladığı saptanmıştır.

Kanıt değerlendirme probleminde öğrencilerin hiçbirinin deneysel argümanı ikna edici bulmadığı saptanmıştır. Bununla birlikte az sayıda öğrencinin görsel argümanı ikna edici bulduğu, öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun ise cebirsel argümanı ikna edici buldukları belirlenmiştir. Görsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerin bu argümanın açık ve anlaşılır olmasına dayalı olarak gerekçelendirme yaptıkları, cebirsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerin ise bu argümanın genellenebilir, kesinlik ve sadeliğine dayalı olarak gerekçelendirme yaptıkları saptanmıştır.

5.1.5. Son klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

Odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin muhakemelerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Örüntü problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşmelerde öğrencilerin tamamının adımlardaki değişen ve değişmeyen şekilleri belirleyebildikleri, bunları sayılarla ilişkilendirerek yazdıkları, böylelikle örüntünün genel terimini bulabildikleri ve tümdengelimsel muhakeme ile bu terimi şekille ilişkilendirebildikleri belirlenmiştir. 6 öğrenciden 2'sinin (Mehmet ve Yağız) önce tümevarımsal muhakeme yaptıkları, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürüp, ardışık terimler arasındaki farka odaklanarak adım sayısı ve adım sayısına karşılık gelen sayıyı ilişkilendirmeden yinelemeli stratejisi ile çözüme başladıkları, ardından belirgin stratejiye geçiş yaparak şekli analiz ettikleri ve örüntünün genel terimini belirledikleri görülmüştür. 4 öğrencinin ise (Bahri, Elif, Esra ve Eylül) sadece tümdengelimsel muhakeme ile belirgin strateji yoluyla örüntünün genel terimini buldukları görülmüştür.

Öğrencilerin tamamının ulaştıkları genellemeyi şekille ilişkilendirerek gerekçelendirme yaptıkları belirlenmiştir.

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren geometri problemine ilişkin odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşmelerde öğrencilerin tamamının problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için önce tümevarımsal muhakeme yaptıkları görülmüştür. 6 öğrenciden 5'inin (Bahri, Elif, Esra, Eylül ve Mehmet) stratejik örneklerle deneysel doğrulama yaptıkları belirlenmiştir. Bir öğrencinin (Yağız) ise tümevarımsal muhakemesinde bir örnekle deneysel doğrulama yaptığı görülmüştür. 6 öğrenciden 5'inin (Bahri, Elif, Eylül, Mehmet ve Yağız) örnekler yardımıyla oluşturdukları varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri belirlenirken, birinin (Esra) oluşturduğu varsayımı kanıtlayamadığı görülmüştür. Kanıt yapan öğrencilerin tamamının varsayımlarını cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yoluyla tümdengelimsel muhakeme ile kanıtladıkları görülmüştür.

Doğrudan kanıt yapmayı gerektiren sayı problemine ilişkin odak öğrencilerin tamamının problemi analiz etmek ve varsayımda bulunmak için önce tümevarımsal muhakeme yaptıkları görülmüştür. Tümevarımsal muhakeme yapan öğrencilerin tamamının oluşturdukları varsayımlarını tümdengelimsel muhakeme ile doğrudan kanıt yaparak kanıtlayabildikleri belirlenmiştir. Kanıt yapan öğrencilerden 2'sinin (Bahri ve Elif) tümdengelimsel muhakemelerini cebirsel ifadelerin kullanıldığı şekille desteklenmiş gerekçelendirme yoluyla, 4'ünün ise (Esra, Eylül, Mehmet ve Yağız) sadece cebirsel ifadelerin kullanıldığı gerekçelendirme yoluyla yaptıkları belirlenmiştir.

Odak öğrencilerle gerçekleştirilen son klinik görüşmeler sonucunda öğrencilerin kanıtlama süreçlerinde ortaya çıkan kanıt işlevlerine ilişkin aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Kanıt yapabilen öğrencilerin yaptıkları kanıt sayesinde varsayımlarının doğruluğuna ikna oldukları görülmüştür. Kanıt burada doğrulama işlevinin *doğru olduğuna ikna olma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Kanıt yapan öğrencilerin matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayabildikleri, kanıtlarında pek çok tanım, teorem ve özelliği kullanarak bunların sonuçlarını görebildikleri belirlenmiştir. Kanıt burada açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevi olarak hizmet etmiştir

Kanıt bu problemlerin çözüm sürecinde öğretmen ile öğrenci arasında matematiksel sonuçların iletilmesini sağlamış, öğrenciler fikirlerini ilettiğinde, söylem biçimleri sayesinde öğrencilerin problemlerde verilen kavramları nasıl anladıkları ortaya çıkmıştır. Kanıt burada iletişim işlevinin *söylem biçimini ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

Öğrencilerin iddialarını çürütmek için verilen aksine örnekler öğrencilerin kendi matematiklerindeki tutarsızlıkları görmelerini sağlamıştır. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir. Bununla birlikte kanıt yapan öğrencilerin hem bildikleri kavramları ilişkilendirdikleri hem de yeni oluşturdukları ile var olan bilgilerini ilişkilendirerek varsayımlarını gerekçelendirdikleri görülmüştür. Kanıt burada sistematikleştirme işlevinin *ilişkileri ortaya çıkarma* alt işlevi olarak hizmet etmiştir.

5.2. Tartışma

Araştırmanın ön test ve ön görüşme sonuçları öğrencilerin özellikle doğrudan kanıt yapmaları gereken problemleri çözerken ya da önermeleri doğrularken, çoğunlukla bir ya da birden fazla örneği genel bir durumun doğrulanmasında yeterli gördüklerini göstermektedir. Öğrencilerin deneysel doğrulamalar yapması pek çok araştırmanın sonuçları arasında yer almıştır (Arslan, 2007; Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Balacheff, 1988; Flores, 2002; 2006; Knuth vd., 2012; Sowder and Harel, 1998; Şen ve Güler, 2015; Tanışlı, 2016; Waring, 2000; Zaimoğlu, 2012; Zeybek ve Üstün, 2019). Öğrencilerin deneysel doğrulamalar yapmaları Sowder ve Harel'ın (1998) çalışmalarında ortaya çıkan deneysel kanıt şemasında bulunan, temel örnekler kanıt şemasındaki öğrenci gerekçeleri ile örtüşmektedir. Bununla birlikte bir problem ya da önermede deneysel doğrulama yapan öğrencinin başka bir problem ya da önermede tümdengelimsel muhakeme yapabildiği belirlenmiştir. Bu durum Sowder ve Harel'ın (1998) bir kişinin birden fazla kanıt şemasına ilişkin tepkiler ortaya koyabileceği durumunu destekler niteliktedir. Aynı zamanda öğrencilerin ön test ve ön görüşmede deneysel doğrulama yaparken çoğunlukla rastgele örnekler seçtikleri ve sayıları az da olsa bazı öğrencilerin stratejik örnekler seçtikleri belirlenmiştir. Bu durum Balacheff'in (1988) sunduğu sınıflamada pragmatik kanıtlar sınıfında, rastgele seçilen belirli sayıdaki durumun doğrulanmasıyla, sonucun doğruluğunun iddia edildiği acemi deneycilik yöntemi ve rastgele değil de stratejik bir örneğin doğrulanmasıyla genelleme yapılan kritik deneyim yöntemi ile örtüşmektedir. Öğrencilerin deneysel doğrulamalar yaparak problemleri çözmeleri ya da önermeleri doğrulamaları Waring'in (2001) Seviye 1'de belirttiği öğrenci eylemleri ile örtüşmektedir. Waring (2000), Seviye 0'daki öğrencilerin çoğu zaman gerekçelendirme yapmadıklarını çünkü buna ihtiyaç duymadıklarını ya da matematiksel olmayan gerekçelendirmeler yaptıklarını belirtmiştir. Bu araştırmada da ön testte öğrencilerin problem ya da önermeyi tekrar yazma eylemleri, bununla birlikte ön görüşmede Elif'in varsayımının doğruluğunu gerekçelendirmesi istendiğinde iki tek sayının toplamının çift olacağını herkesin bildiğini belirtmesi öğrencilerin entelektüel anlamda kanıta ihtiyaç duymadığının göstergesidir. Benzer şekilde ön görüşmede Eylül'ün iki tek sayının toplamının çift olduğu varsayımının doğruluğunu gerekçelendirmesi istendiğinde, iki tek insanın evlenince çift olduğu ya da Mehmet'in iki n harfinin birleşince m harfi olduğu şeklindeki matematiksel olmayan gerekçelendirmelerinin Waring'in (2000) sınıflamasında Seviye 0'daki öğrenci eylemleri ile örtüşmektedir.

Araştırmanın ön test sonuçları, matematiksel bir önerme için verilen deneysel, görsel ve cebirsel argümanlardan öğrenciler için en ikna edici olan argümanın deneysel argüman, sonraki en ikna edici argümanın görsel argüman olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin deneysel ve görsel argümanları açık, anlaşılır, kolay ya da mantıklı olarak betimlemeleri ve bir öğrenci dışında hiçbir öğrencinin cebirsel argümanı ikna edici bulmaması, öğrencilerin ön testte ve ön görüşmelerde genellikle cebirsel strateji kullanmayı tercih etmemeleri bulgusu ile paraleldir. Benzer şekilde Arslan (2007) çalışmasında 7. sınıf öğrencilerine bir önermenin çözümü için sunulan deneysel, görsel ve cebirsel argümanlardan öğrencilerin en çok hoşlandıkları, en çok anladıkları ve en çok ikna oldukları yanıt tercihlerinin sırasıyla görsel, deneysel ve cebirsel argümanlar olduğunu belirtmiştir. İki çalışmanın bulguları cebirsel argümanın tercih edilmediği ya da anlaşılmadığı konusunda paralellik göstermesine karşın, bu araştırmanın ön testinde öğrencilerin deneysel argümanı görsel argümandan daha ikna edici buldukları belirlenmiştir. Arslan (2007) çalışmasında öğrencilerin cebir kullanarak genellemeye ulaşma eğiliminin düşük olduğunu, Aylar ve Şahiner (2016) sembolik ifadeleri anlama ve yazmada zorlandıklarını, Zaimoğlu (2012) ise öğrencilerin cebirsel kanıtı bir yöntem olarak kullanmayı tercih etmediklerini, cebirsel ifade ve işlemleri tam kavrayamadıklarını belirtmektedir. Bu araştırmada da hem ön testte hem de ön görüşmelerde öğrencilerin sembolik dili kullanamadıkları, problemleri çözerken ya da önermeleri kanıtlarken aritmetiksel stratejiler kullandıkları, cebirsel strateji kullanmaya çalışan öğrencilerin de hatalı işlemler yaptıkları için sonuca ulaşamadıkları belirlenmiştir.

Aylar ve Şahiner (2016) çalışmalarında 7. sınıf öğrencilerinin kanıt becerilerini geliştirmeyi amaçlayan kanıt öğretimine geçilmeden önce uygulanan hazır bulunuşluk testinde öğrencilerin hiçbirinin doğru bir önermenin kanıtını yapamadıklarını; ancak büyük bir kısmının aksine örnek vermeleri gereken önermede önermeyi kanıtladıklarını belirtmişlerdir. Bununla birlikte Zeybek ve Üstün (2016), 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki kanıt seviyelerini belirlemeyi amaçladıkları çalışmalarında öğrencilerin verilen matematiksel ifadeleri kanıtlarken argüman oluşturmada zorlandıklarını, sunulan matematiksel ifadelerin deneysel düzeyde olduğunu; ancak yanlış olan matematiksel ifadenin kanıtında öğrencilerin çoğunun aksine örnek oluşturabildiklerini belirtmişlerdir. Bu araştırmada da ön testte öğrencilerin aksine örnek vermeleri gereken önermelerde diğerlerine göre daha iyi bir performans sergiledikleri görülmüştür. Bu sonuç Aylar ve Şahiner (2016) ile Zeybek ve Üstün'ün (2016) çalışmaları ile uyumludur. Bu durum aslında çoğunlukla örnekler vererek bir durumun doğrulanmasını genelleme yapmak için yeterli gören öğrencilerin çözümlerinin, aksine örneklerle bir durumun çürütülmesinde matematiksel olarak geçerli olabileceğinin göstergesi olarak düşünülebilir. Araştırmanın bulguları ön test ve ön görüşmelerde öğrencilerin hiçbirinin doğrudan kanıt yapmaları gereken sayı problem ve önermesinde kanıt yapamadığını buna karşın sayıları az da olsa bazı öğrencilerin ön test ve ön görüşmelerde geometri önermelerinde ve probleminde kanıt yapabildiklerini göstermektedir.

Pek çok çalışmada öğrencilerin kanıt yapmalarına katkıda bulunan ve kanıt yapma becerilerinin gelişimini destekleyen bir kanıt öğretiminin nasıl olması gerektiği ile ilgili bir çerçeve sunulmuş, (Dancis and Davidson, 1970; Dean, 1996; Schabel, 2001; Selden and Selden, 2009) ve bu çalışmalarda oluşturulan öğrenme ortamının öğrencilerin kanıt yapma becerilerini geliştirdiği belirtilmiştir. Bu araştırmada da öğrencilerin kanıt öğrenmelerini destekleyecek bir öğrenme ortamı oluşturulurken bu çerçevelerden yararlanılmış ve KARİDE modeli ile öğrencilerin sosyal etkileşimlerinin üst düzeyde olduğu işbirlikli bir ortam yaratılmıştır. Buna göre öğrencilerin, öğretmenlerine, grubuna ya da bütün sınıfa rahatça soru sorabileceği, fikirlerini rahatça açıklayabileceği bir sınıf ortamında, belirli bir problem durumu üzerinde birçok öğrencinin farklı varsayımlarda bulunması, bu varsayımların doğruluğunu hem bireysel hem de grupça araştırmaları, varsayımların doğruluğunun geçerli argümanlar ile ortaya konulması sağlanmıştır. Öğrencilerin geliştirdikleri argümanları savundukları, gerekçelendirdikleri, destekleyebildikleri, arkadaşlarının argümanlarını değerlendirdikleri ve çürütmeye çalıştıkları bir ortam oluşturulmuştur. Bu ortamın öğrencilerin kanıt yapma başarılarını olumlu anlamda etkilediği ön test ve son test karşılaştırmalı sonuçları ile şu şekilde gösterilebilir: Öğrencilerin ön testte doğrudan kanıt yapmaları gereken sayı probleminde ve önermesinde deneysel doğrulama oranı sırasıyla yaklaşık % 68 ve % 84 iken, son testte sayı probleminde ve önermesinde bu oranlar yaklaşık % 6 ve % 23 olmuştur. Bu iki sorunun ön testinde hiçbir öğrenci doğrudan kanıt yapamazken son testte bu oran problem için yaklaşık % 65, önerme için ise yaklaşık % 74 olmuştur. Öğrencilerin ön testte doğrudan kanıt yapmaları gereken geometri önermelerinde tümdengelimsel muhakeme yapma oranlarının ortalaması yaklaşık % 25 iken son testte bu oran yaklaşık % 59 olmuştur. Öğrencilerin ön testte doğrudan kanıt yapmaları gereken geometri probleminde tümdengelimsel muhakeme yapma oranı yaklaşık % 32 iken son testte bu oran yaklaşık % 71 olmuştur. Öğrencilerin ön testte aksine örnek vererek kanıt yapmaları gereken önermelerde tümdengelimsel muhakeme yapma oranlarının ortalaması yaklaşık % 34 iken son testte bu oran yaklaşık % 75 olmuştur. Öğrencilerin ön testte tüketerek kanıt yapmaları gereken önermede tümdengelimsel muhakeme yapma oranı yaklaşık % 13 iken son testte bu oran yaklaşık % 71 olmuştur. Öğrencilerin ön testte kanıt değerlendirme probleminde cebirsel argümanı ikna edici bulma oranı yaklaşık % 3 iken son testte bu oran yaklaşık % 90 olmuştur. Son test sonuçları öğrencilerin örnek vererek doğrulama eğilimlerinin azaldığını, buna karşın tümdengelimsel muhakeme yapabilen öğrenci sayısının arttığını göstermektedir. Bu anlamda kanıtın sosyal yönleri ile matematiksel yönlerini birleştirerek uygulanan KARİDE modelinin, öğrencilerin tümdengelimsel muhakemelerini güçlendirdiği söylenebilir. Nitekim bu durum Stylianides'in (2007b, s. 291) sunduğu kanıt tanımının okul matematiğinde kanıt öğretimi için yararlı olduğu tezini güçlendirmektedir. Bununla birlikte birçok araştırma küçük çocukların da kanıtı anlayabildiğini, bu çocuklarda tümdengelimsel kanıtın gelişebileceğini göstermektedir (Ball vd., 2002; Cry, 2011; Derek, 2011; Komatsu, 2005; Maher and Martino, 1996). Bu araştırmanın ön test ve son test karşılaştırmalı sonuçları öğrencilerde tümdengelimsel kanıtın geliştiğini göstermesi bakımından bu çalışmalarla paralellik göstermektedir.

Ön test ve son test karşılaştırması öğrencilerin deneysel doğrulama eğilimlerinin tamamen ortadan kalkmadığını göstermektedir. Son testin kanıt değerlendirme probleminde öğrencilerin yaklaşık % 90'nı cebirsel argümanı ikna edici bulmuş ve hiçbir öğrenci deneysel argümanı ikna edici bulmamıştır. Bununla birlikte hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında öğrencilerin deneysel doğrulamayı geçerli kanıt olarak kabul etmeme sosyo-matematiksel normunun oluştuğu belirlenmiştir. Tüm bunlara karşın öğrenciler son testte deneysel doğrulama yapma eğilimlerini neden sürdürmüşlerdir? Moore (1994), üniversite öğrencilerinin formel matematiksel kanıt yapmayı öğrenirken yaşadıkları bilişsel güçlükleri ve bu güçlüklerin kaynağını incelediği çalışmasında, öğrencilerin tanımları ya da bu tanımları kanıtta nasıl kullanacaklarını bilmediklerini, öğrencilerin matematiksel dil ve notasyonu anlamadıklarını ya da kullanamadıklarını, öğrencilerin kanıta nerden başlayacaklarını bilmediklerini başlıca nedenler arasında göstermiştir. Bu araştırmada özellikle son testte öğrencilerin deneysel doğrulamayı sürdürme nedeninin, ön testte olduğu gibi deneysel doğrulamayı genel bir durumun doğrulanmasında yeterli gördüklerinden kaynaklanmadığı söylenebilir. Bu durumun nedeninin öğrencilerin problem ya da önermeleri kanıtlamak için gerekli olan matematiksel tanımları ya da bu tanımları nasıl kullanacaklarını bilmemelerinden ve matematiksel dili kullanamamalarından kaynaklandığı söylenebilir. Aynı zamanda geometri önermelerinde öğrencilerin bazılarının ön testteki bir dörtgenin kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek hatalı gerekçelendirme ve prototip çizim üzerinde sembollerle gerekçelendirme eğilimlerini son testte de sürdürdükleri belirlenmiştir. Bir dörtgenin kapsadığı dörtgeni aksine örnek vererek gerekçelendirme yapan öğrencilerin, dörtgenlerin harici tanımlarını kullandıklarının, bu sebeple zihinlerinde prototip şekiller oluşturmalarının ve dörtgenler arasında hiyerarşik ilişki kuramadıkları için tümdengelimsel muhakeme yapamamalarından kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Bu görüşü destekleyen De Villiers (1994) hiyerarşik sınıflamaya olanak sağlayan kapsayıcı tanımların, daha özel kavramların özelliklerinin tümdengelimsel muhakeme yoluyla sistematikleştirilmesini ve türetilmesini kolaylaştırdığını, problem çözme sırasında genellikle faydalı bir kavramsal şema oluşumunu sağladığını, bazen de alternatif tanımlar ve yeni önermelerin ortaya çıkmasını sağladığını belirtmiştir. Bu araştırmada da dörtgenlerin kapsayıcı tanımlarını kullanan öğrencilerin önermeleri doğrularken tanımları tümdengelimli bir sistem içinde organize ettikleri görülmüştür.

Sınıftaki kanıt uygulamalarının, çeşitli öğretmen eylemlerinin ve sınıf mikrokültürünün çeşitli düzeylerdeki öğrencilerin kanıt şemalarını, kanıt ve gerekçelendirme anlayışlarını ve kanıt becerilerini değiştirdiğini gösteren pek çok çalışma yapılmıştır (Blanton, Stylianou and David, 2009; Conner, 2007; Harel and Rabin, 2010; Martin vd., 2005; Martin and McCrone, 2003; Ozgur, 2017). Bu araştırmalarda öğretmenler tarafından yapılan pedagojik seçimlerin, öğretmenin kanıt ve gerekçelendirme üzerindeki vurgusunun, oluşturulan sınıf ortamının özelliklerinin, öğrencilerin kanıt ve muhakeme becerilerini geliştirmede önemli rol oynadığı belirtilmiştir. Bu araştırma, bir öğretmenin kanıta yüklediği anlamın ve bunun göstergesi olarak kanıt işlevlerinin ortaya çıkmasına olanak sağlayan etkinlikler ve öğretim desteği sunmasının, bu ortamda öğrencilerin gerekçelendirmeler yapmalarına, fikirlerini paylaşmalarına yardımcı olmasının, öğrencilerin muhakemelerindeki değişimi ve öğrencilerin kanıt yapabileceklerini göstermesi bakımından önemlidir. Bu sınıfta öğretmenin açık ya da gizli bir biçimde ilettiği mesajlarının sınıfın sosyal ve sosyo-matematiksel normlarını şekillendirdiği ve sosyo-matematiksel normlar ile kanıt işlevlerinin birbirlerini beslediği görülmüştür. Öğretmen bu sınıfta deneysel doğrulamaların geçerli bir kanıt yöntemi olmadığını belirtmiş, öğrencilerden iddialarını gerekçelendirirken gerekçe olarak tanımlara, teoremlere, özelliklere vurgu yapmalarını istemiş, böylece öğrencileri tümdengelimsel argümanlar geliştirmeye teşvik etmiştir. Öğretmenin bu şekilde geçerli kabul edilecek gerekçelendirmenin ya da bir kanıtın sınırlarını net bir şekilde çizmesi, bu durumun geçerli bir matematiksel kanıt sunma ve deneysel doğrulamayı kanıt olarak kabul etmeme, çözümlerinde genelliği arttırmak için cebirsel çözüm yolları kullanma olarak sınıfın sosyo-matematiksel normu halini alması son derece önemlidir. Bu durum özellikle doğrulama işlevinin, *doğru olduğuna ikna olma* ile *doğruluğunu onaylama* alt işlevlerinin ortaya çıkmasını sağlaması bakımından sınıf normu ile kanıt işlevi arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Aynı zamanda bu sınıfta öğretmenin bir iddianın sadece doğru olduğunu göstermek yerine neden doğru olduğunu da açıklamanın gerekliliğini vurgulaması, açıklama ve gerekçelendirme sosyal normu ile yapılan çözümlere matematiksel gerekçelendirmeler yapma sosyo-matematiksel normunun oluşumunu sağlamıştır. Bu durum aynı zamanda bu sınıfta kanıtın açıklama işlevinin *kavrayış sağlama* ve *sonuçları görme* alt işlevlerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu bağlamda bu araştırmada öğretmenin kanıtın bir iddianın sadece doğruluğunun değil aynı zamanda neden doğru olduğunun da gösterilmesi olduğunu düşünmesinin özellikle kanıtın açıklama işlevini desteklediği görülmektedir. Conner (2007) da yaptığı çalışmada bir öğretmenin kanıta yüklediği anlamın, kanıt işlevleri hakkındaki düşüncelerinin sınıftaki uygulamaları ve bu uygulamaların da öğrencilerin kanıt anlayışlarını etkilediğini belirtmiştir. Nitekim bu araştırmanın bulguları Conner'ın (2007) araştırmasını desteklemektedir. Öğretmen, öğrencileri farklılıkların olduğu durumlarda kendi görüşlerini savunarak karşıt görüş oluşturmaları konusunda teşvik etmiş, böylece öğrencilerin de tartışmalar esnasında görüş birliğine varamadıkları durumlarda kendi görüşlerini savunarak arkadaşlarının varsayımını çürütmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu sosyal ve sosyo-matematiksel normlar bu sınıfta kanıtın sistematikleştirme işlevinin *tutarsızlıkları ortaya çıkarma* alt işlevinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Blanton vd., (2009, s. 290-306), çalışmalarında eleştirme, açıklama, gerekçelendirme, detaylandırma, bir tartışmayı özetleme, öğrencilerin fikirlerinin anlaşılması için fikirleri tekrar etme, öğrencilerin argümanlarını belirli yönlere odaklamaları için dikkat çekme gibi sınıf tartışmasını yönlendiren öğretmen eylemlerinin öğrencilerin varsayım oluşturma ve kanıt yapma becerilerini geliştirdiklerini belirtmişlerdir. Bu araştırmada da öğretmenin özellikle küçük grup ve sınıf tartışmalarında öğrencilerin düşüncelerini genişletmelerini ve derinleştirmelerini sağlayacak şekilde soru sormasının, tartışmalar esnasında önemli noktaları tekrar etmesinin, sınıfın dikkatini çekmesinin, sınıfın sorularıyla katılımını sağlamasının, tahtada yapılan çözümü tekrar ederek herkes tarafından anlaşılmasını ve sunulan gerekçelerin belirginleştirilmesini sağlamasının öğrencilerin varsayım oluşturma ve kanıtlama süreçlerini olumlu etkilediği gözlenmiştir. Bu açıdan bakıldığında bu araştırmanın sonuçları Blanton vd.'nin (2009, s. 290-306), çalışmalarını desteklemektedir.

Bleiler-Baxter ve Pair (2017) kanıtın doğrulama, açıklama, sistematikleştirme, keşif ve iletişim rollerinin ortaya çıkmasını sağlayan sınıf içi etkinliklerin neler olduğunu belirlemeyi amaçladıkları çalışmalarında, doğrulama işlevi için varsayımda bulunma ve problem durumları üzerinde çalışma, açıklama işlevi için tartışma ve problem durumları üzerinde çalışma arasında ilişki kurulmuştur. Ayrıca sistematikleştirme işlevi için problem durumları üzerinde çalışmanın, keşif işlevi için varsayımda bulunma ve problem durumları üzerinde çalışmanın, iletişim işlevi için tartışma, problem durumları üzerinde çalışma ve eleştirmenin etkili olduğu tespit edilmiştir. Çalışmada öğrencilerin kanıtın tüm işlevleri ile problem durumları üzerinde çalışma arasında ilişki kurdukları görülmüştür. Bu araştırmada da kanıtın farklı işlevlerinin ortaya çıkabilmesi için, KARİDE modelinde kanıtlama süreci, problemi analiz etme, varsayımda bulunma, gerekçelendirme ve kanıt olarak belirlenmiş ve her bir kanıt uygulaması bir problemle başlamıştır. Bununla birlikte KARİDE modelinin küçük grup tartışmalarının yapıldığı arkadaşını ikna et aşaması ile sınıf tartışmalarının yapıldığı rakibini ikna et aşamasının kanıt işlevlerinden en çok açıklama ve iletişim işlevlerini ortaya çıkardığı belirlenmiştir.

Stylianou vd., (2015) yaptığı araştırmada yüksek başarılı öğrencilerin % 86'sının, düşük başarılı öğrencilerin ise % 56'sının kanıtların sadece varsayımların doğrulanmasını sağlamadığını, aynı zamanda yeni fikirlerin açıklanmasını ve iletilmesini sağladığını belirttiklerini, yani kanıtın doğrulama işlevinin yanı sıra açıklama ve iletişim işlevini vurguladıklarını belirtmiştir. Bu çalışmada da benzer şekilde öğrencilerin hem küçük grup tartışmalarında hem de sınıf tartışmalarında arkadaşlarının yaptığı deneysel doğrulamaları yeterli bulmadıkları, arkadaşlarından devamlı olarak gerekçelendirme istedikleri, herkesin kendi çözümünü açıklaması gerektiğini vurguladıkları belirlenmiştir. Bu durumlar açıklama ve iletişim işlevlerini destekler niteliktedir. Stylianou vd., (2015) çalışmasında lisans öğrencilerinin büyük bir çoğunluğunun tümdengelimsel argümanları açıklayıcı olarak görmediklerini, sözlü argümanları daha açıklayıcı gördüklerini belirtmiştir. Bu araştırmada bu durum öğretim uygulamalarında verilen kanıt değerlendirme probleminde algısal argüman olarak sunulan sözel açıklamayı ve görsel kanıtı daha açıklayıcı bulma olarak kendini göstermiştir. Öğretimde öğrencilerin büyük bir çoğunluğu bu argümanları kanıt olarak değerlendirmemişler; ancak bu argümanların problemi anlamalarını sağladıklarını, güzel bir açıklama olduğunu, problemin zihinlerinde canlanmasını sağladıklarını belirtmişlerdir.

Cilli-Turner (2017) sorgulama temelli öğretimin öğrencilerinin kanıt işlevi kavramları üzerindeki etkilerini belirlemeye çalıştığı araştırmasında kanıt dersine katılan öğrenciler ile katılmayan öğrencilerin kanıt işlevleri ile ilgili inançlarını ortaya çıkarmayı ve bu inançların nasıl değiştiğini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmacı araştırmanın sonunda kontrol ve deney grupları arasında özellikle iletişim işlevinde anlamlı bir fark olmasını geleneksel eğitimin kanıtın iletişim yönünü engellediğine bağlamıştır. Bu araştırma da öğrencilerin sosyal etkileşimin üst düzeyde olduğu sınıf ortamında, başkalarının görüşünü dinleme, kendi düşüncelerini ifade etme, kendi grubunda işbirliği yaparak ortak çözüm üretme ve çözdükleri problemden heyecan duyma, tartışma ortamında karşı argümanlara yanıt verirken kendi argümanlarını gözden geçirme ve düzeltme yoluyla öğrencilerin birbirleri ile nasıl iletişim kurduklarını göstermesi bakımından önemlidir. Bu anlamda özellikle kanıtın iletişim işlevini görünür kılma bakımından Cilli-Turner'ın (2017) çalışmasına paraleldir.

Farklı araştırmalarda kanıt yapılırken kullanılan örneklerin özellikleri ve bu örneklerin kullanım amacı ortaya konulmuş (Ellis vd., 2012; Lockwood vd., 2016; Ozgur vd., 2019) ve kanıt yapılırken kullanılan pek çok örnek çeşidi olduğu, örneklerin genelde bir iddianın geçerli olup olmadığını test etmek amacıyla ya da bir varsayımı çürütmek amacıyla yapıldığı belirlenmiştir. Bu araştırmada öğretmen, deneysel doğrulamaların bir kanıt yöntemi olmadığını net bir şekilde belirtmiş, bununla birlikte öğrencileri iddialarını test etmek, problemi analiz etmek, varsayımda bulunmak için stratejik örneklerden yararlanmaları konusunda teşvik etmiştir. Böylelikle öğrencilerin kanıt problemlerini çözerken problemleri anlamak ve varsayımda bulunabilmek için çok sayıda stratejik örnekten yararlandıkları, özellikle stratejik örneklerin kanıt yapmalarını sağlamada yardımcı olduğu belirlenmiştir. Ozgur vd., (2019) özellikle doğru, amaçlı kullanılan ve rastgele değil de bir strateji kullanılarak seçilen örneklerin öğrencilerin kanıtlamayı öğrenmelerinde güçlü bir araç olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin özellikle ön test ve ön görüşmelerde seçtikleri örneklerin çoğunlukla rastgele seçilmiş örnekler olduğu belirlenirken, ara ve son klinik görüşmelerde öğrencilerin problemleri anlamak ve varsayımda bulunmak amacıyla genelde stratejik örnekler kullandıkları görülmüştür. Bu anlamda bu araştırma tümevarımsal muhakemenin öğrencilerin kanıt problemlerini anlamalarına ve varsayımlar üretmelerine katkısı olduğunu göstermesi bakımından önemlidir. Bununla birlikte öğrencilerin öğretim uygulamalarında, son testte ve son görüşmelerde kanıt yaparken genelleyici örneklerden yararlandıkları görülmüştür. Balacheff (1988, s. 216-225) genelleyici örnekleri bir sınıfın karakteristik özelliklerini taşıyan genel bir örneğin seçildiği ve genel bir örneğe dayalı argümanların geliştirildiği yöntem olarak tanımlamış ve çalışmasında genelleyici örnek yönteminin pragmatik kanıtlar ile kavramsal kanıtlar arasında geçiş aşaması olduğunu belirtilmiştir. Bu araştırmada kanıta giriş dersinde öğretmen öğrencilerin bulunduğu sınıf düzeyini göz önünde bulundurarak, geçerli kanıt çerçevesinin sınırlarını çizerken genelleyici örneklerin bu sınıfta kanıt olarak kabul edileceğinin altını çizmiştir. Ancak öğrencilerin öğretimlerde arkadaşlarının genelleyici bir örnekten hareketle tüm durumlara genelleme yapmalarını sağlayan açıklamalarını yeterli görmedikleri, daha formel bir kanıt istedikleri belirlenmiştir. Bu araştırmada da benimsenen kanıt tanımında Stylianides (2007b, s. 291), sınıf topluluğu tarafından bilinen ve geçerli kabul edilen ya da sınıftaki öğrencilerin kavramsal olarak algılayabileceği düzeyde olan argümantasyon ve temsil biçimleri kullanılarak kanıt yapılabileceğini belirtmektedir. Öğretmenin genelleyici örnekleri geçerli kanıt yöntemi olarak kabul etmesine karşın öğrencilerin kabul etmemeleri ve daha formel kanıt arayışına girmeleri sınıf topluluğunun geçerli kabul edilen argümantasyon ve temsil biçimlerini daha formel olana doğru değiştirdiğini göstermektedir.

Bu araştırmada, 7. sınıf öğrencilerinin kanıtlama deneyimi yaşamaları için oluşturulan KARİDE modelinin öğrencilerin kanıtlama sürecini olumlu etkilediği, öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun muhakemelerini deneysel doğrulamadan tümdengelimsel muhakemeye doğru değiştirdiği, sınıfta kanıtın farklı işlevlerini ve bu işlevler ile ilişkili olan sınıf normlarını ortaya çıkardığı saptanmış böylece araştırmada belirlenen amaçlara ulaşılmıştır.

5.3. Öneriler

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak geliştirilen öneriler; "Uygulamaya Yönelik Öneriler" ve "Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler" olmak üzere iki başlık altında toplanmıştır.

5.3.1. Uygulamaya yönelik öneriler

Bu araştırma, çalışmanın başında öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapmakta zorlanmalarına karşın KARİDE modeline göre yapılan öğretim uygulamalarının ardından tümdengelimsel muhakemelerinin geliştiğini ve kanıt yapabilen öğrenci yüzdesinin arttığını göstermektedir. Bu sonuç eğitimin her kademesinde öğrencilere imkân verilirse tümdengelimsel muhakeme ve kanıt yapabilecekleri görüşünü desteklemektedir. Ortaokul öğrencilerinin tümdengelimsel muhakeme ve kanıt yapmada başarılı olabilmeleri için KARİDE modeli, ortaokul matematik öğretmenlerine hizmet içi eğitimler yoluyla tanıtılabilir ve bu anlamda derslerinde kanıt etkinliklerine yer vermek isteyen ortaokul matematik öğretmenlerine rehberlik edebilir.

Bu araştırmada kanıt, matematik ya da matematik uygulamaları derslerinde program dışı bir başlık olarak değil, matematik uygulamaları dersinde problem çözme etkinlikleri olarak öğrencilere sunulmuştur. Kanıt; öğrencilerin problem durumlarını tümevarımsal muhakeme yaparak anlamaya çalıştıkları, bu muhakemeye dayalı olarak kendi varsayımlarını oluşturdukları ve oluşturdukları bu varsayımlarını kanıtladıkları bir problem çözme etkinliği olarak ele alınmıştır. Bu anlamda, kanıtın matematik öğretiminde bir konu alanı olarak öğretilmesinden ziyade problem çözme etkinliği olarak ortaokul matematik öğretim programı ile matematik öğrenmenin bir aracı olarak bütünleştirilmesi sağlanabilir. Bu ortamlarda öğretmenler, öğrencilerin birbirlerinin muhakemelerini değerlendirdiği küçük grup ve sınıf tartışmalarının yapıldığı sınıf etkinlikleri tasarlayabilir, bu etkinliklerde sosyal ve sosyo-matematiksel normların kullanımına yönelik uygulamalar yapılabilirler.

Bu araştırmada hem sınıf uygulamalarında hem de görüşmelerde kanıtın keşif alt işlevinin ortaya çıkmamasının nedeninin seçilen problemlerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin keşif yapabilecekleri etkinlikler sunulabilir.

5.3.2. İleride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler

Bu araştırma öğretmen eylemlerinin bir sınıftaki sosyal ve sosyo-matermatiksel normları nasıl şekillendirdiğini, sınıfta özellikle kanıtın açıklama işlevini ortaya çıkaran matematiksel gerekçelendirmeler normunu nasıl pekiştirdiğini göstermesi bakımından önemlidir. Bu nedenle öğrencilerin tümdengelimsel muhakemelerini desteklemek için öğretmenlerin kanıt konusundaki yeterliliklerinin belirlenmesi, kanıta yükledikleri anlamın ne olduğu, matematik derslerinde kanıta duyulan ihtiyacın ya da kanıtın amacının ne olduğu konusunda görüşlerinin belirlenmesi ya da tüm bu durumların iyileştirilmesine yönelik çalışmalar yapılabilir. Benzer şekilde öğretmen adaylarının da kanıt ve muhakemenin öğrencilere sağladığı sosyal ve bilişsel kazanımlara yönelik farkındalıklarının belirlenmesine ve iyileştirilmesine yönelik çalışmalar yapılabilir.

Öğrencilerin kanıt şemalarını, kanıt düzeylerini, muhakeme becerilerini belirlemeye yönelik pek çok çalışma olmasına ve bu çalışmalarda özellikle ortaokul öğrencilerinin tümdengelimsel muhakeme ve kanıt yapma konusunda sıkıntı yaşadıkları bildirilmesine karşın, öğretim desteğiyle bu sıkıntıların giderilmesini sağlayacak araştırmaların sayısının çok az olduğu görülmektedir. Bu nedenle özellikle ortaokulda öğretim uygulamaları ile sınıflarda öğrencilerin kanıt ve muhakemelerindeki değişimi gösteren araştırmalara ihtiyaç vardır.

Bu araştırmada öğrencilerin gerçek anlamda matematik yapmalarına olanak sağlayan bir ortamda tümdengelimsel muhakemelerinin değiştiği gözlenmiştir. Bu bağlamda KARİDE modelinin ortaokul öğrencilerinin kavramsal anlamalarına etkisi belirlenebilir.

Bu araştırma genel anlamda sınıf mikrokültürünün ve bu kültürün birer parçası olan sosyal ve sosyo-matematiksel normların öğrencilerin kanıt yapmalarını desteklediğini ve sınıfta yapılan kanıt etkinliklerinin de bu normları pekiştirdiğini göstermiştir. Bununla birlikte alan-yazında kanıt işlevleri ile ilgili çalışmaların genel anlamda öğrencilerin kanıta yönelik algılarını ortaya çıkarma ve bu algılar aracılığı ile işlevleri betimleme şeklinde olduğu görülmüştür. Kanıt etkinliklerinin yapıldığı sınıf ortamında kanıt işlevlerini ortaya çıkarmaya, hangi etkinliklerin kanıtın hangi işlevine hizmet ettiğini, kanıt işlevleri ile sosyal ve sosoyomatematiksel normlar arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik araştırmaların yapılmasına ihtiyaç vardır.

Bu araştırmada yapılan KARİDE modeline uygun olarak tasarlanan öğretim uygulamalarında kanıtın iletişim işlevi sosyal etkileşim bağlamında ele alınarak, öğrencilerin kanıt etkinliklerinde fikirlerini iletmenin bir yolu olarak belirlenmiş ve *söylem biçimlerini ortaya çıkarma* ile *tartışma ortamı yaratma* alt işlevleri ile ele alınmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin kanıt öğrenmeleri ile matematiksel iletişim becerileri ve bununla ilgili olarak matematiksel dili kullanma yeterliliği arasındaki ilişkiyi belirlemek amaç maddelerinden olmadığı için detaylı olarak incelenmemiş; ancak öğretimden sonra öğrencilerin matematik dilini daha doğru ve anlamlı bir şekilde kullandıkları belirlenmiştir. Bu anlamda kanıt öğrenme ile matematiksel iletişim becerisi arasındaki ilişkiyi daha derin bir şekilde incelemek başka bir araştırmanın konusu olabilir. Aynı zamanda KARİDE modeline göre tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin argümantasyon yapma becerisine olan etkisini belirlemeye yönelik çalışmalar yapılabilir.

Bu araştırma ortokul 7. sınıf düzeyinde yapılmıştır. Kanıt çalışmalarının çok büyük bir kısmının lise ya da lisans düzeyinde olduğu görülmektedir. Bu nedenle ortaokullarda öğrencilerin kanıtlama sürecindeki muhakemelerini belirlemeye ve geliştirmeye yönelik daha fazla sayıda çalışmaya ihtiyaç vardır.

KAYNAKÇA

Alcock, L. and Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 111-129.

Almeida, D. (1996). Variation in proof standards: implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 27 (5), 659-665.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 31 (6), 53- 60.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 34 (4), 479–488.

Altun, M. (2012). *Matematik öğretimi.* Bursa: Alfa Akademi.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Bursa: Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17 (3), 559-579.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Trabzon: Derya Kitabevi.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In. D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, F. Melin-Olsen and J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175–192). Dordrecht: Kluwer.

Bartlo, J.R. (2013). *Why ask why: An exploration of the role of proof in the mathematics classroom.* Unpublished doctoral dissertation. Portland State University.

Battista, M.T. and Clements, D.H. (1995). Geometry and proff. *The Mathematics Teacher*, 89 (5), 386-388.

Bayazit, N. (2009). *Prospective mathematics teacher's use of mathematical definitions in doing proof.* Unpublished doctoral dissertation. Florida: Florida State University, College of Education.

Bayazıt, İ. (2017). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. I*nternational Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic,* 12 (14), 19-40.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7 (1), 23-40.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. and Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L.I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Ball, D.L. and Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W.G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bieda, K.N. and Lepak, J. (2014). Are you convinced? Middle-grade students' evaluations of mathematical arguments. *School Science and Mathematics*, 114 (4), 166-177.

Blanton, M., Stylianou, D. and David, M. (2009). Understanding instructional scaffolding in classroom discourse on proof. In D. Stylianou, M. Blanton and E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 290-306). New York: Routledge.

Bogdan, R.C. and Biklen, S.K. (1992). *Qualitative research for education: Introduction and methods.* Boston: Allyn and Bacon.

Boyle, J.D. (2012). *Study of prospective secondary mathematics teachers' evolving understanding of reasoning-and-proving.* Unpublished doctoral dissertation. Pittsburgh: University of Pittsburgh.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* New York: Springer Science and Business Media.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (1), 35-49.

CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof?. *Journal of Humanistic Mathematics,* 1 (1), 33-60.

Cambridge University. (2013). *Cambridge advenced learner's dictionary.* (4th edition). UK: Cambridge University Press.

Carraher, D., Martinez, M. and Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40 (1), 3-22.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics,* 24 (4), 359-387.

Cilli-Turner, E. (2017). Impacts of inquiry pedagogy on undergraduate students conceptions of the function of proof. *Journal of Mathematical Behavior,* 48, 14–21.

Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*'da sunulan bildiri. Poland: University of Rzeszow.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboration with teachers. In A.E. Kelly and R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-333). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Cobb, P. (2007). Zihin Nerdedir? Sosyokültürel ve bilişsel oluşturmacı perspektiflerin bir buluşma noktası. In C.T. Fosnot (Ed.), (Çev: S. Durmuş), *Oluşturmacılık. Teori, Perspektifler ve Uygulama* içinde (s. 43-66). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Cobb, P. and Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175–190.

Coe, R. and Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Journal of Sociology of Education,* 20 (1), 41-53.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). Common Core State Standards for mathematics. http://corestandards.org/asserts/CCSSI_Math%20Standards.pdf. (Erişim tarihi: 22.05.2019)

Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms.* Unpublished doctoral dissertation. Pennsylvania: The Pennsylvania State University.

Dancis, J. and Davidson, N., (1970). The texas method and the small group discovery method. The Legacy of RL Moore Project. http://legacyrlmoore.org/reference/dancis_davidson.html (Erişim tarihi: 11.11.2018)

Dawson, J. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 14 (3), 269-286.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* 24, 17–24.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics,* 14 (1), 11-18.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. CA: Key Curriculum Press.

Dean, E.E. (1996). Teaching the proof process: A model for discovery learning. *College Teaching*, 44 (2), 52-55.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4 (7), 47-71.

Dennis, A. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 31 (6), 869-890.

Derek, M. (2011). Teaching and learning of proof in the college curriculum. Unpublished Master's Theses. California: San Jose State University.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A.J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.

Ellis, A.E., Lockwood, E., Williams, C.C.W., Dogan, M.F. and Knuth, E. (2012). Middle school students' example use in conjecture exploration and justification.

In L.R. Van Zoest, J.J. Lo and J.L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Epp, S. (1998). A unified framework for proof and disproof. *Mathematics Teacher,* 91 (8), 708-713.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics,* 8 (5), 269-274.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?, *School Science and Mathematics,* 106 (3), 124-132.

Gholamazad, S. (2005). Proof as literate mathematical discourse in past and present: perspective on students' work. In G.M. Lloyd, M. Wilson, J.L.M. Wilkins and S.L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Ginsburg, H.P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics,* 1 (3), 4-11.

Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş*. (Çev: A. Ersoy and P. Yalçınoğlu). Ankara: Anı Yayıncılık.

Goldin, G.A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In. A.E., Kelly and R.A., Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education,* Toronto: OISE Press.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1-2), 5–23.

Hanna, G. and Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds.), *International Handbook of*

Mathematics Education (pp. 877–908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., and Barbeau, E. (2002). What is a proof?. In B. Baigrie (Ed.). *History of modern science and mathematics,* 1, 36-48.

Hanna, G. and Jahnke, H. N. (2004). Proving and modeling. In H.W. Henn and W. Blum (Eds.), *Applications and modelling in mathematics education* (pp. 109-114). Germany: Springer.

Hanna, G. and De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. In G. Hanna and M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The ICMI study* (pp. 1–10). New York: Springer.

Harel, G. (2013). Intellectual need. In K.R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 119-151). New York, NY: Springer.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: AMS

Harel, G., Selden, A and Selden, J., (2006). Advanced mathematical thinking. In A., Gutierrez and P., Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Pschology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp.147-172). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G. and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842).

Harel, G. and Rabin, J. M. (2010). Teaching practices that can promote the authoritative proof scheme. Cana*dian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 10 (2), 139-159.

Healy, L. and Hoyles, C. (2000). A Study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 396-428.

Heinze, A. and Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In D., Stylianou, M., Blanton and E. Knuth (Eds.), *The Learning and Teaching Proof Across the Grades* (pp. 191-203). London: Routledge Publishers.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians’ pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (3), 271-291.

Henderson, P. B., Fritz, S. J., Hamer, J., Hitcher, L., Marion, B., Riedesel, C. and Scharf, C. (2003). Materials development in support of mathematical thinking. *The 7th Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education, Working Group Report, ACM SIGCSE Bulletin*, 35 (2), 185–190. https://www.researchgate.net/publication/220613206_Materials_development_in_support_of_mathematical_thinking. (Erişim tarihi: 18.10.2019)

Herbst, P., T. Miyakawa and D. Chazan. (2010). Revisiting the functions of proof in mathematics classrooms: A view from a theory of instructional exchanges. Unpublished manuscript. Michigan: University of Michigan.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 389-399.

Hersh, R (2009). What ı would like my students to already know about proof. In M. Blanton, D. Stylianou, and E. Knuth (Eds.), T*eaching and Learning Proof across the Grades: K-16 perspective* (pp. 17-21). New York: Routledge.

Hunting, R.P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (2), 145-165.

Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A. and Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production?. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (1), 1–14.

Jahnke, H.N. (2000). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In G. Hanna, H.N., Jahnke and H., Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: 17 Philosophical and Educational Perpectives* (pp.17-32). New York, NY: Springer.

Karaçay, T. (2009). *Soyut Matematiğe Giriş.* Ankara: Başkent Üniversitesi Yayınları.

Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim Online*, 2 (2), 2-9.

Karataş, Z. (2015). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. *Manevi Temelli Sosyal Hizmet Araştırmaları Dergisi,* 1 (1), 62-80.

Kilpatrick J., Swafford J. and Findell B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Knuth, E.J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5 (1), 61-88.

Knuth, E.J. and Elliott, R.L. (1998). Characterizing students’ understanding of mathematical proof. *The Mathematics Teacher*, 91 (8), 714-731.

Knuth, E.J., Chopin, J.M. and Bieda, K.N. (2009). Middle school students’ production of mathematical justification. In. D.A., Stylianou, M.L., Blanton and E.J Knuth (Eds), *Teaching and Learning Proof Across the Grades:A K-16 perspective* (pp.153-170). New York: Routledge.

Knuth, E., Zaslavsky, O. and Ellis, A .(2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 256–262.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 151-161.

Lampert, M. (1988). What can research on teacher education tell us about improving the quality of mathematics education?. *Teaching and Teacher Education*, 4 (2), 157-170.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27 (1), 29–63.

Larson, R., Boswell, L. and Stiff, L. (2001). *Geometry*. Boston: McDougal Littell.

Lee, J.K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education*, 16, 1-13.

Liang Chua, B., (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01873071/document. (Erişimtarihi:05.09.2018)

Liu, P. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *Mathematics Teacher*, 96 (6), 416 – 421.

Liu, Y., Tague, J. and Somayajulu, R. (2016). What do eighth-grade students look for when determining if a mathematical argument is convincing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 11 (7), 2373-2401.

Lockwood, E., Ellis, A.B. and Lynch, A.G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2 (2), 165–196.

Lockhart, P. (2002). A Mathematician's Lament. https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf. (Erişim tarihi: 03.08.2018)

Long, C.T., De Temple, D., W., Millman, R.S. (2015). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. England: Pearson Education Limited.

Lynch, A.G., and Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 323-338.

Maher, C.A. (2009). Children's reasoning discovering the ıdea of mathematical proof. In M. Blanton, D. Stylianou and E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 curriculum* (pp. 120-132). New York: Routledge.

Maher, C.A., and Martino, A.M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 194–214.

Martin, T.S. and McCrone, S.S. (2003). Classroom factors related to geometric proof construction ability. *The Mathematics Educator*, 7 (1), 18–31.

Martin, T.S., McCrone, S.S., Bower, M.L., and Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 95-124.

Mason, J., Burton, L. And Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Harlow England: Pearson Education Limited.

Mata-Pereira, J. and Pedro da Ponte, J. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96 (2), 169-186.

Cambridge Advanced Learner's Dictionary. (2013). C. McIntosh, (Ed.), UK: Cambridge University Press. https://dictionary.cambridge.org/tr/s%C3%B6zl%C3%BCk/ingilizce/proof. (Erişim tarihi: 05.07.2018)

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları

Milli Eğitim Bakanlığı. (2017). *ABİDE 2016 Raporu.* http://edirne.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2018_06/08104327_ABYDE_Turkiye.pdf. (Erişim tarihi: 09.09.2018)

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2019). *PISA 2018 Türkiye ön raporu*. http://www.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2019_12/03105347_PISA_2018_Turkiye_On_Raporu.pdf. (Erişim tarihi: 01.09.2020)

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27 (3), 249-266.

Mubark, M.M. (2011). Mathematical thinking: Teachers perceptions and students performance. *Canadian Social Science,* 7 (5), 176-181.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics: Executive summary*. Reston, VA.: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA.: NCTM

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2009). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi.* (4. Baskı), Ankara: Maya Akademi.

Ozgur, Z. (2017). *Relationships between students' conceptions of proof and classroom factors.* Unpublished doctoral dissertation. Madison: The University of Wisconsin-Madison.

Ozgur, Z., Ellis, A.B., Vinsonhaler, R., Dogan, M.F. and Knuth, E. (2019). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 284–303.

Oxford advenced learner’s dictionary (2010) https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/definition/english/proof_1. (Erişim Tarihi: 01.09.2018)

Özdemir, M. (2010). Nitel veri analizi: Sosyal bilimlerde yöntembilim sorunsalı üzerine bir çalışma. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 11 (1), 323- 343.

Özer, O., Çoker, D. ve Taş K. (2010). *Soyut matematik* (7.baskı) Ankara: Bilim Yayınları.

Öztürk, M., Akkan, Y., Kaleli-Yılmaz, G. ve Kaplan, A. (2015). Ortaokul öğrencileri ve öğretmenleriyle yapılan matematiksel ispat araştırmaları: Nitel meta-sentez çalışması. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu-2*. Adıyaman: Adıyaman Üniversitesi.

Pedemonte, B. and Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 43 (2), 257-267.

Peled, I. and Zaslavsky, O. (1997). Counter-example that (only) prove and counter-example that (also) explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19 (3), 49-61.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. and Echeverry, O.M. (2009). Assigning mathematics tasks versus providing pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove. . F.L., Lin, F.J., Hsieh, G., Hanna, M., De Villiers (Eds.) *ICMI Study 19—Proof and Proving in Mathematics Education*. https://www.researchgate.net/publication/282571052_Proceedings_of_the_ICMI_Study_19_Conference_Proof_and_Proving_in_Mathematics_Education_Volume_2. (Erişim Tarihi: 01.03.2018)

Pierce, D. (2011). *Önermeler mantığındaki biçimsel kanıtlar.* http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/113/2011/Mantik/mantik.pdf. (Erişim Tarihi: 05.03.2018)

Polya, G. (1957). *How to solve It: A new aspect of mathematical method*. New York: Doubleday and Company.

Porteous, K. (1994). When a truth is seen to be necessary. *Mathematics in School*, 23 (5), 2-5.

Raman, M.J. (2002). Proof and justification in collegiate calculus. Unpublished doctoral dissertation. Berkeley, USA: University of California.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5–41.

Reid, D.A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (1), 5-29.

Reid, D.A. and Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105 (3), 252-255.

Rossi, R. J. (2006). *Theorems, Corollaries, Lemmas and Methods of Proof*. USA: Wiley Interscience.

Savic, M. (2012). *Proof and proving: Logic, impasses, and the relationship to problem solving.* Unpublished doctoral dissertation. Las Cruces: New Mexico State University.

Schabel, C.J. (2005) An ınstructional model to ımprove proof writing ın the number theory classroom. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 15 (1), 45-58.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. In M. Blanton, D. Stylianou and E. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 71-86). New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13 (1), 55-80.

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor’s foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton and E. Knuth (Eds.), T*eaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York: Routledge.

Selden, J. and Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. Educational Studies in Mathematics. 29 (2), 123–151.

Selden, A. and Selden, J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students‘ abilities. In D. Stylianou, M. Blanton and E. Knuth (Eds.), T*eaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). New York: Routledge .

Simon, M.A. and Blume, G.W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15 (1), 3-31.

Shipley, A.J. (1999). *An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs*. Unpublished Doctoral Dissertation. Washington: University of American.

Shongwe, B. (2019). *Exploring grade 11 learners' functional understanding of proof in relation to argumentation in selected high schools*. Unpublished Doctoral Dissertation. Durban: University of KwaZulu-Natal.

Sowder, L. and Harel, G., (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.

Staples, M.E., Bartlo, J. and Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31 (4), 447–462.

Stefanowicz, A. (2014). *Proofs and Mathematical Reasoning*. University of Birmingham Mathematics Support Center. https://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Proof-and-Reasoning.pdf. (Erişim Tarihi: 05.03.2018)

Steffe, L.P. and Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh and A.E. Kelly (Eds.), *Research Design In Mathematics And Science Education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stover, N. F. (1989). *An exploration of students' reasoning ability and van Hiele levels as correlates of proof-writing achievement in geometry*. Doctoral Dissertation. Eugene: University of Oregon.

Stylianides, A.J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65 (1), 1-20.

Stylianides, A.J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 289-321.

Stylianides, G.J. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics Teaching*, *219*, 39-44.

Stylianides, G.J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning,* 11 (4), 258-288.

Stylianides, A.J. and Stylianides, G.J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: The case of reasoning and proving. In J. Novotna, H., Moraova, Kratka, M. and N. Stehlíkova (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 201-208). Prague: PME.

Stylianides, A.J. and Ball, D.L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (4), 307-332.

Stylianides, G.J. and Stylianides, A.J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10 (2), 103-133.

Stylianides, G.J. and Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3), 314-352.

Stylianou, D., Blanton, M. and Rotou, O. (2015). Undergraduate students' under-standing of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education,* 1 (1), 91–134.

Subramanian, L. (2005). *An investigation of high school geometry students' proving and logical thinking abilities and the ımpact of dynamic geometry software on student performance.* Unpublished Doctoral Dissertation. Florida: University of Central Florida.

Şen, C. and Güler, G. (2015). examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research,* 3 (9), 617-631.

Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some?. In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (pp. 117-136). Reston, Virginia: NCTM.

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi.* Doktora tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

Tanisli, D. (2016). How do students prove their learning and teachers their teaching? Do teachers make a difference?. *Eurasian Journal of Educational Research*, 66, 47-70.

Tanışlı, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2013). sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 12 (44), 255-283.

Tanışlı, D. ve Yavuzsoy-Köse, N. (2020). Etkinlikler yoluyla matematiksel muhakemenin desteklenmesi. Y. Dede, M.F., Doğan ve F. Aslan Tutak (Editörler), *Matematik eğitiminde etkinlikler ve uygullamaları içinde* (s. 363-393). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Tanışlı, D., Yavuzsoy-Köse, N. ve Camci, N., (2017) . Matematik öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genelleme ve doğrulama bilgileri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 5 (3), 195-222.

Toluk Uçar, Z., (2016). Sosyomatematiksel normlar. E., Bingöbalı, S., Arslan ve İ.Ö., Zembat (Editörler), *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde. Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Toker, Z. (2020). Etkinlikler yoluyla sınıf içinde ispat ve sorgulama. Y. Dede, M.F., Doğan ve F. Aslan-Tutak (Editörler), *Matematik eğitiminde etkinlikler ve uygullamaları* içinde (s. 439-463). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R. and Tabach, M. (2009). Should proof be minimal? Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28 (1), 58-67.

Turğut, M., Yenilmez, K. ve Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6 (13), 227-252.

Türk Dil Kurumu, (2018). https://sozluk.gov.tr/. (Erişim Tarihi: 01.09.2018).

Van Eemeren, F.H., Grootendorst, R. (1999). Developments in argumentation theory. In. *Foundations if argumentative text processing.* (pp. 43-57). Amsterdam: Amsterdam University Press.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washington: Falmer.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? - Developing concepts of proof in primary and secondary schools,* Leicester: The Mathematical Association.

Waring, S. (2001). Proof is back! (a proof-orientated approach to school mathematics). *Mathematics in school,* 30 (1), 4-8.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomaticstructures and proofs that ıllustrate technique. *For the learning of mathematics,* 22 (3), 14-17.

Weber, K. (2004a). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M.J. Hoines and A. B. Fuglestad (Eds.) *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.14–18). Bergen: Norway.

Weber, K. (2004b). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behaviour,* 23 (2), 115–133.

Weber, K., Inglis, M. and Mejia-Ramos, J.P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist*, 49 (1), 36–58.

Weber, K. and Alcock, L. J. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics,* 56 (2-3), 209–234.

Wood, T., Cobb, P. and Yackel, E. (1990). The contextual nature of teaching: Mathematics and reading instruction in one second-grade classroom. *The Elementary School Journal,* 90 (5), 497-513.

Yackel, E. and Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, 458-477.

Yackel, E. and Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 333-352). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Yavuzsoy-Köse, N. (2008). *İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı cabri geometriyle simetriyi anlamlandırmalarının belirlenmesi: Bir eylem araştırması.* Doktora tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). Sosyal *bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (6.baskı.) Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme.* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zack, V. (1997). "You have to prove us wrong”: Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 291-298). Lahti, Finland: University of Helsinki.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu: Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Zaslavsky, O., Nickerson , S. D., Stylianides , A. Kidron ,I., and Winicki- Landman G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna and De Villiers (Eds.), *ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Zeybek, Z. ve Üstün, A (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED),* 13 (1), 196-216.

EKLER

EK-1. Etik Kurul İzin Belgesi

Evrak Kayıt Tarihi: 25.12.2018	Protokol No: 118922	Tarih: 23.01.2019

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Ortaokul Öğrencilerinin Tanım Oluşturma ve Tanımları Değerlendirme Sürecinde Kanıt Becerilerinin Gelişimi: Tanım Süreci ve Tümdengelimsel Muhakeme İlişkisi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Doç. Dr. Nilüfer KÖSE
TEZ YAZARI:	Tuğba Yulet YILMAZ
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

Prof.Dr. Coşkun BAYRAK
(Başkan-Eğitim Fak.)

Prof.Dr. T. Volkan YÜZER (Başkan Yardımcısı-Açıköğretim Fak.)	**KATILMADI** **Prof.Dr. Esra CEYHAN** (Eğitim Fak.)
Prof.Dr. Münevver ÇAKI (Güzel Sanatlar Fak.)	**Prof.Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ** (İkt. ve İdari Bil. Fak.)
Prof.Dr. Handan DEVECİ (Eğitim Fak.)	**Prof.Dr. Emel ŞIKLAR** (İkt. ve İdari Bil. Fak.)

EK-2. Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

Ana. Üni. Evrak Tarih ve Sayısı: 01/03/2019-E.14813

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ESKİŞEHİR
İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

Sayı : 12377788-604.01.02-E.4196611 — 26.02.2019
Konu : Araştırma İzni

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Yazı İşleri Müdürlüğü)

İlgi: 08/02/2019 tarih ve 17619 sayılı yazınız.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Tuğba Yulet YILMAZ'a ait Araştırma Projesi Müdürlüğümüz Araştırma ve Sosyal Etkinlik İzinleri İnceleme Komisyonu tarafından değerlendirilmiş ve Valiliğimizce uygun görülmüş olup, Araştırma Değerlendirme Formu ile Valilik Oluru ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinize arz ederim.

Hakan CIRIT
İl Milli Eğitim Müdürü

EKLER :
1-Araştırma Değerlendirme Formu
2-Valilik Oluru

BELGENİN ASLI
ELEKTRONİK İMZALIDIR
Tarih: 27 Şubat 2019
Önder ÜLKE
Memur

Büyükdere Mah.Atatürk Blv. No:247 ESKİŞEHİR
Elektronik Ağ: www.eskisehir.meb.gov.tr
e-posta: bilgiedinme26@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için:Özel Büro
Tel:(0 222) 239 72 00/355
Faks: (0 222) 239 39 22

EK-2. (Devam) Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ESKİŞEHİR
İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

Sayı : 12377788-604.01.02-E.4062593 25/02/2019
Konu : Araştırma İzni

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü'nün 08/02/2019 tarih ve 17619 sayılı yazısı.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Tuğba Yulet YILMAZ'ın, Doç. Dr. Nilüfer KÖSE'nin danışmanlığında hazırladığı "Ortaokul Öğrencilerinin Tanım Oluşturma ve Tanımları Değerlendirme Sürecinde Kanıt Becerilerinin Gelişimi: Tanım Süreci ve Tümdengelimsel Muhakeme İlişkisi" başlıklı doktora tezi kapsamındaki uygulama çalışması Müdürlüğümüz Araştırma ve Sosyal Etkinlik İzinleri İnceleme Komisyonu tarafından değerlendirilmiş ve uygulanmasında sakınca görülmediği bildirilmiştir.

Müdürlüğümüzce de uygun görülmüş olan, Ortaokul Öğrencilerinin Tanım Oluşturma ve Tanımları Değerlendirme Sürecinde Kanıt Becerilerinin Gelişimi: Tanım Süreci ve Tümdengelimsel Muhakeme İlişkisi konulu araştırma çalışmasının, 2018-2019 eğitim öğretim yılı içerisinde ve eğitim öğretimi aksatmamak kaydıyla, ilimiz Cahit Zarifoğlu Ortaokulunda öğrenim gören 7. Sınıf öğrencilerine uygulanmasını takdirlerinize arz ederim.

Hakan CIRIT
İl Milli Eğitim Müdürü

O L U R
..../02/2019

Dr.Erdinç YILMAZ
Vali a.
Vali Yardımcısı

Büyükdere Mah.Atatürk Blv. No:247 ESKİŞEHİR
Elektronik Ağ: www.eskisehir.meb.gov.tr
e-posta: bilgiedinme26@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Özel Büro
Tel: (0 222) 239 72 00/355
Faks: (0 222) 239 39 22

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 582d-c978-35ea-890b-1b56 kodu ile teyit edilebilir.

EK-2. (Devam) Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

ESKİŞEHİR
İL MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ
ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN

Adı Soyadı	Tuğba Yulet YILMAZ
Kurumu / Üniversitesi	Anadolu Üniversitesi
Araştırma Yapılacak Eğitim Kurumu ve Kademesi	Cahit Zarifoğlu Ortaokulu
Araştırmanın Konusu	Ortaokul Öğrencilerinin Tanım Oluşturma ve Tanımları Değerlendirme Sürecinde Kanıt Becerilerinin Gelişimi: Tanım Süreci ve Tümdengelimsel Muhakeme İlişkisi
Üniversite / Kurum Onayı	Var
Araştırma / Proje / Ödev / Tez Önerisi	Tez
Veri Toplama Araçları	1. Öğrencilere sorulan ön ve son klinik görüşme soruları (3 Sayfa – 10 Madde) 2. Araştırma Gönüllü Katılım Formu (1 Sayfa) 3. Aile İzin Formu (1 Sayfa)
Görüş İstenecek Birimler	

KOMİSYON GÖRÜŞÜ

İlgi: Milli Eğitim Bakanlığı'nın 22.08.2017 tarih ve 12607291 sayılı 2017/25 Nolu Genelge Kapsamında Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri Genelgesi.
Genelgenin ilgili maddeleri gereğince yapılan incelemede 2018-2019 öğretim yılını aksatmayacak şekilde uygulanmasında sakınca yoktur.

Komisyon Kararı	KABUL (oybirliği ile)
(Varsa) Muhalif Üyenin Adı ve Soyadı	Gerekçesi : ....

KOMİSYON

15/02/2019

Okan ERER **Öğretmen**	**Gülseren TOPUZ** **Öğretmen**
Cemile KARALAR **Öğretmen**	**Ayşe AYDIN AKKURT** **Öğretmen**

Büyükdere Mah.Atatürk Blv. No:247 ESKİŞEHİR
Elektronik Ağ: www.eskisehir.meb.gov.tr
e-posta: bilgiedinme26@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Özel Büro
Tel : (0 222) 239 72 00/355
Faks: (0 222) 239 39 22

EK-2. (Devam) Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

ANKET VE ARAŞTIRMA İZİN KOMİSYONU ARAŞTIRMA ÖN İNCELEME FORMU

Adı Soyadı	: Tuğba Yulet YILMAZ
Kurumu	: Anadolu Üniversitesi
Konu	: Ortaokul Öğrencilerinin Tanım Oluşturma ve Tanımları Değerlendirme Sürecinde Kanıt Becerilerinin Gelişimi: Tanım Süreci ve Tümdengelimsel Muhakeme İlişkisi
Tarih	: 22.02.2019

MEB 22.08.2017 tarih ve 12607291 sayılı 2017/25 Nolu Genelge Kapsamında Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinlerinde Dikkat Edilecek Hususlar	Uygun	Uygun Değil	Açıklama
Anayasa, Milli Eğitim Temel Kanunu ve Türk Milli Eğitiminin Genel Amaçlarına uygunluğu,	X		
Milli ve manevi değerlere uygunluğu,	X		
Kişilik haklarına uygunluğu (kişisel bilgiler istenilmemeli, ad-soyad vb.),	X		
Cinsiyet, din, dil ve ırk gibi farklılıkları istismar etmeme durumu,	X		
İnsan Hakları Evrensel Beyannamesi ve uluslararası bağlayıcılığı olan diğer belgelerce suç kabul edilen hususları içermemesi,	X		
Kişisel ve ailevi mahremiyetini ifşa eden sorular, ifadeler, resimler ve simgeler yer almaması,	X		
Veri toplama araçlarında kişi, kurum ve kuruluşlara yönelik reklam veya tanıtım gibi ifade ve öğeler yer almaması,	X		
Araştırma önerisi ile veri toplama araçlarının tamamının idareye sunulması,	X		
Araştırma, veri toplama araçlarının okul ve kurumlarda uygulanması, eğitim-öğretim faaliyetini aksatmaması için ilk ve ikinci yarıyılın bitimine en az üç hafta kalıncaya kadar yapılması,	X		
Uygulamanın sadece Eskişehir ilinde yapılmasıdır.	X		

Komisyon Üyeleri	Uygun	Uygun Değil	İmza
Okan ERER	X		
Gülseren TOPUZ	X		
Cemile KARALAR	X		
Ayşe AYDIN AKKURT	X		

Büyükdere Mah. Atatürk Blv. No:247 ESKİŞEHİR
Elektronik Ağ: www.eskisehir.meb.gov.tr
e-posta: bilgiedinme26@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Özel Büro
Tel : (0 222) 239 72 00/355
Faks: (0 222) 239 39 22

EK 3: Araştırma Gönüllü Katılım Formu

ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, "Ortaokul Öğrencilerinin Tanım Oluşturma ve Tanımları Değerlendirme Sürecinde Kanıt Becerilerinin Gelişimi: Tanım Süreci ve Tümdengelimsel Muhakeme İlişkisi" başlıklı doktora tez çalışmasıdır. Bu çalışma ile ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin tanım oluşturma ve verilen tanımları değerlendirme aracılığıyla kanıt becerilerini geliştirmek amaçlanmıştır. Çalışma, Tuğba Yulet YILMAZ tarafından yürütülmekte olup, sonuçları ile ortaokul öğrencilerinin kanıt becerilerinin gelişimi, öğretim deneyi araştırma yöntemi ile ortaya konulacaktır.

Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.

- Çalışmanın amacı doğrultusunda, öğretim deneyi ve klinik görüşmeler yapılarak sizden veriler toplanacaktır.
- İsminizi yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz/araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler elektronik ortamda korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek ya da imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabileceksiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'na (mail/tel) yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı: Tuğba Yulet YILMAZ
Adres :Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik Eğitimi A.B.D.
İş Tel :0(222)2171724
Cep Tel:0 532 5686343

Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

Katılımcı Ad ve Soyadı:
İmza:
Tarih:

EK-4: Öğrenci Velisi İzin Formu

VELİ İZİN FORMU

Sayın Veli,

Bu araştırmanın genel amacı, ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin kanıt becerilerini, tanım oluşturma ve verilen tanımları değerlendirme aracılığıyla geliştirmektir.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşmeler ve sınıf uygulamaları sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri ve sınıf uygulamalarını video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu veriler, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Sizin isteğin doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, çocuğunuzun ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Çocuğunuz istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Görüşülen Öğrencinin Velisi

Görüşmeci: Tuğba Yulet YILMAZ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Doktora Programı