ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN

BAĞIMSIZ VE YARI BAĞIMSIZ GENELLEME

GÖREVLERİNDEKİ ÖRÜNTÜ OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Doktora Tezi

Serdar KARAZ

Eskişehir 2021

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN BAĞIMSIZ VE YARI BAĞIMSIZ GENELLEME GÖREVLERİNDEKİ ÖRÜNTÜ OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Serdar KARAZ

DOKTORA TEZİ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Programı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Temmuz 2021

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serdar KARAZ'ın "ortaokul öğrencilerinin bağımsız ve yarı bağımsız genelleme görevlerindeki örüntü oluşturma süreçleri" başlıklı tezi 24/06/2021 tarihinde aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında Doktora tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI	…………
Üye	: Prof. Dr. Nilüfer KÖSE	…………
Üye	: Prof. Dr. Hülya GÜR	………..
Üye	: Prof. Dr. Yaşar AKKAN	………..
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Emine Aysın ŞENEL	……….

Prof. Dr. Bahadır ERİŞTİ

Enstitü Müdürü

ÖZET

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN BAĞIMSIZ VE YARI BAĞIMSIZ GENELLEME GÖREVLERİNDEKİ ÖRÜNTÜ OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Serdar KARAZ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Temmuz, 2021

Danışman: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Bu araştırmanın amacı ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin öğretim deneyi sürecinde yarı bağımsız ve bağımsız örüntüleri genelleme bağlamında oluşturdukları partonomik yapıları ve bu yapıların fonksiyon tabanlı genelleme sürecine etkisini incelemektir. Araştırmada verilerin toplanması, analizi ve yorumlanmasında nitel araştırma yönetimi benimsenmiş ve çalışma öğretim deneyi olarak tasarlanmıştır. Araştırma 2018-2019 eğitim öğretim yılında Kütahya ilinin Simav ilçesinde bulunan Osmanbey ortaokulunda gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi üç düşük, üç orta ve üç yüksek düzeydeki dokuz öğrenciden oluşan ortaokul altıncı sınıf grubuyla dokuz haftalık sınıf uygulamaları olarak gerçekleştirilmiştir. Araştırmada veriler öğrencilerle gerçekleştirilen klinik görüşme videoları, sınıf öğretim dersleri videoları ve öğrenci dokümanları ile toplanmıştır. Araştırma sonunda ön klinik görüşmelerde öğrencilerin çoğunlukla sayı örüntüsüne dayalı şekil örüntüsü oluştururken, son klinik görüşmelerde ise öğrencilerin çoğunluğunun partonomik ilişkilere dayalı örüntü oluşturdukları ve oluşturdukları örüntüleri standart ya da standart olmayan fonksiyon tabanlı genelledikleri gözlenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin çoğunluğunun, tablo temsili, sözel temsil, yarı sembolik ve sembolik temsilleri kullandığı ve temsiller arası geçiş yapabildikleri belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin temsilleri kendi içinde anlamlı kullandıkları da gözlenen sonuçlar arasındadır.

Anahtar Sözcükler: Yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma, Yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme, Örüntüler.

ABSTRACT

PATTERNING PROCESS OF MIDDLE STUDENTS IN FREE AND SEMI-FREE GENERALIZATION TASKS

Serdar KARAZ

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, July, 2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

The aim of this study is to examine partonomic structures that middle school sixth grade students formed in the context of generalizing semi-free and free patterns during teaching experiment process and the effect of these structures on the function-based generalization process. Qualitative research management was adopted in the collection, analysis and interpretation of data in the research and the study was designed as a teaching experiment. The research was carried out in the Osmanbey Middle School in Simav district of Kütahya province, in the 2018-2019 academic year. The teaching experiment was carried out as a nine-week classroom practices with a middle school sixth grade group consisting of three low, three middle and three high-level students. The data in the study were collected with clinical interview videos, classroom teaching lecture videos and student documents. At the end of the study, while it was observed that students mostly formed a figural pattern based on number pattern in the pre-clinical interviews, the majority of the students created patterns based on partonomic relationships in the last clinical interviews, and generalized patterns they formed based on standard or non-standard functions. In this process, it was determined that most of the students used table representation, verbal representation, semi-symbolic and symbolic representations and were able to switch between representations. In addition, it was among the observed results that the students used the representations meaningfully in themselves.

Keywords: Semi-free and free pattern formation, Semi-free and free pattern generalization, Patterns.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma birçok kişinin destek ve katkılarıyla gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın baş mimarı olan doktora öğrenimim boyunca beni yetiştiren, bu süreç içerisinde ben bıraksam bile o bırakmayan, maddi ve manevi desteklerini asla esirgemeyen, yedi yirmi dört her vakit mesajlarımı ve e-postalarımı cevapsız bırakmayan asla hakkını ödeyemeyeceğim çok değerli tez danışmanım ve biricik hocam Prof. Dr. Dilek TANIŞLI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çok değerli hocamı bu katkı ve emeklerinden dolayı ömrüm yettiği sürece asla unutmayacağım.

Tez izleme komitesinde bulunan, olumlu eleştiri ve katkılarıyla bana yol gösteren değerli hocalarım Prof. Dr. Nilüfer KÖSE'ye ve Dr. Öğr. Üyesi Emine Aysın ŞENEL'e en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Tez savunma jürime katılan ve tezimin daha iyi hale gelmesini sağlayan Prof. Dr. Hülya GÜR ve Prof. Dr. Yaşar AKKAN'a çok teşekkür ederim.

Doktora öğrenimimde öğrencisi olduğum Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalında yer alan çok değerli ve bilgili hocalarıma emeklerinden ve katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Çalışmanın uygulamasının yapıldığı Kütahya Simav Osmanbey ortaokulunda bana her türlü kolaylık gösteren okul yönetimine, çalışmamın gerçekleştiği matematik dersi öğretmeni Bekir Sait YİĞİT'e ve çalışmama katılan öğrencileri ve ailelerine teşekkür ederim.

Doktora öğrenimimde her zaman ve özellikle pes ettiğim zamanlarda beni tekrar ayağa kaldırıp maddi ve manevi desteğini asla ve asla esirgemeyen hayat arkadaşım Hatice KARAZ'a, çok değerli zamanından çaldığım biricik oğlum Kerem KARAZ'a sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak beni yetiştiren asla haklarını ödeyemeyeceğim çok değerli annem ve babama sonsuz teşekkür eder bu çalışmayı onlara ithaf ederim.

Serdar KARAZ

Eskişehir, 2021

24/06/2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgilere ilişkin kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Serdar KARAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

<u>**Sayfa**</u>

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

1. GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik; biçimlerin, sayıların ve niceliklerin yapılarını, özelliklerini, aralarındaki ilişkileri inceleyen evrensel bir dil ve düşünce biçimi olup, Türk Dil Kurumunda "*Aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı*" olarak geçmektedir. Matematik bir gereksinme ve yaşamın ayrılmaz bir parçasıdır. Doğru düşünme kurallarını öğrettiği gibi somut ve soyut kavramlar arasında bağıntı kurmaya yardımcı olur. Kısaca matematik, evrenin anlaşılmasını, yaşam boyu karşılaşabileceğimiz problemleri çözmeyi, analitik ve eleştirel düşünme, genelleme, ilişkilendirme ve iletişim gibi becerilerin gelişimini sağlayan bir bilim dalıdır.

Günlük yaşamda ve doğada matematiksel ilişkiler hep vardır (Devlin, 1998). Bu ilişkileri anlamak ve bunlar arasındaki kuralları bulmak için matematiğin alt dallarından Cebir kullanılmaktadır. Cebir kelimesinin sözlük anlamı Türk Dil Kurumunda "gerçek sayılarla, bunların yerini tutan harfler yardımıyla nicelikler arasında genel bağıntılar kuran bir matematik dalı" olarak geçmektedir. Cebir matematiğin diğer bilim dalları ile iletişimini ve etkileşimini sağlayan bir dildir. Aritmetikten sonra harfli ifadelerin kullanımıyla birlikte cebirin sembolik dili ve soyut yapısı karşımıza çıkmaktadır. Geleneksel anlayışla aritmetik öğretiminden cebir öğretimine geçiş yapılması pek çok öğrencinin soyut düşünmeye dair zihinsel becerileri ve alışkanlıkları gerçekleştirmelerinde güçlük yaşamalarına neden olmaktadır (Arcavi, 2008; Kilpatrick ve Izsák, 2008; Mason, 2008'den aktaran Twohill, 2016). Bu nedenle yapılan araştırmalar cebirin erken dönemde öğrencilerle tanıştırılmasını ve aritmetik ile harmanlanarak verilmesinin önemini vurgulamaktadır (Kaput, 1995; Mason, 1996). Her ne kadar ilkokulda cebir kelimesinden bahsedilmese de birçok problem durumunda cebirsel düşünme becerilerinin etkili bir şekilde kullanılmasıyla ileriye dönük cebir konu alanının temelleri atılmaktadır.

Cebir genel olarak sembol sistemlerinin bir çalışması olarak düşünülürken, cebirsel düşünme formal cebirden önce ya da formal cebir sırasında ortaya çıkan genellemelere işaret etmektedir (Smith, 2003). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), cebirsel düşünmenin değişimi analiz etme, nicelikler arasındaki ilişkileri genelleme ve bu matematiksel ilişkileri çeşitli şekillerde temsil etme olarak açıklamaktadır. Cebirsel düşünme gelişiminin temelinde örüntü ve ilişkiler yer almaktadır. Pek çok matematik eğitimcisi tarafından örüntülerin okul matematiğindeki yeri ve önemi belirtilerek, matematiğin sınıflandırma ve tüm örüntüleri içeren bir bilim olduğu, örüntü ve düzenin her zaman matematikte var olduğu, örüntü ve ilişki aramanın ise matematiğin kendisi olduğu ifade edilmiştir (Sawyer, 1955; Williams ve Shuard, 1982; Biggs ve Shaw, 1985; Mattershead, 1985'den aktaran Orton, 1999). Hatta örüntülere ve örüntülerin genellenmesine matematiğin kalbi ve özü olarak bakılmaktadır (Zazkis ve Liljedahl, 2002).

Örüntüler cebirin somutlaştırılmasında ve kavramsallaştırılmasında çok büyük bir rol oynamaktadır. Mason (1996) aritmetikten cebire geçiş sürecinde yaşanan güçlüklerin üstesinden gelmek için örüntü ve örüntü genelleme konularının en etkili yol olduğunu belirtmiştir. Örüntüler, cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye dayalı görüşlerin geliştirilmesinde önemli bir kavramdır (Tanışlı ve Olkun, 2009; Akkan ve Çakıroğlu, 2012). Erken yaşlardan itibaren örüntüler bağlamında fonksiyonel düşünmeye ilişkin çalışmalar ortaöğretimde öğrencilerin zorlandıkları fonksiyon kavramına ön koşul oluşturması açısından oldukça önemlidir (Smith 2003'den aktaran Steele, 2005; Kabael ve Tanışlı, 2010). Ayrıca örüntüler düşünceler arasındaki boşlukları doldurmakta (Liljedahl, 2004), ardışıklık ve düzenlilik düşüncelerinin gelişimini sağlamasının yanında tanıma, gözünde canlandırma, analiz etme, sözlü ifade etme, sembolleştirme (Tanışlı ve Olkun, 2009), özellikle de muhakeme ve problem çözme başta olmak üzere temsil, ilişkilendirme, iletişim, tahmin gibi becerilerin gelişimine de katkı sağlamaktadır. Diğer yandan örüntüler öğrencilerin doğada var olan bazı olguların matematikle olan ilişkisinin keşfedilmesinde de kullanılmaktadır. Nitekim NCTM (1989)'de "Tüm dünya örüntülerle doludur. Bu nedenle matematik programları, öğrencilerin her gün karşılaştıkları örüntülerle ve bu örüntülerin matematiksel modelleri ya da tanımlamaları ile ilgilenmelerine yardımcı olmalıdır." ifadeleriyle örüntülerin öneminden bahsetmiştir.

Örüntülerin genellemesine ilişkin her sınıf düzeyinde pek çok çalışma yapılmakta ve bu çalışmalarda öğrencilerin örüntü genellemeye ilişkin doğal bir eğilimleri olduğu ifade edilmektedir (Tanışlı ve Özdaş, 2009; Nilsson ve Juter, 2011; Rivera, 2013; Jurdak ve El Mouhayar, 2014; Walkowiak, 2014; Cadez ve Kolar, 2015; Wilkie, 2016). Örüntü genelleme verilen bir dizi başlangıç ipucu ya da belirli durumlar için iyi tanımlanmış bir matematiksel yapının oluşturulmasını ve gerekçelendirilmesini içeren bir beceridir. Örüntü genelleme ve matematiksel yapı derinlemesine ve kavramsal olarak iç içe geçmiştir, yani örüntü genelleme becerisinin doğası gereği yorumlayıcı ve kural odaklıdır. Genelleme yaparken başlangıçta nesneler hakkında eksik bilgilere karşın öğrenciler öngörülerini ve muhakemelerini kullanarak farklı bakış açılarına göre eşdeğer yapılar oluşturabilmektedir. Dolayısıyla her örüntünün başlangıçta iyi tanımlanması gerekmektedir (Rivera ve Becker, 2016).

Örüntü genelleme sürecinde kullanılan çoklu temsiller ve temsiller arası dönüşümler, genellemenin kavramsal olarak daha iyi anlaşılması ve kolaylıkla görülebilmesi için kullanılır. Çoklu temsiller arası dönüşümleri kullanarak öğrencilerin örüntü genellemeyi daha kolay görecekleri ve anlayacakları düşünülmektedir. Çoklu temsiller bir matematiksel kavramdaki ilişkileri ortaya çıkarmada kolaylık sağlayan bir yöntem olmakla birlikte, Patterson ve Norwood (2004)'a göre kavramın tablo, grafikler ya da denklemler ile anlatılmasıdır. Bilgilerin kalıcılığı için çoklu temsillerin birçok araştırmacı tarafından önerildiği (Moseley ve Brenner, 1997, Sert, 2007, Sevimli, 2009) ve matematiksel ilişkileri ve genellemeleri görmede kolaylık sağladığı pek çok çalışmada görülmüştür (Akkuş ve Çakıroğlu, 2006; Kılıç, 2009; Gürbüz ve Şahin, 2015).

Öğrencilerin örüntü genelleme süreçlerini inceleyen birçok araştırmada (ör., Warren ve Cooper, 2008; Radford, 2011; Rivera ve Becker, 2011) şekil örüntüleri kullanılmıştır. Şekil örüntüleri örüntünün yapısını görünür kıldığı ve her adımdaki şekilleri parçalamaya ve hareket ettirmeye imkân tanıdığı için öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi keşfetmeleri kolaylaşmaktadır. Örneğin ilk üç ya da dört adımı verilen büyüyen bir şekil örüntüsünde öğrenciler örüntünün görsel yapısını analiz ederek, her adımda görsel yapıdaki değişimlere dayalı olarak sayısal ilişkiler kurup daha uzak bir adımda yer alacak sayıları tahmin edebilmekte ve tüm sayıları karşılayan genel bir kurala ulaşabilmektedir. Duval'in (2014) deyimiyle, bu görsel süreç matematikseldir ve şekilsel birimleri, yani verilen bir görsel temsilde matematiksel olarak ilgili unsurları ayırt etmeyi ve tanımayı içermektedir. Bu süreç öğrencilerin yakın adımları inşa ederken tümevarımla doğrulanan yapılardan, örüntüdeki herhangi bir uzak adıma ilişkin gerekli tahminleri ve sonuçları veren temel hipotezleri sağlayan tümdengelimsel yapılara doğru genellemeler üretmelerine yardımcı olmaktadır (Rivera ve Becker, 2016).

Uluslararası alanyazında örüntü genelleme araştırmalarını eleştirel bir bakış açısıyla inceleyen Dörfler (2008) bu çalışmaların öğrencilerin düşünmeleri üzerinde güçlü bir etkiye sahip olduğunu ancak başlangıçta verilen adımların dizilişinin ve belirli ipuçların öğrencilerin devam ettirme ya da diğer genelleme denemelerini dışladığını ifade etmiştir. Bu bağlamda örüntü çalışmalarında önceden belirlenmiş amaçlarla sınırlandırılmayan görevlere de yer verilmesi gerektiğini önermiştir. Bu öneriye dayalı olarak Rivera ve Becker (2016) yedinci ve sekizinci sınıf öğrencileri üzerinde bir çalışma gerçekleştirmişler ve öğrencilerin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme görevlerine ilişkin performanslarını araştırmışlardır. Araştırma sonunda öğrencilerin iyi tanımlanmış matematiksel yapılar geliştirebildikleri ve bu yapıları genelleyebildikleri belirlenmiştir.

Bu çalışmadan ve önerilerden yola çıkılarak bu araştırma kapsamında altıncı sınıf öğrencilerinin belirli ipuçlarının kısmi verildiği ya da hiç verilmediği yarı bağımsız ve bağımsız şekil örüntüsü genelleme görevlerine ilişkin performanslarını belirleyerek öğretim deneyi ile örüntü genelleme sürecinin kaynaklarının ne olduğunun ve bu süreçte çarpımsal düşünmenin örüntü genelleme inşasında/oluşturulmasında önemli bir rol oynayıp oynamadığının belirlenmesi hedeflenmiştir. Türkiye'de örüntüleri oluşturma çalışmalarının çok sınırlı sayıda olduğu dikkati çekmektedir. Bu çalışmalardan biri Tanışlı'nın (2008) 5. sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemeleri üzerine gerçekleştirdiği tez çalışmasıdır. Bu çalışmanın son bölümünde, öğrencilerden farklı şekillerde temsil edilen (sayı, şekil, tablo) örüntü çeşitlerine (tekrarlayan, sabit değişen, artarak değişen) ilişkin örüntüler oluşturmaları istenmiş ve öğrencilerin bazılarının örüntü oluşturamadığı, bazılarının ise daha önce çalıştıkları örüntüleri modifiye ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin özellikle şekil örüntüleri oluştururken çoğunluğunun şeklin fiziksel yapısından ziyade şekil sayısına odaklı hareket ederek yinelemeli ilişkiye dayalı örüntüler oluşturdukları belirlenmiştir. Bu çalışmada oluşturulan örüntülere ilişkin genelleme çalışması yapılmamıştır. Bu tez çalışmasının odağı ve kapsamından farklı olsa da şekil örüntüsü oluşturma üzerine üç çalışmaya daha rastlanılmıştır. Kılıç (2017a; 2017b; 2017c) tarafından öğretmen adayları ve 8. sınıf öğrencileri üzerinde gerçekleştirilen çalışmaların birinde katılımcılardan cebirsel bir kurala dayalı, ikisinde ise bir sayı örüntüsüne dayalı şekil örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Özellikle sayı örüntüsüne dayalı örüntü oluşturma çalışmasında ortaokul öğrencilerinin bazılarının şekil örüntüsü oluştururken örüntü olmayan yapılar oluşturdukları, yanıt veremedikleri, ilgisiz örüntü oluşturdukları ve örüntüyü devam ettirmede sorun yaşadıkları belirlenmiştir. Dolayısıyla bu tez çalışmasının öğrencilerin bağımsız ya da yarı bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında yapıları oluşturma/inşa etme ve gerekçelendirme yollarını ortaya koyma ve geliştirme açısından özel ve yeni bir araştırma olduğu ifade edilebilir. Ayrıca öğrencilerin daha derin ve çok yönlü düşünmelerine ve zihinsel becerilerini kullanmalarına olanak sağlayarak soyut düşünme becerilerinin geliştirilmesine katkıda bulunulacağı söylenebilir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Araştırmanın genel amacı, ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin öğretim deneyi sürecinde yarı bağımsız ve bağımsız örüntüleri oluşturma ve oluşturdukları örüntüleri genelleme süreçlerini incelemektir. Bu genel amaç doğrultusunda şu sorulara araştırmada cevaplar aranmıştır.

1. Ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin parça ve bütün ilişkilerine odaklı örüntü oluşturmadaki gelişimleri strateji kullanımlarını ve toplamsal ya da çarpımsal düşünmeye dayalı fonksiyon tabanlı genellemelerini nasıl etkilemiştir?
2. Ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin parça ve bütün ilişkilerine odaklı örüntü oluşturmadaki gelişimleri temsil kullanımları ve temsiller arası geçiş süreçleri nasıl etkilemiştir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Bu araştırmanın öğrencilerin bağımsız ya da yarı bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında matematiksel yapıları oluşturma ve gerekçelendirme yollarını ortaya koyma ve geliştirme açısından özel ve yeni bir araştırma konusu olduğu ve öğrencilerin daha derin ve çok yönlü düşünmelerine ve zihinsel becerilerini kullanmalarına olanak sağlayarak soyut düşünme becerilerinin geliştirilmesine katkıda bulunulacağı söylenebilir. Aynı zamanda bu araştırmanın sonuçlarının özellikle öğretmenlere örüntü genelleme üzerine ders tasarımlarına yol gösterici olacağı da düşünülmektedir. Örüntüleri genelleme üzerine uluslararası ve ulusal pek çok çalışmaya rastlanmaktadır. Buna karşın özellikle Türkiye'de örüntü oluşturma ve genelleme bağlamında sınırlı sayıda çalışma olmakla birlikte bu araştırmanın kapsamından farklı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla araştırma sonuçlarının benzer ve geliştirilmiş yeni çalışmalara öncü olabileceği de beklenmektedir.

Matematik dersi öğretim programlarının örüntü genelleme çalışmaları bağlamında ne yazık ki oldukça eksik olduğu görülmektedir. Örüntülerin matematiksel kavramları, matematiksel düzeni ve mantığı anlamada anahtar kavram olduğu ve öğrencilerin problem çözmelerini, değişken kavramını, fonksiyonel düşünmelerini kısacası cebirsel düşünmelerini geliştirmede en önemli temel kavramlardan biri olduğu (Tanışlı, 2008, NCTM, 2000) göz önüne alındığında örüntü genelleme ve oluşturma çalışmalarına öğretim programlarında kapsamlı yer verilmesi gereklidir. Bu bağlamda yapılan bu çalışmanın sonuçlarının matematik eğitimi alanında dikkat çekeceği ve yapılacak matematik dersi öğretim programlarının tasarımına kayda değer katkı sağlayacağı söylenebilir.

1.4. Kavramsal Çerçeve

1.4.1. Örüntülerin matematikteki yeri ve önemi

Doğada ve gerçek yaşamda pek çok örneğine rastladığımız örüntüler matematikte keşfedilir, yorumlanır ve başka bir yapının oluşumunda kullanılır. Bu nedenledir ki matematik, olası tüm örüntülerin sınıflanması olarak kabul edilir (Tanışlı, 2015). "Örüntü nedir?" sorusuna yanıt olarak matematik eğitimcileri çeşitli tanımlamalarda bulunmuştur. Bunlardan bazıları şu şekildedir:

- Örüntü; sayısal ya da uzaysal düzenliliktir (Papic ve Mulligan, 2005).
- Örüntü; düzenli dizilmiş nesne ya da şekillerin oluşturduğu manzumedir (Olkun ve Toluk Uçar, 2007).
- Örüntü; geometrik şekillerin, seslerin, sembollerin ya da eylemlerin sistematik bir birleşimidir (Souviney, 1994).

Matematiksel olarak örüntü, belirli bir düzene sahip matematiksel nesnelerin (sayılar, geometrik şekiller vb.) öğeleri ve yapıları arasındaki bir ilişkidir (Ör., $1, 3, 5, 7, \ldots$ sayı örüntüsünün öğeleri tek sayılardır ve sayılar bir önceki sayıya iki eklenerek oluşmuştur). Örüntü aynı zamanda tüm öğeleri belirli bir kuralla ilişkili olan nesneler kümesi şeklinde de ifade edilebilir. Tanımlarda dikkati çeken temel nokta örüntünün belirli bir düzenliliğe sahip olduğudur. Bu düzenlilik ve öğelerin sistematik dizilimi örüntünün "dizi" olarak da adlandırılmasına yol açmaktadır. Ancak örüntü ve dizi her ne kadar benzer kavramlar olarak görünse de matematiksel olarak birbirinden farklıdır. Matematikte doğal sayılar kümesinden gerçel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyon "reel sayı dizisi" olarak isimlendirilir. Yani bir reel sayı dizisi;

$$f : N \to R$$

$$n \to f(n) = a_n$$

biçiminde tanımlanır ve

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

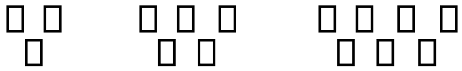
olarak gösterilebilir. Diğer taraftan ($a_1, a_2, a_3, \ldots$) biçiminde genel terimi belirtilmeyen sayı kümesiyle tek türlü bir dizi tanımlanamaz. Yani dizinin sonlu sayıda teriminin belirlenmesi dizinin genel terimi için belirleyici değildir. Dolayısıyla sadece düzenli dizilmiş sayıların herhangi bir dizilimi ile ancak bir örüntü tanımlanabilir. Örneğin $2, 4, 6, 8, \ldots,$ biçiminde genel terimi belirtilmeyen ancak düzenli dizilmiş sayı dizisi bir örüntü belirtir. Örüntünün genel terimi ise, terimler arası ortak özelliğe dayalı olarak ortaya atılan bir varsayımın sonucu, her terim için geçerli olan bir ifadenin genellenmesiyle elde edilir (Tanışlı, 2015).

Örüntüler, yapılarına göre tekrarlanan ve değişen örüntüler olmak üzere iki grupta ele alınabilir. Tekrarlanan örüntüler terimler arası ilişkinin sabit bir dizilimin ötelenmesi şeklinde oluşturulduğu örüntülerdir. Diğer bir değişle, tekrar birimi olarak ifade edilen, belirli birtakım öğelerin döngüsel olarak devam ettiği örüntülerdir (Threlfall, 1999). Örneğin, ababab … örüntüsü harflerden oluşan, 1,2,1,2,1,2, … örüntüsü ise sayılardan oluşan tekrarlanan bir örüntüdür (Liljedahl, 2004). Tekrarlanan örüntüler tekrar biriminin döngüsel uygulaması ile oluşturulabilir. Tekrar birimleri de büyüklük, şekil, boyut, yön gibi özelliklere bağlı olarak değişebilir (Papic, 2007). Örneğin;

- VYZaVYZaVYZa örüntüsünün tekrar birimi VYZa'dır.
- ○⬟○⬟○⬟○⬟ örüntüsünün tekrar birimi ○⬟'dir
- ☺☹☺☹☺☹☺☹ örüntüsünün tekrar birimi ☺☹'dir.

Tekrarlanan örüntüler matematiğin içinde de bulunmaktadır. Örneğin devirli ondalıklı açılımlar (2/11 = 0,18181818…), bir aritmetik dizinin birler basamağında oluşan sayı dizisi (2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65, 72, 79, …), herhangi bir doğal sayının ardışık kuvvetlerinin birler basamaklarında oluşan sayı dizisi (2n; 2, 4, 7, 16, 32, 64, 128, …) gibi örüntüler tekrarlanan örüntülerdir (Zazkis ve Liljedahl, 2006). Tekrarlanan örüntüde kendini tekrar eden örüntü döngüsünün en az iki kere tam tekrarı verilmelidir. Ayrıca tekrarlanan örüntülerde genelleme yapabilmek için tekrar biriminin algılanması çok önemlidir. Değişen örüntüler ise belirli bir kurala göre terimler arası ilişkinin genişleyen ya da daralan bir seyir izlemesi şeklinde oluşturulduğu örüntülerdir. Değişen örüntülerde, örüntüyü devam ettirmenin yanı sıra genelleme ya da cebirsel bir ilişki aranır. Değişen örüntüler ise sabit, artarak, geometrik değişen ve diğer olmak üzere dört grupta ele alınabilir. Değişen örüntüler sayı ve şekil temsili kullanılarak ifade edilir.

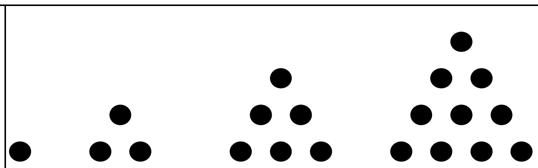
Sabit değişen örüntüler**,** takip eden her bir terimin bir öncekine sabit bir sayı ya da şekil eklenmesi ya da çıkarılması ile oluşturulan örüntülerdir. Şekil 1.1’de sabit değişen sayı ve şekil örüntü örneği sunulmuştur.

5, 9, 13, 17, 21, … Terimler arası sabit farkı 4 olan sabit değişen sayı örüntüsü	 1. 2. 3. Terimler arası sabit farkı 2 olan sabit değişen şekil örüntüsü

Şekil 1.1. *Sabit değişen sayı ve şekil örüntüsü örneği*

Sabit değişen örüntünün genel terimi/kuralı doğrusal bir denklemle açıklanabilir. Örneğin, a ve b birer sabiti, n örüntüdeki terim sırasını ve f(n) n. sıradaki terimi belirtmek üzere, $f(n)=an+b$ şeklindedir. Şekil 1.1’de verilen sayı örüntüsünün genel terimi/kuralı $f(n)=4n+1$, şekil örüntüsünün genel terimi ise $f(n)=2n+1$’dir.

Artarak değişen örüntüler, art arda gelen terimler arasındaki farkların arttığı örüntülerdir. Bu örüntülerde terimler arası farklar ardışık sayılardan oluşur. Şekil 1.2’de artarak değişen sayı ve şekil örüntü örneği sunulmuştur.

3, 6, 10, 15, 21, … 3 4 5 6 Birinci farklılık 1 1 1 İkinci farklılık	 1. 2. 3. 4.

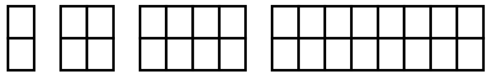
Şekil 1.2. *Artarak değişen sayı ve şekil örüntüsü örneği*

Artarak değişen örüntünün genel terimi/kuralı ikinci derece ya da üçüncü derece denklemlerle açıklanabilir. Örneğin, a, b ve c birer sabiti, n örüntüdeki terim sırasını ve f(n) n. sıradaki terimi belirtmek üzere, $f(n)=an^2+bn+c$ ya da a, b, c, d birer sabiti, n örüntüdeki terim sırasını ve f(n) n. sıradaki terimi belirtmek üzere, $f(n)={}^3+bn^2+cn+d$ biçimindedir. Şekil 1.2’de verilen sayı örüntüsünün genel terimi $f(n)=n^2+3$, şekil örüntüsünün $f(n)=n(n+1)/2$ şeklindedir.

Geometrik değişen örüntüler ise, birbirini takip eden terimlerin bir oran dahilinde değiştiği örüntülerdir. Şekil 1.3'te geometrik değişen sayı ve şekil örüntü örneği sunulmuştur.

3, 9, 27, 81, …

$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$



1. 2. 3. 4.

2^1 2^2 2^3 2^4

Şekil 1.3. *Geometrik değişen sayı ve şekil örüntüsü örneği*

Geometrik değişen örüntünün genel terimi/kuralı üslü nicelikli denklemlerle açıklanabilir. Örneğin; birinci terimi a_1 ve ardışık iki terimin oranı r ve n. terimi f(n) olmak üzere $f(n)=a_1r^{n-1}$ şeklinde ifade edilir.

Diğer örüntüler ise, aritmetik, geometrik ya da artarak değişen örüntüler gruplarına girmeyen ancak kendi içinde terimleri arasında bir düzen olan örüntülerdir. Pascal üçgeni ve 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … şeklindeki Fibonacci sayı dizisi bu örüntü türüne örnek olarak gösterilebilir.

Örüntüler, matematiksel ve cebirsel düşünmenin gelişimine katkı sağladığı gibi cebirin temelini oluşturarak matematiksel kavramları anlamayı kolaylaştırmaktadır. Ayrıca muhakeme, sorgulama, yapma, ilişkilendirme, problem çözme, kanıtlama ve keşfetme becerilerinin de gelişmesine katkıda bulunmaktadır. Van De Walle (2004), öğrencilerin fonksiyonel düşünmelerinin gelişmesini ve genelleme yapabilmelerini örüntü etkinliklerine bağlamıştır. Çocuklarda sayı hissi, ardışıklık düşüncesi ve matematiksel keşfetme örüntüler sayesinde gelişmektedir. Nitekim NCTM (2000), öğrencilerin cebirsel düşünmelerini ve matematiksel anlamalarını üst düzeye çıkarmada örüntünün öneminden bahsetmiştir. Bu yüzdendir ki ulusal ve uluslararası alanyazında birçok araştırmada okul öncesinden başlayarak her sınıf düzeyinde ve öğretmen eğitiminde örüntü etkinliklerine yer verilmesi gerektiği vurgulanmaktadır.

1.4.2. İlköğretim matematik programında örüntüler

2018 yılında yenilenen İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde örüntüler birinci sınıftan beşinci sınıfa kadar sayılar, ayrıca birinci sınıftan üçüncü sınıfa kadar geometri ve yedinci sınıfta ise cebir öğrenme alanlarında sınıf düzeylerine göre yer verilmektedir. Birinci ve ikinci sınıflarda tekrarlayan ve birinci sınıftan beşinci sınıfa kadar da sabit değişen örüntülerin ele alındığı, ayrıca araştırmanın katılımcılarının bulunduğu altıncı sınıfta ise örüntü konusuna yer verilmediği görülmektedir. Sınıf düzeylerine göre öğrenci yeterlilikleri ise öğretim programında aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Programda birinci sınıfta öğrenciler, nesneler, geometrik şekil ya da cisimlerden oluşan örüntünün kuralını bulma ve eksik olan adımı tamamlama eylemlerinde bulunurken aynı zamanda geometrik nesne ve şekillerle oluşturulmuş örüntüdeki ilişkileri keşfetmeyi ve örüntüyü devam ettirmeyi görmektedirler. İkinci sınıfta öğrenciler, ritmik sayarak sayı örüntüleri oluştururken sabit değişen örüntülerin kuralını belirleme ve eksik olan öğeyi tamamlama çalışmaları yapmaktadır. Ayrıca öğrenciler, tekrarlayan geometrik örüntüyü açıklayarak verilmeyen adımı tamamlama ve bir geometrik örüntüdeki ilişkiyi kullanarak farklı malzemelerle aynı ilişkiye sahip yeni örüntüler oluşturma eylemleri gerçekleştirmektedir.

Üçüncü sınıfta öğrencilerden, sabit değişen sayı örüntüsünü devam ettirirken geometrik cisimleri kullanarak örüntü oluşturmaları beklenmektedir. Dördüncü sınıfta belirli bir kurala göre artarak ya da azalarak ilerleyen sayı örüntüsü oluşturma ve kuralını açıklama çalışmaları yapılmaktadır. Beşinci sınıfta öğrencilerden, sayı ve şekil örüntülerindeki ilişkileri belirleyip istenen adımları oluşturmaları yedinci sınıfta ise şekil ve sayı örüntülerinin kuralını belirleyip harfle ifade etmeleri ve istenilen adımdaki terimi tablo kullanarak bulmaları beklenmektedir.

Uluslararası yapılan pek çok çalışma fonksiyonel düşünmenin erken yaşlardan itibaren kazanımının örüntüler aracılığıyla sağlanabileceğini vurgulamaktadır. Bu bağlamda İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde ise her ne kadar örüntüler konusu birinci sınıftan itibaren ele alınmaya başlansa da fonksiyonel düşünmeyi destekleyecek yeterli etkinliklere yer verilmediği söylenebilir. Diğer yandan öğretim programında cebirsel ve fonksiyonel düşünmenin gelişiminde önemli bir katkısı olan şekil örüntülerine beşinci sınıf düzeyinden önce yer verilememesinin de fonksiyonel düşünmenin kazanımı açısından bir eksiklik olduğu düşünülmektedir.

1.4.3. Örüntüleri genelleme

Matematik ve matematik eğitimindeki önemi nedeniyle genelleme matematik eğitimcileri tarafından farklı şekillerde tanımlanmıştır. Örneğin Polya (1954) genellemeyi "bir kavrama ait düşünceden bu kavramın dahil olduğu bir kümeye ait düşünceye geçmek ya da sınırlı bir kümeye ait algılayıştan bu sınırlı kümenin de dahil olduğu algılayışa geçiş" olarak açıklamıştır. Kaput (1999) ise "örnek durum ya da durumların üstünde bir muhakeme ve iletişim halinde bulunarak örnek durumlar arasındaki ortak ifadelerin belirlenip ortaya konulması ya da örnek durumlar arasındaki bir örüntüye, ilişkiye ya da yapıya götürmek şeklinde tanımlarken (Kaput, 1999), Mason (1996) "ayrıntıları kullanarak geneli anlama ve genelin içeriğindeki ayrıntıların farkına varma" olarak ifade etmiştir. Harel ve Tall (1991, s.38) ise verilen bir argümanı daha geniş bir bağlamda uygulamak olarak tanımlamıştır. Genellemenin matematik için önemini Mason (1996) "genelleme matematiğin vazgeçilmezi ve anahtarıdır" ifadesi ile açıkça belirtmektedir.

Son yıllarda cebirsel düşünmenin gelişiminde örüntü ve ilişkilerin önemine vurgu yapılarak örüntü genellemeyi tanımlama ve karakterize etme girişimleri de yapılmıştır. Örneğin Radford (2008), örüntü genellemenin (1) ortak bir noktayı bulma, (2) bunu dizinin tüm terimlerine genelleme ve (3) dizide herhangi bir terimi doğrudan belirlemelerine olanak sağlayan bir kural bulma olduğunu öne sürmüştür. Rivera (2015) ise örüntü genellemeyi sınırlı sayıda verilen başlangıç ipuçlarını yorumlayarak, iyi tanımlanmış bir yapıyı inşa etme ve gerekçelendirme süreci olarak tanımlamıştır. Benzer şekilde, Mulligan ve Mitchelmore'de (2009) örüntüyü "sayısal, uzamsal ya da mantıksal bir ilişki olan ve belirli bir durumda her zaman doğru olan" şeklinde tanımlayarak bir "yapıya" dikkat çekmektedir (s. 34). NCTM'e (2000) göre de böyle bir yapı matematikseldir ve bu durum matematiksel muhakemenin gerçekleştiği cebirsel kuralların belirlendiği zihinsel bir yapıdır. Bu nedenle, örüntü genelleme ve matematiksel yapı birbiriyle ilişkilidir ve kavramsal olarak iç içe geçmiştir.

Örüntü genelleme becerisi öğrencilerin matematikte düşünme gelişimleri için temeldir (Mason, 1996; Kaput, 1998). Lannin (2005), örüntü etkinlikleri yoluyla genellemenin öğrencilerin aritmetik bilgisi ile sembolik temsil anlayışları arasında bir köprü oluşturabileceğini, aynı zamanda değişken kavramının dinamik temsili olarak da hizmet edebileceğini öne sürmektedir. Örüntülerin genellenmesine yardımcı olacak birçok yaklaşımdan biri de değişen şekil örüntülerinin incelenmesidir (Ferrini-Mundy, Lappan ve Phillips, 1997; Orton, Orton ve Roper, 1999; Friel ve Markworth, 2009).

Bazen geometrik örüntüler olarak adlandırılan değişen şekil örüntüsü, bir şekilden diğerine tahmin edilebilir bir değişimin söz konusu olduğu bir şekil dizisidir (Billings, 2008). Strømskag (2015) ise şekil örüntüsünü şeklin parçalarının bazı ya da tüm unsurlarının sistematik yollarla nicelik olarak arttığı ya da azaldığı "kurucu parçalardan" oluşan bir şekil dizisi olarak tanımlamaktadır. Bir şekil örüntüsünün sınırlı sayıda terimi değerlendirilmek üzere sunulurken örüntü sonsuza kadar uzanıyor şeklinde algılanır.

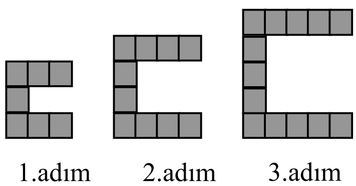
Örüntüyü genellemede amaç öğrencilerin örüntüyü analiz etmeleri, tanımlamaları ve genişletmeleri ve nihayetinde örüntüdeki ilişkiler hakkında genellemeler yapabilmeleridir. Bu süreçte öğrenciler sadece birkaç adımı verilen bir örüntüde adımlar ile bu adımlara karşı gelen terim sayılarını yorumlayarak genel kurala ulaşırlar. Bu süreçte ise birkaç adımla sınırlandırılmış bilgiye dayalı olarak tahmin ve çıkarımlarda bulunarak muhakeme yaparlar. Bir şekil örüntüsünde ise genel bir terim oluşturmak için, öğrenciler sunulan terimlerin yapısında “bir düzenliliği kavramalı” ve bu düzenliliği kendi algısal alanlarının ötesindeki terimlere genellemelidir (Radford 2010, s. 6). Bu durum şekil örüntülerinin uzamsal (şekilsel) ve sayısal yönlerine ilişkin bir bakış açısını ortaya çıkarır.

Öğrenciler şekil örüntülerini anlamaya ve genişletmeye çalışırken hem uzamsal hem de sayısal yapısıyla meşgul olmaya çalışırlar (Radford ,2011). Mason, Graham ve Johnston-Wilder (2005) bu süreçte öğrencilerin şekil örüntülerini incelerken örüntünün uzamsal yapısını öğretmenin bakış açısıyla gördükleri varsayımına dikkat çekmekte ve bunun her zaman böyle olmaması konusunda uyararak, öğretmenlerin öğrencilerin bakış açılarını görmeye çalışması gerektiğini vurgularlar. Moss ve McNab (2011) ise öğrencilerin ardışık terimlerin uzamsal özelliklerini görmezden gelerek örüntüde öğelerin sayısına odaklanma konusunda güçlü bir eğilime sahip olduklarını da belirtmişlerdir. Oysa ki Ma’nın (2007) da ifade ettiği gibi, örüntülerin uzamsal yönlerinden yararlanma öğrencilerin muhakemelerini ve genelleme yapabilmelerini desteklemektedir. Bu nedenle, çocukların kullandığı stratejilerin araştırılmasında, örüntülerin uzamsal yönlerine dikkati içeren stratejiler ile sayısal stratejiler arasında bir ayrım yapmak yararlıdır.

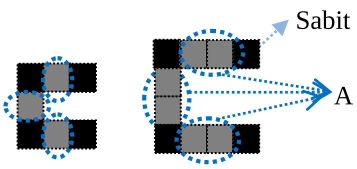
Becker ve Rivera (2006), öğrencilerin örüntü yapısını keşfederken benimsedikleri yaklaşımlardaki çeşitliliğe dikkat çekerek, bazı çocukların sayısal bir yaklaşım benimserken bazılarının 'şekilsel' bir yaklaşım benimsediğini öne sürmektedir. Şekilsel bir yaklaşım, verilen şeklin ipuçlarından değişmeyen ilişkileri belirlemeye odaklanan görsel stratejileri içermektedir (s. 96). Yani, şekilsel bir strateji benimsenirken, öğrenciler değişkenleri bağlamsal olarak yorumlarlar, sayısal bir strateji benimsenirken ise öğrenciler bir terim içindeki öğelerin sayısal miktarını bağlamdan kopuk olarak kabul ederler. Şekilsel ipuçlarından destek almadan dikkatlerini sayısal yönlere odaklayan öğrenciler genellikle deneme yanılma içeren stratejileri benimserler ve örüntü algılarında anlam oluşturma eksik kalır.

Rivera ve Becker (2011), araştırmalarında sayısal stratejileri benimseyen öğrencilerin genellemelerini doğru bir şekilde gerekçelendirmede daha fazla güçlük yaşadıkları sayısal bir yaklaşımın sınırlılıklarına işaret etmektedir. Sayısal genellemede yalnızca örüntüdeki ortak noktalar yüzeysel olarak kavranır. Bu nedenle öğrenciler örüntüde neyin değiştiği ve neyin aynı kaldığı ya da genellemenin tüm terimler için nasıl geçerli olduğu hakkında anlamlı bir şekilde düşünemezler (s. 356). Şekilsel genelleme ise öğrencilerin ortak noktayı tanımlamalarını ve onu örüntüdeki tüm terimlere uygulamalarını sağladığı bağlamla ilgilidir (Radford, 2006). Mason, Graham ve Johnston-Wilder (2005) ile Rivera ve Becker'ın (2011) araştırmalarında bulgularına göre bir örüntüde terimlerin bazı özelliklerini algılamada değişen ve değişmeyenleri tanımlama genelleme için gerekli ve temeldir.

Şekil örüntülerini genelleme sürecinde bir örüntüden çeşitli eşdeğer genellemelerin üretilmesi de sağlanır. Şimdi bir şekil örüntüsünde genel kuralın nasıl keşfedildiğini ve bu kuralın keşfedilmesinde çeşitli genellemelerin nasıl üretildiğini bir örnek üzerinde inceleyelim (Tanışlı, 2015):



Şekil 1.4. *Sabit değişen şekil örüntüsü*

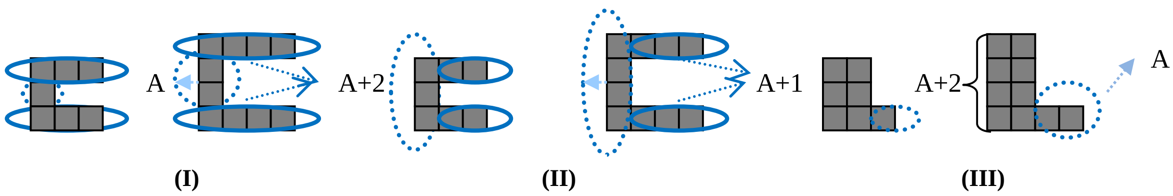


Adım sayısı	Kare sayısı
1	3.1+4=7
2	3.2+4=10
3	3.3+4=13
.	.
.	.
A	3A+4

Şekil 1.5. *Sabit değişen şekil örüntüsü ve tablo temsili*

Şekil 1.4'te sunulan örüntüde adım sayısı (A) ve kare sayısı (K) olmak üzere, siyah renkteki kare sabit sayıyı, gri renkteki kare sayıları da adım sayılarını temsil etmek üzere örüntünün kuralı f(A)=3A+4 şeklindedir.

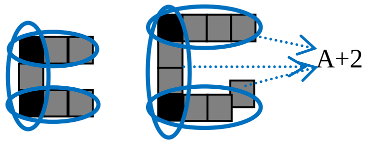
Şekil örüntülerini genellerken şekli farklı bir biçimde görme eğilimi çeşitli genellemelerin üretilmesine yol açmaktadır. Örneğin, Şekil 1.6 (I)'de görüldüğü gibi örüntünün yatay kolları adım sayısının 2 fazlası, dikey kol ise adım sayısı ile ilişkilendirilerek f(A)=A+2(A+2) kuralı, (II)'de ise yatay kollar adım sayısının 1 fazlası, dikey kol da adım sayısının 2 fazlası ile ilişkilendirilerek f(A)=(A+2)+2(A+1) kuralı üretilebilir (Tanışlı, 2015).



Adım sayısı	Kare sayısı	
	I	II
1	1+3+3=7	3+2+2=7
2	2+4+4=10	4+3+3=10
3	3+5+5=13	5+4+4=13
.	.	.
.	.	.
A	A+2(A+2)	(A+2)+2(A+1)

Şekil 1.6. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*

Şekil örüntülerini genellemede bazen şeklin bazı parçaları hareket ettirilerek (III)'de görüldüğü gibi şekil farklı bir yapıya dönüştürülebilir. Verilen örüntüde yatay kollar dikey kol yanına hareket ettirilerek (III)'de görülen yapı elde edilebilir. Böylece dikey kollar adım sayısının 2 fazlası ile ilişkilendirilerek (I)'de elde edilen f(A)=2(A+2)+A kuralına farklı bir bakış açısıyla ulaşılır. Örüntüde ayrıca her bir kolun eşit sayıda ve adım sayısından 2 fazla olduğu fark edilirse ve iki köşedeki ortak sayılan kareler çıkarılırsa aşağıda görüldüğü gibi f(A)=3(A+2)-2 kuralına ulaşılır (Tanışlı, 2015):



Adım sayısı	Kare sayısı
1	(3+3+3)-2=7
2	(4+4+4)-2=10
3	(5+5+5)-2=13
.	.
.	.
A	3(A+2)-2

Şekil 1.7. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*

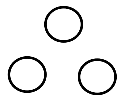
1.4.4. Örüntü genellemede kullanılan yaklaşımlar

Araştırmalar, örüntüleri analiz etmenin öznel olduğunu ve aynı örüntünün öğrenciler tarafından farklı şekilde tanınabileceğini göstermiştir. Bu bağlamda öğrencilerinin şekil örüntülerini genellerken kullandıkları yaklaşımları ve stratejileri belirlemeye yönelik çok fazla sayıda araştırma yapılmıştır (ör., Stacey, 1989; Lannin 2004; Rivera ve Becker, 2009). Bu araştırmalarda öğrencilerin örüntüleri incelemeye başladıklarında ilk tepkilerinin bir dizideki ardışık terimler arasındaki farka dayalı olarak bir önceki terimden bir sonraki terimin elde edildiği yinelemeli ilişkiye (recursive) odaklanmak olduğu görülmüştür (Lannin, 2004). Örneğin, Şekil 1.4'te verilen şekil örüntüsünde kare sayıları her adımda bir önceki adıma üç kare eklenerek değişmektedir. 4. adımdaki kare sayısı hesaplanırken 3. adımdaki kare sayısına 3 eklenir. Yinelemeli ilişki ile ancak örüntünün yakın adımlarındaki terim sayılarını hesaplamak mümkündür. Dolayısıyla örüntünün uzak bir adımındaki terim sayısının hesaplanmasında yinelemeli ilişkinin ötesine geçilmesi gerekir. Öğrenciler daha geniş bir örüntü yelpazesi hakkında bir fikir edinmek, aynı zamanda yinelenen örüntünün ötesinde yapısal bir anlayış kazanmak ve örüntüyü doğru bir şekilde genişletmek için bir kuralın belirlenmesi gerektiğinin farkında olmaları gereklidir. Bu bağlamda Lannin (2004), bir örüntünün genellenmesinde belirgin ilişkiye (explicit) atıfta bulunur. Belirgin ilişki bir terim ile örüntünün adım sayısı arasındaki ilişki için bir kuralın tanımlanmasıdır. Carraher, Martinez ve Schliemann (2008), belirgin ilişkiyi yinelemeli ilişkiden net bir şekilde ayırt etmeye çalışırken, "[.. bir niceliği] [.. başka bir niceliğin ..] bir fonksiyonu olarak ya da iki değişkeni açıkça birbirine bağlayan girdi-çıktı fonksiyonu (s. 14) olarak ifade etmektedir. Örneğin Şekil 1.4'teki şekil örüntüsünde herhangi bir adımdaki kare sayısı adım sayısının 3 katının 4 fazlası ile hesaplanabilir.

Örüntülere ilişkin öğretim etkinliklerini ve materyalleri öğrencilerin hem belirgin hem de yinelemeli ilişkiye başvurmaları ve düşünmeleri, belirli bir durumda hangi yaklaşımın daha uygun olduğunu belirlemeye yönelik hazırlanmalıdır. Watson, Jones ve Pratt (2013), belirgin ve yinelemeli düşünmenin birbirini tamamlayıcı olarak görülmesi gerektiğini vurgulayarak öğrencilerin her ikisiyle de ilişki kurmaları kolaylaştırıldığında esnek düşünme becerilerinin destekleneceğini ifade etmektedir. Bu bağlamda örüntü genelleme etkinliklerinde örüntünün hem yakın hem de uzak adımları sorgulanır. Yakın adımlar, öğrencilerin makul bir şekilde manipüle edebilecekleri belirli adımlar aracılığıyla genel bir durumu nasıl algıladıklarını ifade etmenin bir yolu olarak daha küçük durumları içeren tekrarlanan eylemlerdir. Bu eylemler öğrencilerin tümevarımsal adımları gerçekleştirmelerini sağlar. Uzak adımlar ise sıralı ya da yinelemeli sürece gerek kalmadan herhangi bir örüntünün adımıyla doğru ve etkili bir şekilde başa çıkabilmek için tümdengelimli sonucu kullanmalarını gerektirir. Uzak bir adım hakkında yapılan herhangi bir çıkarım tümdengelimli belirgin genel koşulu somutlaştırır. Ortaokul öğrencilerinin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü görevleri üzerinden örüntü oluşturma ve oluşturulan örüntüleri genelleme performanslarının araştırıldığı bu çalışmada 9. adım ve altındaki adımlar örüntünün yakın adımı, 10. adımı ve üzeri adımlar örüntünün uzak adımı olarak tanımlanmış ve öğrencilerden oluşturdukları örüntüleri yakın ve uzak adımlara devam ettirmeleri istenerek öğrencilerin hem yinelemeli ilişkiye hem de belirgin ilişkiye odaklanmaları sağlanmıştır.

1.4.5. Yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme

Araştırma kapsamında kullanılan yarı bağımsız örüntü, belirli ipuçlarının kısmi verildiği (bir ya da iki adım) ve öğrencilerden örüntü oluşturacak şekilde birkaç adım devam etmelerinin beklendiği görevlerdir. Bağımsız örüntü ise belirli ipuçları verilmeden örüntü oluşturmayı amaçlayan görevlerdir (Rivera ve Becker, 2016). Şekil 1.8’de yarı bağımsız örüntü görevi sunulmuştur.



1. Adım

2. adım

3. adım

1. Yukarıda birinci adımı verilmiş bir şekil birimi görüyorsun. Buna göre dört farklı örüntü oluşturarak, 3. adıma kadar devam ettirebilir misin?
2. Örüntünü nasıl oluşturdun? Örüntünde aynı ya da değişenler nelerdir?
3. Örüntünün genel kuralını nasıl ifade edersin? Bu kuralın her durumda işe yarayacağını nasıl biliyorsun?

Şekil 1.8. *Yarı bağımsız örüntü görevi*

Bu görevlerin öğrencilerin önceden belirlenmiş genel bir yapı olmadan matematiksel bir yapıyı nasıl inşa edebildiklerini ve inşa ettikleri yapıları nasıl genelleyebildiklerini ve öğrencilerin zihinsel süreçlerini nasıl işlettiklerini gözlemlemeye olanak sağladığı söylenebilir.

1.5. Kuramsal Çerçeve

Ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü görevlerine ilişkin performanslarının belirlendiği bu araştırmada benimsenen kuramsal çerçeve aşağıda sunulmuştur.

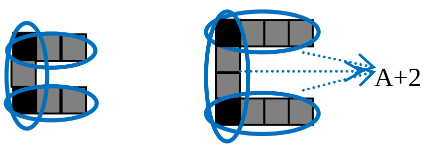
1.5.1. Parçadan şekle, parçadan ilişkiye geçiş

Nesne tanıma minimal özelliklere sahip parça ve bütün bileşenleri arasındaki yorumlayıcı ilişkilerin ortaya çıkarılmasıdır. Nesne tanıma yaşla ve algısal bir alanda artan bir uzmanlıkla birlikte parça benzerden yapılandırıcı temsillere genel bir geçişi göstermektedir. Bireyler bileşenlerin kendi yapısal ilişkilerini görmeye başladıklarında, bir alanda gelişen uzmanlıklarıyla etkileşime girerek dikkat çekici bir ilişkiyi ortaya çıkarırlar. Nesne tanıma çalışmaları parçadan şeklin özelliklerine, parçadan ilişkilere doğru kavramsal bir değişikliğe dikkat çekmektedir (Smith, 2003; Rivera ve Becker, 2016). Bu çalışmada ise ortaokul öğrencilerinin başlangıçta Şekil 1.8'teki gibi yarı-bağımsız görevlere ilişkin oluşturdukları adımlara, gelişen uzmanlıklarını yansıtıp yansıtmadıkları incelenerek parçadan şeklin özelliklerine, parçadan ilişkilere doğru nasıl bir gelişim gösterdikleri araştırılmıştır.

1.5.2. Matematiksel terimlerle partonomik ilişkileri ifade etme

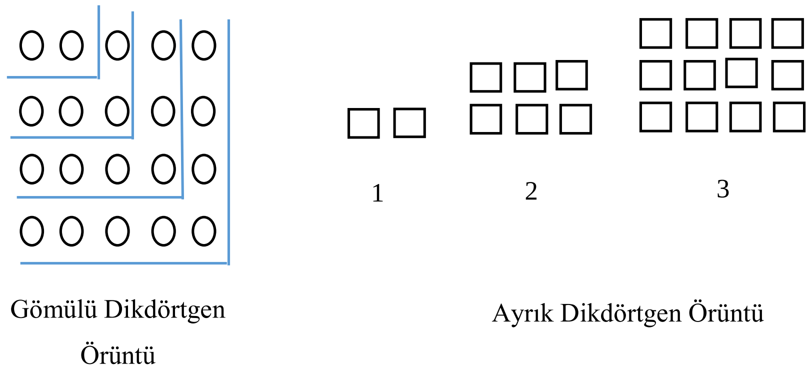
Partonomi parça ve bütün ilişkileri açısından kavramsal bir yapılanma türüdür, dilbilimde ve bilgisayar bilimlerinde sıkça kullanılır. Şekil örüntüleri bağlamında partonomi ise örüntüyü oluşturan şekillerin her adımında ya da adımlar arasında şekillerin tekrar tekrar parçalara bölünerek parça ve bütün ilişkisinin kurulmasıdır. Şekil örüntülerinin adımlarını tek tek yorumlama şekillerin partonomik özelliklerinin ayırt edilmesini ve yapılandırılmasını etkiler.

Örüntü genellemenin merkezinde iki temsil mekanizması söz konudur. Bunlar işleme (processing) ve dönüştürmedir (conversion) (Duval, 1999). Dönüştürme, iki farklı temsilden örneğin, sözlü ya da görsel temsilden cebirsel temsile dönüşümü ifade ederken, işleme aynı temsil içindeki örneğin, matematiksel ifadeleri sadeleştirmek için işlemlerin özelliklerini kullanma gibi dönüşümü ifade etmektedir. Boyut ise, bir örüntüdeki değişmez ilişkilerin, sabit değişimlerin ya da sınırlı/kısmi ve geniş çaplı özelliklerin ve niteliklerin sayısını ifade etmektedir. Diğer bir değişle boyut örüntüde partonomik özelliklere dayalı yapılandırılan ilişkilerin sayısına karşılık gelmektedir. Örneğin Şekil 1.4’te sunulan şekil örüntüsünün partonomik özelliklere göre genellenmesi sonucu elde edilen eşdeğer yapılardan biri olan (A+2)+(A+2)+(A+2)-2 ifadesinin boyutu terim sayısı olan 4’e eşittir.



Şekil 1.9. *Örüntü genellemede boyut gösterimi*

Bazı örüntülerin partonomik yapıları karmaşık olabilmektedir. Şekil 1.10’da sunulan iki tane dikdörtgen örüntüsü üzerinden bu durum şu şekilde açıklanabilir (Rivera ve Becker, 2016).



Şekil 1.10. *Gömülü ve Ayrık Dikdörtgen Örüntüler*

Şekil 1.10'da sunulan iki örüntüden biri gömülü diğeri ayrık dikdörtgenlerden oluşmaktadır. Dikdörtgensel yapı ayrık olan örüntüde daha belirgindir. Dolayısıyla öğrencilerin gömülü dikdörtgen örüntüdeki partonomik özellikleri keşfetmeleri zordur. Nitekim Rivera (2011) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada öğrencilerden bu örüntüleri genellemeleri istenmiş ve öğrencilerin %65'i gömülü dikdörtgen örüntüyü, %82'si ayrık dikdörtgen örüntüyü doğru genelleyebilmiştir. Dolayısıyla şekil örüntülerinin öğrencilere sunulma biçimi genellemeyi etkilemekte ve gömülü dikdörtgen örüntüler gibi örüntü yapılar partonomik özelliklerin ayırt edilmesini ve yapılandırılmasını engellemektedir (Rivera ve Becker, 2016).

Bu araştırma kapsamında da öğrencilerin yarı bağımsız ya da bağımsız örüntü genelleme görevlerinde örüntülerinin adımları oluştururken ve genellerken şekillerin partonomik özelliklerini nasıl ortaya çıkardıkları ve bu süreçte hangi stratejileri kullandıkları, temsil kullanma ve temsiller arası ilişkilendirmeleri nasıl gerçekleştirdikleri incelenmiştir.

1.5.3. Örüntü genellemede partonomik yapılar

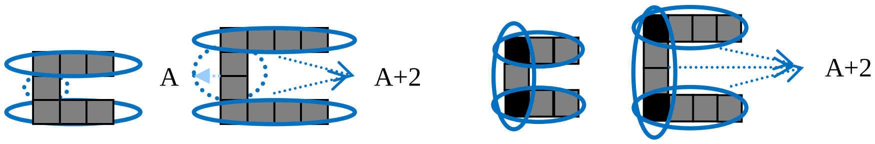
Örüntü genelleme üzerine gerçekleştirilen araştırma sonuçları (ör., Tanışlı ve Özdaş, 2009; Rivera, 2010, 2013; Nilsson ve Juter, 2011; Jurdak ve El Mouhayar, 2014; Walkowiak, 2014; Cadez ve Kolar, 2015; Wilkie, 2016) şekil örüntülerinde farklı partonomik yapılara işaret etmektedir. Bu bölümde örüntü genellemede ortaya çıkan partonomik yapıları incelenmektedir.

1.5.3.1. *Partonominin yokluğu: deneysel sayma*

Örüntü genelleme üzerine yapılan araştırmalarda birçok ilkokul ve ortaokul öğrencisinin şekil örüntülerini genelleme sürecine şekil birimlerini ya da parçalarını tek tek sayarak başladıklarını göstermektedir. Sayma stratejisi olarak da ifade edilen bu stratejide öğrenciler örneğin Şekil 1.4'te sunulan örüntüde toplam karelerin sayısını 1. adım için, 1, 2, …, 6, 7 kare, 2. adım için 1, 2, … , 9, 10 kare, 3. adım için 1, 2, … ,12, 13 kare olduğunu sayarak ifade etmektedir. Dolayısıyla öğrenciler tarafından örüntüdeki kareler anlamlı bir partonomik ilişki taşıyabilecek hiçbir şekilsel birimi içermeyen tek nesneler olarak görülmektedir. Bu düşünme biçimi toplamsal önyapısal olarak ifade edilmektedir. Örüntüler hakkında toplamsal önyapısal düşünme, basitçe belirli bir adımda kaç tane nesnenin bulunduğunu yanıtlamayı amaçlayan deneysel bir saymadır. Bu sayma pratiktir, ancak hantaldır ve partonomik değildir ve bu aşamada bir genelleme yoktur (Rivera ve Becker, 2016).

1.5.3.2. *Erken ve standart olmayan partonomik yapılar: toplamsal düşünme*

Örüntü genellemede sayma stratejisinin yerini birinci işlem olarak toplamanın kullanıldığı bir sayma stratejisi aldığında, çarpım odaklı bir genellemenin erken bir biçimi ortaya çıkar. Bu genelleme biçimi yinelemeli ilişkiye dayalı genelleme olarak adlandırılır. Yinelemeli ilişki bir örüntüde terimler arası sabit farkın ya da değişen farkların bir önceki terime eklenerek örüntünün devam ettirilmesidir. Örneğin Şekil 1.11'de sunulan örüntüde bir öğrenci "7 kare ile başlıyoruz ve 3 kare eklemeye devam ediyoruz" şeklinde yanıt verdiğinde yinelemeli ilişki bağlamında erken toplamsal partonomik yapıda bir düşünceye sahiptir. Bu yapıda bir şekil birimi, örüntünün bir adımından diğerine düzenli bir şekilde eklenir ("3 ekle") ve böylece örüntünün yakın adımlarına giriş yapılır. Bu yapı uzak bir adımının temelini de oluştururken minimum düzeyde partonomik bir yapı özelliği taşır. Ancak bu yapı uzak adımları belirlemede yararlı değildir. Örüntünün uzak bir adımı için adım sayısı ve terim sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkinin belirlenmesi gereklidir. Bir şekil örüntüsünde fonksiyonel ilişki kurulurken her bir adımda şeklin parçaları ayrı ayrı adım sayısı ile ilişkilendirilerek genel kural toplamsal olarak oluşturulur ve böylece standart olmayan fonksiyon tabanlı formül elde edilir (Rivera ve Becker, 2016). Örneğin Şekil 1.11 (a)'daki örüntüde öğrenci "örüntünün A. adımında üst ve alt kolda (A+2) tane kare, dikey kolda A tane kare vardır. Toplam kare sayısı T (A) = (A + 2) + (A + 2) + (A) dır" şeklinde yanıt verdiğinde toplamsal düşünerek standart olmayan fonksiyon tabanlı bir formül elde etmiştir. Bu formül üç terimden diğer bir değişle üç boyuttan oluşan bir yapıya sahiptir. Boyut sayısı şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı bakış açılarına göre analizi sonucunda değişebilir. Örneğin Şekil 1.11 (b)'deki örüntü için bir öğrenci "örüntünün A. adımında üst ve alt kolda ve dikey kolda (A + 2) tane kare, dikey ve yatay kolların kesişiminde çakışan 2 kare vardır. Toplam kare sayısı T (A) = (A + 2) + (A + 2) + (A + 2) – 2 dir" şeklinde yanıt verdiğinde diğer öğrencinin bakış açısından farklı olarak dört terimin yani dört boyutun birleşiminden oluşan standart olmayan fonksiyon tabanlı bir formül elde etmiştir.



(a) **(b)**

Şekil 1.11. *Şekil örüntüsün farklı genellemeleri*

1.5.3.3. *Standart partonomik yapılar: çarpımsal düşünme*

Çarpımsal düşünmeye dayalı standart partonomik yapılarda da şekil örüntüsünün her bir adımında yer alan terim sayısı ile adım sayısı arasında fonksiyonel bir ilişki kurulur. Ancak bu yapının toplamsal düşünmeye dayalı standart olmayan fonksiyonel tabanlı genellemelerden farkı minumum düzeyde boyut içermesidir. Bu yapıda şekil örüntüsünde adım sayısı ve terim sayısı arasında kat ilişkisi kurularak çarpımsal düşünmeyle genel kural elde edilir. Bu kural standart olmayan fonksiyon tabanlı formülün sadeleştirilmiş eşdeğer bir versiyonudur. Örneğin, Şekil 1.11'deki örüntü için bir öğrenci "örüntünün A. adımında yatay ve dikey kolların ortasında yer alan kareler adım sayısının 3 katıdır. Bu kareler dışında dört köşede yer alan kareler sabittir. Böylece toplam kare sayısı T(A)=3A+4 tür" şeklinde yanıt verdiğinde çarpımsal düşünerek iki terimden oluşan yani iki boyutta standart fonksiyon tabanlı bir formül elde etmiştir. Bu formül T(A)=(A+2)+(A+2)+A standart olmayan fonksiyon tabanlı formülün sadeleştirilmiş eşdeğer bir versiyonunu örneklemektedir (Rivera ve Becker, 2016).

Bu araştırma ile öğretim deneyi aracılığıyla öğrencilerin partonomik yapılarının toplamsal önyapısaldan, toplamsal ve çarpımsal düşünmeye ne ölçüde evrimleştikleri değerlendirilerek deneyin öğrencilerin örüntü genelleme becerileri üzerinde güçlü bir etkiye sahip olup olmadığı araştırılmıştır.

1.6. İlgili Araştırmalar

Alanyazında örüntü oluşturma üzerine sınırla sayıda çalışma ve araştırmanın bir diğer boyutu da oluşturulan örüntülerin genellenmesi olduğundan ilgili araştırmalar örüntü oluşturmaya ve örüntü genelemeye dair olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur.

1.6.1. Örüntü oluşturmaya ilişkin çalışmalar

Kılıç (2017c) araştırmasında, öğrencilerin verilen lineer olmayan sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne dönüştürürken ortaya çıkan şekil örüntülerini ve öğrencilerin kullandıkları stratejileri belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma ortaokul sekizinci sınıfa giden toplam 474 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere 2, 6, 12, 20, 30, ... şeklinde ilerleyen lineer olmayan sayı örüntüsü verilmiş olup bu sayı örüntüsüne bakarak şekil örüntüleri oluşturmaları ve nasıl bir yol izlediklerini yazmaları istenmiştir. Öğrencilerin yanıtları yazılı olarak toplanmıştır. Araştırma sonunda, öğrencilerin farklı şekil örüntüleri oluşturdukları ve örüntüleri oluştururken farklı stratejiler kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin sayı örüntüsüne yönelik 33 farklı şekil örüntüsü oluşturdukları ve bunları oluştururken görsel ve görsel olmayan olmak üzere sayma, şekil belirleme ve sayma, yinelemeli, çizme, belirgin ve sayıları parçalama gibi altı farklı strateji kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca sayma stratejisi öğrenciler tarafından çoğunlukla kullanılırken yinelemeli ve belirgin stratejilerin ise pek kullanılmadığı görülmüştür. Diğer taraftan şekil örüntüsü oluştururken ağırlıklı olarak dikdörtgen, kare, daire, üçgen, çizgi ve yıldız gibi geometrik modelleri ve kalp gibi geometrik olmayan modelleri kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca 242 öğrencinin sayı örüntüsüne karşılık gelebilecek şekil örüntüsü oluşturamadıkları, 28 öğrencinin ise oluşturdukları şekil örüntülerini nasıl oluşturduklarını ifade edemedikleri tespit edilmiştir.

Kılıç (2017a) araştırmasında, öğretmen adaylarının verilen lineer ve lineer olmayan sayı örüntülerini şekil örüntüsüne dönüştürürken ortaya çıkan şekil örüntülerini ve öğretmen adaylarının kullandıkları stratejileri belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma Türkiye'de bir devlet üniversitesinde okuyan 25 öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarına 3, 5, 7, 9, 11, … şeklinde ilerleyen lineer ve 2, 6, 12, 20, 30, ... şeklinde ilerleyen lineer olmayan sayı örüntüleri verilmiş olup bu sayı örüntülerine bakarak şekil örüntüleri oluşturmaları ve nasıl bir yol izlediklerini yazmaları istenmiştir. Verilerin toplanması iki aşamada gerçekleşmiş olup ilk aşamada yazılı olarak daha sonra ise gönüllü olan öğretmen adaylarıyla klinik görüşme yapılarak gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonunda, öğretmen adaylarının her iki görevde de farklı şekil örüntüleri oluşturdukları ve örüntüleri oluştururken farklı stratejiler kullandıkları görülmüştür. Öğretmen adayları lineer sayı örüntüsüne yönelik 14 farklı şekil örüntüsü oluşturdukları ve bunları oluştururken görsel ve görsel olmayan olmak üzere belirgin ve yinelemeli, sayma, belirgin, yinelemeli, örüntü çeşidini belirleme ve belirgin, sayılara odaklanma ve yinelemeli gibi altı farklı strateji kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca belirgin ve yinelemeli strateji adaylar tarafından çoğunlukla kullanılırken iki öğretmen adayı ise örüntü oluşturamamıştır. Diğer taraftan lineer olmayan sayı örüntüsüne yönelik 10 farklı şekil örüntüsü oluşturdukları ve bunları oluştururken belirgin, belirgin ve yinelemeli, yinelemeli, yinelemeli ve belirgin gibi dört farklı strateji kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca belirgin strateji adaylar tarafından çoğunlukla kullanılırken 15 öğretmen adayı ise örüntü oluşturamamıştır. Öğretmen adaylarının her iki görevde de şekil örüntüsü oluştururken ağırlıklı olarak nokta, çizgi, kare, üçgen ve dikdörtgen gibi geometrik modelleri ve kalp gibi geometrik olmayan modelleri kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca alanyazında bulunan şekil örüntülerine ek olarak farklı şekil örüntüleri ortaya çıktığı görülmüş ve öğretmen adaylarının lineer sayı örüntüsünde lineer olmayan sayı örüntüsüne göre çok daha başarılı olduğu belirlenmiştir.

Kılıç (2017b) araştırmasında, öğretmen adaylarının verilen lineer ve lineer olmayan bir örüntünün genel ifadesini şekil örüntüsüne dönüştürürken ortaya çıkan şekil örüntülerini ve her iki şekil örüntüsünü oluşturmadaki performans farklarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma Türkiye'de bir devlet üniversitesinde okuyan 127 öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarına $4n+1$ ve $(n.(n+1))/2$ genel kuralları verilmiş olup bu kurallara göre şekil örüntüleri oluşturmaları istenmiştir. Verilerin toplanması iki aşamada gerçekleşmiş olup ilk aşamada yazılı olarak veri toplanmış daha sonra ise gönüllü olan dokuz öğretmen adayıyla klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonunda, öğretmen adaylarının her iki görevde de farklı şekil örüntüleri oluşturdukları ve lineer şekil örüntüsünü oluştururken daha başarılı oldukları görülmüştür. 127 öğretmen adayından 88'i lineer sayı örüntüsü oluşturabilirken 39'u geçerli bir örüntü oluşturamamıştır. Bu oluşturulan örüntülerin çoğunluğu alanyazında olmakla birlikte 14 farklı şekil örüntüsü oluşturmuşlardır. Diğer taraftan 72 öğretmen adayı lineer olmayan sayı örüntüsü oluşturabilmiş ve sonucunda 17 farklı şekil örüntüsü ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları örüntü oluştururken çoğunlukla, genel kuralı ilk önce sayı örüntüsüne çevirip daha sonra şekil örüntüsü oluşturdukları görülmüş ve geometrik modeller ve kalp gibi geometrik olmayan modeller kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca alanyazında bulunan şekil örüntülerine ek olarak farklı şekil örüntüleri ortaya çıktığı görülmüş ve öğretmen adaylarının lineer sayı örüntüsünde lineer olmayan sayı örüntüsüne göre çok daha başarılı olduğu ortaya çıkmıştır.

Tanışlı (2008) çalışmasında, öğrencilerin örüntüleri nasıl genellediklerini, yakın ve sonlu adıma nasıl devam ettirdiklerini ve nasıl bir örüntü oluşturduklarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma ilköğretim beşinci sınıfa giden toplam 12 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere tekrarlayan, sabit değişen ve artarak değişen sayı ve şekil örüntülerinden oluşan dokuz adet soru sorulmuş ve öğrencilerden örüntüleri devam ettirmeleri, genellemeleri ve örüntü oluşturmaları istenmiştir. Veriler klinik görüşme, kişisel bilgi formu, öğrenci ve araştırmacı günlüğü yoluyla toplanmıştır. Araştırma sonunda, öğrencilerin tekrarlanan şekil örüntülerini, sabit ve değişerek artan sayı ve şekil örüntülerini genelleyebildikleri ve bunları yaparken farklı stratejiler kullandıkları görülmüştür. Örüntü oluşturma etkinliklerinde ise bazı öğrencilerin örüntü oluşturamadığı görülmüştür. Tekrar birimini belirleyebilen öğrencilerin tekrarlanan şekil örüntüsü oluşturduğu, tekrar birimini belirleyemeyen öğrencilerin ise oluşturamadığı belirlenmiştir. Öğrencilerin sabit değişen sayı ve şekil örüntüleri aynı zamanda artarak değişen sayı örüntüleri oluşturdukları ancak artarak değişen şekil örüntüleri oluşturamadıkları görülmüştür. Diğer taraftan oluşturulan örüntülerin öğrencilerin daha önce görmüş oldukları örüntülere benzer olduğu tespit edilmiştir. Özellikle öğrenciler şekil örüntüleri oluştururken şeklin yapısından çok şekil sayısına odaklandıkları belirlenmiştir.

Rivera ve Becker (2016) araştırmalarında, öğrencilerin örüntü oluşturma ve genelleme görevlerinde parça bütün ilişkisinin ve çarpımsal düşünmenin bu görevlere etkilerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Araştırma Cebir-I dersini alan yedinci ve sekizinci sınıf 26 öğrenci üzerinde gerçekleştirilip iki aşamada tamamlanmıştır. Birinci aşamada araştırmacılar öğrencileri uzman ve acemi olmak üzere iki gruba ayırmışlar ve öğretim deneyi öncesinde öğrencilerle yarı bağımsız örüntü oluşturma ve genelleme görevleri içeren klinik görüşme gerçekleştirmişlerdir. Çarpımsal düşünmenin ön planda olduğu örüntü oluşturma ve genellemeye yönelik iki haftalık öğretim deneyi sonrasında ise tekrardan yarı bağımsız örüntü oluşturma ve genelleme görevleri içeren klinik görüşme gerçekleştirmişlerdir. İlk aşama sonunda her iki grupta da bütün kurallı örüntü oluşturan öğrenci sayısında büyük ölçüde artış olmakla birlikte, parça kurallı örüntü oluşturan öğrenci sayısında da kısmi bir artış olmuştur. Öğretim deneyi öncesine göre hatalı örüntü oluşturan öğrenci sayısında azalma görülmüştür. Ayrıca toplamsal ve çarpımsal düşünmenin araştırıldığı çalışmada, öğretim deneyi sonrasında erken eklemeli toplamsal düşünmeyi kullanan öğrenci sayısı azalmış, çarpımsal düşünmeyi kullanan öğrenci sayısında ise artış gözlenmiştir. Araştırmacılar çalışmanın ikinci aşamasını ise öğrencilerin örüntü oluşturma ve genelleme performanslarını incelemek için ilk aşama bittikten dört buçuk ay sonra aynı öğrenci grubu içerisinden 11 öğrenci ile gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilere ilk iki adımı olan yarı bağımsız örüntü görevi verilmiş olup örüntü oluşturmaları ve genelleme yapmaları istenmiştir. Veriler bu aşamada klinik görüşme ile toplanmış ve bu aşama sonucunda öğrencilerin birden fazla lineer ve lineer olmayan şekil örüntüsü oluşturdukları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin çarpımsal düşünmeyi kullandıkları ve bunu kullanmanın dönüşüme (görselden semboliğe doğru) ve işlemeye (standart olmayandan standart olana doğru) katkısının olduğu tespit edilmiştir.

1.6.2. Örüntü genellemeye ait çalışmalar

Özdemir, Dikici ve Kültür (2015) araştırmalarında, öğrencilerin yakın, orta ve genellemede kullandığı stratejilerle birlikte farklı örüntü biçimlerindeki başarılarını incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırma ortaokul yedinci sınıfa giden 3'ü yüksek, 3'ü orta ve 3'ü düşük başarı seviyesine sahip toplam 9 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere tekrarlı, sabit artarak genişleyen, artarak genişleyen sayı ve şekil örüntülerinden oluşan 5 soruluk görev verilerek yakın, uzak adımlara devam ettirmeleri ve genelleme yapmaları istenmiştir. Veriler klinik görüşme yoluyla toplanmıştır. Araştırma sonunda, öğrencilerin yakın uzaklıktaki terimleri bulurken yinelemeli, orta uzaklıktaki terimleri bulurken kuraldan yapma ve örüntüyü genellerken ise belirgin stratejileri kullandıkları görülmüştür. En başarılı oldukları örüntü tekrarlayan örüntü olurken, en başarısız oldukları örüntü ise artarak genişleyen örüntü olduğu tespit edilmiştir. Öğrenciler örüntüleri yakın ve uzak terimlere devam ettirirken çizme, sayma, çarpımdan sayma, bölümden kalanı sayma, yinelemeli ilişki, bütüne genişletme ve çarpım tablosu arama stratejilerini, genelleme yapmak için ise yinelemeli ilişki, sistemsiz tahmin kontrol, sistemli tahmin kontrol ve belirgin stratejilerini kullandıkları görülmüştür. Ayrıca öğrenciler örüntüleri genelleme yaparken yinelemeli ilişki ile başladıkları, sabit artarak genişleyen örüntüde ise yinelemeli strateji ile başlayıp belirgin stratejiye geçiş yaparak başarılı oldukları tespit edilmiştir.

Becker ve Rivera (2006) araştırmalarında, öğrencilerin lineer şekil örüntüsünü genelleme yapısını ve öğrencilerin farklı temsil biçimleri arası geçiş yapıp yapmadıklarını incelemeyi amaçlamışlardır. Araştırma ortaokul altıncı sınıfa giden 29 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma için ilk önce tüm öğrencilerle lineer şekil örüntüsünü yakın, uzak adıma devam ettirme ve genelleme görevleri içeren bir ön klinik görüşme gerçekleştirmişlerdir. Ön klinik görüşme sonucunda 12 öğrenci seçilip bu öğrencilere her biri 6 haftadan oluşan iki öğretim dizisi uygulanmış ve bu öğretim sonunda 11 öğrenci ile son klinik görüşme gerçekleştirmişlerdir. Son klinik görüşmede kullanılan örüntü görevleri ön klinik görüşmeye benzer şekilde hazırlamışlardır. Ön klinik görüşme sonunda öğrencilerin görsel ve sayısal yaklaşımları kullanmakla birlikte çoğunlukla yinelemeli strateji kullandıkları ve hiçbir öğrencinin genel kuralı sembolik olarak ifade edemediği görülmüştür. Öğretim sonucunda yapılan son klinik görüşmede ise tüm öğrencilerin genellemeleri sembolik olarak ifade ettiği ayrıca görsel stratejiyi kullanan öğrencilerin bu sembolik ifadeyi tabloya ihtiyaç duymadan gerekçelendirebildiği ve sayısal stratejiyi kullanan öğrencilerin ise yerine koyma ve kontrol yöntemi ile gerekçelendirdiği belirlenmiştir. Öğrencilerden farklı bir genel kural yazmaları istendiğinde ise hiçbir öğrencinin oluşturamadığı görülmüştür.

Warren (2005) araştırmasında, öğrencilerin değişen ve tekrarlanan örüntüleri nasıl genelledikleri ve genellemeleri nasıl sembolleştirdiklerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırma dördüncü sınıfa giden 45 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı öğrencilere değişen ve tekrarlanan örüntülerden oluşan bir test uygulayarak orta ve yüksek başarı seviyeleri olacak şekilde iki sınıfa ayırmıştır. Ayrıca tekrarlanan örüntü, örüntü oluşturma ve devam ettirme, örüntülerde tablo kullanımı ve genelleme üzerine öğretim gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin tekrarlanan örüntüleri değişen örüntülere göre daha kolay genelledikleri, tekrarlanan bir örüntü oluşturabildikleri ve örüntüdeki birimleri tabloya yerleştirebildikleri görülmüştür. Örüntüde girdi ve çıktı değerlerine yönelik öğretim sonrası öğrencilerin örüntüleri uzak adımlara genelleyebildikleri ve girdi çıktı arasındaki bağlantıyı ifade edebildikleri belirlenmiştir.

Walkowiak (2014) araştırmasında, farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin lineer ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır.

Araştırma ikinci, beşinci ve sekizinci sınıfa giden üç öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere lineer ve lineer olmayan iki şekil örüntüsü verilmiş olup bunları yakın ve uzak adıma devam ettirmeleri ve genellemeleri istenmiştir. Veriler klinik görüşme yoluyla toplanmıştır. Araştırma sonunda, tüm öğrenciler lineer şekil örüntüsünü yakın ve uzak adıma devam ettirip genellemeyi başarabilirken, lineer olmayan şekil örüntüsünü ise ikinci sınıfa giden öğrenci hariç diğer iki öğrenci devam ettirmiş ve genelleyebilmiştir. Öğrencilerin lineer olmayan şekil örüntüsünü genellerken daha çok şekilsel yaklaşımı kullandıkları ancak lineer şekil örüntüsünde ise daha çok sayısal yaklaşımı kullandıkları görülmüştür. Öğrenciler örüntüleri yakın ve uzak adımlara genişletirken çoğunlukla tek yaklaşımları kullanırken genellemede ise hem şekilsel hem de sayısal yaklaşımı kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca küçük yaşlardaki öğrencilerin daha çok şekilsel yaklaşımı tercih ettikleri ve şekil örüntülerini genellemede her iki yaklaşımın gerekliliği ortaya çıkmıştır.

1.7. Sınırlılıklar

1. Araştırma, 2018-2019 öğretim yılında, Kütahya ilinin Simav ilçesinin Osmanbey Ortaokulunda 6. sınıfında okuyan 9 öğrenci (5'i erkek 4'ü kız) ile sınırlıdır.
2. Araştırma, 9 hafta ile sınırlıdır.

1.8. Tanımlar

Örüntü: Düzenli dizilmiş nesne ya da şekillerin oluşturduğu manzumedir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2007).

Yarı Bağımsız Örüntü Genelleme: Belirli ipuçlarının kısmi verildiği (bir ya da iki adım) ve örüntü oluşturacak şekilde devam etmelerinin beklendiği görevlerdir (Rivera ve Becker, 2016).

Bağımsız Örüntü Genelleme: Belirli ipuçları verilmeden örüntü oluşturacak şekilde devam etmelerinin beklendiği görevlerdir (Rivera ve Becker, 2016).

2. YÖNTEM

Araştırmanın genel amacı, ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin öğretim deneyi sürecinde yarı bağımsız ve bağımsız örüntüleri genelleme bağlamında oluşturdukları partonomik yapıları ve fonksiyon tabanlı genelleme süreçlerini incelemektir. Bu amaç kapsamında araştırmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırma, insanların ve toplumların davranışlarını, yaşam tarzlarını ve bu durumlardaki değişimi incelemeye yönelik bir süreçtir (Strauss ve Corbin, 1990). Nitel araştırmada bilgi, tümevarım yöntemi kullanılarak elde edilmeye çalışılır. Burada araştırmacının esas görevi, bilgiyi yaptığı bu çalışma sürecindeki verileri çözümlemek kaydıyla keşfederek açığa çıkarmaktır (Özdemir, 2010). Yani araştırmacı, bilgi toplamak için davranışların neden ve nasıl oluştuğuna yoğunlaşır (McMillan, 2004). Nitel araştırma süreç odaklıdır. Veri referansı da doğal ortamdır. Nitel araştırmada incelenecek konu bütüncül yaklaşım ile tespit edilip çözümlenir (Bogdan ve Biklen, 1998).

Araştırmanın genel amacı doğrultusunda derinlemesine ve kaliteli veriler elde edilebilmesi için öğrenciler ile öğretmen arasında ve öğrencilerin kendi aralarında etkileşimler olacağından nitel araştırma yaklaşımı içinde ele alınan öğretim deneyi (teaching experiment) araştırma deseni olarak benimsenmiştir.

2.1. Araştırma Deseni: Öğretim Deneyi

Nitel araştırma yöntemlerinden biri olan öğretim deneyi, 2000'li yıllardan itibaren matematik eğitimi araştırmalarında önemi anlaşılarak diğer yöntemlere göre daha çok başvurulan bir yöntem olmaya başlamıştır. Öğretim deneyi, araştırmacının öğretmen rolünde olduğu ve öğrencinin matematik bilgisi ile bu bilginin matematik öğretimi kapsamında nasıl öğrenildiğini incelemek için tasarlanan aktif ve sürekli bir yöntemdir (Cobb ve Steffe, 1983; Steffe, 1991). Bu yöntem araştırmacıların öğrencinin zihinsel öğrenim sürecine katılabilmelerini sağladığı için yararlı ve kullanışlı bir yöntemdir. Bu sebeple öğrencilerin matematiksel öğrenimlerini anlamaya çalışmak ve öğrencilerin ifade ettikleri ve yaptıkları çalışmanın arka planında neler olduğunu görebilmek öğretim deneyi için önemli bir modüldür (Steffe ve Thompson, 2000).

Öğretim deneyinin amaçlarından biri araştırmacının öğrencilerin matematiğe ait öğrenmelerini ve analiz edebilmelerini araştırmacının kendisinin fark edebilmesi ve keşfedebilmesidir (Steffe ve Thompson, 2000). Diğer amacı ise araştırmacının öğrencinin bilgiyi öğrenmesi ve bu bilgiyi nasıl yapılandırdığını keşfedebilmesidir (Steffe, 1991).

Dolayısıyla öğretim deneyinde iki kavramdan bahsedilir. Birincisi, öğrencilerin bir matematik etkinliğindeki faaliyetleridir. İkincisi ise öğrencinin etkinlik yaparken ki faaliyetlerinin araştırmacı tarafından yorumlandıktan sonra ortaya çıkan modeldir (Steffe ve Thompson, 2000).

Öğretim deneyinde araştırmacı öğretmendir ve öğretmen kimliğiyle araştırmayı okulda ya da sınıfta ders ortamında gerçekleştirir. Bu şekilde araştırmacı hem gerçek rolünü oynarken hem de araştırdığı konuyu tüm ayrıntılarıyla doğal ortamda inceleme olanağına sahip olabilmektedir. Araştırmacı aynı zamanda öğretim deneyinde öğretmen rolünü gerçekleştirmesinin yanı sıra öğretimsel süreçle ilgili bilgileri de çözümlemesi gerekmektedir (Steffe, 1991). Yani araştırmacı, öğrencilerin yaptıkları etkinlikleri ve kullandıkları dili ifade ederek ortam oluşturur, konu ile ilgili önemli sorular sorar ve öğrenmeyi cazip hale getirerek öğrencileri teşvik eden kararlar alır.

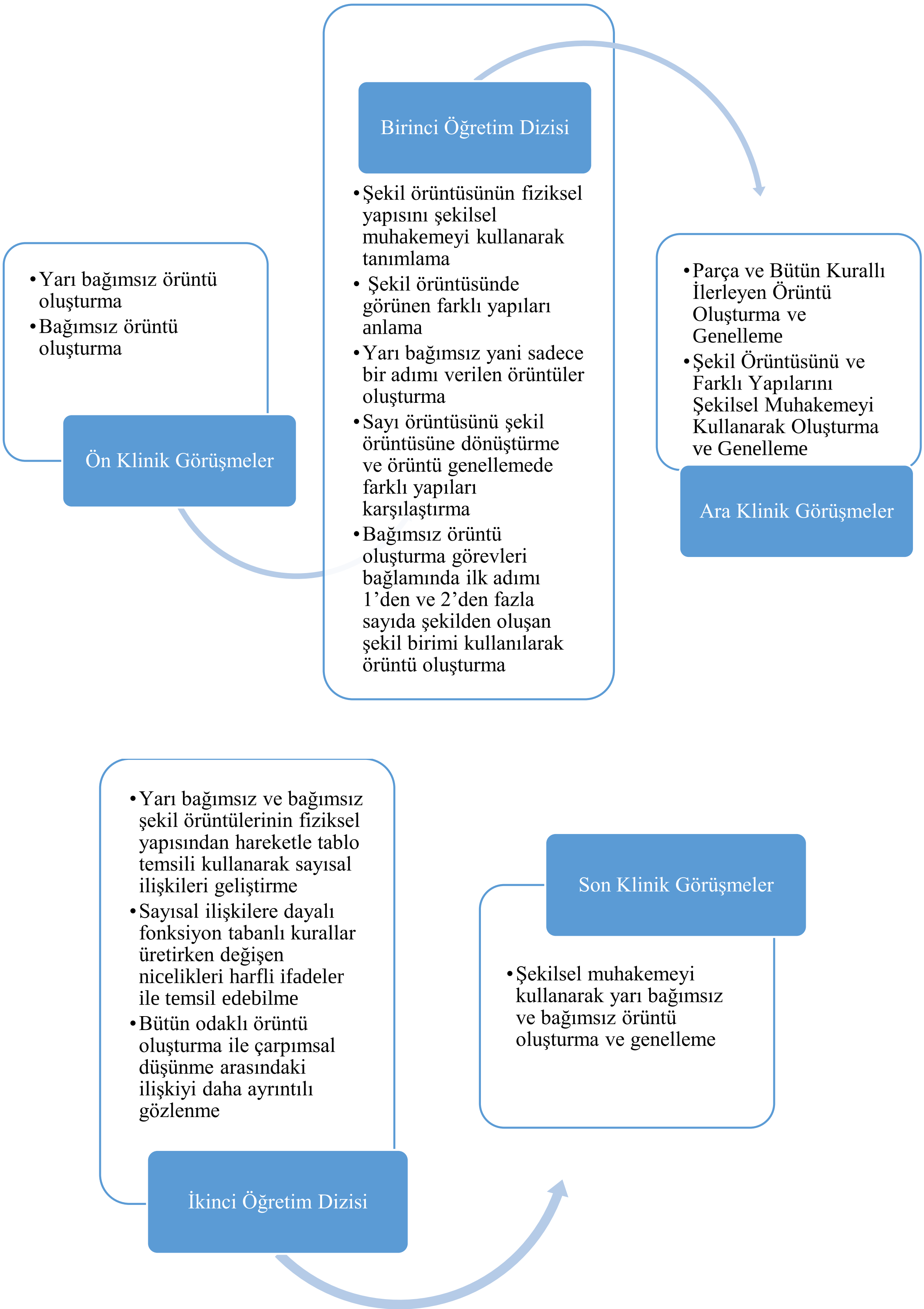
Öğretim deneyi, çeşitli öğretim uygulamalarından oluşmaktadır. Araştırmacı öğretmen rolüyle bulunurken öğretim süreçlerinin tamamı kayıt altına alınmaktadır (Steffe ve Thompson, 2000; Steffe ve Ulrich, 2013). Kayıt altına alınmasının sebebi ise öğrencinin matematiksel gelişim sürecini gözlemleyebilmek ve bu gelişimin çözümlemesini yapabilmektir. Bu sayede araştırmacı, çalıştığı ekibiyle birlikte öğrencilerin etkinliklerini yorumlayıp öğretim sürecini inceleyebilir (Cobb ve Steffe, 1983).

Bir öğretim deneyi aşağıdaki öğelerden oluşmaktadır (Cobb ve Steffe, 1983; Confrey ve Lanhance, 2000):

1) Öğretim kısımları
2) Bireysel görüşmeler
3) Zaman aralığı (Birkaç hafta ya da sene)

2.1.1. Öğretim deneyinin araştırmaya entegrasyonu

Araştırmada kapsamında uygulanan öğretim deneyi ön klinik görüşmeler, birinci öğretim dizisi, ara klinik görüşmeler, ikinci öğretim dizisi ve son klinik görüşmelerden oluşmaktadır. Öğretim deneyinin işleyişi Şekil 2.1'de sunulmuştur.



Şekil 2.1. *Öğretim Deneyini Uygulama Süreci*

Şekil 2.1'de görüldüğü gibi, araştırmada öğretim deneyinin başlangıcında ön klinik görüşmeler yapılmış ve öğrencilerin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma performansları analiz edilerek ortaya konmuştur. Bu görüşmelerden elde dilen bulgular doğrultusunda birinci öğretim dizisinde nasıl bir yol izleneceği planlanmış ve uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Şekil 2.1'de sunulan amaçlar doğrultusunda birinci öğretim dizisi dört hafta sürmüştür. Uygulama sonunda öğrencilerde meydana gelen değişim ve gelişimin gözlenmesi için ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Birinci öğretim dizisi ve ara klinik görüşmelerin analizi sonunda elde edilen bulgular doğrultusunda ikinci öğretim dizisi planlanmış ve uygulanmıştır. Beş hafta süren uygulamalarda da Şekil 2.1'de sunulan amaçlar gerçekleştirilmiştir. İkinci öğretim dizisi süreci tamamlandığında son klinik görüşmeler yapılarak hem öğretim dizisi hem de görüşmelerin analizleri yapılarak öğrencilerdeki gelişimler belirlenmiştir. Sürecin işleyişi ve öğrencilerde meydana gelen gelişimler baştan sona tekrar gözden geçirilerek istenilen amaçların gerçekleştiğine karar verilerek süreç tamamlanmıştır.

Öğretim deneyi sürecinde araştırmacı, uzman bir matematik eğitimcisi tüm sürecin planlanması ve uygulama sonunda elde edilen verilerin analizinde beraber eş güdümlü çalışarak süreç yönetilmiştir.

2.2. Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın katılımcıları 2018-2019 eğitim-öğretim yılının birinci ve ikinci döneminde Kütahya ilinin Simav ilçesindeki bir devlet okulunda öğrenim gören gönüllü 9 tane altıncı sınıf öğrencisinden oluşmaktadır. Araştırmanın gerçekleştirildiği okul, sosyo-ekonomik olarak orta seviyedeki bir bölgede bulunmaktadır. Araştırmada katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme, zengin bilgi içerdiği düşünülen durumların ayrıntılı çalışılıp, olgu ve olayların keşfedilmesine ve açıklanmasına yardımcı olmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Amaçlı örneklemenin yöntemi bağlamında ise ölçüt örnekleme benimsenmiştir. Ölçüt örnekleme ise önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü kapsayan bir durum çalışmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu bağlamda iki ölçüt belirlenmiştir. Birincisi katılımcıların sınıf seviyesidir. Sabit değişen şekil örüntüleri ile öğrenciler ilk kez 5. sınıfta karşılaşmaktadır. 5. sınıfı tamamlayan öğrencilerin örüntü genellemeye ilişkin ön bilgilerini belirleyerek bu konudaki deneyimlerinin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme performanslarına yansımalarını görmek ve uygulanan öğretimler sonucunda bu sınıf düzeyinde başlanan formal cebir öğretimine katkı sağlamak istendiğinden altıncı sınıf seviyesindeki öğrencilerin seçilmesi uygun bulunmuştur.

İkinci ölçüt ise katılımcıların akademik başarı düzeyleridir. Öğretim deneyi sonucu meydana gelecek gelişimlerin farklı başarı düzeyindeki öğrencilerde nasıl gerçekleştiğini gözlemlemek amacıyla böyle bir ölçüt belirlenmiştir. Bu bağlamda katılımcı olarak belirlenen dokuz öğrenciden üçü düşük başarı düzeyinde, üçü orta başarı düzeyinde ve üçü de yüksek başarı düzeyinde olacak şekilde seçilmiştir. Öğrencilerin başarı düzeyleri belirlenirken sınıf matematik öğretmeninin görüşleri ve öğrencilere öğretim süreci öncesinde durumlarını ölçen test (EK-1) sonuçları dikkate alınmıştır. Seçilen bu dokuz öğrencinin sınıf tartışmaları yapmaları sağlanarak çalışmalar araştırmacı tarafından titizlikle izlenmiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin isimleri etik açıdan değiştirilmiş ve Tablo 2.1'de ders başarı düzeyleri ve öğrenci isimleri gösterilmiştir.

Tablo 2.1. *Araştırmaya katılan öğrencilerin isimleri*

	Ders Başarı Düzeyleri		
	Düşük	**Orta**	**Yüksek**
Öğrenci Kod İsimleri	Özlem	Kamil	Uğur
	Mehmet	Esin	Orhan
	Sevim	Hakan	Yasemin

2.3. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Araştırma için ilk önce alanyazın taraması yapılmış ve sonra oluşturulan kuramsal çerçeveye uygun öğrenme ortamı düşünülmüştür. Öğrenme ortamı, öğrencilerin bilişsel gelişimlerinin takip edilmesi amaçlandığı için dersler ve klinik görüşmeler çerçevesinde şekillendirilmiştir. Derslerin ve klinik görüşmelerin yararlılığının sınanması ve düzenlenmesi amacıyla pilot çalışmalar yapılmıştır. Pilot çalışma sonrasında yapılan ana çalışmada veri toplanması; öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler, öğretim derslerinin video kayıtları ve öğrenci çalışma yapraklarından elde edilen alan notları sayesinde gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bu veriler, sürekli ve geriye dönük olmak üzere iki basamakta analiz edilmiştir.

2.4. Pilot Çalışma

Araştırmanın pilot çalışması 2017-2018 eğitim-öğretim yılının birinci ve ikinci döneminde uygulama yapılan okulun 6. sınıflarındaki bir şubenin dokuz öğrencisi ile yarı bağımsız ve bağımsız örüntüleri genelleme performanslarını belirlemek amacıyla öğretim sürecinde hazırlanan öğretim dizisi plan ve etkinliklerinin geçerliliğini ölçümlemek ve öğretim deneyi sürecini yönetme konusunda deneyim edinebilmek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Pilot ve ana çalışmanın aşamaları aynı şekilde ve öğretim süreci dokuz hafta olacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler ile birlikte yapılan her bir klinik görüşme ve öğretim dizisi, video ile kayıt altına alınmış ve bu kayıtlar uzman matematik eğitimcisi ile birlikte izlenerek sürekli analizler gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı ve uzman matematik eğitimcisi ayrı ayrı ve beraber olmak üzere her bir klinik görüşme ve öğretim ders sonrasında kayıt altına alınan videolar izlenerek analizler gerçekleştirmiştir. Bu analizler sonucunda klinik görüşme soruları ve öğretim dizisi etkinlikleri üzerinde gerekli görülen yerlerde düzenlemeler yapılmıştır. Örneğin öğrencilerin ana çalışmada yaşadıkları özgünlükten uzak olan yatay ya da dikey olacak şekilde yinelemeli ilerleyen örüntü oluşturma sorununa pilot çalışmada da sıkça rastlanmış ve ana çalışmadaki öğretim süreçlerinde bu sorunu gidermeye yönelik düzenlemeler yapılması planlanmıştır. Ayrıca pilot çalışmada öğrencilerden grup çalışması yapmaları istenmiş ancak öğrenciler bu grup çalışmalarına etkin bir şekilde katılım sağlayamamışlardır ve ana çalışmada bu durum göz önüne alınarak etkinlikler grup çalışması olmayacak şekilde düzenlenmiştir. Bunların dışında pilot çalışmadan elde edilen sonuçlardan yararlanılarak klinik görüşme ve öğretim dizisi etkinliklerinde bazı soruların daha anlaşılır olması için gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

2.5. Verilerin Toplanması

Araştırma için toplanan veriler; öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşmeler, öğretim derslerinin video kayıtları ve öğrenci dokümanlarından elde edilmiştir.

2.5.1. Klinik görüşmeler

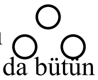
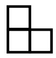
Klinik görüşmeler; öğrencilerin düşünce yapıları ile birlikte nasıl düşündükleri ve bilişsel becerileri hakkında bilgi veren ve Piaget tarafından geliştirilmiş bir veri toplama tekniğidir (Ginsburg, 1981). Klinik görüşmelerde önemli olan öğrencilerin soruyu doğru çözmesi değil süreç içinde matematiksel öğrenme ilişkilerinin ve becerilerinin incelenmesidir. Araştırmada uzman bir matematik eğitimcisi ile beraber ön, ara ve son klinik görüşme soruları hazırlanarak bu sorular için ayrıca iki ayrı uzman matematik eğitimcisinin de görüşleri alınmıştır. Bu konu ile ilgili olarak araştırmacı tarafından biri araştırma başında, biri öğretim sırasında biri de öğretim bitiminde olmak üzere her bir öğrenci ile her biri bir ders saati süren üçer klinik görüşme gerçekleştirilerek tüm klinik görüşmeler video ile kayıt altına alınmıştır. Video kamera öğrencilerin odaklanmalarını bozmayacak şekilde çalışma kağıtlarını gösterecek şekilde konumlandırılmıştır. Ayrıca klinik görüşmeler, öğrencilerin dikkatlerini dağıtmayacak, rahat ve sessiz olan boş bir sınıfta gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerle yapılan ön, ara ve son klinik görüşme süreleri Tablo 2.2'de sunulmuştur.

Tablo 2.2. *Öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşmelerin süresi*

	Ön klinik görüşmeler	**Ara klinik görüşmeler**	**Son klinik görüşmeler**
Uğur	36 dk 07 sn	17 dk 52 sn	28 dk 52 sn
Yasemin	23 dk 55 sn	12 dk 45 sn	26 dk 21 sn
Orhan	23 dk 43 sn	17 dk 22 sn	40 dk 41 sn
Özlem	23 dk 01 sn	12 dk 02 sn	30 dk 05 sn
Mehmet	27 dk 57 sn	16 dk 47 sn	19 dk 48 sn
Esin	39 dk 08 sn	19 dk 27 sn	46 dk 03 sn
Sevim	29 dk 36 sn	17 dk 40 sn	29 dk 49 sn
Kamil	31 dk 25 sn	21 dk 16 sn	42 dk 58 sn
Hakan	36 dk 07 sn	17 dk 52 sn	28 dk 52 sn

Klinik görüşmelerde soruların; süreye, öğrencilerin hazır bulunuşluk düzeylerine, konu ile ilgili araştırmalara dikkat edilmesine ve öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarabilmesine olanak verecek şekilde oluşturulması özen gösterilmiştir. Bunun yanı sıra klinik görüşmelerde kullanılan sorular uygun bir ortamda oluşturulmuş ve kullanılabilecek tüm materyaller hazırlanmıştır. Bu bağlamda klinik görüşmeler için araştırma amaçları ve alanyazın taramasındaki veriler referans noktası oluşturmuştur. Öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşme soruları EK-2'de, klinik görüşme sorularının amaç, kapsam ve soru sayısına ait bilgiler ise Tablo 2.3'te sunulmuştur.

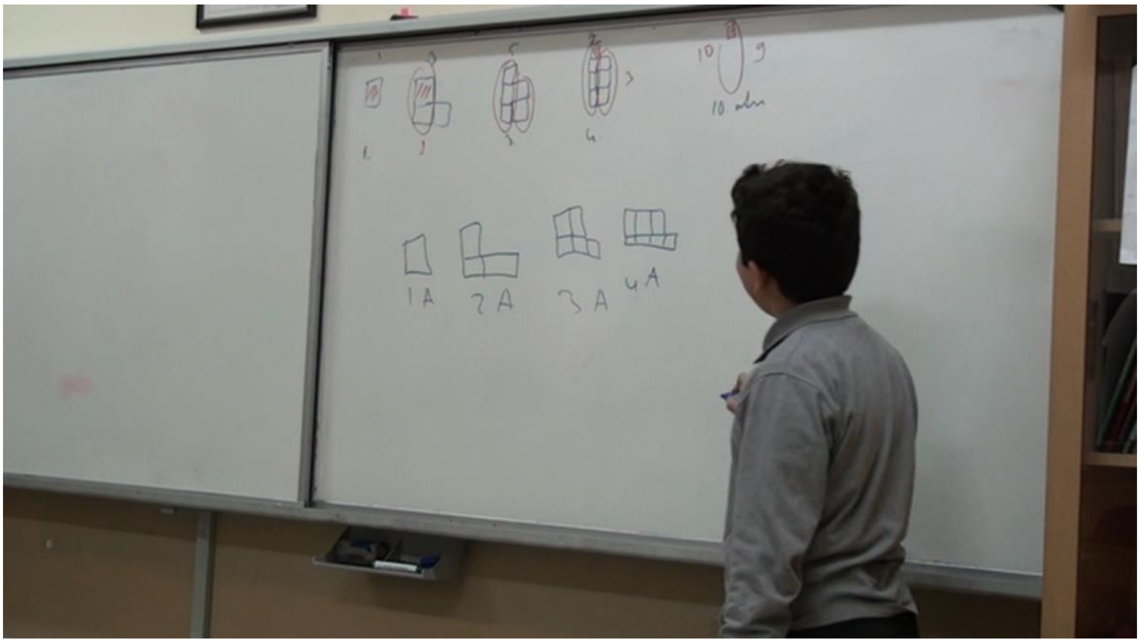
Tablo 2.3. *Klinik görüşme sorularının amaç, kapsam ve oluşturulan örüntü sayısına ilişkin bilgiler*

Klinik Görüşmeler	Amaç	Kapsam	Oluşturulan Örüntü Sayısı
Ön Klinik Görüşme Soruları	➢ Gelişimlerini izlemek için ön bilgileri belirleme ➢ Örüntü oluşturma becerileri	➢ İlk adımı □ olan şekil örüntüsü oluşturma ➢ Herhangi bir adım verilmeden şekil örüntüsü oluşturma	4 4
Ara Klinik Görüşme Soruları	➢ Çarpımsal ilişkinin örüntü oluşumuna ve genellemeye etkisini belirleme ➢ Örüntü oluşturma ve genelleme becerilerinin gelişiminin gözlenmesi	➢ İlk adımı  olan parça ya da bütün kurallı ilerlemeye uygun yarı bağımsız örüntü oluşturma ➢ Herhangi bir adım verilmeden şekil örüntüsü oluşturma	3 3
Son Klinik Görüşme Soruları	➢ Çarpımsal ilişkinin örüntü oluşumuna ve genellemeye etkisini belirleme ➢ Örüntü oluşturma ve genelleme becerilerinin gelişiminin gözlenmesi	➢ İlk adımı □ olan şekil örüntüsü oluşturma ➢ İlk iki adımı □  olan şekil örüntüsü oluşturma. ➢ Herhangi bir adım verilmeden şekil örüntüsü oluşturma	4 4 4

2.5.2. Öğretim dizileri

Araştırmada gerçekleştirilen öğretim dizileri öğrencilerin fikirlerini paylaştıkları bir tartışma ortamı yaratılarak, öğretmen-öğrenci, öğrenci-öğrenci etkileşimine olanak sağlayacak şekilde yürütülmüştür. Öğretim dizilerinde öğrenciler önce bireysel olarak performanslarını gerçekleştirdikten sonra sınıf tartışmasına geçilmiş ve öğrencilerin çözümleri tahtaya yansıtılarak tüm öğrencilerle birlikte incelenmiştir.

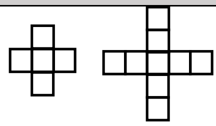
Öğretim dersleri ile ilgili ders plan ve etkinlikleri araştırmacı ve uzman matematik eğitimcisi ile birlikte hazırlamış ve bununla beraber iki uzman matematik eğitimcisinin de görüşleri alınmıştır. Sınıf uygulamalarında ortaya çıkan problemler, o derste çözülmeye çalışılmıştır. Ayrıca sınıf tartışmalarında tüm öğrencileri, tahtayı ve etkileşimli tahtayı gösterecek şekilde konumlandırılan bir kamera ile veri kaybı önlenerek kayıtlar gerçekleştirilmiştir. Öğretim dizileri sırasında kameranın sınıfı gören açıları Görsel 2.1'de verilmiştir.



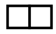
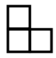
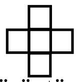
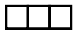
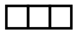
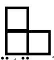
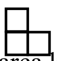
Görsel 2.1. *Öğretim dizilerinde kullanılan kameranın perspektifi*

Öğretim dersleri için hazırlanan ders planı örneği EK-3'de, öğretim derslerinin amaç, kapsam ve süreleri ise Tablo 2.4'te sunulmuştur.

Tablo 2.4. *Öğretim Dizilerindeki Amaç ve Kapsam*

Hafta	Amaç	Kapsam
Birinci Hafta	➢ Verilen örüntünün nasıl genişlediğini farklı yollarla gösterme ➢ Yarı bağımsız örüntüler oluşturma ➢ Sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne dönüştürüp farklı yapıları karşılaştırma	➢  şekil örüntüsünü kullanarak farklı yollarla genelleme ➢ □ … ile başlayan şekil örüntüsü oluşturup genelleme ➢ 1,3,5,… sayı örüntüsünü kullanarak birden fazla şekil örüntüsü oluşturup genellemeleri karşılaştırma ➢ 1,4,7,… sayı örüntüsünü kullanarak birden fazla şekil örüntüsü oluşturup genellemeleri karşılaştırma

Tablo 2.4. (Devam) *Öğretim Dizilerindeki Amaç ve Kapsam*

İkinci Hafta	➢ Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında ilk adımı 1'den fazla sayıda şekilden oluşan şekil birimi kullanarak örüntü oluşturma	➢  …ile başlayan şekil örüntüsü oluşturup genelleme
Üçüncü ve Dördüncü Hafta	➢ Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında ilk adımı 2'den fazla sayıda şekilden oluşan şekil birimi kullanarak örüntü oluşturma	➢  … ile başlayan şekil örüntüsü oluşturup genelleme ➢  … ile başlayan şekil örüntüsü oluşturup genelleme
Beşinci Hafta	➢ Bağımsız örüntü oluşturma bağlamında örüntü blokları kullanarak örüntülerde sabit ve değişenleri fark etme ve tablo temsiline geçiş yapma	➢ Renklı örüntü bloklarını kullanarak bağımsız örüntüler oluşturma
Altıncı ve Yedinci Hafta	➢ Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında parça ve bütün kurallı ilerleyen örüntüler oluşturma	➢  …ile başlayan ve bütün kurallı olacak şekilde ilerleyen örüntü oluşturup genelleme ➢  …ile başlayan ve parça kurallı olacak şekilde ilerleyen örüntü oluşturup genelleme ➢  …ile başlayan ve bütün kurallı olacak şekilde ilerleyen örüntü oluşturup genelleme ➢  …ile başlayan ve parça kurallı olacak şekilde ilerleyen örüntü oluşturup genelleme
Sekizinci ve Dokuzuncu Hafta	➢ Bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında farklı örüntüler oluşturma	➢ Parça ve Bütün kurallı bağımsız örüntüler oluşturma tablo temsilini kullanarak genelleme

2.5.3. Öğrenci dokümanları

Öğretim dizisi sırasında öğrencilerin bireysel çalışmaları sırasında kullandıkları çalışma kağıtları ders sonunda araştırmacı tarafından toplanarak incelenmiş ve kayıt altına alınmıştır.

2.6. Verilerin Analizi

Öğretim deneyi, veri analiz sürecinde sürekli analiz (ongoing analysis) ve geriye dönük analiz (retrospective analysis) olmak üzere iki analiz düzeyini içermektedir. Sürekli analiz, öğrencilerle beraber yapılan öğretim dersleri esnasında gerçekleştirilir. Geriye dönük analiz ise öğretim süreci sonrasında verilerin tümü üzerinde gerçekleştirilir. Sürekli analiz öğretmenlerin öğrenci öğrenmelerini daha ileriye taşıyabilmek için yaptığı doğaçlama ya da planlı yönlendirmelerle kullanılır. Sürekli analizin anahtar boyutu ise öğrencilerin bilgi, eylem ve eğitimlerine göre araştırmacının modelini oluşturabilmesi ve düzenleyebilmesidir (Simon, 2000). Bu sebeple sürekli analiz sürecinde her ders sonunda araştırmacı ve uzman bir matematik eğitimcisi kaydedilen videoları ayrı ayrı izleyerek ulaşılan sonuçları ve gözlemlerini detaylı olarak tartışarak gerekli görülen değişiklik ve düzenlemeleri gerçekleştirmiştir. Geriye dönük analiz ise bütün veri setinin yeniden incelenmesini içermektedir. Geriye dönük analiz öğretim deneyi ile ilgili kayıtların (öğretim süreci, klinik görüşmeler) tümünün titizlikle incelenmesini gerektirmektedir. Burada amaç, öğrencilerin matematiksel gelişim süreçlerini göstermek için bir model oluşturabilmektir (Simon, 2000).

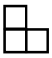
Araştırma kapsamında öğretim dizilerinin, klinik görüşmelerin, öğrenci dokümanlarının analizi araştırmacı ve uzman bir matematik eğitimcisi tarafından yapılmıştır. Öğretim dizileri analiz edilmeden önce video kayıtlar izlenmiş ve haftalık olarak makro analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte önemli görülen ve doğrudan alıntı yapılacak noktalar ve zaman aralıkları belirlenmiştir. Tablo 2.5'te yedinci haftaya ilişkin örnek bir analiz sunulmuştur.

Tablo 2.5. *Örnek Makro Analiz*

7. HAFTA SINIF UYGULAMASI MAKRO ANALİZİ

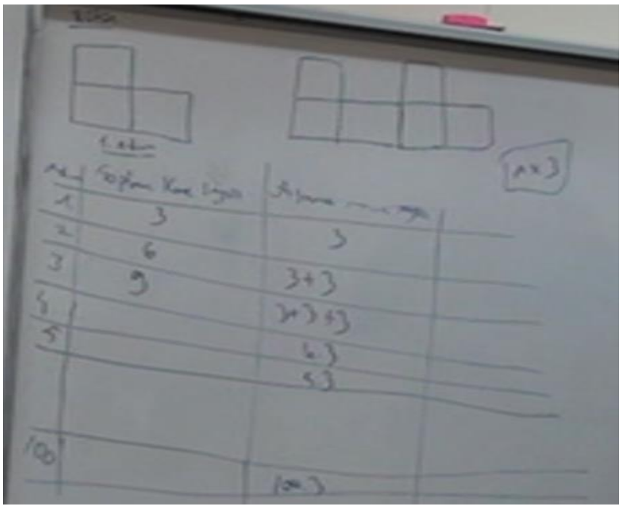
Parça ve Bütün Kurallı Örüntü Oluşturma Etkinliği

Araştırmacı tahtaya üç kareden oluşan parça ve bütün şeklinde ilerleyebilecek şekilde ilk adımı yazdı. Öğrencilere örüntüyü parça ya da bütün şeklinde ilerletebilecekleri söylendi. Öğrencilerin bütün ve parça kurallı ilerleyen örüntülerdeki farkı görebilmeleri için ilk önce bütün daha sonra parça şeklinde ilerleyen örüntü senaryoları hazırlandı. Senaryo başlangıcı şu şekildedir:



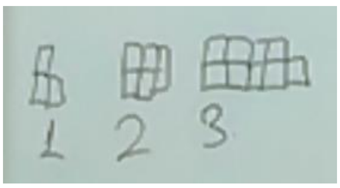
İlk adımı yandaki şekil olan bütün kurallı ilerleyecek şekilde örüntü oluşturunuz.

Öğrencilerden çalışma kağıtlarına örüntü oluşturmaları istendi. Araştırmacı bu sırada sınıfta gezerek öğrencilerin yaptıkları örüntüleri inceleyerek dokuz öğrencinin beş farklı örüntü oluşturduklarını gördü. Aynı örüntüyü oluşturanlardan bir öğrenci (Mehmet) seçilerek tahtaya çıkarılıp oluşturduğu örüntüyü çizmesi istenerek sonrasında sınıf tartışması başlatıldı. Mehmet'e örüntüsünü nasıl oluşturduğu sorulduğunda *"üç kareye bitişik üç kare ekledim"* şeklinde cevap verdi. Daha sonra Mehmet'ten örüntüdeki toplam kare sayılarını oluşturulan tabloya yazması istenmiştir. Araştırmacı öğrencilerden her adımdaki kare sayılarının değişimlerini tabloya yazmalarını istemiştir. Yasemin *"ilk adımda üç tane kare, ikinci adımda buna 3 tane kare eklenmiş, üçüncü adımda ise üç tane üç kare"* olduğunu ifade etmiştir. Bu değişimlerin neye bağlı olduğu sorulduğunda ise Esin *" adım sayısı kadar 3 var"* şeklinde cevap verdi.



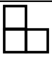
Araştırmacı dördüncü adımı sorduğunda Mehmet "3+3+3+3 olur" dedi. Tüm sınıf "4 çarpı 3 yazabiliriz" şeklinde cevap verdi. Sınıfa yüzüncü adım sorulduğunda ise "100 çarpı 3 olur" dediler. Öğrencilerden kuralı oluşturmaları istendiğinde ise öğrenciler "a çarpı 3" şeklinde cevap verdiler.

Daha sonra araştırmacı ilk örüntüden farklı oluşturan başka bir öğrenciyi (Orhan) tahtaya kaldırarak örüntüsünü çizmesini istedi.



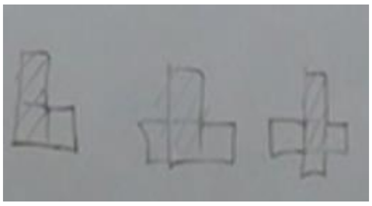
Araştırmacı sınıfa bunun örüntü olup olmadığını sordu. Tüm sınıf örüntü şeklinde cevap verdiler. Nasıl ilerlediği sorulduğunda Uğur "bir ters bir düz eklemiş öğretmenim" dedi. Önceki örnekteki gibi 100. adım sorulduğunda tüm sınıf "100 çarpı 3" dedi Araştırmacı öğrencilere iki örüntünün kuralının aynı fakat farklı örüntü olduğunu vurguladı.

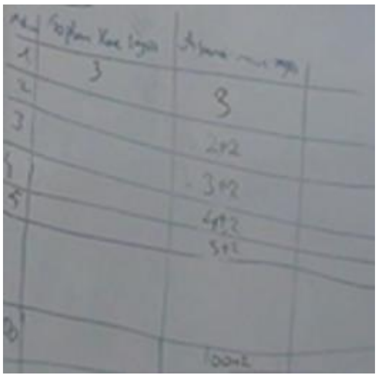
Tablo 2.5. (Devam) *Örnek Makro Analiz*



İlk adımı yandaki şekil olan parça kurallı ilerleyecek şekilde örüntü oluşturunuz.

Daha sonra araştırmacı aynı ilk adımı kullanarak parça kurallı örüntü oluşturmalarını istedi. Araştırmacı bu sırada sınıfta gezerek öğrencilerin yaptıkları örüntüleri inceleyerek dokuz öğrencinin altı farklı örüntü oluşturduklarını gördü. Öğrencilerden Orhan'ı tahtaya kaldırarak oluşturduğu örüntüyü çizmesi istendi.



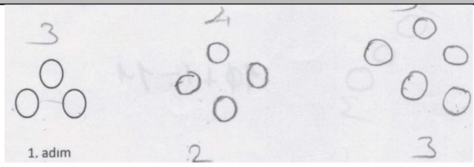
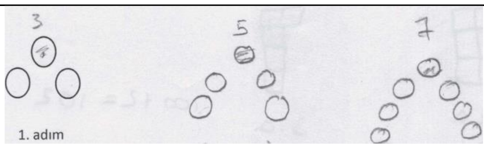
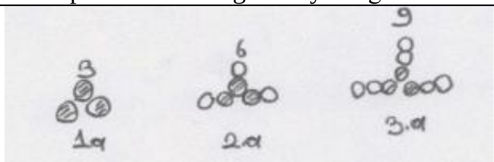
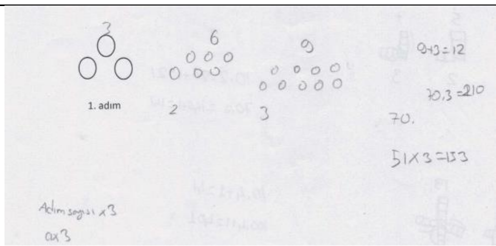
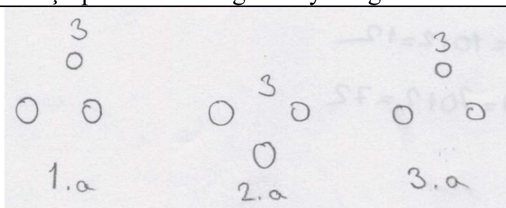


Araştırmacı sınıfa dönerek örüntünün nasıl ilerlediğini sordu. Uğur "birer birer" dedi. Araştırmacı ilerlemenin yönünü sorduğunda, Hakan "sol daha sonra sağ" şeklinde yanıt verdi. Orhan müdahale edip "sol ve aşağı" dedi. Araştırmacı Orhan'a dördüncü ve beşinci adımı sordu. Orhan "sağa ve sola ekledim" şeklinde yanıt verdi. Araştırmacı daha sonra Orhan'a tabloyu doldurmasını istedi. Orhan "1. adım 3, 2. adım 2 + 2, 3. adım 3 + 2, 4. adım 4 + 2, 5. adım 5 + 2 ve 100. adım 100 + 2 şeklinde yazdı. Araştırmacı sınıfa neden artı 2 yazdığını sorduğunda Hakan "baştaki 2 kareyi sabitledi" şeklinde yanıt verdi. Araştırmacı kuralı sorduğunda Esin "adım sayısı artı 2" dedi. Araştırmacı tüm sınıfa kuralın doğru olup olmadığını sorduğunda tüm sınıf onayladı.

Klinik görüşmeler araştırmacı ve uzman matematik eğitimci tarafından bağımsız olarak analiz edilerek tema, alt tema ve kodlar belirlenmiştir. Daha sonra bir araya gelinerek karşılaştırmalar yapılarak temalar ve kodlar üzerinde uzlaşılmıştır. Bu süreçte kodlayıcılar arası uyuşum yüzdesi hesaplanmış ve %90 olarak belirlenmiştir.

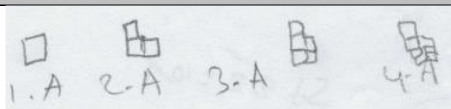
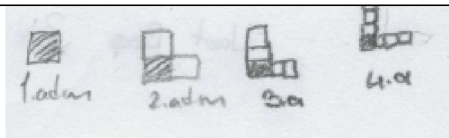
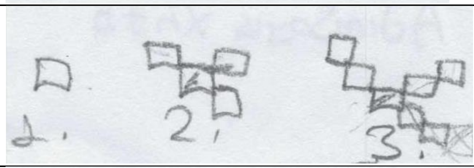
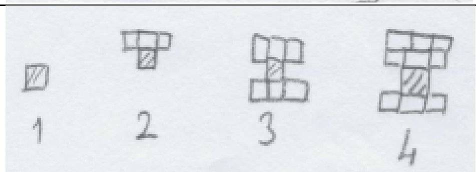
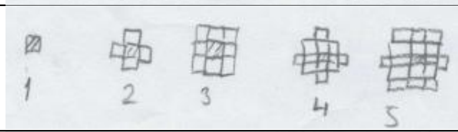
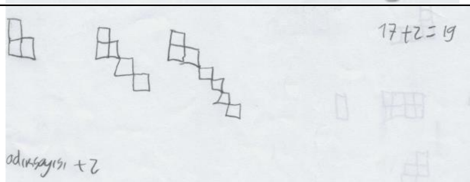
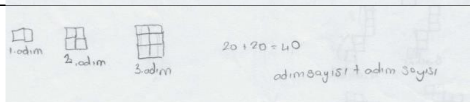
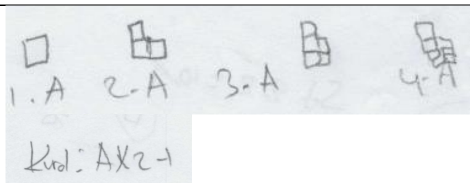
Sürekli analiz kapsamında öğrencilerle gerçekleştirilen her ders ve klinik görüşme sonunda dökümler yapılmış, araştırmacı ve uzman eğitimci ayrı ayrı olarak analizleri gerçekleştirmiştir. Çalışma sonunda ise geriye dönük analizler yapılmıştır. Geriye dönük analizler kapsamında sırasıyla ön klinik görüşme, birinci oturum öğretim dizileri, ara klinik görüşme, ikinci oturum öğretim dizileri ve son klinik görüşmeler analiz edilip tema ve alt temalar belirlenerek her bir oturum ile görüşme sonunda tema ve alt temalar birbiriyle karşılaştırılmıştır. Araştırmacı ve uzman matematik eğitimcisinin üzerinde uzlaştıkları tema, alt tema ve kodların nasıl atandığına ilişkin bazı örnekler ön, ara ve son klinik görüşmeler üzerinden aşağıda sunulmuştur.

Tablo 2.6. *Ön ve ara klinik görüşme için belirlenen tema, alt tema ve kodlar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar	Örnekler ve Alıntılar
Örüntü Oluşturma ve Genelleme Stratejileri	Yinelemeli ilişkiye dayalı oluşum	Parça odaklı ilerletme	 Birinci adımdaki şekil biriminin bir parçasını adımlarda sabit olarak devam ettiren öğrenciler
	Fonksiyonel ilişkiye dayalı toplamsal oluşum	Parça odaklı ilerletme	 Birinci adımdaki şekil biriminin bir parçasını adımlarda sabit olarak devam ettiren ve toplamsal olarak genelleyen öğrenciler
	Fonksiyonel ilişkiye dayalı çarpımsal oluşum	Parça odaklı ilerletme	 Birinci adımdaki şekil biriminin bir parçasını adımlarda sabit olarak devam ettiren ve çarpımsal olarak genelleyen öğrenciler
		Bütün odaklı ilerletme	 Birinci adımdaki şekil biriminin tamamını adımlarda sabit olarak devam ettiren ve çarpımsal olarak genelleyen öğrenciler
	Tekrarlayan oluşum		

Son klinik Görüşme analiz edilirken oluşum ve genelleme olmak üzere iki aşamada incelenmiştir. Öğrencilerin oluşturmuş oldukları örüntüler "tek yönde periyodik genişleyen, iki yönde periyodik genişleyen, üç yönde periyodik genişleyen, salınımlı genişleyen, döngüsel genişleyen" alt temalar altında incelenmiş ve aşağıda sunulmuştur.

Tablo 2.7. *Son klinik görüşme için belirlenen tema, alt tema ve kodlar*

Temalar	Alt Temalar	Kodlar	Örnekler ve Alıntılar
Örüntü Oluşturma ve Genelleme Stratejileri	Oluşum	Tek yönde periyodik genişleyen örüntü	
		İki yönde periyodik genişleyen örüntü	
		Üç yönde periyodik genişleyen örüntü	
		Salınımlı genişleyen örüntü	
		Döngüsel genişleyen örüntü	
	Genelleme	Yinelemeli toplamsal	
		Standart olmayan fonksiyon tabanlı	
		Standart fonksiyon tabanlı	

2.7. Araştırmacının Rolü

Araştırmacı, matematik eğitimi alanında doktora öğrencisi olmakla birlikte Dumlupınar Üniversitesi Şaphane Meslek Yüksekokulu'nda on yedi yıllık deneyime sahiptir ve bu çalışmayı gerçekleştirerek öğretim deneyinde araştırmacı rolünü üstlenmiştir. Ayrıca bu araştırma için konu alanına ilişkin alanyazın incelemesi gerçekleştirmiştir. Araştırma süresi boyunca araştırmacı öğretim derslerinin ve klinik görüşmelerin yer ve zaman planlamalarını yaparak öğretim deneyi sürecini yürütmüştür. Ayrıca öğrencilerin derslere aktif katılımlarını sağlayarak ve düşünmeye yönlendiren sorularıyla öğrencilere rehberlik ederek onların zihinsel ve analitik düşünme becerilerinin desteklenmesine olanak sağlamıştır. Bununla beraber öğrencilerin düşüncelerini ifade edebilecekleri rahat bir öğrenme ortamı sunarak tüm öğrencilerle birlikte konuların tartışılarak geliştirilmesine fırsat tanınmıştır.

2.8. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Geçerlik ve güvenirlik bilimsel araştırmanın inandırıcılığını gösteren önemli bir ölçüt olarak kabul edilmektedir. Bu bağlamda araştırmanın geçerlik ve güvenirliğinin arttırılması için çeşitli önlem ve stratejiler kullanılmıştır. Bu stratejiler iç geçerlilik (inandırıcılık), dış geçerlilik (aktarılabilirlik), iç güvenirlik (tutarlık) ve dış güvenirlik (teyit edilebilirlik) olarak ele alınmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

İç geçerliliği sağlayabilmek için derinlik odaklı veri toplama, uzun süreli etkileşim, veri çeşitlemesi, katılımcı teyidi ve uzman incelemesi gibi stratejiler önerilmiştir (Erlandson vd, 1993'ten aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2011). Glesne (2013), uzun süreli etkileşim kapsamında araştırmanın gerçekleştirildiği ortamda ve görüşmelerde zaman geçirilmesini ve katılımcılar ile sağlıklı iletişim kurulmasını önermektedir. Bu bağlamda araştırmacı öğretmen dokuz haftalık araştırma sürecinde haftanın belirli günlerinde örüntü oluşturma etkinlikleri gerçekleştirmiştir. Ayrıca ders aralarında matematik dersi öğretmeniyle birlikte öğrencilerle örüntü ve matematik üzerine sohbet etmiştir. Yıldırım ve Şimşek (2011), uzman incelemesi kapsamında araştırma ve nitel araştırma yöntemleri konusunda yeterli bilgiye sahip kişilerin araştırmayı farklı yönleri ile incelemesi gerektiğini ifade etmektedir. Bu bağlamda araştırmada uygulama başlamadan önce ve uygulama süresince matematik eğitimcisi ve nitel araştırma yöntemlerinde iki uzman ile uygulama ortamının ve veri toplama araçlarının oluşturulması, verilerin toplanması ve analiz edilmesi aşamalarında düzenli olarak toplantı yapılmıştır. Katılımcı teyidi kapsamında araştırmacının elde ettiği veriler farklı uzmanlara incelettirilmelidir. Bu bağlamda araştırma sürecinde toplanan tüm veriler, veri kodlama aşamaları ve analiz aşamaları tümü saklanmış ve incelemek için alan uzmanlarına sunulmuştur. Merriam (2013), veri çeşitlemesi kapsamında elde edilen bulguların doğruluk ve gerçekliğinin kontrolü için farklı araştırmacılarca değerlendirilmesi ve çoklu veri toplama yönteminin kullanılması önermektedir. Bu bağlamda araştırmada öğretim videoları, klinik görüşmeler, gözlem ve doküman incelemesi yapılmış ve elde edilen veriler araştırmacı ve Matematik eğitimcisi ile beraber değerlendirilmiştir.

Dış geçerliliği sağlayabilmek için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme kullanılması önerilmektedir (Erlandson ve diğerleri, 1993'ten Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ayrıntılı betimleme kapsamında elde edilen veriler oluşturulan temalara ya da kavramlara göre düzenlenerek yorum eklenmeden aktarılır. Bu bağlamda araştırmada katılımcıların nasıl belirlendiği, katılımcı özellikleri, uygulama süreci ayrıntılı olarak açıklanmış ve elde edilen veriler bulgularda doğrudan öğrenci alıntıları ile gösterilmiştir. Amaçlı örnekleme kapsamında belirli ve özgün olana ulaşmak amacıyla tek bir durum ya da küçük rastlantısal olmayan örneklem seçilir (Merriam, 2013). Bu bağlamda katılımcılar ölçüt örneklemeye göre belirlenen ölçütlerle araştırmaya dâhil edilmiştir.

İç güvenirliği sağlayabilmek için araştırmalarda tutarlılık incelemesi ve değerlendiriciler arası uyum önerilmektedir (Erlandson ve diğerleri, 1993'ten Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2011). Tutarlılık incelemesi kapsamında verilere dışarıdan farklı bir bakış ile bakılması ve bu verilerin tutarlığının incelenmesi yapılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu kapsamda bir matematik eğitimcisi araştırmayı veri toplama araçlarının oluşturulması, verilerin toplanması ve analizi aşamalarında dışarıdan farklı bir gözle incelemiştir. Ayrıca video kayıtları ve öğrenci dokümanları aynı anda kontrol edilerek iki veri toplama aracı arasında tutarlık sağlanmaya çalışılmıştır.

Dış güvenirliği sağlayabilmek için araştırmanın teyit ettirilmesi önerilmektedir. Teyit incelemesi kapsamında alan dışından bir uzman araştırma sonucunda ortaya çıkan yorum ve önerilerin elde edilen işlenmemiş verilerle uygunluğuna bakar (Erlandson ve diğerleri, 1993'ten Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu bağlamda araştırmanın pilot ve ana uygulamasında elde edilen video kayıtları, öğrenci dokümanları ve analiz aşamalarının tamamı alan uzmanlarının incelemesi için saklanmıştır.

2.9. Etik Konular

Yapılan araştırmanın tamamında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davranılmıştır. Alan yazından faydalanılan bütün bilgiler için kaynak gösterilip bunlar kaynakça bölümünde ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra Kütahya İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden çalışma için izin (EK-5) alınmış ve çalışmaya katılan tüm öğrenciler, veliler ve matematik dersi öğretmeni bilgilendirilmiştir. Bu kapsamda öğrencilere (EK-

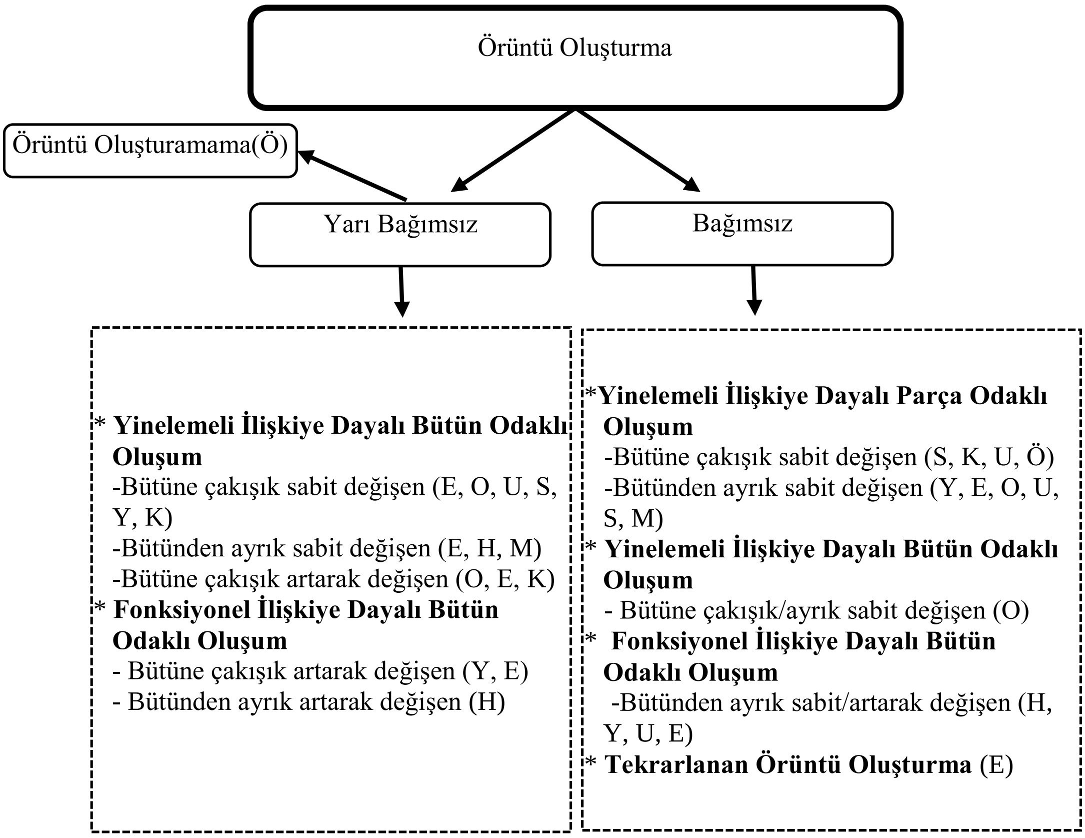
7) “araştırma gönüllü katılım formu”, velilere (EK-8) “veli izin formu” ve öğretmene (EK-6) ise “öğretmen izin formu” dağıtılmış ve onayları alınmıştır.

3. BULGULAR

Bu bölümde ön, ara ve son klinik görüşmelerden, tüm öğrencilerin katıldığı öğretim süreci ve sınıf tartışmalarından elde edilen bulgular ve yorumlara yer verilmiştir. Bulgular; ön klinik görüşmeler, birinci oturum öğretim dizisi, ara klinik görüşmeler, ikinci oturum öğretim dizisi ve son klinik görüşmeler başlıkları ile yapılandırılmış ve bulgular tüm süreçlerde doğrudan alıntılarla desteklenerek sunulmuştur.

3.1. Ön Klinik Görüşmelerden Elde edilen Bulgular

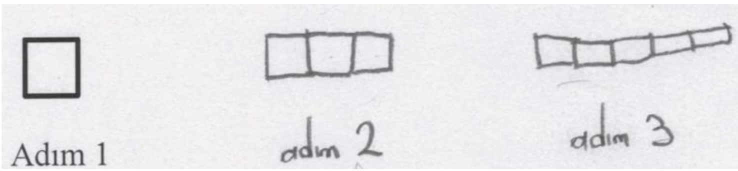
Örüntü oluşturma görevlerine ilişkin öğretim sürecine geçmeden önce öğrencilerin konuya ilişkin ön bilgilerini belirlemek aynı zamanda öğretim süreci boyunca gelişimlerini izlemek amacıyla ön klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerde öğrencilerden öncelikle yarı bağımsız örüntü, ardından bağımsız örüntü oluşturmaları istenmiştir. Öğrencilerin bu örüntüleri oluştururken kullanmış oldukları stratejiler Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. *Öğrencilerin Örüntü Oluşturma Sürecinde Kullandıkları Stratejiler*

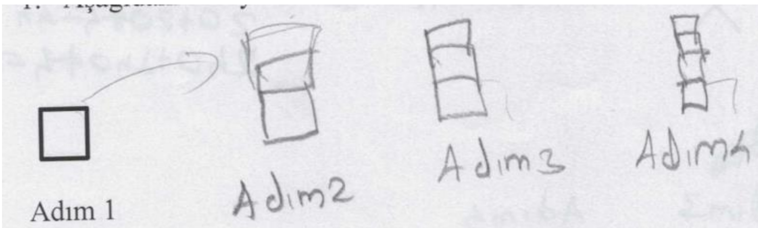
3.1.1. Yarı bağımsız örüntü oluşturma

Yarı bağımsız örüntü oluştururken öğrenciler Şekil 3.1'de görüldüğü gibi, yinelemeli ilişkiye dayalı bütün odaklı ve fonksiyonel ilişkiye dayalı bütün odaklı şeklinde iki farklı strateji kullanmışlardır. Ayrıca iki stratejiyi birden kullanan öğrenciler de olmuştur. Yinelemeli ilişkiye dayalı bütün odaklı strateji "bir şekil biriminden (yani 1. adım) başlayarak bir önceki adıma, belirlenen bir sayıda (sabit) ya da her adımda düzenli değişen sayıda şekil eklenmesi" olarak açıklanabilir. Bu strateji kapsamında öğrenciler bütüne çakışık sabit değişen, bütünden ayrık sabit değişen ve bütüne çakışık artarak değişen örüntüler oluşturmuşlardır. Bütüne çakışık sabit değişen örüntü oluşturan altı öğrenci (E, O, U, S, Y, K) birinci adımdaki şekil birimini örüntünün diğer adımlarını oluştururken kullanmışlardır. İkinci ve üçüncü adımları oluştururken bir önceki adıma bitişik yani boşluk kalmadan sabit bir sayıda şekil birimini eklemişlerdir. Bu öğrencilerden Uğur'un sağa tek yönde periyodik doğrusal oluşturduğu örüntü örneği Görsel 3.1'de gösterilmiştir.



Görsel 3.1. *Uğur'un örüntü örneği*

Görsel 3.1'deki örüntüyü nasıl oluşturduğunu Uğur "Burda 1. adımda bir tane var bunun yanına 2 tane ekledim. Burda (3. adımı gösteriyor) 2 tane ekledim" şeklinde açıklamıştır. Uğur oluşturduğu yapı için "belirli bir düzene göre gidiyor" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu ifade onun örüntünün ne olduğunu ve belirli bir kurala göre devam etmesi gerektiğini algıladığını göstermektedir. Bu bağlamda Uğur örüntüsünün ikinci ve üçüncü adımlarını oluştururken bir önceki terime iki tane şekil birimi eklemiştir. Uğur'dan farklı bir örüntü oluşturması istendiğinde ise yatay olarak devam ettirdiği aynı yapıyı dikey forma dönüştürmüştür. Benzer düşünceyle aynı stratejiyi kullanan Kamil'in örüntü oluşturma örneği de Görsel 3.2'de gösterilmiştir.



Görsel 3.2. *Kamil'in örüntü örneği*

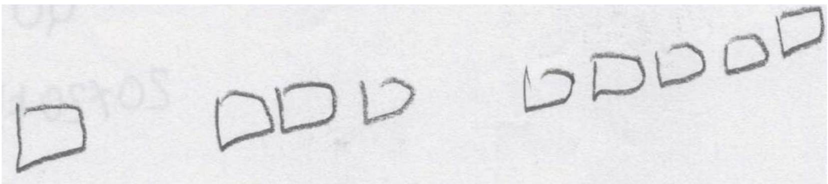
Kamil örüntüyü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

Araştırmacı : Bir örüntü oluşturabilir misin?

Kamil : Şimdi ilk adımı bir kareyse bunu 1'er 1'er ya da 2'şer 2'şer arttırabilirim. (Üst üste 2 kare yaptı) Böyle oluşturabilirim. 3. adımı böyle de gidebilir (Üst üste 3 kare yaptı) ya da sağa da gidebilir bu. (4. adımı üst üste 4 kare yaptı.)

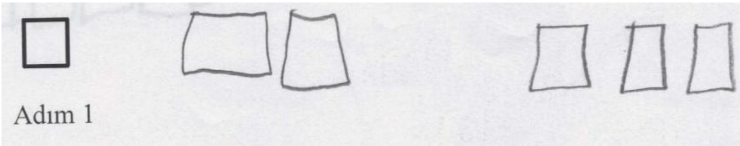
Diyalogda görüldüğü gibi, Kamil'den örüntü oluşturması istendiğinde, farklı yön ve sayı ihtimallerini göz önüne alarak örüntüsünü oluşturduğu görülmektedir.

Bütünden ayrık sabit değişen örüntü oluşturan Esin, Hakan ve Mehmet ise benzer düşünce yapısından hareketle verilen ilk adıma bitişik olmayacak şekilde boşluk bırakarak sabit bir sayıda şekil ekleyerek örüntülerini devam ettirmişlerdir. Görsel 3.3'te Hakan'ın oluşturduğu örüntü örneği görülmektedir.



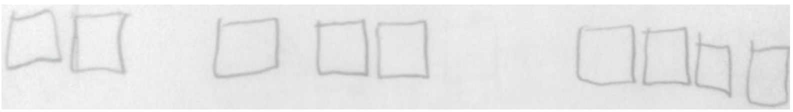
Görsel 3.3. *Hakan'ın örüntü örneği*

Görsel 3.3'de görülen örüntüyü Hakan "Öğretmenim birinci adımda 1 tane var 2. adımda 3 tane var 2 artmış 3. adımda 5 tane var 2 artmış. Yani 2 ekleyerek oluşturdum" şeklinde açıklamıştır. Mehmet ise oluşturduğu tüm örüntülerde 1'er fark kullanarak örüntüsünü ilerletmiştir. Görsel 3.4'te görüldüğü gibi 1, 2, 3, … şeklinde devam eden sayı dizisine uygun yatay formda bütüne ayrık parça ekleyerek bir şekil örüntüsü oluşturmuştur.



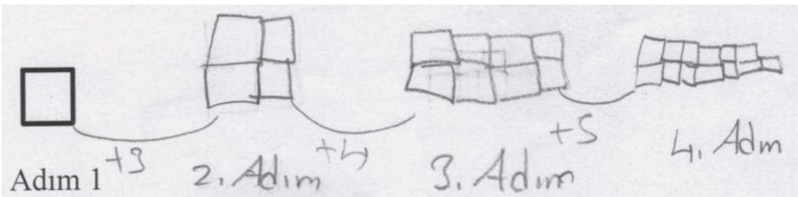
Görsel 3.4. *Mehmet'in örüntü örneği*

Öğrenciler bütüne çakışık ya da ayrık sabit değişen örüntü oluştururken genellikle şekil birimlerini ikinci adımdan başlayarak eklemeyi tercih etmişlerdir. Ancak Mehmet'ten farklı bir örüntü oluşturması istendiğinde şekil birimini örüntünün her bir adımında kullanmış ve bir kare ekleyerek Görsel 3.5'te görüldüğü gibi 2, 3, 4, … şeklinde devam eden bir şekil örüntüsü oluşturmuştur.



Görsel 3.5. *Mehmet'in örüntü örneği*

Bütüne çakışık artarak değişen örüntü oluşturan Orhan, Esin ve Kamil ise diğer öğrencilerden farklı olarak örüntüyü sabit farkla ilerletmek yerine farkın sürekli arttığı örüntüler de oluşturmuşlardır. Görsel 3.6'da Orhan'ın iki yönde (üst, sağ) periyodik doğrusal oluşturduğu örüntü örneği görülmektedir.



Görsel 3.6. *Orhan'ın örüntü örneği*

Orhan örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A : Farklı bir örüntü oluşturabilir misin?

Orhan : Kolay veya zor fark eder mi?

A : Nasıl istersen. (1, 4, 8, 13, … şeklinde örüntü oluşturdu)

A : Nasıl oluşturdun örüntüyü?

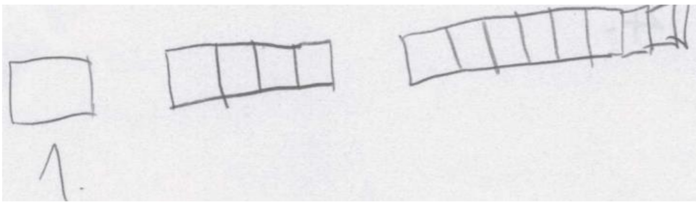
Orhan : İlk baş 3 ekledim. Bir sonrakine 4 ekledim. Bir sonrakine de 5 ekledim.

A : Peki bu bir örüntü oluyor mu?

Orhan : Evet (düşünüyor) belirli bir düzene göre ilerlettim.

Diyalogda görüldüğü gibi, Orhan'ın artarak değişen bir örüntü oluşturduğu görülmektedir. Orhan örüntüsünün diğer adımlarını oluştururken bir önceki terimlere şekil birimini artarak değişen sayıda (3, 4, 5) eklemiştir. Ancak Orhan örüntüsünü oluştururken şekil birimlerini rastgele eklememiş, şeklin fiziksel yapısına da dikkat etmiştir. Genelde öğrenciler örüntülerini oluştururken şekilleri yatay ya da dikey bir doğrultuda sıralarken, Orhan farklı olarak hem yatayda hem dikeyde genişleyen bir şekil dizisi oluşturmuştur.

Öğrencilerden üçü (E, Y ve H) aynı zamanda fonksiyonel ilişkiye dayalı bütün odaklı stratejiyi kullanarak da örüntü oluşturmuşlardır. Bu strateji "adım sayısı ve o adıma karşılık gelen terim sayısı ilişkisine dayalı bir kuralın kullanılmasıdır". Bu strateji kapsamında Esin ve Yasemin bütüne çakışık artarak değişen, Hakan ise bütünden ayrık artarak değişen örüntüler oluşturmuşlardır. Yasemin'in tek yönde periyodik doğrusal oluşturduğu örüntü örneği Görsel 3.7'de gösterilmiştir.



Görsel 3.7. *Yasemin'in örüntü örneği*

Yasemin örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A : Bir örüntü oluşturabilir misin?

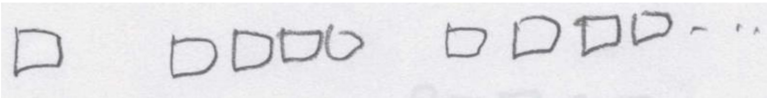
Yasemin : (1, 4, 9, … şeklinde yatay örüntü oluşturdu.) Kuralı söyleyeyim mi?

A : Peki buyur söyle bakalım.

Yasemin : Adım sayısı çarpı adım sayısı

Diyalogda da görüldüğü gibi, Yasemin önce 1, 4, 9 karesel örüntü olarak adlandırılan bir sayı örüntüsü oluşturmuş ve her bir sayı kadar yan yana bitişik sıralanan şekiller çizmiştir. Yasemin'in örüntüyü oluşturduktan sonra görüşmeciye "Kuralı söyliyeyim mi?" şeklinde sorması da örüntünün genel kuralını belirleyip daha sonra şekle döktüğünü göstermektedir. Bu durum Yasemin'in örüntünün fiziksel yapısını dikkate almadığı, genelde öğrencilerin sıklıkla sergilediği gibi sağa tek yönde doğrusal genişleyen bir şekil dizisi oluşturduğu söylenebilir. Diğer yandan Yasemin'in örüntünün kuralını adım sayısı ile ilişkilendirmesi fonksiyonel ilişkiyi dikkate aldığının bir işaretidir. Yasemin'den farklı örüntüler oluşturması istendiğinde ise yukarıdakine benzer şekilde bir örüntü daha oluşturmuştur.

Benzer düşünce yapısından hareket eden Hakan ise verilen ilk adıma bitişik olmayacak şekilde boşluk bırakarak şekil dizisi oluşturmuştur. Görsel 3.8'de Hakan'ın oluşturduğu örüntü örneği görülmektedir.

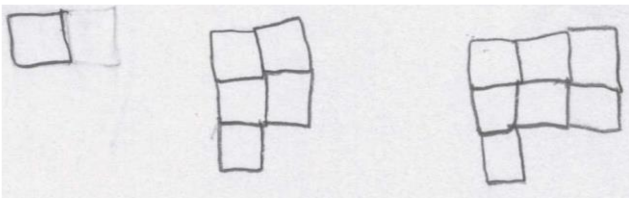


Görsel 3.8. *Hakan'ın örüntü örneği*

Hakan örüntüsünü nasıl oluşturduğunu "… buradaki kural da adım sayısı çarpı adım sayısı" şeklinde açıklamıştır. Hakan'ın da Yasemin'e benzer şekilde adım sayısı ile ilişkili bir kural oluşturup daha sonra şekle döktüğü görülmektedir. Hakan'da Yasemin gibi örüntünün fiziksel yapısına odaklanmamış oluşturduğu sayı örüntüsündeki her bir sayı kadar şekil çizmiştir.

Yarı bağımsız şekil örüntüsü oluşturma sürecinde örnek olarak öğrencilere sunulan birim şekil adım sayısı ile ifade edilmesine karşın (Adım 1) diğer adımları oluştururken bazı öğrencilerin adım sayısını belirtmediği görülmüştür.

Yarı bağımsız şekil örüntüsü oluşturmada Özlem ise geçerli bir örüntü oluşturamamış yani düzensiz sayıda değişen şekiller çizmiştir. Bu süreçte birinci adım olarak verilen şekle çakışık rastgele sayıda iki yöne (alta ve sağa) genişleyen şekil dizisi oluşturmuştur. Özlem'in oluşturmaya çalıştığı şekil dizisi Görsel 3.9'da sunulmuştur.



Görsel 3.9. *Özlem'in örüntü örneği*

Özlem'in oluşturamadığı örüntü ile ilgili diyalog aşağıda açıklamıştır.

A : Şimdi yeni bir örüntü yazabilir misin? (adımları 1,5,7 kareden oluşan bir şekil dizisi yazdı) Bu bir örüntü mü?

Özlem : 3’er ilerliyor

A : Nasıl yani? (cevap veremedi) Peki güzel. Yeni bir örüntü daha yazabilir misin? (adımları 1,5,8 kareden oluşan bir şekil dizisi yazdı)

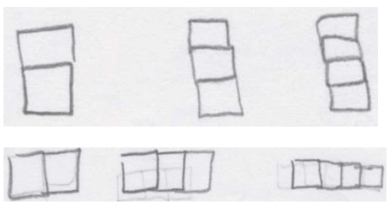
A : Nasıl ilerliyor Özlem?

Özlem : (biraz düşündükten sonra) 4’er 4’er (cevap veremedi)

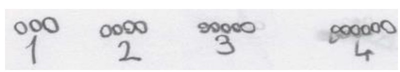
3.1.2. Bağımsız örüntü oluşturma

Bağımsız örüntü oluşturma sürecinde öğrencilerden başlangıç olarak herhangi bir adım verilmeden tüm adımları kendilerinin belirleyeceği bir şekil örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 3.1’de görüldüğü gibi, bağımsız örüntü oluştururken öğrenciler yarı bağımsız örüntü oluşturma süreçlerine benzer şekilde yinelemeli ilişkiye dayalı parça odaklı, yinelemeli ilişkiye dayalı bütün odaklı, fonksiyonel ilişkiye dayalı bütün odaklı, tekrarlayan örüntü olmak üzere dört farklı strateji kullanmışlardır. Birden fazla strateji kullanan öğrenciler de olmuştur.

Yinelemeli ilişkiye dayalı parça odaklı strateji “bir şekil biriminin (yani 1. adım) bir parçasının bir önceki adıma, belirlenen bir sayıda (sabit) ya da her adımda düzenli değişen sayıda eklenmesi” olarak açıklanabilir. Yinelemeli ilişkiye dayalı parça odaklı strateji kapsamında öğrenciler, bütüne çakışık sabit değişen, bütünden ayrık sabit değişen şekil örüntüleri oluşturmuşlardır. Bütüne çakışık sabit değişen şekil örüntüsü oluşturan dört öğrenci (S, K, U, Ö) birinci adımda çizdiği şekli temel alarak (şekil birimi) bu şeklin bir parçasını bir önceki adıma boşluk kalmayacak şekilde ekleyerek örüntülerini devam ettirmişlerdir. Bu öğrencilerden Sevim ve Uğur’un örüntü oluşturma örnekleri Görsel 3.10’da sunulmuştur.



(A)



(B)

Görsel 3.10. *Sevim (A) ve Uğur’un (B) örüntü örneği*

Görsel 3.10’da görüldüğü gibi, Sevim ve Uğur terimler arası sabit farkı 1 olan tek yönde periyodik sıralanan şekil örüntüleri oluşturmuşlardır. Sevim’in birinci adımda belirlediği şekil birimi bitişik iki kareden oluşmaktadır. Sevim diğer adımları oluştururken bu şekil biriminin bir parçasını (bir kare) bir önceki adıma ekleyerek örüntüsünü genişletmiştir. Uğur ise birinci adımda bitişik üç daireden oluşan bir şekil birimi ile başlamış ve diğer adımları oluştururken bu şekil biriminin bir parçasını (bir daire) bir önceki adıma ekleyerek örüntüsünü genişletmiştir.

Sevim örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A : Peki. Gayet güzel. Şimdi istediğin şekilde örüntü yazabilirsin buyur bakalım. (2,3,4 şeklinde dikey karelerden oluşan bir örüntü yazdı.) Peki bu bir örüntü mü?

Sevim : Evet

A : Nasıl ilerlettin örüntüyü?

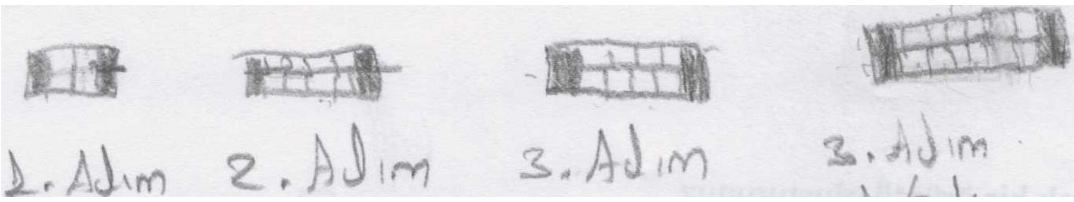
Sevim : 1’er 1’er ilerlettim.

A : Peki güzel. Şimdi bir tane daha yazabilir misin? (2,3,4 şeklinde yatay karelerden oluşan bir örüntü yazdı. Bir önceki yazdığı örüntü ile sayıları aynı) Bir önceki örüntüye benziyor galiba?

Sevim : Evet

Öğrencilerden farklı bir örüntü oluşturmaları istediğinde ise Sevim yapıyı değiştirmeden dikey oluşturduğu örüntüyü yatay konuma getirmiştir. Uğur ise belirlediği şekil birimini değiştirmeden yatay konumda sadece ilk adımdaki birim sayısını değiştirerek benzer bir örüntü oluşturmuştur.

Benzer stratejiyi kullanan Kamil ise Görsel 3.11’de görüldüğü gibi diğer öğrencilerin oluşturduğu örüntülerden fiziksel yapısı farklı örüntüler oluşturmaya çalışmıştır.



Görsel 3.11. *Kamil’in örüntü örneği*

Kamil örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A : Şimdi bir örüntü oluşturabilir misin? (1.adımda 2 satırdan oluşan her satırda 4 kare olan bir örüntü çizdi. Her adımda ortaya 4'er tane kare ekleyerek ilerletti) Nasıl oluşturdun?

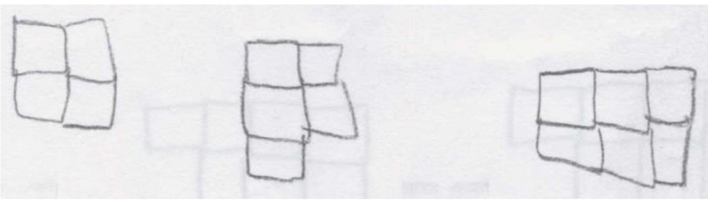
Kamil : Şimdi şöyle bunu oluştururken şöyle bir şey düşündüm. 1 tane sabit olması şart. Şu köşe kısımları. (Sağdaki ve soldaki 2'şer kareyi işaretledi) Sağda 2 sabit solda 2 sabit. Bakın bu yanlış oldu. (3. adımı gösterdi) düzelteyim. (2. adıma 4 tane ekleyerek oluşturdu.)

A : Şimdi bu bir örüntü mü?

Kamil : Evet öğretmenim 2'şer 2'şer artıyor ve sabitlerimiz var. Burda 4 artı 4 (1. adımı gösteriyor). Burda 8 artı 4 (2. adımı gösteriyor). Burda 12 artı 4 (3. adımı gösteriyor). 4'er 4'er artıyor.

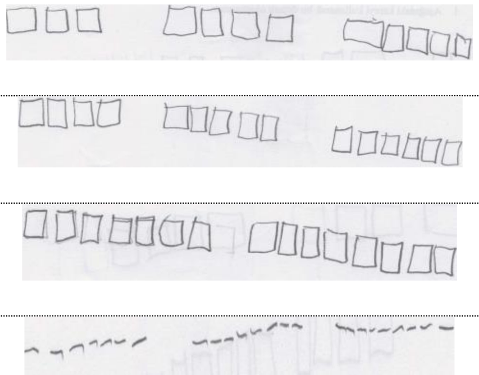
Diyalogda görüldüğü gibi, Kamil'in örüntü oluştururken her adımda sabit ve değişen nicelikleri dikkate aldığı anlaşılmaktadır. Ayrıca Kamil'in oluşturduğu örüntünün her adımında değişmeyen yani sabit kalan birimleri renklendirmesi de dikkat çekicidir. Buna göre Kamil'in oluşturduğu örüntüde başta ve sonda yer alan kare sayıları sabit değişmez iken, arada kalan kare sayıları (üst ve alt satır) iki yönde periyodik doğrusal genişleyerek değişmektedir. Kamil'den farklı bir örüntü oluşturması istendiğinde yukarıdakine benzer şekilde yine örüntünün fiziksel yapısına odaklı örüntü oluşturmuştur.

Diğer öğrencilerden farklı olarak Özlem Görsel 3.12'de görüldüğü gibi, birinci adımda çizdiği şekil biriminin bir parçasını kullanarak bir sonraki adıma eklemiş ve bütüne çakışık sabit değişen bir örüntü oluşturmuştur. Özlem örüntüsünü oluştururken ikinci adımda alta bir kare eklerken, üçüncü adımda sağa iki kare eklemiştir. Örüntünün fiziksel yapısına odaklanmadığı söylenebilir.



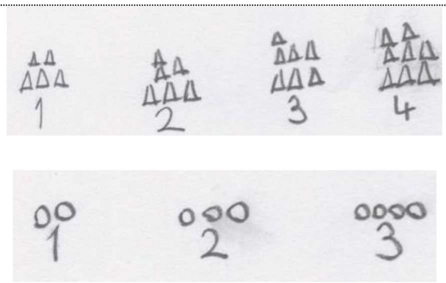
Görsel 3.12. *Özlem'in örüntü örneği*

Yinelemeli ilişkiye dayalı parça odaklı strateji kapsamında altı öğrenci (Y, E, M, U, S, O) bütünden ayrık sabit değişen şekil örüntüleri oluşturmuşlardır. Öğrencilerden farklı örüntü oluşturmaları istediğinde ise bazı öğrenciler oluşturdukları örüntülerin konumlarını değiştirmişlerdir. Bütünden ayrık stratejiyi kullanan öğrencilerden Mehmet, Sevim ve Uğur'un oluşturdukları örüntü örnekleri Görsel 3.13'te sunulmuştur.



Mehmet'in örnekleri

Sevim'in örneği

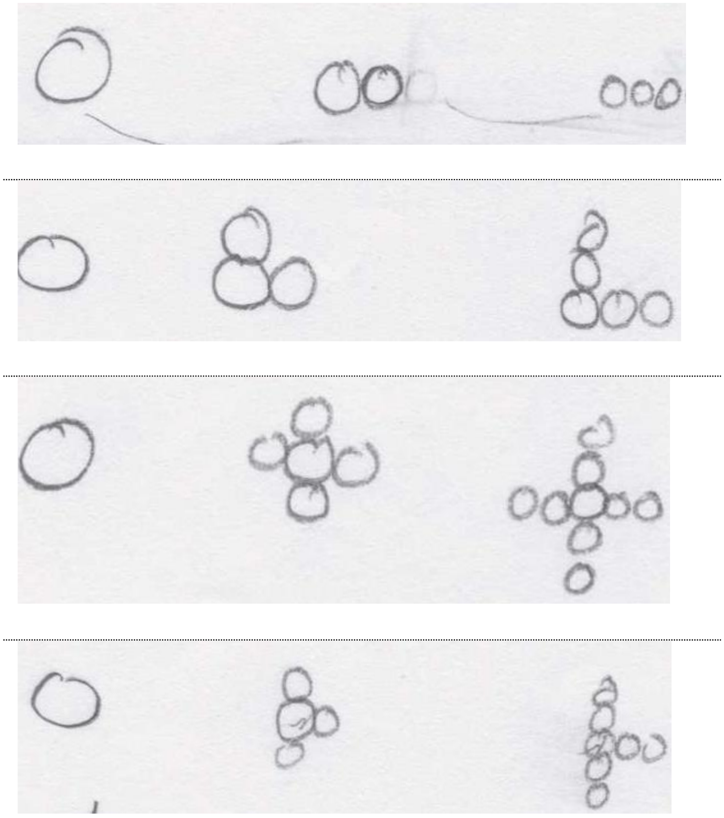


Uğur'un örnekleri

Görsel 3.13. *Mehmet, Sevim ve Uğur'un örüntü örnekleri*

Görsel 3.13'de görüldüğü gibi öğrencilerin yine sağa tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntüler oluşturduğu dikkati çekmektedir. Örüntüyü nasıl oluşturduğunu Uğur "belirli bir düzene göre gidiyor… İki, üç, dört şeklinde birer arttırarak ilerlettim." şeklinde açıklamıştır. Uğur ayrıca sağa tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntüler yerine farklı olarak üstte genişleyen üç yönde periyodik doğrusal sıralanan örüntü de oluşturmuştur.

Yinelemeli ilişkiye dayalı bütün odaklı strateji kapsamında ise bir öğrenci (O) örüntülerini oluştururken hem bütüne çakışık hem de bütünden ayrık olacak şekilde sabit değişen örüntüler oluşturmuştur. Örüntüleri oluştururken bir tane şekil birimi kullanarak başlamış, bu birim şekli sabit sayıda bir önceki adıma çakışık ya da ayrık olacak şekilde ekleyerek örüntüsünü devam ettirmiştir. Görsel 3.14'te Orhan'ın oluşturduğu örüntülerden örnekler görülmektedir.



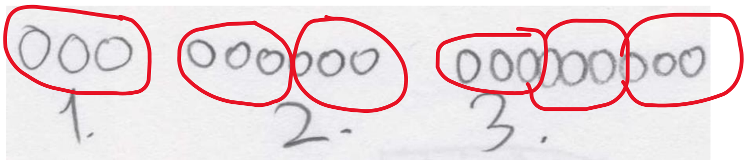
Görsel 3.14. *Orhan'ın örüntü örnekleri*

Görsel 3.14'te görüldüğü gibi, Orhan örüntülerini oluştururken yinelemeli ilişkiyi kullanmıştır. Her örüntüsünün fiziksel yapısı da farklılık göstermektedir. Orhan'ın oluşturduğu örüntülerden birincisi sağa tek yönde periyodik doğrusal, ikincisi iki yönde (üst kol ve sağ kol) periyodik doğrusal, üçüncüsü döngüsel (en içte kalan daireyi çevreleyecek şekilde sol kola, üst kola, sağ ve alt kola genişleme), dördüncüsü ise üç yönde (üst kol, alt kol, sağ kol) periyodik doğrusal sıralanarak büyümektedir.

Orhan örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A	: Peki bir örüntü daha yazabilir miyiz? (1,3,5,7 şeklinde olan sağ ve üst kola ilerleyen örüntü yazdı.) Bu bir örüntü mü?
Orhan	: Evet yukarı ve sağa 1 er artıyor. 1 tane de sabit.
A	: Peki güzel. Şimdi bir örüntü daha yazabilir miyiz? (1,5,9,13 şeklinde 4 kola ilerleyen örüntü yazdı.) Peki bu bir örüntü mü?
Orhan	: Evet her kola 1 er artıyor. 1 tane de sabit.
A	: Son bir tane daha örüntü yazabilir misin? (1,4,7,10 şeklinde 3 kola ilerleyen örüntü yazdı.) Bu sefer nasıl ilerlettin?
Orhan	: 1 yukarı 1 aşağı ve 1 sağa olacak.
A	: Peki teşekkürler.

Fonksiyonel ilişkiye dayalı bütün odaklı strateji kapsamında öğrenciler adım sayısı ve o adıma karşılık gelen terim sayısı ilişkisine dayalı bir kuralı kullanarak, bütünden ayrık sabit/artarak değişen şekil örüntüleri oluşturmuşlardır. Bütünden ayrık sabit/artarak değişen strateji kapsamında dört öğrenci (H, Y, E ve U) adım sayısı ve terim sayısı arasında bir ilişki belirleyerek örüntülerini oluşturmuş ve devam ettirmişlerdir. Bu süreçte öğrenciler öncelikle birinci adımda bir şekil birimi belirlemişler (ör., 3 daire) daha sonra bu şekil birimini tekrarlayarak, periyodik doğrusal örüntüler oluşturmuşlardır. Bu noktada öğrencilerin örüntünün fiziksel yapısından ziyade şekil sayısına odaklandıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden Yasemin'in örneği Görsel 3.15'te gösterilmiştir.



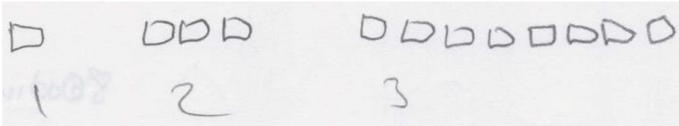
Görsel 3.15. *Yasemin'in örüntü örneği*

A : Bir örüntü daha oluşturabilir misin? (3, 6, 9, … şeklinde yatay daireleri kullanarak örüntü oluşturdu)

Yasemin : Burdaki kural 3 katı olacak (2. adımı yazarken söyledi. 3. adımı da bu kurala göre yazdı) 3'ün 3 katı 9 tane olacak.

Diyalogda da görüldüğü gibi, Yasemin örüntünün ikinci adımını çizerken görüşmeciye "Burdaki kural 3 katı olacak" şeklinde ifade etmesi adım sayısı ile ilişkili örüntünün genel kuralını belirleyip daha sonra şekle döktüğünü göstermektedir. Yarı bağımsız örüntü oluşturma sürecindeki gibi Yasemin'in adım sayısı ile ilişkilendirerek genel kuralı ifade etmesi de fonksiyonel ilişkiyi dikkate aldığının bir işaretidir. Ancak Yasemin örüntünün fiziksel yapısından ziyade şekil sayısına odaklandığı için tek yönde doğrusal genişleyen şekil dizisi oluşturmuştur. Yasemin'den farklı örüntüler oluşturması istendiğinde yukarıdakine benzer şekilde aynı stratejiyi kullanarak örüntüler oluşturmuştur.

Hakan ve Uğur'da örüntü oluştururken Yasemin gibi benzer şekilde hareket etmiştir. Ancak bu öğrenciler Yasemin'den farklı olarak artarak değişen örüntüler oluşturmuştur. Görsel 3.16'da Hakan'ın tek yönde periyodik doğrusal oluşturduğu örüntü örneği görülmektedir.



Görsel 3.16. *Hakan'ın örüntü örneği*

A : Şimdi bir örüntü daha oluşturabilir misin? (1,3,8 tane kareden oluşan bir örüntü çizdi)

A : Peki bu bir örüntü mü?

Hakan : Evet öğretmenim.

A : Nasıl ilerlettin?

Hakan : Öğretmenim örüntü değil. Örüntü değil ya.

A : Neden değil?

Hakan : Kurala uymadı.

A : Hangi kurala

Hakan : Adım sayısı çarpı adım sayı eksi 1, 1. adım uymadı.

A : Tamam nasıl yapabilirsin?

Hakan : İstediğim şekilde başlayabilirim değil mi öğretmenim.

A : Evet

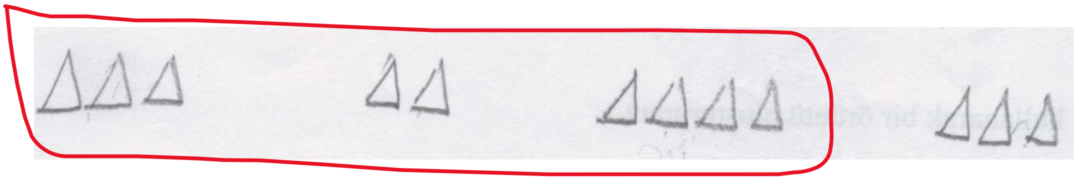
Hakan : İlk adım 0 olabilir mi?

A : Yap bakalım.

Hakan : 1. adımda 0 (Hiç kare çizmedi) 2. adımda (3 kare çizdi) 3. adımda (8 kare çizdi.) öğretmenim burda şey yaptım ben. Adım sayısı çarpı adım sayı eksi 1.

Diyalogda görüldüğü gibi, Hakan yazdığı ilk örüntü örneğinin "Adım sayısı çarpı adım sayı eksi 1." kuralına uymadığını fark etmiş ve yeniden kurala uyacak şekilde şekil çizmeye çalışmıştır. Ayrıca kurala uydurmak için birinci adımı 0 olacak şekilde ayarlamıştır. Hakan burada örüntünün fiziksel yapısına odaklanmadan belirlediği kurala uygun sayıda şekil dizisi oluşturmuş, bu nedenle sağa tek yönde doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Hakan'dan farklı örüntüler oluşturması istendiğinde yukarıdakine benzer şekilde bir örüntü daha oluşturmuştur.

Öğrencilerden sadece Esin tekrarlanan şekil örüntüsü oluşturmuştur. Görsel 3.17'de görüldüğü gibi Esin'in örüntüsü üç adımda bir tekrar eden yani tekrar birimi 3 olan bir örüntüdür. Kendisinden farklı örüntüler oluşturulması istendiğinde sabit farkla ilerleyen bütünden ayrık örüntüler oluşturmuştur.



Görsel 3.17. *Esin'in örüntü örneği*

Esin örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A : …Esin kendin bir örüntü oluşturabilir misin? (Tekrarlı örüntü yazdı. Üçgenlerden oluşan 3,2,4,3,2,4…) Bu bir örüntü mü?

Esin : Evet öğretmenim. 3,2,4,3,2,4 (adımları göstererek söyledi) Tekrar ediyor.

3.2. Öğretim Dizileri

Ön klinik görüşmelerden sonra öğretim dizileri iki etapta gerçekleştirilmiştir. Birinci etap öğretim dizisinin sonunda öğrencilerdeki gelişiminin gözlenmesi için ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiş ardından ikinci etap öğretim dizisine geçilmiştir. Bu sürecin sonunda da son klinik görüşmeler yapılmıştır. Öğretim dizilerinde ve klinik görüşmelerde veri toplamayı kolaylaştırmak için öğrencilere ders/görüşme sonunda geri alınmak üzere yeterli sayıda kağıt verilmiş, kamera ile ses ve görüntü kaydı yapılmıştır.

3.2.1. Birinci öğretim dizisinden elde edilen bulgular

Ön klinik görüşmelerde öğrencilerin şekil örüntüsü oluştururken yinelemeli ilişkiye ya da bir kurala dayalı çoğunlukla sabit değişen genellikle de sabit farkı 1 ya da 2 olan örüntüler oluşturdukları görülmüştür. Ayrıca oluşturdukları şekil örüntülerinde şeklin fiziksel yapısından ziyade şekil sayısına odaklanarak şekilleri yatay ya da dikey, bütüne çakışık ya da ayrık sağa genişleyen şekilde doğrusal sıraladıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin bu stratejileri kullanarak örüntü oluşturmaları hem fonksiyonel düşünmelerine hem de örüntüleri genellemelerine engel teşkil etmektedir. Bu bağlamda birinci etap öğretim dizisi planlanırken bu durumlar göz önüne alınmıştır.

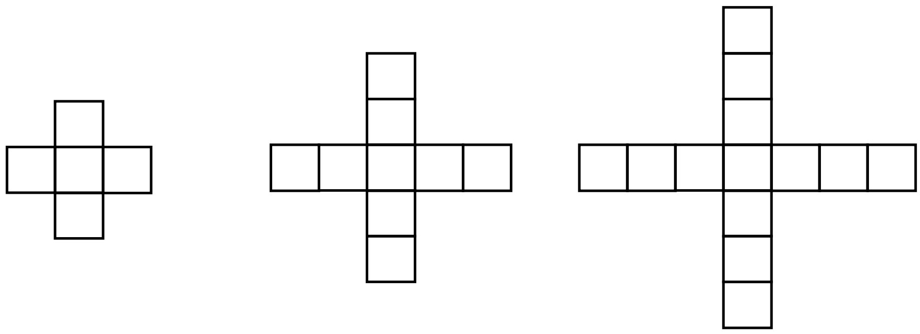
3.2.1.1. *Birinci hafta*

Birinci hafta öğretimler için öncelikle aşağıda sunulan iki amaç belirlenmiştir:

1. Öğrencilerin bir şekil örüntüsünün fiziksel yapısını şekilsel muhakemeyi kullanarak tanımlamalarını sağlamak.

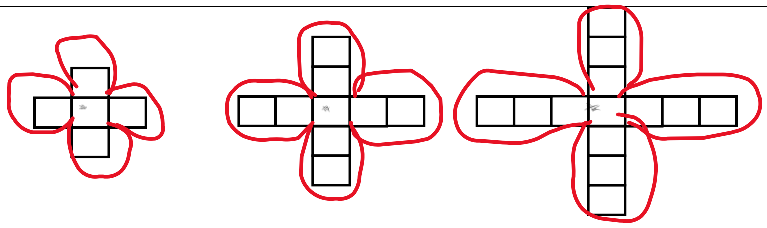
2. Öğrencilerin bir şekil örüntüsünde görünen farklı yapıları anlamalarını sağlamak.

Öğretim dizisinin başında öncelikle verilen bir örüntüyü genellemek, kural oluşturmak ya da değişkenlerle çalışmak amaçlanmamıştır. Bunun yerine önce öğrencilerin verilen örüntünün nasıl genişlediğini/büyüdüğünü farklı yollarla görmeleri sağlanmaya çalışılmıştır. Bunun için de genişlemenin/büyümenin farklı yollarla görülebildiği Şekil 3.2'de görülen bir örüntü kullanılmıştır.



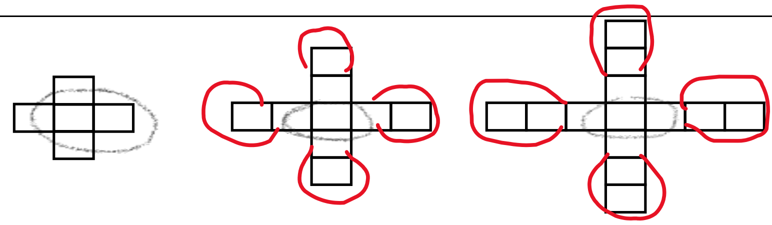
Şekil 3.2. *Öğretim sürecinde kullanılan şekil örüntüsü*

Şekil 3.2'de verilen örüntünün fiziksel yapısı incelenirken örüntünün nasıl büyüdüğüne/genişlediğine ilişkin farklı yapılar bulunmaya çalışılmış ve ele alınan yapılarda sabit ya da değişen nicelikler belirlenmiştir. İncelenen yapılar Şekil 3.3'te sunulmuştur.



Adım sayısı	İlişki	Toplam Kare sayısı
1	4.1+1	5
2	4.2+1	9
3	4.3+1	13
37	4.37+1	149

Şekil 3.3. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*



Adım Sayısı	İlişki	Toplam Kare Sayısı
1	5+4.1	5
2	5+4.2	9
3	5+4.3	13
37	5+4.36	149

Şekil 3.3. (Devam) *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*

Şekil 3.3'te görüldüğü gibi, birinci yapıda şeklin ortasında kalan kare sayısı sabit kalmak üzere bu kareyi çevreleyen karelerin sayısı her adımda değişmektedir. Birinci adımda ortada yer alan kareyi dört tane kare çevrelemiştir. Toplam kare sayısı 4.1+1 dir. İkinci adımda 4.2+1, üçüncü adımda ise 4.3+1 dir. Diğer yandan birinci adımda toplamda beş tane kare vardır. Birinci adımdaki kare sayısının her adımda sabit kaldığı düşünülürse, her bir kola eklenen kare sayıları her adımda değişmektedir. İkinci adımda birinci adımdaki şeklin her bir koluna dört kare eklenmiştir. Bu durumda toplam kare sayısı 5+4.1 dir. Üçüncü adımda ise her bir kola iki şer kare eklenmiş ve toplam kare sayısı 5+4.2 dir. Bu şekilde örüntünün ilk üç adımı irdelendikten sonra her iki yapıya bağlı kalarak uzak bir adımdaki (37. adım) kare sayısı hesaplanmıştır.

Bu çalışmadan sonra aşağıda verilen üçüncü amaç belirlenmiştir:

3. Yarı bağımsız yani sadece bir adımı verilen örüntüler oluşturmak

Bu bağlamda ön klinik görüşmede yarı bağımsız örüntü oluşturma görevi kullanılarak öğrencilere birinci adımı bir kare olan şekil verilerek bu şekli örüntü oluşturacak şekilde devam ettirmeleri istenmiştir. Öğrenciler ön klinik görüşmelerde olduğu gibi benzer davranışlar sergilemişler ve yatay ya da dikey yönde doğrusal sıralanan şekil dizisi oluşturmuşlardır. Araştırmacının sorgulamasıyla oluşan yapının örüntü olup olmadığı tartışılmıştır. Sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A : Bu bir örüntü mü?

Tüm sınıf : Evet

A : Örüntü olduğunu nasıl anladınız?

Yasemin : Adım sayısı kadar kare var.

A : Arkadaşınıza katılıyor musunuz?

Tüm Sınıf : Evet

A : Bir sonraki adımda kaç kare var?

…

A : 100. Adımda kaç kare var?

Tüm sınıf : 100

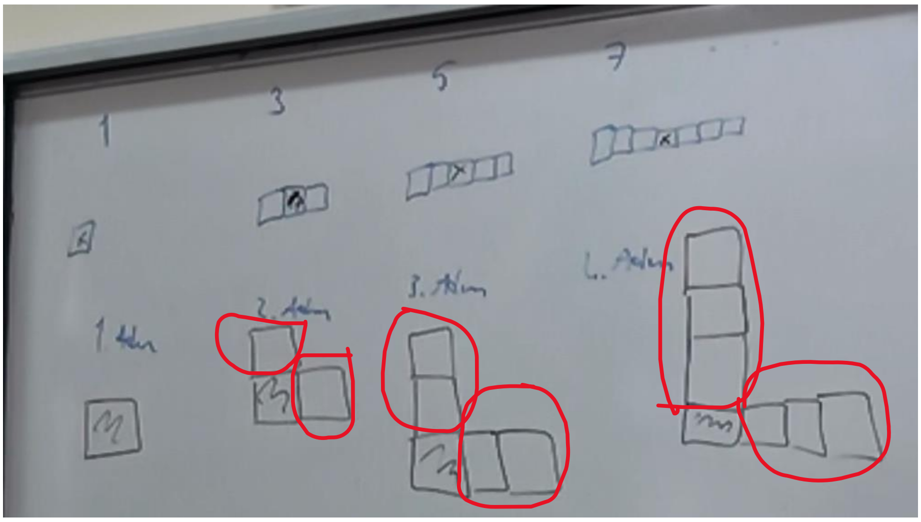
A : Herhangi bir adım sayısını veren kural yazabilir misiniz? (Araştırmacı tüm sınıfa süre veriyor. Aralarda dolanarak öğrencilerin kağıtlarını inceliyor.)

Uğur : Adım sayısı kadar kare var.

Öğrenciler birinci adımı bir kare ile başlayan örüntüyü birer birer artırarak artık prototip olan ve bütüne çakışık sağa tek yönde doğrusal olarak devam ettirmişler ve kolayca genellemişlerdir. Öğrencilerde devam eden bu algının yıkılması amacıyla araştırmacı tarafından örüntü oluşturma bağlamında dördüncü bir amaç belirlenmiştir:

4. Sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne dönüştürme ve örüntü genellemede farklı yapıları karşılaştırma

Bu amaç kapsamında öğrencilere ilk önce terimler arası sabit farkı 2 olan 1, 3, 5, 7 … şeklinde bir sayı örüntüsü verilmiş daha sonra bunu şekle dökmeleri istenmiştir. Öğrencilerden bir kısmı yine bütüne çakışık sağa tek yönde periyodik doğrusal genişleyen şekil örüntüsü oluştururken, bazı öğrenciler farklı yapılarda örüntü oluşturmuşlardır. Bu öğrenciler arasından seçilen Orhan ve Esin'in örnekleri Görsel 3.18'de görüldüğü gibi tahtaya yansıtılmış ve sınıf tartışmasına sunulmuştur.



Görsel 3.18. *Sayısal temsilden görsel temsile geçiş örnekleri*

Görsel 3.18'de görüldüğü gibi, Orhan tek yönde sağa periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluştururken, Esin iki yönde (üst kol, sağ kol) periyodik doğrusal sıralanan bir örüntü oluşturmuştur. Sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A : Orhan gel bakalım. (Sağa genişleyen doğrusal örüntüyü çizdi).

A : Peki başka Esin sen gel. Seninkini görelim. (L şeklinde ilerleyen bir örüntü çizdi. Ortadaki kareleri sabitledi.)

A : Peki yukarıdakinden (Orhan'ın örüntüsünü göstererek) farkı ne?

Hakan : Sayılar aynı fakat şekiller farklı.

A : Hangi örüntüde 10. adımı hesaplamak daha kolay olur sizce?

Uğur : Tek tek hesaplayarak yapabilir miyim? (Orhan'ın örüntüsünü gösterdi).

A : Peki böyle uzun sürmez mi? Kolay yol yok mu?

Diyalogda görüldüğü üzere, araştırmacının "… Hangi örüntüde 10. adımı hesaplamak daha kolay olur sizce?" ifadesi genellemede şeklin fiziksel yapısının önemini vurgulaması açısından önemlidir. Verilen sayı kadar şeklin doğrusal sıralandığı birinci örüntüyü devam ettirmeye çalışan Uğur'un "Tek tek hesaplayarak yapabilir miyim?" sorusu ise örüntünün fiziksel yapısının 10. adımını ya da uzak adımları hesaplamada etkili olmadığını göstermektedir. Nitekim Esin'in oluşturduğu L örüntüsünü devam ettiren diğer öğrencilerin örüntünün fiziksel yapısını daha kolay analiz ederek 10. adımı hesapladıkları görülmüştür. L örüntüsü yapı olarak parçalamaya ve parçaları adım sayısı ile ilişkilendirmeye diğer örüntüden daha uygundur. Bu bağlamda öğrenciler L örüntüsünü Görsel 3.18'deki bakış açısıyla parçalayarak hareket etmiş ve 10. adımı hesaplamışlardır.

Bu süreçlere ilişkin sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A : Peki Esin gel bakalım.

Esin : (Tahtada alttaki örüntüde 4. adımı göstererek) öğretmenim burada (örüntünün sağ yatay kolunu göstererek) adım sayısının 1 eksiği kadar var burada (örüntünün üst dikey kolunu göstererek) da adım sayısının 1 eksiği kadar var. Bu yüzden 10. Adımda 9 burda 9 burda 1 de burda toplam 19 tane olacak.

A : Doğru mu oldu bu arkadaşlar.

Tüm sınıf : Evet.

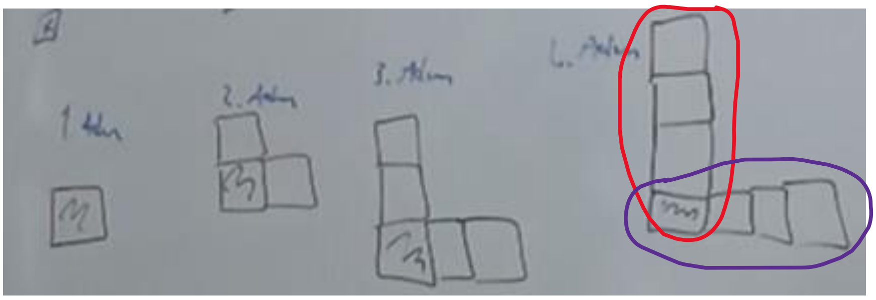
Orhan : Öğretmenim ben başka bir şekilde buldum.

A : Nasıl buldun?

Orhan	: Öğretmenim ben 6. adıma göre yaptım. (Kendi kağıdına bakarak) 6. adımdaki kare sayısını saydım. Kaç tane 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 tane çıktı. 6 ile 2'yi çarpınca 12. 12'den 1 eksilttim 11 çıkıyor. Öğretmenim 10. adımda da 10 ile 2'yi çarptım 20 sonra 1 eksilttim 19.
A	: Peki bu bulduğun kuraldan emin misin?
Orhan	: Evet çünkü 4. adımda tutuyor. Oluyor öğretmenim.
A	: Ne dersiniz arkadaşlar?
Tüm sınıf	: Evet öğretmenim oluyor.

Diyalogda görüldüğü gibi, iki öğrenci aynı örüntüyü farklı şekillerde analiz ederek 10. adımda yer alan kare sayısını hesaplayabilmişlerdir. Esin'in birinci adımdaki kareyi renklendirmesi örüntüde sabit ve değişen niceliklere vurgu yapmaktadır. Esin birinci adımda verilen kareyi sabitleyerek sağ yatay kol ve üst dikey kola genişlettiği şekli adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Esin örüntünün fiziksel yapısını; sabit kalan değişmeyen, değişen üst dikey kol ve sağ yatay kol şeklinde üç parçada yani üç boyutlu düşünerek analiz etmiştir.

Orhan ise aynı örüntüye farklı bir bakış açısıyla yaklaşmış ve örüntüyü Görsel 3.19'da görüldüğü gibi, dikey üst kol ve yatay sağ kollardaki parçaları dikkate alarak bunları adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. 10. adımı ise 2.10-1 şeklinde hesaplamıştır.



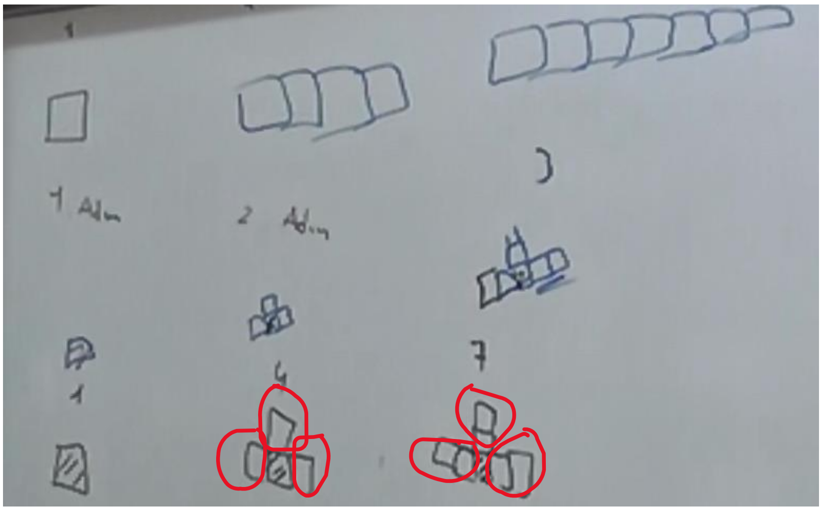
Görsel 3.19. *Orhan'ın L örüntüsünün fiziksel yapısının analizi*

Orhan'ın örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken iki boyutlu düşünmesi ve bu bakış açısıyla köşede kalan çakışık kareyi dikkate alması da ayrıca önemlidir.

Öğrencilerden bu çalışma sonunda örüntüyü genellemeleri ve kuralı yazmaları istenmiştir. Öğrenciler örüntüyü genellerken yarı sembolik olarak tanımlanan yani harfli ifade kullanmak yerine kuralı sözel olarak "adım sayısı eksi bir artı adım sayısı eksi bir artı bir" ve "iki tane adım sayısı eksi bir" (Görsel temsilden sözel temsile geçiş) şeklinde ifade etmişlerdir.

Öğrencilere şekil örüntüsünün fiziksel yapısına bağlı olarak farklı genellemelere ulaşabilmeleri için bu sefer sabit farkı 3 olan 1, 4, 7, … şeklinde bir sayı örüntüsü verilmiş ve buna göre şekil örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Bu bağlamda öğrenciler farklı yapıda iki şekil örüntüsü oluşturabilmiştir. Bu örüntülerden biri yine prototip olan ve bütüne çakışık periyodik doğrusal genişleyen şekil örüntüsü olmuştur.

Farklı iki yapıda örüntü oluşturan öğrencilerden Sevim ve Orhan'ın örüntüleri sınıf tartışmasına sunulmuştur. Görsel 3.20'de oluşturulan örnekler gösterilmiştir.



Görsel 3.20. *Sayısal temsilden görsel temsile geçiş örnekleri*

Görsel 3.20'de görüldüğü üzere, Sevim şekil örüntüsünü oluştururken verilen sayılar kadar kareyi bütüne çakışık doğrusal genişleyen şekilde sıralarken, Orhan farklı bir yapıda üç yönde (sol kol, üst kol, sağ kol) periyodik doğrusal sıralanan bir örüntü oluşturmuş ve örüntüsünde birinci adımda yer alan kareyi renklendirmiştir. Diğer adımları oluştururken de renklendirdiği karenin sağ, sol ve üst kollarına renksiz kareler eklemiştir. Bu durumda Orhan'ın örüntüsünde sabit ve değişen nicelikleri dikkate aldığı söylenebilir. Sevim'in ve Orhan'ın oluşturduğu iki örüntü sınıfa sunularak örüntülerin fiziksel yapılarının örüntü genellemedeki etkisi tartışılmıştır. Tartışmadan bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A	: Şimdi kuralı söylemeden önce şimdi sorayım 10. adımda kaç tane kare vardır. Haydi herkes yazsın kağıtlarına.
Sevim	: 4. adımda 3 solda 3 sağda 3 yukarıda 1 de sabit olacak.
Esin	: 5. adımda 4 solda 4 sağda 4 yukarıda 1 de sabit olacak.
A	: Evet Yasemin sen ne diyorsun 10. adıma?

Yasemin : 9 tane solda 9 tane sağda 9 tane de yukarıda 1 tane de sabit

A : Evet Orhan sen diyorsun?

Orhan : Öğretmenim adım sayısından 1 çıkarttım 3 ile çarptım 1 de sabit ekledim.

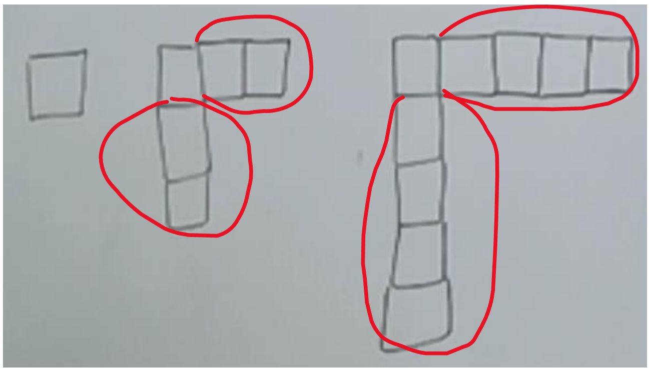
A : Evet gayet güzel. Yukarıdaki şekle göre bulmak zor oldu galiba değil mi?

Tüm sınıf : Evet bunda kolayca bulundu.

Diyalogda görüldüğü gibi Sevim, Esin ve Yasemin Orhan'ın oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısından hareketle dört boyutlu düşünerek (ör., 4. adım için 3+3+3+1) toplamsal bir ilişki (yani 3.3 demek yerine 3+3+3 şeklinde bir ilişki) kurmuşlardır. Orhan ise çarpımsal ilişki (yani (adım sayısı-1).3+1 şeklinde bir ilişki) kurarak iki boyutta düşünerek örüntüyü genellemiştir.

İlk haftanın son örneği olarak öğrencilere biraz daha zorlayıcı sabit farkı 4 olan 1, 5, 9, … şeklinde bir sayı örüntüsü verilerek, bir şekil örüntü oluşturmaları istenmiştir. Bir önceki örnekte olduğu gibi öğrencilerin bazıları prototip olan bütüne çakışık periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuşlardır. Ancak bu örüntünün genellemesinin zor olduğunu fark eden öğrenciler farklı yapılar da oluşturmaya çalışmışlardır.

Araştırmacı önce Görsel 3.21'de Özlem'in iki yönde (alt kol, sağ kol) periyodik doğrusal sıralayarak oluşturduğu örüntüyü tahtaya yansıtmış ve öğrencilerden bu örüntüyü genellemelerini istemiştir.



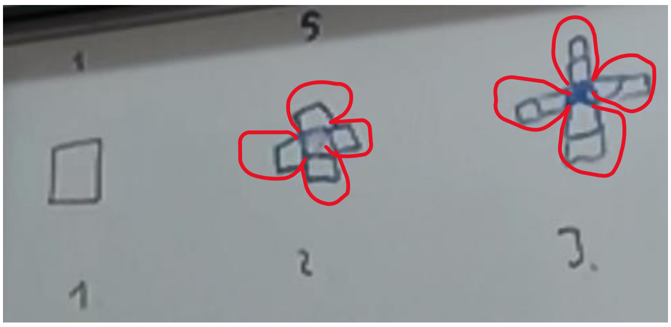
Görsel 3.21. *Özlem'in oluşturduğu örüntü örneği*

Ön klinik görüşmede geçerli bir şekil örüntüsü oluşturamayan Özlem örüntüsünü oluştururken "altta ve sağa ikişer kare" eklediğini ifade etmiştir. Yapılan sınıf tartışmasında öğrenciler bu şekil örüntüsünü yakın ve uzak adıma devam ettirememişler aynı zamanda genelleyememişlerdir. Çünkü Özlem'in oluşturduğu örüntüde vurgu bir önceki adıma eklenen kare sayısıdır. Sabit ve değişen niceliklere vurgu yapılmamıştır. Bu düşünce yapısıyla örüntüyü uzak adıma devam ettirmek ya da genel kurala ulaşmak diğerine göre daha zordur. Dolayısıyla aşağıdaki üçlü tabloda verildiği gibi sayısal ilişkiler kurulması gerekmektedir. Öğrencilere ilk etapta bu şekilde sayısal ilişkileri göstermek zor olacağından araştırmacı bu tür örnekleri daha sonraki öğretim dizisine bırakmıştır.

Adım sayısı	**İlişki**		**Terim sayısı**
1	1	1+2.2.0=1+4.0	1
2	1+2+2=1+2.2	1+2.2.1=1+4.1	5
3	1+4+4=1+2.4	1+2.2.2=1+4.2	9
4	1+6+6=1+2.6	1+2.2.3=1+4.3	13
43		1+4.(43-1)	169
n		1+4.(n-1)	4n-3

Şekil 3.4. *Özlem'in oluşturduğu örüntünün tablo temsili*

Araştırmacı daha sonra Görsel 3.22'de gösterilen Kamil'in döngüsel sıralayarak oluşturduğu örüntüyü tahtaya yansıtmış ve öğrencilerden bu örüntüyü genellemelerini istemiştir. Kamil örüntüsünü oluştururken her bir kola birer kare ekleyerek örüntüsünü genişlettiğini ifade etmiştir. Kamil oluşturduğu örüntüde en içte kalan kareyi de renklendirmiştir.



Görsel 3.22. *Kamil'in oluşturduğu örüntü örneği*

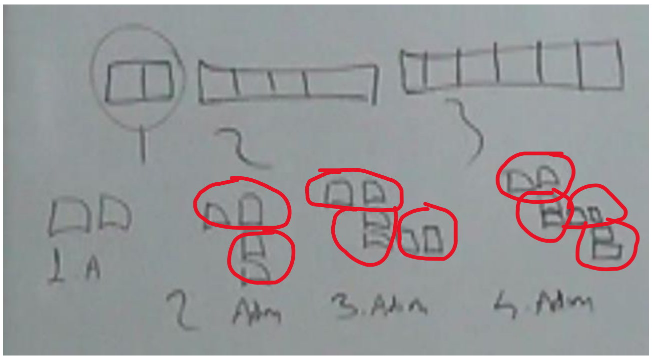
Sınıf tartışmasında araştırmacı öğrencilere hangi örüntüyü genellemenin daha kolay olduğunu sormuştur. Öğrenciler Kamil'in örüntüsünde şeklin parçalandığında, parçaların adım sayısı ile olan sayısal ilişkisinin daha net fark edildiğini belirtilmişlerdir. Kamil'in oluşturduğu örüntüde birinci adımdaki kare sayısı sabit kalmak üzere bu karenin dörtkenarına eklenen kare sayıları her adımda değişmektedir ve bu değişimin adım sayısı ile ilişkilendirilmesi daha kolaydır. Çünkü değişen kare sayıları adım sayısının bir eksiği kadardır. Öğrencilerde bu örüntüyü genellerken bazı öğrenciler toplamsal, bazı öğrenciler ise çarpımsal ilişki kurarak örüntünün kuralını yarı sembolik olarak ifade etmişlerdir. Örneğin örüntünün kuralını Orhan iki boyutlu düşünerek “adım sayısının bir eksiği çarpı 4, artı 1”, Yasemin ise beş boyutta düşünerek “ortadaki kare 1 tane buna 4 tane adım sayısının bir eksiği kadar ekleniyor” şeklinde açıklamışlardır.

3.2.1.2. *İkinci hafta*

Birinci hafta ilk adımı bir tane şekil birimi ile başlayan yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri üzerinde çalışılmıştı. İkinci haftada ise aşağıdaki amaç belirlenmiş ve öğretimler buna göre planlanmıştır:

1. Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında ilk adımı 1’den fazla sayıda şekilden oluşan şekil birimi kullanılarak örüntü oluşturmak

Bu bağlamda öncelikle birinci adımı bitişik iki kareden oluşan şekil birimi verilerek öğrencilerden sabit değişen örüntü oluşturmaları istenmiştir. Tüm öğrenciler örüntü oluşturmuş ve bunlar arasından iki tanesi seçilerek tahtaya yansıtılmıştır. Görsel 3.23’de Hakan’ın ve Kamil’in oluşturdukları bu örüntüler gösterilmiştir.



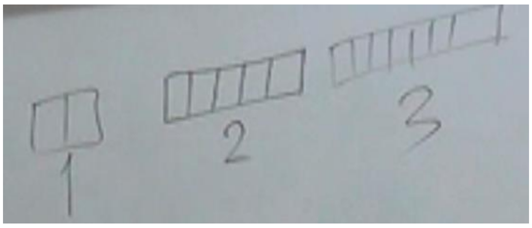
Görsel 3.23. *Hakan’ın ve Kamil’in örüntü örnekleri*

Görsel 3.23’de görüldüğü gibi, Hakan prototip olan bütüne çakışık sağa tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluştururken, Kamil bütünden ayrık periyodik doğrusal olamayan (iki aşağı, iki sağa, iki aşağı, iki sağa…) bir örüntü oluşturmuştur. Bu iki örüntü karşılaştırılarak örüntülerin nasıl oluşturulduğu ve hangi durumda örüntünün uzak bir adımdaki kare sayısının ya da örüntünün genel kuralının daha kolay hesaplanabileceği tartışılmıştır. Sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A	: Peki hangi örüntüde kuralı bulmak daha kolay?
Uğur	: Bunda (alttaki örüntüyü işaret ederek) daha kolay.
A	: (Hakan parmak kaldırdı) evet Hakan söyle
Hakan	: Kural söyleyeyim mi?
A	: Evet buyur.
Hakan	: Adım sayısı artı adım sayısı
A	: Olur mu?
Tüm Sınıf	: Evet olur.
Uğur	: Zaten adım sayısı artı sayısı adım sayısı çarpı 2 demek.

Diyalogda görüldüğü üzere öğrencilerden Hakan ve Uğur örüntüyü genellemişlerdir. Hakan'ın yarı sembolik yani sözel olarak "adım sayısı artı adım sayısı" şeklinde toplamsal ilişki kurarak ifade ettiği genellemeyi, Uğur 2'nin katlarından hareketle yarı sembolik "adım sayısı çarpı 2" şeklinde çarpımsal ilişki kurarak açıklamıştır. Kamil'in oluşturduğu periyodik doğrusal olamayan örüntüde 2 kat ilişkisi daha kolay görüldüğü için öğrencilerin bu örüntüyü genellemeleri de kolay olmuştur.

Bu örüntü oluşturma örneklerinin ardından Yasemin tahtaya çıkarılarak örüntüsünü çizmesi istenmiş ve nasıl oluşturduğu sorulmuştur. Yasemin "Ben şöyle yaptım öğretmenim. Adım sayısı çarpı adım sayısı artı 1 yaptım. Ona göre yazdım. (Kare sayılarını 2,5,10 alarak tek yönde periyodik doğrusal sıralanan kareler çizdi)" şeklinde açıklamıştır. Görsel 3.24'te Yasemin'in oluşturmuş olduğu örüntü görülmektedir.



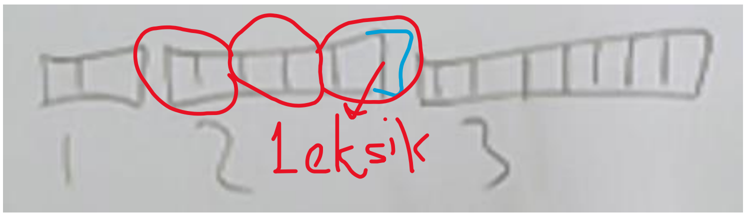
Görsel 3.24. *Yasemin'in örüntü örneği*

Yasemin ön klinik görüşmede olduğu gibi örüntüsünü oluştururken bir kural belirlemiş, bu kurala dayalı olarak da her adımdaki kare sayısını şekle dökmüştür. Ancak Görsel 3.24'te görüldüğü gibi Yasemin artarak değişen bir örüntü oluşturmuş ve belirlediği kuralı örüntünün fiziksel yapısına dayandıramamıştır.

Görsel 3.25'te görüldüğü gibi, Yasemin ile benzer yapıda örüntü oluşturan Hakan ise "adım sayısının 3 katı eksi 1" kuralını kullanarak önce sayıları belirlediğini ve o sayıda kareyi periyodik doğrusal sıralayarak örüntüsünü oluşturduğunu açıklamıştır.

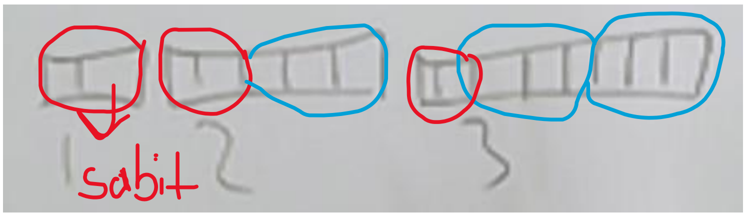
Görsel 3.25. *Hakan'ın örüntü örneği*

Hakan'ın örüntüsü sınıf tartışmasına sunulmuş ve örüntünün fiziksel yapısına odaklanmaları istenmiştir. Tartışmalarda Orhan "Öğretmenim şöyle olabilir. İkinci adımı üç ile çarpıyoruz bir eksiği. 3. adım üç kere üç dokuz bir eksiği" açıklamasıyla Görsel 3.26'da sunulan şekliyle birinci adımdaki şekil birimini baz alarak, bu birimin katlarına odaklanmış ve adım sayısı ile ilişkilendirmiştir.



Görsel 3.26. *Orhan'ın örüntünün fiziksel yapısının analizi*

Görsel 3.26'de görüldüğü gibi, Orhan'ın örüntünün fiziksel yapısından hareketle iki boyutlu düşünerek (ör., 2. adım için 3.2-1) kuralı açıkladığı görülmektedir.



Görsel 3.27. *Yasemin'in örüntünün fiziksel yapısının analizi*

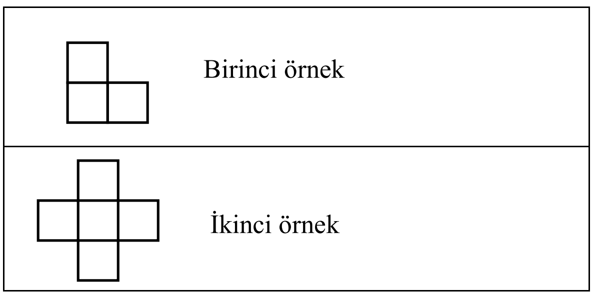
Diğer yandan Yasemin ise başta farklı bir bakış açısıyla oluşturduğu sınıf tartışması sırasında örüntünün 10. adımını "9 tane 3 olacak 2 de sabit 27. kural adım sayısı eksi 1 çarpı 3 artı 2 olacak" şeklinde açıklamıştır. Yasemin Görsel 3.27'deki bakış açısıyla hareket ederek örüntünün 10. adımını hesaplamıştır. Örüntüyü genellerken de iki boyutlu düşünerek ilk adımdaki kare sayılarını sabit, değişmez olarak almış, daha sonra diğer adımlardaki kareleri ise parçalara ayırıp (üç kare) adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Örüntüyü genellerken kuralı da yarı sembolik olarak "adım sayısının bir eksiği çarpı üç artı 2" şeklinde ifade etmiştir. Her iki kuralı ifade eden Yasemin ve Orhan'ın çarpımsal ilişkiyi kullandığı görülmektedir.

3.2.1.3. *Üçüncü hafta ve dördüncü hafta*

Üçüncü ve dördüncü hafta öğretim planlanırken, ikinci haftada olduğu gibi yine yarı bağımsız örüntü oluşturma görevlerine devam etmeye karar verilmiş ancak ikinci haftadan farklı olarak aşağıda sunulan amaç belirlenmiştir:

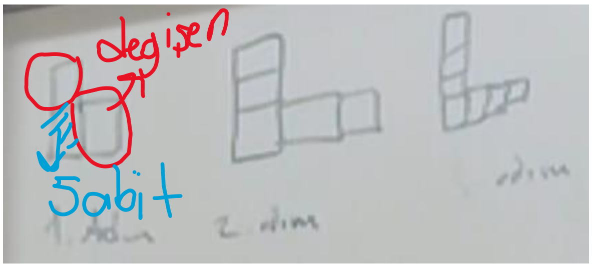
1. Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında ilk adımı 2'den fazla sayıda şekilden oluşan şekil birimi kullanılarak örüntü oluşturmak

Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevlerinin devamında ise ilk adımı 3 tane ve ilk adımı 5 tane kareden oluşan şekil birimleri kullanılarak öğrencilerden örüntü oluşturacak şekilde şekilleri devam ettirmeleri istenmiştir. Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri Şekil 3.5'te sunulmuştur.



Şekil 3.5. *Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri*

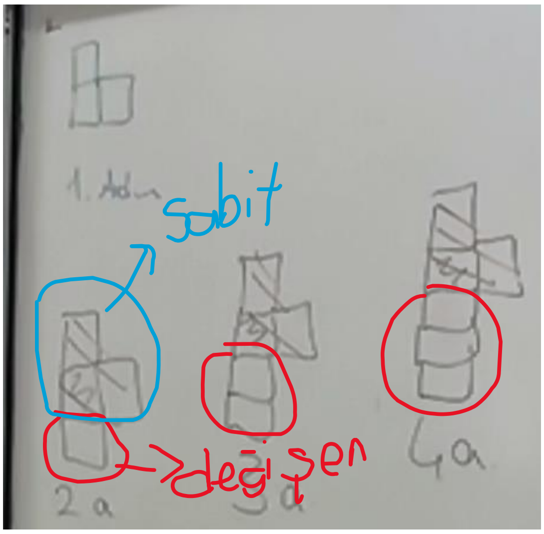
Şekil 3.5'te sunulan birinci örnek üzerinden Hakan, Esin, Kamil ve Uğur'un oluşturdukları örüntüler sınıf tartışması için tahtaya yansıtılmıştır. Hakan'ın iki yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntü örneği Görsel 3.28'te gösterilmiştir.



Görsel 3.28. *Hakan'ın örüntü örneği*

Hakan bir önceki adımda yer alan şeklin yatay ve dikey kollarına birer kare ekleyerek örüntüsünü oluşturduğunu açıklamıştır. Öğrencilerden Hakan'ın oluşturmuş olduğu örüntüyü yakın ve uzak adıma devam ettirmeleri ve kuralını yazmaları istenmiştir. Bu süreçte öğrenciler daha önce karşılaştıkları L örüntüsünün fiziksel yapısını Görsel 3.28'teki gibi analiz ederek yakın ve uzak adıma devam ettirmişler, aynı zamanda kolayca genellemişlerdir. Genelleme sonucunda çarpımsal ilişkinin görüldüğü ikinci haftaki açıklamalara benzer "adım sayısının iki katı artı bir" gibi genelleme ifadeleri ortaya çıkmıştır. Yarı sembolik olarak ifade ettikleri bu genellemeyi öğrenciler dikey ve yatay koldaki büyümeyi adım sayısı ile ilişkilendirerek ve köşede kalan kare sayısını sabitleyerek gerçekleştirmişlerdir.

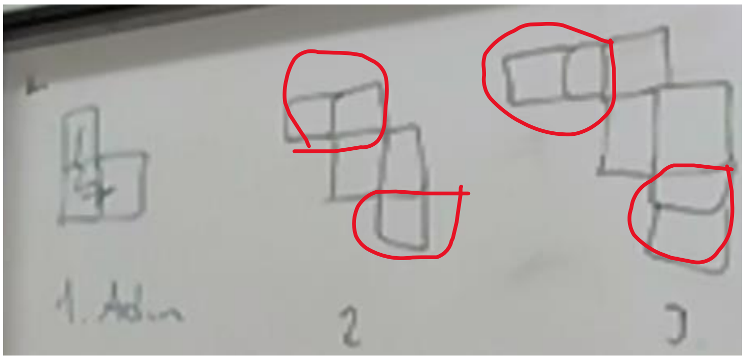
Hakan'ın oluşturduğu örüntü dışında farklı örüntü oluşturan Esin'in örneği de Görsel 3.29'da gösterilmiştir.



Görsel 3.29. *Esin'in örüntü örneği*

Görsel 3.29'da görüldüğü gibi Esin örüntüsünü ilk adımdaki şekil biriminin altına tek yönde periyodik doğrusal olarak oluşturmuştur. Bunu "üç tane karenin altına birer kare ekledim ve devam ettirdim” şeklinde açıklamıştır. Esin örüntüsünü oluştururken birinci adımdaki şekil birimini renklendirmiş ve her adımda sabit değişmez olarak kabul etmiştir. Esin’in oluşturduğu örüntü sınıf tartışmasına açılmış ve öğrenciler örüntüdeki değişen ve sabit kalan nicelikleri adım sayısı ile ilişkilendirerek örüntüyü yakın ve uzak adıma kolayca devam ettirmişlerdir. Bu süreçte Esin’in birinci adımdaki üç kareyi her adımda renklendirmesi ve örüntüyü alta birer kare ekleyerek genişletmesi öğrencilerin değişen kare sayılarına odaklanmalarını sağlamış ve bunları adım sayısı ile ilişkilendirmeleri kolay olmuştur. Örneğin Uğur, Esin’in örüntüsünü genellerken yarı sembolik olarak kuralı “adım sayısı eksi bir artı üç” şeklinde ifade etmiştir.

Kamil ise farklı bir bakış açısıyla iki yönde (yatay sola doğru, dikey aşağı doğru genişleyen) periyodik doğrusal Görsel 3.30’da sunulan örüntüyü oluşturmuştur. Kamil örüntüsünde ilk adımı renklendirmiştir. Kamil örüntüsünü oluştururken birinci adımdaki şekil biriminin sol üst ve sağ alt köşelerine birer kare eklediğini açıklamıştır.

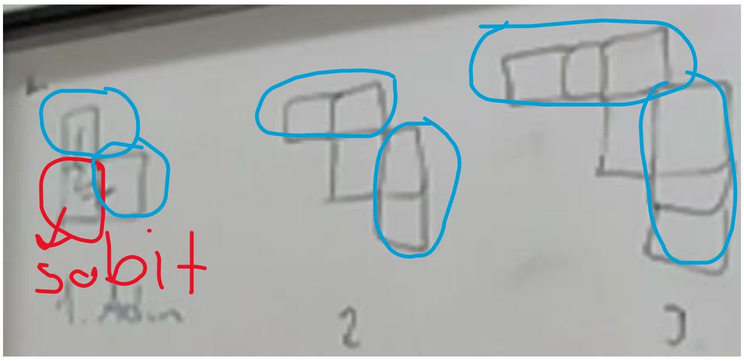


Görsel 3.30. *Kamil’in örüntü örneği*

Sınıf tartışması sırasında örüntü iki farklı yolla genellenmiştir. Sınıf tartışmasından iki kesit sunulmuştur. Kamil’in bakış açısıyla Orhan ve Uğur örüntüyü nasıl genellediklerini aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

A : Peki kural bulabilir misiniz? (1 dakika verildi.)
Orhan : Adım sayısı eksi 1 çarpı 2 artı 3
A : Doğru mu?
Uğur : Evet.
A : Peki 19. Adım ne olmalı?
Uğur : 18 çarpı 2 artı 3, 39.

Görsel 3.31'de ise Orhan ve Yasemin'in Kamil'in oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısını farklı bir bakış açısıyla nasıl analiz ettikleri sunulmuştur.

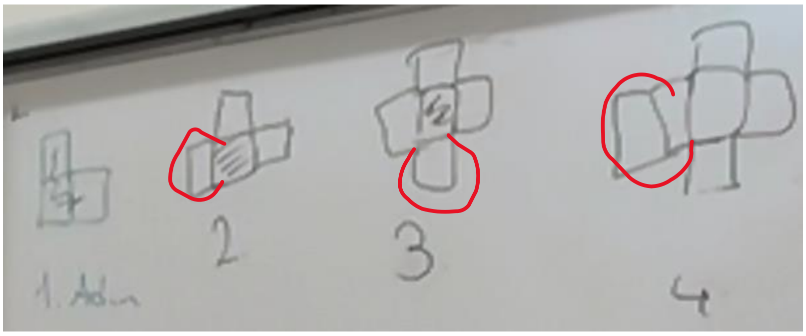


Görsel 3.31. *Örüntünün fiziksel yapısının analize ilişkin Orhan ve Yasemin'in örneği*

A	: Başka bir kural söyleyebilir misiniz? Orhan söyle
Orhan	: Adım sayısı çarpı 2 artı 1
A	: …. Yasemin 19. adım nasıl olması gerekiyor?
Yasemin	: 19 artı 19 artı 1, 39 olacak.
A	: Her iki kuralda da örüntünün 19. adımı eşit bu durumda bu kurallar için ne diyebiliriz?
Tüm sınıf	: Eşit
A	: O halde örüntünün bir tane genel kuralı vardır ancak bu kuralı elde etme şeklimiz şekil örüntüsündeki büyümeye farklı şekillerde bakmamıza bağlıdır.

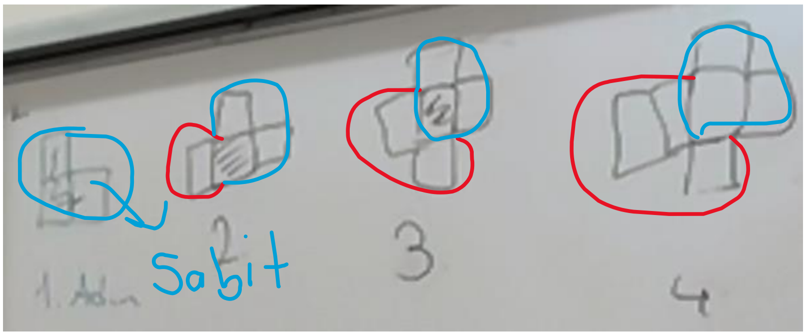
Diyalogda da görüldüğü gibi, bazı öğrenciler Esin'in oluşturduğu örüntüyü genellerken kullandıkları strateji ile ilk adımdaki üç kareyi sabit, değişmez olarak alırken, bazı öğrenciler de Kamil'in oluşturduğu şekliyle ilk adımda bulunan ortadaki kareyi sabit, değişmez olarak almışlar ve değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmişlerdir. Böylece farklı parçalama yöntemlerinden dolayı iki farklı genelleme kuralı ortaya çıkmıştır. Bu süreçte araştırmacı her iki kuralın eşdeğerliğini sorgulamış, bulunan farklı kuralların sonuçlarının aynı olduğu sınıf içi tartışmada ortaya konulmuştur. Öğrencilerin genelleme ifadeleri incelendiğinde Orhan'ın çarpımsal ilişkiyi, Yasemin'in ise toplamsal ilişkiyi kullandığı görülmektedir.

Uğur'da Görsel 3.32'de görüldüğü gibi iki yönde (önce yatay sola doğru sonra dikey aşağı doğru genişleyen) salınımlı (yani bir adımda bir yöne diğer adımda farklı yöne) doğrusal sıralanan farklı bir örüntü oluşturmuştur.



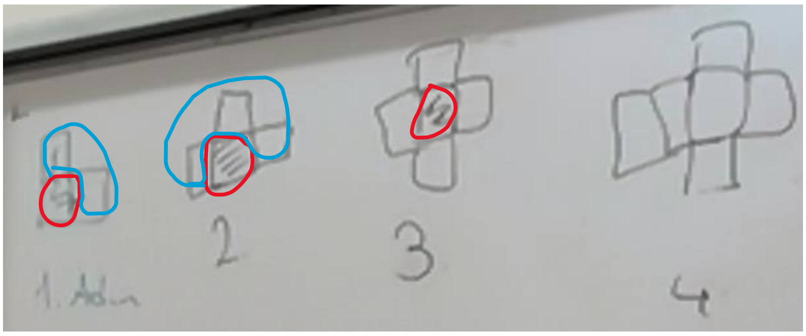
Görsel 3.32. *Uğur'un örüntü örneği*

Uğur örüntüsünü oluştururken önce bir sola sonra diğer adımda bir aşağıya birer kare eklediğini ifade etmiştir. Diğer oluşturulan örüntülerin fiziksel yapılarına göre daha farklı bir yapıda genişleyen örüntüyü öğrenciler örüntünün fiziksel yapısına odaklanmadan sadece sayısal ilişkiler kurarak adım sayısı ile kare sayısı arasındaki ilişkiyi açıklamışlardır. Örüntüde kare sayıları 3, 4, 5, 6 … şeklinde devam etmektedir. Şekle odaklanmayan öğrenciler önce şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşler ve "kare sayısının adım sayısının iki fazlası" olduğu ilişkisini kolayca genellemişlerdir. Öğrencilerin doğrudan sayı örüntüsüne geçmelerinin bir nedeni şu olabilir. Öğrenciler bu örüntüyü genelde ya iki yönde ya da tek yönde periyodik doğrusal genişletirken bu örüntüyü Uğur salınımlı olarak genişletmiştir. Bu durum öğrencilerin örüntüde değişen, sabit kalan yapıları fark etmelerine engel teşkil etmiş olabilir.



Görsel 3.33. *Örüntünün fiziksel yapısının analizi*

Araştırmacı bu durumda farklı stratejilerle ile örüntüdeki büyümeyi inceletmiştir. Öğrencilerden bazıları Görsel 3.33'de görüldüğü gibi, önce ikinci adımdan itibaren üç kareye birer kare eklendiğini ve birinci adımdaki kare sayısının değişmediğini fark etmişlerdir. Araştırmacı da öğrencilerden fark ettikleri bu yapıya ilişkin olarak sayısal ilişkiler kurmalarını istemiştir. Uğur "2. adımda üç kareye bir kare, 3. adımda üç kareye iki tane, 4. adımda üç kareye üç tane kare ekledim” açıklamasını yaparken, Orhan iki boyutlu düşünerek yarı sembolik olarak “3 artı adım sayısının bir eksiği” şeklinde fonksiyonel ilişkiyi kurmuş ve örüntüyü genellemiştir.



Görsel 3.34. *Örüntünün fiziksel yapısının analizi*

Araştırmacı Görsel 3.34’de görüldüğü gibi bu sefer örüntüde içte kalan kareyi renklendirerek öğrencilerin dikkatini buraya çekmeye çalışmış ve bu karenin her adımda sabit kalması durumunda diğer kare sayılarının değişimini sorgulamıştır. Buna ilişkin sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A : Bu karenin (renklendirdiği kare) her adımda değişmediğini düşünürsek, diğer kare sayıları için ne diyebiliriz?

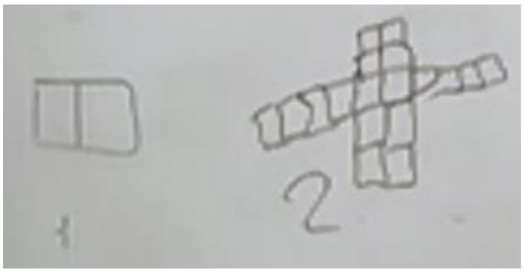
Tüm sınıf : 2, 3,4, 5 şeklinde gidiyor.

Yasemin : Siyah kare de bir tane, o zaman “1 artı adım sayısının bir fazlası”

A : Yasemin doğru ifade etti mi?

Tüm sınıf : Evet

Dersin geri kalan kısmında ise Görsel 3.35’te sunulan Kamil’in döngüsel sıralayarak oluşturduğu örüntü tartışılmıştır.

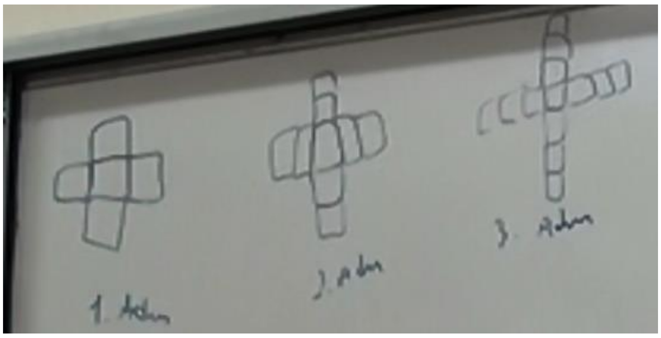


Görsel 3.35. *Kamil’in örüntü örneği*

Kamil örüntüsünü iki adımda oluşturmuştur. Öğrenciler bu örüntüyü devam ettirmede ve genellemede sorun yaşamışlardır. Sınıf tartışması sırasında bir sayı, şekil ya da nesne dizisinin örüntü oluşturması için belirli bir kuralı içinde barındıran en az üç adımının verilmiş olması gerektiği üzerinde durulmuştur.

Dersin devamında öğrencilerden Şekil 3.4'te sunulan ikinci yarı bağımsız örüntü oluşturma etkinliğini (5 tane kareden oluşan şekil birimi) dikkate alarak yeni bir örüntü oluşturmaları istenmiş ve bunun sonucunda tüm öğrenciler Görsel 3.36'da gösterilen örüntüyü, Kamil ise ayrıca farklı bir yapıda bir örüntü oluşturmuştur.

Aynı örüntüyü oluşturan öğrenciler adına Mehmet tahtaya kaldırılmış ve örüntüsünü çizmesi istenmiştir. Mehmet'e örüntüyü nasıl oluşturduğu sorulduğunda "kolları 1'er 1'er arttırdım" şeklinde açıklama yapmıştır. Mehmet'in yinelemeli stratejiyi kullanarak döngüsel sıralanan örüntü oluşturduğu görülmektedir. Mehmet'in bu açıklamasına karşın sınıfta bazı öğrenciler örüntüde sabit ve değişen kare sayılarına odaklanmışlar ve fonksiyonel ilişkiyi kurarak örüntüyü genellemişlerdir. Buna ilişkin sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.



Görsel 3.36. *Öğrencilerin örüntü örneği*

A : Peki 3. adım nasıl olacak? Evet Yasemin

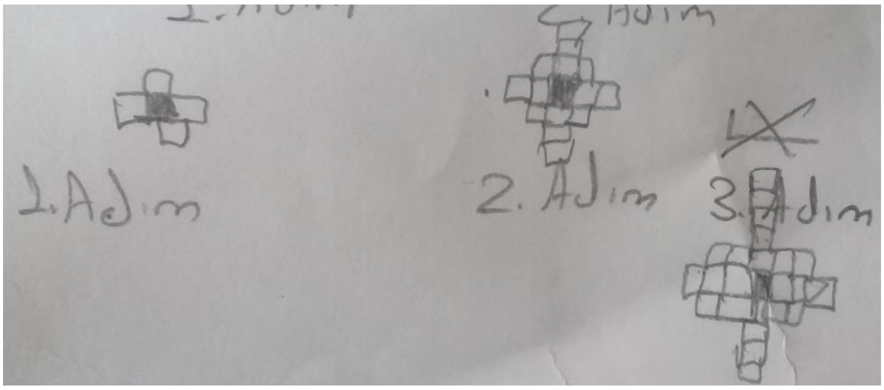
Yasemin : 3 sağa 3 sola 3 yukarı ve 3 aşağı olacak 1 de sabit.

A : Peki bu bir örüntü oluyor mu?

Uğur : Evet belli bir düzene göre gidiyor. Adım sayısı çarpı 4 artı 1.

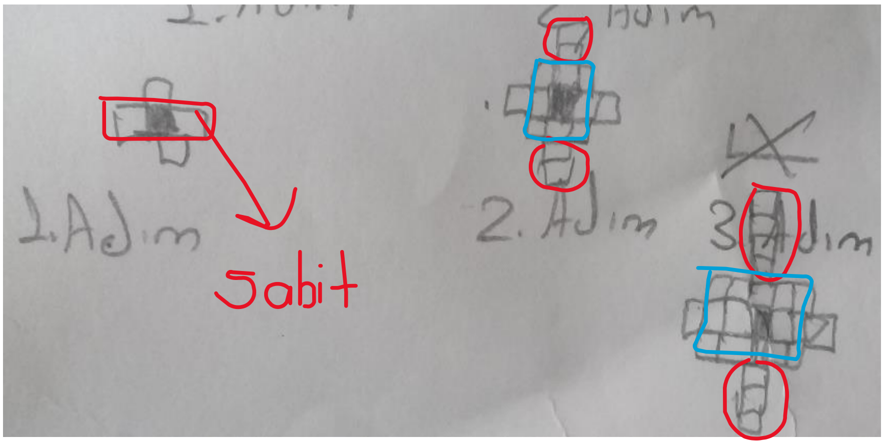
Diyalogda da görüldüğü gibi öğrencilere henüz kuralı sormadan Yasemin ve Uğur'un örüntüyü genelledikleri görülmüştür. Sınıf tartışmasında öğrenciler yakın ve uzak adıma devam ettirmişler ve örüntüyü de genelleyebilmişlerdir. Uğur'un "…Adım sayısı çarpı 4 artı 1" ifadesi örüntüyü çarpımsal ilişkiyi kullanarak iki boyutta yarı sembolik olarak genellediğini göstermektedir. Yasemin'in ise 3. adımı açıklarken toplamsal ilişki kurarak hareket ettiği ve 5 boyutlu (4 kolda yer alan kare sayıları ve ortadaki 1 kare) düşündüğü söylenebilir. Oluşturulan bu örüntünün dört kol üzerinden genişlemesi, bu genişlemenin adım sayısı ile ilişkisinin açıkça fark edilmesi öğrencilerin örüntüyü fonksiyonel ilişkiye dayalı genellemelerine imkân tanımıştır.

Görsel 3.37'de ise Kamil'in yatayda ve dikeyde periyodik doğrusal genişleyen oluşturduğu örüntü örneği gösterilmiştir.



Görsel 3.37. *Kamil'in örüntü örneği*

Kamil'in oluşturmaya çalıştığı bu örüntünün fiziksel yapısı diğer oluşturulan örüntüden daha karmaşıktır. Kamil ön klinik görüşmede olduğu gibi örüntülerini oluştururken örüntünün fiziksel yapısına odaklanmış, ancak üçüncü adımda yapıyı bozmuştur. Belirli bir düzeni içermeyen bu yapıdaki fiziksel değişim ise enteresandır. Yatayda en dışta solda ve sağda yer alan iki kare ve en içte kalan kare sayısı değişmez sabit kalırken, örüntü yatayda ve dikeyde iki yönde (sol ve sağ, alt ve üst) periyodik doğrusal genişlemektedir. Yatayda kısa kenarı değişmeyen (üç kare) uzun kenarı değişen kerelerden oluşan bir dikdörtgen, dikeyde ise en dışta üste ve alta doğru bir sırada genişleyen kareler yer almaktadır. Birinci adımdan ikinci adıma geçerken Kamil en içteki kareyi çevreleyen üçe üçlük karelerden oluşan bir dikdörtgen oluştururken, üstte ve altta yer alan kare sayısını bir artırmıştır. Üçüncü adıma geldiğinde ise dikdörtgenin uzun kenarını iki kare ile genişletirken, en dışta üstte iki kare, alta ise bir kare eklemiş ve düzeni bozmuştur. Bu nedenle öğrenciler örüntüyü yakın ve uzak adıma devam ettirememişlerdir.



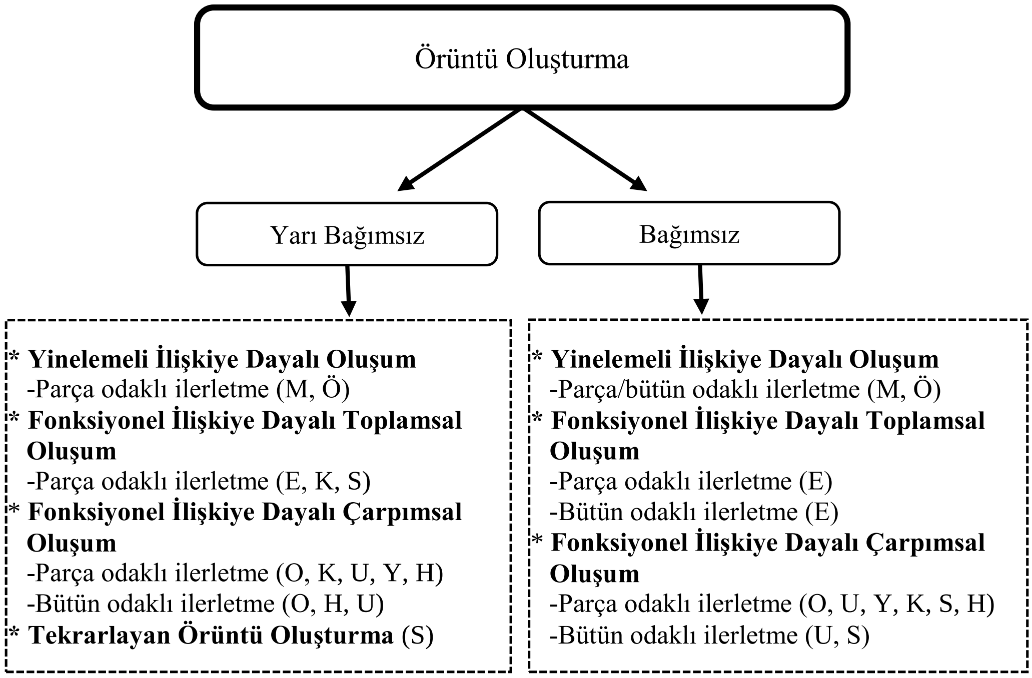
Görsel 3.38. *Örüntünün fiziksel yapısının analizi*

Sınıf içi tartışmada bunun nedeni üzerinde durulmuş ve bir örüntü oluşturacak şekilde örüntüdeki kare sayılarının ve örüntünün fiziksel yapısının nasıl olması gerektiği tartışılmıştır. Sınıf tartışması sırasında öğrenciler Görsel 3.38'de görüldüğü gibi, 3. adımda en dışta, altta bir kare eklemiş olsaydı kare sayılarının 5, 10, 25 … şeklinde değişen ve sabit farkı 10 olan bir örüntü oluşacağını araştırmacının yönlendirmesiyle açıklamışlardır. Araştırmacı yanı sıra "terimler arası sabit değişen bir örüntü oluşturacaksak, her adımda değişen kare sayılarının eşit sayıda değişmesi gerekir. Örneğin 3. adımda en dışta üste iki kare ekliyorsak alta da 2 kare eklememiz gerekirdi. Peki başka hangi durumda kare sayılarının farklı değiştiği bir örüntü oluşurdu?" sorusunu sormuştur. Bu durumda da araştırmacının yönlendirmesiyle öğrenciler ikinci adımdan itibaren en dışta, üste ve alta birer kare ekleyerek devam edilseydi 5, 13, 21… şeklinde sabit farkı 8 olan sabit değişen bir örüntü oluşacağını ifade etmişlerdir.

Birinci oturum öğretim dizileri sonunda öğrencilerin gelişimlerini izlemek ve eksik kaldıkları noktaları belirlemek amacıyla ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Ara klinik görüşmelere ilişkin bulgular aşağıda sunulmuştur.

3.3. Ara Klinik Görüşmelerden Elde Edilen Bulgular

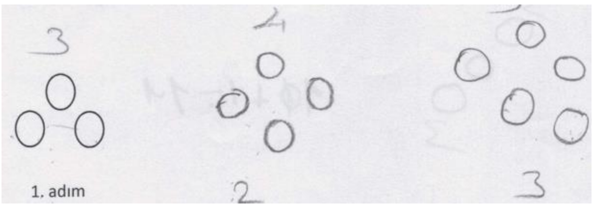
Ara klinik görüşmelerde öğrencilere önce yarı bağımsız örüntü, ardından bağımsız örüntü oluşturma görevleri sunulmuştur. Öğretim dizilerinde öğrencilerin oluşturdukları örüntüleri genellerken çarpımsal ilişkiler kurdukları fark edilmiştir. Bu nedenle ara klinik görüşmelerde çarpımsal ilişkinin örüntü oluşumuna ve genellemeye etkisini daha net görebilmek amacıyla seçilen örnekler hem parçasal hem de bütünsel olarak ilerlemeye uygun seçilmiştir. Bu bağlamda ara klinik görüşmelerde yarı bağımsız örüntü oluşturma görevinde öğrencilere ayrık üç daireden oluşan bir şekil birimi verilmiştir. Öğrencilerin örüntüleri oluştururken kullanmış oldukları stratejiler Şekil 3.6'te gösterilmiştir.



Şekil 3.6. *Öğrencilerin Örüntü Oluşturma Sürecinde Kullandıkları Stratejiler*

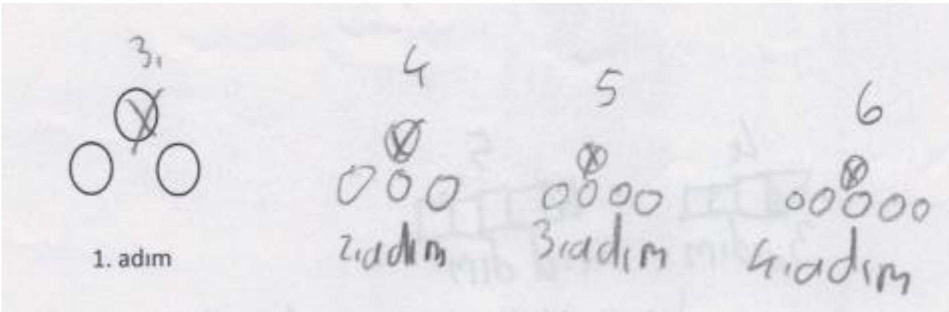
3.3.1. Yarı bağımsız örüntü oluşturma

Şekil 3.6'da görüldüğü gibi, yarı bağımsız örüntü oluştururken öğrenciler yinelemeli ilişkiye dayalı, fonksiyonel ilişkiye dayalı toplamsal ya da çarpımsal düşünerek parça ya da bütün odaklı ve tekrarlayan örüntü oluşturma şeklinde dört farklı strateji kullanmışlardır. Aynı zamanda birden fazla strateji kullanan öğrenciler de olmuştur. Yinelemeli ilişkiyi kullanarak örüntü oluştururken iki öğrenci (M, Ö) verilen ilk adımdaki birim şeklin parçalarını kullanarak sabit değişen örüntü oluşturmuşlardır. Ancak bu öğrenciler oluşturdukları örüntülerini uzak bir adıma devam ettirememişler ya da n. adıma genelleyememişlerdir. Bu öğrencilerden Özlem'in örüntü oluşturma örneği Görsel 3.39'da gösterilmiştir.



Görsel 3.39. *Özlem'in örüntü örneği*

Görsel 3.39'daki örüntüyü Özlem parça odaklı birer artırarak ilerletmiştir. Öğrenciye 10. adımda kaç tane daire olduğu sorulduğunda "İkinci adımda dört tane olduğu için iki tane çıkmış onuncu adımdan da iki çıkartırım sekiz." şeklinde açıklamıştır. Özlem her ne kadar fonksiyonel ilişkiyi kullanmaya çalışsa da adım sayısı ile o adıma karşı gelen terim sayısı arasındaki ilişkiyi hatalı kurduğu için başarılı olamamıştır. Özlem'in örüntü oluştururken örüntünün fiziksel yapısını dikkate almadan yinelemeli ilişkiye dayalı yani bir önceki adıma sabit bir terim ekleyerek daha çok da sayısal düşünerek hareket etmesinin genelleme yapabilmesine engel teşkil ettiği söylenebilir. Öğrenciden yeni bir örüntü oluşturması istendiğinde benzer şekilde parça odaklı örüntü oluşturmuş ve örüntüyü uzak bir adıma devam ettirememiştir. Mehmet ise benzer yaklaşımla Görsel 3.40'ta görülen örüntüyü oluşturmuştur.

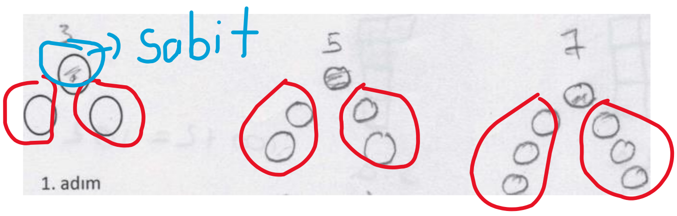


Görsel 3.40. *Mehmet'in örüntü örneği*

Görsel 3.40'ta görüldüğü gibi, Mehmet en üstte yer alan daireyi renklendirerek sabitlemiş ve alta yer alan daire sayılarını birer artırarak tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuştur. Mehmet Özlem'den farklı olarak örüntünün fiziksel yapısını belli bir düzende ele almış, oluşturduğu örüntüde değişen ve sabit kalan niceliklere odaklanmıştır. Ancak bunları adım sayısı ile ilişkilendiremediğinden örüntüyü genelleyememiştir.

Esin, Sevim ve Kamil ise örüntülerini fonksiyonel ilişkiye dayalı toplamsal düşünerek parça odaklı bir yapıda oluşturmuşlardır. Bu bağlamda Mehmet ve Özlem gibi birinci adımdaki şekil biriminin parçalarını kullanarak örüntülerini devam ettirmişlerdir. Bu süreçte öğrenciler örüntülerinin fiziksel yapılarını da belirli bir düzende oluşturmaya özen göstermişlerdir. Bu düzen öğrencilerin örüntülerini n. adıma genellemelerini kolaylaştırmıştır.

Görsel 3.41'de Esin'in oluşturduğu örüntü örneği görülmektedir. Esin iki yönde (sol alt, sağ alt) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte Esin'in en üstte yer alan daireyi renklendirerek sabitlediği ve her iki kolu aşağı doğru aynı sayıda genişlettiği görülmektedir. Aşağıda verilen diyalogda ise Esin oluşturduğu örüntüyü uzak bir adıma nasıl devam ettirdiğini açıklamıştır.

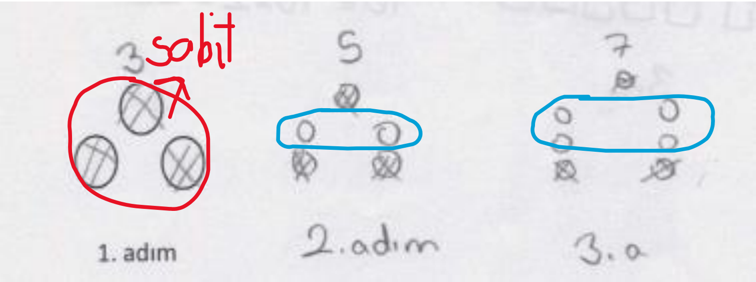


Görsel 3.41. *Esin'in örüntü örneği*

A : Peki 10. Adımda kaç tane olacak?
Esin : 21
A : Nasıl buldun?
Esin : Adım sayısı ile adım sayısını topladım 1 ekledim.
A : Peki 100. Adımda kaç tane daire vardır?
Esin : 201
A : Nasıl buldun?
Esin : Yanlarına baktım burda (sağ kol) 100 tane burda (sol kol) 100 tane 1 tane de sabit 201 olur.

Diyalogda görüldüğü gibi, Esin birinci adımdan başlayarak verilen şekil birimini bütün olarak değil parçalarını kullanarak örüntüsünü devam ettirmiştir. Bu süreçte şeklin sağ ve sol kollarında yer alan daire sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Daha sonra her bir kolu ayrı ayrı yani parça parça adım sayısı ile ilişkilendirdiğinden, üç boyutta toplamsal ilişkiyi kullanarak üç boyutlu ve yarı sembolik olarak (adım sayısı+adım sayısı+1) örüntüyü genellemiştir. Esin'den farklı örüntüler oluşturması istendiğinde yukarıdakine benzer şekilde parça odaklı olarak iki örüntü daha oluşturmuş ve oluşturduğu tüm örüntüleri fonksiyonel ilişkiye dayalı toplamsal düşünerek genellemiştir.

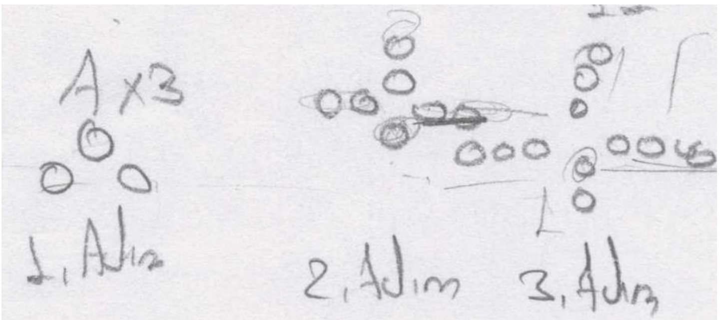
Benzer şekilde Sevim'de Görsel 3.42'de görülen örüntüsünü iki yönde periyodik doğrusal genişleyen ve parça odaklı bir yapıda oluşturmuştur.



Görsel 3.42. *Sevim'in örüntü örneği*

Görsel 3.42'de görüldüğü gibi, Sevim birinci adımdaki şekil biriminin tüm parçalarını renklendirerek sabitlemiş ve diğer adımlarda sabitlediği parçalar arasında kalan daire sayılarını sabit değişecek şekilde artırarak örüntüsünü devam ettirmiştir. Sevim örüntüyü genellerken ise oluşturduğu bu yapıdan bağımsız olarak hareket etmiş ve Esin'in düşünce şekliyle aynı olan örüntünün genel kuralını üç boyutta toplamsal olarak "adım sayısı+adım sayısı+1" şeklinde yarı sembolik olarak ifade etmiştir. Oysaki Sevim'in oluşturduğu örüntünün yapısına göre her adımdaki dairelerin sayısı birinci adım için 3+0, ikinci adım için 3+2.1, üçüncü adım için 3+2.2, n. adımı için de 3+2(n-1) şeklindedir. Görüldüğü gibi bu yapıda değişen daire sayıları adım sayısının bir eksiğidir. Esin'in bakış açısında ise değişen daire sayıları adım sayısı ile aynı sayıdadır. Dolayısıyla bu değişimi fark etme diğerine göre daha kolay olduğundan Sevim'de Esin gibi bir genelleme yapmayı tercih etmiş olabilir.

Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevinde bazı öğrenciler (Orhan, Kamil, Uğur, Yasemin ve Hakan) fonksiyonel ilişkiye dayalı çarpımsal düşünerek parça odaklı olarak örüntülerini oluşturmuşlardır. Bu öğrencilerden Kamil'in döngüsel olarak oluşturduğu örüntüsü örnek olarak Görsel 3.43'te sunulmuştur. Kamil örüntüsünü uzak bir adıma nasıl devam ettirdiğini ve genellediğini aşağıdaki diyalogda açıklamıştır.



Görsel 3.43. *Kamil'in örüntü örneği*

A : Peki 10. adımda kaç daire olacak?

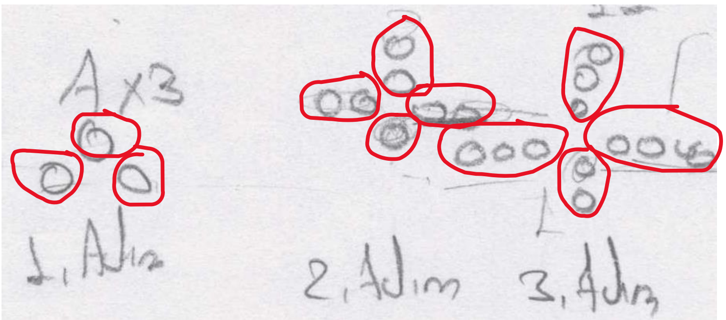
Kamil : 10.adımda öğretmenim ikinci adımda anladığımıza göre şu kısımlarda 2 oluyorsa bu sağ kısımlar her zaman tek tek artıyor. 10. adımda bu kısım (sol kolu göstererek) 10, bu kısım (sağ kolu göstererek) 10, bu kısım (üst kolu göstererek) 10, bu kısım (alt kolu göstererek) ise 9 oluyor. Yani 39 oluyor.

A : Yazabilir misin? (10 + 10 + 10 +9 = 39 yazdı) peki 70. Adımda nasıl olacak?

Kamil : Bu kısımlarda (sol, üst ve sağ kolları göstererek) 70 70 70 bu kısım (alt kolu göstererek) ise 69 olacak.

A : Yazabilir misin? (70+70+70 +69 = 279 yazdı.)

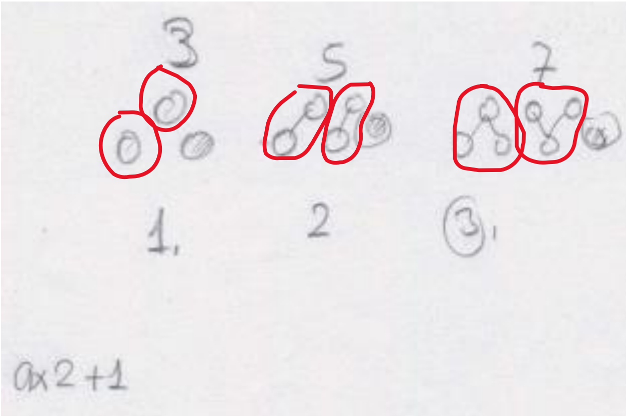
Kamil : Kural ise öğretmenim adım sayısı artı adım sayısı artı adım sayısı artı adım sayısı eksi bir.



Görsel 3.44. *Kamil'in örüntüsünün fiziksel yapısının analizi*

Diyalogda görüldüğü üzere Kamil örüntüsünü oluştururken Görsel 3.44'da görüldüğü gibi birinci adımdaki şekil biriminin parçasını (bir daire) kullanmış ve her kola bir daire ekleyerek adımları parça odaklı olarak ilerletmiştir. Örüntüyü dört kol üzerinden döngüsel olarak üç adıma kadar genişletmiştir. Örüntüyü genellerken ise önce birinci adımda yer alan daire sayısı için sembolik olarak "Ax3" ilişkisini kurmuştur. İlk kez öğrencilerden biri değişen nicelik olarak harfli bir ifade kullanmıştır. Diğer yandan Kamil'in harfli ifade olarak adım sayısının ilk harfi olan "A" yı kullanması da "Adım" sözcüğünün kısaltılması yani harfli ifadelerin etiket anlamını kullanması şeklinde yorumlanabilir. Devamında ise Kamil oluşturduğu yapıya uygun olarak her kolda yer alan daire sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve dört boyutta bu sefer yarı sembolik olarak örüntüyü "Adım sayısı + Adım sayısı + Adım sayısı + Adım sayısı – 1" şeklinde genellemiştir.

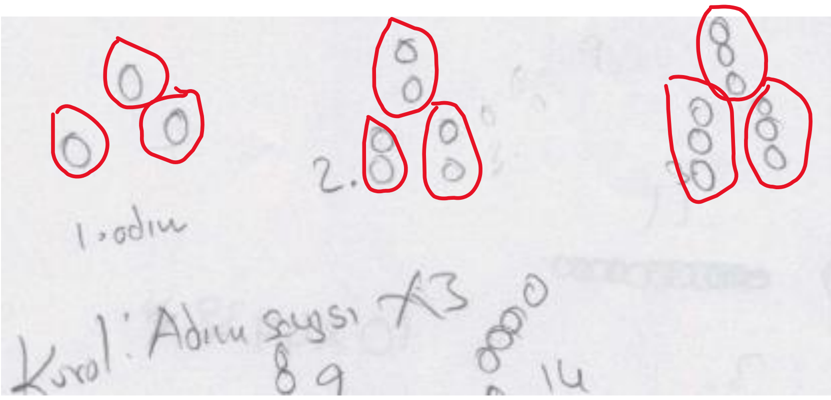
Benzer şekilde Orhan'ın fonksiyonel ilişkiye dayalı tek yönde (üstte ve alta) periyodik doğrusal oluşturduğu örüntü örneği Görsel 3.45'te sunulmuştur.



Görsel 3.45. *Orhan'ın örüntü örneği*

Görsel 3.45'te görüldüğü gibi, Orhan birinci adımdaki şekil biriminin parçalarını kullanmış ve örüntüsünü oluştururken bir önceki adıma ikişer daire ekleyerek örüntüsünü devam ettirmiştir. Orhan aynı zamanda her adımda yer alan daire sayılarını 3, 5, 7 şeklinde ifade ederek şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüştür. Ancak örüntünün fiziksel yapısını oluşturduğu şekliyle örüntüyü genellemiştir. Bu süreçte Görsel 3.45'te görüldüğü gibi en sağda kalan daireyi renklendirerek sabitlemiş ve değişen daire sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Bu ilişkilendirmeyi yaparken de her adımda şekilleri parçalayarak adım sayısı kadar daireden oluşan gruplara ayırmıştır. Grup sayıları ise her adımda iki tane olduğundan Orhan örüntünün kuralını ifade ederken çarpımsal ilişkiyi kullanarak iki boyutta "ax2+1" şeklinde sembolik olarak ifade etmiştir. Orhan'da Kamil gibi ilk kez değişen nicelik olarak harfli bir ifade kullanmıştır.

Hakan'da benzer şekilde Görsel 3.46'da görüldüğü gibi fonksiyonel ilişkiye dayalı üç yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur.



Görsel 3.46. *Hakan'ın örüntü örneği*

Görsel 3.46'da görüldüğü gibi parça odaklı hareket eden Hakan birinci adımdaki şekil biriminin bir parçasını kullanarak üç yönde (sol alt, sağ alt, orta üst) ve her yönde daire sayılarını sabit değişecek şekilde (üç daire) doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Örüntünün fiziksel yapısını oluşturduğu şekliyle de örüntüyü genellemiş ve bu süreçte değişen daire sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Hakan'ın örüntüyü nasıl oluşturduğu ve genellediği aşağıdaki diyalogda örnek olarak sunulmuştur.

A : Örüntünü nasıl oluşturdun?

Hakan : Buralara (Birinci adımdaki dairelerin bulunduğu yönleri tek tek gösterdi) birer birer ekledim.

A : Peki örüntüyü çizmeden 29. adıma devam ettirseydin kaç tane daire olurdu?

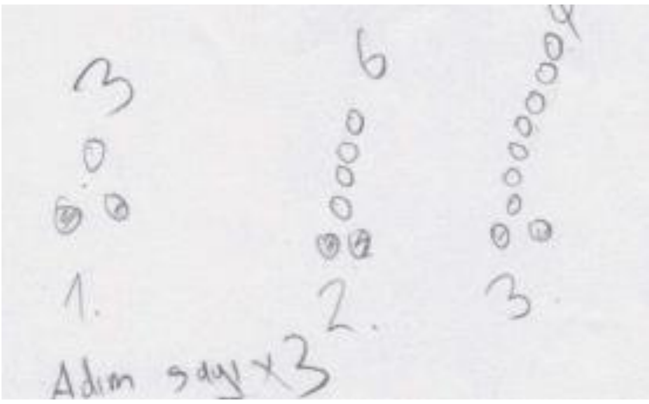
Hakan : Her birinde (üç yönde genişleyen daireleri gösterdi) 29 tane daire olurdu. Yani 29x3.

A : Örüntünün kuralını nasıl ifade edersin o zaman?

Hakan : (Kural=Adım sayısıx3 yazdı) Adım sayısını 3 ile çarparım.

Diyalogda görüldüğü gibi, Hakan uzak bir adıma devam ettirdiği gibi genellerken de yarı sembolik olarak tek boyutta "adım sayısıx3" kuralını oluşturmuştur. Bu süreçte Hakan'ın örüntüsünün fiziksel yapısını oluşturduğu şekliyle genellediği görülmektedir. Hakan Görsel 3.46'da görüldüğü gibi her adımda yer alan şekilleri parçalayarak üç gruba ayırmıştır. Her grupta da adım sayısı kadar daire yer almaktadır. Bu durum Hakan'ın çarpımsal düşünerek genelleme yapmasını kolaylaştırdığı izlenimi vermektedir.

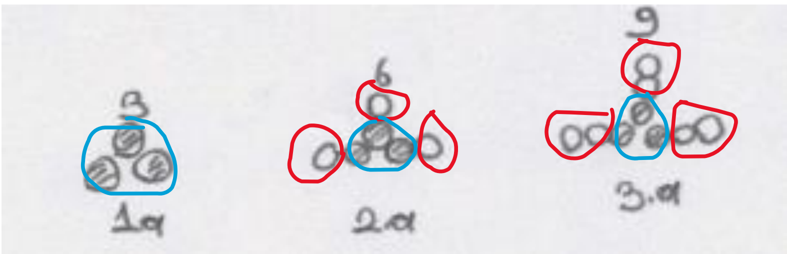
Yasemin ise benzer şekilde fonksiyonel ilişkiye dayalı olarak Görsel 3.47'de verilen tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuştur.



Görsel 3.47. *Yasemin'in örüntü örneği*

Görsel 3.47'de görüldüğü gibi Yasemin birinci adımdaki şekil biriminin bir parçasını kullanarak parça odaklı hareket etmiştir. Bu süreçte en altta yer alan iki daireyi renklendirerek sabitlemiş ve üstte yer alan daireleri ise üçer artırarak örüntüyü genişletmiştir. Yasemin'in oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde, değişen daire sayıları 1, 4, 7 şeklinde devam etmektedir. Yasemin değişen daire sayılarını yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturduğundan adım sayısı ile sayısal olarak ilişkilendirememiştir. Bu nedenle oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısından bağımsız toplam daire sayına odaklanmış ve 3, 6, 9 şeklinde yazdığı sayı örüntüsünün terimlerini adım sayısı ile ilişkilendirerek örüntüyü genellemiştir. Sayı örüntüsünün terimleri adım sayısının 3 katı olduğundan Yasemin'de bu ilişkiyi fark ederek örüntünün genel kuralını yarı sembolik olarak tek boyutlu "Adım sayısı x 3" olarak ifade etmiştir.

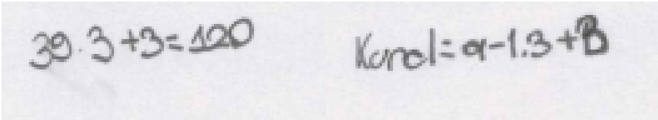
Uğur'da fonksiyonel ilişkiye dayalı olarak Görsel 3.48'de sunulan üç yönde (sol, sağ, üst) periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuştur.



Görsel 3.48. *Uğur'un örüntü örneği*

Görsel 3.48'de görüldüğü gibi parça odaklı hareket eden Uğur birinci adımdaki şekil biriminin bir parçasını kullanarak üç yönde (sol, sağ, üst) ve her yönde daire sayılarını sabit değişecek şekilde (3 daire) doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur.

Örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde Uğur birinci adımda yer alan üç daireyi renklendirerek sabitlemiş ve diğer adımlarda bu üç daireyi ortaya alarak etrafını üç yönde değişen sayıda dairelerle çevirmiştir. Uğur örüntünün fiziksel yapısını oluşturduğu şekliyle de örüntüyü genellemiş ve bu süreçte değişen daire sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Uğur'un örüntüsünü uzak bir adıma nasıl devam ettirdiğine ve kuralı nasıl ifade ettiğine yönelik diyalog ve görselleri aşağıda sunulmuştur.



Görsel 3.49. *Uğur'un örüntüsünü genelleme örneği*

A : Peki Uğur 40. adımda kaç daire var?

Uğur : En içte üç daire sabit, burada (sol kol) 39, burada (üst kol) 39, burada da (sağ kol) 39 tane daire olacak. Yani 39.3+3=120 olur.

A : Bu durumda örüntünün kuralı için ne söyleyebilirsin?

Uğur : Bu üç dairenin dışında kalanlar adım sayısının bir eksiği kadardır bunu üç ile çarpıp üç eklerim.

A : Yazabilir misin kuralı?

Uğur : Kural: a-1.3+3

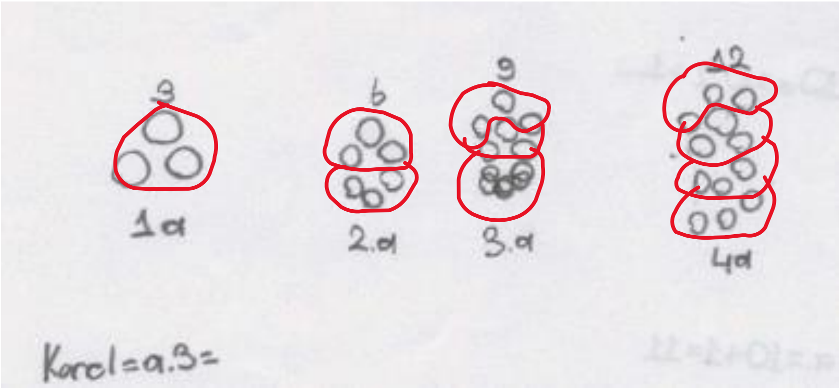
A : a dediğin ne Uğur?

Uğur : Adım sayısı

Diyalogda görüldüğü gibi, Uğur değişen daire sayısını "a" harfi ile temsil ederek örüntünün kuralını sembolik/cebirsel olarak ifade etmiştir.

Fonksiyonel ilişkiye dayalı parça odaklı oluşturulan örüntüleri genellerken öğrencilerin genellikle şekilleri parçalamaları/gruplamaları ve grupları adım sayıları ile ilişkilendirmeleri çarpımsal düşünmelerini sağladığı söylenebilir.

Orhan, Uğur ve Hakan ise fonksiyonel ilişkiye dayalı parça odaklı örüntüler oluşturmanın yanı sıra bütün odaklı olarak da örüntüler oluşturmuşlardır. Buna ilişkin olarak Görsel 3.50'de Uğur'un örneği gösterilmiştir. Uğur tek yönde simetrik salınımlı (bir adımda alta simetrik şekil, diğer adımda üste eş şekil ekleme) doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur.



Görsel 3.50. *Uğur'un örüntü örneği*

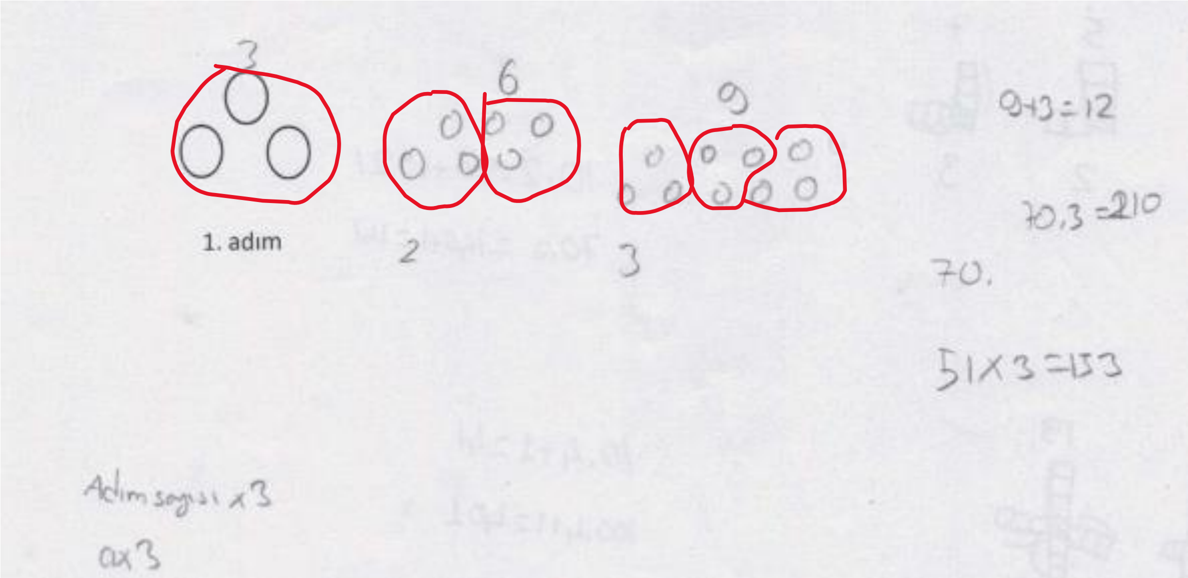
Görsel 3.50'de görüldüğü gibi Uğur birinci adımda verilen şekil birimini bütün olarak ele almış ve diğer adımlara bu şekil birimini düzenli bir şekilde bir alta, bir üste ekleyerek örüntüsünü genişletmiştir. İkinci adımı çizerken alta birinci adımdaki şeklin simetriğini, üçüncü adımı çizerken de üstte eş şeklini eklemiş ve diğer adımlarda bu salınımı devam ettirmiştir. Aynı zamanda Uğur her adımdaki daire sayılarını yazarak şekil örüntüsünü "3, 6, 9, 12" şeklinde sayı örüntüsüne dönüştürmüştür. Görsel 3.50'de görüldüğü gibi, Uğur örüntünün kuralını fiziksel yapısına bağlı kalarak "Kural=a.3" şeklinde tek boyutta sembolik/cebirsel olarak örüntüyü genellemiş ve kuralı yazmıştır. Uğur'a kuralı nasıl yazdığı sorulmuş ve aşağıdaki diyalogda olduğu gibi yanıt alınmıştır.

A : a.3 kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Uğur : Birinci adımda üç tane daire var. Üç tane, üç tane eklediğim için bunlar ikinci adımda iki tane üç var, üçüncü adımda üç tane, dördüncü adımda dört tane üç var. Üçün katları yani adım sayısının 3 katı.

Diyalogda görüldüğü gibi Uğur'un birinci adımdaki şekil birimini bütün olarak diğer adımlara eklemesi, onun çarpımsal düşünerek her adımdaki grup ve her gruptaki daire sayısı ilişkisini kurmasına yardımcı olduğu söylenebilir.

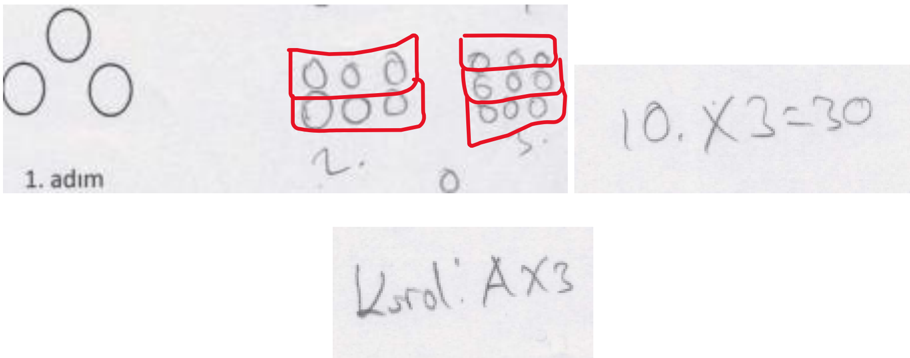
Benzer şekilde Orhan'da fonksiyonel düşünmeye dayalı bütün odaklı bir örüntü oluşturmuştur. Orhan'ın tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntüsü Görsel 3.51'de sunulmuştur.



Görsel 3.51. *Orhan'ın örüntü örneği*

Görsel 3.51'de görüldüğü gibi Orhan birinci adımdaki şekil birimini bütün olarak ele alıp diğer adımlara bu birimi düzenli olarak ekleyerek örüntüyü devam ettirmiştir. Orhan aynı zamanda şekil örüntüsünü "3, 6, 9" sayı örüntüsüne dönüştürmüştür. Dördüncü adımdaki daire sayısını hesaplarken de yinelemeli ilişki kullanmış ve daire sayısını "9+3=12" olarak yazmıştır. Ancak kendisinden uzak bir adımdaki daire sayısı istendiğinde ise fonksiyonel ilişkiyi kullanarak, "51x3=153 ve 70.3=210" şeklinde hesaplama yapmıştır. Orhan genel kuralını ifade ederken de Görsel 3.51'de görüldüğü gibi, örüntünün her adımında değişen grup sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve tek boyutta hem yarı sembolik hem de sembolik/cebirsel "adım sayısıx3 ve ax3" olarak örüntüyü genellemiştir. Bu genellemeyi yapabilmesinde, şekil birimini bütün olarak ele alıp örüntüyü genişletmesi çarpımsal düşünmesini kolaylaştırmıştır.

Fonksiyonel ilişkiye dayalı bütün odaklı örüntü oluşturan öğrencilerden biri de Hakan'dır. Hakan'ın tek yönde periyodik doğrusal genişleyen oluşturduğu örüntü Görsel 3.52'de sunulmuştur.



Görsel 3.52. *Hakan'ın örüntü örneği*

Görsel 3.52'de görüldüğü gibi Hakan'ın örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde birinci adımdaki şekil biriminin bütün olarak bir önceki adıma eklendiği görülmektedir. Hakan'a örüntüsünü nasıl oluşturduğu sorulmuş ve örüntünün 10. adımında yer alan daire sayısı ile kuralı ifade etmesi istenmiştir. Araştırmacı ve Hakan arasındaki geçen diyalog aşağıda sunulmuştur.

A : Nasıl oluşturdun örüntüyü?

Hakan : Buraya (ikinci adımı işaret etti) üç daire, buralara da (üçüncü adımda üç yönde aşağı sıralanan daireleri işaret etti) birer daire ekledim.

A : Peki bu durumda 10. adımda kaç tane daire olur? Çizmeden hesaplayabilir misin?

Hakan : (10x3=30 yazdı) 30.

A : Nasıl buldun açıklar mısın?

Hakan : 10. adımda buralarda 10 tane daire olur. Adım sayısı kadar. Bundan dolayı 10x3 yazdım.

A : Örüntünün kuralı için ne diyebilirsin o zaman?

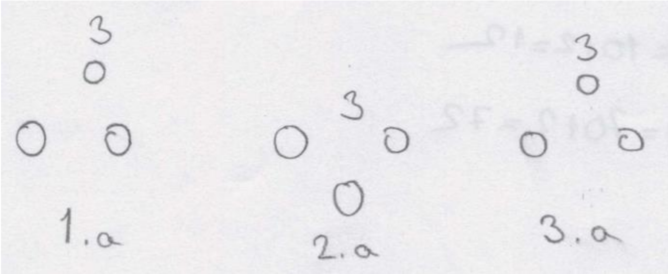
Hakan : (Kural: Ax3 yazdı),

A : A nedir?

Hakan : Adım sayısı

Yukarıdaki diyalogdan da anlaşıldığı gibi Hakan'ın bütün odaklı oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısı yani üçlü grupların oluşumu diğer iki öğrencide de olduğu gibi genellemeyi yapabilmesinde çarpımsal düşünmesini sağlamıştır.

Öğrencilerden Sevim ise yarı bağımsız örüntü oluşturma görevinde tekrarlayan bir örüntü oluşturmuştur. Görsel 3.53'te Sevim'in örneği gösterilmektedir. Sevim örüntüyü nasıl oluşturduğunu aşağıdaki diyalogda açıklamıştır.



Görsel 3.53. *Sevim'in örüntü örneği*

A : Peki güzel. İlk adımımız bu olan bir örüntü daha yazabilir misin? (3, 3, 3, … şeklinde bir ters bir düz tekrar eden örüntü yazdı. Adım sayısı ve daire sayılarını yazdı.) peki bu bir örüntü mü?

Sevim : Evet. Belirli bir düzene göre gitmiş.

A : Peki 4. adımı nasıl çizersin ve kaç tane daire olur?

Sevim : 3. Bu (üstteki daireyi gösteriyor) yuvarlak altta olacak.

A : Peki 10. adımda nasıl olacak?

Sevim : Altta olacak.

A : Nereden bildin?

Sevim : Çift sayıların altta tek sayıların üstünde oluyor.

A : Peki 101. adımda kaç daire var?

Sevim : 101. adımda 3 tane var. Şekil üstte olacak.

A : Peki herhangi bir adımdaki ne olur? (Düşündü yanıtlayamadı)

Sevim : Adım sayısı artı 3 (Kâğıda a yazdı.)

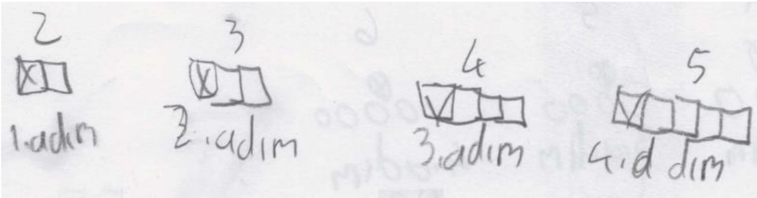
A : Nasıl bildin? (Yanıtlayamadı)

Sevim'in oluşturduğu örüntüde birinci adımda verilen şekil birimi her adımda sabit kalmakta ancak yönü değişmektedir. Sevim de şekil biriminin yönünü adım sayısının tek ya da çift olma durumuna göre belirlemiştir. Ancak oluşturduğu örüntünün herhangi bir adımında şekil biriminin yönünün ne olacağını açıklayamamış ve "adım sayısı artı 3" şeklinde hatalı bir genellemede bulunmuştur.

3.3.2. Bağımsız örüntü oluşturma

Ara klinik görüşmelerde öğrencilerden bağımsız örüntü oluşturmaları da istenmiştir. Şekil 3.6'da görüldüğü gibi, bağımsız örüntü oluştururken öğrenciler yarı bağımsız örüntü oluşturma süreçlerine benzer şekilde yinelemeli ilişkiye dayalı ve fonksiyonel düşünmeye dayalı toplamsal ya da çarpımsal düşünerek parça ya da bütün odaklı olarak örüntüler oluşturmuşlardır. Yarı bağımsız örüntü oluşturma sürecindeki gibi birden fazla strateji kullanan öğrenciler de olmuştur.

Yinelemeli ilişkiye dayalı örüntülerini oluşturan öğrenciler yarı bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde olduğu gibi örüntülerini genelleyememişlerdir. Yinelemeli ilişkiye dayalı örüntü oluştururken iki öğrenci (M, Ö) parça/bütün odaklı olarak örüntülerini genişletmişlerdir. Görsel 3.54'te Mehmet'in örüntü örneği gösterilmiştir.



Görsel 3.54. *Mehmet'in örüntü örneği*

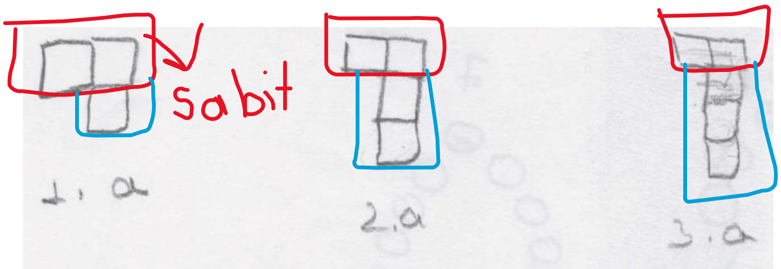
Görsel 3.54'te görüldüğü gibi, Mehmet tek yönde (sağ) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte birinci adıma bitişik iki kareden oluşan şekil birimi ile başlamış ve bu şekil biriminin bir parçasını (bir kare) bir önceki adıma ekleyerek örüntüyü devam ettirmiştir. Mehmet şeklin fiziksel yapısından ziyade kare sayısına ve yinelemeli ilişkiye odaklandığı için kare sayısı ve adım sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi görememiş, örüntüyü genellemeyi başaramamıştır. Araştırmacı Mehmet'in kare ve adım sayısı arasındaki ilişkiyi daha kolay görebilmesi için örüntüde birinci adımı karalamış ve diğer kare sayılarının nasıl devam ettiğini sormuştur. Mehmet "1, 2, 3, 4 şeklinde devam ediyor" diyerek yine benzer davranışı sergilemiştir. Mehmet'ten farklı bir örüntü daha oluşturması istendiğinde ise benzer şekilde parça odaklı bu kez ikişer artan tek yönde periyodik doğrusal örüntü oluşturmuş ancak bu örüntüyü de genelleyememiştir.

Benzer şekilde yinelemeli ilişkiye dayalı örüntü oluşturan Özlem'in örüntüsü de Görsel 3.55'de sunulmuştur.

Görsel 3.55. *Özlem'in örüntü örneği*

Görsel 3.55'de görüldüğü gibi Özlem'de tek yönde (sağ alt) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte birinci adımda bir daireden oluşan şekil birimi kullanmış ve bütün odaklı olarak bu birimi birer artırarak örüntüyü devam ettirmiştir. Özlem'den oluşturduğu örüntüyü 10. adıma devam ettirmesi istendiğinde ise "10+1" yanıtını vermiş ve örüntüyü n. adıma genellerken de yarı sembolik olarak "adım sayısı+1" şeklinde hatalı bir kural ifade etmiştir. Özlem Mehmet'ten farklı olarak adım sayısı ve daire sayısı arasında bir ilişki kuramaya çalışsa da yinelemeli ilişkiye odaklandığından yani bir önceki adıma bir daire eklediğinden dolayı oluşturduğu örüntüyü de bu düşünceyle genellemeye çalışmıştır.

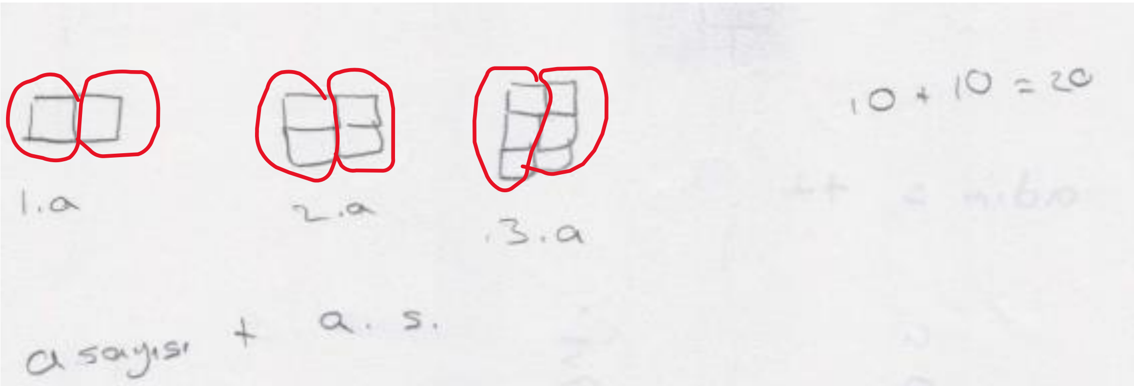
Esin ise fonksiyonel ilişkiye dayalı hem parça hem de bütün odaklı olarak örüntülerini oluşturmuştur. Görsel 3.56'da Esin'in oluşturduğu parça odaklı örüntü örneği görülmektedir.



Görsel 3.56. *Esin'in örüntü örneği*

Görsel 3.56'da görüldüğü gibi Esin tek yönde (sağ alt) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte birinci adıma bitişik üç kareden oluşan bir şekil birimi ile başlamış ve diğer adımlara bu birimin bir parçasını (bir kare) ekleyerek örüntüsünü devam ettirmiştir. Örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde her adımda sol kolda yer alan kare sayısı sabit kalırken sağ kolda yer alan kare sayıları alta doğru genişlemekte ve her adımda değişmektedir. Esin de bu yapıyı dikkate alarak örüntüyü uzak bir adıma devam ettirirken (100. adım) Görsel 3.56'da görüldüğü gibi, en üstte yer alan iki kareyi sabitleyerek, altta yer alan değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve "2+100=102" şeklinde 100. adımdaki kare sayısını hesaplamıştır. Esin örüntünün genel kuralını ise yarı sembolik olarak "2 + adım sayısı" şeklinde ifade etmiştir.

Esin'den farklı bir örüntü oluşturması istendiğinde ise bu sefer bütün odaklı bir örüntü oluşturmuştur. Görsel 3.57'de Esin'in örneği gösterilmiştir.

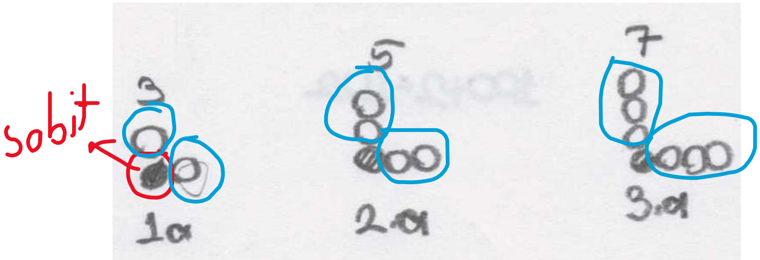


Görsel 3.57. *Esin'in örüntü örneği*

Görsel 3.57'de görüldüğü gibi Esin birinci adımda bitişik iki kareden oluşan bir şekil birimi ile başlamış ve bu şekil birimini alt alta ekleyerek (satır satır) tek yönde alta genişleyen periyodik doğrusal olarak örüntü oluşturmuştur. Esin'e oluşturduğu örüntüyü 10. adıma devam ettirmesi ve genellemesi sorulduğunda ise "Adım sayısı (düşünüyor) 2, 4, 6 diye ilerlemiş burda da (3. adımı göstererek). 10. adımı yanlara (iki sütun) bakarak bulmuştum. Adım sayısı artı adım sayısı." şeklinde yanıt vermiştir. Esin'in örüntüsünü genellerken önce şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürdüğü sonra şekle odaklandığı görülmektedir. Esin örüntüsünü alta doğru bütün odaklı (iki kare) periyodik genişleyen bir örüntü olarak oluştursa da (ör., 2. adım 2+2) örüntüyü uzak bir adıma devam ettirirken Görsel 3.57'de görüldüğü gibi, örüntüye farklı bir bakış açısıyla bakarak 10. adımı 10+10=20 şeklinde hesaplamış örüntünün genel kuralını da yarı sembolik olarak "adım sayısı artı adım sayısı" şeklinde ifade etmiştir. Bütün odaklı oluşturulan örüntülerde genelde kural ifade edilirken çarpımsal ilişki kullanıldığı gözlenmekte iken Esin'in bu süreçte toplamsal ilişkiyi kullandığı görülmektedir.

Bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde öğrencilerden bazıları fonksiyonel ilişkiye dayalı parça ya da bütün odaklı olarak örüntülerini oluşturmuşlardır. Hem parça hem de bütün odaklı örüntü oluşturan öğrenciler de (Uğur ve Sevim) olmuştur.

Parça odaklı olarak örüntü oluşturan öğrencilerden (Uğur, Orhan, Sevim, Kamil, Yasemin ve Hakan) Uğur'un parça odaklı oluşturduğu örüntü örneği Görsel 3.58'de gösterilmiştir. Uğur örüntüsünü nasıl oluşturduğunu aşağıdaki diyalogda açıklamıştır.

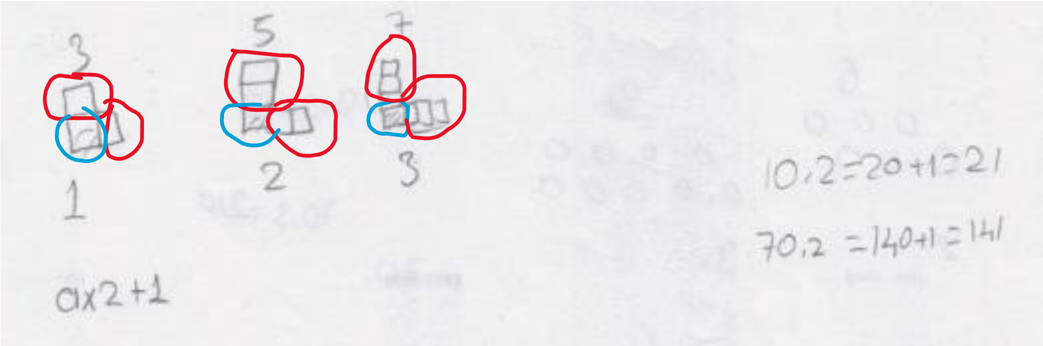


Görsel 3.58. *Uğur'un örüntü örneği*

A	: Peki 10. Adımda ne kadar daire olacak?
Uğur	: 21 tane
A	: Nasıl buldun?
Uğur	: Adım sayısı kadar kolda yuvarlak var. O zaman 10 ile 10'u toplarım 1 tane de sabit var 21.
A	: Peki yazabilir misin? (10.2 + 1 yazdı) peki kural da yazabilir misin? (a.2 + 1 yazdı).

Diyalogda görüldüğü gibi, Uğur iki yönde (sol üst, sağ yan) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte birinci adımda ayrık üç daire kullanarak köşede bir daire ve bu daireyi dikey ve yatayda kesen birer daireden oluşan L şeklinde bir şekil birimi kullanmıştır. Diğer adımlarda bu şekil biriminin bir parçasını (bir daire) yatay ve dikey kollara birer birer eklemiştir. Yatay ve dikey kolun kesiştiği köşedeki daireyi de renklendirerek sabitlemiştir. Örüntüsünü uzak bir adıma devam ettirirken ve genellerken de sabit ve değişen nicelikleri adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve iki boyutlu sembolik/cebirsel olarak "a.2+1" şekilde genel kuralı ifade etmiştir. Uğur'un yatay ve dikey kolları gruplandırarak çarpımsal ilişkiyle kuralı ifade ettiği görülmektedir. Uğur'dan farklı örüntüler oluşturması istendiğinde benzer şekilde parça odaklı ve bir tane de bütün odaklı örüntü oluşturmuş ve çarpımsal düşünerek genel kurallarını ifade etmiştir.

Orhan da Uğur gibi parça odaklı Görsel 3.59'da sunulan örüntüyü oluşturmuş ve oluşturduğu örüntüyü de genellemiştir.

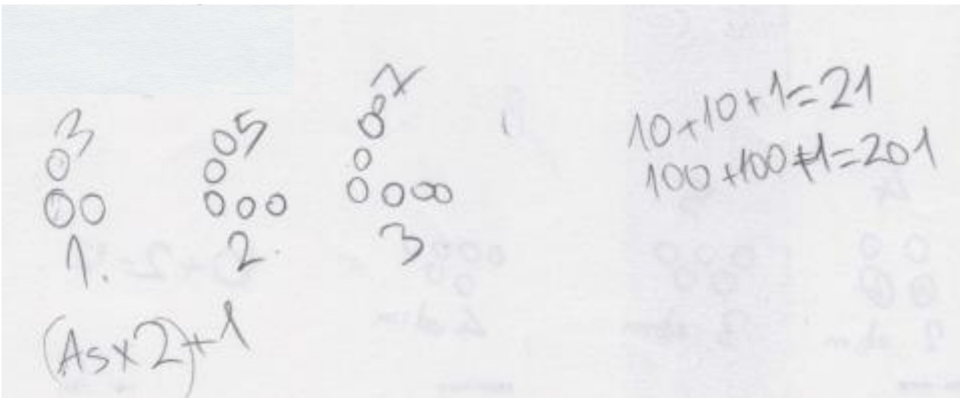


Görsel 3.59. *Orhan'ın örüntü örneği*

Görsel 3.59'da görüldüğü gibi Orhan'da Uğur gibi iki yönde (sol üst, sağ yan) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Orhan birinci adıma L şeklinde bitişik karelerden oluşan bir şekil birimi ile başlamış, diğer adımlarda bu şekil biriminin bir parçasını (bir kare) yatay ve dikey kollara birer birer eklemiştir. Yatay ve dikey kolun kesiştiği köşedeki kareyi de renklendirerek sabitlemiştir.

Örüntüsünü uzak bir adıma devam ettirirken ve genellerken de sabit ve değişen nicelikleri adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Görsel 3.59'da görüldüğü gibi Orhan adım sayısının iki katına bir ekleyerek 10. ve 70. adımlardaki kare sayılarını hesaplamış ve iki boyutlu sembolik/cebirsel olarak "a.2+1" şekilde genel kuralı ifade etmiştir. Orhan'ın da Uğur gibi yatay ve dikey kolları gruplandırarak çarpımsal ilişkiyle kuralı ifade ettiği görülmektedir.

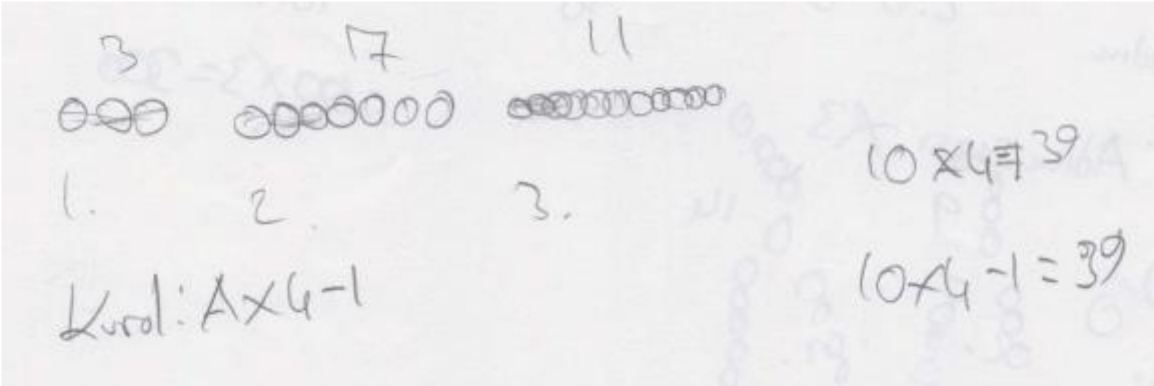
Yasemin de Orhan ve Uğur'la benzer düşünceyle yani parça odaklı olarak Uğur'un oluşturduğu örüntü ile aynı Görsel 3.60'da sunulan örüntüyü oluşturmuştur.



Görsel 3.60. *Yasemin'in örüntü örneği*

Görsel 3.60’da görüldüğü gibi Yasemin oluşturduğu L örüntüsünün 10. ve 100. adımlarına karşılık gelen daire sayılarını toplamsal düşünerek “10+10+1=21; 100+100+1=201”şeklinde hesaplarken, örüntünün kuralını çarpımsal düşünerek iki boyutlu sembolik yani “Adım sayısının” baş harflerini kullanarak “Asx2+1” şeklinde ifade etmiştir.

Hakan ise yine parça odaklı olarak Görsel 3.61’de görülen örüntüyü oluşturmuştur.



Görsel 3.61. *Hakan’ın örüntü örneği*

Görsel 3.61’de görüldüğü gibi Hakan tek yönde (sağ) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte birinci adıma ayrık üç daireden oluşan bir şekil birimi ile başlamış ve bu şekil biriminin bir parçasını kullanarak (bir daire) dörder dörder diğer adımlara eklemiştir. Hakan’a örüntüyü nasıl oluşturduğu sorulduğunda “üç daire ile başladım buna dört dört ekledim” şeklinde yanıt vermiştir. Bu yanıttan Hakan’ın ön klinik görüşmelerde de görüldüğü gibi örüntünün fiziksel yapısından ziyade önce sayı örüntüsüne odaklanmış ve her bir sayı kadar daireyi sıralayarak şekil dizisi oluşturmuştur. Bu düşünceyle Hakan’ın örüntüsünü yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturduğu görülmektedir. Ancak Hakan’a örüntüyü uzak bir adıma devam ettirseydi örneğin 10. adıma kaç tane daire olacağı sorulduğunda ise örüntünün fiziksel yapısından bağımsız fonksiyonel olarak adım sayısı ve terim sayısı ilişkisini kurmuştur. Buna ilişkin araştırmacı ve Hakan arasında geçen diyalog aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

Hakan : (Düşündü) 10x4-1=39 tane olurdu.

A : Nasıl buldun?

Hakan : 2. adımda yedi daire var. Dört katının bir eksiği. 2 kere 4, 8 eder 1 eksiği 7, aynı şey burada da (3. adım) 3 çarpı 4, 12 1 eksiği 11. Onuncu adımda ise 10x4-1 olur.

A : Peki örüntünün kuralını nasıl yazarsın?

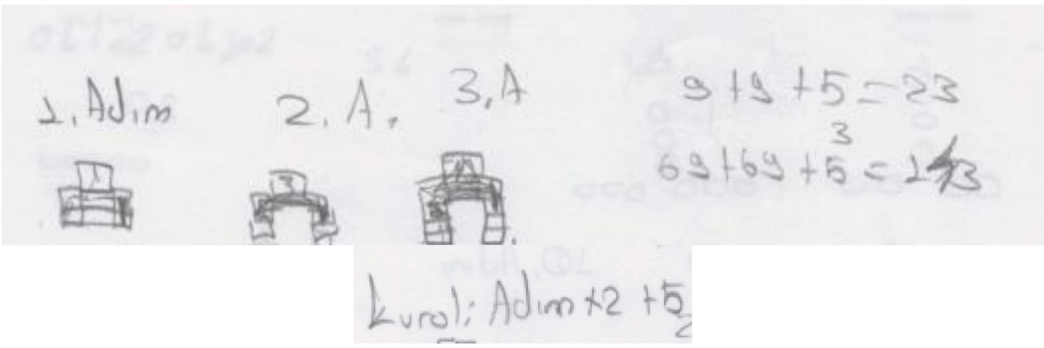
Hakan : (Kural: Ax4-1 yazdı)

A : A nedir?

Hakan : Adım sayısı

Diyalogdan görüldüğü gibi Hakan örüntüyü yinelemeli ilişkiye odaklanarak sadece sayı örüntüsü üzerinden hareket etmiş ve prototip olarak adlandırdığımız tek yönde sıralanan şekil dizisi oluşturmuştur. Bu nedenle örüntüyü genellerken de sadece fonksiyonel olarak sayısal ilişkiler kurarak çarpımsal düşünceyle genel kuralı ifade etmiştir.

Kamil'de fonksiyonel ilişkiye dayalı parça odaklı Görsel 3.62'de sunulan bir örüntü oluşturmuştur.

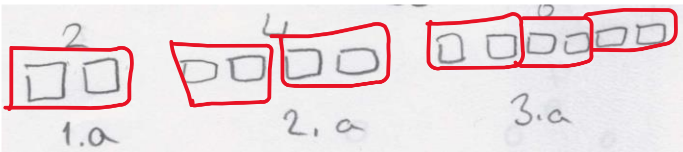


Görsel 3.62. *Kamil'in örüntü örneği*

Kamil örüntüsünü iki yönde (sol alt ve sağ alt) periyodik doğrusal genişleyen biçimde oluşturmuştur. Görsel 3.62'de görüldüğü gibi Kamil birinci adıma 6 kareden oluşan bir şekil birimi çizmiş daha sonra bu şekil biriminin parçasını (bir kare) sol alta ve sağ alta birer tane ekleyerek örüntüyü devam ettirmiştir. Kamil her adımda beş tane kareyi renklendirerek sabitlemiştir. Örüntünün herhangi bir adımındaki kare sayısını hesaplarken ve kuralı yazarken kullandığı "+5" adımlarda değişmeyen kare sayısını göstermektedir. Örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde Kamil'in oluşturduğu şekilde örüntüdeki sabit ve değişen kare sayıları "5+1, 5+3, 5+5" şeklindedir. Ancak Kamil örüntüyü genellerken en üstte yer alan kareyi ihmal ederek sadece sol alt ve sağ altta yer alan kareleri adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve 10. adımı ile 70. adımı "9+9+5; 69+69+5" şeklinde hesaplamıştır. Uzak adımda değişen kare sayılarını adım sayısının bir eksiği kadar alan Kamil kuralı ifade ederken "(Adım sayısı-1)x2+5" şeklinde yazması gerekirken hata yaparak "Kural=Adımx2+5" şeklinde yarı sembolik olarak ifade etmiştir.

Kamil’in uzak adımları hesaplarken toplamsal düşündüğü, kuralı ifade ederken ise çarpımsal düşündüğü görülmektedir.

Fonksiyonel düşünmeye dayalı parça odaklı örüntü oluşturan Uğur aynı zamanda Sevim gibi fonksiyonel düşünmeye dayalı bütün odaklı örüntü de oluşturmuştur. Aşağıda Sevim’in örüntü örneği gösterilmiştir.



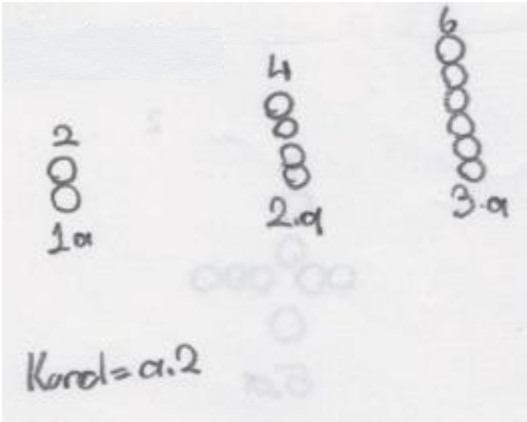
Görsel 3.63. *Sevim’in örüntü örneği*

Görsel 3.63’de görüldüğü gibi, Sevim tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Bu süreçte birinci adıma ayrık iki kareden oluşan bir şekil birimi ile başlamış ve diğer adımlarda bütün olarak bu birimi bir önceki adıma ekleyerek örüntüsünü devam ettirmiştir. Sevim’e örüntüsünü nasıl oluşturduğu sorulduğunda aşağıda diyalogda verilen açıklamaları yapmıştır.

A : Nasıl yaptın?
Sevim : Hepsi çift olarak gidiyor.
A : Peki 4. adımda kaç kare olacak?
Sevim : 8
A : Nasıl buldun?
Sevim : Dört ile ikiyi çarptım.
A : Neden dört ile ikiyi çarptın?
Sevim : Dört tane iki var.
A : Peki 10. adımı nasıl bulacaksın?
Sevim : On ile ikiyi çarparım
A : Neden?
Sevim : 10 tane iki olduğundan (10 x 2 =20 yazdı)
A : Peki kural söyleyebilir misin?
Sevim : (a x 2 yazdı).
A : a nedir?
Sevim : Adım sayısı

Diyalogda görüldüğü gibi Sevim örüntüsünü oluştururken birinci adımdaki şekil biriminin katlarını alarak hareket ediyor ve örüntüdeki kare sayıları ile adım sayısı arasında ilişkiyi de kuruyor. Sevim'in bu düşünme şekli yani bütün odaklı hareket etmesi çarpımsal düşünerek kuralı tek boyutta "ax2" şeklinde sembolik/cebirsel olarak ifade etmesini de kolaylaştırmıştır.

Bütün odaklı örüntü oluşturan diğer öğrenci Uğur ise Görsel 3.64'teki örüntüyü oluşturmuştur.



Görsel 3.64. *Uğur'un örüntü örneği*

Görsel 3.64'te görüldüğü gibi Uğur'da tek yönde (üstte) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuş ve Sevim gibi düşünerek benzer şekilde kuralı tek boyutta sembolik/cebirsel olarak "Kural=a.2" şeklinde yazmıştır. Uğur'un da bütün odaklı bir şekilde örüntüsünü oluşturması kuralı çarpımsal düşünerek ifade etmesini sağladığı söylenebilir.

Ara klinik görüşmelerde iki öğrencinin hala yinelemeli ilişkiye dayalı bir önceki adıma sabit bir terim ekleyerek şekilden bağımsız daha çok da adımlardaki toplam şekil sayısına odaklanarak hareket ettikleri ve oluşturdukları örüntüleri genelleyemedikleri görülmüştür. Buna karşın bazı öğrencilerin örüntünün genel kuralını ifade ederken toplamsal, öğrencilerin çoğunluğunun da çarpımsal ilişkiyi kullanarak parça/bütün odaklı, ağırlıklı olarak da periyodik doğrusal genişleyen örüntüler oluşturdukları ve oluşturdukları örüntüleri fonksiyonel ilişkiye dayalı genelledikleri belirlenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin daha çok yarı sembolik ve sembolik kurallar yazdıkları ve yarı sembolik kuralları yazarken değişen niceliği "adım sayısı", sembolik kuralları yazarken de "adım sayısı" kelimelerinin "a", "A" ya da "As" gibi baş harflerini kullandıkları görülmüştür. Bunların yanı sıra bütün odaklı örüntü oluşturan öğrencilerin çarpımsal ilişkiyi daha kolay fark ederek kurallarını bu yönde yazdıkları da gözlenmiştir.

3.4. İkinci Öğretim Dizisinden Elde Edilen Bulgular

Ara klinik görüşmelerden elde edilen bu bulgular doğrultusunda ikinci öğretim dizisinin planlanmasında parça şekil yapısından parça ilişki yapısına geçiş hedeflenmiş ve aşağıdaki amaçlar belirlenmiştir:

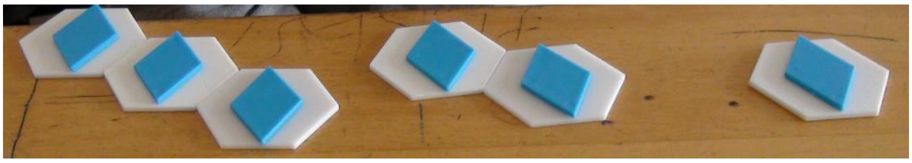
1. Öğrencilerin yarı bağımsız ve bağımsız oluşturdukları şekil örüntülerinin fiziksel yapısından hareketle tablo temsili kullanarak sayısal ilişkileri geliştirmeleri,
2. Sayısal ilişkilere dayalı fonksiyon tabanlı kurallar üretirken değişen nicelikleri harfli ifadeler ile temsil edebilmeleri,
3. Bütün odaklı örüntü oluşturma ile çarpımsal düşünme arasındaki ilişkinin daha ayrıntılı gözlenmesi.

3.4.1. Birinci hafta

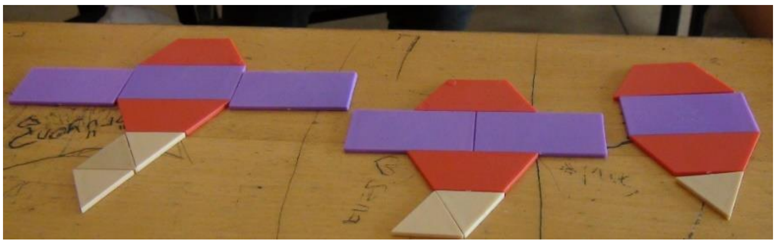
İkinci öğretim dizisinin ilk haftası öğrencilerden renkli örüntü blokları kullanıp bağımsız örüntü oluşturmaları istenmiştir. Örüntü bloklarının kullanım amacı öğrencilerin büyüyen/genişleyen örüntülerde sabit ya da değişen nicelikleri renkler sayesinde kolayca görebilmelerini ve tablo temsiline geçerek tabloyu kullanmalarını sağlamaktır. Bu bağlamda öğrencilerin şekil temsilinden tablo temsiline geçiş yapabilmeleri ve tabloda sayısal ilişkileri kurabilmeleri sağlanmıştır.

Renkli örüntü bloklarını kullanarak bağımsız örüntü oluşturma etkinliğinde öğrencilerden öncelikle oluşturdukları örüntünün nasıl büyüdüğünü ve bu büyümede her adımda kullandıkları renkli blok sayılarının nasıl değiştiğini ifade etmeleri istenmiştir.

Görsel 3.65'te öğrencilerin oluşturmuş oldukları birkaç örüntü örneği sunulmuştur.

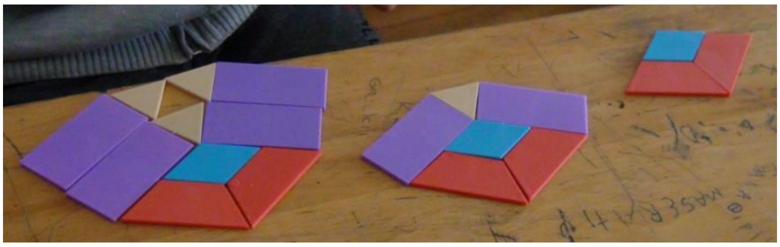


(a)



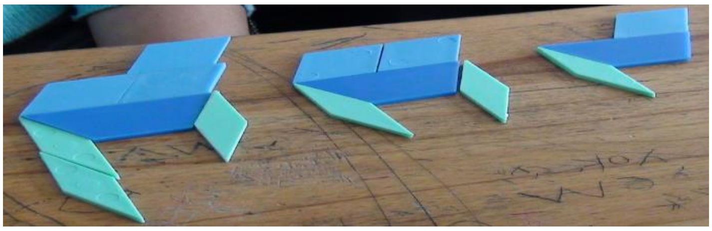
(b)

Görsel 3.65. *Öğrencilerin örüntü blokları ile oluşturdukları örnekler*



(c)

(d)



(e)

Görsel 3.65. (Devam) *Öğrencilerin örüntü blokları ile oluşturdukları örnekler*

Görsel 3.65'te görüldüğü gibi oluşturulan örüntülerden birincisi bütün odaklı, diğerleri parça odaklı oluşturulmuştur. Birinci görseldeki örüntü tek yönde, ikincisi iki yönde, üçüncüsü üç yönde, dördüncüsü dört yönde periyodik doğrusal genişleyen iken, beşincisi salınımlı genişleyen örüntüdür. Öncelikle bu örnekler arasından bütün odaklı ve parça odaklı oluşturulan iki örüntü (a ve b) ele alınmış ve nasıl oluşturulduğu sorgulanmıştır. Daha sonra her adımda değişen ve sabit kalan nicelikler tüm sınıfla tartışılmıştır.

Birinci görselin fiziksel yapısı incelendiğinde birinci adıma beyaz renkli altıgen blok ve üstüne eklenen bir tane mavi renkli eşkenar blok ile bir şekil birimi oluşturularak başlanmıştır. Diğer adımlara bu şekil birimi birer tane eklenerek örüntü genişletilmiştir. Orhan'ın oluşturduğu örüntü tahtaya çizilerek beyaz ve mavi renkli blokların sayısının her adımda nasıl değiştiği sınıfta tartışılmıştır. Araştırmacı bu süreçte öğrencilerin hem görsel temsilden tablo temsiline geçişlerini sağlamak hem de tablo üzerinde sayısal ilişkileri göstermek üzere tahtaya iki sütundan oluşan bir tablo çizmiştir. Önce bağımlı ve bağımsız değişkenleri tabloya işlemiş daha sonra görsel üzerinden hareketle öğrencilerin beyaz ve mavi blok sayılarını aşağıda görüldüğü gibi tabloya yazmalarını sağlamıştır. Bu tartışmadan bir kesit Şekil 3.7'de sunulmuştur.

Adım Sayısı	Beyaz ve Mavi Blok Sayısı
1	1+1
2	2+2
3	3+3
10	10+10

Şekil 3.7. *Örüntü blokları üzerine sınıf tartışmasından bir kesit*

A : Şimdi örüntüyü tahtaya çiziyorum. Her adımda beyaz ve mavi blok sayılarını göstermek üzere de bir tablo çizelim (Tahtaya iki sütunlu bir tablo çizdi). Tabloda sol sütun adım sayısını sağ sütun beyaz ve mavi blok sayısını göstersin. Burada (görselde birinci adımı gösterdi) kaç tane beyaz ve mavi blok var?

Tüm sınıf : Birinci adımda bir beyaz, bir mavi.

A : (Tabloda birinci adıma 1+1 yazdı). İkinci adımda?

Tüm sınıf : İki beyaz, iki mavi.

A : (Tabloda ikinci adıma 2+2 yazdı). Üçüncü adımda?

Tüm sınıf : Üçüncü adımda üç beyaz, üç mavi.

A : Peki örüntü bu şekilde devam ederse 10. adımda kaç tane beyaz ve mavi blok olur?

Uğur : 10+10 olur öğretmenim.

A : Neden 10+10 açıklar mısın?

Uğur : Beyaz ve mavi blok sayıları, adım sayısı ile aynı öğretmenim.

A : Uğur'a katılıyor musunuz?

Tüm sınıf : Evet

Araştırmacı daha sonra tahtaya aşağıda görülen üç sütundan oluşan bir tabloyu çizerek adım sayısı ve toplam blok sayıları arasındaki fonksiyonel ilişki tartışılmıştır. Bu tartışmaya ilişkin bir kesit Şekil 3.8'de sunulmuştur.

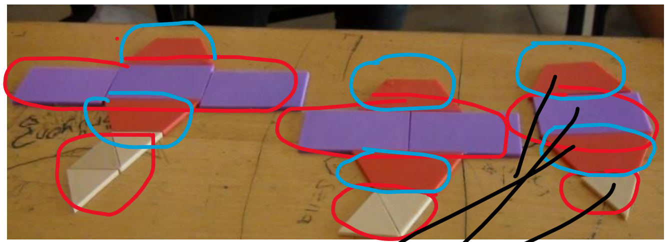
Adım Sayısı	İlişki		Toplam Blok Sayısı
1	1+1	2.1	2
2	2+2	2.2	4
3	3+3	2.3	6
10	10+10	2.10	20
n	n+n	2.n	2n

Şekil 3.8. *Örüntü blokları üzerine sınıf tartışmasından bir kesit*

A	: Şimdi adım sayısı ve toplam blok sayısı arasındaki ilişkiyi bulalım. Birinci adımda beyaz ve mavi blok sayısını 1+1 dediniz. Bunu daha farklı nasıl yazabiliriz? (Sessizlik). Kaç tane iki toplanmış?
Tüm sınıf	: İki tane
A	: Çarpma işlemiyle nasıl yazarız?
Tüm sınıf	: İki çarpı bir.
A	: Peki diğer adımları nasıl ifade edersiniz?
Tüm sınıf	: İki çarpı iki, iki çarpı üç, iki çarpı on.
A	: Güzel. Toplam blok sayıları bu durumda nasıl devam ediyor?
Tüm sınıf	: 2, 4, 6.
A	: O halde size şunu sorsam. Herhangi bir adımdaki blok sayını nasıl bulabiliriz acaba?
Uğur	: Adım sayısının iki katı oluyor.
A	: Aferin Uğur. Örüntünün kuralı nasıl yazarız o halde?
Hakan	: (Kural=Ax2 yazdı)
A	: Hakan A nedir?
Hakan	: Adım sayısı.
A	: 49. adımda ve 120. adımda kaç blok olur? (Öğrenciler 2.49=98 ve 2.120=240 buldular). O zaman adım sayısını istediğimiz gibi değiştirerek toplam blok sayılarını bulabiliyoruz. O zaman bu sayıları temsil eden başka bir harfte kullanabilirim. Örneğin "n" harfini kullansak kuralı nasıl yazarız? Yani n. adım olsa?
Tüm sınıf	: n ile n toplanır … 2xn olur.

Dersin devamında Görsel 3.65'te sunulan parça odaklı oluşturulan (b) örüntüsü de benzer şekilde ele alınmış ve görsel temsilden tablo temsiline geçiş yapılarak, tablo temsili üzerinde sayısal ilişkiler tüm sınıfla tartışılmıştır. Ele alınan (b) örüntüsünün fiziksel yapısı incelendiğinde, birinci adımda iki kırmızı renkli yamuk arasına bir mor renkli dikdörtgen yerleştirilmiş ve kırmızı renkli yamuğun üst tabanına bir krem renkli üçgen blok yerleştirilerek bir şekil birimi ile başlanmıştır. Diğer adımlarda bu şekil biriminin iki parçası kullanılarak (mor ve üçgen) bu parçalar bir önceki adıma eklenerek düzenli bir şekilde örüntü devam ettirilmiştir.

Örüntüde değişen ve sabit kalan parça sayıları görsel üzerinde incelenerek tablo temsiline geçiş yapılmış ve aşağıdaki gibi tablo temsili üzerinde sayısal ilişkiler kurulmuştur. Sayısal ilişkiler üzerinde durulurken adım sayısına bağlı olarak sabit ve değişen nicelikler hem toplamsal hem de çarpımsal ilişkiler ile ele alınmıştır. Aynı zamanda örüntü uzak bir adıma devam ettirilmiş ve örüntünün herhangi bir adımındaki toplam blok sayısı ve örüntünün kuralı ifade edilmiştir.



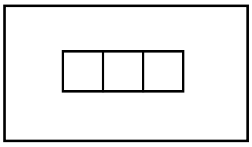
Adım Sayısı	**İlişki**		**Toplam Blok Sayısı**
1	2+1+1	2+2.1	4
2	2+2+2	2+2.2	6
3	2+3+3	2+2.3	8
15	2+15+15	2+2.15	32
A	2+A+A	2+2.A	2+2A

Şekil 3.9. *Örüntü bloklarından oluşturulmuş şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*

Öğrenciler tabloda görüldüğü gibi adımlarda kırmızı yamukların sayısının hiç değişmediğini ve mor dikdörtgen ve krem rengi üçgen sayılarının her adımda adım sayısına bağlı değiştiğini fark etmişlerdir. Sayısal ilişkiler yazılırken de renklere göre hareket edilerek her adımda önce toplamsal sonra, çarpımsal değişim ifade edilmiştir. Bu ilişkilere dayalı olarak öğrencilerde 15. adımı “15x2=30, 30+2=32” şeklinde hesaplamışlardır. Daha sonra oluşturulan sayısal ilişkilerdeki değişim adım sayısı ile ilişkilendirilerek fonksiyonel ilişki kurulmuş ve öğrenciler hem yarı sembolik olarak “adım sayısıx2+2” hem de sembolik olarak “2xA+2” şeklinde bir kurala ulaşmışlardır. Öğrencilerden bazıları değişken yerine harfli ifade olarak “A, a, As” kullanırken bazıları da “adım sayısı” ifadesini kullanmaya devam etmiştir.

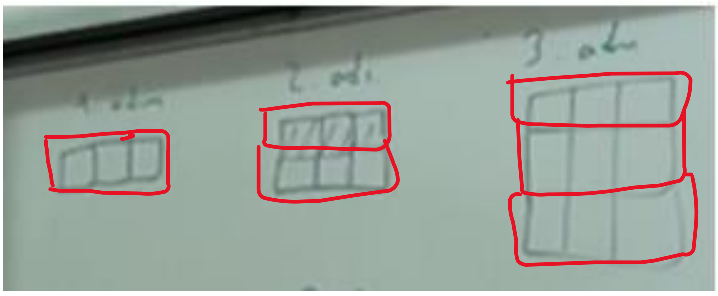
3.4.2. İkinci hafta

İkinci hafta öğretimlere Şekil 3.8'de gösterilen yarı bağımsız örüntü oluşturma etkinliği ile başlanmıştır. Oluşturulabilecek örüntü hem bütün odaklı hem de parça odaklı olarak ilerletilebilmesinden dolayı bu şekilde seçilmiştir.



Şekil 3.10. *Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevi*

Araştırmacı öğrencilere öncelikle ilk adımı bitişik üç kareden oluşan şekil birimini bütün odaklı olarak nasıl devam ettirebileceklerini sormuş, öğrencilerden Orhan ise "3 kareyi ayırmadan altına ekleyebiliriz." şeklinde ifade ederek Görsel 3.66'da sunulan tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntüsünü oluşturmuştur. Oluşturulan örüntü sınıf içerisinde tartışılmıştır. Aşağıda sınıf tartışmasından bir kesit Şekil 3.11'de örnek olarak sunulmuştur.



Görsel 3.66. *Bütün odaklı ilerletilen örüntü*

Adım Sayısı	İlişki		Toplam Kare Sayısı
1	3	1.3	3
2	3+3	2.3	6
3	3+3+3	3.3	9
10		3.10	30
75		3.75	225

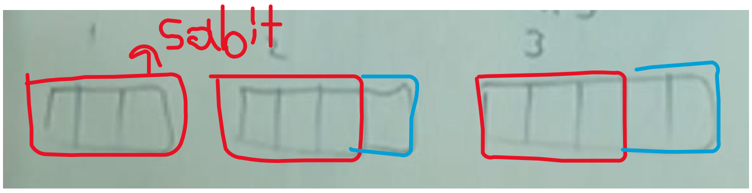
Şekil 3.11. *Bütün odaklı ilerleyebilen örüntü ile ilgili sınıf tartışmasından bir kesit*

A : … Peki bu? (3. adım)

Hakan	: 3+3, 3 tane 3
Uğur	: 3 x 3
A	: 10. adım ne olabilir sizce? … Sevim söyle bakalım.
Sevim	: Alt alta olacak. 30 tane olacak.
A	: Peki kaç tane şu 3'lü gruptan var?
Tüm Sınıf	:10
A	: Peki tekrar sorayım kaç tane şu bütünden var?
Tüm Sınıf	:10
A	: Nerden bildik 10 tane olduğunu?
Orhan	: 3. adımda 3 tane var. (Üçüncü adımda grupladığı üçlü grupları gösterdi) 10. adımda 10 tane olacak.
A	: Doğru mu söyledi arkadaşınız?
Esin	: Evet 2. adımda 2, 1. adımda 1. (Birinci ve ikinci adımda grupladığı üçlü grupları gösterdi).
A	: Peki 10. adımı söylediniz. Peki o zaman 75. adımdaki kare sayısını bulabilir miyim? Kamil söyle
Kamil	: 75x3=225
A	: Doğru mu söyledi Kamil?
Tüm Sınıf	: Evet
A	: Evet güzel. Peki şekil nasıl olacak?
Tüm Sınıf	: Aşağıya doğru olacak.
A	: Peki kural nasıl olacak? 3. adımda bu. 2. adımda bu peki? Kağıtlarınıza yazın bakalım. (Araştırmacı aralarda dolaşıyor hepsi yaptı). Peki herkes bulmuş. Ne bulmuştunuz?

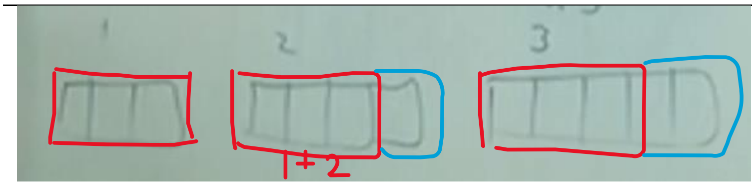
Sınıf içi tartışmada görüldüğü gibi öğrenciler bütün odaklı devam ettirdikleri örüntünün fiziksel yapısından hareketle görsel temsilden tablo temsile geçiş yaparak sayısal ilişkileri kurabilmişler ve örüntüyü uzak adımlara genellemişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin sayılar arasında ilk üç adımda toplamsal ve çarpımsal ilişki kurdukları, ancak uzak adımları çarpımsal ilişki ile hesapladıkları görülmüştür. Aynı zamanda öğrenciler uzak adımları hesaplarken her adımda grup sayısının değiştiğini ancak gruptaki kare sayısının değişmediğini fark ederek adım sayısı ile terim sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi ifade etmişlerdir. Öğrencilerden örüntünün kuralını yazmaları istendiğinde ise öğrencilerden bazıları yarı sembolik olarak "adım sayısıx3", bazıları ise sembolik olarak "a.3, Ax3" şeklinde ifade etmişlerdir. Araştırmacı yarı sembolik ifade edilen kuralları tahtaya yazarak bunun yerine adım sayısını temsil eden harfler kullanılabileceğini açıklamıştır.

Öğrencilerin bütün ve parça odaklı ilerleyen örüntüler arasındaki farkı daha iyi anlayabilmeleri ve görebilmeleri için örüntünün parça odaklı nasıl devam ettirileceği de sınıfta tartışılmıştır. Bunun için öğrencilerden önce örüntüyü parça odaklı ilerletmeleri istenmiştir. Öğrencilerden Yasemin örüntüyü “sağa doğru birer birer” ilerletebileceğini (tek yönde periyodik doğrusal olarak) söylemiştir. Yasemin’in örneği Görsel 3.67’de gösterilmiştir.



Görsel 3.67. *Yasemin’in örüntü örneği*

Yasemin’in oluşturduğu örüntü tahtaya çizilmiş ve araştırmacı öğrencilerden şeklin fiziksel yapısını analiz etmeleri ve 10. adımdaki kare sayısını bulmalarını istemiştir. Uğur “ben ilk adımı sabitledim. 2. adımda 1 kare. 3. adımda 2 kare” oluyor şeklinde açıklamış (araştırmacı Uğur’un açıklamalarına göre tahtada sabit ve değişen kare sayılarını Görsel 3.67’de görüldüğü gibi gruplamıştır), 10. adım için de Uğur “3+9=12” yanıtını vermiştir. Öğrencinin ilk adımdaki kare sayısını sabit tuttuğu, değişen kare sayılarını ise adım sayısının bir eksiği ile ilişkilendirerek parça ilişkisel genelleme yaptığı anlaşılmaktadır. Örüntünün kuralı istendiğinde ise Uğur kuralı iki boyutlu ve sembolik olarak “3+(a-1)” şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacı Uğur’un açıklamaları doğrultusunda üç sütunlu tablo oluşturarak sayısal ilişkileri Şekil 3.12’de görüldüğü gibi tablo temsili üzerinde göstermiştir.



Adım Sayısı	İlişki	Toplam Kare Sayısı
1	3 2+2	3
2	3+1 3+2	4
3	3+2 10+2	5
10	3+9	12
a	3+(a-1)	a+2

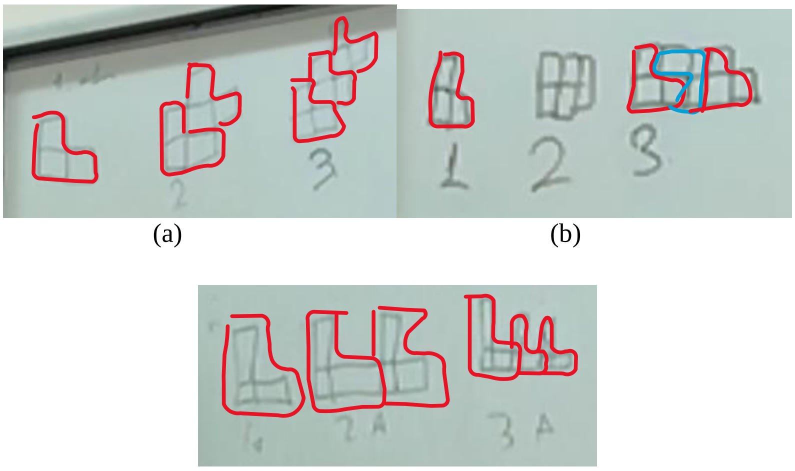
Şekil 3.12. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler.*

Öğrencilerden Sevim ve Yasemin ise aynı örüntüyü genellerken "Öğretmenim adım sayısı ile kare sayısı arasında iki fark var. Ben ordan yaptım" şeklinde bir açıklama yapmışlardır. Araştırmacı kuralı yazmalarını istediğinde ise her ikisi de iki boyutlu ve yarı sembolik olarak "adım sayısı+2" şeklinde ifade etmişlerdir. Araştırmacı öğrencilerin ifade ettikleri açıklamalardan hareketle tablo temsili üzerinde adım sayısı ve toplam kare sayısı arasındaki ilişkiyi tartışmış ve adım sayısı yerine "a" harfi kullanarak kuralın "a+2" olacağı sınıfça ifade edilmiştir. Daha sonra araştırmacı iki farklı yolla ifade edilen kuralların eşitliğine dikkat çekmiş ve "çocuklar Uğur'un yoluyla kuralı=3+(a-1) olarak yazdık, Yasemin ve Sevim'in yoluyla kuralı=a+2 yazdık. Şimdi bu iki kuralı inceleyelim. İlk kuralda 3 ile başladık ve onu sabit aldık, ikinci adımdan itibaren 3'e eklenen kare sayıları 1, 2, 3 şeklinde adım sayısının bir eksiği olarak devam etti. İkinci kuralda da yine 3 ile başladık ancak ikinci adımdan itibaren tüm kare sayılarına odaklandık, yani 3, 4, 5. Bu sayılar adım sayısının iki fazlası olarak devam etmekteydi. Örüntüde toplam kare sayıları değişmiyor ancak toplam kare sayılarını veren kurala ulaşırken örüntünün fiziksel yapısını nasıl inceliyorsak ona göre kuralı yazıyoruz. Bir örüntünün tek kuralı vardır, dolayısıyla yazdığımız tüm kurallar birbirine eşittir" şeklinde bir açıklamada bulunmuştur.

3.4.3. Üçüncü hafta

Üçüncü haftaya kadar bazı öğrencilerin (Mehmet ve Özlem) hala oluşturdukları örüntüleri genellemede zorlandığı ve bazı öğrencilerin genelleme süreçlerinde yarı sembolik olarak kural yazmaya devam ettikleri görülmüş, bu nedenle bu hafta etkinliğinde oluşturulan örüntülerin fonksiyon tabanlı genelleme çalışmalarına devam edilmiştir. Bu amaçla da parça ve bütün odaklı örüntü oluşturma görevlerine ve sayısal ilişkilerin takibinin daha net görüldüğü tablo temsili kullanımına devam edilmiştir. Bu bağlamda konuyla alakalı çalışma kâğıdı oluşturulmuş ve ders sonunda öğrencilerden geri alınmak üzere verilmiştir. Çalışma kâğıdında hem parça hem de bütün odaklı ilerlemeye uygun yarı bağımsız örüntü oluşturma görevi verilmiş (şekil birimi üç kareden oluşan L örüntüsü) ve bu görevi ilk önce bütün odaklı daha sonra parça odaklı olarak ilerletmeleri istenmiştir. Farklı örüntüler oluşturan öğrenciler tahtaya çıkartılarak arkadaşlarına çalışmalarını sunmaları sağlanmıştır. Bu öğrencilerin örnekleri üzerinden, öğrencilerin görsel temsilden tablo temsiline geçiş yapmalarına da imkân tanınmıştır.

Bütün odaklı örüntüleri tüm öğrenciler oluşturmuştur ve Görsel 3.68’de sunulan üç çeşit örüntü örneği ortaya çıkmıştır.



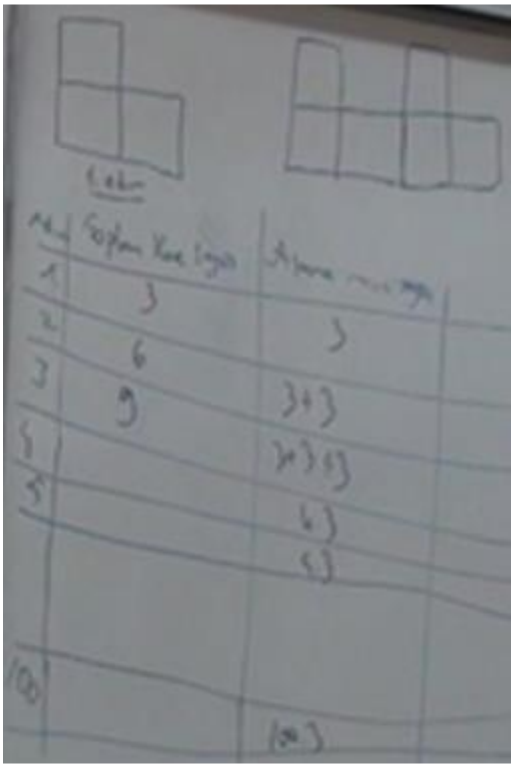
(a) (b)

(c)

Görsel 3.68. *Öğrencilerin bütün odaklı oluşturduğu örüntü örnekleri*

Görsel 3.68’de görülen bütün odaklı oluşturulan (a) örüntüsü tek yönde (üst sağ), (c) örüntüsü tek yönde (yatay sağ) periyodik doğrusal genişleyen, (b) örüntüsü ise döngüsel olarak genişleyen örüntüdür. Öğrencilerden Orhan (b) örüntüsünü oluştururken birinci adımda L şeklinde verilen şekil birimini ikinci adımda 90 derece döndürmüş ve birinci adıma bitişik çizerek diğer adımları oluşturmuştur.

Bütün odaklı (c) örüntüsünü oluşturan öğrencilerden biri de Mehmet’tir. Mehmet’e örüntüsünü nasıl oluşturduğu sorulduğunda “üç kareye bitişik üç kare ekledim” şeklinde açıklamıştır. Mehmet’e örüntünün nasıl devam ettiği sorulduğunda ise 3, 6, 9 şeklinde yanıt vermiştir. Bu yanıttan Mehmet’in yinelemeli düşünerek örüntüyü oluşturduğu anlaşılmaktadır. Daha sonra tahtaya üç sütunlu tablo çizilmiş ve Mehmet’ten toplam kare sayılarını tabloya yazması istenmiştir. Görsel 3.69’da Mehmet’in bütün odaklı örüntü oluşturma örneği ve tablo temsili gösterilmiştir.



Görsel 3.69. *Mehmet'in örüntü örneği ve tablo temsili*

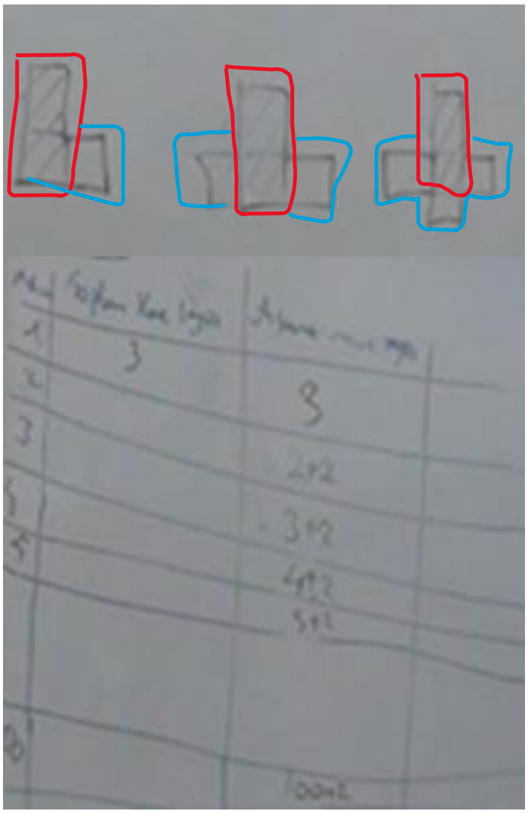
Görsel 3.69'da görüldüğü üzere Mehmet örüntünün adımlarındaki kare sayılarını tabloya işlemiştir. Araştırmacı hem Mehmet'e hem de sınıftaki diğer öğrencilere şeklin fiziksel yapısına dayalı her adımda kare sayılarındaki değişimi incelemelerini ve tabloya yazmalarını istemiştir. Görsel 3.69'da tablo temsili üzerinde de görüldüğü gibi öğrenciler "ilk adımda üç tane kare, ikinci adımda buna 3 tane kare eklenmiş, üçüncü adımda ise üç tane üç kare" şeklinde açıklamalarda bulunmuşlardır. Sayısal ilişkiler tabloda ilk üç adımda "3, 3+3, 3+3+3" şeklinde toplamsal olarak gösterildikten sonra araştırmacı 3'lerin her adımda değiştiğini söyleyerek "peki bu değişimler neye bağlı değişiyor?" sorusunu sormuştur. Bu soruya ilişkin sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Esin	: Adım sayısı kadar 3 var.
Tüm sınıf	: Evet
A	: Yani adım sayısına bağlı, adım sayısı kadar değişiyor diyorsunuz güzel. 4. adım için ne söylersiniz o zaman? Yazın bakalım. (Araştırmacı sınıfta gezinerek defterleri inceledi. Bazı öğrenciler, 3+3+3+3, bazıları da 4.3 yazdı, toplamsal ilişkiyi kullanan Mehmet tekrar tahtaya kaldırıldı). Mehmet gel bakalım. Ne yazdın?
Mehmet	: 3+3+3+3 olur.
A	: Daha kısa bir şekilde yazabilir miyiz bunu? (Mehmet sessiz kaldı).

Tüm sınıf	: 4.3 yazarız. Dört tane üç toplanmış.
A	: 5. adım?
Tüm sınıf	: 5.3
A	: 100. adım?
Tüm sınıf	: 100.3

Diyalogda görüldüğü gibi öğrenciler kare sayılarındaki değişimi ilk üç adım için toplamsal, daha sonraki adımlarda çarpımsal ilişkiyi kullanarak örüntüyü yakın ve uzak adımlara devam ettirmişlerdir. Öğrencilerden genel kuralı bulmaları istendiğinde ise tüm öğrenciler "a" adım sayısı olmak üzere kuralı sembolik yani "a x 3" şeklinde fonksiyon tabanlı olarak ifade etmişlerdir. Öğrencilerin bütün odaklı devam ettirdikleri örüntüde çarpımsal ilişkiyi kullanarak genel kuralı bulmaları da kolay olmuştur. Diğer yandan araştırmacı öğrencilere değişken yerine farklı harflerde kullanabileceklerini hatırlatsa da öğrencilerin genelde değişken yerine "a" ya da "A" harfini kullandıkları görülmektedir.

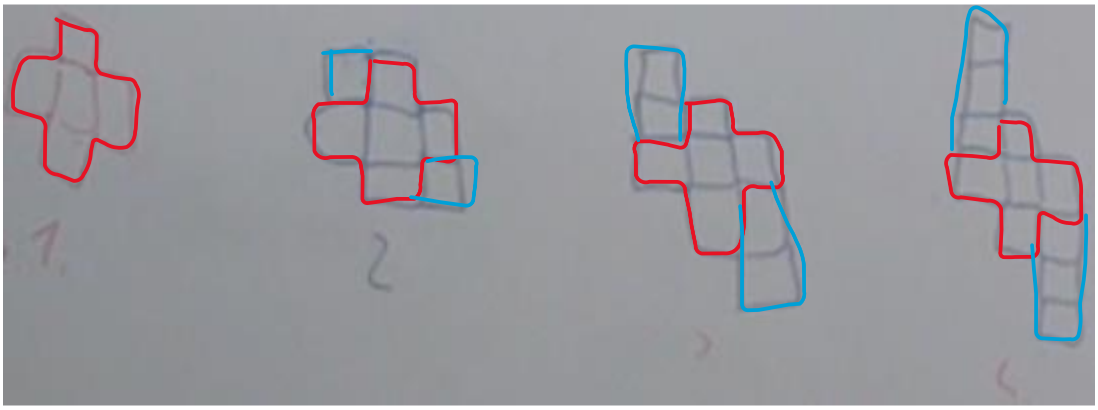
Parça odaklı örüntü oluşturan öğrencilerden Orhan'ın örüntüsü Görsel 3.70'de sunulmuştur.



Görsel 3.70. *Orhan'ın örüntü örneği ve tablo temsili*

Görsel 3.70'de görüldüğü gibi Orhan örüntüsünü "önce sol, sonra aşağı sonra tekrar sol, tekrar aşağı" şeklinde salınımlı olarak ilerlettiğini açıklamıştır. Orhan'ın açıklamaları doğrultusunda tablo temsiline geçilmiş ve Orhan'dan oluşturduğu şekliyle örüntüdeki kare sayılarını tabloya yazması istenmiştir. Orhan ilk adımdaki iki kareyi renklendirerek sabitlemiş ve değişen kare sayılarını tablo temsili üzerinde "3, 2+2, 3+2, 4+2, 5+2 ve 100+2" şeklinde yazmıştır. Araştırmacı Orhan'ın oluşturduğu örüntünün kuralı tüm sınıfa sorduğunda ise Esin "adım sayısı artı iki" şeklinde sözel olarak açıklamıştır. Öğrencilerden kuralı yazmaları istendiğinde ise "a+2", "A+2" ve bazı öğrencilerin de "n+2" şeklinde sembolik, bazı öğrencilerin ise hala "adım sayısı+2" şeklinde yarı sembolik kural yazdıkları görülmüştür.

Parça odaklı örüntü oluşturan bir diğer öğrenci Esin'in oluşturduğu örüntü Görsel 3.71'de sunulmuştur.



Görsel 3.71. *Esin'in parça odaklı oluşturduğu örüntü örneği*

Görsel 3.71'de sunulan örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde birinci adımda üç kareden oluşan şekil birimi iki yönde (sol üst, sağ alt) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü olduğu görülmektedir. Esin de örüntüyü genişletmeye birinci adımdan başladığını ve sola ve alta birer kare eklediğini, ikinci adımda sol üste ve sağ alta birer kare eklediğini ve diğer adımlarda da benzer yaklaşımı devam ettirdiğini açıklamıştır. Esin'in oluşturduğu örüntü sınıf tartışmasına sunulmuş ve her adımdaki kare sayıları tablo temsili ile gösterilmiştir. Bu tartışmadan bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A	: Peki Uğur buraya (Tabloya) bakarak kural hakkında bir şey söyleyebilir misin?
Uğur	: Adım eee adım sayısı (Cevap veremedi)
A	: Sevim söyleyebilir misin?

Sevim : 5 çarpı 2

A : Yasemin ne dersin?

Yasemin : Adım sayısı eksi 1, 2 tane eklenmiş

Uğur : Adım sayısı eksi 1 artı 5

Yasemin : Şunlar (ikinci adımda sol üst, sağ alt kare) 2 kare, adım sayısının bir eksiği kadar, çarpı 2 deriz, Buda (birinci adımdaki 5 kare) artı 5

A : Doğru oldu mu Orhan?

Orhan : Evet

Sevim : hıı

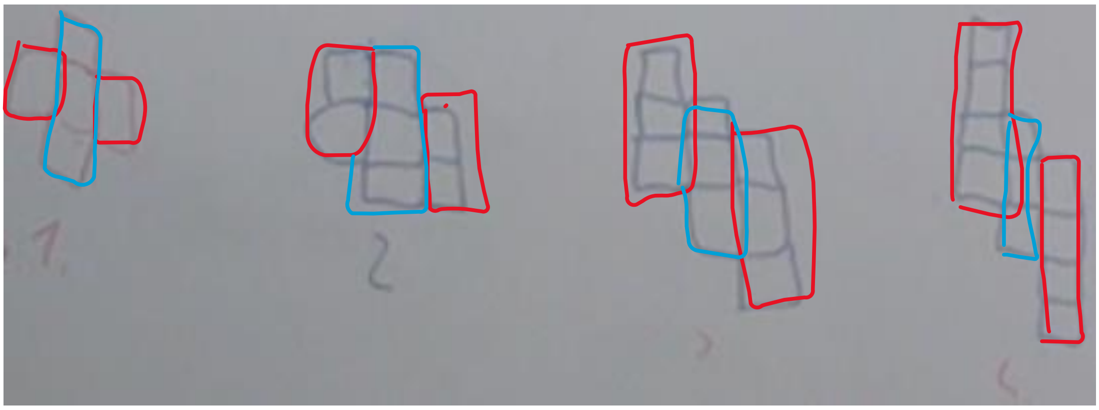
A : Aynen öyle. Kamil 100. adımda kaç tane kare var?

Kamil : 5 ıııı olacak (Cevap veremedi)

Hakan : 99x5=495, 495+5=500 olur.

Öğrenciler Esin'in oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısından hareketle yani görsel temsilden tablo temsiline geçerek, önce ilk üç adım için toplamsal düşünerek "5, 5+2, 5+4" şeklinde sayısal ilişkiler kurmuş, dördüncü adımda ise değişen kare sayıları arasındaki çarpımsal ilişkiyi fark ederek "5+2.3" şeklinde sayısal ilişkileri yazmışlardır. Sınıf içi tartışmada, diyalogda görüldüğü gibi Yasemin genel kuralı sözel olarak iki boyutlu yarı sembolik olarak "adım sayısı- 1x 2 + 5" şeklinde fonksiyon tabanlı olarak ifade etmiştir. Hakan'da bu genelleme üzerinden 100. adımı da "500" olarak hesaplamıştır.

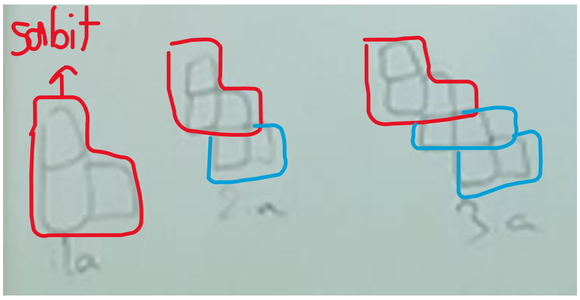
Esin'in oluşturduğu örüntünün farklı bir strateji ile nasıl genellenebileceği sınıf tartışmasına sunulmuş ve örüntünün fiziksel yapısı tekrar incelenmiştir. Öğrenciler Görsel 3.72'de sunulduğu gibi her adımda ortada kalan üç karenin sabit değişmez iken sol ve sağdaki kare sayılarının adım sayısına bağlı ve aynı sayıda değiştiğini fark etmişlerdir.



Görsel 3.72. *Esin'in parça odaklı oluşturduğu örüntü örneği*

Sınıf tartışmasında her adımdaki kare sayıları tablo temsili ile de gösterilmiştir. Öğrenciler tabloda ilk üç adımı “1. adım için 3+1+1, 2. adım için 3+2+2, 3. adım için 3+3+3” şeklinde toplamsal ilişkiyi kullanarak ifade etmişlerdir. Bu süreçte araştırmacının yönlendirmesiyle değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmişler ve çarpımsal olarak yakın adım 5. adımı “3+2.5=13”, uzak adım olarak 100. adımdaki kare sayısını da “3+2.100=203” şeklinde hesaplamışlardır.

Parça odaklı oluşturulan Sevim’in bir diğer örüntüsü de Görsel 3.73’te sunulmuştur.



Görsel 3.73. *Sevim’in parça odaklı örüntü örneği*

Örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde birinci adımdaki şekil biriminin parçası (iki kare) kullanılarak tek yönde (sağ altta) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü olduğunu görülmektedir. Bu örüntünün genellenmesi diğer örüntülere göre daha kolay olmuştur. Çünkü sağ altta kayarak genişleme söz konusu olduğundan öğrencilerin çoğunluğu ilk adımda belirgin görünen şekil birimini sabit olarak ele almışlar ve altta eklenen kare sayılarının ise adımlara bağlı değiştiğini kolayca fark etmişlerdir.

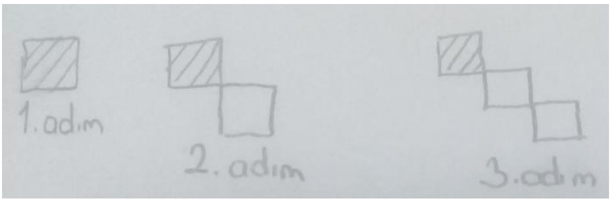
Öğrencilerin çoğu genelleme sürecinde ilk üç adımdaki sabit ve değişen nicelikleri “3, 3+2, 3+2+2” şeklinde ifade etmişlerdir. Yakın ve uzak adımı hesaplamaya geçince de değişen kare sayılarının adım sayısının bir eksiği olduğu ifade edilerek, toplamsal ilişkiden çarpımsal ilişkiye geçiş yapmışlardır. Bu süreçte Kamil örüntünün 10. ve 100. adımlarını “2x9=18, 18+3=21; 2x99=198, 198+3=201” şeklinde hesaplamıştır. Tüm öğrencilerden çalışma kâğıtları üzerinde örüntünün kuralını yazmaları istenmiştir. Bazı öğrenciler gibi Yasemin örüntünün kuralını yarı sembolik olarak “kural=adım sayısı-1x2+3” yazarken, Orhan ve Uğur gibi Hakan’da kuralı sembolik olarak “a-1x2+3” şeklinde ifade etmiştir.

3.4.4. Dördüncü ve beşinci hafta

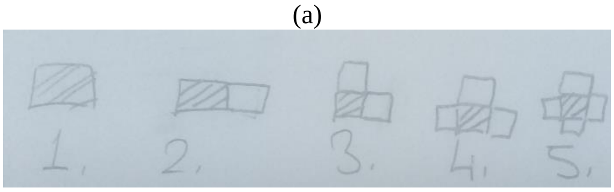
Örüntü oluşturma ve oluşturdukları örüntüleri genellemede belirli bir seviyeye gelmiş öğrencilere son klinik görüşme öncesi bağımsız örüntü oluşturma etkinliği verilmiş ve öğrencilerden farklı örüntüler oluşturmaları istenmiştir. Bu süreçte öğrencilere çalışma yaprağı dağıtılmış ve öğrenciler bağımsız olarak çalışmışlardır. Çalışmada araştırmacı öğrenciler arasında dolaşarak onları yönlendirmiştir. Bu süreçte öğrencilerin örüntülerini parça ve bütün odaklı olarak oluşturdukları ve öğrencilerin çoğunluğunun da oluşturdukları bazı örüntüleri fonksiyon tabanlı genelledikleri görülmüştür. Bu süreçte öğrenciler tablo temsili kullanmışlar yarı sembolik ve sembolik olarak örüntülerin genel kurallarını ifade etmişlerdir.

Öğrenciler bağımsız örüntü oluştururken daha önceki çalışmalara benzer şekilde genelde kare şeklini kullanmayı tercih etmişlerdir. Bazı öğrenciler bir, bazıları iki, bazıları da üç kare ile başlamıştır. Bu süreçte benzer örüntüleri oluşturanların yanı sıra fiziksel yapıları farklı örüntülerin oluştuğu da gözlenmiştir. Önceleri prototip dediğimiz yatay olarak periyodik doğrusal genişleyen örüntülerin yanı sıra bu çalışmada sağ sol, alt üst periyodik genişleyen ya da döngüsel ya da salınımlı genişleyen örüntülerde oluşturulmuştur.

Görsel 3.74'te bir kare ile başlayan iki öğrencinin oluşturdukları örüntü örnekleri sunulmuştur.



(a)



(b)

Görsel 3.74. *Öğrencilerin bir kare ile oluşturdukları örüntü örnekleri*

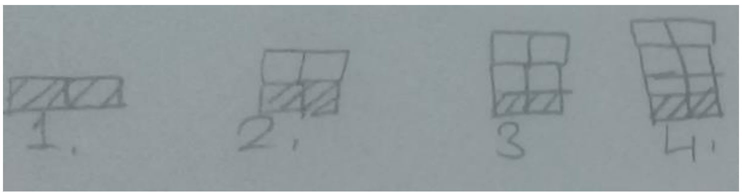
Görsel 3.74'te görüldüğü gibi birinci görsel tek yönde (sağ alt) periyodik doğrusal genişleyen, ikinci görsel ise dört yönde (sağ, üst, sol, alt) olmak üzere döngüsel genişleyen olarak oluşturulmuştur. Bütün odaklı oluşturulan örüntülerde birinci adımdaki şekil birimi renklendirilmiştir. Ancak örüntülerde kare sayıları adım sayısıyla aynı olacak şekilde değiştiği için öğrenciler toplam kare sayısına odaklanmışlar ve kolay bir şekilde yakın ve uzak adıma devam ettirip fonksiyon tabanlı genellemişlerdir.

Oluşturulan bu örüntülerden bazıları sınıf tartışmasına sunulmuştur. Orhan'ın oluşturmuş olduğu (b) örüntünün genellenmesine ilişkin sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A	: Peki Orhan'ın oluşturduğu örüntü nasıl ilerlemiş?
Esin	: Önce sağa eklemiş, sonra yukarı, sonra sola, sonra alta bir kare eklemiş.
A	: Doğru mu söyledi arkadaşınız?
Yasemin	: Evet
A	: Peki 6. adım nasıl olur o zaman?
Uğur	: Bir kare sağa ekleyecek öğretmenim.
A	: Kaç kare?
Tüm sınıf	: 6 tane
A	: Ne fark ediyorsunuz?
Hakan	: Adım sayısı ile aynı
A	: Peki 81. adımda kaç kare olur?
Hakan	: 81 tane olur.
A	: Kuralı nasıl ifade ederiz o halde?
Tüm sınıf	: Adım sayısı
A	: Kuralı yazar mısınız?

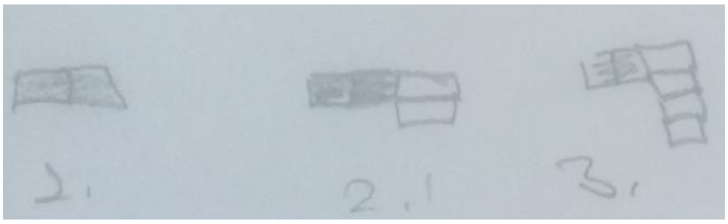
Diyalogdan görüldüğü gibi öğrenciler Orhan'ın oluşturduğu örüntüyü kolay bir şekilde uzak bir adıma genelleyebilmişler ve kuralı sözlü olarak ifade etmişlerdir. Öğrenciler çalışma yaprağına kuralı ifade ederken de bazıları sembolik olarak "A, a" bazıları da yarı sembolik olarak "As" bazıları da sözel "Adım sayısı" olarak yazmışlardır

Benzer şekilde iki kare ile başlayıp bütün odaklı olarak örüntülerini oluşturan öğrenciler de olmuştur. Bu öğrencilerin örnekleri de Görsel 3.75'te sunulmuştur.

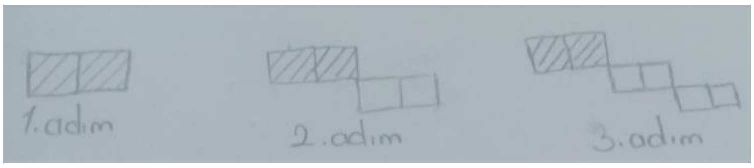


(a)

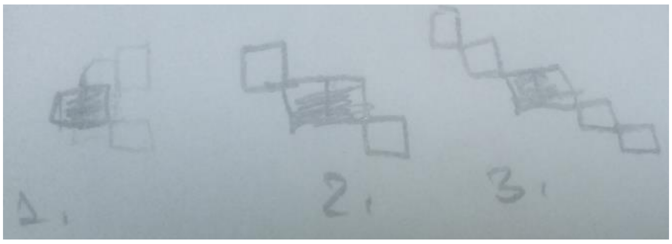
Görsel 3.75. *Bütün odaklı oluşturulan örüntü örnekleri*



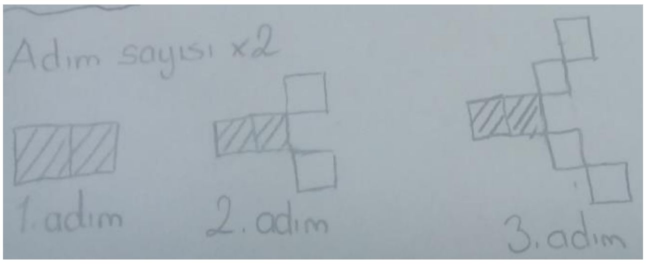
(b)



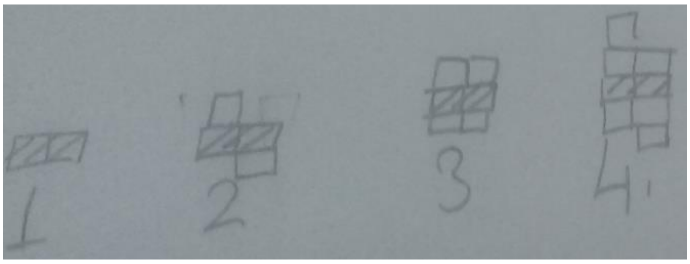
(c)



(d)



(e)

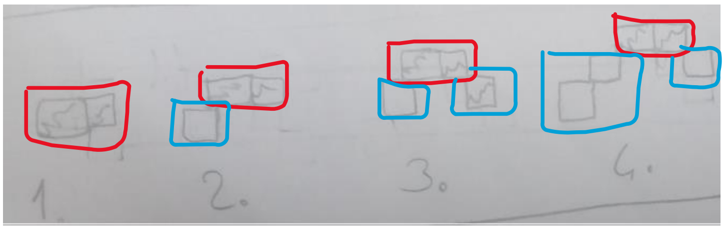


(f)

Görsel 3.75. (Devam) *Bütün odaklı oluşturulan örüntü örnekleri*

Görsel 3.75'te sunulan örüntülerin fiziksel yapıları incelendiğinde a, b, c, d, e örüntülerinin tek yönde (a-üst, b-sağ alt, c-alt kaydırılmış, d-sol üst ve sağ alt kaydırılmış, e-sağ üst ve sağ alt kaydırılmış) periyodik doğrusal genişleyen ve f örüntüsü ise salınımlı (bir adımda sol üst, sağ alt, bir adımda sol alt, sağ üst) genişleyen şekilde oluşturulmuştur. Öğrenciler her ne kadar iki kare ile başlayıp bütün odaklı olarak sabit değişen (sabit fark 2) örüntülerini devam ettirseler de örüntülerin fiziksel yapılarının daha önce oluşturulanlardan farklılaştığı gözlenmektedir. Aynı zamanda bütün odaklı hareket edildiği için öğrenciler çarpımsal düşünerek örüntülerini hem sözlü ya da yarı sembolik hem de sembolik/cebirsel olarak "Adım sayısının x 2, 2xa" şeklinde fonksiyon tabanlı olarak kolayca genelleyebilmişlerdir.

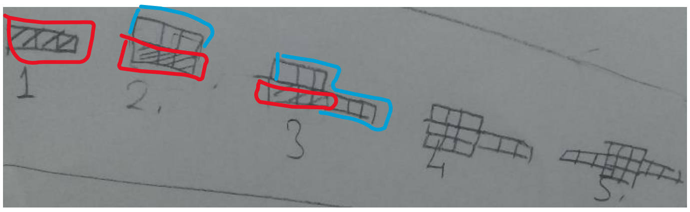
İki kare ile başlayan bazı öğrenciler ise örüntülerini parça odaklı oluşturmuşlardır. Görsel 3.76'da bir öğrencinin parça odaklı oluşturduğu örüntü örneği gösterilmiştir.



Görsel 3.76. *Parça odaklı oluşturulan örüntü örneği*

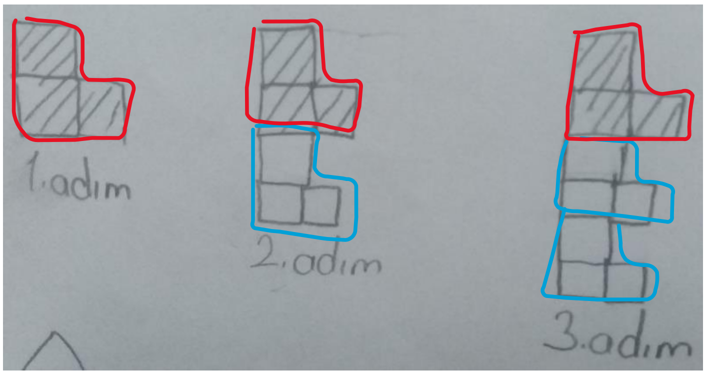
Görsel 3.76'da görüldüğü gibi, iki kare ile başlayan öğrenci örüntüsünü bir adımda sol alta bir kare diğer adımda sağ alta bir kare ekleyerek salınımlı genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Öğrenci birinci adımdaki şekil birimini renklendirmiş ve ikinci adımdan itibaren bu şekil birimine eklediği kareleri kaydırmıştır. Dolayısıyla öğrenciler örüntüde sabit ve değişen kare sayılarını ayırt etmiş ve değişen kare sayılarını da adım sayısı ile kolayca ilişkilendirmişlerdir. Böylece örüntüyü yakın ve uzak bir adıma devam ettirmek ve genellemek kolay olmuş ve tüm sınıfça örüntü iki boyutlu fonksiyon tabanlı "2+(n-1)" şeklinde sembolik/cebirsel olarak genellenmiştir.

Üç kare ile başlayarak örüntü oluşturan öğrencilerin çoğunluğu ise parça odaklı olarak örüntülerini oluştururken, iki öğrenci örüntülerini bütün odaklı olarak oluşturmuştur. Görsel 3.77'de iki öğrencinin bütün odaklı oluşturduğu örüntü örnekleri sunulmuştur.



(a)

Görsel 3.77. *Öğrencilerin üç kare ile oluşturdukları bütün odaklı örüntü örnekleri*

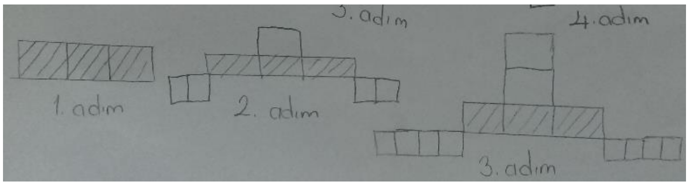


(b)

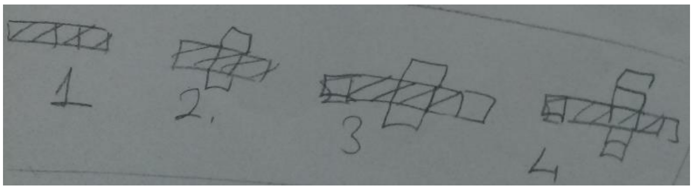
Görsel 3.77. (Devam) *Öğrencilerin üç kare ile oluşturdukları bütün odaklı örüntü örnekleri*

Görsel 3.77'de görüldüğü gibi (a) örüntüsü üst, sağ, alt, sol şeklinde döngüsel genişleyen ve (b) örüntüsü ise alt altta periyodik doğrusal genişleyen şeklindedir. Öğrenciler birinci adımdaki şekil birimini renklendirmişlerdir. Ancak genelleme sürecinde toplam kare sayılarına odaklanmışlar ve adım sayısının üç katlı ile çarpımsal ilişkilendirilerek yakın ve uzak adımlara devam ettirmişlerdir. Örüntülerin kurallarını ise fonksiyon tabanlı olarak hem yarı sembolik hem de sembolik/cebirsel olarak "adım sayısı x 3 ve 3xa" şeklinde yazmışlardır.

Örüntü oluşturmaya üç kare ile başlayan öğrencilerden bazıları ise örüntülerini parça odaklı oluşturmuşlardır. Bu öğrencilerin örüntüleri Görsel 3.78'de gösterilmiştir.

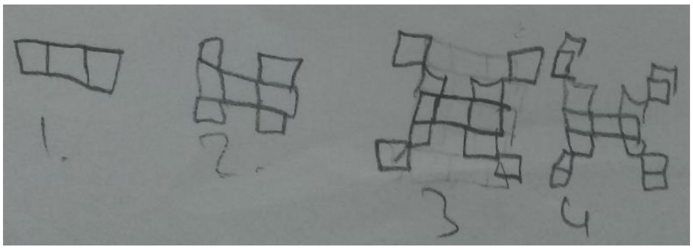


(a)

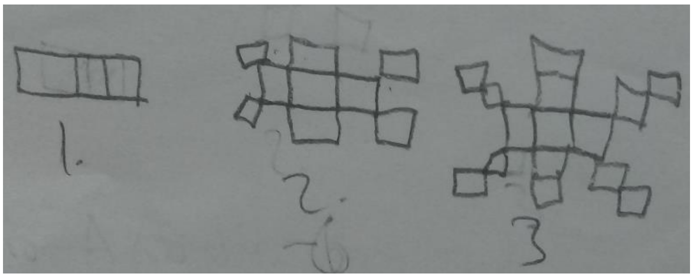


(b)

Görsel 3.78. *Öğrencilerin üç kare ile oluşturdukları parça odaklı örüntü örnekleri*



(c)



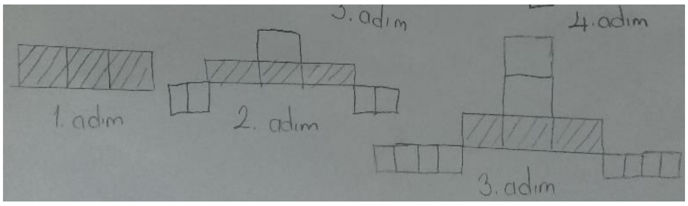
(d)

Görsel 3.78. (Devam) *Öğrencilerin üç kare ile oluşturdukları parça odaklı örüntü örnekleri*

Görsel 3.78’de görüldüğü gibi, (a) örüntüsü üç yönde (sol, üst, sağ) periyodik genişleyen, (b) örüntüsü bir adımda üst, alt diğer adımda sol ve sağ olmak üzere salınımlı genişleyen, (c) ve (d) örüntüleri ise döngüsel genişleyen şeklinde oluşturulmuştur. (a) ve (b) örüntülerinde öğrenciler şekil birimini renklendirmişler, ekledikleri kareleri renksiz bırakmışlardır.

Öğrenciler parça odaklı oluşturdukları bu örüntüleri bütün odaklı oluşturulan örüntülere göre genellerken zorlanmışlardır. Örneğin (a) örüntüsünün fiziksel yapısı incelendiğinde ikinci adımdan itibaren üç yönde genişleyen örüntü üstte birer kare ile sabit değişirken, sol alt ve sağ alta ikişer kare ile sabit değişmektedir. Parça odaklı genelleme yapan öğrenci bu yapıda üç adımdaki sayısal ilişkiyi “3, 3+5, 3+10” şeklinde göstermiş, ancak fonksiyonel ilişkiyi kurarken zorlanmıştır. Örüntü tahtaya çizilerek önce fiziksel yapısı incelenmiş, sonra tablo temsili kullanılarak sayısal ilişkiler tartışılmıştır.

Bu tartışmadan bir kesit Şekil 3.13’te sunulmuştur.



Adım Sayısı	İlişki		Toplam Kare sayısı
1	3	3+5.0	3
2	3+5	3+5.1	8
3	3+10	3+5.2	12
20		3+5.19	98
n		3+(n-1).5	

Şekil 3.13. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*.

A : Sevim gel bakalım örüntüyü nasıl oluşturdun?

Sevim : Birinci adımda üç kare var. Buraya (üst) bir kare, buralara (altlar) iki kare ekledim, 3+5=8 kare oldu. Üçüncü adımda buralara (altlara) iki kare, buraya (üst) bir kare ekledim, 3+10, 13 kare oldu.

A : Bu söylediklerini tabloya yazar mısın?

Sevim : 3, 3+5, 3+10, 3, 8, 13 olur.

A : 4. adımda kare sayısı ne olur?

Sevim : Beş beş artıyor, 13+5=18 olur.

A : 20. adım deseydim?

Tüm sınıf : (Sessizlik)

A : 3'e eklenen sayıları inceleyin bakalım.

Orhan : Beşin katları.

A : (Araştırmacı tabloda 5'i ve 10'u gösterdi). Bunları nasıl ifade edebiliriz?

Uğur : Beş çarpı bir, beş çarpı iki.

A : (Araştırmacı birinci adımı göstererek). Peki burada 5'in katı yok ne yazalım.

Uğur : Beş çarpı sıfır.

A : O zaman 3'ler sabit hiç değişmedi, buna eklediğimiz kare sayıları değişiyor. Peki adım sayısı ile bu değişen kare sayıları nasıl ilişkili?

Yasemin : Adım sayısının bir eksiği öğretmenim.

A : Güzel. Yasemin 20. adımdaki kare sayısı ne olur?

Sevim : 19 çarpı 5 artı 3 olur. (98 hesapladı).

A : Kuralı nasıl yazarız o zaman?

Tüm sınıf : (Sözlü olarak) Üç artı adım sayısı eksi Bir çarpı beş.

A : (Kuralı tabloya yazdı). 3+(n-1).5 yazabilir miyim?

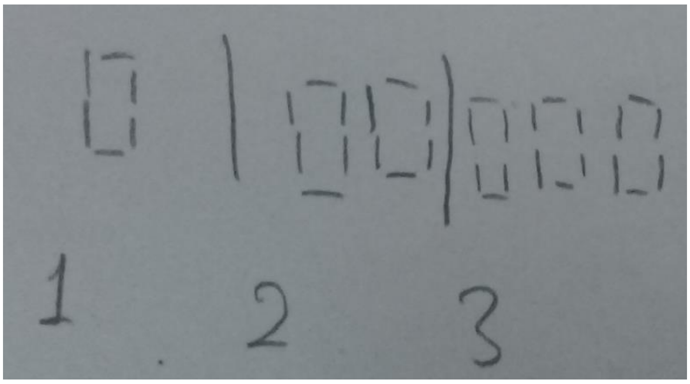
Tüm sınıf : Evet

Diyalogda görüldüğü gibi öğrenciler şekil birimine eklenen toplam kare sayılarına odaklanmışlar ve değişen kare sayılarını beşin katları ile çarpımsal ilişkilendirmişlerdir.

(b) örüntüsünü oluşturan öğrenci de örüntüdeki sayısal ilişkileri şeklin yapısına dayalı olarak yani ilk adımdaki 3 kareyi sabit değişmeyen sayı olarak ele almış ve değişen kare sayılarını “3, 3+2, 3+4, 3+6” şeklinde ifade etmiştir. Sınıf tartışmasında (a) örüntüsüne benzer şekilde 3’e eklenen kare sayıları ikinin katları ile çarpımsal olarak ilişkilendirilmiş ve örüntünün genel kuralı sembolik/cebirsel olarak “3+2.(n-1)” şeklinde ifade edilmiştir.

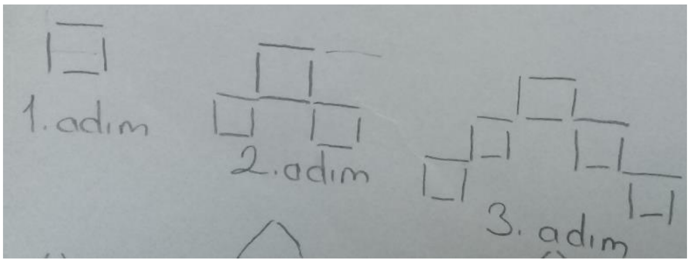
Benzer yapıda sayısal ilişkileri kurulan (a) ve (b) örüntülerinin sınıf tartışması ile genellenmesi sonucunda öğrenciler, döngüsel genişleyen (c) ve (d) örüntülerini genellerken zorlanmamışlardır. Çünkü (c) ve (d) örüntülerinde şekil birimi (üç kare) öğrenciler tarafından renklendirilmemesine karşın yapı gereği ortada yer alması ve eklenen karelerin köşelere doğru 4 kolda genişlemesi öğrencilerin görsel temsilden sayısal temsile geçişlerini kolaylaştırmıştır. Dolayısıyla sınıfın bu örüntüleri genellemesi de kolay olmuştur. (a) ve (b) örüntülerinde olduğu gibi (c) ve (d) örüntülerinin genel kurallarını “3+4(n-1)” ve “3+6(n-1)” şeklinde sembolik/cebirsel olarak ifade etmişlerdir.

Araştırmacı uygulamanın devamında öğrencilerden farklı şekilleri kullanarak örüntüler oluşturmalarını da istemiştir. Farklı örüntü oluşturan öğrencilerden bazıları kare şeklini kullansalar da kare sayısı dışında karenin kenar sayılarına odaklanmıştır. Görsel 3.79’da öğrencilerin oluşturmuş oldukları örüntüler gösterilmiştir.

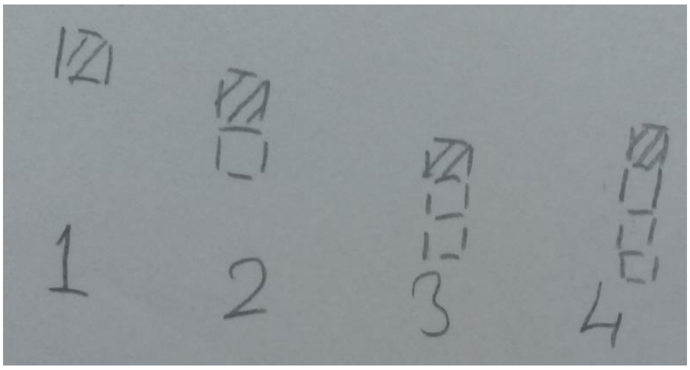


(a)

Görsel 3.79. *Öğrencilerin oluşturdukları farklı örüntü örnekleri*



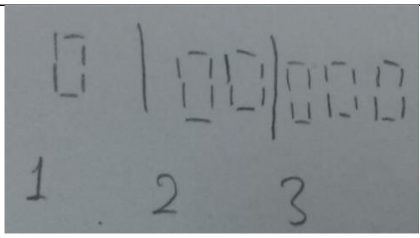
(b)



(c)

Görsel 3.79. (Devam) *Öğrencilerin oluşturdukları farklı örüntü örnekleri*

Görsel 3.79'da görüldüğü gibi, bütün ve parça odaklı tek yönde ve iki yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntüler oluşturulmuş ve karelerin kenar çizgilerine odaklanılmıştır. Orhan'ın bütün odaklı oluşturduğu (a) örüntüsünde öğrenci birinci adımda çizdiği şekil birimini adım sayısı kadar devam ettirmiştir. Bu örüntü tahtaya çizilerek sınıf tartışmasına sunulmuştur. Sınıf tartışmasında öğrenciler öncelikle şekil biriminin sırasıyla "1, 2, 3" şeklinde devam ettiği ifade etmişler daha sonra kenar sayılarını tablo temsili üzerinde göstermişlerdir. Sınıf tartışmasından bir kesit Şekil 3.14'te sunulmuştur.



Adım Sayısı	İlişki		Toplam Kenar Sayısı
1	1	6.1	6
2	2	6.2	12
3	3	6.3	18

Şekil 3.14. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler*.

A	: Örüntüde kenar sayıları nasıl değişiyor?
Tüm sınıf	: 6, 12, 18.
A	: Bu sayılar arasında nasıl bir ilişki var?
Tüm sınıf	: Aralarında altı fark var.
A	: Başka nasıl bir ilişki var Orhan?
Orhan	: Altının katları öğretmenim.
A	: Altının katları olarak nasıl ifade ederiz Hakan?
Hakan	: 6x1, 6x2, 6x3 (Araştırmacı tabloya yazdı)
Sevim	: Adım sayısını altı ile çarpıyoruz.
Uğur	: a.6 yazarız öğretmenim.

Bütün odaklı (b) örüntüsünü oluşturan Sevim'de birinci adımda belirlediği şekil birimini sola ve sağa bir birim ekleyerek devam ettirmiştir. Benzer şeklide bu örüntüde de öğrenciler öncelikle karelere odaklanmışlar ve kare sayılarının "1, 3, 5" şeklinde devam ettiğini ifade etmişlerdir. Ancak bu örüntüyü genelleme diğerine göre kolay olmamıştır. Çünkü her adımda toplam kenar sayıları 4, 12, 20 şeklinde devam ettiği için öğrenciler örüntüyü uzak bir adıma devam ettirmede zorlanmışlardır. Bir önceki hafta öğrenciler benzer yapıda karelerden oluşmuş örüntüde sabit ve değişen kare sayılarını belirlemiş ve değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmişlerdi. Araştırmacı da buradan hareketle önce kare sayılarındaki değişimleri inceletmiş, daha sonra kenar sayılarına dikkat çekmiştir. Bu bağlamda öğrenciler önce örüntünün fiziksel yapısını analiz etmişler ve birinci adımdaki kareyi sabitleyerek, her adımdaki kare sayılarını tablo temsili üzerinde "1, 1+2, 1+2+2" şeklinde göstermişlerdir. Araştırmacının yönlendirmesiyle bazı öğrenciler ise değişen kare sayıları arasındaki çarpımsal ilişkiyi "1, 1+2x1, 1+2x2" şeklinde ifade etmiştir. Genel kuralı ifade ederken de öğrenciler "iki çarpı adım sayısı eksi bir artı bir" şeklinde önce sözlü ifade etmişler sonra sembolik olarak "2x(a-1) +1" kuralını yazmışlardır. Her adımdaki kare sayılarındaki değişim incelendikten sonra karelerin kenar sayıları hesaplanmıştır. Bu süreçte araştırmacının yönlendirmesiyle önce ilk üç adımdaki kenar sayıları hesaplanmıştır. Öğrenciler birinci adımda bir kare ve karenin dört kenarı olduğunu, ikinci adımda ise 3 kare olduğundan 3x4=12, üçüncü adımda 5 kare olduğundan 5x4=20 kenar olduğunu açıklamışlardır. Araştırmacı bu durumda 30. adımda kenar sayısının nasıl hesaplanabileceğini sormuştur. Sınıf tartışmasından bir kesit aşağıda sunulmuştur.

A : 30. Adımda kaç tane kenar var nasıl hesaplarız?

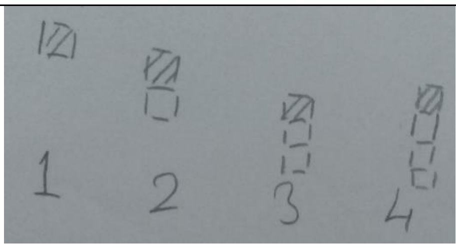
Kamil : Önce kare sayısını bulalım.

Tüm sınıf : (1+ 2x29=59). 59 tane kenar var. 4 ile çarparsak 59x4=236 kenar olur.

Uzak adımı bu şekilde hesaplayan öğrenciler kenar sayılarına ilişkin genel kuralı sadece sözlü olarak açıklamışlardır.

Üçüncü görsel ise parça odaklı ve periyodik doğrusal genişleyen olarak oluşturulmuştur. Karelerin kenar sayılarına odaklanılan bu örüntünün diğer örüntülerden farkı ise örüntünün birinci adımdaki şekil birimine çakışık olmasıdır. Bu durumda birinci adımdan sonraki adımlarda ortak kenarlar söz konusudur. Orhan'ın oluşturduğu bu örüntüde öğrenci birinci adımdaki şekil birimini renklendirerek sabitlemiştir. Bu durum örüntünün genellenmesinde etkili olmuştur.

Sınıf tartışmasına sunulan bu örüntünün önce fiziksel yapısı analiz edilmiştir. Başlangıçta bazı öğrenciler Sevim'in örneğinde olduğu gibi kare sayılarına odaklanmışlar ve her adımda karelerin "1, 2, 3, 4" şekilde devam ettiğini ifade etmişlerdir. Araştırmacı bu öğrencilerden kenar sayısını istediğinde ise çakışık kenarı göz ardı eden öğrencilerden "4 ile çarparak" bulunabileceği yanıtı gelmiştir. Bu noktada araştırmacının doğruluğundan emin olup olmadıklarını sorması üzerine Orhan itiraz ederek çakışık kenarı işaret etmiş ve ilk dört adımda karelerin kenar çizgilerindeki değişimi "birinci adımdaki kenar sayısı 4 ve diğer adımlarda buna 3, 6, 9 çizgi ekledim" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Sınıf tartışmasından bir kesit Şekil 3.15'de sunulmuştur.



Adım Sayısı	İlişki		Toplam Kenar Sayısı
1	4	4	4
2	4+3	4+1.3	7
3	4+3+3	4+2.3	10
4	4+3+3+3	4+3.3	13
n			4+3.(n-1)

Şekil 3.15. *Şekil örüntüsünün fiziksel yapısının farklı analizleri ve sayısal ilişkiler.*

A	: Orhan açıklamana göre kenar sayılarını tabloya yazabilir misin?
Uğur	: (4, 7, 10, 13 yazdı).
A	: Peki ilk adımda 4 kenar var, ikinci adımda buna kaç kenar ekledin?
Uğur	: üç tane
A	: 4+3'e üçüncü adımda kaç kenar ekledin?
Uğur	: Yine üç
A	: Buna göre yazalım mı?
Uğur	: (4, 4+3, 4+3+3, 4+3+3+3) yazdı.
A	: Güzel. Burada hangi sayı değişmiyor?
Tüm sınıf	: 4
A	: hangi sayılar değişiyor?
Tüm sınıf	: Üçler
A	: 3+3 toplamını başka nasıl ifade ederiz?
Tüm sınıf	: 2.3
A	: 3+3+3 toplamını?
Tüm sınıf	: 3.3
A	: (Araştırmacı tabloya 4+3.1 ve 4+3.0 yazdı). Diğer adımları da böyle yazarız. Peki o zaman dörtler adım sayısı ile nasıl ilişkili?
Orhan	: Adım sayısının bir eksiği kadar.

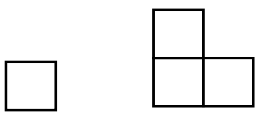
Diyalogda görüldüğü gibi araştırmacının yönlendirmesiyle öğrenciler değişen kenar sayılarını önce çarpımsal olarak üçün katlarıyla daha sonra adım sayısı ile ilişkilendirmişlerdir. Örüntünün genel kuralı istendiğinde ise fonksiyon tabanlı olarak örüntü "4+3(n-1)" şeklinde sembolik/cebirsel temsil kullanılarak genellenmiştir.

3.5. Son Klinik Görüşmelerden Elde Edilen Bulgular

İkinci oturum öğretim dizisinden sonra öğrencilerin gelişimlerini izlemek amacıyla son klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerde de öğrencilere yarı bağımsız örüntü oluşturma görevi verilmiş bunun yanında bağımsız örüntü oluşturmaları da istenmiştir. Uygulamanın başlarında örüntü oluşturma görevlerinde öğrenciler genellikle yinelemeli ilişkiye dayalı örüntü oluştururken son klinik görüşmelerde örüntülerini farklı fiziksel yapılarda ve şekil birimlerini (bir ya da iki adımlı) adım sayılarıyla ilişkilendirerek örüntüler oluşturmuşlar ve oluşturdukları örüntüleri de farklı yollarla genelleyebilmişlerdir. Bu süreçte iki öğrenci (Mehmet ve Özlem) diğer süreçlerde olduğu gibi zorlanmıştır.

3.5.1. Yarı bağımsız örüntü oluşturma

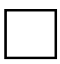
Son klinik görüşmelere kadarki görüşmelerde ve öğretimlerde yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri bağlamında öğrencilerden sadece birinci adımı verilen bir şekil birimine (bir kare, çakışık iki kare ya da üç kare ya da ayrık üç daire gibi) dayalı olarak örüntü oluşturmaları istenmiştir. Son klinik görüşmelerde ise yarı bağımsız örüntü oluşturma görevinde öğrencilere önce iki adımı verilen daha sonra da bir adımı verilen şekil birimleri sunulmuş ve örüntü oluşturacak şekilde devam ettirmeleri ve oluşturdukları örüntüleri genellemeleri istenmiştir. Bir adımlı yarı bağımsız örüntü oluşturma görevleri öğrencilere örüntünün devamında sabit ya da artarak değişen sayılara karar vermede esneklik tanımaktadır. İki adımlı örüntülerde ise örüntünün devamında öğrencilerin nasıl hareket edecekleri ve oluşturdukları örüntüleri nasıl genelleyebildikleri merak edilmiştir. Öğrencilerin yarı bağımsız ve bağımsız oluşturdukları örüntüleri genelleme aşamaları Şekil 3.17’de sunulmuştur.



1. adım 2. adım

Yanda verilen iki adım için;

1. Örüntüyü 3. adıma kadar devam ettirin.
2. Örüntüyü uzak bir adıma devam ettirseniz (siz seçin) şekil sayısını hesaplayın.
3. Örüntüyü genelleyin ve kuralı bulun. Her bir kuralı gerekçelendirin.



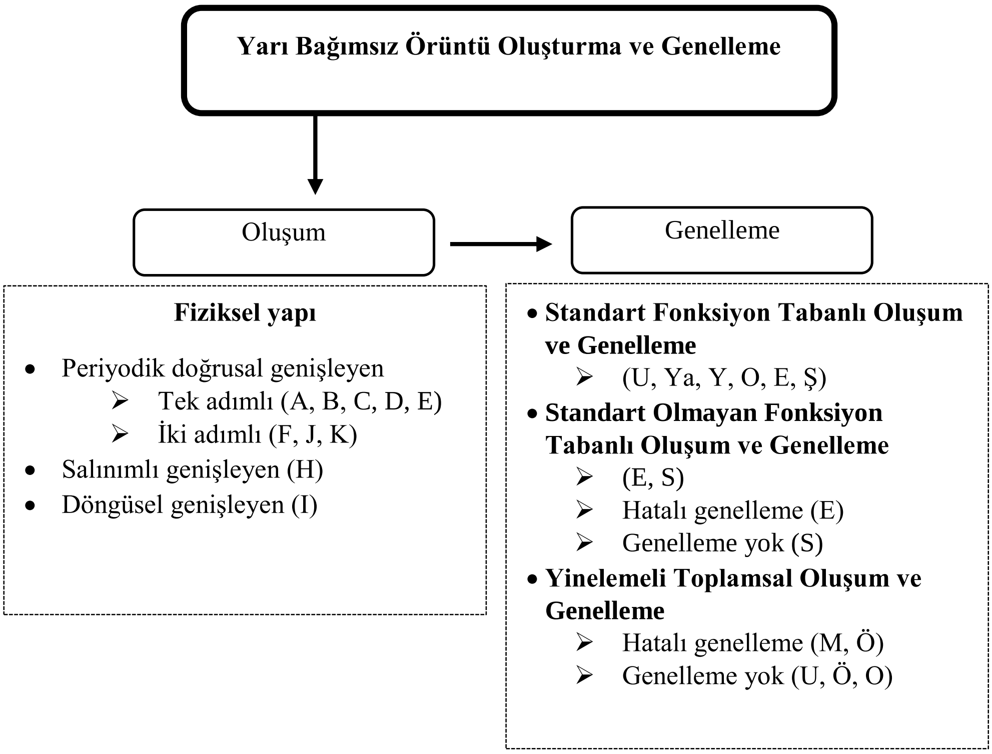
1. adım

Yanda verilen ilk adım için;

1. Örüntüyü 3. adıma kadar devam ettirin.
2. Örüntüyü uzak bir adıma devam ettirseniz (siz seçin) şekil sayısını hesaplayın.
3. Örüntüyü genelleyin ve kuralı bulun. Her bir kuralı gerekçelendirin.

Şekil 3.16. *Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevi*

Öğrencilerin yarı bağımsız örüntü oluşturma ve genelleme süreçleri Şekil 3.17’de sunulmuştur.

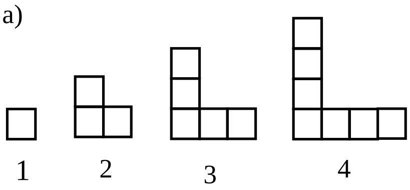
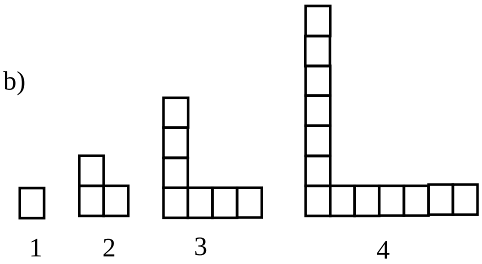
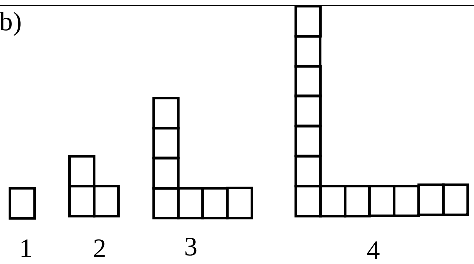


Şekil 3.17. *Öğrencilerin oluşturma ve genelleme süreçleri*

Şekil 3.17'de görüldüğü gibi öğrenciler örüntülerini periyodik doğrusal genişleyen, salınımlı ve döngüsel genişleyen şekilde oluşturmuşlar ve bu örüntüleri yinelemeli toplamsal, standart ve standart olmayan fonksiyon tabanlı genellemişlerdir. Bu süreçte hatalı genelleme yapan ya da genelleme yapamayan öğrencilerde olmuştur. Yinelemeli toplamsal oluşum ön klinik görüşmelerde de tanımladığımız gibi "bir şekil biriminden (yani 1. adım) başlayarak bir önceki adıma, belirlenen bir sayıda (sabit) ya da her adımda düzenli değişen sayıda şekil eklenmesi" olarak açıklanabilir. Standart fonksiyon tabanlı oluşum ve genelleme ise "örüntünün fiziksel yapısının adım sayısı ile ilişkilendirilerek oluşturulması, genelleme ise örneğin n adım sayısı olmak üzere genel kuralın çarpımsal "2n+1" ya da "2(n-1) + 3" olarak ifade edilmesidir. Standart olmayan fonksiyon tabanlı oluşum ve genelleme ise "örüntünün her adımdaki şeklin parçalarının adım sayısı ile ilişkilendirilerek oluşturulması, genelleme ise örneğin n adım sayısı olmak üzere genel kuralı "2n+1" olan örüntünün toplamsal "n+(n+1)" şeklinde ifade edilmesidir".

Şekil 3.16'de görüldüğü gibi ilk iki adımı verilen yarı bağımsız örüntü oluşturma görevinde öğrencilerden önce örüntüyü 4. adıma kadar devam ettirmeleri ve farklı iki yolla genellemeleri istenmiştir. Bu süreçte öğrenciler beş farklı örüntü (A, B, C, D, E) oluşturmuşlardır. A örüntüsünü oluşturan ve genelleyen öğrencilerin stratejileri Tablo 3.1'de sunulmuştur.

Tablo 3.1. *A örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

A Örüntüsü **İki yönde periyodik doğrusal genişleyen**		
a) 	* **Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Cebirsel/Sembolik temsil Kural=(Ax2-1) a.2-2+1 Kural=(a-1).2+1 *Yarı sembolik temsil (As-1) x 2+1 (Adım sayısı-1)x2+1	Hakan Uğur Orhan Yasemin Kamil
b) 	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil As+As-1 Adım sayısı + Adım sayısı-1 *Hatalı genelleme; adım sayısı +1	Esin Sevim Mehmet
b) 	***Yinelemeli toplamsal** * Genelleme yok (a) örüntüsü (b) örüntüsü	 Özlem Uğur

Öğrencilerin örüntü oluştururken en fazla tercih ettiği örüntü A örüntüsüdür. Tablo 3.1'de görüldüğü gibi, A örüntüsü iki yönde (üst, sağ) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntüdür. Bu örüntü benzer yapıda iki farklı türde oluşturulmuştur. Dokuz öğrenci tarafından oluşturulan birinci örüntü (a) sabit değişen bir örüntü iken, Uğur tarafından ayrıca oluşturulan (b) örüntüsü ise artarak değişen örüntüdür. (a) örüntüsü standart fonksiyon tabanlı ve standart olmayan fonksiyon tabanlı olmak üzere iki farklı strateji ile genellenmiştir.

(a) örüntüsünü Hakan, Uğur, Orhan, Yasemin ve Kamil standart fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir. Hakan önce uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplamış daha sonra herhangi bir adım için kare sayısını "Kural=Ax2-1" şeklinde bir eşitlik yazarak ve cebirsel/sembolik temsil kullanarak genellemiştir. Bu sürece ilişkin Hakan'ın açıklamaları aşağıda diyalogda ve Görsel 3.80'de sunulmuştur.

A : 80. adımı bulur musun Hakan?

Hakan : Burada (dikey kol) 80 tane olmalı adım sayısı kadar, burası da (yatay kol) bir eksiği topladım.

A : Peki kuralı yazar mısın?

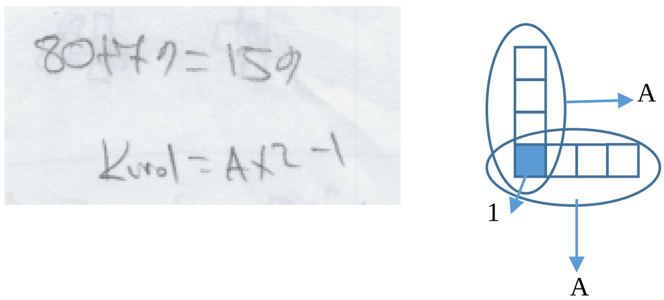
Hakan : Kural=Ax2-1 çünkü ikisi de (dikey ve yatay kol) adım sayısı ile aynı bir tane eksiltiyoruz.

A : A nedir?

Hakan : Adım sayısı

A : Yazdığın bu kural neyi ifade ediyor?

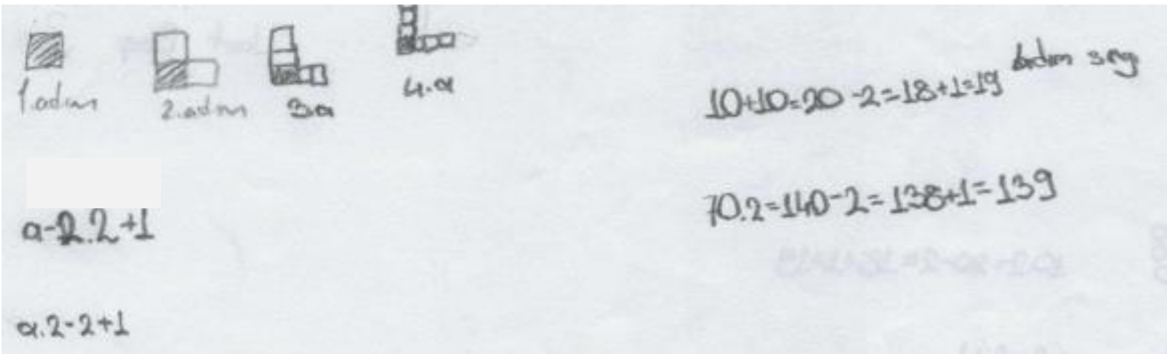
Hakan : İstediğim bir adımda 80., 100. adımda kare sayısını bulabilirim.



Görsel 3.80. *Hakan'ın standart fonksiyon tabanlı genellemesi*

Görsel 3.80'de görüldüğü gibi Hakan örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi yatay ve dikey kollar üzerinden hareket etmiş ve bunları adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Hakan 80. adımdaki kare sayısını hesaplarken dikey koldaki kare sayısını adım sayısı, yatay koldaki kare sayısını da adım sayısının bir eksiği olarak almış ancak kuralı ifade ederken, çarpımsal düşünerek dikey ve yatay koldaki kare sayılarını adım sayısı kadar alarak 2 ile çarpmış ve köşede iki kere sayılan kare sayısını bu çarpım sonucundan çıkarmıştır.

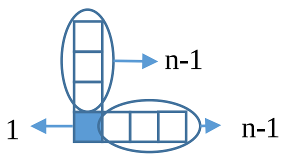
Uğur'da Görsel 3.81'de görüldüğü gibi iki yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluştururken köşedeki kare sayısını renklendirerek sabitlemiştir. Uğur hem uzak adımdaki kare sayısını hesaplarken hem de kuralı ifade ederken, Hakan gibi dikey ve yatay kare sayılarını adım sayısı kadar ele almasına karşın, Hakan'dan farklı bir bakış açısıyla hareket etmiştir.



Görsel 3.81. *Uğur'un örüntü oluşturma ve genelleme örneği*

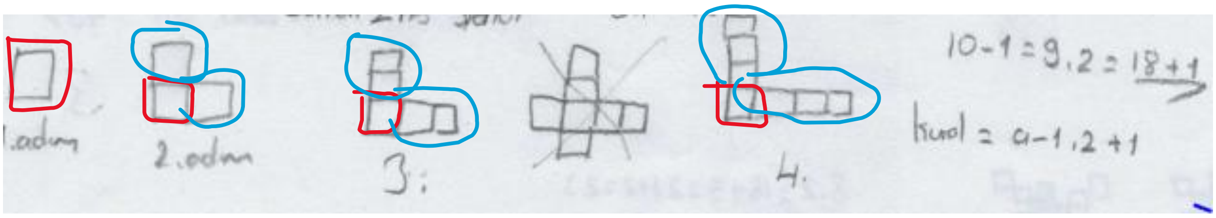
Görsel 3.81'de görüldüğü gibi Uğur örüntüsünün 10. adımındaki kare sayısını hesaplarken toplamsal düşünerek "dikeyde 10 kare, yatayda 10 kare, 20 kare, siyah kareyi iki kere saydığım için iki çıkardım" diyerek önce siyah kare dışındaki kare sayılarını bulmuş, daha sonra köşedeki sabitlediği kare sayısını bu toplama eklemiştir. Benzer şekilde 70. adımı da hesaplamıştır. Genel kuralı ifade ederken ise çarpımsal düşünerek, cebirsel/sembolik temsil kullanmış ancak Hakan'dan farklı olarak eşitlik kullanmadan kuralı sadece "a.2-2+1" şeklinde cebirsel bir ifade olarak yazmıştır. Uğur bir eşitlik yazmasa da yazdığı bu ifadenin ne olduğu sorulduğunda "a. adımdaki kare sayısı" olduğunu ifade etmiştir.

Orhan ve Yasemin ise iki yönde periyodik doğrusal oluşturdukları örüntünün fiziksel yapısını açıklarken aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, köşedeki mavi kare sayısını sabit değişmez olarak alırken yatay ve dikey kollardaki değişen kare sayılarını adım sayısının bir eksiği ile ilişkilendirmişlerdir. Bu bakış açısıyla örüntünün uzak bir adımını hesaplamışlar ve genel kuralını ifade etmişlerdir.



Şekil 3.18. *Orhan ve Yasemin'in farklı analizleri*

Orhan'ın uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplaması ve genellemesi Görsel 3.82'de sunulmuştur.



Görsel 3.82. *Orhan'ın örüntü oluşturma ve genelleme örnekleri*

Görsel 3.82'de görüldüğü gibi Orhan örüntünün 10. adımını hesaplarken önce 10. adımda yatay ve dikey kollardaki kare sayılarını "10-1=9" şeklinde hesaplamış sonra bunu 2 ile çarparak "9.2=18" dikey ve yataydaki toplam kare sayısını bulmuştur. Daha sonra köşede sabit değişmeyen bir tane kareyi bu çarpım sonucuna "18+1" şeklinde eklemiştir. Orhan'a örüntünün genel kuralı sorulduğunda ise aşağıda diyalogdaki gibi açıklama yapmıştır.

Orhan : Burası ve burası (4. adımda dikey ve yatay kol) adım sayısının bir eksiği kadar, buda (köşedeki kare) artı bir, o zaman adım sayısı eksi bir çarpı iki artı bir olur.

A : Kuralı yazar mısın?

Orhan : (Kural=a-1.2+1 yazdı).

A : a nedir?

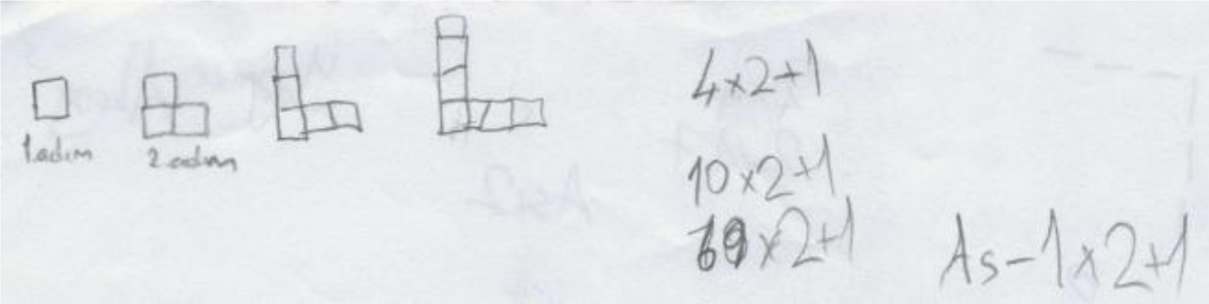
Orhan : Adım sayısı

A : Yazdığın bu kural neyi ifade ediyor?

Orhan : Her adımdaki kare sayılarını

Diyalogda görüldüğü gibi, Orhan'ın çarpımsal düşünerek cebirsel/sembolik temsil ile bir eşitlik yazdığı görülmektedir. Ayrıca Orhan'ın "Kural=a-1.2+1" cebirsel ifadesinin de toplam kare sayısına karşılık geldiğinin farkında olduğu söylenebilir.

Yasemin ve Kamil'de iki yönde periyodik doğrusal oluşturduğu örüntüyü genellerken Orhan gibi düşünmüşler ve Görsel 3.83'te görüldüğü gibi oluşturdukları örüntünün Yasemin 5., 11. ve 70. adımlarını, Kamil ise 20. adımını hesaplamışlardır. Yasemin'in örüntü oluşturma süreci ve genellemesi Görsel 3.83'te sunulmuştur.

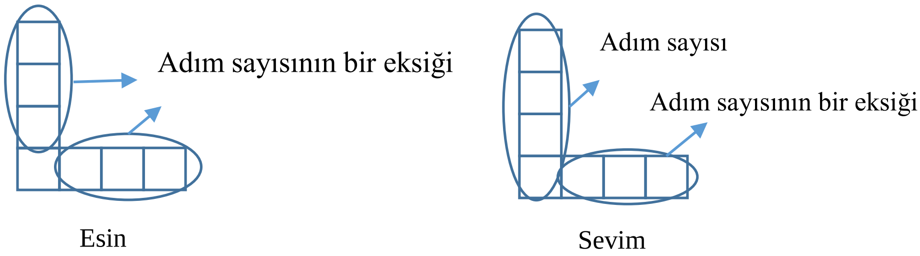


Görsel 3.83. *Yasemin'in örüntü oluşturma ve genelleme örneği*

Görsel 3.83'te görüldüğü gibi Yasemin örüntünün genel kuralını yazarken de diğer öğrencilerden farklı olarak yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan "As-1x2+1" şeklinde kuralı ifade etmiştir. Her iki süreçte de Yasemin'in çarpımsal düşündüğü görülmektedir. Yasemin'e bu süreçte "As" nin ne olduğu sorulduğunda "adım sayısının baş harfleri" olduğunu söylemiştir. Yazdığı bu kuralın ne ifade ettiği sorulduğunda ise Yasemin bir yanıt verememiştir. Yasemin'e Kural'ın ne işe yaradığı sorulduğunda ise "kare sayısını bulabiliriz… 100. adımı (99x2+1 yazdı) yaparsam (99x2=198, 198+1=199 yazdı) 199 bulurum" açıklamasını yapmıştır.

Kamil'de benzer şekilde önce örüntünün 20. adımını "19+19+1=39" şeklinde hesaplamış ve genel kuralını da yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan "adım sayısı-1x2+1" şeklinde ifade etmiştir.

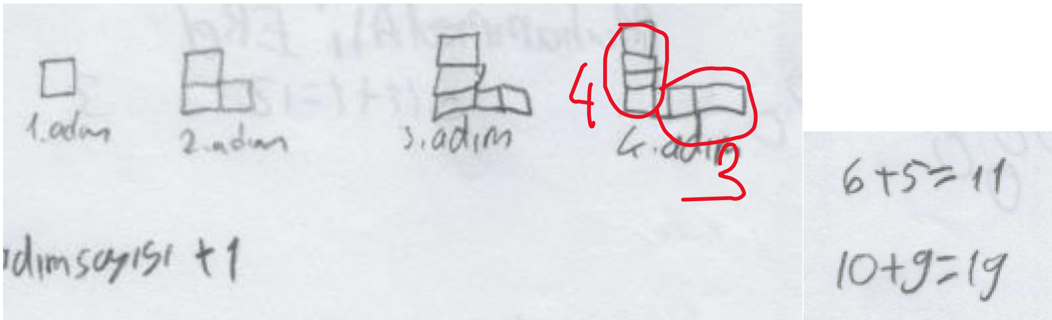
Tablo 3.1'de görüldüğü gibi, Esin ve Sevim ise iki yönde periyodik doğrusal oluşturdukları örüntülerini standart olmayan fonksiyon tabanlı olarak genellemişlerdir. Öğrenciler örüntüleri önce uzak adımlara devam ettirmişlerdir. Daha sonra örüntünün genel kuralını ifade ederken yatay ve dikey kolları adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve bu ilişkiyi toplamsal olarak ayrı ayrı ifade ederek genellemişlerdir. Esin bu süreçte örüntünün 70. adımını yatay ve dikey kolu kesen köşedeki kare sayısı dışındaki kare sayılarını (dikey, yatay) "adım sayısının bir eksiği" şeklinde açıklayarak, toplamış ve bu toplama köşedeki kare sayısını yani biri ekleyerek "69+69=138+1=139" şeklinde hesaplamıştır. Sevim ise örüntünün 20. adımını dikey kolu adım sayısı, yatay kolu adım sayısının bir eksiği ile ilişkilendirerek "20+19=39" olarak bulmuştur.



Şekil 3.19. *Esin ve Sevim'in örüntüyü farklı analizleri*

Örüntünün genel kuralını ifade ederken Sevim benzer düşünceyle, Esin ise stratejisini değiştirerek Sevim gibi yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan üç boyutlu toplamsal olarak "As+as-1" ve "Adım sayısı + adım sayısı-1" şeklinde ifade etmişlerdir.

Mehmet ise Esin ve Sevim gibi aynı düşünce yapısından hareket ederek Görsel 3.84'te görüldüğü gibi 6. ve 10. adımlardaki kare sayılarını doğru hesaplamış ancak hatalı genellemiştir.



Görsel 3.84. *Mehmet'in örüntü oluşturma ve genelleme örneği*

Görsel 3.84'te görüldüğü gibi Mehmet 6. ve 10. adımları hesaplarken "6+5=11 ve 10+9=19" işlemlerini uygulamıştır. Mehmet'e neden bu şekilde işlem yaptığı sorulmuştur. Araştırmacı ve Mehmet arasında geçen diyalogdan bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Mehmet : 4. adımda burada (dikey kol) 4 tane kare var, burada (yatay kol) 3 tane. 6. adımda da burada 6 tane, burada 5 tane olur.

A : Diğer adımlarda nasıl?

Mehmet : İkinci adımda 2 tane burda, 1 tane burda, üçüncü adımda da 3 tane burda, 2 tane burda.

A : 10. adımda ne olur?

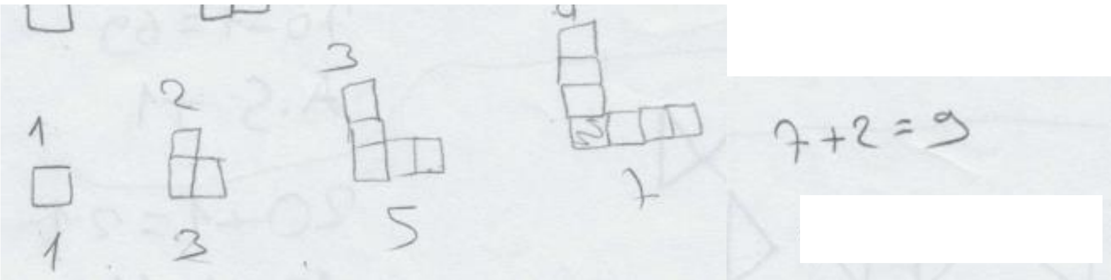
Mehmet : 10+9=19 olur. Burada 10 (dikey kol), burada (yatay kol) 9.

A : Kuralı nasıl ifade edersin?

Mehmet : (Düşündü, adım sayısı+1 yazdı).

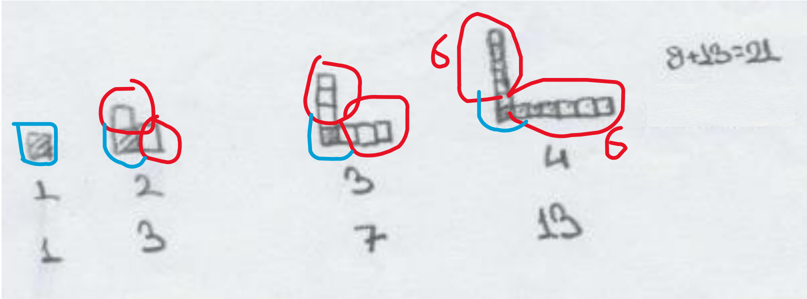
Diyalogda görüldüğü gibi Mehmet örüntünün fiziksel yapısını kendi bakış açısıyla doğru analiz ederek, dikey ve yatay koldaki kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Ancak bu ilişkiyi örüntünün genel kuralını ifade ederken doğru transfer edememiştir.

Görsel 3.85'te görüldüğü gibi Özlem'de iki yönde periyodik doğrusal genişleyen şekilde oluşturduğu örüntüyü 4. adıma kadar yinelemeli ilişkiye dayalı üstte bir kare, sağa bir kare ekleyerek devam ettirmiştir. Daha sonra şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüş ve 5. adımdaki kare sayısını, yine aynı düşünceyle yani yinelemeli ilişkiyle 4. adımdaki kare sayısına 2 ekleyerek "7+2=9" olarak doğru hesaplamıştır. Ancak 20. adımı hatalı hesaplamış ve örüntüyü de genelleyememiştir.



Görsel 3.85. *Özlem'in oluşturduğu örüntü örneği*

Uğur ise (a) örüntüsünün yanı sıra (b) örüntüsünü de oluşturmuştur. Görsel 3.86'da görüldüğü gibi Uğur'da iki yönde periyodik doğrusal artarak genişleyen bir örüntü oluştururken birinci adımdaki kareyi renklendirerek sabitlemiş ve terimler arası farkları 2, 4, 6 olacak şekilde ikinin katları ile ilişkilendirerek örüntüsünü 4. adımda çizmiştir. Daha sonra şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüş ve beşinci adımdaki kare sayısını hesaplarken "13+8=21" şeklinde bir önceki adıma sekiz ekleyerek yani yinelemeli ilişkiye dayalı olarak 21 sonucunu elde etmiştir. Uğur'dan örüntüsünü daha uzak bir adıma devam ettirmesi istendiğinde ise ne yazık ki hatalı yanıtlar vermiştir.

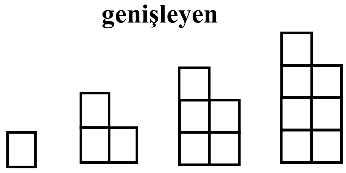


Görsel 3.86. *Uğur'un oluşturduğu örüntü örneği*

Ortaokul matematik programında sadece sabit değişen örüntülere yönelik kazanımların olması ve öğrencilerin bu örüntüler ile deneyimlerinin olması nedeniyle öğretim dizilerinde de bu yönde oluşturulan örüntüler ile çalışılmıştır. Bu nedenle Uğur'un artarak değişen şekilde oluşturduğu örüntüyü genellemede zorlanmış ve başarılı olamamıştır.

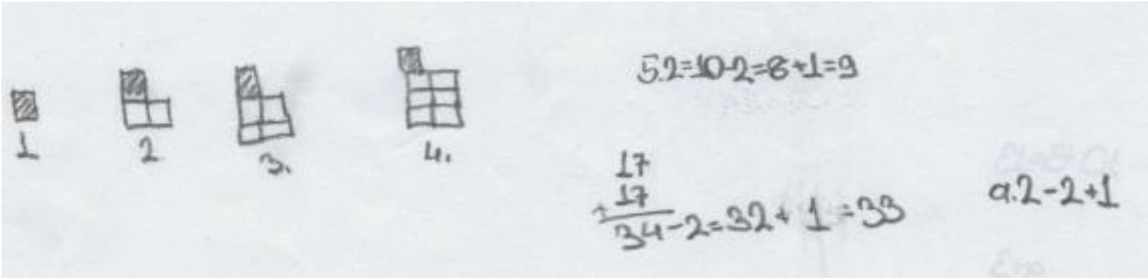
Öğrencilerden oluşturdukları örüntülerden farklı bir örüntü oluşturmaları istendiğinde ise A örüntüsü dışında Tablo 3.2'de görüldüğü gibi en fazla B örüntüsü oluşturulmuştur. B örüntüsü tek yönde (alt) iki sütunda periyodik doğrusal sabit genişleyen bir örüntüdür.

Tablo 3.2. *B örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

B örüntüsü	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	*Cebirsel/Sembolik temsil	
 1 2 3 4	Ax2-1	Hakan
	a.2-2+1	Uğur
	*Yarı sembolik temsil	
	Asx2-1	Yasemin
	***Yinelemeli toplamsal**	
	*Hatalı genelleme	
	Adım s+2	Özlem
	*Genelleme yok	Mehmet

Tablo 3.2'de görüldüğü gibi B örüntüsünü oluşturan Hakan, Uğur ve Yasemin örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplamışlar ve standart fonksiyon tabanlı olarak örüntüyü genellemişlerdir. Bu süreçte Uğur diğer öğrencilerden farklı bir bakış açısıyla örüntünün fiziksel yapısını analiz ederek, önce yakın bir adımdaki (5. adım),

sonra uzak bir adımdaki (17. adım) kare sayılarını hesaplamıştır. Uğur'un örüntüsü ve genelleme süreci Görsel 3.87'de sunulmuştur.



Görsel 3.87. *Uğur'un oluşturduğu örüntü ve genelleme örneği*

Görsel 3.87'de görüldüğü gibi, Uğur örüntüyü oluştururken üstteki kareyi renklendirmiştir. Bu eylemi Uğur'un renklendirdiği kareyi sabit olarak düşündüğünü göstermektedir. Nitekim aşağıda araştırmacıya yaptığı açıklamalarda da görüleceği gibi örüntünün yakın ve uzak adımlarındaki kare sayısını hesaplarken ve kuralı ifade ederken bu kareyi "+1" olarak ele almıştır. Uğur ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

A : 5. adımdaki kare sayısı ne olur?

Uğur : (5.2=10-2=8+1=9 yazdı).

A : Nasıl yaptın açıklar mısın?

Uğur : Beşinci adımda burada (4. adımda renklendirdiği karenin altını gösterdi) beş tane iki olursa, beş çarpı ikiden on kare olur. İki kare eklediğim için onu çıkardım. On eksi iki sekiz oldu. Sonra bu kareyi ekledim artı bir, dokuz oldu.

A : Anladım. Doğru mu?

Uğur : Yedi kareye (4. adım) iki eklersek dokuz olur. Hep iki ekliyoruz.

A : Uzak bir adım için de yapar mısın?

Uğur : (17+17=34-2=32+1=33 yazdı). 17. adımda iki tane on yedi, otuz dört bundan ikiyi çıkardım ve bir ekledim otuz üç olur.

A : Örüntünün kuralını nasıl ifade edersin?

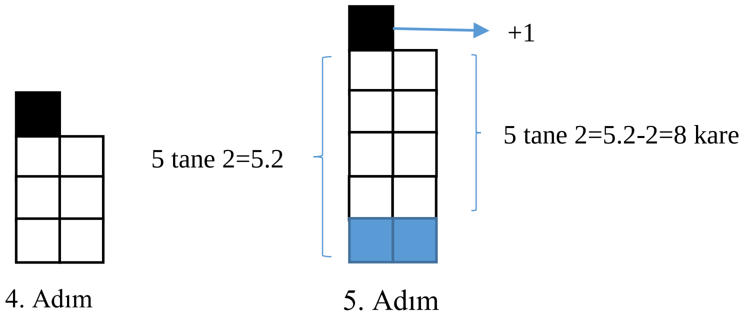
Uğur : (a.2-2+1 yazdı).

A : Nasıl yaptın? Burada a nedir?

Uğur : Adım sayısı

A : a.2 ile neyi ifade ediyorsun?

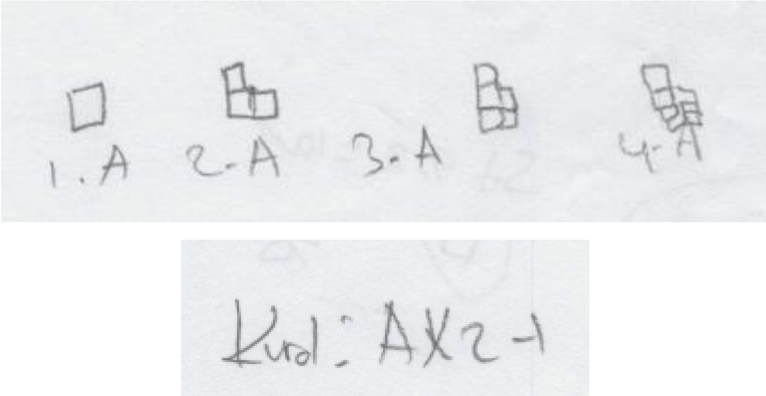
Uğur : Burada (renkli karenin altını gösterdi) önce adım sayısı kadar iki var diye düşündüm. Ondan iki çıkardım. Çünkü diğer adımlarda yok, sonra bir ekledim.



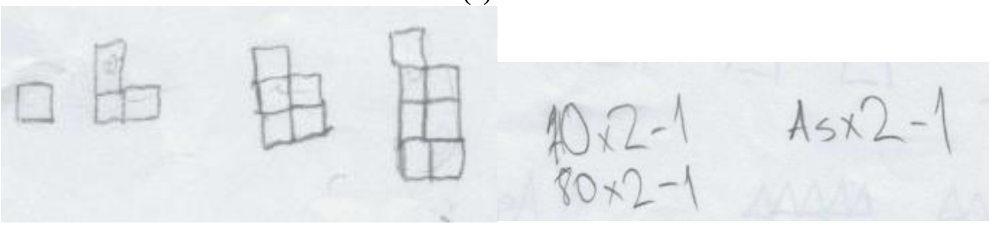
Şekil 3.20. *Uğur'un örüntüyü analizi*

Uğur'un oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısı iki gruptan oluşmaktadır. Uğur en üstteki bir kareyi renklendirerek onu bir grup, diğer kareleri de ikinci bir grup olarak ele almıştır. Örüntüyü yakın ya da uzak adımlara zihinsel olarak devam ettirirken ve genellerken de bu yapıta göre hareket etmiştir. İkinci grupta alta doğru ikişerli grup olarak sıralanan kare sayıları adım sayısının bir eksiği kadardır. Ancak Uğur diyalogda açıkladığı gibi ve yukarıdaki şekilde de gösterildiği gibi bu karelerin altına iki kare (mavi ile gösterilen) daha ekleyerek adım sayısı ile eşitlemiştir. Böylece ikinci gruptaki kare sayılarını hesaplarken çarpımsal düşünerek adım sayısını iki ile çarpmış, çarpım sonucunda ise eklediği iki kare sayısını çıkarmıştır. Son olarak sabit kare sayısını buna eklemiştir. Genel kuralı yazarken ise çarpımsal düşünerek cebirsel/sembolik temsil ile ancak bir eşitlik olmadan "a.2-2+1" şeklinde ifade etmiştir.

Hakan ve Yasemin'de Uğur gibi tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuştur. Bu öğrenciler Uğur'dan farklı olarak renklendirme yapmamışlardır. Her iki öğrenci de örüntülerinin yakın ve uzak adımlarındaki kare sayılarını hesaplarken ve kuralını yazarken de benzer düşünceyle hareket etmişlerdir. Öğrencilerin oluşturdukları örüntüler ve genelleme süreçleri Görsel 3.88'de sunulmuştur.



(a) Hakan



(b) Yasemin

Görsel 3.88. *Yasemin ve Hakan'ın oluşturdukları örüntü ve genelleme örnekleri*

Görsel 3.88'de görüldüğü gibi, Hakan ve Yasemin örüntülerini altta ikişer kare ekleyerek devam ettirmişlerdir. Bu eklenen ikili gruplar Uğur gibi bu iki öğrencinin de örüntüyü genellemelerinde etkili olmuştur. Ancak bu öğrenciler Uğur'dan farklı olarak üstteki tek karenin yanına bir kare ekleyerek her şekli bir dikdörtgene tamamlamışlar ve böylece ikili grupların sayısını adım sayısı ile eşitlemişlerdir. Aynı zamanda bu ikili gruplama Uğur gibi öğrencilerin çarpımsal ilişki kurmasında da etkili olmuştur. Öğrencilerden genel kuralı yazmaları istendiğinde ise önce adım sayısı ile ikiyi çarpmışlar ve çarpım sonucundan ekledikleri bir tane kareyi çıkarmışlardır. Hakan kuralını yazarken cebirsel/sembolik temsil ile kullanarak ve eşitlik yazarak "Kural=Ax2-1" şeklinde Yasemin ise yarı sembolik olarak ve eşitlik kullanmadan "Asx2-1" şeklinde ifade etmişlerdir.

Hakan'ın araştırmacı ile diyalogundan bir kesit örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

A : Hakan örüntüyü çizmeden uzak bir adımdaki kare sayısını nasıl hesaplarsın?

Hakan : Hıı… dördüncü adımda dört tane iki var ama bir tane çıkınca 4x2=8, 8-1=7 oluyor. 10 olsaydı … 10x2=20, 20-1=19 olur.

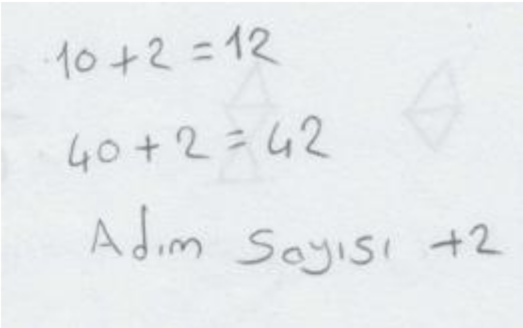
A : Peki örüntünün kuralını nasıl ifade edersin?

Hakan : (Kural=Ax2-1 yazdı)

A : Nasıl buldun?

Hakan : Buraya bir kare eklersek (sol sütun) adım sayısı kadar iki oluyor, o yüzden ax2 yazdım, ama burada (sağ üst köşe) bir kare eksik o yüzden bir çıkardım.

Tablo 3.2'de görüldüğü gibi, Özlem ve Mehmet ise benzer şekilde periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuşlar ancak diğer öğrenciler gibi süreçte ikişerli grup sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirememişlerdir. Bu süreçte Mehmet oluşturduğu örüntüyü genelleyememiş, Özlem ise hatalı genellemiştir. Görsel 3.89'da sunulan Özlem'in örneklerinde de fark edildiği gibi bu öğrenciler örüntülerini oluştururken genelde yinelemeli ilişkiye odaklandıklarından bu düşünce onların örüntünün uzak adımlarındaki kare sayılarını hesap etmelerini aynı zamanda kuralı ifade etmelerini engellemektedir.

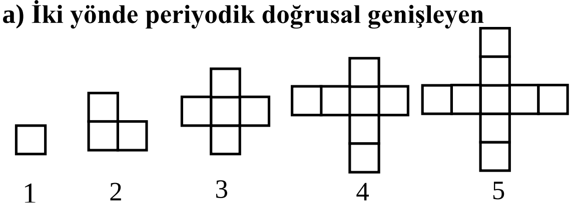
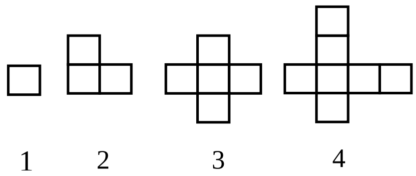
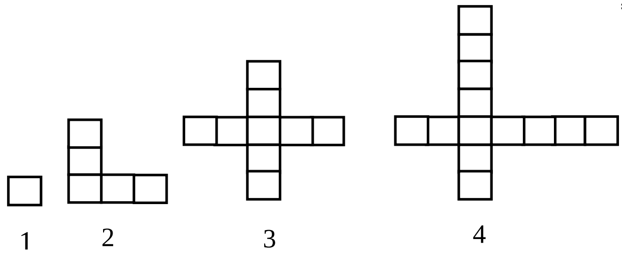


Görsel 3.89. *Özlem'in hatalı genellemesi*

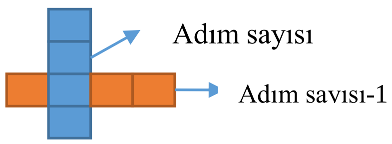
Oluşturulan örüntünün terimler arası sabit farkı ikidir. Görsel 3.89'da görüldüğü gibi, Özlem'de örüntünün 10. ve 40. adımları hesaplarken bu sabit farkı adım sayısına ekleyerek "10+2=12, 40+2=42" işlemleri yapmış ve örüntünün kuralı olarak da yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan "adım sayısı+2" şeklinde kural yazmıştır. Özlem'in bu işlemleri onun yinelemeli toplamsal düşünmesine kanıtlar niteliktedir.

A ve B örüntüsü dışında Tablo 3.3'te sunulan C örüntüsünü de oluşturan öğrenciler olmuştur. C örüntüsü üç farklı yolla oluşturulmuş, yapı olarak da benzerdir. (a) örüntüsü iki yönde (sol ve altta birer kare) periyodik doğrusal genişleyen bir örüntüdür. (b) örüntüsü ise salınımlı (üçüncü adımda sol ve altta birer kare, dördüncü adımda üst ve sağa birer kare) genişleyen örüntülerdir. (c) örüntüsü de salınımlı (ikinci adımda üst ve sağa birer tane, üçüncü adımda sol ve altta ikişer tane, dördüncü adımda tekrar üstte ve sağa ikişer tane kare) genişleyen örüntüdür.

Tablo 3.3. *C örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

C örüntüsü		
a) İki yönde periyodik doğrusal genişleyen 	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil as+as-1 ***Yinelemeli toplamsal** *Genelleme yok	Esin Kamil
b) Salınımlı genişleyen 	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme** *Genelleme yok *Yarı sembolik temsil As-1+As	Orhan Yasemin
c) Salınımlı genişleyen 	*** Yinelemeli toplamsal** *Genelleme yok	Orhan

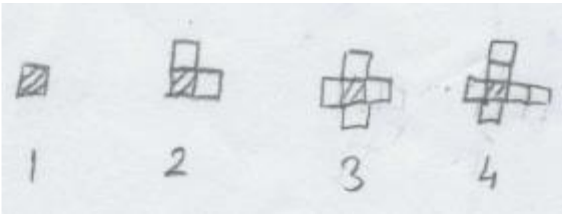
Tablo 3.3’te görüldüğü gibi, (a) örüntüsü Esin ve Kamil, (b) örüntüsü ise Yasemin ve Orhan (c) örüntüsü ise Orhan tarafından oluşturulmuştur. Esin iki yönde (sol, alt) periyodik doğrusal genişleyen oluşturduğu örüntüyü uzak bir adıma devam ettirmiş ve standart olmayan fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir. Esin bu süreçte örüntünün fiziksel yapısını aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi mavi ve turuncu renklerle ayırt edilen dikey ve yatay sıralanan kare sayılarını iki grupta ele almış ve bu grupları adım sayısı ile ilişkilendirmiştir.



Şekil 3.21. *Esin’in örüntüyü analizi*

Bu ilişkiye dayalı olarak örüntünün 20. adımını “20+19=39” şeklinde hesaplamış, genel kuralını da yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan toplamsal olarak “as+as-1” şeklinde ifade etmiştir. Kamil ise yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturduğu örüntüyü ne uzak bir adıma devam ettirebilmiş ne de genelleyebilmiştir.

Salınımlı genişleyen (bir adımda sol, alt, bir adımda sağ, üst) şekilde oluşturulan (b) örüntüsünü Yasemin uzak bir adıma devam ettirmiş ve standart olmayan fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir. Yasemin bu süreçte Esin'le benzer düşünceyle hareket etmiş ve örüntünün 10. ve 70. adımlarını "10-1+10=19, 70-1+70=139" şeklinde hesaplamıştır. Örüntünün genel kuralını ise yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan toplamsal olarak "As-1+As" şeklinde ifade etmiştir. Orhan ise örüntünün 8. adımını hesaplamak istemiş ve bu adımdaki kare sayısını "8.2+1=17" olarak bulmuştur. Görsel 3.90'da görüldüğü gibi Orhan örüntüde bir kareyi renklendirmiştir.

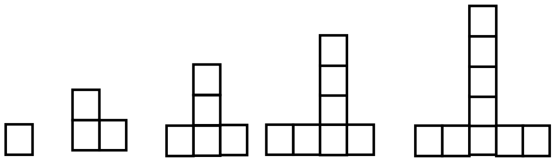


Görsel 3.90. *Orhan'ın örüntü oluşturma örneği*

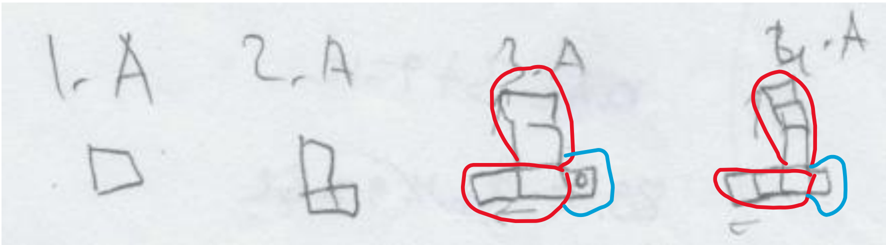
Orhan'a nasıl düşündüğü sorulduğunda ise "taralı kare artı bir diğer kareler ikinin katı" şeklinde açıklama yapmıştır. Orhan'ın bu açıklaması özellikle ikinci adımdan itibaren renksiz kareleri ikili grupladığı ancak bu grup sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmediği görülmektedir. Nitekim Orhan örüntünün genel kuralını da ifade edememiştir. Orhan benzer şekilde salınımlı genişleyen şekilde oluşturduğu (c) örüntüsünü de uzak bir adıma devam ettirmeye çalışmış ve 16. adımı "16.2=32+1=33" şeklinde hatalı hesaplamıştır. Orhan'a nasıl yaptığı sorulduğunda ikinci adım için daha önce L örüntüsünde ifade ettiği adım sayısının iki katı artı bir ilişkisini bu örüntüye hatalı genellediği görülmüştür. Öğrenci daha sonra diğer adımlar için bu kuralın geçerli olmadığını fark etse de genel kuralı ifade edememiştir. Orhan'ın oluşturduğu örüntünün fiziksel yapısı diğer oluşturulan ve genellenen örüntülere göre daha karmaşıktır ve genel kuralı "4n-3" şeklindedir. Dolayısıyla öğrencinin salınımlı oluşturduğu bu yapıdan kuralı bulmasının zor olduğu söylenebilir.

Tablo 3.4'te görüldüğü gibi D örüntüsü de Hakan ve Mehmet tarafından iki yönde (sol, üst) periyodik doğrusal genişleyen şekilde oluşturulmuştur.

Tablo 3.4. *D örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

D örüntüsü	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
İki yönde periyodik doğrusal genişleyen	*Cebirsel/Sembolik temsil Kural=A-1x2+1	Hakan
 1 2 3 4 5	***Yinelemeli toplamsal** *Genelleme yok	Mehmet

Hakan'ın oluşturduğu örüntü aşağıda Görsel 3.91'de sunulmuştur.

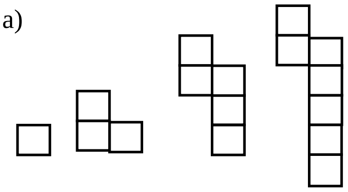
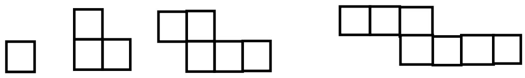


Görsel 3.91. *Hakan'ın oluşturduğu örüntü örneği*

Görsel 3.91'de sunulan örüntü incelendiğinde Hakan'ın üçüncü ve dördüncü adımlarda sola bir ok ve yukarı bir ok çizdiği ve üçüncü adımda sağ köşedeki kareyi işaretlediği görülmektedir. Hakan'ın işaretlediği kareyi sabit değişmez aldığı görülmektedir. Nitekim Hakan'a oluşturduğu örüntüyü nasıl genellediği sorulduğunda ise "altta ve üstte adım sayısının bir eksiği kadar kare var buda (sağ köşedeki kare) artı bir" şeklinde açıklamış ve standart fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir. Hakan örüntünün genel kuralını da çarpımsal düşünerek "Kural=A-1x2+1" şekilde sembolik temsil ile eşitlik kullanarak ifade etmiştir. Mehmet ise Tablo 3.4'te görüldüğü gibi görüldüğü örüntüyü yinelemeli ilişkiye göre oluşturmuş ancak genelleyememiştir.

Tablo 3.5'te görüldüğü gibi E örüntüsü Mehmet ve Kamil, F örüntüsü de Özlem tarafından tek yönde ve iki yönde periyodik doğrusal genişleyen şekilde oluşturulmuştur.

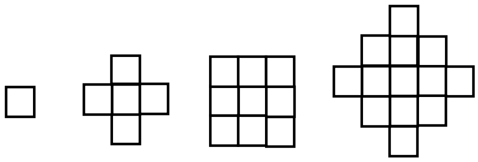
Tablo 3.5. *E örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

E örüntüsü		
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen a)  1 2 3 4	***Yinelemeli toplamsal** *Genelleme yok	Mehmet Kamil
İki yönde periyodik doğrusal genişleyen b)  1 2 3 4	***Yinelemeli toplamsal** *Hatalı genelleme	Özlem

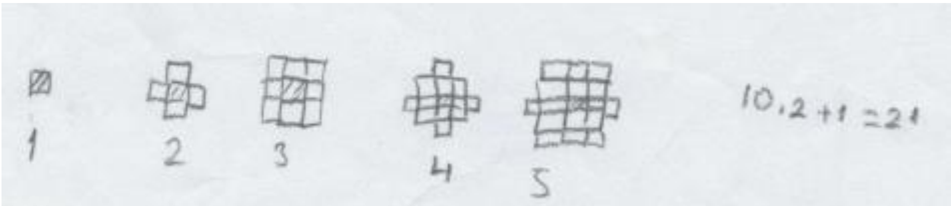
Mehmet, Kamil ve Özlem'e örüntülerini nasıl oluşturdukları sorulduğunda Mehmet ve Kamil ikinci adımda yer alan şeklin sağ tarafındaki karenin altına ikişer kare ekleyerek örüntüyü dördüncü adıma kadar genişlettiklerini, Özlem ise ikinci adımdaki şeklin üst soluna ve alt sağına birer kare eklediğini açıklamışlardır. Öğrencilerden uzak bir adımındaki kare sayısını bulmaları istendiğinde ise her üç öğrenci de başarılı olamamıştır. Öğrencilerin örüntüyü oluştururken yinelemeli ilişkiye dayalı olarak hareket etmeleri bunda etkili olmuştur. Öğrencilerin örüntüyü uzak bir adıma devam ettirebilmeleri için öncelikle örüntünün fiziksel yapısı üzerinden adım sayısı ve kare sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi keşfetmeleri gerekmektedir. Ancak Mehmet ve Kamil örüntünün genel kuralı olan adım sayısının iki katının bir eksiği ilişkisini birinci adımında yer alan bir tane kareden görmede zorlanmışlar, ikinci adım ve sonraki adımları dikkate aldıklarından dolayı örüntünün fiziksel yapısını doğru analiz edememişlerdir. Özlem ise benzer şekilde örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplarken benzer düşünceyle hareket etmiş ve 20. adımdaki kare sayısını "20+2=22" şeklinde yinelemeli ilişkiye dayalı olarak hatalı hesaplamıştır. Örüntünün genel kuralını da hatalı genelleyerek "Adım sayısı+2" şeklinde ifade etmiştir.

Orhan ayrıca aşağıda Tablo 3.6'da verilen döngüsel genişleyen F örüntüsünü de oluşturmuştur.

Tablo 3.6. *F örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

F örüntüsü	*Yinelemeli toplamsal	
Döngüsel genişleyen	*Genelleme yok	Orhan
 1 2 3 4		

Tablo 3.6'da görüldüğü gibi Orhan örüntüsü "buraya (ikinci adımdaki şeklin sol üstüne ve altına), buraya (sağ üstüne ve altına) bir kare ekledim. Burada da (dördüncü adım) buraya (üst) buraya (sol) buraya (sağ) buraya (alt) kare ekledim" şeklinde açıklamıştır. Orhan'ın oluşturduğu örüntü Görsel 3.92'de sunulmuştur.



Görsel 3.92. *Orhan'ın oluşturduğu örüntü örneği*

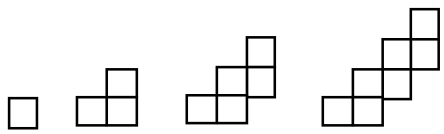
Görsel 3.92'de sunulan örüntünün fiziksel yapısı incelendiğinde birinci adımdaki karenin her adımda renklendirildiği görülmektedir. Orhan'ın bu şekildeki davranışı bu kareyi sabit değişmez olarak kabul ettiğini göstermektedir. Nitekim uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplarken Orhan Görsel 3.92'de görüldüğü gibi 10. adım için "10.2+1=21" şeklinde işlem yapmış ve buradaki +1'in renklendirdiği kareyi temsil ettiğini açıklamıştır. Oluşturulan örüntünün genel kuralı "4n-3" olduğu için Orhan'ın örüntünün fiziksel yapısı ile bu kuralı ilişkilendirmesi zor olmuştur. Bu nedenle Orhan ne uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplayabilmiş ne de genel kuralı ifade edebilmiştir.

Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevinin ikinci adımında öğrencilerden ön klinik görüşmede de kullanılan, birinci adımı bir kareden oluşan örüntüyü 4. adıma kadar devam ettirmeleri ve genellemeleri istenmiştir. Ön klinik görüşmelerde öğrenciler genelde prototip şeklinde adlandırdığımız tek yönde yatayda ya da dikeyde sıralanan şekil dizisi oluşturduklarından son klinik görüşmelerde nasıl bir yol izleyecekleri merak edilmiş ve bu görev tekrar öğrencilere sunulmuştur.

Son klinik görüşmelerde öğrencilerin çoğunluğu ön klinik görüşmede oluşturdukları yapılardan daha farklı yapılarda örüntüler oluşturmuşlardır. Bu örüntülerden çoğunluğu genellenmiştir.

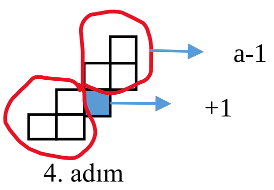
Tablo 3.7'de Orhan, Hakan, Esin ve Yasemin tarafından oluşturulan A örüntüsü sunulmuştur. A örüntüsü tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntüdür.

Tablo 3.7. *A örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

A Örüntüsü	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	*Cebirsel/Sembolik temsil	
	Kural=a-1.2+1	Orhan
	Ax2-1	Hakan
	*Yarı sembolik temsil	
1 2 3 4	a.s-1x2+1	Esin
	Asx2-1	Yasemin

Öğrenciler A örüntüsünü Tablo 3.7'de görüldüğü gibi merdiven şeklinde tek yönde üstte doğru iki kare ile genişleyen şekilde oluşturmuşlardır. Bu süreçte dört öğrenci de fonksiyonel ilişki kurarak örüntülerini önce uzak bir adıma devam ettirmişler ve çarpımsal düşünerek örüntülerini standart fonksiyon tabanlı genellemişlerdir. Genel kuralı ifade ederken ise Orhan ve Hakan cebirsel/sembolik temsil, Esin ve Yasemin ise yarı sembolik temsil kullanmışlardır.

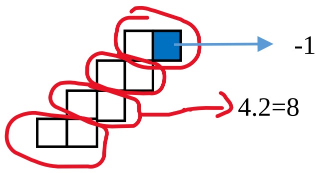
Orhan örüntüsünü genellerken aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi örüntünün fiziksel yapısını analiz etmiştir. Şekilde mavi ile gösterilen kareyi renklendirmiş ve gruplandırdığı kare sayılarını ise adım sayısı ile ilişkilendirerek 10. adımdaki kare sayısını "10-1=9.2=18+1=19" şeklinde hesaplamıştır.



Şekil 3.22. *Orhan'ın örüntüyü analizi*

Orhan örüntünün genel kuralını yazarken de aynı düşünceyle eşitlik kullanarak cebirsel/sembolik temsil ile “Kural=a-1.2+1” şeklinde ifade etmiştir. Orhan ile benzer şekilde düşünen Esin’de önce “9x2+1=19” şeklinde 10. adımı hesaplamış daha sonra genel kuralı eşitlik kullanmadan “a.s-1x2+1” şeklinde yarı sembolik temsil kullanarak ifade etmiştir.

Hakan ve Yasemin ise örüntülerini genellerken aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi örüntünün fiziksel yapısını analiz etmişlerdir.



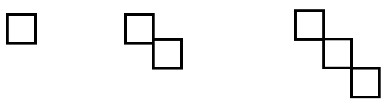
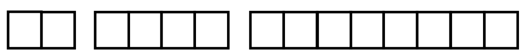
4. adım

Şekil 3.23. *Hakan ve Yasemin’in örüntüyü analizleri*

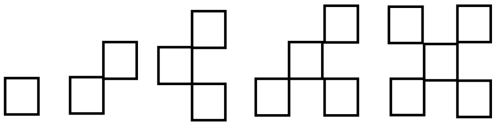
Öğrenciler şekilde görüldüğü gibi her adımda ikili gruplar oluşturmuşlar ve adım sayısı ile ilişkilendirmişlerdir. Hakan ve Yasemin örüntünün önce 80. adımındaki kare sayılarını hesaplamış ve “80x2-1=159” şeklinde işlem yapmışlardır. Daha sonra örüntünün genel kuralını yazmaları istendiğinde ise, Hakan eşitlik kullanarak “Kural=Ax2-1” şeklinde cebirsel/sembolik temsil ile Yasemin ise eşitlik kullanmadan “Asx2-1” şeklinde yarı sembolik temsil ile kuralı ifade etmişlerdir. Her iki öğrenci de bu süreçte çarpımsal düşünmüştür.

Tablo 3.8’de terimler arası sabit farkı bir olan ancak farklı fiziksel yapıda oluşturulan örüntüler sunulmuştur.

Tablo 3.8. *B örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

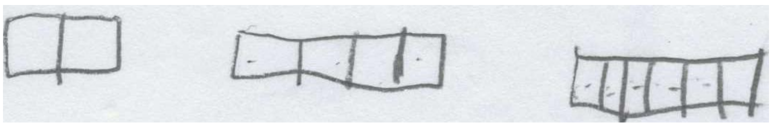
	B Örüntüsü		
a)	**Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen**  1 2 3	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Cebirsel/sembolik temsil A	Uğur
		***Yinelemeli toplamsal** *Hatalı genelleme As+1	Özlem
b)	**Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen**  1 2 3	***Yinelemeli toplamsal** *Hatalı genelleme Adım sayısı+2	Mehmet

Tablo 3.8. (Devam) *B örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

c)	**Döngüsel genişleyen**  1 2 3 4 5	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil As	Yasemin

Tablo 3.8'de görüldüğü gibi B örüntüsünün (a) formu Uğur ve Özlem tarafından oluşturulmuştur. Birer kare farkla artırılarak genişletilen örüntünün Uğur 10. adımını "10", Özlem ise 20. ve 80. adımını "20 ve 80" şeklinde ifade etmişlerdir. Uğur örüntüdeki kare sayılarının "adım sayısı kadar" olduğunu açıklamış ve genel kuralı da "a" şeklinde eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile ifade etmiştir. Özlem ise yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturduğu örüntüyü uzak adıma örneğin "sekseninci adımda seksen tane kare var" şeklinde doğru devam ifade etmiş ancak örüntüyü birer birer artırdığı için genel kuralı yazarken de adım sayısına bir ekleyerek "As+1" şeklinde hatalı genellemiştir.

Görsel 3.93'te sunulan B örüntüsünün (b) formu Mehmet tarafından oluşturulmuştur. Bu örüntü ön klinik görüşmelerde çoğunluk tarafından oluşturulan ve prototip olarak adlandırılan tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntüdür. Mehmet bu örüntüyü yinelemeli ilişkiye dayalı olarak oluşturmuş daha sonra 15. adımdaki kare sayısını hesaplamak istemiştir. Bu süreçte araştırmacı ile arasında geçen diyalogdan bir kesit aşağıda sunulmuştur.



Görsel 3.93. *Mehmet'in örüntü örneği*

A : (Kare sayılarının 2, 4, 6 şeklinde değiştiği bir örüntü oluşturdu). Örüntünü nasıl oluşturdun?

Mehmet : ikişer ikişer

A : Peki 15. adımda kaç kare olacak?

Mehmet : Onyedi

A : Nasıl buldun?

Mehmet : Çünkü ikişer ikişer arttırdığımdan onbeş artı iki onyedi yapar (17 yazdı).

A : Peki 5. adımda kaç kare olması gerekiyor?

Mehmet : Sekiz

A : Nasıl buldun?

Mehmet : 3. adımda altı tane varsa 4. adımda sekiz tane

A : Peki 5. adımda?

Mehmet : On

A : Peki 15. adımda?

Mehmet : Onyedi

Diyalogda görüldüğü gibi "Çünkü ikişer ikişer arttırdığımdan onbeş artı iki onyedi yapar" ifadesiyle Mehmet'in genellemede yinelemeli toplamsal düzeyinde olduğu görülmektedir. Mehmet 15. adımı hesaplarken bir önceki terimi bilmediğinden adım sayısına iki eklemiştir. Araştırmacının yakın adımlara yönlendirmesiyle bu sefer bir önceki terime iki ekleyerek bir sonraki terimi elde etmiş ancak 15. adımda yaptığı hatanın farkına varmamıştır. Mehmet "… 2'şer 2'şer arttırdığımdan…" düşüncesine odaklı olduğundan örüntünün genel kuralını da "adım sayısı+2" şeklinde ifade etmiştir.

B örüntüsünün (c) formu ise Yasemin tarafından döngüsel genişleyen şekilde oluşturulmuştur. Yasemin birinci adımdan sonra ikinci adımda sağ üstte, üçüncü adımda sağ altta, dördüncü adımda sol alta, beşinci adımda sol üstte birer kare ekleyerek örüntüyü beş adımda tamamlamıştır. Yasemin örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplamış ve örüntüyü standart fonksiyon tabanlı genellemiştir. Yasemin'in genellemesine ilişkin açıklamaları aşağıda diyalogda verilmiştir.

A : Yasemin örüntünün istediğin bir adımındaki kare sayısını nasıl bulursun?

Yasemin : 13. Adımı bulalım. Her adımda adım sayısı kadar kare var, 1,2,3,4,5, diye. 13. adımda 13 tane kare olur.

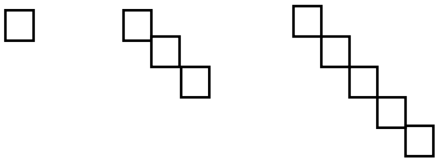
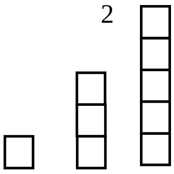
A : Peki kuralı nasıl ifade edersin?

Yasemin : Adım sayısı, As yazarım.

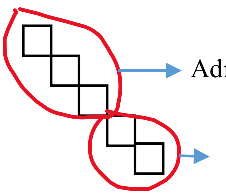
Diyalogda görüldüğü gibi Yasemin örüntüyü uzak bir adıma devam ettirirken ve genellerken adım sayısı ve kare sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi kullanmış, genel kuralı yazarken de eşitlik kullanmadan yarı sembolik olarak kuralı ifade etmiştir.

Tablo 3.9'da sunulan C örüntüsünün (a) formu Sevim (b) formu ise Uğur tarafından oluşturulmuştur. Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntülerin terimler arası sabit farkı ikidir.

Tablo 3.9. *C örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

C Örüntüsü **Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen**		
a)  1 2 3	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil Adım sayısı+ Adım sayısı-1	Sevim
b)  1 2 3	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Cebirsel/sembolik temsil a.2-2+1	Uğur

Sevim örüntüsünü merdiven şeklinde sağ altta doğru ikişer kare kaydırarak oluşturmuştur. Sevim örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplarken ise örüntünün fiziksel yapısını aşağıdaki şekilde sunulduğu gibi analiz etmiş ve 30. adımdaki kare sayısını “30+29=59” şeklinde hesaplamıştır.

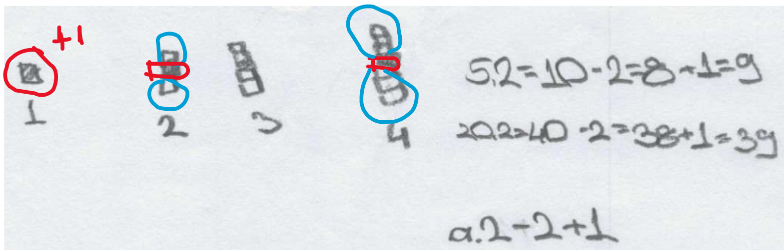


3. Adım

Şekil 3.24. *Sevim'in örüntüyü analizi*

Sevim örüntüsünün fiziksel yapısını iki grupta ele almış ve bu gruplardaki kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirerek yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan toplamsal olarak “Adım sayısı + Adım sayısı-1” şeklinde standart olmayan fonksiyon tabanlı bir genelleme yapmıştır.

Uğur ise örüntüsünü bütüne çakışık şekilde üstte doğru ikişer kare artırarak oluşturmuştur. Uğur'un oluşturduğu örüntüde ön klinik görüşmelerde sıklıkla oluşturulan prototip bir örüntüdür. Ancak Uğur Görsel 3.94'da görüldüğü gibi bir kareyi renklendirmiş ve örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken bu kareyi sabit değişmez olarak ele alıp, diğer değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir.

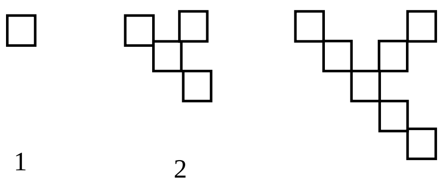


Görsel 3.94. *Uğur'un örüntü örneği ve genellemesi*

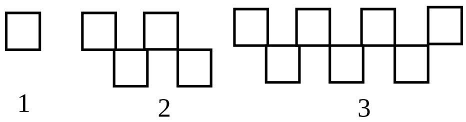
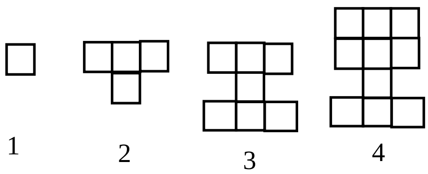
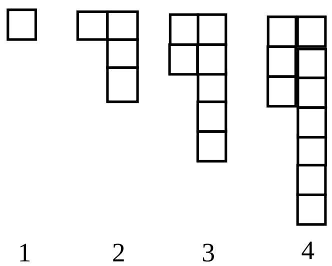
Uğur Görsel 3.94'da görüldüğü gibi önce 5. adımdaki ve 20. adımdaki kare sayılarını hesaplamıştır. Bu süreçte örüntünün fiziksel yapısını iki grup ve grupta değişen kare sayıları ile bir sabit kare olarak analiz etmiştir. Gruplardaki kare sayıları birinci adımda kare yok, ikinci adımda bir tane, üçüncü adımda iki tane, dördüncü adımda üç tane olmak üzere adım sayısının bir eksiği kadar sıralanmaktadır. Uğur ise 5. ve 20. adımları hesaplarken alt ve üst gruplardaki kare sayılarını adım sayısı kadar ele almış ve bundan iki kareyi çıkararak, sabit olarak düşündüğü bir kareyi buna eklemiştir. Uğur örüntünün kuralını ifade ederken de çarpımsal düşünerek eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile "a.2-2+1" şeklinde standart fonksiyon tabanlı bir genellemede bulunmuştur.

Tablo 3.10'da sunulan örüntüler ise farklı yapılarda oluşturulmuş ancak terimler arası sabit farkı 3 olan örüntülerdir. D örüntüsü Kamil, E örüntüsü Hakan, F örüntüsü Orhan ve G örüntüsü ise Esin tarafından oluşturulmuştur.

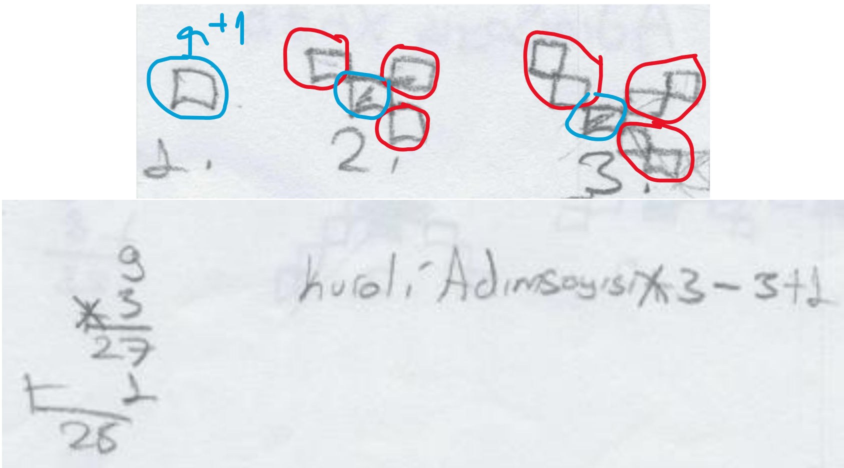
Tablo 3.10. *D, E, F ve G örüntülerinin oluşumu ve genellenmesi*

D Örüntüsü	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Üç yönde periyodik doğrusal genişleyen	*Yarı sembolik temsil	Kamil
 1 2 3	Kural=Adım sayısıx3-3+1	

Tablo 3.10. (Devam) *D, E, F ve G örüntülerinin oluşumu ve genellenmesi*

E Örüntüsü **İki yönde periyodik doğrusal genişleyen** 	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Cebirsel/sembolik temsil Kural=Ax3-2	Hakan
F Örüntüsü **Salınımlı genişleyen** 	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Cebirsel/sembolik temsil a-1.2+1	Orhan
G Örüntüsü **Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen** 	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil a.s-1+a.s+3	Esin

Tablo 3.10'da görüldüğü gibi D örüntüsünü oluşturan Kamil birinci adımdaki kareyi ortalayarak bu karenin üç köşesine sırasıyla birer, ikişer kare ekleyerek üç yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Kamil'in oluşturmuş olduğu örüntü Görsel 3.95'te gösterilmiştir.



Görsel 3.95. *Kamil'in örüntü örneği ve genellemesi*

Kamil örüntüyü nasıl oluşturduğunu aşağıda verilen diyalogda açıklamıştır.

A : (Kare sayıları 1, 4, 7 şeklinde ilerleyen örüntü oluşturdu). Nasıl yaptın?

Kamil : Her bir köşeye sol alt köşe hariç birer kare ekledim.

A : Peki 10. adımda kaç tane kare olacak?

Kamil : Şu kısımlar (1. adımı gösteriyor) ilk başta sabit. Her bir kolda 9 tane olacak. 1 tane de sabit 28 tane olacak.

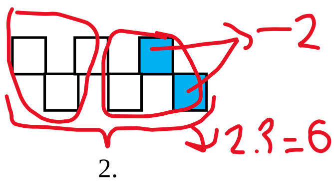
A : Kural söyleyebilir misin?

Kamil: Adım sayısı çarpı 3 eksi 3 artı 1 olacak (Adım sayısı x 3 -3 + 1 yazdı).

Diyalogdan ve Görsel 3.95'da görüldüğü gibi Kamil örüntünün fiziksel yapısını ortada bir kareyi sabit, değişen kare sayılarını ise üç grupta ele almıştır. Diğer bir değişle birinci adımda verilen kareyi her adımda renklendirmiş ve sabit değişmez olarak kabul ederek, bu karenin üç köşesine eklenen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Örüntüde üç grupta değişen kare sayıları adım sayısının bir eksiği kadardır. Kamil'de bu düşünceyle örüntünün 10. adımındaki kare sayısını hesaplamıştır. Araştırmacı örüntünün kuralını istediğinde ise bu sefer üç grupta yer alan kare sayılarını adım sayısı kadar ele almış, daha sonra 3 kareyi çıkarmıştır. Böylece herhangi bir adımda toplam kare sayısını yazarken de eşitlik kullanarak yarı sembolik temsil ile çarpımsal düşünerek "Kural=Adım sayısı x 3 – 3 + 1" şeklinde ifade ederek örüntüyü standart fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir.

E örüntüsünü oluşturan Hakan ise zik zak çizerek bir karenin sağ alt ve sağ üst köşelerine birer kare gelecek şekilde her adımda üçer artan iki yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur.

Hakan örüntüsünü uzak bir adıma devam ettirirken örüntünün fiziksel yapısını aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi analiz etmiştir. Bu süreçte üç tane kareyi gruplamış ve grup sayısını adım sayısı ile eşlemiştir. Daha sonra toplam kare sayısından iki kare sayısını çıkarmıştır. Aşağıda 2. adım için analiz yapısı örnek olarak sunulmuştur.

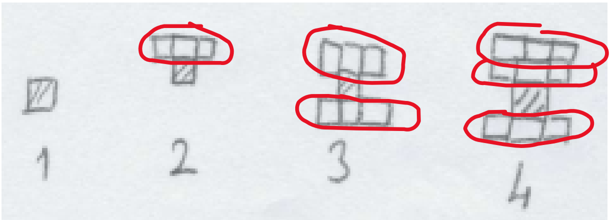


2.

Şekil 3.25. *Hakan'ın örüntüyü analizi*

Hakan bu düşünceyle 10. adımı “2x10=20-2=18” şeklinde hesaplamıştır. Örüntüyü genellerken ise eşitlik kullanarak cebirsel/sembolik temsil ile “Kural=Ax3-2” şeklinde çarpımsal düşünerek kuralı ifade etmiş ve standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır.

Tablo 3.10’da sunulan F örüntüsü ise salınımlı genişleyen şekilde Orhan tarafından oluşturulmuştur. Orhan örüntüsünü ikinci adımda bir karenin üstüne üç kare, üçüncü adımda bir karenin altına üç kare, dördüncü adımda tekrar üstte üç kare olacak şekilde genişletmiştir. Aynı zamanda Görsel 3.96’da görüldüğü gibi Orhan her adımda bir kareyi de renklendirmiş ve sabit değişmez olarak ele almıştır.

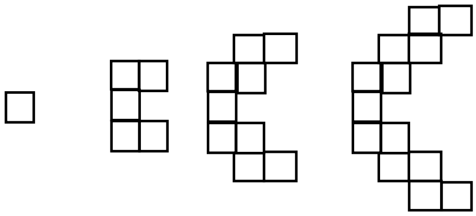


Görsel 3.96. *Orhan’ın örüntü örneği*

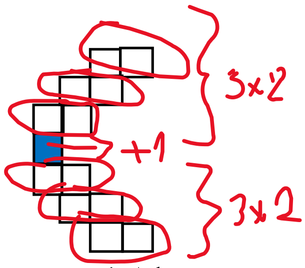
Orhan örüntüsünü uzak bir adıma devam ettirirken örüntünün fiziksel yapısını yukarıda görselde görüldüğü gibi analiz etmiştir. Bu süreçte üç tane kareyi gruplamış ve grup sayısını adım sayısının bir eksiği ile ilişkilendirmiştir. Daha sonra toplam kare sayısına bir kare ilave etmiştir. Bu düşünceyle 15. adımdaki kare sayısını hesaplarken “14.3+1=43” şeklinde işlem yapmıştır. Örüntünün kuralını ise eşitlik kullanmadan çarpımsal düşünerek “a-1x3+1” şeklinde cebirsel/sembolik temsil ile ifade etmiştir.

Tablo 3.11’de sunulan G örüntüsü ise Sevim tarafından oluşturulmuştur. G örüntüsü iki yönde doğrusal genişleyen ve terimler arası sabit farkı dört olan bir örüntüdür.

Tablo 3.11. *G örüntüsünün oluşumu ve genellenmesi*

G Örüntüsü **İki yönde periyodik doğrusal genişleyen**	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Sözlü temsil	Sevim
 1 2 3 4		

Tablo 3.11'de görüldüğü gibi Sevim örüntüsünü oluştururken ikinci adımda, birinci adımdaki bir karenin üstüne ve altına ikişer kare eklemiş ve diğer adımlarda bu ikişer kareleri kaydırarak aynı şekilde eklemeye devam etmiştir. Sevim örüntüsünü uzak bir adıma devam ettirirken şeklin fiziksel yapısını aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi analiz etmiştir.



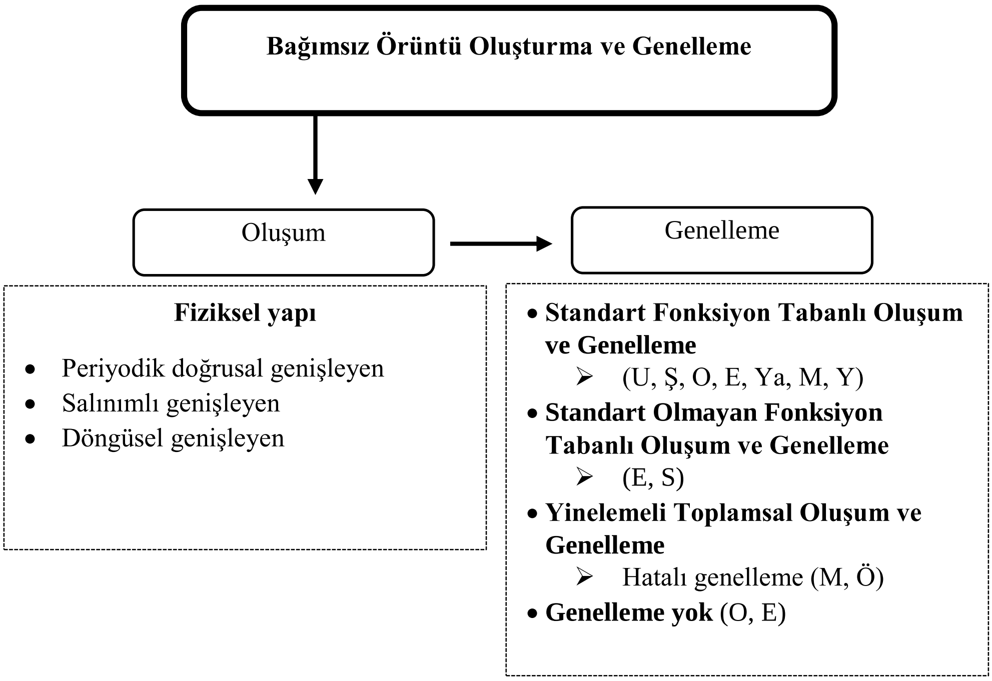
4. Adım

Şekil 3.26. *Sevim'in örüntüyü analizi*

Şekilde görüldüğü gibi Sevim ortada mavi renkle gösterilen kareyi sabitlemiş ve üstte ve alta doğru genişleyen kareleri ise ikişer gruplamıştır. Bu grupları da üst ve alt olarak ayrı ayrı adım sayısının bir eksiği ile ilişkilendirmiştir. Uzak adım olarak 10. adımı hesaplarken ise "9x2=18, 18x2=36+1=37" işlemlerini yapmıştır. Sevim aslında kare sayıları ile adım sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi enteresan bir şekilde keşfetmiştir. Sevim'in oluşturduğu örüntünün genel formu "4n-3" tür. Sevim düşüncesi ile örüntünün genellenmesi "[(a-1)x2]x2+1" şeklindedir. Sevim bu genellemeyi "burada (üstte ikili gruplar) adım sayısının bir eksiği kadar ikişer kare var, iki ile çarparız. Altta da aynı şekilde kareler var. Çıkan sonucu da tekrar iki ile çarparız ona bir ekleriz" şeklinde sözlü olarak yapmıştır. Sevim'in bu süreçte çarpımsal düşündüğü de görülmektedir.

3.5.2. Bağımsız örüntü oluşturma

Bağımsız örüntü oluşturma sürecinde öğrenciler Şekil 3.27'de sunulduğu gibi hem oluşum sürecinde hem de genelleme sürecinde çeşitli stratejiler kullanmışlardır.



Şekil 3.27. *Öğrencilerin Bağımsız Oluşturma ve Genelleme Süreçleri*

Şekil 3.27'de görüldüğü gibi öğrenciler örüntülerini periyodik doğrusal genişleyen, salınımlı ve döngüsel genişleyen şekilde oluşturmuşlar ve bu örüntüleri standart ve standart olmayan fonksiyon tabanlı ve yinelemeli toplamsal olarak genellemişlerdir. Bu süreçte hatalı genelleme yapan ya da genelleme yapamayan öğrencilerde olmuştur. Ayrıca oluşturulan örüntülerin hepsi sabit değişen örüntülerdir.

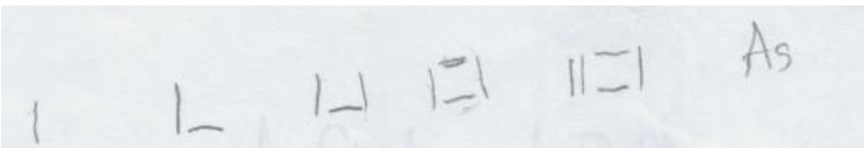
Bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde öğrenciler birden fazla örüntü oluşturduklarından bu örüntüler A, B, C, D kategorilerine ayrılmış ve A kategorisi terimler arası sabit farkı 1 olan, B kategorisi terimler arası sabit farkı 2 olan, C kategorisi terimler arası sabit farkı 3 olan ve D kategorisi terimler arası sabit farkı 4 olan şeklinde sınıflandırılmıştır.

A kategorisinde genel kuralı n, n+1, n+2 ve n+3 olan örüntüler oluşturulmuştur. Bu örüntüleri oluşturan öğrenciler ve genellemeleri Tablo 3.12'de sunulmuştur.

Tablo 3.12. *A kategorisindeki örüntülerin oluşumu ve genellenmesi*

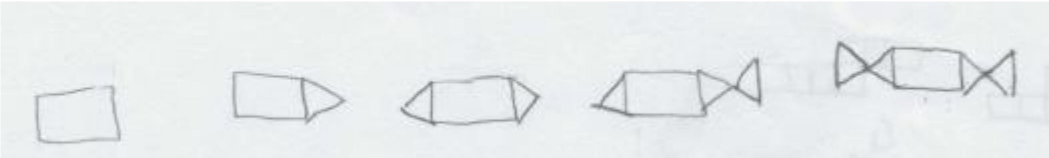
Genel kuralı n olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Döngüsel genişleyen	*Yarı sembolik temsil	Yasemin
Salınımlı genişleyen	As	
	***Yinelemeli toplamsal**	
	*Hatalı genelleme	Özlem
	as+1	
Genel kuralı n+1 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	Uğur
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Cebirsel/sembolik temsil	
	a+1	
	*Sözlü temsil	
	adım sayısı artı bir	Mehmet
Döngüsel genişleyen	*Yarı sembolik temsil	Özlem
	A.S+1	
Genel kuralı n+2 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Cebirsel/sembolik temsil	
	Kural=A-1+3	Hakan
	*Yarı sembolik temsil	
	a.s+2	Esin
	As+2	Yasemin
Genel kuralı n+3 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	Uğur
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Cebirsel/sembolik temsil	
	a+3	

Tablo 3.12'de görüldüğü gibi Yasemin ve Özlem genel kuralı "n" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Yasemin Görsel 3.97'de görüldüğü gibi bugüne kadar oluşturulan örüntülerden farklı çubuklar kullanarak döngüsel genişleyen ve terimler arası sabit farkı 1 olan bir örüntü oluşturmuştur. Yasemin örüntünün 22. adımındaki çizgi sayısını hesaplarken "adım sayısı ile aynı, 22 tane olur" şeklinde yanıt vermiş ve örüntünün genel kuralını da eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile "As" şeklinde ifade etmiştir.



Görsel 3.97. *Yasemin'in örüntü örneği ve genellemesi*

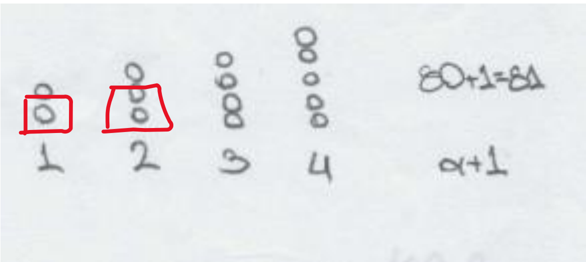
Özlem ise Görsel 3.98'de sunulan dikdörtgen ve üçgen şekillerini kullanarak birinci adıma dikdörtgen ile başlamış, ikinci adımda sağa bir üçgen, üçüncü adımda sola bir üçgen, dördüncü adımda tekrar sağa bir üçgen şeklinde salınımlı genişleyen ve terimler arası sabit farkı 1 olan bir örüntü oluşturmuştur.



Görsel 3.98. *Özlem'in örüntü örneği*

Özlem son klinik görüşmelere kadar örüntülerini yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturduğundan burada da aynı düşünceyle hareket etmiş ve örüntüsünü nasıl oluşturduğunu "buraya (ikinci adımda dikdörtgenin sağını gösterdi) bir, buraya (üçüncü adımda dikdörtgenin solunu gösterdi) bir tane üçgen ekledim" şeklinde açıklamıştır. Özlem 10. ve 70. adımlardaki şekil sayılarını hesaplamak istemiş ve "10-1=9, 70-1=69" işlemlerini yapmıştır. Özlem'e nasıl yaptığı sorulduğunda ise sadece üçgen sayılarını hesapladığı anlaşılmıştır. Özlem örüntünün genel kuralını yazarken de yarı sembolik temsil kullanarak "A.S+1" şeklinde hatalı bir ifade yazmıştır. Araştırmacı Özlem'e bu ifadeyi açıklamasını istemiş ve Özlem'de "birer birer artıyor o zaman adım sayısının bir fazlası olur" şeklinde kuralı sözlü de ifade etmiştir. Özlem'in kuralı yazarken fonksiyonel ilişkiden ziyade terimler arası sabit farka odaklandığı yani yinelemeli ilişkiye odaklandığı görülmektedir.

Tablo 3.12'de görüldüğü gibi Uğur, Mehmet, Özlem ve Esin genel kuralı "n+1" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Bu süreçte Uğur ve Mehmet tek yönde periyodik doğrusal genişleyen, Özlem ise döngüsel genişleyen örüntüler oluşturmuşlardır. Görsel 3.99'da Uğur'un oluşturduğu örüntü sunulmuştur.



Görsel 3.99. *Uğur'un örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.99’da sunulduğu gibi Uğur ayrık iki daire ile başladığı örüntüsünü üstte doğru birer birer artırarak devam ettirmiştir. Uğur örüntüsünün uzak bir adımını hesaplarken ve genel kuralı ifade ederken aşağıda diyalogdaki açıklamaları yapmıştır.

A : …peki uzak bir adımdaki daire sayısını nasıl hesaplarsın?

Uğur : Daire sayıları adım sayısının bir fazlası olduğu için sekseninci adım 80+1=81 olur.

A : Genel kuralı yazar mısın?

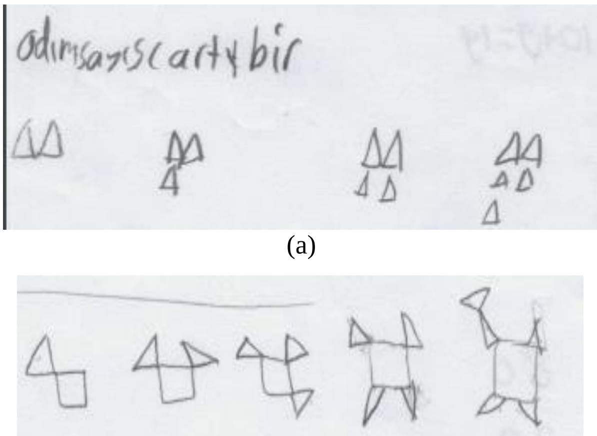
Uğur : a+1

A : kuralın bu olduğundan emin misin?

Uğur : Evet birinci adım için yerine koyarsam iki, ikinci adımda üç, tüm adımlar için doğru olur. Burada (şekli gösterdi ve adım sayıları ile aynı sayıda daireleri grupladı) belli zaten.

Diyalogda görüldüğü gibi Uğur örüntüsünün fiziksel yapısını da analiz ederek daire sayısı ile adım sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi keşfetmiş ve bu ilişkiye dayalı olarak standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır. Genel kuralı ise eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile “a+1” şeklinde yazmıştır.

Görsel 3.100’de ise Mehmet’in (a) ve Özlem’in (b) oluşturduğu örüntüler görülmektedir.



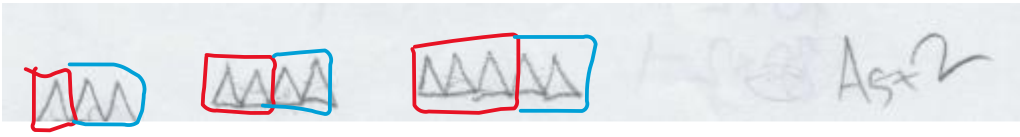
(a)

(b)

Görsel 3.100. *Mehmet’in ve Özlem’in örüntü örnekleri*

Mehmet’te ayrık iki üçgen ile başladığı örüntüsünü altta doğru birer birer artırarak devam ettirmiştir. Özlem ise bitişik olarak bir dikdörtgen ve sol üst köşesinde bir tane üçgen ile başladığı örüntüsünü döngüsel olarak sırasıyla dikdörtgenin sağ üst, sağ alt ve sol alt ve sonra tekrar sol üst köşelerine birer üçgen ekleyerek devam ettirmiştir. Mehmet ve Özlem genelde örüntülerini yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturdukları için ilk defa bu örüntüleri doğru bir şekilde uzak bir adıma devam ettirmişler ve standart fonksiyon tabanlı genellemişlerdir. Mehmet ve Özlem şekil sayılarının adım sayısının bir fazlası olarak devam ettiğini ifade ederek Mehmet genel kuralı eşitlik kullanmadan sözlü temsil ile "adım sayısı artı bir", Özlem ise yarı sembolik temsil ile "A.S+1" şeklinde yazmışlardır. Her iki öğrenci de kuralı doğrulama sürecinde ise sadece adım sayılarını kuralda yerine koyarak şekil sayılarını hesaplamışlardır.

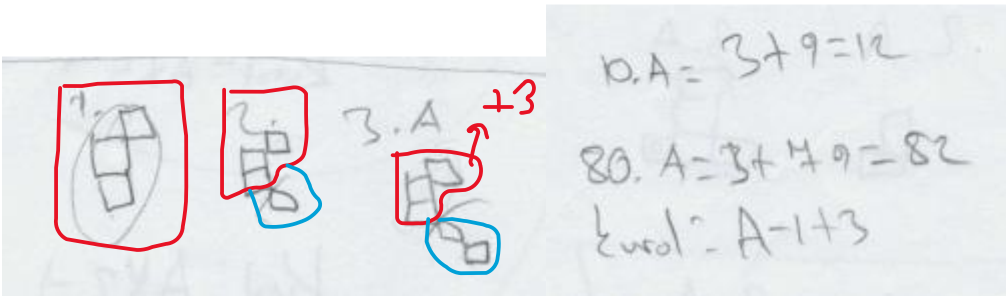
Tablo 3.12'de görüldüğü gibi Hakan, Esin ve Yasemin genel kuralı "n+2" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Yasemin'in oluşturduğu örüntü Görsel 3.101'de sunulmuştur.



Görsel 3.101. *Yasemin'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.101'da görüldüğü gibi Yasemin, birinci adıma bitişik üç tane üçgen ile başlamış ve birer birer artırarak tek yönde genişleyen periyodik doğrusal bir örüntü oluşturmuştur. Yasemin örüntüsünü yakın ve uzak adımlara devam ettirerek 5. ve 11. adımlardaki üçgen sayısını "5+2, 11+2" şeklinde hesaplamış ve örüntüyü standart fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir. Örüntünün genel kuralını yazarken ise eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile "As+2" şeklinde ifade etmiştir. Bu süreçte doğrulama yaparken örüntünün fiziksel yapısından hareket etmiş ve Görsel 3.101'de görüldüğü gibi şekilleri gruplayarak değişen ve sabit kalan kare sayılarını göstermiştir.

Hakan ise Görsel 3.102'de sunulan örüntüyü oluşturmuştur.



Görsel 3.102. *Hakan'ın örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.102’de görüldüğü gibi, Hakan birinci adıma üç kare ile başlamış ve üst üste bitişik iki kare ve bu karelerin sağ üst köşesine bitişik bir kare eklemiştir. Diğer adımlarda ise bu şeklin sağ alt köşesine birer kare ekleyerek tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Örüntüsünü uzak bir adıma devam ettiren ve standart fonksiyon temelli genelleme yapan Hakan aşağıda sunulan diyalogdaki gibi sürece ilişkin açıklama yapmıştır.

A : …Örüntünün uzak bir adımında kaç kare vardır?

Hakan : (10.A=3+9=12 yazdı). Onuncu adımda üç tane kareye dokuz eklerim. Üç artı dokuz oniki eder.

A : Üç kare dedin. Bu nedir?

Hakan : Birinci adımdaki kare sayısı (grupladı).

A : Peki dokuz nedir?

Uğur : İkinci adımda buna (üç karenin altına çizgi çekti) bir kare ekledim. Burada da (yine çizgi çekti) iki kare ekledim. Adım sayısının bir eksiği olur. Onuncu adımda da dokuz olur.

A : Diğer adımlarda da böyle mi?

Uğur : (80.A=3+79=82 yazdı). Sekseninci adımda da üç artı yetmiş dokuz eşittir seksen iki.

A : Örüntünün genel kuralını nasıl yazarsın?

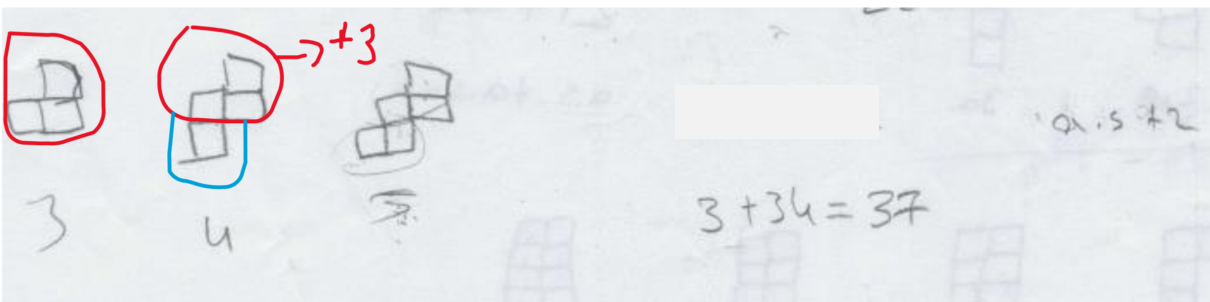
Uğur : (Kural= A-1+3 yazdı). Adım sayısının bir eksiğine üç ekleriz.

A : Emin misin?

Uğur : Eminim tüm adımlarda böyle olur.

Diyalogda görüldüğü gibi Hakan örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken birinci adımdaki kare sayısını sabit değişmez olarak ele alıp, değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Kuralı ifade ederken uzak adımlarda dahil eşitlik kullanmış ve cebirsel/sembolik temsil ile “Kural=A-1+3” şeklinde ifade etmiştir.

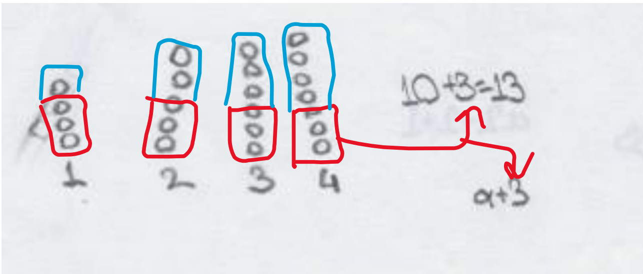
Esin ise Görsel 3.103’te sunulan örüntüyü oluşturmuştur.



Görsel 3.103. *Esin’in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.103’te görüldüğü gibi Esin birinci adıma bitişik altta iki kare ve üstte bir kare olmak üzere üç kare çizerek başlamıştır. Diğer adımlarda ise altta doğru sola kayacak şekilde birer kare ekleyerek tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Esin örüntünün uzak adımındaki kare sayısını hesap ederken Görsel 3.103’te görüldüğü gibi 35. adım için “3+34=37” işlemini yapmıştır. Esin’e nasıl yaptığı sorulduğunda ise 3. adım üzerinde “Burada (üçüncü adım) buna (üç kare) iki kare ekledim. Adım sayısının bir eksiği” şeklinde açıklama yapmıştır. Esin’den genel kuralı yazması istendiğinde ise eşitlik kullanmadan yarı bağımsız temsil ile “a.s+2” şeklinde ifade etmiştir. Doğrulama sürecinde ise bütün adımlar için bu kuralın geçerli olduğunu açıklamıştır.

Tablo 3.12’de görüldüğü gibi Uğur genel kuralı “n+3” olan örüntü oluşturmuştur. Uğur’un oluşturduğu örüntü Görsel 3.104’te sunulmuştur.



Görsel 3.104. *Uğur’un örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.104’te görüldüğü gibi Uğur birinci adıma ayrık üst üstte dizilmiş dört daire ile başlamış ve diğer adımlara birer daire ekleyerek devam etmiş ve tek yönde periyodik değişen bir örüntü oluşturmuştur. Uğur uzak adım olarak 10. adımı hesaplamış ve “10+3=13” işlemini yapmıştır. Uğur’da diğer öğrenciler gibi her adımda üç daireyi sabit değişmez olarak almış ve değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirerek standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır. Kuralı yazarken ise Görsel 3.104’te görüldüğü gibi eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile “a+3” ifade etmiştir. Uğur’da diğer öğrenciler gibi kuralın her adım için geçerli olduğunu açıklayarak örüntünün fiziksel yapısına dayalı olarak doğrulama yapmıştır.

B kategorisinde genel kuralı 2n, 2n+1, 2n+2, 2n+3 ve 2n-1 olan örüntüler oluşturulmuştur. Bu örüntüleri oluşturan öğrenciler ve genellemeleri Tablo 3.13’de sunulmuştur.

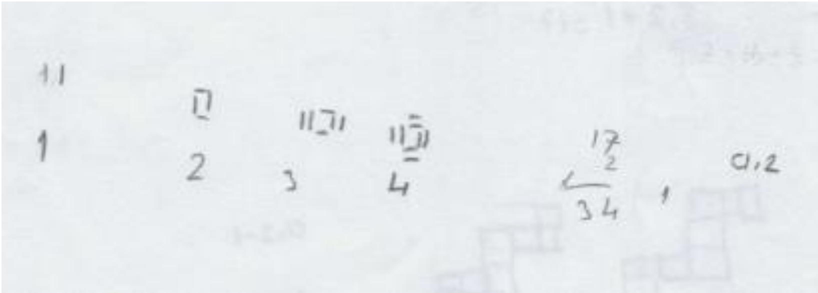
Tablo 3.13. *B kategorisindeki örüntülerin oluşumu ve genellenmesi*

Genel kuralı 2n olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
	*****Cebirsel/sembolik temsil	
Döngüsel genişleyen	a.2	Orhan
	Kural=A.2	Hakan
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	*Yarı sembolik temsil	
İki yönde periyodik doğrusal genişleyen	Asx2	Yasemin
	adım sayısı +adım sayısı	Sevim
Genel kuralı 2n+1 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
İki yönde periyodik doğrusal genişleyen	*****Cebirsel/sembolik temsil	Hakan
	Ax2+1	
	*Sözlü temsil	
	Adım sayısının iki katı artı bir	
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Yinelemeli toplamsal**	
	*Hatalı genelleme	Mehmet

Tablo 3.13. (Devam) *B kategorisindeki örüntülerin oluşumu ve genellenmesi*

Genel kuralı 2n+2 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	Esin
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	*****Yarı sembolik temsil	
	a.sx2+2	
Genel kuralı 2n+3 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	Hakan
İki yönde periyodik doğrusal genişleyen	*****Cebirsel/sembolik temsil	
	A-1x2+3	
Genel kuralı 2n-1 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	*****Cebirsel/sembolik temsil	
	a.2-2+1	Uğur
	a-1.2+1	Orhan
İki yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme**	
	*Yarı sembolik temsil	Esin
	a.s-1+a.s	

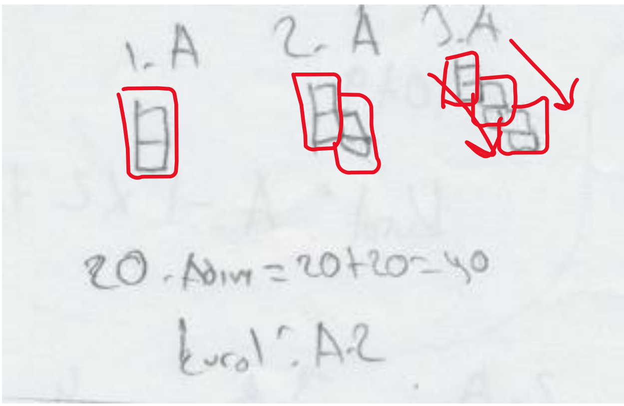
Tablo 3.13'te görüldüğü gibi Orhan, Hakan, Yasemin ve Sevim genel kuralı "2n" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Orhan'ın oluşturduğu örüntü Görsel 3.105'te sunulmuştur.



Görsel 3.105. *Orhan'ın örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.105'te görüldüğü gibi Orhan birinci adıma karşılıklı paralel dikey iki çubuk ile başlamış, ikinci adımda ise birinci adımdaki çubuklara ek olarak karşılıklı paralel yatay iki çubuk eklemiştir. Diğer adımlarda aynı işlemi tekrar dikey, tekrar yatay şeklinde uygulayarak döngüsel genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Orhan uzak adım olarak 17. adımı hesaplamak istemiş ve Görsel 3.105'te görüldüğü gibi "17x2=34" işlemini yapmıştır. Örüntüyü standart fonksiyon tabanlı genelleyen Orhan örüntünün genel kuralını da çarpımsal düşünerek "a.2" şeklinde eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile ifade etmiştir. Orhan'a kuralın doğruluğunu nasıl gösterirsin diye sorulduğunda ise ikinin katları ile ilişkilendirme yapmış ve "her adımda adım sayısının iki katı" şeklinde açıklama yapmıştır.

Hakan'ın oluşturduğu örüntü ise Görsel 3.106'da sunulmuştur.



Görsel 3.106. *Hakan'ın örüntü örneği ve genellemesi*

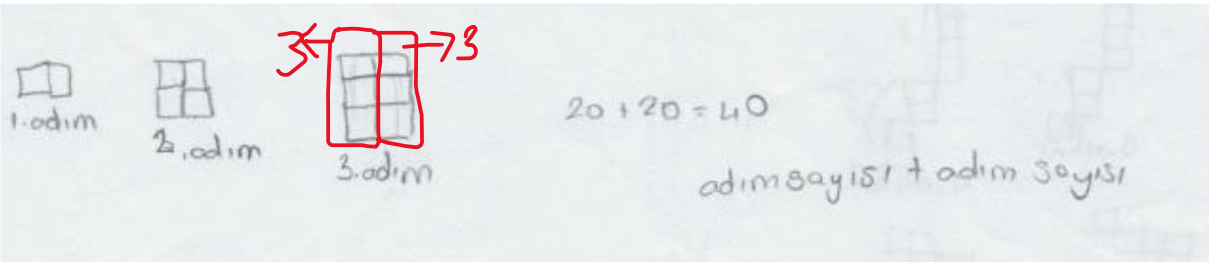
Görsel 3.106'da görüldüğü gibi, Hakan'da birinci adıma üst üste bitişik iki kare ile başlamıştır. Diğer adımlarda ise sağ alta doğru kayacak şekilde ikişer kareyi ekleyerek tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. 20. adımı hesaplamak isteyen Hakan eşitlik kullanarak Görsel 3.106'da görüldüğü gibi toplamsal olarak "20.A=20+20=40" şeklinde işlem yapmıştır. Hakan'a nasıl yaptığı sorulduğunda "yirmi burada yirmi burada" şeklinde adım sayısı kadar kare sayılarını iki sıra halinde düşünerek toplama işlemi yaptığını açıklamıştır. Hakan'a genel kuralı yazması istendiğinde standart fonksiyon tabanlı genelleme yaparak eşitlik kullanmış ve bu sefer çarpımsal ilişki kurarak kuralı "Kural: A.2" şeklinde cebirsel/sembolik temsil ile ifade etmiştir. Hakan'dan kuralın doğruluğunu gerekçelendirmesi istendiğinde ise Görsel 3.106'da görüldüğü gibi örüntünün fiziksel yapısına dayalı olarak her adımda ikişer kareyi göstererek gruplamış ve adım sayısı ile ilişkilendirerek "her zaman adım sayısının iki katı" açıklamasını yapmıştır.

Yasemin'in oluşturduğu örüntü ise Görsel 3.107'de sunulmuştur.

Görsel 3.107. *Yasemin'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.107'de görüldüğü gibi Yasemin birinci adıma ayrık olarak biri dikey, biri yatay iki çubuk ile başlamış ve diğer adımlarda aynı şekilde devam ederek iki yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Yasemin'de diğer iki öğrenci gibi yatayda ve dikeydeki çubuk sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır. Görsel 3.107'de görüldüğü gibi, Yasemin uzak bir adımdaki çubuk sayılarını ya da genel kuralı ifade ederken çarpımsal ilişkiyi kullanmış ve kuralı eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile ifade etmiştir.

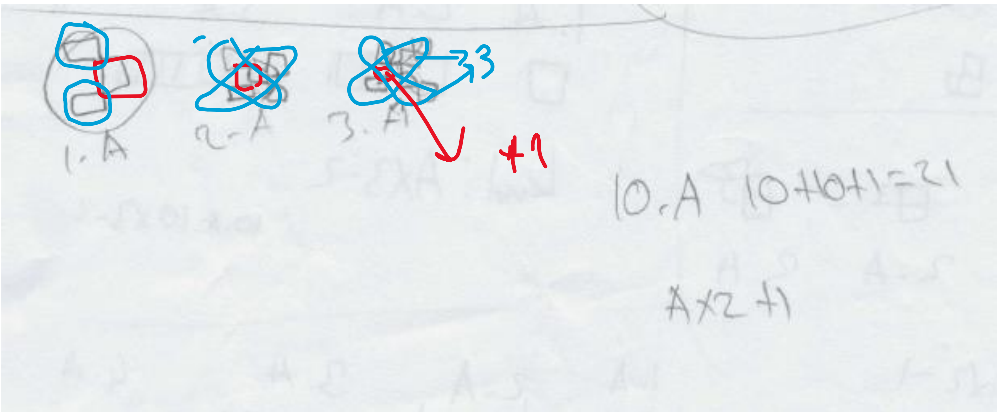
Sevim'in oluşturduğu örüntü Görsel 3.108'de sunulmuştur.



Görsel 3.108. *Sevim'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.108’de görüldüğü gibi, Sevim birinci adıma bitişik yan yana iki kare ile başlamıştır. Diğer adımlarda ise alta doğru ikişer kare ekleyerek devam ederek tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Sevim örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplarken 20. adım için Hakan gibi toplamsal ilişkiyi kullanarak “20+20=40” işlemini yapmıştır. Genel kuralı ifade ederken ise standart olmayan genelleme yaparak yine toplamsal düşünüp eşitlik kullanmadan “adım sayısı+adım sayısı” şeklinde yarı sembolik temsil ile kuralı yazmıştır. Sevim’in kuralı doğrularken üçüncü adımı göstererek “burada (sol dikeyde sıralanan kareler) burada (sağ dikeyde sıralanan kareler) adım sayısı kadar kare var, buralarda da (diğer adımlar) aynı” şeklinde açıklamıştır.

Tablo 3.13’te görüldüğü gibi Hakan ve Mehmet genel kuralı “2n+1” olan örüntüler oluşturmuşlardır. Hakan’ın oluşturduğu örüntü Görsel 3.109’da sunulmuştur.



Görsel 3.109. *Hakan’ın örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.109’da görüldüğü gibi, Hakan birinci adıma ortada bir kare ve bu karenin sol üst ve alt köşelerine bitişik birer karenin eklendiği toplam üç kare ile başlamıştır. Diğer adımlarda ise ortadaki karenin sağ üst ve alt köşelerine bitişik olacak şekilde birer kare ekleyerek iki yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Hakan uzak adım olarak örüntünün 10. adımındaki kare sayısını hesaplamış ve örüntüyü standart fonksiyon tabanlı olarak genellemiştir. Bu sürece ilişkin açıklamaları aşağıda diyalogda sunulmuştur.

A : Uzak bir adımdaki kare sayısını nasıl bulursun?

Hakan : (10.A 10+10+1=21 yazdı).

A : Nasıl buldun?

Hakan : Burada (birinci adım ortadaki kare) bir tane, buralarda (köşelerdeki kareler) adımla aynı sayıda, onuncu adımda burada (Görsel 3.109'da gösterilen mavi grup) 10 tane, burada (mavi grup) on tane, bir tanede (kırmızı grup) ortada yirmi bir olur.

A : Peki kuralı nasıl ifade edersin?

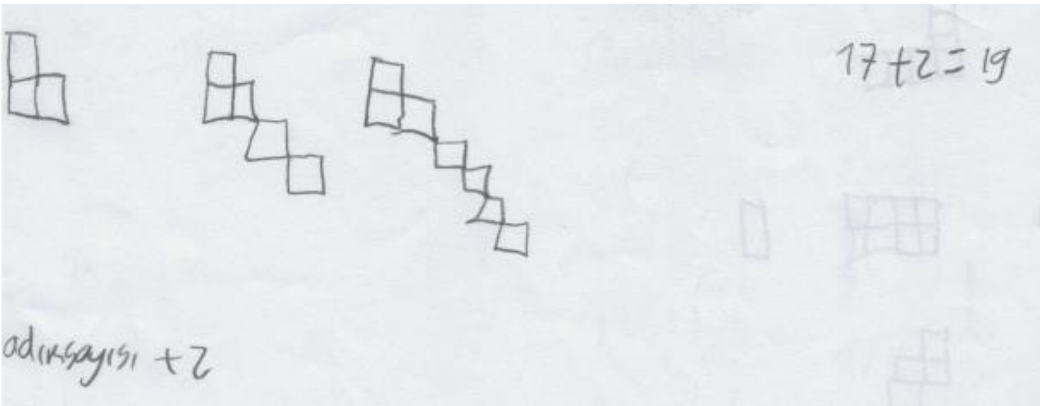
Hakan : (Ax2+1 yazdı). Adım sayısını iki katı artı bir

A : Doğru mu?

Hakan : Ortadaki sabit artı bir olur. Diğerleri (değişen kareler) adım sayısı kadar. Bütün adımlarda böyle. Birinci adım için (1x2+1=3 yazdı) 3 kare var, doğru.

Diyalogda görüldüğü gibi Hakan, örüntünün fiziksel yapısını üç grupta ele almış ve ortadaki kareyi sabit değişmez olarak düşünüp, değişen kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplarken ise toplamsal ilişki kuran Hakan'ın genel kuralı ifade ederken çarpımsal düşündüğü görülmektedir. Nitekim kuralı yazarken eşitlik kullanmadan hem cebirsel/sembolik temsil hem de sözlü temsil ile ifade etmiştir.

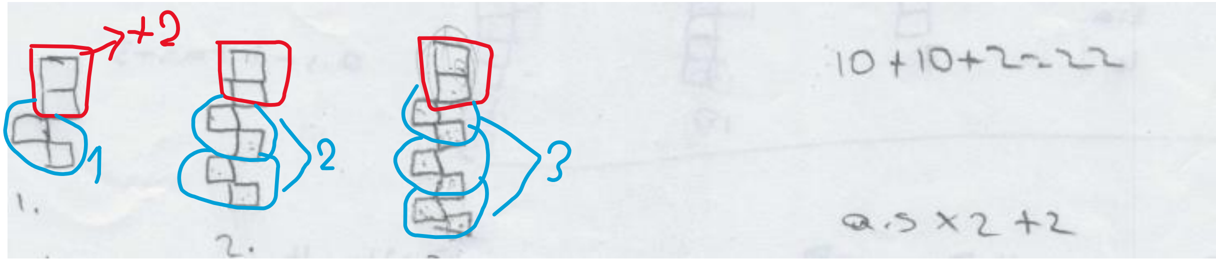
Görsel 3.110'da Mehmet'in oluşturduğu örüntü sunulmuştur.



Görsel 3.110. *Mehmet'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.110'da görüldüğü gibi Mehmet birinci adıma L şeklinde bitişik üç kare ile başlamış ve diğer adımlarda sağ alt köşeye ikişer kare ekleyerek örüntüsünü tek yönde periyodik doğrusal genişleyen şekilde oluşturmuştur. Mehmet bu örüntüyü oluştururken yinelemeli toplamsal düşünmüştür. Bu düşüncesini 17. adımı ve genel kuralı yazarken göstermiştir. Örüntünün terimler arası sabit farkı iki olduğundan 17. adımdaki kare sayısını hesaplarken "17+2=19" işlemini yazmış, genel kuralı yazarken de yarı sembolik temsil ile eşitlik kullanmadan "adım sayısı+2" şeklinde ifade etmiştir. Mehmet'ten kuralın doğruluğunu göstermesi istendiğinde ise "3, 5, 7 kare var, ikişer artıyor, iki kelersem 9 olur" diyerek dördüncü adım için "7+2=9" işlemini yapmıştır.

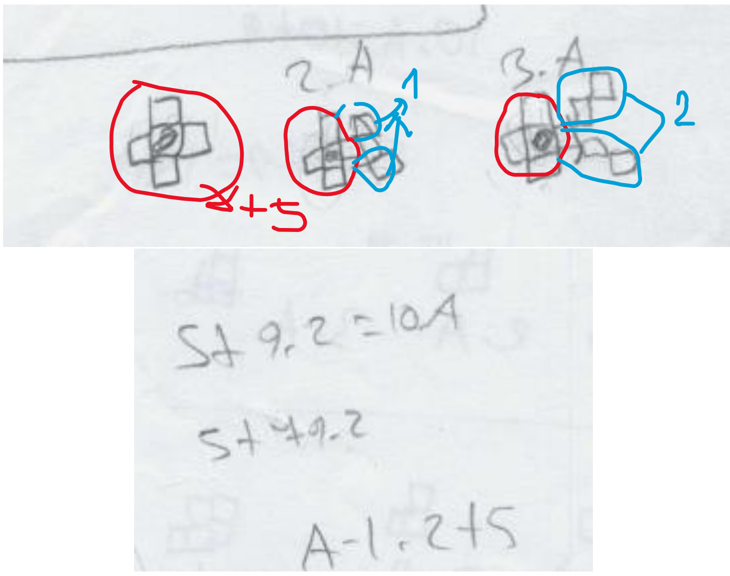
Tablo 3.13'te görüldüğü gibi Esin genel kuralı "2n+2" olan örüntü oluşturmuştur. Esin'in oluşturduğu örüntü Görsel 3.111'de sunulmuştur.



Görsel 3.111. *Esin'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.111'de görüldüğü gibi, Esin birinci adıma dört kare ile başlamış ve bir önceki adıma ikişer kare ekleyerek tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Esin uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplarken örüntünün fiziksel yapısının analizinde görsel 3.111'de görüldüğü gibi üsteki iki kareyi sabit değişmez olarak almış ve iki kareden oluşan grupları adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Bu ilişkilendirmeyi "iki kare sabit, bunlar (alttaki ikili gruplar) adım sayısı ile aynı hep" şeklinde açıklamıştır. Bu analize göre uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplarken toplamsal düşünerek de "10+10+2=22" işlemini yapmıştır. Genel kuralı yazarken ise çarpımsal düşünerek eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile "a.sx2+1" şeklinde standart fonksiyon tabanlı genelleme yaparak ifade etmiştir. Esin'den kuralın doğruluğunu göstermesi istendiğinde ise fiziksel yapıya işaret ederek diğer tüm adımlarda da kare sayılarının aynı şekilde devam edeceğini ifade etmiş ve test etmek amaçlı da üçüncü adım için "3x2+2=8" işlemini yapmıştır.

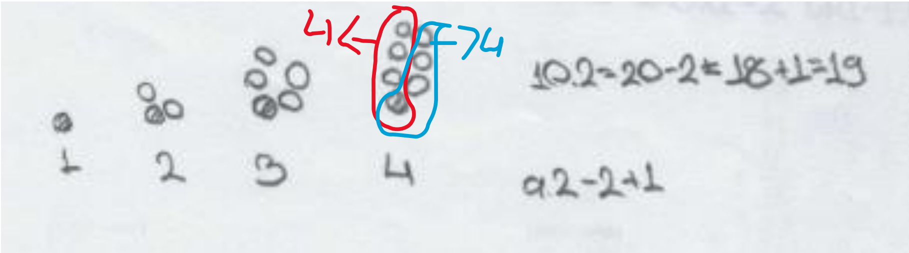
Tablo 3.13'te görüldüğü gibi Hakan ve Orhan genel kuralı "2n+3" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Hakan'ın oluşturduğu örüntü Görsel 3.112'de sunulmuştur.



Görsel 3.112. *Hakan'ın örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.112'de görüldüğü gibi, Hakan birinci adıma ortada bir kareyi çevreleyen dört kare ile birlikte toplam beş kare ile başlamıştır. Ortadaki kareyi de renklendirmiştir. Örüntünün devamında ise sağ yatayda yer alan karenin sağ üst ve sağ alt köşelerine birer kare ekleyerek iki yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Hakan örüntüsünü uzak bir adıma devam ettirirken önce 10. adım sonra 80. adımdaki kare sayılarını hesaplamıştır. Hakan'a nasıl yaptığı sorulduğunda "burada (ikinci adım) buraya (sağ üst ve sağ alt köşeler) birer kare ekledim. Burada ise iki kare" şeklinde açıklama yapmıştır. Hakan'ın bu açıklamasından birinci adımdaki kare sayısını sabit değişmez, diğerlerini ise değişen kareler olarak aldığı görülmektedir. Hakan adımlardaki kare sayılarını hesaplarken ise Görsel 3.112'de görüldüğü gibi "5+9.2=10A, 5+79.2" işlemlerini yapmış ve değişen kare sayılarını adım sayısının bir eksiği ile ilişkilendirmiştir. Hakan'ın 10. adım için eşitlik kullandığı da dikkati çekmektedir. Hakan'a örüntünün genel kuralını yazması istendiğinde ise standart fonksiyon tabanlı genelleme yaparak eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile kuralı "A-1x2+5" şeklinde ifade etmiştir. Hakan'ın kuralı yazarken çarpımsal ilişki kurduğu da görülmektedir. Hakan kuralı doğrularken de Görsel 3.112'de görüldüğü gibi örüntünün fiziksel yapısına odaklanarak her adımda kırmızı grubun sabit olduğunu, mavi grupların ise adım sayısının bir eksiği kadar olduğunu açıklamıştır.

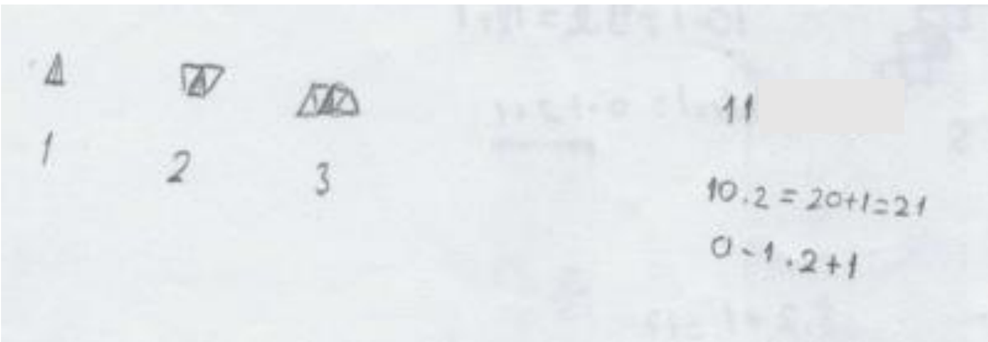
Tablo 3.13'te görüldüğü gibi Uğur, Orhan ve Esin genel kuralı "2n-1" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Görsel 3.113'te Uğur'un oluşturduğu örüntü sunulmuştur.



Görsel 3.113. *Uğur'un örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.113'te sunulduğu gibi Uğur birinci adıma bir daire ile başlamış ve her adımda onu renklendirmiştir. İkinci adımdan itibaren ise renklendirdiği dairenin soluna ve sağına birer daire ekleyerek örüntüsünü iki yönde periyodik doğrusal genişleyen olarak oluşturmuştur. Uğur genelde oluşturduğu örüntüleri genellerken Görsel 3.113'te dördüncü adımda görüldüğü gibi her adımda şekil sayılarını adım sayısı ile aynı olacak şekilde düşünmekte ve çakışan şekil sayısını da çıkarmayı tercih etmektedir. Burada da aynı düşünceyle hareket eden Uğur 10. adımdaki daire sayısını hesaplarken "10.2=20-2=18+1=19" işlemini yapmıştır. Uğur'a nasıl düşündüğü sorulduğunda "solda ve sağda on tane daire var on çarpı iki yirmi tane olur. Bundan iki çıkardım. Çünkü bunu (siyah daire) iki kere saydım. On sekiz oldu, buna bir eklerim on dokuz" açıklamasını yapmıştır. Açıklamada görüldüğü gibi Uğur en son renkli olan daireyi tekrar toplama dahil etmektedir. Uğur aynı düşünceyle örüntüyü genellerken standart fonksiyon tabanlı genelleme yaparak eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile kuralı "a.2-2+1" şeklinde ifade etmiş ve bu süreçte çarpımsal düşünerek hareket etmiştir.

Orhan'ın oluşturduğu örüntü ise Görsel 3.114'te sunulmuştur.



Görsel 3.114. *Orhan'ın örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.114'te görüldüğü gibi Orhan birinci adıma bir üçgen ile başlayarak üçgeni renklendirmiştir. Diğer adımlarda bu renkli üçgenin sağına ve soluna birer üçgen ekleyerek iki yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Orhan örüntünün 11. adımındaki üçgen sayısını hesaplarken Görsel 3.114'te görüldüğü gibi "10.2=20+1=21" işlemini yapmıştır. Bu işlemleri nasıl yaptığı sorulduğunda aşağıda diyalogdaki gibi açıklama yapmıştır.

A : 11. adımı nasıl hesapladın?

Orhan : Burada ve burada (ikinci adım) bir tane üçgen, burada (üçüncü adım) burada iki tane adım sayısının bir eksiği kadar. Onu ikiyle çarptım, yirmi, bir ekledim, yirmi bir.

A : Neden ikiyle çarptın, bir ekledin?

Orhan : Çünkü burada ve burada aynı sayıda iki tane, ortada bir tane üçgen hep aynı, bir ekledim.

A : Genel kuralı yazabilir misin?

Orhan : (a-1.2+1 yazdı).

A : a nedir?

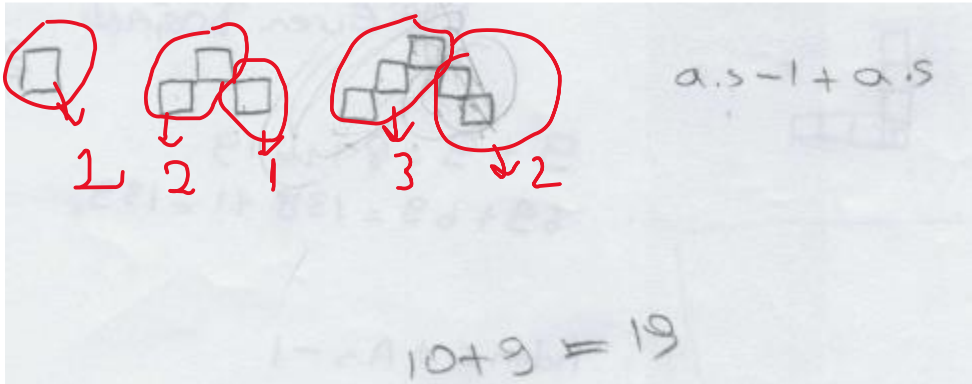
Orhan : Adım sayısı.

A : Peki kuralın doğrumu sence?

Orhan : Adım sayısı yerine 1, 2, 3 koyarsak oluyor. (2-1.2+1=3, 3-1.2+1=5 yazdı). Ortadaki üçgen artı bir olarak ekledim. Onun yanındaki üçgenler adım sayısının bir eksiği kadar oluyor hep.

Diyalogda görüldüğü gibi, Orhan örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken renkli üçgeni sabit değişmez olarak almış, sağındaki ve solundaki değişen üçgen sayılarını ise adım sayısı ile ilişkilendirerek standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır. Orhan kuralı yazarken ise eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile "a-1.2+1" şeklinde ifade etmiştir. Diyalogda da görüldüğü gibi Orhan bu süreçte çarpımsal düşünmüştür. Kuralı doğrularken ise ikinci ve üçüncü adımlar için test yapmış ve üçgen sayısını karşıladığını görmüştür. Ancak Orhan'ın örüntünün fiziksel yapısına vurgu yaparak tüm adımlar için "üçgen sayısının bir eksiği kadar oluyor hep" şeklindeki açıklaması kuralın geçerliliğini göstermesi açısından önemlidir.

Görsel 3.115'te Esin'in oluşturduğu örüntü sunulmuştur.



Görsel 3.115. *Esin'in örüntü örneği ve genellemesi*

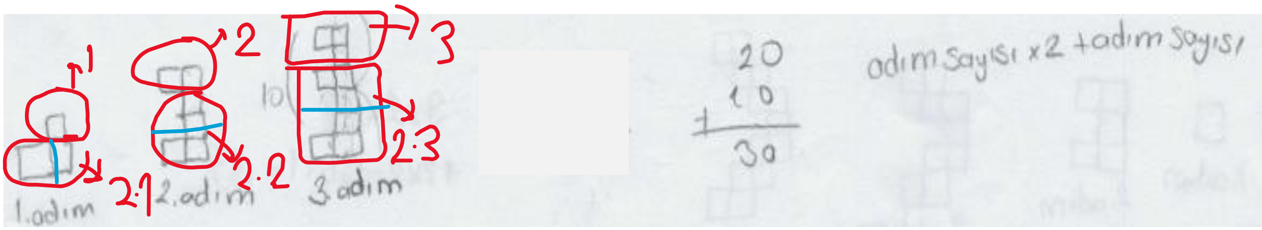
Görsel 3.115'te görüldüğü gibi Esin birinci adıma bir kare ile başlamış ve bu karenin sol ve sağ alt köşelerine birer kare ekleyerek örüntüyü iki yönde periyodik doğrusal genişleyen şekilde oluşturmuştur. Esin örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplarken ve genel kuralı ifade ederken toplamsal düşünmüş ve standart olmayan fonksiyon tabanlı bir genelleme yapmıştır. Örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken Görsel 3.115'te görüldüğü gibi her adımı iki gruba parçalamış ve gruptaki kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Buna göre uzak adımdaki kare sayısını hesaplarken 10. adım için "10+9" işlemini yapmış ve genel kuralı ifade ederken de eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile "a.s-1+a.s" şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacının kuralı doğru olup olmadığını sorgulamasıyla da ilk üç adım üzerinden örüntünün fiziksel yapısına vurgu yapmış ve bu adımlar için kuralı test etmiştir.

C kategorisinde genel kuralı 3n ve 3n+1 olan örüntüler oluşturulmuştur. Bu örüntüleri oluşturan öğrenciler ve genellemeleri Tablo 3.14'te sunulmuştur.

Tablo 3.14. *C kategorisindeki örüntülerin oluşumu ve genellenmesi*

Genel kuralı 3n olan örüntüler Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil adım sayısıx2+adım sayısı	Sevim
Genel kuralı 3n+1 olan örüntüler Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme** *Yarı sembolik temsil Adım Sayısıx3+1	Kamil

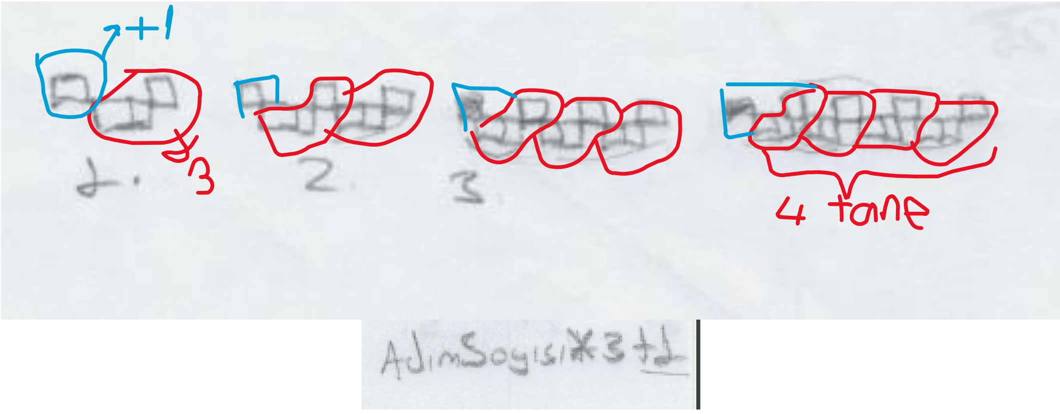
Tablo 3.14’te görüldüğü gibi Sevim genel kuralı “3n” olan örüntü oluşturmuştur. Sevim’in oluşturduğu örüntü Görsel 3.116’da sunulmuştur.



Görsel 3.116. *Sevim’in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.116’da görüldüğü gibi Sevim birinci adıma ters L şeklinde üç kare ile başlamış ve bu şekli bütün olarak diğer adımlara birer birer eklemiş ve tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Sevim örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplarken ve genel kuralı ifade ederken örüntünün fiziksel yapısını enteresan bir şekilde analiz etmiş ve standart olmayan fonksiyon tabanlı bir genelleme yapmıştır. Görsel 3.116’da görüldüğü gibi örüntüyü iki grupta ele almış ve gruptaki kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. Bu ilişkilendirmeye dayalı olarak 10. adımı “20+10=30” şeklinde hesaplamıştır. Sevim’e nasıl yaptığı sorulduğunda ise “burada (üçüncü adımda ilk grup) 6 tane kare var. Üçün iki katı, burada (ikinci grup) üç tane kare var. Yani adım sayısının iki katı ve adım sayısı kadar. Ondan onuncu adımda on ile ikiyi çarptım yirmi buna on ekledim, otuz oldu” açıklamasını yapmıştır. Sevim örüntünün kuralı yazarken de aynı düşünceyle eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile “adım sayısıx2+adım sayısı” şeklinde ifade etmiştir. Sevim kuralı doğrularken de örüntünün fiziksel yapısına vurgu yapmış ve kuralın doğruluğunu “buralar (birinci grup) adım sayısının iki katı burası da (ikinci grup) adım sayısı kadar böyle” şeklinde gerekçelendirmiştir. Sevim’in örüntüyü genellerken üç kat ilişkisini göremediği ancak ilginç şekilde iki kat ilişkisini görerek çarpımsal ilişki kurduğu görülmektedir.

Tablo 3.14’te görüldüğü gibi Kamil genel kuralı “3n+1” olan örüntü oluşturmuştur. Kamil’in oluşturduğu örüntü Görsel 3.117’de sunulmuştur.



Görsel 3.117. *Kamil'in örüntü örneği ve genellemesi*

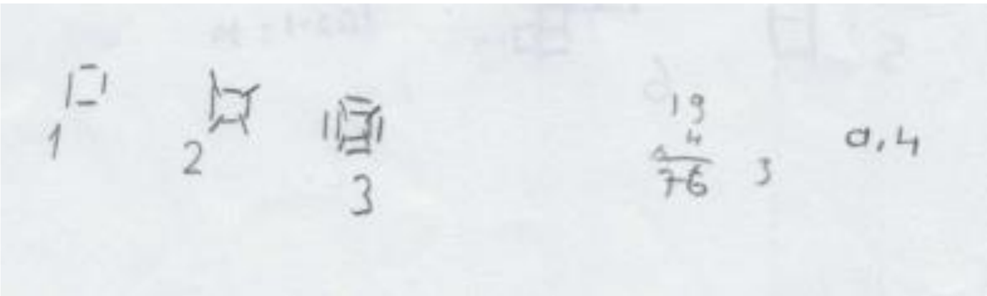
Görsel 3.117'de görüldüğü gibi Kamil birinci adıma bitişik iki kare ve bu karelerin üst sol ve sağ köşelerine birer kare ekleyerek toplam dört kare ile başlamıştır. Diğer adımlara ise birinci adımdaki şeklin bir parçasını kullanarak sağ alt köşeye üç kareden oluşan parçayı ekleyerek devam ettirmiş ve tek yönde periyodik doğrusal genişleyen örüntü oluşturmuştur. Görsel 3.117'de görüldüğü gibi Kamil solda en uçtaki kareyi renklendirmiştir. Kamil'den örüntünün uzak bir adımındaki kare sayısını hesaplaması istendiğinde 5. adımı hesaplamak istemiş ve "2x5=10+5=15+1=16" şeklinde işlem yapmıştır. Kamil'e işlemi açıklaması istendiğinde ise Kamil'in örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken önce Sevim gibi düşünmüş şekli üç parçaya ayırarak şeklin altında kalan bitişik iki kareyi gruplamıştır. Grup sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirerek, adım sayısı kadar olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle iki ile beşi çarpmıştır. Daha sonra üstte yer alan renkli kare hariç diğer kareleri de bir grup yaparak bu gruptaki kare sayılarının da beş tane olduğunu açıklayarak, elde ettiği sonuca eklemiş, son olarak da sabit değişmez olarak aldığı renkli kare sayısını da ekleyerek on altıya ulaşmıştır. Kamil'den genel kuralı yazması istendiğinde ise bu düşüncesinden vazgeçerek Sevim'den farklı olarak Görsel 3.117'de görüldüğü gibi renkli kareye eklediği üçlü grupları adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve çarpımsal düşünerek standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır. Kuralı yazarken de eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile "adım sayısıx3+1" şeklinde ifade etmiştir. Kamil'e kuralın doğru olup olmadığı sorulduğunda ise Kamil "Doğru. Çünkü dördüncü adımda adım sayısı kadar üç var. Yani dört kere üç on iki, buna bir eklersem on üç olur. On üç tane kare var zaten, diğerleri de aynı olur" şeklinde gerekçelendirme yapmıştır.

D kategorisinde genel kuralı 4n ve 4n+5 olan örüntüler oluşturulmuştur. Bu örüntüleri oluşturan öğrenciler ve genellemeleri Tablo 3.15'te sunulmuştur.

Tablo 3.15. *D kategorisindeki örüntülerin oluşumu ve genellenmesi*

Genel kuralı 4n olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	
Döngüsel genişleyen	*Cebirsel/sembolik temsil	Orhan
Tek yönde periyodik doğrusal genişleyen	a.4	Sevim
	***Standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme**	
	*Yarı sembolik temsil	
	Adım sayısıx3+adım sayısı	
Genel kuralı 4n+5 olan örüntüler	***Standart fonksiyon tabanlı genelleme**	Kamil
Döngüsel genişleyen	*Yarı sembolik temsil	
	Adım Sayısıx4+5	

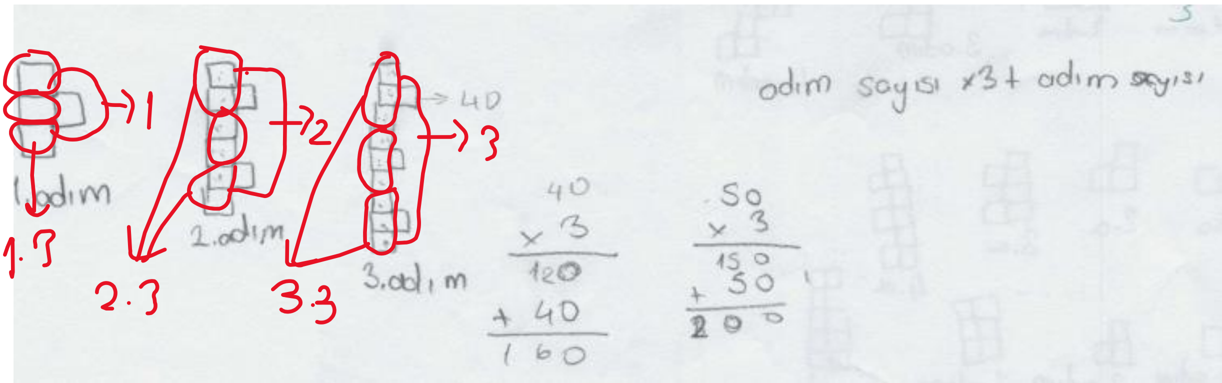
Tablo 3.15'te görüldüğü gibi Orhan ve Sevim genel kuralı "4n" olan örüntüler oluşturmuşlardır. Görsel 3.118'te Orhan'ın oluşturduğu örüntü sunulmuştur.



Görsel 3.118. *Orhan'ın örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.118'te görüldüğü gibi Orhan birinci adıma kare şeklinde ayrık dört çizgiyle başlamış, ikinci adımda dört köşeye dört çizgi, üçüncü adımda kare şeklinin dört kenarına tekrar dört çizgi olacak şekilde döngüsel genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Orhan örüntünün uzak bir adımındaki çizgi sayısını hesaplarken 19. adımı için "19x4=76" işlemini yapmıştır. Orhan işlemini açıklarken "çizgi sayısı adım sayısının dört katı olduğu için" ifadesini kullanmıştır. Orhan örüntünün kuralını yazarken de standart fonksiyon tabanlı genelleme yaparak eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile kuralı "a.4" şeklinde ifade etmiştir. Orhan'ın kuralı ifade ederken çarpımsal düşündüğü görülmektedir. Kuralı doğrulaması istenen Orhan örüntünün fiziksel yapısına vurgu yaparak "adım sayısının dört katı tüm adımlarda istediğim adımı bu yolla bulabilirim" şeklinde gerekçesini sunmuştur.

Sevim'in oluşturduğu örüntü Görsel 3.119'da sunulmuştur.



Görsel 3.119. *Sevim'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.119'da görüldüğü gibi Sevim birinci adıma bitişik dört kare ile başlamış ve diğer adımlarda bu şekli bütün olarak üst üste ekleyerek devam etmiş ve tek yönde periyodik doğrusal genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Sevim uzak bir adımdaki kare sayısını hesaplarken önce 40. adım için "40x3=120+40=160" ve sonra 50. adım için "50x3=150+50=200" işlemlerini gerçekleştirmiştir. Sevim genel kuralı "3n" olan örüntüyü oluştururken de benzer bir yapı oluşturmuş ve örüntüyü standart olmayan fonksiyon tabanlı genellemişti. Bu örüntünün fiziksel yapısını analiz ederken de aynı düşünceyle hareket etmiş ve her adımdaki şekilleri iki gruba parçalamıştır. Görsel 3.119'da görüldüğü gibi birinci grup şeklin solunda yer alan kareler, ikinci grup şeklin sağında yer alan kareler şeklindedir. Sevim her iki gruptaki kare sayılarını adım sayısı ile ilişkilendirmiş ve standart olmayan fonksiyon tabanlı genellemiştir. Örüntünün genel kuralını yazarken de "adım sayısıx3+adım sayısı" şeklinde eşitlik kullanmadan yarı sembolik temsil ile kuralı ifade etmiştir. Sevim kuralı doğrularken de örüntünün fiziksel yapısına vurgu yaparak ilk üç adım üzerinde aynı şekilde "tüm adımlarda adım sayısının üç katı ile adım sayısı kadar kare" olduğunu açıklamıştır.

Tablo 3.15'te görüldüğü gibi Kamil genel kuralı "4n+5" olan örüntü oluşturmuştur. Kamil'in oluşturduğu örüntü Görsel 3.120'de sunulmuştur.

Görsel 3.120. *Kamil'in örüntü örneği ve genellemesi*

Görsel 3.120’de görüldüğü gibi Kamil birinci adıma ortaya artı şeklinde beş kare çizmiş ve bu şeklin dört köşesine dört tane kare ekleyerek toplamda 9 kare ile başlamıştır. Diğer adımlarda dört köşeye birer kare ekleyerek döngüsel genişleyen bir örüntü oluşturmuştur. Kamil 4. adımdaki kare sayılarını hesaplamış ve standart fonksiyon tabanlı genelleme yapmıştır. Kamil’in genelleme sürecine ilişkin açıklamaları aşağıda diyalogda sunulmuştur.

A : Bir örüntü daha oluşturabilir misin?
Kamil : (Görsel 3.120’de sunulan örüntüyü çizdi)
A : Nasıl ilerlettin?
Kamil : Her kola birer ekledim.
A : Peki istediğin bir adımda kaç kare olur? Nasıl bulursun?
Kamil : (4. adım için 4+4+5+8=21 yazdı).
A : Nasıl hesapladın?
Kamil : Şu 5 kare (ortadaki artı şekli) Hımmm. Her kolda 4’er tane 4 ve 5 sabit 21
A : Peki şuradaki 8 ne?
Kamil : Öğretmenim o alttaki iki kol
A : Peki kural ne olacak?
Kamil : (Adım sayısı x4+5 yazdı). Adım sayısı çarpı dört artı beş olur.
A : Kuraldan emin misin?
Kamil : Eminim. Çünkü burası (ortadaki şekil) beş tane sabit, buraları da (kollar) adım sayısı kadar hep.

Diyalogdan görüldüğü gibi Kamil örüntünün fiziksel yapısını beş gruba parçalayarak düşünmüş, ortadaki beş kareyi sabit değişmez olarak almıştır. Şekilde dört kolu da adım sayısı ile ilişkilendirerek kuralı eşitlik kullanmadan cebirsel/sembolik temsil ile ifade etmiştir. Kamil kuralı doğrularken ise diyalogda görüldüğü gibi örüntünün fiziksel yapısı üzerinden gerekçelendirme yapmıştır.

Elde edilen tüm bulgular sonucunda düşük, orta ve yüksek düzeye sahip öğrencilerin ön, ara ve son klinik görüşme sonucundaki gelişimleri genel olarak Tablo 3.16, Tablo 3.17 ve Tablo 3.18’de sunulmuştur.

Tablo 3.16. *Düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin gelişim tablosu*

Öğrenciler: Mehmet, Özlem, Sevim		Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma	Bağımsız Örüntü Oluşturma
Ön Klinik Görüşme	Oluşturulan örüntü	Prototip örüntü	Prototip örüntü
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli	Yinelemeli
	Parça-Bütün İlişkisi	Bütün odaklı	Bütün odaklı
	Genelleme	-	-
Ara Klinik Görüşme	Oluşturulan örüntü	Tek yönde ilerleyen	Tek yönde ilerleyen
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli	Yinelemeli
	Parça-Bütün İlişkisi	Parça odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	Hatalı genelleme	Hatalı genelleme
Son Klinik Görüşme	Oluşturulan örüntü	Birden fazla yönde ilerleyen örüntü	Birden fazla yönde ilerleyen örüntü
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli	Yinelemeli/Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Parça odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	Standart olmayan fonksiyon tabanlı	Standart olmayan fonksiyon tabanlı

Tablo 3.16'de görüldüğü gibi düşük düzeye sahip öğrenciler ön klinik görüşmelerde prototip tek yönde ilerleyen örüntü oluştururken ara klinik görüşmelerde tek yönde ilerleyen son klinik görüşmelerde ise birden fazla yönde ilerleyen örüntü oluşturmuşlardır. Stratejilere bakıldığında ise genellikle yinelemeli stratejiyi kullandıkları görülmüştür. Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde ilk başlarda bütün odaklı son klinik görüşmelerde ise parça odaklı olarak ilerletmişlerdir. Bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde ise başlangıçta bütün odaklı uygulamanın sonlarına doğru ise hem parça hem de bütün odaklı olarak ilerletmişlerdir. Örüntü genellemeye bakıldığında ise ara klinik görüşmede örüntü genelleme de sorun yaşarlarken son klinik görüşmelerde ise standart olmayan fonksiyon tabanlı genelleme yapabildikleri görülmüştür. Orta başarı düzeyine sahip öğrencilerin gelişim tablosu Tablo 3.17'de sunulmuştur.

Tablo 3.17. *Orta başarı düzeyine sahip öğrencilerin gelişim tablosu*

Öğrenciler: Esin, Hakan, Kamil		Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma	Bağımsız Örüntü Oluşturma
Ön Klinik Görüşme	Oluşturulan örüntü	Prototip örüntü	Prototip örüntü
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli	Yinelemeli/Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Bütün odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	-	-
Ara Klinik Görüşme	Oluşturulan örüntü	Tek yönde ilerleyen	Birden fazla yönde ilerleyen
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli/Fonksiyonel	Yinelemeli/Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Parça/Bütün odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	Standart olmayan/Standart fonksiyon tabanlı	Standart olmayan/Standart fonksiyon tabanlı

Tablo 3.17. (Devam) *Orta başarı düzeyine sahip öğrencilerin gelişim tablosu*

Öğrenciler: Esin, Hakan, Kamil		**Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma**	**Bağımsız Örüntü Oluşturma**
Son Klinik Görüşme	**Oluşturulan örüntü**	Birden fazla yönde ilerleyen örüntü	Birden fazla yönde/Döngüsel ilerleyen örüntü
	Kullanılan Strateji	Fonksiyonel	Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Parça odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	Standart olmayan/Standart fonksiyon tabanlı	Standart fonksiyon tabanlı

Tablo 3.17'de görüldüğü gibi orta düzeye sahip öğrenciler ön klinik görüşmelerde prototip tek yönde ilerleyen örüntü oluştururken ara klinik görüşmelerde tek yönde ilerleyen son klinik görüşmelerde ise birden fazla yönde ve döngüsel ilerleyen örüntü oluşturmuşlardır. Stratejiere bakıldığında ise ön klinik görüşmelerde yinelemeli stratejiyi, ara ve son klinik görüşmelerde ise fonksiyonel stratejiyi kullanmışlardır. Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde ilk başlarda bütün odaklı, son klinik görüşmelerde ise çoğunlukla parça odaklı olarak ilerletmişlerdir. Bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde ise hem parça hem de bütün odaklı olarak ilerletmişlerdir. Örüntü genellemeye bakıldığında ise ara klinik görüşmelerde hem standart olmayan hem de standart fonksiyon tabanlı genelleme yaparlarken son klinik görüşmelerde ise standart fonksiyon tabanlı genelleme yapabildikleri görülmüştür. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin gelişim tablosu Tablo 3.18'de sunulmuştur.

Tablo 3.18. *Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin gelişim tablosu*

Öğrenciler: Orhan, Uğur, Yasemin		**Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma**	**Bağımsız Örüntü Oluşturma**
Ön Klinik Görüşme	**Oluşturulan örüntü**	Prototip örüntü	Prototip örüntü
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli/Fonksiyonel	Yinelemeli/Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Bütün odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	-	-
Ara Klinik Görüşme	**Oluşturulan örüntü**	Tek yönde ilerleyen	Birden fazla yönde ilerleyen
	Kullanılan Strateji	Yinelemeli/Fonksiyonel	Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Parça/Bütün odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	Standart fonksiyon tabanlı	Standart fonksiyon tabanlı
Son Klinik Görüşme	**Oluşturulan örüntü**	Birden fazla yönde/Salınımlı ilerleyen örüntü	Birden fazla yönde/Salınımlı/ döngüsel ilerleyen örüntü
	Kullanılan Strateji	Fonksiyonel	Fonksiyonel
	Parça-Bütün İlişkisi	Parça odaklı	Parça/Bütün odaklı
	Genelleme	Standart fonksiyon tabanlı	Standart fonksiyon tabanlı

Tablo 3.18'de görüldüğü gibi yüksek düzeye sahip öğrenciler ön klinik görüşmelerde prototip tek yönde ilerleyen örüntü oluştururken ara klinik görüşmelerde tek ve birden fazla yönde ilerleyen, son klinik görüşmelerde ise birden fazla yönde, salınımlı ve döngüsel ilerleyen örüntüler oluşturmuşlardır. Stratejilere bakıldığında ise ön klinik görüşmelerde hem yinelemeli hem de fonksiyonel stratejiyi, ara ve son klinik görüşmelerde ise fonksiyonel stratejiyi kullanmışlardır. Yarı bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde ilk başlarda bütün odaklı, son klinik görüşmelerde ise çoğunlukla parça odaklı olarak ilerletmişlerdir. Bağımsız örüntü oluşturma görevlerinde örüntülerini hem parça hem de bütün odaklı olarak ilerletmişlerdir. Örüntü genellemeye bakıldığında ise hem ara hem de son klinik görüşmelerde standart fonksiyon tabanlı genelleme yapabildikleri görülmüştür.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Araştırmanın ön klinik görüşmelerinde öğrenciler yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında örüntü oluştururken çoğunlukla şeklin yapısına odaklanmak yerine önce sayı örüntüsü oluşturmuş, terim sayısı kadar şekil çizmişlerdir. Kılıç'ın (2017c) çalışmasında öğrencilerin benzer şekilde sayı örüntüsüne dayalı şekil örüntüsü oluşturmaları bu sonucu destekler niteliktedir. Yanı sıra şekil örüntüsü oluştururken zorlanan ve örüntü oluşturamayan öğrenciler de olmuştur. Fischbein'in (1993) bir kavramın şekle gömülü olduğu ve öğrencilerin görseli terk ettiklerinde ve yalnızca sayılara odaklandıklarında kavramı yapılandıramadıkları yönündeki görüşü şekil örüntüsü oluşturmada öğrencilerin daha çok yol kat etmeleri gerektiğini göstermektedir. Alanyazında da öğrencilerin örüntü oluşturmada zorlandıkları çeşitli çalışmalarla belirtilmektedir (Tanışlı, 2008; Kılıç, 2017a; Kılıç, 2017b; Kılıç, 2017c). Bu durumun nedeni üç noktada tartışılabilir. Birincisi öğrencilerin örüntü konusundaki eksikliklerinin örüntü oluşturmayı engellemesi, ikincisi öğretmenlerin örüntü genelleme kadar örüntü oluşturma etkinliklerine yeterince yer vermemeleri ve üçüncüsü ise ilköğretim matematik dersi öğretim programında örüntülere ilkokuldan itibaren yer verilse de kazanımların sayısı ve içeriğinin yeterli olmaması olabilir.

Ön klinik görüşmelerde yarı bağımsız örüntü görevlerine dayalı oluşturulan örüntülerin partonomik yapıları incelendiğinde ise öğrenciler prototip olarak adlandırılan Kılıç'ın (2017c) çalışmasında da görüldüğü gibi, tek yönde yatay ya da dikey periyodik doğrusal genişleyen örüntüler oluşturmuşlardır. Öğrenciler çoğunlukla da örüntülerini bütün odaklı hareket ederek oluşturmuşlardır. Öğrencilere sunulan yarı bağımsız örüntü görevlerinin bir adımlı ve bir tane şekil birimi ile verilmesi öğrencilerin bütün odaklı hareket etmelerinde etkili olmuştur. Nitekim bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında birinci adıma birden fazla sayıda şekil birimi ile başlayan bazı öğrenciler bu şekil biriminin bir parçasını kullanarak yani parça odaklı hareket ederek örüntüyü genişletmişlerdir. Bununla birlikte bağımsız örüntü oluştururken öğrenciler yarı bağımsız örüntü görevinde sunulan şekil birimini kullanarak da örüntü oluşturmuşlardır. Tanışlı'nın (2008) çalışmasında da ifade edildiği gibi öğrencilerin daha önce gördükleri yapıları taklit etme eğiliminde oldukları söylenebilir. Yarı bağımsız ya da bağımsız örüntü oluşturma sürecinde öğrenciler partonomik yapıları oluştururken çok azı adım sayısı ve şekil sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi dikkate almış, çoğunluğu ise yinelemeli ilişkiye odaklanmıştır. Rivera ve Becker'ın (2016) da ifade ettiği gibi yinelemeli ilişki minimum düzeyde partonomik bir yapı özelliği taşımaktadır ve bu yapı uzak adımları belirlemede etkili değildir. Ayrıca örüntü genellemede öğrencilerin genellikle yinelemeli ilişkiyi kullanmaya eğilimli olmaları (Orton ve Orton, 1999; Warren, 2005) ve öğrencilerin geçmiş deneyimlerinde sabit değişen örüntüleri genellerken adım sayıları arasındaki sabit farkı değişkenin katsayısı olarak kullanıp genel kuralı deneyerek bulmaları (Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011) bu durumun yaşanmasında etkili olmuş olabilir.

Öğrencilerde gözlenen tüm bu durumlar dikkate alınarak öğretim süreci boyunca çeşitli etkinlikler planlanmıştır. Bu etkinlikler ve uygulama sırası matematik öğretimi özelde yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma öğretimi için çeşitli çıkarımlar ortaya koymuştur. Başlangıçta öğrencilerin örüntü oluşturma performanslarının zayıf olmasının şekil örüntüsünü genelleme deneyimlerinin eksikliğinden kaynaklanabileceği düşünülerek sabit değişen bir şekil örüntüsü üzerinden örüntü genelleme çalışmaları yapılmış ve bu süreçte şekil örüntüsünün fiziksel yapısı incelenmiş, parça-bütün ilişkileri üzerinde durularak adım sayısı ile ilişkilendirme çalışmaları yapılmıştır. Bu süreçte öğrencilerin eşdeğer partonomik yapıları fark etmeleri sağlanmıştır. İkinci olarak yarı bağımsız örüntü oluşturma çalışmalarında öğrencilerin sayı örüntüsünden hareketle şekil örüntüsü oluşturmasını ve fiziksel yapıya dikkat etmeden şekilleri sıralamalarını yıkmak adına bir sayı örüntüsü üzerinden şekil örüntüsü oluşturma çalışması yapılmıştır. Bu süreçte farklı partonomik yapılar oluşturularak karşılaştırmalar yapılmış ve öğrencilerin parça bütün ilişkilerini görmeleri sorgulanmıştır. Daha sonra ilk olarak bir adımlı ve bir tane şekil biriminden oluşan yarı bağımsız örüntü görevleri ile devam edilmiş ve öğrencilerin periyodik doğrusal sıralanan örüntülerden ziyade farklı partonomik yapılar oluşturmaları sağlanmaya çalışılmıştır. Daha sonra bu yapılar öğrencilerle birlikte analiz edilmiştir. Böylece yapılan bu etkinliklerle öğrenciler oluşturulan yapılarda sabit ve değişen nicelikleri fark etmeye başlamışlardır. Bu öğretim öğrencilerin şekilsel muhakemelerinin (Friel ve Markworth, 2009) gelişmeye başlamasında başlangıç noktası olmuştur. Duval'in (2014) ifadesiyle öğrenciler şekilsel birimleri, yani verilen bir görsel temsilde matematiksel olarak ilgili unsurları ayırt etmeyi ve tanımayı öğrenmeye başlamışlardır. Ancak bu süreçte akademik başarısı yüksek ve orta olan öğrenciler şekilsel muhakemeye daha yatkın olmuşlar ve örüntünün yapısal özelliklerine daha dikkat etmişlerdir (Walkowiak, 2014). Nitekim bu öğrencilerden bazıları görsel temsilden sözel temsile geçiş yaparak adım sayısı ve şekil sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi sözel olarak ifade etmişlerdir. Mouhayar ve Jurdak'ın (2016) da ifade ettiği gibi, fonksiyonel ilişkiyi ifade etmede bu noktada şekilsel muhakeme sayısal muhakemeden daha baskın olmuştur. Bu süreçte Orhan gibi bazı öğrenciler ise bütün odaklı oluşturdukları örüntülerde kat ilişkisi kurarak çarpımsal düşünmeye adım atmışlardır. Çarpımsal düşünme, öğrencilerin ilkokuldan itibaren matematiği öğrenmelerinde oldukça önemlidir (Hackenberg ve Tillema, 2009; Norton ve diğerleri, 2015). Bazı araştırmacıların da vurguladığı gibi bu araştırmada da görsel temsil ve görsel temsilin yapısının analizinin çarpımsal düşünmeyi kolaylaştırdığı söylenebilir (Davydov, 1991; Kinzer ve Stanford, 2014).

Öğrencilerde oluşmaya başlayan fonksiyonel ilişki farkındalığını gözlemlemek amacıyla farklı bir etkinliğe geçilmiş ve bir adımlı ancak birden fazla sayıda şekil biriminden oluşan yarı bağımsız örüntü genelleme görevi ile öğretime devam edilmiştir. Bu süreçte de bazı öğrenciler bütün odaklı periyodik doğrusal genişleyen örüntüler oluştursalar da bu örüntülerin yapısını analiz ederek kat ilişkisi kurmuşlar ve bazı öğrenciler çarpımsal düşünmüşlerdir. Yarı bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında öğretimde izlenen sırada bu sefer ilk adımı 2 taneden fazla sayıda şekilden oluşan şekil birimi kullanılmıştır. Bu süreçte öğrencilerin çoğunluğunda parçadan şeklin özelliklerine, parçadan ilişkilere doğru kavramsal bir değişiklik oluşmaya başlamıştır (Smith, 2003; Rivera ve Becker, 2016). Nitekim öğrenciler parça odaklı oluşturdukları örüntüleri iki yönde periyodik doğrusal, salınımlı gibi stratejiler ile genişletmişlerdir. Smith (2003) nesne tanıma olarak adlandırdığı bu süreci algısal bir alanda artan bir uzmanlıkla birlikte parça benzerden yapılandırıcı temsillere genel bir geçiş olarak ifade etmektedir. Bu bağlamda da öğrenciler öğretim sürecinde deneyim kazandıkça partonomik yapıları daha kolay analiz etmeye başlamışlar, parça bütün ilişkileri kurup örüntüde değişen ve sabit kalan nicelikleri fonksiyonel olarak sözel temsil ile ifade etmişlerdir. Ancak bu süreçte Rivera ve Becker (2016) çalışmasında da gözlendiği gibi partonomik ilişkileri ifade ederken bazı öğrenciler toplamsal, bazı öğrencilerde çarpımsal düşünmüşlerdir. Toplamsal düşünme örüntüde partonomik özelliklere dayalı yapılandırılan ilişkilerin sayısını yani boyutunu etkilemiştir. Öğretim süreci ilerledikçe öğrencilerin oluşturdukları partonomik yapılar da daha karmaşıklaşmıştır. Özellikle Kamil'in oluşturduğu örüntüler bu anlamda öne çıkmıştır. Karmaşıklık artıkça da partonomik özelliklerin ayırt edilmesi ve partonomik ilişkilerin görülmesi zorlaşmaktadır. Rivera (2011) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmadaki öğrencilerde de görüldüğü gibi Kamil'de karmaşık yapıda oluşturduğu örüntülerdeki yapıyı ve özellikleri fark etmede zorlanmıştır.

Yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında öğrencilerdeki gelişim ara klinik görüşmelerde kendini göstermeye başlamıştır. Öğrencilere sunulan yarı bağımsız örüntü görevi (bir adımlı üç ayrık daireden oluşan şekil birimi) hem parçasal hem de bütünsel olarak ilerlemeye uygun seçilmiştir. Bu bağlamda görüşmelerde öncelikle partonomik yapılardaki değişimler daha fazla ortaya çıkmış ve farklı yönlerde periyodik doğrusal örüntülerin yanı sıra salınımlı, döngüsel ilerleyen örüntüler de oluşturulmuştur. Bu görüşmelerde öğrencilerden oluşturdukları örüntüleri genellemeleri de istenmiştir. Bu bağlamda öğretimlerde öğrencilerde yavaş yavaş gözlenmeye başlanan çarpımsal düşünmenin örüntü oluşturma ve genellemede etkisi daha net fark edilmiştir. Buna göre öğrencilerin çoğunluğu fonksiyonel ilişkiye dayalı çarpımsal oluşumlar gerçekleştirmişlerdir. Bu süreçte her ne kadar parça odaklı ilerleyen örüntüler daha fazla oluşturulsa da Rivera ve Becker'in (2016) çalışmalarında da olduğu gibi bütün odaklı oluşumlar tek boyutta yani sabit terim olmadan (3 x A gibi) daha kolay genellenmiştir. Diğer yandan daha önceki süreçlerde oluşturulan örüntüleri genelleyemeyen bazı öğrencilerin ayrık üç daireden oluşan şekil birimini kullanarak oluşturdukları örüntüleri genelledikleri fark edilmiş bu durum ise ilk adımının ayrık ya da bitişik şekilde veriliş biçiminin, öğrencilerin partonomik yapılar oluşturma ve bu yapıları genelleme performanslarına etkisi olabileceğini düşündürmüştür.

Duval'in (1999) ifade ettiği gibi örüntü genellemenin merkezinde yer alan iki temsil mekanizması olan işleme (processing) ve dönüşüm (conversion) çarpımsal düşünmeden etkilenmiş (Rivera ve Becker, 2016) ve bazı öğrenciler görsel temsilden, sözel, yarı sembolik ve sembolik temsile geçiş yapmıştır. Temsiller arası geçişlerde bazı öğrenciler kuralı ifade ederken değişen niceliği "adım" sayısının baş harfi olan "A ya da a ya da As" harfleri ile göstererek değişkenin etiket anlamını (Philipp, 1992) kullanmıştır. Öğrencilerin bir kısmı kuralı ifade ederken eşitlik kullanmadan (örneğin 3A+1 gibi), az sayıda öğrenci ise eşitlik kullanarak (örneğin K=3A+1 gibi) bağımlı ve bağımsız iki değişkeni birden kullanmışlardır. Bu öğrenciler etiket anlamını kullansalar da değişkenin birbirine bağlı değişen nicelik (Philipp, 1992) anlamlarının farkında olmuşlardır. Bağımsız örüntü genelleme görevlerinde ise öğrencilerin çoğunluğu Kamil hariç daha önce oluşturdukları partonomik yapılara benzer yapılar oluşturmuşlar ve oluşturdukları yapıları genellemeye çalışmışlardır. Ancak tüm bu süreçlerde akademik başarısı düşük olan Mehmet ve Özlem ne yazık ki örüntüleri yinelemeli ilişkiye dayalı oluşturdukları için genelleme sürecinde zorlanmışlardır.

Öğrencilerin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme görevlerinde daha da uzmanlaşmalarını sağlamak için öğretim dizisinin devamında pek çok çalışmada da (Tanışlı, 2008; Walkowiak, 2014) önemi vurgulanan ve sayısal ilişkileri daha görünür kılan tablo temsili kullanılmış ve öğrencilerin çarpımsal düşünerek eşdeğer partonomik yapıları fark etmeleri sağlanmıştır. Tablo temsili kullanımını anlamlandırmak adına da önce bağımsız örüntü genelleme görevi bağlamında renkli örüntü blokları kullanılarak örüntü oluşum çalışmaları yapılmıştır. Örüntü bloklarında renk ayırımı sabit ve değişen nicelikleri daha kolay görmede etkili olmuş, bu değişim tablo temsiline daha kolay geçiş yapmayı sağlamıştır (Walkowiak, 2014). Böylece görsel temsildeki partonomik ilişkilere dayalı tablo temsiline geçiş yapıldığında öğrencilerin sayısal ilişkileri görmelerinin kolaylaştığı ve sayısal muhakemelerinin gelişmeye başladığı söylenebilir. Ayrıca ara klinik görüşmelerde yarı sembolik temsillerin ağırlıklı kullanımına karşın tablo temsili üzerinden sembolik temsile geçiş çalışmaları ile öğrencilerin bu yönde gelişimleri de sağlanmaya çalışılmıştır. Süreçteki yapılan tüm etkinliklerin yansıması son klinik görüşme öncesi bağımsız örüntü oluşturma çalışmasında gözlenmiştir. Bazı öğrenciler birinci adımda seçtikleri şekil biriminde şeklin kendisinden ziyade kenar sayılarına odaklanarak farklı partonomik yapılarda örüntüler oluşturmuşlardır. Araştırma sürecinde gerçekleştirilen öğretim dizilerinin yarı bağımsız ve bağımsız örüntü görevleri için tahmini öğrenme yörüngesi oluşturmaya alt yapı sağlayacağı ve Simon'nın da (1995, 2014) ifade ettiği gibi öğretim dizilerinde ele alınan öğrenme ilerleyişinin öğretmenlere örüntü oluşturma bağlamında kavramsal öğrenmeyi sağlayan etkili ders planlamalarına yardımcı ve yol gösterici olacağı söylenebilir.

Son klinik görüşmelerde ise farklı olarak yarı bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında hem bir adımlı hem de iki adımdan oluşan şekil birimleri verilmiştir. İki adımlı görevde öğrencilerden bazıları örüntü oluştururken, bazıları hatalı örüntüler de oluşturmuşlardır. Öğrencilerin dikkat etmesi gereken daha fazla partonomik ilişkilerin olması bu durumun bir nedeni olabilir. Son klinik görüşmelerde öğretim süreci içerisinde yapılan örüntü oluşturma ve genelleme etkinlikleri ile birlikte öğrencilerin genelleme becerilerinin gelişmiş, toplamsal genellemeden çarpımsal genellemeye doğru geçişler artmış, hatalı genellemeler azalmış ve öğrencilerin çoğunluğu standart fonksiyon tabanlı genellemeler bazıları ise standart olmayan fonksiyon tabanlı genellemeler yapabilmişlerdir. Her şeyden önce öğrenciler farklı farklı partonomik yapılar oluşturabilmiş ve bu yapıları çoklu temsilleri kullanarak ve temsiller arası geçiş yaparak göstermişlerdir. Bu süreçte öğrenciler başlangıçta daha çok sözel temsiller kullanırken öğretim sürecinin sonunda yarı sembolik ve sembolik temsillere geçiş yapabilmiş ve bu temsilleri etkili kullanabilmişlerdir (Rivera ve Becker, 2016). Bu temsillerin kullanımı öğrencilerin değişen nicelikleri anlamlandırdıklarının göstergesidir (Zazkis ve Liljedahl, 2002). Nitekim bazı öğrenciler bağımlı ve bağımsız değişkenlere dikkat ederek genellemeleri sembolik temsille ifade etmişlerdir. Tüm bu sonuçlar yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma çalışmalarının örüntülerin fonksiyon tabanlı genelleme yapmaya etkisi olduğunu düşündürmüştür.

Öğrencilerin gelişimlerine bakıldığında ise Mehmet ve Özlem araştırma sonunda en az gelişim gösteren öğrenciler olarak dikkat çekmiştir. Akademik başarıları düşük olan bu iki öğrenci araştırmanın başlarında geçerli bir örüntü oluşturmakta zorlanırken araştırmanın ilerleyen kısımlarında basit örüntüler oluşturmaya başlamışlardır. Öğretimlerde sınıf ortamından ve akranlarından etkilendikleri de söylenebilir. Ancak en büyük sorun oluşturdukları örüntüleri genellemede ortaya çıkmıştır. Bu öğrenciler terimler arası sabit farka odaklanıp yinelemeli düşünerek örüntü oluşturmaya devam ettikleri için çoğu örüntüyü genellemede zorlanmışlardır. Bu durumun öğrencilerin akademik başarılarından kaynaklandığı söylenebilir. Diğer yandan Kamil araştırmaya katılan en ilginç öğrencilerden biri olmuştur. Akademik başarısı orta olan Kamil ön klinik görüşmelerden itibaren ve özellikle öğretimlerde her ne kadar bazı genellemelerde sorunlar yaşasa da çok farklı karmaşık partonomik yapılar oluşturmaya çalışmış ve parça bütün arasındaki ilişkileri başarıyla kurmuştur. Bu bağlamda önce toplamsal daha sonra çarpımsal ilişkilere geçerek genel ifadeyi standart fonksiyon tabanlı olarak ifade edebilmiştir. Karmaşık partonomik yapılar oluşturmasında Kamil'in uzamsal muhakemesinin etkisi olabileceği söylenebilir.

Sonuç olarak ortaokul öğrencileri, ders kitaplarında yer alan örüntü genelleme görevlerinden farklı yarı bağımsız ve bağımsız örüntü genelleme görevleri bağlamında örüntü oluşturma görevlerine geçtiklerinde gerçekten iyi tanımlanmış matematiksel yapılar geliştirebilmektedir. Bu tür görevlerin ise, öğrencileri şekil temsilini yorumlayarak, partonomik ilişkilerden türetilmiş standart olmayan ve standart tabanlı fonksiyonel genellemelere teşvik ettiği söylenebilir.

5. ÖNERİLER

Çalışmanın bu bölümünde araştırmanın sonuçlarına ve gelecek araştırmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.1. Araştırmanın Sonuçlarına Yönelik Öneriler

Bu çalışmada öğrenciler ders kitaplarında yer alan örüntü genelleme görevlerinden farklı yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma ve genelleme görevlerinde, şekil temsillerini yorumlayarak partonomik ilişkilerden türetilmiş standart tabanlı olmayan ve standart tabanlı fonksiyonel genellemeleri kolayca yaptıkları görülmüştür. Bu bağlamda ders kitaplarında yer alan örüntü genelleme görevlerine yerine yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma görevlerine yer verilebilir.

Bu çalışmada birçok çalışmada olduğu gibi öğrencilerin genellemede yinelemeli ilişkiyi kullanmaya eğilimli oldukları ve bunun sonuncunda da bu ilişkiyi kullanarak uzak adımları ve genellemeleri belirlemede başarısız oldukları görülmüştür. Ayrıca bu çalışmada tasarlanan partonomik ilişkilere dayalı öğretim dizisi ile öğrenciler yinelemeli ilişki yerine fonksiyonel ilişkiyi dikkate aldıkları görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilere verilecek partonomik ilişkilere dayalı öğretimlerle öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi dikkate almaları sağlanabilir.

Bu çalışmada öğrenciler yinelemeli ilişkilere odaklandıkları için örüntü ve matematikte çok önemli olan çarpımsal düşünmeyi kullanamadıkları, ancak öğrenciler partonomik yapılar yardımıyla ve kat ilişkisiyle birlikte çarpımsal düşünmeye ulaşabildikleri ve buradan çok kolay genelleme yapabildikleri görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilere erken yaşlardan itibaren çarpımsal düşünmeyi geliştirecek öğretimler ve etkinlikler verilebilir.

Birçok çalışmada çoklu temsili kullanmanın matematiksel kavramlar ve özellikle değişken kavramı için önemi ifade edildiği gibi bu çalışmada da tablo, görsel, sözlü ve cebirsel gibi çoklu temsilleri kullanarak cebirsel genelleme yapabildikleri görülmüştür. Bu bağlamda örüntü genelleme ve özellikle örüntü oluşturma görevlerinde çoklu temsillere yer verilebilir.

Bu çalışmada gerçekleştirilen öğretim dizileri yarı bağımsız ve bağımsız örüntü görevleri için tahmini öğrenme yörüngesi oluşturmaya alt yapı sağlayıcı olabilir, aynı zamanda öğretim dizilerinde izlenen yol öğretmenlere örüntü oluşturma bağlamında kavramsal öğrenmeyi sağlayan etkili ders planlamaları ve sınıf uygulamaları için örnek teşkil edebilir.

Piaget'e göre ortaokul somut işlemlerden soyut işlemlere geçiş dönemi olduğu ve birçok araştırmada görüldüğü gibi öğrenciler cebirde zorlanmaktadır. Bu çalışmada görüldüğü gibi değişken kavramı, fonksiyonel ilişki bağlamında yarı bağımsız ve bağımsız örüntü oluşturma görevleri ders kitaplarında bulunan klasik örüntü genelleme görevlerine göre daha başarılı olmuştur. Soyut işlemler dönemindeki öğrencilere bu kavramları kazandırmak için sanal ortamda partonomik ilişkilere dayalı farklı şekillerle örüntü oluşturma ve genelleme üzerine bir uygulama yapılabilir.

İlköğretim matematik dersi öğretim programına bakıldığında matematiğin birçok konusunun temeli olan ve değişken kavramı için giriş olarak kullanabilen örüntü konusunun yeterince işlenmediği görülmüştür. Örüntü ve özellikle örüntü oluşturma konusu programa yerleştirilerek öğrencilerin matematiksel gelişimleri sağlanabilir.

Birçok çalışmada öğrencilerin ve öğretmen adaylarının şekil örüntülerini sayı örüntülerine çevirdikleri ve bu durumun da öğrencilerin ve öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünmelerine engel teşkil ettiği tespit edilmiştir. Bu çalışmada izlenen örüntü oluşturma öğretim programı ile öğrencilerin şekil örüntülerine odaklanarak genelleme yapabildikleri görülmüştür. Bu bağlamda fonksiyonel ilişkinin gelişmesi için şekil örüntüsü oluşturma etkinliklerine daha fazla yer verilebilir.

Örüntü oluşturma etkinliklerinde oluşturulan şekil örüntüleri birbirleriyle karşılaştırılarak parça bütün ilişkileri keşfettirilerek fonksiyonel ilişkileri kurmaları sağlanabilir. Ayrıca bu fonksiyonel ilişki sonunda kolayca öğrenciler değişken kavramına ulaşabilir.

Örüntü genelleme çalışmaları tüm sınıf düzeylerinde önemli olduğundan matematik öğretmenlerinin lisans eğitimlerinde de seçmeli dersler kapsamında örüntüler ve örüntü oluşturma üzerine seçmeli derslere yer verilebilir. Bu bağlamda örüntü ve örüntü oluşturma konusu öğretmen eğitim programına dahil edilebilir.

5.2. Gelecek Araştırmalara Yönelik Öneriler

Bu çalışma ilköğretim altıncı sınıfların örüntü oluşturma ve genelleme süreçlerinde ortaya çıkan yapıları incelemiştir. Benzer araştırmalar farklı sınıf kademelerinde bulunan öğrenciler üzerinde yapılabilir.

Örüntü oluşum sürecinde öğrenciler karmaşık örüntüler oluşturduklarında partonomik ilişkileri görmekte zorlanmışlar. Buna yönelik öğretimler tasarlanarak öğrenci gelişimleri araştırılabilir.

Bu çalışmada öğrenciler genellikle sabit değişen örüntü oluşturmuşlardır. Bu çalışmaya benzer şekilde öğretim programı hazırlanarak artarak değişen örüntü oluşturma ve genellemenin gelişimi üzerine çalışmalar yapılabilir.

Bu çalışmada öğrenciler iki adımlı yarı bağımsız örüntü oluşturma sürecinde bir adımlı örüntü oluşturma sürecine göre zorlandıkları görülmüştür. İki adımlı örüntü oluşturmada ortaya çıkan yapılar ve sorunlar üzerine araştırma yapılabilir.

Bu çalışmaya benzer şekilde öğretim yapıldıktan belirli bir süre sonra örüntü oluşturma performanslarını belirlemek üzere çalışmalar yapılabilir.

Bu çalışmaya benzer şekilde öğretmen ve öğretmen adayları ile sabit ve aratarak değişen örüntü oluşturma sonucunda oluşacak yapılar üzerine çalışmalar yapılabilir.

Örüntü oluşturma üzerine çalışmalar daha küçük sınıf düzeylerinde yapılarak örüntü oluşturma konusunun hangi sınıf seviyesinde etkili olduğu belirlenebilir. Bu çalışmaların sonuçları matematik dersi öğretim programı ve öğretmenler için yol gösterici olabilir.

KAYNAKÇA

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim,* 37 (165), 104-120.

Akkuş, O. ve Çakıroğlu, E. (2006). Seventh grade students' use of multiple representations in pattern related algebra tasks. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31 (31) 13-24.

Becker, J. R. ve Rivera, F. (2006, November). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In *Proceeding of The 28th annual meeting of The North American Chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, s. 95-101). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Editörler), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: 70th NCTM Yearbook* (s. 279-293). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R. C. ve Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.* (3rd ed). Boston: Allyn and Bacon.

Čadež, T. H. ve Kolar, V. M. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Educational Studies in Mathematics,* 89 (2), 283-306.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. ve Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM,* 40 (1), 3-22.

Cobb, P. ve Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, 14 (2), 83-94.

Confrey, J. ve Lachance, A. (2000). Transformative reading experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly ve R. A. Lesh (Editörler), *Handbook of research design in mathematics and science education* (s. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Davydov, V. V. (1991). A psychological analysis of the operation of multiplication. In V. V. Davydov (Ed.). *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (s. 9–85). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Devlin, K. (1998). *Life by The Numbers*. Canada: John Wiley ve Sons

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM*, 40 (1), 143-160.

Duval, R. (1999). Representations, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Editörler), *Proc. 21st Conf. of the North American Chapter of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-26). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, & Environmental Education.

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, 46 (1), 159-170.

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. ve Phillips, E. (1997). Experiences with patterning. *Teaching Children Mathematics*, 3 (6), 282-288.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24 (2), 139-162.

Friel, S. N. ve Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *MatheMatics teaching in the Middle school*, 15 (1), 24-33.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics*, 1 (3), 4-11.

Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş* (2. Baskı). (Çev. A. Ersoy-P. Yalçınoğlu). Ankara: Anı Yayıncılık.

Gürbüz, R. ve Şahin, S. (2015). 8. sınıf öğrencilerinin çoklu temsiller arasındaki geçiş becerileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 23 (4), 1869-1888.

Hackenberg, A. J. ve Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28 (1), 1-18.

Harel, G. ve Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics*, 11 (1), 38-42.

Jurdak, M. E. ve El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics,* 85 (1), 75-92.

Kabael, T. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, 9 (1), 213-228.

Kaput, J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum, In *The Nature and role of algebra in the K-14 curriculum.* Washington, DC: National Academy Press

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Editörler), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. J. (1999). *Teaching and learning a new algebra* (s. 145-168). Routledge.

Kılıç, Ç. (2009). *İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerin Çözümlerinde Kullandıkları Temsiller*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kılıç, Ç. (2017a). Pre-Service Mathematics Teachers' Pattern Conversion Ability: Generating Figural Patterns Based on Number Patterns. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18 (1) 1-24.

Kılıç, Ç. (2017b). The ability of pre-service primary teachers to produce figural patterns based on algebraic formulas. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 8* (2), 261-283.

Kılıç, Ç. (2017c). Analyzing middle school students' figural pattern generating strategies considering a quadratic number pattern. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17 (1), 250-267.

Kinzer, C. J. ve Stanford, T. (2014). The distributive property: The core of multiplication. *Teaching Children Mathematics,* 20 (5), 302-309.

Lannin, J. K. (2004). Developing mathematical power by using explicit and recursive reasoning. *The Mathematics Teacher,* 98 (4), 216-223.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The chalenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning.* 7 (3), 231-258.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26 (3), 24-42.

Ma, H. L. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., ve Seo, D. Y. (Ed.), *Proceeding of The 31st Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 225-232. Seoul: PME.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (s. 65-86). Dordrecht: Springer.

Mason, J., Graham, A. ve Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra.* Sage

McMillan, J. H. (2004). *Educational research.* Boston: Pearson Education.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber.* (Çev: S. Turan). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Moseley, B. ve Brenner, M. E. (1997). Using Multiple Representations for Conceptual Change in Pre-algebra: A Comparison of Variable Usage with Graphic and Text Based Problems. (ERIC Document Reproduction Service: ED413184).

Mouhayar, R. E. ve Jurdak, M (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 47 (2), 197-215, DOI: 10.1080/0020739X.2015.1068391.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018). *Matematik dersi öğretim programı ilkokul ve ortaokul 1,2,3,4,5,6,7 ve 8. sınıflar.* Ankara: Talim Terbiye Kurulu

Moss, J. ve McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In *Early algebraization* (s. 277-301). Berlin: Springer.

Mulligan, J. ve Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (2), 33-49.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

Nilsson, P. ve Juter, K. (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30 (3), 194-205.

Norton, A., Boyce, S., Phillips, N., Anwyll, T., Ulrich, C. ve Wilkins, J. L. (2015). A written instrument for assessing students' units coordination structures. *Mathematics Education*, 10 (2), 111-136.

Olkun, S. ve Toluk Uçar, Z. (2007). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. (3.baskı). Ankara: Maya Akademi Yayın Dağıtım.

Orton, A. (1999). Preface. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* London and New York: Cassell.

Orton, A. ve Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (s. 104-120). London and New York: Cassell.

Orton, J., Orton, A. ve Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orton (Editörler) *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (s. 121-136). London: Cassell Publishers.

Özdemir, E., Dikici, R. ve Kültür, M. N. (2015). Öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri: 7. Sınıf örneği. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23 (2), 523-548.

Özdemir, M. (2010). Nitel veri analizi: Sosyal bilimlerde yöntembilim sorunsalı üzerine bir çalışma. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 11 (1), 323-343.

Papic, M. (2007). Promoting Repeating Patterns with Young Children-More than Just Alternating Colours!. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12 (3), 8-13.

Papic, M. ve Mulligan, J. T. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Editörler), *Building connections: Theory, research and practice* (s. 609-616). Sydney: MERGA.

Patterson, N. D. ve Norwood, K. S. (2004). A case study of teacher beliefs on students' beliefs about multiple representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2 (1), 5-23.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.

Polya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference.* Princeton: Princeton University Press.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 39-65.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40 (1), 83-96.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-19.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In *Early algebraization* (s. 303-322). Berlin: Springer.

Rivera, F. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues* (Vol. 49). New York: Springer Science & Business Media.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), 297-328.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics.* New York, NY.

Rivera, F. D. (2015). Technology-Mediated Tools for Teaching and Learning Middle School Mathematics. In *Teaching to the Math Common Core State Standards* (s. 103-108). Rotterdam: SensePublishers.

Rivera, F. D. ve Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15 (4), 212-221.

Rivera, F. D. ve Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In *Early algebraization* (s. 323-366). Berlin: Springer.

Rivera, F. D. ve Becker, J. R. (2016). Middle school students' patterning performance on semi-free generalization tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 53-69.

Sert, Ö. (2007). *Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Cebir Kavramlarının Farklı Temsil Biçimleri Arasında Dönüşüm Yapma Becerileri.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Sevimli, E. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının belirli integral konusundaki temsil tercihlerinin uzamsal yetenek ve akademik başarı bağlamında incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Simon M.A. (1995) Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal Research Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.

Simon, M. A. (2000). Research on the Development of Mathematics Teachers: The Teacher Development Experiment. A. E. Kelly and R. A. Lesh (Editörler), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (s.335-359). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Simon, M.A. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. S. Lerman (Ed.), *In Encyclopedia of Mathematics Education,* 272-275. Dordrecht: Springer.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. J. Kilpatrick, W. G. Martin, ve D. Schifter (Editörler), In a *research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 136-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Souviney, R. J. (1994). *Learning to teach mathematics.* New York: Merrill.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20 (2), 147-164.

Steele, D. (2005). Using writing to access students' schemata knowledge for algebraic thinking. *School Science and Mathematics.* 103 (3), 142-154.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In *Radical constructivism in mathematics education* (s. 177-194). Dordrecht: Springer.

Steffe, L. P. ve Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh ve A. E. Kelly (Editörler), *Research design in mathematics and science education* (s. 267-307). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Steffe L. P. ve Ulrich C. (2014) The constructivist teaching experiment. In Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education* (s. 102-109). Berlin: Springer.

Strauss, A., ve Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Sage publications.

Strømskag, H. (2015, February). A pattern-based approach to elementary algebra. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 474-480).

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Tanışlı, D. ve Olkun, S. (2009). *Basitten karmaşığa örüntüler*. Ankara: Maya Akademi.

Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). The Strategies of Using the Generalizing Patterns of the Primary School 5th Grade Students. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 9 (3), 1485-1497.

Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, 36 (160), 184-198.

Tanışlı, D. (2015). Matematikte Örüntülerin Keşfi. I.O. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice (Editörler), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 363-378). Ankara: Pegem Akademi.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (18-30). London and New York: Cassell.

Twohill, A. (2016). Observations of Structure Within Shape Patterns. C. Kieran (Editör), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds* içinde (s. 213-235). Hamburg: Springer International Publishing.

Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics. (*9th ed.) Boston: Allyn and Bacon.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 56-71.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. *Building connections: Research, theory and practice*, 2, 759-766.

Warren, E. ve Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in mathematics*, 67 (2), 171-185.

Watson, A., Jones, K. ve Pratt, D. (2013). *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*. Oxford: Oxford University Press.

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 28 (2), 245-275.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8. baskı) Ankara: Seçkin Matbaacılık.

Zazkis, R. ve Liljedahl, P. (2006). On the path to number theory: repeating patterns as a gateway. R. Zazkis & S. R. Campbell (Editörler), *Number theory in mathematics* education (s. 99-114). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Zazkis, R. ve Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics.* 49 (3), 379-402.

EKLER

EK-1: Öğrenci düzey belirleme testi

Soru 1) Aşağıdaki verilen örüntüleri devam ettirdiğinizde sıradaki sayı veya harf nedir?

a) 1 5 1 5 1 5 …

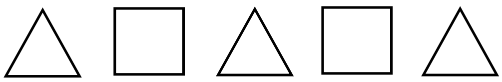
b) 3 4 4 3 4 4 …

c) A B A B A B …

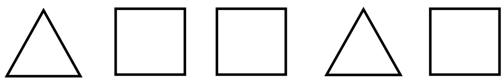
d) E Y Y Y Y E Y Y …

Soru 2) Aşağıdaki verilen örüntüleri devam ettirdiğinizde sıradaki şekil nedir?

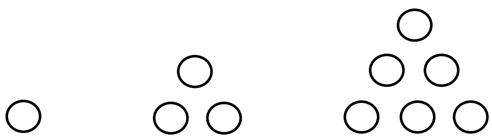
a)



b)



c)



Soru 3) Aşağıdaki verilen örüntüleri devam ettirdiğinizde sıradaki sayı nedir ve her biri için bir kural üretiniz.

a) 2 5 8 11 …

b) 4 6 8 10 …

c) 5 9 13 17 …

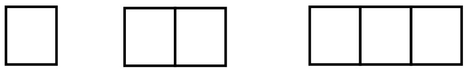
d) 3 6 12 24 48 …

EK-1: (Devam) Öğrenci düzey belirleme testi

Soru 4) Aşağıdaki verilen örüntüyü devam ettirdiğinizde sıradaki sayı nedir?

3 6 10 15 21 …

Soru 5) Aşağıda bir örüntü verilmiştir. Buna göre,



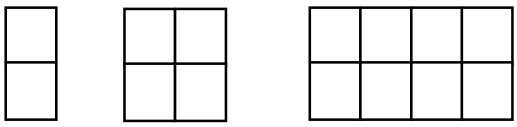
…

1. Şekil 2. Şekil 3. Şekil

a) 10. şekil ne olabilir ve kaç adet kare vardır?

b) 25. şekilde kaç adet kare vardır?

Soru 6) Aşağıda bir örüntü verilmiştir. Buna göre,



…

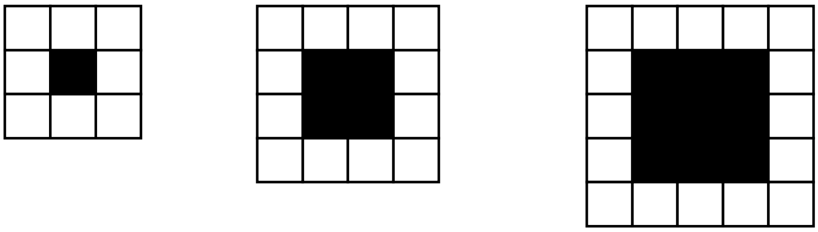
1. Şekil 2. Şekil 3. Şekil

a) 10. şekil ne olabilir ve kaç adet kare vardır?

b) Herhangi bir şekildeki kare sayısı için bir kural oluşturunuz.

EK-1: (Devam) Öğrenci düzey belirleme testi

Soru 7)

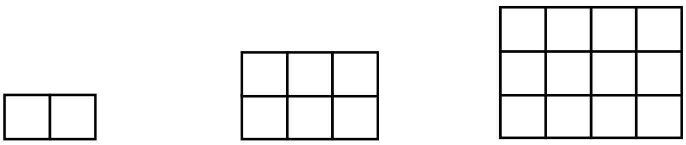


1. Havuz 2. Havuz 3. Havuz

Yukarıda verilen şekilde kare fayanslardan oluşmuş yüzme havuzları görülmektedir. Her havuzda siyah renkli fayanslar havuzdaki suyu, beyaz renkli fayanslar ise havuzun kenarlarını göstermektedir. Buna göre;

a) 4. havuzda kaç tane siyah renkli kare fayans bulunur?
b) 4. havuzda kaç tane beyaz renkli kare fayans bulunur?

Soru 8)



1. Şekil 2. Şekil 3. Şekil

Yukarıdaki örüntü incelendiğinde

a) 4. şekilde kaç kare vardır?

b) 4. şekil nasıl olmalıdır?

c) 10. şekilde kaç kare vardır?

d) Örüntü için bir kural oluşturunuz.

EK-1: (Devam) Öğrenci düzey belirleme testi

Soru 9)

	2	
1	10	3
	4	

	6	
5	26	7
	8	

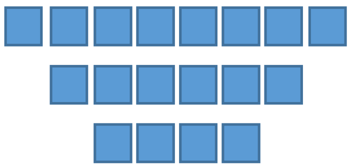
	10	
9	42	11
	12	

a) Her şekilde verilen sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

b) Bu ilişkiye göre 4. Şekilde hangi sayılar yer alır? Yazınız.

Soru 10)

Bir okulun tiyatro salonunda birinci sırada 4 koltuk sıralanmıştır. Salonda her sıra bir önceki sıradan 2 koltuk fazladır. Salonun ilk 3 sırası aşağıda gösterilmiştir. Buna göre,



a) Salonun 7. ve 10. sırasında kaç koltuk vardır? Açıklayınız.

b) Salonun 40. sırasında kaç koltuk vardır? Açıklayınız.

c) Salonun herhangi bir sıra için bir kural yazanız.

EK-1: (Devam) Öğrenci düzey belirleme testi

Soru 11)

Girdi	1	2	13	25	64
Çıktı	5	6	17	…	…

a) Yukarıdaki tabloyu tamamlayınız.
b) Girdi değerine karşılık gelen çıktı değerini veren bir kural yazabilir misiniz?

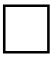
Soru 12)

Girdi	3	8	10	23	60
Çıktı	7	17	21	…	…

a) Yukarıdaki tabloyu tamamlayınız.

Girdi değerine karşılık gelen çıktı değerini veren bir kural yazabilir misiniz?

EK-2a: Ön Klinik Görüşmede Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi



1. adım

Araştırmacı: İlk adımı bu olan bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

EK-2b: Ön Klinik Görüşmede Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi

Araştırmacı: İstediğin şekli kullanarak üç adıma kadar bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

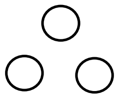
Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

EK-2c: Ara Klinik Görüşmede Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi



1. Adım

Araştırmacı: İlk adımı bu olan bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

Araştırmacı: Örüntünde aynı ya da değişenler nelerdir, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 10. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 75. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Oluşturduğun örüntünün genel kuralını nasıl ifade edersin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Bu kuralın her durumda işe yarayacağını nasıl biliyorsun?

Araştırmacı: İlk adımı bu olan farklı bir örüntü oluşturabilir misin?

EK-2d: Ara Klinik Görüşmede Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi

Araştırmacı: İstediğin şekli kullanarak üç adıma kadar bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 10. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 75. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

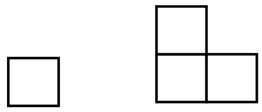
Araştırmacı: Oluşturduğun örüntünün genel kuralını nasıl ifade edersin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Bu kuralın her durumda işe yarayacağını nasıl biliyorsun?

Araştırmacı: İlk adımı bu olan farklı bir örüntü oluşturabilir misin?

EK-2e: Son Klinik Görüşmede Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi



1. adım 2. adım

Araştırmacı: İlk iki adımı bu olan bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

Araştırmacı: Örüntünde aynı ya da değişenler nelerdir, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 10. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 89. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

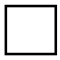
Araştırmacı: Oluşturduğun örüntünün genel kuralını nasıl ifade edersin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Bu kuralın her durumda işe yarayacağını nasıl biliyorsun?

Araştırmacı: İlk adımı bu olan farklı bir örüntü oluşturabilir misin?

EK-2f: Son Klinik Görüşmede Yarı Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi



1. adım

Araştırmacı: İlk adımı bu olan bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

Araştırmacı: Örüntünde aynı ya da değişenler nelerdir, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 10. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 89. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Oluşturduğun örüntünün genel kuralını nasıl ifade edersin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Bu kuralın her durumda işe yarayacağını nasıl biliyorsun?

Araştırmacı: İlk adımı bu olan farklı bir örüntü oluşturabilir misin?

EK-2g: Son Klinik Görüşmede Bağımsız Örüntü Oluşturma Görevi

Araştırmacı: İstediğin şekli kullanarak üç adıma kadar bir örüntü oluşturabilir misin?

Araştırmacı: Bu bir örüntü mü?

Araştırmacı: Örüntü olduğunu nasıl anladın, söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Örüntüyü nasıl oluşturdun, açıklayabilir misin?

Araştırmacı: 4. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 5. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 10. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: 89. adım nasıl olacak söyleyebilir misin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Araştırmacı: Oluşturduğun örüntünün genel kuralını nasıl ifade edersin?

Araştırmacı: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

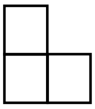
Araştırmacı: Bu kuralın her durumda işe yarayacağını nasıl biliyorsun?

Araştırmacı: İlk adımı bu olan farklı bir örüntü oluşturabilir misin?

EK-3: Öğretim Dizilerinde Araştırmacının Tasarladığı Plan Örneği

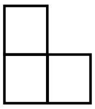
<table>
<tr><th colspan="2">BİRİNCİ ÖĞRETİM DİZİSİNİN AMACI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Örüntü nedir?
2. Yarı bağımsız örüntü oluşturma süreci
3. Şekil örüntüsünün nasıl genişlediğini farklı yollarla gösterme
4. Sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne dönüştürüp farklı yapıları karşılaştırma</td></tr>
<tr><th colspan="2">ÖĞRETİM</th></tr>
<tr><td>1. Örüntüden ne anlıyoruz?
2. Şekil örüntüsü oluşturma aşamaları
3. Şekil örüntüsünün sahip olması gereken özellikler ve şekil örüntüsü oluşturma</td><td>Öğretmen öğrenci etkileşimi
Sorgulama</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÜM SINIF ÇALIŞMASI</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Öğrencilerin oluşturdukları örüntülerin tüm sınıfça tartışılması
2. Öğrenci öğretmen etkileşimi
3. Öğrenci öğrenci etkileşimi
4. Sorgulama</td></tr>
<tr><th colspan="2">ÖĞRETİM SÜRECİNDE GÖZLENENLER</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Öğrencilerin tamamı yatay ya da dikey ilerleyen ardışık karelerden oluşan şekil örüntüsü oluşturdukları gözlenmiştir.
2. Örüntü oluştururken şekle odaklanmadan sayı odaklı şekil örüntüsü oluşturdukları gözlenmiştir.
3. Basit düzeyde örüntü oluşumu gözlenmiştir.</td></tr>
<tr><th colspan="2">YAPILMASI GEREKENLER</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Örüntü oluştururken dikkat edilmesi gereken özellikler şekle odaklanarak örüntü oluşturma, örüntü oluşumunda ve genellemede şeklin yapısının öneminin fark ettirilmesi gerekir.
2. Karmaşık seviyede ve farklı örüntü oluşumu yaptırılması gerekir.
3. Partonomik ilişkilere dayalı öğretim yapılması gerekir.</td></tr>
</table>

Ek-4: Çalışma Kağıdı



İlk adım şekil birimi için bütün kurallı olarak oluşturup tabloyu doldurunuz.

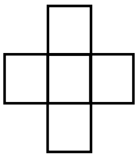
Adım sayısı	Toplam kare sayısı	İlişkili kare sayısı
1. adım		
2. adım		
3. adım		
4. adım		
5. adım		
100. adım		



İlk adım şekil birimi için parça kurallı olarak oluşturup tabloyu doldurunuz.

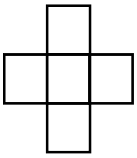
Adım sayısı	Toplam kare sayısı	İlişkili kare sayısı
1. adım		
2. adım		
3. adım		
4. adım		
5. adım		
100. adım		

Ek-4: (Devam) Çalışma Kağıdı



İlk adım şekil birimi için bütün kurallı olarak oluşturup tabloyu doldurunuz.

Adım sayısı	Toplam kare sayısı	İlişkili kare sayısı
1. adım		
2. adım		
3. adım		
4. adım		
5. adım		
100. adım		



İlk adım şekil birimi için parça kurallı olarak oluşturup tabloyu doldurunuz.

Adım sayısı	Toplam kare sayısı	İlişkili kare sayısı
1. adım		
2. adım		
3. adım		
4. adım		
5. adım		
100. adım		

EK-5: Kütahya İl Milli Eğitim Müdürlüğü Çalışma İzni

Ana. Üni. Evrak Tarih ve Sayısı: 28/11/2016-E.98115

T.C.
KÜTAHYA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 53490996-44-E.13247020 23.11.2016
Konu : Doktora Tez Çalışması

ESKİŞEHİR ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Genel Sekreterlik/Yazı İşleri Müdürlüğü)

İlgi : a) 15/11/ 2016 tarihli ve E.137958 sayılı yazınız.
b)18/11/2016 tarihli ve 13085427 sayılı onay.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Serdar KARAZ'ın " Ortaokul Öğrencilerinin Bağımsız ve Yarı Bağımsız Genelleme Görevlerindeki Örüntü Oluşturma Süreçleri" konulu doktora tez çalışması araştırma-mülâkat uygulamasının İlimiz Simav ve Şaphane ilçelerindeki tüm ortaokullarda uygulanmasına izin veren ilgi (b) onay ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Sabahattin DÜLGER
İl Milli Eğitim Müdürü

BELGENİN ASLI ELEKTRONİK İMZALIDIR.
24/11/2016

Ek: İlgi (b) onay (1 sayfa)

M. Kemal EĞMİR
V.H.K.İ.

Adres: Kütahya İl Mili Eğitim Müd./ARGE
Elektronik Ağ: http://kutahya.meb.gov.tr
e-posta: arge43@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Muzaffer KORKMAZ/Araştırmacı
Tel: (274)2236241
Faks: (274) 2236254

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden cd94-4657-38a6-b71e-14cc kodu ile teyit edilebilir.

EK-5: (Devam) Kütahya İl Milli Eğitim Müdürlüğü Çalışma İzni

T.C.
KÜTAHYA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 53490996-44-E.13085427 18/11/2016
Konu : Serdar KARAZ'ın
Anket Çalışması

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) MEB. Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 2012/13 nolu Genelgesi.
b) Eskişehir Anadolu Üniversitesi Rektörlüğünün 15/11/2016 tarihli ve 137958 sayılı yazısı.

Bakanlığımızın ilgi (a) Genelgesi doğrultusunda, Eskişehir Anadolu Üniversitesi Rektörlüğünün ilgi (b) yazısında; Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora programı öğrencisi Serdar KARAZ, danışmanlığını Doç.Dr.Dilek TANIŞLI'nın yaptığı "Ortaokul Öğrencilerinin Bağımsız ve Yarı Bağımsız Genelleme Görevlerindeki Örüntü Oluşturma Süreçleri " konulu doktora tez çalışması araştırma-mülakat uygulamasının 2016-2017 öğretim yılı bahar dönemi ve 2017-2018 öğretim yılı bahar dönemi ve 2017-2018 öğretim yılı güz dönemlerinde pilot ve ana çalışmasını Müdürlüğümüze bağlı Simav ve Şaphane ilçelerindeki tüm ortaokullarda öğrenim gören 6. sınıf öğrencilerine uygulamak istediği belirtilmektedir.

İl Milli Eğitim Müdür Yardımcısı Hamdi SARIÖZ'ün başkanlığında toplanan değerlendirme komisyonu yapmış olduğu inceleme sonucunda söz konusu anket çalışmasının okullarda uygulanabilir olduğuna karar vermiş olup, eğitim- öğretimi aksatmadan, konunun dışına çıkmamaları, bütün sorumluluğun ilgililere ve okul müdürlüğüne ait olmak üzere yukarıda belirtilen anket çalışmasının tamamlandıktan sonra bir örneğinin Müdürlüğümüze verilmek üzere yapılmasını;

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Sabahattin DÜLGER
İl Milli Eğitim Müdürü

OLUR
18/11/2016

Yüksel KARA
Vali a.
Vali Yardımcısı

İl Milli Eğitim Müdürlüğü/KÜTAHYA
Elektronik Ağ:kutahya.meb.gov.tr
e-posta:stratejigelistirme43@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Filiz ÖRNEK- VHKİ
Tel: (0 274) 2236241/159
Faks: (0 274) 2236254

EK-6: Öğretmen İzin Formu

Sayın …………………………..

Bu mektubun amacı sizi araştırmamızla ilgili haberdar etmek ve buna bağlı olarak dersine girdiğiniz öğrencilerin katılımıyla ilgili sizden izin almaktır. Ben Dumlupınar Üniversitesi Şaphane Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım. "Ortaokul Öğrencilerinin Bağımsız ve Yarı Bağımsız Genelleme Görevlerindeki Örüntü Oluşturma Süreçleri" başlıklı bir doktora tez çalışması yapmaktayım. Tez çalışmamı Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesi Doç. Dr. Dilek TANIŞLI danışmanlığında yürütmekteyim. Bu çalışma kapsamında öğrencileriniz üzerinde öğretim deneyi ve birebir görüşmeler yapacağım.

Öğretim deneyi Matematik Uygulamaları dersiniz kapsamında yaklaşık on dört hafta sürecektir. Seçilecek öğrenciler ile görüşmeler ise bu sürecin başında, ortasında ve sonunda gerçekleştirilecektir. Araştırmada gönüllülük esastır. İstediğiniz zaman araştırmadan ayrılma hakkına sahipsiniz.

Katılım ve yardımlarınız için teşekkür ederim.

Araştırmacı   Danışman

Araştırmacı tarafından amacı ve uygulama programı anlatılan bu çalışmaya gönüllü katılmaya razıyım. Bu çalışma kapsamında sağlanacak olan tüm bilgilerin gizlilik içinde tutulacağını ve sadece araştırma amaçları çerçevesinde kullanılacağını anladım. Araştırmacı tarafından çalışmanın şekli, amacı ve muhtemel süresine ilişkin kapsamlı bir şekilde bilgilendirildim. Çalışma hakkında sorular sorulmasına ilişkin imkân sağlanmıştır. Araştırmada bilgilerimin benim iznim olmadan kullanılmayacağı bildirilmiştir.

Yukarıda yazılı olan bilgileri okudum ve bu çalışmaya öğrencimin katılmasına onay veriyorum.

Öğretmen Adı-Soyadı: ………………………………………………

EK-7: Araştırma Gönüllü Katılım Formu

Bu çalışma, "Ortaokul Öğrencilerinin Bağımsız ve Yarı Bağımsız Genelleme Görevlerindeki Örüntü Oluşturma Süreçleri" başlıklı bir araştırma çalışması olup ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin örüntü tabanlı öğretim deneyi sürecinde yarı bağımsız örüntüleri genellemelerindeki gelişimlerini belirleme amacını taşımaktadır.

Çalışma, Serdar KARAZ tarafından yürütülmekte ve sonuçları ile ortaokul öğrencilerinin bağımsız ve yarı bağımsız genelleme görevlerindeki örüntü oluşturma süreçleri ortaya konulacaktır/öğrencilerinin örüntü tabanlı öğretim deneyi sürecinde yarı bağımsız örüntüleri genellemelerindeki gelişimine ışık tutulacaktır.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Çalışmanın amacı doğrultusunda, klinik görüşmeler yapılarak sizden veriler toplanacaktır.
- İsminizi yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz/araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler elektronik ortamda korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabileceksiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'na (mail/tel) yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı :Serdar KARAZ
Adres :Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik Eğitimi

EK-7: (Devam) Araştırma Gönüllü Katılım Formu

Anabilim Dalı

İş Tel :
Cep Tel :

Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.
(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı:
İmza:
Tarih:

EK-8: Veli İzin Formu

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmada amaç "ortaokul öğrencilerinin bağımsız ve yarı bağımsız genelleme görevlerindeki örüntü oluşturma süreçleri" adlı doktora tez çalışması için belirlenen hedef öğrencilerin örüntü oluşturmalarına ilişkin görüşlerini almaktır.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Öğrencinizin ya da sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, öğrencinizin ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Öğrenci istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Görüşülen Öğrencinin Velisi	Görüşmeci: Serdar KARAZ

Anadolu Üniversitesi Eğitim
Bilimleri Enstitüsü
Matematik Eğitimi Doktora Programı