Öğrencilerin Limit Kavramına Yönelik Kavram İmajları ve Kavram Tanımları*

Students' Concept Definitions and Concept Images about Limit Concept

Tangül KABAEL
Anadolu University, Turkey
tuygur@anadolu.edu.tr

Başak BARAK
Anadolu University, Turkey
bbarak@anadolu.edu.tr

Aynur ÖZDAŞ
Anadolu University, Turkey
aozdas@anadolu.edu.tr

Özet

Limit, güçlü bir matematiksel düşünme becerisi gerektiren, öğrencilerin öğrenmede zorlandıkları bir kavramdır. Öğrencilerde limit kavramına yönelik, kavram imajlarının ve kavram tanımlarının araştırılmasının, limit kavramının öğrenilme süreçlerinin belirlenmesine katkı getireceği düşünülmektedir. Bu çalışmada, tek değişkenli reel değerli fonksiyonlar için limit kavramına yönelik öğrencilerin kavram imajları, kavram tanımları ve öğrencilerin kavram imajları ile limitin formal tanımını ilişkilendirme durumlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma, Analiz I dersini almakta olan 31 öğrenci arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak seçilen 11 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Analiz I dersinde limit konusunun öğretimi tamamlandıktan sonra, açık uçlu sorulardan oluşan bir test 31 öğrenciye uygulanmıştır. Öğrencilerin yanıtları araştırmacılar tarafından nitel olarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin kavram imajları, kavram tanımları ve kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında kurdukları ilişkiler ölçüt olarak alınarak öğrenciler sekiz gruba ayrılmıştır. Her gruptan grup büyüklüğüne göre öğrenci seçilerek 11 öğrenciyle klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan görüşmeler araştırmacılar tarafından nitel olarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin hem limit kavramına ilişkin kavram imajlarında hem de kavram tanımlarında sağ-sol limit eşitliği teoremi ile

*Bu çalışmanın bir bölümü 9. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde, bir bölümü de 37. Uluslararası Matematik Eğitimi Psikolojisi Grubu Konferansı'nda (PME 37) sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

limitin dinamik formunun baskın olduğu görülmüştür. Öğrencilerin limitin formal tanımını açıklama ve kullanmada zorlandığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin uygulama sorularını çözmek için kavram imajlarını kullandığı görülmüştür. Diğer yandan, öğrencilerin çoğunun kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ilişki kuramadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar sözcükler: Limit kavramı, Kavram tanımı, Kavram imajı, Formal limit tanımı

Abstract

Limit is the concept that students have difficulties and is required to powerful mathematical thinking skill. To investigate students' concept definitions and concept images about limit concept is important to reveal learning processes of limit concept. The purpose of the study is to determine students' concept images, concept definitions and relationships between students' concept images and formal definition about limit concept for one variable real valued functions. The study was conducted with 11 students who were selected from 31 students attending Analysis I course. Criterion sampling method that is a purposive sampling method was used in selection of the students. After teaching process of limit concept, a test which had open-ended questions was carried out to 31 students. Responses of students were analyzed qualitatively by researchers. With regard to analyses, the students were classified into eight groups using their concept images, concept definitions and relationships between their concept images and formal definition of limit as criterions. Eleven students were selected from groups according to group sizes to carry out clinical interviews. The clinical interviews were analyzed qualitatively by researchers. Consequently, it was found that both students' concept images and concept definitions focused on the theorem about equality of right and left hand limits and dynamic form of limit. Moreover, the students had difficulties in explaining and using the formal definition of limit. In addition, students used their concept images to solve questions and most of them could not establish the relationship between their concept images and formal definition of limit.

Keywords: Limit concept, Concept definition, Concept image, Formal definition of limit

Giriş

Limit; süreklilik, türev, integral gibi pek çok kavramın dayandığı, matematiğin en önemli ve temel kavramlarından birisidir. Limit kavramı, öğrencilerin cebir ve aritmetiksel metotlar kullanarak kolaylıkla sonuca ulaşmalarının mümkün olmadığı bir matematiksel kavram olması açısından da son derece önemlidir (Cornu, 1991). Bu nedenle limit kavramı, ileri düzey matematiksel düşünmeye geçişin bir göstergesi olarak ifade edilmektedir (Tall, 1992).

Limit kavramı üzerine yapılmış pek çok çalışma vardır. Yapılan çalışmalarda çoğunlukla öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ve bu zorlukların kaynaklarına odaklanılırken (Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Sierpinska, 1987; Tall ve Vinner, 1981), kavramın öğrenilme süreci üzerine yapılan çalışmalara da rastlanılmaktadır (Cottrill ve ark., 1996; Mamona-Downs, 2001; Przeniosla, 2004; Roh, 2007).

Alan yazında limitin, öğrenciler tarafından dinamik (informal) ve formal (statik) olmak üzere iki şekilde kavramsallaştırıldığı belirtilmektedir (Cornu, 1991; Tall ve Vinner, 1981). Bunlardan ilki Tall ve Vinner'ın (1981) *dinamik form* olarak tanımladığı "$x \to a \Rightarrow f(x) \to L$" ya da sözel olarak "$x$'ler a'ya yaklaşırken $f(x)$'ler L'ye yaklaşır" ifadesine dayanmaktadır. Statik olarak ise matematik otoritelerince kabul edilen *formal limit tanımı* kastedilmektedir:

"$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır $\ni |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ olur"

Alan yazında öğrencilerin, limiti daha çok dinamik olarak kavramsallaştırdıkları (Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991) ifade edilmiştir. Williams (1991) ve Szydlik (2000) limiti dinamik form olarak ifade eden öğrencilerin bunu, limiti araştırılan noktaya yakın noktaların fonksiyondaki görüntülerinin nereye yaklaştığını araştırma ya da fonksiyonun grafiği aracılığıyla yaklaşmaları inceleme şeklinde yaptıklarını belirtmiştir.

Öğrencilerin formal olarak limiti kavramsallaştırmada ise zorlandıkları (Tall ve Vinner, 1981) ve limitin formal tanımını daha çok bir formül olarak yorumladıkları (Przenioslo, 2004) söylenebilir. Bazı araştırmacılara göre öğrencilerin limiti formal olarak kavramsallaştırmada zorlanmalarının nedeni, limitin formal tanımındaki "her" ve "en az bir" niceleyicileridir (Cottrill ve ark., 1996; Tall ve Vinner, 1981). Tall ve Vinner (1981), öğrencilerin limitin formal tanımında yer alan "her" ve "en az bir" niceleyicilerini anlamlandıramadıklarını, bu nedenle limitin varlığını ispat etmede zorlandıklarını belirtmiştir. Williams (1991), bir fonksiyonun bir noktadaki limitini doğrulamak için öğrencilerin fonksiyonun grafiğini çizme ve limit araştırması yapılan noktayı fonksiyonun cebirsel ifadesinde yerine koyma eğiliminde olabildiklerini ifade etmiştir.

Tall (1980) ve Williams (1991) limitin dinamik formunun öğrencilerin formal tanımı kavramsallaştırmalarını zorlaştırdığını ifade etmiştir. Tall (1980), öğrencilerin limitin dinamik formunu daha kolay bir şekilde kavradıklarını ve öğretim sırasında öğrencilerin limiti formal olarak kavramsallaştırmaları sağlanmaya çalışılsa da öğrencilerin limitin dinamik formunu kullandıklarını belirtmiştir. Przenioslo (2004) ise öğrencilerin bir fonksiyonun limiti kavramına yönelik kurdukları ilişkileri, bir fonksiyonun limitinin tanımı olarak verdiklerini ve öğrencilerin bu tanımları ile limitin formal tanımı arasındaki çelişkiyi fark edemediklerini ifade etmiştir.

Öğrencilerin limiti kavramsallaştırmalarına engel olan pek çok zorluk kaynağından bahsetmek mümkündür. Sierpinska (1987), öğrencilerin limit alma sürecinde yaşadıkları zorlukların, öğrencilerin sonsuz kavramını algılamaları ile yakından ilişkili olduğunu ifade etmiştir. Sonsuzluk, öğrencilerin algılamakta zorlandıkları bir kavramdır (Cornu, 1991; Juter ve Grevholm, 2006; Tall, 2001). Tall (1992) öğrencilerin sonsuz kavramını, bir sayı olarak algılayabildiklerini belirtmiştir.

Öğrencilerin limit kavramına ilişkin kavramsallaştırmalarının belirlenmesinin, limit kavramının öğrenim sürecine ışık tutacağı düşünülmektedir. Bu bağlamda, bu çalışmada Tall ve Vinner'ın (1981) kavram imajı ve kavram tanımı çerçevesi kullanılmıştır.

Teorik Çerçeve

Kavram imajı; söz konusu kavrama ilişkin kişinin zihnindeki özellikler, işlemler ve zihinsel resimler gibi bilişsel yapıların tümünü açıklamak için kullanılırken kavram tanımı ise kavramı anlatmak için kullanılan kelimeler topluluğudur (Tall ve Vinner, 1981). Kavram tanımı, formal yani matematik otoritelerince kabul edilen şekilde olabileceği gibi informal yani o kavrama ilişkin kişinin kendi açıklaması da olabilir. Vinner (1983), kişide her bir kavrama ilişkin kavram tanımı ve kavram imajı olmak üzere iki farklı hücrenin var olduğunu söyler. Bu hücreler, söz konusu kavrama ilişkin görevlerde aktif hale gelen zihinsel yapılardır. Öğrenciler, verilen bir problemin üstesinden gelmek için bu iki hücre arasında ilişki kurabilecekleri gibi sadece kavram tanımı hücresini ya da kavram imajı hücresini de kullanabilirler (Vinner, 1991). Örneğin birey fonksiyon kavramına ilişkin bir soruyu yanıtlarken fonksiyonun formal tanımını kullanmadan sadece fonksiyon kavramına yönelik imajını kullanabilir. Fakat öğrenme, kavram tanımı ve kavram imajı hücreleri arasında ilişki kurulması durumunda gerçekleşir (Vinner, 1991, s.70).

Ayrıca Tall ve Vinner (1981), birey tarafından farklı durumlarda birbiri ile çelişen imajların çağrılabileceğini belirtmiştir. Tall ve Vinner (1981) kişinin kavram imajı ya da kavram tanımının, kişinin kavram imajı ya da kavram tanımının belli bir kısmı ile çelişmesine "potansiyel çelişki faktörü", eş zamanlı olarak çelişen faktörlerin çağrılması durumuna da "bilişsel çelişki faktörü" adını vermiştir.

Alan yazında öğrencilerin fonksiyonun limiti kavramına ilişkin, f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limitinin $f(x_0)$ olması, yaklaşmaların grafik üzerinden yapılması (Przenioslo, 2004), fonksiyon grafik temsiliyle verildiğinde limit ve süreklilik kavramlarının karıştırılarak grafikte süreksizlik aranması gibi imajlara sahip olabildikleri ifade edilmiştir (Tall ve Vinner, 1981).

Bu çalışmanın amacı, öğrencilerin limit kavramına ilişkin kavram imajlarının, kavram tanımlarının ve öğrencilerin kavram imajları ile limitin formal tanımını ilişkilendirme durumlarının belirlenmesidir. Vinner'ın (1991) da belirttiği gibi öğrenme ancak kavram imajı ile kavram tanımı arasında ilişki kurulması durumunda gerçekleşebileceğinden çalışmanın, limit kavramının öğrenilme sürecinin ortaya çıkarılması açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Çalışmada aşağıdaki araştırma sorularına yanıt aranmıştır:

- Öğrencilerin limit kavramına ilişkin kavram imajları nedir?
- Öğrencilerin sahip oldukları limit tanımları nedir?
- Öğrencilerin limit kavramına ilişkin sahip oldukları kavram imajları ile limitin formal tanımını ilişkilendirme durumları nasıldır?

Yöntem

Türkiye'deki bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'nda Analiz I dersi kapsamında yürütülen bu çalışmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları, araştırmacılardan birinin öğretim elemanı olduğu Analiz I dersini almakta olan 31 öğrenci arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak (Yıldırım ve Şimşek, 2003) seçilmiştir. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2003). Katılımcıların seçimi için çalışmanın amacına yönelik açık uçlu bir test (Ek 1) geliştirilmiş ve 31 öğrenciye uygulanmıştır. Bu testten elde edilen sonuçlar doğrultusunda öğrencilerin kavram imajları, kavram tanımları ve öğrencilerin kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ilişki kurma durumları ölçüt olarak kullanılarak öğrenciler sekiz gruba ayrılmıştır. Oluşan bu sekiz grubun her birinden grubun büyüklüğüne göre en az bir katılımcı olmak üzere 11 katılımcı klinik görüşme yapılmak üzere çalışmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir.

Veri Toplama Araçları ve İşlem

Çalışmanın verileri açık uçlu test ve klinik görüşme yolu ile elde edilmiştir. Çalışmanın başında, araştırmacılar tarafından öğrencilerin limit kavramıyla ilgili kavram imajları, kavram tanımları ve öğrencilerin kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ilişki kurma durumları hakkında bilgi edinmek amacıyla 10 açık uçlu sorudan oluşan bir test geliştirilmiştir (Ek 1). Hazırlanan testin kapsam geçerliğinin sağlanması için alan uzmanının görüşlerine başvurulmuştur. Testin güvenirliğini sağlamak için öğretim elemanının çalışmanın araştırmacısı olmadığı Analiz I dersi gruplarından biriyle pilot çalışması yapılmıştır. Testten elde edilen veriler, çalışmanın araştırmacıları olan iki alan uzmanı tarafından kodlamayla nitel olarak analiz edilmiştir. Araştırmanın iki araştırmacısının yapmış oldukları kodlamalar için "görüş birliği" ve "görüş ayrılığı" durumlarının sayısı belirlenmiş ve aşağıdaki şekilde yapılan hesaplama sonucunda kodlamaların %93 oranında birbiriyle tutarlı olduğu bulunmuştur.

Güvenirlik = (Görüş Birliği)/[(Görüş Birliği) + (Görüş Ayrılığı)]

Araştırmacıların yaptıkları kodlamaların büyük ölçüde birbiriyle tutarlı olduğu görülmüş (%93) ve testin güvenirliği sağlanmıştır (Miles ve Huberman, 1994). Hazırlanan test, çalışmanın araştırmacısı olan Analiz I dersi grubunun öğretim elemanı tarafından tek değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği konuları işlendikten sonra 31 öğrenciye uygulanmıştır. Testten elde edilen verilerin kodlama yoluyla nitel olarak analizinin sonucunda oluşan sekiz gruptan seçilen 11 öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Klinik görüşme yöntemi, matematik eğitimi araştırmalarında sıklıkla kullanılan veri toplama tekniklerinden biridir. Klinik görüşmelerde amaç, görüşülen kişinin bilgi yapılarını ve muhakeme süreçlerini ortaya çıkartmaktır (Clement, 2000). Araştırmacılar tarafından limit kavramına ilişkin klinik görüşme soruları hazırlanmış ve hazırlanan sorular alan uzmanının görüşleri alınarak son haline getirilmiştir. Analiz I dersini almakta olan bir öğrenciyle klinik görüşme yapılarak pilot çalışma yapılmıştır. Katılımcılar ile yapılan klinik görüşmeler yaklaşık yarım saat sürmüş ve dersin öğretim elemanı olmayan araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelere başlamadan önce katılımcılardan gerekli izinler alınmış ve yapılan klinik görüşmeler video kamera kullanılarak kayıt altına alınmıştır. Görüşmenin başında katılımcılardan, soruları yanıtlarken sesli düşünmeleri istenmiştir. Görüşme esnasında katılımcılara, görüşmecinin sorularını yazabilmesi ve katılımcıların sorulan soruları yanıtlarken yazılı vermek istediği yanıtları kaydedebilmesi için kağıt verilmiştir. Katılımcılardan çalışma kağıtlarına hatalı yazımda bulunduklarında yazdıklarını silmemeleri ve bir alt satıra geçerek yazmaya devam etmeleri istenmiştir. Görüşmelerin sonunda katılımcıların kullandığı kağıtlar toplanmış ve görüşme dökümleri yapılırken her bir katılımcı Ö1, Ö2, … , Ö11; görüşmeci ise G olarak kodlanmıştır.

On bir öğrenciyle yapılan klinik görüşmeler sonucunda katılımcıların kavram imajları, kavram tanımları ve kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında kurdukları ilişkiler; "tanım", "imaj" ve "ilişki" kategorileri altında analiz edilmiştir. Katılımcıların tanımları, görüşmede sorulan "Limit deyince ilk aklına gelen nedir?", "Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini nasıl tanımlarsın?" gibi sorulara verdikleri yanıtlar ve uygulama sorularında yaptıkları açıklamalar göz önünde bulundurularak analiz edilmiştir. Katılımcıların imajları, görüşme boyunca katılımcıların limit kavramına ilişkin sıklıkla kullandıkları kelime ya da ifadeler, yaklaşma kavramına ilişkin bilgileri ve grafik temsili ile verilen fonksiyonların sonsuzda limit araştırmalarını yapmalarının istendiği uygulama sorularında yansıttıkları göz önünde bulundurularak analiz edilmiştir. İlişki kategorisinde ise katılımcıların komşuluk bilgileri, yaklaşma ile komşuluk, komşuluk ile formal tanımda yer alan "$|x - x_0| < \delta$" ve "$|f(x) - L| < \varepsilon$" eşitsizlikleri arasında ilişki kurma durumları ve formal tanımdaki niceleyicileri anlamlandırma durumları göz önünde bulundurularak analiz edilmiştir. Her ne kadar analiz; "tanım", "imaj" ve "ilişki" olmak üzere üç temel kategori altında yapılmış olsa da katılımcılarla yapılan klinik görüşmeler bütüncül olarak ele alınmıştır. Katılımcıların kavram tanımları, kavram imajları ve katılımcıların kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ilişki kurma durumları, görüşmenin tamamına bakılarak analiz edilmiştir.

Bulgular

Yapılan görüşmeler analiz edildiğinde, öğrencilerin imajlarında limitin dinamik formu ile sağ-sol limit eşitliği teoreminin baskın olduğu, öğrencilerin limitin kavram tanımı olarak da genellikle limitin dinamik formu ya da sağ-sol limit eşitliği teoremini verdiği ve öğrencilerin limitin formal tanımını vermekten kaçındığı görülmüştür. Öğrenciler, kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ise ilişki kuramamıştır. Öğrencilerin sonsuzda limit araştırmalarında zorlandıkları ve limit kavramıyla süreklilik kavramını karıştırdıkları görülmüştür.

Öğrencilerin limit kavramına ilişkin ilk çağırdıkları, genel olarak limitin dinamik formu olmuştur. Öğrencilerden sadece bir tanesi limiti ilk olarak limitin formal tanımı ile ifade ederken, beşi limitin dinamik formu, üçü yaklaşma, biri sınır, biri ise fonksiyonun o noktadaki görüntüsü olarak ifade etmiştir. Aşağıda limit dendiğinde ilk aklına gelenin "yaklaşma" olduğu görülen bir öğrencinin ifadesi verilmiştir:

Ö1: "Limit" deyince aklıma ilk yaklaşım geliyor yani bir fonksiyon üzerindeki herhangi bir noktaya sağdan ve soldan ya da herhangi bir yerden sayıların gelmesi ya da yaklaşması.

Öğrencilerin kavram tanımı olarak ise limitin dinamik formunu, sağ-sol limit eşitliği teoremini ya da yaklaşma kavramına ilişkin bazı açıklamaları verdikleri görülmüştür. Sadece bir öğrenci kavram tanımı olarak limitin formal tanımını vermiştir. Öğrencilerin altısı limitin dinamik formunu, üçü sağ-sol limit eşitliği teoremini, bir öğrenci de sadece yaklaşmadan bahsettiği bir açıklamayı kavram tanımı olarak vermiştir. Aşağıda bu öğrencinin görüşmesinden bir kesit verilmiştir:

Ö1: (Yazıyor)… Fonksiyonun bir noktasına sayıların yaklaşması

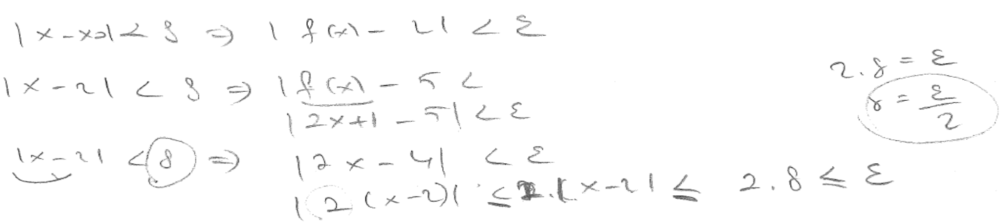
Öğrencilerin görüşme boyunca limitin formal tanımını yapmaktan kaçındıkları, formal tanımı yapmaya çalışan öğrencilerin tanımlarının ise hatalı ya da eksik olduğu görülmüştür. Sadece dört öğrenci limitin formal tanımını doğru bir şekilde vermiştir. Tanım yapmaları istendiğinde limitin formal tanımını vermeyen öğrencilerin limitin formal tanımına sahip olup olmadıklarını anlamak için limit kavramını başka bir biçimde tanımlayıp tanımlayamayacakları ya da matematiksel olarak bir fonksiyonun bir noktadaki limitini nasıl tanımlayabilecekleri şeklinde sorular sorularak yönlendirmeler yapılmıştır. Yapılan yönlendirmelere rağmen 11 öğrenciden ikisi görüşme boyunca limitin formal tanımını veremezken, öğrencilerden biri limitin formal tanımını "$|f(x) - L| = \varepsilon$ *iken* $|x - x_0| = \delta$ *olmalı*" şeklinde yanlış bir biçimde, dördü ise niceleyicileri eksik olarak vermiştir. Aşağıda bir öğrencinin niceleyicileri eksik bir şekilde yaptığı limitin formal tanımı verilmiştir:

Ö1: (yazıyor)… $\varepsilon > 0$ *olmak üzere* $\delta > 0$ *olacak şekilde* $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - y| < \varepsilon$ *olmasıdır.*

Çalışmada, öğrencilerin limitin formal tanımını anlamlandırma durumlarını ortaya çıkarmak için öğrencilere, "$\lim_{x\to 2}(2x + 1) = 5$" eşitliğini ispatlamaları istense nasıl bir yol izleyecekleri sorulmuştur. Bu soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin limitin varlığını ispatlamak için limitin formal tanımını kullanamadıkları görülmüştür. Görüşme boyunca limitin formal tanımını verememiş olan iki öğrenciden biri, verilen limit eşitliğini ispatlamak için fonksiyonun grafiğini çizerek grafik üzerinde sağ ve sol limitin eşit olduğunu açıklamaya çalışmış, diğer öğrenci ise verilen limit eşitliğini sağ-sol limit eşitliği teoremini kullanarak cebirsel olarak ispatlamıştır. Bir öğrenci ise herhangi bir ispat yapmaksızın sadece ε ve δ arasında bir ilişki bulunması gerektiğini ifade etmiştir. Kalan sekiz öğrenci, ispatlarında niceleyicileri anlamlı bir şekilde kullanmaksızın limitin formal tanımında yer alan ε ve δ komşuluklarının aynı anda ikisinin de varlığını kabul edip "$|x - x_0| < \delta$" ve "$|f(x) - L| < \varepsilon$" eşitsizliklerini açarak δ'yı çözmek amacıyla ε ile δ arasında cebirsel bir ilişki kurmaya çalışmıştır. Öğrencilerin yapmış oldukları bu ispat, çalışmada "rutin $\varepsilon - \delta$ ispatı" olarak adlandırılmıştır. Öğrenciler "rutin $\varepsilon - \delta$ ispatı"nda, δ için bir çözüme ulaşmış olsalar da yapılan sorgulamalarda, öğrencilerin neden δ için bir çözüm aradıklarının bilincinde olmadıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları "rutin $\varepsilon - \delta$ ispatı"nın bir örneği aşağıda Şekil 2'de verilmiştir:

Şekil 2

Ö3 tarafından yapılan "rutin $\varepsilon - \delta$ ispatı"



Öğrencilerin limiti tanımlama ve açıklamalarında sürekli ifade ettikleri limitin dinamik formu ya da sağ-sol limit eşitliği teoremi ile limitin formal tanımı arasında nasıl bir ilişki kurduklarını ortaya çıkarmak için öğrencilerden limit kavramına yönelik yapmış oldukları tanımlama ya da açıklamaları, vermiş oldukları limitin formal tanımı ile ilişkilendirmeleri istenmiştir. Bunu yaparken de öğrencilerin komşuluk ve yaklaşma kavramlarını nasıl algıladıkları, komşuluk ile yaklaşma, komşuluk ile formal tanımda yer alan "$|x - x_0| < \delta$" ve "$|f(x) - L| < \varepsilon$" eşitsizlikleri arasında ilişki kurma ve formal tanımda yer alan niceleyicileri kullanma durumları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerin hepsinin komşuluk kavramını doğru bir şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin yaklaşmadan ne anladıklarını ortaya çıkartmak için görüşme boyunca öğrencilerin yaklaşma derken neyi kastetmiş oldukları sorgulanmıştır. Öğrencilerin tümü, bir noktaya yaklaşmayı noktasal olarak doğru bir şekilde göstermiştir. Örneğin öğrencilerden Ö3, 3 noktasına yaklaşmayı noktasal olarak, "*mesela burada atıyorum 3 olsun (reel eksen modelinde 3 noktasını işaretliyor). Burada 2,80 olur mesela x değerim 2,90 olur, böyle böyle yavaş yavaş gelir yaklaşır (Reel eksen modeli üzerinde 3'e yakın noktaları işaretliyor)*" şeklinde ifade etmiştir. Öğrenciler bir fonksiyonun bir noktadaki limiti araştırmasında x'lerin yaklaşmasını limit araştırması yapılan noktanın bir komşuluğunu alıp bu komşuluk içinde limit araştırması yapılan noktaya yakın noktalar alarak, $f(x)$ yaklaşmasını da x'lerin görüntülerini limit değerinin bir komşuluğunun içinde limit değerine yakın noktalar alarak ifade etmiştir. Çalışmada beş öğrenci x ve $f(x)$ yaklaşmalarını, Şekil 3'te görüldüğü gibi reel eksen modelleri üzerinde göstermiştir.

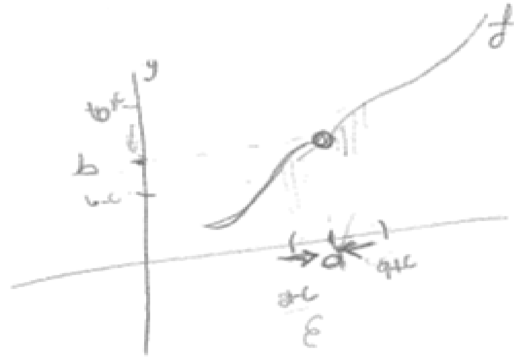
Şekil 3

Ö3'ün çizmiş olduğu reel eksen modelleri

Altı öğrencinin ise x ve $f(x)$ yaklaşmalarını, Şekil 4'te görüldüğü gibi koordinat düzlemi modeli üzerinde gösterdiği belirlenmiştir.

Şekil 4

Ö9'un çizmiş olduğu koordinat düzlemi modeli



Öğrenciler her iki modelde de limit araştırması yapılan noktanın komşuluğundaki noktaların görüntülerini limit değerinin komşuluğuna düşürmüş olmasına rağmen, öğrencilerin genel olarak komşulukla yaklaşma ilişkisini kuramadığı görülmüştür. On bir öğrenciden sadece ikisi komşulukla yaklaşma ilişkisini kurabilmiştir. Bu öğrenciler yaklaşmanın komşuluğu küçültme ile sağlanacağını ifade edebilmiştir. Aşağıda bu öğrencilerden birinin görüşme dökümünden bir kesit verilmiştir:

Ö9: … yani bu komşuluklar arasındaki yaklaşmaların aynı noktaya gitmesi.

G: Komşuluklar arasında yaklaşma ne demek?

Ö9: Yani aldığımız o aralığın bu seçtiğimiz noktaya yaklaşması işte (x ekseni üzerindeki bir nokta için aldığı aralığı küçültüyor)

Komşuluk ile limitin formal tanımında yer alan "$|x - x_0| < \delta$" ve $|f(x) - L| < \varepsilon$" eşitsizlikleri arasındaki ilişkiyi ise sadece üç öğrenci kurabilmiştir. Bu öğrencilerden birinin yaklaşmayla komşuluk ilişkisini de kurabildiği görülmüştür. Aşağıda komşulukla yaklaşma ilişkisini kurabilen öğrencilerden birinin görüşmesinden bir kesit sunulmuştur:

Ö3: Buradaki x değerlerim x_0'a yaklaşırken zaten buradan da görüldüğü gibi ("$|x - x_0| < \delta$" ifadesini gösteriyor) x değerlerim x_0 'a yaklaşıyorken nereden, epsilon delta uzunluklu *komşuluğunda yaklaşırken acaba işte bu* $f(x)$*'lerin y değerlerim de delta gibi bir sabit noktaya yaklaşıyor mu belli bir aralıkta (*"$|f(x) - L| < \varepsilon$" *ifadesini gösteriyor) o aralıkta epsilon aralıkta keyfi yaklaşıyor mu*

Ayrıca öğrencilerin hepsinin ε ile δ 'yı, niceleyicileri anlamlı bir şekilde kullanarak ilişkilendiremediği görülmüştür. ε ile δ arasında ilişki kurmaya çalışan öğrenciler genel olarak her ε için en az bir δ bulunması gerektiğini ifade etmesine rağmen, ε'nun mu yoksa δ'nın mı keyfi olduğu konusunda karmaşa yaşamıştır. Bu karmaşayı yaşayan öğrencilerden birinin görüşmesinden bir kesit aşağıda verilmiştir:

Ö4: Iıı (Yazıyor)… $\exists \mathrm{I} \delta > 0$ *komşuluğunda hatırlayamıyorum tam şu anda komşuluğuna karşılık yok herhangi bir delta büyük sonuçta yalnız bir tane olmasına gerek yok (deltanın önündeki en az bir sembolünü karalıyor)* $\exists \mathrm{I} \varepsilon > 0$ …

Öğrencilerin epsilonu niçin keyfi aldıkları sorgulandığında ise kendilerince bu durumu çeşitli şekillerde açıklamaya çalıştıkları görülmüştür. Aşağıda öğrencilerden birinin, ε 'nun keyfi seçilmesine yönelik açıklaması verilmiştir:

Ö1: … limitte zaten burada işlemler yapıldığında aynı değeri buluyoruz yani burada epsilonun ve deltanın aslında burada bana göre keyfi ve belli bir sayıda keyfi olmamasın sebebi bu ne kadar farklı yerlerden alabilirsem alayım ben yine aynı şeyi değeri bulacağım ben bu yani bu bir tür tanımlama gibi geliyor…

Öğrencilerin limit araştırmaları incelendiğinde ise öğrencilerin hem sonlu bir noktada hem de sonsuzda limit araştırmalarında sağ-sol limit eşitliği teoremini kullanma eğiliminde olduğu görülmüştür. Öğrenciler özellikle bir fonksiyonun sonsuzdaki limitini araştırırken zorlanmıştır. Çalışmada, öğrencilerin sonsuzu bir sayı olarak algıladıkları görülmüştür. Öğrencilerin sonsuzu sayı olarak algılamalarıyla çalışmada iki şekilde karşılaşılmıştır. Bunlardan ilki, öğrencilerin fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü almaya çalışmasıdır. İkincisi ise öğrencilerin sonsuza yaklaşırken sağdan ve soldan yaklaşmaya çalışmasıdır. Öğrenciler sonsuza sağdan ve soldan yaklaşmak için genel olarak sonsuzu, sonsuza sağdan yaklaşabilmek için artı sonsuz, sonsuza soldan yaklaşabilmek için eksi sonsuz olarak almıştır.

Yapılan görüşmelerde öğrencilerin x'in sonsuza yaklaşmasını nasıl yaptıkları sorgulandığında, öğrencilerin tümünün sonsuzun bir reel sayı olmadığını belirttiği ve sonsuza yaklaşımı doğru olarak ifade ettiği görülmüştür. Öğrenciler x'in sonsuza yaklaşmasını, "*… x'lerin sonsuza gitmesi demek bu tarafa doğru gitmesi demek (x-ekseninde soldan sağa doğru bir ok koyuyor)*" şeklinde doğru bir şekilde ifade etmiştir. Fakat öğrenciler sonsuza yaklaşımı doğru olarak ifade etmesine rağmen, limit alma sürecinde bu yaklaşımı kullanmada zorlanmıştır. On bir öğrenciden sadece üçü sonsuzda limit araştırmasını doğru bir şekilde yapabilmiştir. Kalan sekiz öğrencinin sonsuzda limit araştırmalarında ya fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü almaya çalıştığı ya da sonsuza sağdan ve soldan yaklaşmaya çalıştığı görülmüştür. Bu sekiz öğrencinin sonsuzda limit araştırmasını nasıl yaptığı incelendiğinde, iki öğrencinin fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü almaya çalıştığı, dört öğrencinin sonsuza sağdan ve soldan yaklaşabilmek için sonsuzu sırasıyla artı sonsuz ve eksi sonsuz olarak aldığı, iki öğrencinin ise bu iki durumu da yansıttığı görülmüştür.

Öğrencilerin sonsuzda limit araştırması yaparken fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü almaya çalışmasına örnek olarak aşağıda bir öğrencinin görüşmesinden bir kesit verilmiştir:

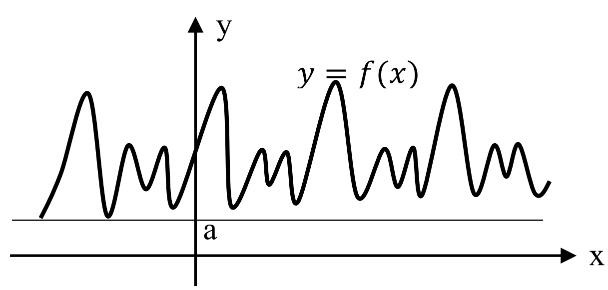
G: $\lim_{x\to\infty} sinx$ *nedir?*

Ö3: Burada da şey yapıyoruz x değişkenim sonsuza gidiyor x değişkenim sonsuza giderken düşünüyorum acaba y değişkenim nereye gidiyor? Yani ben y yerine sin sonsuz yazsam ("$sin\infty$*" yazıyor). Aslında böyle bir şey tam olarak sağlıklı bir şey değil. Ama ben biliyorum ki sinx,* -1 *ile*

1 *aralığında ("*$-1 \leq sinx \leq 1$*" yazıyor) o yüzden sin sonsuzu da bu aralığa dahil edebilirim ("*$-1 \leq sin\infty \leq 1$*" yazıyor).*

Burada öğrenci, sonsuzda fonksiyonun görüntüsünü bulmaya çalışmasının hatalı olduğunu fark etmesine rağmen, yine de fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü almıştır. Sonsuzda fonksiyonun görüntüsünü almaya çalışan başka bir öğrencinin ise sonsuzda komşuluk almaya çalışarak sonsuzun komşuluğundaki noktaların görüntülerini bulma eğiliminde olduğu görülmüştür. Bu öğrenci görüşme boyunca bir fonksiyonun bir noktada limitini araştırırken, o noktanın bir komşuluğunu almış ve aldığı komşuluktaki noktaların görüntülerinin yaklaşımını incelemiştir. Öğrenci, sonsuz için komşuluk belirleyemediğinden sonsuzda limitin olmadığını ifade etmiştir. Bu öğrencinin Şekil 5'te verilen fonksiyona ilişkin görüşme dökümünden bir kesit aşağıda sunulmuştur:

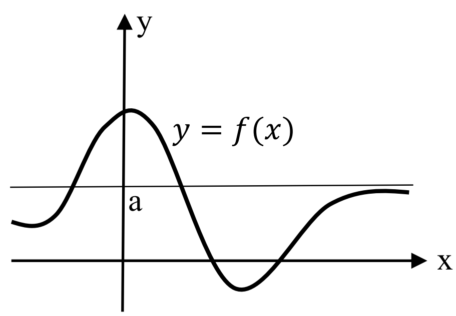
Ö4: … Yine aynı şekilde x'ler sonsuza gittiği zaman mutlaka fonksiyon üzerinde bir değer alacak, çünkü bu fonksiyonda sonsuza gidiyor. Sonsuzda bir noktanın görüntüsü olacak. Ama sonsuzdaki o noktanın hangi nokta olduğunu bilmiyoruz biz. … O sonsuzdaki noktanın hangi nokta olduğunu bilmediğimiz için o nokta için bir komşuluk belirlememiz de mümkün değil. O belirleyemediğimiz komşuluktaki x'lerin görüntülerinin nereye gittiğini bilmemiz de mümkün değil, o yüzden bu fonksiyonda sonsuza giderken limit yoktur.



Şekil 5. Öğrencilere sonsuzda limit araştırması yapması için çizilen bir fonksiyon grafiği

Öğrencilerin sonsuzda limit araştırmalarında, sonsuzu sayı gibi ele algılamalarına yönelik karşılaşılan bir diğer durum da sonsuzun, sonsuza sağdan yaklaşabilmek için artı sonsuz, sonsuza soldan yaklaşabilmek için eksi sonsuz olarak alınmasıdır. Öğrencilerden yedisi, bir fonksiyonun sonsuzda limitini araştırırken sonsuza sağdan yaklaşmak için artı sonsuza, sonsuza soldan yaklaşmak için eksi sonsuza yaklaşmıştır. Fakat bu yedi öğrenciden ikisinin, sağ-sol limit eşitliği teoremine ilişkin imajları ile x-ekseninde sağa doğru yaklaşma şeklinde ifade ettikleri sonsuza yaklaşma imajlarını eş zamanlı olarak çağırarak çelişki yaşadığı görülmüştür. Aşağıda bu duruma ilişkin bir öğrencinin görüşmesinden bir kesit sunulmuştur:

Ö7: x sonsuza giderken $f(x)$ limiti x sonsuza giderken $f(x)$ (Şekil 6'daki grafiğin en ucuna geliyor) ... Hocam burada sadece direkt sağ şey sol limit var galiba. Sol taraftan yaklaşıyoruz (grafik üzerinde soldan sağa yaklaşıyor) yani x'ler sonsuzda orada da a değerini alır ama sağ limitten bahsedemeyiz çünkü sağ tarafta grafik yok. Sonsuza kadar gidiyor mu sonsuzda eşitmiş gibi kabul ediyorum. Valla limitinin olup olmadığını sonsuzun bir şey diyemeyeceğim.

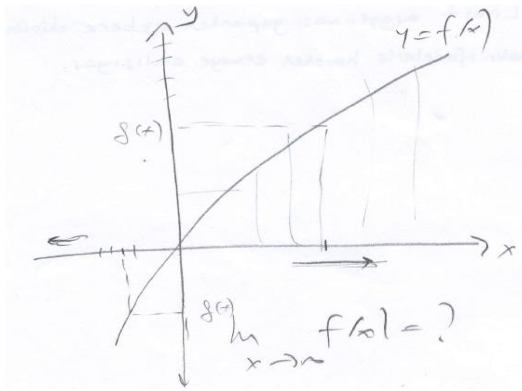


Şekil 6. Öğrencilerin sonsuzda limit araştırması yapması için çizilen bir diğer fonksiyon grafiği

Yedi öğrenciden beşinin ise sağ-sol limit eşitliği teoremine ilişkin imajları ile x-ekseninde sağa doğru yaklaşma şeklinde ifade ettikleri sonsuza yaklaşma imajlarını eş zamanlı çağırmayarak bir çelişki yaşamadığı tespit edilmiştir. Aşağıda bu duruma ilişkin bir öğrencinin yapmış olduğu limit araştırmasına ilişkin çizimi verilmiştir.

Şekil 7

Ö6'nın sonsuzda limit araştırması yaparken sonsuza sağdan yaklaşmak için artı sonsuza, sonsuza soldan yaklaşma için eksi sonsuza yaklaşımı



Şekil 7'den de görüldüğü gibi öğrenci, sonsuza sağdan yaklaşmak için artı sonsuza, soldan yaklaşmak için ise eksi sonsuza yaklaşmıştır. Fakat öğrenci, ayrı ayrı artı sonsuzda ve eksi sonsuzda limit araştırmasını doğru bir şekilde yapmıştır.

Çalışmada öğrencilerin hem sonlu noktalarda hem de sonsuzda limit araştırması yaparken, fonksiyonun görüntüsünü grafik üzerinde aldığı ve yaklaşmaları grafik üzerinden yaptığı görülmüştür. Öğrenciler limit araştırmalarında yaklaşmayı grafik üzerinden yaparak doğru sonuca ulaşabilmiştir. Öğrencilerden biri, fonksiyonun görüntülerinin y-ekseninde olduğunu söylemesine rağmen bazı limit araştırmalarında yaklaşmayı fonksiyonun grafiğini takip ederek yaparken, altı öğrenci fonksiyonun görüntülerini fonksiyonun grafiği üzerinde alıp yaklaşmayı grafik üzerinden yapmıştır. Aşağıda bu duruma örnek bir öğrencinin görüşmesinden bir kesit verilmiştir:

Ö2: Bu fonksiyon sürekli gidiyor. İlerliyor sürekli (Fonksiyonun grafiğini eliyle devam ettiriyor) Ama sonsuzda nerede olduğunu bilemeyeceğimiz için yaklaşma yapamayacağımız için limit yok derim

G: Peki x*'ler sonsuza giderken neyin nereye gittiğini araştırıyorsun?*

Ö2: $f(x)$*'in L gibi bir değere gittiğini*

G: O $f(x)$*'ler nerede?*

Ö2: Bu grafiğin üstünde (Eliyle grafiğin üzerindeki noktaları gösteriyor).

Öğrenciler görüşme boyunca zaman zaman limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırmıştır. Öğrencilerin hem bir noktada hem de sonsuzda limit araştırmalarında, fonksiyonun görüntüsünü almaya çalıştığı ve fonksiyonu tanımsız yapan bir değer olup olmadığına baktığı görülmüştür. Aslında görüşme boyunca öğrencilerin tümü, bir fonksiyonun bir noktada limitinin varlığı için o noktada fonksiyonun tanımlı olması gerekmediğini ifade etmiştir. Fakat yine de öğrencilerin limit kavramına ilişkin açıklamalarında ve limit araştırmalarında, limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırdığı görülmüştür. Öğrencilerden biri hariç hepsi, limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırmıştır. Aşağıda bu öğrencilerden birinin görüşmesinden bir kesit verilmiştir:

Ö1: Arada kesinti olmadığı için limiti olmuyor diyemiyorum. Şurada boş bir kesinti ya da boşluk olmadığı için (grafik üzerinde gösteriyor) ya da orada fonksiyon tanımlı olmadığı için tanımlı olmadığı bir nokta olmadığı için limitin olduğunu söyleyebiliyorum

G: Kesintiden tanımlı olmayı mı kastediyorsun?

S: Evet.

Sonuç olarak öğrencilerle yapılan görüşmeler bütüncül olarak değerlendirildiğinde, öğrencilerin imajlarında sağ-sol limit eşitliği teoreminin ve limitin dinamik formunun baskın olduğu görülmüştür. Öğrenciler limitin formal tanımını vermekten uzak durmuş, kavram tanımı olarak limitin dinamik formunu ya da sağ-sol limit eşitliği teoremini vermiştir. Limitin formal tanımını vermekten uzak duran öğrenciler, kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ise ilişki kuramamıştır.

Tartışma ve Sonuç

Çalışmada öğrencilerin kavram imajlarında, sağ-sol limit eşitliği teoremi ile limitin dinamik formunun baskın olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin kavram imajlarında limitin dinamik formunun baskın olması sonucunun, Williams (1991) ve Szydlik'in (2000) çalışmalarında ulaştığı sonuçlarla tutarlı olduğu görülmüştür. Öğrenciler kavram tanımı olarak ise sağ-sol limit eşitliği teoremini, Tall ve Vinner (1981)'ın çalışmasında belirttiği gibi limitin dinamik formunu, ya da Przenioslo (2004)'nun çalışmasında ifade ettiği gibi kavram imajlarında yer alan yaklaşma kavramına ilişkin bazı açıklamaları vermiştir. Öğrencilerin hem kavram imajlarının hem de kavram tanımlarının genel olarak sağ-sol limit eşitliği teoremi ile limitin dinamik formuna dayandığı sonucuna ulaşılmıştır. Fakat öğrencilerin limitin formal tanımını vermekten kaçındığı görülmüştür.

Öğrencilerin kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ise ilişki kuramadığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrenciler limit araştırmalarında x ve $f(x)$'lerin yaklaşımını, reel eksen ya da koordinat düzlemi modelleri üzerinde, limit araştırması yapılan noktanın bir komşuluğundaki x'lerin görüntülerini limit değerinin bir komşuluğuna düşürerek göstermiştir. Öğrencilerin bu şekilde limit araştırması yapılan noktaya yakın noktalar alarak bunların görüntülerinin nereye yaklaştığını incelemesi, Williams (1991) ve Szydlik'in (2000) çalışmalarında ulaştığı sonuca paraleldir. Bunun yanı sıra, Przenioslo'nun (2004) da çalışmasında ifade ettiği gibi öğrencilerin limit araştırmalarında fonksiyonun görüntülerini grafik üzerinde alıp fonksiyon görüntülerinin yaklaşımını grafik üzerinden yaptıkları da görülmüştür.

Öğrencilerin kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında ilişki kuramamasının nedenlerinden birinin, alan yazında ifade edildiği gibi (Cottrill ve ark., 1996; Tall ve Vinner, 1981), öğrencilerin formal tanımda yer alan niceleyicileri anlamlı bir şekilde kullanamaması olduğu görülmüştür. Diğer bir nedenin ise; dinamik yaklaşma bilgisi, komşuluk ve formal tanımında yer alan "$|x - x_0| < \delta$" ve $|f(x) - L| < \varepsilon$" eşitsizlikleri aralarında ilişki kurulamamasının olduğu söylenebilir.

Çalışmada, Tall (1992) ve Juter ve Grevholm'un (2006) da çalışmalarında belirttiği gibi öğrencilerin sonsuzda limit almada zorlandığı görülmüştür. Öğrenciler, Tall'un (1992) ifade ettiği gibi fonksiyonun sonsuzda görüntüsünü almaya çalışarak sonsuzu sayı olarak algıladıklarını göstermişlerdir. Ayrıca öğrenciler sonsuzda limit araştırması yaparken de sağ-sol limit eşitliği teoremini kullanmaya çalışarak sonsuza sağdan yaklaşabilmek için artı sonsuz, soldan yaklaşabilmek için eksi sonsuz kullanmışlardır. Bu durum sağ-sol limit eşitliği teoremi ile öğrencilerin sonsuz kavramına yönelik imajlarının çelişmesi olarak yorumlanmış ve Tall ve Vinner'ın (1981) tanımladığı biçimiyle bilişsel çelişki faktörü olarak düşünülmüştür. Sonuç olarak Sierpinska'nın (1987) da belirttiği gibi sonsuz kavramının, limit kavramının öğrenilmesinde oldukça önemli olduğu ortaya çıkmıştır.

Çalışmada, öğrencilerin limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin hepsi görüşmelerde bir fonksiyonun bir noktada limitinin varlığı için o noktada fonksiyonun tanımlı olması gerekmediğini ifade etmiştir. Buna rağmen öğrencilerin açıklamalarında ve limit araştırmalarında, limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırmaktan kurtulamadığı görülmüştür. Przenioslo'nun (2004) çalışmasıyla tutarlı olarak öğrencilerin limit araştırmalarında fonksiyonun görüntüsünü almaya çalışması ve Tall ve Vinner'ın (1981) çalışmasında ulaştığı sonuca paralel olarak öğrencilerin limit araştırmalarında fonksiyonu tanımsız yapan bir değer olup olmadığına bakması, öğrencilerin limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırdığının en önemli göstergelerindendir. Öğrencilerin limit kavramını süreklilik kavramı ile karıştırmasında, öğrencilerin sürekli ya da kaldırılabilir süreksiz fonksiyonların bir noktadaki limiti araştırmalarına ilişkin deneyimlerinin etkisi olduğu düşünülmektedir. Çünkü öğrenciler limit kavramına ilişkin açıklamalarında ve hem bir noktada hem de sonsuzda limit araştırmalarında sağ-sol limit eşitliği teoremini kullanmış ya da fonksiyonun görüntüsünü almaya çalışmıştır. Bunun için limit ve süreklilik kavramlarının öğretimi sırasında verilecek örneklerin çeşitliliğine dikkat edilmelidir. Verilecek örneklerin seçimi, öğrencide sadece geometrik bir imajın oluşmasını ve öğrencinin limit araştırmasını süreklilik araştırmasıyla başlatmasını engelleyecek biçimde yapılmalıdır.

Sonuç olarak çalışmada, katılımcılar kavram imajları ile limitin formal tanımı arasında bir ilişki kuramamış, fakat Vinner'ın (1991) da belirttiği gibi kavram imajları ile uygulama sorularını çözebilmiştir.

EK 1. Limit Testi

1) $\lim_{x \to -1} (2x + 3) = 1$ olduğunu $\varepsilon - \delta$ ile kanıtlayınız.

2) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığını,
a) Kendinize göre sözel ifade ediniz. b) Matematik dilinde ifade ediniz.

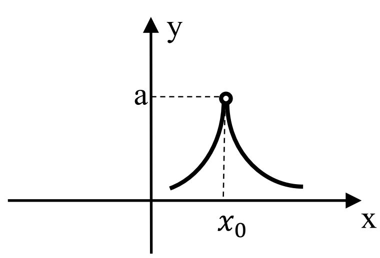
3) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini tanımlayınız.

4) "$x \to x_0$ iken $f(x) \to L$" ifadesinin ne anlama geldiğini açıklayınız.

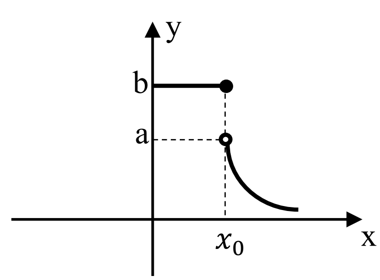
5) Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini "komşuluk" kullanarak sözel ifade ediniz ve bu ifadenizi, yaptığınız limit tanımı ile karşılaştırınız.

6) Aşağıda verilen fonksiyonların x_0 noktasında limitleri var mıdır, varsa nedir, neden?

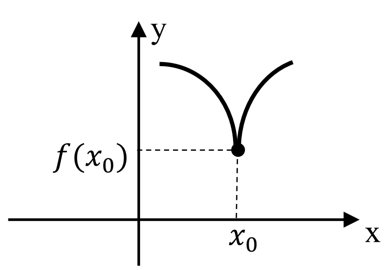
a)



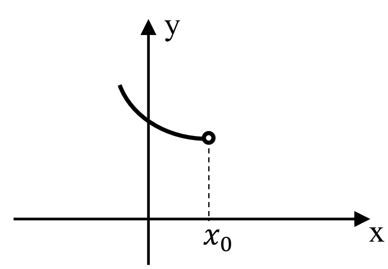
b)



c)



d)



7) $\lim_{x\to 4}(x^2+4x+3)$ ifadesini hesaplayınız.
8) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ ifadesini hesaplayınız.
9) $\lim_{x\to\infty}[\![x]\!]$ ifadesini hesaplayınız.
10) $\lim_{x\to\infty} cosx$ nedir, neden?

Kaynakça

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Education, Science, and Technology, 32*(4), 487 – 500.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. A. E. Kelly & R. A. Lesh, (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547–589). London: Lawrence Erlbaum.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Boston: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 17-192.

Juter, K., & Grevholm, B. (2006). Limits and infinity: A study of university students' performance. To appear in C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval, & F. Rønning (Eds.), *Relating practice and research in mathematics education. Fourth Nordic Conference on Mathematics Education, Trondheim, 2nd-6th of September 2005*. Trondheim: Sør-Trøndelag University College.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 259-288.

Miles, M., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.

Roh, H. K. (2007). An activity for development of the understanding of the concept of Limit. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.).Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 105-112. Seoul: PME.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 258–276.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495– 511.

Tall, D. O. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 199-238.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219-236.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Boston: Kluwer.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2003). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

EXTENDED ABSTRACT

Limit is one of the most important concepts in mathematics. Existing research on limit has found that students generally define and explain limit concept by dynamic limit form and cannot understand formal definition of limit (Tall and Vinner, 1981; Williams, 1991). In addition, students have some difficulties with infinity (Tall, 1992). Tall (1992) states that students can take infinity as a number. Students also confuse the concepts of limit and continuity in the limit investigations (Przenioslo, 2004; Tall and Vinner, 1981). The purpose of the study is to determine the students' concept definitions, concept images (Tall and Vinner, 1981) and relationships between students' concept images and formal definition of limit for one variable real valued functions.

Method

Qualitative research method was used in the study. Eleven students were selected from 31 students attending Analysis I course by criterion sampling method. In the first stage, a test about limit concept was carried out to 31 students. Responses of the students were analyzed qualitatively by researchers. Students' concept images, concept definitions and relationship between students' concept images and formal definition of limit were taken as criterions. Depending on results of the analyses, the students were classified into eight groups. Eleven students were selected from groups by criterion sampling method to carry out clinical interviews. The clinical interviews were analyzed qualitatively by the researchers.

Results

The results of the study revealed that seven students' concept images focused on theorem about the equality of right and left hand limits and four students' concept images focused on dynamic form of limit. When students' concept definitions were analyzed, it was seen that six out of eleven students defined limit of a function at a point by dynamic form of limit, three of them by theorem about the equality of right and left hand limits but only one student by formal definition of limit.

It was observed that students had difficulties to explain and use the formal definition of limit and could not understand the quantifiers in the formal definition. Moreover, none of the students could establish the relationship between their concept images and formal definition of limit. However, the students' images about infinity and concept images based on theorem about the equality of right and left hand limits conflicted with each other.

The results also revealed that eight students took infinity as a number in different ways. Two of the students tried to find the image of function at infinity. While four of the students approached to positive infinity in order to find right hand limit and approached to negative infinity in order to find left hand limit, two of them reflected both ways. Ten students also confused the concepts of limit and continuity.

Discussion and Conclusion

The results of the study indicated that students' both concept images and concept definitions focused on theorem about the equality of right and left hand limits and dynamic form of limit.

Moreover, it was found that students had difficulties in defining and using formal definition of limit. The results of the current study validate the results of the studies conducted by Tall and Vinner (1981) and Williams (1991).

In the study, main reason of students' difficulties about limit of a function at infinity was to take infinity as a number. This reason was stated in Tall's (1992) study. In addition, students confused the concepts of limit and continuity as indicated in the literature (Przenioslo, 2004; Tall and Vinner, 1981). Consequently, students could not establish the relationship between their concept images and formal definition of limit but they could use their concept images in order to solve questions.