HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDLARIN BİR SINIFLANDIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT EFE

ESKİŞEHİR,2018

HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDLARIN BİR SINIFLANDIRILMASI

Murat EFE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Temmuz, 2018

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Murat EFE'nin "**Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldların Bir Sınıflandırılması**" başlıklı tezi 16/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR	....
Üye	: Prof. Dr. Ali DENİZ	....
Üye	: Prof. Dr. Ayşe BAYAR KORKMAZOĞLU	....

Prof.Dr. Ersin YÜCEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDLARIN BİR SINIFLANDIRILMASI

Murat EFE

Matematik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Temmuz, 2018

Danışman : Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

Bu çalışmada hemen hemen kontak metrik manifoldlar ele alınmıştır. Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\mathbb{R}$ ile çarpıldığında bu çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen Hermit yapı inşaa edilebilir. Çarpım manifoldu üzerinde elde edilen hemen hemen Hermit yapının sınıflandırması kullanılarak hemen hemen kontak metrik manifold için Oubina tarafından tanımlanan sınıflar incelenerek bu sınıflar için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Vektör alanı, Levi-civita kovaryant türev,
dış türev, kotürev.

ABSTRACT

A CLASSIFICATION FOR ALMOST CONTACT STRUCTURES

Murat EFE

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, July, 2018

Supervisor: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

In this thesis, almost contact metric manifolds are studied. The product of an almost contact metric manifold with the real line $\mathbb{R}$ has an almost Hermitian structure. Several classes of almost contact metric structures defined by Oubina by using the classification of almost Hermitian structures on the product manifold are studied and defining relations of several almost contact metric structures are written.

Keywords: Vector field, Levi-civita covariant derivative,
exterior derivative, coderivation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocan Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR'e , değerli hocalarım Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ, Doç. Dr. Şenay BULUT ve Dr. Öğr. Üyesi. Şirin AKTAY'a ve yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman yanımda olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Murat EFE

Temmuz 2018

16/07/2018

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Murat EFE

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
M	: Manifold
$M \times \mathbb{R}$	: M ve $\mathbb{R}$'nin çarpım manifoldu
$\chi(M)$	: M manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesi
$\chi(M \times \mathbb{R})$	: $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesi
∇_X	: X vektör alanı yönünde Levi-Civita kovaryant türev
δ	: M üzerindeki kotürev
g	: M üzerindeki Riemann metrik
h	: $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki Riemann metrik
$[,]$	: Lie braket
$\overline{\delta}$	: $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki kotürev
d	: Dış türev
$\wedge$	: dış çarpım

1 GİRİŞ

Hemen hemen kontak metrik manifoldlar ve özellikleri hakkında pek çok çalışma vardır [1–3]. Özellikle Sasakian ve Kenmotsu en çok çalışılan manifold sınıflarıdır [4–6]. Bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde

$$\Phi(X,Y) := g(X, \varphi(Y))$$

olarak tanımlanan 2-forma yapının temel 2-formu denir. g metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi ∇ olmak üzere; Φ temel 2-formunun kovaryant türevi $\nabla\Phi$ nin sağladığı özellikler kullanılarak $\nabla\Phi$ nin ait olduğu bir

$$C = \left\{ \alpha \in \otimes_3^0 TM : \alpha(X,Y,Z)0 - \alpha(X,Z,Y) = -\alpha(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) \right\}$$

uzayı inşaa edilir. Bu uzay hemen hemen kontak metrik yapının özellikleri kullanılarak 11 alt uzayın direk toplamı olarak

$$C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_{11}$$

ifade edilebilir. Bu direk toplamdaki C_i alt uzaylarının tanımlama bağıntıları ve örnekleri [3]'de verilmiştir.

Böylece $\nabla\Phi$ nin hangi $C_{j_1} \oplus \cdots C_{j_k}$ alt uzayına ait olduğuna göre bir sınıflama elde edilmiş olur [3]. Örneğin C_1 sınıfı nearly-K-kosimplektik manifoldlar, $C_2 \oplus C_9$ sınıfı hemen hemen kosimplektik manifoldlar, $C_1 \oplus C_5 \oplus C_6$ sınıfı nearly-trans-Sasakian manifoldların sınıfıdır.

Başka bir sınıflama ise Oubina tarafından yapılmıştır [1]. Oubina'nın çalışmasında bir M hemen hemen kontak metrik manifoldu $\mathbb{R}$ ile çarpılarak $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen Hermit yapı elde edilmiştir. Yine aynı çalışmada Gray [7] tarafında yapılan hemen hemen Hermit yapıların sınıflaması kullanılarak M hemen hemen kontak metrik manifoldun sınıflaması elde edilmiştir.

Bu çalışmada, Oubina'nın çalışması incelenerek Oubina tarafından tanımlanan G_1-Sasakian sınıfının hangi C_i sınıflarını içerdiği gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve bu manifold üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;*
$\varphi : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ endomorfizmi , η 1-formu ve ξ vektör alanı her $X \in \chi(M)$ vektör alanı için

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{2.1}$$

koşullarını sağlıyor ise (φ, η, ξ) üçlüsüne M manifoldu üzerinde bir ***hemen hemen kontak yapı*** *ve M manifolduna* ***hemen hemen kontak manifold*** *denir.*

Tanımdan

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0 \tag{2.2}$$

olduğu şu şekilde gösterilebilir:

$$\varphi^2(\xi) = -\xi + \underbrace{\eta\,(\xi)}_{=1}\xi = -\xi + \xi = 0$$

olur. Tekrar φ dönüşümü uygulanırsa

$$0 = \varphi^3(\xi) = \varphi^2(\varphi(\xi)) = -\varphi(\xi) + \eta\,(\varphi(\xi))\,\xi$$

eşitliğinden

$$\varphi(\xi) = \eta\,(\varphi(\xi))\,\xi$$

elde edilir. Diğer yandan

$$0 = \varphi^2(\xi) = \varphi(\varphi(\xi)) = \varphi\,(\eta\,(\varphi(\xi))\,\xi) = \eta\,(\varphi(\xi))\,\varphi(\xi) \tag{2.3}$$

bulunur. $\varphi(\xi) = \eta\,(\varphi(\xi))\,\xi$ eşitliği (2.3) ifadesinde yerine yazıldığında

$$0 = (\eta(\varphi(\xi)))^2\,\xi \tag{2.4}$$

eşitliğinden $\eta(\varphi(\xi)) = 0$ ve buradan $\varphi(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\xi = 0 \cdot \xi = 0$ bulunur.

Herhangi bir X vektör alanı için $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ eşitliğinin her iki tarafına tekrar φ dönüşümü uygulandığında

$$\varphi\left(\varphi^2(X)\right) = -\varphi(X) + \eta(X)\underbrace{\varphi(\xi)}_{=0} = -\varphi(X) \tag{2.5}$$

ve

$$\varphi^3(X) = \varphi^2(\varphi(X)) = -\varphi(X) + \eta(\varphi(X))\xi \tag{2.6}$$

eşitliklerinden

$$-\varphi(X) + \eta(\varphi(X)) = \varphi^3(X) = -\varphi(X), \tag{2.7}$$

ve

$$\eta(\varphi(X)) = 0 \tag{2.8}$$

elde edilir.

Tanım 2.2. *(M, φ, ξ, η) bir hemen hemen kontak manifold ve g bu manifold üzerinde bir Riemann metrik olsun. Eğer her $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için*

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X).\eta(Y) \tag{2.9}$$

koşulu sağlanıyorsa (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne M manifoldu üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı ve M manifolduna ***hemen hemen kontak metrik manifold*** *denir.*

Hemen hemen kontakt metrik manifold tanımındaki (2.9) eşitliğinde $Y = \xi$ olarak alındığında

$$0 = g(\varphi(X), \varphi(\xi)) = g(X, \xi) - \eta(X).\eta(\xi)$$

ve

$$g(X, \xi) = \eta(X)$$

elde edilir.

1. Örnek:

$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$ uzayı üzerinde lineer bağımsız

$$e_1 = z\frac{\partial}{\partial x} \quad e_2 = z\frac{\partial}{\partial y} \quad e_3 = z\frac{\partial}{\partial z}$$

vektör alanları ele alınsın. Bu vektör alanları

$$g = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

metriğine göre ortanormaldir. $\xi = e_3$ ve

$$\varphi(e_1) = -e_2 \quad \varphi(e_2) = e_1 \quad \varphi(e_3) = 0$$

lineer dönüşümü alındığında (φ,ξ,η,g) dörtlüsü M üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapıdır.

2.Örnek:

$\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde $(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots y_n,z)$ koordinatlarına göre

$$\{2\frac{\partial}{\partial y_1},2\frac{\partial}{\partial y_2},\cdots,2\frac{\partial}{\partial y_n},2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial}{\partial z}\right),2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+y_2\frac{\partial}{\partial z}\right),\cdots,$$
$$2\left(\frac{\partial}{\partial x_n}+y_n\frac{\partial}{\partial z}\right),\frac{\partial}{\partial z}\}$$

vektör alanlarının kümesi

$$g=\eta\otimes\eta+\frac{1}{4}\sum_{i=n}^{n}\left((dx_i)^2+(dy_i)^2\right)$$

metriğine göre ortanormal bir çatıdır.

$$\eta=\frac{1}{2}\left(dz-\sum_{i=1}^{n}y_idx_i\right),$$
$$\xi=2\frac{\partial}{\partial z},$$

ve φ dönüşümü

$$\varphi\left(2\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad 1\leq i\leq n$$
$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=0$$

olarak alındığında (φ,ξ,η,g) dörtlüsü $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapıdır.

M manifoldu üzerinde

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi(Y)) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir **2-formdur** ve bu 2-forma hemen hemen kontak metrik yapının **temel 2- formu** denir. Φ dönüşümünün anti-simetrik olduğu şu şekilde görülebilir:

$$\begin{aligned}\Phi(X,Y) &= g(X,\varphi(Y))\\ &= g(\varphi(X),\varphi^2(Y))+\eta(X)\underbrace{\eta(\varphi(Y))}_{=0}\\ &= g(\varphi(X),-Y+\eta(Y)\xi)\\ &= -g(\varphi(X),Y)+\underbrace{\eta(\varphi(X))}_{=0}\xi\\ &= -g(Y,\varphi(X))=-\Phi(Y,X).\end{aligned}$$

M manifoldu üzerindeki g metriğinin **Levi-Civita kovaryant türevi** ∇ olmak üzere; η 1-formunun kovaryant türevi

$$\begin{aligned}(\nabla_X \eta)(Y) &= X[\eta(Y)] - \eta(\nabla_X Y) \\ &= X[g(Y,\xi)] - \eta(\nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X \xi) - g(\nabla_X Y,\xi) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y)\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\nabla_X \xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_X \eta = 0$$

elde edilir. Φ temel 2-formunun kovaryant türevi

$$\begin{aligned}(\nabla_X \Phi)(Y,Z) &= X[\Phi(Y,Z)] - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y,\nabla_X Z) \\ &= X[g\,(Y,\varphi(Z))] - g(\nabla_X Y,\varphi(Z)) - g(Y,\varphi(\nabla_X Z)) \\ &= g(\nabla_X Y,\varphi(Z)) + g(Y,\nabla_X \varphi(Z)) - g(\nabla_X Y,\varphi(Z)) \\ &\quad - g(Y,\varphi(\nabla_X Z)) \\ &= g(Y,\nabla_X \varphi(Z)) - g(Y,\varphi(\nabla_X Z)) \\ &= g(Y,(\nabla_X \varphi)(Z))\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}(\nabla_X \Phi)(Y,Z) &= X[\Phi(Y,Z)] - \Phi(\nabla_X Y,Z) - \Phi(Y,\nabla_X Z) \\ &= -X[\Phi(Z,Y)] + \Phi(Z,\nabla_X Y) + \Phi(\nabla_X Z, Y) \\ &= -\left\{X[\Phi(Z,Y)] - \Phi(Z,\nabla_X Y) - \Phi(\nabla_X Z, Y)\right\} \\ &= -g(Z,(\nabla_X \varphi)(Y))\end{aligned}$$

eşitliği de sağlanır. Bunlara ek olarak, bu adımda çalışmanın sonrasında kullanılacak olan

$$(\nabla_X \Phi)(Y,\varphi(Z)) - (\nabla_X \Phi)(\varphi(Y),Z) = \eta(Y)(\nabla_X \eta)(Z) + \eta(Z)(\nabla_X \eta)(Y), \tag{2.11}$$

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z) - (\nabla_X \Phi)(\varphi(Y),\varphi(Z)) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi(Y) - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi(Z), \tag{2.12}$$

$$(\nabla_X \eta)\, Y = (\nabla_X \Phi)\,(\xi,\varphi(Y)), \tag{2.13}$$

$$(\nabla_X \eta)\,\varphi(Y) = (\nabla_X \Phi)\,(Y, \xi), \tag{2.14}$$

eşitlikleri ispatlanacaktır:

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X\Phi)(Y,\varphi(Z)) \\
&-(\nabla_X\Phi)(\varphi(Y),Z) = g(Y,(\nabla_X\varphi)(\varphi(Z))) - g(\varphi(Y),(\nabla_X\varphi)(Z)) \\
&= g(Y,\nabla_X\varphi^2(Z)) - g(Y,\varphi((\nabla_X\varphi)(Z))) \\
&\quad -g(\varphi(Y),\nabla_X\varphi(Z)) + g(\varphi(Y),\varphi(\nabla_X Z)) \\
&= g(Y,\nabla_X(-Z+\eta(Z)\xi)) + g(Y,\nabla_X Z) \\
&\quad -\eta(Y)\eta(\nabla_X Z) \\
&= X[\eta(Z)]\eta(Y) + \eta(Z)g(Y,\nabla_X\xi) - \eta(Y)\eta(\nabla_X Z) \\
&= \eta(Y)g(\nabla_X\xi,Z) + \eta(Z)g(Y,\nabla_X\xi) \\
&= \eta(Y)(\nabla_X\eta)(Z) + \eta(Z)(\nabla_X\eta)(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X\Phi)(Y,Z) \\
&+(\nabla_X\Phi)(\varphi(Y),\varphi(Z)) \\
&= g(Y,(\nabla_X\varphi)(Z)) + g(\varphi(Y),(\nabla_X\varphi)(\varphi(Z))) \\
&= g(Y,\nabla_X\varphi(Z)) - g(Y,\varphi(\nabla_X Z)) \\
&\quad +g(\varphi(Y),\nabla_X\varphi^2(Z)) - g(\varphi(Y),\varphi(\nabla_X\varphi(Z))) \\
&= g(Y,\nabla_X\varphi(Z)) - g(Y,\varphi(\nabla_X Z)) + g(Y,\varphi(\nabla_X Z)) \\
&\quad +g(\varphi(Y),\nabla_X\eta(Z)\xi) - g(Y,\nabla_X\varphi(Z)) \\
&\quad +\eta(Y)\eta(\nabla_X\varphi(Z)) \\
&= g(\varphi(Y),X[\eta(Z)]\xi) + g(\varphi(Y),\eta(Z)\nabla_X\xi) \\
&\quad +\eta(Y)\eta(\nabla_X\varphi(Z)) \\
&= \eta(Z)g(\varphi(Y),\nabla_X\xi) + \eta(Y)\eta(\nabla_X\varphi(Z)) \\
&= \eta(Z)(\nabla_X\eta)(\varphi(Y)) - \eta(Y)(\nabla_X\eta)(\varphi(Z))
\end{aligned}$$

Özel olarak (2.11) ve (2.12) eşitliklerinde $Z = \xi$ alındığında (2.13) ve (2.14) eşitlikleri elde edilir.

η 1-formu ve Φ 2-formunun **dış türevleri** aşağıdaki şekildedir [8].

$$2d\eta(X,Y) = (\nabla_X\eta)Y - (\nabla_Y\eta)X,$$

$$3d\Phi(X,Y,Z)=(\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_Y\Phi)(Z,X)+(\nabla_Z\Phi)(X,Y).$$

M nin bir açık alt kümesi üzerinde lokal bir ortanormal taban

$$\{E_1,E_2,\cdots,E_n,\varphi(E_1),\varphi(E_2)\cdots,\varphi(E_n),\xi\}$$

olarak alınabilir [9]. Bu tabana göre η 1-formu ve Φ 2-formunu **kotürevleri** şu şekildedir:

$$\delta\eta=-\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{E_i}\eta)(E_i)+(\nabla_{\varphi(E_i)}\eta)(\varphi(E_i))\right\},$$

$$\delta\Phi(X)=-\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{E_i}\Phi)(E_i,X)+(\nabla_{\varphi(E_i)}\Phi)(\varphi(E_i),X))\right\}-(\nabla_\xi\Phi)(\xi,X).$$

M hemen hemen kontak metrik manifold kullanılarak $M\times\mathbb{R}$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı oluşturulabilir. $M\times\mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki herhangi bir vektör alanı [10]

$$\left(X,a\frac{d}{dt}\right)\in\chi\left(M\times\mathbb{R}\right),\quad a:M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad X\in\chi(M)$$

olarak alındığında $M\times\mathbb{R}$ üzerinde

$$J\left(X,a\frac{d}{dt}\right)=\left(\varphi(X)-a\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}\right)\tag{2.15}$$

olarak tanımlanan dönüşüm bir **hemen hemen kompleks yapıdır** [1]. $J^2=-I$ olduğu şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned}J^2\left(X,a\tfrac{d}{dt}\right)&=J\left(\varphi(X)-a\xi,\eta(X)\tfrac{d}{dt}\right)\\&=\left(\varphi\left(\varphi(X)-a\xi\right)-\eta(X)\xi,\eta\left(\varphi(X)-a\xi\right)\tfrac{d}{dt}\right)\\&=\left(\varphi^2(X)-\eta(X)\xi,-a\tfrac{d}{dt}\right)\\&=-\left(X,a\tfrac{d}{dt}\right)\end{aligned}$$

$M\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde **Riemann metrik**

$$h\left(\left(X,a\frac{d}{dt}\right),\left(Y,b\frac{d}{dt}\right)\right):=g(X,Y)+ab$$

olarak tanımlanır. Bu metrik

$$\begin{aligned}h\left(J\left(X,a\tfrac{d}{dt}\right),J\left(Y,b\tfrac{d}{dt}\right)\right)&=h\left(\left(\varphi(X)-a\xi,\eta(X)\tfrac{d}{dt}\right),\left(\varphi(Y)-b\xi,\eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right)\right)\\&=g\left(\varphi(X)-a\xi,\varphi(Y)-b\xi\right)+\eta(X)\eta(Y)\\&=\underbrace{g\left(\varphi(X),\varphi(Y)\right)+\eta(X)\eta(Y)}_{=g(X,Y)}+ab\\&=g(X,Y)+ab\\&=h\left(\left(X,a\tfrac{d}{dt}\right),\left(Y,b\tfrac{d}{dt}\right)\right)\end{aligned}$$

özelliğini sağlar. $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ hemen hemen Hermityen manifoldu üzerinde **Kaehler form** şu şekilde tanımlıdır:

$$F\left(\left(X, a\frac{d}{dt}\right), \left(Y, b\frac{d}{dt}\right)\right) := h\left(\left(X, a\frac{d}{dt}\right), J\left(Y, b\frac{d}{dt}\right)\right)$$

$M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki F 2-formu, M almost kontak metrik manifoldunun öğeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
F\left(\left(X, a\tfrac{d}{dt}\right), \left(Y, b\tfrac{d}{dt}\right)\right) &= h\left(\left(X, a\tfrac{d}{dt}\right), J\left(Y, b\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\
&= h\left(\left(X, a\tfrac{d}{dt}\right), \left(\varphi(Y) - b\xi, \eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\
&= g\left(X, \varphi(Y) - b\xi\right) + a\eta(Y) \\
&= g\left(X, \varphi(Y)\right) - bg\left(X, \xi\right) + a\eta(Y) \\
&= \Phi(X, Y) - b\eta(X) + a\eta(Y)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki h metriğinin Levi-civita kovaryant türevi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.3. *Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları ve $a, b \in C^{\infty}(M \times \mathbb{R})$ fonksiyonları için $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki h metriğinin Levi-Civita kovaryant türevi aşağıdaki şekildedir:*

$$\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})}(Y, b\frac{d}{dt}) = \left(\nabla_X Y, \left(X[b] + a\frac{db}{dt}\right)\frac{d}{dt}\right). \tag{2.16}$$

Kanıt. Çarpım manifoldları üzerindeki Lie braket

$$\left[(X, a\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt})\right] = \left([X, Y], \{X[b] - Y[a] + a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt}\}\frac{d}{dt}\right)$$

şeklindedir [1]. Kozsul formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
2h\left(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})}(Y, b\tfrac{d}{dt}), (Z, c\tfrac{d}{dt})\right) &= (X, a\tfrac{d}{dt})\left[h\left((Y, b\tfrac{d}{dt}), (Z, c\tfrac{d}{dt})\right)\right] \\
&\quad + (Y, b\tfrac{d}{dt})\left[h\left((X, a\tfrac{d}{dt}), (Z, c\tfrac{d}{dt})\right)\right] \\
&\quad - (Z, c\tfrac{d}{dt})\left[h\left((X, a\tfrac{d}{dt}), (Y, b\tfrac{d}{dt})\right)\right] \\
&\quad + h\left(\left[(X, a\tfrac{d}{dt}), (Y, b\tfrac{d}{dt})\right], (Z, c\tfrac{d}{dt})\right) \\
&\quad + h\left(\left[(Z, c\tfrac{d}{dt}), (X, a\tfrac{d}{dt})\right], (Y, b\tfrac{d}{dt})\right) \\
&\quad + h\left(\left[(Z, c\tfrac{d}{dt}), (Y, b\tfrac{d}{dt})\right], (X, a\tfrac{d}{dt})\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (X, a\tfrac{d}{dt})\,[g(Y,Z)+bc] \\
&\quad +(Y, b\tfrac{d}{dt})\,[g(X,Z)+ac] \\
&\quad -(Z, c\tfrac{d}{dt})\,[g(X,Y)+ab] \\
&\quad +g([X,Y],Z) \\
&\quad +c\left(X[b]-Y[a]+a\tfrac{db}{dt}-b\tfrac{da}{dt}\right) \\
&\quad +g([Z,X],Y) \\
&\quad +b\left(Z[a]-X[c]+c\tfrac{da}{dt}-a\tfrac{dc}{dt}\right) \\
&\quad +g([Z,Y],X) \\
&\quad +a\left(Z[b]-Y[c]+c\tfrac{db}{dt}-b\tfrac{dc}{dt}\right) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z)+2cX[b]+2ac\tfrac{db}{dt} \\
&= 2h\left(\left(\nabla_X Y, (X[b]+a\tfrac{db}{dt})\tfrac{d}{dt}\right), (Z, c\tfrac{d}{dt})\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğinden

$$
\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}(Y, b\frac{d}{dt}) = \left(\nabla_X Y, (X[b]+a\frac{db}{dt})\frac{d}{dt}\right) \tag{2.17}
$$

elde edilir. □

$M\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki J kompleks yapının kovaryant türevi hesaplandığında

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}J\right)(Y, b\tfrac{d}{dt}) &= \nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}J(Y, b\tfrac{d}{dt}) - J\left(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}(Y, b\tfrac{d}{dt})\right) \\
&= \nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}\left(\varphi(Y)-b\xi, \eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&\quad -J\left(\nabla_X Y, \left(X[b]+a\tfrac{db}{dt}\right)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}\left(\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right) - \nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}(b\xi, 0) \\
&\quad -\left(\varphi(\nabla_X Y)-\{X[b]+a\tfrac{db}{dt}\}\xi, \eta(\nabla_X Y)\tfrac{d}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\nabla_X\varphi(Y), X[\eta(Y)]\tfrac{d}{dt}\right) \\
&\quad -\left(X[b]\xi+b\nabla_X\xi+a\tfrac{db}{dt}\xi, 0\right) \\
&\quad -\left(\varphi\left(\nabla_X Y\right)-(X[b]+a\tfrac{db}{dt})\xi, \eta(\nabla_X Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \left((\nabla_X\varphi)(Y)-b\nabla_X\xi, (\nabla_X\eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Her $X, Y\in\chi(M)$ ve $a, b\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ için F Kaehler 2-formun kovaryant türevi aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F)((Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt})) &= (X,a\tfrac{d}{dt})[F((Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt}))] \\
&\quad -F(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}(Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt})) \\
&\quad -F((Y,b\tfrac{d}{dt}),\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}(Z,c\tfrac{d}{dt})) \\
&= (X,a\tfrac{d}{dt})[\Phi(Y,Z)-c\eta(Y)+b\eta(Z)] \\
&\quad -F\left((\nabla_X Y,(X[b]+a\tfrac{db}{dt})\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt})\right) \\
&\quad -F\left((Y,b\tfrac{d}{dt}),(\nabla_X Z,(X[c]+a\tfrac{dc}{dt})\tfrac{d}{dt})\right) \\
&= X[\Phi(Y,Z)]-X[c]\eta(Y)-cX[\eta(Y)] \\
&\quad -a\tfrac{dc}{dt}\eta(Y)+X[b]\eta(Z)+bX[\eta(Z)] \\
&\quad +a\tfrac{db}{dt}\eta(Z) \\
&\quad -\Phi\left(\nabla_X Y,Z\right)+c\eta(\nabla_X Y) \\
&\quad -\left(X[b]+a\tfrac{db}{dt}\right)\eta(Z) \\
&\quad -\Phi\left(Y,\nabla_X Z\right)-\left(X[c]+a\tfrac{dc}{dt}\right)\eta(Y) \\
&\quad -b\eta(\nabla_X Z) \\
&= (\nabla_X\Phi)(Y,Z)-c(\nabla_X\eta)(Y)+b(\nabla_X\eta)(Z))
\end{aligned}$$

bulunur. F Kaehler 2-formun türevi ise aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 2.4. *Her $X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $a,b,c\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ için aşağıdaki özellik sağlanır.*

$$\begin{aligned}
3dF\left((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}),(C,z\frac{d}{dt})\right) &= 3d\Phi(X,Y,Z) \qquad (2.18)\\
&\quad -2\left\{cd\eta(X,Y)+ad\eta(Y,Z)+bd\eta(Z,X)\right\}
\end{aligned}$$

Kanıt. Yukarıda ispatlanan özellikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
3dF\left((X,a\tfrac{d}{dt}),(Y,b\tfrac{d}{dt}),(C,z\tfrac{d}{dt})\right) &= (\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F)((Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt})) \\
&\quad +(\nabla_{(Y,b\frac{d}{dt})}F)((Z,c\tfrac{d}{dt}),(X,a\tfrac{d}{dt})) \\
&\quad +(\nabla_{(Z,c\frac{d}{dt})}F)((X,a\tfrac{d}{dt}),(Y,b\tfrac{d}{dt})) \\
&= (\nabla_X\Phi)(Y,Z)-c(\nabla_X\eta)(Y) \\
&\quad +b(\nabla_X\eta)(Z))+(\nabla_Y\Phi)(Z,X) \\
&\quad -a(\nabla_Y\eta)(Z)+c(\nabla_Y\eta)(X)) \\
&\quad +(\nabla_Z\Phi)(X,Y)-b(\nabla_Z\eta)(X) \\
&\quad +a(\nabla_Z\eta)(Y))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3d\Phi(X,Y,Z) - c\left[(\nabla_X\eta)(Y) - (\nabla_Y\eta)(X)\right] \\
&\quad -a\left[(\nabla_Y\eta)(Z) - (\nabla_Z\eta)(Y)\right] \\
&\quad -b\left[(\nabla_X\eta)(Z) - (\nabla_Z\eta)(X)\right] \\
&= 3d\Phi(X,Y,Z) - 2\left[cd\eta(X,Y)\right. \\
&\quad \left.+ad\eta(Y,Z) + bd\eta(Z,X)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.5. *$M\times\mathbb{R}$ manifoldu üzerinde h metriğinin kotürevi $\bar{\delta}$ ile gösterildiğinde, her $X\in\chi(M)$ ve $a\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ için*

$$
\bar{\delta}F\left(X, a\frac{d}{dt}\right) = \delta\Phi(X) - a\delta\eta \tag{2.19}
$$

olur.

Kanıt. M manifoldunun açık bir U altkümesi üzerinde lokal ortanormal taban $\{E_1,...E_n,\varphi(E_1),...\varphi(E_n),\xi\}$ olsun. Bu taban kullanıldığında $M\times\mathbb{R}$ nin $U\times\mathbb{R}$ açık alt kümesi üzerinde h metriğine göre

$$
\left\{(E_1,0),...(E_n,0),(\varphi(E_1),0),...(\varphi(E_n),0),(\xi,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right\}
$$

ortanormal bir taban olur. Bu tabana göre F Kaehler 2- formunun kotürevi

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}F(X,a\tfrac{d}{dt}) &= -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{(E_i,0)}F)\left((E_i,0),(X,a\frac{d}{dt})\right) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{(\varphi(E_i),0)}F)\left((\varphi(E_i),0),(X,a\frac{d}{dt}))\right) \\
&\quad -(\nabla_{(\xi,0)}F)((\xi,0),(X,a\frac{d}{dt})) - (\nabla_{(0,\frac{d}{dt})}F)((0,\frac{d}{dt}),(X,a\frac{d}{dt})) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\{(\nabla_{E_i}\Phi)(E_i,X) - a(\nabla_{E_i}\eta)(E_i)\} \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{\varphi(E_i)}\Phi)(\varphi(E_i),X) - a(\nabla_{\varphi(E_i)}\eta)(\varphi(E_i))\right\} \\
&\quad -(\nabla_\xi\Phi)(\xi,X) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{E_i}\Phi)(E_i,X) + (\nabla_{\varphi(E_i)}\Phi)(\varphi(E_i),X) + (\nabla_\xi\Phi)(\xi,X)\right\} \\
&\quad -a\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{E_i}\eta)(E_i) + (\nabla_{\varphi(E_i)}\eta)\varphi(E_i)\right\} \\
&= \delta\Phi(X) - a\delta\eta
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $\square$

3 NORMAL HEMEN HEMEN KONTAK METRİK MANİFOLDLAR

$M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki J hemen hemen kopmleks yapı kullanılarak M manifoldu üzerindeki (φ, η, ξ) hemen hemen kontakt yapı için çeşitli tanımlar verilir [1,6]:

Tanım 3.1. *J kompleks yapısı Hermit yapı ise hemen hemen kontak yapıya **normaldir** denir.*

Tanım 3.2. *$\nabla\Phi = 0$ ise hemen hemen kontak yapıya **kosimplektik** denir.*

Tanım 3.3. *Her X, Y vektör alanı için*

$$(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) = 0$$

*ise hemen hemen kontak yapıya **nearly-kosimplektik** denir.*

Tanım 3.4.

$$(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) = 2g(X,Y) - \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

*eşitliği sağlanıyorsa hemen hemen kontak yapıya **nearly-Sasaki yapı** denir.*

Tanım 3.5. *M hemen hemen kontak manifold normal ve $d\Phi = 0$ ise bu yapıya **quasi-Sasaki yapı** denir.*

Tanım 3.6. *M manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı $\Phi = d\eta$ koşulunu sağlıyorsa bu yapıya **kontak metrik yapı** denir.*

Bu adımda $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki kompleks yapının integrallenebilir olması kullanılarak M hemen hemen kontak metrik manifoldun normal olması tanımlanacak ve bu bölümde normal hemen hemen kontak metrik yapılar incelenecektir.

$M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki J kompleks yapısı

$$\left(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})} J\right)\left((Y, b\frac{d}{dt})\right) - \left(\nabla_{J(X, a\frac{d}{dt})} J\right)\left(J(Y, b\frac{d}{dt})\right) = 0 \tag{3.20}$$

koşulunu sağlıyorsa J kompleks yapısına **Hermit yapı (integrallenebilir)** denir.

Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için φ endomorfizminin **Nijenhuis tensörü** $[\varphi, \varphi]$ şu şekilde tanımlıdır:

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2([X, Y]) + \varphi([\varphi(X), \varphi(Y)]) - \varphi([\varphi(X), Y]) - \varphi([X, \varphi(Y)]).$$

Bir hemen hemen Hermit manifoldun integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul J endomorfizminin Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır. Bu denklik aşağıdaki teoremde ispatlanmıştır.

Teorem 3.7. *(N, J, g) bir hemen hemen Hermit maifold olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

- *Her X, Y vektör alanı için*

$$(\nabla_X J) Y - \left(\nabla_{J(X)} J\right) J(Y) = 0 \tag{3.21}$$

  eşitliği sağlanır.

- *Her X, Y vektör alanı için*

$$[J, J](X, Y) = 0 \tag{3.22}$$

  olur.

Kanıt. (3.21) eşitliği sağlansın. Bu eşitliğe J dönüşümü uygulandığında

$$\nabla_X Y + J(\nabla_X J(Y)) + J\left(\nabla_{J(X)} Y\right) - \nabla_{J(X)} J(Y) = 0$$

elde edilir. Eşitlikte X ve Y vektör alanlarının rolleri değiştirilip farkları alındığında

$$\begin{aligned} &\nabla_Y X - \nabla_X Y - J(\nabla_X J(Y)) + J\left(\nabla_{J(y)} X\right) \\ &-J\left(\nabla_{J(X)} Y\right) + J(\nabla_Y J(X)) + \nabla_{J(X)} J(Y) - \nabla_{J(Y)} J(X) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$-[X, Y] - J([X, J(Y)]) - J([J(X), Y]) + [J(X), J(Y)] = 0$$

elde edilir. $J^2 = -I$ olduğundan

$$[J, J](X, Y) = 0$$

bulunur. Tersine $[J, J](X, Y) = 0$ olsun. Bu eşitlik kullanılarak

$$A(X, Y, Z) := g(\nabla_X Y + J(\nabla_X J(Y)) + J\left(\nabla_{J(X)} Y\right) - \nabla_{J(X)} J(Y), Z)$$

dönüşümü tanımlandığında J dönüşümünün Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır olduğundan

$$A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z)$$

olur. J endomorfizmi $g(J(X),J(Y)) = g(X,Y)$ ve $g(J(X),Y) = -g(X,J(Y))$ eşitliklerini sağladığından

$$\begin{aligned} A(X,Y,Z)+A(X,Z,Y) &= g(\nabla_X Y + J(\nabla_X J(Y)) \\ &\quad +J\left(\nabla_{J(X)}Y\right) - \nabla_{J(X)}J(Y), Z) \\ &\quad g(\nabla_X Z + J(\nabla_X J(Z)) + \\ &\quad J\left(\nabla_{J(X)}Z\right) - \nabla_{J(X)}J(Z), Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, y) \\ &\quad -g(\nabla_X J(Y), J(Z)) - g(\nabla_X J(Z), J(Y)) \\ &\quad -g\left(\nabla_{J(X)}Y, J(Z)\right) - g\left(\nabla_{J(X)}Z, J(Y)\right) \\ &\quad -g\left(\nabla_{J(X)}J(Y), Z\right) - g\left(\nabla_{J(X)}J(Z), Y\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu özellikler kullanıldığında

$$\begin{aligned} A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z) &= -A(Y,Z,X) = -A(Z,Y,X) \\ &= A(Z,X,Y) = A(X,Z,Y) = -A(X,Y,Z) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$A(X,Y,Z) = 0$$

elde edilir. g metriğinin non-dejenere olmasından

$$\nabla_X Y + J(\nabla_X J(Y)) + J\left(\nabla_{J(X)}Y\right) - \nabla_{J(X)}J(Y) = 0$$

eşitliği ve bu eşitliği J endomorfizmi uygulandığında (3.21) eşitliği elde edilir. $\square$

Teorem 3.8. *Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M manifoldu üzerindeki (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı normaldir.*

2. *$M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki yapı bir Hermit yapıdır.*

3. *M manifoldunda*

$$[\varphi,\varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0 \tag{3.23}$$

sağlanır.

4. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)(Y) - (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0 \tag{3.24}$$

eşitliği sağlanır.

5. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y), Z) - \eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z) = 0$$

Kanıt. Bir M manifoldu üzerindeki hemen hemen kontak yapının normal olması $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki hemen hemen Hermit yapının Hermit yapı olması olarak tanımlandığından teoremdeki 1. ve 2. ifadelerinin denkliği açıktır.

Bu adımda 2. ve 4. ifadelerinin denkliği ispat edilecektir: $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ yapısı bir Hermit yapı olsun. Bu durumda J hemen hemen kompleks yapı (3.20) eşitliğini sağlar. Bu eşitlik her $a, b \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ fonksiyonu için sağlanacağından $a = b = 0$ alındığında

$$\begin{aligned}
\left(0, 0\tfrac{d}{dt}\right) &= \left(\nabla_{(X,0)}J\right)((Y,0)) - \left(\nabla_{J(X,0)}J\right)(J(Y,0)) \\
&= \left((\nabla_X\varphi)(Y), (\nabla_X\eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\right) - \left(\nabla_{(\varphi(X),\eta(X)\frac{d}{dt})}J\right)\left(\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \left((\nabla_X\varphi)(Y), (\nabla_X\eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&\quad - \left((\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)) - \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi, (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(\varphi(Y))\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\left((\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi\right),\right. \\
&\quad \left.\left((\nabla_X\eta)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi\right)\tfrac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten

$$(\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0$$

ve

$$(\nabla_X\eta)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0$$

bulunur.

Tersine (3.24) eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. Bu eşitlikte $X = \xi$ alındığında $\nabla_\xi\varphi = 0$ bulunur. Böylece

$$0 = (\nabla_\xi\varphi)(\xi) = -\varphi(\nabla_\xi\xi)$$

eşitliğinden $\nabla_\xi \xi = 0$ elde edilir. Herhangi bir Y vektör alanı için $(\nabla_\xi \varphi)(Y) = 0$ sağlandığından $\nabla_\xi \varphi(Y) = \varphi(\nabla_\xi Y)$ olur. Bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \eta)(\varphi(Y)) &= \xi[\eta(\varphi(Y))] - \eta(\nabla_\xi \varphi(Y)) \\ &= -g(\xi, \nabla_\xi \varphi(Y)) \\ &= -g(\xi, \varphi(\nabla_\xi Y)) = 0\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (3.24) eşitliğinde $Y = \xi$ alındığında

$$(\nabla_X \varphi)(\xi) + \nabla_{\varphi(X)} \xi = 0 \tag{3.25}$$

ve bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\nabla_X \xi = \left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right) \xi$$

bulunur. (3.24) eşitliğinin ξ ile çarpımı alındığında

$$0 = g\left((\nabla_X \varphi)(Y) - (\nabla_{\varphi(X)} \varphi)(\varphi(Y)) + \eta(Y) \nabla_{\varphi(X)} \xi, \xi\right),$$

$$0 = g\left((\nabla_X \varphi)(Y), \xi\right) - g\left(\nabla_{\varphi(X)} \xi, Y\right) \tag{3.26}$$

elde edilir. Ayrıca (3.24) ve (3.26) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\varphi(X)} \eta\right) \varphi(Y) &= g\left(\nabla_{\varphi(X)} \xi, \varphi(Y)\right) \\ &= -g\left((\nabla_X \varphi)(\xi), \varphi(Y)\right) \\ &= g\left(\varphi(\nabla_X \xi) \varphi(Y)\right) = g(\nabla_X \xi, Y) = (\nabla_X \eta)(Y)\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikler göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{J(X, a\frac{d}{dt})} J\right)\left(J(Y, b\tfrac{d}{dt})\right) &= \left(\nabla_{((\varphi(X) - a\xi), \eta(X)\frac{d}{dt})} J\right)\left((\varphi(Y) - b\xi), \eta(Y)\tfrac{d}{dt})\right) \\ &= \big[(\nabla_{\varphi(X) - a\xi} \varphi)(\varphi(Y) - b\xi) - \eta(Y) \nabla_{(\varphi(X) - a\xi)} \xi, \\ &\quad (\nabla_{\varphi(X) - a\xi} \eta)(\varphi(Y) - b\xi)\tfrac{d}{dt}\big] \\ &= \big[\left\{(\nabla_{\varphi(X)} \varphi)\varphi(Y) - \eta(Y) \nabla_{\varphi(X)} \xi\right\} \\ &\quad + b\, \varphi\left(\nabla_{\varphi(X)} \xi\right) - a\left(\nabla_\xi \varphi\right) \varphi(Y), \left(\nabla_{\varphi(X)} \eta\right) \varphi(Y)\big] \\ &= \left((\nabla_X \varphi)(Y) - b \nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(Y) \tfrac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})} J\right)\left((Y, b\tfrac{d}{dt})\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.24) eşitliği sağlandığında (3.20) eşitliği sağlanmış olur.

(3.24) eşitliğinin herhangi bir Z vektör alanı ile çarpımı alındığında

$$
\begin{aligned}
0 &= g\big((\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi, Z\big) \\
&= g\big((\nabla_X\varphi)(Y), Z) - g((\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)), Z) + \eta(Y)g(\nabla_{\varphi(X)}\xi, Z\big) \\
&= -(\nabla_X\Phi)(Y,Z) + (\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z) + \eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece 4. ve 5. ifadelerinin denk oldukları görülür.

Son olarak 2. ve 3. ifadelerinin denk oldukları görülecektir: $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki yapı bir Hermit yapı ise her $\big(X, a\frac{d}{dt}\big)$ ve $\big(Y, b\frac{d}{dt}\big)$ vektör alanları için

$$
[J,J]\left(\left(X, a\frac{d}{dt}\right), \left(Y, b\frac{d}{dt}\right)\right) = 0 \tag{3.27}
$$

olur. Özel olarak $(X,0)$ ve $(Y,0)$ vektör alanları alındığında

$$
[J,J]\left((X,0),(Y,0)\right) = 0
$$

eşitliği hesaplandığında

$$
\begin{aligned}
(0,0) &= [J,J]\left((X,0),(Y,0)\right) \\
&= J^2([(X,0),(Y,0)]) + [J(X,0), J(Y,0)] \\
&\quad -J([J(X,0),(Y,0)]) - J[(X,0), J(Y,0)] \\
&= -([X,Y],0) + [(\varphi(X), \eta(X)\tfrac{d}{dt}), (\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt})] \\
&\quad -J([(\varphi(X), \eta(X)\tfrac{d}{dt}), (Y,0)]) - J([(X,0), (\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt})]) \\
&= -([X,Y],0) + \big([\varphi(X), \varphi(Y)], (\varphi(X)[\eta(Y)] - \varphi(Y)[\eta(X)])\tfrac{d}{dt}\big) \\
&\quad - \big(\varphi\left([\varphi(X), Y]\right) + Y[\eta(X)]\xi, \eta([\varphi(X), Y])\tfrac{d}{dt}\big) \\
&\quad - \big(\varphi\left([X, \varphi(Y)]\right) - X[\eta(Y)]\xi, \eta([X, \varphi(Y)])\tfrac{d}{dt}\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(-[X,Y] + [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi\left([\varphi(X), Y]\right) - \varphi\left([X, \varphi(Y)]\right) \\
&\quad -Y[\eta(X)]\xi + X[\eta(Y)]\xi, \\
&\quad \left[\left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)(Y) - \left(\nabla_{\varphi(Y)}\eta\right)(X) - (\nabla_Y\eta)(\varphi(X)) + (\nabla_X\eta)(\varphi(Y))\right]\tfrac{d}{dt}\big) \\
&= \left([\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, 2d\eta(\varphi(X),Y) + 2d\eta(X,\varphi(Y))\right),
\end{aligned}
$$

(3.23) eşitliği elde edilir.

Tersine (3.23) eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. (3.23) eşitliğinde $Y = \xi$ alındığında

$$
-[X,\xi] - g(\nabla_\xi X, \xi)\xi - \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\xi) + \varphi(\nabla_\xi\varphi(X)) - g(\nabla_\xi\xi, X)\xi = 0 \tag{3.28}
$$

elde edilir. (3.23) eşitliğinden

$$0 = g\left(-[X,\xi] - g(\nabla_\xi X,\xi)\xi - \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\xi) + \varphi(\nabla_\xi \varphi(X)) - g(\nabla_\xi \xi, X)\xi, \xi\right)$$

ve bu eşitlikten

$$\nabla_\xi \xi = 0 \tag{3.29}$$

bulunur. (3.28) eşitliğine φ dönüşümü uygulandığında

$$-\varphi([X,\xi]) + [\varphi(X),\xi] = 0 \tag{3.30}$$

olur. Ayrıca $\nabla_\xi \xi = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} d\eta(\xi,\varphi(X)) &= (\nabla_\xi \eta)(\varphi(X)) - \left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)(\xi) \\ &= \xi[\eta(\varphi(X))] - \eta(\nabla_\xi \varphi(X)) \\ &\quad -\varphi(X)[\eta(\xi)] + \eta(\nabla_{\varphi(X)}\xi) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

ve

$$\xi[\eta(X)] - \eta([\xi,X]) = 0 \tag{3.32}$$

bulunur. (3.23) eşitliğinde $X = \varphi(X)$ alındığında ve η 1-formu uygulandığında

$$0 = g([\varphi,\varphi](\varphi(X),Y),\xi) + 2d\eta(\varphi(X),Y)$$

olur. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$2d\eta(\varphi(X),Y) = -g(\nabla_X \xi, \varphi(Y)) + g(\nabla_{\varphi(Y)}\xi, X) = -2d\eta(X,\varphi(Y)) \tag{3.33}$$

bulunur. Bir önceki adımdan, (3.23) ve (3.33) eşitliklerinden ise

$$\begin{aligned} & [J,J]\left((X,0),(Y,0)\right) \\ = \; & ([\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, 2d\eta(\varphi(X),Y) + 2d\eta(X,\varphi(Y))) \\ = \; & (0,0) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.30) ve (3.32) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & [J,J]\left((X,0),\left(0,\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\ = \; & -[(X,0),(0,\tfrac{d}{dt})] + \left[\left(\varphi(X),\eta(X)\tfrac{d}{dt}\right),(-\xi,0)\right] \\ & -J\left(\left[\left(\varphi(X),\eta(X)\tfrac{d}{dt}\right),(0,\tfrac{d}{dt})\right]\right) + J([(X,0),(\xi,0)]) \\ = \; & \left([\xi,\varphi(X)] - \varphi([X,\xi]), \{\xi[\eta(X)] - \eta([\xi,X])\}\tfrac{d}{dt}\right) \\ = \; & (0,0) \end{aligned}$$

olur. Tüm bu eşitlikler uygulandığında ve $[J,J]\left(\left(0,\frac{d}{dt}\right),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& [J,J]\left(\left(X,a\tfrac{d}{dt}\right),\left(Y,b\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\
= \; & [J,J]\left((X,0),(Y,0)\right)+b[J,J]\left((X,0),\left(0,\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\
& -a[J,J]\left((Y,0),\left(0,\tfrac{d}{dt}\right)\right)+ab[J,J]\left(\left(0,\tfrac{d}{dt}\right),\left(0,\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\
= \; & (0,0)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

4 HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ hemen hemen Hermit manifoldu W_2 sınınfından ($dF = 0$) ise $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifolduna **hemen hemen Kaehler manifold** denir. Çarpım manifoldunun hemen hemen Kahler manifoldu olması kullanılarak M manifoldunun hemen hemen kosimplektik olması tanımlanabilir.

Tanım 4.1. *Eğer* $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ *hemen hemen Hermit manifoldu* W_2 *sınıfından* ($dF = 0$) *ise* $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ *manifolduna* ***hemen hemen kosimplektik manifold*** *denir.*

Teorem 4.2. $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ *manifoldunun hemen hemen-kosimplektik manifoldu olması için gerek ve yeter koşul*

$$d\Phi = 0 \text{ ve } d\eta = 0$$

olmasıdır.

Kanıt. $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu hemen hemen-Kaehler manifoldu ise her $(X, a\frac{d}{dt})$, $(Y, b\frac{d}{dt})$, $(Z, c\frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \mathbb{R})$ vektör alanları için

$$dF\left((X, a\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt}), (Z, c\frac{d}{dt})\right) = 0$$

olur. Özel olarak $a = b = c = 0$ alınırsa ve (2.18) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 3dF\left((X,0),(Y,0),(Z,0)\right) \\ &= 3d\Phi(X,Y,Z) + 2\left\{0d\eta(Y,Z) + 0d\eta(Z,X) + 0d\eta(X,Y)\right\} = d\Phi(X,Y,Z) \end{aligned}$$

elde edilir. $a = 1, b = c = 0$ seçilirse

$$\begin{aligned} 0 &= 3dF\left((X, \frac{d}{dt}), (Y,0), (Z,0)\right) \\ &= 3\underbrace{d\Phi(X,Y,Z)}_{=0} + 2d\eta(Y,Z) = d\eta(Y,Z) \end{aligned}$$

bulunur. Tersine $d\Phi = 0$ ve $d\eta = 0$ ise (2.18) eşitliğinden $dF = 0$ olduğu hemen görülür. □

$M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki J hemen hemen kompleks yapının kovaryant türevi

$$\left(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})} J\right)(Y, b\frac{d}{dt}) = 0 \tag{4.34}$$

ise $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifolduna **Kaehler manifold** denir. Bu sınıf ve kosimplektik manifoldlar arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 4.3. *Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapı kosimplektiktir.*

2. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ Kaehler manifoldudur.*

3. *Her $X \in \chi(M)$ için $\nabla_X \varphi = 0$ dır.*

Kanıt. M manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapı kosimplektik ise her X, Y ve Z vektör alanları için

$$0 = (\nabla_X \Phi)(Y, Z) = -g\left((\nabla_X \varphi)(Y), Z\right)$$

olduğundan ve g metriği non-dejenereliğinden $(\nabla_X \varphi)(Y) = 0$ olur. Böylece 1. ve 3. ifadelerin denkliği görülür. Diğer taraftan,

$$0 = \left(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})} J\right)(Y, b\frac{d}{dt}) = \left((\nabla_X \varphi)(Y) - b\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(Y)\frac{d}{dt}\right)$$

ifadesinde $a = b = 0$ alındığında $\nabla_X \varphi = 0$ elde edilir.

Terisne $\nabla_X \varphi = 0$ ise $(\nabla_X \varphi)(\xi) = 0$ olacağından $\nabla_X \xi = 0$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})} J\right)(Y, b\frac{d}{dt}) &= \left((\nabla_X \varphi)(Y) - b\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(Y)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left((\nabla_X \varphi)(Y) - b\nabla_X \xi, g(\nabla_X \xi, Y)\frac{d}{dt}\right) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

olduğundan $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu Kaehler manifoldudur. □

Eğer $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki J hemen hemen Hermit yapı

$$(\nabla_{(X, a\frac{d}{dt})} J)(Y, b\frac{d}{dt}) + (\nabla_{(Y, b\frac{d}{dt})} J)(X, a\frac{d}{dt}) = 0 \tag{4.35}$$

koşulunu sağlıyorsa $M \times \mathbb{R}$ manifolduna W_1 **sınıfından** ya da **nearly Kaehler manifold** denir. Bu tanım kullanılarak neraly-K-kosimplektik manifold tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 4.4. *Eğer hemen hemen Hermit* $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ *manifoldu nearly Kaehler manifold ise* $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ *manifolduna* ***nearly-K-kosimplektik manifold*** *denir.*

Teorem 4.5. $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ *manifoldunun nearly-K-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul*

$$(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) = 0 \quad \textit{ve} \quad \nabla_X \xi = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ manifoldu nearly-K-kosimplektik olsun. Nearly-K-kosimplektik manifold tanımından $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu nearly Kaehler manifoldudur. Bu durumda (4.35) eşitliği özel olarak $(X, 0)$ ve $(Y, 0)$ vektör alanları için de sağlanacağından

$$\begin{aligned} (0,0) &= (\nabla_{(X,0)} J)(Y,0) + (\nabla_{(Y,0)} J)(X,0) \\ &= \big((\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X), ((\nabla_X \eta)(Y) + (\nabla_Y \eta)(X))\tfrac{d}{dt}\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) = 0$$

ve

$$(\nabla_X \eta)(Y) + (\nabla_Y \eta)(X) = 0$$

bulunur. Böylece $(\nabla_X \eta)(Y) + (\nabla_Y \eta)(X) = 0$ eşitliğinden

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi)$$

ve bu eşitlikte $Y = \xi$ alınırsa $\nabla_\xi \xi = 0$ elde edilir. (4.35) eşitliği $\big(X, \frac{d}{dt}\big)$ ve $(Y, 0)$ vektör alanlarına uygulandığında

$$\nabla_X \xi = 0$$

bulunur. Tersine $(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) = 0$ ve $\nabla_X \xi = 0$ ise (4.35) eşitliği

$$\begin{aligned} &(\nabla_{X, a\frac{d}{dt}} J)(Y, b\tfrac{d}{dt}) \\ &+(\nabla_{Y, b\frac{d}{dt}} J)(X, a\tfrac{d}{dt}) = \big((\nabla_X \varphi)(Y) - b\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\big) \\ &\qquad + \big((\nabla_Y \varphi)(X) - a\nabla_Y \xi, (\nabla_Y \eta)(X)\tfrac{d}{dt}\big) \\ &\quad = [(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) - b\nabla_X \xi - a\nabla_Y \xi, \\ &\qquad ((\nabla_X \eta)(Y) + (\nabla_Y \eta)(X))\tfrac{d}{dt}] \\ &\quad = (0,0) \end{aligned}$$

olduğundan istenen sağlanmış olur. $\square$

Hemen hemen Hermit $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu

$$(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}J)(Y,b\frac{d}{dt}) + (\nabla_{J(X,a\frac{d}{dt})}J)(J(Y,b\frac{d}{dt})) = 0 \tag{4.36}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu manifolda $W_1 \oplus W_2$ **sınıfındandır** yada **quasi-Kaehler manifold** denir.

Tanım 4.6. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu quasi-Kaehler manifold ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna **quasi-K-kosimplektik manifold** denir.*

Teorem 4.7. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu quasi-K-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X\varphi)(Y) + (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(Y)) = \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi \tag{4.37}$$

olur.

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu quasi-K-kosimplektik ise (4.36) eşitliği her vektör alanı için sağlanacağından özel olarak $(X, 0)$ ve $(Y, 0)$ vektör alanları için de sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{(X,0)}J)(Y,0) + (\nabla_{J(X,0)}J)(J(Y,0)) \\
&= \left((\nabla_X\varphi)(Y), (\nabla_X\eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\right) + \left(\nabla_{(\varphi(X),\eta(X)\frac{d}{dt})}J\right)\left(\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \left((\nabla_X\varphi)(Y), (\nabla_X\eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&\quad + \left(\left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi(Y) - \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi, \left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)\varphi(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \left((\nabla_X\varphi)(Y) + \left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi(Y) - \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi,\right. \\
&\quad \left.\left\{(\nabla_X\eta)(Y) + \left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)\varphi(Y)\right\}\tfrac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

ve böylece (4.37) eşitliği elde edilir. Tersine (4.37) eşitliği sağlansın. (4.37) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$(\nabla_X\varphi)(\xi) = \nabla_{\varphi(X)}\xi$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)(\xi) &= -\varphi\left(\nabla_{\varphi(X)}\xi\right) \\
&= -\varphi\left((\nabla_X\varphi)(\xi)\right) \\
&= -\nabla_X\xi
\end{aligned}$$

olur. (4.37) eşitliğinde $X = Y = \xi$ alındığında

$$(\nabla_\xi\varphi)(\xi) = 0, \quad \nabla_\xi\xi = 0$$

elde edilir. Yine (4.37) eşitliğinde $X = \xi$ alındığında

$$(\nabla_\xi \varphi)(Y) = 0$$

bulunur. Bunlara ek olarak

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)\varphi(Y) &= g\left(\nabla_{\varphi(X)}\xi, \varphi(Y)\right) \\
&= g\left((\nabla_X\varphi)(\xi), \varphi(Y)\right) \\
&= -g\left(\varphi(\nabla_X\xi), \varphi(Y)\right) \\
&= -g(\nabla_X\xi, Y) = -(\nabla_X\eta)(Y)
\end{aligned}$$

olur. Yukarıda elde edilen eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}J)(Y, b\tfrac{d}{dt}) + (\nabla_{J(X,a\frac{d}{dt})}J)(J(Y, b\tfrac{d}{dt})) \\
= \; & \left((\nabla_X\varphi)(Y) - b\nabla_X\xi, (\nabla_X\eta)(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
& + \left(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi,\eta(X)\frac{d}{dt})}J\right)\left(\varphi(Y) - b\xi, \eta(Y)\tfrac{d}{dt}\right) \\
= \; & \left(\left\{(\nabla_X\varphi)(Y) + \left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi(Y) - \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi\right\}\right. \\
& \left. -a(\nabla_\xi\varphi)\varphi(Y), \left\{(\nabla_X\eta)(Y) + \left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)\varphi(Y) - a(\nabla_\xi\eta)\varphi(Y)\right\}\tfrac{d}{dt}\right) \\
= \; & (0,0)
\end{aligned}$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ hemen hemen Hermit manifoldu için $\bar{\delta}F = 0$ ise bu manifolda $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ **sınıfından** ya da **semi-Kaehler manifold** denir. Bu tanım kullanılarak aşağıda semi-kosimplektik manifold tanımı verilecektir.

Tanım 4.8. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu semi-Kaehler manifold ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna* ***semi-kosymplektik manifold*** *denir.*

Teorem 4.9. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun semi-kosimplektik olması için gerek ve yetere koşul*

$$\delta\Phi = 0, \quad \delta\eta = 0 \tag{4.38}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu semi-kosimplektik ise tanımdan $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ çarpım manifoldu semi-Kaehler manifold olur. Bu durumda her $\left(X, a\frac{d}{dt}\right)$ vektör alanı için

$$0 = \bar{\delta}\left(X, a\frac{d}{dt}\right) = \delta\Phi(X) - a\delta\eta$$

olacağından özel olarak $a = 0$ alındığında $0 = \delta(X)$ elde edilir. Diğer yandan

$$0 = \bar{\delta}\left(0, \frac{d}{dt}\right) = -\delta\eta$$

olduğundan $\delta\eta = 0$ elde edilir. Tersine eğer $\delta\eta = 0$ ve $\delta\Phi = 0$ ise

$$\bar{\delta}\left(X, a\frac{d}{dt}\right) = \delta\Phi(X) - a\delta\eta = 0$$

olur. $\square$

Bir hemen hemen Hermit manifoldu semi-Kaehler ve Hermit manifold ise bu manifolda W_3 **sınıfındandır** [1]. Bu tanım kullanılarak semi-kosimplektik normal manifold tanımı şu şekilde verilir:

Tanım 4.10. *Bir hemen hemen Hermityen $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu W_3 sınıfından ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna* ***semi-cosimplektik normal manifold*** *denir.*

Teorem 4.11. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu semi-cosimplektik normaldir ancak ve ancak*

$$\delta\phi = 0, \quad \delta\eta = 0,$$

$$(\nabla_X \varphi)\, Y - \left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right) \varphi(Y) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. Manifoldun semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul

$$\delta\phi = 0, \quad \delta\eta = 0$$

ve manifoldun normal olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \varphi)\, Y - \left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right) \varphi(Y) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0$$

olduğundan manifoldun semi-kosimplektik normal olması için gerek ve yeter koşul verilen eşitliklerin aynı anda sağlanmasıdır. $\square$

5 SASAKİ MANİFOLDLAR

M manifoldu üzerindeki (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapı normal ve kontak ise bu manifolda **Sasaki manifold** denir. İlk olarak Teorem 5.2 nın ispatında kullanılacak olan aşağıdaki önerme ifade ve ispat edilecektir:

Önerme 5.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. φ endomorfizminin Levi-Civita kovaryant türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.*

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad + g([\varphi, \varphi](Y, Z) + 2d\eta(Y, Z)\xi, \varphi(X)) \\ &\quad + \varphi(Y)[\eta(Z)]\eta(X) - \eta([\varphi(Y), Z])\eta(X) \\ &\quad - \varphi(Z)[\eta(Y)]\eta(X) + \eta([\varphi(Z), Y])\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi(Y), X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi(Z), X)\eta(Y). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Kanıt. Kozsul formülü

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X[g(Y, Z)] + Y[g(X, Z)] - Z[g(X, Y)] \\ &\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X]) \end{aligned}$$

ve Φ temel 2-formunu derivasyonu [11]

$$\begin{aligned} 3d\Phi(X, Y, Z) &= X[\Phi(Y, Z)] + Y[\Phi(Z, X)] + Z[\Phi(X, Y)] \\ &\quad - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X) \end{aligned}$$

olduğundan aşağıdaki hesaplarla (5.39) eşitliği elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y, Z\right) &= 2g\left(\nabla_X(\varphi(Y)), Z\right) + 2g\left(\nabla_X Y, \varphi(Z)\right) \\ &= X[g(\varphi(Y), Z)] + \varphi(Y)[g(X, Z)] - Z[g(X, \varphi(Y))] \\ &\quad + g([X, \varphi(Y)], Z) + g([Z, X], \varphi(Y)) - g([\varphi(Y), Z], X) \\ &\quad + X[g(Y, \varphi(Z))] - \varphi(Z)[g(X, Y)] + Y[g(X, \varphi(Z))] \\ &\quad - g([Y, \varphi(Z)], X) + g([X, Y], \varphi(Z)) + g([\varphi(Z), X], Y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X[\Phi(Y,Z)] + \varphi(Y)[\Phi(\varphi(Z),X)] + \varphi(Y)[\eta(X)\eta(Z)] \\
&\quad -Z[\Phi(X,Y)] - \Phi([x,\varphi(Y)],\varphi(Z)) + \eta([X,\varphi(Y)])\eta(Z) \\
&\quad +\Phi([Z,X],Y) - g(\varphi([\varphi(Y),Z]),\varphi(X)) - \eta(X)\eta([\varphi(Y),Z]) \\
&\quad +X[\Phi(\varphi(Y),\varphi(Z))] + Y[\Phi(X,Z)] + \varphi(Z)[\Phi(X,\varphi(Y))] \\
&\quad +\varphi(Z)[\Phi(X,\varphi(Y))] - \varphi(Z)[\eta(X)\eta(Y)] \\
&\quad +\Phi([X,Y],Z) + \Phi([X,\varphi(Z)],\varphi(Y)) \\
&\quad -\eta(Y)\eta([X,\varphi(Z)) - g(\varphi(X),\varphi([Y,\varphi(Z)])) - \eta(X)\eta([Y,\varphi(Z)]) \\
&\quad + [\Phi([Y,Z),X) - g([Y,Z],\varphi(X))] \\
&\quad - [\Phi([\varphi(Y),\varphi(Z)],X) - g([\varphi(Y),\varphi(Z)],\varphi(X))] \\
&\quad +2g\,(d\eta(Y,Z)\xi,\varphi(X)) \\
&= 3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z)) - 3d\Phi(X,Y,Z) \\
&\quad +g([\varphi,\varphi](Y,Z) + 2d\eta(Y,Z)\xi,\varphi(X)) \\
&\quad +\varphi(Y)[\eta(Z)]\eta(X) - \eta([\varphi(Y),Z])\eta(X) \\
&\quad -\varphi(Z)[\eta(Y)]\eta(X) + \eta([\varphi(Z),Y])\eta(X) \\
&\quad +2d\eta(\varphi(Y),X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi(Z),X)\eta(Y)
\end{aligned}
$$

□

Sasaki manifoldların tanımında en çok kullanılan eşitlik aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 5.2. *(M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik manifoldunun Sasaki manifoldu olması için gerek ve yeter koşul her $X,Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X\varphi)(Y) = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{5.40}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. (5.40) eşitliği sağlansın. (5.40) eşitliğinde $Y=\xi$ alındığında

$$\nabla_X\xi = -\varphi(X)$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$
\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\{(\nabla_X\eta)(Y) - (\nabla_Y\eta)(X)\} \\
&= \tfrac{1}{2}\{g(\nabla_X\xi,Y) - g(\nabla_Y\xi,X)\} \\
&= \tfrac{1}{2}\{g(-\varphi(X),Y) + g(\varphi(Y),X)\} \\
&= g(X,\varphi(Y)) = \Phi(X,Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Normallik koşulu için, (5.40) eşitliğinden

$$\nabla_{\varphi(X)}\xi = -\varphi^2(X)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & (\nabla_X\varphi)(Y) - \left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)(\varphi(Y)) + \eta(Y)\nabla_{\varphi(X)}\xi \\ = \;& g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - g(\varphi(X),\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi^2(X) \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece normallik koşulu sağlanmış olur.

Tersine hemen hemen kontak metrik manifold normal ve $\Phi = d\eta$ olsun. $\Phi = d\eta$ ve

$$\begin{aligned} & \varphi(Y)[\eta(Z)]\eta(X) - \eta([\varphi(Y),Z])\eta(X) - \varphi(Z)[\eta(Y)]\eta(X) + \eta([\varphi(Z),Y])\eta(X) \\ = \;& g(\nabla_{\varphi(Y)}\xi, Z)\eta(X) + g(\nabla_Z\varphi(Y),\xi)\eta(X) - g(\nabla_{\varphi(Z)}\xi, Y)\eta(X) + g(\nabla_Y\varphi(Z),\xi)\eta(X) \\ = \;& d\eta(\varphi(Y),Z) - d\eta(\varphi(Z),Y) \\ = \;& \Phi(\varphi(Y),Z) - \Phi(\varphi(Z),Y) \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (5.39) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)(Y),Z) &= \varphi(Y)[\eta(Z)]\eta(X) - \eta([\varphi(Y),Z])\eta(X) \\ &\quad -\varphi(Z)[\eta(Y)]\eta(X) + \eta([\varphi(Z),Y])\eta(X) \\ &\quad +2\Phi(\varphi(Y),X)\eta(Z) - 2\Phi(\varphi(Z),X)\eta(Y) \\ &= 2g(X,Y)\eta(Z) - 2g(X,Z)\eta(Y) \\ &= 2g(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, Z) \end{aligned}$$

eşitliğinden (5.40) eşitliği elde edilir. □

Tanım 5.3. *Eğer $M \times \mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki J hemen hemen Hermit yapı W_4 sınıfından ise (M,φ,η,ξ,g) manifolduna* **trans-Sasaki manifold** *denir.*

Teorem 5.4. *(M,φ,η,ξ,g) manifoldunun trans-Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned} (\nabla_X\Phi)(Y,Z) &= -\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z) - g(X,Z)\delta\Phi(Y) \\ &\quad +g(X,\varphi(Y))\eta(Z)\delta\eta - g(X,\varphi(Z))\eta(Y)\delta\eta\} \end{aligned} \tag{5.41}$$

ifadesinin sağlanmasıdır.

Kanıt. (M,φ,η,ξ,g) manifoldu trans-Sasaki manifold olsun. Trans-Sasaki manifoldun tanımından $M\times\mathbb{R}$ manifoldu üzerindeki J hemen hemen Hermit yapı aşağıdaki koşulu sağlar.

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F\right)\left((Y,b\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})\right) &= -\frac{1}{2n}\Big\{h\left((Xa\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F(Z,c\frac{d}{dt}) \\ &\quad -h\left((X,a\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F(Y,b\frac{d}{dt}) \\ &\quad -h\left((X,a\frac{d}{dt}),J(Y,b\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F\left(J(Z,c\frac{d}{dt})\right) \\ &\quad +h\left((X,a\frac{d}{dt}),J(Z,c\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F\left(J(Y,b\frac{d}{dt})\right)\Big\}\end{aligned} \tag{5.42}$$

Bu koşul özel olarak $\left(0,\frac{d}{dt}\right)$, $\left(0,\frac{d}{dt}\right)$ ve $(\varphi(Y),0)$ vektör alanları için de sağlanacağından

$$\left(\nabla_{(0,\frac{d}{dt})}F\right)\left(\left(0,\frac{d}{dt}\right),(\varphi(Y),0)\right)=-\frac{1}{2n}\bar{\delta}F(\varphi(Y),0)=-\frac{1}{2n}\delta\Phi(\varphi(Y))$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left(\nabla_{(0,\frac{d}{dt})}F\right)\left(\left(0,\frac{d}{dt}\right),(\varphi(Y),0)\right)=(\nabla_0\Phi)\,(0,\varphi(Y))=0$$

olduğundan

$$\delta\Phi(\varphi(Y))=0$$

bulunur. $(X,0)\,,(Y,0)\,,(Z,0)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{(X,0)}F\right)((Y,0),(Z,0)) &= -\frac{1}{2n}\big\{h\left((X,0),(Y,0)\right)\bar{\delta}F(Z,0) \\ &\quad -h\left((X,0),(Z,0)\right)\bar{\delta}F(Y,0) \\ &\quad -h\left((X,0),J(Y,0)\right)\bar{\delta}F\left(J(Z,0)\right) \\ &\quad +h\left((X,0),J(Z,0)\right)\bar{\delta}F\left(J(Y,0)\right)\big\} \\ &= -\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z)-g(X,Z)\delta\Phi(Y) \\ &\quad -g(X,\varphi(Y))\left[\delta\Phi(\varphi(Z))-\eta(Z)\delta\eta\right] \\ &\quad +g(X,\varphi(Z))\left[\delta\Phi(\varphi(Y))-\eta(Y)\delta\eta\right]\}\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta\Phi(\varphi(Y))=0$ ve

$$\left(\nabla_{(X,0)}F\right)((Y,0)\,,(Z,0))=(\nabla_X\Phi)\,(Y,Z)$$

olduğundan (5.41) eşitliği sağlanmış olur.

Tersine (5.41) eşitliği sağlanıyor ise bu eşitlikte $Y=\xi$ ve $Z=\varphi(Y)$ alınırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_X\Phi)(\xi,\varphi(Y)) &= -\tfrac{1}{2n}\{\eta(X)\delta\Phi(\varphi(Y))-g(X,\varphi(Y))\delta\Phi(\xi)\\ &\quad -g(X,\varphi^2(Y))\delta\eta\}\\ &= -\tfrac{1}{2n}\{\eta(X)\delta\Phi(\varphi(Y))-g(X,\varphi(Y)\delta\Phi(\xi)\\ &\quad +g(X,Y)\delta\eta-\eta(X)\eta(Y)\delta\eta\}\end{aligned}$$

bulunur ve $(\nabla_X\Phi)(\xi,\varphi(Y)=(\nabla_X\eta)(Y)$ olduğundan

$$(\nabla_X\eta)(Y)=-\frac{1}{2n}\{\eta(X)\delta\Phi(\varphi(Y))-g(X,\varphi(Y))\delta\Phi(\xi)+g(X,Y)\delta\eta-\eta(X)\eta(Y)\delta\eta\} \tag{5.43}$$

elde edilir. $\{E_1,E_2,\cdots,E_{2n},\xi\}$ M manifoldu için ortanormal lokal bir çatı olsun. (5.41) eşitliği uygulandığında

$$(\nabla_{E_i}\Phi)(E_i,\varphi(Z))=-\frac{1}{2n}\{\delta\Phi(\varphi(Z))-g(E_i,\varphi(Z))\delta\Phi(\varphi(E_i))\}$$

ve

$$\delta\Phi(\varphi(Z))=-\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{E_i}\Phi)(E_i,\varphi(Z))-(\nabla_\xi\Phi)(\xi,\varphi(Z))$$

olduğundan

$$\delta\Phi(\varphi(Z))=\delta\Phi(\varphi(Z))-\frac{1}{2n}\delta\Phi(\varphi(Z))$$

eşitliğinden

$$\delta\Phi(\varphi(Z))=0 \tag{5.44}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $Z=\varphi(Z)$ alındığında ise

$$-\delta\Phi(Z)+\eta(Z)\delta\Phi(\xi)=0 \tag{5.45}$$

bulunur. (5.41), (5.44) ve (5.45) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2n}\Big\{h\left((Xa\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F(Z,c\frac{d}{dt})\\ &-h\left((X,a\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F(Y,b\frac{d}{dt})\\ &-h\left((X,a\frac{d}{dt}),J(Y,b\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F\left(J(Z,c\frac{d}{dt})\right)\\ &+h\left((X,a\frac{d}{dt}),J(Z,c\frac{d}{dt})\right)\bar{\delta}F\left(J(Y,b\frac{d}{dt})\right)\Big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tfrac{1}{2n}\{(g(X,Y)+ab)\,(\delta\Phi(Z)-c\delta\eta)-(g(X,Z)+ac)\,(\delta\Phi(Y)-b\delta\eta)\\
&\quad +(g(X,\varphi(Y))-b\eta(X)+a\eta(Y))\,(c\delta\Phi(\xi)+\eta(Z)\delta\eta)\\
&\quad -(g(X,\varphi(Z))-c\eta(X)+a\eta(Z))\,(b\delta\Phi(\xi)+\eta(Y)\delta\eta)\}\\
&= -\tfrac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z)-g(X,Z)\delta\Phi(Y)+g\,(X,\varphi(Y))\,\eta(Z)\delta\eta\\
&\quad -g\,(X,\varphi(Z))\,\eta(Y)\delta\eta\}\\
&\quad +\tfrac{c}{2n}\{g(X,Y)\delta\eta-g(X,\varphi(Y))\delta\Phi(\xi)-\eta(X)\eta(Y)\delta\eta\}\\
&\quad -\tfrac{b}{2n}\{g(X,Z)\delta\eta-g(X,\varphi(Z))\delta\Phi(\xi)-\eta(X)\eta(Z)\delta\eta\}\\
&\quad -\tfrac{1}{2n}ab\,\{\delta\Phi(Z)-\eta(Z)\delta\Phi(\xi)\}\\
&\quad -\tfrac{1}{2n}ac\,\{\delta\Phi(Y)-\eta(Y)\delta\Phi(\xi)\}\\
&= (\nabla_X\Phi)\,(Y,Z)-c\,(\nabla_X\eta)\,(Y)+b\,(\nabla_X\eta)\,(Z)\\
&= \left(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F\right)\left((Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt})\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan (5.42) eşitliği elde edilir. □

Eğer $(M\times\mathbb{R},J,h)$ manifoldu üzerindeki hemen hemen Hermit yapı

$$
\left(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}J\right)\left(X,a\frac{d}{dt}\right)+J\left(\left(\nabla_{J(X,a\frac{d}{dt})}J\right)\left(X,a\frac{d}{dt}\right)\right)=0 \qquad (5.46)
$$

koşulunu sağlıyorsa M manifolduna G_1 **manifold** ya da **($W_1\oplus W_3\oplus W_4$ sınıfındandır)** denir.

Tanım 5.5. *Eğer hemen hemen $(M\times\mathbb{R},J,h)$ Hermit manifoldu G_1 manifold ise (M,φ,η,ξ,g) manifolduna G_1- **Sasaki manifold** denir.*

Teorem 5.6. *(M,φ,η,ξ,g) manifoldunun G_1-Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul her X vektör alanı için*

$$
(\nabla_X\varphi)\,X-\left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi(X)+\eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi=0 \qquad (5.47)
$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. (M,φ,η,ξ,g) manifoldu G_1-Sasaki manifold ise her $(X,a\frac{d}{dt})$ vektör alanı için (5.46) eşitliği sağlanır. Özel olarak bu eşitlikte $a=0$ alındığında

$$
\begin{aligned}
(0,0\tfrac{d}{dt}) &= (\nabla_{(X,0)}J)(X,0)+J\left((\nabla_{J(X,0)}J)(X,0)\right)\\
&= \left((\nabla_X\varphi)(X),(\nabla_X\eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right)+J\left((\nabla_{(\varphi(X),\eta(X)\frac{d}{dt})}J)(X,0)\right)\\
&= \left((\nabla_X\varphi)(X),(\nabla_X\eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right)+J\left((\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X),(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left((\nabla_X\varphi)(X), (\nabla_X\eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&\quad + \left((\varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)) - (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\xi, \eta\left((\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)\right)\tfrac{d}{dt}\right) \\
&= \left[(\nabla_X\varphi)(X) + \varphi\left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)\right) - (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\xi,\right. \\
&\quad \left.\left((\nabla_X\eta)(X) + \eta\left((\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)\right)\right)\tfrac{d}{dt}\right]
\end{aligned}
$$

Buradan;

$$
(\nabla_X\varphi)(X) + \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)) - (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\xi = 0 \tag{5.48}
$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_X\varphi)(X) + \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)) - (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\xi \\
&= (\nabla_X\varphi)(X) + \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi(X)) - \varphi^2(\nabla_{\varphi(X)}X) \\
&\quad -\varphi(X)[\eta(X)]\xi + \eta(\nabla_{\varphi(X)}X)\xi \\
&= (\nabla_X\varphi)(X) + \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi(X)) + \nabla_{\varphi(X)}X - \eta(\nabla_{\varphi(X)}X)\xi \\
&\quad -\varphi(X)[\eta(X)]\xi + \eta(\nabla_{\varphi(X)}X)\xi \\
&= (\nabla_X\varphi)(X) + \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi(X)) + \nabla_{\varphi(X)}X - \varphi(X)[\eta(X)]\xi \\
&= (\nabla_X\varphi)(X) + \varphi(\nabla_{\varphi(X)}\varphi(X)) + \nabla_{\varphi(X)}X \\
&\quad -\varphi(X)[\eta(X)]\xi + \eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi - \eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi \\
&= (\nabla_X\varphi)(X) + \eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi \\
&\quad \underbrace{+\nabla_{\varphi(X)}X - \varphi(X)[\eta(X)]\xi - \eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi}_{=-(\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(X))} \\
&= (\nabla_X\varphi)(X) - (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(X)) + \eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0
\end{aligned}
$$

olur. Böylece (5.47) eşitliği sağlanmış olur.

Tersine (5.47) eşitliği sağlansın. Bu eşitlikte $X = \xi$ alındığında

$$
0 = (\nabla_\xi\varphi)(\xi) = -\varphi(\nabla_\xi\xi)
$$

ve

$$
0 = \varphi^2(\nabla_\xi\xi) = -\nabla_\xi\xi + \underbrace{\eta(\nabla_\xi\xi)}_{=0}\xi = -\nabla_\xi\xi
$$

elde edilir. $\nabla_\xi\xi = 0$ olması kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\eta\left((\nabla_\xi\varphi)(X)\right) &= g\left(\nabla_\xi\varphi(X) - \varphi(\nabla\xi X), \xi\right) \\
&= g\left(\nabla_\xi\varphi(X), \xi\right) = -g\left(\nabla_\xi\xi, \varphi(X)\right) = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Herhangi bir Y vektör alanı için (5.47) eşitliğinden

$$
0 = g(0, Y) = g\left((\nabla_X\varphi)(X), Y\right) + g\left(\varphi\left((\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(X)\right), Y\right) - \left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)(X)g(\xi, Y)
$$

ve

$$0 = (\nabla_X \Phi)(Y, X) - \left(\nabla_{\varphi(X)} \Phi\right)(\varphi(Y), X) - \eta(Y)\left(\nabla_{\varphi(X)} \eta\right)(X)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $Y = \xi$ alındığında

$$(\nabla_X \eta)\,\varphi(X) + \left(\nabla_{\varphi(X)} \eta\right) X = 0$$

bulunur. Son eşitlikte X yerine $X + \varphi(X)$ yazıldığında

$$(\nabla_X \eta)\, X - \left(\nabla_{\varphi(X)} \eta\right) \varphi(X) = 0$$

olur. (5.47) eşitliğinde X yerine $X + \xi$ alınırsa

$$\left(\nabla_{(X+\xi)} \varphi\right)(X + \xi) + \varphi\left(\left(\nabla_{\varphi(X+\xi)} \varphi\right)(X + \xi)\right) - \left(\nabla_{\varphi(X+\xi)} \eta\right)(X + \xi)\ \xi = 0$$

eşitliğinden

$$(\nabla_X \varphi)\,\xi + (\nabla_\xi \varphi)(X) + \varphi\left(\left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(\xi)\right) = 0 \tag{5.49}$$

bulunur ve bu eşitliğe φ endomorfizmi uygulanırsa

$$\nabla_X \xi + \varphi\left((\nabla_\xi \varphi)(X)\right) + \varphi\left(\nabla_{\varphi(X)} \xi\right) - \{(\nabla_\xi \eta)(X)\}\,\xi = 0 \tag{5.50}$$

elde edilir. Yukarıda bulunan eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})} J)(X, a\tfrac{d}{dt}) + J\left((\nabla_{J(X,a\frac{d}{dt})} J)(X, a\tfrac{d}{dt})\right) \\
= \; & \left((\nabla_X \varphi)(X) - a\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right) + J\left((\nabla_{(\varphi(X)-a\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})} J)(X, a\tfrac{d}{dt})\right) \\
= \; & \left((\nabla_X \varphi)(X) - a\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right) \\
& + J\left(\left(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \varphi\right)(X) - a\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \xi, \left(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \eta\right)(X)\tfrac{d}{dt}\right) \\
= \; & \left((\nabla_X \varphi)(X) - a\nabla_X \xi, (\nabla_X \eta)(X)\tfrac{d}{dt}\right) \\
& + \left[\varphi\left(\left(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \varphi\right)(X) - a\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \xi\right) - \left(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \eta\right)(X)\ \xi,\right. \\
& \left.\eta\left(\left(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)} \varphi\right)(X)\right)\tfrac{d}{dt}\right] \\
= \; & \left[\left\{(\nabla_X \varphi)(X) + \varphi\left(\left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(X)\right) - \left(\nabla_{\varphi(X)} \eta\right)(X)\ \xi\right\}\right. \\
& - a\left\{\nabla_X \xi + \varphi\left((\nabla_\xi \varphi)(X)\right) + \varphi\left(\nabla_{\varphi(X)} \xi\right) - \{(\nabla_\xi \eta)(X)\}\,\xi\right\} \\
& + a^2 \varphi(\nabla_\xi \xi), \\
& \left.\left\{(\nabla_X \eta)(X) + \eta\left(\left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(X)\right)\right\}\tfrac{d}{dt} - a\eta\left((\nabla_\xi \varphi)(X)\right)\tfrac{d}{dt}\right] \\
= \; & (0, 0)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Böylece (5.46) eşitliği sağlandığından $(M, \varphi, \eta, \xi, g)$ manifoldu G_1-Sasaki manifold olur. $\square$

Eğer $(M\times\mathbb{R},J,h)$ manifoldu üzerindeki hemen hemen Hermit yapı

$$
\begin{aligned}
&dF\left((X,a\frac{d}{dt}),J(Y,b\frac{d}{dt}),J(Z,c\frac{d}{dt})\right)\\
&+dF\left(J(X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}),J(Z,c\frac{d}{dt})\right)\\
&+dF\left(J(X,a\frac{d}{dt}),J(Y,b\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})\right)\\
&-dF\left((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})\right)=0
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

koşulunu sağlıyorsa $M\times\mathbb{R}$ manifolduna $W_2\oplus W_3\oplus W_4$ **sınıfındandır** ya da G_2 **manifold** denir.

Tanım 5.7. *Eğer hemen hemen Hermit $(M\times\mathbb{R},J,h)$ manifoldu G_2 manifold ise (M,φ,η,ξ,g) manifolduna G_2-**Sasaki manifold** denir.*

Teorem 5.8. *Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *(M,φ,η,ξ,g) manifoldu G_2-Sasaki manifoldudur.*

2. *Her X,Y,Z vektör alanı için aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$
\begin{aligned}
&3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z))+3d\Phi(\varphi(X),Y,\varphi(Z))\\
&+3d\Phi(\varphi(X),\varphi(Y),Z)-3d\Phi(X,Y,Z)\\
&-2\eta(Z)\left[d\eta(X,\varphi(Y))+d\eta(\varphi(X),Y)\right]\\
&-2\eta(Y)\left[d\eta(Z,\varphi(X))+d\eta(\varphi(Z),X)\right]\\
&-2\eta(X)\left[d\eta(Y,\varphi(Z))+d\eta(\varphi(Y),Z)\right]=0
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

3. *Herhangi X, Y, Z vektör alanları için*

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}\left\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z)-(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)-\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)\right\}=0 \tag{5.53}$$

olur.

Kanıt. (M,φ,η,ξ,g) manifoldu G_2-Sasaki manifoldu olsun. Bu durumda (5.51) eşitliği sağlanacağından, özel olarak $a = b = c = 0$ alındığında

$$\begin{aligned}
0 &= 3dF\left((X,0), J(Y,0), J(Z,0)\right) + 3dF\left(J(X,0), (Y,0), J(Z,0)\right) \\
&\quad +3dF\left(J(X,0), J(Y,0), (Z,0)\right) - 3dF\left((X,0), (Y,0), (Z,0)\right) \\
&= 3dF\left((X,0), (\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt}), (\varphi(Z), \eta(Z)\tfrac{d}{dt})\right) \\
&\quad +3dF\left((\varphi(X), \eta(X)\tfrac{d}{dt}), (Y,0), (\varphi(Z), \eta(Z)\tfrac{d}{dt})\right) \\
&\quad +3dF\left((\varphi(X), \eta(X)\tfrac{d}{dt}), (\varphi(Y), \eta(Y)\tfrac{d}{dt}), (Z,0)\right) \\
&\quad -3dF\left((X,0), (Y,0), (Z,0)\right) \\
&= 3d\Phi(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) - 2\left\{\eta(Z)d\eta(X, \varphi(Y)) + \eta(Y)d\eta(\varphi(Z), X)\right\} \\
&\quad +3d\Phi(\varphi(X), Y, \varphi(Z)) - 2\left\{\eta(Z)d\eta(\varphi(X), Y) + \eta(X)d\eta(Y, \varphi(Z))\right\} \\
&\quad +3d\Phi(\varphi(X), \varphi(Y), Z) - 2\left\{\eta(X)d\eta(\varphi(Y), Z) + \eta(Y)d\eta(Z, \varphi(X))\right\} \\
&\quad -3dF(X,Y,Z) \\
&= 3d\Phi(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) + 3d\Phi(\varphi(X), Y, \varphi(Z)) \\
&\quad +3d\Phi(\varphi(X), \varphi(Y), Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) \\
&\quad -2\eta(Z)\left(d\eta(X, \varphi(Y)) + d\eta(\varphi(X), Y)\right) \\
&\quad -2\eta(y)\left(d\eta(\varphi(Z), X) + d\eta(Z, \varphi(X))\right) \\
&\quad -2\eta(X)\left(d\eta(Y, \varphi(Z)) + d\eta(\varphi(Y), Z)\right)
\end{aligned}$$

olduğundan (5.52) eşitliği elde edilir.

Tersine (5.52) eşitliği sağlanıyor ise

$$3dF\left((X, a\frac{d}{dt}), J(Y, b\frac{d}{dt}), J(Z, c\frac{d}{dt})\right) + 3dF\left(J(X, a\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt}), J(Z, c\frac{d}{dt})\right)$$
$$+3dF\left(J(X, a\frac{d}{dt}), J(Y, b\frac{d}{dt}), (Z, c\frac{d}{dt})\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 3dF\left((X, a\frac{d}{dt}), (\varphi(Y) - b\xi, \eta(Y)\frac{d}{dt}), (\varphi(Z) - c\xi, \eta(Z)\frac{d}{dt})\right) \\
&\quad +3dF\left((\varphi(X) - a\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}), (Y, b\frac{d}{dt}), (\varphi(Z) - c\xi, \eta(Z)\frac{d}{dt})\right) \\
&\quad +3dF\left((\varphi(X) - a\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}), (\varphi(Y) - b\xi, \eta(Y)\frac{d}{dt}), (Z, c\frac{d}{dt})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3d\Phi(X, \varphi(Y) - b\xi, \varphi(Z) - c\xi) - 2\eta(Z)d\eta(X, \varphi(Y) - b\xi) \\
&\quad -2ad\eta(\varphi(Y) - b\xi, \varphi(Z) - c\xi) - 2\eta(Z)d\eta(\varphi(Z) - c\xi, X) \\
&\quad +3d\Phi(\varphi(X) - a\xi, Y, \varphi(Z) - c\xi) - 2\eta(Z)d\eta(\varphi(X) - a\xi, Y) \\
&\quad -2\eta(X)d\eta(Y, \varphi(Z) - c\xi) - 2bd\eta(\varphi(Z) - c\xi, \varphi(X) - a\xi) \\
&\quad +3d\Phi(\varphi(X) - a\xi, \varphi(Y) - b\xi, Z) - 2cd\eta(\varphi(X) - a\xi, \varphi(Y) - b\xi) \\
&\quad -2\eta(X)d\eta(\varphi(Y) - b\xi, Z) - 2\eta(Y)d\eta(Z, \varphi(X) - a\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3d\Phi(X, \varphi(Y), \varphi(Z)) - 3d\Phi(X, \varphi(Y), c\xi) \\
&\quad -3d\Phi(X, b\xi, \varphi(Z)) + \underbrace{3d\Phi(X, b\xi, c\xi)}_{=0} \\
&\quad -2\eta(Z)d\eta(X, \varphi(Y)) + 2\eta(Z)d\eta(X, b\xi) \\
&\quad -2ad\eta(\varphi(Y), \varphi(Z)) + 2ad\eta(\varphi(Y), c\xi) \\
&\quad +2ad\eta(b\xi, \varphi(Z)) - \underbrace{2ad\eta(b\xi, c\xi)}_{=0} \\
&\quad -2\eta(Y)d\eta(\varphi(Z), X) + 2\eta(Y)d\eta(c\xi, X) \\
&\quad +3d\Phi(\varphi(X), Y, \varphi(Z)) - 3d\Phi(\varphi(X), Y, c\xi) \\
&\quad -3d\Phi(a\xi, Y, \varphi(Z)) + \underbrace{3d\Phi(a\xi, Y, c\xi)}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-2\eta(Z)d\eta(\varphi(X), Y) + 2\eta(Z)d\eta(a\xi, Y) \\
&-2\eta(X)d\eta(Y, \varphi(Z)) + 2\eta(X)d\eta(Y, c\xi) \\
&-2bd\eta(\varphi(Z), \varphi(X)) + 2bd\eta(\varphi(Z), a\xi) \\
&+2bd\eta(c\xi, \varphi(X)) - \underbrace{2bd\eta(c\xi, a\xi)}_{=0} \\
&+3d\Phi(\varphi(X), \varphi(Y), Z) - 3d\Phi(\varphi(X), b\xi, Z) \\
&-3d\Phi(a\xi, \varphi(Y), Z) + \underbrace{3d\Phi(a\xi, b\xi, Z)}_{=0} \\
&-2cd\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) + 2cd\eta(\varphi(X), b\xi) \\
&+2cd\eta(a\xi, \varphi(Y)) - \underbrace{2cd\eta(a\xi, b\xi)}_{=0} \\
&-2\eta(X)d\eta(\varphi(Y), Z) + 2\eta(X)d\eta(b\xi, Z) \\
&-2\eta(Y)d\eta(Z, \varphi(X)) + 2\eta(Y)d\eta(Z, a\xi)
\end{aligned}$$

olur ve burada gerekli düzenlemeler yapıldığında ve (5.52) eşitliği kabul edildiğinden

$$\begin{aligned}
= \quad & 3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z)) - 2\eta(Z)d\eta(X,\varphi(Y)) - 2\eta(Y)d\eta(\varphi(Z),X) \\
& +3d\Phi(\varphi(X),Y,\varphi(Z)) - 2\eta(Z)d\eta(\varphi(X),Y) - 2\eta(X)d\eta(Y,\varphi(Z)) \\
& +3d\Phi(\varphi(X),\varphi(Y),Z) - 2\eta(X)d\eta(\varphi(Y),Z) - 2\eta(Y)d\eta(Z,\varphi(X)) \\
& -3d\Phi(X,\varphi(Y),c\xi) + 2\eta(Y)d\eta(c\xi,X) - 3d\Phi(\varphi(X),Y,c\xi) \\
& +2\eta(X)d\eta(Y,c\xi) - 2cd\eta(\varphi(X),\varphi(Y)) \\
& -3d\Phi(X,b\xi,\varphi(Z)) + 2\eta(Z)d\eta(X,b\xi) - 2bd\eta(\varphi(Z),\varphi(X)) \\
& -3d\Phi(a\xi,\varphi(Y),Z) + 2\eta(X)d\eta(b\xi,Z) \\
& -2ad\eta(\varphi(Y) - 3d\Phi(a\xi,Y,\varphi(Z)) + 2\eta(Z)d\eta(a\xi,Y) \\
& -3d\Phi(a\xi,\varphi(Y),Z) + 2\eta(Y)d\eta(Z,a\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & 3d\Phi(X,Y,Z) - 2cd\eta(X,Y) - 2bd\eta(Z,X) - 2ad\eta(Y,Z) \\
= \quad & 3d\Phi(X,Y,Z) - 2\left(ad\eta(Y,Z) + bd\eta(Z,X) + cd\eta(X,Y)\right) \\
= \quad & 3dF\left((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})\right)
\end{aligned}$$

elde edlilir. Böylece (5.51) eşitliği elde edilmiş olur. Eğer (5.52) eşitliği sağlanıyor ise

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & 3d\Phi(X,\varphi(Y),\varphi(Z)) + 3d\Phi(\varphi(X),Y,\varphi(Z)) \\
& +3d\Phi(\varphi(X),\varphi(Y),Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) \\
& -2\eta(Z)\left(d\eta(X,\varphi(Y)) + d\eta(\varphi(X),Y)\right) \\
& -2\eta(Y)\left(d\eta(Z,\varphi(X)) + d\eta(\varphi(Z),X)\right) \\
& -2\eta(X)\left(d\eta(Y,\varphi(Z)) + d\eta(\varphi(Y),Z)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (\nabla_X\Phi)(\varphi(Y),\varphi(Z)) + (\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(\varphi(Z),X) + (\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(X,\varphi(Y)) \\
& +(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(Y,\varphi(Z)) + (\nabla_Y\Phi)(\varphi(Z),\varphi(X)) + (\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(\varphi(X),Y) \\
& +(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z) + (\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(Z,\varphi(X)) + (\nabla_Z\Phi)(\varphi(X),\varphi(Y)) \\
& -(\nabla_X\Phi)(Y,Z) - (\nabla_Y\Phi)(Z,X) - (\nabla_Z\Phi)(X,Y) \\
& -\eta(Z)\left\{(\nabla_X\eta)(\varphi(Y)) - (\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(X) + (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Y) - (\nabla_Y\eta)(\varphi(X))\right\} \\
& -\eta(Y)\left\{(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(X) - (\nabla_X\eta)(\varphi(Z)) + (\nabla_Z\eta)(\varphi(X)) - (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\right\} \\
& -\eta(X)\left\{(\nabla_Y\eta)(\varphi(Z)) - (\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(Y) + (\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(Z) - (\nabla_Z\eta)(\varphi(Y))\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& -(\nabla_X\Phi)(Y,Z)+\eta(Z)(\nabla_X\eta)(\varphi(Y))-\eta(Y)(\nabla_X\eta)(\varphi(Z)) \\
& +(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(\varphi(Z),X)+(\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(X,\varphi(Y))+(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(Y,\varphi(Z)) \\
& -(\nabla_Y\Phi)(Z,X)+\eta(X)(\nabla_Y\eta)(\varphi(Z))-\eta(Z)(\nabla_Y\eta)(\varphi(X)) \\
& +(\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(\varphi(X),Y)+(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(Z,\varphi(X)) \\
& -(\nabla_Z\Phi)(X,Y)+\eta(Y)(\nabla_Z\eta)(\varphi(X))-\eta(X)(\nabla_Z\eta)(\varphi(Y)) \\
& -(\nabla_X\Phi)(Y,Z)-(\nabla_Y\Phi)(Z,X)-(\nabla_Z\Phi)(X,Y) \\
& -\eta(Z)\left\{(\nabla_X\eta)(\varphi(Y))-(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(X)+(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Y)+(\nabla_Y\eta)(\varphi(X))\right\} \\
& -\eta(Y)\left\{(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(X)-(\nabla_X\eta)(\varphi(Z))+(\nabla_Z\eta)(\varphi(X))-(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(X)\right\} \\
& -\eta(X)\left\{(\nabla_Y\eta)(\varphi(Z))-(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(Y)+(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(Z)-(\nabla_Z\eta)(\varphi(Y))\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& -2\left((\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_Y\Phi)(Z,X)+(\nabla_Z\Phi)(X,Y)\right) \\
& +(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(\varphi(Z),X)+(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(X,\varphi(Z))+(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(Y,\varphi(Z)) \\
& +(\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(\varphi(X),Y)+(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(Z,\varphi(X)) \\
& +\eta(Z)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(X)-\eta(Z)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Y)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z) \\
& -\eta(Y)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(X)+\eta(X)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(Y)-\eta(X)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(Z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& -2\left((\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_Y\Phi)(Z,X)+(\nabla_Z\Phi)(X,Y)\right) \\
& +(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(\varphi(Z),X)+(\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(\varphi(X),Y) \\
& +(\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(\varphi(X),Y)+\eta(X)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(Y)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(X) \\
& +(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)+\eta(Z)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Y) \\
& +(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(\varphi(Z),X)+\eta(Z)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(X)+\eta(X)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(Z) \\
& +\eta(Z)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(X)-\eta(Z)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Y)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z) \\
& -\eta(Y)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(X)+\eta(X)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(Y)-\eta(X)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(Z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& -2\left((\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_Y\Phi)(Z,X)+(\nabla_Z\Phi)(X,Y)\right) \\
& +2\big((\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+(\nabla_{\varphi(Y)}\Phi)(\varphi(Z),X)+(\nabla_{\varphi(Z)}\Phi)(\varphi(X),Y)\big) \\
& +2\big(\eta(X)(\nabla_{\varphi(Z)}\eta)(Y)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)+\eta(Z)(\nabla_{\varphi(Y)}\eta)(X)\big) \\
= \;& -2\,\mathfrak{S}_{X,Y,Z}\left\{(\nabla_X\Phi)(Y,Z)-(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)-\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)\right\}
\end{aligned}
$$

olduğundan (5.53) eşitliği elde edilmiş olur. İşlemler tersten yapıldığında ise (5.53) eşitliğinden (5.52) eşitliği kolayca elde edilir. □

Bir hemen hemen Hermit manifoldu semi-Kaehler ve G_1 manifold ise bu manifolda $(W_1 \oplus W_3)$ **sınıfındandır** denir [7].

Tanım 5.9. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu $(W_1 \oplus W_3)$ sınıfından ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna G_1-**semi-kosimplektik manifold** denir [1].*

Teorem 5.10. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun G_1-semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul*

$$\delta\Phi = 0, \quad \delta\eta = 0$$

$$(\nabla_X \varphi)(X) - (\nabla_{\varphi(X)}\varphi)(\varphi(X)) + \eta(X)\nabla_{\varphi(X)}\xi = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun G_1-Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul (5.38) eşitliğinin sağlanmasıdır. Diğer yandan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul $\delta\Phi = 0$ ve $\delta\eta = 0$ olmasıdır. Böylece $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu G_1-semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul bu üç koşulun aynı anda sağlanmasıdır. □

Bir hemen hemen Hermit manifold semi-Kaehler ve G_2 manifold ise bu manifolda $W_2 \oplus W_3$ **sınıfındandır** denir [1].

Tanım 5.11. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ mnifoldu $W_2 \oplus W_3$ sınıfından ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna G_2-**semi-kosimplektik manifold** denir [1].*

Teorem 5.12. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun G_2-semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul*

$$\delta\Phi = 0, \quad \delta\eta = 0$$

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}\{(\nabla_X \Phi)(Y, Z) - (\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y), Z) - \eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)\} = 0$$

eşitliklerinin sağlanmsaıdır.

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun G_2-Sasaki manifold olması için gerek ve yeter koşul (5.44) eşitliğinin sağlanmasıdır. Diğer yandan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul $\delta\Phi = 0$ ve $\delta\eta = 0$ olmasıdır. Böylece $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu G_2-semi-kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul bu üç koşulun aynı anda sağlanmasıdır. □

Bir hemen hemen Hermit $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ manifoldu

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F)((X,a\frac{d}{dt}),(Y,a\frac{d}{dt})) &= \frac{-1}{2n}\Big\{h((X,a\frac{d}{dt}),(X,a\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(Y,b\frac{d}{dt}) \\ &\quad -h((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(X,a\frac{d}{dt}) \qquad (5.54) \\ &\quad -h(J(X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(J(X,a\frac{d}{dt}))\Big\}\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyorsa bu manifold $(W_1 \oplus W_4)$ **sınıfındandır** denir [7].

Tanım 5.13. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ hemen hemen Hermit manifoldu $(W_1 \oplus W_4)$ sınıfından ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna **nearly-trans-Sasaki manifold** denir [1].*

Teorem 5.14. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu nearly-trans-Sasaki manifoldu olması için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X\Phi)(X,Y) = -\frac{1}{2n}\{g(X,X)\delta\Phi(Y) - g(X,Y)\delta\Phi(X) + g(\varphi(X),Y)\eta(X)\delta\eta\} \qquad (5.55)$$

ve

$$(\nabla_X\eta)(Y) = -\frac{1}{2n}\{g(\varphi(X),\varphi(Y))\delta\eta + g(\varphi(X),Y)\delta\Phi(\xi)\} \qquad (5.56)$$

koşullarını sağlamasıdır.

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu nearly-trans-Sasaki manifold ise (5.54) eşitliği her vektör alanı için sağlandığından özel olarak $a = b = 0$ alındığında

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X,0)}F)((X,0),(Y,0)) = &\ -\frac{1}{2n}\{h((X,0),(X,0))\bar{\delta}F((Y,0)) \\ &\ -h((X,0),(Y,0))\bar{\delta}F((X,0)) \\ &\ -h(J(X,0),(Y,0))\bar{\delta}F(J(X,0))\} \\ = &\ -\frac{1}{2n}\{g(X,X)\delta\Phi(Y) - g(X,Y)\delta\Phi(X) \\ &\ -g(\varphi(X),Y)\left(\delta\Phi(\varphi(X)) - \eta(X)\delta\eta\right)\}\end{aligned}$$

ve $(\nabla_{(X,0)}F)((X,0),(Y,0)) = (\nabla_X\phi)(X,Y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}(\nabla_X\Phi)(X,Y) &= -\frac{1}{2n}\{g(X,X)\delta\Phi(Y) - g(X,Y)\delta\Phi(X) \\ &\quad -g(\varphi(X),Y)\left(\delta\Phi(\varphi(X)) - \eta(X)\delta\eta\right)\} \qquad (5.57)\end{aligned}$$

bulunur. (5.54) eşitliği $(X,\frac{d}{dt})$ ve $(Y,0)$ vektör alanlarına uygulandığında

$$\begin{aligned}(\nabla_{(X,\frac{d}{dt})}F)((X,\frac{d}{dt}),(Y,0)) = \quad & -\frac{1}{2n}\{h((X,\frac{d}{dt}),(X,\frac{d}{dt}))\delta F((Y,0)) \\ & -h((X,\frac{d}{dt}),(Y,0))\delta F((X,\frac{d}{dt})) \\ & -h(J(X,\frac{d}{dt}),(Y,0))\delta F(J(X,\frac{d}{dt}))\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_X\Phi)(X,Y)+(\nabla_X\eta)(Y) \quad = \quad & \frac{1}{2n}\{(g(X,X)+1)(\delta\Phi(Y)-0\delta\eta) \\ & -g(X,Y)(\delta\Phi(X)-\delta\eta) \\ & -g(\varphi(X)-\xi,Y)(\delta\phi(\varphi(X)-\xi)-\eta(X)\delta\eta)\}\end{aligned}$$

olur ve bu eşitlikte (5.57) eşitliği yerine yazılırsa

$$(\nabla_X\eta)(Y)=-\frac{1}{2n}\{g(\varphi(X),\varphi(Y))\delta\eta+g(\varphi(X),Y)\delta\Phi(\xi)+\eta(Y)\delta\Phi(\varphi(X))\} \quad (5.58)$$

elde edilir. (5.58) eşitliğinde $X=\xi$ alınırsa

$$\left(\nabla_\xi\eta\right)(Y)=0 \qquad (5.59)$$

olur. Ayrıca (5.59) eşitliği kullanılarak, (5.57) eşitliğinde $X=\xi$ alınırsa

$$(\nabla_\xi\Phi)(\xi,Y)=-\frac{1}{2n}\{\delta\Phi(Y)-\eta(Y)\delta\Phi(\xi)\}$$

ve $(\nabla_\xi\Phi)(\xi,Y)=-\left(\nabla_\xi\eta\right)(Y)=0$ olduğundan

$$\delta\Phi(Y)-\eta(Y)\delta\Phi(\xi)=0$$

ve $Y=\varphi(Y)$ alındığında

$$\delta\Phi(\varphi(Y))=0$$

bulunur. Bu ifade (5.57) ve (5.58) eşitliklerinde yerine yazıldığında (5.55) ve (5.56) eşitlikleri bulunmuş olur.

Tersine (5.55) ve (5.56) eşitlikleri sağlansın. (5.56) eşitliğinde $X=\xi$ alındığında

$$\nabla_\xi\xi=0$$

ve (5.55) eşitliğinde $X=\xi$ alındığında

$$\delta\Phi(Y)-\eta(Y)\delta\Phi(\xi)=0$$

bulunur. Ayrıca son eşitlikte $Y = \varphi(Y)$ alındığında

$$\delta\Phi(\varphi(Y)) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F)((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt})) \\
= \quad & (\nabla_X\Phi)(X,Y) - b(\nabla_X\eta)(X) + a(\nabla_X\eta)(Y) \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{g(X,X)\delta\Phi(Y) - g(X,Y)\delta\Phi(X) + g(\varphi(X),Y)\eta(X)\delta\eta\} \\
& +\frac{1}{2n}b\{g(\varphi(X),\varphi(X))\delta\eta + g(\varphi(X),X)\delta\Phi(\xi)\} \\
& -\frac{1}{2n}a\{g(\varphi(X),\varphi(Y))\delta\eta + g(\varphi(X),Y)\delta\Phi(\xi)\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{g(X,X)\delta\Phi(Y) - g(X,Y)\delta\Phi(X) + g(\varphi(X),Y)\eta(X)\delta\eta\} \\
& -\frac{1}{2n}\{-bg(X,X)\delta\eta + b\eta(X)\eta(X)\delta\eta - g(\varphi(X),X)\delta\Phi(\xi)\} \\
& -\frac{1}{2n}\{ag(X,Y)\delta\eta - a\eta(X)\eta(Y)\delta\eta + ag(\varphi(X),Y)\delta\Phi(\xi)\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\left(g(X,X)+a^2\right)(\delta\Phi(Y) - b\delta\eta) + \frac{1}{2n}(g(X,Y)+ab)(\delta\Phi(X) - a\delta\eta) \\
& +\frac{1}{2n}(g(\varphi(X),Y) - a\eta(Y) + b\eta(X))(\delta\Phi(\varphi(X)) - a\delta\Phi(\xi) - \eta(X)\delta\eta) \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\Big\{h((X,a\frac{d}{dt}),(X,a\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F((Y,b\frac{d}{dt})) \\
& -h((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F((X,\frac{d}{dt})) \\
& -h(J(X,\frac{d}{dt}),(Y,b\bar{\delta}))\bar{\delta}F(J(X,a\frac{d}{dt}))\Big\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bir hemen hemen Hermityen manifoldu $(M \times \mathbb{R}, J, h)$'nun Kaehler 2-formu F olmak üzere θ **Lee 1-formu**

$$\theta(X,a\frac{d}{dt}) = \frac{1}{n}\delta F(J(X,a\frac{d}{dt})) = \frac{1}{n}(\delta\Phi(\varphi(x)) - \eta(X)\delta\eta - a\delta\Phi(\xi)) \tag{5.60}$$

olarak tanımlıdır. Eğer

$$dF = F \wedge \theta \tag{5.61}$$

ise $(M \times \mathbb{R}, J, h)$ hemen hemen Hermit manifolduna $(W_2 \oplus W_4)$ **sınıfındandır** denir [7]. Ayrıca M üzerindeki ω **1-formu**

$$\omega(X) = \theta(X,0) = \frac{1}{n}(\delta\phi(\varphi(x)) - \eta(X)\delta\eta) \tag{5.62}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 5.15. *$(M \times \mathbb{R}, J, h)$ hemen hemen Hermit manifoldu $(W_2 \oplus W_4)$ sınıfından ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna* ***hemen hemen -trans-Sasaki manifold*** *denir [1].*

Teorem 5.16. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu hemen hemen-trans-Sasaki manifoldu olması için gerek ve yeter koşul*

$$d\Phi = \Phi \wedge \omega \tag{5.63}$$

ve

$$d\eta = \frac{1}{2n}\{\delta\Phi(\xi)\Phi - 2\eta \wedge \varphi(\delta\Phi)\} \tag{5.64}$$

eşitliklerini sağlamasıdır.

Kanıt. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu hemen hemen-trans-Sasaki manifold olsun. (5.61) eşitliği her vektör alanı için sağlanacağından, (5.61) eşitliği $(X, 0)$, $(Y, 0)$ ve $(Z, 0)$ vektör alanlarına uygulanırsa

$$dF\left((X,0),(Y,0),(Z,0)\right) = (F \wedge \theta)\left((X,0),(Y,0),(Z,0)\right)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
d\Phi(X,Y,Z) &= dF\left((X,0),(Y,0),(Z,0)\right) \\
&= (F \wedge \theta)\left((X,0),(Y,0),(Z,0)\right) \\
&= F((X,0),(Y,0))\theta(Z,0) - F((X,0),(Z,0))\theta(Y,0) \\
&\quad + F((Y,0),(Z,0))\theta(X,0) \\
&= \Phi(X,Y)\omega(Z) - \Phi(X,Z)\omega(Y) + \Phi(Y,Z)\omega(X) \\
&= (\Phi \wedge \omega)(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.61) eşitliği $(X, 0)$, $(Y, 0)$ ve $(0, \frac{d}{dt})$ vektör alanlarına uygulandığında

$$3dF\left((X,0),(Y,0),(0,\frac{d}{dt})\right) = 3d\Phi(X,Y,0) - 2d\eta(X,Y) = -2d\eta(X,Y)$$

ve

$$\begin{aligned}
(F \wedge \theta)\left((X,0),(Y,0),(0,\tfrac{d}{dt})\right) &= -\tfrac{1}{n}\delta\Phi(\xi)\Phi(X,Y) \\
&\quad + \tfrac{1}{n}\{\eta(X)\delta\Phi(\varphi(Y)) - \eta(Y)\delta\Phi(\varphi(X))\} \\
&= -\tfrac{1}{n}\delta\Phi(\xi)\Phi(X,Y) \\
&\quad + \tfrac{1}{n}2\left(\eta \wedge \varphi(\delta\Phi)\right)(X,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (5.64) eşitliği sağlanmış olur.

Tersine (5.63) ve (5.64) eşitlikleri sağlansın.

$$
\begin{aligned}
& 3dF\left(\left(X,a\tfrac{d}{dt}\right),\left(Y,b\tfrac{d}{dt}\right),\left(Z,c\tfrac{d}{dt}\right)\right) \\
= \; & 3d\Phi(X,Y,Z)-2\left\{cd\eta(X,Y)+ad\eta(Y,Z)+bd\eta(Z,X)\right\} \\
= \; & 3\left(\Phi\wedge\omega\right)(X,Y,Z)-\tfrac{1}{2n}2c\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(X,Y)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(X,Y)\right\} \\
& -\tfrac{1}{2n}2a\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(Y,Z)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(Y,Z)\right\} \\
& -\tfrac{1}{2n}2b\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(Z,X)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(Z,X)\right\} \\
= \; & \Phi(X,Y)\omega(Z)-\Phi(X,Z)\omega(Y)+\Phi(Y,Z)\omega(X) \\
& +\tfrac{1}{2n}2c\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(X,Y)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(X,Y)\right\} \\
& -\tfrac{1}{2n}2a\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(Y,Z)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(Y,Z)\right\} \\
& -\tfrac{1}{2n}2b\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(Z,X)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(Z,X)\right\} \\
= \; & \tfrac{1}{n}\Phi(X,Y)\left\{\delta\Phi(\varphi(Z))-\eta(Z)\delta\eta\right\}-\tfrac{1}{n}\Phi(X,Z)\left\{\delta\Phi(\varphi(Y))-\eta(Y)\delta\eta\right\} \\
& +\tfrac{1}{n}\Phi(Y,Z)\left\{\delta\Phi(\varphi(X))-\eta(X)\delta\eta\right\} \\
& +\tfrac{1}{2n}2c\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(X,Y)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(X,Y)\right\} \\
& -\tfrac{1}{2n}2a\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(Y,Z)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(Y,Z)\right\} \\
& -\tfrac{1}{2n}2b\left\{\delta\Phi(\xi)\Phi(Z,X)-2\left(\eta\wedge\varphi(\delta\Phi)\right)(Z,X)\right\} \\
= \; & \tfrac{1}{n}\left[\Phi(X,Y)-b\eta(X)+a\eta(Y)\right]\left[\delta\Phi(\varphi(Z))-\eta(Z)\delta\eta-c\delta\Phi(\xi)\right] \\
& -\tfrac{1}{n}\left[\Phi(X,Z)-c\eta(X)+a\eta(Z)\right]\left[\delta\Phi(\varphi(Y))-\eta(Y)\delta\eta-b\delta\Phi(\xi)\right] \\
& +\tfrac{1}{n}\left[\Phi(Y,Z)-c\eta(X)+b\eta(Y)\right]\left[\delta\Phi(\varphi(X))-\eta(X)\delta\eta-a\delta\Phi(\xi)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & F\left(\left(X,a\frac{d}{dt}\right),\left(Y,b\frac{d}{dt}\right)\right)\theta\left(Z,c\frac{d}{dt}\right) \\
& -F\left(\left(X,a\frac{d}{dt}\right),\left(Z,c\frac{d}{dt}\right)\right)\theta\left(Y,b\frac{d}{dt}\right) \\
& F\left(\left(Y,b\frac{d}{dt}\right),\left(Z,c\frac{d}{dt}\right)\right)\theta\left(X,a\frac{d}{dt}\right) \\
= \; & (F\wedge\theta)\left(\left(X,a\frac{d}{dt}\right),\left(Y,b\frac{d}{dt}\right),\left(Z,c\frac{d}{dt}\right)\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan (5.61) eşitliği sağlanmış ve (M,φ,ξ,η,g) manifoldu hemen hemen -trans-Sasaki manifold olur. □

Bir hemen hemen Hermit $(M\times\mathbb{R},J,h)$ manifoldu

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F)((Y,b\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})) &+ (\nabla_{J(X,a\frac{d}{dt})}F)(J(Y,b\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt})) = \\
&- \frac{1}{2n}\Big\{h((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F((Z,c\frac{d}{dt})) \\
&- h((X,a\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F((Y,b\frac{d}{dt})) \qquad (5.65)\\
&- h((X,a\frac{d}{dt}),J(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(J(Z,c\frac{d}{dt})) \\
&+ h((X,a\frac{d}{dt}),J(Z,c\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(J(Y,b\frac{d}{dt}))\Big\}
\end{aligned}$$

koşulunu sağlıyorsa $(M\times\mathbb{R},J,h)$ hemen hemen Hermit manifoldu $(W_1\oplus W_2\oplus W_4)$ **sınıfındandır** denir [7].

Tanım 5.17. *$(M\times\mathbb{R},J,h)$ hemen hemen Hermit manifoldu $(W_1\oplus W_2\oplus W_4)$ sınıfından ise (M,φ,ξ,η,g) manifolduna* ***quasi-trans-Sasaki manifold*** *denir.*

Teorem 5.18. *(M,φ,ξ,η,g) manifoldu quasi-trans-Sasaki manifoldu olması için gerek ve yeter koşul her $X,Y\in\chi(M)$ için*

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\Phi)(Y,Z) &+ (\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z) = \\
&-\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z)-g(X,Z)\delta\Phi(Y) \\
&-g(X,\varphi(Y))(\delta\Phi(\varphi(Z))-\eta(Z)\delta\eta) \qquad (5.66)\\
&+g(X,\varphi(Z))(\delta\Phi(\varphi(Y))-\eta(Y)\delta\eta)\}
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

Kanıt. (M,φ,ξ,η,g) manifoldu quasi-trans-Sasaki manifold ise (5.65) eşitliği özel olarak $(X,0)$, $(Y,0)$ ve $(Z,0)$ vektör alanları için de sağlanır: (5.65) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned}
(\nabla_{(X,0)}F)((Y,0),(Z,0)) &+ (\nabla_{J(X,0)}F)(J(Y,0),(Z,0)) \\
&= (\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_{(\varphi(X),\eta(X)\frac{d}{dt})}F)((\varphi(Y),\eta(Y)\frac{d}{dt}),(Z,0)) \\
&= (\nabla_X\Phi)(Y,Z)+(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z)+\eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $(X,0)$, $(Y,0)$ ve $(Z,0)$ vektör alanları için (5.65) eşitliğinin sağ tarafı ise

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2n}\{h((X,0),(Y,0))\bar{\delta}F((Z,0))-h((X,0),(Z,0))\bar{\delta}F((Y,0)) \\
& -h((X,0),J(Y,0))\bar{\delta}F(J(Z,0))+h((X,0),J(Z,0))\bar{\delta}F(J(Y,0))\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z)-g(X,Z)\delta\Phi(Y) \\
& -h((X,0),(\varphi(Y),\eta(Y)\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(\varphi(Z),\eta(Z)\frac{d}{dt}) \\
& +h((X,0),(\varphi(Z),\eta(Z)\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(\varphi(Y),\eta(Y)\frac{d}{dt})\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z)-g(X,Z)\delta\Phi(Y) \\
& -g(X,\varphi(Y))(\delta\Phi(\varphi(Z))-\eta(Z)\delta\eta)+g(X,\varphi(Z))(\delta\Phi(\varphi(Y))-\eta(Y)\delta\eta)\}
\end{aligned}
$$

olduğundan (5.66) eşitliği elde edilmiş olur.

Tersine (5.66) eşitliği sağlansın. (5.66) eşitliğinde $Y=\varphi(Y)$ ve $Z=\xi$ alındığında

$$
\begin{aligned}
((\nabla_X\eta)(Y)+(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(\varphi(Y))) \quad = \quad & -\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\eta-g(X,\varphi(Y))\delta\phi(\xi) \\
& +\eta(X)\delta\phi(\varphi(Y))-\eta(X)\eta(Y)\delta\eta\}\,,
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

(5.66) eşitliğinde $Y=\varphi(Y)$ ve $X=\xi$ alındığında

$$((\nabla_\xi\phi)(\varphi(Y),Z)+\eta(Y)(\nabla_\xi\eta)(Z))=-\frac{1}{2n}\{\eta(Y)\delta\phi(\varphi(Z))-\eta(Z)\delta\phi(\varphi(Y))\}, \tag{5.68}$$

(5.68) eşitliğinde $Y=\varphi(Y)$ ve $Z=\xi$ alındığında

$$((\nabla_\xi\eta)(\varphi(Y))=-\frac{1}{2n}\{-\delta\phi(Y)+\eta(Y)\delta\phi(\xi)\} \tag{5.69}$$

ve (5.66) eşitliğinde $X=Y=\xi$ alınırsa

$$-\left(\nabla_\xi\eta\right)(\varphi(Z))=((\nabla_\xi\Phi)(\xi,Z)=-\frac{1}{2n}\{\delta\Phi(Z)-\eta(Z)\delta\Phi(\xi)\} \tag{5.70}$$

bulunur. (5.66) eşitliği kullanıldığında (5.65) eşitliğinin sol tarafı

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_{(X,a\frac{d}{dt})}F)((Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt}))+(\nabla_{J(X,a\frac{d}{dt})}F)(J(Y,b\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt})) \\
= \quad & (\nabla_X\Phi)(Y,Z)-c(\nabla_X\eta)(Y)+b(\nabla_X\eta)(Z) \\
& +(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi,\eta(X)\frac{d}{dt})}F)((\varphi(Y)-b\xi,\eta(Y)\tfrac{d}{dt}),(Z,c\tfrac{d}{dt}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\nabla_X \Phi)(Y,Z) - c(\nabla_X \eta)(Y) + b(\nabla_X \eta)(Z) \\
&\quad +(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)}\Phi)(\varphi(Y) - b\xi, Z) - c(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)}\eta)(\varphi(Y) - b\xi) \\
&\quad +\eta(Y)(\nabla_{(\varphi(X)-a\xi)}\eta)(Z) \\
&= (\nabla_X \Phi)(Y,Z) - c(\nabla_X \eta)(Y) + b(\nabla_X \eta)(Z) \\
&\quad +(\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y), Z) - b\left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)\varphi(Z) - a(\nabla_\xi \Phi)(\varphi(Y), Z) \\
&\quad -ab\left(\nabla_\xi \eta\right)\varphi(Z) + ac(\nabla_\xi \eta)(\varphi(Y)) + \eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z) \\
&\quad -c\left(\nabla_{\varphi(X)}\eta\right)\varphi(Y) - a\eta(Y)(\nabla_\xi \eta)(Z)
\end{aligned}
$$

olur. (5.66)-(5.70) eşitlikleri kullanıldığında (5.65) eşitliğinin sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2n}\{h((X,a\frac{d}{dt}),(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F((Z,c\frac{d}{dt})) - h((X,a\frac{d}{dt}),(Z,c\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F((Y,b\frac{d}{dt})) \\
& -h((X,a\frac{d}{dt}),J(Y,b\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(J(Z,c\frac{d}{dt})) + h((X,a\frac{d}{dt}),J(Z,c\frac{d}{dt}))\bar{\delta}F(J(Y,b\frac{d}{dt}))\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{(g(X,Y)+ab)(\delta\Phi(Z) - c\delta\eta) - (g(X,Z)+ac)(\delta\Phi(Y) - b\delta\eta) \\
& -h((X,a\frac{d}{dt}),(\varphi(Y) - b\xi, \eta(Y)\frac{d}{t}))\bar{\delta}F(\varphi(Z) - c\xi, \eta(Z)\frac{d}{dt}) \\
& +h((X,a\frac{d}{dt}),(\varphi(Z) - c\xi, \eta(Z)\frac{d}{t}))\bar{\delta}F(\varphi(Y) - b\xi, \eta(Y)\frac{d}{dt})\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{(g(X,Y)\delta\Phi(Z) - cg(X,Y)\delta\eta + ab\delta\Phi(Z) - abc\delta\eta \\
& -g(X,Z)\delta\Phi(Y) + bg(X,Z)\delta\eta - ac\delta\Phi(Y) + abc\delta\eta \\
& -g(X,\varphi(Y) - b\xi) + a\eta(Y))(\delta\Phi(\varphi(Z) - c\xi) - \eta(Z)\delta\eta) \\
& +g(X,\varphi(Z) - c\xi) + a\eta(Z))(\delta\Phi(\varphi(Y) - b\xi) - \eta(Y)\delta\eta)\} \\
= \quad & -\frac{1}{2n}\{g(X,Y)\delta\Phi(Z) - g(X,Z)\delta\Phi(Y) \\
& -g(X,\varphi(Y))(\delta\Phi(\varphi(Z)) - \eta(Z)\delta\eta) + g(X,\varphi(Z))(\delta\Phi(\varphi(Y)) - \eta(Y)\delta\eta)\} \\
& +\frac{c}{2n}\{g(X,Y)\delta\eta - g(X,\varphi(Y))\delta\Phi(\xi) + \eta(X)\delta\Phi(\varphi(Y)) - \eta(X)\eta(Y)\delta\eta\} \\
& +\frac{a}{2n}\{\eta(Y)\delta\Phi(\varphi(Z)) - \eta(Z)\delta\Phi(\varphi(Y))\} \\
& -\frac{ac}{2n}\{-\delta\Phi(Y) + \eta(Y)\delta\Phi(\xi)\} \\
& -\frac{ab}{2n}\{\delta\Phi(Z) - \eta(Z)\delta\Phi(\xi)\} \\
& -\frac{b}{2n}\{g(X,Z)\delta\eta - g(X,\varphi(Z))\delta\Phi(\xi) + \eta(X)\delta\Phi(\varphi(Z)) - \eta(Z)\eta(X)\delta\eta\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & (\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_{\varphi(X)}\Phi)(\varphi(Y),Z) + \eta(Y)(\nabla_{\varphi(X)}\eta)(Z) \\
& -c((\nabla_X\eta)(Y) + (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(\varphi(Y))) \\
& -a((\nabla_X\eta)(Y) + (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(\varphi(Y))) \\
& +ac((\nabla_\xi\eta)(\varphi(Y)) - ab((\nabla_\xi\eta)(\varphi(Z)) \\
& +b((\nabla_X\eta)(Z) - (\nabla_{\varphi(X)}\eta)(\varphi(Z)))
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (5.66) eşitliğinden (5.65) eşitliği elde edilmiş olur. □

Herhangi bir hemen hemen kontak metrik manifoldun Φ temel 2-formunun kovaryant türevinin sağladığı özelliklere göre bir sınıflaması vardır. Bu sınıflama ve bu tüm sınıfların tanımlama bağıntıları [3]'de verilmiştir.

5.1 G_1-Sasaki Manifoldlar

Çalışmanın son adımında, [3]'de verilen sınıflardan hangilerinin G_1-Sasaki manifold olduğu belirlenecektir.

Teorem 5.2. *C_1, C_3,C_4, C_5, C_6, C_7, C_8 sınıflarında yer alan hemen hemen kontak metrik manifoldlar G_1-Sasaki manifold olurlar.*

Kanıt. Herbir C_i sınıfının G_1-Sasaki manifoldu olması için gerekli olan

$$
\left(\nabla_X\varphi\right)(X) - \left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi(X) + \eta(X)\nabla\varphi(X)\xi = 0 \tag{5.71}
$$

koşulunu sağlayıp sağlamadığı gösterilecektir.

C_1 **sınıfı**: C_1 sınıfında her X, Y vektör alanı için $\left(\nabla_X\Phi\right)(X,Y) = 0$ ve $\nabla\eta = 0$ olduğundan $\left(\nabla_X\varphi\right)(X) = 0$ ve $\nabla_X\xi = 0$ olur. Ayrıca $\left(\nabla_X\varphi\right)(X) = 0$ eşitliği her X vektör alanı için sağlandığından $\varphi(X)$ vektör alanı için de

$$
\left(\nabla_{\varphi(X)}\varphi\right)(\varphi(X)) = 0
$$

olur. Bu eşitlikler (5.71) de yerine yazılırsa eşitlik sağlanır. Böylece C_1 sınıfından herhangi bir hemen hemen kontak metrik manifold G_1-Sasaki manifold olur.

C_3 **sınıfı**: C_3 Sınıfından bir hemen hemen kontak metrik manifold

$$
\left(\nabla_X\Phi\right)(Y,Z) - \left(\nabla_{\varphi(X)}\Phi\right)(\varphi(Y),Z) = 0, \quad \nabla\eta = 0 \tag{5.72}
$$

eşitliklerini sağlar. Özel olarak $X = Y$ alındığında

$$\begin{aligned} 0 = (\nabla_X \Phi)(X, Z) - \left(\nabla_{\varphi(X)} \Phi\right)(\varphi(X), Z) &= -g\left((\nabla_X \varphi)(X), Z\right) \\ &\quad + g\left(\left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(\varphi(X)), Z\right) \end{aligned}$$

ve g metriği non-dejenere olduğundan

$$(\nabla_X \varphi)(X) = \left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(\varphi(X))$$

bulunur. Ayrıca C_3 sınıfının tanım eşitliğinde $Y = \xi$ ve $X = \varphi(X)$ alınırsa

$$\left(\nabla_{\varphi(X)} \Phi\right)(\xi, Z) = -g\left(\left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(\xi), Z\right) = 0$$

ve

$$\varphi\left(\nabla_{\varphi(X)} \xi\right) = 0, \quad \nabla_{\varphi(X)} \xi = 0$$

bulunur. Sonuçlar (5.71) eşitliğinde yerine yazılırsa bu eşitlik sağlandığından C_3 sınıfından bir hemen hemen kontak metrik manifold G_1-Sasaki manifold olur.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer bu manifold normal ise her X, Y vektör alanı için

$$(\nabla_X \varphi)(Y) - \left(\nabla_{\varphi(X)} \varphi\right)(\varphi(Y)) + \eta(Y) \nabla_{\varphi(X)} \xi = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte $X = Y$ alındığında G_1-Sasakian olma koşulu elde edilir. Böylece her normal hemen hemen kontak metrik manifold G_1-Sasaki manifold olur. Normal hemen hemen kontak metrik manifoldların sınıfı [3]

$$C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \oplus C_7 \oplus C_8$$

olduğundan bu sınıflarda bulunan manifoldlar G_1-Sasaki manifold olurlar.

Sonuç olarak $C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 \oplus C_6 \oplus C_7 \oplus C_8$ **sınıfında** yer alan herhangi bir hemen hemen kontak metrik manifold G_1**-Sasaki manifoldu** olur.

□

KAYNAKÇA

[1] Oubina, Jose A., A Classification for Almost Contact Structures, Preprint (1980).

[2] Boyer, C. P. and Galicki, K., On Sasakian-Einstein geometry, Int. J. Math. 11, 873 (2000).

[3] Chinea, D., Gonzales, C. 1990. A Classification of Almost Contact Metric Manifolds. Ann. Mat. Pura Appl., 156 (4), 15-36.

[4] Dileo, G., Pastore, A. M.,Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14 (2007).

[5] Najafi, B., Kashani, H., On Nearly Kenmotsu Manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 37, 2013.

[6] Blair, D.E. The Theory of Quasi-Sasakian Structures. J. Differential Geometry, 1, 331-345, 1967.

[7] Gray, A. and Hervella, L. M., The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants, Annali di Matematica Pura ed Applicate, 123 (1980).

[8] Kobayashi,S. Nomizu, K., Foundations of differential geometry Volume I, John Wiley and Sons, 1963.

[9] Blair, D. E., Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Birkhauser, 2010.

[10] Chen, Bang-Yen, Pseudo-Riemannian Geometry, δ-invariants and Applications, World Scientific, 2011.

[11] Lee, John M., Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature, Springer, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Murat EFE
Yabancı Dil	:	İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı	:	Fatsa - 1987
E-Posta	:	m.efe@anadolu.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2007-2013, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi , Matematik Bölümü
- 2016-2018, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı, Yüksek Lisans