SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ VE ÖLÇME PROBLEMLERİNİ ÇÖZME SÜREÇLERİNDEKİ CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Yasemin ATAŞ

Eskişehir 2019

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ VE ÖLÇME PROBLEMLERİNİ ÇÖZME SÜREÇLERİNDEKİ CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİ

Yasemin ATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Dilek TANIŞLI

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ocak 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Yasemin ATAŞ'ın "8. Sınıf Öğrencilerinin Geometri ve Ölçme Problemlerini Çözme Süreçlerindeki Cebirsel Düşünme Becerileri" başlıklı tezi 21.12.2018 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi programı yüksek lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. Dilek TANIŞLI	....
Üye	: Doç.Dr. Nilüfer KÖSE	....
Üye	: Doç.Dr. Çiğdem KILIÇ	....

Prof.Dr. Handan DEVECİ
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Müdür Vekili

ÖZET

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ VE ÖLÇME PROBLEMLERİNİ ÇÖZME SÜREÇLERİNDEKİ CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİ

Yasemin ATAŞ
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2019
Danışman: Doç. Dr. Dilek TANIŞLI

Cebirsel düşünme, cebir ile ilişkili olmasının yanında matematiğin diğer tüm alanlarını da kapsayan bir düşünme biçimidir. Bu bağlamda araştırma kapsamında; ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme bağlamında, geometri çalışmalarında semboller ve cebirsel ilişkileri, örüntüler ve genellemeleri, çoklu temsilleri nasıl kullandıklarını ve bu süreçte ortaya çıkan kavramsal zorlukları belirlemek amaçlanmıştır. Araştırma verilerinin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanmasında temel nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Katılımcılar 2017-2018 eğitim öğretim yılında, Bartın ilinde bir devlet okulunda öğrenim gören sekizinci sınıf öğrencileri arasından Van Hiele Geometrik Düşünme Düzey Belirleme Testi ve araştırmacı tarafından hazırlanan Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi aracılığıyla seçilmiştir. Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerine göre ikinci düzeyde olan öğrencilerden iki yüksek, iki orta ve iki düşük cebirsel düşünmeye sahip toplam altı öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sürecinde toplanan veriler tematik analiz yöntemi ile incelenmiştir. Süreç içinde belirlenen tema, alt tema ve kodlar bağlamında araştırma bulguları sunulmuştur. Araştırma sonunda öğrencilerin geometri problemlerini çözerken cebirsel düşünme düzeyleri arttıkça geometri-cebir ilişkilendirmesi yapabildikleri; farklı temsilleri kullanabilme, temsiller arası geçiş yapabilme ve temsillerin geometrik anlamlarını yorumlayabilme becerilerinin arttığı; verilen örüntünün uzak adımını bulmak için cebirsel yaklaşımı kullandıkları, harfli ifadeler, doğrusal ilişki ve doğrusallık kavramlarına ile ilgili kavramsal zorluklar yaşadıkları sonuçlarına ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Cebirsel düşünme, Geometri, Semboller ve cebirsel ilişkiler, Çoklu temsiller, Örüntü ve genelleme.

ABSTRACT

EIGHTH GRADE STUDENTS' ALGEBRAIC THINKING SKILLS IN THE PROCESS OF SOLVING GEOMETRY AND MEASUREMENT PROBLEMS

Yasemin ATAŞ

Department of Mathematics Education

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, January 2019

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Algebraic thinking is form of thinking that includes all the areas of maths in addition to being related to algebra. It was aimed to determine the difficulties that occurs in this process how the 8th grade students use the multiple presentations, pattern and generalisations, symbols and algebraical relations in geometry studies. Main qualitative researche techniques are adopted in collecting research data analyzing. Were selected among the 8th grade students of a puplic school in Bartın in 2017-2018 academic year. Students are selected by algebraic thinking determining level test that prepared by resercher and Van Hiele geometric thining placement test. From the students that are in the second level according to Van Hiele's Geometrical Thinking Levels, two students in high level, two students in mid level and two students in low level who have algebraic thinking, totally 6 students are in clinical interview. The data gathered in research process, are investigated through thematic analyzing method. Theme, subtheme and codes were stated in the process. At the end of the research it was concluded that as the level of algebraic thinking increases, students will be able to correlate geometry-algebra and they head toward commenting while they geometrical meanings of algebraic expressions. As the levels of algebraic thinking increases, students will be able to use different multiple presentations together, switch between presentations and commenting the geometric meanings of presentations in a truly way. These are the other results in the research process, while students study with pattern problems, they use visual and numerical approaches in order to find closer step of given pattern, they use algebraic approach to find further step.It was concluded that, 8th grade students have conceptual difficulties about unknown. They also have mistakes related to linear relationship and linearity.

Keywords: Algebraic thinking, Geometry, Symbols and algebraic relations, Multiple presentations, Pattern and generalisation.

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca danışmanlığımı yapan, her zaman sonsuz sabır ve sevgi ile bana yol gösteren, öğrenmeyi ve öğretmeyi öğreten, hayata karşı duruşu, değerleri ve insani yönü ile örnek aldığım, öğrencisi olmaktan onur duyduğum öğretmenim, tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Dilek TANIŞLI'ya

Tez jürimde yer alarak görüş ve önerileri ile katkıda bulunan değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE ve Sayın Doç. Dr. Çiğdem KILIÇ'a

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim, hayatımda oldukları için şanslı olduğum, zamanın ve mesafelerin varlığını unutturan Merve MUTLU, Ebru GÜNDOĞAN AŞIK ve tüm arkadaşlarıma

Öğretmenlik mesleğine başladığım ilk günden itibaren yanımda olan, arada mesafeler olsa da her zaman desteğini hissettiğim, aday öğretmenlik sürecimde danışmanlığımı yapan, tez çalışmam için beni yüreklendiren öğretmenim Canan KEKLİK ve eşi Akın KEKLİK'e

Hayatımın her döneminde desteğini ve sevgisini hissettiğim, çocukluk kahramanım, halam Rabia ALPSOY'a

Son olarak beni yetiştiren, bana hayatı ve sevmeyi öğreten, benim ve kardeşlerim için ter türlü fedakarlığı yapan, bizleri Atatürk ilke ve inkılaplarına bağlı bireyler olarak yetiştiren, varlıklarından güç aldığım annem Asiye ATAŞ ve babam Mustafa ATAŞ ile tüm bu süreçte en büyük destekçilerim olan ablam Hilal ATAŞ, kardeşim Sibel ATAŞ'a ve abim Uygar ÜSTÜNDAĞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım…

Yasemin ATAŞ

Eskişehir 2019

31/01/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Yasemin ATAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

MEB	:	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	:	National Council of Teachers of Mats (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)
PISA	:	Programme for International Student Assessment (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı)
TIMMS	:	Trends in International Mathematics and Science Study

1. GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik tarih boyunca bazen insanların günlük yaşam ihtiyaçlarını karşılamak, yaşadıkları dünyayı tanımlamak için kullandıkları bir araç bazen de keşfetme ve bilme ihtiyaçlarını karşılamak için ulaşmaya çalıştıkları bir amaç olmuştur. Günümüzde temel bir bilim olarak ele alınmasının yanı sıra teknolojik gelişmelerle birlikte, fizik, kimya gibi birçok bilim dalının da temel taşlarındandır. Bu nedenle matematik yalnızca okullarda okutulan ve soyut hesaplamalar yapılan bir ders olarak algılanmamalıdır. Matematik yaşamımızın her alanında farkında olarak ya da olmayarak kullandığımız bir düşünce biçimidir. Matematiksel düşünme olarak adlandırdığımız bu düşünce biçimi; tahmin etme, genelleme, varsayımda bulunup test etme, soyutlama, muhakeme etme, ispatlama ile yeni bir bilgi ya da kavrama ulaşma özellikleriyle diğer düşünmelerden ayrılır (Alkan ve Bukova Güzel, 2005). Matematiksel düşünme, matematiğin aritmetik, cebir, geometri, olasılık gibi farklı alanlarında kullanılan matematiksel tekniklerin doğasına bağlı olarak farklı biçimler almaktadır (Dindyal, 2003). Bu biçimlerden biri olan cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin bir alt kümesi olarak ele alınabilir.

Cebirsel düşünme, öğrencilerin bazı özel durumlardan bir dizi matematiksel fikri genellediği bir süreçtir. Bu süreç akıl yürütme yoluyla genellemeleri kurmayı, zamanla daha yaşa uygun ve formel şekilde genellemeleri ifade etmeyi içerir (Kaput ve Blanton, 2005). Cebirsel düşünme akıl yürütme, çoklu temsil kullanma, değişkenleri anlama, sembolik temsillerin anlamını açıklama, matematiksel fikirlerin gelişimi için modellerle çalışma, temsiller arasında geçiş yapma gibi matematik için önemli becerilerden oluşan bir düşünme şeklidir (Kaf, 2007). Bu düşünme şekli sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme ve olasılık öğrenme alanlarından oluşan matematiğin (MEB, 2013) konu alanları içinde geniş ve önemli bir yere sahiptir.

Matematik eğitiminin genel amaçlarından biri matematik öğrenme alanlarını öğretmek ve öğrencilerin bu alanlar arasında anlamlı ilişkiler kurmalarını ve geçiş yapabilmelerini sağlamaktır (MEB, 2013; NCTM, 2000). Nitekim National Council of Teachers of Mats (NCTM) yani Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi standartları sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme ve olasılık konu alanları arasında ilişki kurmaya ve konu alanlarının birbirlerini tamamlamalarına önem vermektedir. Dolayısıyla öğrencilerin farklı öğrenme alanları arasında ilişki kurmaya yönelik çalışmalar yapmaları ya da yönlendirilmeleri onların anlamlı öğrenmeleri, ilişkilendirme ve iletişim becerilerinin gelişimi açısından önemlidir. Bu bağlamda derslerde öğrencilere örneğin aritmetik ve sayma yaklaşımını kullanma, geometrik bir diyagram çizme ve cebirsel denklemleri kullanma gibi çok yönlü bilgileri kullanmalarını gerektirecek etkinlikler hazırlanmalıdır (NCTM; 2000).

Matematiğin önemli konu alanlarından biri cebir ve diğeri de geometridir. Geometri, öğrenciler için cebirsel, aritmetik, istatistik ve matematiksel kavramları görselleştirmeye yardımcı olan zengin bir kaynaktır (Napitulupu, 2001). Geometrik temsiller öğrencilerin alan ve kesir kavramlarını anlamlandırmalarına, daire grafikleri ya da histogramlarla verilerin temsillerini görselleştirmede ayrıca koordinat grafikleri yardımıyla cebir ile geometriyi birleştirmelerinde yardımcı olur (NCTM, 2000). Bu noktada geometri öğrenme alanı matematik dersi öğretim programları için birleştirici bir tema olarak karşımıza çıkmaktadır (Napitulupu, 2001). Diğer taraftan matematikte cebir yapma soyutlama yapabilme gücü gerektirir. Bu bakımdan, matematiğin bir soyutlama yapma bilimi oluşu cebirsel ifadelerle tam anlamını bulur (Altun, 2005). Aynı zamanda cebir günlük yaşamın içinde her alanda karşımıza çıkmakta ve kendini hissettirmektedir. Böylece öğrenilmesi de bir gereksinim haline gelmektedir. Usiskin'in (2004) "geometri matematiğin ruhu olabilir ancak cebir onun kalbidir, kalbin ruha ve ruhun kalbe ihtiyacı varken matematiğin her ikisine de ihtiyacı vardır" ifadesi geometri ve cebirin birbirinden bağımsız olarak ele alınmayacağına işaret etmektedir.

Geometri ve cebir konu alanlarının birbirleriyle ilişkisi de geçmişe dayanmaktadır. Tarihte cebirsel ispatlarda kullanım alanı bulan geometri, koordinat düzleminin gelişmesiyle daha geniş bir çalışma alanı haline gelmiştir (NCTM, 2000). Kleine'e (1972'den aktaran Dindyal, 2003) göre koordinat düzlemiyle geometrik kavramlar cebir yoluyla elde edilebilir ve cebirsel olarak formüle edilebilir. Ayrıca cebirsel durumlar geometrik olarak yorumlanabilir ve problem çözümünde bir sonuca varmak için sezgisel öneri oluşturabilir.

Günümüz matematik öğretim programlarında cebir, öğrenciler tarafından ilköğretim ikinci kademeden başlayarak üniversiteye kadar endişe ve korkuyla anılmakta ve öğrenciler için anlaşılmasında büyük zorlukların çekildiği bir ders haline gelmektedir (Dede ve Argün, 2003). Benzer şekilde öğrenciler tarafından önyargı ile bakılan ve anlaşılmasında güçlük çekilen bir diğer konu alanı da geometridir (Mistretta, 2000). Banchoff (2008) cebir ve geometri arasındaki etkileşimi vurgulayarak formül ve kavramların gösterimlerinde diyagramlardan yararlanmanın ve cebirsel fikirleri anlatırken geometrik yapıları kullanmanın akademik başarıyı olumlu etkilediğini söylemektedir. Aynı zamanda bu iki öğrenme alanının matematik eğitiminin tüm düzeylerinde; birbirlerini tamamladıkları ve farklı şekillerde düşünmeyi içerdikleri zaman daha iyi öğrenme ve öğretme sağlayacağını ileri sürmektedir.

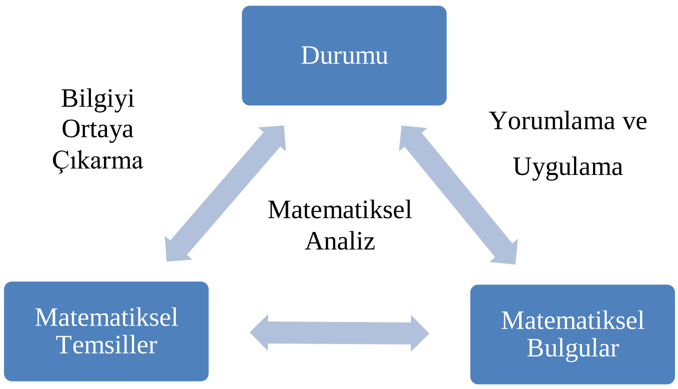
Sonuç olarak cebir ve geometri öğrenme alanları arasındaki ilişki öğrencilere matematiğe farklı açılardan bakabilme yeteneği kazandırır (Dindyal, 2003). Bu ilişkinin öğrenciler tarafından anlaşılması akademik başarıyı olumlu yönde etkileyebilir. Öte yandan cebir ve geometri konu alanları arasındaki geçişler ise cebirsel düşünme yardımıyla daha kolay ve anlaşılır hale gelebilir. Matematiğin konu alanları ile cebirsel düşünme basamakları arasındaki ilişkinin anlaşılması daha kaliteli matematik eğitimi açısından önemlidir. Driscoll (1999) de öğretmenlerin cebirsel olmayan ortamlarda cebirsel düşünmeyi ortaya çıkarmasını ve özellikle geometride cebirsel düşünmeyi fark etmelerini ve öğrencilerini bu konuya yönlendirmeleri gerektiğini vurgular. Bu vurgu şu soruları akla getirmiştir. Konu alanları arasında geçişlerde cebirsel düşünme bileşenleri öğrenciler tarafından nasıl kullanılmaktadır? Daha özelde ise, birleştirici bir konu alanı olarak geometri içinde cebirsel düşünme bileşenleri nasıl işlemektedir? Bu bağlamda çalışma kapsamında, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin ortaokul öğretim programında yer alan geometri öğrenme alanı içerisinde cebirsel düşünmeyi nasıl kullandıklarını araştırmak amaçlanmıştır.

1.2. Kuramsal Çerçeve

1.2.1. Cebirsel düşünme nedir?

Cebirsel düşünme dendiğinde ilk akla gelen matematiğin bir dili (Usiskin, 1997) olan cebirdir. Bilinmeyenler, formüller, örüntüler, değişkenlerin yerini alan yer tutucular ve ilişkiler gibi bileşenlerden oluşan cebir, matematiğin genel sayı ilişkilerini ve özelliklerini gösteren, yalnızca harfli semboller ile nicelikleri temsil etmeyen aynı zamanda sembollerle işlem yapılabilen bir alanıdır (Kieran, 1992). Cebir ile ilişkili olmasına karşın cebirsel düşünme yalnızca cebir konuları ile sınırlandırılamaz. Bireylerin günlük yaşamda karşılaştıkları problemleri çözmelerine yardımcı olan cebirsel düşünme (Akkan, 2016) cebirden çok daha geniş ve kapsamlı bir alan, bir düşünme biçimidir. Matematiksel düşünmenin özel bir şekli olan cebirsel düşünme soyut düşünmenin gelişimi için bir başlangıç adımıdır.

Alanyazında cebirsel düşünme için pek çok tanım yer almaktadır. Cebirsel düşünme, öğrencilerin bazı özel durumlardan bir dizi matematiksel fikri genellediği bir süreçtir. Bu süreç sayı ve hesaplamaya dair deneyimlerden genellemeler yapmayı, bu genellemeleri anlamlı bir sembol sistemi ile biçimlendirmeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını keşfetmeyi içerir (Van de Wall, Karp ve Bay-Williams, 2011). Greenes ve Findell'e (1998) göre cebirsel düşünme önemli fikirleri, temsilleri, orantısal akıl yürütmeyi, dengeyi, değişkenlerin anlamını, örüntüleri ve fonksiyonları, tümevarımlı ve tümdengelimli akıl yürütmeyi içerir. Şekil 1.1'de verildiği gibi Herbert ve Brown'a (1997) göre ise cebirsel düşünme, matematiksel sembol ve araçları kullanarak bir durumdan bilgi çıkarımında bulunmak, kelimeler, diyagramlar, tablo ve grafikler ve denklemler kullanarak bilgiyi ifade etmek ve elde edilen bilgiyi cebirsel dile aktararak test etmek ve farklı matematiksel durumlara uyarlamaktır.



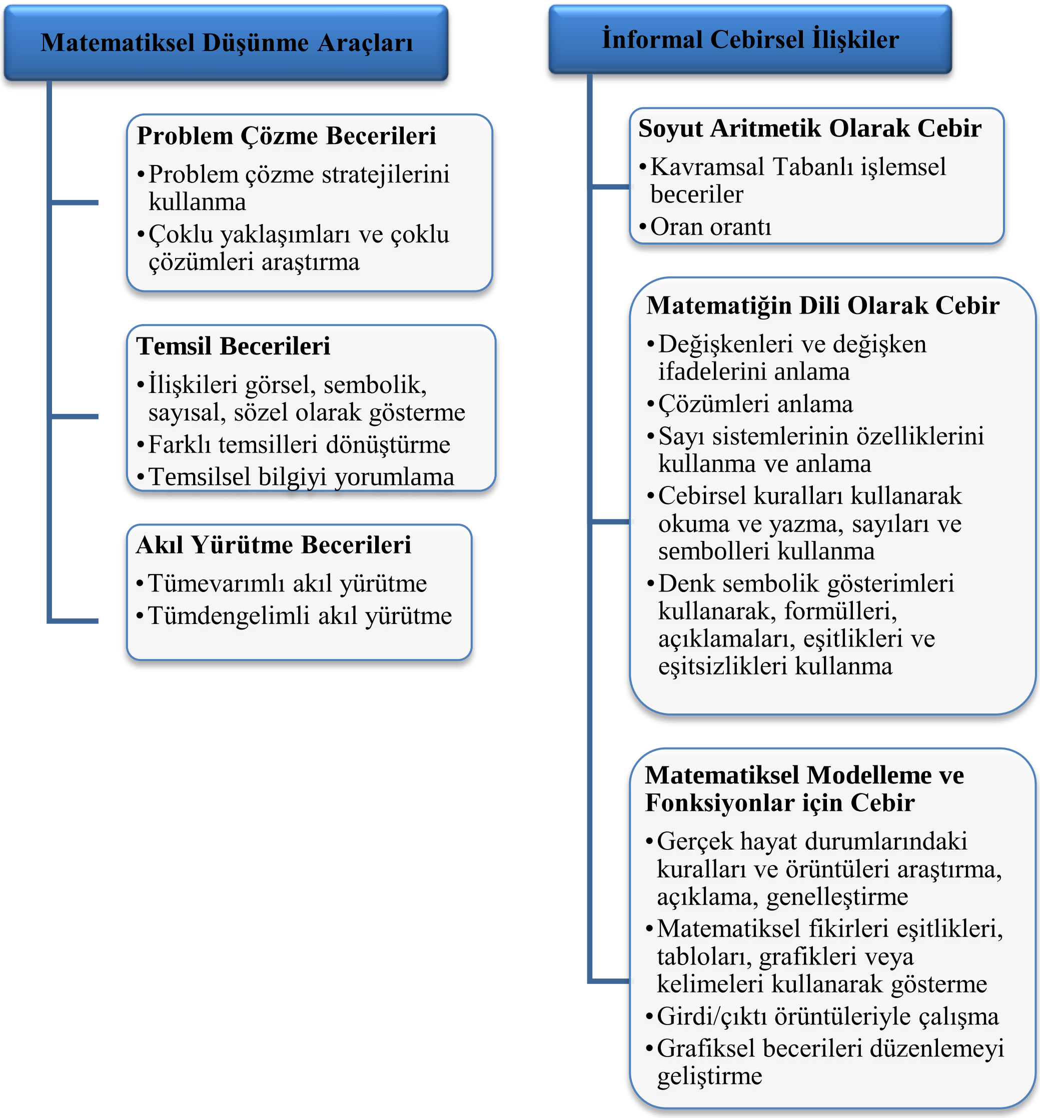
Şekil 1.1. *Cebirsel düşünmenin çatısı (Herbert ve Brown, 1997'den uyarlayan Tanışlı, 2008)*

En genel anlamda cebirsel düşünme, olayları açıklamak ve tahmin etmek için bilgi ya da olayları matematik diline çevirmek ve dünyayı daha iyi yorumlamak için gerekli olan anlayış kümesidir ve bu anlayış (Lawrence ve Hennessy, 2002'den aktaran Kaya ve Keşan, 2014);

- İhtiyaç duyulan matematiksel modeli oluşturma ve kullanma
- İhtiyaç duyulan veriyi toplama ve kayıt tutma
- Modeller için veri arama ve düzenleme
- Modelleri tanımlama ve genişletme
- Çoğunlukla bulguları bir kural halinde genelleme ve

- Tahmin yapmak için herhangi bir kuralı da içeren bulguları kullanmayı içerir.

Cebirsel düşünme birçok bileşenden oluşur. Alanyazında bu bileşenler araştırmacılar tarafından farklı şekillerde ele alınmıştır. Örneğin Kriegler (2008) cebirsel düşünmeyi, matematiksel düşünme araçları ve informal cebirsel ilişkiler olmak üzere iki başlık altında ele almıştır. Bunlardan ilki olan matematiksel düşünme araçlarını Problem Çözme, Temsil ve Akıl Yürütme Becerileri olarak Şekil 1.2'de verildiği gibi tanımlamıştır. İkinci bir bileşen olarak ise İnformal Cebirsel İlişkileri Soyut Aritmetik Olarak Cebir, Matematiğin Dili Olarak Cebir ve Matematiksel Modelleme ve Fonksiyonlar için Cebir olmak üzere üç başlık altında ele almıştır (Kriegler, 2008).



Şekil 1.2. *Cebirsel Düşünmenin Bileşenleri (Kriger, 20118)*

Cebirsel düşünmeyi matematiksel işlemleri ve örüntüleri genelleme, bu genellemelerden varsayımda bulunma, test etme ve giderek artan formal bir dil ile ifade etme olarak tanımlayan Kaput'a (1999) göre de cebirsel düşünme beş bileşenden oluşur. Bu bileşenler aşağıdaki gibidir;

- Örüntüleri formalize etme ve genelleme
- Şekilleri manipüle etme
- Soyut yapıları ifade etmede doğal dili kullanma
- Fonksiyonlara ve değişkenlerle çalışma ve
- Matematiksel modellemede çoklu dilleri kullanma olarak ele almıştır.

Cebirsel düşünme en genel anlamda genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünme başlıkları altında ele alınabilir. Genelleştirilmiş aritmetik sayılarla ilişkili işlemler ve özellikler hakkında mantık yürütmektir (Carpenter, Franke ve Levi, 2003). Aritmetik işlemlerin ve sayıların genellenmesi, sayılar arasındaki örüntünün fark edilmesi ve cebir yardımıyla ifade edilmesi genelleştirilmiş aritmetik olarak adlandırılabilir. Diğer bir ifade ile genelleştirilmiş aritmetik belirli sayılarla ilgili hesaplamaların ötesine geçmek ve aritmetikte bulunan kalıpları tanımlayarak, aritmetiğin temelini oluşturan matematiksel yapıyı düşünmek ve ortaya koymaktır (Ontario Ministry of Education [OME], 2013). Genelleştirilmiş aritmetik ilişkileri ve özellikleri keşfetme, nicelikler arası ilişki olarak eşitliği keşfetme ve değişkenler olarak semboller kullanmayı içermektedir.

Fonksiyonel düşünme ise cebirsel düşünmenin özü olan ve cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde odaklanılan nicelikler arası ilişki aramadır (Tanışlı ve Kabael, 2010). Cebirsel düşünmenin bir formu olarak tanımlanabilen fonksiyonel düşünme (Blanton ve Kaput,2004) örüntüleri genelleme, işlemleri ve ters işlemleri kullanma gibi farklı yaklaşımları da içerir (OME, 2013). Sayı ya da şekil örüntüleri ile çalışılırken genellemeler yapılması, bu genellemelerle ilgili varsayımda bulunulması, tartışma ve giderek artan formel bir dil ile genellemelerin ifade edilmesi (Kaput, 1999) sürecinde fonksiyonel ilişki kazanılmış ve fonksiyon kavramı öğrenilmiş olur (Tanışlı ve Kabael, 2010). Kieran (2004) cebirsel düşünme sürecinde;

- Sayısal hesaplamaların yanında ilişkilere de odaklanma
- Sadece işlemlerin kendisi ve sonucuna değil işlemlerin tersine de odaklanma
- Sadece problemin çözümünden ziyade hem temsillerine hem de çözümüne odaklanma

- Sadece sayılardan ziyade hem sayılara hem de harflere odaklanma basamaklarının gerçekleşmesi gerektiğini belirterek bir nevi genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünme olarak matematiğin birbiri ile bir bütün olduğunu belirtmiştir.

Bu araştırmada cebirsel düşünme; karşılaşılan bir durumda matematiksel sembolleri anlamlandırarak ilişkileri çözümlemeyi, ilişkileri çözümlemeye yardımcı olacak farklı temsil biçimlerini kullanmayı ve tekrarlayan durumları tespit ederek formel bir dille genellemeyi içeren bir düşünme şekli olarak tanımlanmıştır. Bu bağlamda çalışmada cebirsel düşünmenin bileşenleri "Semboller ve cebirsel ilişkiler", "Temsiller", "Örüntüler ve genellemeler" olarak ele alınmış ve katılımcıların geometri çalışmaları cebirsel düşünmenin bu üç bileşeni bakımından incelenmiştir.

1.2.1.1. *Semboller ve cebirsel ilişkiler*

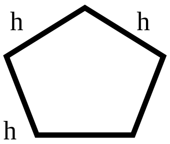
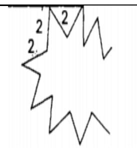
Semboller günlük yaşamda soyut olan şeyleri somutlaştırabilmek için kullanılırken soyut yapıların zihinde somut olarak canlandırılmasını da sağlarlar. Böylece cebirsel düşünmeyi destekleyici bir rol oynarlar (Yıldırım, 2000). Semboller sadece bilinmeyen nicelikleri göstermek için değil, bilinen nicelikleri göstermek (Dede ve Argün, 2003), matematikte karar vermeye yardımcı olan önemli problemlerin çözümünde yararlı araçlar olarak matematikte bir genellemeyi ifade etmek, cebirsel ilişkiyi oluşturmak ya da bir matematiksel durumu ifade etmek için de kullanılabilirler (Van de Walle, 2012; Bağdat, 2013). Matematikte semboller; bilinmeyen, değişken, parametre, soyut semboller, sayıların genellenmesi gibi farklı anlamlarda kullanılırlar. Sembollerin bazı kullanımları aşağıdaki tabloda örnekleri ile birlikte verilmiştir.

Tablo 1.1. *Sembollerin bazı kullanımları (See Kucheman, 1978; Usiskin, 1988'den aktaran Philipp, 1999)*

Etiket anlamı	"3f=1y "deki f ve y
Sabit	π, e, c
Bilinmeyen	"5x – 9 = 91" deki x
Sayıların genellenmesi	"a + b = b + a" daki a ve b
Değişken	"y = 9x – 2" deki x ve y
Parametre	"y= mx + b" deki m ve b
Soyut semboller	"e * x = x" deki e ve x

Semboller Tablo 1.1’de de görüldüğü gibi, sayıların genelleştirilmiş hali ve etiket anlam (Kieran, 1990) ya da yer tutucular ve bilinmeyenler (Van Amerom, 2003) gibi adlandırılan farklı anlamlar taşırlar. Collis (1975’den aktaran Küchemann, 1978, s.23), çocukların sembolleri kullanma ve yorumlamalarını Tablo 1.2’de görüldüğü gibi belirlemiştir.

Tablo 1.2. *Collis'e göre çocukların sembolleri kullanma ve yorumlama biçimleri (Collis, 1975’den aktaran Küchemann, 1978, s.23)*

Harfli ifadeye değer vermek	Harfli ifadeyi göz ardı etmek	Harfli ifadeyi bir nesne olarak kullanmak	Harfli ifadeyi bilinmeyen olarak kullanmak	Harfli ifadeyi genelleştirilmiş sayı olarak kullanmak	Harfli ifadeyi değişken olarak kullanmak
a+5=8 a=?	a+b=43 a+b+2=?	h h  h h t ç=……..	 Şeklin tamamı çizilmemiştir. Tüm kenar uzunlukları 2’dir.	c+d= 10 c<d c=?	Hangisi daha büyüktür, 2n mi n+ 2 mi?
Hemen hesaplanabilir. Bilinmeyeni içeren ara adımlar yoktur.	İkinci denklem, ilkinden + 2 terimi ile farklıdır; a + b göz ardı edilebilir.	h ve t, sayılardan ziyade, kenarlar için adlar veya etiketlerdir.	n, bilinmeyen bir sayıyı temsil eder.	c bir değerden ziyade bir sayı kümesini temsil eder.	n’in farklı değerleri için 2n ve n+2 arasındaki ilişkiyi muhakeme eder.

Tablo 1.2.’de görüldüğü gibi Collis öğrencilerin harfleri algılamaya dair altı farklı yaklaşımının olduğunu ortaya koymuştur. Bunlar; harfli ifadeye değer vermek (evaluated), harfli ifadeyi göz ardı etmek (ignored), harfli ifadeyi bir nesne olarak kullanmak (object), harfli ifadeyi bilinmeyen olarak kullanmak (specific unknown), harfli ifadeyi genelleştirilmiş sayı olarak kullanmak (generalised number) ve harfli ifadeyi değişken olarak kullanmak (variable) olarak tanımlanabilir.

Değişken kavramı ilk olarak bir miktarı temsil eden farklı sayılar şeklinde, sonsuz küçük hesabı bulan Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716’dan aktaran Philipp, 1992) ve Sir Isaac Newton (1643-1727’den aktaran Philipp, 1992) tarafından ortaya konulmuştur. Matematik öğretiminde ise başlangıçta tüm basit semboller değişken olarak adlandırılmıştır (Kieran 1989). Örneğin x + 5 = 8 ifadesindeki “x” sembolü bir değişkendir, çünkü gerçek sayılar, rasyonel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar gibi sayı kümelerindeki herhangi bir değeri temsil etmektedir (Philipp, 1992). İlerleyen yıllarda değişken için “bir kümenin bilinmeyen bir üyesi” (Skemp, 1971) ve “verilen bir sayı kümesinin elemanlarının bir ya da bir kaçı” (Kieran, 1981) tanımları da yapılmıştır. Değişken kavramını anlamak cebiri anlamanın ve cebirsel düşünmenin gelişimi için önemlidir (Schoenfeld ve Arcavi,1988; MacGregor ve Stacey, 1997; Schoenfeld ve Arcavi, 1999; Dominguez, 2001; Knuth ve diğer. 2005). Değişken kavramının anlaşılmaması öğrencilerin değişkenin farklı anlamlarını ve kullanımlarını bilmelerini, değişkeni yorumlamalarını, değişkenler ile işlem yapabilme ve genelleme yaparken değişkenleri kullanabilmelerini engellemektedir (Dede, Yalın ve Argün,2002).

Harfli ifadelerin Tablo 1.2’de verildiği gibi bir kenarın adı olarak kullanılan anlamına etiket anlamı denilmektedir. Örneğin “sınıftaki öğrencilerin sayısı”, “Ayşe’nin yaşı”, “torbadaki cevizlerin sayısı” gibi. Harfli ifadelerin bir diğer anlamı bilinmeyendir. Tablo 1.2’de verilen örnekte olduğu gibi şeklin kenar sayısı n bilinmeyen anlamı taşımaktadır. Benzer şekilde $2x+3=25$ denkleminde x’in tek bir sayı değeri olduğu için bilinmeyen anlamı taşımaktadır. Ayrıca $c+d=10$, $c<d$ olmak üzere c=? örneğinde ise c harfli ifadesi bir sayıdan ziyade bir sayı kümesini temsil ettiği için genelleştirilmiş sayı anlamı taşımaktadır. Bu bağlamda cebirsel düşünme sürecinde öğrencilerin bir sembolün belli bir değeri (etiket anlam, yer tutucu) mi temsil ettiğini yoksa bir değer kümesini (sayıların genelleştirilmesi, bilinmeyenler) mi temsil ettiğini anlamaları önemlidir (Akkan, 2006). Dolayısıyla öğrencilerin sembollerin farklı kullanımları anlamlandırmaları cebirsel düşünmenin gelişimi için önemli olan genelleme yapma, ilişkileri anlamlandırma, cebirsel yapıları fark etme ve matematiksel bir dille ifade etmelerine yardımcı olacaktır (Driscoll, 1999).

Semboller ve cebirsel ilişkiler ile ilgili bir diğer önemli kavram sembol hissidir. Arcavi (1994) sembol hissi kavramını ‘‘harflere dair his’’ ya da öğrencilerin semboller ve cebirsel ifadeler ile işlem yapabilmeleri için gerekli olan informal beceri olarak tanımlamıştır. Sembol hissi Şekil 1.3’de verildiği gibi çeşitli bileşenlerden oluşmaktadır.

Cebirsel uygulama ve ötesi
Sembolleri okuma
Sembolik ifadeleri düzenleme
Bir problem için uygun sembolik temsili işaretleme ve seçebilme yeteneği
Esnek uygulama becerilerine sahip olma,
Sembollerle geçmişe bakış (symbols in retrospect)
Sembollerin farklı içeriklerde farklı rollerde olabileceğinin farkında olma

Şekil 1.3. *Sembol hissinin bileşenleri (Archavi, 1994)*

Fey (1990)'e göre ise sembol hissine sahip olmanın göstergeleri ve sembol hissini öğrenebilmek için gerekli olan beceriler şu şekilde sıralanabilir;

F1: Sayısal ve grafiksel temsillerde meydana gelen örüntülere dair sağlam tahminleri yapmada cebirsel ifadeleri inceleyebilme becerisi,

F2: $n, n^2, n^3,...,n^k,...$ gibi biçimlerde kurallara bağlı olarak düzensiz bir şekilde verilen fonksiyonları büyüklüğüne göre sıralayabilme becerisi,

F3:Fonksiyon tablosu değerlerini, grafiğini ya da verilen durumu sözel şekilde yorumlayabilme, uygun bir örüntüyü ifade edecek cebirsel kuralın benzerini tanımlayabilme becerisi,

F4: Cebirsel işlemi gözden geçirme, denetleme ve sonucun formunu tahmin etme ya da sonucu denetleme ve doğru ifade edildiğine dair yargılama yapabilme becerisi,

F5: Birtakım soruların yanıtları için uygun olabilecek çeşitli eşitlik biçimlerini tanımlayabilme becerisi.

Sembollerin matematiksel genellemeleri ifade edebilmek için bir araç olduğu düşünüldüğünde öğrencilerin matematiksel genellemelere ulaşabilmek için öncelikle sembollerin matematiğin dili olduğunu anlamaları ve bu dili kullanmayı öğrenmeleri gerekmektedir (Schoenfeld ve Archavi, 1999). Sembollerin öğrenciler tarafından kavramsal olarak anlaşılmaması ve soyut, ezberlenmesi gereken şeyler olarak görülmesi cebirde başarısız olmalarının bir nedeni olarak görülmektedir (Van de Walle, 2012; Dede ve Argün, 2003). Aritmetiğin genellendiği, zihinde var olan cebir bilgisi ve sembollere anlam yüklendiği cebir öncesi dönem, cebirsel düşünme yardımıyla aritmetikten cebire geçiş sürecidir. Bu cebir öncesi dönemde öğrenciler mevcut aritmetik ve geometrik bilgilerini kullanarak cebirsel kavram ve sembolleri informel olarak adlandırırlar (Kieran ve Chaloug, 1993'den aktaran Gürbüz ve Akkan, 2008). Bu süreçte öğrencilerin harfleri ve sembolleri nasıl kullanmaları gerektiğini anlamaları cebirsel düşünmenin gelişimi açısından önemlidir (Akkan, 2016). Öğrencilerin harfli ifadelere verdikleri anlamın aritmetiksel, cebir öncesi ve cebirsel dönemlere göre değerlendirme göstergeleri Tablo 1.3'te verilmiştir.

Tablo 1.3'te görüldüğü gibi harfli ifadeler, sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı olmak üzere iki başlık altında aritmetik, cebir öncesi ve cebir olmak üzere üç cebirsel düşünme düzeyine göre incelenmiştir. Kuchemann (1981) ise öğrencilerin harfli ifadeler ile ilgili yorumlarını iki ana bölüme ayırmıştır; harfli ifadenin, keyfi bir değer verildiğinde yok sayılması ya da bir nesnenin adı olarak kullanılması ve harfli ifadenin belirli bir bilinmeyen sayı ya da genelleştirilmiş sayı olarak kullanılması.

Tablo 1.3. *Öğrencilerin harfli ifadelere verdikleri anlamın aritmetiksel, cebir öncesi ve cebirsel dönemlere göre değerlendirme göstergeleri (Akkan, 2009; Akkan, Baki & Çakıroğlu, 2011; Akkan, Öztürk & Akkan, 2014)*

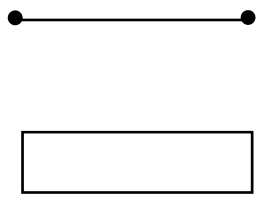
Boyut		Göstergeler
Sembollerin Kullanımı	**Aritmetiksel Dönem**	Eşittir işaretini sayısal sonuç göstergesi olarak tanımlarlar. Parantez işaretini ise "ilk onu yap" "olarak tanımlarlar ve parantezin içindeki işlem bitinceye kadar çözüm yaparlar. "+"sembolü ekleme işlemi "="sembolü ise cevap yaz olarak tanımlarlar.
	Cebir Öncesi Dönem	Bu seviyedeki öğrenciler eşittir işaretini işlemsel bir sembol olarak tanımlarlar. Eşittir işaretini yorumlayamazlar.
	Cebirsel Dönem	Bu seviyedeki öğrenciler eşittir işaretini aynı miktarda nicelik olarak tanımlarlar. Cebirsel işlemlerde parantezi aritmetikte olduğu gibi tanımlarlar. "+" sembolü ekleme işleminin yanı sıra "toplamın sonucu" anlamında, eşittir işareti de "cevabı yaz" anlamının yanı sıra "eşitlik" anlamında tanımlarlar.
Harflerin Anlamı	**Aritmetiksel Dönem**	Harfleri etiket anlam olarak kullanma (metre için m ve nokta için p), Harfleri nesnelerin kısaltması olarak kullanma(armut için a), Harfleri önemsememe ve yorumlamama, Harfe sayısal bir değer verme.
	Cebir Öncesi Dönem	Harfleri hem bir nesnenin kısaltılmışı hem de o nesnenin çokluğu veya miktarı olarak düşünme (aynı anda armut için kullanılan a harfini armutların sayısı olarak da tanımlama). Harflerin informel kullanımı (nesnelerin ilk iki veya daha fazla harfini kullanma)
	Cebirsel Dönem	Harfleri bilinmeyen olarak tanımlama ve harfleri kullanarak işlem yapma Harfleri genellenmiş sayılar olarak tanımlama Harfleri değişken(değerler kümesi) olarak tanımlama Harfleri parametreler olarak tanımlama

Bu bölümlerin her birini de öğrencilerin bilişsel düzeylerine karşılık gelecek şekilde iki alt başlığa ayırmıştır. Bu şekilde dört seviye belirlemiştir. Kuchemann, bu dört seviyenin somut öncesi (early concrete), somut (late concrete), soyut öncesi (early formal) ve somut (late formal) olmak üzere Piaget'nin bilişsel evrelerine karşılık geldiğini öne sürmüştür.

1.2.1.2. *Temsiller*

Temsiller soyut kavram ya da sembollerin gerçek dünya içinde somutlaştırma yoluyla matematiksel olarak ifade edilmesidir (Kaput, 1998; 1999). Temsil etme ya da temsil etme süreci, bir fikri başka bir şeyle özdeşleştirmek, seçmek ve sunmaktır. (Seeger, 1998). Matematiksel ilişkiler, ilkeler ve fikirler, görsel temsiller (yani, diyagramlar, resimler veya grafikler), sözel temsiller (yazılı ve sözlü dil) ve sembolik temsiller (sayılar, harfler) dahil olmak üzere birçok temsille ifade edilebilir (Panasuk, 2010). Her bir temsil türü, matematiksel kavramların farklı anlamlarını ve matematiksel fikirleri ifade eder (Pirie, 1998). Alanyazında temsiller için birçok sınıflama yapılmıştır. Janvier (1985) temsilleri sözel açıklamalar, resimler, tablolar, grafikler ve formüller olmak üzere dört ana başlık altında incelemiştir. Claves (2008) matematiksel temsilleri sayısal, tablo, resimsel, grafiksel, sözel, sembolik (denklemler ya da ifadeler) ve fiziksel olmak üzere altı başlık altında sınıflandırmıştır. Lesh, Post, ve Behr (1987'den aktaran İncikabı, 2017) ise temsilleri manipülatifler, gerçek yaşam durumları, yazılı semboller, sözel semboller ve resim ya da diyagramlar olarak ele almıştır. İncikabı (2017) da temsileri matematikte kullanılan sözel ve cebirsel temsiller, modeller, tablo, grafik ve gerçek yaşam temsilleri olarak ele almıştır. Vergnaud (1997) temsilleri matematiksel kavramı anlamlandırmak için kullanılan temsiller, problem çözmek için kullanılan temsiller ve durumları-işlemleri temsil etmek için kullanılabilecek sembolik, dilsel ve grafiksel temsiller olmak üzere üç başlık altında incelemiştir. Her temsil türü matematiksel kavramın farklı anlamlarını aktarmaya yardımcı olmakta ve etkili iletişime katkıda bulunmaktadır.

Tüm sınıf düzeylerinde kullanılabilecek olan somut çizimler, öğrencilerin soyut ilişkileri ve problemleri anlamlandırmaları için önemlidir. Piaget (1952'den aktaran Moyer, 2001), soyut kavramları anlayabilecek olgunlukta olmayan çocuklar için somut materyal ve çizimlerle deneyim kazanmanın önemli olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin sayısal ilişkileri anlamak ve göstermek için kendi seviyesine uygun matematiksel modelleme yolu ile somut model, şekil ve resimler, grafik, tablo ve sembol gibi farklı temsil biçimlerini kullanarak fikirlerini ifade etmesi ve bu temsiller arasında anlamlı ilişkiler kurarak geçiş yapabilmesi gerekmektedir (MEB, 2010; NCTM, 2000; Wilensky, 1991). Şekil 1.4'de cebir öğrenme alanı için bilinmeyenin görsel (şekil) temsil örneği verilmiştir (Panasuk, 2010).

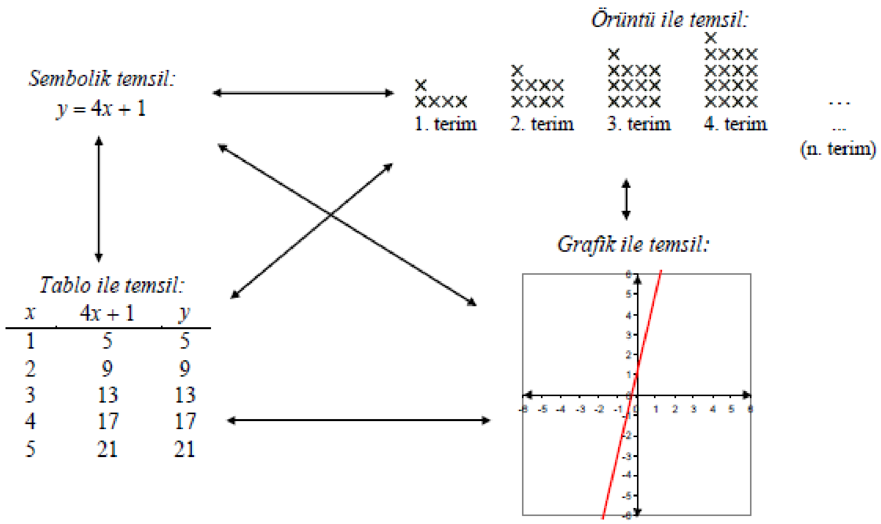


Bilinmeyen bir miktarı temsil eden bir çizgi

Bilinmeyen bir miktarı temsil eden bir cebir karosu

Şekil 1.4. *Bilinmeyen bir miktarın şekil temsili*

Şekil 1.4'de görülen somut temsillerden sonra tablo temsili öğrencilerin iki ya da daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi incelemelerine ve değişkenler arası cebirsel ilişkiyi ortaya koymalarına yardımcı olacak olan temsil biçimidir (OME, 2003). Cebirsel ifadelerin görsel olan bir başka temsil biçimi ise grafik temsilidir. Bir grafikteki eğim çizgisi cebirsel kuralı ifade eden matematiksel bir nesnedir (OME, 2003). Cebirsel ifadelerin farklı temsillerine ilişkin örnekler Milli Eğitim Bakanlığı'nın 2009 yılında yayınlamış olduğu İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar öğretim Programı ve Kılavuzu'nda aşağıdaki Şekil 1.5'de olduğu gibi verilmiştir.



Şekil 1.5. *Cebir öğretiminde kullanılabilecek bazı temsil biçimleri (MEB, 2009, s. 99)*

Her bir temsil sistemi, belirli anlatım türünü sunarak matematiksel fikirlerin etkili ifadesine katkıda bulunur. "Matematiksel modelleme" olarak adlandırılan bağlamsal, cebirsel ve geometrik temsiller gerçek yaşam problemleri ile matematik arasında ve iki ya da daha fazla matematiksel temsil arasındaki ilişkiyi ifade eder. Temsilleri tanıma, yaratma, yorumlama, temsiller arasında ilişki kurma ve dönüştürme yetenekleri matematiksel düşünme için güçlü iletişim araçlarıdır (Panasuk, 2010). Öğrenciler matematiksel konular ve bu konuların farklı temsilleri arasında ilişki kurmalı ve bu temsilleri birbirleri ile ilişkilendirmelidirler (NCTM, 1989; MEB,2018).

Aritmetikten cebire geçişte öğrencilerin düzeylerine uygun problemlerle farklı temsilleri ve çözüm yollarını kullanarak çalışmaları öğrencilerin cebirsel düşünme ve muhakeme becerilerini geliştirmeye yardımcı olacaktır (Quinn ve Larson, 1999; Akkan, 2016). Temsil kullanımında önemli olan üç nokta öğrencinin; farklı temsilleri tanıyabilmesi, kavramın farklı temsil biçimlerini gösterebilmesi ve temsiller arası geçiş yapabilmesidir. Ancak Eroğlu ve Tanışlı'nın (2015), belirttikleri gibi öğretmenlerin de temsil kullanım yöntemleri ve temsil kullanımı hakkındaki görüşleri öğretim üzerinde oldukça önemli bir yere sahiptir.

1.2.1.3. *Örüntüler ve genellemeler*

Örüntüler günlük hayatın işleyişinde yer alır ve pek çok yerde karşımıza çıkar. Örneğin; güneşin her gün doğması ve batması, oyun oynayan bir çocuğun önce ellerini çırpması sonra parmaklarını şaklatması, evimizde yer alan kalebodurların iki tane kahverengi bir tane krem rengi olacak şekilde duvarı kaplaması gibi. Bir örüntüde belli bir kurala göre tekrar eden şey harfler, semboller, renkler, şekiller ya da sayılar olabilir. Alanyazında araştırmacılar örüntüleri farklı şekillerde sınıflandırmışlardır. Genel olarak örüntüler tekrarlanan ve değişen sayı ve şekil örüntüleri olarak ele alınabilir (Tanışlı, 2008). Tekrarlanan örüntüler terimleri belli bir düzene göre yinelenen ve devam eden örüntülerdir ve tekrarlanan bir örüntünün tekrar eden en küçük birimine tekrar birimi adı verilir (Tanışlı, 2013). Değişen örüntüler ise her bir terimi kendinden önce gelen terim ile ilişkili olarak genişleyen ya da daralan örüntülerdir.

Örüntüler matematiksel kavramların anlaşılmasında anahtar bir kavramdır (Tanışlı, 2008). Örüntüyü keşfetmek, sözel olarak ya da semboller kullanarak ifade etmek, başka bir duruma aktarmak ya da genişletmek gibi işlemleri nasıl yapacağını öğrenmek matematik yapmanın ve cebirsel düşünmenin parçasıdır (Van de Walle, 2012). Ayrıca örüntüler fonksiyonel düşünmenin gelişimi için de özellikle erken yaşlarda büyük öneme sahiptir (Kabael ve Tanışlı, 2010). NCTM (2000, s. 223) cebirsel düşünme sürecini "örüntü, bağıntı ve fonksiyonları anlama, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel durum ve yapıları çözümleme ve sunma, matematiksel modelleri nicel ilişkileri anlamak ve sunmak için kullanma, çeşitli durumlarda değişimi analiz etme" olarak tanımlamıştır. Bu sürecin örüntüleri anlama basamağında örüntü arama, örüntüyü tanıma ve tanımlama ve örüntüyü genelleme alt basamakları yer alır ve öğrenciler örüntüleri genellerken cebirsel düşünmenin özünü kavrarlar (Herbert ve Brown, 1997).

Cebir genellemeleri ve genellemelerin giderek daha formel bir dille ifadesini içerir. Aritmetikte, geometride ve matematiğin tamamında genelleme bu formel dille başlar (Kaput, 1999). "Genellemeyi keşfetme, matematiksel etkinliklerin merkezidir ve sayısal durumların genellenmesi öğrencilerin formel cebire geçişinde bir araçtır" (Tanışlı, 2008, s.18). Örüntüler genellemenin, genelleme ise cebirin yapı taşlarından birisi olarak görülebilir (Tanışlı ve Özdaş, 2009).

Lee (1996), cebirin ve matematiğin tamamının aslında örüntülerin genellenmesi olduğunu ifade etmiştir. Mason (1996) da matematiksel düşünmenin oluşması ve gelişmesi için öğrencilerin kendi genellemelerini yapabilmeleri ve açıklayabilmeleri gerektiğini vurgulamıştır. Bu ifadelerden yola çıkarak, öğrencilerin matematik çalışmalarında genelleme yeteneğinin önemi anlaşılmaktadır.

Alanyazında "Belirli bir argümanı daha geniş bir bağlamda uygulama süreci" (Harel ve Tall, 1989, s. 38), "Verilen matematiksel bir durumdan ziyade örüntülerin, işlemlerin, yapıların ve bunların aralarındaki ilişkilerin üzerinde bir düzeyde muhakeme ya da ilişkilendirme yapma", (Kaput, 1999, s. 137), "Verilen matematiksel durumların ortak yönlerinin belirlenmesi, yapılan muhakemenin genişletilmesi ya da belirli matematiksel durumdan daha genel sonuçlar elde edilmesi" (Ellis, 2007) gibi genelleme ile ilgili tanımlar yer almaktadır. Radford (2006) genellemeyi bir süreç olarak ele almış, bu süreci aritmetik ve cebirsel olmak üzere iki başlık altında incelemiştir. Bir örüntünün cebirsel genelleme stratejileri kullanılarak genellenmesini örüntünün yakın adımları için geçerli olan ilişkinin keşfedilmesi ve bu ilişkinin örüntünün uzak adımlarına genişletilmesi olarak ifade etmiştir. Ayrıca bu sürecin sonunda mutlaka örüntünün tamamını temsil edecek bir cebirsel ifadeye ulaşılması gerektiğini belirtmiştir. Aritmetik genellemeyi ise örüntünün yakın adımları için bazı ilişkilerin belirlenmesi ancak örüntünün tamamına genellenmemesi olarak tanımlamıştır (Radford, 2006).

Alanyazında öğrencilerin örüntü problemlerini çözerken akıl yürütmelerini ve genelleme stratejilerini inceleyen birçok araştırma vardır (Rivera 2010; Tanışlı, Köse ve Camcı (2017); Stacey, 1989; Lanin, Barker ve Townsend, 2006; Zazkis ve Liljedahl, 2002; Amit ve Neria, 2008; Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999). Rivera (2010) cebirsel genelleme stratejilerini lineer ya da kuadratik sayı ve şekil örüntülerinde kullanılan stratejiler, yinelemeli stratejiler (Recursive Strategies) ve değişkenler arası ilişki bulma stratejileri (Explicit Strategies) olmak üzere iki başlık altında ele almıştır. Stacey ise (1989) ardışık (recursive) yaklaşım (toplama stratejisi), fonksiyonel ilişki arama ve bütüne genişletme (whole object) olmak üzere üç genelleme stratejisi tanımlamıştır. Lanin, Barker ve Townsend (2006) da belirgin (explicit), bütüne genişletme, parçalama (chunking) ve yinelemeli (recursive) olarak tanımladıkları dört genelleme stratejisini araştırmalarında ortaya koymuşlardır. Tanışlı, Köse ve Camcı

(2017) örüntüleri genellemede kullanılan stratejileri aşağıdaki Tablo 1.4'de görüldüğü şekilde özetlemişlerdir.

Tablo 1.4. *Örüntüleri genelleme stratejileri*

Muhakeme Türleri	Açıklaması
Yinelemeli Muhakeme	Bir dizide sonraki terimi/şekli bulmak için, önceki terimin/şeklin kullanılmasıdır.
Belirgin Muhakeme	İki ya da daha fazla değişen nicelikleri genellikle bir kural ya da formül ile doğrudan ilişkilendirmedir.
Şekilsel Muhakeme	Şekilleri ve diğer görselleri kullanarak nesnelerdeki değişen ve değişmeyen özellikleri ya da yapıları tanımlamaktır.
Şekilsel Sayma	Bir resim çizme ya da durumu temsil eden bir model oluşturma ve istenilen niteliği saymadır.
Sayısal Muhakeme	Kuralı belirlemek için sayısal ipuçları kullanmaktır.
Pragmatik (Sayısal+Şekilsel) Muhakeme	Hem sayısal hem de şekilsel muhakemenin kullanılmasıdır.
Orantısal Muhakeme	Bir birimin tanımlanması sonra bir çarpanla bu birimin ölçülmesidir.
Oran-Düzenleme Muhakemesi	Orantısal muhakemenin en genel yollarından biridir. Birim olarak değişim oranını tanımlama ve bir çarpanla bu birimin ölçülmesidir.
Bütüne Genişletme	Birim olarak değişim oranının olmayan bir çarpanını kullanmak ve sonra bir çarpanla bu birimi ölçmektir.
Tahmin ve Kontrol	Kuralın neden işe yaramadığına bakmaksızın bir kural tahmin etmektir.
Parçalama Muhakemesi	İstenen özelliğin bilinen değerleri üzerine bir birim kurarak yinelemeli örüntü oluşturmaktır.
Bağlamsal Muhakeme	Problem durumuyla belirlenen bir ilişkinin temelinde bir kural oluşturmaktır.
Araç Örüntü	Girdi çıktı tablosunda, girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkları alarak yeni bir örüntü oluşturmaktır.

Bu araştırmada ise geometri problemleri ile çalışırken öğrencilerin cebirsel ifadeleri ve temsilleri kullanma şekilleri, kullandıkları stratejiler ve yaptıkları genellemeler ele alınmıştır.

1.2.2. Geometrik düşünme nedir?

Matematiğin öğrenme alanlarından biri olan geometri günlük yaşama dair problemlerin çözümünde, bilimin birçok alanında ve sanatta sıklıkla kullanılmaktadır (Gökbulut ve ark., 2010). Geometri çözümleri karşılaştırma, genelleme yapma gibi temel beceriler ile inceleme, araştırma, eleştirme, düşüncelerini ifade etme ve açıklama gibi bilişsel becerileri içerir (Baykul, 1999'dan aktaran Erdoğan, Akkaya ve Akkaya, 2009).

Geometri öğretim programı içerisinde öğrencilere, geometrik şekiller ve yapılar, geometrik yapıların ve şekillerin özellikleri ve tüm bunların nasıl analiz edileceği öğretilmektedir (MEB, 2013). Öğrenci, şekilleri tanıyabildiği ve şekiller ile ilgili edindiği bilgi oranında şekillerin özelliklerini öğrenebilmektedir. Bu nedenle öğrencinin içinde bulunduğu evreni öğrenmesi, keşfetmesi, geometri bilgisine sahip olması, geometrik düşünebilme ve geometrik problem çözebilme becerisine bağıdır, (Han, 2007'den aktaran Fidan ve Türnüklü, 2010, s.186). Geometri öğrencilere sonuç çıkarabilme ve ispatlama yeteneklerinin geliştirilmesi imkânını vermekte ve aynı zamanda problem çözebilme ve matematiğin gerçek yaşamdaki yerini göstermektedir (Duatepe, 2000'den aktaran Bal, 2012, s.18). NCTM (2000)'in okul matematiği için belirlediği ilke ve standart raporu içerisinde de geometri eğitiminin önemi vurgulanmıştır. Geometri biliminin öğrencilerin akıl yürütme ve ispatlama yetilerinin geliştirdiğinden bahsedilmiştir. Aynı zamanda geometri ve uzamsal duyunun matematiğin temelinde yer aldığının altı çizilmiştir (NCTM, 2000). Bu bağlamda önemli olan geometri ve geometrik düşünme becerisinin düzeylerini belirlemek amacıyla geliştirilmiş Van Hiele Geometrik Düşünme Testi ve Düzeyleri izleyen bölümde sunulmuştur.

1.2.2.1. *Van hiele geometrik düşünme testi ve düzeyleri*

Dina van Hiele-Geldof ve Pierre van Hiele 1957 yılında geometri öğretimi üzerine hazırladıkları doktora çalışmalarını tamamlamıştır. Dina van Hiele-Geldof'ün ölümünden çok kısa bir süre sonra Pierre van Hiele çalışmalarını tamamlamış ve geometrik düşünme düzeyleri modeline son halini vermiştir. Van hiele geometrik düşünme testi 1982 yılında Usiskin tarafından geliştirilmiş ve Duatepe tarafından da 2000 yılında Türkçe'ye çevrilmiştir. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri bireylerin farklı düzeyler boyunca geometrik kavramların nasıl algılandığını ele almıştır (Duatepe, 2016). Modelde önemli olan iki nokta göze çarpmaktadır. Bunlar; düzeylerin sıralı bir şekilde ilerlemesi ve bu ilerlemenin yaşa ya da gelişime değil öğretim ve geometri deneyimiyle ilgili olmasıdır. Ayrıca bireyler bir düzeyi tamamlamadan diğer düzeye geçememekte veya bir düzeyi atlayıp diğer bir düzeye geçememektedirler.

Van Hiele (1986)'a göre bireylerde geometrik düşüncenin gelişimi beş evreden meydana gelmektedir. Bu evreler; görsel düzey, analitik düzey, informal tümdengelim (yaşantıya bağlı çıkarım), formal tümdengelim (çıkarım) ve en ileri düzey şeklindedir (Fidan ve Türnüklü, 2010, s.186). Geometrik düşünme düzeylerinin 1-5 olarak düzenlenmesi, düzeylerin ilk basamağı olan görsel döneme geçmeyen bireyler için "0" düzeyinin kullanılmasına imkân sağlamaktadır (Senk, 1989, s.310'dan aktaran İlhan, 2011, s.13). Bu araştırmada da yapılan testlerde "0" puan alan öğrenciler olduğu için düzeyler 1-5 olarak belirlenmiştir. Van Hiele düşünme düzeyleri aşağıdaki gibidir;

Düzey 0 (Görsel Düzey): Van Hiele kuramında geometrik düşünmedeki ilk düzey "görsel dönem" adı verilen düzeydir. Birey bu düzeyde şekilleri görünüşlerini temel alarak belirlemekte ve bir bütün olarak tanımaktadır (Clement ve Battista, 1990, s.356'dan aktaran Usiskin, 1982, s.4). Bu aşamadaki bir birey nesneleri olduğu gibi algılamaktadır. Nesnelerin belli özelliklerini bu aşamada ayırt edememektedir. Karenin kenar sayılarını, köşe sayılarını, açılarının dik olduğunun farkına varamamaktadırlar fakat bir kare gördüklerinde bu şeklin kare olduğunu bilmektedirler. Bununla birlikte karenin aynı zamanda bir dikdörtgen olduğunun da ayırdına varamamaktadırlar (Gül, 2014, s.17).

Düzey 1 (Analiz Düzeyi): Bu düzeyde, geometrik cisimleri ve şekilleri özelliklerine göre adlandırabilme, karşılaştırabilme ve sınıflandırabilme çalışmaları yer almaktadır (Pesen, 2008, s.273). Bu düzeydeki düşünme nesneleri "tek başına şekillerden çok şekillerin sınıflarıdır". Analiz düzeyindeki bireyler, bir dikdörtgenden bahsetmek yerine bütün dikdörtgenden bahsetmektedirler. Bu düzeydeki birey, şekilleri, parçaları ve özellikleri açısından karşılaştırabilmektedir. Şekiller görünüş olarak değil özellik bakımından tanımlanmaktadır. Geometrik şekillere ait özellikler katlama, ölçme gibi etkinliklerle keşfedilmektedir. Geometrik şekillerin özellikleri deneysel yollarla ispatlanmaktadır (Erdoğan, 2006, s.26).

Düzey 2 (İnformal Tümdengelim): Bu düzeye geçmiş olan bir birey, şekiller arası ve şekillerin özellikleri arası ilişkileri ve tanımların önemini anlayabilmektedir. birey, geometrik şekilleri özelliklerine göre sıralayabilme ve gruplandırabilme becerisini kazanmaktadır. Benzer özellikleri olan şekil sınıfları arasındaki özellikleri ilişkilendirebilmeyi öğrenmektedirler (Mistretta, 2000'den aktaran Fidan ve Türnüklü, 2010, s.186). Örnek verilecek olursa, bireyler şekilleri ve bunların özelliklerini ilişkilendirebilir: "Her kare aynı zamanda bir dikdörtgendir" ilişkisini kanıtlama yetisine sahip değillerdir. Bireyler, şekiller arasındaki ilişkilerin kurulması aşamasında formal olmayan akıl yürütmeye yönelebilmektedirler. Bu düzeydeki bireyler bir ispatı izleyebilmektedirler ancak kendileri bu ispatı gerçekleştiremezler (Gül, 2014, s.19).

Düzey 3 (Formal Tümdengelim): Bireyler bu dönemde bir aksiyomatik yapıyı kullanabilmekte ve bu sistem dahilinde kendi kendilerine ispatı gerçekleştirebilmektedirler. Bir teoremin çeşitli uygulamalarını görebilmektedirler. Bu düzeydeki bir birey için, şekillerin özellikleri, şekil ve cisimden bağımsız bir nesne haline gelmektedir. Geometrik şekillerin özellikleriyle ilgili soyut ilişkiler kurabilmekte ve akıl yürütmeye dayalı sonuçsal çıkarımları yapabilmektedirler (Baykul, 2009, s.355).

Düzey 4 (En İleri Düzey): Bu düzeyde yer alan bireylerin birbirinden farklı olan iki aksiyomatik sistemin arasında bulunan bağlantıları ve farklılıkları ayırt edebildikleri öne sürülmektedir. Bu düzeydeki bireyler, geometri bilimi üzerine çalışabilecek kapasiteye sahiptirler (Gökbulut ve ark., 2010, s.378). Beşinci düzeyde yer alan bir birey en ileri seviyede düşünebilecek düzeydedir, Öklid geometrisinde bulunan aksiyomları, bu alandaki kuramları ve mevcut tanımları Öklid dışı geometri konularında yorumlayabilme ve uygulayabilme becerisini edinmiştir. Aksiyomatik sistemler arasındaki ayrımları ve bağlantıları kolaylıkla görebilmektedir (Gül, 2014, s.20).

1.2.3. İlkokul ve ortaokul matematik dersi öğretim programında geometri ve cebir

Ülkemizde uygulanan öğretim programlarına yönelik geliştirme ve yenileme çalışmaları cumhuriyetin ilanından günümüze kadar birçok kez gerçekleştirilmiştir. 2018 yılında yayınlanan Matematik Öğretim Programında matematik "Sayılar ve İşlemler", "Cebir", "Geometri ve Ölçme", "Veri İşleme ve Olasılık" olmak üzere beş öğrenme alanı olarak ele alınmıştır (MEB, 2018). Bu programda cebir öğrenme alanına ilişkin kazanımlar 6. sınıf düzeyinden başlayarak 7. ve 8. sınıf düzeylerinde yer almaktadır. Cebir öğrenme alanına ilişkin kazanımlar 6. sınıf düzeyinde sayı örüntüleri ile başlamaktadır. Bu sınıf düzeyinde cebirsel ifadeleri anlamlandırma ile ilgili kazanımlar da yer almaktadır. 7. sınıf düzeyinde cebirsel ifadeler ile işlemler, eşitlik kavramı ile birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ve ilgili problemler ile ilgili kazanımlara yer verilmiştir. Araştırmanın katılımcılarının düzeyi olan 8. sınıf düzeyinde ise cebirsel ifadeler ve özdeşlikler, doğrusal denklemler ve eşitsizlikler, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin incelenmesi ve denklem çözümleri ile ilgili kazanımlar yer almaktadır (MEB, 2018).

Geometri ve ölçme öğrenme alanına ilişkin kazanımlar ise ilkokul 1. sınıf düzeyinden başlayarak 8. sınıf düzeyine kadar devam etmektedir. İlkokul düzeyinde geometri öğrenme alanı ile ölçme öğrenme alanı ayrı başlıklar altında ele alınırken ortaokul düzeyinde geometri ve ölçme öğrenme alanı olarak tek başlık altında ele alınmıştır. 1. sınıftan 4. sınıf düzeyine kadar geometri öğrenme alanı başlığı altında öğrencilerin şekilleri tanımaları ve şekilleri köşe ve kenar sayılarına göre sınıflandırmaları, şekilleri modelleyebilmeleri ve noktalı kağıt üzerinde çizebilmeleri hedeflenmektedir. 3. sınıf düzeyinden itibaren cisimleri tanımaları ve cisimlerin yüzlerini, köşelerini ve ayrıtlarını; küp, kare ve dikdörtgen prizma arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları belirlemeleri beklenmektedir. 4. sınıf düzeyinde ise üçgen, kare ve dikdörtgenin kenarlarını ve köşelerini isimlendirmeleri, kenar özelliklerini belirlemeleri ve üçgenleri kenar uzunluklarına göre sınıflandırmaları hedeflenmiştir.

İlkokul düzeyinde geometri öğrenme alanına ilişkin alt öğrenme alanı olarak "Geometrik örüntüler alt öğrenme alanı" yer almaktadır. Bu alt öğrenme alanında 1. sınıf düzeyinde öğrencilerin belirli bir geometrik örüntüyü deneyimlerle bulmaları, ögeleri nesneler, geometrik şekiller veya cisimler olan bir örüntüdeki ilişkiyi belirlemeleri ve eksik bırakılan ögeyi bulmaları ve en çok üç ögeli geometrik örüntü oluşturmalarına ilişkin kazanımlar yer almaktadır. 2. sınıf düzeyinde ise tekrarlayan bir örüntüde eksik bırakılan ögeleri belirleyerek tamamlama ve bir örüntüdeki ilişkileri görerek farklı malzemeler ile aynı ilişkiye sahip örüntüler oluşturmaya ilişkin kazanımlar yer almaktadır. 3. sınıf düzeyinde de kaplama yapma, yaptığı kaplama örüntüsünü noktalı ya da kareli kâğıt üzerine çizme ile ilgili kazanımlara yer verilmiştir.

Ortaokul düzeyinde geometri ve ölçe öğrenme alanına ilişkin 3. ve 5. sınıf düzeyinde doğru, doğru parçası ve ışın geometrik kavramlarını tanıma, çokgenleri isimlendirmeleri ve temel elemanlarını tanıma ve uzunluk ölçme birimlerini tanıma, dönüştürme ve çokgenlerin çevre uzunlularını hesaplama ile ilgili kazanımlara yer verilmiştir. Ayrıca 5. sınıf düzeyinde dikdörtgenin alanını santimetrekare ve metrekare cinsinden hesaplama, dikdörtgenler prizmasını tanıma, temel özelliklerini belirleme, yüzey açınımı çizme ve yüzey alanını hesaplama kazanımları da yer almaktadır. 6. sınıf düzeyinde açı, eş açı ve yükseklik kavramları, paralelkenar ve üçgenin alanı hesaplamaları, çember kavramı ve dikdörtgenler prizmasının hacmine ilişkin kazanımlar yer almaktadır. 7. sınıf düzeyinde ise açıortay, yöndeş, ters, iç ters ve dış ters açı kavramları ve çokgenler, çember ve cisimlerin farklı yönlerden görünümleri ile ilgili kazanımlar yer almaktadır. 8. sınıf düzeyinde üçgenler ve Pisagor bağıntısı, öteleme ve yansıma dönüşümlerine ilişkin kazanımlar yer almaktadır. Çokgenlerde eşlik ve benzerlik kavramları ile dik prizma, dik silindir, dik piramit ve koni gibi geometrik cisimlere ilişkin kazanımlar da 8. sınıf düzeyinde yer almaktadır.

NCTM'de de açık şekilde belirtildiği gibi matematik konuları arasında zengin bağlantı ve ilişkiler vardır. Sayılar konu alanının matematiğin tamamında yer aldığı gibi örüntü ve fonksiyon konu alanları da geometride karşımıza çıkmaktadır. Lise matematik öğretim programının büyük çoğunluğunu cebir ve geometri öğrenme alanları almaktadır (NCTM, 2000). Bu iki konu alanını için kritik dönem olan ortaokul döneminde konular arasında ilişki kurmak ileri düzeyler için temel olacaktır. Yenilenen öğretim programımıza ve NCTM standartlarına göre düzenlenecek bir programın anlamlı matematiksel içeriğe sahip olması ve öğretim süreçlerinin tutarlı bir organizasyonu olması önerilmektedir.

1.3. İlgili Alanyazın

Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri çalışmalarında cebirsel düşünmeyi inceleyen bu araştırma ile ilgili alanyazın bu bölümde ele alınmıştır. Alanyazında incelenen çalışmalar geometri ve cebir ile geometrik düşünme ve cebirsel düşünmenin birlikte ele alındığı çalışmalar ile yalnızca cebirsel düşünme ve cebirsel düşünme basamaklarının ele alındığı çalışmalar olarak sunulmuştur.

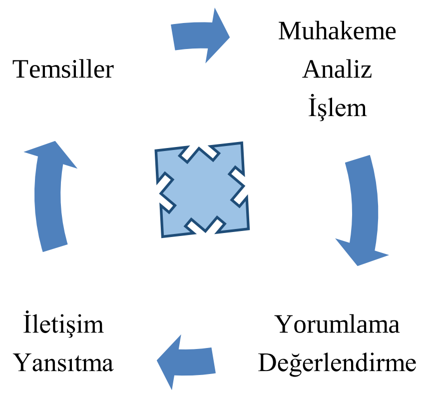
Dindyal (2003) araştırmasında, lise düzeyindeki öğrencilerin cebiri kullanarak geometride problem çözme yaklaşımlarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma kapsamında iki matematik öğretmeni ile orta, düşük, yüksek düzeyde altı odak öğrenci ile çalışılmıştır. Araştırmada araştırmacı tarafından hazırlanan 10 soruluk bir cebir testi ve Van Hiele'ın geometrik düşünme testini kullanarak odak öğrenciler seçilmiştir. Altı hafta boyunca seçilen öğrenciler ile klinik görüşme ve sınıf ortamında gözlem yapılmıştır. Öğrencilerle yapılan kırkar dakikalık toplam dört görüşmede araştırmacının hazırlamış olduğu cebir soruları üzerinde çalışılmıştır. Araştırmanın cebirsel ve geometrik düşünme bakımından sonuçları şöyledir; odak öğrencilerden geometrik düşünme düzeyi 4 ve 3 olan iki öğrenci cebir testinde de 30 sorudan 23 ve 27 doğru yaparak başarılı olmuştur. Geometrik düşünme düzeyi 1 olan dört odak öğrenciden ikisi değişkenler ve bilinmeyenlerle çalışırken, denklem çözerken ve farklı temsil biçimi bulmaya çalışırken zorlanmışlardır ve lineer olmayan örüntüleri çözememişlerdir. Cebirsel düşünme testinde 30 sorudan 5 ve 13'er doğru yapmışlardır. Geometrik düşünme düzeyi 1 olan diğer iki öğrenci ise cebri testinde 30 sorudan 25 ve 17'şer doğru yaparak diğer iki öğrenciden daha başarılı olmuşlardır. Araştırma sonuçları cebirsel düşünme ile geometrik düşünme arasında güçlü bir ilişki olduğunu göstermiştir.

Grandau ve Stephens (2006) araştırmalarında, ortaokul düzeyinde hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin cebirsel düşünme biçimlerini ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Araştırma kapsamında aynı sınıf düzeyinde eğitim veren iki öğretmen ve sınıfları ile çalışılmıştır. Öğretmenler öğretim programında yer alan bir geometri dersine seçtikleri cebirsel kavramları eklemiş ve ders süresince öğrencilerini cebirsel düşünmeye teşvik etmişlerdir. Birinci öğretmen bir üçgen örüntüsünü ele almıştır. Öğrenciler üçgenlerin kenar uzunlukları ve alanlarını hesaplayıp bir tablo oluşturmuşlardır. Ders süresince bu tabloda yer alan ilişkiyi incelemiş ve bir genellemeye ulaşmaya çalışmışlardır. İkinci öğretmen ise, dikdörtgenler ve benzerlik konusunu ele almıştır. Derste benzerlik, benzerlik katsayısı ve alan ile benzerlik katsayısı arasındaki ilişkiye dikkat çekmiştir. Tablo temsili ve koordinat düzlemi ile çalışan öğrencilerin bir kısmı örüntüyü fark etmiş ancak çoğu bir eşitlik olarak ifade edememiştir. Her iki durumda da öğrenciler grafik kullanarak benzer şekilleri tahmin etme, bu grafiklerden yararlanarak lineer eşitlik yazma, geometrik şekillerin özelliklerini sözlü olarak genelleme ve bu genellemeleri sembollerle ifade etme gibi cebirsel düşünme bileşenlerini içeren etkinlikler yapmışlardır. Birinci öğretmen cebirsel düşünmeyi ders içinde bir süreç olarak ele alırken ikinci öğretmen dersin bir bölümü olarak ele almıştır. Ancak her iki durumda da öğrenciler geometrik durumlarda cebirsel düşünme bileşenlerini kullanmışlardır.

Kılıç (2009) araştırmasında ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematik problemlerinin çözümünde kullandıkları temsilleri belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın veri toplama, analiz etme ve çözümlenmesi sürecinde nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırma kapsamında 12 beşinci sınıf öğrencisi ile yapılan klinik görüşmeler ile araştırmacı ve öğrenci günlükleri aracılığı ile veri toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin problemi anlama ve plan yapma sürecinde konuşma dili, planı uygulama sürecinde ise konuşma dili ile görsel ve sembolik temsiller kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin başarı düzeyi azaldıkça temsiller arası geçiş yapma, sembolik temsile uygun resim oluşturma ve kullandıkları temsili sonuç ile ilişkilendirme sürecinde sorun yaşadıkları ulaşılan diğer bir sonuçtur.

Patsiomitou (2009) araştırmasında, geometri ve cebirin tarihsel gelişimi ve ilişkisine vurgu yaparak geometri ve cebir arasındaki ilişkiyi geometrik yazılımlar yardımıyla ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Araştırma kapsamında öğretim yılının ikinci döneminde yaşları on beş ve on altı olan toplam 28 ortaokul öğrencisi ile çalışılmıştır. Deney ve kontrol gruplarına ayrılan öğrencilerden kontrol grubunda yer alanlar sınıfta geleneksel yöntemler ile deney grubunda yer alan öğrenciler ise dinamik geometri yazılımı ile ders işlemişlerdir. Her iki grupta da aynı sorular ile çalışılmıştır. Araştırma süresince deney ve kontrol gruplarında yer alan öğrencilerin geometrik temsiller ve cebirsel ifadeler arasında kavramsal olarak geçişler yapıp yapamadığı ve ifade ve temsilleri genelleyip genelleyemedikleri incelenmiştir. Araştırmacı öğrenmenin en iyi yolunun görmek olduğu görmenin en iyi yolunun ise yapmak olduğunu belirterek dinamik geometri yazılımlarının soyut cebirsel ifadeleri somutlaştırma ve anlamlandırmada bir araç olarak kullanmanın yararlı olacağı sonucuna ulaşmıştır.

Jones (2010) araştırmasında, İngiltere matematik öğretim programında cebir ve geometri ilişkisini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Araştırma sonucunda cebirin öğretim programında geometriye göre baskın bir şekilde yer aldığını belirtmiştir. Yüksek geometri başarısı elde edebilmek için aritmetik ve lineer cebir etkinliklerine ayrılan zamanı daha ekonomik kullanmanın ve artan zamanı geometri etkinliklerinde kullanmanın gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca geometri ve cebir arasındaki ilişkinin fark ettirilmesi ve cebirsel düşünmenin gelişimi için dinamik geometri yazılımlarının faydalı olacağını belirtmiştir. Aşağıdaki Şekil 1.6'da İngiltere'nin yeni öğretim programında yer alan anahtar kavramlar ve süreçleri gösterilmiştir.



Şekil 1.6. *İngiltere yeni öğretim programındaki anahtar kavram ve süreçler (Jones, 2010, s. 212)*

Günaydın (2011) çalışmasında orta öğretim düzeyinde öğrencilerin geometri ve cebir problemlerinin çözüm süreçlerini görselleme ve göstergebilim bağlamında incelemiştir. Özel durum çalışması modeli ile yapılan araştırmaya İstanbul'da devlet okulunda eğitim gören 80 9. sınıf öğrenci katılmıştır. Araştırma verileri Matematiksel Süreç Aracı olarak adlandırılan üç cebir ve iki geometri testi ile toplanmıştır. Ayrıca yarı yapılandırılmış görüşmeler de veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre öğrenciler cebir sorularının çözümünde sözel, geometri sorularının çözümünde ise sözel ve görsel yaklaşımlar kullanmışlardır.

Araştırma verileri göstergebilim bağlamında incelendiğinde ise öğrencilerin cebir sorularında sözel göstergeler kullandıkları, geometri sorularında ise sorunun içeriğine göre kullandıkları göstergelerde farklılıklar olduğu görülmüştür. Öğrencilerin geometri sorularında sorunun içeriğinde sözel ifadeler olduğu zaman denklem ve cebirsel işlem gibi sözel göstergeler kullandıkları ancak soru şekil içerdiği zaman şekil, paralel doğru ve doğru parçası gibi sözel olmayan göstergeler kullandıkları sonucu elde edilmiştir. Araştırmanın bir diğer sonucu olarak ise analitik düşünme düzeyi gelişmiş öğrenciler diğer öğrencilere nispeten geometri ve cebir testlerinde daha başarılı olmuşlardır. Araştırmacı öğrencilerin problem çözümlerinde görsel yaklaşımları kullanmalarını arttırmak için rutin olmayan problemler üzerinde durulması, problem çözüm sürecinde öğrencilerin farklı çözüm yöntemlerini kullanmaya teşvik edilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Özcan (2012) çalışmasında 7. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin gelişiminde bilgiyi oluşturma süreci yapılarını incelemiştir. 2010-2011 Eğitim Öğretim Yılı'nda toplam 118 7. sınıf öğrencisi ile yürütülen çalışmada öğrencilere "geometrik Düşünme Düzeyi Belirleme Testi" uygulanmıştır. Bu test sonuçlarına göre belirlenen 12 öğrencinin bilgiyi işleme süreçleri incelenmiştir. Deneysel yöntemle yürütülen çalışmada; deney ve kontrol gruplarında ön test-son test araçları, görüşme ve gözlem veri toplama araçları kullanılmıştır. Buluş yolu ile öğrenme etkinlikleri kullanılarak yapılan öğretimler sonucunda keşfetmeye yönelik etkinliklerin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini geliştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte geometrik düşünme düzeylerine göre bilgiyi oluşturma sürecinde farklı yaklaşım ve yollar tercih ettikleri de araştırma sonun ortaya çıkan sonuçlardandır.

Oral, İlhan ve Kınay (2013) araştırmalarında, cebirsel düşünme ve geometrik düşünme düzeyleri arasında bir ilişki olup olmadığını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Araştırma kapsamında sekiz farklı ortaokulda eğitim gören toplamda 515 sekizinci sınıf öğrencisi ile çalışılmıştır. Araştırmada, öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini belirlemek için Usiskin (1982) tarafından geliştirilen Geometrik Düşünme Testi ve cebirsel düşünme düzeylerini belirlemek için Hart vd. (1998) tarafından geliştirilen Cebirsel Düşünme Testinden yararlanılmıştır. Araştırma sonunda öğrencilerin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasında pozitif yönde, orta düzeyde ve anlamlı bir ilişki olduğu görülmüştür.

Kalkan (2014) çalışmasında sekizinci sınıf öğrencilerinin doğrusal ilişki ve eğim kavramlarına ilişkin kavramsal anlama ve muhakeme yapılarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma kapsamında Eskişehir ilinde eğitim gören 103 sekizinci sınıf öğrencisi ile çalışılmıştır. Bu öğrenciler arasından açık uçlu cebir testi ile seçilen 5 orta ve 5 yüksek başarı düzeyine sahip toplam 10 odak öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu yolla toplanan verilen çözümlenmesi ve yorumlanması aşamasında nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin doğrusal ilişki, doğrunun grafiği ve eğimi ile ilgili kavram yanılgılarına sahip oldukları ve buna bağlı olarak da cebirsel muhakeme yapamadıkları sonucu ortaya çıkmıştır.

Dane, Çetin, Özturan Sağırlı ve Baş (2015) yaptıkları çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının doğru parçası-ışın kavramları bağlamında bir cebirsel ifadeye karşılık gelen geometrik şekil-yer ve verilen geometrik şekil-yere karşılık gelen cebirsel ifadeyi bulma durumlarını incelemişlerdir. Toplam 130 matematik öğretmeni adayına sorulan açık uçlu beş soru "doğru", "yanlış" ve "cevap verememe" kodlarına bağlı olarak betimsel analiz yöntemi değerlendirilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar matematik öğretmeni adaylarının her iki durumda da bazı zorluklar yaşamalarına rağmen cebirsel ifadeye karşılık gelen geometrik şekil-yer bulmada geometrik şekil-yere karşılık gelen cebirsel ifadeyi bulmaya göre daha başarılı olduklarını göstermiştir.

Yakut Çayır ve Akyüz (2015) yaptıkları çalışmada 9. sınıf öğrencilerinin lineer şekil örüntüsü içeren problemleri çözerken kullandıkları genelleme stratejilerini incelemeyi amaçlamışlardır. Balıkesir ilinde eğitim gören toplamda 425 9. sınıf öğrencisi ile çalışmışlardır. Araştırmada veri toplama, çözümleme ve yorulama için nitel araştırma yöntemlerinden içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Araştırmada örüntünün uzak ve yakın adımları için öğrenci çözümleri incelenmiştir. Araştırmada yer alan katılımcıların yakın adımı bulmada uzak adımı bulmaya göre daha başarılı oldukları sonucu elde edilmiştir. Katılımcılar yakın adım için tek tek sayma ve terimler arasındaki farka odaklanma eğilimi gösterirken uzak adım için belirgin strateji, orantı stratejisi ve fonksiyonel ilişki arama stratejisi kullanmışlardır. Ayrıca araştırma sonunda öğrencilerin çoğunun örüntüleri tanımada başarılı oldukları ancak yine çoğunun genellemeye ulaşmada ve cebirsel notasyonlarla örüntü kuralını ifade etmede başarısız oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Kılıç (2016) yaptığı çalışmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin lineer sayı örüntüsünü şekil örüntüsüne çevirirken ne tür şekil örüntüleri oluşturdukları ve bu süreçte hangi stratejileri kullandıklarını belirlemeyi amaçlamıştır. 2014-2015 eğitim öğretim yılında sekizinci sınıfa devam eden toplam 474 öğrenci ile çalışılmıştır.

Araştırmada veri analiz sürecinde semantik analiz ve betimsel analiz yöntemleri kullanılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin örüntüleri oluştururken geometrik ve geometrik olmayan yapılar kullandıkları ancak bunlardan geometrik olanlara daha fazla yer verdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin; sayma, şekil belirleme+sayma, yinelemeli, çizme, belirgin ve sayıları parçalama stratejileri kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

1.4. Amaç

Bu araştırmanın genel amacı, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme bağlamında, geometri çalışmalarında semboller ve cebirsel ilişkileri, örüntüler ve genellemeleri, çoklu temsilleri nasıl kullandıklarını ve bu süreçte ortaya çıkan kavramsal zorlukları belirlemektir. Bu amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

Ortaokul sekizinci sınıf öğrencileri geometri çalışmalarında cebirsel düşünmeyi nasıl kullanırlar ve karşılaştıkları kavramsal zorluklar ve yanılgılar nelerdir?

- Öğrenciler geometri çalışmalarında semboller ve cebirsel ilişkileri nasıl kullanırlar? Araştırma kapsamında ele alınan semboller ve cebirsel ilişkilere ilişkin kavram zorlukları nelerdir?
- Öğrenciler geometri çalışmalarında genelleme yaparken örüntüleri nasıl kullanırlar? Araştırma kapsamında ele alınan örüntü ve genellemelere ilişkin kavram zorlukları nelerdir?
- Öğrenciler geometri çalışmalarında çoklu temsilleri nasıl kullanırlar? Araştırma kapsamında ele alınan çoklu temsillere ilişkin kavram zorlukları nelerdir?

1.5. Önem

Matematik birbirinden farklı ama birbiriyle ilişkili konu alanlarından oluşmaktadır (NCTM, 2000). Matematiği öğrenmek her öğrencinin ilgi, yetenek ve bilişsel düzeyine göre farklılık gösterse de öğrenciler için temel olan matematiksel bilginin anlamlı öğrenilmesidir. Anlamlı öğrenme öğrencilerin; bilgiyi farklı ortamlarda uygulayabilmeleri, kavramlar arası ve öğrenme alanları arasında ilişki kurabilmeleriyle ilgilidir (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2011). Alanda yapılacak araştırmaların bir özelliği de matematiğin konu alanları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaya yönelik olmasıdır. Böylece öğrenciler matematiğin bütünsel yapısını kavrayabilecek ve anlamlı öğretim sağlanabilecektir.

Matematiğin önemli konu alanlarından ikisi geometri ve cebirdir. Ancak yapılan araştırmalar bu iki konu alanında öğrencilerin kavramsal düzeyde anlamada zorlandıklarını göstermektedir (Mistretta, 2000; Fuys, Geddes ve Tishler, 1998). Bu zorlukların altında yatan nedenlerden biri de konu alanları arasında ilişkilendirmenin yeterince yapılamamasıdır (Banchoff, 2008). Geometri alanında yaşanılan sıkıntılar cebiri etkilemekte, cebirde yaşanılan sıkıntılar ise geometriyi etkilemektedir. Örneğin Fuys, Geddes ve Tishler'in (1998) de ifade ettikleri gibi, özellikle erken yaşlarda geometrinin kavramsal düzeyde anlaşılamaması formel cebire geçişte sembol kullanımını zorlaştırmaktadır. Oysaki geometri çalışmalarında öğrencilerin cebirsel düşünme bileşenleri bağlamında örüntüleri genellemeleri, cebirsel sembol ve ilişkileri keşfetmeleri, farklı temsilleri kullanmaları sağlandığında soyut ve öğrenciler için korkulan bir ders olan geometri konuları daha anlaşılır olacaktır.

2005 yılında yenilenen ve 2013 yılında düzenlenen ve 2017-2018 Eğitim-Öğretim yılında yeniden düzenlenerek uygulanmaya başlanan yeni Matematik Dersi Öğretim Programında da matematik dersi konu alanları arasında ilişkilendirmenin yapılması ile ilgili uyarılar bulunmaktadır (MEB, 2013; MEB, 2018). Cebir öğrenme alanı yeni matematik dersi öğretim programında matematiksel düşünmenin önemli bir alt boyutu olarak ele alınmıştır. Ayrıca yeni öğretim programında diğerlerinde olduğu gibi cebir öğrenme alanına ilişkin kazanımların yine programda yer alan diğer öğrenme alanları ile ilişkilendirilmesi gerektiği ayrıca vurgulanmıştır (MEB,2018). O halde matematik dersi öğretim programında ifade edilen ilişkilendirmenin geometri ve cebir konu alanlarında öğrencilere nasıl yansıdığının belirlenmesi bu çalışmanın önemini ortaya koymaktadır. Diğer yandan geometri ve cebir soyut kavramlar ve ilişkiler üzerine inşa edilir. Özellikle soyut düşünme için kritik dönem olan ortaokul seviyesinde geometri ve cebir öğrenimi ileri öğrenim düzeyleri için önemlidir. Çalışmada temel geometri ve cebir konularının büyük ölçüde öğrenilmiş olduğu sekizinci sınıf öğrencileri ile çalışılacaktır. Bu bağlamda sekizinci sınıfa gelmiş öğrencilerinin geometri çalışmalarında cebirsel düşünme bileşenlerini nasıl kullandıkları ve çalışmalarında karşılaştıkları kavramsal zorlukların neler olduğunun belirlenmesi ortaöğretime geçiş öncesi var olan durumun ortaya koyulması ile yapılması gerekenleri belirlemek açısında da bu çalışma önemlidir.

1.6. Sınırlılıklar

Araştırma, 2016-2017 eğitim-öğretim yılı bahar dönemi, araştırma okulu ve bu okulda sekizinci sınıfa devam eden öğrenciler ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Cebir: Bilinmeyenler, formüller, genelleştirilmiş örüntüler, değişkenlerin yerini alan yer belirleyiciler ve ilişkileri içeren bir dildir (Usiskin, 1997).

Cebirsel düşünme: Araştırma kapsamında cebirsel düşünme karşılaşılan bir durumda matematiksel sembolleri anlamlandırarak ilişkileri çözümlemeyi, ilişkileri çözümlemeye yardımcı olacak farklı temsil biçimlerini kullanmayı ve tekrarlayan durumları tespit ederek formel bir dille genellemeyi içeren bir düşünme şekli olarak ele alınmıştır.

Geometri: Geometri öğrenciler için cebirsel, aritmetik, istatistik ve matematik kavramları görselleştirmeye yardımcı olan zengin bir kaynaktır (Napitulupu, 2001).

2. YÖNTEM

Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri çalışmalarında cebirsel düşünme bileşenlerini nasıl kullandıklarını ve çalışmalarında karşılaştıkları kavramsal zorlukların neler olduğunu belirlemenin amaçlandığı bu çalışmada, öğrencilerin geometri çalışmalarında cebirsel düşünme bileşenleri derinlemesine araştırılacağı için verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanmasında temel nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Temel nitel araştırma yöntemi, sosyal olguların anlamını açıklamaya ve anlamaya yardımcı olan; insanların duyguları, düşünceleri, davranışları ve dünyayı nasıl anlamlandırdıkları ile ilgilenen bir araştırma yöntemidir. Eğitimin de sosyal bir olgu olduğu göz önüne alındığında, araştırma katılımcılarının algılarını doğrudan anlamak ve bu algılardan yola çıkarak birtakım sonuçlara ulaşmak amacıyla araştırmada temel nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir (Merriam, 2009).

Nitel araştırmalarda yaygın olarak gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel bilgi toplama yöntemleri kullanılmaktadır. Ayrıca nitel araştırma yönteminde görüşme, gözlem ve doküman incelemelerinde kullanılan sorular, belirlenen odak noktaları ve kurulan ilişkiler araştırmanın kuramsal çerçevesine bağlı olarak gerçekleştirilmektedir (Merriam, 2009; Merriam, 1998'den aktaran Tanışlı, 2008). Algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir süreç olan nitel araştırma bir olguyu derinliğine ve kendi ortamı ve sınırlılığı çerçevesinde açıklama çabası içindedir. Bu nedenle araştırma sonuçlarının bütüne genellenmesi zordur.

2.1. Katılımcılar

Araştırmada yer alan katılımcılar Bartın il merkezinde yer alan orta sosyo-ekonomik düzeye sahip MEB'e bağlı bir devlet ortaokulunun sekizinci sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örneklem yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örneklem yöntemi araştırmaya başlarken belirlenen ölçütleri karşılayan bir durum çalışmasıdır (Yıldırım ve Yüksel, 2005). Katılımcıların seçilmesinde aşağıdaki ölçütler benimsenmiştir:

- *Katılımcıların sınıf düzeyi:* Ortaokul öğrencileri yaş ve zihinsel gelişim bakımından somut düşünme düzeyinden soyut düşünme düzeyine geçiş dönemindedirler. Araştırmada yer alan soyut geometrik durumlara aşina oldukları ve cebirsel düşünme seviyeleri ortaokulun diğer sınıf seviyelerine göre daha ileride olduğu için araştırmanın katılımcıları sekizinci sınıf öğrencileri arasından seçilmiştir.

- *Katılımcıların belirlenmesi:* Katılımcılar seçilirken "Van Hiele Geometrik Düşünme Düzey Belirleme Testi" ve araştırmacı tarafından hazırlanan "Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi" ölçüt olarak kullanılmıştır. Durum çeşitliliğini sağlamak ve farklı ilişkileri ortaya çıkarmak amacıyla katılımcılar cebirsel düşünme testinden "Düşük", "Orta" ve "Yüksek" başarı düzeyine sahip olarak sınıflandırılmıştır. Araştırmada amaç öğrencilerin geometri problemlerini çözerken cebirsel düşünme becerilerinin nasıl ve ne düzeyde kullanıldığını incelemek olduğu için geometrik düşünme düzeyi düşük öğrencilerden veri elde edilemeyeceği düşünülmüş ve Van Hiele Geometrik Düşünme Düzey Belirleme Testi ilk 15 sorusuna göre düzey 2'de olan öğrenciler arasından seçim yapılmıştır. Araştırma süresince çeşitli nedenlerle (araştırmadan çekilmek istemesi, sağlık problemleri gibi) araştırmayı sonlandırmak isteyen öğrenci olması olasılığı göz önüne alınarak tüm düzeylerden ikişer öğrenci seçilmiştir. Cebirsel düşünme düzey belirleme testinden 95 ile 100 arası puan alan öğrenciler "Yüksek", 70 ile 80 arası puan alan öğrenciler "Orta" ve 50 ile 60 arası puan alan öğrenciler "Düşük" başarı seviyesine sahip olarak tanımlanmıştır. Tanımlanan her başarı seviyesinden rastgele ikişer odak öğrenci seçilmiştir. Bu seçim sonucunda beşi kız biri erkek toplam altı odak öğrenci belirlenmiştir. Araştırmada kullanılan isimler katılımcıların isteği üzerine takma isimler ile değiştirilmiştir.

Öğrencilerin cebirsel düşünme düzey dağılımlarını belirten Tablo 2.1 aşağıda verilmiştir:

Tablo 2.1. *Araştırmaya katılan öğrencilerin cinsiyet ve başarı düzeyleri ile araştırmada kullanılan kodları*

Cebirsel Düşünme Düzeyi / Cinsiyet	Yüksek	Orta	Düşük
Kız	2 (Sibel-S_y, Asiye-A_y)	1 (İnci-$İ_o$)	2 (Canan-C_d, Hilal-H_d)
Erkek		1 (Mustafa-M_o)	

2.2. Düzey Belirleme Testlerinin ve Görüşme Sorularının Hazırlanması, Geçerlilik ve Güvenirlik Çalışmaları

2.2.1. Düzey belirleme testleri

Araştırmada katılımcı öğrencileri belirlemek amacıyla araştırmacı tarafından hazırlanan ve EK-4'te örneği verilen cebirsel düşünme düzey belirleme testi ve Van Hiele'ın geometrik düşünme testi kullanılmıştır. Toplam 11 sorudan oluşan cebirsel düşünme düzey belirleme testi hazırlanırken alanyazında tanımlanmış cebirsel düşünme düzeylerini ortaya çıkaracak bileşen ve davranışlar dikkate alınmıştır. Bu bileşenler "Semboller ve Cebirsel İlişkiler", "Temsiller" ve "Örüntü ve Genellemeler" olarak ele alınmıştır. Açık uçlu soruların yer aldığı test hazırlanırken Matematik dersi Öğretim Programı, sekizinci sınıf matematik dersi kazanımları, Dindyal'in (2003) çalışmasında ve ders kitaplarında yer alan sorular Dikkate alınmıştır. Belirtke tabloları kullanılarak hazırlanan soruların sekizinci sınıf düzeyine uygun olmasına dikkat edilmiştir.

Hazırlanan cebirsel düşünme düzey belirleme testi öncelikle iki alan uzmanının ve bir ortaokul matematik öğretmeninin görüşüne sunulmuş ve belirtke tabloları yardımıyla kapsam geçerliliği sağlanmıştır. Araştırmacı ve alan uzmanı tarafından testin yanıt anahtarı ve puanlamaları hazırlanmıştır. Testin güvenirlik çalışmasında araştırma kapsamında yer alan öğrencilerle benzer niteliklere sahip ortaokul sekizinci sınıf öğrencileri üzerinde pilot çalışma yapılmıştır.

2.2.2. Klinik görüşme soruları

Klinik görüşmede kullanılan görüşme soruları; semboller ve cebirsel ilişkiler, temsiller ve örüntüler ve genellemeler olmak üzere üç boyutta ele alınmıştır. Semboller ve cebirsel ilişkiler ile ilgili beş soru, temsiller ile ilgili dört soru ve örüntü ve genellemeler ile ilgili üç soru olmak üzere toplamda 12 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. EK-6'da örneği verilen görüşme soruları sekizinci sınıf seviyesine uygun, açık uçlu, konu ile ilgili katılımcılarda aranan özellikleri ortaya çıkaracak nitelikte sorulardan oluşmaktadır. Klinik görüşme soruları hazırlanırken Dindyal'in (2003) çalışmasında yer alan sorulardan, ders kitaplarından ve alan uzmanının görüşünden yararlanılmıştır.

2.2.3. Pilot çalışma

Hazırlanan cebirsel düşünme düzey belirleme testi, Van Hiele geometrik düşünme testi ve klinik görüşme sorularının denenmesi amacıyla 2015-2016 Eğitim-Öğretim Yılında Eskişehir ilinde merkeze bağlı bir devlet okulunda 214 sekizinci sınıf öğrencisi ile pilot çalışma yapılmıştır. Pilot uygulamanın yapılmasındaki amaç, düzey belirleme testleri ve görüşme sorularının benzer şekilde diğer öğrenciler tarafından da tekrarlanabilir olmasıdır (Goldin, 2000'den aktaran Tanışlı, 2008). Ayrıca pilot uygulama istenen özelliklerin ne derecede ölçüldüğü ve ortaya çıkarıldığını da test etme olanağı sağlar.

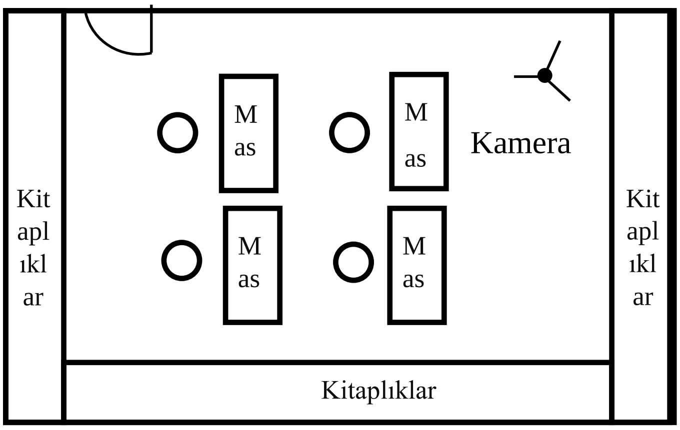
Araştırma sürecinde yapılan pilot uygulama sonucunda Van Hiele geometrik düşünme testlerinde herhangi bir sorun ile karşılaşılmamıştır. Ancak cebirsel düşünme düzey belirleme testinin bir sorusunda düzeltmeye gidilmiştir. Ayrıca klinik görüşme sorularından öğrencilerin seviyesine uygun olmaması ve sağlıklı veri elde edilememesi nedeni ile üç sorunun çıkarılması alan uzmanı tarafından uygun görülmüştür.

2.3. Verilerin Toplanması

Araştırma için gerekli olan veriler odak öğrenciler ile yapılan olan klinik görüşmeler, video kayıtları, öğrenci çalışma yaprakları ve araştırmacı ve öğrenci günlüğü ile toplanmıştır. Ayrıca düzey belirleme testlerinden elde edilen sonuçlar destek veri olarak kullanılmıştır.

2.3.1. Klinik görüşme

Araştırmada katılımcıların geometri çalışmalarında cebirsel düşünme bileşenlerini nasıl kullandıkları ve karşılaştıkları kavramsal zorlukların neler olduğu incelendiği için amaç katılımcıların doğru sonuçlara ulaşması değil çözüm süreçleri boyunca düşünme biçimlerinin ortaya çıkarılması ve derinlemesine incelenmesidir. Öğrencilerin süreç boyunca ne düşündükleri ve nasıl düşündüklerini belirlemek için uygun olan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Araştırma kapsamında toplam altı öğrenci ile klinik görüşme yapılmış ve görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Klinik görüşmeler araştırma için izin alınan okulun kütüphanesinde, okul yönetimi ile birlikte planlanan zamanlarda yapılmıştır. Şekil 2.1'de klinik görüşme yapılan ortamın krokisi verilmiştir.



Şekil 2.1. *Klinik görüşmenin gerçekleştirildiği ortam*

Altı öğrenci ile farklı günlerde, her biri yaklaşık 50 dakikalık toplamda üçer klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşme süresince öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine ortaya çıkarma amacıyla öğrencilere "ne düşünüyorsun?", "nasıl yaptın?", "neden böyle bir çözüm yaptın?", "açıklar mısın?", "başka nasıl yapabilirsin?" gibi sorular yöneltilmiştir. Görüşme kayıtları araştırmacı ve alan uzmanı ile birlikte değerlendirilmiştir.

2.3.2. Video kayıtları

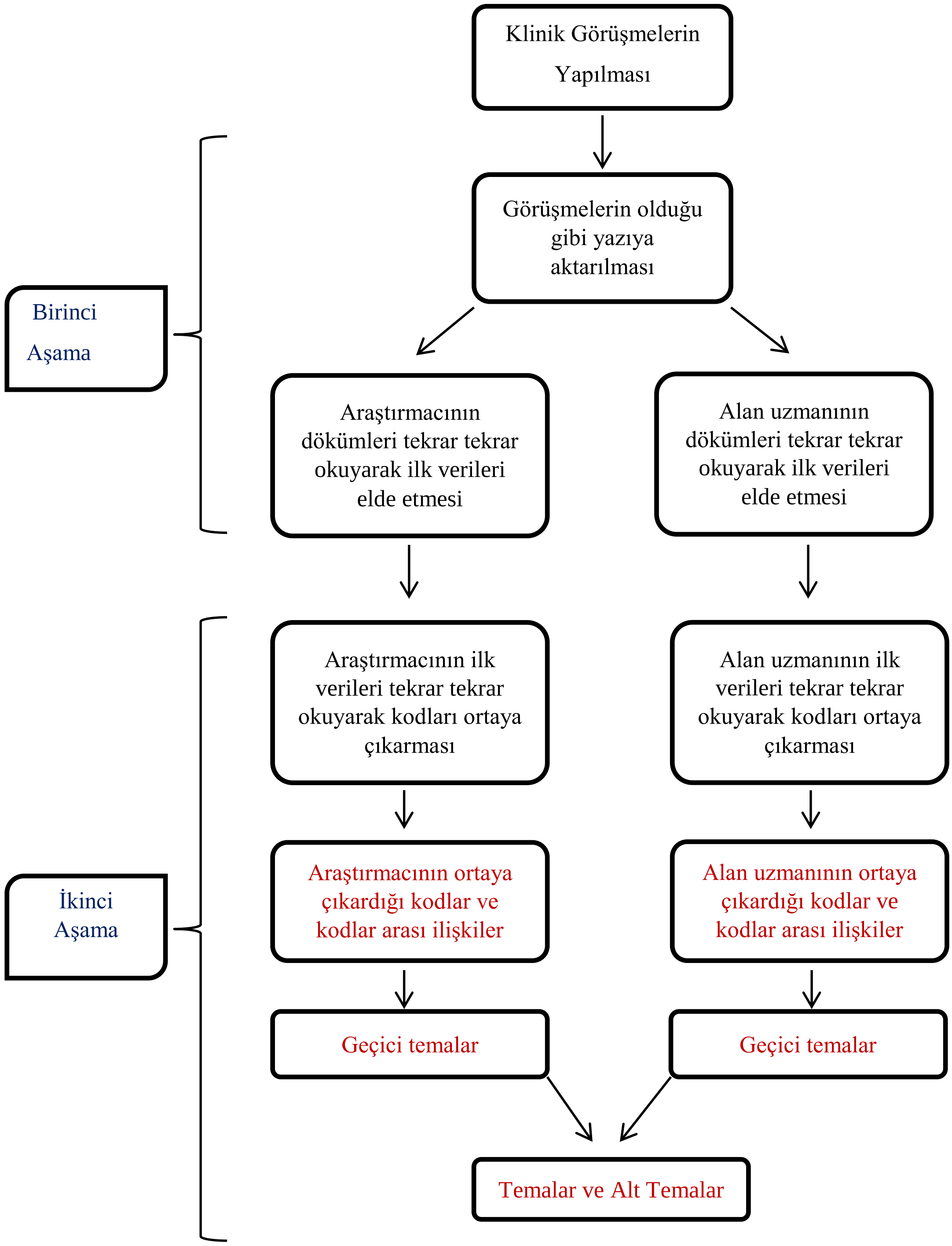
Araştırmada katılımcılarla yapılan tüm görüşmeler gerekli izinler alınarak kayıt altına alınmıştır. Video kayıtları klinik görüşme sırasında araştırmacının gözünden kaçan noktaları hatırlatmada ve ortaya çıkarmada etkilidir. Araştırma kapsamında yapılan görüşmeler toplamda 942 dakika sürmüştür. Kayıtlar veri analizi sırasında tekrar tekrar izlenerek maksimum düzeyde veri elde edilmesine yardımcı olmuştur. Ayrıca öğrencilerin sözlü ve yazılı olarak ifade edemediği bazı noktalarda beden dili yardımıyla veri sağlanmıştır.

2.3.3. Araştırmacı ve öğrenci günlüğü

Araştırma sürecinde araştırmacı tarafından araştırma ile ilgili tüm bilgilerin yazıldığı defter araştırmacı günlüğüdür. Araştırmacıya bazı önemli noktaları hatırlatmada önemli bir yere sahiptir. Araştırma sürecinde araştırmacı için önemli bir veri kaynağı olan öğrencilerin çalışma kâğıtları ve aldıkları notlarda öğrenci günlüklerini oluşturmaktadır.

2.4. Verilerin Çözümlenmesi ve Yorumlanması ve Geçerlik Güvenirlik Çalışmaları

Verilerin çözümlenmesinde tematik analiz yöntemi kullanılmıştır (Liamputtong, 2009). Tematik analiz verileri tanımlama, analiz etme ve temalara ayırma için kullanılan bir yöntemdir. İki önemli aşamadan oluşmaktadır. Şekil 2.2'de araştırma verilerinin çözümlenme aşamaları verilmiştir.



Şekil 2.2. *Araştırma verilerinin çözümlenme şeması*

Şekil 2.2'de görüldüğü gibi ilk aşamada katılımcılar ile yapılan görüşmeler olduğu gibi yazıya aktarılmıştır. Araştırmacı ve alan uzmanı tarafından bağımsız bir şekilde anlamlandırılmak üzere tekrar tekrar dikkatlice okunmuştur. Böylece görüşme dökümlerinden elde edilen ilk veriler not edilmiştir.

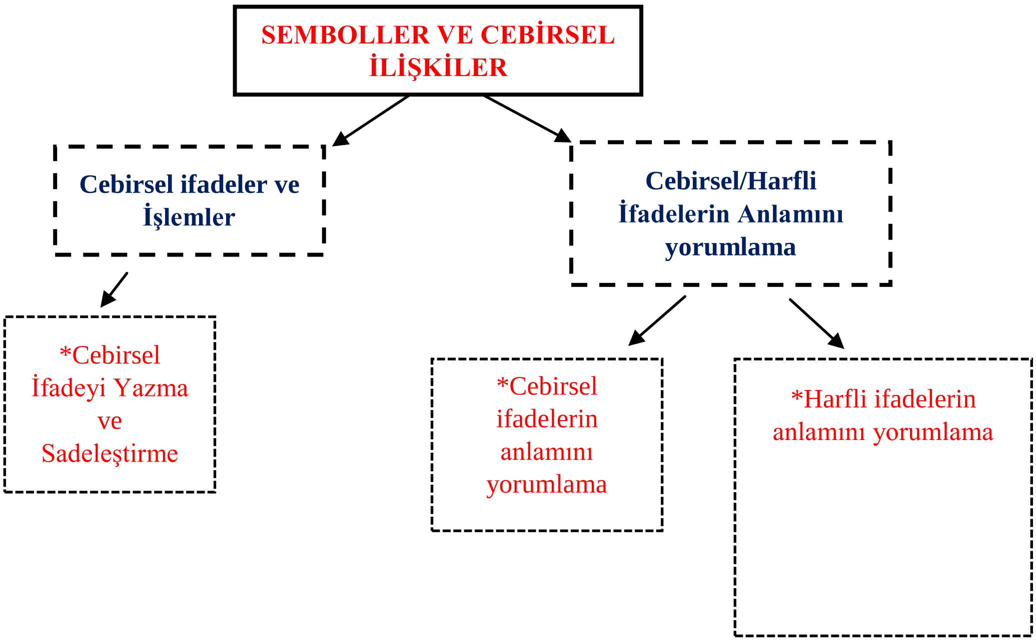
Tematik analizin ikinci aşamasını kodlama aşaması oluşturmaktadır (Liamputtong, 2009). Araştırmacı ve alan uzmanı not aldıkları verileri bağımsız bir şekilde tekrar tekrar okuyarak kodlamışlardır. Ortaya çıkarılan kodlar ve kodlar arası ilişkiler incelenerek geçici temalar oluşturulmuştur. Bu aşamada asıl temaları belirlemeye yardımcı olması açısından geçici temalardan oluşan bir harita çıkarılmış ve geçici temaların düzenlenmesiyle araştırmanın temaları ve alt temaları ortaya çıkmıştır.

Örneğin araştırmanın semboller ve cebirsel ilişkiler başlığına ilişkin birinci sorunun a şıkkından elde edilen verilerin çözümlenmesi aşamaları aşağıda verilmiştir. Sorunun yazıya dökülen verileri tekrar tekrar okunarak Tablo 2.2'de verilen ilk veriler elde edilmiştir.

Tablo 2.2. *Klinik görüşme verilerinin çözümlenmesi*

Canan	Hilal	İnci	Mustafa	Asiye	Sibel
Geometrik Düşünme Düzeyi: 2					
Cebirsel Düşünme Düzeyi: Düşük		Cebirsel Düşünme Düzeyi= Orta		Cebirsel Düşünme Düzeyi= Yüksek	
Bir üçgenin çevresinin kenar uzunlukları toplamı olduğunu bilme.	Bir üçgenin çevresinin kenar uzunluklarının toplamı olduğunu bilme.	Bir üçgenin çevresinin kenar uzunluklarının toplamı olduğunu bilme.	Bir üçgenin çevresinin kenar uzunluklarının toplamı olduğunu bilme.	Üçgenin çevresini kenar uzunlukları toplamı olduğunu bilme.	Bir üçgenin çevresinin kenar uzunlukların ın toplamı olduğunu bilme.
Cebirsel ifadeyi yazma ve sadeleştirme	Cebirsel ifadeyi yazma ve sadeleştirme.	Cebirsel ifadeyi yazma ve sadeleştirme.	Cebirsel işlemi zihinden yapma ve doğru sonucu bulma.	Cebirsel ifadeyi yazma ve sadeleştirme.	Cebirsel işlemi zihinden yapma ve doğru sonucu bulma.
Değişkenin anlamını bilememe.	Değişken-bilinmeyen ayrımını yapamama.	x e değişken deme ancak değişkenin tanımını yapamama.	Değişken kavramını bilme.	Değişken-bilinmeyen kavramlarının ayrımını yapamama.	X i bilinmeyen olarak tanımlama.

Tablo 2.2'de verilen ilk veriler tekrar tekrar okunarak Şekil 2.3'te verilen geçici tema, alt tema ve kodlar ortaya çıkarılmıştır.



Şekil 2.3. *Geçici Tema, Alt Tema ve Kodlar*

Şekil 2.3'te verilen geçici tema, alt tema ve kodlar tüm sorulardan elde edilen verilen için oluşturulup düzenlendikten sonra araştırmacı ve alan uzmanının çözümlemeleri birleştirilerek araştırmanın temaları "Semboller ve Cebirsel İlişkiler", "Çoklu Temsiller" ile "Örüntü ve Genellemeler" olarak; alt temaları ise "Cebirsel ifadelerle İşlemler", "Cebirsel/Harfli ifadelerin Anlamını Yorumlama", "Çoklu Temsil Kullanma", "Temsiller Arası Geçiş", "Temsilleri Yorumlama", "Yakın Adıma Genelleme" ve "Uzak Adıma Genelleme" olarak belirlenmiştir.

Araştırmacı ve alan uzmanı tarafından yapılan kodlamaların güvenirliği için Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) önerdiği aşağıdaki uyuşum yüzdesi kullanılarak kodlama güvenirliği kontrol edilmiştir.

Güvenirlik = (Görüş Birliği) / [(Görüş Birliği) + (Görüş Ayrılığı)]

Araştırmacı ve alan uzmanının belirledikleri kodlar için görüş birliği ve görüş ayrılığı sayıları belirlenmiş ve güvenirlik % 90 olarak hesaplanmıştır. Böylece kodlama geçerli sayılmış alt tema ve temalar oluşturulmuştur.

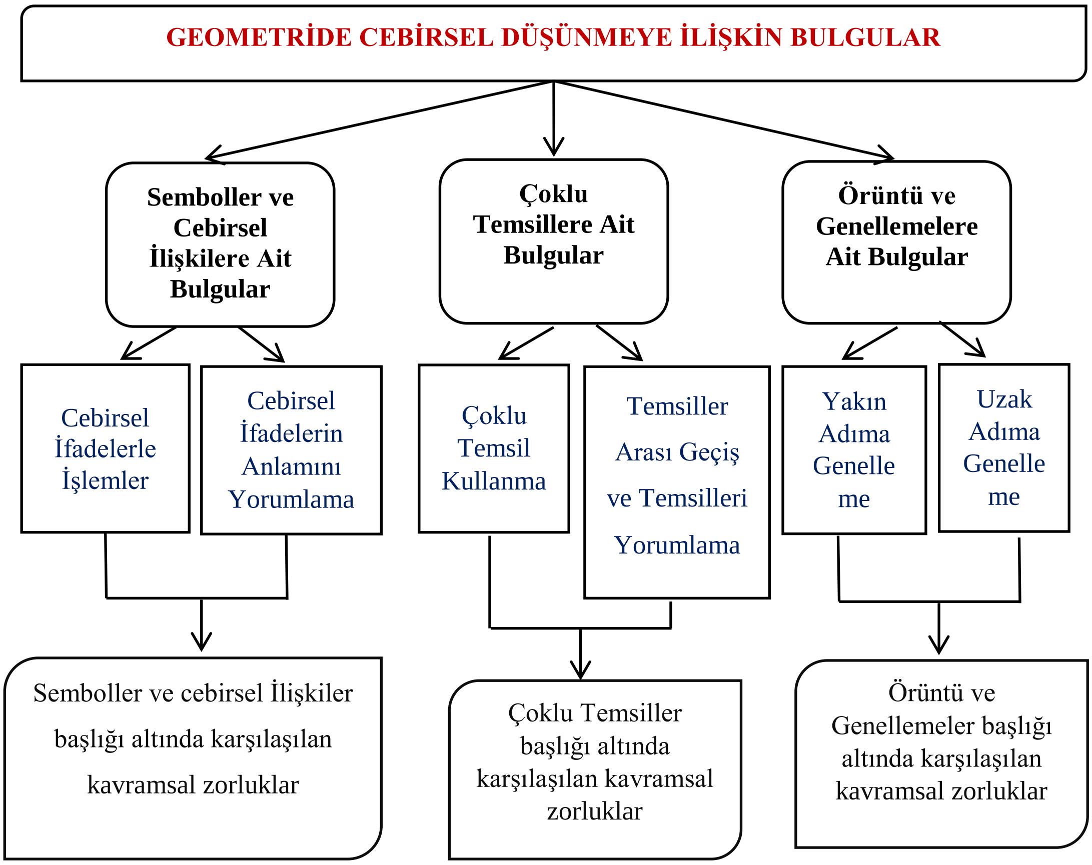
2.5. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmaların bir özelliği de araştırma sürecinde araştırmacının aktif rol almasıdır. Araştırmacı süreç boyunca katılımcılar ile doğrudan ilişki kurar ve gerektiğinde katılımcıların yaşantılarını birebir deneyimler. Verilerin analizi sürecinde alandaki bilgi birikimini ve deneyimlerini kullanarak analizine bunları da yansıtır. (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

Araştırma sürecinde araştırmacı tarafsız bir şekilde katılımcıları belirlemiş, derinlemesine gözlem yaparak katılımcıların düşünme biçimlerini ortaya çıkarmaya çalışmış ve bulgularını sunmuştur. Bu süreçte araştırmacının öğretmen olması ve yüksek lisans eğitimi sırasında almış olduğu Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri, Bilim Etiği ve Eğitimde İstatistiksel Yöntemler dersleri araştırma sürecinde araştırmacının klinik görüşme yapabilmesine, veri toplama ve analiz sürecinde yetkin olmasına yardımcı olmuştur.

3. BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme bağlamında, geometri çalışmalarında semboller ve cebirsel ilişkileri, örüntüler ve genellemeleri, çoklu temsilleri nasıl kullandıklarına ve bu süreçte ortaya çıkan kavramsal zorluklara ait bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir. Şekil 3.1'de bulguların sunuş şeması görülmektedir.

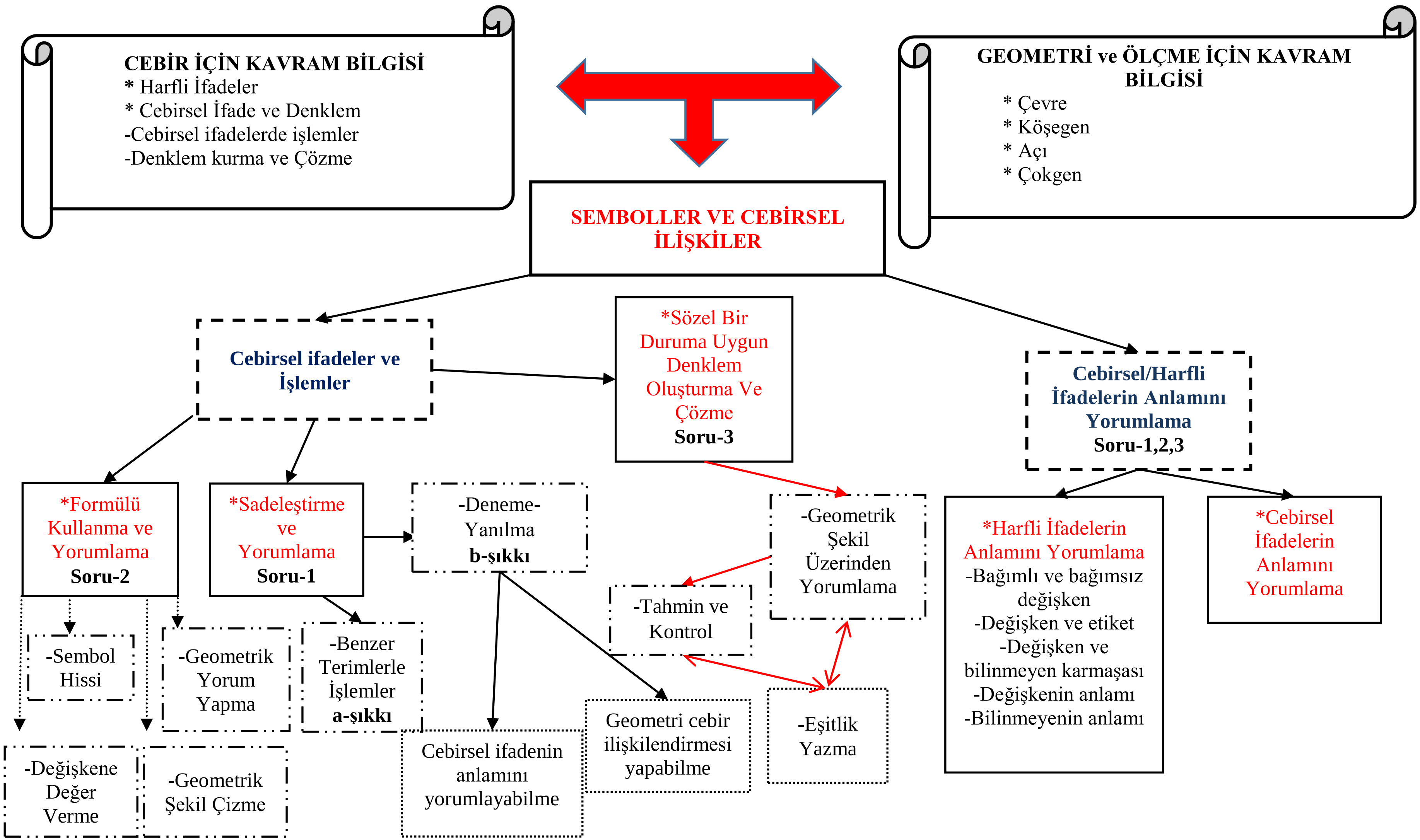


Şekil 3.1. *Bulguların sunuş şeması*

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi araştırmaya ilişkin bulgular; Semboller ve Cebirsel İlişkiler ve bunlara ilişkin kavramsal zorluklar, Çoklu Temsiller ve bunlara ilişkin kavramsal zorluklar, Örüntüler ve Genellemeler ile bunlara ilişkin kavramsal zorluklar olmak üzere altı başlık altında sunulmuştur. Elde edilen bulgular öğrenci kâğıtlarından görseller ve klinik görüşmelerden yapılan doğrudan alıntılar ile desteklenmiştir.

3.1. Semboller ve Cebirsel İlişkilere Ait Bulgular

Araştırma kapsamında Semboller ve Cebirsel İlişkiler başlığı altında öğrenciler ile EK-6a'da verilen üç soru üzerinde klinik görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen veriler Şekil 3.2'de verildiği gibi tema ve alt temalara ayrılarak incelenmiştir.



Şekil. 3.2. *Semboller ve cebirsel ilişkilere ait temalar ve alt temalar*

3.1.1. Cebirsel ifadeler ve işlemler

Cebirsel ifadeler ve işlemler alt teması altında öğrencilerin sorulara ilişkin verdikleri yanıtlar doğrultusunda cebirsel ifadelerle işlem yapma ve cebirsel ifadeleri en sade şekliyle yazma durumları incelenmiştir. Bu bağlamda formülü kullanma ve yorumlama, sadeleştirme ve yorumlama ile sözel bir duruma uygun denklem oluşturma ve çözme kodları ortaya çıkarılmıştır. Cebirsel ifadeler ve işlemler alt teması altında ortaya çıkan kodlar ve bunların birbirleri ile ilişkileri aşağıda sunulmuştur.

3.1.1.1. *Formülü kullanma ve yorumlama*

Formülü kullanma ve yorumlama kodu semboller ve cebirsel ilişkiler başlığı altında sorulan ve Şekil 3.3'te verilen ikinci sorunun analizi sırasında ortaya çıkmıştır.

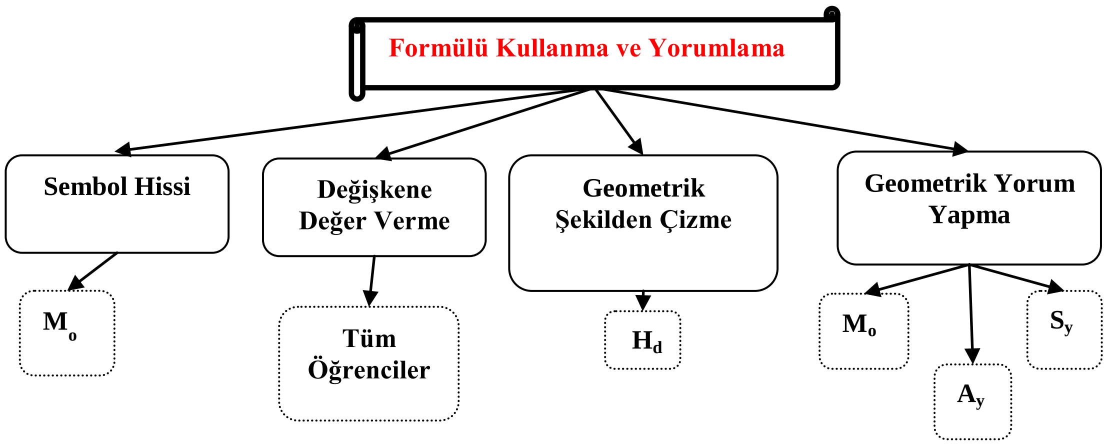
2) **n** kenarlı bir düzlemsel şeklin köşegen sayısı ***n(n-3)/2***'dir.

a) Bu formülü kullanarak bir dörtgenin, beşgenin ve altıgenin kaç tane köşegene sahip olduğunu bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) En az sayıda köşegene sahip olan düzlemsel şekil nedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

Şekil 3.3. *Semboller ve cebirsel ilişkiler klinik görüşme ikinci soru a şıkkı*

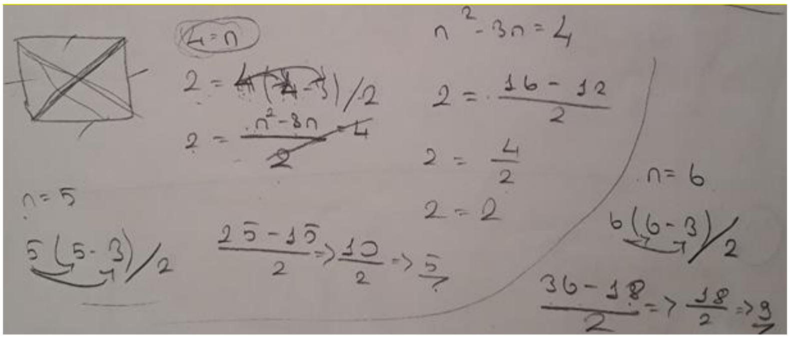
Şekil 3.3'te verilen soruda öğrencilerden n, bir çokgenin kenar sayısı olmak üzere dörtgen, beşgen ve altıgenin köşegen sayılarını ve en az sayıda köşegene sahip düzlemsel şekli bulmaları istenmiştir. Öğrencilerin formülü kullanma ve yorumlama kapsamında söz konusu probleme ilişkin çözüm yolları Şekil 3.4'te verilmiştir.



Şekil 3.4. *Formülü kullanma ve yorumlama kodu kapsamında kullanılan stratejiler*

Şekil 3.4’te görüldüğü gibi, tüm öğrenciler dörtgen, beşgen ve altıgenin köşegen sayısını hesaplarken n kenarlı bir düzlemsel şeklin köşegen sayısını veren n(n-3)/2 formülünü kullanarak değişkene değer verme yolunu öncelikle tercih etmişlerdir. Bunun yanı sıra üç öğrenci geometrik yorum yaparak, bir öğrenci geometrik şekillerden yararlanarak çözümü açıklamaya çalışmıştır. Bir öğrenci ise sembollere ilişkin hızlı ve yerinde bir tahmin yaparak çözümü gerçekleştirmiş, bu çözüm yolu öğrencinin sembol hissine sahip olduğuna dair bir izlenim yaratmıştır.

Formülü kullanarak değişkene değer verme yolunu tercih eden tüm öğrenciler n yerine 4, 5 ve 6 değerlerini yazarak doğru sonuca ulaşmışlardır. Bu süreçte bazı öğrencilerin çözüm yolları farklılık göstermiştir. Örneğin düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal formüldeki n için bir değer bulmak amacıyla önce çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanmış ve çözüme ulaşamayınca n yerine 4, 5 ve 6 değerlerini yazarak sonuca ulaşmıştır. Diğer yandan yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ise belirli bir durumdan hareketle önce dörtgeni dikkate almış, Şekil 3.5’te verildiği gibi n yerine 4 değerini yazarak formülü 2’ye eşitlemiştir.



Şekil 3.5. *Asiye’nin kağıdı*

Asiye’ye bu işlemi neden yaptığı sorulduğunda; *“dörtgenin iki köşegeni olduğunu bildiği için formülü ikiye eşitleyerek ve n yerine dört değerini vererek formülün doğruluğunu kontrol ettiğini”* ifade etmiştir. Daha sonra Şekil 3.5’te görüldüğü gibi n için beş ve altı değerlerini vererek doğru sonuçlara ulaşmıştır.

En az sayıda köşegene sahip olan düzlemsel şeklin ne olduğunun sorgulandığı soruda ise orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci değişkene değer verme yolunu tercih ederek n yerine birden başlayarak çeşitli değerler vermiş, bu yolla en az sayıda köşegene sahip çokgenin dörtgen olduğu sonucuna ulaşmıştır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan ise benzer şekilde en az sayıda kenar uzunluğuna sahip düzlemsel şeklin üçgen olduğundan yola çıkarak formülde n yerine 3 yazmış ve köşegen sayısını sıfır bulmuştur. Ancak bulduğu sonucu doğru yorumlayamadığından en az sayıda köşegene sahip çokgenin üçgen olduğunu ifade ederek hatalı çözüme ulaşmıştır. Diğer öğrenciler ise bu soru için farklı çözüm yollarını kullanmışlardır. Örneğin, orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa n'e değer vermek yerine n(n-3)/2 formülündeki (n-3) cebirsel ifadesini yorumlayarak, hızlı ve yerinde bir tahminle aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

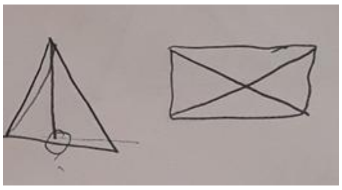
Mustafa: Evet. Zaten şurada 3-3'den 0/2=0 oluyordu o yüzden çıkmazdı zaten.

Araştırmacı: Bir daha tekrar et.

Mustafa: Üçgenin 3 kenarı var. 3-3'den 0. Neyle çarparsak çarpalım 0.0'ı 2'ye bölersek 0 çıkıyor. Yani köşegeni 0 çıkıyor üçgenin.

Mustafa'nın vermiş olduğu bu yanıt onun sembol hissine sahip olabileceği izlenimini doğurmuştur.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ise en az sayıda köşegene sahip olan düzlemsel şeklin ne olduğuna dair bir geometrik şekil çizmiş ve şekil üzerinden yorum yaparak sonuca ulaşmıştır. Şekil 3.6'da görüldüğü gibi soruda geçen en az sayıda köşegene sahip düzlemsel şekil ifadesi için önce en az sayıda kenar uzunluğuna sahip düzlemsel şekil olan üçgeni ele almıştır.



Şekil 3.6. *Hilal'in kağıdı*

Şekil 3.6'da görüldüğü gibi öğrenci üçgen üzerinde köşegen aramış ve yuvarlak içine aldığı noktayı göstererek aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

Hilal: Mesela bir üçgen çizelim. Bu buradan bağlanmaz çünkü burası bir köşe değil. Buralar da bağlanamaz o yüzden bence değil. En küçük köşegen dörtgendir. Kare ya da dikdörtgen. Köşeler bağlanabilir.

Araştırmacı: En az sayıda köşegene sahip düzlemsel şekil nedir o zaman?

*Hilal**:** Dörtgen.*

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ile yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel ise en az sayıda köşegene sahip olan düzlemsel şeklin ne olduğunu açıklarken sözel olarak geometrik şekilden yararlanmışlardır. Aşağıda öğrencilerin açıklamalarından örnekler sunulmuştur.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel adlı öğrenci;

Sibel: En az sayıda köşegene sahip düzlemsel şekil nedir? En az sayıda köşegene sahip olan. Şimdi iki kenarlı bir şey olmaz çünkü o nokta olarak kalır yani doğru parçası olarak kalır. Düzlemsel şekil olması için en az üç tane olmalı. Ama onun da köşegeni olmaz üçgenin.

Araştırmacı: Neden?

Sibel: Çünkü üç tane köşeyi mesela aynı yüzeyde olacağı için bunu buna birleştiremez. Bunu buna da birleştiremez. Üçgen de olmayacağı için en az dörtgen olur.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye adlı öğrenci;

Asiye: En az sayıda köşegene sahip düzlemsel şekil nedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız. En az sayıda köşegene sahip düzlemsel şekil. Üçgen değil dörtgen.

Araştırmacı: Nasıl yaptık onu?

Asiye: Üçgen en küçük zaten. En az kenara sahip olan. Onun herhangi bir köşegeni yoktur. O yüzden dörtgen.

Bu öğrenciler en az sayıda kenar uzunluğuna sahip düzlemsel şeklin üçgen olduğunu ancak üçgenin köşegeni olmadığı için yanıtın dörtgen olduğunu açıklamışlardır.

3.1.1.2. *Sadeleştirme ve yorumlama*

Şekil 3.7'de verilen klinik görüşme sorusu cebirsel ifadelerle işlemler alt temasına ait sadeleştirme ve yorumlama kodu kapsamında incelenmiştir.

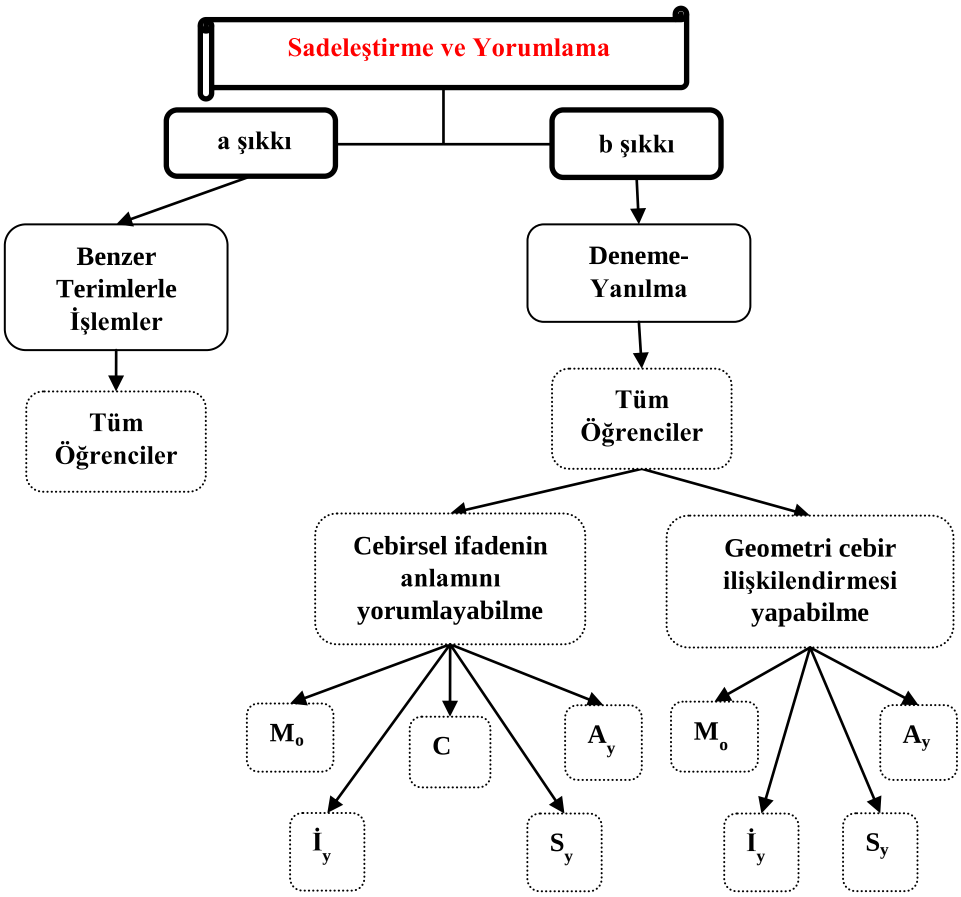
1) Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|AB|$=3x - 2, $|BC|$ = 2x – 1 ve $|AC|$ = x + 5 olmak üzere;

a) ABC üçgeninin çevresini bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) x artarsa ABC üçgeninin çevresi nasıl değişir? Ayrıntılı açıklayınız.

Şekil 3.7. *Klinik görüşme sorusu*

Şekil 3.7'de görüldüğü gibi, sorunun a şıkkında öğrencilerden bir ABC üçgeninin cebirsel ifade biçiminde verilen kenar uzunluklarını toplayarak çevre uzunluğunu bulunmaları istenmiş, bu bağlamda öğrencilerin cebirsel ifadelerdeki benzer terimleri toplayarak ABC üçgeninin çevre uzunluğunu en sade biçimde yazmaları beklenmiştir. Sorunun b şıkkında ise kenar uzunluklarındaki değişkenin değişmesi durumunda üçgenin çevresinin değişme durumu sorgulanmıştır. Bu bağlamda öğrenciler sorunun a şıkkında benzer terimlerle işlem yaparak ve b şıkkında ise deneme-yanılma yolunu tercih ederek çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin sadeleştirme ve yorumlama kodu kapsamında söz konusu probleme ilişkin çözüm yolları Şekil 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.8. *Sadeleştirme ve yorumlama kodu kapsamında kullanılan stratejiler*

Şekil 3.8'de görüldüğü üzere, öğrencilerin tamamı a şıkkı için benzer terimlerle işlemler yapmıştır. Öğrenciler üçgenin çevre uzunluğunu hesaplarken kenar uzunlukları toplamından yola çıkmış ve üç cebirsel ifadeyi toplam biçiminde yazmışlardır. Daha sonra öğrenciler kenar uzunluklarını oluşturan cebirsel ifadelerdeki benzer terimleri doğru bir şekilde toplayarak, ABC üçgeninin çevre uzunluğunu en sade haliyle yazmışlardır. Örneğin düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan adlı öğrencinin çözümü ve yorumu aşağıda verilmiştir.

Araştırmacı: Soruyu sesli bir şekilde okur musun?

Canan: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|AB| = 3x - 2$, $|BC| = 2x - 1$ *ve* $|AC| = x + 5$ *olmak üzere; ABC üçgeninin çevresini bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.*

Araştırmacı: Sana bir ABC üçgeni vermiş.

Canan: Önce kenarları yazacağım ben. Burada eşkenar ya da başka bir şey vermemiş. Yani toplayacağım zaten çevresini soruyor hepsini toplamam gerekiyor.

Araştırmacı: Tamam.

Canan: Bu şekilde toplayacağım. Şunları birbiri ile topluyorum önce x'leri. 6x oluyor. Sonra bunla bunu topluyorum 3, bunla topluyorum 2.

Araştırmacı: Burada ne yaptın?

Canan: Çevresini buldum.

Sorunun b şıkkında ise tüm öğrenciler deneme-yanılma stratejisini kullanmalarına karşın Canan, Mustafa, İnci, Canan, Asiye ve Sibel adlı öğrenciler soruda yer alan cebirsel ifadelere verdikleri değerlerin üçgenin kenar uzunluklarını negatif yapmayacak şekilde seçmişlerdir. Bu durum öğrencilerin soru bağlamında cebirsel ifadenin anlamını yorumlayabildiklerini göstermektedir. Aynı zamanda Mustafa, İnci, Sibel ve Asiye adlı öğrenciler soruda yer alan x'e verdikleri değerin geometrik bir kural olan üçgen eşitsizliği kuralına uyup uymadığını da kontrol etmişlerdir. Bu durum öğrencilerin soru bağlamında geometri cebir ilişkilendirmesi yapabildiklerini göstermektedir.

Sorunun a şıkkına verilen doğru yanıtların aksine, öğrenciler b şıkkını yanıtlarken zorlanmışlardır. Öğrencilerden x artarsa ABC üçgeninin çevresinin nasıl değiştiğini açıklamaları istenmiş, ancak öğrencilerin tamamı sorunun çözümü için x'e rastgele değerler vermişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin çözümlerine ilişkin açıklamaları da çeşitlilik göstermiştir.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal hariç tüm öğrenciler cebirsel ifadede bulunan x'e verdikleri değerin cebirsel ifadeyi yani üçgenin kenar uzunluğunu negatif yapmayacak şekilde seçmiştir. Ayrıca orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler x'e verdikleri değerin üçgen eşitsizliğine uyup uymadığını da kontrol etmişlerdir.

Örneğin; düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan üçgenin kenar uzunluklarının negatif olmaması için x yerine pozitif olmak kaydıyla tamsayı, rasyonel sayı ve köklü sayılar yazılabileceğini ifade etmiştir. Benzer şekilde orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci x yerine sadece pozitif tamsayılar yazılabileceğini belirtmiştir. Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ise x yerine *"sonucu negatif ya da sıfır çıkarmayacak tüm reel sayıları"* yazabileceğini, benzer şekilde yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel de x yerine sonucu negatif ve 0 çıkarmayacak şekilde tamsayı, rasyonel sayı ve köklü sayıları yazabileceklerini ifade etmişlerdir.

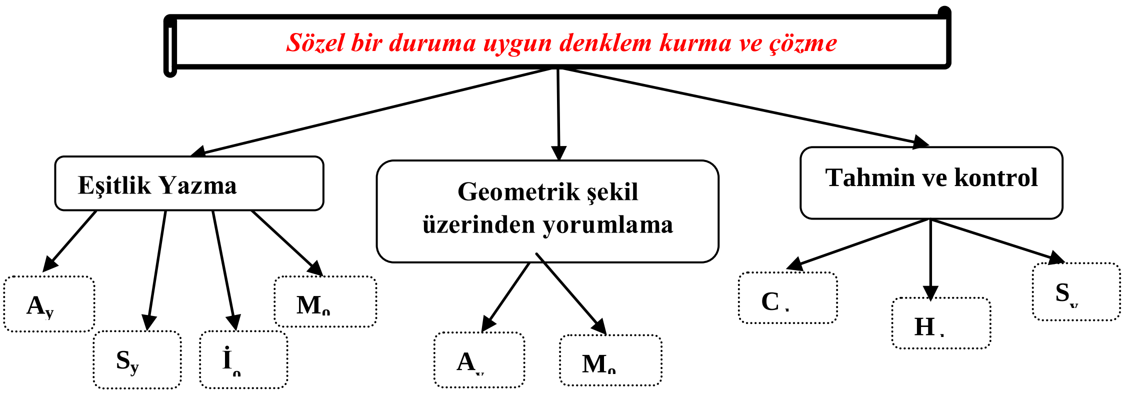
3.1.1.3. *Sözel bir duruma uygun denklem kurma ve çözme*

Sözel bir duruma uygun denklem oluşturma ve çözme Şekil 3.9'da verilen sorunun analizi ile ilişkili olarak ortaya çıkmıştır.

3) Bir açının dört katı kendisinin bütünleri ise açının ölçüsü kaç derecedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

Şekil 3.9. *Klinik görüşme semboller ve cebirsel ilişkiler üçüncü soru*

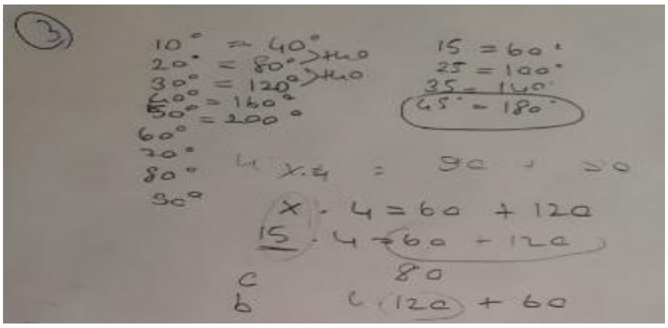
Şekil 3.9'da verilen sorunun çözümünde öğrenciler tahmin ve kontrol, geometrik şekilden yararlanma ve eşitlik yazma stratejilerini kullanmışlardır. Aşağıda Şekil 3.10'da öğrencilerin bu stratejileri kullanma durumları verilmiştir.



Şekil 3.10. *Sözel Bir duruma uygun denklem oluşturma ve çözme kodu kapsamında kullanılan stratejiler*

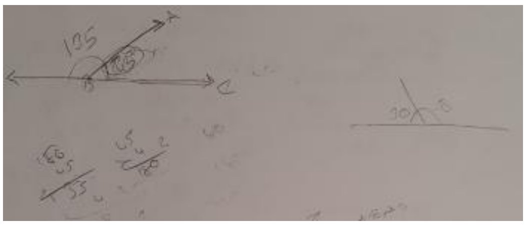
Şekil 3.10'da görüldüğü gibi, yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel adlı öğrenciler ile orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ve İnci adlı öğrenciler eşitlik yazma stratejisini, Mustafa ve Asiye aynı zamanda geometrik şekil üzerinden yorum yapma stratejisini kullanmışlardır. Ayrıca eşitlik yazma stratejisini kullanan yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel tahmin ve kontrol stratejisini de kullanmıştır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ve Canan ise sorunun çözümünde yalnızca tahmin ve kontrol stratejisini kullanmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan bütünler iki açının ölçüleri toplamının 180 derece olduğu bilgisinden yola çıkarak özel sayıları seçmiştir. Daha sonra aritmetik işlemleri Şekil 3.11'de verildiği gibi cebire transfer etmeye çalışmış ve bir açının dört katı bütünleridir düşüncesi ile eşitlik yazma stratejisini kullanarak x.4=60+120 şeklinde bir cebirsel ifade yazmıştır. Ancak her iki yöntemle de doğru sonuca ulaşamamıştır.



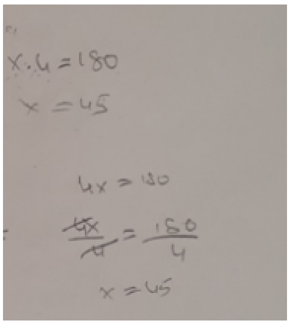
Şekil 3. 11. *Canan'ın kağıdı*

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal de benzer şekilde tahmin ve kontrol stratejisini kullanarak özel sayılar seçmiş ve çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Aynı zamanda bütünler açı kavramını Şekil 3.12'de görüldüğü gibi geometrik şekil üzerinde doğru göstermiştir.



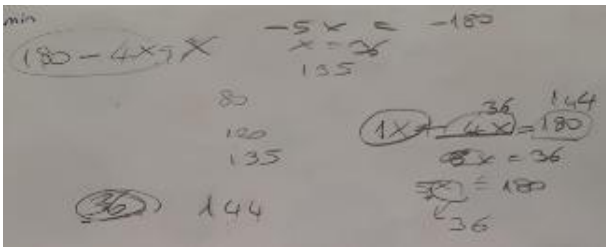
Şekil 3. 12. *Hilal'in kağıdı*

Hilal'e geometrik şekil üzerinde tahmin ve kontrol stratejisi ile bulduğu bu değerleri başka nasıl ifade edebileceği sorulduğunda ise ayrıca eşitlik yazma stratejisini kullanmış ve Şekil 3.13'te verilen x.4=180 denklemini yazmıştır. Aritmetik işlemlerinde ve oluşturduğu cebirsel ifadede bütünler açı kavramını iki açının toplamının 180 dereceye eşit olması olarak ifade etmesine karşın Şekil 3.13'te görüldüğü gibi cebirsel ifadeyi yazarken açının dört katının 180 olması olarak ele almıştır.



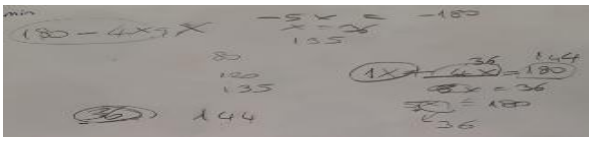
Şekil 3.13. *Hilal'in kağıdı*

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel de sorunun çözümü için Şekil 3.14'te verildiği gibi eşitlik yazma yöntemini kullanarak çözüm yapmıştır.



Şekil 3.14. *Sibel'in kağıdı*

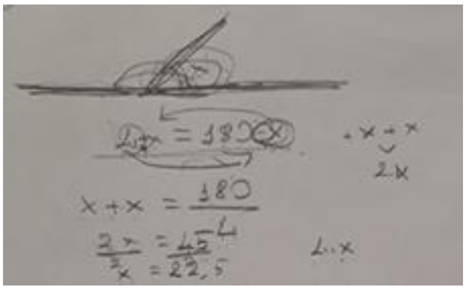
Şekil 3.14'te görüldüğü üzere öğrenci soruda verilen sözel ifadeye uygun 180-4x=x denklemini doğru bir şekilde oluşturmuş, denklemi çözerek doğru sonuca ulaşmıştır. Sibel sorunun çözümü için önce eşitlik yazma stratejisini kullansa da daha sonra özel sayılar seçerek tahmin ve kontrol stratejisini kullanmaya yönelmiştir. Bu bağlamda Şekil 3.15'de görüldüğü gibi öncelikle 180-4x=x denklemini yazmıştır. Daha sonra bu denklemi çözmeden x yerine 20, 30 ve 35 değerlerini vermiştir.



Şekil 3.15. *Sibel'in kağıdı*

Şekil 3.15’te görüldüğü gibi, x için 35 değerini verdiğinde 4 katını 135 olarak bulmuş ve *“oldu galiba”* diyerek yaklaştığını düşünmüş ancak 35 ile 135’in toplamı 180 olmadığı için oluşturduğu denklemi çözme yoluna gitmiştir. Denklemi doğru bir şekilde çözmüş ve x’i 36 bularak sonuca ulaşmıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye sorunun çözümü için cebirsel bir ifade ve denklem kullanmak yerine Şekil 3.16’da verilen açı temsilini çizmiştir.



Şekil 3.16. *Asiye’nin kağıdı*

Asiye Şekil 3.16’da verilen geometrik şekil üzerinde aşağıda verilen yorumları yapmıştır.

Asiye : Bir açının 4 katı kendisinin bütünleri ise açının ölçüsü kaç derecedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

Araştırmacı: Şimdi önce bir bakalım ne anlatıyor soru bize? Ne anladın sorudan?

Asiye : Çizerek anlatabilir miyim?

Araştırmacı: Tabi ki.

Asiye : Buraya bir x açısı verdim. Bu açının 4 katı 4x= 180-x yani bütünlerine eşit oluyor. Benden burada açının ölçüsünü istemiş. Bunu bu tarafa getirdim bunu da bu tarafa. x+x=180/4’dür. 2x= 45 x=22,5

Araştırmacı: Kaç buldun?

Asiye : 22,5

Araştırmacı: Önce şuradan başlayalım çizdin. Nasıl çizdin? Niye böyle çizdin?

Asiye : Bir açı istemiş bizden ilk olarak bu açıyı çizdim olarak farz edelim. Onun bir de bütünleri olarak burayı uzattım.

Araştırmacı: Bütünler ne demekti?

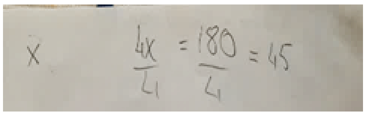
Asiye : Burasıydı galiba tam hatırlayamadım. Bu açının 4 katı bu açının bütünlerine eşitmiş. O yüzden 180-x dedim.

Araştırmacı: 180-x ne oldu burada?

Asiye : Bütünleri.

Asiye geometrik şekil üzerinden yorumlama stratejisini kullanırken yukarıda görüldüğü gibi *"bir açı"* sözel ifadesi için x ve *"bir açının 4 katı"* sözel ifadesi için de 4x cebirsel ifadelerini kullanmıştır. Soruda yer alan sözel ifade için 4x=180-x denklemini oluşturmuş ancak denklem çözümünü hatalı yapmıştır.

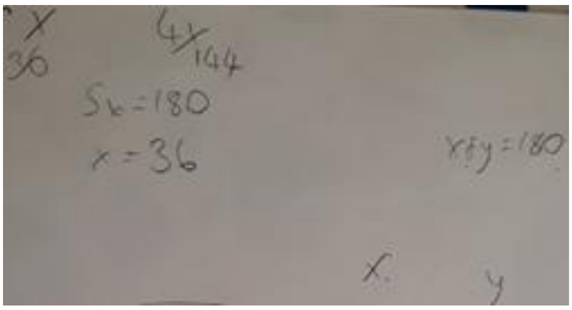
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip iki öğrenciden biri olan İnci Şekil 3.17'de görüldüğü gibi sözel ifadede geçen bütünler iki açıdan birini x diğerini 4x olarak belirlemesine karşın 4x=180 hatalı denklemini oluşturmuştur. Oluşturduğu denklemi cebirsel olarak doğru bir şekilde çözmesine karşın diğer öğrencilerde olduğu gibi doğru sonuca ulaşamamıştır.



Şekil 3.17. *İnci'nin kâğıdı*

Diğer yandan öğrenciden bütünler açıyı açıklaması istenmiş ve x ile 4x terimleri sorgulanmıştır. Öğrenci bu sorgulamadan sonra 4x + x =180 denklemini oluşturarak doğru sonuca ulaşmıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip diğer öğrenci olan Mustafa sorunun çözümü için zihinden cebirsel işlemler yapmıştır. Soru için x ve 4x cebirsel ifadelerini kullanarak ifadelerin cebirsel anlamlarını doğru bir şekilde açıklamıştır. Cebirsel ifadelerle toplama işlemini zihinden yaparak Şekil 3.18'de verilen 5x=180 denklemini oluşturmuştur.



Şekil 3.18. *Mustafa'nın kağıdı*

3.1.2. Cebirsel/harfli ifadelerin anlamını yorumlama

Cebirsel/Harfli İfadelerin Anlamını Yorumlama alt teması harfli ifadelerin anlamını yorumlama ve cebirsel ifadelerin anlamını yorumlama şeklinde iki başlık altında ele alınmıştır. Bulgular her soru bağlamında öğrencilerin soruda geçen harfli ve cebirsel ifadeleri nasıl adlandırdıkları ve yorumladıkları sunulmuştur.

3.1.2.1. *Harfli ifadelerin anlamını yorumlama*

1) Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|AB| = 3x - 2$, $|AC| = 2x - 1$ ve $|AC| = x + 5$ olmak üzere;

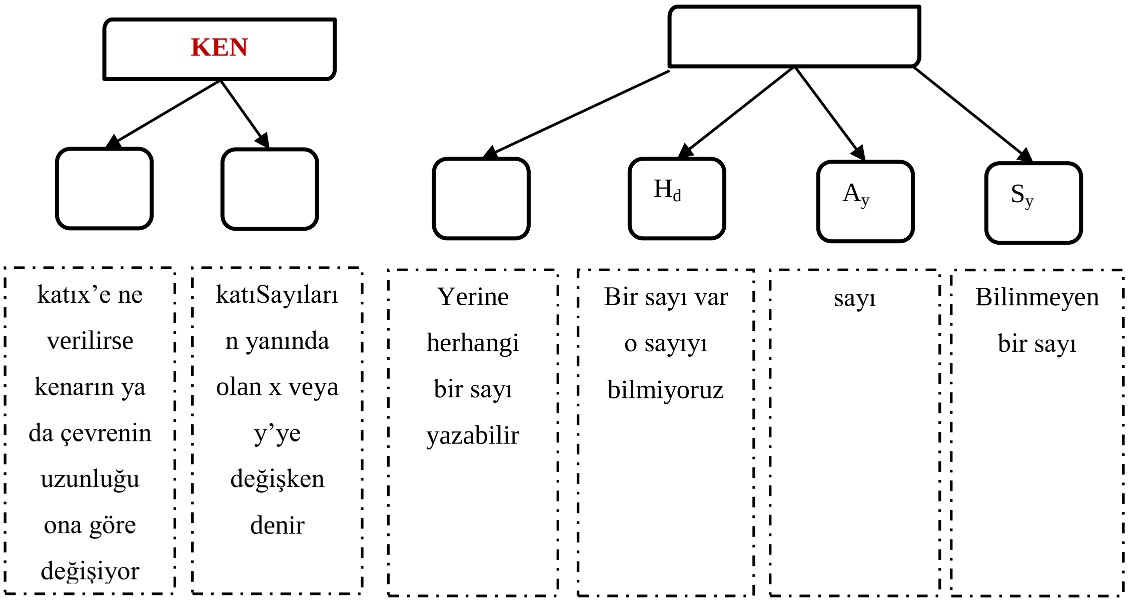
a) ABC üçgeninin çevresini bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) x artarsa ABC üçgeninin çevresi nasıl değişir? Ayrıntılı açıklayınız.

c) Problemde yer alan x ve A harfleri ne anlama gelmektedir? Kullanım şekli olarak aynı mıdır? Ayrıntılı açıklayınız.

Şekil 3.19. *Semboller ve cebirsel ilişkiler klinik görüşme birinci soru*

Şekil 3.19'da görülen soruya öğrencilerin verdikleri yanıtlardan harfli ifadeleri nasıl anlamlandırdıkları ve yorumladıkları incelenmiş ve öğrencilerin tanımlamaları Şekil 3.20'de sunulmuştur.



Şekil 3.20. *Birinci soruda geçen x'e dair öğrenci tanım ve yorumları*

Şekil 3.19'da verilen soruda öğrencilere ilk önce cebirsel ifadelerdeki x'i tanımlamaları istenmiştir. Şekil 3.20'de görüldüğü gibi, bazı öğrenciler x'i değişken bazı öğrencilerde bilinmeyen olarak ifade etmiştir. Diğer yandan x'in anlamı sorgulandığında ise bazı öğrencilerin harfli ifadelerin bilinmeyen ve değişken anlamlarını birbiri yerine kullandıkları görülmüştür. Örneğin cebirsel düşünme düzeyi düşük olan Canan x'i bilinmeyen olarak adlandırmış ancak değişen nicelik anlamına vurgu yapmıştır. Canan x yerine herhangi bir sayı yazabileceği ifade etmiş, x artarsa

ABC üçgeninin çevresinin nasıl değiştiği sorulduğunda ise *"3 çarpı x demek istiyor burada aslında. Mesela orada 6 olsa daha farklı bir sayı 5 olsa daha farklı bir sayı olacak"* şeklindeki açıklamasıyla da x'in değişebileceğini ifade etmiştir. Ancak burada öğrenci çevrenin x değişkenine bağlı olarak değişebileceğine yönelik bağımlı ve bağımsız değişkene vurgu yapan tatmin edici bir açıklaması olmamıştır. Öte yandan soruda geçen x ve A harflerinin anlamı sorgulandığında ise Canan A'yı üçgenin köşesi ve x'i de kenardaki bilinmeyen olarak ifade etmiştir. Bu noktada Canan bu harflerin farklı anlamlar taşıdığı yönünde *"…mesela bu büyük harf bu küçük harf şu şekilde olsaydı (A küçük harf) ben bunu bilinmeyen olarak sayabilirdim"* şeklinde açıklaması Canan'ın bilinmeyen ifadelerin küçük harfle yazılabileceği gibi yanlış bir algıya sahip olduğunu göstermiştir.

Diğer taraftan yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel de benzer şekilde x'i aşağıda görüldüğü gibi bir sayıya karşılık gelen bilinmeyen olarak ifade etmiştir.

Araştırmacı: Peki buradaki x ne demek? Ne anlama geliyor?

Sibel: Bilinmeyen. Yani orada bir sayı var ve o sayı koyduğumuzdaki AB uzunluğunu veriyor.

Sibel x artığında çevrenin nasıl değiştiğini yorumlarken de x'in değişen nicelik anlamına vurgu yapmıştır. Örneğin Sibel'in "*Çevre artar dedim çünkü x'e mesela 7 olduğunu düşünürsek ya da 4 olduğunu düşünürsek 4 kere 3 12'den 10. Ama x 4 iken diyelim ama x'e 5 verirsem arttırırsam 15'den 13 olur. Yani x artmış olur. O yüzden x artarsa çevre de artmış olacak."* şeklindeki açıklamasından x yerine farklı değerler gelebileceğini ifade ettiği görülmektedir. Bu noktada Sibel'in, x'e bağlı olarak çevrenin de değişebileceğinin farkında olduğu görülmektedir. Diğer yandan x ve A harflerinin anlamı sorulduğunda ise Sibel A'yı üçgenin köşesi, x'i de bilinmeyen olduğunu açıklamıştır. Ayrıca harfli ifadelerin soruda geçen anlamını açıklarken de x'i *"sayı gelebilecek harfli gösterge"* olarak ifade etmiş, buna karşın A'nın yerine sayı yazılamayacağını açıklamıştır.

Benzer şekilde yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye de x'i bilinmeyen bir sayı olarak tanımlamış, buna karşın x arttığında çevrenin nasıl değişeceğini yorumlarken de "*x'e farklı sayı değeri verdiğimizde çevre artar veya azalır."* şeklinde x'in değişen nicelik anlamına vurgu yapmıştır. Asiye soruda geçen x ve A'nın ne anlama geldiğini de aşağıda görüldüğü şekilde açıklamıştır.

Asiye: Buradaki sadece bir köşeyi belirtiyor (A). Köşeye herhangi bir isim verebiliriz. Bu da sadece onun simgesi. Burada da herhangi bir sayı verebiliriz (x). Bu da onun simgesi.

Araştırmacı: Kullanım şekli olarak peki aynı mı bunlar?

Asiye: Hayır. Kullanım şekli olarak aynı ama farklı şeyi ifade ediyorlar.

Araştırmacı: Nasıl yani?

Asiye: Kullanım şekli olarak mesela burada herhangi bir şey verebiliriz. Burada herhangi bir şeyi belirtmiyor. Herhangi bir sayıyı veya herhangi bir miktarı belirtmiyor. Herhangi bir harf verebiliriz ama burada bir sayıyı ifade ediyor ve sonucu bir şey çıkacak. O yüzden farklı.

Soruda geçen x'i bilinmeyen olarak ifade eden öğrencilerden biri de cebirsel düşünme düzeyi düşük olan Hilal'dir. Hilal diğer üç öğrencinin tersine *"bir sayı var o sayıyı bilmiyoruz"* açıklamasını yaparak, x'in sadece bir sayıya karşılık gelebileceğini ifade etmiştir. Hilal "x artarsa ABC üçgeninin çevresi nasıl değişir?" sorusuna da *"... sayı verebiliyoruz değil mi?...x'e 2 versek 6 olur x ile çarpımı. 6-2 AB kenarı yani buradan da 4 olur. BC kenarı buraya 2 vermiştik 4 4'ten 1 çıkarsa 3 olarak çıkar. AC kenarı 7 olarak çıkar."* şeklinde yanıt vererek soruda geçen x'i bilinmeyen olarak anlamlandırdığını destekleyen bir örnek vermiştir. Benzer şekilde x ve A'nın anlamlarını açıklarken de x'i bilinmeyen, A'yı da üçgenin açısı olarak yorumlamış ve her iki harfi bir sayıya karşılık getirmiştir. Buna ilişkin olarak da aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

Hilal: x bilinmeyen ... A bir üçgenin açısı ... mesela burası 7 falan 4, 3 (x=2 için kenar uzunlukları) falan bulmuştum. Karşısına verdiğim sayılara bakılarak hangi açının en büyük olduğunu bulabiliyoruz.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ise x'i değişken olarak tanımlarken *"Yani x'e ne verilirse kenarın uzunluğu ya da çevrenin uzunluğu ona göre değişiyor."* açıklamasıyla x'in değişen nicelik anlamına vurgu yapmış, bağımlı ve bağımsız değişkeni de ifade etmiştir. Soruda geçen x ve A'nın anlamlarını da;

Mustafa: A köşe anlamına geliyor. AB kenar oluyor. A'da köşe oluyor. x de değişken oluyor.

Araştırmacı: x neyi ifade ediyor?

Mustafa: ... Kenar uzunluğunu bulmamıza yardımcı oluyor. Verdiğimiz değere göre kenar uzunluğu çıkıyor.

şeklinde açıklamıştır. Mustafa ayrıca *"A köşeyi belirtiyor. x değişken. Farklı olarak. A belli bir şey yani A'nın sayı değeri yok köşe. x'in bir sayı değeri var."* şeklinde açıklama yaparak x ve A'nın anlamları arasındaki farkı açıklamıştır. Benzer şekilde orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci de soruda geçen x'i değişken olarak adlandırmıştır. Ancak değişkeni *"sayıların yanında olan x veya y'ye denir"* şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca x'in artması durumunda çevrenin nasıl değiştiğine yönelik olarak da İnci *"x artarsa çevre de artar"* açıklamasında bulunmuştur. Soruda geçen x ve A'nın ne anlama geldiği sorulduğunda ise aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

İnci: A'yı kenarları adlandırırken AB kenarı, AC kenarı. Bu şekilde A'yı kullanıyoruz. x'de de kenarları bulmak için x'i kullanıyoruz. Tıpkı bir sayı gibi yani bu da hiçbir farkı yok aslında.

Araştırmacı: x bir sayı gibi dedik. A nasıl peki?

İnci: A'da kenarlarını bulmak için isimlendirmek için aslında. Pek bir değeri yok sadece isim vermek için. AB kenar, AC kenarı.

Cebirsel/harfli ifadelerin anlamını yorumlamaya yönelik Şekil 3.21'de verilen soruda da n harfinin anlamı sorgulanmıştır.

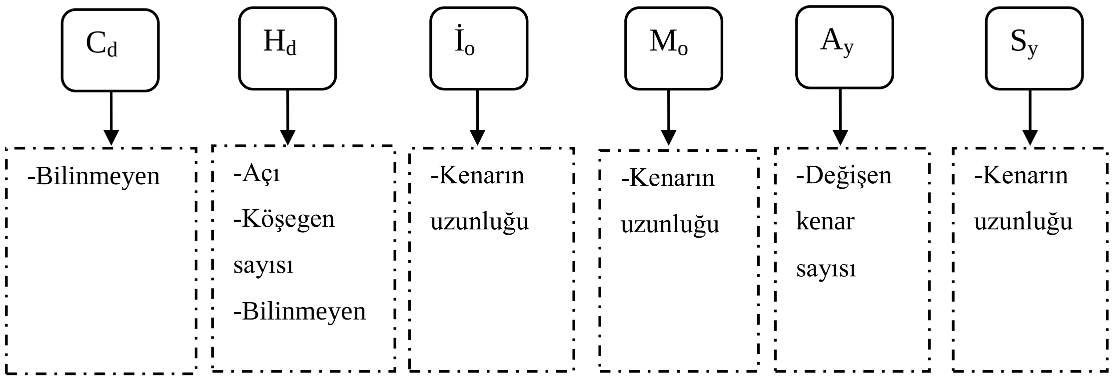
2) **n** kenarlı bir düzlemsel şeklin köşegen sayısı ***n(n-3)/2***'dir.

a) Bu formülü kullanarak bir dörtgenin, beşgenin ve altıgenin kaç tane köşegen sahip olduğunu bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) En az sayıda köşegene sahip olan düzlemsel şekil nedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

Şekil 3.21. *Semboller ve cebirsel ilişkiler ikinci soru*

Öğrencilerin 3.21'de verilen soruda geçen n değişkenine dair tanımlamaları Şekil 3.22'de sunulmuştur.



Şekil 3.22. *İkinci soruda geçen n değişkenine ilişkin öğrenci tanımları*

3.21'de verilen soruda geçen n harfinin anlamını açıklarken bir öğrencinin benzer şekilde harfli ifadelerin bilinmeyen ve değişken anlamlarını birbirine eş tuttuğu görülmüştür. Şekil 3.22'de görüldüğü gibi, düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan n harfi için değişken-bilinmeyen karmaşası yaşamış ve n'yi aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi bilinmeyen olarak tanımlamıştır. Ancak n'ye farklı değerler verilebileceğini ifade ederek değişen nicelik anlamına da vurgu yapmıştır.

Araştırmacı: Şimdi önce şuradan başlayalım n ne demek?

Canan: Bilinmeyen yine.

Araştırmacı: Neler olabilir bu n?

Canan: 5, 6, 7, tamsayı ya da rasyonel bir sayı olabilir.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ise soruda geçen n'yi anlamlandıramamış, n için aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü üzere açı, köşegen sayıları, bilinmeyen tanımlarını yapmıştır.

Araştırmacı: Şimdi bize verdiği şu formülde n ne anlama geliyor?

Hilal: Dörtgenin, beşgenin ve altıgenin açıları.

Araştırmacı: Açı.

Hilal: Köşegen sayıları, köşegen sayılarının sahip olduğu o da bir bilinmeyen aslında.

Araştırmacı: Bilinmeyen ne demek bu tam anlamadım söylediğini şu ne demek?

Hilal: Yan köşegen sayısıydı galiba.

Hilal'de görüldüğü üzere soruda geçen n'nin anlamını açıklayamamış, değişkeni anlamlandıramamıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci ise aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi n'nin geometrik anlamını doğru bir şekilde açıklamıştır.

İnci: n kenar sayısı oluyor. Bize mesela dörtgenin köşegen sayısını soruyor. n'ye 4 vereceğiz dörtgenin 4 kenarı vardır sonuçta.

Araştırmacı: Tamam. Buradaki n'in anlamı?

İnci: Kenar sayısı.

Diyalogda görüldüğü üzere İnci n için doğrudan değişken ya da bilinmeyen gibi bir tanımlama yapmamış ancak n yerine farklı değerler gelebileceğini açıklayarak, n'yi kenar sayısı olarak adlandırmıştır. Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ise soruda geçen değişkeni aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi kenar sayısı olarak tanımlamıştır.

Araştırmacı: n ne anlama geliyor neyi ifade ediyor?

Mustafa: Kenar sayısını.

Mustafa da değişkenin geometrik anlamını doğru bir şekilde yorumlamış ve cebirsel ifadede n yerine çokgenlerin kenar sayılarını yazarak doğru sonuçlara ulaşmıştır. Buradan öğrencinin n'nin değişen nicelik anlamının farkında olduğu anlaşılmaktadır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye n'nin değişken anlamına odaklanarak aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü üzere n için farklı kenar sayıları tanımlamasını yapmıştır. Aynı zamanda n'nin cebirsel anlamını geometrik olarak yorumlamıştır.

Araştırmacı: Tamam. Peki sence buradaki n ne ifade ediyor bize? Ne demek bu n?

Asiye: Farklı sayıları. Farklı kenar sayısını.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel ise aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi cebirsel ifadede geçen n'yi kenar sayısı olarak tanımlamıştır.

Araştırmacı: Şuradaki n neyi ifade ediyor bize? Ne demek?

Sibel: n kenar yani kenarın, 4 kenarlı ise 4 gelecek. Onun kenar sayısı.

Soruda verilen cebirsel ifadede n yerine çokgenlerin kenar sayılarını yazarak köşegen sayılarına ulaşmıştır. Yapılan açıklamalardan Asiye ve Sibel'inde n'nin değişen bir nicelik olduğunun farkında olduğunu anlaşılmaktadır.

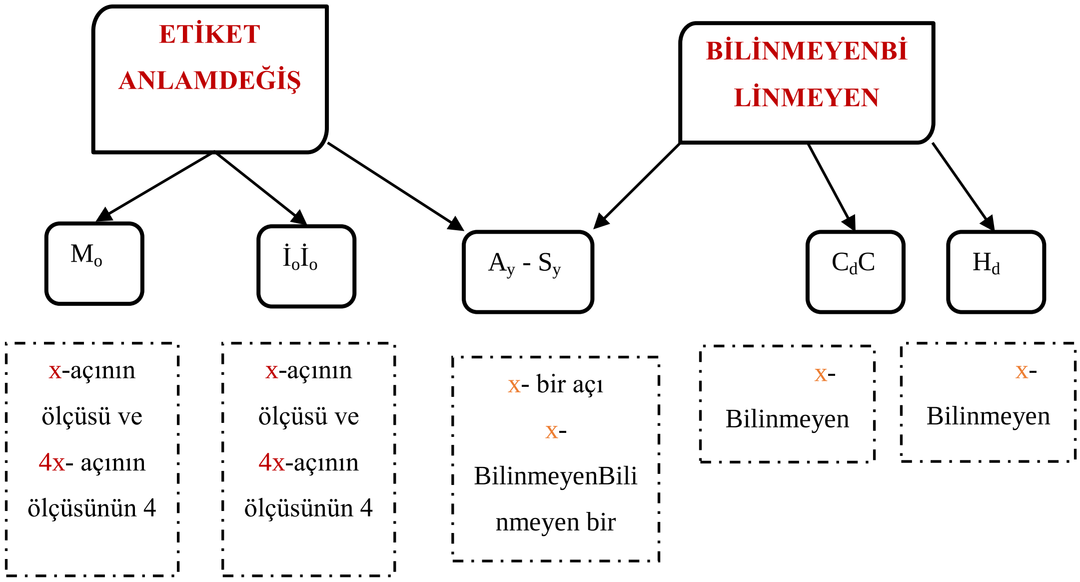
Şekil 3.23'te verilen üçüncü sorunun çözümünde öğrencilerin kullandıkları harfli ifadenin anlamı sorgulanmıştır.

3) Bir açının dört katı kendisinin bütünleri ise açının ölçüsü kaç derecedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

Şekil 3.23. *Semboller ve cebirsel ilişkiler üçüncü soru*

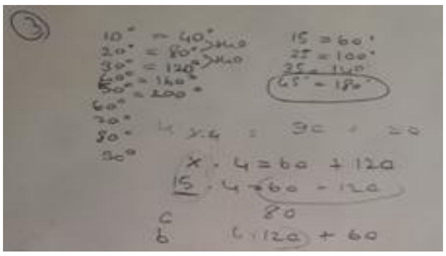
Öğrencilerin 3.23'de verilen soruda kullandıkları harfli ifadeler ve bu ifadelere dair tanımlamaları Şekil 3.24'te sunulmuştur.

Şekil 3.24'te görüldüğü gibi, orta cebirsel düşünme düzeyine sahip öğrenciler sorunun çözümünde kullandıkları x ve 4x ifadelerini etiket anlam olarak kullanmışlardır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip öğrenciler de sorunun çözümü için x harfli ifadesini kullanmışlar ve bilinmeyen olarak tanımlamışlardır. Ancak yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip iki öğrenci soruda kullandıkları x harfli ifadesini hem etiket anlam hem de bilinmeyen olarak tanımlamışlardır.



Şekil 3.24. *Öğrencilerin üçüncü soru soruda kullandıkları harfli ifadeler ve tanımlamaları*

Sorunun çözümünde düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan ve Hilal çözümde kullandıkları x harfli ifadesini bilinmeyen olarak tanımlamışlardır. Her ne kadar kurdukları eşitlikte x bilinmeyen anlamında olsa da Şekil 3.25'te Canan'ın çözümünde görüldüğü üzere denklemi yanlış kurmuş ve çözemedikleri için deneme yanılma yoluyla x'e farklı değerler vermeye çalışmışlardır.



Şekil 3.25. *Canan'ın kağıdı*

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci ise doğru kurduğu denklemde harfli ifadelere problem bağlamında geçen anlamları yükleyerek, x'i açının ölçüsü ve 4x'i açının ölçüsünün 4 katı olarak ifade ederek bu terimlere etiket anlamı yüklemiştir. Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa da benzer şekilde aşağıda verilen doğrudan alıntıda olduğu gibi x'i açı değeri ve 4x'i açının değerinin 4 katı olarak tanımlamış ve doğru sonuca ulaşmıştır.

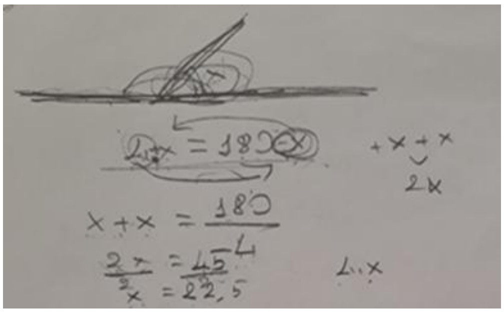
Araştırmacı: Bu neyi ifade ediyor? x neyi ifade ediyor?

Mustafa: Açı değerini.

Araştırmacı: Açı değerini ifade ediyordu. 4x neyi ifade ediyor?

Mustafa: Açının 4 katını. Açı değerinin 4 katı.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye Şekil 3.26'da görülen çözümünde x'i hem bir açı hem de bilinmeyen olarak tanımlamıştır.



Şekil 3. 26. *Asiye'nin kağıdı*

Asiye aşağıda verilen diyalogda görüldüğü gibi 4x'i *"dört tane bilinmeyen"* olarak ifade etmiştir.

Araştırmacı: Tamam. Bir de son bir şey sorayım burada ki 4x ne ifade ediyor sana ne demek 4x.

Asiye: 4 çarpı x

Araştırmacı: 4 çarpı x. Ne yani o 4 çarpı x? Ne anlıyorum ben ona baktığımda?

Asiye: 4 tane bu bilinmeyen.

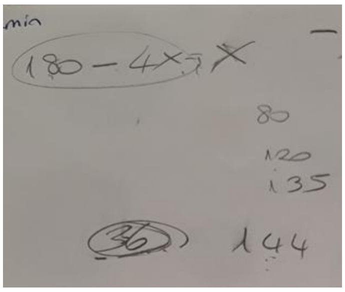
Araştırmacı: 4 tane bilinmeyen. x neydi zaten?

Asiye: Açı. Bilinmeyen

Araştırmacı: Açıydı. 4x dediğimde bu soru için ne geliyor aklıma?

Asiye: 4 tane bu bilinmeyen açıdan.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel ise Şekil 3.27'de verildiği gibi önce sayısal değer vererek denemiştir.



Şekil 3.27. *Sibel'in kağıdı*

Öğrenci daha sonra cebirsel çözüm yoluna giderek soruda geçen x'i bilinmeyen ve *"aradığımız açının ölçüsü"* olarak tanımlamıştır.

Araştırmacı: Peki burada x aldık ya neden x aldın mesela başka?

Sibel: Bilinmeyen. Bilmediğim için yani sayının ne olduğu bilinmiyor. O sayının kaç katının kaça eşit olduğunu bildiğim için.

Araştırmacı: x bize neyi ifade ediyor burada?

Sibel: O aradığımız açının ölçüsünü.

Araştırmacı: 4x neyi ifade ediyor?

Sibel: O açının 4 katını.

Araştırmacı: Peki şu x ile 4x'i nasıl topladın? 5x dedin ya. Nasıl yaptın o işlemi?

Sibel: Bunlar x benzer terim olduğu için bunun önünde 1 katsayısı vardır. Bu ikisini de toplayınca 5x olur. Bu 5x de 180'e eşitse bir tamsayıya eşitse buraya yani x yerine çarpım durumunda olduğu için yanına yazılacak sayı 36'dır.

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere öğrenci 4x ifadesi için aradığımız açının ölçüsünün 4 katı ifadesini kullanmıştır. Soruda harfli ifade kullanmasının nedenini "o sayının kaç katının kaça eşit olduğunu bildiğim için" ifadesi ile açıklamıştır.

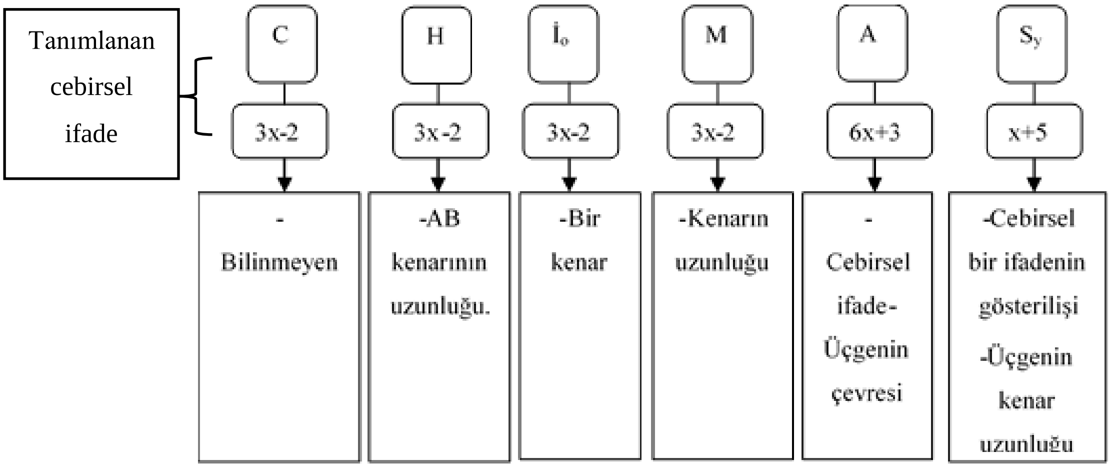
Araştırmaya katılan öğrencilerden Canan, Hilal ve Sibel önce aritmetik çözüm yapmaya çalışmış ve Asiye geometrik çözüm ile cebirsel çözümü birleştirmiş olmasına karşın tüm öğrenciler sorunun çözümü için harfli ifade kullanmışlardır. Öğrencilerin tamamı harfli ifade olarak x'i tercih etmiş, x yerine başka bir harfli ifade kullanılıp kullanılamayacağı sorulduğunda ise kullanılabileceğini ancak x'in daha kolay ya da akla ilk gelen olduğu gibi yanıtlar vermişlerdir.

3.1.2.2. *Cebirsel ifadelerin anlamını yorumlama*

Cebirsel ifadelerin anlamını yorumlama alt teması altında öğrencilerin semboller ve cebirsel ilişkiler başlığı altında sorulan sorularda geçen cebirsel ifadelerin anlamlarını nasıl yorumladıkları incelenmiş ve her soru için ayrı değerlendirme yapılmıştır.

Öğrencilerin birinci soruda geçen cebirsel ifadelerden hangisi için nasıl bir tanım yaptıkları Şekil 3.28'de verilmiştir.

Şekil 3.28'de görüldüğü gibi, öğrencilerden düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan hariç diğer beş öğrenci soruda geçen cebirsel ifadelerin anlamlarını geometrik ya da cebirsel ya da her ikisini de doğru bir şekilde tanımlamışlardır. Örneğin Canan ABC üçgeninde kenar uzunlukları olarak verilen 3x-2, 2x–1 ve x+5 cebirsel ifadelerinin geometrik ve cebirsel anlamlarını tam olarak yorumlayamamıştır. Aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi Canan 3x-2 cebirsel ifadesini bilinmeyen olarak tanımlamıştır.



Şekil 3.28. *Birinci soruda geçen cebirsel ifadelere ilişkin öğrenci tanımlamaları*

Araştırmacı: Çevresini buldun peki şuradaki 3x-2 sana neyi ifade ediyor?

Canan: Bilinmeyen olduğunu. Yani bilinmiyor

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip diğer bir öğrenci olan Hilal ise birinci soruda geçen cebirsel ifadelerin anlamlarını aşağıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü üzere doğru bir şekilde tanımlamıştır.

Araştırmacı: Tamam şimdi burada bulduğun 6x+2 ne oluyor? Ne ifade ediyor bize?

Hilal: Bunun ABC üçgeninin çevresini.

Araştırmacı: Peki şurada 3x-2 neyi ifade ediyor?

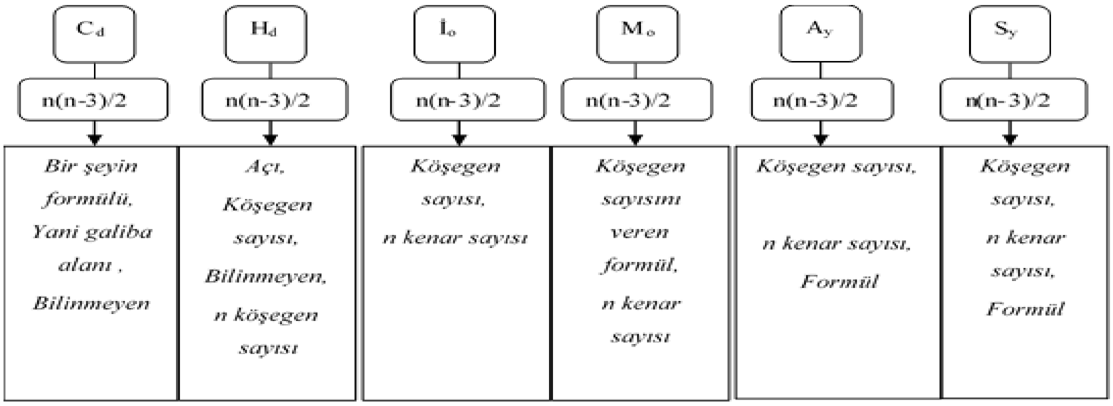
Hilal: AB kenarının uzunluğunu.

Araştırmacı: x+5?

Hilal: AC kenarının uzunluğunu.

Diyalogda görüldüğü gibi, Hilal cebirsel ifadelerin geometrik anlamlarını doğru bir şekilde ifade etmiştir. Benzer şekilde birinci soruda geçen cebirsel ifadelerin anlamlarını orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci ve Mustafa da geometrik olarak yorumlamışlardır. Öğrenciler 3x-2, 2x–1 ve x+5 şeklinde verilen cebirsel ifadelerin *"üçgenin kenar uzunlukları"* ve üç kenarın toplamı ile elde ettikleri 6x+3 şeklindeki cebirsel ifadeyi de *“üçgenin çevre uzunluğu”* olarak açıklamışlardır. Diğer yandan yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel ise soruda geçen cebirsel ifadelerin hem geometrik hem de cebirsel anlamlarını doğru bir şekilde ifade etmişlerdir. Örneğin Asiye 6x+3 ü *“cebirsel ifade”*, soruda geçen anlamını ise *“üçgenin çevresi”* olarak, Sibel’de x+5 i *“cebirsel bir ifadenin gösterilişi”*, soruda geçen anlamını ise *“üçgenin kenar uzunluğu”* olarak açıklamışlardır.

İkinci soruda ise $\frac{n(n-3)}{2}$ cebirsel ifadesinin anlamı da sorgulanmış ve buna ilişkin öğrenci yanıtları Şekil 3.29’da sunulmuştur.



Şekil 3.29. *İkinci soruda geçen cebirsel ifadeye ilişkin öğrenci açıklamaları*

Şekil 3.29’da görüldüğü gibi, düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan n(n-3)/2 cebirsel ifadesinin anlamını açıklayamamış ve *“bir şeyin formülü yani alanı… Bilinmeyen yine”* olarak ifade etmiştir. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip diğer öğrenci (Hilal) de n(n-3)/2 cebirsel ifadesi için aşağıda verilen açıklamayı yapmıştır.

Hilal: Dörtgenin, beşgenin ve altıgenin açıları.

Araştırmacı: Açı

Hilal: Köşegen sayıları, köşegen sayılarını sahip olduğu o da bir bilinmeyen aslında.

Araştırmacı: Bilinmeyen ne demek bu tam anlamadım söylediğini şu ne demek?

Hilal: Ya n köşegen sayısıydı galiba.

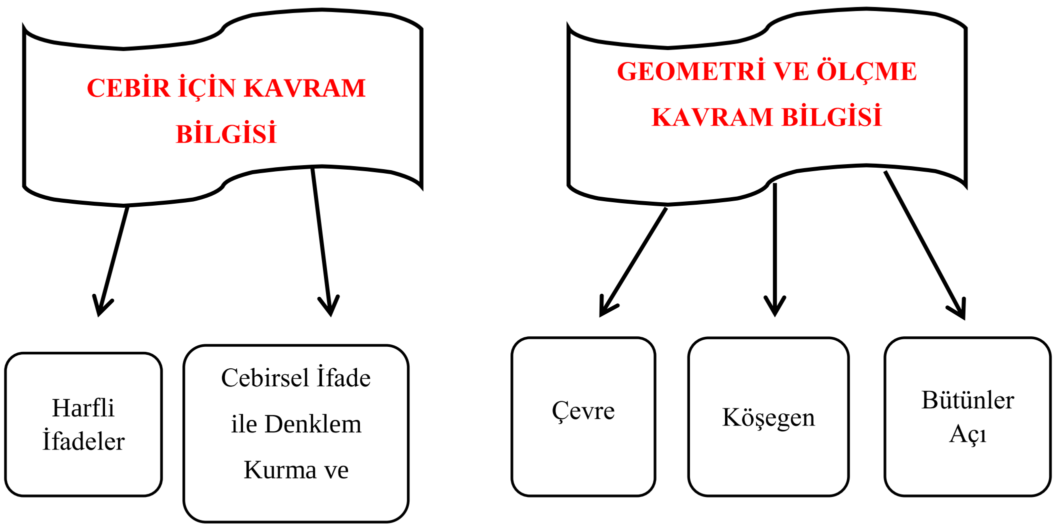
Soruda geçen n(n-3)/2 cebirsel ifadesi n kenarlı düzlemsel şeklin köşegen sayısı olarak ifade edilse de diyalogda görüldüğü gibi Hilal’in n(n-3)/2 ifadesine açı, köşegen sayıları, bilinmeyen şeklinde farklı anlamlar yüklediği görülmektedir.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci ve Mustafa ile yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel n(n-3)/2 cebirsel ifadesini *"köşegen sayısı"* ve bu ifadede geçen n'yi de *"kenar sayısı"* olarak açıklayarak cebirsel ifadenin geometrik anlamını doğru yorumlamışlardır. Mustafa, Asiye ve Sibel ayrıca n(n-3)/2 ifadesini köşegen sayısını veren formül olarak da ifade etmişlerdir.

3.1.3. Semboller ve cebirsel ilişkiler başlığı altında karşılaşılan kavramsal zorluklar

Araştırma kapsamında semboller ve cebirsel ilişkiler başlığı altında öğrencilere yöneltilen sorularda geçen kavramlar cebir için kavram bilgisi ve geometri ve ölçme için gerekli kavram bilgisi olmak üzere Şekil 3.30'da verildiği gibi iki başlık altında ele alınmıştır.

Şekil 3.30'da görüldüğü gibi, sorularda geçen cebir için anahtar kavramlar harfli ifadeler ve cebirsel ifade ile denklem kurma ve çözmedir. Geometri ve ölçme için anahtar kavramlar ise çevre, köşegen ve bütünler açı kavramlarıdır.



Şekil 3.30. *Semboller ve cebirsel ifadeler başlığı altında yer alan anahtar kavramlar*

3.1.3.1. *Semboller ve cebirsel ilişkiler kapsamında cebir için kavram bilgisi*

Cebir için gerekli olan anahtar kavramlardan harfli ifadeler ile ilgili öğrenciler bazı kavramsal zorluklar ile karşılaşmışlardır. Örneğin öğrencilerin bağımlı-bağımsız değişkeni tanımlama ve ayırt etme, değişken ve etiket anlamı ayırt etme, değişken ve bilinmeyeni tanımlama ve ayırt etme, değişkenin anlamını belirleme (değişkenin alabileceği değerler kümesini tanıma) gibi zorluklar araştırma sürecinde gözlemlenen kavramsal zorluklardır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan soruda yer alan ve köşeyi temsil eden A harfli ifadesini büyük harf olduğu için bilinmeyen olarak tanımlamadığını ancak küçük harf olsaydı bilinmeyen olarak tanımlayacağını ifade etmiştir. Soruda yer alan x harfli ifadesini de *"kenar"* olarak tanımlamıştır. Yani cebirsel ifadenin tamamını bilinmeyen olarak anlamlandırmıştır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal de soruda yer alan x harfli ifadesi için değişken tanımı yapmış, x'in alabileceği değerler için üçgen eşitsizliği kuralını kontrol etmiştir. Ancak buna karşın öğrenci x'i bilinmeyen olarak adlandırmaktadır. Sorunun c şıkkında geçen A ve x harfli ifadeleri için de bilinmeyen tanımı yapmıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip öğrenciler ile yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel ise x harfli ifadesi için "*açı*", *"açının değeri*" ve *"açının ölçüsü"* tanımlarını yapmışlardır. Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ise harfli ifadenin değişken anlamına odaklanmış ve değişkenin alabileceği değerler kümesini de tanımlamıştır. Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci sorunun c şıkkında geçen A'yı bir nokta x'i de bir değişken olarak tanımlamıştır. Ancak daha sonra x'i kenar olarak adlandırmıştır. Diğer öğrenciler sorunun c şıkkında herhangi bir sorun yaşamamışlardır.

Araştırmanın ikinci sorusunda geçen n harfli ifadesine ilişkin olarak ise düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan değişken-bilinmeyen karmaşası yaşamış ve değişkenin anlamını yorumlayamamıştır. Benzer şekilde düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal değişkeni anlamlandıramamış ve değişkenin alacağı değerler kümesini de tanımlayamamıştır. Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci ve Mustafa ile yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel ise n'i *"kenar sayısı"* olarak tanımlamıştır. Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ise *"değişen kenar sayısı"* şeklinde tanımlayarak n'in değişken anlamına odaklanmıştır.

Cebirsel ifadelerin anlamını yorumlamaya ilişkin olarak düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan ikinci soruda geçen cebirsel ifadelerin içinde x harfi yer aldığı için cebirsel ifadenin tamamını bilinmeyen olarak tanımlamıştır. Diğer beş öğrenci ise herhangi bir sorun yaşamamıştır.

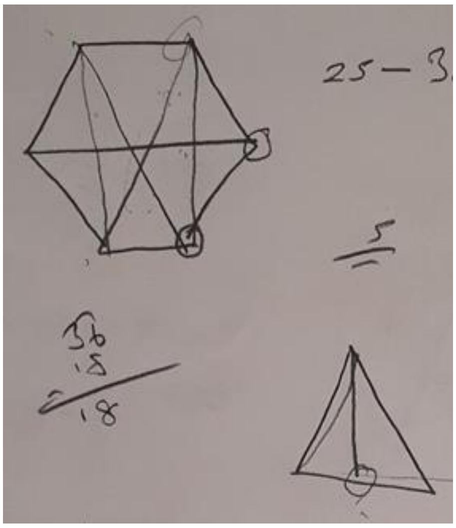
3.1.3.2. *Semboller ve cebirsel ilişkiler kapsamında geometri ve ölçme için kavram bilgisi*

Geometri ve ölçme için anahtar kavramlardan çevre kavramını araştırmaya katılan altı odak öğrenci de doğru şekilde bilmektedir. Öğrencileri seçerken kullanılan Van Hiele Geometri testine göre 3. düzey geometrik düşünmeye sahip olmaları da bu durumu doğrulamaktadır.

Geometri ve ölçme için diğer bir kavram olan köşegen kavramını düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan köşe kavramı ile karıştırmıştır, düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ise köşegen kavramını *"bağlantı yerleri"* olarak adlandırmış ve şekilde görüldüğü gibi çizerek göstermiştir.

Şekil 3.31'de görüldüğü gibi, çizdiği doğru parçaları ile şeklin kesiştiği noktaları yuvarlak içine almış ve köşegen olarak adlandırmıştır.

Orta düşünme düzeyine sahip İnci ve Mustafa ile yüksek düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel köşegen kavramını doğru şekilde bilmektedirler.



Şekil 3.31. *Hilal'in kağıdı*

Şekil 3.31'de görüldüğü gibi, çizdiği doğru parçaları ile şeklin kesiştiği noktaları yuvarlak içine almış ve köşegen olarak adlandırmıştır.

Orta düşünme düzeyine sahip İnci ve Mustafa ile yüksek düşünme düzeyine sahip Asiye ve Sibel köşegen kavramını doğru şekilde bilmektedirler.

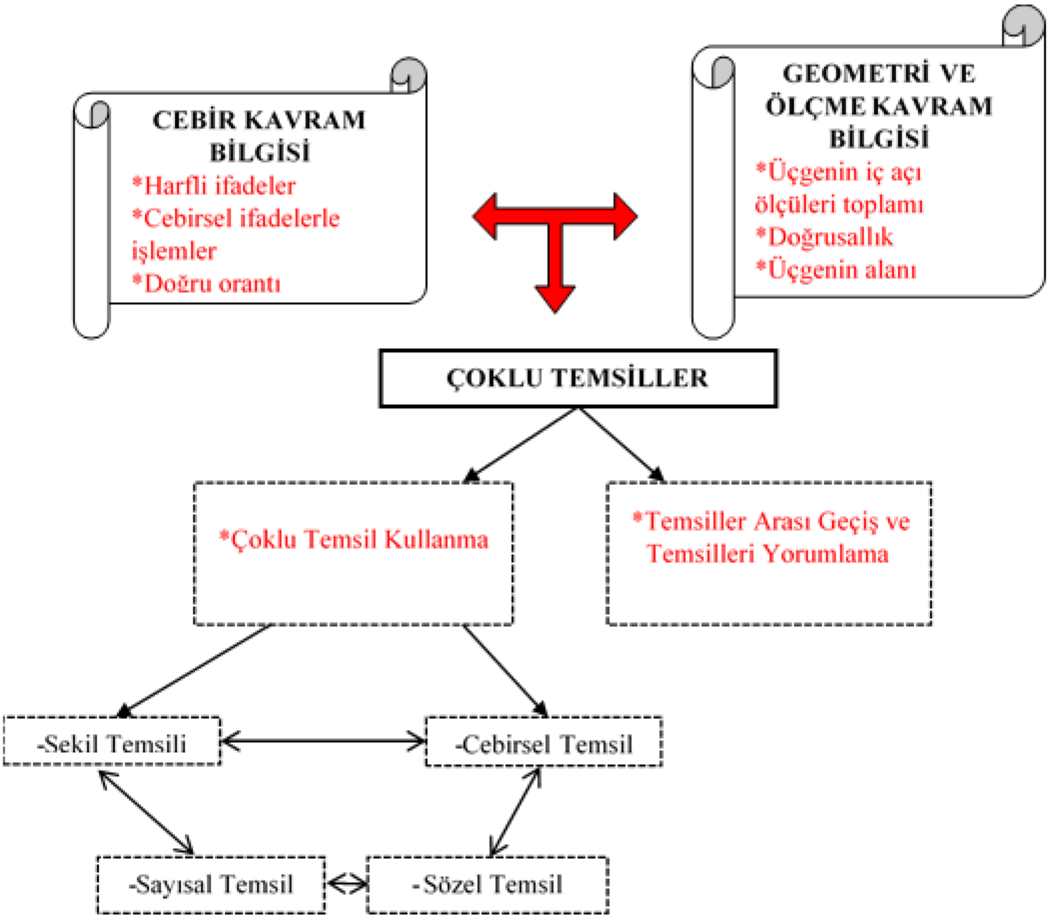
Geometri ve ölçme için son kavram olan bütünler açı kavramına ilişkin çözüm yaparken düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan ve Hilal ile orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci bir açının dört katını 180°'ye eşitlemeye çalışmışlardır. Bütünler açı kavramını anlamlandırmada sorun yaşadıkları açıkça görülmektedir.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ise bütünler açı kavramını hatırlayamamıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye kavramı doğru şekilde açıklarken yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel başlangıçta bütünler iki açının toplamı 180^{o} mi yoksa 360^{o} derece mi olduğu ikileminde kalmış ancak daha sonra 180^{o} olduğunu hatırlamıştır.

3.2. Çoklu Temsillere Ait Bulgular

Araştırma kapsamında Çoklu Temsiller başlığı altında öğrenciler ile üç soru üzerinde klinik görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen veriler Şekil 3.32'de verildiği gibi alt tema ve kodlara ayrılarak incelenmiştir.



Şekil 3.32. *Çoklu temsillere ait alt tema ve kodlar*

Araştırmada ele alınan sorular kapsamında öğrencilerden bilmeleri beklenen anahtar kavramlar Şekil 3.32'de verildiği gibi, cebir konu alanı için; harfli ifadeler, cebirsel ifadelerle işlemler ve doğru orantı; geometri konu alanı için ise üçgenin iç açı ölçüleri toplamı, doğrusallık ve üçgenin alanıdır.

Sorulardan elde edilen veriler incelenerek Şekil 3.32'de verildiği gibi, Çoklu Temsil Kullanma ile Temsiller Arası Geçiş ve Temsilleri Yorumlama olmak üzere iki alt tema olarak ele alınmıştır. Çoklu temsil kullanma alt teması altında cebirsel temsil, şekil temsili, sayısal temsil ve sözel temsil kodları ortaya çıkmıştır.

3.2.1. Çoklu temsil kullanma

Çoklu temsil kullanma alt teması kapsamında öğrencilerin Şekil 3.33'te verilen sorular için uygun olan temsilleri kullanma durumları incelenmiş ve öğrencilerin kullandıkları çoklu temsiller belirlenmiştir.

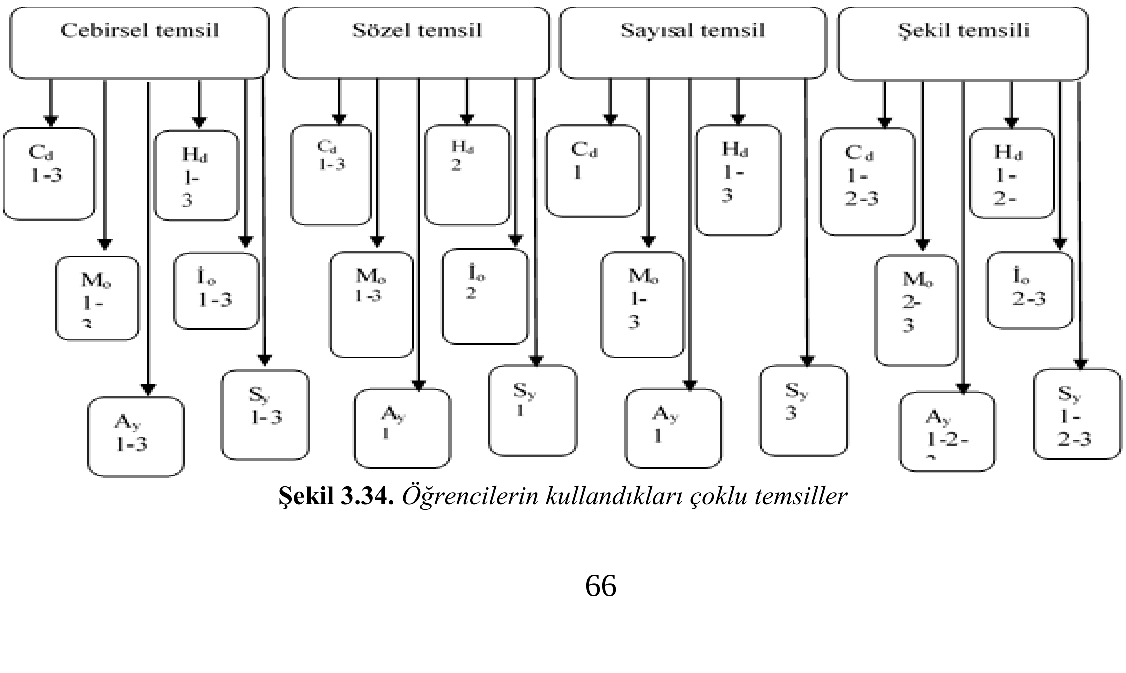
1) Bir üçgenin iç açıları 2, 3 ve 4 ile doğru orantılı ise bu açıların ölçüleri kaçar derecedir? Neden?

2) *A*, *B* ve *C* aralarında $|AB| = |BC|$ ilişkisi olan doğrusal üç noktadır. Bu noktaları düzlemde nasıl ve kaç farklı şekilde çizebilirsin? Çözümünü açıklar mısın?

3) Bir arkadaşın üçgenin alanını nasıl hesapladığını açıklamanı istedi. Nasıl açıklarsın?

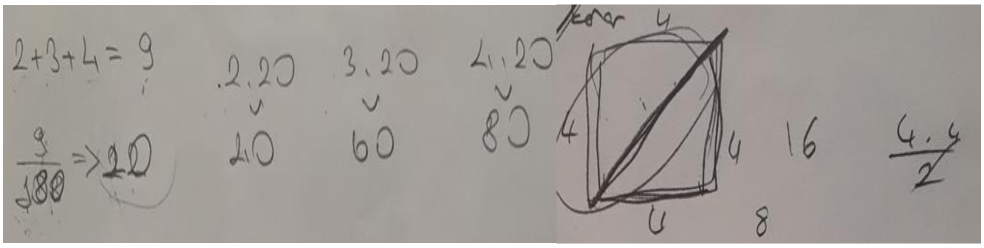
Şekil 3.33. *Çoklu temsil kullanımına ilişkin klinik görüşme soruları*

Öğrencilerin verilen her soru bağlamında tercih ettikleri temsiller Şekil 3.34'te sunulmuştur.



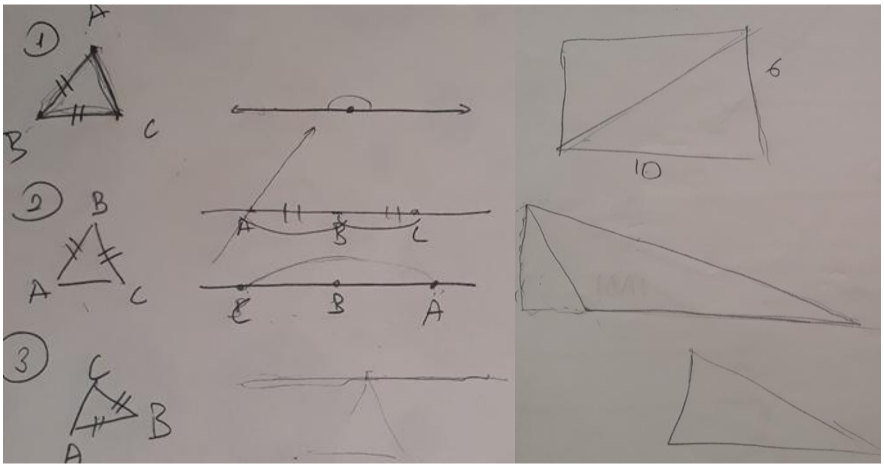
Şekil 3.34. *Öğrencilerin kullandıkları çoklu temsiller*

Şekil 3.34’te görüldüğü gibi, öğrencilerin genel olarak cebirsel temsil, şekil temsili, sayısal temsil ve sözel temsil çeşitlerini kullandıkları gözlenmiştir. Cebir temsilini tüm öğrenciler birinci ve üçüncü sorularda, sözel temsili ise birinci, ikinci ve üçüncü sorularda kullanmışlardır. Sözel temsil birinci soruda Canan, Asiye, Mustafa ve Sibel, ikinci soruda Hilal ve İnci, üçüncü soruda ise Canan ve Mustafa tarafından kullanılmıştır. Şekil 3.35’te örnekleri verilen sayısal temsil sadece birinci ve üçüncü sorularda kullanılmıştır.



Şekil 3.35. *Öğrencilerin birinci ve üçüncü soruda kullandıkları sayısal temsil örnekleri*

Şekil 3.35’te verilen sayısal temsili örnekleri ve benzerlerini birinci soruda Canan, Hilal, Mustafa ve Asiye, üçüncü soruda ise Mustafa, Hilal ve Sibel tercih etmiştir. İnci bu soruda sayısal temsil kullanmamıştır. Şekil 3.36’da verilen temsili örnekleri de üç soruda kullanılmıştır.



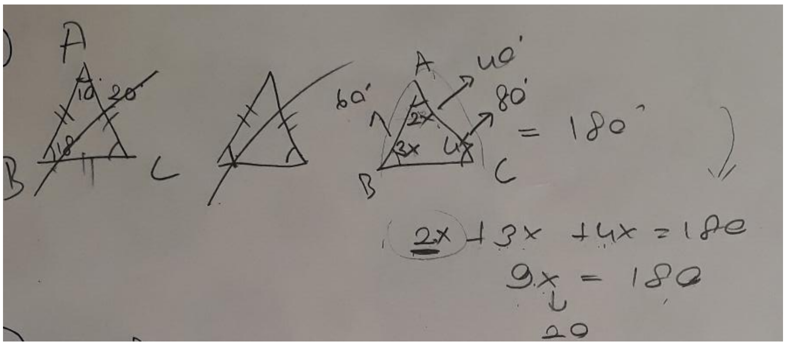
Şekil 3.36. *Öğrencilerin birinci, ikinci ve üçüncü soruda kullandıkları şekil temsil örnekleri*

Şekil 3.36’da verilen şekil temsili örnekleri ve benzerleri birinci soruda Canan, Hilal, Asiye ve Sibel, ikinci ve üçüncü sorularda ise tüm öğrenciler tarafından tercih edilmiştir.

3.2.2. Temsiller arası geçiş ve temsilleri yorumlama

Temsiller arası geçiş ve temsilleri yorumlama teması altında öğrencilerin sorularda kullandıkları farklı temsilleri nasıl yorumladıkları, bir temsilden diğerine nasıl geçiş yaptıkları her bir soru bağlamında sunulmuştur.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan birinci sorunun çözümünde öncelikle sözel temsil kullanarak *"2, 3, 4 ile doğru orantılı yani 2'nin katı olabilir bu da 3'ün katı olabilir 4'ün de olabilir. Bunlar mesela örnek verebilir miyim?"* şeklinde düşüncesini açıklayarak doğrudan sayısal temsile geçmiştir. Bu süreçte açılara sayısal değer vererek *"mesela 5 katı 2'nin bu A açısı 10 derece olabilir ya da 2'nin 10 katını düşündüğümüzde 0 drece de olabilir ya da diğer katları düşündüğümüzde 3'ün yine 5 katını ya da 6 katını düşünelim"* şeklinde deneme yanılma yolunu kullanmıştır. Canan doğru orantı kavramını *"ben katları olduğunu anladım"* şeklinde yorumlamıştır. Burada Canan açıların 2, 3 ve 4'ün katından yola çıkarak üçgenlerin eşkenar ya da ikizkenar olamayacağını sözel olarak açıklamış ve şekil temsilini kullanarak da göstermiştir. Daha sonra şekil temsilinden ve *"A'ya B'ye ve C'ye mesela C'ye 2x diyelim çünkü 2'nin bir katı ya da 4x de diyebilirdim ama 2x dedim. 3x diyeceğim"* şeklinde cebirsel temsile geçiş yapmıştır. Ancak bu süreçte bir denklem kuramamış araştırmacının üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamına ilişkin verdiği ipucu yardımıyla denklem kurarak Şekil 3.37'deki çözümü gerçekleştirmiştir.

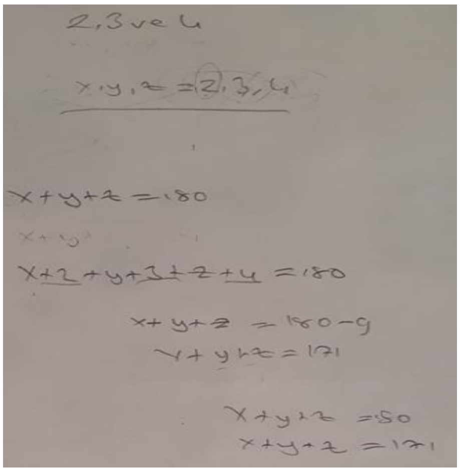


Şekil 3.37. *Canan'ın kağıdı*

Cebirsel düşünme düzeyi düşük olan Hilal ise birinci soru için *"Bir üçgenin iç açıları kafamdan yapıyorum şuanda 20, 30, 40 gibi"* şeklinde doğrudan sayısal temsil kullanarak üçgenin açılarını deneme yanılma yolu ile belirlemiştir. Hilal üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180 derece olduğunu bilgisinden yola çıkarak bu düşüncesini farklı sayı değerlerini kullanarak devam ettirmiştir. Hilal'in izlediği yol örnek olarak aşağıda sunulmuştur.

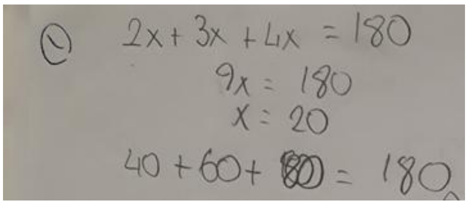
Hilal: Deniyorum şuanda. Şöyle şimdi bize x, y, z'nin yani benim verdiğim bilinmeyenlere göre x, y, z'nin 2, 3 ve 4 gibi bize doğru orantılı olduğunu bize söylemiş. Ben de deneyerek yapıyorum mesela 30, 40, 50'den başladım. Bir değer verdim. Sonra 40, 50, 60 verdim sonra 50, 60,70 vereceğim. 180 oldu.

Öte yandan Hilal *"Cebirsel ifadelerden yararlanırsak mesela üçgenin iç açıları x+y+z=180 olması lazım"* şeklinde cebirsel bir temsil kullanmış ancak doğru orantı kavramını anlamlandıramadığı için sayısal temsilden cebirsel temsile geçiş yapamayarak Şekil 3.38'de görüldüğü gibi anlamsız cebirsel işlemler gerçekleştirmiştir.



Şekil 3. 38. *Hilal'in kağıdı*

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci birinci soru için *"2, 3 ile doğru orantılı yani 2'nin bir katı olmalı. 3'ün bir katı veya 4'ün bir katı ve üçünün toplamı 180 olmak zorunda. Yani şöyle desek 2x+3x+4x=180 olsa. Oradan x'i bulup sonra yerleştirsek."* açıklamasını yaparak cebirsel temsil ile çözüme başlamıştır. Şekil 3.39'da görüldüğü gibi 2x+3x+4x=180 denklemini doğru bir şekilde çözerek x'i 20 ve açıları 40, 60 ve 80 olarak bulmuştur.

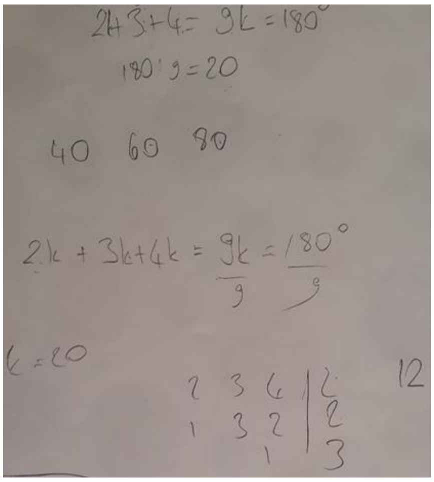


Şekil 3.39. *İnci'nin kağıdı*

Cebirsel temsilde kullanmış olduğu x değerinin anlamı sorulduğunda "*Yani o açı 20 ile doğru orantılı demek. Yirmi ile doğru orantılı değil, 20'nin katı yani."* ve *"Kaç katı olduğunu bilmiyorum. 2 ile doğru orantılı ama kaç katı? Kaç tane 2'den oluşuyor.*

20 tan 2 yani. " açıklamalarını yaparak doğru orantı ve orantı sabitinin anlamını açıklamıştır.

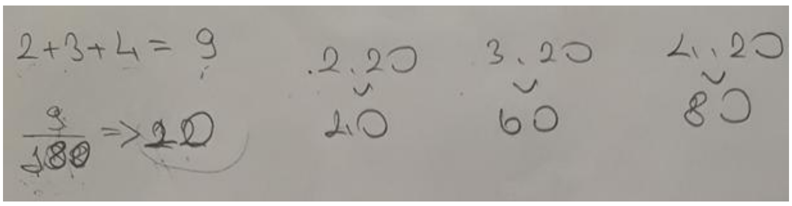
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ise sorunun çözümünde *"Şimdi hepsini kat olarak saysak. Şöyle yapsam; 2+ 3+4= 9 180'i 9'a bölsem 20. Şunu 2 ile çarpsam 40, 60, 80 oluyor. Böyle yapardım."* ifadesiyle sayısal temsil kullanmıştır. Öğrenci çözümünde üçgenin iç açıları ölçüsü toplamın 180° olduğu bilgisinden yola çıkmıştır. Yaptığı aritmetik işlemi "*Doğru orantılıysa bunları kat olarak sayardım. 9 kat. Bir katı bulurdum sonra 2kat, 3 kat, 4 katsa çarpardım."* ifadelerini kullanarak açıklamıştır. Öğrenciye başka nasıl bir çözüm yapacağı sorulduğunda ise Şekil 3. 40'ta verilen cebirsel ifadeyi yazmıştır.



Şekil 3.40. *Mustafa'nın kağıdı*

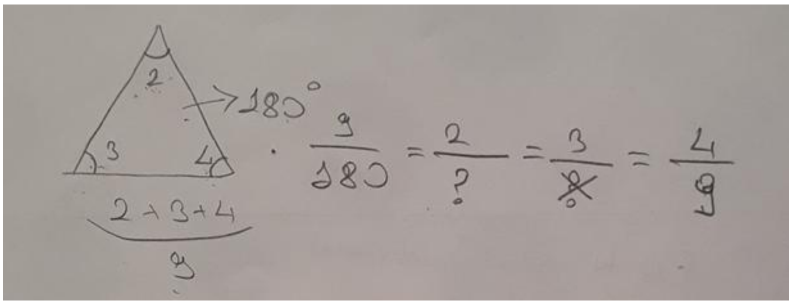
Şekil 3. 40'ta görüldüğü gibi öğrenci sayısal ve sözel temsille yaptığı ilk işlemde sözel olarak kullandığı "*kat*" ifadesi yerine *"k"* harfli ifadesini yazmıştır. İşlemi ayrı bir yerde yazması istendiğinde şeklin alt satırında görülen 2k+3k+4k=180 cebirsel temsiline geçiş yapmıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye birinci sorunun çözümünde Şekil 3.41'de görüldüğü gibi doğrudan sayısal temsil kullanmıştır.



Şekil 3. 41. *Asiye'nin kağıdı*

Çözümü nasıl yaptığını açıklaması istendiğinde sözel temsile geçiş yapmıştır. Üçgenin iç açıları ölçüleri toplamının 180˚ olmasından yola çıktığını belirterek *"üçgenin bir açısı 2 ile doğru orantılı, diğer açısı 3 ile doğru orantılı, üçüncü açısı ise 4 ile doğru orantılı ve bu üç açının toplamı 180˚ olması lazım. Bu verdiği sayıları topladım 9 oluyor."* açıklamasını yapmıştır. Araştırmacı öğrenciye başka yoldan nasıl yapabileceğini sorduğunda ise Şekil 3.42'de verilen şekil temsilini çizmiştir.



Şekil 3.42. *Asiye'nin kağıdı*

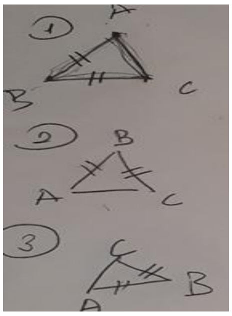
Şekil 3.42'de de görüldüğü gibi, öğrenci prototip üçgen temsili çizmiş ve çizmiş olduğu temsil üzerinde de yine sayısal temsil kullanarak aritmetik işlemler yapmıştır. Şekil temsili üzerine yazmış olduğu 2, 3 ve 4 sayılarının neyi ifade ettiği sorulduğunda "*Sayı değeri olarak hani dereceleri küçültülmüş sadeleştirilmiş ve bu şekilde, doğru orantılı bir şekilde oluyor."* açıklamasını yapmıştır. Ayrıca öğrenciye Şekil 3.40'da görülen $\frac{2}{?} = \frac{3}{?} = \frac{4}{?}$ ifadesinde soru işaretlerinin anlamı sorulduğunda *"farklı değerlere denk geldiğini"* belirtmiş ve bu kullanımın aslında yanlış olduğunu düşünerek $\frac{2}{?} = \frac{3}{x} = \frac{4}{y}$ şeklinde düzeltmiştir. Kullanmış olduğu cebirsel temsilde x ve y harfli ifadelerinin anlamlarını da *"açıların tam değeri"* olarak tanımlamıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel ise birinci sorunun çözümünde *"2, 3, 4 ile doğru orantılı ise bunların katlarını almamız lazım. 2 kat artı 3k artı 4k. 9k 180 ise k=20 yapar."* şeklinde doğrudan cebirsel temsil kullanmıştır. Cebirsel temsilde kullandığı k'nın anlamını "*kat*" olarak açıklamış ve *"başka bir harf de verebilirdim"* açıklamasını yapmıştır. Başka yoldan nasıl çözüm yapabileceği sorulduğunda ise Şekil 3. 43'te verilen prototip üçgen temsilini çizmiştir.

Şekil 3. 43. *Sibel'in kağıdı*

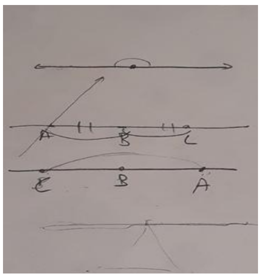
Şekil 3.43'te görüldüğü gibi öğrenci şekil temsili üzerinde de cebirsel temsil kullanmıştır. Daha sonra sayısal temsile geçiş yaparak açılara 40, 50 ve 90 değerlerini vermiş ancak bunun doğru olmadığını *"2 katın olduğu yere 50 gelirse bir kat 25 olmalı ama değil"* ve "*Buradaki açının kaç olduğunu vermesi lazım. Buraya 2 kat diyorsa anca o şekilde diğer açılarını verirse bir katın kaç olduğunu buluruz çizimle."* ifadeleri ile açıklamıştır.

Çoklu temsiller başlığı altında sorulan ikinci sorunun çözümünde düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan soruda verilen cebirsel temsilden doğrudan şekil temsiline geçiş yapmıştır. Cebirsel temsili ikizkenar üçgen olarak anlamlandırmış ve Şekil 3.44'te verilen şekil temsillerini çizmiştir.



Şekil 3. 44. *Canan'ın kağıdı*

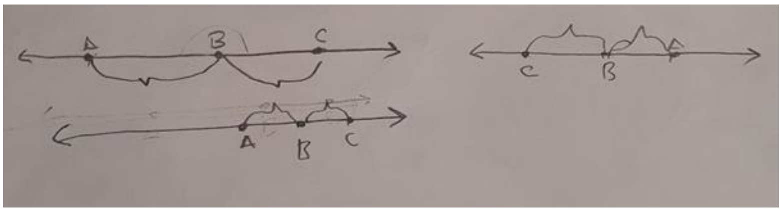
Öğrenciye neden üçgen temsili kullandığı sorulduğunda verilen cebirsel ifadedeki eşitliğin bir ikizkenar üçgenin kenar uzunluklarını ifade ettiğini düşündüğü saptanmıştır. Araştırmacı öğrenciye doğrusallık dendiği zaman ne anladığını sorduğunda öğrenci *" Ben birleştirildiğini anladım, doğru dediğimiz şey bir çizgi. İki noktanın birleşimi.*" açıklamasını yapmıştır. Öğrencinin doğrusallık kavramını bildiği zaman nasıl çözüm yapacağını görmek amacıyla araştırmacı öğrenciye *"Bu noktalar aynı doğru üzerinde olsaydı nasıl yapardın?"* sorusunu yöneltmiştir. Daha sonra öğrenci çözümünü şekilde 3. 45'teki şekilde değiştirmiştir.



Şekil 3. 45. *Canan'ın kağıdı*

Canan Şekil 3.45'te verilen çözümü yaparken soruda verilen ilişkiye dikkat etmeksizin A, B ve C noktalarını rastgele yerleştirmiştir. Ancak ilişkiye yönlendirildiğinde doğru bir şekilde şekil temsili ile göstermiştir. Öğrenciye başlangıçta neden üçgen temsili kullandığı sorulduğunda ise sözel temsile geçerek "*Genelde üç nokta bulunduğunda üçgen olur geometrik şekillerde. Bir doğru aklıma hiçbir zaman gelmiyor. Bir tek üçgen geliyor*." ve "*doğru aklıma gelmedi yani üstünde noktalar olan bir doğru düşünmemiştim*" açıklamalarını yapmıştır.

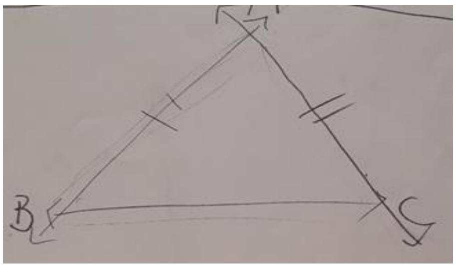
Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal de başlangıçta üçgen olabileceğini "$|AB|=|BC|$ *üçgen değil mi bu? Galiba farklı şekilde çizebilirsin. Neyi farklı şekilde çizeceğiz acaba? Üçgeni mi?*" ifadeleri ile belirtmiş ancak daha sonra doğrusallık kavramına odaklanarak cebirsel temsilden Şekil 3. 46'da verilen şekil temsiline geçiş yapmıştır.



Şekil 3. 46. *Hilal'in kağıdı*

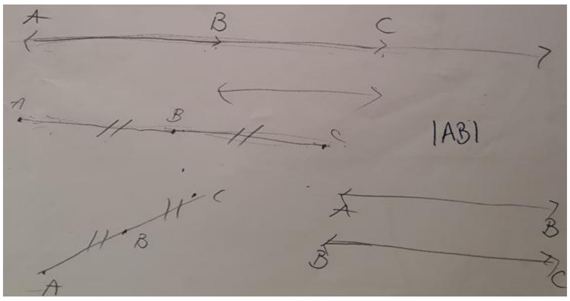
Şekil 3. 46'da verilen temsile geçiş yaparken cebirsel ifadeyi "*Buradan AB ve BC ilişkisi olan üç nokta. B demek ki ortada olacak. Çünkü her iki noktada da B'yi kullanmış. Oraya bakılırsa B'nin ortada olduğunu anlayabiliriz. B'yi şuraya koyabiliriz.*" sözel temsiliyle ifade etmiş ve cebirsel ifade için olası durumları şekil temsili üzerinde doğru bir şekilde açıklamıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci verilen cebirsel temsili önce sözel temsil kullanarak yorumlama yoluna gitmiştir. Verilen ifadenin bir ikizkenar üçgeni temsil ettiğini belirtmiş ve Şekil 3. 47'de verilen şekil temsiline geçiş yapmıştır.



Şekil 3.47. *İnci'nin kağıdı*

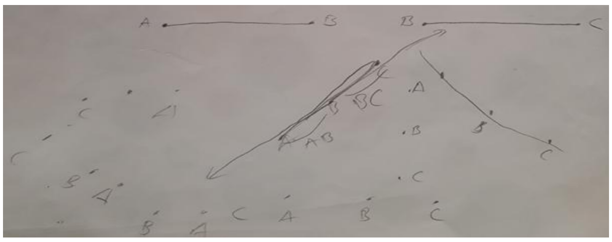
Şekil 3.47'de görüldüğü gibi prototip üçgen temsili çizmiştir. Ancak üçgenin kenarlarını doğru parçası değil AB, AC ve BC doğruları olarak çizmiştir. Araştırmacı doğrusal üç nokta dendiği zaman aklına ne geldiğini sorduğunda öğrenci *"İkizkenar üçgen geliyor.* $|AB|=|BC|$ *olduğu için. Üç nokta çiziyorum A,B,C diye ve o köşeleri birleştiriyorum. AB ile BC birbirine eşit oluyor."* şeklinde açıklamıştır. Doğrusal dendiği zaman aklına ne geldiği sorulduğunda *"Doğrusal, düz bir şekilde yani."* ve doğrusal üç nokta dendiğinde aklına ne geldiği sorulduğunda *"Doğrusal üç nokta dendiğinde hepsi aynı düzlemde, aynı yöne doğru."* açıklamalarını yapmıştır. Çizdiği şekildeki noktaların doğrusal olup olmadığı sorulduğunda ise noktaların *"aynı yönde"* olması gerektiğini söyleyerek Şekil 3.48'deki şekil temsilini çizmiştir.



Şekil 3. 48. *İnci'nin kağıdı*

Şekil 3.48'de görüldüğü gibi, öğrencinin kullanmış olduğu nokta ve doğru temsillerinde hatalar görülmektedir. $[AB]$ doğru parçasını da AB doğrusu şeklinde temsil etmiştir. Bu cebirsel ifadeyi kaç farklı şekilde temsil edebileceği sorulduğunda noktaların yerlerini değiştirmeden çizdiği temsilin düzlemdeki konumunu değiştirerek sonsuz tane çizebileceği yanıtını vermiştir.

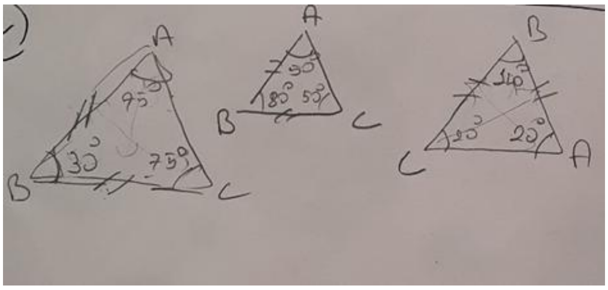
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa sorunun çözümünde AB ve BC doğru parçalarını çizerek doğrudan şekil temsili kullanmıştır. Çizmiş olduğu doğru parçalarının uzunluklarının eşit olduğunu ifade etmiş ve Şekil 3.49'da görüldüğü gibi şekil temsili üzerinde göstermiştir.



Şekil 3. 49. *Mustafa'nın kağıdı*

Öğrenciye doğrusal üç noktanın ne anlama geldiği sorulduğunda *“Yani doğrusal deyince üç nokta da aynı doğru üzerindeymiş. Yani üç nokta da aynı doğrultudaymış oluyor.”* sözel temsili ile açıklamıştır. Öğrenciye bu cebirsel ifadeyi kaç farklı şekilde gösterebileceği sorulduğunda önce A, B, C sıralamasını bozmadan düzlemde yer değiştirebileceğini, x ekseni ya da y ekseni üzerinde de olabileceğini ve bu yolla sonsuz tane çizebileceğini ifade etmiştir. Daha sonra da Şekil 3.49’da görülen noktaları çizerek A, B ve C noktalarını $|AB|=|BC|$ ifadesine uygun şekilde yerleştirmeye çalışmıştır. Sonuç olarak öğrenci B noktası ortada olacak şekilde noktaların A, B, C ve C, A, B sıralamasıyla bir doğru üzerinde, düzlemde yer değiştirerek sonsuz tane çizilebileceğini ifade etmiştir.

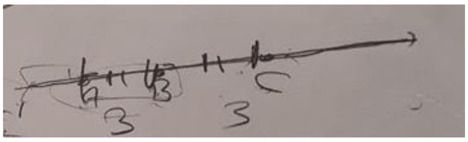
Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye sorunun çözümünde öncelikle sözel temsil kullanmıştır. Soruda verilen $|AB|=|BC|$ ifadesini AB ve BC kenar uzunlukluları birbirine eşit olan ikizkenar üçgen olarak tanımlamıştır. Öğrenci “*Bize burada bir tane de açı vermesi gerekiyordu. Açı vermediği sürece bunu bulmamız biraz, çizilebilir bayağı bir. Hani bize açı belirtmediği için ve B’nin açısını belirtmediği için birkaç tane çizilebilir.”* sözel temsili ile kaç farklı şekilde çizebilirsin sorusunu yanıtlamıştır. Daha sonra Şekil 3.50’de verilen şekil temsili üzerinde açılara rastgele sayısal değerler vererek şekil temsili ve sayısal temsili birlikte kullanmıştır.



Şekil 3.50. *Asiye’nin kağıdı*

Şekil 3. 50’de görüldüğü gibi, öğrencinin kullandığı şekil temsilinde üçgenler prototiptir. Kaç farklı şekilde temsil edebileceği sorulduğunda öğrenci sayısal değerleri değiştirerek sonsuz tane çizebileceğini ifade etmiştir.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel sorunun çözümünde öncelikle şekil temsili ile üçgen ve doğru üzerinde noktalar belirlemiştir. Daha sonra bu noktaları *“Ben AB uzunluğu eşit BC uzunluğu deyince üçgen çizilecek sandım. O yüzden bunu yaptım ama doğrusal üç nokta diyor.”* sözel temsil ile yorumlayarak doğrusal olup olmadıklarını kontrol etmiş ve *“Aynı doğru üzerinde olan üç nokta.”* sözel temsiline dayanarak noktaların Şekil 3. 51'de görüldüğü gibi çizilmesi gerektiğine karar vermiştir.



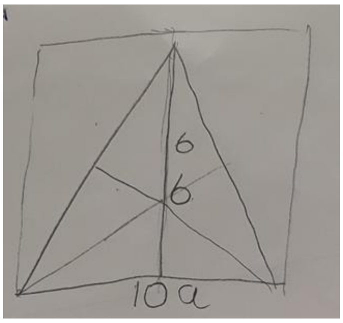
Şekil 3.51. *Sibel'in kağıdı*

Soruda verilen cebirsel temsilden "*AB uzunluğu eşittir BC uzunluğuna. Mesela A, B, C ise AB uzunluğu ile BC uzunluğu eşitmiş.*" sözel temsiline ve daha sonra Şekil 3.49'da verilen şekil temsiline geçiş yapmıştır. Öğrenciye bu cebirsel ifadeyi kaç farklı şekilde çizebileceği sorulduğunda "*Mesela burası 3 burası 3 ise AB BC C'den B'ye de geçebilir A'ya da. A'yı buraya alırsak CB olmaz. AB ile BC uzunluğu eş değil. AB ile BC eş değil bu daha büyük.*" Sözel ve sayısal temsillerini kullanarak iki şekilde çizebileceğini belirtmiştir.

Çoklu temsiller başlığı altında sorulan üçüncü sorunun çözümünde düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan doğrudan bir eşkenar üçgen çizmiş ve KLM olarak adlandırmıştır. Öğrenci *"Bir formül vardı aslında galiba. Üçgenin belli bir alanı var zaten 180'in üstü olamaz. 360° veya 270 öyle bir şey olamaz. 180'nin altında yani toplamları 180 olmak zorunda."* sözel temsili ile önce üçgenin alan formülünü düşünmüş ve üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı ile alan kavramı arasında bir ilişki kurmuştur. Daha sonra üçgen temsili üzerinde yükseklik çizerek isimlendirmiş ve *" h çarpı taban bölü iki yapıyoruz. Niye bölü 2 diyoruz çünkü mesela karede, karenin içinde aslında iki tane üçgen var. Kare taban ve diğer tabanın çarpımı olduğu için bunlar asında üçgen gibi."* sözel temsili ile şekil temsili üzerinde açıklama yapmıştır. Öğrenci bu durumun yalnızca kare ve dikdörtgene tamamlanan üçgenler için geçerli olduğunu belirtmiştir. Örneğin paralelkenar için bu durumun doğru olmadığını ifade etmiştir. Öğrencinin açıklamaları kural odaklıdır. Otoriter bir düzeye sahiptir ve şekil temsilini yorumlamakta zorlanmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal üçüncü sorunun çözümünde doğrudan şekil temsili kullanmıştır. Prototip üçgen çizimi yapmış ve bu şekil temsili üzerinde sayısal temsile geçiş yaparak kenar uzunlukları ve yüksekliğe değerler vermiştir. "*Biz mesela 8 versek yüksekliğe. İlk önce A, B, C yazalım. Tabana 5 verirsek. 5.8=40 40'ı 2'ye bölersek 20 olur. Anlatırdım bu şekilde.*" açıklamaları ile üçgenin alanını nasıl bulduğunu açıklamıştır. Üçgenin alan formülünü ezberlediği için direk soruda sayısal değerler vererek formülü kullanmıştır. Sayısal değer vermeden nasıl yapabileceği sorulduğunda "*Şöyle mesela buna x dersek (Yükseklik) mesela şuraya D diyeyim(Taban ile yüksekliğin kesiştiği nokta)* $|AD|= x$ *ise* $|BC|=y$ *dersek* $\frac{xy}{2}$ *derdik."* Açıklamasını yapmıştır. Öğrencinin çözümünde kural odaklı olduğu ve cebirsel ifadelerin etiket anlamına yoğunlaştığı dikkati çekmiştir. Yüksekliğin üçgenin alanını iki eş parçaya böldüğü gibi bir algıya sahiptir.

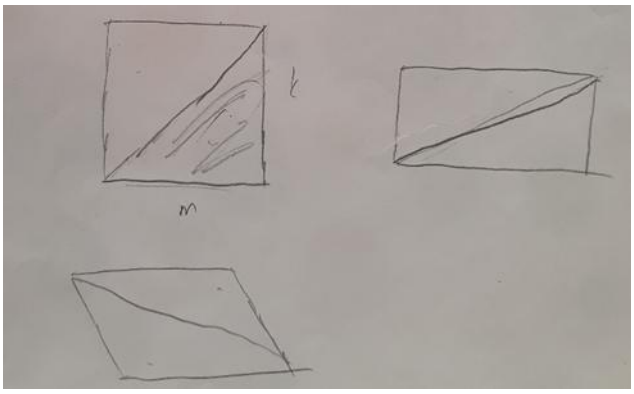
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci sorunun çözümünde *"Üçgenin alanının formülü taban çarpı yükseklik bölü iki. Onu anlatmak için önce bir üçgen çizerim. Sayı verirsem mesela; burası (Taban) 10, burası (Yükseklik) 6.* $\frac{10}{2}$*= 30 çıkardım alanı. 30 santimetrekare."* açıklamasında da görüldüğü gibi sözel temsil ile üçgenin alan formülünü temsil etmiştir. Ardından şekil temsiline geçiş yaparak Şekil 3. 52'de görülen şekil temsilini çizmiştir.



Şekil 3.52. *İnci'nin kağıdı*

Şekil 3. 52'de görüldüğü gibi, öğrencinin kullanmış olduğu şekil temsili prototiptir ve İnci şekil temsili üzerinde sayısal değerler vererek sayısal temsile geçiş yapmıştır. Öğrenciye neden bu işlemleri yaptığı sorulduğunda *"çünkü formül"* cevabını vermiştir. Formülün nereden gelmiş olabileceği sorulduğunda *"Bunu kare olarak düşünseydik mesela şöyle olacaktı ama bu bunun yarısı oluyor. Burası 10 olsa, burası 6 olsa mesela karenin alanını bulmak için 10 ile 6'yı çarpacaktık. 30 olacaktı ama üçgen karenin yarısı olduğu için onu ikiye bölmek zorundayız. Yani karenin, kare değil dikdörtgen. Dikdörtgenin bir kenarını yükseklik olarak düşünüyoruz üçgenin alanını hesaplarken."* sözel temsili ile açıklama yapmıştır. Sayısal değer vermeden nasıl yapabileceği sorulduğunda *"Mesela buraya a derim (taban) buraya (Yükseklik) b derim.* $\frac{ab}{2}$ *üçgenin alanı."* cebirsel temsilini kullanmıştır. Öğrenci otoriter düzeye sahiptir ve kural odaklı çözümler yapmıştır.

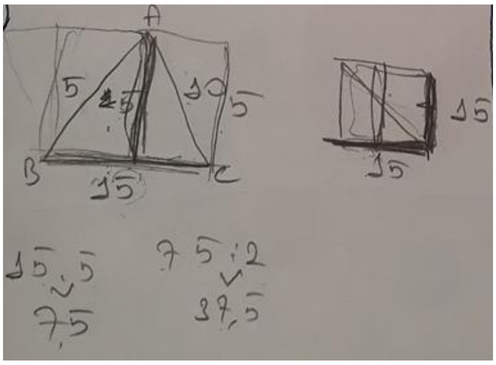
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa sorunun çözümünde doğrudan *“Taban çarpı yükseklik bölü iki”* sözel temsilini kullanmıştır. Daha sonra prototip üçgen şekli çizerek şekil temsiline geçiş yapmıştır. Çizmiş olduğu şekil temsili üzerinde sayısal değerler vererek de sayısal temsile geçiş yapmıştır. Öğrenci prototip üçgen çiziminden sonra bir tane de geniş açılı üçgen çizmiş ve yine bu üçgen temsili üzerinde sayısal değerler vererek sayısal temsil ile bir sonuç bulmuştur. Sayısal değer vermeden nasıl yapabileceği sorulduğunda önce *“a desek, b desek(Tabana ve yüksekliklere)* $\frac{ab}{2}$ *olur. x desek y desek* $\frac{xy}{2}$ *olur. Burada da yüksekliğe k desek, m desek(taban)* $\frac{km}{2}$ *olur. Cebirsel olarak böyle bulurum.”* açıklamasını yapmıştır. Burada cebirsel temsil için kullandığı x, y, k ve m harfli ifadelerini etiket anlam olarak kullanmıştır. Daha sonra şekil temsili üzerinde sırasıyla kare, dikdörtgen ve paralelkenar için Şekil 3.53’te görüldüğü gibi şekil temsili kullanmıştır.



Şekil 3.53. *Mustafa’nın kağıdı*

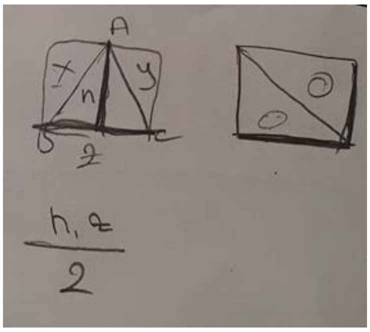
Çizmiş olduğu şekil temsilleri üzerinde sözel temsil kullanarak formülde neden kenar uzunluğu ile kenara ait yüksekliğin çarpımının ikiye bölündüğünü *“O da kural yani. Onun bir anlamı vardı şöyle; şimdi biz k ile m’yi çarparsak bu üçgeni bir kare içine alırsak karenin alanını buluruz. Üçgen de bu yarısı olduğu için 2’ye böleriz.”* sözel temsili ile açıklamıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye üçüncü sorunun çözümünde doğrudan *“Üçgenin alanını; yükseklik çarpı taban diye açıklarım. Şekil çizerim. Hepsine bir sayı veririm kenarlarına ve yüksekliğe de bir sayı veririm. Taban çarpı yükseklik bölü iki olarak.”* sözel temsili ile kural odaklı açıklama yapmıştır. Daha sonra Şekil 3. 54’te verilen şekil temsiline geçiş yapmıştır.



Şekil 3.54. *Asiye'nin Kağıdı*

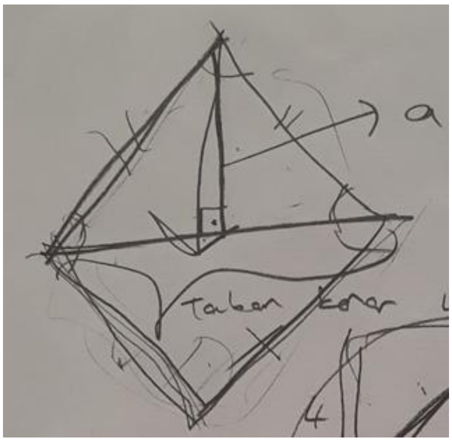
Şekil 3. 54'te görüldüğü gibi, öğrenci şekil temsili üzerinde sayısal temsil ile doğrudan formülü uygulamıştır. Öğrenciye sayısal değer vermeden nasıl yapabileceği sorulduğunda önce yapamayacağını söylemiş ancak daha sonra Şekil 3. 55'te görülen şekil temsili üzerinde cebirsel temsil ile açıklama yapmıştır.



Şekil 3.55. *Asiye'nin kağıdı*

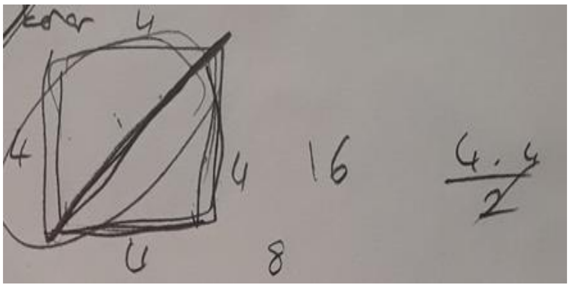
Şekil 3.55'te görülen harfli ifadeleri etiket anlamda kullanmıştır. Formülde yer alan kenar uzunluğu çarpı kenara ait yükseklik bölü ikinin nereden geldiğini açıklamak için üçgenleri dikdörtgen ve kareye tamamlamıştır. Asiye adlı öğrenci, çözümü anlatırken başlangıçta dikdörtgen için kare ifadesinin kullanmış ancak daha sonra hatalı kullanımını fark ederek dikdörtgen şeklinde düzeltmiştir.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel üçüncü sorunun çözümünde doğrudan *"Taban çarpı yükseklik bölü iki."* sözel temsilini kullanmıştır. Öğrenciden açıklama yapması istendiğinde Şekil 3.56'da verilen şekil temsili üzerinde *"Bir üçgen çizdik diyelim. Bu üçgenin taban uzunluğu, tepe açısının tam karısındaki kenarın uzunluğu taban kenarı. Bunun uzunluğu mesela x cm olsun. Bunun yüksekliği de o açının tam yere 90 derece ile değdiği yer. Bunun uzunluğu a olsun. a ile x'i çarpıp 2'ye bölüyorum."* açıklamasını yapmıştır.



Şekil 3. 56. *Sibel'in kağıdı*

Sibel Şekil 3.56'da verilen prototip üçgen temsilinden sonra Şekil 3.57'de verilen şekil temsilini çizmiştir.

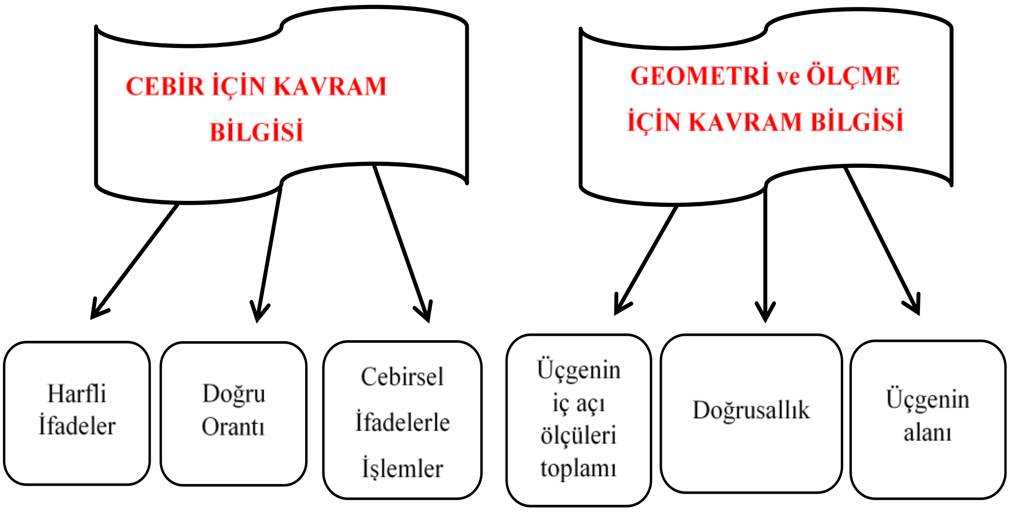


Şekil 3.57. *Sibel'in kağıdı*

Öğrenci Şekil 3. 57'de verilen şekil temsili üzerinde sayısal temsil kullanarak üçgenin alanını hesaplamıştır. Başlangıçta yalnızca kare üzerinden kural odaklı açıklamalar yapmasına karşın daha sonra "*Çeşitkenar da olabilir. Sonuçta formül taban çarpı yükseklik bölü iki olacak ya da ben bunu bir eşkenar dörtgene de tamamlayabilirim. O zaman eşkenar dörtgende de yine taban çarpı yükseklik olduğu için ya da paralelkenarda yine aynı formülle ikiye bölünce de o üçgenin alanı oluyor.*" sözel temsili ile kareden başka dörtgenler üzerinden de açıklamalar yapmıştır. Ancak açıklamaları yine kural odaklıdır.

3.2.3. Çoklu temsiller başlığı altında karşılaşılan kavramsal zorluklar

Araştırma kapsamında çoklu temsiller başlığı altında öğrencilere yöneltilen sorularda geçen kavramlar cebir için gerekli anahtar kavramlar ve geometri ve ölçme için gerekli anahtar kavramlar olmak üzere Şekil 3.58'de verildiği gibi iki başlık altında ele alınmıştır.

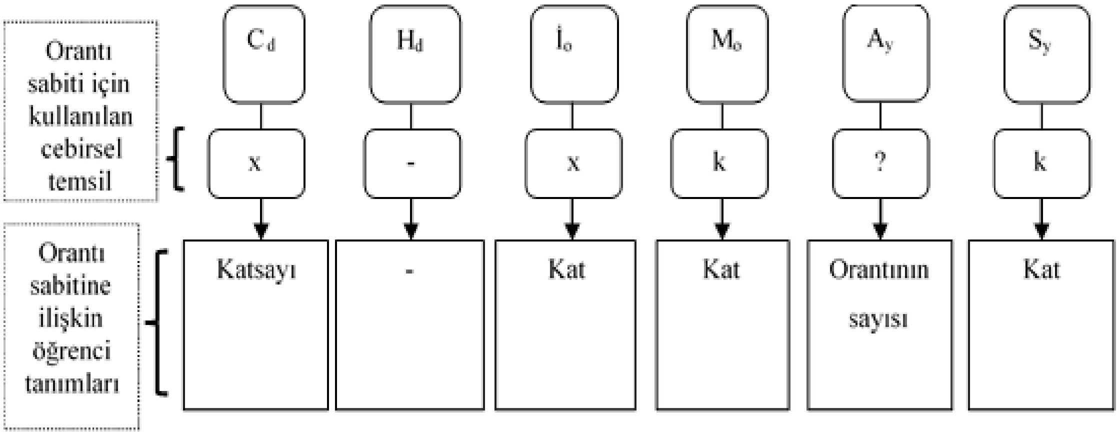


Şekil 3.58. *Çoklu temsiller başlığı altında yer alan anahtar kavramlar*

Şekil 3.58'de görüldüğü gibi, cebir için gerekli anahtar kavramlar harfli ifadeler, doğru orantı ve cebirsel ifadelerde işlemlerdir. Geometri için gerekli anahtar kavramlar ise üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı, doğrusallık ve üçgenin alanı kavramlarıdır.

3.2.3.1. *Çoklu temsiller başlığı altında cebir için kavramsal bilgi*

Cebir için gerekli anahtar kavramlardan birinci soruda geçen orantı kavramını düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal bilmediği için sonun çözümünde kavramsal zorluk yaşamıştır. Öğrenci orantı kavramını "*denge*" olarak tanımlamıştır. Soruda verilen 3, 4, 5 ile orantılı olma kavramını "*ardışık olma*" olarak ifade etmiştir. Bu durum doğru sonuca ulaşmasını engellemiştir. Diğer seviyelerdeki beş öğrenci ise orantı kavramını doğru şekilde bilmektedir. Ancak kavramı açıklarken kullandıkları dil ve ifadeler formel dilden uzaktır. Örneğin yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye orantı sabitini doğru şekilde hesaplamasına karşın *"Orantının kaç katı olduğu hani tam olarak onu belirtemiyorum ama orantının sayısı."* ifadesinde de görüldüğü gibi açıklama yapmakta zorluk yaşamaktadır. Şekil 3.59'da öğrencilerin birinci soruda geçen doğru orantı ve orantı sabiti kavramlarını açıklarken kullandıkları ifadeler verilmiştir.



Şekil 3.59. *Çoklu temsiller birinci sorusunda geçen doğru orantı ve orantı sabiti kavramlarına ilişkin öğrenci tanımları*

Şekil 3.59'da öğrencilerin orantı sabiti için kullandıkları cebirsel temsiller ve bu temsilleri nasıl adlandırdıkları verilmiştir.

Temsiller başlığı altında öğrencilere sorulan ikinci soruda yer alan $|AB|=|BC|$ ifadesini tüm öğrenciler başta ikizkenar üçgen olarak yorumlamışlardır. Ancak daha sonra düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal, orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ve yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel geometri bilgilerini kullanarak doğrusallık kavramına uygun olması için bir doğru üzerinde noktaları yerleştirmişlerdir. Diğer üç öğrenci ise geometrik kavram eksikliği nedeni ile hatalı çözüm yapmışlardır.

Temsiller başlığı altında öğrencilere sorulan üçüncü soruda öğrenciler kullandıkları harfli ifadeleri anlamlandırmada ve harfli ifadelerin bilinmeyen-etiket anlamlarını yorumlamada zorluk yaşamışlardır. Örneğin yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ve orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa soruda geçen kenar uzunluklarına verdikleri harfli ifadelerin bilinmeyen ile etiket anlamını ayırt etmekte zorlanmışlardır. Bu nedenle harfli ifadelerin değişken anlamını yorumlayamamışlardır.

3.2.3.2. *Çoklu temsiller başlığı altında geometri ve ölçme için kavram bilgisi*

Geometri ve ölçme için anahtar kavramlardan üçgenin iç açıları ölçüleri toplamını araştırmaya katılan odak öğrencilerin tamamı doğru şekilde anlamlandırmıştır. Doğrusallık kavramında ise düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan'ın diyaloğunda da görüldüğü gibi sorun yaşamaktadır.

Araştırmacı: Doğrusal ne demek?

Canan: Doğru dediğimiz şey bir çizgi. İki noktanın birleşimi.

Araştırmacı: Doğrusal noktalar nasıl oluyorlar?

Canan: Yani bir noktadan geçen oluyor.

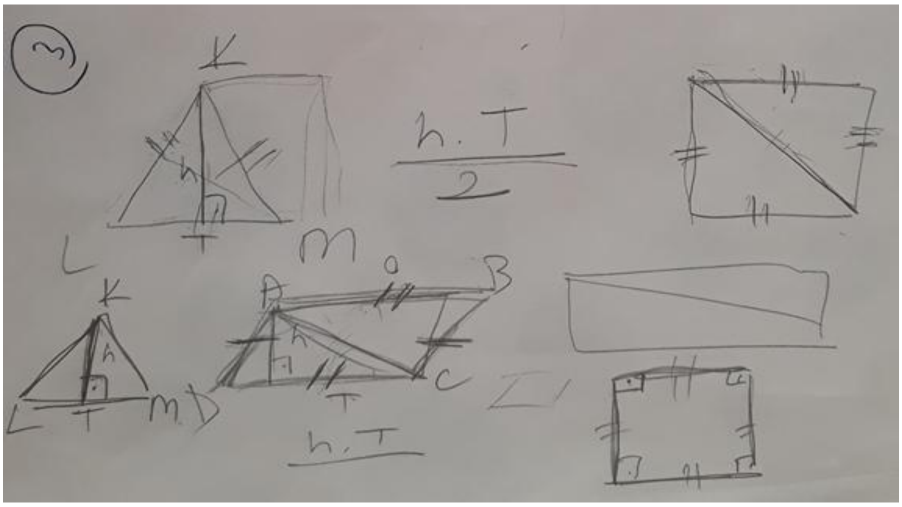
Araştırmacı: Doğrusal dediğimde ne anlıyorsun?

Canan: Bilmiyorum aslında.

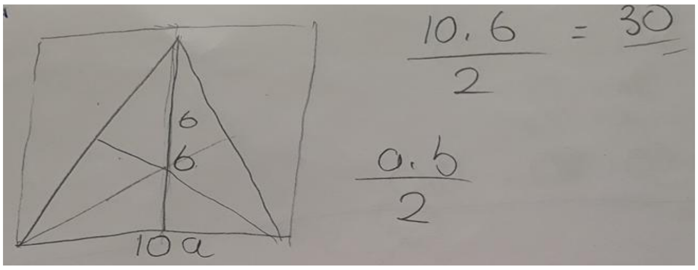
Doğrudan aktarmada görüldüğü gibi, Canan doğrusallık kavramını önce bir çizgi daha sonra bir noktadan geçen olarak tanımlamaya çalışmıştır. Ancak daha sonra bilmediğini ifade etmiştir. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal doğrusal kavramını sözel olarak *"düz"* olan olarak tanımlamıştır. Şekil üzerinde ise doğru bir şekilde çizerek göstermiştir.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci doğrusal kavramını sözel olarak *"aynı düzlemde olan"* olarak tanımlamış ve şekil üzerinde üçgen çizerek göstermiştir. Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ise doğrusallık kavramını *"birleşen üç nokta"* olarak tanımlamıştır. İnci ve Asiye doğrusallık kavramında yanılgı yaşamaktadırlar. Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ile yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel doğrusallık kavramında herhangi bir sorun yaşamamışlardır.

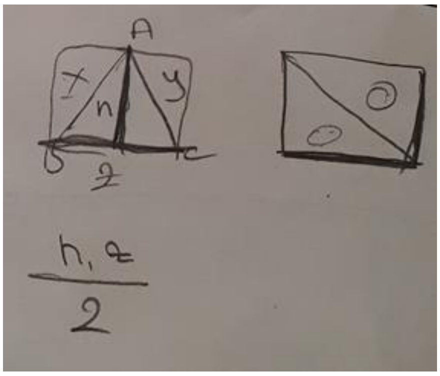
Çoklu temsiller soruları için gerekli olan bir diğer geometrik kavram üçgenin alanıdır. Öğrencilerden yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel dışında diğer beş öğrenci de üçgenin alanı geometrik kavramını bir kural olarak bilmektedirler. Şekil 3.60, 3.61 ve 3.62'de öğrencilerin üçgenin alanını açıklarken kullandıkları temsiller verilmiştir.



Şekil 3.60. *Canan'ın kağıdı*



Şekil 3.61. *İnci'nin kağıdı*



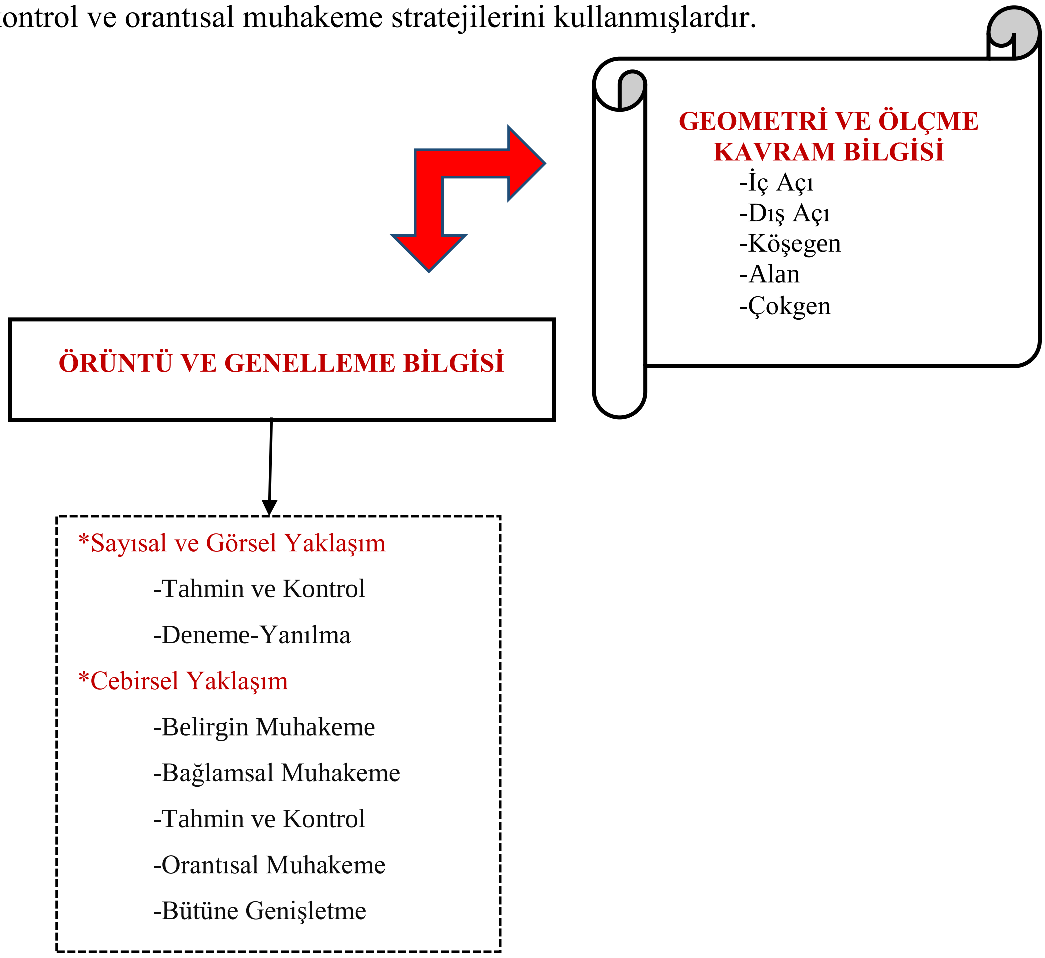
Şekil 3.62. *Asiye'nin kağıdı*

Şekil 3.60, Şekil 3.61 ve Şekil 3.62'de görüldüğü gibi, öğrenciler öğretmenlerinin derste göstermiş olduğu prototip çizimler ve ezberledikleri formüller ile üçgenin alanını açıklamaya çalışmış ancak kuraldan öteye geçememişlerdir. Ancak kenar uzunluğu x kenara ait yükseklik olması gereken üçgenin alan formülünü taban x yükseklik olarak tanımlamışlardır. Bu durum öğrencilerin üçgenin alanı kavramı ile zorluk yaşadıklarını göstermektedir.

3.3. Örüntü ve Genellemelere Ait Bulgular

Araştırma kapsamında Örüntüler ve genellemeler başlığı altında öğrenciler ile EK-6c'de verilen iki soru üzerinde klinik görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen veriler Şekil 3.63'te verildiği gibi alt tema ve kodlara ayrılarak incelenmiştir. Araştırmada ele alınan sorular kapsamında öğrencilerden bilmeleri beklenen anahtar kavramlar şekilde verildiği gibi geometri konu alanı için; iç açı, dış açı, çokgen, köşegen ve alan kavramlarıdır.

Sorulardan elde edilen veriler Şekil 3.63'te verildiği gibi, örüntü ve genelleme bilgisi olarak incelenmiş ve elde edilen bulgular her soru için uzak adım ve yakın adıma genelleme olmak üzere ayrı ayrı sunulmuştur. Şekil 3.63'te görüldüğü üzere öğrenciler örüntü ve genellemeler ile çalışırken *"sayısal ve görsel yaklaşım"* ile *"cebirsel* *yaklaşım"*ı benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında da tahmin ve kontrol, deneme-yanılma, cebirsel yaklaşım, belirgin muhakeme, bağlamsal muhakeme, tahmin ve kontrol ve orantısal muhakeme stratejilerini kullanmışlardır.



Şekil 3. 63. *Örüntü ve genellemelere ait tema ve alt temalar*

3.3.1. Yakın ve uzak adıma genelleme

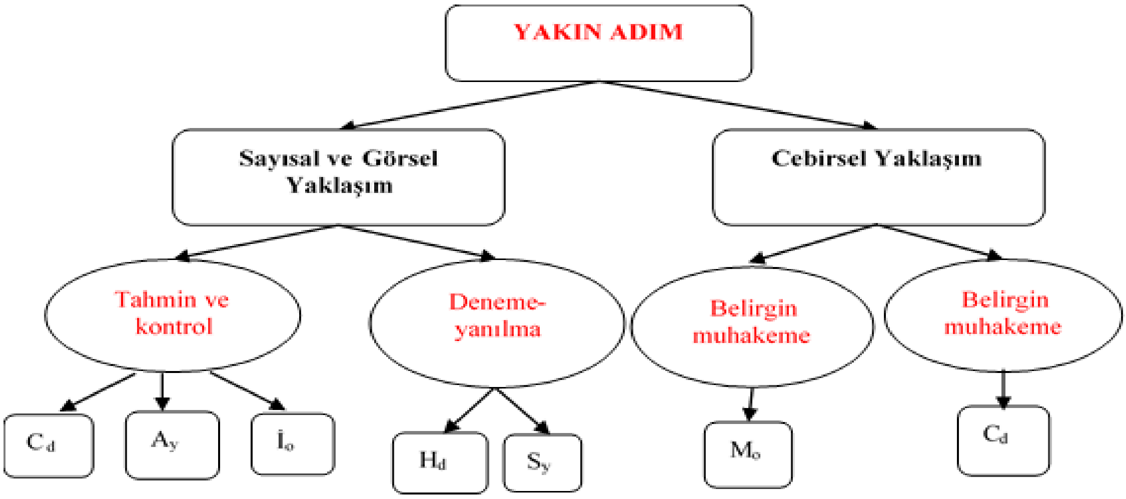
Öğrencilere ilk olarak Şekil 3.64'te görülen çokgenlerin dış açılarının ölçüleri toplamına ilişkin bir soru yöneltilmiştir. Bu soru bağlamında öğrencilerden önce yakın adım olarak ardışık ilerleyen üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgenin dış açılarının ölçüleri toplamını bulmaları istenmiştir.

1) a)Bir üçgenin bir iç açısı ile bir dış açısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
b)Bir üçgende kaç tane iç açı ve kaç tane dış açı vardır? Açıklayınız.
c)Bir üçgenin tüm iç açılarının ve dış açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?
d)Bir dörtgenin dış açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?
e)Beşgenin, altıgenin ve n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Acıklavınız.

Şekil 3.64. *Örüntü ve genellemeler birinci soru*

3.3.1.1. *Yakın adım*

Öğrenciler Şekil 3.65'te verilen sorunun yakın adımı için Şekil 3.63'te verilen sayısal ve görsel yaklaşım ile cebirsel yaklaşım stratejilerini kullanmışlardır.

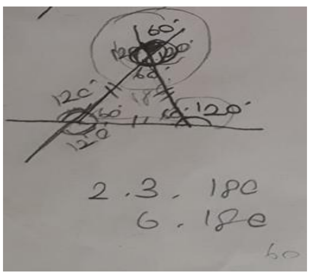


Şekil 3.65. *Örüntü ve genellemeler birinci soru için öğrencilerin kullandıkları yakın adım stratejileri*

Şekil 3.65'te görüldüğü gibi, cebirsel yaklaşım kullanan orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ve düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan dışındaki tüm öğrenciler sorunun çözümünde sayısal ve görsel yaklaşım kullanmışlardır. Sorunun çözümü için sayısal ve görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden Canan, Asiye ve inci tahmin ve kontrol stratejisini kullanırken Hilal ve Sibel deneme-yanılma stratejisini benimsemişlerdir. Bu bağlamda öğrencilerin çözümleri aşağıda sunulmuştur.

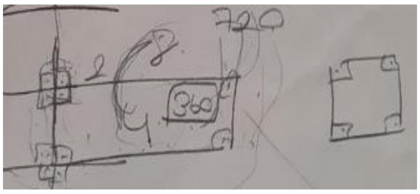
Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan sorunun çözümünde sayısal ve görsel yaklaşım başlığı altında tahmin ve kontrol stratejisini kullanmıştır. Ayrıca yakın adımda üçgen için bulduğu kuralı dörtgen ve beşgen için cebirsel yaklaşımla bütüne genişletme stratejisi kullanarak genellemiştir.

Öğrenci Şekil 3. 66'da görüldüğü gibi üçgenin bir köşesinde oluşan açıyı bir tam açı olarak ele alıp 360°'ye tamamlamıştır.



Şekil 3.66. *Canan'ın kağıdı*

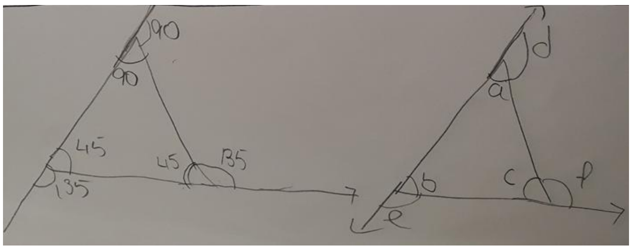
Bir üçgenin iç açıları toplamı ile dış açıları toplamını 360° olarak almıştır. Hatalı geometri bilgisi soruda oluşan örüntüyü fark etmesini engellemiştir. Ancak üç iç açı ve altı dış açı ilişkisinden 2 kat ilişkisi sonucuna ulaşarak hatalı muhakeme yapmış ve iç açılar toplamı 180°, dış açılar toplamı 360° sonucuna ulaşmıştır. Üçgende yaptığı muhakemeyi Şekil 3. 67'de görüldüğü gibi dörtgene transfer etmiştir.



Şekil. 3.67. *Canan'ın kağıdı*

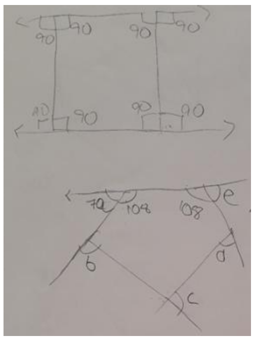
Şekil 3.67'de görüldüğü gibi, üçgende yaptığı üç iç açı, altı dış açı hatasını dörtgende dört iç açı, sekiz dış açı olarak tekrar etmiş ve üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen için bir örüntü fark etmiştir. *"İç açı sayısının 2 katı kadar dış açı vardır"* hatalı genellemesini bütüne genişletme stratejini kullanarak yapmıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci önce sayısal temsil ile şekilde görüldüğü gibi yakın adım için çözüm yazmıştır. Sayı vermeden nasıl yapılacağı sorulduğunda aynı Şekil 3.68'de verilen cebirsel ifadeleri kullanmıştır.



Şekil 3.68. *İnci'nin kağıdı*

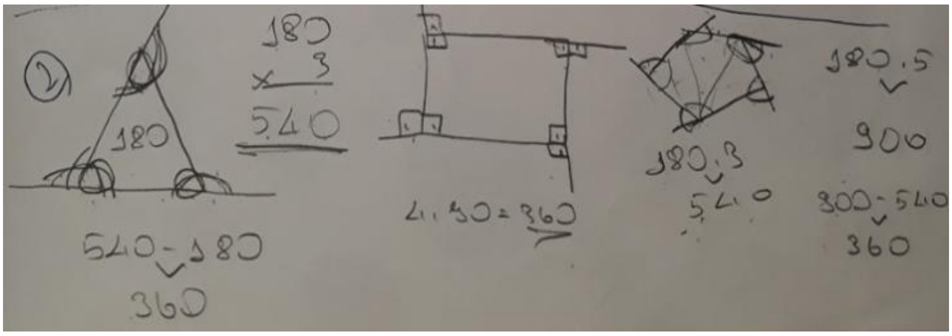
Dörtgen, beşgen ve altıgen için de Şekil 3.69'da görüldüğü gibi düzgün çokgenler üzerinden sayısal örnekler vererek açıklama yapmıştır.



Şekil 3. 69. *İnci'nin kağıdı*

Şekil 3.69’da görüldüğü gibi orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci, örüntünün yakın adımında sayısal ve görsel yaklaşım teması altında tahmin ve kontrol stratejisini kullanmıştır.

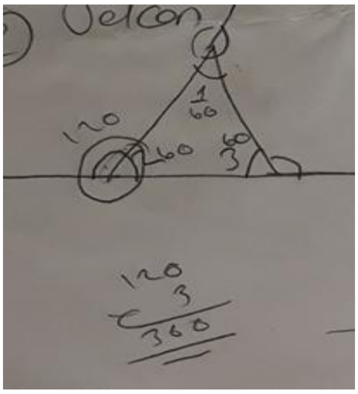
Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye birinci soruda verilen örüntünün yakın adımı için sayısal ve görsel yaklaşım teması altında tahmin ve kontrol stratejisini kullanmıştır. Şekil 3.70’dte görüldüğü gibi yakın adım için üçgen, dörtgen ve beşgen çizmiş ve çizdiği geometrik şekiller üzerinde iç ve dış açıları göstermiştir.



Şekil 3.70. *Asiye’nin kağıdı*

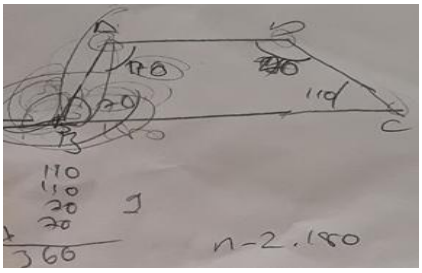
Şekil 3.70’te görüldüğü gibi dış açılar toplamını bulmak için önce bir köşeye ait iç ve dış açının toplamı 180°’yi köşe sayısı ile çarpmış ve geometrik şeklin iç açıları toplamını bulduğu sayıdan çırkarmıştır. Üçgen, dörtgen ve beşgen için aynı işlemi tekrarlamış ve hepsinde 360° sonucuna ulaşmıştır. Yakın adımda sorulan altıgen için de Şekil 3.68’de görüldüğü gibi adımları tek tek çizerek sonuca ulaşmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal birinci soruda verilen örüntünün yakın adımını bulmak için deneme-yanılma stratejisini kullanmıştır. Başta üçgenin dış açı ölçüleri toplamının 180° olduğunu ifade etmiştir.



Şekil 3.71. *Hilal’in Kağıdı*

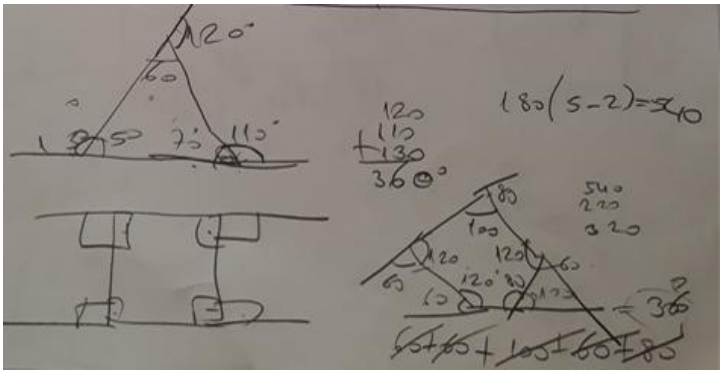
Ancak sonra şekil 3.71'de görüldüğü üzere bir eşkenar üçgen çizmiş ve eşkenar üçgenin dış açı ölçülerini toplayarak 360° olduğunu fark etmiştir. Dörtgenin dış açıları toplamını ise bir kare çizerek benzer şekilde 360° olarak hesaplamıştır. Öğrenci özel üçgen ve özel dörtgen seçtiği için araştırmacı öğrenciye düzgün çokgen olmadığı zaman nasıl bulacağını sormuştur. Öğrenci Şekil 3.72'de verilen yamuğu çizmiştir.



Şekil 3.72. *Hilal'in kağıdı*

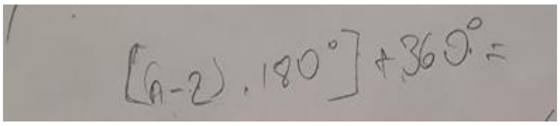
Şekil 3.72'de görüldüğü gibi, Hilal çizdiği yamuğun iç açı ölçülerine 70° ve 110° olmak üzere sayısal değerler vermiş ve yine açıların ölçüleri toplamını 360° olarak hesaplamıştır. Yakın adımda çokgenlerin dış açıları toplamını özel çokgenler seçerek ya da değer vererek hesaplamıştır.

Birinci sorunun çözümünde yakın adım için sayısal görsel yaklaşım teması altında deneme-yanılma stratejisini kullanan diğer bir öğrenci yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel'dir. Şekil 3.73'te görüldüğü gibi yakın adım için düzgün çokgenler çizerek sayısal değerler üzerinden 360° olduğunu açıklamıştır.



Şekil 3.73. *Sibel'in Kağıdı*

Sorunun yakın adımı için cebirsel yaklaşım kullanan tek öğrenci olan orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa, çokgenlerin dış açı ölçüleri toplamının her zaman 360° olduğunu ifade etmiştir. 360°'nin derecenin nereden geldiği sorulduğunda çokgenlerin kenar sayıları arttıkça dış açılarının ölçülerinin azaldığını böylece kenar sayısı arttıkça geometrik şeklin çembere benzeyeceğini ve bu nedenle dış açıları toplamının her zaman 360° olduğunu ifade etmiştir. Şekil 3.74'te görüldüğü gibi, iç açıları ölçüleri toplamının ise (n-2).180 cebirsel ifadesi ile bulunduğunu ve bu ifadeye 360 eklenerek sonuca ulaşılabileceğini ifade etmiştir.

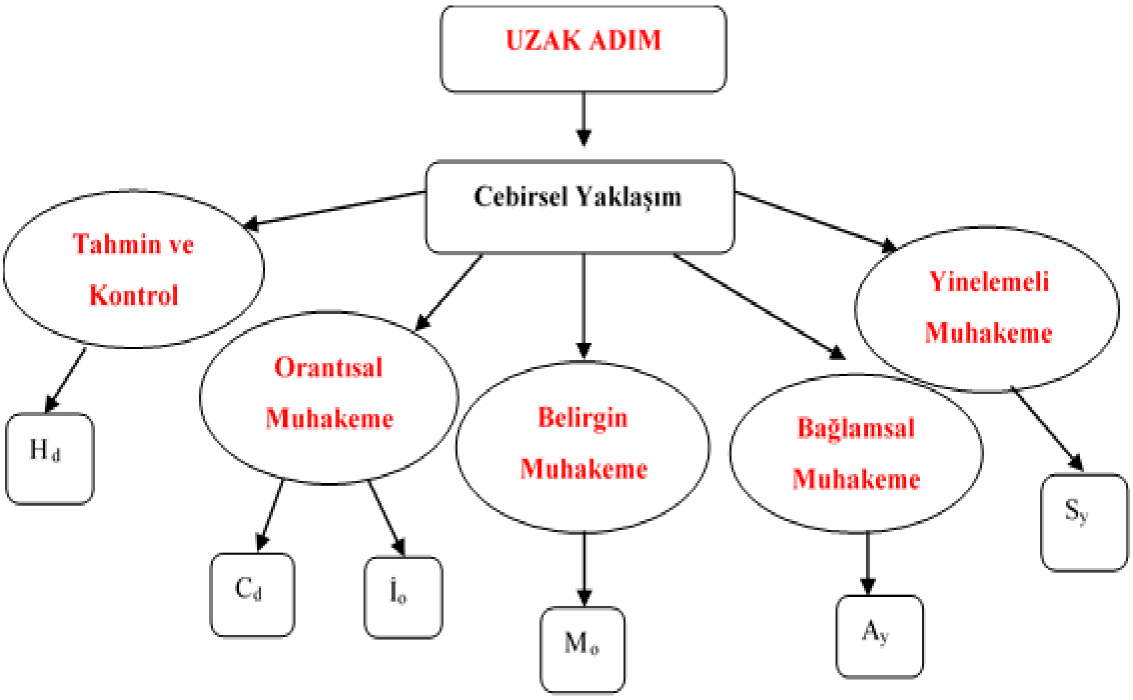


Şekil 3.74. *Mustafa'nın kağıdı*

Şekil 3.74'te görülen [(n-2).180]+360 ifadesini yazmış ve yakın adımdaki çokgenler için de bu cebirsel ifadeden yararlanarak sonuca ulaşmıştır.

3.3.1.2. *Uzak adım*

Araştırmada yer alan öğrencilerin tümü verilen sorunun uzak adımını bulmak için "cebirsel yaklaşım" kullanmışlardır. Şekil 3.75'te öğrencilerin birinci sorunun uzak adımını bulmak için kullandıkları cebirsel yaklaşım stratejileri sunulmuştur.



Şekil 3. 75. *Örüntü ve genellemeler birinci soru için öğrencilerin kullandıkları uzak adım stratejileri*

Düşük cebirsel düşünmeye sahip Canan adlı öğrenci, hatalı orantısal muhakeme kullanmıştır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal adlı öğrenci ise ezbere hatalı bir cebirsel ifade yazarak tahmin ve kontrol stratejisini kullanmıştır. Örüntünün uzak adımı için orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci orantısal muhakeme Mustafa ise belirgin muhakeme ile sonuca ulaşmıştır. Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye bağlamsal muhakeme ile sonuca ulaşırken yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel yinelemeli muhakeme ile sonuca ulaşmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan adlı öğrenci verilen örüntünün uzak adımını bulmak için hatalı orantısal muhakeme yapmıştır. Şekil 3.76'da görüldüğü gibi, n kenarlı çokgenin dış açı sayısını 2n olarak ifade etmiş ancak daha sonra n kenarlı bir çokgenin dış açıları ölçüleri toplamının 2n olduğunu belirtmiştir.

Şekil 3.76. *Canan'ın kağıdı*

Şekil 3.76'da görüldüğü gibi, Canan ulaştığı bu genellemeyi üçgende yerine koyarak kontrol etmiştir. 2.3.180=6.180 sonucuna ulaştıktan sonra sonucun hatalı olduğunu fark etmiş ve sonuca ulaşamadığı için çokgenin bir iç açısının ölçüsünü temsil eden y değişkeni tanımlamıştır. Dörtgen için şekilde görüldüğü gibi 2.4.90(2.n.y) işlemini yapmıştır. Aşağıda verilen doğrudan alıntıda öğrencinin örüntü için yaptığı genelleme verilmiştir.

Araştırmacı: O zaman n kenarlıda ne olur?

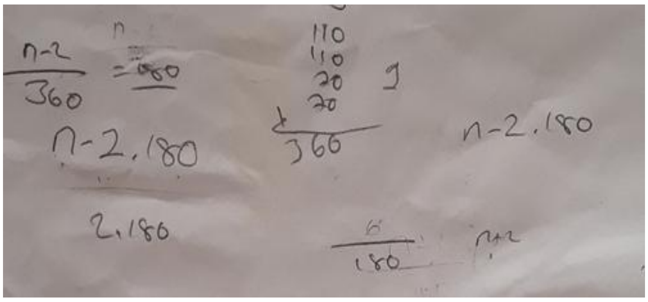
Canan: n kenarlıda 2n oluyor. Dış açılarının sayısı mı? Yoksa toplamı mı?

Araştırmacı: Toplamı.

Canan: Toplamı 2n. 2 çarpı kenar sayısı çarpı bir tane açısı.

Yukarıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi Canan örüntünün herhangi bir adımı için orantısal muhakeme ile hatalı sonuca ulaşmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal örüntünün uzak adımı için ezbere dayalı hatalı cebirsel ifadeler yazmıştır. Hilal’e örüntünün n. adımında bir çokgenin dış açıları ölçüsünün toplamı sorulduğunda Şekil 3.77’de görüldüğü gibi önce (n-2).180 ifadesi ile iç açıları ölçüleri toplamını bulduğu için (n+2)/180 ifadesi dış açıları ölçüleri toplamını bulabileceğini ifade etmiştir.



Şekil 3.77. *Hilal’in kağıdı*

Neden 180’e böldüğü sorlduğunda aşağıda verildiği gibi bir tane açısının ölçüsünü bulmak için yanıtını vermiştir.

Araştırmacı: Nereden yazdın onu?

Hilal: Şöyle düşündüm şurayı sormuştunuz bana, şu açısını. Ben de şöyle düşündüm. (n-2)/360 diye. 4 tane köşesi var çıkardığımızda 180 olarak buluruz ama bunların böyle toplamı 180

Araştırmacı: Şu formülü nereden buldun?

Hilal: O bir yerden hatırlıyorum 6 ya da 7’de işlemiştik galiba. Hatırlıyorum çünkü.

Araştırmacı: Her zaman böyle midir?

Hilal: Geçerlidir. Mesela şeyde denersek. Mesela beşgeni düşünürsek 5‘ten 2 çıkardığımızda geriye kalıyor 3. 360’ı 3’e böldüğümüzde 120 olarak buluyoruz.

Araştırmacı: Onu ne için yazdın?

Hilal: Beşgeni düşündüm. 5‘ten 2 çıkardım 3 360’ı 3’e böldüm 120 budum.

Araştırmacı: 120 ne?

Hilal: İki köşesi değil nasıl desem iki köşegenin toplam sayısı ama her zaman geçerli olmayabilir.

Araştırmacı: İki köşegenin neyinin toplamı?

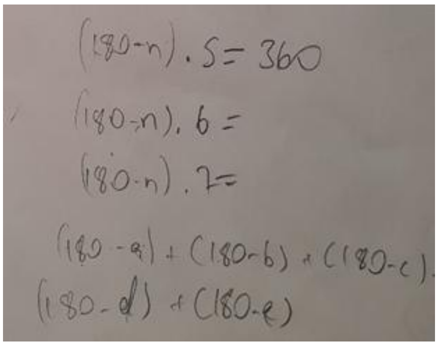
Hilal: İki açının toplamı.

Araştırmacı: Onu nereden bulmuştun bir daha sorayım. (n-2)/360

Hilal: Onu bir hatırlıyorum geçen senelerden bir şey bölü n-2 bölü galiba 360 öyle şeyi vardı. Oradan yola çıktım. Çünkü öyle baya soru çözmüştük aklımda kaldı.

Yukarıda görüldüğü gibi öğrenci ezbere dayalı hatalı bir cebirsel ifade yazmıştır.

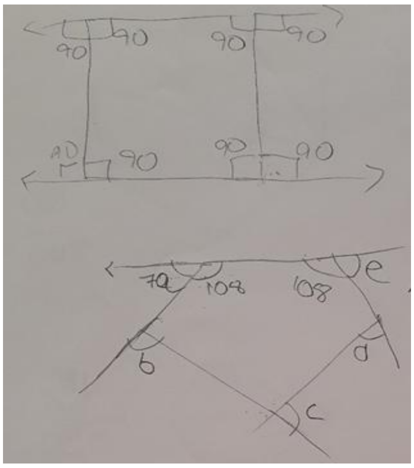
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa soruda verilen örüntünün uzak adımı için belirgin muhakeme stratejisi kullanmıştır. Aşağıda verilen Şekil 3.78'de görüldüğü gibi, daha önceden hatırlamış olduğu kuralı düzgün çokgenler üzerinden yazmıştır.



Şekil 3.78. *Mustafa'nın kağıdı*

Düzgün olmayan bir çokgen için nasıl yapacağı sorulduğunda derste görmüş olduğu kural üzerinden Şekil 3.78'de görüldüğü gibi cebirsel ifadeler ile kural yazmaya çalışmış ancak sonuca ulaşamamıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci de sorunun uzak adımı için orantısal muhakeme ile çözüm yapmıştır. Ancak Şekil 3.79'da görüldüğü gibi çözümünde yalnızca düzgün çokgenleri ele almıştır.



Şekil 3.79. *İnci'nin kağıdı*

Şekil 3.79'da görüldüğü gibi yakın adımda dörtgen için kare, beşgen için de düzgün beşgen üzerinden çözüm yapmıştır. n kenarlı bir çokgende nasıl çözüm yapacağı sorulduğunda aşağıda verilen doğrudan alıntıdan anlaşılacağı üzere orantısal mıhakeme yapmıştır.

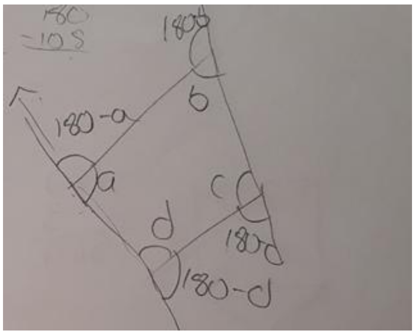
Araştırma: Tamam n kenarlı bir çokgende nasıl bulabiliriz onu?

İnci: n kenarlı bir çokgende?

Araştırma: Sesli düşün duyayım ben de

İnci: Şimdi buradaki ile şey yapmıştık bir iç açısını bulmuştuk. Sonra onu dış açısından doğru kenar sayısı ile çarpmıştık. O zaman bir dış açısı çarpı n olacak.

Öğrenciye düzgün olmayan çokgenler için nasıl çözüm yapacağı sorulduğunda Şekil 3.80'de görüldüğü gibi bir dörtgen çizmiş ve iç açılarına a, b, c, d ifadelerini yazmıştır. Düzgün olmayan bir çokgen için nasıl yapacağı sorulduğunda "*bütün dış açıları bulup toplamam gerek"* ifadesini kulanmıştır.

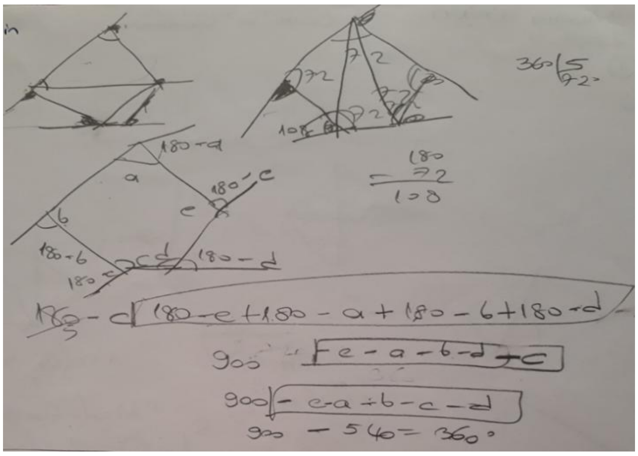


Şekil 3.80. *İnci'nin kağıdı*

Dış açılara Şekil 3.80'de görüldüğü gibi 180-a, 180-b, 180-c ve 180-d cebirsel ifadelerini yazmıştır. Bu ifadeyi nasıl yazdığını açıklaması istendiğinde sayı değeri vererek açıklayabileceğini ifade etmiştir. Sayı değeri vermeden yapması istendiğinde yapacağını ve bırakmak istediğini ifade etmiştir. Sonuç olarak düzgün bir çokgen için bir dış açısı a ise dış açıları toplamını n.a olarak ifade etmiş, hatalı orantısal muhakeme yapmıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye soruda verilen örüntünün uzak adımı için bağlamsal muhakeme yapmıştır. Yakın adımda bulduğu sonuçları n. adım için genellemiş ve tüm çokgenlerde dış açıları ölçüleri toplamının 360˚ olacağını ifade etmiştir. Bu sonuca nasıl ulaştığı ve nasıl emin olacağı sorulduğunda şekilde görüldüğü gibi (n-2).180 ifadesi ile çokgenin iç açıları toplamını ve n.180 ifadesi ile tüm iç açı ve dış açıları ölçüleri toplamını bulacağını ifade etmiştir. Tüm açıların ölçüleri toplamından iç açıları ölçüleri toplamını çıkardığı zaman çokgenin dış açıları ölçüleri toplamını bulacağını ifade etmiştir.

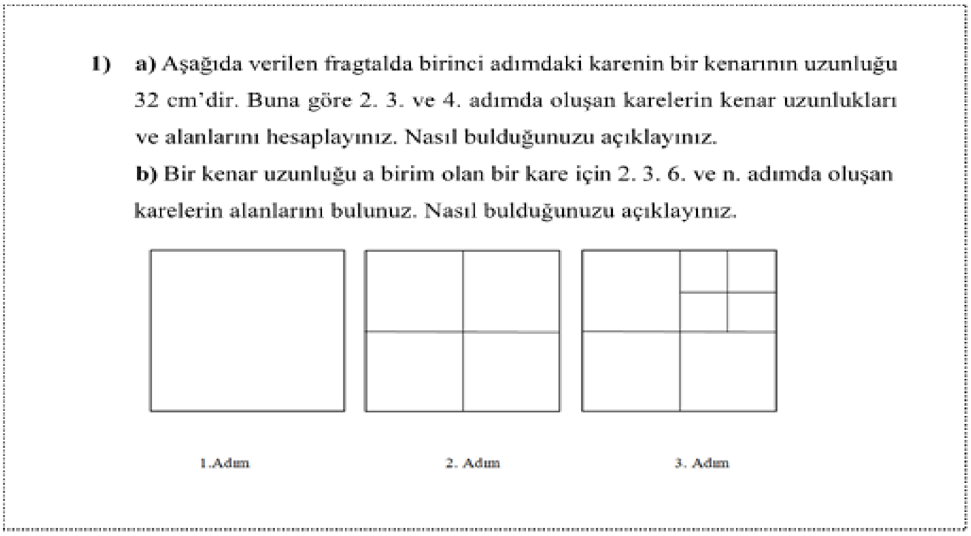
Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel örüntünün uzak adımı için yinelemeli muhakeme kullanmıştır. n kenarlı bir çokgen için yakın adımda bulduğu sonucun geçerli olduğunu ifade etmiştir. Şekil 3.81'de görüldüğü gibi beşgen için cebirsel bir çözüm yapmıştır.



Şekil 3.81. *Sibel'in kağıdı*

Şekil 3.81'de görüldüğü gibi yakın adımda yaptığı sayısal çözümü uzak adım için cebirsel ifadelerle tekrarlamıştır. Ancak yalnızca beşgen için cebirsel çözüm yapmış diğer çokgenler için derste öğrendiği formülü sayısal örnekler üzerinden doğrulamıştır.

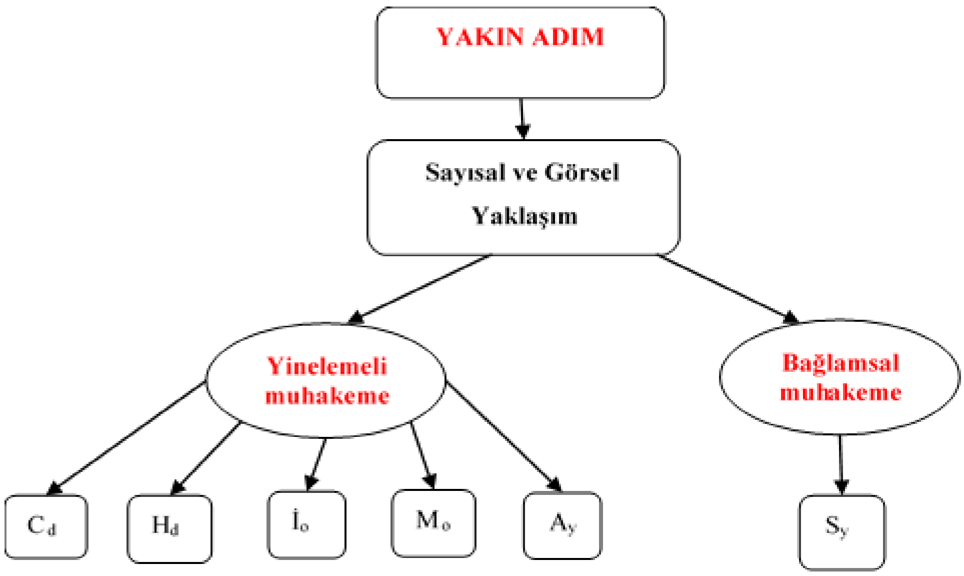
Örüntü ve genellemeler başlığı altında sorulan ikinci soru Şekil 3.82'de verilmiştir.


1) **a)** Aşağıda verilen fragtalda birinci adımdaki karenin bir kenarının uzunluğu 32 cm'dir. Buna göre 2. 3. ve 4. adımda oluşan karelerin kenar uzunlukları ve alanlarını hesaplayınız. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
b) Bir kenar uzunluğu a birim olan bir kare için 2. 3. 6. ve n. adımda oluşan karelerin alanlarını bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Şekil 3.82. *Örüntü ve genellemeler klinik görüşme ikinci sorusu*

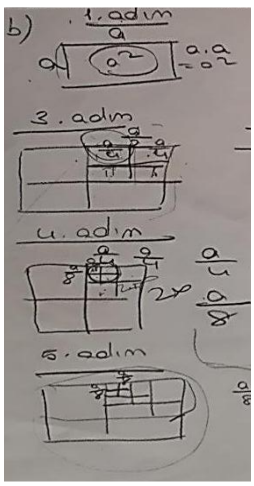
3.3.1.3. *Yakın adım*

Şekil 3.83'te verilen ikinci sorunun a şıkkında öğrencilerin tamamı görsel ve sayısal yaklaşım ile çözüm yapmış ve doğru sonuca ulaşmışlardır. Sorunun b şıkkında ise örüntünün yakın adımını bulmak için yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel bağlamsal muhakemeyi kullanmıştır. Diğer tüm öğrenciler sayısal ve görsel yaklaşım ile yinelemeli muhakemeyi kullanarak çözüm yapmıştır. Aşağıdaki Şekil 3.83'te öğrencilerin ikinci sorunun b şıkkında verilen örüntünün yakın adımını bulmak için kullandıkları stratejiler verilmiştir.



Şekil 3.83. *Örüntü ve genellemeler ikinci soru b şıkkı için öğrencilerin kullandıkları yakın adım stratejileri*

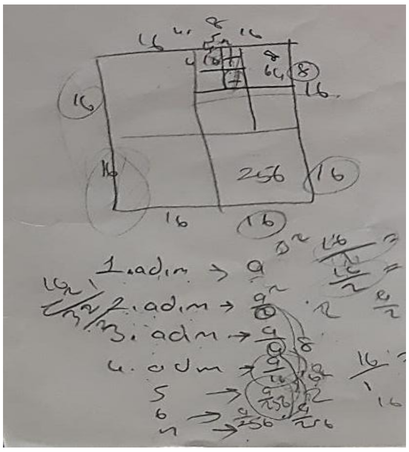
Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan ikinci sorunun b şıkkında verilen örüntünün yakın adımlarını Şekil 3.83'te görüldüğü gibi tek tek çizmiştir.



Şekil 3. 84. *Canan'ın kağıdı*

Şekil 3.84’te görüldüğü gibi, Canan örüntünün ilk beş adımını bir önceki adım ile ilişkilendirerek çizmiş ve yinelemeli muhakeme ile doğru sonuca ulaşmıştır.

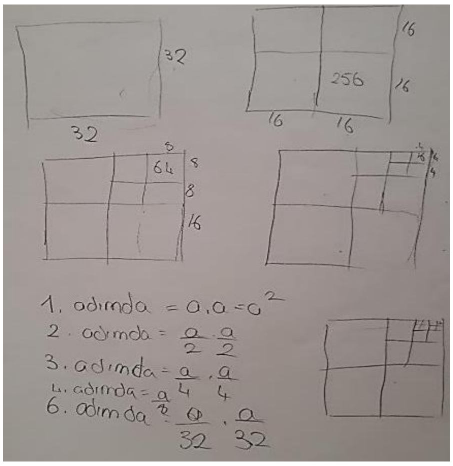
Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ikinci sorunun b şıkkında geçen örüntünün yakın adımında Şekil 3.85’te görüldüğü gibi bir şekil üzerinde ilk dört adımı çizmiştir.



Şekil 3.85. *Hilal’in kağıdı*

Dördüncü adımda Şekil 3.85’te görüldüğü gibi $\frac{a}{16}$ hatalı sonucunu bulmuş ancak daha sonra fark ederek $\frac{a}{8}$ olarak düzeltmiştir. $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{16}$ yinelemeli ilişkisini kurmuş ancak beşinci adımda $\frac{a}{256}$ hatalı ifadesini yazmıştır. Cebirsel ifadeleri yazarken a.a=a gibi hatalar yapmış ve örüntünün yakın adımı için istenen alanları a.a, $\frac{a}{2}.\frac{a}{2}$ ve $\frac{a}{4}.\frac{a}{4}$ olarak çarpım durumunda bırakmıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci örüntünün ilk altı adımını Şekil 3.86’da görüldüğü gibi çizmiş ve liste biçiminde doğru bir şekilde yazmıştır.



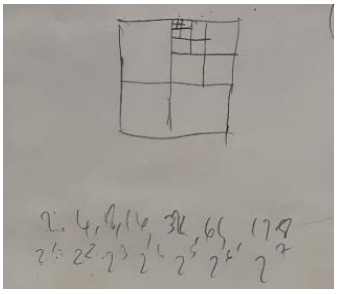
Şekil 3.86. *İnci’nin kağıdı*

Şekil 3.86'da liste biçiminde yazmış olduğu adımların paydasında 2, 4, 8, 16, 32 örüntüsünü oluşturmuş yakın adım için ikinin kuvvetleri ilişkisini fark etmiştir. Payda da oluşan sayı örüntüsünü adım sayısı ile ilişkilendiremediği için fonksiyonel ilişkiyi fark edememiş ve yakın adımda yinelemeli ilişki ile çözüm yapmıştır.

Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa Şekil 3. 87'de görüldüğü gibi, yakın adımda tek bir şekil üzerinde örüntünün adımlarını çizmiş ve 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 örüntüsünü fark etmiştir.

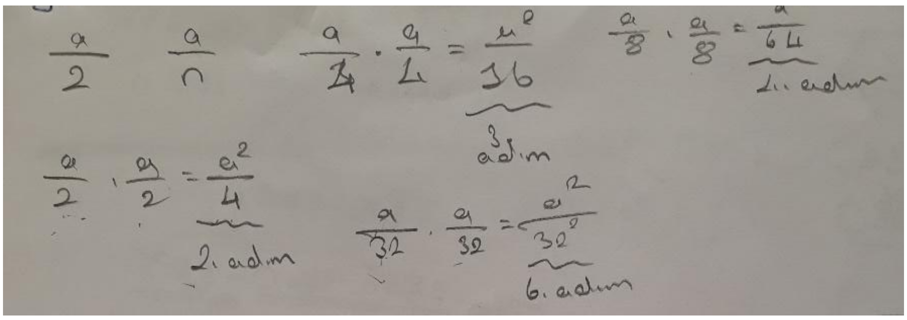
Bulmuş olduğu sayı örüntüsünü Şekil 3.87'de görüldüğü gibi ikinin kuvvetleri şeklinde yazmıştır. Yakın adımda yinelemeli muhakeme ile bulduğu bu ilişkiyi uzak adımda adım sayısı ile ilişkilendirmiştir.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye yakın adımda önce adımları tek tek çizmiştir.



Şekil 3.87. *Mustafa'nın kağıdı*

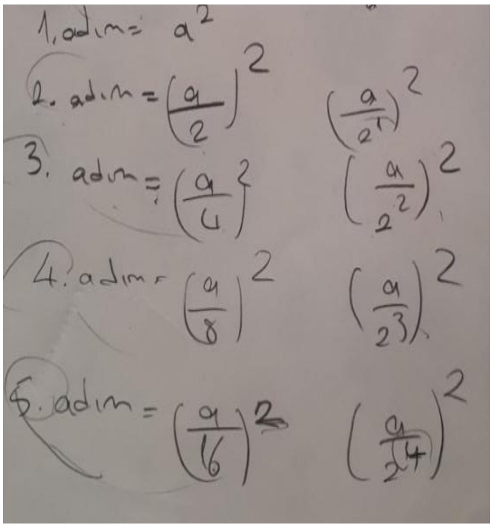
Daha sonra Şekil 3.88'de görüldüğü gibi adımlar arasında yinelemeli ilişki kurmuş ve her adımı bir önceki adımdan hareketle yazmıştır.



Şekil 3.88. *Asiye'nin kağıdı*

Kenar uzunluklarını Şekil 3.88'deki gibi çarparak alanları hesaplamıştır. Altıncı adıma her alanın kaçıncı adıma ait olduğunu yazmıştır. Yakın adım için yinelemeli muhakeme ile doğru sonuçları bulmuştur.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel ikinci sorunun b şıkkında verilen örüntünün yakın adımı için Şekil 3.89'da verilen listeyi oluşturmuştur.



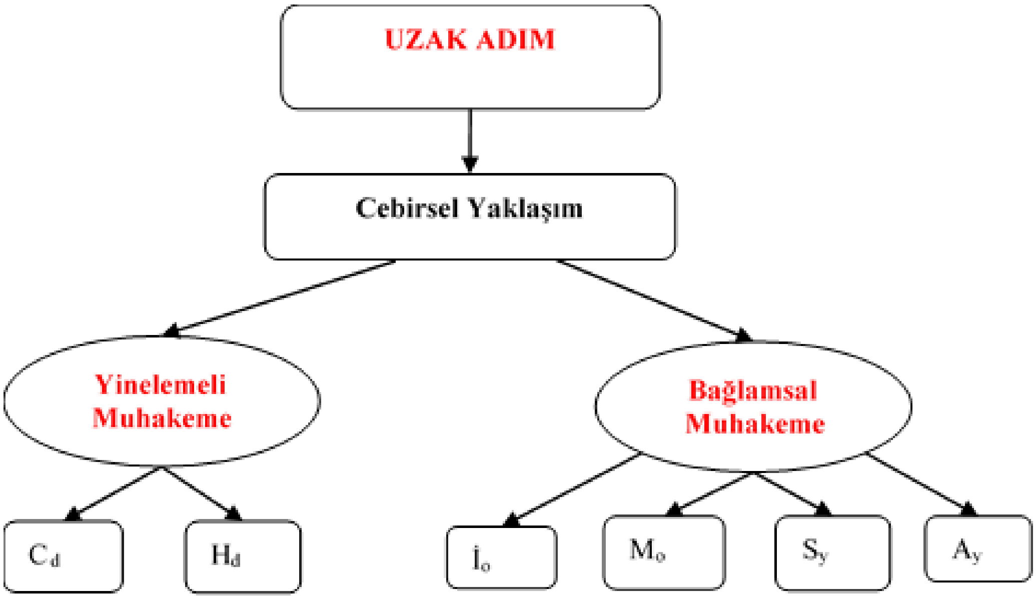
Şekil 3.89. *Sibel'in kağıdı*

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel sorunun yakın adımında daha önce a şıkkı için yaptığı sayısal çözümden yola çıkarak Şekil 3.89'daki listeyi oluşturmuştur. Şekil 3.87'de görüldüğü gibi adım sayıları ile paydalar arasında kalem izleri ile gösterdiği fonksiyonel ilişkiyi fark etmiştir. Adım sayısı ile kenar uzunluğu ve adım sayısı ile alan arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bağlamsal muhakemeyi kullanarak yazmıştır.

3.3.1.4. *Uzak adım*

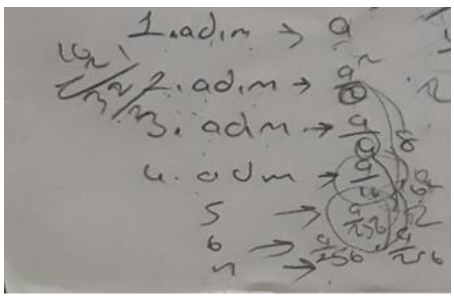
Örüntü ve genellemeler başlığı altında sorulan ikinci soru için öğrencilerden düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan uzak adımda genellemeye ulaşamamıştır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal uzak adımda yinelemeli muhakeme yapmış ancak genellemeye ulaşamamıştır. Sorunun çözümünde uzak adım için orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa ve İnci ile yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel bağlamsal muhakeme ile doğru genellemeye ulaşmıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye ise bağlamsal muhakeme kullanmış ancak doğru genellemeye ulaşamamıştır. Şekil 3.90'da öğrencilerin ikinci soruda verilen örüntünün uzak adımını bulmak için kullandıkları muhakeme türleri sunulmuştur.



Şekil 3. 90. *Örüntü ve genellemeler ikinci soru için öğrencilerin kullandıkları uzak adım stratejileri*

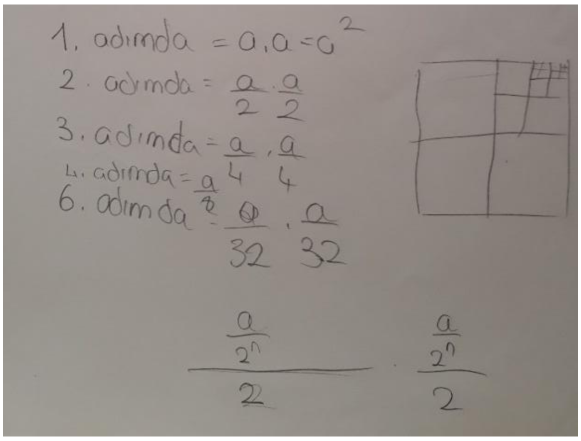
Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan uzak adımda genellemeye ulaşamamıştır. Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ise adım sayısı ile alan arasında Şekil 3.91'de verilen yinelemeli ilişkiyi keşfetmiştir.



Şekil 3.91. *Hilal'in kağıdı*

Şekil 3.91'de görüldüğü gibi a.a=a gibi cebirsel işlemlerde hatalar yapmıştır. Kenar uzunlukları arasında $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{16}$ yinelemeli ilişkisini kurmuştur. n. adımı a+ $\frac{2}{n}$ olarak ifade etmiş ve n'i kenar uzunluğu ile ilişkilendirmiştir. Yakın adımda kurduğu ilişkiyi uzak adım için genelleyememiştir.

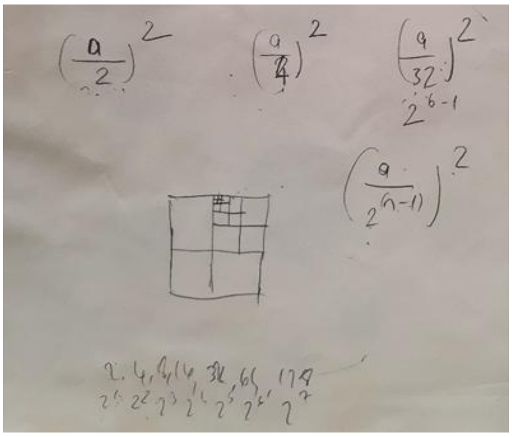
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip İnci ikinci soruda verilen örüntünün uzak adımını bulmak için adım sayısı ile kenar uzunluğu arasında bağlamsal muhakeme yapmıştır. Şekil 3.92'de görüldüğü gibi örüntünün altıncı adımına kadar bulduğu doğru sonuçlardan payda da 2, 4, 6, 8, 16, 32 ve 64 sayı örüntüsünü oluşturmuş ve ikinin kuvvetleri ilişkisi fark etmiştir.



Şekil 3.92. *İnci'nin kağıdı*

n. adım için önce $\frac{a}{2^n}$ ilişkisini kurmuştur. Örüntünün ikinci adımı için kontrol etmiş ve hatasını fark ederek örüntüyü tekrar incelemiştir. Yakın adımda yinelemeli yaklaşımla yarısı ilişkisini fark etmiş ve bağlamsal muhakeme ile uzak adımda kenar uzunluğu için $\frac{\frac{a}{2^n}}{2}$, alan için $\frac{\frac{a}{2^n}}{2} \cdot \frac{\frac{a}{2^n}}{2}$ ifadelerini yazarak genellemeye ulaşmıştır.

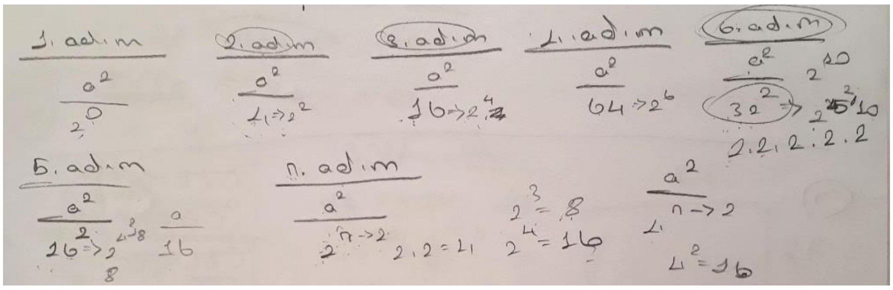
Orta cebirsel düşünme düzeyine sahip Mustafa yakın adımda oluşturduğu Şekil 3.93'te görülen örüntüde payda da 2, 4, 8, 16, 32, 64 ve 128 sayı örüntüsünü olduğunu fark etmiştir.



Şekil 3. 93. *Mustafa'nın kağıdı*

Şekil 3.93'te görüldüğü gibi payda da yer alan sayıları ikinin kuvvetleri şeklinde yazmıştır. n. adım için bulduğu bu ilişkiyi adım sayısı ile ilişkilendirmiştir. n. adımda oluşan karenin alanı için a kenar uzunluğu olmak üzere $\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)^2$ genellemesine ulaşmıştır.

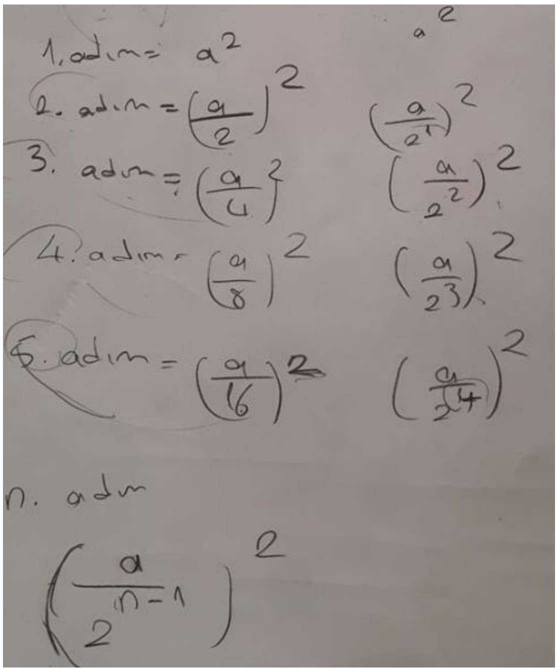
Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Asiye yakın adımda yinelemeli muhakeme ile alanlar arasında kurduğu ilişkiyi uzak adımda bağlamsal muhakeme ile adım sayısı ve alan arasında aramıştır. Şekil 3.94'te öğrencinin kağıdı verilmiştir.



Şekil 3.94. *Asiye'nin kağıdı*

Şekil 3.94'te görüldüğü gibi adım sayıları ile alanlar arasında fonksiyonel ilişki aramıştır. Ancak adım sayısı ile alan arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak yazmakta zorlandığı için hatalı cebirsel formüller yazmıştır. Bu nedenle n. adım için genellemeye ulaşamamıştır.

Yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel Şekil 3.95'te görüldüğü gibi örüntünün uzak adımı için liste yapmıştır.



Şekil 3.95. *Sibel'in kağıdı*

Yakın adım için yaptığı Şekil 3.95'te verilen listede adım sayısı ile alan arasında fonksiyonel ilişki aramıştır. Aşağıda öğrencinin uzak adımı bulmak için yaptığı açıklama verilmiştir.

Araştırmacı: n. adım için ne yapacağız şimdi?

Sibel: Bu ikisi arasındaki bağlantıyı bulmamız lazım. Şimdi burada 2'ye böldü 2^2'ye böldü. 2^3'e böldü. Şimdi şöyle yapacağım böyle $\frac{\frac{a}{2^1}}{2}$, $\frac{\frac{a}{2^2}}{2}$, $\frac{\frac{a}{2^3}}{2}$ bunu böyle yazacağım ama n. adımda bu adım sayısının 1 eksiği olmuş oluyor. O zaman n. Adımda $\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)^2$ buldum.

Araştırmacı: n neydi?

Sibel: Adım sayısı.

Araştırmacı: Şuralara ne dedin?

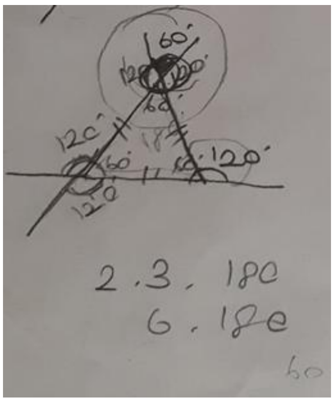
Sibel: Şöyle mesela üsleri 16'yı mesela çevirdim 5.adımda 4, 4.adımda 3, 3.adımda 2, 2. adımda 1 ise 1 eksilterek gidiyor. a bölü 2^{n-1} diyecek sonra onun karesini alacak.

Yukarıda verilen doğrudan alıntıda görüldüğü gibi yüksek cebirsel düşünme düzeyine sahip Sibel adlı öğrenci n. adım için bağlamsal muhakeme ile doğru genellemeye ulaşmıştır.

3.3.2. Örüntü ve genellemeler başlığı altında karşılaşılan kavramsal zorluklar

Araştırma kapsamında örüntü ve genellemeler başlığı altında öğrencilere yöneltilen sorularda geometri alanına ilişkin iç açı, dış açı, köşegen ve alan kavramları ele alınmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan dış açı kavramında zorluk yaşamıştır. Öğrenci bir geometrik şeklin dış açıları sayısının iç açıları sayısının iki katı olduğu gibi yanlış bir bilgiye sahiptir. Şekil 3.96'da öğrencinin üçgen geometrik şekli üzerinde göstermiş olduğu iç ve dış açılar görülmektedir.



Şekil 3. 96. *Canan'ın kağıdı*

Şekil 3.96’da görüldüğü gibi öğrenci bir iç açıya komşu olan iki açıyı da dış açı olarak belirlemiştir. Böylece üçgenin toplamda altı tane dış açıya sahip olduğunu ifade etmiştir. Araştırma kapsamında seçilen diğer beş odak öğrencinin tamamı bir geometrik şeklin iç açıları ve dış açıları kavramlarını doğru şekilde bilmektedir.

Köşegen kavramına ilişkin düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Canan’ın *“Köşegenler açıları 2 eş parçaya böldüğü”* gibi bir yanılgısı dikkat çekmiştir. Öğrenciye bu durumun her zaman geçerli olup olmadığı sorulduğunda *“Evet ama her zaman için geçerli değil. Bir çeşitkenar üçgende mesela eşit bölmeyebilir.”* yanıtını vermiştir. Öğrencinin üçgenin de köşegene sahip olduğu gibi bir yanılgısı da vardır. Diğer beş öğrenci köşegen kavramı ile ilgili bir sorun yaşamamıştır.

Bu başlık altında ele alınan diğer bir geometrik kavram alan kavramıdır. Örüntü ve genellemeler başlığı altında öğrencilere kare geometrik şeklinin alanı ile ilgili bir soru yöneltilmiştir. Araştırmaya katılan altı odak öğrenciden bu kavrama ilişkin herhangi bir kavramsal zorluk yaşayan olmamıştır. Öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre üçüncü düzeyde olmaları bu durumu doğrulamaktadır.

Araştırma kapsamında cebir ve cebirsel düşünmeye ilişkin olarak ise öğrencilerin muhakeme yaparken zorluklar yaşadığı görülmüştür. Örneğin; düşük cebirsel düşünmeye sahip Canan, hatalı geometri bilgisine bağlı olarak bir üçgenin üç iç ve altı dış açısı olduğunu kabul etmiş ve *“Üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı 180°, dış açıları ölçüleri toplamı 360^{0} olduğu için her zaman 2 katı olur”* hatalı orantısal muhakemesini yapmıştır.

Düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip Hilal ise verilen örüntünün uzak adımı için ezbere hatalı bir cebirsel ifade yazarak tahmin ve kontrol stratejisini kullanmıştır. Öğrenciden yazmış olduğu ifadeyi açıklaması istendiğinde *“Onu bir hatırlıyorum geçen senelerden bir şey bölü n-2 bölü galiba 360 öyle şeyi vardı. Oradan yola çıktım. Çünkü öyle baya soru çözmüştük aklımda kaldı.”* açıklamasını yapmıştır. Bu durum öğrencinin ezbere dayalı çözüm yaptığını buna bağlı olarak da cebirsel muhakeme ile ilgili zorluklar yaşadığının bir göstergesi olabilir.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan elde edilen bulgular ışığında ulaşılan sonuçlara ve bu sonuçların alanyazında yapılmış olan araştırmalar ile ilişkilerinin tartışılmasına, gelecekte yapılacak olan araştırmalar için önerilere yer verilmiştir.

4.1. Sonuç

- Araştırmadan elde edilen bulgular incelendiğinde tüm öğrencilerin verilen bir geometrik formülde değişkene değer vererek çözüm yaptığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu geometrik formülün yorumlanması istendiğinde ise düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik şekil çizerek, orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin cebirsel ifade gibi düşünüp değişkene değer vererek, yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise formülün geometrik anlamını yorumlayarak çözüm yaptıkları sonuçlarına ulaşılmıştır.
- Sadeleştirme ve yorumlama başlığı altında tüm öğrencilerin bir üçgenin kenar uzunluklarını temsil eden cebirsel ifadeler ile işlem yaparak üçgenin çevre uzunluğunu temsil eden cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde buldukları sonucuna ulaşılmıştır. Ancak bu cebirsel ifadelerin anlamını yorumlaya ilişkin bulgular incelendiğinde ise öğrencilerden düşük cebirsel düşünmeye sahip biri hariç hepsinin cebirsel ifadelerin geometrik anlamını doğru şekilde bildikleri ancak yalnızca orta ve düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin cebirsel ifadenin geometrik anlamını yorumlayabildikleri sonucuna ulaşılmıştır.
- Sözel ifadeye uygun denklem oluşturma ve çözme başlığına ilişkin bulgular incelendiğinde düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin verilen sözel geometrik ifadeler için doğru denklemleri oluşturamadığı ve oluşturdukları denklemleri doğru bir şekilde çözemedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise verilen sözel geometrik ifadelere uygun denklemleri doğru şekilde oluşturup doğru şekilde çözdükleri sonucu ortaya çıkmıştır.
- Araştırmaya katılan tüm öğrencilerin harfli ifadelerin anlamlarını yorumlamaya ilişkin kavram yanılgılarına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin tüm harfli ifadeleri "*bilinmeyen*" olarak adlandırdıkları, orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencileri ise bilinmeyen ve değişken kavramlarının tanımlarını yapabilmelerine rağmen

kavramları birbirleri yerine kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçlara ek olarak düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin harfli ifadelerin etiket anlamları ile bilinmeyen anlamlarını yorumlayamadıkları sonucu ortaya çıkmıştır.

- Düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometri problemlerinde geçen cebirsel ifadeleri bilinmeyen olarak tanımladıkları ve yalnızca sayısal değerlerine odaklandıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin cebirsel ifadeleri geometrik anlam olarak yorumladıkları ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise hem bilinmeyen hem de bilinmeyenin geometrik anlamını olarak yorumladıkları sonucuna ulaşılmıştır.
- Araştırma sürecinde semboller ve cebirsel ilişkiler başlığı altında öğrencilerin bağımlı-bağımsız değişkeni tanımlama ve ayırt etme, değişken ve etiket anlamı ayırt etme, değişken ve bilinmeyeni tanımlama ve ayırt etme, değişkenin anlamını belirleme (değişkenin alabileceği değerler kümesini tanıma) gibi kavramsal zorluklar yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.
- Geometri problemlerini çözerken öğrencilerin çoklu temsil kullanma ve temsiller arası geçiş yapma durumları incelendiğinde düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometri problemlerini çözerken öncelikli olarak sayısal, sözel ve şekil temsili kullanmayı tercih ettikleri, cebirsel temsilleri ise daha çok etiket anlam için kullandıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyi düşükten orta ve yükseğe doğru gittikçe sayısal, sözel ve şekil temsilleri yerine cebirsel temsil kullanmaya yöneldikleri sonucuna ulaşılmıştır.
- Geometri problemlerini çözerken öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyi arttıkça farklı çoklu temsilleri bir arada kullanabilme, temsiller arası geçiş yapabilme ve temsillerin geometrik anlamlarını doğru bir şekilde yorumlayabilme durumlarının arttığı sonucuna ulaşılmıştır.
- Araştırmada öğrencilere verilen bir geometrik formülü kullanırken sayısal değer verme yoluna gittikleri ve öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyi arttıkça geometri problemlerinde cebirsel temsil kullanmaya yöneldikleri sonucuna ulaşılmıştır.
- Öğrencilerin çoklu temsiller başlığı altında orantı kavramı ile ilgili kavramsal zorluk yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Düşük cebirsel düşünmeye sahip

öğrenciler orantı kavramını bilmedikleri için soruyu çözemezken orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin cebirsel ve sözel temsil kullanarak informal şekilde orantı sabitini tanımlamaya çalıştıkları sonucu ortaya çıkmıştır.

- Kavramların öğretilmesi sürecinde kullanılan prototip çizimler öğrenciler üzerinde kavram yanılgılarına neden olmaktadır (Clement, 2001). Bu durum araştırmaya katılan tüm öğrencilerin şekil temsili kullanırken prototip çizimlere yönelmeleri, geometrik ilişkileri yalnızca formül olarak ezbere ifade etmeleri ve "derste bu şekilde görmüştük" benzeri açıklamalar yapmaları sonucunu ortaya çıkarmıştır.
- Verilen örüntünün yakın adımını bulmak için tüm öğrencilerin sayısal ve görsel yaklaşımı, uzak adımını bulmak için ise cebirsel yaklaşımı kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır.
- Yakın adımda sayısal ve görsel yaklaşım bağlamında düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin tahmin ve kontrol, deneme-yanılma ve yinelemeli muhakeme; orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin tahmin ve kontrol ile yinelemeli muhakeme; yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise tahmin ve kontrol, deneme-yanılma, yinelemeli ve bağlamsal muhakeme yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır.
- Uzak adımda cebirsel yaklaşım bağlamında düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin tahmin ve kontrol, yinelemeli ve orantısal muhakeme; orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin orantısal, belirgin ve bağlamsal muhakeme; yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise yinelemeli ve bağlamsal muhakeme yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır.
- Geometri problemlerinde düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik ya da cebirsel eksikliklerinin örüntüde verilen ilişkiyi keşfetmelerini ve doğru genellemeye ulaşmalarını engellediği, orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik örüntüler ile çalışırken cebirsel düşünme becerilerini kullanmaya çalıştıkları ve eksik kaldıkları noktaları geometri bilgileri ile destekledikleri sonucuna ulaşılmıştır. Yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise geometri problemlerinde örüntüler ile çalışırken orta ve düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilere kıyasla sayısal değer verme ve geometrik

çözümler yapmanın yanında yakın ve uzak adımda fonksiyonel ilişki aradıkları, daha doğru cebirsel işlemler ile genellemelere ulaştıkları sonucuna ulaşılmıştır.

4.2. Tartışma

Araştırma sonuçları; semboller ve cebirsel ilişkiler, çoklu temsiller ile örüntü ve genellemeler olmak üzere üç başlık altında tartışılmıştır.

4.2.1. Semboller ve cebirsel ilişkilere ilişkin tartışma

Formülü kullanma ve yorumlama altında cebirsel düşünme düzeyi ne olursa olsun tüm öğrencilerin verilen formülde değişkene değer vererek çözüm yapma yoluna gittiği dikkat çekmiştir. Bu durum öğrencilerin aritmetik alışkanlıklarını ileri seviyelerde de devam ettirdiklerinin bir göstergesi olarak ele alınabilir (Blonton ve Kaput, 2004; Waren, 2005; Baş, Erbaş ve Çetinkaya, 2011). Formülü yorumlamalarına ilişkin soruda ise düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik şekil çizdiği ve geometri bilgilerinden yaralanarak sayısal açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Orta cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler formülü cebirsel bir ifade olarak ele alıp değer verme yolu ile açıklama yaparken yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik yorum ile açıklama yaptıkları görülmüştür. Araştırma bulguları incelendiğinde, öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri arttıkça cebirsel ifadelerin geometrik anlamlarını yorumlamaya yöneldikleri ortaya çıkan sonuçlardandır. Bu durum cebirsel düşünme düzeyleri arttıkça cebirsel ifadelerin anlamlarını yorumlayabilmeleri bakımından alanyazındaki araştırmalar ile benzerlik göstermektedir (Tirosh, Even ve Robinson, 1998; MacGregor ve Stacey, 1997).

Sadeleştirme ve yorumlamaya ilişkin bulgular incelendiğinde sekizinci sınıf düzeyinde düşük, orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin tamamının kenar uzunlukları cebirsel ifade olarak verilen bir geometrik şeklin çevresinin uzunluğunu cebirsel ifadelerle işlem yaparak doğru bir şeklinde hesaplayabildikleri ve sadeleştirebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Cebirsel ifadelerin anlamını yorumlamaya ilişkin bulgular incelendiğinde ise öğrencilerden düşük cebirsel düşünmeye sahip biri hariç hepsinin cebirsel ifadelerin geometrik anlamını doğru şekilde bildikleri ancak yalnızca orta ve düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin cebirsel ifadenin geometrik anlamını yorumlayabildikleri görülmüştür. Bu durum geometrik düşünme düzeyleri aynı olmasına karşın cebirsel düşünme düzeyi düşük olan öğrencilerin geometri-cebir ilişkilendirmesi yapamadığını ancak cebirsel düşünme düzeyi orta ve yüksek olan öğrencilerin bu ilişkilendirmeyi doğru bir şekilde yapabildiği sonucunu ortaya çıkarmıştır. Cebirsel düşünme düzeylerine göre öğrencilerin geometri-cebir ilişkilendirme durumlarını ortaya çıkarması açısından bu sonuç önemlidir. Ayrıca bu durumun derslerde cebirsel ifadeler ile işlemler konusu işlenirken öğretmenlerin ezbere ve kurala dayalı öğretimler yapmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Kaput (1999)'un çalışmasında ortaya çıkan öğrencilerin cebirsel ifadelerin anlamlarına bakmaksızın ezbere dayalı işlemler yaparak doğru sonuçlara ulaşsalar dahi elde etikleri cebirsel ifadelere ilişkin yorum yapmada başarısız olma sonucu bu düşünceyi destekler nitelikledir.

Araştırmada sözel bir ifadeye uygun denklem oluşturma ve çözmeye ilişkin bulgular incelendiğinde yüksek ve orta cebirsel düşünme düzeyine sahip öğrencilerin geometri problemlerini çözerken sözel duruma uygun bir eşitlik yazabildiği ancak düşük cebirsel düşünme düzeyine sahip öğrencilerin yazamadığı sonucu ortaya çıkmıştır. Bu sonuç geometrik ilişkiden bağımsız olarak sözel bir duruma uygun denklem kurma ve çözme açısından Kieran (1992), Stacey ve MacGregor (1997), Özarslan (2010), Kaya ve diğerleri (2016) çalışmalarından elde edilen sonuçlar ile benzerdir. Sözel bir duruma uygun denklem oluşturma ve çözme koduna ilişkin düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin öncelikli olarak deneme-yanılma yöntemini kullandıkları da dikkat çekmiştir. Bu duruma ilişkin olarak ise Baş, Erbaş ve Çetinkaya (2011) ve Bal ve Karacaoğlu (2017) çalışmalarında ulaşılan, öğrencilerin cebirsel ve fonksiyonel düşünmeleri gelişse de aritmetiksel işlemlere yatkınlıklarının olduğu sonuçları ile benzerlik göstermektedir.

Harfli ifadelerin anlamlarını yorumlamaya ilişkin bulgular incelendiğinde araştırmaya katılan öğrencilerin harfli ifadeleri değişken ya da bilinmeyen olarak adlandırdıkları ancak bu ifadelerin anlamlarını birbirlerinin yerine kullandıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin araştırma sürecinde harfli ifadelerin tümünü bilinmeyen olarak adlandırdıkları görülmüştür. Bu durum Kuchemann'ın (1981) yaptığı çalışmasında değişkenleri bilinmeyen olarak tanımladıkları sonucu ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometri problemlerinde yer alan yalnızca küçük harflerin değişken ve bilinmeyen olarak kullanılabileceğini düşünmekte yani geometri problemlerinde bulunan harfli ifadelerin etiket anlamı ile değişken anlamlarını ayırt edememektedirler. Orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler ise harfli ifadelerin etiket anlamları ile değişken anlamlarını ayırt edebilmektedirler. Bu sonuç Kuchemann (1978), Rosnick (1981) ile Stacey ve MacGregor (1997) gibi araştırmacıların çalışmaları ile paralellik göstermektedir. Öğrencilerin değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin yanılgılarının sebebi öğretmenlerin sınıf içinde konuyu anlatırken değişken ve bilinmeyen kavramlarını birbiri yerine kullanmalarından kaynaklanıyor olabilir. Buna ek olarak; okullarda kullanılan ders kitaplarında bu kavramlara ilişkin yanlış kullanımlar da bu durumun sebepleri arasında gösterilebilir. Nitekim alanyazında öğretmenler, öğretmen adayları ve ders kitapları üzerine yapılan Tanışlı (2013), Tanışlı ve Köse (2013), Yeşildere ve Akkoç (2011) ile Blanton ve Kaput (2011) çalışmalarında da cebirsel düşünmenin gelişiminde bu unsurların önemine vurgu yapmışlardır.

Araştırma sürecinde semboller ve cebirsel ilişkiler başlığı altında öğrencilerin bağımlı-bağımsız değişkeni tanımlama ve ayırt etme, değişken ve etiket anlamı ayırt etme, değişken ve bilinmeyeni tanımlama ve ayırt etme, değişkenin anlamını belirleme (değişkenin alabileceği değerler kümesini tanıma) gibi kavramsal zorluklar yaşadıkları sonucu alan-yanında yapılan birçok araştırma ile benzerlik göstermektedir (Kuchemann, 1978; Rosnick, 1981; Stacey ve MacGregor, 1997; Kieran ve Sfard, 1999). Dede, Yalın ve Argün'ün (2002) buldukları; öğrencilerin değişkenin anlamını ve farklı kullanımlarını bilmeme, değişkenleri yorumlayamama ve değişken ile işlem yapamama sonucu ile paraleldir. Ayrıca Övez ve Çınar'ın (2018) çalışmalarında öğrencilerin %75'inin problemlerde verilen cebirsel ifadelerdeki harfleri değişken olarak algılayamadıkları sonucu ile de benzerlik göstermektedir.

4.2.2. Çoklu temsillere ilişkin tartışma

Düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometri problemlerinin çözümünde sayısal temsilden şekil temsiline ya da sözel temsilden şekil temsiline geçiş yapabildikleri, cebirsel temsili bağımsız bir şekilde kullanabildikleri ancak şekil temsilinden cebirsel temsile geçişte başarışız oldukları sonucu ortaya çıkmıştır. Ayrıca bu öğrencilerin cebirsel temsilden şekil temsiline geçiş yapabildikleri ancak cebirsel temsilin geometrik anlamını hatalı yorumladıkları gözlemlenmiştir. Orta cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler ile yüksek cebirsel düşünmeye sahip bir öğrencinin sayısal temsilden cebirsel temsile ve şekil temsilinden cebirsel temsil ile şekil temsiline geçiş yapabildikleri, ancak düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler ile benzer olarak cebirsel temsilin geometrik anlamını hatalı yorumladıkları gözlemlenmiştir. Yüksek cebirsel düşünmeye sahip diğer öğrencinin ise temsiller arası geçişleri hatasız şekilde yapabildiği ve cebirsel temsilin geometrik anlamını doğru bir şekilde yorumladığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçlar Crowley, Thomas ve Tall (1994) ile Radford (2002) araştırma sonuçları ile benzerlik göstermektedir. Öğrencilerin temsiller arası geçiş yapmada başarısız olmalarının derslerde öğretmenlerin bu konu üzerinde yeterince durmamaları ve öğrencilerin yeterince örnek üzerinde çalışmamalarından kaynaklı olabileceği düşünülmektedir. Nitekim Eroğlu ve Tanışlı (2015) ile Eroğlu (2016)'nın öğretmenler ile yapmış oldukları araştırmada öğretmenlerin temsiller arası geçiş yapmada yetersiz oldukları sonucu bu düşünceyi destekler niteliktedir.

Araştırmaya katılan tüm öğrenciler verilen geometrik bir durumu açıklarken formüle dayalı açıklamalar yapmışlardır. Düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler açıklamalarında sayısal ve şekil temsili kullanırken orta cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler sözel, sayısal ve şekil temsilinin yanı sıra etiket anlamında cebirsel temsil kullanmışlardır. Yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin ise şekil ve sayısal temsil üzerinde cebirsel temsil ile açıklama yaptıkları gözlemlenmiştir. Bu durum cebirsel düşünme düzeyi arttıkça öğrencilerin geometri problemlerinde cebirsel temsil kullanmaya yöneldikleri sonucunu ortaya çıkarmıştır. Bu sonucun öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine göre, geometri sorularında cebirsel temsil kullanma durumlarını ortaya çıkarması bakımından önemli olduğu düşünülmektedir.

Öğrencilerin çoklu temsiller başlığı altında orantı ve orantı sabiti kavramları ile ilgili kavramsal zorluk yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler orantı kavramını bilmedikleri için soruyu çözemezken orta ve yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin cebirsel ve sözel temsil kullanarak informal şekilde orantı sabitini tanımlamaya çalıştıkları sonucu ortaya çıkmıştır. Ayrıca Postelnicu (2011)'nun da belirttiği gibi öğrencilerin doğrusallık kavramına ilişkin zorluklar yaşadığı görülmüştür. Bu kavrama ilişkin yaşadıkları zorluk verilen cebirsel eşitliğin geometrik anlamını yorumlamalarını ve cebirsel temsilden şekil temsiline geçiş yapmalarını engellemiştir. Bu sonuca paralel olarak Kalkan (2014) sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapılarını incelediği çalışmasında sekizinci sınıf öğrencilerinin doğrusal ilişki ve doğrusallık kavramlarına ilişkin kavram yanılgıları olduğu ve bu kavramsal yanılgılara bağlı olarak öğrencilerin cebirsel muhakeme yapmada zorlandıkları sonucunu ortaya koymuştur.

Kavramların öğretilmesi sürecinde kullanılan prototip çizimler öğrenciler üzerinde kavram yanılgılarına neden olmaktadır (Clement, 2001). Bu durum öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeyi 2 olsa da şekil temsili kullanırken prototip çizimlere yönelmeleri, geometrik ilişkileri yalnızca formül olarak ezbere ifade etmeleri ve "derste bu şekilde görmüştük" benzeri açıklamalar yapmaları sonucunu ortaya çıkarmıştır.

4.2.3. Örüntü ve genellemelere ilişkin tartışma

Örüntü ve genellemeler başlığı altında öğrencilerin yakın adım ve uzak adım için kullandıkları genelleme stratejileri, alanyazında konu ile ilgili yapılan araştırmaların (Becker ve Rivera, 2005; Rivera ve Becker, 2007; Radford, 2008; Chua ve Hoyles, 2010; Tanışlı ve Köse, 2011; Tanışlı, Köse ve Camcı, 2017) bulguları ışığında incelenerek değerlendirilmiştir. Araştırma kapsamında örüntü ve genellemeler başlığı altında öğrenciler uzak ve yakın adım için farklı stratejiler kullanmışlardır. Verilen örüntünün yakın adımını bulmak için tüm öğrencilerin sayısal ve görsel yaklaşımı, uzak adımını bulmak için ise cebirsel yaklaşımı kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç öğrencilerin yakın adım için öncelikli olarak sayısal yaklaşıma yönelmeleri bakımından Chua ve Hoyles (2010), Yeşildere ve Akkoç (2011), Tanışlı (2016) ve Tanışlı, Köse ve Camcı (2017) araştırmaları ile benzerlik göstermektedir.

Düşük cebirsel düşünmeye sahip bir öğrencinin hatalı geometri bilgisinin verilen örüntüdeki ilişkiyi fark etmesini engellediği görülmüştür. Bu durum öğrencinin örüntünün yakın adımında hatalı orantısal muhakeme yapmasına ve bu hatayı uzak adıma taşımasına neden olmuştur. Benzer şekilde öğrencinin bir başka sorunun yakın adımında cebirsel işlemlerde yaptığı hata verilen örüntüdeki ilişkiyi fark etmesini engellemiş ve uzak adımda da hatasını devam ettirmesine neden olmuştur. Düşük cebirsel düşünmeye sahip diğer bir öğrencinin de örüntünün yakın adımında ezbere dayalı geometri bilgisi ile işlem yapması geometrik örüntüdeki ilişkiyi fark etmesini ve genellemeye ulaşmasını engellemiştir. Bu iki durum alanyazında birçok araştırmada olduğu gibi (Herbert, K. ve Brown, R. 1997; Tanışlı, 2008; Kabael ve Tanışlı, 2010) geometri problemlerinde düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik ya da cebirsel eksiklikler nedeni ile örüntüde verilen ilişkiyi keşfetmelerini ve doğru genellemeye ulaşmalarını engellediği sonucunu ortaya çıkarmıştır.

Orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik örüntüler ile çalışırken yakın adımda sayısal değer verme ve geometri bilgisi ile çözüm yapma yoluna gittikleri görülmüştür. Bu düzeydeki her iki öğrenci de Becker ve Rivera (2005), Chua ve Hoyles (2010), Yeşildere ve Akkoç (2011) ve Tanışlı (2016) çalışmalarına benzer şekilde yakın adımda geometrik temsiller çizerek sayısal ve görsel yaklaşım için yinelemeli yaklaşım kullanmışlardır. Örüntülerin uzak adımında ise fonksiyonel ilişki kurmaya çalışmışlar ancak çoğunlukla başarılı olamamışlardır. Örüntülerin uzak adımları için yakın adımda olduğu gibi geometri bilgisi yardımı ile genellemeye ulaştıkları görülmüştür. Bu bağlamda orta cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik örüntüler ile çalışırken cebirsel düşünme becerilerini kullanmaya çalıştıkları ve eksik kaldıkları noktaları geometri bilgileri ile destekledikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonucun öğrencilerin verilen örüntüye ilişkin fonksiyonel ilişki ararken geometri bilgilerini kullanma durumlarını ortaya çıkarması bakımından önemli olduğu düşünülmektedir.

Yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrenciler geometrik örüntüler ile çalışırken yakın adımda geometri bilgisine dayalı çözüm yapmışlardır. Bununla birlikte yüksek cebirsel düşünmeye sahip bir öğrencinin verilen örüntünün yakın adımı için fonksiyonel ilişki kurduğu görülmüştür. Diğer öğrenci ise yakın adımda fonksiyonel ilişki aramış ancak cebirsel işlemlerde yaptığı bir hata nedeni ile fonksiyonel ilişkiyi kurmada başarısız olmuştur. Bu öğrenci örüntünün yakın adımını geometri bilgisi ile çözdükten sonra aynı örüntünün uzak adımı için çalışırken hatasını fark etmiş ve uzak adımda fonksiyonel ilişkiyi keşfetmiştir. Yüksek cebirsel düşünmeye sahip her iki öğrenci de geometrik örüntülerin uzak adımı için fonksiyonel ilişki aramışlar ve cebirsel çözüm yapmışlardır. Tüm bu durumlar göz önüne alındığında yüksek cebirsel düşünmeye sahip öğrencilerin geometrik örüntüler ile çalışırken orta ve düşük cebirsel düşünmeye sahip öğrencilere kıyasla sayısal değer verme ve geometrik çözümler yapmanın yanında yakın ve uzak adımda fonksiyonel ilişki aradıkları, daha doğru cebirsel işlemler ile genellemelere ulaştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç; Becker ve Rivera (2005)'nın cebirsel örüntülerle çalışırken görsel stratejileri kullanan öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri fark etmede ve genellemeye ulaşmada daha başarılı oldukları sonucu ile benzerlik göstermektedir.

4.3. Öneriler

Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme bağlamında, geometri çalışmalarında semboller ve cebirsel ilişkileri, örüntüler ve genellemeleri, çoklu temsilleri nasıl kullandıklarını ve bu süreçte ortaya çıkan kavramsal zorlukları belirlemeyi amaçlayan bu çalışmanın uygulamasına yönelik öneriler ve gelecekte yapılacak olan çalışmalara yönelik öneriler bu başlık altında verilmiştir.

4.3.1. Uygulamaya yönelik öneriler

- Araştırma sonuçlarına göre cebirsel düşünmenin matematiğin tüm alanları ile olduğu gibi geometri alanı ile de önemli ölçüde ilişkili olduğu görülmüştür. Ancak öğrencilerin geometri problemlerini çözerken cebirsel düşünme basamaklarını kullanmalarına yönelik eksiklikler olduğu dikkat çekmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin geometri problemlerinde cebirsel düşünme basamaklarını daha etkin şekilde kullanabilmeleri için öncelikle matematik dersi öğretim programı, derslerde kullanılan materyaller ve ders kitaplarının semboller ve cebirsel ilişkiler, çoklu temsiller ve örüntü ve genellemeler başlıklarına uygun olarak düzenlenmesi önerilmektedir.
- Araştırmada öğrencilerin prototip kullanımlara sahip olduğu ve "derslerde böyle görmüştük, öğretmenimiz kuralı böyle vermişti" gibi açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Bu durum öğretmenlerin de eğitim- öğretim sürecinde eksiklikleri olabileceği ipucunu vermiştir. Bu bağlamda bu eksiklikleri gidermek amacıyla öğretmen eğitimleri sürecinden yani eğitim fakültelerinden başlanarak araştırma sürecinde özellikle dikkati çeken; prototip kullanımı, ezbere dayalı eğitim, kavram yanılgıları, temsil kullanımı ve temsiller arası geçiş gibi konularda eksikliklerin giderilmesi önerilmektedir.
- Araştırma sürecinde ortaya çıkan geometrik ve cebirsel kavram yanılgıları ve zorluklar göz önüne alınarak sınıf içinde bu eksiklikleri giderici etkinlikler ve çalışmalar yapılması önerilmektedir.

4.3.2. İleri araştırmalara yönelik öneriler

- Araştırma kapsamında ilköğretim 8. sınıf öğrencileri ile çalışılmıştır. Konu alanlarının uygunluğuna göre ilköğretim ya da ortaöğretimin farklı sınıf seviyelerine yönelik çalışmalar yapılabilir.
- Araştırma kapsamında altı odak öğrenci ile çalışılmıştır. Odak öğrenci sayısı artırılarak araştırma kapsamı genişletilebilir.
- Gelecek araştırmalar, farklı geometrik düşünce düzeylerine sahip öğrenciler ile geometrik düşünme düzeyleri ve cebirsel düşünme düzeyleri karşılaştırılarak yapılabilir.
- Farklı araştırma yöntemleri kullanılarak öğrencilerin geometri çalışmalarında cebirsel düşünme basamaklarını nasıl kullandıkları araştırılabilir.

- Öğrencilerin cebirsel düşünme basamaklarını kullanma durumları matematiğin diğer konu alanları için incelenebilir.

KAYNAKÇA

Akkan, Y. Baki, A. ve Çakıroğlu, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online, 10*(3), 812-823. http://dergipark.ulakbim.gov.tr/ilkonline/article/view/5000037912/5000036770. (Erişim tarihi: 12.11.2015)

Akkan, Y. ve Baki, A. (2016). Ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi: sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı. *Journal of Bayburt Education Faculty*, *11*(2), 270-305. http://dergipark.gov.tr/download/article-file/296087. (Erişim tarihi: 27.03.2018)

Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan ve Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde (s. 43-64). Ankara: Pegem Akademi.

Alkan, H. ve Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25*(3), 221-236. http://dergipark.ulakbim.gov.tr/gefad/article/viewFile/5000078707/5000072927. (Erişim tarihi: 25.10.2015)

Altun, M. (2005). *Matematik Öğretimi.* (Dördüncü Baskı). Bursa: Alfa Akademi.

Bağdat, O. (2013). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Osmangazi Üniversitesi.

Bal, A. P. (2012). Öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri ve geometriye yönelik tutumları. *Eğitim Bilimleri Araştırma Dergisi*, *2*(1), 17-34.

Bal, A.P. ve Karacaoğlu, A. (2017). Cebirsel sözel problemlerde uygulanan çözüm stratejilerinin ve yapılan hataların analizi: ortaokul örneklemi. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 26* (3), 313-327. http://dergipark.gov.tr/cusosbil/issue/33225/382578 (Erişim Tarihi: 19.10.2018)

Banchoff, T. (2008). Algebra and geometry: From two to three dimensions. B. Dougherty (Ed.), *Future curricular Trends in school algebra and geometry* içinde (s. 99- 110). USA: Information Age Publishing Inc.

Becker, J. R. and Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 121-128.

Blanton, M. L. and Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *Proceedings of the 28th Conference of* the *International*

Group For The Psychology Of Mathematics Education. USA: University of Massachusetts Dartmouth, 135-142.

Blanton, L. M. and Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412- 446. http://www.jstor.org/stable/30034944?seq=1#page_scan_tab_contents. (Erişim tarihi: 22.10.2015)

Blanton, M. L. and Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer, Berlin, Heidelberg.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. and Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Chua, B. L., and Hoyles, C. (2010). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalising problem?. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 71-72.

Clement, L. (2001). What do students really know about functions? *The Mathematics Teacher, 94* (9), 745.

Crowley, L., Thomas, M. and Tall, D. (1994). Algebra, symbols, and translation of meaning. In *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 240-247.

Dane, A., Çetin, Ö. F., Özturan Sağırlı, M. ve Baş, F. (2015). Cebirsel ifade, geometrik şekil ve geometrik yer arasındaki ilişkiler: doğru parçası ve ışın örneği. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, *26*(2015) 44-61. http://zgefdergi.com/Makaleler/1797821642_3Dane_Cetin_OzturanSagirli_Bas.Pdf (Erişim Tarihi: 08.10.2018) DOI: 10.14582/DUZGEF.575

Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi,* 24, 180-185.
http://dergipark.ulakbim.gov.tr/hunefd/article/view/5000048765/5000046085. (Erişim tarihi: 21.10.2015)

Dede, Y., Yalın, H. İ., ve Argün, Z. (2002). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanılgıları. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 16-18.

Dindyal, J. (2003). *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. USA: Illinois State University, Department of Mathematics.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers, grades 6-10.* USA: Heinemann.

Eroğlu, D. ve Tanışlı, D. (2015). Ortaokul matematik öğretmenlerinin temsil kullanımına ilişkin öğrenci ve öğretim stratejileri bilgileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *9*(1), 275-307.

Eroğlu, D. (2016). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin tahmini öğrenme yollarına dayalı öğretimlerindeki pedagojik yollarının desteklenmesi* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi

Fuys, D., Geddes, D. and Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3. http://www.jstor.org/stable/pdf/749957.pdf. (Erişim tarihi: 16.11.2015)

Grandau, L. and Stephens, A. C. (2006). Algebraic thinking and geometry. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(7), 344-349.

http://labweb.education.wisc.edu/~knuth/taar/papers_rep_pub/MTMS2006_geo metry.pdf. (Erişim tarihi: 12.01.2016)

Greenes, C. and Findell, C. (1998). *Groundworks: Algebra puzzles and problems (Grades 4, 5, 6 and 7).* Chicago: Creative Publications.

Gürbüz, R., ve Akkan, Y. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin karşılaştırılması: Denklem örneği. Egitim ve Bilim, 33(148), 64-76.

Herbert, K. and Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 340-345.

Incikabı, S. (2017). Çoklu temsiller ve matematik ögretimi: Ders kitapları üzerine bir inceleme. *Cumhuriyet International Journal of Education*, *6*(1), 66. https://search.proquest.com/openview/39d648987266d766a269d1ce063461dd/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2042728 (Erişim tarihi: 14.08.2017)

İlhan, M., Oral, B ve Kınay, İ. (2013). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *34*(34), 33-46.

Janvier, C. (1985). Conceptions and Representations: The Circle as an Example. *American Educational Research Association'*da sunulan bildiri. Chicago, IL: İllinois Üniversitesi. https://eric.ed.gov/?id=ED259948 (Erişim tarihi: 14.08.2017)

Jones, K. (2010). Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum. B. Dougherty (Ed.), *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry* içinde (s. 203-215). USA: Information Age Publishing Inc.

Kabael, T. U. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, 9(1) 213-228. http://dergipark.ulakbim.gov.tr/ilkonline/article/download/5000038101/5000036958 (Erişim tarihi: 23.09.2015)

Kaf Y. (2007). *Matematikte Model Kullanımının 6. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Erişilerine Etkisi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Hacettepe Üniversitesi

Kalkan, B.D. (2014). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları,* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kaput, J. J. (1999) Teaching and learning a new algebra. E. Fennema ve T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* içinde (s.133-155. Mahwah: Erlbaum.

Kaya, D. ve Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisini önemi. *İnternational Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education,* 3(2). http://www.iojpe.org/ojs/index.php/IJTASE/article/view/299/384. (Erişim tarihi: 12.11.2015)

Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D., ve Erkuş, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakeme becerilerine yönelik başarı düzeyi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *7*(1), 142-163.

Kılıç, Ç. (2009). *İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Problemlerin Çözümlerinde Kullandıkları Temsiller.* Yayımlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Kılıç, Ç. (2016). Analyzing middle school students' figural pattern generating strategies dependıng on a linear number pattern/ortaokul öğrencilerinin lineer sayı örüntüsüne bağlı olarak şekil örüntüsü oluşturma stratejilerinin analizi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 12*(6), 1205-1230.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. P. Nesher ve J. Kilpatrick (Editörler), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (s. 97-136). New York: Cambridge Üniversitesi Yayınları. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007 (Erişim Tarihi: 05.12.2017)

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* içinde (s.390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. and Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(1), 1-17. https://www.researchgate.net/profile/Anna_Sfard/publication/234603435_Seeing_through_Symbols_The_Case_of_Equivalent_Expressions/links/54113ef90cf2df04e75d73a0.pdf. (Erişim tarihi: 10.12.2015)

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/profile/Carolyn_Kieran/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it/links/53d6e3110cf220632f3df08a.pdf. (Erişim Tarihi: 09.11.2015)

Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. *Submitted for Algebraic Concepts in the Middle School*, 1-11. https://mathandteaching.org/uploads/Articles_PDF/articles-01-kriegler.pdf Erişim tarihi: 21.12.2015)

Köse, N. Y. ve Tanışlı, D. (2015). İlköğretim matematik ders kitaplarında eşit işareti ve ilişkisel düşünme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 5*(2), 251-277.http://dergipark.gov.tr/balikesirnef/issue/3373/46561 (Erişim Tarihi: 05.06.2017)

Küchemann, D. (1978).Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7 (4), 23-26. http://www.jstor.org/stable/30213397 (Erişim Tarihi: 26.05.2018)

Liamputtong, P. (2009). Qualitative data analysis: conceptual and practical considerations. *Health Promotion Journal of Australia*, 20 (2), 133-139.

MacGregor, M. and Stacey, K. (1997). Students' understandıng of Algebraic Notation: 11–15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013). *Ortaokul Matematik Dersi 5-8. Sınıflar Öğretim Programı.* Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2015). *İlkokul Matematik Dersi 1-4. Sınıflar Öğretim Programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018). *Matematik Dersi Öğretim Programı(İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7ve 8. Sınıflar)*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation: Revised and expanded from qualitative research and case study applications in education.* San Franscisco: Jossey-Bass.

Miles M. and Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis.* California: Sage Publications.

Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, 35(138), 365.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in mathematics*, *47*(2), 175-197. https://link.springer.com/content/pdf/10.1023%2FA%3A1014596316942.pdf (Erişim tarihi:08.08.2017)

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Napitupulu, B. (2001). *An exploration of students' understanding and Van Hieles of thinking on geometric constructions.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Canada: Simon Fraser University.

Övez, F. T. D. ve Çınar, B. A. (2018). Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin cebir bilgileri ve cebirsel düşünme düzeylerinin problem kurma becerileri açısından incelenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *20*(1), 483-502.

Özarslan, P. (2010). *İlköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemleri denklem kurma yoluyla çözme becerilerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Adana: Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Özcan, B. N. (2012). *İlköğretim öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin geliştirilmesinde bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Panasuk, R. M. (2010). Three phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations. *Education*, *131*(2). 235-257.

Patsiomitou, S. (2009). The ımpact of structural algebraic units on students' algebraic thinking in a dgs environment. *Electronic Journal of Mathematics and Technology (eJMT), 3*(3), 243-260.

Philipp, R. A. (1999). The many uses of algebraic variables. B. Moses (Eds.), *Algebraic Thinking, Grades K-12* içinde (s. 5-7). Reston, VA: NCTM.

Postelnicu, V. (2011). *Student difficulties with linearity and linear functions and teachers' understanding of student difficulties*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Tempre: Arizona State University. file:///C:/Users/Yasemin/Downloads/Student_Difficulties_with_Linearity_and_Linear_Fun.pdf (Erişim tarihi: 10.11.2017)

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-60.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, *74*(6), 418-450.

Schoenfeld, A. H. and Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher*, 81(6), 420-427. http://www.jstor.org/stable/pdf/27965869.pdf?acceptTC=true. (Erişim tarihi: 26.10.2015)

Stacey, K., and MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, *90*(2), 110-113.

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi

Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Primus*, 17(2), 131-147.

Tanışlı, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının pedagojik alan bilgisi bağlamında sorgulama becerileri ve öğrenci bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, *38*(169), 80-95.

Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *12*(44), 255-283.

Tanışlı, D. (2016). Satır aralarını okuma sanatı: Söylem çözümlemesi ve matematik eğitimi. *Matematik eğitiminde teoriler içinde*, 901-915.

Tanışlı, D., Köse, N. Y. ve Camci, F. (2017). Matematik Öğretmen Adaylarının Örüntüler Bağlamında Genelleme ve Doğrulama Bilgileri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *5*(3), 195-222.

Tirosh, D., Even, R. and Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational studies in mathematics*, *35*(1), 51-64.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. B. Moses (Eds.). *Algebraic Thinking, Grades K-12* (s. 5-7). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (2004). A significant amount of algebra. *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, 5, 147-152. http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2004-05-2-147.pdf. (Erişim tarihi: 25.01.2016)

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. *Building connections: Research, theory and practice*, 2, 759-766. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.538.4964&rep=rep1&type=pdf. (Erişim tarihi: 25.09.2015)

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63-75. http://link.springer.com/article/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf. (Erişim tarihi: 20.10.2015)

Van de Walle, J., Karp, K. and Bay-Williams, J. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim*.(Çev. S. Durmuş), Ankara: Nobel Akademik. (Orijinal baskı, 2009)

Yakut Çayır, M. ve Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 9*(2), 205-229.

Yeşildere, S., and Akkoç, H. (2011). Pre-service mathematics teachers' generalization processes of visual patterns. *J. Pamukkale University Educ. Faculty, 30*, 141-153.

Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim*, *23*(112).

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Beşinci Basım. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. (3. Basım). İstanbul: Remzi Kitabevi.

EKLER

EK-1. Bartın Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Belgesi

EK-2. Veli Bilgilendirme ve İzin Dilekçesi

EK-3. Öğrenci Bilgilendirme ve İzin Belgesi

EK-4. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Test

EK-5. Van Hiele Geometri Testi

EK-6. Klinik Görüşme Soruları

EK-1. Bartın Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Belgesi

T.C.
BARTIN VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 64441482-605-E.5691483 23.05.2016
Konu: Araştırma İzni(Mülakat Uygulama)

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

İlgi : a) M.E.B Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nün 20/03/2012 tarih ve 4506 sayılı yazı ekindeki 2012/13 No'lu Genelge.
b)Müdürlük Makamından alınan "Araştırma Değerlendirme Komisyonu Kurulması" konulu 04/10/2011 tarih ve 10009 sayılı Olur.
c) Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğünün 12/05/2016 tarih ve E. 52990 sayılı yazısı.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Entitüsü Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Yasemin ATAŞ'ın, Doç.Dr. Dilek ŞANLI'nın danışmanlığında ilgi (c) yazı ekindeki dilekçesinde **"Geometride Cebirsel Düşünme:Ortaokulu Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Çalışmalarının Cebirsel Düşünme Bağlamında İncelenmesi"** başlıklı yüksek lisans tezi çalışmasını müdürlüğümüz merkez ilçeye bağlı ortaokullarda eğitim gören 8. Sınıf öğrenciler ile 2015-2016 öğretim yılı Bahar Dönemi ile 2016-2017 öğretim yılı Güz ve Bahar dönemlerinde gerçekleştirmek istediği bildirilmektedir.

İlgi (c) yazı gereği yapılmak istenen Araştırma İznine (Mülakat Uygulama) ilişkin başvuru ilgi (a) 2012/13 No'lu Genelge kapsamında "Araştırma ve Değerlendirme Komisyonu'nca değerlendirilmiş ve uygun bulunmuştur.

Söz konusu Araştırma İznine (Mülakat Uygulama) ilişkin Araştırma Değerlendirme Formu, veli izin formu,öğretmen izin formu, anket formları ekte sunulmuş olup.ilgilinin çalışmasını 2015-2016 öğretim yılı Bahar Dönemi ile 2016-2017 öğretim yılı Güz ve Bahar dönemlerinde eğitim-öğretimi aksatmadan Merkez ilçeye bağlı ortaokullarda gerçekleştirebilmesi hususunu;

Olur'larınıza arz ederim.

Nihat ALTINTAŞ
Müdür Yardımcısı

OLUR
23.05.2016

Yaşar DEMİR
Milli Eğitim Müdürü

Ali ÇOLAK
Memur

16

Gölbaşı Mh. 2 nolu çevre yolu 74100 BARTIN
Elektronik Ağ: http://bartin.meb.gov.tr
e-posta: bartin@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: A.ÇOLAK V.H.K.İ
Tel: (0 378) 227 68 93 -(233)
Faks: (0 378) 227 16 96

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 6383-0655-3e0c-a6c8-c852 kodu ile teyit edilebilir.

EK-2a. Veli Bilgilendirme ve İzin Dilekçesi

VELİ İZİN BELGESİ

Veli Bilgilendirme

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve velisi bulunduğunuz öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır. Öğrencinizin bu araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum.

Ben Akçamescit Ortaokulunda matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. "Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Ve Ölçme Problemlerini Çözme Süreçlerindeki Cebirsel Düşünme Becerileri" başlıklı bir yüksek lisans tez çalışması yapmaktayım. Tez çalışmamı Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesi Doç. Dr. Dilek TANIŞLI danışmanlığında yürütmekteyim.

Bu çalışma kapsamında katılımcı seçme amacıyla iki adet düzey belirleme testi uygulayacağım ve seçilen katılımcılar ile birebir görüşmeler yapacağım. Yapılacak olan görüşmeler katılımcıların uygun olduğu zamanlar göz önüne alınarak ortak olarak belirlenecek gün ve saatlerde yaklaşık kırkar dakikalık olacaktır. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca uygulanan görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Görüşmelerin odağı öğrencilerin çalışma kâğıtları ve söylemleri olacaktır. Ancak video kayıtlarında katılımcıların yüzleri de görülebilir. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Katılımcının ya da sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, katılımcının ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Katılımcı istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim. Bu bağlamda aşağıdaki metni okumanızı ve kararınız doğrultusunda belgeyi imzalama ya da imzalamama özgürlüğünüzün olduğunu belirtmek isteriz.

Yasemin ATAŞ	Doç. Dr. Dilek TANIŞLI
Akçamescit Ortaokulu	Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Akçamescit/BARTIN	İlköğretim Matematik Eğitimi ABD
İletişim: 0 506 860 3447	İletişim: +90 (222) 335 0580
e-posta: yaseminatas@anadolu.edu.tr	e-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

EK-2b. Veli Bilgilendirme ve İzin Dilekçesi

İzin Belgesi

Araştırmacı tarafından amacı ve uygulama programı anlatılan bu çalışmada çocuğumun yer almasına razıyım ve izin veriyorum. Bu çalışma kapsamında sağlanacak olan tüm bilgilerin gizlilik içinde tutulacağını ve sadece araştırma amaçları çerçevesinde kullanılacağını anladım. Araştırmacı tarafından çalışmanın şekli, amacı ve muhtemel süresine ilişkin kapsamlı bir şekilde bilgilendirildim. Çalışma hakkında sorular sorulmasına ilişkin imkân sağlanmıştır. Araştırmada çocuğumun adı ve diğer bilgilerinin benim iznim olmadan kullanılmayacağı bildirilmiştir.

Araştırmalardan elde edilen videolar daha sonra eğitim amaçlı kullanılabilir. Lütfen verilerin bu şekilde kullanmamızı isteyip istemediğinizi aşağıda belirtiniz.

☐ *Uygulamalar sırasında alınan video görüntülerinin araştırma sunumları veya eğitici amaçlarla kullanılmasına yönelik izin veriyorum.*

☐ *Uygulamalar sırasında alınan video görüntülerinin araştırma sunumları veya eğitici amaçlarla kullanılmasına yönelik izin vermiyorum.*

Yukarıda yazılı olan bilgileri okudum ve bu çalışmaya çocuğumun katılmasına onay veriyorum.

Velinin Adı: …………………………………………………… Velinin İmzası: ……………………………..

EK-3a. Öğrenci Bilgilendirme ve İzin Belgesi

ÖĞRENCİ BİLGİLENDİRME VE İZİN BELGESİ

Sayın Katılımcı,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve bir katılımcı olarak haklarınızı tanımlamayı amaçlamaktadır. Bu araştırmama gönüllü olarak katılımınız ve dile getireceğiniz görüşlerin bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum.

Ben Akçamescit Ortaokulu'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. "Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometri Ve Ölçme Problemlerini Çözme Süreçlerindeki Cebirsel Düşünme Becerileri" başlıklı bir yüksek lisans tez çalışması yapmaktayım. Tez çalışmamı Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyesi Doç. Dr. Dilek TANIŞLI danışmanlığında yürütmekteyim.

Bu çalışma kapsamında katılımcı seçme amacıyla iki adet düzey belirleme testi uygulayacağım ve seçilen katılımcılar ile birebir görüşmeler yapacağım. Yapılacak olan görüşmeler katılımcıların uygun olduğu zamanlar göz önüne alınarak ortak olarak belirlenecek gün ve saatlerde yaklaşık kırkar dakikalık olacaktır. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca uygulanan görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Görüşmelerin odağı katılımcıların çalışma kâğıtları ve söylemleri olacaktır. Ancak video kayıtlarında katılımcıların yüzleri de görülebilir. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Katılımcının isteği doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, katılımcının ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Katılımcı istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim. Bu bağlamda aşağıdaki metni okumanızı ve kararınız doğrultusunda belgeyi imzalama ya da imzalamama özgürlüğünüzün olduğunu belirtmek isteriz.

Yapılacak olan görüşmeler katılımcıların uygun olduğu zamanlar göz önüne alınarak ortak olarak belirlenecek gün ve saatlerde yaklaşık kırkar dakikalık olacaktır. Gözlemler esnasında veri kaybını minimuma indirmek için görüşmeler video kaydına alınacaktır. Gözlemlerin odağı katılımcının çalışma kâğıtları ve söylemleri olacaktır.

Ancak video kayıtlarında katılımcıların yüzleri de görülebilir. Video kayıtları yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma kapsamında kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Araştırmaya katılımınız gönüllü olduğu için istediğiniz zaman araştırmadan ayrılma hakkına sahip olabileceksiniz. Sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size iade edilebilecektir.

Araştırmaya gönüllü olarak katıldığınıza ve araştırma kapsamında size verdiğimiz güvenceye ilişkin olarak aşağıdaki sözleşmeyi imzalamanızı rica ediyoruz. Sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederiz.

Yasemin ATAŞ
Akçamescit Ortaokulu
Esentepe Mah. Akçağ Sok. No:3
Akçamescit/BARTIN
İletişim: 0 506 860 3447
e-posta: yaseminatas@anadolu.edu.tr

Doç. Dr. Dilek TANIŞLI
Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Matematik Eğitimi ABD
İletişim: +90 (222) 335 0580
e-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

Araştırmacı tarafından amacı ve uygulama programı anlatılan bu çalışmaya gönüllü katılmaya razıyım. Bu çalışma kapsamında sağlanacak olan tüm bilgilerin gizlilik içinde tutulacağını ve sadece araştırma amaçları çerçevesinde kullanılacağını anladım. Araştırmacı tarafından çalışmanın şekli, amacı ve muhtemel süresine ilişkin kapsamlı bir şekilde bilgilendirildim. Çalışma hakkında sorular sorulmasına ilişkin imkân sağlanmıştır. Araştırmada bilgilerimin benim iznim olmadan kullanılmayacağı bildirilmiştir.

Yukarıda yazılı olan bilgileri okudum ve bu çalışmaya gönüllü olarak katılıyorum.
Öğrencinin Adı-Soyadı: ……………………………………………………
İmzası : ……………………………………………………
Tarih : ……………………………………………………

EK-4a. Cebirsel Düşünme Düzey Belirleme Testi

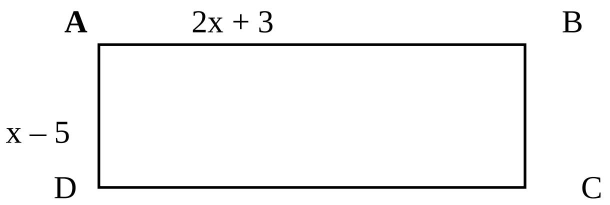
CEBİRSEL DÜŞÜNME DÜZEY BELİRLEME TESTİ

1) 5(2x + 3) – 2(x – 4) cebirsel ifadesini sadeleştiriniz.

2) (2x – y).(4x + y) cebirsel ifadesini sadeleştiriniz.

3) 2x + 5 = -x + 6 eşitliğini çözünüz.

4) Kenar uzunlukları $|AD| = x - 5 \; ve \; |AB| = 2x + 3$ olan ABCD dikdörtgeninin



a) Çevresini bulunuz.

Çözüm:

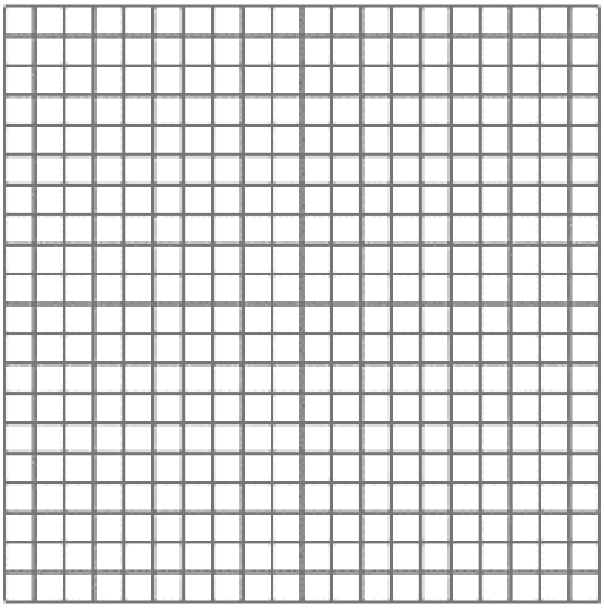
b) Alanını bulunuz.

Çözüm:

5) F = 7/5 C + 28 olmak üzere aşağıdaki tablodaki boşlukları doldurunuz.

C	10	20	30	40	50
F		56	70		98

Tablodan yola çıkarak F ve C arasındaki ilişkiyi grafik ile nasıl açıklarsın?



6) Aşağıda verilen tablolara göre her durum için x ve y arasındaki ilişkiyi en iyi tanımlayacak eşitliği yazınız. Çözümünüzü ayrıntılı açıklayınız.

x	1	2	3	4	5
y	5	6	7	8	9

Çözüm:

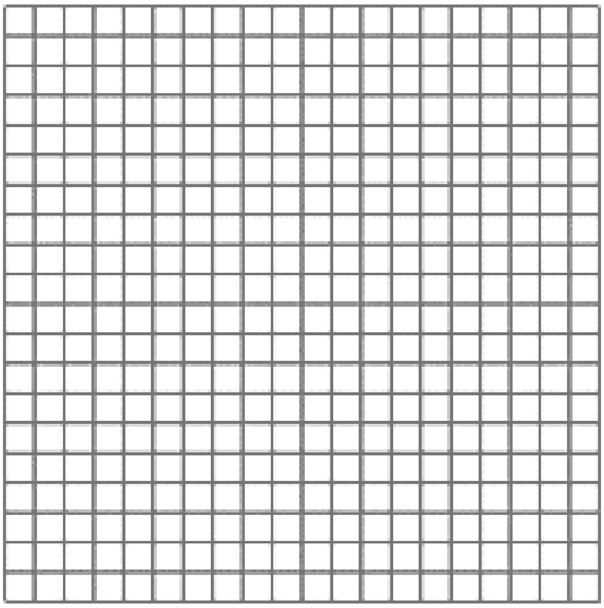
x	1	2	3	4	5
y	1	8	27	64	125

Çözüm:

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Çözüm:

7) y= 3x - 1 için x ve y arasındaki ilişkinin grafiğini aşağıya çiziniz.



8) Aşağıda verilen tablo bir öğrenci tarafından oluşturulmuştur.

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
N^2- N+11	**11**	**13**	**17**	**23**	**31**	**41**	**53**	**67**	**83**		

Öğrenci N'in farklı değerleri için $N^2 - N + 11$ ifadesinin asal sayıları verdiğini düşünüyor. Tabloyu tamamlayın. Öğrencinin düşüncesi doğru mudur? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

Çözüm:

9) 3, 5, 7, 9, 11, … verilen sayı örüntüsünde

a) 13. Terimi bulunuz. Çözüm yolunuzu açıklayınız.

Çözüm:

b) n. Terimi bulunuz. Çözüm yolunuzu açıklayınız.

Çözüm:

10) Bir x sayının iki katına 3 ekle. Elde ettiğin sayının karesini alıp 10 eklersen y sayısını elde ediyorsun. O halde x ve y arasındaki ilişkiyi gösterecek cebirsel bir ifade yazabilir misin?

Çözüm:

11) Aşağıda verilen üç denklem için verilen boşluklara uygun sayıları yerleştirin.

a) $y=5x+10$

x						
y						

b) $y=3x$

x						
y						

c) $y=5x^2$

x						
y						

d) Tabloları ve denklemleri inceleyiniz.

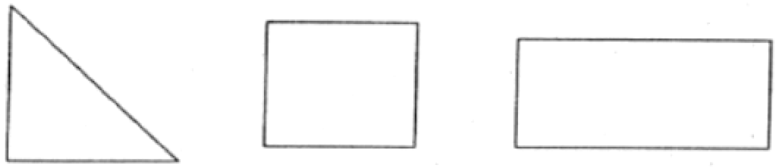
i. Hangi ilişki doğrusaldır ya da değildir? Neden?

ii. Tablolardaki verilere ya da denklemlere bakarak bir ilişkinin doğrusal olup olmadığına nasıl karar verirsiniz? Ayrıntılı açıklayınız.

EK-5. Van Hiele Geometri Testi

VAN HIELE GEOMETRİ TESTİ

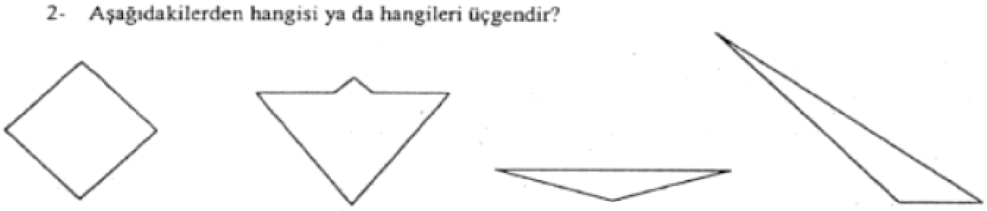
1- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?



K L M

a) Yalnız K
b) Yalnız L
c) Yalnız M
d) L ve M
e) Hepsi karedir.

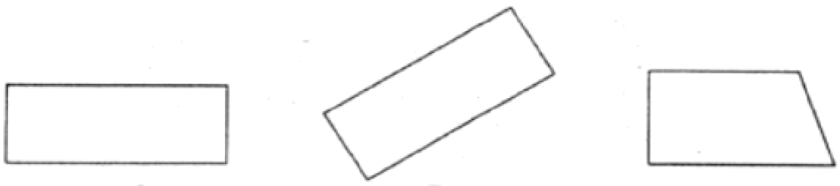
2- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri üçgendir?



U V Y Z

a) Hiçbiri üçgen değildir.
b) Yalnız V
c) Yalnız Y
d) Y ve Z
e) V ve Y

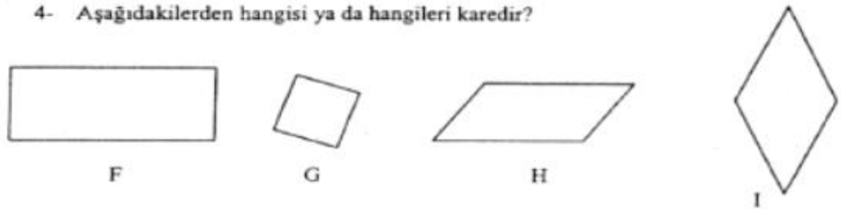
3- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri dikdörtgendir?



S T U

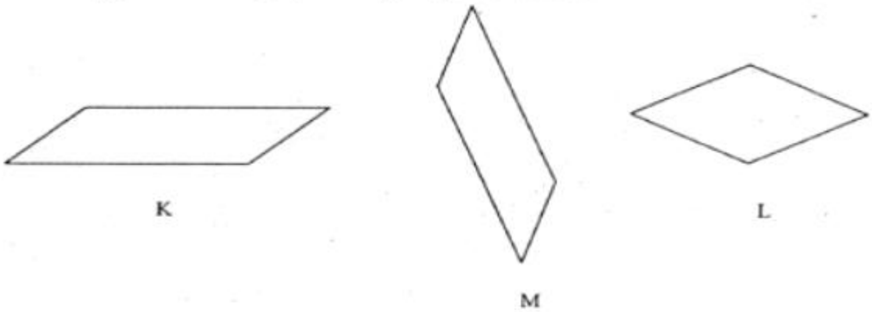
a) Yalnız S
b) Yalnız T
c) S ve T
d) S ve U
e) Hepsi dikdörtgendir.

4- Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?



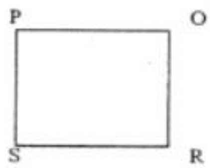
a) Hiçbiri kare değildir.
b) Yalnız G
c) F ve G
d) G ve I
e) Hepsi karedir.

5- Aşağıdakilerin hangisi ya da hangileri paralel kenardır?



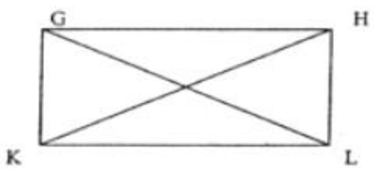
a) Yalnız K
b) Yalnız L
c) K ve M
d) Hiçbiri paralel kenar değildir.
e) Hepsi paralel kenardır.

6- PORS bir karedir.
Aşağıdakilerden hangi özellik her kare için doğrudur?



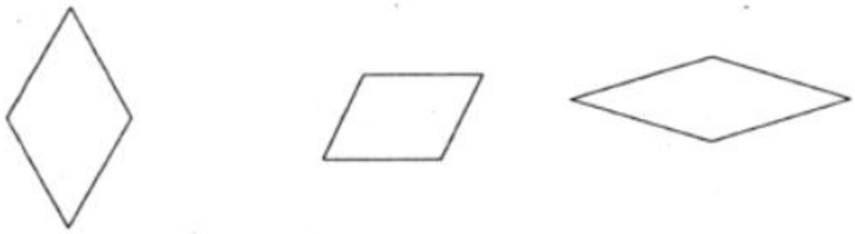
a) [PR] ve [RS] eşit uzunluktadır.
b) [OS] ve [PR] diktir.
c) [PS] ve [OR] diktir.
d) [PS] ve [OS] eşit uzunluktadır.
e) O açısı R açısından daha büyüktür.

7- Bir GHJK dikdörtgeninde, [GL] ve [HK] köşegendir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi her dikdörtgen için doğru değildir?



a) 4 dik açısı vardır.
b) 4 kenarı vardır.
c) Köşegenlerinin uzunlukları eşittir.
d) Karşılıklı kenarların uzunlukları eşittir.
e) |Gl|, |GH| den kısadır.

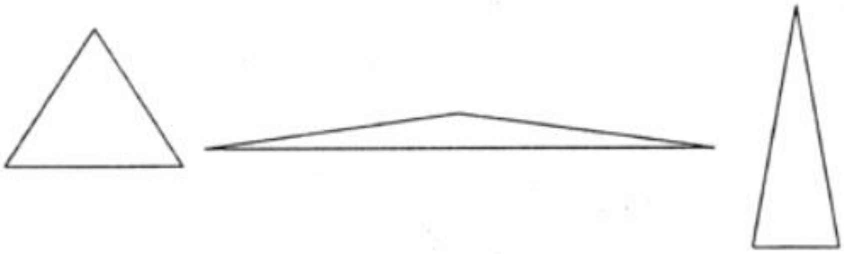
8- <u>Eşkenar dörtgen</u> tüm kenar uzunlukları eşit olan, 4 kenarlı bir şekildir. Aşağıda 3 tane eşkenar dörtgen verilmiştir.



Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi <u>her</u> eşkenar için doğru <u>değildir</u>?

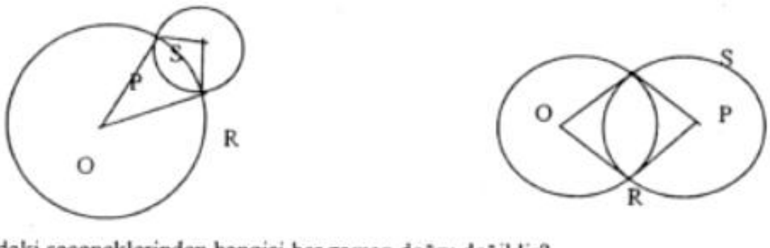
a) İki köşegenin uzunlukları eşittir.
b) Her köşegen, aynı zamanda açıortaydır.
c) Köşegenleri birbirine diktir.
d) Karşılıklı açılarının ölçüsü eşittir.
e) Seçeneklerin hepsi her eşkenar dörtgen için doğrudur.

9- İkizkenar üçgen, iki kenarı eşit olan üçgendir. Aşağıda üç ikiz kenar üçgen verilmiştir.



Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi <u>her</u> ikizkenar üçgen için doğrudur?
a) Üç kenarı eşit uzunlukta olmalıdır.
b) Bir kenarının uzunluğu, diğerinin iki katı olmalıdır.
c) Ölçüsü eşit olan en az iki açısı olmalıdır.

10. Merkezleri P ve O olan iki çember 4 kenarları PROS şeklini oluşturmak üzere R ve S noktalarında kesişirler. Aşağıda iki örnek verilmiştir.

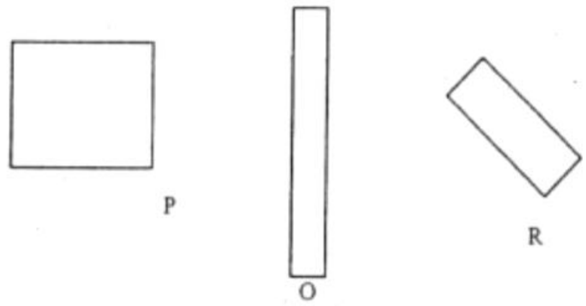


Aşağıdaki seçeneklerinden hangisi her zaman doğru <u>değildir?</u>
a) PROS şeklinin iki kenarı eşit uzunlukta olacaktır.
b) PROS şeklinin en az iki açısının ölçüsü eşit olacaktır.
c) [PO] ve [RS] dik olacaktır.
d) P ve O açılarının ölçüleri eşit olacaktır.
e) |PO|, |OR| den daha uzundur.

11. Önerme S: ABC üçgeninin üç kenarı eşit uzunluktadır.
Önerme T: ABC üçgeninde, B ve C açılarının ölçüleri eşittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) S ve T önermeleri ikisi de aynı anda doğru olamaz.
b) Eğer S doğruysa, T de doğrudur.
c) Eğer T doğruysa, S de doğrudur.
d) Eğer S yanlışsa, T de yanlıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

12. Önerme 1: F şekli bir dikdörtgendir.
Önerme 2: F şekli bir üçgendir.
Bu iki önermeye göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Eğer 1 doğruysa, 2 de doğrudur.
b) Eğer 1 yanlışsa, 2 doğrudur.
c) 1 ve 2 aynı anda doğru olamaz.
d) 1 ve 2 aynı anda yanlış olamaz.
e) Yukarı seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

13. Aşağıdaki şekillerden hangisi ya da hangileri dikdörtgen olarak adlandırılabilir?



a) Hepsi
b) Yalnız O
c) Yalnız R
d) P ve O
e) O ve R

14. Tüm dikdörtgenlerde olup, bazı paralel kenarlarda olmayan özellik nedir?
a) Karşılıklı kenarları eşittir.
b) Köşegenler eşittir.
c) Karşılıklı kenarlar paraleldir.
d) Karşılıklı açıları eşittir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

15- Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Dikdörtgenlerin tüm özellikleri, tüm kareler için geçerlidir.
b) Karelerin tüm özellikleri, tüm dikdörtgenler için de geçerlidir.
c) Dikdörtgenin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
d) Karelerin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

EK-6a. Klinik Görüşme Soruları

KLİNİK GÖRÜŞME SORULARI

Semboller ve Cebirsel İlişkiler

1) Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|AB|$=3x - 2, $|BC|$= 2x – 1 ve $|AC|$= x + 5 olmak üzere;

a) ABC üçgeninin çevresini bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) x artarsa ABC üçgeninin çevresi nasıl değişir? Ayrıntılı açıklayınız.

c) Problemde yer alan x harfli ifadesi ve üçgenin bir köşesini temsil eden ve A harfi ne anlama gelmektedir? Kullanım şekli olarak aynı mıdır? Ayrıntılı açıklayınız.

2) **n** kenarlı bir düzlemsel şeklin köşegen sayısı ***n(n-3)/2***'dir.

a) Bu formülü kullanarak bir dörtgenin, beşgenin ve altıgenin kaç tane köşegene sahip olduğunu bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) En az sayıda köşegene sahip olan düzlemsel şekil nedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

3) Bir açının dört katı kendisinin bütünleri ise açının ölçüsü kaç derecedir? Yanıtınızı ayrıntılı açıklayınız.

EK-6b. Klinik Görüşme Soruları

Temsiller

1) Bir üçgenin iç açıları 2, 3 ve 4 ile doğru orantılı ise bu açıların ölçüleri kaçar derecedir? Neden?

2) *A*, *B* ve *C* aralarında $|AB| = |BC|$ ilişkisi olan doğrusal üç noktadır. Bu noktaları düzlemde nasıl ve kaç farklı şekilde çizebilirsin? Çözümünü açıklar mısın?

3) Bir arkadaşın üçgenin alanını nasıl hesapladığını açıklamanı istedi. Nasıl açıklarsın?

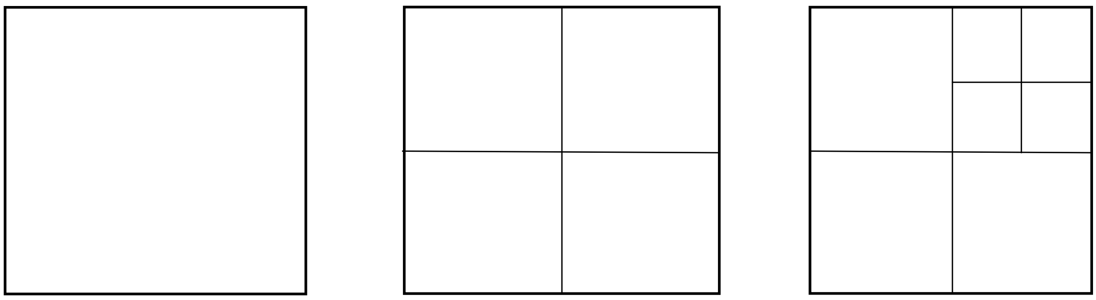
EK-6c. Klinik Görüşme Soruları

Örüntüler ve Genellemeler

1) Bir üçgenin bir iç açısı ile bir dış açısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.
Bir üçgende kaç tane iç açı ve kaç tane dış açı vardır?
Bir üçgenin tüm iç açılarının ve dış açılarının toplamı kaç derecedir? Neden?
Bir dörtgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı kaç derecedir? Neden?
Beşgenin, altıgenin ve n kenarlı bir çokgenin iç ve dış açıları toplamı kaç derecedir? Açıklayınız.

2) **a)** Aşağıda verilen fragtalda birinci adımdaki karenin bir kenarının uzunluğu 32 cm'dir. Buna göre 2. 3. ve 4. adımda oluşan karelerin kenar uzunlukları ve alanlarını hesaplayınız. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) Bir kenar uzunluğu a birim olan bir kare için 2. 3. 6. ve n. adımda oluşan karelerin alanlarını bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.



1.Adım 2. Adım 3. Adım

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Yasemin ATAŞ

Yabancı Dil : İngilizce

Doğum Yeri ve Yılı : Balıkesir/1992

E-Posta : yaseminatas92@gmail.com

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- Lisans: 2010-2014 Eskişehir Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, İlköğretim Anabilim Dalı
- Lise: 2006-2010 İbrahim Önal Fen Lisesi, Mustafakemalpaşa/Bursa
- 2003-2010 Hamzabey Bilim ve Sanat Merkezi, Mustafakemalpaşa/Bursa
- 2018- Matematik Öğretmeni(Görevlendirme), Bartın Bilim ve Sanat Merkezi, Bartın
- 2016- Matematik Öğretmeni, Akçamescit Ortaokulu, Bartın
- 2015-2016 Matematik Öğretmeni, Şehit Piyade Üsteğmen Gökhan Yavuz Ortaokulu, Eskişehir
- 2014-2015 Matematik Öğretmeni, Çukurhisar Ortaokulu, Eskişehir