SİMETRİK OLMAYAN GÜRÜLTÜLÜ
İTERE TUTUKLU İKİLEMİNDE
ZORBA STRATEJİLER

Doktora Tezi

Cansu CENGİZ

Haziran, 2019

SİMETRİK OLMAYAN GÜRÜLTÜLÜ İTERE TUTUKLU İKİLEMİNDE ZORBA STRATEJİLER

Cansu CENGİZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Haziran, 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Cansu CENGİZ’in **“SİMETRİK OLMAYAN GÜRÜLTÜLÜ İTERE TUTUKLU İKİLEMİNDE ZORBA STRATEJİLER”** başlıklı tezi **10/06/2019** tarihinde, aşağıdaki juri tarafından değerlendirilerek “Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

		Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE	....
Üye	:	Prof. Dr. Emrah AKYAR	....
Üye	:	Prof. Dr. Yeliz MERT KANTAR	....
Üye	:	Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR	....
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Ömer ÜNSAL	....

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitü Müdürü

ÖZET

SİMETRİK OLMAYAN GÜRÜLTÜLÜ İTERE TUTUKLU İKİLEMİNDE ZORBA STRATEJİLER

Cansu CENGİZ

Matematik Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran, 2019

Danışman: Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE

Bu çalışmada, iyi stratejiler, sıfır determinant (ZD) stratejiler, sıfır determinant stratejilerin alt kümeleri olan cömert stratejiler ve zorba stratejiler tanıtılmıştır. Simetrik İtere Tutuklu İkilemi'nde (IPD), cömert ve zorba strateji kullanıldığında, belli şartlar altında oyuncuların uzun dönem getirileri arasında lineer bir ilişkinin sağlandığı bilinmektedir. Bu tez çalışmasında, simetrik olmayan İtere Tutuklu İkilemi'nde de belli şartlar altında bu durumun geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, simetrik olmayan gürültülü İtere Tutuklu İkilemi'nde, zayıf zorba strateji kullanan oyuncunun belli şartlar altında, rakibi ile kendi getirisi arasında lineer bir ilişki kurarak karşı tarafa zorbalık uygulayabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Sıfır Determinant (ZD) Stratejiler, İyi stratejiler,
Cömert Stratejiler, Zorba Stratejiler, Gürültülü Oyun.

ABSTRACT

EXTORTION STRATEGIES IN NON-SYMMETRIC NOISY ITERATED PRISONER'S DILEMMA GAME

Cansu CENGİZ

Department of Mathematics
Anadolu University, Graduate School of Sciences, June, 2019

Supervisor: Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE

In this study, good strategies and Zero-Determinant (ZD) strategies, generous strategies and extortion strategies which are the subsets of ZD strategies are introduced. In Symmetric Iterated Prisoner's Dilemma, when generous and extortion strategies are used by the players, it is known that the linear relationship between the player's long term payoffs is hold in certain circumstances. Here, it has been also shown that this condition is valid in certain circumstances in Non-Symmetric Iterated Prisoner's Dilemma. Moreover, for Non-Symmetric Noisy Iterated Prisoner's Dilemma it has been shown that the player who uses the weak extortion strategy can enforce the opponent by establishing a linear relationship between his opponent and his own payoff under certain circumstances.

Keywords: Zero-Determinant (ZD) strategies, Good Strategies,
Generous Strategies, Extortion Strategies, Noisy Game.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE'ye ve hayatımın her döneminde beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Cansu CENGİZ
Haziran 2019

10/06/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Cansu CENGİZ

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Pi(\omega, \mathbf{a})$	: **a** eylem profiline karşılık ω sinyal profilinin oluşma olasılığı
$\mathbf{e_1}$	: Birinci bileşeni bir, diğer bileşenleri sıfır olan $\mathbb{R}^4$'te birim vektör
$\mathbf{e_{12}}$	: Birinci ve ikinci bileşeni bir, diğer bileşenleri sıfır olan $\mathbb{R}^4$'te vektör
$D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{f})$	: Determinant (4×4'lük)
$\mathbb{R}^4$	: Dört boyutlu Öklid uzayı
$\mathbf{a}$	: Eylem profili
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
IPD	: Iterated Prisoner's Dilemma (İtere Tutuklu İkilemi)
$f_i(\mathbf{a})$	: i oyuncusunun beklenen getirisi
$u_i(a_i, \omega_i)$	: i oyuncusu için gerçekleşen durum getirisi
c, d	: İş birliği yapma ve geri çekilme
$M, Adj(M)$	: İtere oyunun geçiş matrisi ve M matrisinin adjoint matrisi
$\mathbf{v}$	: Ortalama limit dağılımı
τ	: Oyuncuların ikisinde de gözlem hatası olmama olasılığı
ρ	: Oyuncuların ikisinde de gözlem hatası olma olasılığı
ε	: Oyuncuların sadece birinde gözlem hatası olma olasılığı
$\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}$	: **p** ve **q** plan vektörlerinin Press-Dyson vektörleri
R, S, T, P	: Reward for cooperation, Sucker's payoff, Temptation payoff, Punishment for defection
ω	: Sinyal profili
$\mathbf{S_X}, \mathbf{S_Y}$	: Sırasıyla X ve Y oyuncularının getiri vektörleri
$\mathbf{p}, \mathbf{q}$	: Sırasıyla X ve Y oyuncularının plan vektörleri
s_X, s_Y	: Sırasıyla X ve Y oyuncularının uzun dönem ortalama getirileri
TFT, **GTFT**	: Tit-For-Tat (kısasa-kısas) ve Generous Tit-For-Tat (cömert kısasa-kısas)
WSLS	: Win-Stay-Lose-Shift (kazan-kal-kaybet-değiştir)
ZD	: Zero-Determinant (Sıfır-Determinant)
χ	: Zorbalık faktörü

1. GİRİŞ

Oyun teorisinin amacı, mücadele içeren durumlarda en iyi seçenekleri belirlemek ve bu yönde ilerlemektir. Bu özelliği sebebiyle matematikten ekonomiye, sosyal bilimlerden biyolojiye pek çok farklı alanda uygulama bulmuştur. Oyun teorisi, John von Neumann öncülüğünde bilimsel temelleri oluşturulan "sıfır toplamlı" oyunlar ile başlamıştır. Daha sonra John Nash, oyunda denge kavramını açıklamış ve "sıfır toplamlı olmayan" oyunları incelemiştir. Her ne kadar öncesinde oyunlarla ilgili bazı çalışmalar olsa da, John von Neumann ve Oskar Morgenstern tarafından yazılmış olan "Theory of Games and Economic Behavior" (Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış)" [10] isimli kitapla birlikte "Oyun Teorisi" ayrı bir bilim dalı olarak görülmeye başlanmıştır. Neumann, zamanın en önemli matematikçilerinden biridir. Neumann'ın oluşturduğu oyun teorisinin çoğunluğu sıfır toplamlı oyunları açıklamaktadır. Kitabın sadece son 80 sayfasında, sıfır toplamlı olmayan oyunlar geçmektedir, fakat bunlar da sıfır toplamlı oyunlara bağlanmaktadır. Neumann, bunları açıklamakta yetersiz kalmıştır. Sıfır toplamlı oyunlar önemli olmakla birlikte, gerçek hayata uygulanabilirliği az olan oyunlardır. Bu eksiklik John Nash tarafından kapatılmıştır. Daha sonra Nash'in açıkladığı sıfır toplamlı olmayan oyunlar incelenmiş ve bunlara çeşitli örnekler oluşturulmuştur. İki kişilik sıfır toplamlı olmayan oyunlara en ünlü örnek, Merrill Flood, Melvin Dresher ve Albert William Tucker tarafından önerilen "Tutuklu İkilemi"dir (Prisoner's Dilemma).

"Tutuklu İkilemi", tarafların motivasyonları arasında çelişkinin bulunduğu, kazanç ve kayıplar toplamının sıfır olmadığı bir durumun ifadesidir. Sosyal olayların basit bir modeli olan bu iki kişilik oyunda, ikilemin öyküsü şudur: Silahlı bir soyguna karıştığı düşünülen şüpheli iki kişi gözaltına alınır. Fakat savcının elinde yeterli kanıt yoktur.

Ayrı hücrelere konan zanlılar savcı tarafından sorgulanır. Zanlılar, sorgulama sırasında sessiz kalabilir ya da karşı tarafı suçlayabilir. Eğer ikisi de sessiz kalırsa, ruhsatsız silah taşımaktan dolayı her biri 1 yıl hapis yatacaktır. İkisi de birbirini suçlarsa, savcı, soygun için asgari ceza olan 3 yıl hapse mahkumiyetlerini isteyecektir. Ancak biri karşı tarafı suçlar ve diğeri sessiz kalırsa, suçlayan taraf sadece tanık olarak mahkemeye çıkacak ve sonra bırakılacak, diğeri ise 5 yıl hapis yatacaktır.

Bu durumda şüpheliler ne yapacaktır? İkisi birlikte düşünüldüğünde, her biri için en kötü durum 5 yıl, en iyi durum diğerinin 5 yıl hapsine karşılık kendisinin serbest bırakılması, "en az kötü durum" ise 1 yıl hapistir. Fakat 1'er yıl hapis durumu, her ikisi de aynı tutumu izlerse, yani her ikisi de sessiz kalırsa mümkündür. Ancak her birini bir şüphe alır: "Ya kendisi sessiz kalırken, karşı taraf kendisini suçlarsa?".

Tutukluların içinde bulunduğu ikilem, taraflar arasında güven ve iletişimin yokluğunda, daima karşı tarafı suçlama ile çözülmektedir. Bu ikilem, iki taraf arasında işbirliği ve istismar yönünde seçenek davranışların bulunduğu çeşitli insan ilişkilerinde, tercih edilen rasyonel davranışın, işbirliğinden ziyade karşılıklı istismar davranışı olmasıyla sonuçlanmaktadır.

Tutuklu İkilemi'nde iş birliği davranışı zayıf kaldığı için çalışmalar itere oyunlar üzerine yoğunlaşır. Robert Axelrod, 1980 yılında bilgisayar programlarının karşılaştığı bir turnuva planlar. Turnuvayı, Anatol Rapaport tarafından sunulan Tit-for-Tat (kısasa kısas) kazanır. Turnuva oyunundan elde edilen veriler, "İş birliğinin Evrimi" adlı bir kitapta yayınlanır ve elde edilen sonuçlar evrimsel oyun teorisinde de kullanılır [15]. Fakat turnuvaya olan evrimsel bakış açısı üstü kapalı bir yoldan problemi değiştirir. Evrimsel oyun teorisinde önemli olan oyuncunun rakipleriyle karşılaştığı zaman nasıl davrandığıdır. Burada oyuncu, kendisinin daha fazla getiri elde edebileceği stratejiyi seçmeyip karşı tarafın kendisinden daha fazla kazanmasına izin verebilir. Bu özgeci (altruism) davranış, evrimsel oyun teorisinde önemli bir problemdir. Buna karşılık klasik oyun teorisinde, oyuncular getiri açısından faydacıdır. Bu durum, Hofbauer ve Sigmund [3], Nowak [5], Sigmund'un [7] kitaplarında ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır.

Tutuklu İkilemi, kazanç ve kayıplar bakımından karşılıklı bağımlılık durumunu ifade etmektedir. Ancak başka ilişki durumları da mümkündür. Örneğin taraflardan birinin sürekli kazançlı olduğu ve kazancının, diğerinin davranışlarından etkilenmediği; buna karşılık diğerinin kazanç ve kayıplarını belirlediği bir durum düşünülebilir.

Başta Nowak [5] ve Sigmund [7]'un kitaplarında tartışıldığı üzere, Markov modeli üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Özellikle Press ve Dyson'ın çalışmaları [8], bu anlamda birçok çalışmaya ilham kaynağı olmuştur [2,9,11,14]. Örneğin Akin [13,14], Press ve Dyson [8]'dan ilham alarak İtere Tutuklu İkilemi'ne farklı bir bakış açısı kazandıran iyi (good) stratejileri tanımlamıştır. Özellikle son yıllarda, İtere Tutuklu İkilemi'nde iyi ve Nash tipi stratejiler üzerine çalışmalar yoğunlaşmıştır [13, 14]. Bu çalışmalarda, bir kısmı iyi stratejilerin içinde olan sıfır determinant (kısaca "ZD") stratejiler de ele alınmıştır. ZD stratejiler, bir oyuncuya tek taraflı olarak kendi getirisi ve rakibinin getirisi arasında lineer bir ilişkiyi dayatmasına izin veren stratejilerdir.

İtere Tutuklu İkilemi üzerine yapılan son çalışmaların çoğu, ZD stratejilerinin bir alt kümesi olan zorba (extortion) stratejilerin evrimi üzerine odaklanmıştır. Ayrıca ZD stratejilerinin farklı bir alt kümesi olan cömert (generous) stratejilerle ilgili de birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda zorba ve cömert stratejiler, simetrik İtere Tutuklu İkilemi oyununda incelenmiştir. Bu çalışmada, öncelikle zorba ve cömert stratejiler, simetrik olmayan IPD oyununda ele alınmıştır. Daha sonra simetrik olmayan gürültülü IPD oyununda zayıf zorba stratejiler karakterize edilmiştir.

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde Tutuklu İkilemi'nin genel yapısı ve itere oyunlardan bahsedilmiştir. 3. bölümde iyi stratejiler ele alınmıştır. 4. bölümde sıfır determinant stratejiler ve bu stratejilerin alt kümeleri olan zorba ve cömert stratejiler incelenmiştir. Burada zorba ve cömert stratejilerle ilgili öncelikle simetrik IPD oyununda elde edilmiş sonuçlar verilmiştir. Daha sonra, bu stratejilerden birini kullanan oyuncunun, simetrik olmayan IPD oyununda kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında bir lineer ilişki kurabileceği şartlar belirlenmiştir. 5. bölümde ise simetrik olmayan gürültülü IPD oyununda, zayıf zorba strateji kullanan oyuncunun hangi şartlarda kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında bir lineer ilişki kurabileceği gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tutuklu İkilemi

Tutuklu İkilemi oyununu ele alalım. Bu oyunda, X ve Y oyuncularının her ikisi de c (cooperate) ve d (defect) stratejilerinden oluşan iki seçime sahiptir. Tutuklu İkilemi'nde,

$$\begin{aligned} c \text{ stratejisi} &\rightarrow \text{iş birliği (sessiz kalma)} \\ d \text{ stratejisi} &\rightarrow \text{iş birliğinden kaçma (karşı tarafı suçlama)} \end{aligned}$$

anlamlarına gelir.

Bu nedenle sırasıyla dört durum vardır: cc, cd, dc, dd. Örneğin "cd", X oyuncusunun c stratejisini ve Y oyuncusunun d stratejisini oynadığı zaman oluşan oyun durumudur. Oyuncular, seçtikleri stratejilere karşılık oluşan her oyun durumunda belli bir getiri elde eder.

X ve Y oyuncularına ait getiri değerleri Tablo 2.1.'de verildiği gibi 2×2'lik tablo ile gösterilir.

$X \setminus Y$	c	d
c	(R,R)	(S,T)
d	(T,S)	(P,P)

Tablo 2.1. IPD oyununda oyuncuların getiri tablosu [14]

Ayrıca, X ve Y oyuncuları için getiri vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{S_X} = \begin{pmatrix} R \\ S \\ T \\ P \end{pmatrix} \quad ve \quad \mathbf{S_Y} = \begin{pmatrix} R \\ T \\ S \\ P \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

ile gösterilir. Her oyuncu $\mathbf{p}_c$ olasılığı ile c'yi ve $1-\mathbf{p}_c$ olasılığı ile d'yi rastgele seçerek bir karma strateji kullanabilir. Getirilerin

$$T > R > P > S \quad , \quad 2R > T + S \tag{2.2}$$

eşitsizliklerini sağladığı kabul edilir.

İki oyuncu da iş birliğine giderek sessiz kalırsa R getirisini (Reward for cooperation) alırlar. Her ikisi de birbirini suçlarsa P getirisini (Punishment for defection) alırlar. Oyunculardan biri iş birliği yapar ve diğeri iş birliğinden kaçarsa, iş birliğinden kaçan oyuncu en büyük getiri olan T getirisini (Temptation payoff) alır. İş birliği yapan oyuncu ise en küçük olan getiri olan S getirisini (Sucker's payoff) elde eder.

$2R > T + S$ eşitsizliği şu anlama gelir: İş birliğine gidilerek alınan toplam getiri, oyuncuların cd veya dc durumlarında aldıkları getirilerin toplamından daha fazladır. Bu nedenle oyuncular maksimum toplam getiriyi cc durumunda elde ederler. Bu durum bir Pareto optimumdur. Yani, oyuncular cc durumundan başka bir duruma geçerse, oyunculardan birinin getirisini artırması, diğerinin getirisinde azalmaya neden olur. Bu durumda denge bozulmuş olur.

Ortak iş birliği olan "cc" durumunda oyuncuların elde edecekleri getiri, hedefledikleri getiri olmalıdır. Eğer oyuncular oyun öncesinde anlaşıtıkları gibi, c stratejisini seçerlerse R getirisine ulaşırlar. Buna rağmen oyun sırasında, her biri diğerinin seçiminden habersiz bir strateji seçer. Bu aşamada, oyuncular seçimlerini değiştirebilir. Çünkü d stratejisi c stratejisine kesin baskındır. Yani, Y oyuncusunun seçimi ne olursa olsun, X oyuncusu d oynadığında, c oynayarak elde ettiğinden daha büyük bir getiriye ulaşır.

X oyuncusunun iş birliğinden kaçtığı için serbest bırakıldığını, Y oyuncusunun c oynayarak 5 yıl hapis yattığını varsayalım. Y oyuncusunun arkadaşları X oyuncusuna zarar verebilir. Bu da X oyuncusu için dc durumundaki getirinin çekiciliğini azaltır. Eğer her iki oyuncu da tehditkar arkadaşlara sahipse her ikisi de c oynama konusunda hemfikir olacaklar ve R getirisini elde edeceklerdir. Fakat faydacılık açısından bu artık bir Tutuklu İkilemi olmayacaktır.

Tutuklu İkilemi'nde iş birliği davranışının zayıf kalması durumu, Garret Hardin [1] tarafından "genelliğin trajedisi" olarak adlandırılan durumun basit bir modeli olarak düşünülebilir. Bu trajediyi engellemek için yapılan araştırmada, dikkatler itere (tekrarlı) oyunlara yoğunlaşır. X ve Y oyuncuları aynı oyunun tekrarlı turlarını oynarlar. Her tur için oyuncuların strateji seçimleri bağımsızdır, fakat her iki oyuncu da bir önceki turların getirilerinin farkındadır. Misilleme tehdidinin, mevcut durumdaki iş birliğinden kaçma davranışının cezbediciliğini dizginlemesi umut edilir.

2.2. İtere Oyunlar

Robert Axelrod, birbirine karşı oynayan bilgisayar programlarının sunulduğu bir turnuva planladı. Her program, rakip programların hepsine karşı sabit fakat bilinmeyen sayıda tur oynadı ve sonuç getirileri toplandı. Sonuçlar tanımlandı ve Axelrod'un kitabında [15] analiz edildi. Turnuvada Anatol Rapaport tarafından sunulan Tit-for-Tat, kazanan program oldu. Bu programın her turdaki oyunu, bir önceki turda rakip tarafından kullanılan stratejiye bağlıdır. Yapılan ikinci turnuvada da kazanan program Tit-for-Tat oldu. Axelrod, Tit-for-Tat'tan bazı kurallar ortaya çıkarttı ve bunları bazı örneklere uyguladı.

1973 yılında John Maynard Smith ve George Price, evrimsel dengeli strateji isimli bir kavramı gündeme getirerek biyoloji ile matematiksel ekonomi arasında bir analoji kurmuşlardır. Bu stratejiye göre, bir popülasyondaki belirli özelliklerdeki bireylerin bir süre sonra sabitlenmesinden sonra, daha nadir gözüken bir özelliğe sahip bireylerin baskın hale gelmesi doğal seçilim sayesinde engellenir ve dolayısıyla baskınlar ile çekinikler arasında bir denge sağlanır. Bu doğal (bilimsel) gerçek, Nash Dengesi ile birebir uyumludur. Bu sayede, bu ilk adımlarla birlikte evrimsel oyun teorisi doğmuştur. Evrimsel oyun teorisi, ekonomik ya da matematiksel oyun teorisinden farklı olarak, dengenin sağlanması ve korunması stratejilerini incelemektense, oyun stratejilerinin dinamiğini (hareketlerini ve değişkenliklerini) inceler. Smith [4] ve Sigmund [6], bu konudaki ilk çalışmalara iyi bir kaynak olmuştur.

Oyun teorisi kapsamında geniş bir şekilde araştırılan turnuva oyununun dinamikleri, evrimsel oyun teorisinde de kullanılmıştır. Buna rağmen, turnuvaya olan evrimsel bakış açısı üstü kapalı bir yoldan problemi değiştirir. Evrimsel oyun teorisinde sorun, bir oyuncunun rakip oyuncularla karşılaştığı zaman nasıl davrandığıdır. İki oyuncu olduğunu ve bunların her birine aynı getirilerin verildiği stratejileri olduğunu varsayalım. Y oyuncusu getirileri karşılaştırarak, daha iyi getiri elde edebileceği bir stratejiye geçmeyi reddederek, X oyuncusunun kendisinden daha iyi bir getiri elde etmesine izin verebilir. Seçilen özgeci (altruism) davranış, evrim teorisinde önemli bir problemdir. Buna karşın, klasik oyun teorisinde oyuncular getiri açısından faydacıdır. En basiti, Y oyuncusu en yüksek mutlak getiriyi elde etmeyi amaçlar. Y oyuncusu, X oyuncusunun strateji seçimini öngörebilmek dışında onun getirisiyle ilgilenmez. Bu konu, Hofbauer ve Sigmund [3] , Nowak [5] ve Sigmund [7]'un kitaplarında uzun olarak ele alınmıştır. Son ikisi Markov yaklaşımını tartışmaktadır.

İlk tur için oyunun seçimi başlangıç oyunudur. Plan, ilk tur hariç olmak üzere, önceki turlardaki getirilerin tüm geçmişine karşılık vermek için yapılan oyun seçimidir. Strateji, plan denilen durum ile başlangıç oyununun birlikte seçimidir.

Tit-for-Tat (TFT), tamamen önceki turdaki getiriye vereceği karşılığı baz alan bir tek tur hafızalı (memory-one) plan örneğidir. Bu stratejiyi kullanan oyuncu, ilk turda c oynar. Diğer turlarda ise oyuncu, bir önceki turda karşı taraf c oynarsa c, d oynarsa d oynar. TFT stratejisi, c başlangıç oyunu ile TFT planından oluşur. cc, cd, dc, dd şeklinde sıralanan oyun durumları için X oyuncusuna ait tek tur hafızalı plan vektörü

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{cc}, p_{cd}, p_{dc}, p_{dd})$$

vektörüdür. Burada $\mathbf{p}_z$, bir önceki turda z durumu oluştuğu zaman c oynama olasılığıdır. Eğer Y oyuncusu, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ plan vektörünü kullanırsa Markov karşılığı

$$\mathbf{q} = (q_{cc}, q_{cd}, q_{dc}, q_{dd}) = (q_1, q_3, q_2, q_4)$$

olur. Y oyuncusunun plan vektöründen karşılık vektörüne geçerken indislerde değişim kullanılır. Çünkü oyuncu perspektifini değiştirme cd ile dc durumlarının yerini değiştirir. Bu sayede X ve Y oyuncuları için plan, aynı plan vektörü ile verilir. Örneğin, iki oyuncu için de TFT plan vektörü $\mathbf{p} = \mathbf{q} = (1,0,1,0)$ ile verilir. Fakat Y oyuncusu için karşılık vektörü $(1,1,0,0)$ ile gösterilir.

Ardışık getiriler, Tablo 2.2. ile verilen geçiş matrisiyle beraber Markov zincirini takip eder.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_1q_1 & p_1(1-q_1) & (1-p_1)q_1 & (1-p_1)(1-q_1) \\ p_2q_3 & p_2(1-q_3) & (1-p_2)q_3 & (1-p_2)(1-q_3) \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2) & (1-p_3)q_2 & (1-p_3)(1-q_2) \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4) & (1-p_4)q_4 & (1-p_4)(1-q_4) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Tablo 2.2. İtere oyunların geçiş matrisi [14]

İki oyuncunun başlangıç oyunları, Markov zinciri için

$$\mathbf{v}^1 = (p_cq_c, p_c(1-q_c), (1-p_c)q_c, (1-p_c)(1-q_c)) \tag{2.4}$$

başlangıç dağılımı ile verilir. Bir tek tur hafızalı strateji, saf ya da karma bir başlangıç oyunu ile bir tek tur hafizalı plandan oluşur.

cc durumuna bir sonraki turda c oyunu ile karşılık veren plana **anlaşmaya hazır (agreeable) plan** denir. dd durumuna, bir sonraki turda d oyunu ile karşılık veren plana **sıkı (firm) plan** denir. Böylece, bir tek tur hafizalı plan vektöründe $p_1 = 1$ olduğu zaman plan anlaşmaya hazır, $p_4 = 0$ olduğu zaman ise plan sıkı olur. Örneğin TFT ve Repeat planları, anlaşmaya hazır ve sıkı planlardır. Burada **Repeat** $= (1,1,0,0)$, oyuncunun bir önceki turdaki seçimini tekrar eden plandır.

Anlaşmaya hazır strateji, bir c başlangıç oyununu ile anlaşmaya hazır bir plandan oluşur. Eğer her iki oyuncu anlaşmaya hazır stratejiler kullanırsa, oyun cc'de sabitlenir. Bu durumda oyuncular, her turda iş birliği getirisini elde eder.

Tutuklu İkilemi oyununun art arda oynandığı İtere Tutuklu İkilemi oyununu ele alalım. İtere Tutuklu İkilemi'nde X ve Y oyuncularının k. turda elde ettiği getiriler sırasıyla s_X^k ve s_Y^k olsun. X oyuncusunun uzun dönem ortalama getirisi

$$s_X = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_X^k \tag{2.5}$$

şeklindedir. Y oyuncusu için de benzer şekilde ifade edilir.

Her oyuncu (mümkün karma) bir başlangıç oyunu ve tek tur hafızalı belli bir planı kullansın. Bu durumda Markov zinciri,

$$\mathbf{v} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}^k \tag{2.6}$$

biçiminde verilen bir **ortalama limit dağılımı** ile birlikte n. turda getiriler üzerinde bir $\mathbf{v}^n$ olasılık dağılım vektörü edilmesini sağlar. s_X ve s_Y getirileri, bu dağılıma göre sırasıyla X ve Y oyuncularının getirileri için beklenen değerlerdir. Yani,

$$s_X =< \mathbf{v}, \mathbf{S_X} >, \quad s_Y =< \mathbf{v}, \mathbf{S_Y} > \tag{2.7}$$

olur.

Genel durumda - tek tur hafızalı olmak zorunda değil - stratejilerin seçimi, n. turda bir $\mathbf{v}^n$ dağılım vektörü tanımlar. Bu durumda, $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}^k\right\}$ olasılık vektörleri dizisinin yakınsak olması gerekmez. Dizinin bir $\mathbf{v}$ limit noktası, strateji seçimleriyle ilgili bir **limit dağılımı** olarak adlandırılır. Bu şekildeki her limit dağılımı için ilgili uzun dönem getirisi (2.7) ile verilir. Limit dağılımı adı aşağıdaki gözlemden gelir.

Önerme 2.1 ([13]) *Eğer X ve Y oyuncuları, $\mathbf{M}$ Markov matrisini veren tek tur hafızalı planlar kullanırsa, oyun için bir $\mathbf{v}$ limit dağılımı, $\mathbf{M}$ için invaryant (değişmez) bir dağılımdır. Yani, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{M} = \mathbf{v}$ 'dir.*

Kanıt. Oyunun $(k+1)$. turunda i durumunun olma olasılığı v_i^{k+1}, $\sum_{j=1}^{4} v_j^k M_{ji}$ toplamına eşittir. Çünkü $v_j^k M_{ji}$, k. tur sonunda j durumunun olma olasılığı ile j'den i'ye hareketin durumsal olasılığının çarpımıdır. Buradan $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n \cdot \mathbf{M}$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}^k\right)\cdot\mathbf{M} - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}^k\right) = \frac{1}{n}(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^1) \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. $\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^1$ vektörünün her bir bileşeninin değeri mutlak değerce en fazla 1 olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^1\right) = \mathbf{0}$$

olur. Bu nedenle, her limit dağılımı $\mathbf{v}\cdot\mathbf{M} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlar. ■

Yukarıdaki önermeden elde edilen Sonuç 2.2, simetrik olmayan oyunda normalleştirilmiş getiriler üzerinden düzenlenen, iyi ve Nash tipi stratejilerin karakterizasyonunu veren Teorem 3.16'nın kanıtında kullanılmıştır.

Sonuç 2.2 ([13]) *X ve Y oyuncuları sırasıyla tek tur hafızalı $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ plan vektörlerini kullansın. $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$ vektörünün, M için bir invaryant dağılım ve bu yüzden bir limit dağılımı olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ plan vektörlerinin her ikisinin de anlaşmaya hazır olmasıdır.*

Kanıt. $\mathbf{e}_1$ vektörünün $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{M} = \mathbf{e}_1$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul M matrisinin ilk satırının (1, 0, 0, 0) olmasıdır. $0 \leq p_1, q_1 \leq 1$ olduğundan dolayı bu durum, $p_1 = q_1 = 1$ olmasına eş değerdir. ■

3. İYİ STRATEJİLER

3.1. İyi Stratejiler

Markov modeli üzerinde yapmış oldukları birçok çalışmadan dolayı, Press ve Dyson [8]'ın yeni fikirleri insanları etkilemiş ve bu fikirler birçok çalışmaya ilham vermiştir (Örneğin [2,11]). Press ve Dyson [8]'dan ilham alan Akin, İtere Tutuklu İkilemi'ne farklı bir bakış açısı kazandıran iyi (good) ve Nash tipi stratejileri tanımlamıştır [13,14].

Tanım 3.3 ([14]) *X oyuncusu için tek tur hafizalı bir* **p** *planı anlaşmaya hazır olsun. X oyuncusuna göre bir başlangıç oyunu, Y oyuncusu tarafindan seçilen bir strateji ve sonuçta oluşan bir limit dağılımı için*

$$s_Y \geq R \;\Rightarrow\; s_Y = R \;\; ve \;\; s_X = R \tag{3.1}$$

oluyorsa **p** *planı* ***iyi (good)*** *olarak adlandırılır.*

X oyuncusu için tek tur hafizalı bir **p** *planı anlaşmaya hazır olsun. X oyuncusuna göre bir başlangıç oyunu, Y oyuncusu tarafindan seçilen bir strateji ve sonuçta oluşan bir limit dağılımı için*

$$s_Y \geq R \;\Rightarrow\; s_Y = R \tag{3.2}$$

oluyorsa **p** *planı* ***Nash tipi*** *olarak adlandırılır.*

Tek tur hafizalı iyi bir plan, c başlangıç oyunu ile birlikte tek tur hafizalı iyi strateji olarak adlandırılır.

Bundan sonra tek tur hafızalı iyi strateji yerine iyi strateji ifadesi kullanılacaktır. X oyuncusunun, bir **p** iyi stratejisini kullandığını varsayalım. Eğer Y oyuncusu, anlaşmaya hazır bir strateji kullanırsa, oyuncular ortak iş birliği getirisini elde eder. Üstelik X oyuncusunun **p** stratejisine karşı, Y oyuncusu için ortak iş birliği getirisinden daha fazlasını elde edebileceği hiçbir strateji yoktur. Y oyuncusunun stratejisi, X oyuncusuna iş birliği getirisinden daha az kazandıracaksa, Y oyuncusu da iş birliği getirisinden daha az kazanır.

Tutuklu İkilemi'nde X oyuncusu bir iyi strateji kullanma niyetinde olduğunu duyurursa, Y oyuncusu iş birliği getirisinden daha iyi bir getiri elde edemez. Ortak iş birliği, Y oyuncusunun iş birliği getirisini elde etmesini sağlar. Bu noktada, ortak iş birliğinin dengede kalma ihtimali yüksektir. Anlaşmaya hazır olma oldukça güçlü bir teşvik edicidir. Bu nedenle Y oyuncusu büyük ihtimalle anlaşmaya hazır olacaktır. Ayrıca X oyuncusu bir duyuru yapmazsa, başlangıç turlarının istatistikleri X oyuncusu tarafından kullanılan bir tek tur hafızalı stratejinin girdilerini hesaplamak için kullanılabilir. Bu durum, X oyuncusunun bir iyi strateji kullandığını açığa çıkaracaktır. O halde Y oyuncusunun en iyi uzun dönem cevabı da iyi oynamaya başlamaktır.

Burada Y oyuncusu için önemli olan, her bir adımda iş birliğinden kaçma davranışından gelen geçici faydayı göz ardı ederek, sadece uzun dönem getirisini düşünmektir. Ayrıca Y oyuncusunun, X oyuncusunun kullandığı bir **p** iyi stratejisi karşı, her ne kadar iki oyuncu da iş birliği getirisinden daha az kazanacak olsa da Y oyuncusunun X oyuncusundan daha çok kazanabileceği bir strateji seçmesi mümkündür. Bu durumda Y oyuncusunun elde edeceği her kazanç, iş birliği getirisinden az olacaktır.

$$s_X < R \;\; \Rightarrow \;\; s_X < s_Y < R$$

olacak şekildeki iyi stratejilerin bu sınıfı [2]'te **uyumlu (complier) stratejiler** olarak adlandırılmıştır.

Bu noktada, oyun teorisinin evrimsel uygulamaları ve bunların bilgisayar turnuva modelleriyle tanıtılmış olan bakış açısı, üstü kapalı bir yolla problemi değiştirir. Evrimsel oyun teorisinde önemli olan, bir oyuncunun rakip oyuncularla karşılaştığında nasıl davrandığıdır. Bunu sadece iki oyuncuyla düşünelim ve her birine aynı getirileri veren stratejileri olduğunu varsayalım. Y oyuncusu getirileri karşılaştırarak, kendisinin daha yüksek getiri elde edebileceği bir stratejiye geçmeyi redderek X oyuncusunun kendisinden daha fazla getiri elde etmesine izin verebilir. Seçilen **özgeci (altruism)** davranışın bu biçimi, evrimsel teoride önemli bir problemdir. Diğer taraftan Y oyuncusu, nüfusun geri kalanında ne olduğuna bağlı olarak rakibini daha az getiri elde etmeye zorlamak için, ortak iş birliği getirisinden vazgeçerek kendisinin rakibinden daha yüksek bir getiri elde etmesini sağlayabilir. Evrimsel oyun teorisinde bu durum, **kin (spite)** olarak adlandırılır.

Evrimsel oyun teorisinde iyi stratejiler, [13]'de tanımlanan özelliklere sahiptir. Bu stratejiler, bir popülasyonda bütün alternatifleri eleme ihtiyacı duymazlar ve bazı durumlarda yenilmiş bile olabilirler. Buna rağmen klasik oyun teorisinde X oyuncusu, en yüksek mutlak getiriyi elde etmek ister ve Y oyuncusunun strateji seçimini öngörme bilgisi dışında rakibinin getirisi ile ilgilenmez. Bu durum, klasik bir problemdir.

Getirilerin gerçek değerlerle ölçülmesi gerekir. Getiriler, çoğu zaman para miktarlarıyla ya da orijinal "Tutuklu İkilemi" versiyonunda olduğu gibi hapis cezalarıyla belirtilir. Getirilerin amaca uygun olması önemlidir. Örneğin, X oyuncusu dc durumunda elde ettiği getiri ile ilgili suçlu hissettirilirse, dc durumunun X oyuncusuna sağladığı kazanç azaltılır. (2.2)'deki sıralama, bütün oyun durumları göz önüne alındığı zaman, her oyuncu için getirilerin arzu edilir sırası alınarak belirlenmiştir.

Getirileri ayarlamak iş birliği davranışını dengelemenin bir yoludur. X tutuklusunun d oynayarak beraat ettiğini, c oynayan Y tutuklusunun ise 5 yıl hapis yattığını varsayalım. Y kişisinin arkadaşları X kişisine zarar verebilir. Böyle bir olayın beklentisi, X kişisi için dc durumunun çekiciliğini azaltır. Eğer X ve Y kişilerinin her ikisi tehditkar arkadaşlara sahipse, her ikisinin de c oynamasını beklemek mantıklıdır ve bu durumda her biri

R getirisini elde eder. Buna rağmen, faydacılık açısından bu artık bir "Tutuklu İkilemi" değildir.

Oyuncuların getiri vektörlerinin (2.1.) ile tanımlandığı oyun, simetrik bir oyundur. Yani, her bir oyun durumu için oyuncu perspektifini değiştirme getirilerin yerlerini değiştirir. Fakat faydanın kişilerarası karşılaştırmasını hariç tutan bu tutum, fayda teorisi için anlamlı değildir. Çünkü kişiler için benzer durumda elde edecekleri getiriler, bireysel fayda açısından farklı olmalıdır. Bu bağlamda, simetrik olmayan Tutuklu İkilemi Tablo 3.1. ile temsil edilir.

$X \setminus Y$	c	d
c	(R_1,R_2)	(S_1,T_2)
d	(T_1,S_2)	(P_1,P_2)

Tablo 3.1. Simetrik olmayan IPD oyununda oyuncuların getiri tablosu [13]

Burada,

$$T_i > R_i > P_i > S_i \quad , \quad 2R_i > T_i + S_i, \quad (i = 1, 2) \tag{3.3}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İki oyuncu da iş birliğine giderek sessiz kalırsa, X ve Y oyuncuları sırasıyla R_1 ve R_2 ödülünü (Reward for cooperation) alırlar. Her ikisi de birbirini suçlarsa, X ve Y oyuncuları sırasıyla P_1 ve P_2 getirisini (Punishment for defection) alırlar. X oyuncusu iş birliğinde kaçar ve Y oyuncusu iş birliği yaparsa, X oyuncusu kendi getirileri arasında en büyük getiri olan T_1 getirisini (Temptation payoff) ve Y oyuncusu kendi getirileri arasında en küçük getiri olan S_2 getirisini (Sucker's payoff) elde eder. Tersine Y oyuncusu iş birliğinden kaçar ve X oyuncusu iş birliği yaparsa, Y oyuncusu kendi getirileri arasında en büyük getiri olan T_2 getirisini (Temptation payoff) ve X oyuncusu kendi getirileri arasında en küçük getiri olan S_1 getirisini (Sucker's payoff) elde eder.

Bir iyi (good) strateji ve bununla ilgili, nispeten daha zayıf, bir Nash tipi stratejinin tanımı Tanım 3.4 ile verilir.

Tanım 3.4 ([13]) *X oyuncusu için tek tur hafizalı bir* $\mathbf{p}$ *planı anlaşmaya hazır bir plan olsun. X oyuncusuna göre bir başlangıç oyunu, Y tarafindan seçilen bir strateji ve sonuçta oluşan bir limit dağılımı için*

$$s_Y \geq R_2 \;\Rightarrow\; s_Y = R_2 \;\; ve \;\; s_X = R_1 \tag{3.4}$$

oluyorsa p planı ***iyi (good)*** *olarak adlandırılır.*

X oyuncusu için tek tur hafizalı bir **p** *planı anlaşmaya hazır bir plan olsun. X oyuncusuna göre bir başlangıç oyunu, Y tarafindan seçilen bir strateji ve sonuçta oluşan limit dağılımı için*

$$s_Y \geq R_2 \;\Rightarrow\; s_Y = R_2 \tag{3.5}$$

oluyorsa p planı ***Nash tipi*** *olarak adlandırılır.*

Her iki oyuncu başlangıçta iş birliğine gider ve Nash tipi planlar kullanırsa, hiçbirinin strateji değiştirmek için daha iyi bir alternatifi olmayacağından dolayı “Nash tipi” ifadesi kullanılır. Burada stratejilerin çifti bir Nash dengesi sağlar.

3.2. İyi Stratejilerin Karakterizasyonu

Bu bölümde, öncelikle simetrik IPD oyunu için iyi ve Nash tipi stratejilerle ilgili bazı önerme ve teoremler verilmiştir. Oyuncuların getirileri üzerinden normalleştirme yapılarak düzenlenen önerme ve teoremler tekrar ele alınmıştır. Simetrik oyunda bir stratejinin iyi ve Nash tipi olabilmesi için gerekli şartları veren Teorem 3.8 ifade edilmiştir. Daha sonra, bu teoremin simetrik olmayan oyundaki karşılığı olan Teorem 3.13 ele alınmıştır. Son olarak, Teorem 3.13’te oyuncuların getirileri üzerinden normalleştirme yapılarak düzenlenen Teorem 3.16’nın kanıtı verilmiştir. Bu teorem kullanılarak, bilinen bazı stratejilerin simetrik olmayan IPD oyunununda iyi ve Nash tipi strateji olup olmadığı, verilen örnekte incelenmiştir.

Press-Dyson’ın makalesi [8], uzun dönemli getiriler üzerinde çalışılması için kullanışlı bir yöntem kazandırmıştır. $\mathbf{e}_{12} = (1,1,0,0)$ olmak üzere, X oyuncusuna ait tek tur hafizalı bir **p** planı için

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{e}_{12}$$

vektörü, **Press-Dyson vektörü** olarak tanımlanır.

Önteorem 3.5 ([14]) *X oyuncusu, tek tur hafizalı* **p** *plan vektörünü kullansın.* $\tilde{\mathbf{p}}$ *vektörü X oyuncusunun Press-Dyson vektörü olsun. Eğer Y oyuncusu, oyunun* $\{\mathbf{v}^n\}$ *dağılım vektörleri dizisini verdiği bir strateji kullanırsa,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{v}^k, \tilde{\mathbf{p}} >= 0 \tag{3.6}$$

olur. Ayrıca, bir **v** *limit dağılımı için,*

$$< \mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{p}} > = \; v_1\tilde{p}_1 + v_2\tilde{p}_2 + v_3\tilde{p}_3 + v_4\tilde{p}_4 \;=\; 0 \tag{3.7}$$

olur.

Kanıt. $v_{12}^k := v_1^k + v_2^k$, oyunun k. turundaki cc ya da cd durumlarının gerçekleşme olasılığı olsun. Yani $< \mathbf{v}^k, \mathbf{e}_{12} >$ ile tanımlanan v_{12}^k, X oyuncusunun k. turda c oynama olasılığıdır. Diğer taraftan X oyuncusu, tek tur hafızalı $\mathbf{p}$ planını kullanırken, $i = \overline{1,4}$ için mevcut turdaki i durumu verildiğinde p_i, bir sonraki turda X oyuncusunun c oynama olasılığıdır. Böylece $< \mathbf{v}^k, \mathbf{p} >$, $(k+1)$. turda X oyuncusunun c oynama olasılığıdır, yani v_{12}^{k+1}'dir. Bu durumda, $v_{12}^{k+1} - v_{12}^k =< \mathbf{v}^k, \tilde{\mathbf{p}} >$ olur. Buradan,

$$v_{12}^{n+1} - v_{12}^1 \ = \ \sum_{k=1}^{n} < \mathbf{v}^k, \tilde{\mathbf{p}} >$$

eşitliği elde edilir. Sol taraf mutlak değerce en fazla 1 olduğundan, (3.6) eşitliğinin sağlandığı görülür.

Ortalamaların bir alt dizisi $\mathbf{v}$'ye yakınsarsa, iç çarpımın sürekliliğinden, $< \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{p}} > = 0$ olur. ∎

Bu sonucun kullanımına örnek olarak bazı plan vektörleri incelenebilir.

TFT $= (1,0,1,0)$ plan vektörü ile birlikte [7]'de tanımlanmış olan diğer plan vektörü **Grim** $= (1,0,0,0)$ örnek olarak verilebilir. $\mathbf{p} = (1,1,0,0)$ ise $\tilde{\mathbf{p}} = (0,0,0,0)$ olmak üzere, her bir plan vektörünün **Repeat** $= (1,1,0,0)$ ile karması alınır.

Sonuç 3.6 ([14]) $0 < \alpha \leq 1$ *olsun.*

(a) $\mathbf{p} = \alpha \boldsymbol{TFT} + (1-\alpha)\boldsymbol{Repeat}$ *plan vektörü iyidir.*

(b) $\mathbf{p} = \alpha \boldsymbol{Grim} + (1-\alpha)\boldsymbol{Repeat}$ *plan vektörü iyidir.*

Kanıt.

(a) Bu durumda, $\tilde{\mathbf{p}} = \alpha(0,-1,1,0)$'dır ve (3.7) eşitliğinden,

$$v_2 = v_3 = \frac{1}{2}\big(v_2 + v_3\big)$$

olur. Buradan,

$$s_Y = v_1 R + \frac{1}{2}(v_2 + v_3)(T + S) + v_4 P$$

elde edilir. $v_2 = v_3 = v_4 = 0$ ve $v_1 = 1$ olmadıkça, $s_Y < R$ olur. Aksi takdirde, $s_X = R$ ve $s_Y = R$ olur. Bu nedenle $\mathbf{p}$ iyidir.

(b) $\tilde{\mathbf{p}} = \alpha(0,-1,0,0)$ için (3.7) eşitliğinden, $v_2 = 0$ olur. Buradan,

$$s_Y = v_1 R + v_3 S + v_4 P$$

olur. $v_3 = v_4 = 0$ ve $v_1 = 1$ olmadıkça, $s_Y < R$ elde edilir. Aksi halde, $s_X = R$ ve $s_Y = R$ olur. Bu durumda, $\mathbf{p}$ planı yine iyidir.

■

Teorem 3.7 ([14]) *Press-Dyson vektörü* $\tilde{\boldsymbol{p}} = \alpha \boldsymbol{S_X} + \beta \boldsymbol{S_Y} + \gamma \boldsymbol{1} + \delta \boldsymbol{e}_{23}$ *olan X oyuncusuna ait* $\boldsymbol{p}$ *planı, Y oyuncusunun* $\boldsymbol{p}$ *planına karşı seçtiği bir strateji ve* $\boldsymbol{v}$ *limit dağılımı için oyuncuların ortalama getirileri*

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma + \delta v_{23} = 0 \tag{3.8}$$

olarak verilen Press-Dyson eşitliğini sağlar.

Şimdi, [14]'te simetrik oyunda iyi ve Nash tipi stratejiler için karakterize edilen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.8 ([14]) $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *vektörü, X için -Repeat hariç- anlaşmaya hazır bir plan olsun. Yani,* $p_1 = 1$ *fakat* $\boldsymbol{p} \neq (1,1,0,0)$ *olsun.*

$\boldsymbol{p}$ *plan vektörünün Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{T-R}{R-S} \cdot p_3 \leq (1-p_2) \quad ve \quad \frac{T-R}{R-P} \cdot p_4 \leq (1-p_2) \tag{3.9}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

$\boldsymbol{p}$ *plan vektörünün iyi olması için gerek ve yeter koşul her iki eşitsizliğin kesin olarak sağlanmasıdır.*

Teorem 3.9 ([14]) *Press-Dyson vektörü* $\tilde{\boldsymbol{p}} = \alpha \boldsymbol{S_X} + \beta \boldsymbol{S_Y} + \gamma \boldsymbol{1} + \delta \boldsymbol{e}_{23}$ *olan X oyuncusuna ait* $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *vektörü -Repeat hariç- anlaşmaya hazır bir plan olsun. Yani,* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0)$ *olsun.*

$\boldsymbol{p}$ *planının Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\max\left\{\frac{\delta}{T-S}, \frac{\delta}{2R-(T+S)}\right\} \leq \alpha \tag{3.10}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$\boldsymbol{p}$ *planının iyi olması için gerek ve yeter koşul eşitsizliğin kesin olarak sağlanmasıdır.*

IPD oyununda getirileri normalleştirmek birçok açıdan kullanışlıdır. Özellikle teoremlerin ispatında kolaylık sağlar. Bu nedenle simetrik oyunu normalleştirmek için getirilerden S çıkartılıp, getiriler $T-S$ ile bölünür. Bu durumda, getiriler arasında

$$0 < P < R < 1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2} < R,$$

sıralama ilişkileri geçerli olur.

Normalleştirilmiş simetrik oyun, Tablo 3.2. ile verilir.

$X \setminus Y$	c	d
c	(R,R)	$(0,1)$
d	$(1,0)$	(P,P)

Tablo 3.2. Normalleştirilmiş simetrik IPD oyununda getiri tablosu [14]

Normalleştirilmiş getiri vektörlerini kullanarak Press-Dyson temsilini ele alalım. Eğer

$$\tilde{\mathbf{p}} = \alpha \mathbf{S_X} + \beta \mathbf{S_Y} + \gamma \mathbf{1} + \delta \mathbf{e}_{23}$$

vektörü, X oyuncusuna ait $\mathbf{p}$ planının Press-Dyson vektörü ise iki kısıtlama biçimini sağlamak zorundadır. Bunlardan ilki ölçü kısıtıdır. Ölçü kısıtına göre, Press-Dyson vektörünün girdilerinin değeri en çok 1'dir. İkincisi

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)R+\gamma &\leq 0, \\ \beta+\gamma+\delta &\leq 0, \\ \alpha+\gamma+\delta &\geq 0, \\ (\alpha+\beta)P+\gamma &\geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ile verilen işaret kısıtlarıdır.

Önteorem 3.10 ([14]) *Eğer $\tilde{\boldsymbol{p}} = \alpha \boldsymbol{S_X} + \beta \boldsymbol{S_Y} + \gamma \boldsymbol{1} + \delta \boldsymbol{e}_{23}$ vektörü işaret kısıtlarını sağlarsa*

$$\begin{aligned} \alpha+\beta \leq 0 \quad ve \quad \gamma \geq 0, \\ \alpha+\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma = 0 \end{aligned}$$

olur.

$\mathbf{p}$ anlaşmaya hazır ise $\tilde{p}_1 = 0$'dır ve $(\alpha+\beta)R+\gamma = 0$ gelir. Buradan,

$$\beta = -\alpha - \gamma R^{-1}$$

alınarak Teorem 3.7'un aşağıdaki sonucu gösterilebilir.

Sonuç 3.11 ([14]) *Press-Dyson vektörü $\tilde{\boldsymbol{p}} = \alpha \boldsymbol{S_X} + \beta \boldsymbol{S_Y} + \gamma \boldsymbol{1} + \delta \boldsymbol{e}_{23}$ olan X oyuncusuna ait $\boldsymbol{p}$ planı anlaşmaya hazır bir plan ise, bir limit dağılımı ile getiriler*

$$\gamma R^{-1} s_Y + \alpha(s_Y - s_X) - \delta v_{23} = \gamma \tag{3.11}$$

Press-Dyson eşitliğini sağlar.

Normalleştirmeden sonra Teorem 3.9 aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 3.12 ([14]) *Press-Dyson vektörü* $\tilde{\boldsymbol{p}} = \alpha \boldsymbol{S_X} + \beta \boldsymbol{S_Y} + \gamma \boldsymbol{1} + \delta \boldsymbol{e}_{23}$ *olan X oyuncusuna ait* $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *vektörünün -Repeat hariç- anlaşmaya hazır bir plan olduğunu varsayalım. Yani,* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0)$ *olsun.* $\boldsymbol{p}$ *planının Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\max\left\{\delta, \frac{\delta}{2R-1}\right\} \leq \alpha \tag{3.12}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır. p planının iyi olması için gerek ve yeter koşul eşitsizliklerinin kesin olarak sağlanmasıdır.

Kanıt. $\beta = -\alpha - \gamma R^{-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(1-p_2) &= -\tilde{p}_2 & p_3 &= \tilde{p}_3 & p_4 &= \tilde{p}_4 \\ &= -\beta - \gamma - \delta & &= \alpha + \gamma + \delta, & &= \frac{R-P}{R}\gamma \\ &= \alpha + \frac{1-R}{R}\gamma - \delta, & & & &\end{aligned}$$

elde edilir.

$(1-R)p_3 \leq R(1-p_2)$ eşitsizliğinden

$$(1-R)(\alpha + \gamma + \delta) \leq R\alpha + (1-R)\gamma - R\delta$$

olur. Buradan $\dfrac{\delta}{2R-1} \leq \alpha$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$(1-R)p_4 \leq (R-P)(1-p_2)$$

eşitsizliğinden $\delta \leq \alpha$ olur. ■

$\kappa = \dfrac{\alpha R}{\gamma + \alpha R}$ olmak üzere ZD durumunda, $\delta = 0$ olduğu zaman (3.11) eşitliği

$$\kappa(s_X - R) = s_Y - R \tag{3.13}$$

haline gelir. $\alpha > 0$ durumu, $0 < \kappa \leq 1$ durumuna eşdeğerdir. [2]'de bu stratejiler tanıtılmış ve **complier(uyumlu) stratejiler** olarak adlandırılmıştır. (3.13) eşitliği, $\kappa > 0$ için iyi stratejilere karşılık gelir.

Şimdi, [13]'te simetrik olmayan oyunda iyi ve Nash tipi stratejiler için karakterize edilen aşağıdaki genişlemeyi verelim.

Teorem 3.13 ([13]) $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$*, X için -Repeat hariç- anlaşmaya hazır bir plan vektörü olsun. Yani,* $p_1 = 1$ *fakat* $\boldsymbol{p} \neq (1,1,0,0)$ *olsun.*

$\boldsymbol{p}$ *plan vektörünün Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{T_2 - R_2}{R_2 - S_2} \cdot p_3 \leq (1-p_2) \quad ve \quad \frac{T_2 - R_2}{R_2 - P_2} \cdot p_4 \leq (1-p_2) \tag{3.14}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

***p** plan vektörünün iyi olması için gerek ve yeter koşul her iki eşitsizliğin kesin olarak sağlanmasıdır.*

Sonuç 3.14 ([13]) *(a)* $\frac{T_2-R_2}{R_2-S_2} < 1$ *olduğundan dolayı* p_2 *değeri sıfıra yeterince yakın alınırsa ilk eşitsizlik sağlanır.*

(b) Simetrik oyunlarda olduğu gibi, Repeat dahil tek tur hafizalı Nash tipi planlar kapalı, konveks bir küme oluşturur ([13] Sonuç 1.6'ya bakınız). Nash tipi planların (Repeat dahil), anlaşmaya hazır tek tur hafizalı planlar kümesindeki içi, iyi tek tur hafizalı planlar kümesidir.

Repeat $= (1,1,0,0)$, Nash tipi olmayan anlaşmaya hazır bir plan vektörüdür. Eğer her iki oyuncu da Repeat stratejisini kullanırsa, başlangıç getirisi sonsuza kadar devam eder. Eğer X oyuncusu başlangıçta iş birliğine gider ve Y oyuncusu iş birliğinden kaçarsa, başlangıç turunda cd durumu oluşur ve bu durum her tur için tekrar eder. Oyuncuların getirileri $s_Y = T_2$ ve $s_X = S_1$ olur. Bu durum, Repeat stratejisinin Nash tipi olmadığını gösterir. **p** planının Nash tipi olabilmesi için $s_Y \geq R_2$ iken $s_Y = R_2$ olması gerekirdi.

Teorem 3.13 ile verilen eşitsizlikler, X oyuncusunun bu eşitsizliklere göre belirleyeceği iyi stratejinin, Y oyuncusuna ait getiri değerlerine bağlı olduğunu gösterir. Burada X oyuncusunun amacı, Y oyuncusunun elde edeceği getiriyi kısıtlamak olmalıdır. O halde X oyuncusu, hangi strateji ile oynayacağını seçmek için Y oyuncusunun getirisini göz önünde bulundurmak durumundadır.

Simetrik olmayan oyun için ifade edilen Teorem 3.13, kullanışlı olması bakımından getiriler normalleştirildikten sonra ispatlanır. Bunun için, simetrik olmayan oyunda i. oyuncu için (i=1,2 olmak üzere), getirilerden S_i çıkartılıp $T_i - S_i$ ile bölünerek oyuncuların getirileri ayarlanır.

$$0 < P_i < R_i < 1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2} < R_i, \quad (i = 1,2)$$

olmak üzere, normalleştirilmiş simetrik olmayan oyun Tablo 3.2. ile verilir.

$X \setminus Y$	c	d
c	(R_1,R_2)	(0,1)
d	(1,0)	(P_1,P_2)

Tablo 3.2. Normalleştirilmiş simetrik olmayan IPD oyununda getiri tablosu [13]

Önerme 3.15, simetrik olmayan oyunda normalleştirilmiş getiriler üzerinden düzenlenen, iyi ve Nash tipi stratejilerin karakterizasyonunu veren Teorem 3.16'nın kanıtında kullanılmıştır.

Önteorem 3.15 ([13]) *s_X ve s_Y, $\mathbf{v}$ dağılım vektörü ile ilgili getiriler olsun. Aşağıdakiler eş değerdir.*

(i) $s_Y \geq R_2$ *ve* $s_X \geq R_1$.

(ii) $\mathbf{v} = (1,0,0,0)$.

(iii) $s_Y = R_2$ *ve* $s_X = R_1$.

Kanıt. (i) ve (iii) durumları, her oyuncunun ayrık pozitif afin dönüşümleriyle korunur. (ii) durumu getirilere bağlı değildir. Bu nedenle Tablo 3.2. ile verilen normalleştirilmiş getiriler kullanılarak kanıt yapılabilir.

v vektörü ile

$$\frac{1}{2}(\mathbf{S_Y} + \mathbf{S_X}) = \left(\frac{1}{2}(R_1 + R_2), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\right)$$

vektörünün iç çarpımını alalım. $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, sağ taraftaki maksimum getiridir. Buradan

$$\frac{1}{2}(s_Y + s_X) \leq \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \tag{3.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{v} = (1,0,0,0)$ olmasıdır.

$(i) \Rightarrow (ii)$: (i) ve (3.15) eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{2}(s_Y + s_X) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

olduğu görülür ve bu yüzden $\mathbf{v} = (1,0,0,0)$ olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ ve $(iii) \Rightarrow (i)$: Açıktır. ■

Teorem 3.13 ile verilen $\frac{T_2-R_2}{R_2-S_2}$ ve $\frac{T_2-R_2}{R_2-P_2}$ oranları, pozitif afin dönüşüme bağlı olmakla birlikte, değişmez. Bu yüzden, getirilerin seçiminden bağımsızdır. İyi strateji ve Nash tipi stratejinin tanımı, benzer şekilde değişmez. Böylece, Tablo 3.2. ile verilen getirileri kullanmak için, (3.14) eşitsizlikleriyle normalleştirme yapılabilir. Normalleştirmeden sonra, Teorem 3.13 aşağıdaki gibi olur.

Teorem 3.16 ([13]) *$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, X için -Repeat hariç- anlaşmaya hazır bir plan vektörü olsun. Yani, $p_1 = 1$ fakat $\mathbf{p} \neq (1,1,0,0)$ olsun.*

***p** plan vektörünün Nash tipi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1-R_2}{R_2} \cdot p_3 \leq (1-p_2) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2} \cdot p_4 \leq (1-p_2) \tag{3.16}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

***p** plan vektörünün iyi olması için gerek ve yeter koşul her iki eşitsizliğin kesin olarak sağlanmasıdır.*

Kanıt. Öncelikle $p_2 = 1$ olasılığı elenir. Eğer $1 - p_2 = 0$ ise, eşitsizlikler $p_3 = p_4 = 0$ olmasını gerektirir ve bu yüzden $\mathbf{p} = \mathbf{Repeat}$ olur. Ancak $\mathbf{p}$, *Repeat*'ten farklı seçilmişti.

Diğer taraftan, eğer $p_2 = 1$ ise, $\mathbf{p} = (1, 1, p_3, p_4)$ olur. X oyuncusu başlangıçta c oynar ve buna karşı Y oyuncusu, d başlangıç oyunu ile $\mathbf{AllD} = (0,0,0,0)$ planını kullanırsa, $s_Y = 1$ ve $s_X = 0$ olmak üzere, oyun cd'de sabitlenir. Bu nedenle $\mathbf{p}$, Nash tipi değildir. Böylece $p_2 = 1$ ise, $\mathbf{p}$ Nash tipi değildir ve verilen eşitsizlikleri sağlamaz.

Şimdi $1 - p_2 > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} s_Y - R_2 &= (v_1R_2 + v_2 + v_4P_2) - (v_1R_2 + v_2R_2 + v_3R_2 + v_4R_2) \\ &= v_2(1 - R_2) - v_3R_2 - v_4(R_2 - P_2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. Elde edilen eşitlik, pozitif $(1 - p_2)$ sayısı ile çarpılarak, eş değer olarak

$$s_Y \geq R_2 \;\Leftrightarrow\; (1 - p_2)v_2(1 - R_2) \geq v_3(1 - p_2)R_2 + v_4(1 - p_2)(R_2 - P_2) \tag{3.18}$$

haline getirilir. $\tilde{p}_1 = 0$ olduğundan, Önteorem 3.5 ile verilen (3.7) denklemi,

$$v_2\tilde{p}_2 + v_3\tilde{p}_3 + v_4\tilde{p}_4 = 0$$

olmasını gerektirir ve bu yüzden

$$(1 - p_2)v_2 = v_3p_3 + v_4p_4 \tag{3.19}$$

olur. (3.19) eşitliği, (3.18) eşitsizliğinde yerine koyulup düzenlenir. Bu durumda

$$A = [p_3(1 - R_2) - (1 - p_2)R_2] \;\; ve \;\; B = [(1 - p_2)(R_2 - P_2) - p_4(1 - R_2)] \tag{3.20}$$

olmak üzere,

$$s_Y \geq R_2 \;\Leftrightarrow\; Av_3 \geq Bv_4 \tag{3.21}$$

çift gerektirmesi elde edilir.

(3.16) eşitsizlikleri, $A \leq 0$ ve $B \geq 0$ olmasına eşdeğerdir. Kanıt, aşağıdaki durumlardan elde edilir.

Durum(i) $A = 0, B = 0$: Bu durumda, $Av_3 = Bv_4$ eşitliği, Y oyuncusu tarafından seçilen keyfi bir strateji için sağlanır. Bu yüzden, keyfi bir $\mathbf{q}$ stratejisi için, $s_Y = R_2$ olur ve $\mathbf{p}$ Nash tipidir. Eğer Y oyuncusu, anlaşmaya hazır olmayan bir plan vektörü seçerse, Sonuç 2.2 gereği $v_1 \neq 1$ olur. Önteorem 3.15'ten, $s_X < R_1$ elde edilir. Bu nedenle $\mathbf{p}$, iyi değildir.

Durum(ii) $A < 0, B = 0$: $Av_3 \geq Bv_4$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $v_3 = 0$ olmasıdır. Eğer $v_3 = 0$ ise, $Av_3 = Bv_4$ ve bu yüzden $s_Y = R_2$ olur. Böylece $\mathbf{p}$ Nash tipidir.

Durum(iia) $B \leq 0$, keyfi A: Y oyuncusunun anlaşmaya hazır olmayan bir plan seçtiğini ve $v_3 = 0$ olduğunu varsayalım. Y oyuncusu, $\mathbf{AllD} = (0,0,0,0)$ planını kullanırsa, ilk turdan sonra dc hiçbir zaman oluşmaz. Y oyuncusunun böyle bir seçimiyle, $Av_3 \geq Bv_4$ ve bu yüzden $s_Y \geq R_2$ elde edilir. Sonuç 2.2'den, $v_1 \neq 1$ olur. Çünkü Y planı, anlaşmaya hazır değildi. Önteorem 3.15'ten, $s_X < R_1$ olur ve **p** iyi değildir. Ayrıca, $v_3 = 0, v_1 < 1, p_2 < 1$ ve $(1-p_2)v_2 = v_4 p_4$ iken $v_4 > 0$ olur. Bu yüzden $B < 0$ ise $Av_3 > Bv_4$ ve böylece $s_Y > R_2$ olur. Bu nedenle $B < 0$ olduğu zaman, **p** Nash tipi değildir.

Durum(iii) $A = 0, B > 0$: $Av_3 \geq Bv_4$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $v_4 = 0$ olmasıdır. Eğer $v_4 = 0$ ise $Av_3 = Bv_4$ ve $s_Y = R_2$ olur. Böylece, **p** Nash tipidir.

Durum(iiia) $A \geq 0$, keyfi B: Y oyuncusunun anlaşmaya hazır olmayan bir plan seçtiğini ve $v_4 = 0$ olduğunu varsayalım. Y oyuncusu, $(0,1,1,1)$ planını kullanırsa, ilk turdan sonra dd durumu hiçbir zaman oluşmaz. Y oyuncusunun böyle bir seçimiyle, $Av_3 \geq Bv_4$ ve bu yüzden $s_Y \geq R_2$ olur. Önceki durum gibi $v_1 \neq 1$, $s_X < R_1$ olmasını gerektirir ve **p** iyi değildir. Ayrıca, $v_4 = 0, v_1 < 1, p_2 < 1$ ve $(1-p_2)v_2 = v_3 p_3$ iken $v_3 > 0$ olur. Bu yüzden $A > 0$ ise $Av_3 > Bv_4$ ve böylece $s_Y > R_2$ olur. Bu nedenle $A > 0$ olduğu zaman, **p** Nash tipi değildir.

Durum(iv) $A < 0, B > 0$: $Av_3 \geq Bv_4$ eşitsizliği, $v_3 = v_4 = 0$ olmasını gerektirir. Bu yüzden, $(1-p_2)v_2 = v_3 p_3 + v_4 p_4 = 0$ elde edilir. $p_2 < 1$ olduğundan, $v_2 = 0$ olur. Bu nedenle $v_1 = 1$'dir. Yani, $s_Y \geq R_2$, $s_Y = R_2$ ve $s_X = R_1$ olmasını gerektirir. O halde, **p** iyidir. ■

Burada, bir iyi strateji seçmek için X oyuncusu tarafından kullanılan eşitsizliklerin, Y oyuncusuna ait getiri değerlerine bağlı olduğu gösterilmiştir. Yani X oyuncusunun amacının, Y oyuncusunun elde edeceği getiriyi kısıtlamak olduğu anlaşılır. Böylelikle X oyuncusu, hangi strateji ile oynayacağını seçmek için Y oyuncusunun getirisini hesaba katmak zorundadır.

Şimdi Teorem 3.16 eşitsizliklerini kullanarak, bilinen bazı plan vektörlerinin iyi ve Nash tipi planlar olup olmadığını örnek üzerinde inceleyelim:

Örnek 3.17 *İkinci oyuncunun normalleştirilmiş getirileri*

$$1 > R_2 > P_2 > 0 \;\; ve \;\; R_2 > \frac{1}{2} \tag{3.22}$$

olacak şekilde verilsin.

*i) **TFT** $= (1,0,1,0)$ plan vektörünü ele alalım. TFT plan vektörünün girdileri, Teorem 3.16 ile verilen* (3.16) *eşitsizliklerinde yerine yazıldığında*

$$\frac{1-R_2}{R_2} \cdot 1 \leq (1-0) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2} \cdot 0 \leq (1-0)$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1-R_2}{R_2} \leq 1 \quad ve \quad 0 \leq 1$$

olur ve bu eşitsizlikler kesin olarak sağlanır. TFT planı, hem Nash tipi hem de iyidir.

*ii) **Grim** $= (1,0,0,0)$ plan vektörünü ele alalım. Grim plan vektörünün girdileri,* (3.16) *eşitsizliklerinde yerine yazıldığında*

$$\frac{1-R_2}{R_2}\cdot 0 \leq (1-0) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2}\cdot 0 \leq (1-0)$$

elde edilir. Buradan,

$$0 \leq 1 \quad ve \quad 0 \leq 1$$

olur ve bu eşitsizlikler kesin olarak sağlanır. Grim planı, hem Nash tipi hem de iyidir.

*iii) **WSLS** $= (1,0,0,1)$ plan vektörünü ele alalım. WSLS plan vektörünün girdileri,* (3.16) *eşitsizliklerinde yerine yazıldığında*

$$\frac{1-R_2}{R_2}\cdot 0 \leq (1-0) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2}\cdot 1 \leq (1-0)$$

elde edilir ve

$$0 \leq 1 \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2} \leq 1$$

olur. Burada getiriler, $1-R_2 < R_2-P_2$ ise eşitsizlikler kesin olarak sağlanır. Bu durumda WSLS planı, hem Nash tipi hem de iyi olur. $1-R_2 = R_2-P_2$ ise WSLS planı Nash tipi olur ancak iyi plan olmaz. Aksi halde WSLS planı ne Nash tipi ne de iyi plandır.

*iv) **Lame** $= (1,1,1,0)$ plan vektörünü ele alalım. Lame plan vektörünün girdileri,* (3.16) *eşitsizliklerinde yerine yazıldığında*

$$\frac{1-R_2}{R_2}\cdot 1 \leq (1-1) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2}\cdot 0 \leq (1-1)$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1-R_2}{R_2} \leq 0 \quad ve \quad 0 \leq 0$$

olur. Birinci eşitsizliğin sol tarafi sıfirdan kesin büyük olduğu için sağlanmaz. Lame planı, ne Nash tipi ne de iyi plandır.

*v) **ALLC** $= (1,1,1,1)$ plan vektörünü ele alalım. ALLC plan vektörünün girdileri,* (3.16) *eşitsizliklerinde yerine yazıldığında*

$$\frac{1-R_2}{R_2}\cdot 1 \leq (1-1) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2}\cdot 1 \leq (1-1)$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1-R_2}{R_2} \leq 0 \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2} \leq 0$$

olur. İki eşitsizliğin de sol tarafi kesin olarak sıfirdan büyük olduğu için eşitsizlikler sağlanmaz. ALLC planı, ne Nash tipi ne de iyi plandır.

vi) $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* ***GTFT*** $= (1, \alpha, 1, \alpha)$ *plan vektörünü ele alalım. GTFT plan vektörünün girdileri,* (3.16) *eşitsizliklerinde yerine yazıldığında*

$$\frac{1-R_2}{R_2} \cdot 1 \leq (1-\alpha) \quad ve \quad \frac{1-R_2}{R_2-P_2} \cdot \alpha \leq (1-\alpha)$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha \leq \frac{2R_2-1}{R_2} \quad ve \quad \alpha \leq \frac{R_2-P_2}{1-P_2}$$

olur.

$$m = \min\left\{\frac{2R_2-1}{R_2}, \frac{R_2-P_2}{1-P_2}\right\}$$

olmak üzere, $\alpha < m$ *seçilirse eşitsizlikler kesin olarak sağlanır. Bu durumda, GTFT planı, hem Nash tipi hem de iyi olur.*

Not 3.18 ([13]) *Teorem 3.16 kanıtının* $A = 0, B = 0$ *durumunda (Durum(i)),* $s_Y = R_2$ *getirisi, Y oyuncusunun strateji seçiminden bağımsız olarak X oyuncusu tarafından kullanılan* ***p*** *planı tarafından belirlenmiştir. Genel olarak, bu yolla rakibin getirisini sabitleyen stratejiler, Press-Dyson [8] ve daha önce, Boerlijst, Nowak ve Sigmund [12] tarafından "**dengeleyici stratejiler(equalizer strategies)**" olarak tanımlanmıştır.* $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere anlaşmaya hazır dengeleyici stratejiler,*

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \alpha \cdot \left(0, -\frac{1-R_2}{R_2}, 1, \frac{R_2-P_2}{R_2}\right)$$

plan vektörüne sahiptir.

X oyuncusu, $A = 0$ *ya da* $B = 0$ *koşulunu sağlayan bir strateji kullanmak için, Y oyuncusunun kazancı hakkındaki bilgiye gereksinim duyar.*

Sonuç 3.19 ([13]) $p_2 < 1$ *olmak üzere* ***p*** *vektörü, X oyuncusu için anlaşmaya hazır bir plan vektörü olsun.*

(a) ***p*** *iyi ise, Y oyuncusunun anlaşmaya hazır olmayan bir* ***q*** *plan vektörünü kullanması, bu oyuncuyu* $s_Y < R_2$ *olan bir getiri elde etmeye zorlar.*

(b) ***p*** *iyi değilse, Y oyuncusu* $\boldsymbol{q} = (0,0,0,0)$ *veya* $\boldsymbol{q} = (0,1,1,1)$ *plan vektörlerinden en az birini kullanarak* $s_Y \geq R_2$ *olan bir getiri elde edebilir ve X oyuncusunu da* $s_X < R_1$ *olan bir getiri elde etmeye zorlar.*

(c) ***p*** *Nash tipi değilse, Y oyuncusu* $\boldsymbol{q} = (0,0,0,0)$ *veya* $\boldsymbol{q} = (0,1,1,1)$ *plan vektörlerinden en az birini kullanarak* $s_Y > R_2$ *olan bir getiri elde edebilir ve X oyuncusunu da* $s_X < R_1$ *olan bir getiri elde etmeye zorlar.*

Kanıt. (a): **p** iyi ise, $s_Y \geq R_2$ iken $s_Y = R_2$ ve $s_X = R_1$ olur. Buradan, $\mathbf{v} = (1,0,0,0)$ elde edilir. Sonuç 2.2'den, **p** planının yanı sıra **q** da anlaşmaya hazır bir plan vektörüdür. **q** planı anlaşmaya hazır değilse $s_Y < R_2$ olur. (b) ve (c) maddeleri, Teorem 3.16 kanıtının durumlarındaki analizden gelir. ■

Not 3.20 ([13]) $p_1 = p_2 = 1$ *olduğunda, X oyuncusu başlangıçta c ile oynarken Y oyuncusu d başlangıç oyunu ile* $\boldsymbol{q} = (0,0,0,0)$ *planını kullanırsa,* $s_Y = 1$ *ve* $s_X = 0$ *olmak üzere, oyunda cd durumu sabitlenir.*

4. SIFIR DETERMİNANT (ZD) STRATEJİLER

Markov modeli üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Bu konuda farklı fikirler ortaya çıkmayacağı düşünülürken, Press ve Dyson [8] birçok insana ilham kaynağı olmuştur. Steward-Plotkin [11] ve Hilbe-Nowak-Sigmund [2] dahil bu konuda pek çok çalışma yapılmıştır. Özellikle son yıllarda, İtere Tutuklu İkilemi'nde iyi ve Nash tipi stratejiler üzerine çalışmalar yoğunlaşmıştır. Yapılan çalışmaların çoğunda, bir kısmı iyi stratejilerin içinde olan, sıfır determinant (kısaca "ZD") stratejiler ele alınmıştır [2, 9, 11].

ZD stratejiler, bir oyuncuya tek taraflı olarak kendi getirisi ve rakibinin getirisi arasında bir lineer ilişki dayatmasına izin verir. Böylece her iki oyuncunun uzun vadeli getirilerini kontrol altında tutmayı başarır. ZD stratejiler, orijinal olarak klasik iki oyunculu oyun teorisinde tasarlanmış olmasına rağmen oyuncuların evrimleşen nüfuslarında da sonuçlara sahiptir. İtere Tutuklu İkilemi'nde ZD stratejiler için evrimsel bir bakış keşfedilmiştir. Son çalışmaların birçoğu, ZD stratejilerin bir alt kümesi olan zorba (extortion) stratejilerin evrimi üzerine odaklanmıştır. Zorba stratejiler, çok küçük nüfuslar hariç tüm gruplarda başarısız bulunmuştur. Bununla beraber, iş birliğinden kaçan rakipleri affeden, yine de evrimleşen nüfuslarda baskın olan ve cömert (generous) stratejiler diye adlandırılan ZD stratejilerin farklı bir alt kümesi tanımlanmıştır. En küçük nüfuslarda bile cömert stratejilerin, diğer stratejilerle yer değiştirilmeye karşı dirençli olup aynı zamanda anlaşmaya hazır olmayan bir ZD stratejisi ile de seçime bağlı olarak yer değiştirebildiği görülmüştür. Cömert stratejiler, ZD stratejiler uzayının dışına genellenebilir ve bu stratejiler saldırıya karşı dirençli kalırlar. Tüm IPD stratejiler kümesinin tamamında evrim oluştuğu zaman, seçilim orantısız bir şekilde cömert stratejileri destekler. Bazı rejimlerde cömert stratejiler, "Win-Stay-Lose-Shift" stretejisini içeren iyi bilinen İtere Tutuklu İkilemi stratejilerinin en başarılısından bile daha üstün performans sergiler [11].

Şimdi ZD stratejilerine giriş yapmak için Akin'ı takip ederek Y oyuncusu için Press Dyson'ın Steward-Plotkin [11] tarafından tekrar tanımlanan

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi \mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X} + (1-\chi)\kappa \mathbf{1} - \delta \mathbf{e}_{23}] \tag{4.1}$$

genellenmiş vektörünü alalım. Burada, $\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc}-1, q_{cd}, q_{dc}-1, q_{dd})$ şeklindedir. Sonuç olarak İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X + (1-\chi)\kappa - \delta v_{23} = 0 \tag{4.2}$$

eşitliğini sağlar. Akın, bir $(\phi, \chi, \kappa, \delta)$ seçimi için, İtere Tutuklu İkilemi'nde keyfi bir $\mathbf{q}$ stratejisinin üretilebildiğini göstermiştir. Burada $\delta = 0$ seçilirse, (4.1) ile verilen strateji, ZD stratejisine dönüşür.

Bu bölümde, öncelikle Press ve Dyson [8] tarafından tanımlanan ZD stratejiler ele alınmıştır. Akın ve Press-Dyson tarafından ele alınan iyi stratejilerle ZD stratejilerin kesişimi olan ve Steward-Plotkin [11] tarafından tanımlanan cömert stratejilerden bahsedilmiştir. Son olarak Press-Dyson [8] tarafından incelenen zorba stratejiler ifade edilmiştir.

Şimdi, öncelikle Press ve Dyson [8] tarafından ele alınan ZD stratejileri inceleyelim.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_1q_1 & p_1(1-q_1) & (1-p_1)q_1 & (1-p_1)(1-q_1) \\ p_2q_3 & p_2(1-q_3) & (1-p_2)q_3 & (1-p_2)(1-q_3) \\ p_3q_2 & p_3(1-q_2) & (1-p_3)q_2 & (1-p_3)(1-q_2) \\ p_4q_4 & p_4(1-q_4) & (1-p_4)q_4 & (1-p_4)(1-q_4) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

şeklinde verilen Markov matrisi için limit dağılım vektörü olan $\mathbf{v}$ vektörü, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{v}$ eşitliğini sağlar. $\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{I}$ olmak üzere, $\det(\mathbf{M}') = 0$ olur. Ayrıca

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{0}$$

eşitliği sağlanır. Cramer kuralına göre, bir $\mathbf{M}'$ matrisi ve bunun adjoint matrisi olan $Adj(\mathbf{M}')$ için

$$Adj(\mathbf{M}') \cdot \mathbf{M}' = \det(\mathbf{M}') \cdot I = \mathbf{0}$$

eşitliği geçerlidir. Bu nedenle, bu iki eşitlikten $Adj(\mathbf{M}')$ matrisinin her satırının $\mathbf{v}$ durum dağılım vektörü ile orantılı olduğu görülür. Dördüncü satırı seçildiğinde, $\mathbf{v}$ vektörünün bileşenleri $\mathbf{M}'$ matrisinin ilk üç sütunundan oluşturulan 3×3'lük matrislerin determinantı olarak alınabilir. $\mathbf{M}'$ matrisinin birinci sütunu, ikinci ve üçüncü sütununa eklenirse bu determinantlar değişmez. Bu nedenle Press-Dyson, keyfi bir dört-bileşenli $\mathbf{f}$ vektörünün Markov matrisinin sabit $\mathbf{v}$ vektörü ile iç çarpımının, $Adj(\mathbf{M}')$ matrisinin herhangi bir satırı ile $\mathbf{f}$ vektörünün çarpımına eşit olacağını ifade etmektedir. $Adj(\mathbf{M}')$ matrisinin dördüncü satırını seçerek $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{f}$ vektörünün çarpımını, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{f})$ şeklinde vermektedir. Burada $\mathbf{D}$, (4.6) ile gösterilen 4×4'lük determinanttır. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$, ikinci sütunu

$$\tilde{\mathbf{p}} = (p_1 - 1, p_2 - 1, p_3, p_4) \tag{4.4}$$

olan vektörün sadece X oyuncusunun kontrolü altında, üçüncü sütunu

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4) \tag{4.5}$$

olan vektörün sadece Y oyuncusunun kontrolü altında ve dördüncü sütununun $\mathbf{f}$ vektörünün kontrolü altında olduğu bir determinanttır.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} &= \mathbf{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \\ &= \det \begin{pmatrix} -1 + p_1q_1 & -1 + p_1 & -1 + q_1 & f_1 \\ p_2q_3 & -1 + p_2 & q_3 & f_2 \\ p_3q_2 & p_3 & -1 + q_2 & f_3 \\ p_4q_4 & p_4 & q_4 & f_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

X ve Y oyuncularının getiri vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{S_X} = (R,S,T,P) \text{ ve } \mathbf{S_Y} = (R,T,S,P)$$

biçimindedir. X ve Y oyuncularının mevcut durumda getirileri sırası ile

$$s_X = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{S_X})}{\mathbf{D}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{1})} \text{ ve } s_Y = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{S_Y})}{\mathbf{D}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{1})} \tag{4.7}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada **1**, tüm bileşenleri 1 olan vektördür. Bu eşitliklerde, paydalara ihtiyaç duyulur. Çünkü **v** vektörü, bileşenleri toplamı 1 olacak şekilde önceden normalleştirilmemiştir (mevcut bir olasılık vektörü için gerektiği gibi). (4.7) eşitliklerindeki s_X ve s_Y getirileri, ilgili $\mathbf{S_X}$ ve $\mathbf{S_Y}$ getiri vektörlerine lineer olarak bağlı oldukları için aynı durum, getirilerin lineer bir kombinasyonu olan

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma \;=\; \frac{\mathbf{D}(\mathbf{p},\mathbf{q},\alpha\mathbf{S_X} + \beta\mathbf{S_Y} + \gamma\mathbf{1})}{\mathbf{D}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{1})} \tag{4.8}$$

için de geçerlidir. (4.8) denkleminde, X ve Y oyuncularının her ikisi de paydaki determinantı tek taraflı olarak sıfır yapabilecek stratejileri seçme olasılığına sahiptir. X oyuncusu $\tilde{\mathbf{p}} = \alpha\mathbf{S_X} + \beta\mathbf{S_Y} + \gamma\mathbf{1}$ olan bir strateji ya da Y oyuncusu $\tilde{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{S_X} + \beta\mathbf{S_Y} + \gamma\mathbf{1}$ olan bir strateji seçerse, determinant 0 olur. Bu durumda, oyuncuların getirileri arasında

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma = 0 \tag{4.9}$$

şeklinde bir lineer ilişki geçerli olur. Press ve Dyson, bu stratejileri **ZD stratejiler** olarak tanımlamıştır [8]. **p** olasılık vektörlerinin her bileşeni $[0,1]$ aralığında olmak üzere, tüm ZD stratejileri uygulanabilir değildir. Bu stratejilerin özel bir durumda uygulanabilir olup olmadığı, uygulamanın özelliklerine bağlıdır.

İtere Tutuklu İkilemi'nde, oyuncuların strateji belirlemeleri için tek-tur hafızaya sahip oldukları kabul edilecektir. Press-Dyson ile Steward-Plotkin, tek-tur hafızalı oyuncular üzerinden analiz yapmışlardır. Press ve Dyson, iki oyuncunun getirileri arasında sabit, doğrusal ilişki sağlayan ZD stratejilerini yukarıdaki gibi tanımlamıştır. Steward ve Plotkin ise Press-Dyson vektörünü tekrar aşağıdaki gibi tanımlamıştır [11].

Y oyuncusunun strateji vektörü

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc}-1, q_{cd}, q_{dc}-1, q_{dd}) = (q_1-1, q_3, q_2-1, q_4)$$

olmak üzere, Akın'ı takip ederek Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi\mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X} + (1-\chi)\kappa\mathbf{1}] \tag{4.10}$$

genellenmiş vektörünü alalım. O halde İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X + (1-\chi)\kappa = 0 \tag{4.11}$$

eşitliğini sağlar. Yani, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusu,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1-\phi(1-\chi)(R-\kappa) \\ q_2 &= 1-\phi[T-\chi S-(1-\chi)\kappa] \\ q_3 &= \phi[\chi T-S+(1-\chi)\kappa] \\ q_4 &= \phi(1-\chi)(\kappa-P) \end{aligned}$$

biçimindeki stratejiyi kullanırsa, oyuncuların getirileri

$$\phi[s_X-\chi s_Y-(1-\chi)\kappa]=0 \tag{4.12}$$

lineer ilişkisini sağlayacaktır.

χ ve κ parametreleri, uygun bir strateji üretmek için

$$P \leq k \leq R \quad \text{ve} \quad \max\left\{\frac{\kappa-T}{\kappa-S}, \frac{\kappa-S}{\kappa-T}\right\} \leq \chi \leq 1$$

aralıklarında olmak zorundadır. (4.12) eşitliği, Press-Dyson tarafından tanıtılan ZD stratejiler uzayının tamamını tanımlar. $\kappa = P$ ve $\chi > 0$ için **zorba (extortion) stratejiler**, $\kappa = R$ ve $\chi > 0$ için **cömert (generous) stratejiler** bu uzay içindeki iki önemli alt kümedir [11].

Zorba stratejiler, ya zorba olan Y oyuncusunun X oyuncusundan daha yüksek bir getiri elde etmesini sağlar ($s_Y > s_X$) ya da her iki oyuncunun ortak iş birliğinden kaçma stratejisini seçtiği zaman $s_Y = s_X = P$ getirisini elde etmesine neden olur. Tersine cömert stratejiler, ya her iki oyuncunun $s_Y = s_X = R$ ortak işbirliği getirisini elde etmesini sağlar ya da cömert olan Y oyuncusunun rakibinden daha düşük bir getiri elde etmesine neden olur ($s_Y < s_X$).

4.1. Cömert (Generous) Stratejiler

Cömert stratejiler, ZD stratejiler uzayının bir alt kümesi olup uzun zamandır üzerinde çalışılan bir konudur. Steward-Plotkin [11], cömert strateji kullanan oyuncunun simetrik IPD oyununda rakibi ile kendi getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceğini göstermiştir. Bu bölümde, öncelikle simetrik IPD oyununda Steward-Plotkin [11] tarafından incelenen cömert stratejiler ele alınmıştır.

Daha önce simetrik IPD oyununda cömert stratejilerle ilgili yapılmış olan bu çalışmadan yola çıkılarak, cömert stratejiler simetrik olmayan IPD oyununa uyarlanmıştır. Yapılan incelemede, simetrik olmayan IPD oyununda, cömert strateji kullanan oyuncunun rakibi ile kendi getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceği şartlar belirlenmiştir. Cömert strateji kullanan oyuncunun getirisi hesaplanarak kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında nasıl bir lineer ilişki kurabileceği gösterilmiştir. Böylelikle, cömert stratejilerin simetrik olmayan IPD oyununa taşınabileceği görülmüş ve buradaki cömertlik karakterize edilmiştir.

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc} - 1, q_{cd}, q_{dc} - 1, q_{dd}) = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4) \tag{4.13}$$

olmak üzere, $\kappa = R$ için Press-Dyson'ın Steward-Plotkin [11] tarafından tekrar tanımlanan

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi \mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X} + (1-\chi)R\mathbf{1}] \tag{4.14}$$

genellenmiş vektörünü alalım. O halde İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X + (1-\chi)R = 0 \tag{4.15}$$

eşitliğini sağlar. Yani, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusu,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= 1 - \phi[(T-R) + \chi(R-S)] \\ q_3 &= \phi[(R-S) + \chi(T-R)] \\ q_4 &= \phi(1-\chi)(R-P) \end{aligned}$$

biçimindeki stratejiyi kullanırsa, oyuncuların getirileri

$$\phi[s_X - \chi s_Y - (1-\chi)R] = 0 \tag{4.16}$$

lineer ilişkisini sağlayacaktır.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq 1$ aralığında olmak zorundadır. Buna karşılık ϕ parametresi,

$$0 < \phi \leq \min\left\{ \frac{1}{T - R + \chi(R-S)}, \frac{1}{R - S + \chi(T-R)} \right\}$$

aralığında olmalıdır. Bu koşulları sağlayan $\mathbf{q}$ stratejisine **cömert strateji** denir. Y oyuncusu cömert strateji kullanırsa, oyuncular R getirisinden $1/\chi$ oranında daha az pay alırlar ve Y oyuncusu daha az kazanır. Bu strateji altında, Y oyuncusunun getirisi X oyuncusunun $\mathbf{p}$ stratejisine bağlıdır. X oyuncusu $\mathbf{p} = (1,1,1,1)$ stratejisini kullanarak tamamen iş birliğine gittiği zaman, her iki oyuncunun da getirileri maksimum olur. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında Y ve X oyuncularının getirileri sırasıyla,

$$s_Y = R \quad ve \quad s_X = R \tag{4.17}$$

olur.

Şimdi de İtere Tutuklu İkilemi'nin ZD stratejiler uzayındaki cömert stratejileri **hibe (donation)** oyununda ele alalım. Bunun için,

$$T = B,\ R = B - C,\ P = 0,\ S = -C \tag{4.18}$$

olsun. Y oyuncusunun strateji vektörü

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc} - 1, q_{cd}, q_{dc} - 1, q_{dd}) = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4)$$

olmak üzere, $\kappa = R = B - C$ alındığında Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi \mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X} + (1-\chi)(B-C)\mathbf{1}] \tag{4.19}$$

genellenmiş vektörü için İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X + (1-\chi)(B-C) = 0 \tag{4.20}$$

eşitliğini sağlar. O halde, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusunun stratejisi,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= 1 - \phi[C + \chi B] \\ q_3 &= \phi[B + \chi C] \\ q_4 &= \phi(1-\chi)(B-C)) \end{aligned}$$

haline gelir ve oyuncuların getirileri

$$\phi[s_X - \chi s_Y - (1-\chi)(B-C)] = 0 \tag{4.21}$$

lineer ilişkisini sağlar.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq 1$ aralığında olmalıdır. Buna karşılık ϕ parametresi, $0 < \phi \leq \frac{1}{B+\chi C}$ aralığında olmalıdır. Y oyuncusu cömert strateji kullanırsa, oyuncular $B-C$ getirisinden $1/\chi$ oranında daha az pay alır ve Y oyuncusu daha az kazanır. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında oyuncuların maksimum getirileri,

$$s_Y = B - C \quad ve \quad s_X = B - C \tag{4.22}$$

olur.

Simetrik hibe oyununda χ'nin belli bir aralıktaki seçimi için, cömert olan Y oyuncusu diğer oyuncudan $1/\chi$ kat daha az pay alır. Şimdi, simetrik olmayan (her iki oyuncunun getirilerinin farklı olduğu) oyunlarda χ parametresinin belli bir aralıktaki seçimi için cömert strateji kullanan bir oyuncu ile diğer oyuncunun durumunu inceleyeceğiz. Bunun için önce **simetrik olmayan hibe oyununu** ele alalım. Daha sonra genel durumu araştıracağız. X ve Y oyuncularının getiri değerleri

$$T_i = B_i,\ R_i = B_i - C_i,\ P_i = 0,\ S_i = -C_i \quad (i = 1,2)$$

olsun. Y oyuncusunun strateji vektörü

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc} - 1, q_{cd}, q_{dc} - 1, q_{dd}) = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4)$$

olmak üzere, $\kappa_i = B_i - C_i,\ i = 1,2$ alındığında Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi(\mathbf{S_Y} - (B_2 - C_2)\mathbf{1}) - (\mathbf{S_X} - (B_1 - C_1)\mathbf{1})] \tag{4.23}$$

genellenmiş vektörü için İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi\,(s_Y - (B_2 - C_2)) - (s_X - (B_1 - C_1)) = 0 \tag{4.24}$$

eşitliğini sağlar. O halde, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusunun stratejisi,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 \\ q_2 &= 1 - \phi[C_1 + \chi B_2] \\ q_3 &= \phi[B_1 + \chi C_2] \\ q_4 &= \phi[(B_1 - C_1) - \chi(B_2 - C_2)] \end{aligned}$$

haline gelir ve oyuncuların getirileri

$$\phi[(s_X - (B_1 - C_1) - \chi(s_Y - (B_2 - C_2))] = 0 \tag{4.25}$$

lineer ilişkisini sağlar.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq \min\left\{\frac{B_1 - C_1}{B_2 - C_2}, 1\right\}$ aralığında olmalıdır. Buna karşılık ϕ parametresi,

$$0 < \phi \leq \frac{1}{B_1 + \chi C_2}$$

aralığındadır. Y oyuncusu cömert strateji kullanırsa, oyuncular $B_2 - C_2$ ve $B_1 - C_1$ getirilerinden $1/\chi$ oranında daha az pay alır ve Y oyuncusunun kaybı daha fazla olur. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında oyuncuların maksimum getirileri,

$$s_Y = B_2 - C_2 \quad ve \quad s_X = B_1 - C_1 \tag{4.26}$$

olur.

Şimdi de **simetrik olmayan** hibe oyunundaki bu durumu **tüm IPD oyunlarında** ele alalım. Simetrik olmayan IPD oyununda cömert strateji kullanan oyuncu ile diğer oyuncunun elde edecekleri getirilerle ilgili durumu inceleyelim. X ve Y oyuncularının getiri vektörleri sırasıyla,

$$\mathbf{S_X} = (R_1, S_1, T_1, P_1) \;\; ve \;\; \mathbf{S_Y} = (R_2, T_2, S_2, P_2)$$

biçiminde olup kendi aralarındaki sıralama ilişkisini sağlasın. Y oyuncusunun strateji vektörü,

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc} - 1, q_{cd}, q_{dc} - 1, q_{dd}) = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4) \tag{4.27}$$

olmak üzere, $\kappa_i = R_i, \; i = 1,2$ için Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi(\mathbf{S_Y} - R_2\mathbf{1}) - (\mathbf{S_X} - R_1\mathbf{1})] \tag{4.28}$$

genellenmiş vektörünü alalım. O halde İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi(s_Y - R_2) - (s_X - R_1) = 0 \tag{4.29}$$

eşitliğini sağlar. Yani, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusu,

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1 \\
q_2 &= 1 - \phi[(T_1 - R_1) + \chi(R_2 - S_2)] \\
q_3 &= \phi[(R_1 - S_1) + \chi(T_2 - R_2)] \\
q_4 &= \phi[(R_1 - P_1) - \chi(R_2 - P_2)]
\end{aligned}$$

biçimindeki stratejiyi kullanırsa, oyuncuların getirileri

$$\phi[(s_X - R_1) - \chi(s_Y - R_2)] = 0 \tag{4.30}$$

lineer ilişkisini sağlayacaktır.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için

$$0 < \chi \leq \min\left\{\frac{R_1 - P_1}{R_2 - P_2}, 1\right\}$$

aralığında olmak zorundadır. Buna karşılık ϕ parametresi,

$$0 < \phi \leq \min\left\{\frac{1}{(T_1 - R_1) + \chi(R_2 - S_2)}, \frac{1}{(R_1 - S_1) + \chi(T_2 - R_2)}\right\}$$

aralığında olmalıdır. Y oyuncusu cömert strateji kullanırsa, oyuncular R_1 ve R_2 getirilerinden $1/\chi$ oranında daha az pay alır ve Y oyuncusunun kaybı daha fazla olur. Eğer

X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında oyuncuların maksimum getirileri,

$$s_Y = R_2 \quad ve \quad s_X = R_1 \tag{4.31}$$

olur.

Simetrik hibe oyununda, X ile Y oyuncusu iyi bilinen IPD stratejilerini kullanarak yarıştığı zaman, X oyuncusunun elde ettiği getiri tablosu Tablo 4.1. ile verilir. j stratejisini kullanan bir oyuncuya karşı i stratejisini kullanan X oyuncusunun getirisi, tablonun (i,j). konumunda bulunur. Zorba strateji $\mathbf{E_X}$ ile gösterilir. Cömert TFT stratejisi $\mathbf{GTFT} = (1, 1-C/B, 1, 1-C/B)$ biçimindedir.

	TFT	**WSLS**	$\mathbf{E_X}$	**All C**	**All D**	**GTFT**
TFT	$(B-C)/2$	$(B-C)/2$	0	$B-C$	0	$B-C$
WSLS	$(B-C)/2$	$B-C$	$\frac{(B^2-C^2)\chi}{(\chi+1)(B+C)}$	$(2B-C)/2$	$-C/2$	$B-C$
$\mathbf{E_X}$	0	$\frac{B^2-C^2}{(\chi+1)(B+C)}$	0	$\frac{B^2-C^2}{B+\chi C}$	0	$\frac{(B^2-C^2)\left(B-\phi C(\chi B+C)\right)}{B(B+\chi C)-\phi C(\chi B+C)^2}$
All C	$B-C$	$(B-2C)/2$	$\frac{(B^2-C^2)\chi}{B+\chi C}$	$B-C$	$-C$	$B-C$
All D	0	$B/2$	0	B	0	B
GTFT	$B-C$	$B-C$	$\frac{(B^2-C^2)\left(B-\phi C(\chi B+C)\right)\chi}{B(B+\chi C)-\phi C(\chi B+C)^2}$	$B-C$	$-C$	$B-C$

Tablo 4.1. Simetrik hibe oyununda, X ile Y oyuncusu iyi bilinen IPD stratejilerini kullanarak yarıştığı zaman, X oyuncusunun elde ettiği getiri tablosu [2]

Simetrik olmayan hibe oyununda, X ile Y oyuncusu iyi bilinen IPD stratejilerini kullanarak yarıştığı zaman, X oyuncusunun elde ettiği getiriler hesaplanarak Tablo 4.1. ile verelmiştir. j stratejisini kullanan bir oyuncuya karşı i stratejisini kullanan X oyuncusunun getirisi, tablonun (i,j). konumunda bulunmaktadır. Zorba strateji $\mathbf{E_X}$ ve cömert TFT stratejisi **GTFT** ile gösterilmiştir. X ve Y oyuncuları için cömert TFT stratejisi sırasıyla $\mathbf{GTFT} = (1, 1-C_2/B_2, 1, 1-C_2/B_2)$ ve $\mathbf{GTFT} = (1, 1-C_1/B_1, 1, 1-C_1/B_1)$ biçiminde elde edilir.

	TFT	WSLS	E_X	All C	All D	GTFT
TFT	$(B_1 - C_1)/2$	$(B_1 - C_1)/2$	0	$B_1 - C_1$	0	$B_1 - C_1$
WSLS	$(B_1 - C_1)/2$	$B_1 - C_1$	$\frac{(B_1B_2 - C_1C_2)\chi}{(B_2 - 2C_2)\chi - (2B_1 - C_1)}$	$(2B_1 - C_1)/2$	$-C_1/2$	$B_1 - C_1$
E_X	0	$\frac{B_1B_2 - C_1C_2}{(B_1 - 2C_1)\chi - (2B_2 - C_2)}$	0	$\frac{B_1B_2 - C_1C_2}{B_2 + \chi C_1}$	0	$B_1 - C_1$
All C	$B_1 - C_1$	$(B_1 - 2C_1)/2$	$\frac{(B_1B_2 - C_1C_2)\chi}{B_1 + \chi C_2}$	$B_1 - C_1$	$-C_1$	$B_1 - C_1$
All D	0	$B_1/2$	0	B_1	0	B_1
GTFT	$B_1 - C_1$	$B_1 - C_1$	$\chi(B_2 - C_2)$	$B_1 - C_1$	$-C_1$	$B_1 - C_1$

Tablo 4.1. Simetrik olmayan hibe oyununda, X ile Y oyuncusu iyi bilinen IPD stratejilerini kullanarak yarıştığı zaman, X oyuncusunun elde ettiği getiri tablosu

4.2. Zorba (Extortion) Stratejiler

Zorba stratejiler, ZD stratejiler uzayının diğer bir alt kümesi olup üzerinde epey çalışılmıştır. Press-Dyson [8], zorba strateji kullanan oyuncunun simetrik IPD oyununda rakibi ile kendi getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceğini göstermiştir. Bu bölümde, öncelikle simetrik IPD oyununda Press-Dyson [8] tarafından incelenen zorba stratejiler ele alınmıştır.

Daha önce simetrik IPD oyununda zorba stratejilerle ilgili yapılmış olan bu çalışmadan yola çıkılarak, zorba stratejiler simetrik olmayan IPD oyununa uyarlanmıştır. Yapılan incelemede, simetrik olmayan IPD oyununda, zorba strateji kullanan oyuncunun rakibi ile kendi getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceği şartlar belirlenmiştir. Zorba strateji kullanan oyuncunun getirisi hesaplanarak kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında nasıl bir lineer ilişki kurabileceği gösterilmiştir. Böylelikle, zorba stratejilerin simetrik olmayan IPD oyununa taşınabileceği görülmüş ve buradaki zorbalık karakterize edilmiştir.

Y oyuncusunun strateji vektörü

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc} - 1, q_{cd}, q_{dc} - 1, q_{dd}) = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4) \tag{4.32}$$

olmak üzere, $\kappa = P$ için Press-Dyson'ın Steward-Plotkin [11] tarafından tekrar tanımlanan

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi \mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X} + (1 - \chi)P\mathbf{1}] \tag{4.33}$$

genellenmiş vektörünü alalım. O halde İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X + (1-\chi)P = 0 \tag{4.34}$$

eşitliğini sağlar. Yani X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusu,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1-\phi(1-\chi)(R-P) \\ q_2 &= 1-\phi[(T-P)+\chi(P-S)] \\ q_3 &= \phi[(P-S)+\chi(T-P)] \\ q_4 &= 0 \end{aligned}$$

biçimindeki stratejiyi kullanırsa, oyuncuların getirileri

$$\phi[s_X - \chi s_Y - (1-\chi)P] = 0 \tag{4.35}$$

lineer ilişkisini sağlayacaktır.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq 1$ aralığında olmak zorundadır. Buna karşılık ϕ parametresi,

$$0 < \phi \leq \min\left\{\frac{1}{P-S+\chi(T-P)}, \frac{1}{T-P+\chi(P-S)}\right\}$$

aralığında olmalıdır. Burada, χ'ye **zorbalık faktörü**, **q** stratejisine ise **zorba strateji** denir. X ve Y oyuncuları, P getirisinin fazlasını $1/\chi$ oranında paylaşırlar ve Y oyuncusu daha fazla kazanır. Press-Dyson'ın da belirttiği gibi bu strateji altında, Y oyuncusunun getirisi X oyuncusunun **p** stratejisine bağlıdır. X oyuncusu $\mathbf{p} = (1,1,1,1)$ stratejisini kullanarak tamamen iş birliğine gittiği zaman, her iki oyuncunun da getirileri maksimum olur. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında Y oyuncusunun getirisi,

$$s_Y = \frac{R(T-S)+(T-R)(\chi P - P)}{(R-S)+(T-R)\chi} \tag{4.36}$$

olur. $T > R > P > S$ sıralamasının bir sonucu olarak pay ve paydadaki terimlerin hepsi pozitiftir. $\phi = 0$ durumuna izin verilir, fakat bu durum sadece $(1,1,0,0)$ stratejisini üretir.

Şimdi de İtere Tutuklu İkilemi'nin ZD stratejiler uzayındaki zorba stratejileri **hibe (donation)** oyununda ele alalım. Bunun için,

$$T = B,\ R = B-C,\ P = 0,\ S = -C \tag{4.37}$$

olsun. Y oyuncusu için

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc}-1, q_{cd}, q_{dc}-1, q_{dd}) = (q_1-1, q_3, q_2-1, q_4)$$

olmak üzere, $\kappa = P = 0$ alındığında Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi \mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X}] \tag{4.38}$$

genellenmiş vektörü için İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X = 0 \tag{4.39}$$

eşitliğini sağlar. O halde, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusunun stratejisi,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1 - \phi(1-\chi)(B-C) \\ q_2 &= 1 - \phi[B + \chi C] \\ q_3 &= \phi[C + \chi B] \\ q_4 &= 0 \end{aligned}$$

haline gelir ve oyuncuların getirileri

$$\phi[s_X - \chi s_Y] = 0 \tag{4.40}$$

lineer ilişkisini sağlar.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq 1$ aralığında olmalıdır. Buna karşılık ϕ parametresi, $0 < \phi \leq \frac{1}{B+\chi C}$ aralığındadır. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında zorba olan Y oyuncusunun getirisi,

$$s_Y = \frac{B^2 - C^2}{B + \chi C} \tag{4.41}$$

şeklinde olur. X oyuncusunun da getirisi bu değerin χ katıdır.

Simetrik hibe oyununda χ'nin belli bir aralıktaki seçimi için, zorba olan oyuncu diğer oyuncunun getirisinin $1/\chi$ katını kazanmaktadır. χ parametresi $(0,1]$ aralığında olduğu için Y oyuncusu daha fazla kazanır.

Simetrik IPD oyunlarının ZD stratejiler uzayının alt kümesi olan zorba stratejiler, genel durumda Press-Dyson tarafından incelenmiştir [8]. Bu stratejiler, hibe oyunu için Steward-Plotkin tarafından ele alınmıştır [11]. Bundan sonraki kısımda, zorba stratejiler için elde edilen sonuçların simetrik olmayan oyunlara taşınabilir olup olmadığı araştırılacaktır. Yani, "Simetrik olmayan (her iki oyuncunun getirilerinin farklı olduğu) oyun için de χ'nin belirli bir seçimi için zorba strateji kullanan bir oyuncunun diğer oyuncudan daha fazla kazanç sağlayabileceği garanti edilebilir mi?" sorusunun cevabı incelenecektir. Bunun için, önce **simetrik olmayan hibe oyununu** ele alalım. Daha sonra genel durumu araştıracağız. X ve Y oyuncularının getiri değerleri

$$T_i = B_i,\ R_i = B_i - C_i,\ P_i = 0,\ S_i = -C_i \quad (i = 1,2)$$

olsun. Y oyuncusunun strateji vektörü

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc}-1, q_{cd}, q_{dc}-1, q_{dd}) = (q_1-1, q_3, q_2-1, q_4)$$

olmak üzere, $\kappa_i = P_i = 0$, $i = 1,2$ alındığında Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi \mathbf{S_Y} - \mathbf{S_X}] \tag{4.42}$$

genellenmiş vektörü için İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi s_Y - s_X = 0 \tag{4.43}$$

eşitliğini sağlar. O halde, X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusunun stratejisi,

$$\begin{aligned} q_1 &= 1-\phi[(B_1-C_1)-\chi(B_2-C_2)] \\ q_2 &= 1-\phi[B_1+\chi C_2] \\ q_3 &= \phi[C_1+\chi B_2] \\ q_4 &= 0 \end{aligned}$$

haline gelir ve oyuncuların getirileri

$$\phi[s_X - \chi s_Y] = 0 \tag{4.44}$$

lineer ilişkisini sağlar.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq \min\left\{\frac{B_1-C_1}{B_2-C_2}, 1\right\}$ aralığında olmalıdır. Buna karşılık ϕ parametresi, $0 < \phi \leq \frac{1}{B_1+\chi C_2}$ aralığındadır. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında zorba olan Y oyuncusunun getirisi,

$$s_Y = \frac{B_1B_2 - C_1C_2}{B_1+\chi C_2} \tag{4.45}$$

şeklindedir. X oyuncusunun getirisi ise

$$s_X = \frac{(B_1B_2 - C_1C_2)\chi}{B_1+\chi C_2} \tag{4.46}$$

biçiminde elde edilir. O halde simetrik olmayan hibe oyununda da belli şartlar altında zorba strateji kullanan Y oyuncusunun X oyuncusunun $1/\chi$ katını kazanabileceği söylenebilir.

Şimdi de **simetrik olmayan** hibe oyunundaki bu durumu **tüm IPD oyunlarında** ele alalım ve simetrik olmayan IPD oyunlarında zorba strateji kullanan oyuncu ile diğer oyuncunun kazancı ile ilgili durumu inceleyelim. X ve Y oyuncularının getiri vektörleri sırasıyla,

$$\mathbf{S_X} = (R_1, S_1, T_1, P_1) \;\; ve \;\; \mathbf{S_Y} = (R_2, T_2, S_2, P_2)$$

biçiminde olup kendi aralarındaki sıralama ilişkisini sağlasın. Y oyuncusunun strateji vektörü,

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_{cc} - 1, q_{cd}, q_{dc} - 1, q_{dd}) = (q_1 - 1, q_3, q_2 - 1, q_4) \tag{4.47}$$

olmak üzere, $\kappa_i = P_i,\ i = 1,2$ için Press-Dyson'ın

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi(\mathbf{S_Y} - P_2\mathbf{1}) - (\mathbf{S_X} - P_1\mathbf{1})] \tag{4.48}$$

genellenmiş vektörünü alalım. O halde İtere Tutuklu İkilemi'nin uzun dönem getirileri,

$$\chi(s_Y - P_2) - (s_X - P_1) = 0 \tag{4.49}$$

eşitliğini sağlar. Yani X oyuncusu ile yarışan Y oyuncusu,

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1 - \phi[(R_1 - P_1) - \chi(R_2 - P_2)] \\
q_2 &= 1 - \phi[(T_1 - P_1) + \chi(P_2 - S_2)] \\
q_3 &= \phi[(P_1 - S_1) + \chi(T_2 - P_2)] \\
q_4 &= 0
\end{aligned}$$

biçimindeki stratejiyi kullanırsa, oyuncuların getirileri

$$\phi[(s_X - P_1) - \chi(s_Y - P_2)] = 0 \tag{4.50}$$

lineer ilişkisini sağlayacaktır.

χ parametresi, uygun bir strateji üretmek için $0 < \chi \leq \min\left\{\frac{R_1 - P_1}{R_2 - P_2}, 1\right\}$ aralığında olmak zorundadır. Buna karşılık ϕ parametresi,

$$0 < \phi \leq \min\left\{\frac{1}{(T_1 - P_1) + \chi(P_2 - S_2)}, \frac{1}{(P_1 - S_1) + \chi(T_2 - P_2)}\right\}$$

aralığında olmalıdır. X ve Y oyuncuları, P_1 ve P_2 getirilerinin fazlasını $1/\chi$ oranında paylaşırlar. Zorba olan Y oyuncusunun P_2 getirisi dışındaki payı, X oyuncusunun P_1 getirisi dışındaki payından daha fazla olur. Eğer X oyuncusu tamamen iş birliğine giderek getirisini maksimize etmeye karar verirse, bu strateji altında Y oyuncusunun getirisi,

$$s_Y = \frac{R_2(P_1 - S_1) + T_2(R_1 - P_1) + \chi P_2(T_2 - R_2)}{(R_1 - S_1) + (T_2 - R_2)\chi} \tag{4.51}$$

olur.

5. SİMETRİK OLMAYAN GÜRÜLTÜLÜ İTERE OYUNLAR

5.1. Oyunda Gürültü Kavramı

Oyun teorisinde, ZD stratejileriyle ilişkili sonuçların çoğu gürültünün olmadığı mükemmel bir çevrede elde edilmiştir. Press-Dyson'ın çalışmasına Steward-Plokin'in [9] yorumunda olduğu gibi önemli sorulardan biri şudur: "İtere oyunlarda gürültünün varlığında, ZD stratejileri bununla nasıl başa çıkar?" Gözlem hatalarından kaynaklı rastgele karışıklıklar, davranış hataları, biyolojik değişimler ve diğer tesadüfi olaylar gerçekte yaygın ve kaçınılmaz olduğu için oyun teorisinin stratejilerini ve sonuçlarını gürültünün varlığında geniş bir şekilde araştırmak çok önemlidir. Aslında, gürültülü itere (tekrarlı) oyunlara uzun zamandan beri çalışılmaktadır [9], [17] - [25]. [16]'da gürültü altında zorba stratejilere değinilmiştir. Bu çalışmalar, oyun teorisi ve sosyal etkileşimler üzerine yapılan ileri düzeydeki araştırmalar arasındadır.

Gürültülü tekrarlı oyunlardaki hatalar genellikle iki kategoriye ayrılır. İlki, oyuncu eylemlerinin hatayla gözlemlendiği **"algı hataları"** olarak adlandırılır. Algı hatalarına örnek olarak, arkadaşının yardım isteğine karşılık, çok çalıştığını ya da yardım etmek için fazla meşgul olduğunu söyleyen bir kişi karşı tarafta yanlış bir algıya sebep olabilir. Yani, karşıdaki kişi bu cevabı bir bahane üretme çabası olarak algılayabilir. Başka bir örnek olarak, bir kişi diğeri için iyi bir davranış sergilemek isteyebilir, fakat bu davranış kazara olumsuz bir şekilde sonuçlanabilir. Bu durum, yine diğer kişi tarafından yanlış algılanabilir. Özetle, bir davranışın sonucunun niyet edilenden farklı olması veya söylenen bir sözün yanlış yorumlanması karşı tarafta farklı bir algıya sebep olabilir. Yani algı hatası, kişinin söylediği sözün veya amaçladığı davranışın sonucunun, karşı tarafta uyandırdığı algı ile örtüşmemesidir.

İkinci hata kategorisi, oyuncuların hatalı bir şekilde harekete geçmesidir. Bunlar, **"uygulama hataları"** olarak adlandırılır (literatürde **"eylem hataları"**). Bir kişi harekete geçtiğinde bazı karışıklıklardan dolayı, seçmesi gerekenin yerine farklı bir eylemi seçebilir. Bu durum, bazı çalışmalarda iyi bilinen **"titreyen eller"** kavramı ile tanımlanmıştır [20], [21].

5.2. Gürültü Altında ZD Stratejisi

Bu bölümde Hao, Rong ve Zhou [16] tarafından tanımı verilen gürültülü simetrik IPD oyunu, gürültülü IPD oyununa uyarlanarak tekrar tanımlanmıştır. Daha sonra, gürültülü simetrik IPD oyununda [16]'da verilmiş olan gürültü altında zorba strateji tanımı, gürültülü simetrik olmayan IPD oyununa uyarlanmıştır.

X oyuncusunu $i = 1$ ve Y oyuncusunu $i = 2$ ile göstermek üzere, gürültülü ortamda simetrik olmayan İtere Tutuklu İkilemi'ni ele alalım. Her adımda, $i = 1,2$ için oyuncular, $a_i \in \{C, D\}$ eylemini kullansın. Oyuncular, doğrudan rakibinin hangi eylemi kullandığını göremez. Fakat özel bir $\omega_i \in \{c, d\}$ sinyalini gözlemler. Her oyuncunun ω_i sinyali, sadece iki oyuncunun eyleminden değil, aynı zamanda gürültüden de etkilenen olasılıksal bir değişkendir. Eylemler göz önüne alındığında, her sinyal profili pozitif bir $\pi(\omega \mid \mathbf{a})$ olasılığıyla oluşur. Burada, $\omega \in \{cc, cd, dc, dd\}$ ve $\mathbf{a} \in \{CC, CD, DC, DD\}$ sırasıyla "gözlenen sinyal profili" ve "eylem profilidir". Herhangi bir adımda, Y oyuncusu $a_Y = C$ (ya da $a_Y = D$) eylemini seçer fakat X oyuncusu bu eylemi $\omega_X = d$ (ya da $\omega_X = c$) olarak gözlemlerse, bu durum bir hata oluştuğu anlamına gelir. Hiçbir oyuncuda gözlem hatası olmama olasılığı τ, sadece birinde gözlem hatası olma olasılığı ε, ikisinde de gözlem hatası olma olasılığı ρ ile ifade edilir. $0 < \rho < \varepsilon < \tau$ olmak üzere, $\tau + 2\varepsilon + \rho = 1$ olduğu açıktır. Bu sıralama, her iki oyuncunun gözleminin doğru olma olasılığının daha büyük olduğu anlamına gelir.

Örneğin her iki oyuncu da C eylemini kullanırsa, CC eylem profiline ait sinyal dağılımı

$$\pi(cc \mid CC) = \tau \quad , \quad \pi(cd \mid CC) = \varepsilon,$$
$$\pi(dc \mid CC) = \varepsilon \quad , \quad \pi(dd \mid CC) = \rho$$

olur.

CC	$\omega_Y = c$	$\omega_Y = d$
$\omega_X = c$	τ	ε
$\omega_X = d$	ε	ρ

CD	$\omega_Y = c$	$\omega_Y = d$
$\omega_X = c$	ε	ρ
$\omega_X = d$	τ	ε

DC	$\omega_Y = c$	$\omega_Y = d$
$\omega_X = c$	ε	τ
$\omega_X = d$	ρ	ε

DD	$\omega_Y = c$	$\omega_Y = d$
$\omega_X = c$	ρ	ε
$\omega_X = d$	ε	τ

Tablo 5.2. Farklı eylem profilleri için sinyal dağılımları [16]

Tablo 5.2., tüm eylem profilleri altındaki sinyal dağılımlarını özetler. Oyuncuların eylemleri ve oyuncular tarafından gözlemlenen sinyaller baz alındığında, her bir oyuncu için mümkün durumlar $\{Cc, Cd, Dc, Dd\}$ kümesinin bir elemanıdır.

Rakibin eylemi kadar çevredeki rastgele değişiklikler de sinyalleri karıştırdığı için, her bir oyuncunun gerçekleşen durum getirisi olan $u_i(a_i, \omega_i)$, kişinin seçtiği eylem ve aldığı sinyale bağlıdır [17, 22, 26]. $i = 1,2$ için

$$u_i(C, c) = 1, \;\; u_i(C, d) = -L_i, \;\; u_i(D, c) = 1 + G_i \;\text{ ve }\; u_i(D, d) = 0$$

olmak üzere, gerçekleşen durum getirilerinin Tutuklu İkilemi'nin yapısına uygun olduğunu varsayalım. L_i ve G_i ($i = 1,2$) pozitif değişkenleri için

$$1 + G_i - L_i < 2$$

olmak üzere, her oyuncunun kendi getirileri arasındaki sıralama ilişkileri sağlanır. [22]'te verilen genel çerçeveye göre her durumda, iki oyuncu bir **a** eylem profiline sahip olduğu zaman, i oyuncusunun beklenen getirisi

$$f_i(\mathbf{a}) = \sum_{\omega} u_i(a_i, \omega_i)\pi(\omega \mid \mathbf{a}), \quad i = 1,2 \tag{5.1}$$

ile hesaplanır. $f_i(\mathbf{a})$, iki oyuncunun eylemleri sonucu, tüm mümkün sinyaller üzerinden elde edilen beklenen değerdir. CC, CD, DC ve DD biçimindeki farklı eylem profilleri altında beklenen getiriler sırasıyla R_i, S_i, T_i ve P_i ile ifade edilir. Bu getiriler, (5.1) eşitliğinden sırasıyla

$$\begin{aligned} R_i &= 1 - (1 + L_i)(\varepsilon + \rho) \\ S_i &= -L_i + (1 + L_i)(\varepsilon + \rho) \\ T_i &= (1 + G_i)(1 - (\varepsilon + \rho)) \\ P_i &= (1 + G_i)(\varepsilon + \rho) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. ε ve ρ yeterince küçük alınırsa, $i = 1,2$ için her iki oyuncunun getirileri arasındaki $T_i > R_i > P_i > S_i$ ve $2R_i > T_i + S_i$ sıralama ilişkileri sağlanır. X ve Y oyuncularının, beklenen durum getiri vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{S_X} = (R_1, S_1, T_1, P_1) \quad \text{ve} \quad \mathbf{S_Y} = (R_2, T_2, S_2, P_2)$$

şeklindedir.

Oyuncuların tek-tur hafızalı stratejileri olduğunu varsayalım. X oyuncusunun bir önceki Cc, Cd, Dc ve Dd durumlarına karşılık bir sonraki adımda iş birliği yapma olasılıkları, sırasıyla p_1, p_2, p_3 ve p_4; Y oyuncusunun bir önceki Cc, Cd, Dc ve Dd durumlarına karşılık bir sonraki adımda iş birliği yapma olasılıkları, sırasıyla q_1, q_2, q_3 ve q_4 ile verilir. İki oyuncunun seçtikleri eylemler sonucu, oyun durumları oluşur. Bir durumdan diğer duruma geçiş kuralını, gürültünün yapısı ve iki oyuncunun olasılıksal stratejileri belirler. Gözlem hataları, sadece geçiş olasılıklarını değiştirir. Fakat hiçbir değişiklik, oyunun gerçek durum uzayı olan $\{CC, CD, DC, DD\}$ kümesini değiştirmez.

Örneğin, bir önceki adımda oluşan durum CC ise, bir sonraki adımda CD durumuna geçiş olasılığı

$$\tau p_1(1 - q_1) + \varepsilon p_1(1 - q_2) + \varepsilon p_2(1 - q_1) + \rho p_2(1 - q_2)$$

biçimindedir. Burada $\tau p_1(1-q_1)$, her iki oyuncunun doğru sinyalleri gözlemlediği ve Y oyuncusunun yeni durumda D eylemini kullanırken, X oyuncusunun C eylemini kullandığı durumda oluşan olasılıktır. Benzer şekilde $\varepsilon p_1(1-q_2)$ ve $\varepsilon p_2(1-q_1)$, sadece bir oyuncunun hatalı gözlemlediği ve Y oyuncusunun yeni durumda D eylemini kullanırken, X oyuncusunun C eylemini kullandığı durumda oluşan olasılıktır. Son olarak $\rho p_2(1-q_2)$, her iki oyuncunun da gözlem hatalarına sahip olduğu ve Y oyuncusunun D eylemini kullanırken, X oyuncusunun C eylemini kullandığı durumda oluşan olasılıktır. Burada gürültü, CC durumunu (Cc,Cc), (Cc,Cd), (Cd,Cc) ve (Cd,Cd) kombinasyonlarına ayrıştırır. Benzer şekilde devam edilerek, gürültülü tekrarlı oyunda bir durumdan diğer duruma mümkün bütün geçişleri içeren $\mathbf{M}$ durum geçiş matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır (Bkz. Tablo 5.2.). Bu geçiş matrisinden görülebilir ki bu matris, daha kompleks olmasına rağmen hala bir olasılık matrisidir.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
\begin{array}{c}\tau p_1q_1\\+\varepsilon p_1q_2\\+\varepsilon p_2q_1\\+\rho p_2q_2\end{array} & \begin{array}{c}\tau p_1(1-q_1)\\+\varepsilon p_1(1-q_2)\\+\varepsilon p_2(1-q_1)\\+\rho p_2(1-q_2)\end{array} & \begin{array}{c}\tau(1-p_1)q_1\\+\varepsilon(1-p_1)q_2\\+\varepsilon(1-p_2)q_1\\+\rho(1-p_2)q_2\end{array} & \begin{array}{c}\tau(1-p_1)(1-q_1)\\+\varepsilon(1-p_1)(1-q_2)\\+\varepsilon(1-p_2)(1-q_1)\\+\rho(1-p_2)(1-q_2)\end{array}\\[2ex]
\begin{array}{c}\varepsilon p_1q_3\\+\rho p_1q_4\\+\tau p_2q_3\\+\varepsilon p_2q_4\end{array} & \begin{array}{c}\varepsilon p_1(1-q_3)\\+\rho p_1(1-q_4)\\+\tau p_2(1-q_3)\\+\varepsilon p_2(1-q_4)\end{array} & \begin{array}{c}\varepsilon(1-p_1)q_3\\+\rho(1-p_1)q_4\\+\tau(1-p_2)q_3\\+\varepsilon(1-p_2)q_4\end{array} & \begin{array}{c}\varepsilon(1-p_1)(1-q_3)\\+\rho(1-p_1)(1-q_4)\\+\tau(1-p_2)(1-q_3)\\+\varepsilon(1-p_2)(1-q_4)\end{array}\\[2ex]
\begin{array}{c}\varepsilon p_3q_1\\+\tau p_3q_2\\+\rho p_4q_1\\+\varepsilon p_4q_2\end{array} & \begin{array}{c}\varepsilon p_3(1-q_1)\\+\tau p_3(1-q_2)\\+\rho p_4(1-q_1)\\+\varepsilon p_4(1-q_2)\end{array} & \begin{array}{c}\varepsilon(1-p_3)q_1\\+\tau(1-p_3)q_2\\+\rho(1-p_4)q_1\\+\varepsilon(1-p_4)q_2\end{array} & \begin{array}{c}\varepsilon(1-p_3)(1-q_1)\\+\tau(1-p_3)(1-q_2)\\+\rho(1-p_4)(1-q_1)\\+\varepsilon(1-p_4)(1-q_2)\end{array}\\[2ex]
\begin{array}{c}\rho p_3q_3\\+\varepsilon p_3q_4\\+\varepsilon p_4q_3\\+\tau p_4q_4\end{array} & \begin{array}{c}\rho p_3(1-q_3)\\+\varepsilon p_3(1-q_4)\\+\varepsilon p_4(1-q_3)\\+\tau p_4(1-q_4)\end{array} & \begin{array}{c}\rho(1-p_3)q_3\\+\varepsilon(1-p_3)q_4\\+\varepsilon(1-p_4)q_3\\+\tau(1-p_4)q_4\end{array} & \begin{array}{c}\rho(1-p_3)(1-q_3)\\+\varepsilon(1-p_3)(1-q_4)\\+\varepsilon(1-p_4)(1-q_3)\\+\tau(1-p_4)(1-q_4)\end{array}
\end{bmatrix}$$

Tablo 5.2. Gürültülü tekrarlı oyunun 4×4 boyutlu geçiş matrisi [16]

$\mathbf{v}^n$, n. adımda oyunun $\{CC, CD, DC, DD\}$ durum uzayı üzerindeki olasılık dağılımı olsun. Olasılık dağılımları, $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n \cdot \mathbf{M}$ eşitliğinden elde edilir. $\mathbf{M}$ için limit dağılım vektörü $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{v}$ eşitliğini sağlar. $\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{I}$ olmak üzere, $\det(\mathbf{M}') = 0$ 'dır. Ayrıca

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{0}$$

eşitliği sağlanır. Cramer kuralına göre, bir $\mathbf{M}'$ matrisi ve bunun adjoint matrisi $Adj(\mathbf{M}')$ için

$$Adj(\mathbf{M}') \cdot \mathbf{M}' = \det(\mathbf{M}') \cdot I = \mathbf{0}$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle, bu iki eşitlikten $Adj(\mathbf{M}')$ matrisinin her sırası $\mathbf{v}$ durum dağılım vektörü ile orantılı olur. $\mathbf{M}'$ matrisinin son sütunu X oyuncusunun (R_1, S_1, T_1, P_1) durum getiri vektörü ile değiştirilerek yeni bir $\tilde{\mathbf{M}}$ matrisi elde edilir. Sonra, $\tilde{\mathbf{M}}$ matrisinin son sütunu üzerinde Laplace genişlemesi kullanılarak

$$\det(\tilde{\mathbf{M}}) = R_1.N_1 + S_1.N_2 + T_1.N_3 + P_1.N_4$$

eşitliği elde edilir. N_1, N_2, N_3 ve N_4 değişkenleri sırasıyla $\tilde{\mathbf{M}}$ matrisinin son sütunundaki R_1, S_1, T_1 ve P_1 değerlerine ilişkin işaretli minörlerdir. $Adj(\tilde{\mathbf{M}})$ matrisinin dördüncü sırası $\tilde{\mathbf{M}}$ matrisinin ilk üç sütunundan hesaplanır ve her zaman $\mathbf{v}$ ile orantılıdır. Bu yüzden X oyuncusunun beklenen getirisi $\det(\tilde{\mathbf{M}})$ kullanılarak hesaplanabilir. İkinci ve üçüncü sütunlara ilk sütunu eklemek bu determinantın yeni formunu verir. O halde $\det(\tilde{\mathbf{M}})$,

$$\begin{vmatrix} \tau p_1q_1+\varepsilon p_1q_2+\varepsilon p_2q_1+\rho p_2q_2-1 & (\tau+\varepsilon)p_1+(\varepsilon+\rho)p_2-1 & (\tau+\varepsilon)q_1+(\varepsilon+\rho)q_2-1 & R_1 \\ \varepsilon p_1q_3+\rho p_1q_4+\tau p_2q_3+\varepsilon p_2q_4 & (\varepsilon+\rho)p_1+(\tau+\varepsilon)p_2-1 & (\tau+\varepsilon)q_3+(\varepsilon+\rho)q_4 & S_1 \\ \varepsilon p_3q_1+\tau p_3q_2+\rho p_4q_1+\varepsilon p_4q_2 & (\tau+\varepsilon)p_3+(\varepsilon+\rho)p_4 & (\varepsilon+\rho)q_1+(\tau+\varepsilon)q_2-1 & T_1 \\ \rho p_3q_3+\varepsilon p_3q_4+\varepsilon p_4q_3+\tau p_4q_4 & (\varepsilon+\rho)p_3+(\tau+\varepsilon)p_4 & (\varepsilon+\rho)q_3+(\tau+\varepsilon)q_4 & P_1 \end{vmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu determinanttan görülebilir ki, ikinci sütun sadece X oyuncusunun ve üçüncü sütun Y oyuncusunun kontrolü altındadır. Determinantın bu yeni biçimi $D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{S_X})$ ile gösterilir. X oyuncusunun sabit durum altında normalleştirilmiş getiri değeri

$$s_X = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_X}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}} = \frac{D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{S}_X)}{D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{1})}$$

ile hesaplanır. Benzer şekilde Y oyuncusunun normalleştirilmiş getiri değeri

$$s_Y = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_Y}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{1}} = \frac{D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{S}_Y)}{D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{1})}$$

eşitliği ile hesaplanır. α, β ve γ katsayıları ile getiri değerlerinin bir lineer kombinasyonu

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma = \frac{D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha\mathbf{S}_X + \beta\mathbf{S}_Y + \gamma\mathbf{1})}{D(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{1})}$$

biçimindedir. Eğer X oyuncusu $\tilde{\mathbf{p}} = \alpha\mathbf{S_X} + \beta\mathbf{S_Y} + \gamma\mathbf{1}$ eşitliğini sağlayan bir strateji ya da Y oyuncusu $\tilde{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{S_X} + \beta\mathbf{S_Y} + \gamma\mathbf{1}$ eşitliğini sağlayan bir strateji seçerse determinant 0 olur. Buradan, iki getiri arasında

$$\alpha s_X + \beta s_Y + \gamma = 0 \tag{5.2}$$

şeklinde lineer bir ilişki söz konusu olacaktır. Böyle bir ilişki, X oyuncusu $\tilde{\mathbf{p}}$ stratejisini seçerse, buna karşılık

$$\begin{aligned}
(\tau+\varepsilon)p_1+(\varepsilon+\rho)p_2-1 &= \alpha R_1+\beta R_2+\gamma \\
(\varepsilon+\rho)p_1+(\tau+\varepsilon)p_2-1 &= \alpha S_1+\beta T_2+\gamma \\
(\tau+\varepsilon)p_3+(\varepsilon+\rho)p_4 &= \alpha T_1+\beta S_2+\gamma \\
(\varepsilon+\rho)p_3+(\tau+\varepsilon)p_4 &= \alpha P_1+\beta P_2+\gamma
\end{aligned} \tag{5.3}$$

lineer denklem sistemine veya Y oyuncusu $\tilde{\mathbf{q}}$ stratejisini seçerse, buna karşılık

$$\begin{aligned}
(\tau+\varepsilon)q_1+(\varepsilon+\rho)q_2-1 &= \alpha R_1+\beta R_2+\gamma \\
(\tau+\varepsilon)q_3+(\varepsilon+\rho)q_4 &= \alpha S_1+\beta T_2+\gamma \\
(\varepsilon+\rho)q_1+(\tau+\varepsilon)q_2-1 &= \alpha T_1+\beta S_2+\gamma \\
(\varepsilon+\rho)q_3+(\tau+\varepsilon)q_4 &= \alpha P_1+\beta P_2+\gamma
\end{aligned} \tag{5.4}$$

lineer denklem sistemine uygun bir çözüm gerektirir. (5.3) sistemi uygun çözüme sahip ise X oyuncusunun, (5.4) sistemi uygun çözüme sahip ise Y oyuncusunun kendi getirisi ve rakibinin getirisi arasında bir lineer ilişki oluşturması için stratejisini ayarlayabilmesi mümkün olacaktır. Bu tek taraflı kontrol stratejisi, determinantı "0" yaptığı için, böyle stratejiye "**gürültü altında ZD strateji**" (kısaca **NZD**) denilmektedir [16]. Gürültü olmadığı zaman (yani $\tau = 1, \varepsilon = 0, \rho = 0$), NZD strateji orijinal ZD stratejisine karşılık gelmektedir [8].

5.3. Gürültü Altında Zorba Strateji

Hao, Rong ve Zhou [16] gürültülü simetrik IPD oyununda ZD stratejilerin bir alt kümesi olan zorba stratejileri tanımlamıştır. Burada, güçlü zorba strateji olmadığını ve zorbalığın şiddeti azaltıldığı takdirde zayıf zorba strateji üretilebileceğini göstermiştir. Simetrik gürültülü IPD oyununda, zayıf zorba strateji kullanan oyuncunun belli şartlar altında rakibi üzerinde zayıf bir zorbalık kurarak kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceğini görmüştür.

Gürültülü simetrik IPD oyununda yapılan bu çalışmadan yola çıkılarak, tez çalışmasının son kısmında zorba stratejiler simetrik olmayan gürültülü IPD oyununa uyarlanmıştır. Burada benzer şekilde güçlü zorba stratejinin olmadığı ve zorbalığın gücü azaltıldığı takdirde zayıf zorba strateji üretilebileceği gösterilmiştir. Simetrik olmayan IPD oyununda, zayıf zorba strateji kullanan oyuncunun, rakibi üzerinde zayıf bir zorbalık kurabileceği şartlar belirlenmiş ve zayıf zorba strateji kullanan oyuncunun getirisi hesaplanarak rakibi ile kendi getirisi arasında nasıl bir lineer bir ilişki kurabileceği gösterilmiştir.

Bunun için Y oyuncusunun seçtiği $\tilde{\mathbf{q}} = \alpha\mathbf{S_X} + \beta\mathbf{S_Y} + \gamma\mathbf{1}$ stratejisine karşılık

$$\begin{aligned}
(\tau+\varepsilon)q_1 + (\varepsilon+\rho)q_2 - 1 &= \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma \\
(\tau+\varepsilon)q_3 + (\varepsilon+\rho)q_4 &= \alpha S_1 + \beta T_2 + \gamma \\
(\varepsilon+\rho)q_1 + (\tau+\varepsilon)q_2 - 1 &= \alpha T_1 + \beta S_2 + \gamma \\
(\varepsilon+\rho)q_3 + (\tau+\varepsilon)q_4 &= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen bir NZD stratejisi,

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi(\mathbf{S_Y} - l_2\mathbf{1}) - (\mathbf{S_X} - l_1\mathbf{1})]$$

biçiminde eş değer olarak yeniden yazılabilir. Burada ϕ, χ ve l_i $(i = 1,2)$ serbest parametrelerdir. ϕ parametresinin buradaki kullanımı, olasılıkların $[0,1]$ aralığında bulunmasını sağlamaktır. $l_i < P_i$ ve $l_i > R_i$ $(i = 1,2)$ olduğu durumlarda, olasılık kısıtlarının sağlanmadığına ve NZD stratejilerinin olmadığına dikkat etmek gerekir. Bu nedenle sadece $P_i \leq l_i \leq R_i$ $(i = 1,2)$ olduğu zaman araştırmak gerekir.

$0 < \chi < a$ $(a \in (0,1])$ ve $l_i > P_i$ $(i = 1,2)$ durumunda Y oyuncusu, X oyuncusunun kendi getirisini artırmaya çalıştığı zaman Y oyuncusunun getirisini de artırmasını sağlayabilir. Bu durumda Y oyuncusunun getirisindeki artış, sabit bir $1/\chi$ oranı ile X oyuncusununkini aşabilir. Ayrıca X, sadece tamamen iş birliğine giderek kendi getirisini maksimize edebilir $(\mathbf{p} = \mathbf{1})$. Eğer Y oyuncusu $0 < \chi < a$ $(a \in (0,1])$ olmak üzere bir $\mathbf{q}$ stratejisini seçerse, X oyuncusu iş birliğine giderek kendi getirisini artırırken, Y oyuncusunun getirisinde daha fazla artışa sebep olabileceği için, Y oyuncusu X oyuncusuna zorbalık uygulayabilir. Bu stratejiye "**zayıf zorba strateji**" denir.

$0 < \chi < a$ $(a \in (0,1])$ ve $l_i = P_i$ $(i = 1,2)$ durumunda, Y oyuncusu P_2 getirisini kazanmayı garantiler. Bu durumda X oyuncusu da P_1 getirisini garantilemiş olur. Y oyuncusu P_2'den daha fazla kazandığı zaman, oyuncunun P_2 dışındaki payı, X oyuncusunun P_1 dışındaki payının $1/\chi$ $(\chi < a$ $(a \in (0,1]))$ katı olacak şekilde daha fazla olur. Bu strateji "**güçlü zorba strateji**" olarak adlandırılır. Güçlü zorba strateji, zayıf zorba stratejilerin en sert durumudur. Zorbalığın şiddeti, nicelik olarak l_i parametresinden etkilenir. Bu yüzden l_i parametresi, zorbalığın dayanağı olarak görülebilir.

Güçlü zorba strateji, gürültüsüz oyunlarda yaygın olarak çalışılmış bir kavram olmasına rağmen [2,8,9,11], gürültülü tekrarlı simetrik olmayan oyunlarda güçlü zorba strateji kavramının olmadığı aşağıdan görülebilir. Güçlü zorba strateji var ise $l_i = P_i$ $(i = 1,2)$ olmak üzere, aşağıdaki denklem sisteminin sağlanması gerekir.

$$
\begin{aligned}
(\tau+\varepsilon)q_1+(\varepsilon+\rho)q_2-1 &= \phi[\chi(R_2-l_2)-(R_1-l_1)]\\
(\tau+\varepsilon)q_3+(\varepsilon+\rho)q_4 &= \phi[\chi(T_2-l_2)-(S_1-l_1)]\\
(\varepsilon+\rho)q_1+(\tau+\varepsilon)q_2-1 &= \phi[\chi(S_2-l_2)-(T_1-l_1)]\\
(\varepsilon+\rho)q_3+(\tau+\varepsilon)q_4 &= \phi[\chi(P_2-l_2)-(P_1-l_1)]
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Fakat $l_i = P_i$ $(i = 1,2)$ olduğu zaman ikinci ve dördüncü denklemler aynı anda sağlanmaz.

$$
\begin{aligned}
-(\varepsilon+\rho)/\ \ (\tau+\varepsilon)q_3+(\varepsilon+\rho)q_4 &= \phi[\chi(T_2-P_2)-(S_1-P_1)]\\
(\tau+\varepsilon)/\ \ (\varepsilon+\rho)q_3+(\tau+\varepsilon)q_4 &= 0
\end{aligned}
$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$
q_4 = -\frac{(\varepsilon+\rho)\cdot\phi[\chi(T_2-P_2)+(P_1-S_1)]}{(\tau-\rho)}
$$

olarak elde edilir. q_4'ün negatif olması $\forall i = \overline{1,4}$ için $0 \le q_i \le 1$ olması ile çelişir. Bu nedenle, gürültülü tekrarlı simetrik olmayan oyunlarda güçlü zorba strateji yoktur.

Sezgisel olarak gürültülü tekrarlı oyunlardaki güçlü zorba stratejinin eksikliği, hataların getirilere rastgelelik ve belirsizlik getirmesinden kaynaklanmaktadır. Sonuç olarak bu durum, Y oyuncusunun getiri bazlı strateji kurmasına olumsuz etki eder. Bu nedenle NZD oyuncusu, karşı tarafın getirisini kontrol edebilme ve kendi getirisini artırma arasında ters orantılı bir tercih ile karşı karşıya kalır. Yani NZD oyuncusu, karşı tarafın getirisini kontrol edebilme gücünü artırmak isterse, kendi getirisinde oluşacak kaybı göze alır. Buna karşılık NZD oyuncusu kendi getirisini artırmak isterse, karşı tarafın getirisini kontrol edebilme gücünü kaybeder. Bu durum, Harsanyi ve Selten [27] tarafından tartışılan risk baskınlığı ve getiri baskınlığı arasındaki ilişkiye benzerdir.

Gürültülü bir çevrede, getiriyi kontrol etme gücünü geri kazanmak için zorba oyuncu,

$$
\tilde{\mathbf{q}} = \phi[\chi(\mathbf{S_Y}-l_2\mathbf{1})-(\mathbf{S_X}-l_1\mathbf{1})] \tag{5.6}
$$

denklemindeki l_i değerini P_i değerinden $P_i+\Delta_i$ değerine $(i = 1,2)$ getirerek zorbalığın şiddetini azaltmaya ihtiyaç duyar. Böylece kendi getirisindeki kayıp riski artar. Burada χ, zorbalık oranıdır. $\Delta_i = l_i - P_i$ $(i = 1,2)$, zayıf ve güçlü zorba stratejiler arasındaki mesafeyi belirtir. Δ_i küçük olduğu zaman, Y oyuncusunun kazancındaki artışın, X oyuncusunun kazancındaki artıştan daha fazla olması muhtemeldir. Bununla birlikte Y oyuncusunun, X oyuncusu üzerinde zorbalık kurması zorlaşacaktır. Büyük bir Δ_i, X oyuncusunun daha fazla kazanması için, Y oyuncusunun X oyuncusuna daha fazla fırsat teklif ettiği anlamına gelir. Buna bağlı olarak Y oyuncusu, rakibinin getirisini daha fazla kontrol edebilme olasılığına sahip olur. Bu nedenle, kaybetme riskini azaltırken getiri kontrolünü artırmak için, NZD oyuncusunun yeterince küçük bir Δ_i uzaklığı ve uygun bir χ zorbalık oranı ile stratejisini ayarlaması büyük önem taşır.

Yukarıdaki analize göre, gürültü altında zayıf bir zorba strateji elde etmek için (5.6) eşitliğinde yeterince küçük $\Delta_i (i = 1, 2)$ için $l_i = P_i + \Delta_i$ alınırsa

$$\tilde{\mathbf{q}} = \phi\big[\chi\big(\mathbf{S_Y} - (P_2 + \Delta_2)\mathbf{1}\big) - \big(\mathbf{S_X} - (P_1 + \Delta_1)\mathbf{1}\big)\big]$$

elde edilir. (5.5) eşitliğinde $l_i = P_i + \Delta_i$ $(i = 1, 2)$ alınarak denklemler taraf tarafa çözüldüğü zaman q_1, q_2, q_3 ve q_4 değerleri

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1 - \frac{\phi}{\tau-\rho}\cdot\big[(\tau+\varepsilon)(R_1 - \chi R_2) - (\tau-\rho)(P_1 + \Delta_1 - \chi(P_2+\Delta_2)) - (\varepsilon+\rho)(T_1 - \chi S_2)\big] \\
q_2 &= 1 - \frac{\phi}{\tau-\rho}\cdot\big[(\tau+\varepsilon)(T_1 - \chi S_2) - (\tau-\rho)(P_1 + \Delta_1 - \chi(P_2+\Delta_2)) - (\varepsilon+\rho)(R_1 - \chi R_2)\big] \\
q_3 &= \frac{\phi}{\tau-\rho}\cdot\big[(\tau+\varepsilon)(P_1 - S_1 + \chi(T_2 - P_2)) + (\tau-\rho)(\Delta_1 - \chi\Delta_2)\big] \\
q_4 &= \frac{\phi}{\tau-\rho}\cdot\big[-(\varepsilon+\rho)(P_1 - S_1 + \chi(T_2 - P_2)) + (\tau-\rho)(\Delta_1 - \chi\Delta_2)\big]
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. ε ve ρ yeterince küçük seçildiği için

$$0 < \chi \leq a \ (a \in (0, 1])$$

olmak üzere uygun bir strateji üretilmiş olur. Y oyuncusu zayıf bir zorba strateji benimsediği zaman, X ve Y oyuncularının getirileri

$$\chi\,(s_Y - (P_2 + \Delta_2)) = s_X - (P_1 + \Delta_1)$$

lineer ilişkisini sağlar. Tutuklu İkilemi'nde $T_i > R_i > P_i > S_i$ $(i = 1, 2)$ olduğu için X oyuncusu "C" eylemini seçtiği zaman Y oyuncusunun elde ettiği getiri (T_2 ve R_2), X oyuncusu "D" eylemini seçtiği zaman elde ettiği getiriden (P_2 ve S_2) her zaman daha büyüktür. Bu nedenle Y hangi stratejiyi kullanırsa kullansın Y oyuncusunun beklenen getirisi s_Y, X oyuncusu tamamen iş birliğine gittiği zaman maksimum olacaktır ($\mathbf{p} = \mathbf{1}$).

Diğer taraftan Y oyuncusu zayıf zorba strateji kullandığı zaman, s_X ve s_Y arasında lineer bir ilişki olduğu için, s_X maksimuma ulaştığı zaman s_Y de maksimum olacaktır. Bu yüzden X oyuncusu tamamen iş birliğine gittiği zaman s_X ve s_Y getirilerinin ikisi de maksimum olur.

$det(\tilde{\mathbf{M}})$'da $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\det(\tilde{\mathbf{M}}) &= D(\mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{S_Y}) \\
&= \begin{vmatrix} (\tau+\varepsilon)q_1 + (\varepsilon+\rho)q_2 - 1 & 0 & 0 & R_2 \\ (\varepsilon+\rho)q_3 + (\varepsilon+\rho)q_4 & 0 & 0 & T_2 \\ (\varepsilon+\rho)q_1 + (\tau+\varepsilon)q_2 & 1 & -1 & S_2 \\ (\varepsilon+\rho)q_3 + (\tau+\varepsilon)q_4 & 1 & 0 & P_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Y oyuncusu için normalleştirilmiş getiri,

$$s_Y = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}_Y}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{1}} = \frac{D(\mathbf{1},\mathbf{q},\mathbf{S}_Y)}{D(\mathbf{1},\mathbf{q},\mathbf{1})}$$

denkleminden

$$s_Y = \frac{T_2\big(R_1-(P_1+\Delta_1)\big)+R_2\big((P_1+\Delta_1)-S_1\big)+\chi\big(T_2-R_2\big)\big(P_2+\Delta_2\big)}{\big(R_1-S_1\big)+\chi\big(T_2-R_2\big)}$$

şeklinde elde edilir. Bu kesrin pay ve paydasındaki değerler pozitiftir.

Bu durum şunu gösterir: Oyuncular, $P_1+\Delta_1$ ve $P_2+\Delta_2$ dışındaki paylarını $1/\chi$ oranında paylaşır. $\chi \le a$ ($a \in (0,1]$) olduğu için zayıf zorbalık uygulayan Y oyuncusunun $P_2+\Delta_2$ getirisi dışındaki payı, diğer oyuncunun $P_1+\Delta_1$ getirisi dışındaki payından daha fazla olur. O halde simetrik olmayan oyunlarda da gürültülü çevrede, NZD oyuncusunun, rakibinin kendi getirisini artırmaya çalıştığı zaman kendisinin de daha fazla kazanmasını sağlaması mümkündür. Rakip oyuncu, tamamen iş birliğine giderek kendi getirisini maksimum yapacaktır. Böylece NZD oyuncusunun getirisi de maksimum olacaktır. Bu durumda, NZD oyuncusu hala rakibi üzerinde zayıf bir zorbalık kurabilir.

Sonuç olarak, gürültülü çevredeki belirsizlik zorbalığın gücünü azalttığı için, NZD oyuncusu rakibi üzerinde zayıf zorba bir strateji uygulayabilir. Ancak güçlü zorba strateji yoktur.

Aşağıda ε ve ρ yeterince küçük alınarak, simetrik olmayan gürültülü oyunlarda, zayıf zorba strateji oluşturulabileceğine ilişkin elde edilen örnek verilmiştir.

Örnek 5.21 *X oyuncusunun gerçekleşen durum getirileri*

$$u_X(C,c)=1,\; u_X(C,d)=-0.4,\; u_X(D,c)=1.8 \;\; ve \;\; u_X(D,d)=0$$

olsun. Y oyuncusunun gerçekleşen durum getirilerini ise

$$u_Y(C,c)=1,\; u_Y(C,d)=-0.2,\; u_Y(D,c)=2 \;\; ve \;\; u_Y(D,d)=0$$

olarak alalım. Bu durumda X oyuncusunun beklenen getirisi

$$\begin{aligned} R_1 &= 1-1.4(\varepsilon+\rho) \\ S_1 &= -0.4+1.4(\varepsilon+\rho) \\ T_1 &= 1.8(1-\varepsilon-\rho) \\ P_1 &= 1.8(\varepsilon+\rho) \end{aligned}$$

ve Y oyuncusunun beklenen getirisi

$$\begin{aligned} R_2 &= 1-1.2(\varepsilon+\rho) \\ S_2 &= -0.2+1.2(\varepsilon+\rho) \\ T_2 &= 2(1-\varepsilon-\rho) \\ P_2 &= 2(\varepsilon+\rho) \end{aligned}$$

olur.

Aşağıda verilen üç örnek durumda, gürültü giderek artırılmıştır.

i) $\tau = 0.94, \varepsilon = 0.02, \rho = 0.02$ *için*

$$R_1 = 0.944,\ S_1 = -0.344,\ T_1 = 1.728,\ P_1 = 0.072$$
$$R_2 = 0.952,\ S_2 = -0.152,\ T_2 = 1.92,\ \ P_2 = 0.08$$

olur. Δ_1 *ve* Δ_2 *parametreleri,* $0.0181 < \Delta_1 < 0.837$ *ve* $0 < \Delta_2 < 0.872$ *aralıklarında olmalıdır.* $\Delta_1 = 0.2$ *ve* $\Delta_2 = 0.1$ *seçelim.* $0 < \chi < 0.7$ *olmak üzere, zayıf zorba strateji kullanan Y oyuncusunun getirisi*

$$s_Y = \frac{0.14424\chi + 1.876672}{0.968\chi + 1.288}$$

olur.

$$\chi\,(s_Y - (P_2 + \Delta_2)\,) = s_X - (P_1 + \Delta_1)$$

eşitliğinden X oyuncusunun getirisi,

$$s_X = \frac{1.908128\chi + 0.350336}{0.968\chi + 1.288}$$

elde edilir. Oyuncular, $P_1 + \Delta_1 = 0.272$ *ve* $P_2 + \Delta_2 = 0.18$ *dışındaki paylarını* $1/\chi$ *oranında paylaşır. Zayıf zorbalık uygulayan Y oyuncusunun* $P_2 + \Delta_2$ *getirisi dışındaki payı diğer oyuncunun* $P_1 + \Delta_1$ *getirisi dışındaki payından daha fazla olur.*

ii) $\tau = 0.85, \varepsilon = 0.05, \rho = 0.05$ *için*

$$R_1 = 0.86,\ S_1 = -0.26,\ T_1 = 1.62,\ P_1 = 0.18$$
$$R_2 = 0.88,\ S_2 = -0.08,\ T_2 = 1.8,\ P_2 = 0.2$$

olur. Δ_1 *ve* Δ_2 *parametreleri,* $0.055 < \Delta_1 < 0.585$ *ve* $0 < \Delta_2 < 0.68$ *aralıklarında olmalıdır.* $\Delta_1 = 0.2$ *ve* $\Delta_2 = 0.1$ *seçelim.* $0 < \chi < 0.49$ *olmak üzere, zayıf zorba strateji kullanan Y oyuncusunun getirisi*

$$s_Y = \frac{0.276\chi + 1.4632}{0.92\chi + 1.12}$$

olur.

$$\chi\,(s_Y - (P_2 + \Delta_2)\,) = s_X - (P_1 + \Delta_1)$$

eşitliğinden X oyuncusunun getirisi,

$$s_X = \frac{1.4768\chi + 0.4256}{0.92\chi + 1.12}$$

elde edilir. Oyuncular, $P_1 + \Delta_1 = 0.38$ *ve* $P_2 + \Delta_2 = 0.3$ *dışındaki paylarını* $1/\chi$ *oranında paylaşır. Zayıf zorbalık uygulayan Y oyuncusunun* $P_2 + \Delta_2$ *getirisi dışındaki payı diğer oyuncunun* $P_1 + \Delta_1$ *getirisi dışındaki payından daha fazla olur.*

iii) $\tau = 0.76, \varepsilon = 0.08, \rho = 0.08$ için

$$R_1 = 0.776,\ S_1 = -0.176,\ T_1 = 1.512,\ P_1 = 0.288$$
$$R_2 = 0.808,\ S_2 = -0.08,\ T_2 = 1.68,\ P_2 = 0.32$$

olur. Δ_1 ve Δ_2 parametreleri, $0.087 < \Delta_1 < 0.314$ ve $0 < \Delta_2 < 0.488$ aralıklarında olmalıdır. $\Delta_1 = 0.2$ ve $\Delta_2 = 0.1$ seçelim. $0 < \chi < 0.1$ olmak üzere, zayıf zorba strateji kullanan Y oyuncusunun getirisi

$$s_Y = \frac{0.36624\chi + 1.020352}{0.872\chi + 0.952}$$

olur.

$$\chi\,(s_Y - (P_2 + \Delta_2)) = s_X - (P_1 + \Delta_1)$$

eşitliğinden X oyuncusunun getirisi,

$$s_X = \frac{1.046048\chi + 0.464576}{0.872\chi + 0.952}$$

elde edilir. Oyuncular, $P_1 + \Delta_1 = 0.488$ ve $P_2 + \Delta_2 = 0.42$ dışındaki paylarını $1/\chi$ oranında paylaşır. Zayıf zorbalık uygulayan Y oyuncusunun $P_2 + \Delta_2$ getirisi dışındaki payı diğer oyuncunun $P_1 + \Delta_1$ getirisi dışındaki payından daha fazla olur.

Bu örnekte, gürültü arttıkça zayıf zorba strateji oluşturulurken χ ve Δ_i $(i = 1,2)$ aralıklarını belirlemenin zorlaştığı görülmüştür. Bu durum, oyuncuların getirileri arasında lineer bir ilişki kurulmasını güçleştirmektedir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, İtere Tutuklu İkilemi (IPD) oyununun temel yapısından yola çıkılarak, IPD oyununda iyi stratejilerden bahsedilmiştir. Başta Akın [13, 14] ve sonrasında Press-Dyson [8] tarafından geniş bir şekilde araştırılan iyi stratejilerin özellikleri ve bu stratejilere ilişkin bazı teoremler verilmiştir. Simetrik olmayan oyunlarda, bilinen bazı stratejiler örnek olarak alınmış ve iyi stratejilerle ilgili verilen teorem kullanılarak bu stratejilerin iyi strateji olup olmadığı incelenmiştir. Bir kişiye tek taraflı olarak kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında lineer bir ilişki dayatmasına izin veren ve bir kısmı iyi stratejilerin içinde olan sıfır-determinant (ZD) stratejilerden bahsedilmiştir.

Bu çalışmanın devamında, ZD stratejilerin alt kümeleri olan zorba stratejiler ve cömert stratejiler tanımlanmıştır. Zorba veya cömert strateji kullanan oyuncunun, daha önce bilindiği üzere, simetrik IPD oyununda belli şartlar altında rakibi ile kendi getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceği gösterilmiştir. Daha sonra bu durum, simetrik olmayan IPD oyununda ele alınarak benzer bir ilişkinin kurulup kurulamayacağı araştırılmıştır. Simetrik olmayan IPD oyununda, zorba veya cömert strateji kullanan oyuncunun kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında lineer bir ilişki kurubileceği şartlar belirlenmiş ve bu şartlar altında zorba veya cömert strateji kullanan oyuncunun getirisi hesaplanarak nasıl bir lineer ilişki oluşturulabileceği gösterilmiştir.

Son olarak, simetrik olmayan IPD oyununda gürültü kavramından bahsedilmiş ve burada güçlü zorba strateji oluşturulamadığı gösterilmiştir. Ancak, zorbalığın gücü azaltılarak belli şartlar altında zayıf zorba strateji oluşturulabileceği görülmüştür. Simetrik olmayan IPD oyununda, zayıf zorba strateji kullanan oyuncunun kendi getirisi ile rakibinin getirisi arasında lineer bir ilişki kurabileceği şartlar belirlenmiş ve zorba oyuncunun getirisi hesaplanarak nasıl bir lineer ilişki oluşturulabileceği gösterilmiştir. Gürültülü simetrik olmayan IPD oyununda, zayıf zorba stratejinin üretilebildiği bir örnek oluşturulmuştur. Verilen örnekte, gürültüyü artırdıkça zayıf zorba strateji üretmenin ve dolayısıyla lineer bir ilişki kurmanın zorlaştığı görülmüştür. Bu çalışmanın yanı sıra, gürültülü simetrik olmayan IPD oyununda iyi stratejiler ve ZD stratejilerin diğer bir alt kümesi olan cömert stratejiler ayrıca araştırılabilir.

KAYNAKÇA

[1] Hardin, G. (1968). The tragedy of the commens, Science, 162 1243-1248.

[2] Hilbe, C., Nowak, M. and Sigmund, K. (2013). The Evolution of extortion in Iterated Prisoner's Dilemma games, PNAS, 110 no. 17, 6913-6918.

[3] Hofbauer, J. and Sigmund, K. (1998). Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

[4] Smith, J.M. (1982). Evolution and the Theory of Games, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

[5] Nowak, M. (2006). Evolutionary Dynamics, Harward Univ. Press, Cambridge, MA.

[6] Sigmund, K. (1993). Games of Life, Oxford Univ. Press, Oxford, UK.

[7] Sigmund, K. (2010). The Calculus of Selfishness, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[8] Press, W. and Dyson F. (2012). Iterated Prisoner's Dilemma contains strategies that dominate any evolutionary opponent, PNAS, 109 no. 26, 10409-10413.

[9] Steward, A. and Plotkin, J. (2012). Extortion and cooperation in the Prisoner's Dilemma, PNAS, 109 no. 26, 10134-10135.

[10] Neumann, J.V. and Morgenstern, O. (1944). Theory of Games ans Economic Behavior, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[11] Steward, A.J. and Plotkin, J.B. (2013). From extortion to generosity, evolution in the Iterated Prisoner's Dilemma, Department of Biology, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104.

[12] Boerlijst, M., Nowak, M. and Sigmund, K. (1997). Equal pay for all prisoners. Am. Math. Mon, 1997, 104, 303-305.

[13] Akin, E. (2015). What you Gotta Know to Play Good in the Iterated Prisoner's Dilemma, Games 6,175-190.

[14] Akin, E. (2012). The Iterated Prisoner's Dilemma: Good Strategies and Their Dynamics. Preprint at https://arxiv.org/abs/1211.0969.

[15] Axelrod, R. (1984). The Evolution of Cooperation, Basic Books, Inc., Publishers New York.

[16] Hao, D., Rong, Z. and Zhou, T. (2015). Extortion under uncertainty: Zero-determinant strategies in noisy games, Phys. Rev. E 91, 052803.

[17] Kandori, M. (2002). Introduction to Repeated Games with Private Monitoring, J. Econ. Theor. 102, 1.

[18] Nowak, M.A., Sigmund, K. and El-Sedy, E. (1995). Automata, repeated games and noise, J. Math. Biol. 33, 703.

[19] Fudenberg, D., David, G.R. and Anna, D. (2012). Slow to Anger and Fast to Forgive: Cooperation in an Uncertain World, Am.Econ. Rev. 102, 720.

[20] Fudenberg, D. and Maskin, E. (1990). Evolution and Cooperation in Noisy Repeated Games, Am. Econ. Rev. 80, 274.

[21] Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, Int. J. Game Theory 4, 25-55.

[22] Sekiguchi, T. (1997). Efficiency in Repeated Prisoner's Dilemma with Private Monitoring, J. Econ. Theor. 76, 345.

[23] Barlo, M., Guilherme, C. and Hamid, S. (2009). Repeated games with one-memory, J. Econ. Theor. 144, 312.

[24] Mailath, G.J. and Stephen, M. (2002). Repeated Games with Almost-Public Monitoring, J. Econ. Theor. 102, 189.

[25] Mailath, G.J. and Wojciech, O. (2011). Folk theorems with bounded recall under (almost) perfect monitoring, Game Econ. Behav. 71, 174.

[26] Mailath J. and Samuelson, L. (2006). Repeated Games and Reputation (Oxford University Press, 2006).

[27] Harsanyi, J.C. and Selten, R. (1988) A General Theory of Equilibrium Selection in Games (MIT Press, 1988).

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	: Cansu CENGİZ
Yabancı Dil	: İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı	: KAŞ/ANTALYA - 1988
E-Posta	: cansucengiz@anadolu.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2006-2010, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans.
- 2010-2012, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans.
- 2011-2012, Akdeniz Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Pedagojik Formasyon.
- 2013 ve sonrası, MEB, Matematik Öğretmeni.