ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.: 3 - Sayı/No: 3 : 369-376 (2002)
XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı/Special Issue for XIVth National Mathematics Symposium

ARAŞTIRMA MAKALESİ/**RESEARCH ARTICLE**

HİPERBOLİK UZAYDA BAZI İDEAL ÇOKYÜZLÜLERİN HACİMLERİ ÜZERİNE

Andrei V. RATİU[1], Ali DENİZ[2]

ÖZ

3-boyutlu hiperbolik uzayda, hacim hesabında sıkça kullanılan Lobachevsky fonksiyonu

$$\begin{aligned} Л &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ Л(\theta) &= -\int_0^\theta \log|2\sin x|\,dx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Hiperbolik uzayda düzgün, ideal dörtyüzlünün hacminin $3Л(\frac{\pi}{3})$ olduğu ve tüm hiperbolik dörtyüzlüler arasında maksimum hacimli dörtyüzlünün düzgün, ideal dörtyüzlü olduğu Lobachevsky'den beri bilinmektedir. (Milnor, 1982; Ratcliffe, 1994). İdeal düzgün altıyüzlü, sekizyüzlü ve yirmiyüzlünün hacimleri (Deniz, 2001)'de hesaplanmıştır. Bu çalışmada bazı hiperbolik çokyüzlülerin (altıyüzlü, sekizyüzlü, yirmiyüzlü) hacimlerinin maksimum olabilmesi için düzgün ve ideal olmaları gerektiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik hacim, Hiperbolik çokyüzlü

ON THE VOLUMES OF SOME REGULAR POLYTOPES IN HYPERBOLIC SPACE

ABSTRACT

The Lobachevsky function, frequently used in calculation of volume in 3-dimensional hyperbolic space, is defined by

$$\begin{aligned} Л &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ Л(\theta) &= -\int_0^\theta \log|2\sin x|\,dx. \end{aligned}$$

It is known since Lobachevsky that the tetrahedron which has maximal volume among all tetrahedra is regular and ideal tetrahedron and its volume is $3Л(\frac{\pi}{3})$. (Milnor, 1982; Ratcliffe, 1994). The volumes of regular, ideal hexahedron, octahedron, dodecahedron and icosahedron are calculated in (Deniz, 2001). In this work, we have shown that some polytopes (hexahedron, octahedron, icosahedron) must be regular and ideal for maximality of their volumes.

Key Words: Hyperbolic volume, Hyperbolic polyhedron

[1]İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü, Feza Gürsey Enstitüsü (TÜBİTAK), İstanbul
E-posta: ratiu@bilgi.edu.tr

[2]Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Eskişehir
E-posta: adeniz@anadolu.edu.tr

Geliş: 28 Mart 2002; **Kabul:** 08 Kasım 2002.

1. İDEAL DÖRTYÜZLÜNÜN HACMİNİN MAKSİMALLİĞİ

İdeal hiperbolik dörtyüzlüde karşılıklı dihedral açılar eşittir. (Ratcliffe, 1994; Deniz, 2001). Bu durumda bir ideal tetrahedron, izometrilere bağlı olarak, üç dihedral açısı ile belirlidir. Dihedral açıları α, β, γ olan ideal hiperbolik dörtyüzlüyü $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ ile gösterelim.

Teorem 1. $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ *dörtyüzlüsünün hacmi*

$$V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \text{Л}(\alpha) + \text{Л}(\beta) + \text{Л}(\gamma)$$

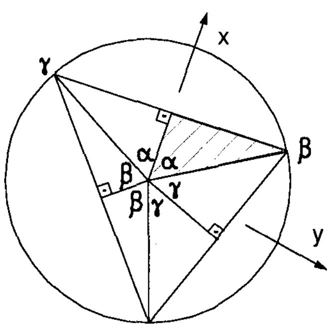
dır.

Kanıt. Kanıtı üst yarı uzay modeli

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \\ ds_h^2 &= \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned}$$

de yapacağız. Genelliği bozmadan $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ 'nın bir köşesini ∞'da diğer köşelerini birim küre yüzeyi üzerinde olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü aynı özelliklere sahip başka bir dörtyüzlü $\mathbb{U}^3$ 'ün izometrileri ile söylediğimiz duruma getirilebilir. $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ dörtyüzlüsünün xy-düzlemine ortogonal olarak izdüşümünü alarak elde edeceğimiz Öklidyen üçgenin açıları α, β, γ 'dır ve açık olarak $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 'dir.

Orijinin bu üçgenin içinde olması durumunda, bu üçgeni Şekil 1 'de görüldüğü gibi altı dik üçgene ayıralım. (Bu üçgen diğer durumlarda da benzer yöntem kullanılarak dik üçgenlere ayrılabilir. (Deniz, 2001).) Taralı üçgeni $\triangle$ ile, dörtyüzlünün $\triangle$ üzerindeki parçasını da $T_\triangle$ ile gösterelim.



Şekil 1. $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ 'nın tabanının dik üçgenlere ayrılması

$T_{\alpha,\beta,\gamma}$ 'nın hacmini hesaplamak için önce $T_\triangle$'yı hesaplayalım. $T_\triangle$'nın noktaları,

$$\begin{aligned} 0 &\le x \le \cos\alpha \\ 0 &\le y \le x\tan\alpha \\ \sqrt{1-x^2-y^2} &\le z \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan noktalardır. $\mathbb{U}^3$'de hacim elemanı $\frac{1}{z^3}dxdydz$ olduğundan,

$$\begin{aligned} V(T_\triangle) &= \iint\limits_{\triangle} \int\limits_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \tfrac{1}{z^3} dxdydz \\ &= \iint\limits_{\triangle} \tfrac{1}{2(1-x^2-y^2)} dxdy \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$V(T_\triangle) = \int_0^{\cos\alpha} \int_0^{x\tan\alpha} \frac{1}{2(1-x^2-y^2)} dydx$$

elde ederiz. Burada $u = \sqrt{1-x^2}$ dersek

$$\begin{aligned} V(T_\triangle) &= \int_0^{\cos\alpha} \int_0^{x\tan\alpha} \frac{1}{2(u^2-y^2)} dydx \\ &= \int_0^{\cos\alpha} \frac{1}{4u} \log\left|\frac{u + x\tan\alpha}{u - x\tan\alpha}\right| dx \\ &= \int_0^{\cos\alpha} \frac{1}{4u} \log\left|\frac{u\cos\alpha + x\tan\alpha}{u\cos\alpha - x\tan\alpha}\right| dx \end{aligned}$$

elde ederiz. $x = \cos\theta$ diyelim. Bu durumda $u = \sin\theta$ ve $\frac{dx}{u} = -d\theta$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} V(T_\triangle) &= -\tfrac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \log\left|\tfrac{2\sin(\theta+\alpha)}{2\sin(\theta-\alpha)}\right| d\theta \\ &= -\tfrac{1}{4} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \log|2\sin(\theta+\alpha)|\, d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \log|2\sin(\theta-\alpha)|\, d\theta \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada ilk integralde $x = \theta + \alpha$ ikinci integralde $x = \theta - \alpha$ değişken değişimi yaparsak

$$\begin{aligned} V(T_\triangle) &= -\frac{1}{4} \left[\int_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{2\alpha} \log|2\sin x|\, dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{0} \log|2\sin x|\, dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\text{Л}(2\alpha) - \text{Л}(\frac{\pi}{2} + \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \text{Л}(0) + \text{Л}(\frac{\pi}{2} - \alpha) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada $-\text{Л}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \text{Л}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ve $\text{Л}(2\alpha) = 2\text{Л}(\alpha) + 2\text{Л}(\alpha + \frac{\pi}{2})$ olduğunu kullanarak $V(T_\triangle) = \frac{1}{2}\text{Л}(\alpha)$ olarak buluruz. Böylece $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ 'nın hacmi her bir dik üçgenin üzerinde kalan parçaların hacimlerinin toplamı olduğundan

$$V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = Л(\alpha) + Л(\beta) + Л(\gamma)$$

olur.

Teorem 2. *$\mathbb{H}^3$ 'te maksimum hacimli dörtyüzlü düzgün ideal dörtyüzlüdür.*

Kanıt. $\mathbb{H}^3$ 'te herhangi bir dörtyüzlü bir ideal dörtyüzlü tarafından içerileceğinden sadece ideal dörtyüzlü durumunu gözönünde bulunduralım. Bu durumda maksimum olmasını istediğimiz fonksiyon $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olmak üzere

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = Л(\alpha) + Л(\beta) + Л(\gamma)$$

olacaktır. Diğer taraftan α, β, γ sayılarını $\mathbb{R}^3$ 'te

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$$

kompakt kümesinin elemanı gibi düşünebiliriz. Bu durumda $f : D \to \mathbb{R}$ olur. f sürekli fonksiyonu D kompakt kümesi üzerinde maksimum değerine sahiptir. α, β, γ 'dan en az birinin sıfır olması durumunda hacim fonksiyonu sıfır değerini alır. Örneğin $\alpha = 0$ ise $\beta + \gamma = \pi$ olur ve

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \gamma) &= Л(0) + Л(\beta) + Л(\gamma) \\ &= Л(\beta) + Л(\pi - \beta) \\ &= Л(\beta) - Л(\beta) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece fonksiyon maksimum değerini D'nin iç noktalarında yani $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olduğunda alacaktır. g fonksiyonunu

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

şeklinde tanımlayalım. Burada Lagrange çarpanları kuralı ile $grad(f) = \lambda grad(g)$ olacak şekilde λ skaleri vardır. Böylece

$$\begin{aligned} -\log(2\sin\alpha) &= \lambda \\ -\log(2\sin\beta) &= \lambda \\ -\log(2\sin\gamma) &= \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$ olması demektir. Böylece α, β, γ 'için iki durum vardır.

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma \\ \alpha &= \beta = \pi - \gamma \end{aligned}$$

Fakat $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olması gerektiğinden ikinci durum olamaz. Böylece f fonksiyonunun maksimum olması için dihedral açıların üçüde eşit olmalıdır. Bunun anlamı dörtyüzlünün düzgün dörtyüzlü olmasıdır. Böylece $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ olur. Bu durumda f fonksiyonunun maksimum değeri olarak

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 3Л\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

bulunur.

2. BAZI HİPERBOLİK ÇOKYÜZLÜLERİN HACİMLERİNİN MAKSİMALLİĞİ

İdeal, düzgün altıyüzlü, sekizyüzlü,onikiyüzlü ve yirmiyüzlünün hacimleri de aşağıdaki tablodaki gibi verilir (Deniz, 2001).

İDEAL ÇOKYÜZLÜ	HACMİ
Dörtyüzlü	$3Л(\frac{\pi}{3})$
Altıyüzlü	$10Л(\frac{\pi}{6})$
Sekizyüzlü	$8Л(\frac{\pi}{4})$
Onikiyüzlü	$30\left[Л(\frac{11\pi}{30}) - Л(\frac{\pi}{30}) + 2Л(\frac{\pi}{3})\right]$
Yirmiyüzlü	$25Л(\frac{\pi}{5}) + 5Л(\frac{2\pi}{5})$

Tanım 3. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in [0,1]$ için*

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Teorem 4. *$\mathfrak{D}$, $\mathbb{R}^n$ 'in kompakt, konveks bir altkümesi olsun. G grubu $\mathbb{R}^n$ üzerinde etki eden ve $\mathfrak{D}$ 'yi invaryant bırakan bir grup olsun. (Yani $\forall g \in G$ için $g(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$ olsun). Varsayalım ki tek türlü belirli bir $x_o \in \mathfrak{D}$ ve $\forall g \in G$ için $g(x_o) = x_o$ olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ için $f(g(x)) = f(x)$ koşulunu sağlayan ve $\mathfrak{D}$ kümesi üzerinde konkav olan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$\max_{x \in \mathfrak{D}} \{f(x)\} = f(x_o)$$

olur.

Kanıt. Öncelikle sürekli bir fonksiyon kompakt bir küme üzerinde maksimum değerini alacağından f sürekli fonksiyonu da $\mathfrak{D}$ kompakt kümesi üzerinde maksimum değerini alır. Varsayalım ki x_o 'dan farklı bir $y \in \mathfrak{D}$ noktasında f fonksiyonu maksimum değerini alsın ve bir $g_o \in G$ için $g_o(y) \neq y$ olsun. f fonksiyonunu y ve $g_o(y)$ noktalarını birleştiren doğru parçası üzerine kısıtlayalım. f fonksiyonu $\forall g \in G$ için $f(g(x)) = f(x)$ koşulunu sağladığı için $f(g_o(y)) = f(y)$ olur. f, $\mathfrak{D}$ üzerinde konkav fonksiyon olduğundan $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1-\lambda)g_o(y)) &\geq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(g_o(y)) \\ &= \lambda f(y) + (1-\lambda)f(y) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani f fonksiyonu y ve $g_o(y)$ noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde y'deki değerinden büyük değerler almaktadır. Bu ise y'nin maksimum nokta olması ile çelişir. O halde f fonksiyonun maksimum değerini aldığı nokta G grubunun hareketi altında değişmemelidir. x_o noktası $\mathfrak{D}$ kümesi üzerinde bu özelliği sağlayan tek nokta olduğundan

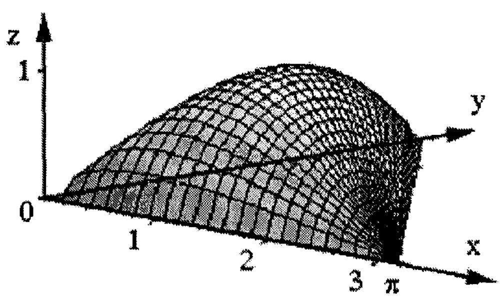
$$\max_{x\in\mathfrak{D}}\{f(x)\} = f(x_o)$$

olur.

Yardımcı Teorem 5. $f : [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(\alpha,\beta) = Л(\alpha) + Л(\beta) + Л(\pi - (\alpha+\beta))$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ koşulunu sağlayan altküme üzerinde konkav fonksiyondur.



Şekil 2. f fonksiyonunun grafiği

Kanıt. f fonksiyonunun Hessian matrisini hesaplayalım. Burada Lobachevsky fonksiyonunu $[0,\pi]$ aralığında incelediğimiz için ve bu aralıkta $\sin x \geq 0$ olduğundan $-\log|2\sin x| = -\log(2\sin x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun birinci kısmi türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\log(2\sin\alpha) + \log(2\sin(\pi-(\alpha+\beta))$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = -\log(2\sin\beta) + \log(2\sin(\pi-(\alpha+\beta))$$

olarak bulunur. Buradan ikinci kısmi türevler ise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos(\pi-(\alpha+\beta))}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = -\cot\alpha + \cot(\alpha+\beta)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos(\pi-(\alpha+\beta))}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = -\cot\beta + \cot(\alpha+\beta)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} = -\frac{\cos(\pi-(\alpha+\beta))}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = \cot(\alpha+\beta)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha} = -\frac{\cos(\pi-(\alpha+\beta))}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = \cot(\alpha+\beta)$$

olarak elde edilir. İkinci kısmi türevler $[0,\pi]\times[0,\pi]$ kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlardır. Burada

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{(\sin a).(\sin b)}$$

olduğundan Hessian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\beta}{(\sin\alpha).\sin(\alpha+\beta)} & \cot(\alpha+\beta) \\ \cot(\alpha+\beta) & -\frac{\sin\alpha}{(\sin\beta).\sin(\alpha+\beta)} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece

$$|H| = \frac{1-\cos^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = 1$$

elde edilir. $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in [0,\pi]$ olduğundan $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = -\frac{\sin\beta}{(\sin\alpha).\sin(\alpha+\beta)} < 0$ olur. $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} < 0$ ve $|H| > 0$ olduğundan Hessian matrisi negatif tanımlıdır. f fonksiyonu ikinci dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olduğundan ve Hessian matrisi negatif tanımlı olduğundan konkav fonksiyondur. $(\alpha,\beta) \in [0,\pi]\times[0,\pi]$ ve $\pi-(\alpha+\beta) \in [0,\pi]$ olmak üzere f fonksiyonunun konkav olduğu Şekil 2'deki grafikten de görülebilir.

Teorem 6. *$\mathbb{H}^3$ 'te maksimum hacimli sekizyüzlü düzgün ideal sekizyüzlüdür.*

Kanıt. Öncelikle her sekizyüzlü bir ideal sekizyüzlü tarafından içerilir. Dolayısıyla maksimum hacimli sekizyüzlü bir ideal sekizyüzlü olmalıdır. Böylece teoremin kanıtında sadece ideal sekizyüzlüleri ele almamız yeterlidir.

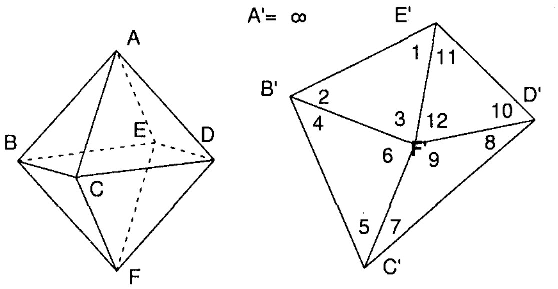
Bütün hiperbolik ideal sekizyüzlülerin kümesini $\mathcal{P}$ ile gösterelim. Herhangi bir P ideal sekizyüzlüsü verilsin. P 'nin köşelerini A', B', C', D', E', F' olarak adlandıralım. Daha sonra P 'yi A' köşesi, ∞'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. P 'nin dihedral açılarını Şekil 3'deki gibi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{12}$ olarak adlandıralım. Böylece verilen herhangi bir P sekizyüzlüsüne, $\underbrace{[0,\pi]\times[0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]}_{12 \text{ tane}}$ konveks kompakt kümesinin

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= \pi \\ \alpha_4+\alpha_5+\alpha_6 &= \pi \\ \alpha_7+\alpha_8+\alpha_9 &= \pi \\ \alpha_{10}+\alpha_{11}+\alpha_{12} &= \pi \end{aligned}$$

ve

$$\alpha_3+\alpha_6+\alpha_9+\alpha_{12} = 2\pi$$

koşullarını sağlayan $\mathfrak{D}$ doğrusal altuzayından bir nokta karşılık getirmiş oluruz. Burada $\mathfrak{D}$ 'nin kendisi de kompakt ve konveks bir kümedir.



Şekil 3. Sekizyüzlünün parçalara ayrılması

$P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ sekizyüzlülerine $\mathfrak{D}$ kümesinden aynı nokta karşılık geliyorsa "P_1 ve P_2 bağıntılıdır" diyelim ve bu bağıntıyı $\sim$ ile gösterelim. Açık olarak $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre oluşan denklik sınıfları kümesini $\Theta = \mathcal{P}/\sim$ ile gösterelim. Böylece Θ 'daki herbir denklik sınıfına $\mathfrak{D}$'de bir tek nokta, aynı şekilde $\mathfrak{D}$'deki herbir noktaya da Θ'da bir tek denklik sınıfı karşılık gelir.

Böylece herhangi $\overline{P} \in \Theta$ sınıfındaki ideal sekizyüzlülerin hacimleri, dihedral açılar yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere

$$V = Л(\alpha_1) + Л(\alpha_2) + \cdots + Л(\alpha_{12})$$

olarak verilir.

Öklidyen düzgün sekizyüzlünün tam simetri grubunu $\mathcal{G}$ ile gösterelim. Ve $\mathcal{G}$'nin Θ üzerindeki etkisini gözönüne alalım. Θ 'den bir $\overline{P}$ sınıfı verilsin ve P 'de bu sınıfın bir temsilci elemanı olsun. Öklidyen düzgün sekizyüzlünün köşeleri ile P 'nin köşelerini sabit bir şekilde eşleyelim. $\mathcal{G}$ grubunun bir g elemanı P sekizyüzlüsünün köşelerini, dolayısıyla da dihedral açılarının yerlerini değiştirecektir. Böylece oluşan bu yeni ideal sekizyüzlüye $g(P) = P'$ diyecek olursak, P ve P' 'nün hacimleri de aynı olacaktır. Yani

$$V(P) = V(g(P))$$

olacaktır. Θ ile $\mathfrak{D}$ arasında birebir ve örten bir eşleme olduğundan $\mathcal{G}$ 'nin Θ üzerindeki etkisini $\mathfrak{D}$ üzerinde de düşünebiliriz. Böylece bir $g \in \mathcal{G}$, $\mathfrak{D}$ kümesinde P 'ye karşılık gelen noktayı P' sekizyüzlüsüne karşılık gelen noktaya dönüştürür. Açık olarak $\mathfrak{D}$ kümesi $\mathcal{G}$ grubunun etkisi altında sabit kalacaktır.

Şimdi $\mathfrak{D}$ kümesinde $\mathcal{G}$'nin etkisi altında sabit kalan bir tek x_o noktasının olduğunu gösterelim. Öklidyen düzgün sekizyüzlünün AF ekseninde saatin tersi yönünde yaptığı $\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönmeye karşılık P'nin dihedral açıları

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 \to \alpha_4 & \alpha_4 \to \alpha_7 & \alpha_7 \to \alpha_{10} & \alpha_{10} \to \alpha_1 \\
\alpha_2 \to \alpha_5 & \alpha_5 \to \alpha_8 & \alpha_8 \to \alpha_{11} & \alpha_{11} \to \alpha_2 \\
\alpha_3 \to \alpha_6 & \alpha_6 \to \alpha_9 & \alpha_9 \to \alpha_{12} & \alpha_{12} \to \alpha_3
\end{array}$$

şeklinde değişir. O halde $\mathfrak{D}$ tanım kümesinde $\mathcal{G}$'nin hareketi altında invaryant kalan nokta için

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} \\
\alpha_2 &= \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_{11} \\
\alpha_3 &= \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12}
\end{aligned}$$

olmalıdır. $\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{12} = 2\pi$ olduğundan $\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \frac{\pi}{2}$ elde edilir. Diğer taraftan ACE düzleminde yansıma ile $\alpha_1 = \alpha_{11}$ elde edilir. Böylece $\alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_1 = \alpha_{11} = \alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_8 = \frac{\pi}{4}$ elde edilir. Böylece $\mathfrak{D}$ tanım kümesinde $\mathcal{G}$ grubunun hareketi altında invaryant kalan tek nokta $x_o = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ noktasıdır. Böylece bu noktaya karşılık gelen sekizyüzlünün bütün dihedral açıları $\frac{\pi}{2}$ olur, yani düzgün sekizyüzlüdür.

Sekizyüzlünün hacim fonksiyonunu $i = 0, 1, 2, 3$ için $\alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2} + \alpha_{3i+3} = \pi$ ve f fonksiyonu Yardımcı Teorem 5'deki gibi tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned}
V(\alpha_1, ..., \alpha_{12}) &= Л(\alpha_1) + Л(\alpha_2) + \cdots + Л(\alpha_{12}) \\
&= f(\alpha_1, \alpha_2) + f(\alpha_4, \alpha_5) \\
&+ f(\alpha_7, \alpha_8) + f(\alpha_{10}, \alpha_{11})
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Yardımcı Teorem 5'den dolayı f konkav, dolayısıyla da V konkavdır. Böylece Teorem 4'ün koşulları sağlanmış olur. Bu durumda x_o noktası V hacim fonksiyonunun maksimum noktasıdır. O halde $\mathbb{H}^3$ 'te maksimum hacimli sekizyüzlü düzgün ideal sekizyüzlüdür.

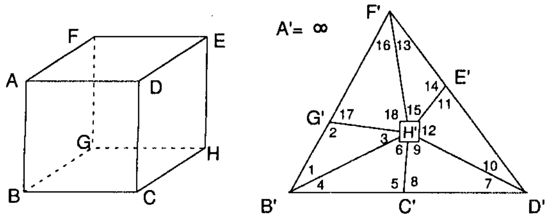
Teorem 7. *$\mathbb{H}^3$ 'te maksimum hacimli altıyüzlü düzgün ideal altıyüzlüdür.*

Kanıt. Her hiperbolik altıyüzlü bir ideal altıyüzlü tarafından içerileceğinden maksimum hacimli altıyüzlü ideal altıyüzlü olacaktır. Bu durumda kanıtta sadece ideal altıyüzlüleri ele almamız yeterlidir.

Bütün hiperbolik ideal altıyüzlülerin kümesini $\mathcal{P}$ ile gösterelim. Herhangi bir P ideal altıyüzlüsü verilsin. P 'nin köşelerini $A', B', C', D', E', F', G', H'$ olarak adlandıralım. Daha sonra P 'yi A' köşesi, ∞'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. P 'nin dihedral açılarını Şekil 4'deki gibi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{18}$ olarak adlandıralım. Böylece verilen herhangi bir P altıyüzlüsüne, $\underbrace{[0,\pi] \times [0,\pi] \times \cdots \times [0,\pi]}_{18 \text{ tane}}$ konveks kompakt kümesinin

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{13} + \alpha_{16} &= \pi \\
\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{15} + \alpha_{18} &= 2\pi \\
\alpha_2 + \alpha_{17} &= \pi \\
\alpha_5 + \alpha_8 &= \pi \\
\alpha_{11} + \alpha_{14} &= \pi
\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $\mathfrak{D}$ kompakt, konveks doğrusal alt uzayından bir nokta karşılık getirmiş oluruz. Eğer $\mathcal{P}$ 'den verilen iki altıyüzlüye $\mathfrak{D}$ kümesinde aynı nokta karşılık geliyorsa, bu iki altıyüzlüye bağıntılıdır diyelim. $\mathcal{P}$ 'yi bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarına bölelim. Bu denklik sınıflarının kümesini de Θ ile gösterelim.



Şekil 4. Öklidyen altıyüzlü ve hiperbolik altıyüzlünün dihedral açılarının adlandırılması

Sekizyüzlü durumundaki gibi, Öklidyen düzgün altıyüzlünün tam simetri grubu $\mathcal{G}$ 'nin, Θ üzerine, dolayısıyla da $\mathfrak{D}$ üzerine etkisini ele alalım. Öklidyen düzgün altıyüzlünün AH ekseninde saatin tersi yönünde $\frac{2\pi}{3}$ radyanlık dönmesiyle P'nin dihedral açıları

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\to \alpha_7 \to \alpha_{13} \to \alpha_1\\
\alpha_4 &\to \alpha_{10} \to \alpha_{16} \to \alpha_4\\
\alpha_5 &\to \alpha_{11} \to \alpha_{17} \to \alpha_5\\
\alpha_8 &\to \alpha_{14} \to \alpha_2 \to \alpha_8\\
\alpha_3 &\to \alpha_6 \to \alpha_9 \to \alpha_{12} \to \alpha_{15} \to \alpha_{18} \to \alpha_3
\end{aligned}$$

şeklinde değişir. Bu durumda $\mathcal{G}$'nin hareketi altında sabit kalan bir nokta için

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_7 = \alpha_{13}\\
\alpha_4 &= \alpha_{10} = \alpha_{16}\\
\alpha_5 &= \alpha_{11} = \alpha_{17}\\
\alpha_8 &= \alpha_{14} = \alpha_2\\
\alpha_3 &= \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \alpha_{15} = \alpha_{18}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Yukarıdaki eşitliklerden

$$\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \alpha_{15} = \alpha_{18} = \frac{\pi}{3}$$

elde edilir. Diğer taraftan Öklidyen düzgün altıyüzlünün $ABEH$ düzleminde yansıması ile $\alpha_1 \to \alpha_4$ ve $\alpha_5 \to \alpha_2$ değişmeleri meydana gelir. Böylece $\mathfrak{D}$ kümesinde $\mathcal{G}$ grubu altında sabit kalan nokta için

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{13} = \alpha_{16} = \frac{\pi}{6}\\
\alpha_2 &= \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_{11} = \alpha_{14} = \alpha_{17} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece bu koşulları sağlayan noktayı $x_o = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{18})$ ile gösterelim. x_o noktasına karşılık gelen altıyüzlünün herbir kenarı üzerindeki dihedral açı $\frac{\pi}{3}$ olacaktır. Bu da hiperbolik altıyüzlünün düzgün altıyüzlü olması demektir. Bu nokta $\mathcal{G}$'nin diğer elemanlarıyla da sabit kalacaktır.

Altıyüzlünün hacim fonksiyonunu f fonksiyonu Yardımcı Teorem 5'deki gibi tanımlanmak üzere

$$V(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{18}) = \sum_{i=0}^{5} f(\alpha_{3i+1}, \alpha_{3i+2})$$

olarak yazabiliriz. Yardımcı Teorem 5'den dolayı V fonksiyonu konkav fonksiyondur. Böylece Teorem 4'ün koşulları sağlanmış olur. Bu durumda x_o noktası V hacim fonksiyonunun maksimum noktasıdır. O halde $\mathbb{H}^3$'te maksimum hacimli altıyüzlü düzgün ideal altıyüzlüdür.

Teorem 8. *$\mathbb{H}^3$ 'te maksimum hacimli yirmiyüzlü düzgün ideal yirmiyüzlüdür.*

Kanıt. Yine her hiperbolik yirmiyüzlü bir ideal yirmiyüzlü tarafından içerileceğinden maksimum hacimli yirmiyüzlü bir ideal yirmiyüzlü olacaktır. Bu durumda sadece ideal yirmiyüzlüleri ele alacağız.

Bütün hiperbolik ideal yirmiyüzlülerin kümesini $\mathcal{P}$ ile gösterelim. Herhangi bir P ideal yirmiyüzlüsü verilsin. P 'nin köşelerini $A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', K', L'$ olarak adlandıralım. Daha sonra P 'yi A' köşesi, ∞'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. P 'nin dihedral açılarını Şekil 5'deki gibi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{45}$ olarak adlandıralım. Böylece verilen herhangi bir P yirmiyüzlüsüne,

$$\underbrace{[0,\pi] \times [0,\pi] \times \cdots \times [0,\pi]}_{45 \text{ tane}}$$

konveks kompakt kümesinin

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{13} &= 2\pi\\
\alpha_2 + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{30} + \alpha_{31} &= 2\pi\\
\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{34} &= 2\pi\\
\alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{37} &= 2\pi\\
\alpha_9 + \alpha_{11} + \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{40} &= 2\pi\\
\alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{43} &= 2\pi
\end{aligned}$$

ve $i = 0, 1...14$ olmak üzere

$$\alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2} + \alpha_{3i+3} = \pi$$

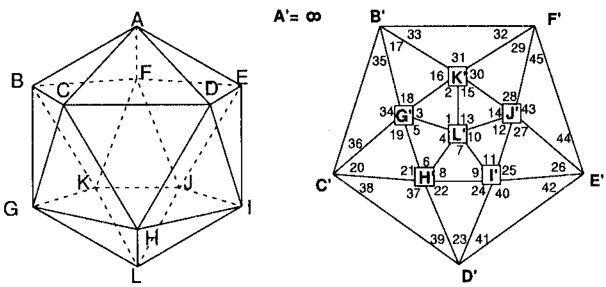
koşullarını sağlayan $\mathfrak{D}$ kompakt, konveks doğrusal altuzayından bir nokta karşılık getirmiş oluruz. Eğer $\mathcal{P}$ 'den verilen iki yirmiyüzlüye $\mathfrak{D}$ kümesinden aynı nokta karşılık geliyorsa bu iki yirmiyüzlüye bağıntılıdır diyelim ve bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıfları kümesini

Θ ile gösterelim.

Şimdi Öklidyen düzgün yirmiyüzlünün tam simetri grubu $\mathcal{G}$'nin Θ üzerine, dolayısıyla da $\mathfrak{D}$ üzerine etkisini gözönüne alalım. Öklidyen düzgün yirmiyüzlünün AL ekseninde saatin tersi yönündeki $\frac{2\pi}{5}$ radyanlık dönmesine karşılık $i = 1, 2, 3, 16, 17, 18, 31, 32, 33$ değerleri için

$$\alpha_i \to \alpha_{i+3} \to \alpha_{i+6} \to \alpha_{i+9} \to \alpha_{i+12} \to \alpha_i$$

değişmeleri meydana gelir.



Şekil 5. Öklidyen yirmiyüzlü ve hiperbolik yirmiyüzlünün dihedral açılarının adlandırılması

Böylece $\mathfrak{D}$ üzerinde $\mathcal{G}$ grubunun hareketi altında sabit kalan bir nokta $i = 1, 2, 3, 16, 17, 18, 31, 32, 33$ değerleri için

$$\alpha_i = \alpha_{i+3} = \alpha_{i+6} = \alpha_{i+9} = \alpha_{i+12}$$

eşitliklerini sağlamalıdır. Böylece

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{13} = \frac{2\pi}{5}$$

elde edilir. Diğer taraftan Öklidyen düzgün yirmiyüzlünün $AEGL$ düzleminde yansıması ile $\alpha_{35} = \alpha_{36}$, $\alpha_{11} = \alpha_{12}$, $\alpha_{16} = \alpha_{21}$ eşitlikleri bulunur. Böylece

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \frac{3\pi}{10}$$
$$\alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \frac{3\pi}{10}$$

elde edilir. Ayrıca Öklidyen düzgün yirmiyüzlünün BI eksenindeki saatin ters yönünde $\frac{2\pi}{5}$ radyanlık dönmesiyle $B'C'$ üzerindeki dihedral açının $A'B'$ üzerindeki dihedral açıya eşit olması gerektiği görülür. Böylece $B'C'$ üzerindeki dihedral açı $\frac{3\pi}{5}$ olur. Bu ise

$$\alpha_{31} = \alpha_{34} = \alpha_{37} = \alpha_{40} = \alpha_{43} = \frac{3\pi}{5}$$

demektir. Buradan

$$\alpha_{17} = \alpha_{20} = \alpha_{23} = \alpha_{26} = \alpha_{29} = \frac{\pi}{5}$$
$$\alpha_{32} = \alpha_{33} = \alpha_{35} = \alpha_{36} = \alpha_{38} = \frac{\pi}{5}$$
$$\alpha_{39} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{44} = \alpha_{45} = \frac{\pi}{5}$$

eşitlikleri elde edilir. $\alpha_{17} = \frac{\pi}{5}$ ve $\alpha_{16} = \alpha_{18}$ olduğundan

$$\alpha_{16} = \alpha_{18} = \alpha_{19} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \frac{2\pi}{5}$$
$$\alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{27} = \alpha_{28} = \alpha_{30} = \frac{2\pi}{5}$$

olur. Bu durumda $\mathcal{G}$'nin hareketi altında sabit kalan $x_o = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{45})$ noktası yukarıda elde ettiğimiz eşitlikleri sağlayan noktadır. Ve $\mathcal{G}$'nin diğer elemanlarının etkileri altında da sabit kalır. Böylece bu noktaya karşılık gelen ideal hiperbolik yirmiyüzlünün herbir kenarı üzerindeki dihedral açı $\frac{3\pi}{5}$ olur. Böylece elde edilen yirmiyüzlü düzgün ideal yirmiyüzlüdür.

Burada $i = 0, 1...14$ olmak üzere $\alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2} + \alpha_{3i+3} = \pi$ olduğundan ideal yirmiyüzlünün hacim fonksiyonunu f fonksiyonu Yardımcı Teorem 5'de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$V(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{45}) = \sum_{i=0}^{14} f(\alpha_{3i+1}, \alpha_{3i+2})$$

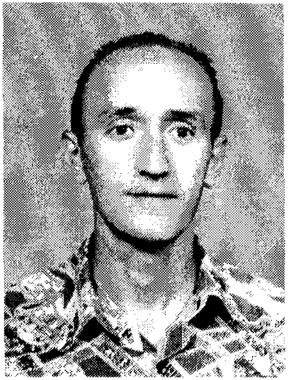
olarak yazabiliriz. Bu fonksiyon Yardımcı Teorem 5'den dolayı konkav fonksiyonların toplamıdır ve kendisi de konkavdır. Böylece Teorem 4'ün koşulları sağlanmış olur. Bu durumda x_o noktası V hacim fonksiyonunun maksimum noktasıdır. O halde $\mathbb{H}^3$'te maksimum hacimli yirmiyüzlü düzgün ideal yirmiyüzlüdür.

KAYNAKÇA

Deniz, A. (2001). *Hiperbolik Uzayda Maksimum Hacimli Simpleksler ve Düzgünlük.* Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

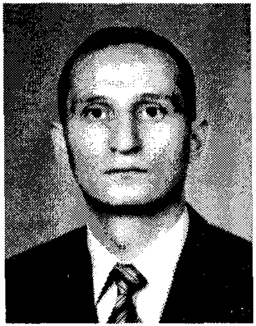
Milnor, J. (1982). Hyperbolic Geometry: The First 150 Years. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6, 9-24.

Ratcliffe, J. G. (1994). *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Graduate Texts in Math, Springer, New York.



Andrei V. RATİU

1964 yılında Bükreş'te doğdu. Lisans öğrenimini Bükreş Üniversitesi'nde tamamladı. 1996 yılında Paris 7 Üniversitesi'nde, Düğümler Teorisi üzerine doktorasını tamamladı. Halen Yardımcı Doçent olarak İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü ve Feza Gürsey Enstitüsü'nde (TÜBİTAK) çalışmaktadır.



Ali DENİZ

1976 yılında Ankara'da doğdu. Lisans öğrenimini Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü'nde 1998 yılında tamamladı. 2001 yılında yüksek lisans öğrenimini Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamladı. Halen aynı enstitüde doktora öğrenimi görmekte ve Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.