

## KESİR İŞLEMLERİNDE FORMAL ARİTMETİK VE GÖRSELLEŞTİRME ARASINDAKİ BİLİŞSEL BOŞLUK

Nevin ORHUN\*

### ÖZET

Bu çalışmanın amacı, 4. sınıf öğrencilerinin kesir konusundaki başarılarını, formal aritmetik ve görselleştirme açısından cinsiyete göre incelemek ve kesir işlemlerinde formal aritmetik ve görselleştirme arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır. Elde edilen bulgulara göre, erkek öğrencilerin kesir konusunda formal aritmetik açısından daha başarılı olduğu, kız öğrencilerin ise kesir konusunda formal aritmetik ve görselleştirme açısından başarılarında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı, görülmüştür. Yapılan incelemeye göre, kesirler konusunda formal aritmetik ve görselleştirme arasında bir bilişsel eksiklik olduğu bulunmuştur. Genel olarak, tüm örneklem içerisinde kız ve erkek öğrencilerin kesir konusundaki başarılarında anlamlı bir fark olmadığı her iki grupta da başarının düşük olduğu görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirler, formal aritmetik, görselleştirme, bilişsel boşluk

---

\* Yrd. Doç. Dr., Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, norhun@anadolu.edu.tr

## **A COGNITIVE GAP BETWEEN FORMAL ARITHMETIC AND VISUAL REPRESENTATION IN FRACTIONAL OPERATIONS**

### **ABSTRACT**

The purpose of this study was to investigate the achievement of fourth grade students on fractions via formal arithmetics and visual representation according to gender variable, and to obtain the relationship between formal arithmetics and visual representation of fractional operations. According to the findings it was observed that boys were more successful in fractions in terms of formal arithmetic, whereas no significant difference was observed in girls' success in fractions in terms of formal arithmetics and visual representation. The analysis of the findings revealed a cognitive deficiency between formal arithmetics and visual representation about fraction. It was seen that the level of achievement by boys and girls on fractions is extremely low, and there is no significant difference between their achievement levels.

**Key words:** Fractions, formal arithmetic, visual representation, cognitive gap

### **İ GİRİŞ**

Kesir kavramı, ilkokul yıllarında anlaşılması en zor matematiksel kavramlardan biridir. Yapılan çalışmalar (Behr, Wachsmuth, Post, 1985; Hasemann, 1981; Hart, 1993; Aksu,1997; Booker,1998; Davis, 2003), öğrencilerin her sınıf düzeyinde kesir kavramını anlamakta güçlükleri olduğunu ortaya koymuştur. Bu güçlüklerin temel nedeni, kesirlerin yapısından ve öğretiminden kaynaklanmaktadır (Aksu,1997; Booker,1998). Öğrenciler doğal sayılarla ilgili düşüncelerini genişleterek rasyonel sayıları, kesirli sayıları öğrenmeye çalışırlar, fakat doğal sayılarla ilgili bilgileri ve deneyimleri kesirli sayıların öğreniminde kullanamazlar (Streefland, 1982; Olive,1999). Bildiğimiz gibi doğal sayı kavramı sayma işleminden, kesirli sayı kavramı ölçme işleminden ortaya çıkmıştır (Filep & Bereznaı 1999). Doğal sayılar ile sayma işlemi birbirini destekler, buna karşın kesirli sayılar yoğunudur. Doğal sayıların gösterimdeki tekliği, kesirli sayılarda yoktur. Bu

özellikler, kesirli sayıların sıralanmasının ve denkleğinin anlaşılmasını zorlaştırır ( Steiner & Stoecklin 1997). Kesirli sayıların öğretiminde genel yöntem, kurallar yardımı ile öğretme veya gösterip yapma ile öğretmedir. Burada genel olarak yapılan hata, öğrencilerin bu işlemlerde yararlanacağı yeterli altyapıya sahip olmadan, öğrencileri hesaplamalara başlatmaktır (Mack,1990; Aksu,1997). Bu durumda kesir kuralları, kolayca öğrenmenin odağı haline getirilerek, yapay bir başarı ortaya çıkabilir. Kesir kurallarına odaklanmak, öğrencilerin işlemlerin anlamlarını öğrenmelerini sağlamaz. Birçok ilköğretim, lise öğrencisi iki kesiri birbirine kolaylıkla bölebilir. Fakat bu işlemi yaparken, ikinci kesrin ters çevrilip çarpılmasının niçin yapıldığını açıklayamaz. Son yıllarda matematik eğitimindeki gelişmeler, öğrencilere matematiksel kuralların ezberletilmesinden daha çok, bu kavramları oluşturabilmesini sağlayacak etkinlikler yardımıyla matematik öğretimini öne çıkarmak eğilimindedir (Arcavi, 2003; Olkun, 2004). Bir çok çalışma, öğrencilerin kesirleri öğrenmede, özellikle kesirler ve kesir işlemlerinin somut deneyimlerle ilişkilendirilmediği zaman karşılaştıkları problemleri belirtmektedir (Hasemann, 1981; Carraher&Schliemann, 1991; Keijzer& Terwel, 2003). Hart, (1987) kesirlerdeki anlamsız hesap kurallarını izlemek amacı ile ilkokullarda büyük bir öğrenci grubuna uzun bir sürede kesirlerle ilgili formal aritmetik kuralları uygulamış ve bunun sonucunda kesirlerle ilgili hesap kuralları ve uygulamaları arasında büyük bir boşluk olduğunu göstermiştir. Hart, (1987); Streefland, (1990); Bezuk & Bieck (1993); Steffe,(2002) yaptıkları araştırmalarda, kesirlerin dilini ve kesirlerin kendisini üretmede izlenen anlamlı durumlarla öğrencileri karşılaştırmanın gerekliliğini vurgulamışlardır.

Bu çalışmanın amacı, dördüncü sınıf öğrencilerinin kesirlerle ilgili işlemlerde, onların özel eğilimlerini cinsiyete göre ortaya çıkarmak ve öğrencilerin kesir işlemlerinde formal aritmetik ve görselleştirme arasındaki ilişkilerini incelemektir.

Matematiksel kavrama, eğitimin önemli bir hedefi olarak kabul edilir. Birçok çalışmadan da bilinmektedir ki, öğrenciler matematiksel modelleme ve formal matematik arasındaki ilişkiyi kavrayarak anlamlı biçimde uygulamada

zorlanırlar. Öğrenciler, formal matematikten görselleştirmeye veya tersi işlemde kolaylıkla geçiş yapamazlar. Kesirleri modelleme yardımı ile somut deneyimlerden akıl yürütmeye geçişi kolaylaştırabiliriz. Bu durum, kesirli sayıların görselleştirilmesinde kullanılan dairesel, dikdörtgensel modeller, sayı doğrusu ve farklı nesnelere kullanıma bağlıdır (Streefland, 1990; Steiner&Stoecklin, 1997). Somut deneyimlerden formal aritmetiğe geçişte ve kesirlerin temsil edildiği modelin kullanımında, öğrencilerin karşılaştıkları güçlüklerin nedenlerini araştıran çalışmalar vardır (Streefland, 1990; Keijzer& Terwel, 2003). Bright, Behr, Wachsmuth (1988) çalışmalarında kesirleri sayı doğrusu üzerinde tam olarak gösterme yollarını araştırmışlar ve model olarak sayı doğrusunu kullanmanın, diğer modellerin kullanımlarına göre üstünlüklerini belirtmişlerdir. Bunun yanında, Streefland, (1990) yaptığı çalışmada, kesirler için bir model olarak sayı doğrusunu kullanmanın, hem kesir dilinin kazandırılmasında hem de kesirlerin şekil olarak incelenmesinde uygun olmadığını belirtmiştir. Perkins ve Unger'e (1999) göre matematiksel işlemlerin gösteriminde hangi modelin iyi bir kullanıma sahip olduğunun belirtilmesi, çeşitli problemlerde böyle modellerin uygulanabilirliğine bağlıdır. Bu anlamda öğretmenler, yaratıcı çözümlerin problemlere uygulanmasında daha çok özen göstermelidirler. Bu aşamada öğretmenler iyi bir öykücü, rehber, güdüleyici, ve bilgi kaynağı olmalıdırlar (Mayer, 1989; Tzur, 1999; Sharp&Adams, 2002; Garofalo&Sharp, 2003). Öğrencilerin kesir işlemlerini anlamasına yönelik geleneksel algoritmada formal aritmetik ve görselleştirme arasındaki bağlantının kurulması gerekir. Bu bağlantının kurulmasında bölme işleminin iyi anlaşılması gerekmektedir (Saenz-Ludlow,1995; Nowlin,1996). Dikkatin kesir kurallarına odaklanması çok uygun olmaz. Bu durumda, işlemlerin uygulanmasında kazanılan yetkinlik kalıcı olmaz (Aksu,1997). Kesirlerin öğrenilmesinde, parça-bütün, bölüm-oran, operatör-ölçüm gibi matematiksel kavramlara sınırlandırılma ve temel kuralların verilmesi kesir hesaplarında öğrenciler için bilişsel karmaşıklığı oluşturur (Kieren,1993; Olive,1999; Wright, Martland, Strafford, Stanger, 2002). Bütün bu zorluklar, öğrencilerin kesirlerle ilgili matematiksel kavram ve işlemleri anlama yerine sembollerle işlem yapmalarına neden olmaktadır (Steiner&Stoecklin, 1997). Bilindiği gibi, temel kavramların tam olarak öğrenilmemesi veya bir başka deyişle

konuya ilişkin kavram ve kuralların ezberlenmesi, öğrenilen bilginin kullanılmasını zorlaştırır.

## II YÖNTEM

Araştırmanın örneklemini, 2005–2006 öğretim yılı sonbahar döneminde Eskişehir Merkez ilçesi ilköğretim okulundaki dördüncü sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmaya 73 öğrenci ( 41 kız, 32 erkek) katılmıştır. Araştırmanın verileri 30 açık uçlu sorudan elde edilmiştir. Test iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümdeki sorular, öğrencinin kesirleri algılayışı, kesirlerin sıralanması, kesirlerin denklığı ve dört temel işlemlerle ilgilidir. İkinci bölümdeki sorular, kesir öğreniminde öğrencilerin akademik başarısını formal aritmetik ve görselleştirme açısından belirlemeye yöneliktir. Testin hedef ve davranışları MEB İlköğretim Matematik Ders Programından alınmıştır. Test maddeleri MEB ders kitaplarından yararlanılarak ve deneyimli üç ilkokul öğretmeninin düşünceleri alınarak araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Öğrencilerden, bu soruları yanıtlamaları ve görselleştirme ile ilgili sorularda sonucu nasıl bulduklarını yazmaları istenmiştir. Her bir öğrencinin nasıl bir yöntem izlediğini bulabilmek için öğrencilerin verdikleri yanıtlar hem doğrulukları hem de yapılan işlemler dikkate alınarak incelenmiştir. Ölçme aracından elde edilen ölçümler için alfa güvenirliği 0,74 bulunmuştur. Aşağıda incelenen sorulardan bazıları görülmektedir:

Soru 3:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{100}{500}$

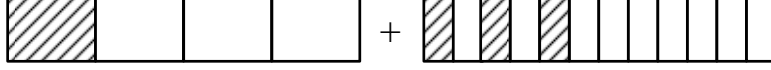
Yukarıda verilen kesirlerden hangisi en büyüktür?

Soru 5:  $\frac{3}{4}$  kesrine denk bir kesir yazınız.

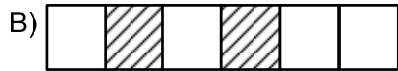
Soru 8:  $\frac{2}{5}$  .3 işlemini yapınız.

Soru 9:  $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$  toplamını bulunuz.

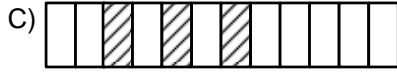
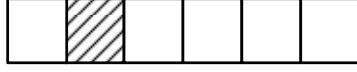
Soru 16. Aşağıda verilen taralı bölgelerin toplamı hangisidir? Açıklayınız



Soru 22. Aşağıda verilen taralı bölge hangisine denktir? Açıklayınız.



Soru 27. Aşağıda verilen taralı kısmın 3 katı hangisidir? Açıklayınız.



### III BULGULAR

Genelde öğrenciler, formal aritmetikte dört işlemle ilgili sorulara yanıt vermişlerdir. Paydaları eşit olan kesirlerin toplama ve çıkarma işlemlerinde, kısmen başarılı sonuç alınmıştır. Fakat paydaları eşit olmayan kesirlerin toplama ve çıkarma işlemlerinde, hem pay hem de paydalar toplanarak veya çıkartılarak işlem yapılmıştır. Bu tip sorularda başarı kız öğrencilerde %26, erkek öğrencilerde %41 dir. Doğal olarak kesirlerin toplanması çıkartılması konusunda en temel kavram, paydaların eşit olup olmadığı durumudur. Bu kavramın, öğrencilerin anlamada güçlük çektiği, hatalarının odaklandığı durum olduğu gözlenmiştir. Bu konu ile ilgili yapılan araştırmalar da bunu doğrulamaktadır (Hasemann, 1981; Streefland, 1990; Steencken & Maher, 2003; Davis, 2003; Şiap, & Duru, 2004).

En çok hata yapılan soru tipi, bir kesir ile bir tamsayının çarpımı işlemidir.

Örneğin:

$$\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \text{ bulunmuştur, bu soruda başarı, kız öğrencilerde \%13,8,}$$

erkek öğrencilerde %20,3 dür. Buna karşılık

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} \text{ bulunmuştur. Öğrencilerin başarısı \%100 dür.}$$

Buna göre öğrencilerin doğal sayılardan kesirli sayılara geçişteki kavram yanılışı ortaya çıkmaktadır.

Bir başka soru tipi olan, verilen kesirlerden en büyük ve en küçük kesiri bulma işleminin zor anlaşılan sorulardan biri olduğu tespit edilmiştir. Örneğin:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{100}{500}$$

kesirlerinden en büyük olan hangisidir?

Bu soruya verilen yanıtların çoğu, "en büyük kesir  $\frac{100}{500}$  dür." şeklindedir.

Bu soruya verilen yanıtlarda, "100, 1 ve 4 den daha büyük olduğu için en büyük kesirdir," veya "daha çok parçası olduğu için en büyüktür" veya hiçbir açıklama

yapmadan, herhangi biri işaretlenmiş veya boş bırakılmıştır. Bazı öğrenciler ise " $\frac{1}{2}$

en büyük kesirdir: paydası en küçük olduğu için en büyük kesir olur" şeklinde yanıtlamışlardır. Bu soruda doğru yanıtlar kızlarda %17, erkeklerde %21 dir.

Bu soruya verilen yanıtlardaki yanılıklar, öğrencilerin kesirlerde büyüklük, küçüklük ve denklik kavramının oluşmadığını göstermektedir.

Görselleştirme ile ilgili sorularda, öğrencilerin daha çok matematiksel bilgi ve becerilerini anlatımlara dönüştürmeden yani, hiçbir açıklama yapmadan yanıt işaretlemiş oldukları gözlenmiştir. Bunun nedeni, okullarımızda sürekli olarak her sınıf düzeyinde uygulanan çoktan seçmeli sınavın yol açtığı olumsuzluktur. Bu grupta bir başka genelleme de öğrencilerin çözümü geometrik gösterime bakmadan, aritmetik işlem yaparak bulmalarıdır. Bu durum Lehrer, Strom, Confrey, (2002) tarafından yapılan çalışmanın sonucu ile uyumaktadır.

Verilerin çözümlenmesinde, SPSS'de güvenilirlik, bağımlı t testi, kullanılmıştır. Tablo 1, Tablo 2, ve Tablo 3 te kız ve erkek öğrencilerin kesir konusundaki akademik başarılarının, formal aritmetik (FA) ve görselleştirme (G) açısından elde edilen verilerinin istatistiksel analiz sonuçları verilmektedir.



**Tablo 1.** Kız öğrenciler için bağımlı t testi sonuçları

Kız Öğrenciler	N	Ortalama	Ss	t
FA	41	33.16	13.22	-0.25
G	41	33.66	10.41	

p&lt;0.808

Tablo 1 de görüldüğü gibi kız öğrenciler için formal aritmetik ortalaması 33.16 iken görselleştirme ortalaması 33.66 olmuştur, t= -0.25 değeri .95 lik güven aralığında alt sınır -4.67 ve üst sınır 3.67 aralığında yer almaktadır. Buna göre kız öğrenciler için, formal aritmetik ve görselleştirme puan ortalamaları arasında istatistiksel açıdan anlamlı bir fark bulunmamıştır.

**Tablo 2.** Erkek öğrenciler için bağımlı t testi sonuçları

Erkek Öğrenciler	N	Ortalama	Ss	t
FA	32	34.61	8.93	10.09
G	32	18.46	9.24	

p&lt;0.00

Tablo 2 de görüldüğü gibi erkek öğrenciler için formal aritmetik ortalaması 34.61 iken görselleştirme ortalaması 18.46 olmuştur, t= 10.09 değeri .95 lik güven aralığında alt sınır 12.85 ve üst sınır 19.45 aralığında yer almaktadır. Buna göre erkek öğrenciler için, formal aritmetik ve görselleştirme puan ortalamaları arasında istatistiksel açıdan anlamlı bir fark vardır.

Genel olarak kesir işlemlerinde öğrencilerin başarılarını formal aritmetik ve görselleştirme açısından değerlendirdiğimizde elde edilen analiz sonuçları Tablo 3 te verilmektedir.

**Tablo 3.** Öğrencilerin başarılarının formal aritmetik ve görselleştirme açısından bağımlı t testine göre değerlendirilmesi.

Öğrenciler	N	Ortalama	Ss	t
FA	73	33.8	10.7	5.69
G	73	26.6	12.4	

p&lt;0.00

Kesir işlemlerinde kız ve erkek öğrencilerin başarılarını formal aritmetik ve görselleştirme açısından değerlendirdiğimizde elde edilen sonuçlara göre istatistiksel olarak formal aritmetik ortalamasının görselleştirme ortalamasından daha yüksek olduğunu %95 güven ile söyleyebiliriz. Bu iki ortalama arasındaki korelasyon katsayısı 0.568 dir. Buna göre iki ortalama arasında pozitif yönlü istatistiksel olarak anlamlı bir ilişki vardır. Bir başka deyişle, kesir işlemlerinde formal aritmetik notu yüksek olanın görselleştirme notu da yüksektir.

#### IV YARGI VE ÖNERİLER

İlköğretim sınıflarında öğrencilerin matematiği öğrenmede karşılaştıkları güçlükler, doğal sayıların öğretiminden sonra kesirlerin öğretimine başlandığında daha da artmaktadır. Bu durum öğrencilerin matematikte akademik başarısını ve bilişsel gelişimini olumsuz yönde etkilemektedir. Bu alanda karşılaşılan öğrenme güçlükleri, ileriki matematik konularına yansımakta ve bu güçlükler katlanarak artmaktadır. Bu nedenle başlangıçta yer alan temel kavramların, tam öğrenilmesi gerekmektedir. Bu anlamda, kesirler konusuna başlamadan önce, her öğrenci günlük yaşamında kesirlerle nasıl karşılaşacağı ve onların nasıl kullanılacağı konusunda bilgilendirilmelidir. Her öğrenci günlük yaşamında kesir konusunun önemli bir yeri olduğunu görmelidir (Saenz-Ludlow,1995; Aksu,1997). Bu şekildeki bir hazırlık, kesir konusunun öğrenimi kolaylaştırabilir. Kesirlerle ilgili formal aritmetiğin görselleştirilmeye dönüştürülme işlemi, öğrencilere öğrenme sürecinde kazandırılacak etkinlik olmalıdır. Bu iki kavram, yani formal aritmetik ve görselleştirme birbirinden soyutlanmamalıdır. Aksi halde öğrencilerin, matematiksel bilgi ve becerilerini anlatımlara dönüştürmesi zorlaşmaktadır. Soruların birçoğunun boş bırakılması veya işlem yapmadan sonucun işaretlenmesi, bunun bir

sonucudur. Bu durumun bir başka nedeni de, daha şimdiden öğrencilerin çoktan seçmeli sınavlara alışıarak, ifade güçlüğü yaşamaları olabilir.

Genel olarak bakıldığında tüm örneklem içerisinde kız öğrencilerle erkek öğrenciler arasında başarı oranları yönünden önemli bir fark olmadığı, her iki grupta da başarının düşük olduğu, tam öğrenme anlamında başarının sağlanmadığı görülmektedir. Özellikle paydaları eşit olmayan kesirlerin sıralanması, toplanması, bir kesrin bir tamsayı ile çarpılması, görsel olarak bir kesre denk kesrin bulunmasında çok yanlış yapılması, görsel kavramları formal olarak ifade etmedeki güçlükler, kesir konusunun, öğrenciler için öğrenilmesi zor bir konu olduğunu göstermektedir. Yapılan birçok araştırma bu zorlukları doğrulamaktadır. Bütün bu güçlükler göz önüne alınırsa, Hart'ın da (1981) önerdiği gibi, kesir konusunun ilköğretimin ilk sınıflarında görsel olarak verilmesi, daha ileri sınıflarda da kesirlerin formal aritmetiğinin verilmesi yerinde olacaktır.

#### KAYNAKÇA

- Aksu, M. (1997). Student Performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research*, 90(6), 375-380.
- Arcavi, A. (2003). A role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Behr, M.J., Wachsmuth, I., Post, R.T. (1985). Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 120-131.
- Bezuk, N.S. & Bieck, M. (1993). *Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers*. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom-Middle grades mathematics* 118-136. New York: Macmillan.
- Booker, G. (1998). Children's construction of initial fraction concepts. In *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Stellenbosh, South Africa, 2, 128-135.
- Bright, W.G., Behr, J.M., Post, R.T., Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (3), 215-232.

- Carraher, D.W.&Schliemann, A.D. (1991). Children's understanding of fractions as expressions of relative magnitude. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth PME Conference*, Asisi, Italy, Vol I, 184-191.
- Davis, E.G.(2003). Teaching and classroom experiments dealing with fractions and proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 107-111.
- Filep, L., Bereznai, Gy., (1999). *History of numerals*. Budapest, Filum. (2<sup>nd</sup> ed., in Hungarian, also in Bulgarian: Sophia, Technika.)
- Garofalo, J., Sharp, B., (2003, April). Teaching fractions using simulated sharing activity. *Learning and Learning with Technology*, 30, 41, 36-39.
- Hart, K.M. (1987). Practical work and formalisation, too great a gap. In J.C.Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran. *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education (PME-XI) Vol II*, 408-415. Montreal.
- Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 71-87.
- Howard, A.C. (1991). Addition of fractions. The unrecognized problem. *Mathematics Teacher*, December, 710-713.
- Keijzer, R., Terwel, J., (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction*, 13, 285-304.
- Kieren,T.E.(1993). Rational and fractional numbers:From quotient field to recursive understanding. In T.P.Carpenter,E.Fennema&T.A.Romberg(Eds.), *Rational numbers:An integration of research* 49-84.Hillsdale,NJ:Erlbaum
- Lamon,S.L. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
- Lehrer, R., Strom, D.&Confrey, J. (2002).Grounding metaphors and inscriptional resonance: Children's emerging understanding of mathematical similarity. *Cognition and Instruction*, 20(3), 359-398.
- Mack,N.K. (1990). Learning fraction with understanding, building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32.
- Mayer, R.W., (1989). Models for understanding. *Review of Educational Research*, 59(1), 43-64.
- Milli Eğitim Bakanlığı ( MEB) (1997). *İlköğretim Matematik Programı*.
- Nowlin, D. (1996). Division with fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2(2), 116-119.
- Okun, S. (2004). When does the volume formula make sense to students. *Hacettepe University Journal of Faculty of Education*, 25, 160-165.

- Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: a reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(4), 279-314.
- Perkins, D.N. & Unger, Chr. (1999). *Teaching and Learning for understanding*. In C.M. Reigeluth (Ed.), *Instructional design theories and models*. Vol II. A new paradigm of instructional theory. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Saenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 28(2), 101-132.
- Sharp, J., Adams, B., (2002, August). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research*. Washington, D.C., 333-347.
- Şiap, İ., Duru, A. (2004). Skills of using geometrical models in fractions. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 89-96.
- Steencken, E.P., Maher, A. C. (2003). Tracing fourth graders' learning of fractions: early episodes from a year-long teaching experiment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 113-132.
- Steffe, P.L. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 267-307.
- Streefland, L., (1982). Subtracting fractions with different denominators. *Educational Studies in Mathematics*, 13(3), 233-255.
- Streefland, L. (1990). Fractions in realistic mathematics education, a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Steiner, F.G., Stoecklin, M. (1997). Fraction calculation. A didactic approach to constructing mathematical networks. *Learning and Instruction*, 7(3), 211-233.
- Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics*, 30(4), 390-416.
- Wright, R. J., Martland, J., Stafford, A.K. & Stanger, G. (2002). *Teaching number. Advancing children's skills and strategies*. London: Paul Chapman.