ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:10-Sayı/No: 2 : 477-484 (2009)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELİNİN QR AYRIŞIMI YARDIMIYLA MATLAB ÇÖZÜM ALGORİTMALARI

Alper BEKKİ [1], Memmedağa MEMMEDLİ [2], Embiya AĞAOĞLU [3]

ÖZ

Bu çalışmada GİR Modeli, sıradan en küçük kareler ve genelleştirilmiş en küçük kareler problemi olarak ele alınmıştır. Çözümleme sürecinde QR, genelleştirilmiş QR ayrışımı yardımıyla Matlab ortamında çözüm algoritmaları sunulmuştur. Algoritmaların performansı deneysel olarak değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modeli, QR ayrışımı, Genelleştirilmiş QR ayrışımı, Matlab.

SOLUTION ALGORITHMS IN MATLAB FOR SEEMINGLY UNRELATED REGRESSIONS MODEL BY QR DECOMPOSITION

ABSTRACT

In this study, Seemingly Unrelated Regressions (SUR) model is taken as ordinary least squares and generalized least squares problem. In solution process, algorithms presented for Matlab by using QR and generalized QR decomposition. Performances of these algorithms are evaluated empirically.

Keywords: Seemingly Unrelated Regressions Model, QR decomposition, Generalized QR decomposition, Matlab.

1. GİRİŞ

Görünüşte İlişkisiz Regresyon modeli (Seemingly Unrelated Regression Model) fikri ilk olarak Zellner (1962) tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışmada Zellner, görünüşte ilişkisiz regresyon modelini oluşturan her bir denklem için bağımsız değişkenleri arasında bir ilişki olmadığı varsayımı altında, farklı denklemlerin hata terimleri arasında ilişki olduğu durumlarda görünüşte ilişkisiz regresyon tahminlerinin en küçük kareler tahminlerinden daha etkin olduğunu göstermiştir.

Bir regresyon denklemine ilişkin hata terimi diğer regresyon denklemlerinin hata terimleri ile ilişkili ise, bu çeşit regresyon denklemleri Görünüşte İlişkisiz Regresyon (GİR) Modelleri olarak isimlendirilir. GİR modellerine sıradan en küçük kareler yöntemi uygulanırsa sapmasız ve tutarlı kestirimler elde edilir. Ancak hatalar arasındaki ilişki dikkate alınmadığı için yapılan bu kestirimler etkin değildir. Bu nedenle, GİR modelleri için parametre tahminleri yapılırken hatalar arasındaki ilişkiyi de dikkate alan bir kestirim yöntemini kullanmak gerekir.

GİR modelleri, ekonometri, zaman serileri, panel veri modelleri ve eşanlı denklem sistemlerine ilişkin parametre tahminlerinde geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ancak çözümlemede kullanılan nümerik araçların eşit düzeyde gelişimleri, ekonometride yapılan teorik ilerlemelerin gerisinde kalmaktadır. GİR modelleri, mo-

[1,] Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü 26470, Eskişehir. E-posta: abekki@anadolu.edu.tr
[2,] Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü 26470, Eskişehir. E-posta: mmammadov@anadolu.edu.tr
[3,] Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü 26470, Eskişehir. E-posta: eagaoglu@anadolu.edu.tr

Geliş: 13 Kasım 2007; **Düzeltme:** 21 Ocak 2008; **Kabul:** 17 Mart 2009

deldeki denklem sayısı, herbir denklemdeki bağımsız değişken sayısı ve bu değişkenlere ilişkin gözlem sayıları bir bütün olarak değerlendirildiğinde, çoğunlukla aşırı büyük boyutlu bir problem halini almaktadır. Eldeki problemin boyutuyla orantılı olarak, kullanılmakta olan doğrusal regresyon çözümleme yöntemleri gerek matematiksel işlemlerin çokluğu gerekse mevcut bilgisayar teknolojisinin işlem kapasitesi göz önüne alındığında bu tür problemlerin çözümünde etkisini yitirmektedir. Bundan dolayı, son yıllarda daha az sayıda işlem gerektiren farklı çözüm teknikleri kullanılmaktadır. Bu tekniklere örnek olarak matrislerin QR ayrışımı veya Genelleştirilmiş QR ayrışımı gösterilebilir.

Bu çalışmada, iki farklı problem haline getirilen GİR modellerinin parametre tahminlerinde, QR ayrışımı temeline dayanan Foschi vd. (2003) tarafından öne sürülen iki algoritma incelenmiş ve Matlab'da bu algoritmaların program kodları oluşturulmuştur.

Bu amaçla, çalışmanın ikinci bölümünde GİR modeli yapısal olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde GİR modelinin, sıradan En Küçük Kareler problemine getirilerek QR ayrışımı yardımıyla parametre tahminlerinin elde edileceği birinci algoritmanın yapısı üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde ise GİR modelinin, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler problemi haline getirilerek Genelleştirilmiş QR ayrışımı yardımıyla parametre tahminlerinin elde edilmesinin amaçlandığı ikinci algoritmanın yapısı üzerinde durulmuştur. Beşinci ve son bölümde ise her iki algoritma için Matlab'da program kodları oluşturularak bu algoritmaların çalışma süreleri bakımından etkinlikleri, deneysel veriler kullanılarak karşılaştırılmıştır.

2. GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON (GİR) MODELİ

GİR modeli, genel doğrusal modelin özel bir durumudur ve G tane regresyon denklemi ile şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{u}_i \quad , \quad i = 1, \ldots, G$$

Burada M gözlem sayısı olmak üzere, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^M$ bağımlı değişken vektörleri, $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{M \times k_i}$ tam sütun ranklı bağımsız değişken matrisleri, $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ bilinmeyen katsayılar vektörleri ve $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^M$ hata vektörleridir. $\mathbf{u}_i$'nin beklenen değeri sıfırdır yani $E(\mathbf{u}_i) = 0$ ve varyans-kovaryans matrisi $\sigma_{i,i}\mathbf{I}_M$'dir, $i = 1, \ldots, G$. Ayrıca modelde yer alan G tane regresyon denkleminin hata vektörleri de birbirleriyle ilişkilidir, yani $E\left(u_i u_j^T\right) = \sigma_{i,j} I_M \quad (i, j = 1, \ldots, G)$'dir (Kontoghiorghes, 2000; Srivastava ve Giles, 1987; Bekki, 2007). GİR modeli,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & & & \\ & \mathbf{X}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{X}_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_G \end{pmatrix}$$

veya $Vec(\cdot)$ operatörü kullanılarak

$$Vec(\mathbf{Y}) = \left(\oplus_{i=1}^{G} \mathbf{X}_i\right) Vec\left(\{\boldsymbol{\beta}_i\}_G\right) + Vec(\mathbf{U}) \tag{1}$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir. Burada $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_G) \in \mathbb{R}^{MxG}$ - sütunları her bir denklemin bağımlı değişken vektörlerinden oluşan ve $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_G) \in \mathbb{R}^{MxG}$ - sütunları her bir denklemin hata vektörlerinden oluşan $M \times G$ boyutlu matrislerdir. $\{\boldsymbol{\beta}_i\}_G$, $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_G$ vektörlerinin kümesini ifade etmektedir. $Vec(\cdot)$ operatörü küme vektörlerini sıra ile alt-alta yazarak sütun vektörü haline getiren işlemdir. $\oplus_{i=1}^{G} \mathbf{X}_i$ köşegen elemanları $\mathbf{X}_i$ matrisleri olan direkt toplamdır ve $K = \sum_{i=1}^{G} k_i$ olmak üzere $GM \times K$ boyutlu blok köşegen matristir (Regalia ve Mitra, 1989; Harville, 1997). Hata terimi $Vec(\mathbf{U}) \sim (\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_M)$ şeklinde ifade edilir ve $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}] \in \mathbb{R}^{G \times G}$ simetrik ve pozitif yarı-tanımlı bir matristir. Burada $\otimes$ işlemi Kronecker çarpımıdır (Regalia ve Mitra, 1989; Harville, 1997). Gerekli durumlarda $Vec\left(\{\boldsymbol{\beta}_i\}_G\right)$ kolaylık için $\boldsymbol{\beta}$ şeklinde de yazılacaktır. Buna göre, $\boldsymbol{\beta}^T = (\boldsymbol{\beta}_1^T, \ldots, \boldsymbol{\beta}_G^T)$ olur.

3. QR AYRIŞIMI İLE SIRADAN DOĞRUSAL MODELİN KESTİRİMİ

İlk olarak $\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ olmak kaydıyla Cholesky ayrışımı yapılır ki burada $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{GxG}$ üst üçgensel matristir. Daha sonra (1) eşitliğinin her iki tarafının da $\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I}_M\right)$ ile çarpımı bize aşağıdaki Sıradan Doğrusal Modeli (SDM'yi) verecektir:

$$\underbrace{Vec\left(\mathbf{Y}\mathbf{C}^{-T}\right)}_{\bar{\mathbf{y}}}=\underbrace{\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}_M\right)\left(\oplus_{i=1}^{G}\mathbf{X}_i\right)}_{\bar{\mathbf{X}}}\boldsymbol{\beta}+\underbrace{Vec\left(\mathbf{U}\mathbf{C}^{-T}\right)}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\tag{2}$$

Bu modelin en küçük kareler tahmini, (1) modelinin en iyi sapmasız tahmincisini verir.

(2) denklemi ile verilen SDM'nin QR ayrışımı,

$$\bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}K\\ GM-K\end{matrix}\qquad ve\qquad \bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{A}}\\ \bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{B}}\end{pmatrix}\begin{matrix}K\\ GM-K\end{matrix}$$

işlemleri yardımıyla elde edilir. $\bar{\mathbf{R}}\in\mathbb{R}^{K\times K}$ üst üçgensel ve $\bar{\mathbf{Q}}\in\mathbb{R}^{GM\times GM}$ ortogonal matrislerdir (Golub ve Charles, 1996). (2) eşitliğinin her iki tarafı soldan $\bar{\mathbf{Q}}^T$ matrisi ile çarpıldığında

$$\bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{y}}=\bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta}+\bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\varepsilon}$$

veya

$$\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{A}}\\ \bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{B}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}+\bar{\mathbf{Q}}^T\begin{pmatrix}\bar{\varepsilon}_A\\ \bar{\varepsilon}_B\end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda β'nın en küçük kareler tahmincisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\bar{\mathbf{R}}^{-1}\bar{\mathbf{y}}_A$$

olarak elde edilebilir. Bu şekilde (2) eşitliğinin doğrudan çözümü elde edilebilmesine karşın, bağımsız değişkenler matrislerinin boyutlarının büyük olması nedeniyle çözüm elde edilemeyebilir.

Çözümün elde edilememesi ya da elde edilecek çözümün hesaplama açısından etkin olmamasından dolayı çözümleme için daha etkin algoritmaların geliştirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla bağımsız değişkenler matrisinin blok matris özelliğinden faydalanarak QR ayrışımını her bir matris için ayrı ayrı ele almak daha etkin bir çözüm metodu olarak görünmektedir. Buradan yola çıkarak herbir $\mathbf{X}_i$'nin ($i=1,2,...,G$) QR ayrışımını ele alalım:

$$\mathbf{Q}_i^T\mathbf{X}_i=\begin{pmatrix}\mathbf{R}_i\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{Q}_i^T=\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{Q}}_i^T\\ \hat{\mathbf{Q}}_i^T\end{pmatrix}\begin{matrix}k_i\\ M-k_i\end{matrix}\tag{3}$$

$\mathbf{R}_i\in\mathbb{R}^{k_i x k_i}$ üst üçgensel ve $\mathbf{Q}_i\in\mathbb{R}^{MxM}$ ortogonal matrislerdir. Buradan $\oplus_i\mathbf{X}_i$'nin QR ayrışımı,

$$\mathbf{Q}^T\left(\oplus_i\mathbf{X}_i\right)=\begin{pmatrix}\oplus_i\mathbf{R}_i\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}K\\ GM-K\end{matrix}\quad,\quad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\oplus_i\tilde{\mathbf{Q}}_i\\ \oplus_i\hat{\mathbf{Q}}_i\end{pmatrix}\tag{4}$$

olarak elde edilir. (2) eşitliğinin $\mathbf{Q}^T$' ye soldan çarpımı ile,

$$\mathbf{Q}^TVec\left(\mathbf{Y}\mathbf{C}^T\right)=\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{I}_M\right)\left(\oplus_{i=1}^{G}\mathbf{X}_i\right)\boldsymbol{\beta}+\mathbf{Q}^TVec\left(\mathbf{U}\mathbf{C}^{-T}\right)$$

veya (5)

$$\begin{pmatrix}Vec\left(\left\{\tilde{\bar{\mathbf{y}}}_i\right\}\right)\\ Vec\left(\left\{\hat{\bar{\mathbf{y}}}_i\right\}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\bar{\mathbf{W}}}\\ \hat{\bar{\mathbf{W}}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}+\begin{pmatrix}Vec\left(\tilde{\bar{\mathbf{V}}}\right)\\ Vec\left(\hat{\bar{\mathbf{V}}}\right)\end{pmatrix}$$

olarak elde edilir ki, burada,

$$\tilde{\bar{\mathbf{W}}}=\begin{array}{c}\begin{matrix}k_1 & \cdots & k_G\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}\tilde{\bar{\mathbf{W}}}_{1,1} & \cdots & \tilde{\bar{\mathbf{W}}}_{1.G}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{\bar{\mathbf{W}}}_{G,1} & \cdots & \tilde{\bar{\mathbf{W}}}_{G,G}\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}k_1\\ \vdots\\ k_G\end{matrix}\qquad \hat{\bar{\mathbf{W}}}=\begin{array}{c}\begin{matrix}M-k_1 & \cdots & M-k_G\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}\hat{\bar{\mathbf{W}}}_{1,1} & \cdots & \hat{\bar{\mathbf{W}}}_{1,G}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{\bar{\mathbf{W}}}_{G,1} & \cdots & \hat{\bar{\mathbf{W}}}_{G,G}\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}M-k_1\\ \vdots\\ M-k_G\end{matrix}$$

$$\tilde{\bar{\mathbf{W}}}_{i,j}=\begin{cases}\gamma_{i,j}\tilde{\mathbf{Q}}_i^T\mathbf{X}_j & , \quad i<j\\ \gamma_{i,j}\mathbf{R}_i & , \quad i=j\\ \mathbf{0} & , \quad i>j\end{cases}\qquad \hat{\bar{\mathbf{W}}}_{i,j}=\begin{cases}\gamma_{i,j}\hat{\mathbf{Q}}_i^T\mathbf{X}_j & , \quad i<j\\ \mathbf{0} & , \quad i\geq j\end{cases}\tag{6}$$

$\gamma_{i,j}$ ise $\mathbf{C}^{-1}$'in (i,j) inci elemanıdır. $\tilde{\bar{\mathbf{W}}}$ ve $\hat{\bar{\mathbf{W}}}$ sırasıyla blok üst üçgensel ve kesin blok (ana köşegen elemanları da sıfır olan) üst üçgensel matrislerdir (Foschi ve Kontoghiorghes, 2004).

Son olarak elde edilen $\tilde{\bar{\mathbf{W}}}$ ve $\hat{\bar{\mathbf{W}}}$ blok üst üçgensel matrisleri için QR ayrışımı güncellemesi (UQRD) yapmak gerekir. Bu işlem sonunda,

$$\bar{\mathbf{Q}}^T\begin{pmatrix}\tilde{\bar{\mathbf{W}}}\\ \hat{\bar{\mathbf{W}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}K\\ GM-K\end{matrix}\qquad \bar{\mathbf{Q}}^T\begin{pmatrix}Vec\left(\left\{\tilde{\bar{\mathbf{y}}}_i\right\}\right)\\ Vec\left(\left\{\hat{\bar{\mathbf{y}}}_i\right\}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\bar{\mathbf{y}}}\\ \bar{\bar{\mathbf{y}}}_*\end{pmatrix}\begin{matrix}K\\ GM-K\end{matrix}\tag{7}$$

olarak elde edilir. Bu güncelleme işlemini en küçük kareler çözümü takip eder ve sonuçta $\boldsymbol{\beta}$'nın en iyi doğrusal sapmasız tahmini $\boldsymbol{\beta} = \overline{\mathbf{R}}^{-1}\overline{\overline{\mathbf{y}}}$ olarak elde edilir (Bekki, 2007).

4. GLLSP VE GENELLEŞTİRİLMİŞ QR AYRIŞIMI

(1) eşitliği ile verilen GİR modeli, genelleştirilmiş doğrusal en küçük kareler problemi (GLLSP) olarak da şu şekilde ele alınabilir:

$$\arg\min \|\mathbf{V}\|_F^2 \quad , \quad Vec(\mathbf{Y}) = \left(\oplus_i \mathbf{X}_i\right)\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_M\right)Vec(\mathbf{V})$$

'ye göre (8)

Burada $\mathbf{C}$'nin $\boldsymbol{\Sigma} \equiv \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ Cholesky ayrışımından bulunması kaydıyla, $\mathbf{V}\mathbf{C}^T = \mathbf{U}$, $Vec(\mathbf{V}) \sim \left(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{GM}\right)$'dir ve $\|.\|_F$, Frobenius normudur. Bu yaklaşım, (2) modelini temel alan algoritmalara göre nümerik açıdan daha durağan algoritmalar geliştirilmesini de mümkün kılar. Buna ilaveten GLLSP, $\mathbf{C}$ tam ranklı olmasa bile, yani $\sum$ tekil olsa dahi (1)'in en iyi doğrusal sapmasız tahmininin elde edilmesini sağlar (Kourouklis ve Paige, 1981).

GLLSP (8)'in çözümü, $\oplus_i \mathbf{X}_i$ ve $\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_M\right)$'nin genelleştirilmiş QR ayrışımı (GQRD) hesabından elde edilir (Björk, 1996; Kontoghiorghes ve Dinenis, 1997; Anderson vd. 1992). Yani ilk olarak QR ayrışımı yardımıyla (4) eşitliği elde edilir ve daha sonra ise aşağıdaki RQ ayrışımı yapılır:

$$\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_M\right)\mathbf{P} = \mathbf{W} \equiv \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} K & GM-K \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{AA} & \mathbf{W}_{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{BB} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} K \\ GM-K \end{array} \end{array} \tag{9}$$

Burada $K = \sum_{i=1}^{G} k_i$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{GMxGM}$ ortogonal ve $\mathbf{W}_{BB}$ üst üçgensel matristir. $\mathbf{Q}^T$'nin (8) eşitliğindeki kısıtlamalarla önden çarpımı ve $Vec(\mathbf{V}) = \mathbf{P}\mathbf{P}^T Vec(\mathbf{V})$ eşitliği kullanılarak GLLSP problemi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\underset{\beta,\{\tilde{v}_i\},\{\hat{v}_i\}}{\arg\min} \sum_{i=1}^{G}\left(\|\tilde{\mathbf{v}}_i\|^2 + \|\hat{\mathbf{v}}_i\|^2\right) \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} Vec\left(\{\tilde{\mathbf{y}}_i\}\right) \\ Vec\left(\{\hat{\mathbf{y}}_i\}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \oplus_i \mathbf{R}_i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{\beta} + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{AA} & \mathbf{W}_{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{BB} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Vec\left(\{\tilde{\mathbf{v}}_i\}\right) \\ Vec\left(\{\hat{\mathbf{v}}_i\}\right) \end{pmatrix} \tag{10}$$

burada $\tilde{\mathbf{Q}}_i\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i$, $\hat{\mathbf{Q}}_i\mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{y}}_i$, $\mathbf{P}^T Vec(\mathbf{V}) = (Vec(\{\tilde{\mathbf{v}}_i\})^T \quad Vec(\{\hat{\mathbf{v}}_i\})^T)^T$, $\tilde{\mathbf{y}}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ ve $\hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{v}}_i \in \mathbb{R}^{M-k_i}$'dir. (10)'nun çözümünden,

$$Vec(\{\tilde{\mathbf{v}}_i\}) = 0$$

ve

$$\begin{pmatrix} \oplus_i \mathbf{R}_i & \mathbf{W}_{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{BB} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ Vec\left(\{\hat{\mathbf{v}}_i\}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Vec\left(\{\tilde{\mathbf{y}}_i\}\right) \\ Vec\left(\{\hat{\mathbf{y}}_i\}\right) \end{pmatrix} \tag{11}$$

elde edilir.

Hesaplamalarda RQ ayrışımı (9) iki adımda elde edilir. İlk adımda,

$$\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_T\right)\boldsymbol{\Pi} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} K & GM-K \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{AA} & \tilde{\mathbf{W}}_{AB} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{BA} & \tilde{\mathbf{W}}_{BB} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} K \\ GM-K \end{array} \end{array} \tag{12}$$

permütasyonu hesaplanır ki burada $\boldsymbol{\Pi} = \left(\oplus_i\left(\mathbf{I}_{k_i} \quad \mathbf{0}\right)^T \quad \oplus_i\left(\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{M-k_i}\right)^T\right)$'dur. Sonuç olarak $\tilde{\mathbf{W}}_{AA}, \tilde{\mathbf{W}}_{AB}, \tilde{\mathbf{W}}_{BA}$ ve blok üst üçgensel $\tilde{\mathbf{W}}_{BB}$ matrisleri elde edilir.

İkinci adımda ise RQ ayrışımı

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{BA} & \tilde{\mathbf{W}}_{BB} \end{pmatrix}\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{W}_{BB} \end{pmatrix} \tag{13}$$

ve

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{AA} & \tilde{\mathbf{W}}_{AB} \end{pmatrix}\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{AA} & \mathbf{W}_{AB} \end{pmatrix} \tag{14}$$

hesaplanır. Burada $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{GMxGM}$ ortogonaldir. Şunu belirtmek gerekir ki (9) eşitliğinde kullanılan $\mathbf{P}$ matrisi, $\mathbf{\Pi}\tilde{\mathbf{P}}$ 'ya eşittir. Böylece (12) eşitliğindeki matrisin tamamı RQ ayrışımından hesaplanmış olur.

(12) eşitliğindeki permütasyon, $\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_T\right)$ ifadesinin sağdan $\mathbf{Q}$ ortogonal matrisi ile çarpımı şeklinde de oluşturulabilir (Golub ve Charles, (1996); Foschi ve Kontoghiorghes, (2004)). Yani,

$$\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{C}\otimes\mathbf{I}_T\right)\mathbf{Q}=\begin{array}{cc} K & GM-K \\ \left(\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{W}}_{AA}^{(0)} & \tilde{\mathbf{W}}_{AB}^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{BA}^{(0)} & \tilde{\mathbf{W}}_{BB}^{(0)} \end{array}\right) & \end{array}\begin{array}{c} K \\ GM-K \end{array} \tag{15}$$

olur. Burada $\tilde{\mathbf{W}}_{AA}^{(0)}$ ve $\tilde{\mathbf{W}}_{BB}^{(0)}$ alt matrisleri sırasıyla $\mathbf{C}_{i,i}\mathbf{I}_{k_i}$ ve $\mathbf{C}_{i,i}\mathbf{I}_{M-k_i}$ şeklinde hesaplanan ve ana köşegene göre blok üst üçgensel matrislerdir. Ayrıca $\tilde{\mathbf{W}}_{AB}^{(0)}$ ve $\tilde{\mathbf{W}}_{BA}^{(0)}$ matrisleri ise kesin blok üst üçgenseldirler. Şöyle ki, (12) ve (15) eşitlikleri ile elde edilen sonuç matrisler birbiriyle aynıdır.

Ancak (15) eşitliği ile çözüm yapılabilmesi için RQ ayrışımı güncellemesi (URQD) yapmak gereklidir. Bu güncelleme de iki adımda gerçekleştirilir. İlk adımda;

$$\left(\tilde{\mathbf{W}}_{BA}^{(0)}\quad \tilde{\mathbf{W}}_{BB}^{(0)}\right)\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}=\left(\mathbf{0}\quad \mathbf{W}_{BB}\right) \tag{16}$$

elde edilir ve ikinci adımda ise ilk adımdan elde edilen $\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$ matrisi kullanılarak,

$$\left(\tilde{\mathbf{W}}_{AA}^{(0)}\quad \tilde{\mathbf{W}}_{AB}^{(0)}\right)\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}=\left(\mathbf{W}_{AA}\quad \mathbf{W}_{AB}\right) \tag{17}$$

matrisleri elde edilmiş olur (Bekki, 2007).

5. DENEYSEL DEĞERLENDİRMELER

Deneysel sonuçların yer aldığı bu bölümde, ikinci bölümde (1) eşitliği ile kapalı formda ifade edilen GİR modeli, ilk olarak üçüncü bölümde anlatılan ve (2) eşitliği ile tanımlanan SDM haline getirilerek parametre tahminleri için iki farklı program kodu oluşturulmuştur. İkinci olarak dördüncü bölümde anlatılan ve (8) eşitliği ile verilen GLLSP olarak ele alınarak yine iki farklı program kodu ile parametre tahminleri elde edilmiştir.

SDM olarak ele alınan GİR modelinin parametre tahminlerini elde etmek amacıyla oluşturulan ilk kodlamada, direkt toplam şeklinde ifade edilen $\oplus_{i=1}^{G}\mathbf{X}_i$ bağımsız değişkenler blok matrisi, üzerinde herhangi bir işlem yapılmaksızın ele alınmış, ikinci kodlamada ise $\oplus_{i=1}^{G}\mathbf{X}_i$ 'nin blok matris yapısından faydalanılmış ve her bir $\mathbf{X}_i$ bloğuna ayrı ayrı QR ayrışımı uygulamak suretiyle çözümleme yapılmıştır.

Benzer şekilde GİR modeli (8) eşitliği ile verilen GLLSP halinde ele alındığında ise, oluşturulan program kodlarının ilkinde (12) eşitliğinde verilen $\mathbf{\Pi}$ permütasyon matrisi oluşturulurken, ikinci kodlamada ise bu aşamada permütasyon matrisi yerine daha önceden elde edilmiş olan $\mathbf{Q}$ ortogonal matrisi kullanılarak, yani (15) eşitliği temel alınarak çözümleme yapılmıştır.

Oluşturulan tüm program kodları tekdüze dağılımdan rassal olarak türetilen veriler yardımıyla işletilerek parametre tahminleri elde edilmiş ve herbir koda ait çalışma süreleri elde edilerek karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sırasıyla $G=3,5$ ve 10 adet denkleme sahip GİR modelleri için, her bir denklemdeki bağımsız değişken sayıları sabit terim dahil olmak üzere $k_i=5,10$ ve 15 olan ve herbir değişken için $M=30,50,75,100$ ve 250 farklı gözlem sayıları ele alınarak yapılmıştır. Karşılaştırmalar yapılırken denklemlerde ortak bağımsız değişken olmadığı varsayılmıştır. Yukarıda bahsedilen tüm karşılaştırmalar IBM Intel Centrino Duo T2500 2GHz işlemciye ve 1GB RAM'a sahip bilgisayar aracılığı ile gerçekleştirilmiştir. Yapılan tüm karşılaştırmalarda ilgili program kodlarının her birisi 15'er defa işletilmiş ve bu tekrarlar sonucunda elde edilen çözümleme sürelerinin ortalama değerleri Tablo 1'de sunulmuştur. Tabloda yer alan tüm değerler saniye cinsinden çözümleme sürelerini ifade etmektedir.

Tablo 1. Matlab ile Oluşturulan Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modeli Çözüm Algoritmalarının Performansları

IBM INTEL Centrino Duo T2500 2GHz, 1GB Ram						
DENKLEM SAYISI	BAĞIMSIZ DEĞİŞKEN SAYISI	GÖZLEM SAYISI	SDM (2) ÇÖZÜM ALGORİTMALARI		GLLSP (3) ÇÖZÜM ALGORİTMALARI	
			I. ALGORİTMA (BLOK QR İLE)	II. ALGORİTMA (AYRI AYRI QR İLE)	III. ALGORİTMA (Π İLE)	IV. ALGORİTMA (Q İLE)
3	5	30	0,047	0,031	0,094	0,063
		50	0,094	0,032	0,282	0,094
		75	0,250	0,047	1,078	0,172
		100	0,563	0,094	3,438	0,328
		250	7,844	0,938	Hesaplanamadı	5,156
	10	30	0,062	0,031	0,094	0,063
		50	0,141	0,046	0,297	0,094
		75	0,422	0,078	1,109	0,187
		100	1,016	0,125	3,474	0,328
		250	15,297	1,765	Hesaplanamadı	5,516
	15	30	0,063	0,031	0,094	0,063
		50	0,172	0,046	0,313	0,094
		75	0,547	0,093	1,125	0,188
		100	1,422	0,171	3,775	0,359
		250	22,188	2,500	Hesaplanamadı	5,890
5	5	30	0,125	0,047	0,281	0,093
		50	0,500	0,110	1,672	0,172
		75	1,640	0,281	8,266	0,407
		100	3,922	0,641	24,732	0,875
		250	57,953	9,406	Hesaplanamadı	14,735
	10	30	0,203	0,047	0,281	0,094
		50	0,828	0,141	1,659	0,187
		75	2,969	0,453	8,159	0,453
		100	7,187	1,094	24,731	0,953
		250	113,078	17,844	Hesaplanamadı	15,922
	15	30	0,234	0,062	0,282	0,109
		50	1,078	0,156	1,594	0,203
		75	4,078	0,547	8,016	0,500
		100	9,985	1,422	24,593	1,062
		250	579,719	25,297	Hesaplanamadı	17,141
10	5	30	1,531	0,271	3,172	0,234
		50	7,218	1,343	23,656	0,719
		75	24,203	4,719	Hesaplanamadı	2,109
		100	57,359	11,328	Hesaplanamadı	4,953
		250	Hesaplanamadı	179,891	Hesaplanamadı	75,734
	10	30	2,406	0,277	3,344	0,297
		50	12,343	1,938	23,969	0,875
		75	44,297	7,734	Hesaplanamadı	2,469
		100	106,734	19,484	Hesaplanamadı	5,406
		250	Hesaplanamadı	340,204	Hesaplanamadı	82,813
	15	30	2,797	0,281	3,453	0,391
		50	16,078	2,031	23,988	1,156
		75	60,203	9,282	Hesaplanamadı	3,140
		100	1447,600	25,156	Hesaplanamadı	6,500
		250	Hesaplanamadı	543,937	Hesaplanamadı	91,281

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tablo 1'de yer alan değerler incelendiğinde, SDM haline getirilerek GİR model için parametre tahminleri elde edilmek istendiğinde bağımsız değişkenler blok matrisinin herbir bloğunu ayrı ayrı ele alarak çözümleme yapmanın, bu matrisi tek bir blok matris halinde ele alarak çözümleme yapmaktan çözümleme süresi açısından çok daha etkin olduğu sonucuna varılır. Benzer şekilde GLLSP olarak ele alınan GİR modeli için parametre tahminleri elde edilmek istendiğinde ise $\mathbf{\Pi}$ permütasyon matrisini oluşturmak yerine elde var olan $\mathbf{Q}$ ortogonal matrisi kullanılarak çözümleme yapmanın çözümleme süresi açısından daha etkin olduğu görülmektedir.

Tüm kodlamalara ilişkin çözüm süreleri birlikte değerlendirildiğinde ise özellikle 3 denklemin yer aldığı GİR modellerde SDM haline getirerek çözümleme yapan II. algoritmanın çözüm süresinin diğerlerine göre daha etkin olduğu görülmektedir. Ancak modelde yer alan denklem sayısı arttığında, bağımsız değişken sayısı ve gözlem sayılarındaki artışa paralel olarak GLLSP haline getirilerek çözümleme yapan IV. Algoritmanın diğerlerine göre daha etkin sürelere sahip olduğu gözlemlenmektedir.

Elde edilen sonuçlar birlikte değerlendirilirse, en küçük karelere ilişkin tüm varsayımların sağlanması koşulu altında, küçük boyutlu GİR modellerin çözümlemesinde modeli SDM haline getirerek II. Algoritma ile çözümleme yapmanın hesap yükü açısından daha uygun olacağı, problemin boyutu büyüdüğünde ise GLLSP olarak ele alınmasının ve IV. Algoritma kullanılarak çözümleme yapmanın hesap yükü açısından daha uygun olacağı sonucuna varılır. Ancak varyans-kovaryans matrisine ilişkin varsayımlarda bozulmalar olduğu durumlarda GLLSP haline getirilerek yapılacak parametre tahminlerinin SDM'ye göre daha stabil olduğu da asla göz ardı edilmemelidir.

Ayrıca GİR modellerinin çözümünde karşılaşılabilecek daha farklı durumlar için bu çalışmada sunulan algoritmalar ve bunlara ilişkin Matlab kodları geliştirilebilir. Bu sayede daha fazla kısıt içeren farklı problemler için de bu modellerin katsayı tahminlerinin elde edilmesi sağlanabilir ve gerçek veriler kullanılarak yapılabilecek uygulama yelpazesi de genişletilmiş olur.

Her ne kadar çözümleme süreci için daha etkin algoritmalar geliştirilmeye çalışılsa da bu algoritmaların nümerik açıdan stabil olup olmadıklarının araştırılması gerekmektedir. Ayrıca sunulan Matlab kodlarının bir programcı tarafından incelenmesinin ve programlama açısından etkinliği artırıcı düzeltmelerin yapılmasının algoritmaların performanslarını olumlu yönde etkileyeceği gerçeği de gözardı edilmemelidir.

Son olarak, bilgisayar ortamında belirli kodlar işletilerek elde edilecek çözümleme sürelerinin kullanılan bilgisayarın sahip olduğu donanım özellikleri ile bire bir ilişkili olduğu ve bilgisayardan bilgisayara bu sürelerin farklılıklar gösterebileceği asla unutulmamalıdır.

KAYNAKLAR

Anderson, E., Bai, Z. ve Dongarra, J. (1992). Generalized QR Factorization and Its Application. *Linear Algebra and Its Application*, 162, 243-271.

Bekki, A. (2007). Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemlerinin Kestiriminde Kullanılan Yöntemlerin Karşılaştırılması, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Björk, Å. (1996). *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia.

Foschi, P., Belsley, D.A. ve Kontoghiorghes, E.J. (2003). A Comparative Study of Algorithms for Solving Seemingly Unrelated Regressions Models. *Computational Statistics and Data Analysis* 44, 3-35.

Foschi, P. ve Kontoghiorghes, E.J. (2004). A Computationally Efficient Method for Solving SUR Models with Orthogonal Regressors. *Linear Algebra and its Applications* 388, 193-200.

Golub, G.H. ve Charles, F.V.L. (1996). *Matrix Computation*, The John Hopkins University Pres, Third Edition.

Harville, D.A. (1997). *Matrix Algebra From A Statistician's Perspective*. Springer-Verlag, New York.

Kontoghiorghes, E.J. ve Dinenis, E. (1997). Computing 3SLS Soutions of Simultaneous Equation Models with a Possible Singular Variance-Covariance Matrix. *Computational Economics* 10(231-250).

Kontoghiorghes, E.J. (2000). *Paralel Algorithms for Linear Models: Numerical Methods and Estimation Problems*, Advances in Computational Economics, 15, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

Kourouklis, S. ve Paige, C.C. (1981). A Constrained Least Squares Approach to The General Gauss-Markov Linear Model, *Journal of the ASA* 76(375), 620-625.

Regalia, P.A. ve Mitra, S.K. (1989). Kronecker Products, Unitary Matrices and Signal Processing Applications. *SIAM* 31(4), 586-613.

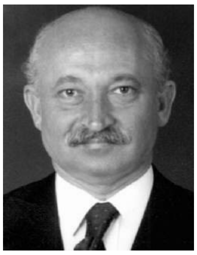
Srivastava, V.K. ve Giles, D.E.A. (1987). *Seemingly Unrelated Regression Equations Models: Estimation and Inference*, Statistics: Textbooks and Monographs, (Ed : Owen, D. B.), 80, Marcel Dekker Inc., New York.

The MathWorks, Inc. (1984-2006). *Matlab Version 7.2 (R2006a)*, U.S.

Zellner, A. (1962). An Efficient Method of Estimating SUR and Tests for aggregation Bias *Journal of the American Statistical Association*, 57, 348-368.

Alper BEKKİ, 1976 Sivas doğumludur. 1998 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nden mezun olan A. Bekki 2001 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans ve 2007 yılında da doktorasını tamamladı. 1998 yılından beri Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmektedir.

Memmedağa MEMMEDLİ 1947 Azerbaycan doğumlu olup 1971 yılında Bakü Devlet Üniversitesi'ni bitirdi. 1977 yılında Rusya Bilim Akademisi'nde Doktora diplomasını aldı, 1985 yılında ise Baş Bilim Adamı unvanını (diplomasını) kazandı. 1977-1990 yılları arasında Azerbaycan Bilim Akademisi Sibernetik Enstitüsü'nde Baş Bilim Adamı, 1991-1998 yılları arasında ise Bakü Devlet Üniversitesi'nde Doçent olarak görev yaptı. 1999-2002 yılları arasında Çanakkale 18 Mart Üniversitesi Bilgisayar Bölümü'nde doçent olarak çalıştı. 2003-2005 yılları arasında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde doçent olarak görev yaptı, 2006 yılından başlayarak ise bu bölümde profesör olarak görev yapmaktadır. Oyun Teorisi, Kontrol Teori, Optimizasyon, Yapay Sinir Ağları, Parametrik Olmayan ve Kısmi Parametrik Regresyon Analizi alanlarında, yurtiçi ve yurtdışındaki çeşitli bilimsel dergilerde birçok makaleleri bulunmaktadır.



Embiya AĞAOĞLU, 1949 yılında Şumnu'da doğdu. EİTİA İstatistik ve Uygulamalı Matematik kürsüsünde doktora derecesini aldı. 1993 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde Doçent ve 1998 yılında aynı bölümde Profesör olan E. Ağaoğlu, halen Bölüm Başkanı olarak İstatistik Bölümü'nde çalışmalarını sürdürmektedir. Evli ve bir çocuk babası olan E. Ağaoğlu'nun ulusal ve uluslar arası yayınları bulunmaktadır.