

ARAŞTIRMA MAKALESİ / RESEARCH ARTICLE

**BELİRSİZLİK İÇEREN VE DOĞRUSAL OLMAYAN ROBOT KOLLARININ
GÜRBÜZ DENETİMİ**

Günyaz ABLAY¹, Ahmet UÇAR²

ÖZ

Belirsizlik içeren ve doğrusal olmayan robot kollarının denetimi için bir doğrusal olmayan gürbüz denetleç önerilmiştir. Kapalı çevrimli sistemin kararlılığı Lyapunov yöntemiyle sağlanmış ve kapalı çevrim performansının iyileştirilmesi için denetim parametrelerinin ayarı yapılmıştır. Yapısal olarak denetleç doğrusal ve doğrusal olmayan iki kısımdan oluşmaktadır. Doğrusal denetim kazançları literatürde LQR olarak bilinen doğrusal kuadratik regülatör yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Denetlecin doğrusal olmayan kısmı ise sistemdeki doğrusal olmayan elemanlar ve belirsizlikleri karşılamak için iki konumlu bir doğrusal olmayan eleman içermektedir.

Anahtar Kelimeler : Doğrusal olmayan sistemler, Doğrusal olmayan denetim, Belirsizlik içeren sistemler, Robot kolları.

**ROBUST CONTROL OF UNCERTAIN AND NONLINEAR ROBOTIC
MANIPULATORS**

ABSTRACT

A robust nonlinear control is proposed for control of the nonlinear and uncertain robotic manipulators. The closed loop stability is achieved by employing Lyapunov stability theory. The control parameters are adjusted in order to achieve the desired closed loop performance. The controller has linear and nonlinear parts. The gains of linear part are based on linear quadratic regulator, and the nonlinear part of the controller has bang-bang characteristic to cope with nonlinearities and uncertainties.

Keywords: Nonlinear systems, Nonlinear control, Uncertain systems, Robotic manipulators.

¹The Ohio State University, Nuclear Engineering Program, Columbus, OH 43210, USA.

²Fırat Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 23119 Elazığ, Türkiye.

E-posta: aucar1@firat.edu.tr, Faks: 0-424-241-5526.

1. GİRİŞ

Fiziksel sistemler yapıları gereği veya robotlarda olduğu gibi taşıdıkları yüklerdeki belirsizlikten dolayı doğrusal olmayan elemanlar ve belirsizlik içerirler. Ayrıca belirsizlikler sistemin bilinmeyen parametrelerinden, tanımlanması zor olan doğrusal olmayan niceliklerden ve modellenemeyen dinamiklerden de meydana gelebilir (Slotine ve Li, 1991, Brogan, 1991). Bu tip sistemlerin denetimi için birçok denetleç geliştirilmiştir (Slotine ve Li, 1991, Breinl ve Leitmann, 1987, Leitmann, 1981, Corless, 1993).

Breinl ve Leitmann tarafından (Breinl ve Leitmann, 1987)'de önerilen denetleç bunlardan biri olup belirsizlik içeren doğrusal birçok sistem için tasarlanmış ve uygulamada etkinliği kanıtlanmıştır. Önerilen denetleç doğrusal ve doğrusal olmayan iki kısımdan oluşmaktadır. Doğrusal denetleç nominal sistemin kararlılığını ve hedeflenen geçici rejim performansını sağlayacak biçimde tasarlanır. Doğrusal olmayan denetleç ise belirsizliklerin etkisini karşılamak ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağlayacak şekilde tasarlanır.

Son yıllarda robot kolları gibi karmaşık ve dinamik modellere sahip olan sistemlerin para-

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(\alpha(t))]x(t) + [B + \Delta B(\beta(t))]u(t) + Hv(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

olarak tanımlanabilir (Breinl ve Leitmann, 1987). Burada $A \in R^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in R^{n \times r}$ giriş matrisi ve $H \in R^{n \times l}$ girişe uygulanan bozucu matrisidir. $\alpha(t)$ parametresine bağlı $\Delta A(\alpha(t))$ sistem matrisindeki belirsizlik ve $\beta(t)$ parametresine bağlı $\Delta B(\beta(t))$ giriş matrisindeki belirsizliktir. $Hv(t)$ terimi girişteki belirsizlikleri ve sistemin doğrusal olmayan kısmını belirtir. Sistemin durum değişkenlerinin ölçülmesinden oluşan hatalar $w(t)$ ile tanımlanırsa, sistem çıkışı da;

$$y(t) = Cx(t) + w(t) \quad (2)$$

olur. Burada $y(t) \in R^m$ çıkış vektörü, $C \in R^{m \times n}$ çıkış matrisi ve $w(t)$ ölçme devresinden oluşan hatadır. Eşitlik (1) ve (2)'deki sistemin nominal kısmı,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4)$$

dir.

metre ve model belirsizliklerine gürbüz denetleyici tasarımı giderek yaygınlaşmaktadır (Corless, 1993). Bu çalışmada (Breinl ve Leitmann, 1987)'de önerilen denetleç, doğrusal olmayan ve sistem girişinde belirsizlik içeren iki eklemli bir robot koluna uygulanarak, robot kolları uygulamaları için bu denetlecin etkinliği gösterilecektir.

Bu girişten sonra yayının ikinci bölümünde sistem tanımı ve formülasyonu verilecektir. Denetim tasarımı üçüncü bölümde verilmiştir. Dördüncü bölümde (Slotine ve Li, 1991)'de verilen iki eklemli doğrusal olmayan bir robot kolu modeli için denetleç tasarlanmıştır. Uygulama yapılırken, robotik manipülatörlerin içerdikleri belirsizlikler dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar beşinci bölümde verilmiş ve tartışılmıştır.

2. SİSTEM TANIMI VE FORMÜLASYON

Belirsizlik ve doğrusal olmayan elemanlar içeren fiziksel bir sistemin durum uzay diyagramı, $x(t) \in R^n$ durum vektörü, $u(t) \in R^r$ denetim vektörü ve $v(t) \in R^l$ giriş vektörü olmak üzere;

Eşitlik (1) ve (2)'de verilen sistem için (Breinl ve Leitmann, 1987)'deki kabuller gereği;

1. $\alpha \in R^p$ ve $\beta \in R^s$ olmak üzere, $\Delta A(\cdot)$ ve $\Delta B(\cdot)$ sırasıyla R^p ve R^s 'de sürekli fonksiyonlardır.

2. Uygun uzayların tüm altkümeleri $A \subset R^p$, $B \subset R^s$, $V \subset R^l$ ve $W \subset R^m$ olmak üzere, $\alpha(\cdot): R \rightarrow A$, $\beta(\cdot): R \rightarrow B$, $v(\cdot): R \rightarrow V$ ve $w(\cdot): R \rightarrow W$ belirsiz parametreleri Lebesgue ölçülebilirler (Burk, 1998). Yani belirsiz parametreler, zamana bağlı olarak belirli bir aralıkta sınırlı, durum değişkenlerine bağlı olarak bölgesel sınırlı ve sürekli fonksiyonlardır.

3. Eşitlik (1)'deki sistemin doğrusal olmayan kısmının ve sistemdeki belirsizliklerin denetim sinyali $u(t)$ 'nin içine alınabilir olduğu varsayılmıştır (Breinl ve Leitmann, 1987). Bu sınırlı şartı sağlayan birçok sistem vardır (Barmish vd. 1983, Leitmann ve Wan, 1979, Hamamci

ve Uçar, 2002). Böylece, $G(\cdot)$, R^p 'de sürekli ve $E(\cdot)$, R^s 'de sürekli uygun boyutta matris fonksiyonları ile uygun boyutta F sabit matrisi için,

$$\Delta A(\alpha) = BG(\alpha) \quad \forall \alpha \in A \quad (5a)$$

$$\Delta B(\beta) = BE(\beta) \quad \forall \beta \in B \quad (5b)$$

$$H = BF \quad (5c)$$

dir.

4. Eşitlik (3)'te verilen sistemin tüm durum değişkenleri ölçülebilirdir ve sistemin nominal kısmı (A , B) tüm durum denetlenebilirdir.

Burada amaç, Eşitlik (1)'de verilen ve yukarıdaki şartları sağlayan, belirsizlik içeren ve doğrusal olmayan robotik sistemin yörüngelerinin seçilen durum değişkenlerinin başlangıç şartları için sifıra veya sifıra yakın bir bölgeye asimptotik olarak ulaşmasını ve sürekli durumda orada kalmasını sağlayacak uygun bir durum geribeslemeli denetleç tasarlamaktır.

3. DENETİM TASARIMI

Denetim sinyali, aşağıdaki bölümlerde detaylı olarak tanımlandığı ve Eşitlik (6)'da belirtildiği gibi, doğrusal $u_l(t)$ ve doğrusal olmayan $u_n(t)$ denetleçlerinin toplamından oluşmuştur.

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (6)$$

3.1 Doğrusal Denetleç

Doğrusal denetim tasarımı Eşitlik (1)'in sadece Eşitlik (3) ile verilen nominal kısmı esas alınarak yapılır. Doğrusal denetlecin amacı, nominal sistemin kararlılığını sağlamak ve hedeflenen geçici rejim yanıtını oluşturmaktır. Burada optimal doğrusal kuadratik regülatör (LQR) yöntemi (Franklin vd. 2002) kullanılarak tasarım yapılacaktır. Kuadratik performans indeksi Q pozitif simetrik durum ağırlık ve R pozitif simetrik denetim ağırlık matrisleri olmak üzere;

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t)Q_R x(t) + u_l^T(t)R u_l(t)] dt \quad (7)$$

dir. Denklen (7) ile verilen performans indeksini minimize eden optimal kazanç matrisi K , indirgenmiş Riccati matris denkleminde elde edilebilir (Franklin vd. 2002). Zamanla değişmeyen, doğrusal sistemin optimal denetimi için, Eşitlik (8) ile verilen indirgenmiş Riccati matris denkleminin çözümünden,

$$A^T P_R + P_R A - P_R B R^{-1} B^T P_R + Q_R = 0 \quad (8)$$

pozitif tanımlı ve simetrik P_R matrisi elde edilir. Böylece denetlecin doğrusal kısmı, x durum geribeslemeli denetim olduğundan $u_l(t) = u_l(x)$ olarak tanımlanırsa;

$$u_l(x) = -R^{-1} B^T P_R x(t) = -Kx(t) \quad (9)$$

dir. Uygun Q_R ve R ağırlık matrisleri seçilerek optimal durum geribeslemeli denetleç ile nominal sistemin hedeflenen geçici rejim davranışını göstermesi sağlanır (Brogan, 1991). Eşitlik (7)'de verilen performans indeksini minimize edecek şekilde; Q_R matrisi hedeflenen kapalı çevrimli sistemin geçici rejim performansını belirleyecek şekilde, R matrisi pratikte kontrol işaretini saturasyona (doyuma) sokmayacak şekilde seçilir.

3.2 Doğrusal Olmayan Denetleç

Doğrusal olmayan denetim Eşitlik (1)'de verilen sistemin tümü esas alınarak tasarlanır. Doğrusal olmayan denetimin amacı, belirsiz parametrelerin ve sistemin doğrusal olmayan kısmının etkisini karşılamak ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını garanti etmektir. Eşitlik (3)'teki nominal sistem ve Eşitlik (9)'da verilen denetleçten oluşan kapalı çevrimli sistemin kararlı sistem matrisi, $\bar{A} = A - BK$ ve $Q_L \in R^{n \times n}$ pozitif tanımlı ve simetrik matris olmak üzere; P_L aşağıdaki Lyapunov denkleminin çözümüdür:

$$P_L \bar{A} + \bar{A}^T P_L + Q_L = 0 \quad (10)$$

Burada P_L pozitif tanımlı ve simetrik matristir. Denetlecin doğrusal olmayan kısmı $u_n(t)$ durum değişkenleri x 'in fonksiyonu olduğundan $u_n(t) = u_n(x)$ olarak tanımlanırsa ve $\varepsilon > 0$ denetim tasarımcısı tarafından belirlenen yeterli derecede küçük değerli bir sabite bağımlı olmak üzere;

$$u_n(x) = \begin{cases} -\frac{B^T P_L x}{\|B^T P_L x\|} \rho(x), & \|B^T P_L x\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\frac{B^T P_L x}{\varepsilon} \rho(x), & \|B^T P_L x\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (11)$$

dir. Eşitlik (11)'de verilen $\rho(x)$ fonksiyonu, ilerideki tanımdan da görüleceği gibi, durum değişkenlerinin değişim aralığına ve belirsiz parametrelerin maksimum değerine bağlıdır.

Eşitlik (6)'da verilen denetleç $u(t) = -Kx + u_n(x)$ ve Eşitlik (5)'te tanımlanan kabuller Eşitlik (1)'de yerine yazılırsa;

$$\|e(x, t)\| = \|G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv\| \leq \max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)u_n(x)\| + \max_{v \in V} \|Fv\| = \rho_1(x) \quad (14)$$

dir. Burada $\max_{\beta \in B} \|E(\beta)u_n(x)\| \leq \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \rho(x)$ olarak yazabiliriz. Böylece $e(x, t)$ işareti;

$$\|e(x, t)\| \leq \max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \rho(x) + \max_{v \in V} \|Fv\| = \rho(x) \quad (15)$$

olur. Buradan $\rho(x)$ eşitliği,

$$\rho(x) = \max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \rho(x) + \max_{v \in V} \|Fv\|$$

$$\rho(x) \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right] = \max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{v \in V} \|Fv\|$$

olarak elde edilir. Önerilen doğrusal olmayan denetlecin tanımlanabilmesi için,

$$1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| > 0 \quad (16)$$

$$\rho(x) = \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)x\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{v \in V} \|Fv\| \right] \quad (17)$$

olarak bulunur. Böylece Eşitlik (11)'de tanımlanan denetlecin doğrusal olmayan kısmının katsayısı $\rho(x)$ tanımlanmış ve belirlenmiş olur.

$$\rho_2(x) = \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)\| \|x\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)K\| \|x\| + \max_{v \in V} \|Fv\| \right] = a + b \|x\| \quad (18)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\dot{x} = [A + \Delta A(\alpha)]x + [B + \Delta B(\beta)]u + Hv = [A - BK]x + Bu_n(x) + B[G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv]$$

olur. Tüm belirsizlikler ve doğrusal olmayan elemanın maksimum değişim aralığı $e(x, t)$ 'de bir araya toplanırsa;

$$e(x, t) = G(\alpha)x - E(\beta)Kx + E(\beta)u_n(x) + Fv \quad (12)$$

olur. Böylece kapalı çevrimli sistem,

$$\dot{x} = \bar{A}x + B[u_n(x) + e(x, t)] \quad (13)$$

formunda olur. Eşitlik (12)'de tanımlanan $e(x, t)$ 'nin normu;

şartı sağlanmalıdır (Breinl ve Leitmann, 1987). Eşitlik (16) ile verilen şart, sistemin giriş matrisinde belirsizlik varsa sağlanmalıdır. Böylece $\rho(x)$ yalnız bırakılarak;

Eşitlik (16) sağlanmak şartıyla, $\rho_2(\cdot) : R^n \rightarrow R$ olarak tanımlanırsa,

$$a = \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{v \in V} \|Fv\| \right], \quad b = \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)K\| \right]$$

dir. Eşitlik (17) ve (18)'deki tanımlardan görüldüğü gibi,

$$\rho_2(x) \geq \rho(x) \quad (19)$$

Teorem 1: Eşitlik (1)'de tanımlanan ve 1-4 şartlarını sağlayan sistemin Eşitlik (9) ve (11)'de tanımlanan denetleçler ile oluşturduğu kapalı çevrim dinamiği kararlıdır ve Eşitlik (3)'teki nominal sistem için Eşitlik (7)'deki

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P_L x + x^T P_L \dot{x} \\ &= [\bar{A}x + Bu_n + Be]^T P_L x + x^T P_L [\bar{A}x + Bu_n + Be] \\ &= x^T \bar{A}^T P_L x + u_n^T B^T P_L x + e^T B^T P_L x + x^T P_L \bar{A}x + x^T P_L Bu_n + x^T P_L Be \end{aligned}$$

dir. Burada \dot{V} skaler bir fonksiyon olduğundan birbirinin devriği olan $u_n^T B^T P_L x = x^T P_L Bu_n$ ve $e^T B^T P_L x = x^T P_L Be$ eşitlikleri (Kolman ve Hill, 2000) ile

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T \bar{A}^T P_L x + x^T P_L \bar{A}x + 2x^T P_L Bu_n + 2x^T P_L Be \\ &= x^T [\bar{A}^T P_L + P_L \bar{A}]x + 2x^T P_L B[u_n + e] \end{aligned} \quad (21)$$

olarak yazılabilir. Burada, Eşitlik (10)'da verilen, $P_L \bar{A} + \bar{A}^T P_L = -Q_L$ Lyapunov denklemi ile

$$\dot{V} = -x^T Q_L x + 2x^T P_L B[u_n + e] \quad (22)$$

olur. $\dot{V} < 0$, $x \neq 0$ 'nin negatif tanımlı olması için Eşitlik (22)'nin sağındaki ikinci terim,

$$2x^T P_L B[u_n(x) + e(x, t)] = 2M \quad (23)$$

skaler niceliğinde $M \leq 0$ olması yeter koşuldur. Bölüm 3.1 gereğince $\bar{A} = A - BK$ matrisi kararlı olduğundan pozitif tanımlı ve simetrik Q_L matrisi için P_L matrisi pozitif tanımlı ve simetrik bir matristir. İşlem kolaylığı için $\delta = B^T P_L x$ alınırsa $M = \delta^T (u_n + e)$ olur. Eşitlik (14)'te $\|e(x, t)\| \leq \rho$ ve Eşitlik (11)'deki doğrusal olmayan denetlecin ilk durumu $\|\delta\| > \varepsilon$ için,

hedeflenen performans indeksini sağlar.

İspat: Eşitlik (13)'te verilen kapalı çevrimli sistem için Lyapunov fonksiyonu,

$$V = x^T P_L x > 0, \quad x \neq 0 \quad (20)$$

olarak alınırsa, V 'nin türevi;

$$\begin{aligned} \delta^T (u_n + e) &= \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\|\delta\|} + e \right) = \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\|\delta\|} \right) + \delta^T e \\ &\leq -\rho \frac{\|\delta\|^2}{\|\delta\|} + \|\delta^T e\|, \quad \delta^T \delta = \|\delta\|^2 \\ &\leq -\|\delta\|\rho + \|\delta\|\rho \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

olur. Eşitlik (11)'deki doğrusal olmayan denetlecin ikinci durumu $\|\delta\| \leq \varepsilon$ için,

$$\begin{aligned} \delta^T (u_n + e) &= \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\varepsilon} + e \right) = \delta^T \left(-\rho \frac{\delta}{\varepsilon} \right) + \delta^T e \\ &\leq -\rho \frac{\|\delta\|^2}{\varepsilon} + \|\delta^T e\|, \quad \delta^T \delta = \|\delta\|^2 \\ &\leq -\|\delta\|^2 \frac{\rho}{\varepsilon} + \|\delta\|\rho \end{aligned} \quad (25)$$

olur. Eşitlik (25)'in $\|\delta\|$ 'ya göre sağ tarafını maksimize edersek $\|\delta\| = \frac{\varepsilon}{2}$ bulunur. Eşitlik (25),

$$\delta^T (u_n + e) \leq -\frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \rho = \rho \frac{\varepsilon}{4} \quad (26)$$

olur. Böylece $\delta^T(u_n + e)$ 'nin en büyük değeri $\delta^T(u_n + e) \leq \rho(x) \frac{\varepsilon}{4}$ olarak bulunur (Payandeh, 1995). Bu ifade \dot{V} 'de yerine konursa,

$$\dot{V} \leq -x^T Q_L x + \rho \frac{\varepsilon}{2} \quad (27)$$

olarak elde edilir. Tüm t ve tüm x değerleri için,

$$x^T Q_L x - \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad (28)$$

şartı sağlanırsa, Lyapunov fonksiyonunun türevi,

$$\dot{V}(x, t) < 0, \quad x \neq 0 \quad (29)$$

olur.

Kapalı çevrimli sistemin kararlı olduğu başlangıç şartlarının değişim aralığının tanımlanması: Eşitlik (10)'daki pozitif tanımlı Q_L matrisinin en küçük özdeğeri $\lambda_{\min}(Q_L) > 0$ ve en büyük özdeğeri $\lambda_{\max}(Q_L) > 0$ olmak üzere (Slotine ve Li, 1991)'de verilen,

$$-\left[\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 \right]^{\frac{1}{2}} > \lambda_{\min}(Q_L) \eta_1 - \frac{\varepsilon}{4} b > + \left[\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

olarak yazılabilir. Burada, olabilecek en büyük yarıçap değerini elde edebilmek için, Eşitlik (34)'ün sağ tarafındaki terimin pozitif değeri alınır,

$$\eta_1 > \frac{\frac{\varepsilon}{4} b + \left[\lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}(Q_L)} \quad (35)$$

olur. Sonuçta,

$$\eta = \frac{\varepsilon/4}{\lambda_{\min}(Q_L)} b + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon/4}{\lambda_{\min}(Q_L)} \right)^2 b^2 + \frac{\varepsilon/2}{\lambda_{\min}(Q_L)} a} \quad (36)$$

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 \leq x^T Q_L x \leq \lambda_{\max}(Q_L) \|x\|^2 \quad (30)$$

eşitsizliği kullanılırsa, Eşitlik (28),

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \rho(x) \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad (31)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (19)'dan dolayı Eşitlik (18)'de verilen $\rho_2(x) = a + b\|x\|$ ifadesi Eşitlik (31)'de kullanılırsa,

$$\lambda_{\min}(Q_L) \|x\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} b \|x\| - \frac{\varepsilon}{2} a > 0 \quad (32)$$

olur. Eşitliğin her tarafını $\lambda_{\min}(Q_L)$ ile çarpalım ve eşitliğe $\frac{\varepsilon^2}{16} b^2$ terimini ekleyip - çıkaralım.

$$\begin{aligned} & [\lambda_{\min}(Q_L)]^2 \|x\|^2 - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} b \|x\| - \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a > 0 \\ & \left[\lambda_{\min}(Q_L) \|x\| - \frac{\varepsilon}{4} b \right]^2 > \lambda_{\min}(Q_L) \frac{\varepsilon}{2} a + \frac{\varepsilon^2}{16} b^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Burada $\|x\| = \eta_1$ denirse ve $\lambda_{\min}(Q_L) > 0$ olduğundan;

olarak bulunur. $x=0$ merkezli ve η yarıçaplı, $B(\eta)$ küresi tanımlansın. Tüm $x \notin B(\eta)$ ve tüm $t \in R^1$ için Eşitlik (29)'da verilen $\dot{V}(x, t) < 0$ şartı sağlanmış olur. Eğer $x \in B(\eta)$ ise, sistem yine kararlıdır; fakat sistem orijine göre asimptotik kararlı değildir. Kapalı çevrimli sistem, orijin etrafında seçilen ε değeri ile belirlenen bölge için asimptotik kararlıdır. Eğer ε yeterince küçük (sıfıra çok yakın) seçilirse sistemin orijine göre asimptotik kararlılığı yaklaşık olarak sağlanabilir. Ancak ε sabitesi sıfıra yaklaştıkça kontrol sinyalinde, uygulamada sorun olan, çatırdama denilen yüksek frekanslı osilasyonlar görülebilir. $B(\eta)$ ile belirlenen küre en kötü olasılıklara göre tanımlandığından, pratikte bu bölge oldukça küçük olabilir. Dolayısıyla sistem yörüngesinin bu bölge içerisinde olma şansı oldukça düşük bir olasılıktır. Bozucuların ve

ölçüm hatalarının olmadığı durumda, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $x = 0$ 'ın asimptotik kararlılığı da sağlanır. Nominal sistem için hedeflenen performansın sağladığı bölüm 3.1'de verilmiştir.

3.3 Denetim Parametrelerinin Ayarlanması

Eşitlik (9) ve (11)'de verilen denetleçlerin birlikte tasarımında, Eşitlik (8) ile verilen indirgenmiş Riccati denklemindeki Q_R ve R ağırlık matrislerinin seçiminde ve Eşitlik (10) ile verilen Lyapunov denklemindeki Q_L ağırlık matrisinin seçiminde serbestlikler vardır (Breinl ve Leitmann, 1987).

Denetlecin doğrusal kısmının tasarımı Eşitlik (3) ile verilen nominal sistem temel alınarak yapıldı. Hedeflenen geçici rejim davranışı Eşitlik (8) ile verilen indirgenmiş Riccati denklemi Q_R ve R ağırlık matrisleri uygun seçilerek sağlandı. R matrisinin elemanlarının genliği arttıkça kapalı çevrimli sistemin kontrol sinyalinin genliği azalır ve R matrisinin elemanlarının genliği sıfıra yaklaştıkça kontrol sinyalinin genliği artar. Eğer denetim ağırlık matrisi, R , birim matris, $R = I_K$, olarak seçilirse kapalı çevrimli sistemin hedeflenen performansı yalnızca Q_R matrisinin elemanları ayarlanarak elde edilebilir. Böylece Eşitlik (9) aşağıdaki gibi olur.

$$u_l = -B^T P_R x \quad (37)$$

Doğrusal olmayan denetleçteki pozitif $\rho(x)$ fonksiyonu belirsiz parametrelerin ve doğrusal olmayan elemanın maksimum değerine ve durum değişkenlerinin değişim aralığına bağlıdır.

$\frac{B^T P_L x}{\|B^T P_L x\|}$ birim vektörü geribeslemenin işaretini belirler. Bu ifade sistemin geribeslemenin işaretini belirleyen signum (işaret) fonksiyonudur. Signum fonksiyonunun tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (38)$$

Eşitlik (11)'deki denetlecin $\varepsilon \rightarrow 0$ durumdaki anahtarlama düzlemi için bir anahtarlama bölgesi tanımlayan aşağıdaki manifold düşünülürse,

$$N_L \triangleq \{x \in R^n \mid B^T P_L x = 0\} \quad (39)$$

Eşitlik (11) ile verilen denetleç, N_L düzleminin yörünge doğrultusunu ve yönünü çekici yapar. Yani her durumda sistem yörüngesi anahtarlama bölgesine girdikten sonra orijine doğru ilerler ve N_L düzleminin ε yakın civarında kalır. Denetlecin doğrusal olmayan kısmındaki $\rho(x)$ fonksiyonunun değeri artırılarak N_L 'nin çekiciliği daha da artırılabilir.

Şimdi de aşağıdaki manifoldu düşünelim,

$$N_R \triangleq \{x \in R^n \mid B^T P_R x = 0\} \quad (40)$$

Sistem yörüngesi N_R düzlemi boyunca ilerlediğinden, Eşitlik (12)'de verilen $e(x, t)$ hatası,

$\forall x \in N_R$ için,

$$e(x, t) = G(\alpha)x + E(\beta)u_n(x) + Fv \quad (41)$$

olur. Böylece Eşitlik (17) ile verilen doğrusal olmayan denetlecin katsayısı $\rho(x)$,

$$\rho(x) = \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\alpha \in A} \|G(\alpha)x\| + \max_{v \in V} \|Fv\| \right] \quad (42)$$

olur. Eğer Eşitlik (41) ile (12)'yi ve Eşitlik (42) ile (17)'yi karşılaştırırsak $\max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\|$

teriminin yok olduğu görülür. $\max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\|$

terimi, N_R düzleminin yakın civarındaki sistem yörüngesi için küçük değerler alır. Başka bir deyişle sistem yörüngesinin N_R düzleminin yakın civarında kalması için doğrusal olmayan denetim büyüklüğü $\rho(x)$ ve $e(x, t)$ hatası azaltılmalıdır. Bu iki terimin değeri sistem matrisindeki belirsizliği veren $G(\alpha)x$ ve sistemin doğrusal olmayan elemanını ve girişteki belirsizlikleri içeren Fv terimi tarafından belirlenir.

Eğer aşağıdaki şart sağlanırsa,

$$N_R \equiv N_L \quad (43)$$

o zaman $e(x, t)$ hatasının küçük olduğu ve doğrusal olmayan denetim büyüklüğünden

daha küçük olduğu bir bölgeye sistem yörüngesinin girmesi ve orada kalması sağlanabilir. Eşitlik (43) ile verilen şart,

$$P_R = P_L \quad (44)$$

seçilerek sağlanabilmelidir (Breinl ve Leitmann, 1987). Böylece Riccati denkleminin çözümünden elde edilen P_R , Lyapunov denkleminin çözümünde P_L 'nin yerine konulabilir. Daha önce belirtildiği gibi P_L ve P_R pozitif tanımlı matrislerdir. Bununla beraber P_L ve P_R 'nin pozitif tanımlılığı Eşitlik (10)'da verilen Q_L 'nin pozitif tanımlılığını her zaman sağlamayabilir. Bu yüzden Q_L matrisinin pozitif tanımlı olup olmadığının belirlenmesi için Eşitlik (10) ile verilen Lyapunov denkleminde mutlaka denetim edilmesi gerekir.

Doğrusal denetlecin $e(x,t)$ hatası üzerinde etkisi olduğu gibi, doğrusal olmayan denetleç üzerine de etkisi vardır. Bununla beraber $e(x,t)$ ve buna bağlı olan $\rho(x)$ değerlerinin daha fazla azaltılması sistemin doğrusal olmayan elemanını ve girişteki belirsizlikleri içeren Fv 'nin sınırlanması gibi sadece büyük sınırlamalarla mümkündür.

$$\begin{aligned} H_{11} &= a_1 + 2a_3 \cos q_2 + 2a_4 \sin q_2 \\ H_{12} = H_{21} &= a_2 + a_3 \cos q_2 + a_4 \sin q_2 \\ H_{22} &= a_2 \\ h &= a_3 \sin q_2 - a_4 \cos q_2 \end{aligned}$$

dir. Sabitelerin $m_1 = 1$, $l_1 = 1$, $m_e = 2$, $\delta_e = 30^\circ$, $I_1 = 0.12$, $l_{c1} = 0.5$, $I_e = 0.25$, $l_{ce} = 0.6$, değerleri,

$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$ durum değişkenleri ve $[u_1 \ u_2]^T = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ denetim sinyalleri olmak üzere, Eşitlik (47)'deki iki eklemlerli manipülatörün durum uzay formu simülasyonda kullanılmıştır.

4. UYGULAMA

Bu bölümde belirsizlik içeren ve doğrusal olmayan iki eklemlerli robot kolu modelinin denetimi yapılacaktır. Düzlemsel m-eklemlerli bir manipülatör dinamiğinin genel denklemleri, q ve \dot{q} sırası ile eklemlerdeki açısal yer değişimi ve açısal hız τ manipülatör eklemlerine uygulanan moment olmak üzere;

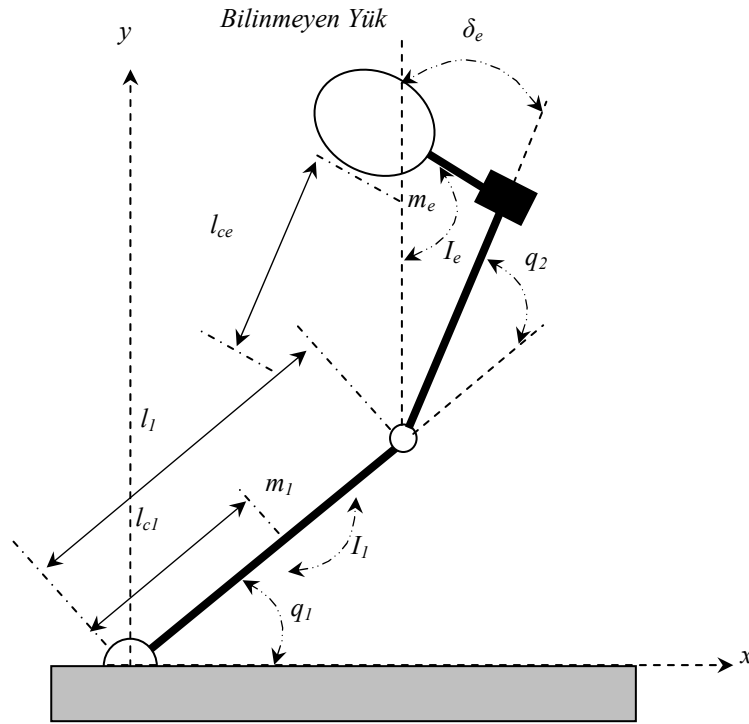
$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (45)$$

dir. Burada $H(q)$ simetrik matris formunda manipülatörün atalet momenti, $C(q, \dot{q})$ merkezci ve Coriolis moment matrisi ve $g(q)$ yerçekimi moment vektörüdür. Şekil 1'de verilen iki eklemlerli, $m=2$, manipülatörün dinamik denklemleri açık formda,

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

olarak yazılabilir (Slotine ve Li, 1991). Burada matris elemanları ve sabiteler;

$$\begin{aligned} a_1 &= I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2 \\ a_2 &= I_e + m_e l_{ce}^2 \\ a_3 &= m_e l_1 l_{ce} \cos \delta_e \\ a_4 &= m_e l_1 l_{ce} \sin \delta_e \end{aligned}$$



Şekil 1. İki eklemlı bir robot kolu.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.8 & -1.65 \\ -1.65 & 4.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_3^2 - 0.96x_3x_4 - 0.48x_4^2 \\ 2.67x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Denklem (47)'deki sistemin nominal kısmının matrisleri;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.8 & -1.65 \\ -1.65 & 4.45 \end{bmatrix}$$

dir. Sistemdeki belirsizliklerin tümü sistemin giriş matrisi B 'de olduğundan dolayı; $\beta_{i(i=1,2,3,4)}$ belirsizliklerini içeren giriş matrisi ΔB ve doğrusal olmayan elemanları içeren H matrisi;

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) \\ \beta_3(t) & \beta_4(t) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_3^2 - 0.96x_3x_4 - 0.48x_4^2 \\ 2.67x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 \end{bmatrix}$$

olur. Robot kolundaki öngörülmemiş sürtünme, burulma ve eğilme gibi dinamik

yüklerden kaynaklanan parametre belirsizlikleri vardır. Burada sistemin nominal giriş matrisi B 'nin elemanlarının %50'si oranında bir belirsizlik olduğu varsayılırsa ve B matrisi simetrik olduğundan belirsizliklerin değişim aralığı $|\beta_1(t)| \leq 0.4$, $|\beta_2(t)| = |\beta_3(t)| \leq 0.825$ ve $|\beta_4(t)| \leq 2.225$ olur. Böylece Eşitlik (5)'ten dolayı $E(\beta)$ ve F matrisleri;

$$\begin{aligned} \Delta B(\beta(t)) = BE(\beta(t)) &\Rightarrow E(\beta(t)) = [0.5] \\ H = BF &\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 5.26x_3^2 - 1.21x_3x_4 - 0.606x_4^2 \\ 2.55x_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Kapalı çevrimli sistem,

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bu_n(x) + Be(x, t) \quad (48)$$

olur. Tüm belirsizlikler ve doğrusal olmayan elemanların maksimum değişim aralığını içeren $e(x, t)$ fonksiyonu;

$$e(x, t) = E(\beta)u_n(x) - E(\beta)Kx + Fv$$

olduğundan, $e(x, t)$ 'nin normu alınırsa aşağıdaki norm eşitsizliğini sağlar.

$$\|e(x, t)\| \leq \max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \rho(x) + \max_{v \in V} \|Fv\| \triangleq \rho(x)$$

Sonuç olarak, $\rho(x)$ fonksiyonu,

$$\rho(x) = \left[1 - \max_{\beta \in B} \|E(\beta)\| \right]^{-1} \left[\max_{\beta \in B} \|E(\beta)Kx\| + \max_{v \in V} \|Fv\| \right] \quad (49)$$

olarak elde edilir. Burada $\rho(x) = [\rho_{11}(x) \quad \rho_{21}(x)]^T$ dir.

Doğrusal Denetleç Tasarımı: Eşitlik (9)'da verilen doğrusal denetlecin kazanç matrisi, Eşitlik (7)'de hedeflenen performans indeksindeki sağlamak üzere kapalı çevrim performans ağırlık matrisi $Q_R = \text{diag}[1, 1, 1, 1]$ denetim sinyalini sınırlandıran ağırlık matrisi $R = \text{diag}[1, 1]$ ve nominal sistem için Eşitlik (8)'de verilen Riccati denkleminin çözümünden elde edilen,

$$P_R = \begin{bmatrix} 3.3098 & 0.8199 & 5.3134 & 1.9701 \\ 0.8199 & 1.4961 & 1.9701 & 0.9552 \\ 5.3134 & 1.9701 & 19.201 & 7.3039 \\ 1.9701 & 0.9552 & 7.3039 & 3.0444 \end{bmatrix} \quad (50)$$

matrisi için, $K = R^{-1}B^T P_R$ 'den doğrusal denetleç;

$$u_i(t) = Kx = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 3.3098 & 0.8199 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.8199 & 1.4961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (51)$$

olur. Bu durumda nominal sistemin karakteristik polinomal denkleminin kökleri $\lambda_{1,2} = -0.2985 \pm j0.2749$, $\lambda_3 = -1.0208$ ve $\lambda_4 = -4.9818$ 'dir.

Doğrusal Olmayan Denetleç Tasarımı: Eşitlik (11)'deki doğrusal olmayan denetleç bölüm 3.3'te verilen signum fonksiyonu ile tekrar yazılırsa;

$$u_n(x) = \begin{cases} -\rho(x) \text{sgn}(B^T P_L x), & \|B^T P_L x\| > \varepsilon \text{ için} \\ -\rho(x) \frac{1}{\varepsilon} (B^T P_L x), & \|B^T P_L x\| \leq \varepsilon \text{ için} \end{cases} \quad (52)$$

olur. Burada P_L 'yi $Q_L = \text{diag}[1, 1, 1, 1]$ için Eşitlik (10)'da verilen Lyapunov denkleminin çözümünden;

$$P_L = \begin{bmatrix} 2.5697 & 0.5670 & 2.6567 & 0.9851 \\ 0.5670 & 1.3154 & 0.9851 & 0.4776 \\ 2.6567 & 0.9851 & 5.1704 & 1.9524 \\ 0.9851 & 0.4776 & 1.9524 & 0.8514 \end{bmatrix} \quad (53)$$

olarak elde edildi. Böylece Eşitlik (52)'deki $B^T P_L$ matrisi,

$$B^T P_L = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.0000 & 0.9148 & 0.1571 \\ -0.0000 & 0.5000 & 0.1571 & 0.5674 \end{bmatrix} \quad (54)$$

olur. Lyapunov denkleminde P_L yerine P_R kullanılırsa elde edilen Q_L 'nin yine pozitif tanımlı olduğu görülür.

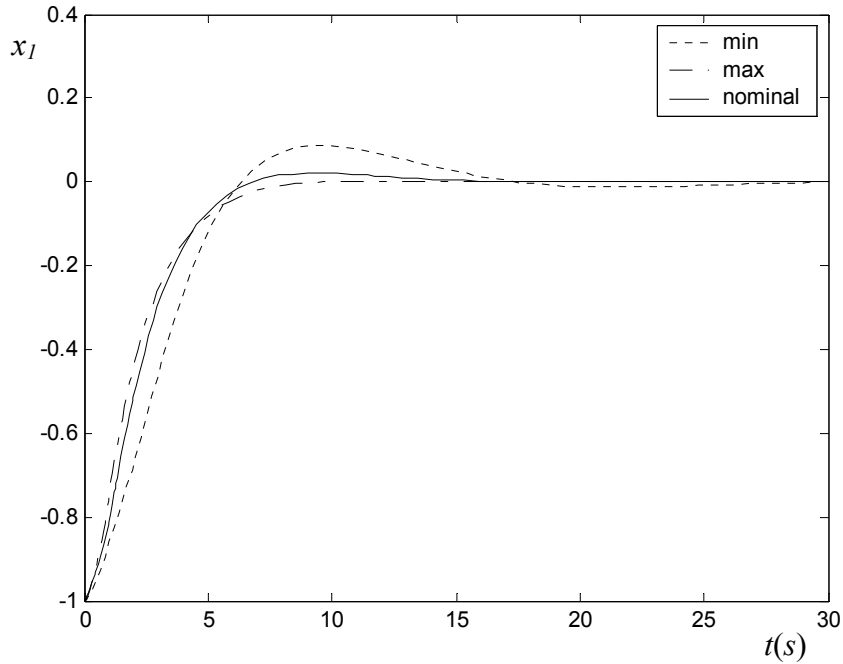
Simülasyon Sonuçları: Yukarıda tasarlanan doğrusal denetleç, $u_i(t)$ ve $\varepsilon = 0.1$ pozitif sabitesi için doğrusal olmayan

denetleç $u_n(t)$, Şekil 1'deki sistemin matematiksel denklemleri (47)'de $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$ yerine yazılarak sistem Matlab/SIMULINK ortamında modellenmiştir. Durum değişkenlerinin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$ için sistemin zaman yanıtı Eşitlik (50)'deki P_R ve Eşitlik (53)'teki P_L için, belirsizliklerin maksimum, minimum değerleri ve nominal sistem kullanılarak elde edildi.

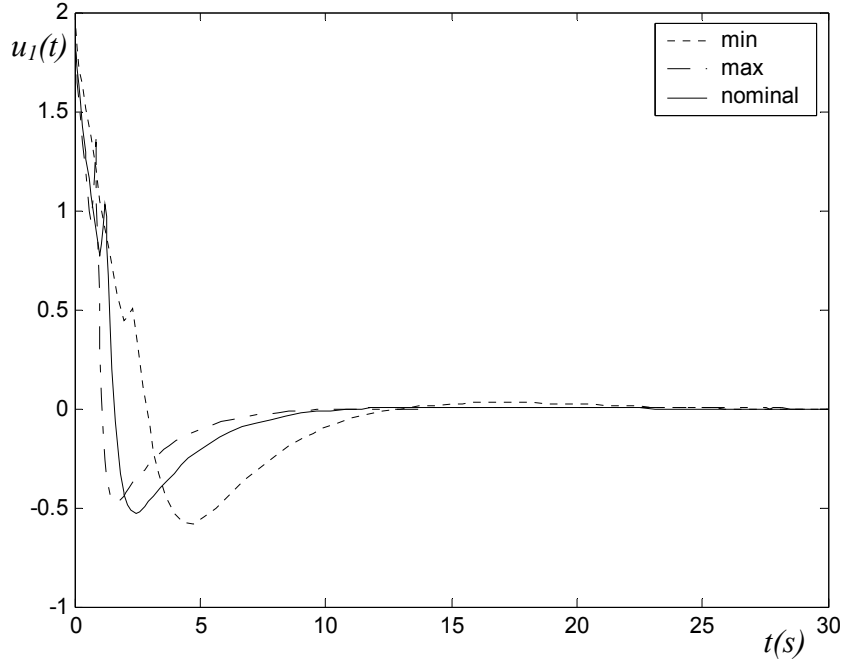
Şekil 2, sistemin x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimini belirsizliğin üç (maksimum, minimum ve sıfır) durumuna için göstermektedir. Şekil 2'de görüldüğü gibi sistemin hedeflenen geçici hal performansı, belir-

sizliğin maksimum ve minimum değerlerinde nominal sistem performansına göre az bir değişiklik göstermektedir. Şekil 2'de verilen performansın sadece doğrusal denetleç LQR tasarımı ile sağlanmayacağı açıktır.

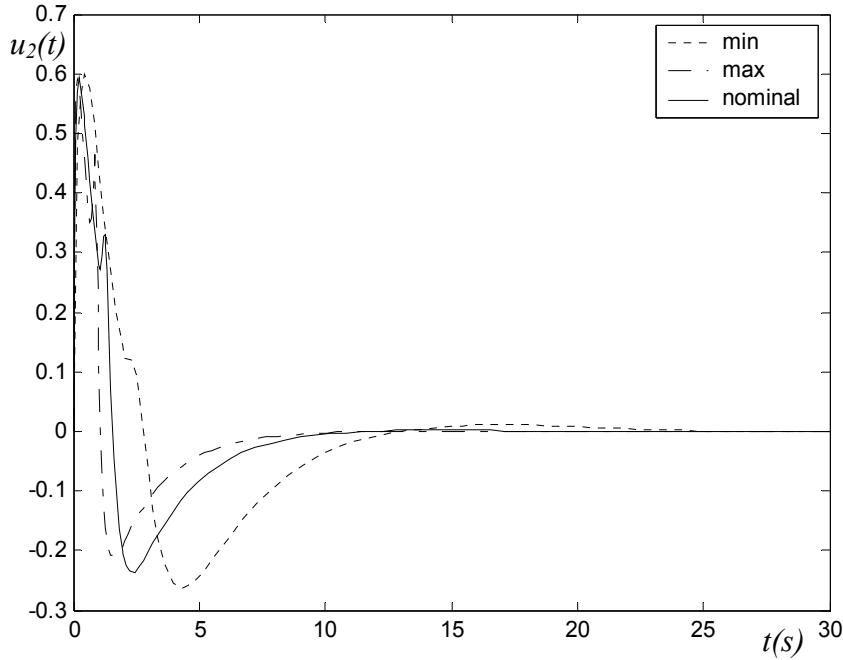
Şekil 3 ve 4'te sırası ile sistemin denetim işaretleri $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ değişimini vermektedir. $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ denetim işaret genliklerinin belirsizliğin üç durumu için az bir değişiklik gösterdiği ve sınırlı bir alanda değişerek sürekli durumda sıfıra yakın bir değişim gösterdiği Şekil 3 ve 4'te görülmektedir. Ayrıca Şekil 3 ve 4'teki denetim sinyalleri doğrusal olmayan diğer denetleçler (Bayır ve Uçar, 2004) ile karşılaştırıldığında, parametre değişimine karşılık genliklerinin az değişmesi ve çattırdamasız oluşları pratik uygulamalar için önemli bir özelliktir.



Şekil 2. Eşitlik (50)'deki P_R ve Eşitlik (53)'teki P_L ve durum değişkenlerinin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$, belirsizliklerin minimum, sıfır ve maksimum değerleri için; x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi.



Şekil 3. Eşitlik (50)'deki P_R ve Eşitlik (53)'teki P_L ve durum değişkenlerin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$, belirsizliklerin minimum, sıfır ve maksimum değerleri için; $u_1(t)$ denetim sinyali.

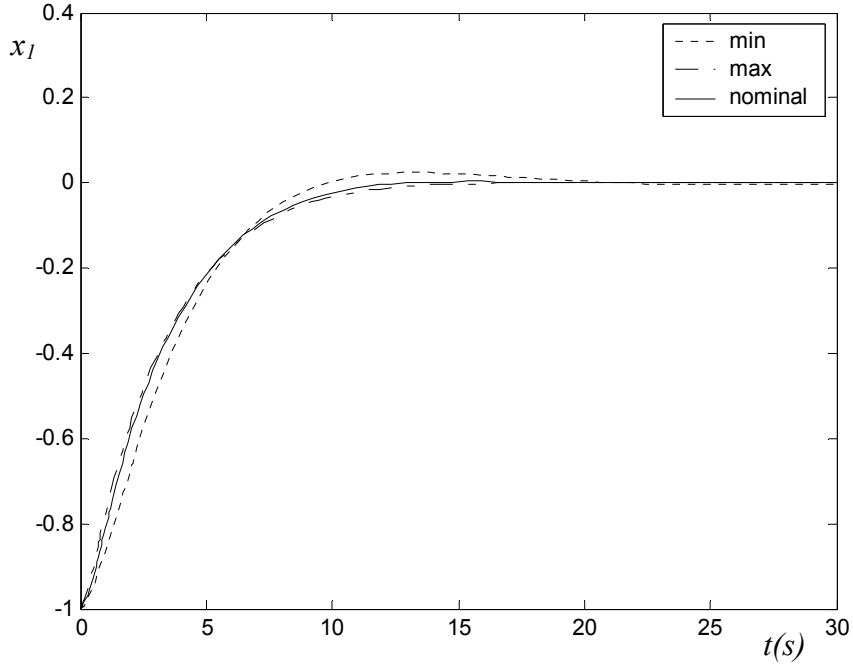


Şekil 4. Eşitlik (50)'deki P_R ve Eşitlik (53)'teki P_L ve durum değişkenlerin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$ belirsizliklerin minimum, sıfır ve maksimum değerleri için; $u_2(t)$ denetim sinyali.

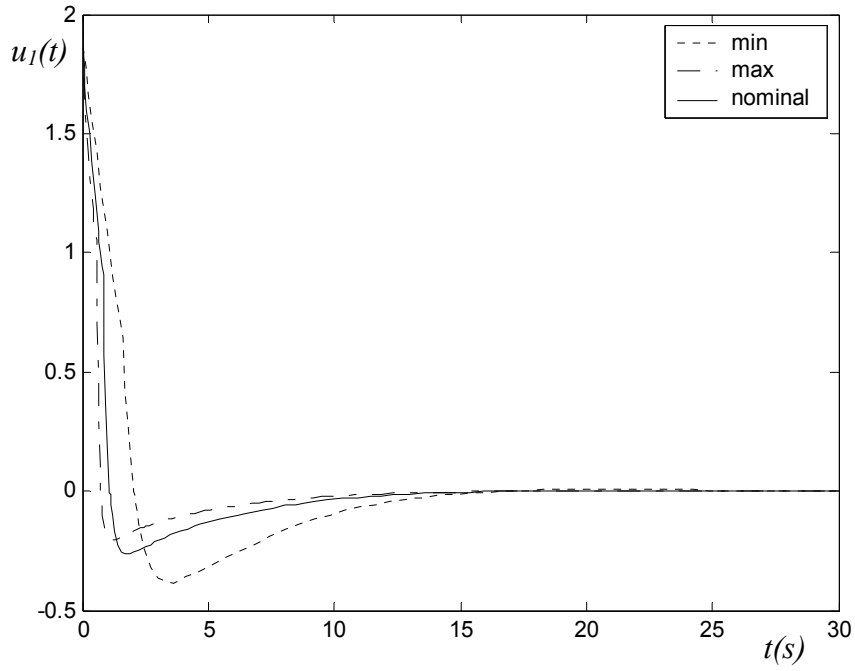
Bölüm 3.3'te tartışılan denetim parametrelerinin ayarlanması kısmında belirtildiği gibi $P_R = P_L$ alınırsa, yani Lyapunov denkleminde elde edilen Eşitlik (53)'teki P_L matrisi yerine Riccati denkleminde elde edilen Eşitlik (50)'deki P_R matrisi kullanıldığında Şekil 2, 3 ve 4'teki simülasyonda kullanılan sistem değerleri için, simülasyon sonuçları Şekil 5, 6 ve 7'de verilmiştir. Şekil 5, 6 ve 7'de sırası ile sistemin x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi, $u_1(t)$ denetim sinyalinin zamana göre değişimi ve $u_2(t)$ denetim sinyalinin zamana göre değişimi verilmiştir.

mülasyon sonuçları karşılaştırıldığında Bölüm 3.3'te de belirtildiği gibi kapalı çevrimli sistemin performansı daha da iyileşmiştir. İki şekilde de denetim sinyalinin en büyük değerlerinin hemen hemen aynı maksimum genlikte oldukları görülmektedir. Yine denetim parametrelerinin ayarlanmasıyla denetim sinyallerindeki $0 < t < 5$ zaman aralığındaki değişimlerinin daha iyi olduğu ve sürekliliğin arttığı görülmektedir. Ayrıca sistemin sürekli durum hatası ilk duruma göre iyileşmiştir. Böylece denetim parametrelerinin ayarlanmasıyla kapalı çevrimli sistemin performansının daha da arttığı ve sistemin belirsizliklere karşı daha da gürbüz hale geldiği Şekil 5-7'de açıkça görülmektedir.

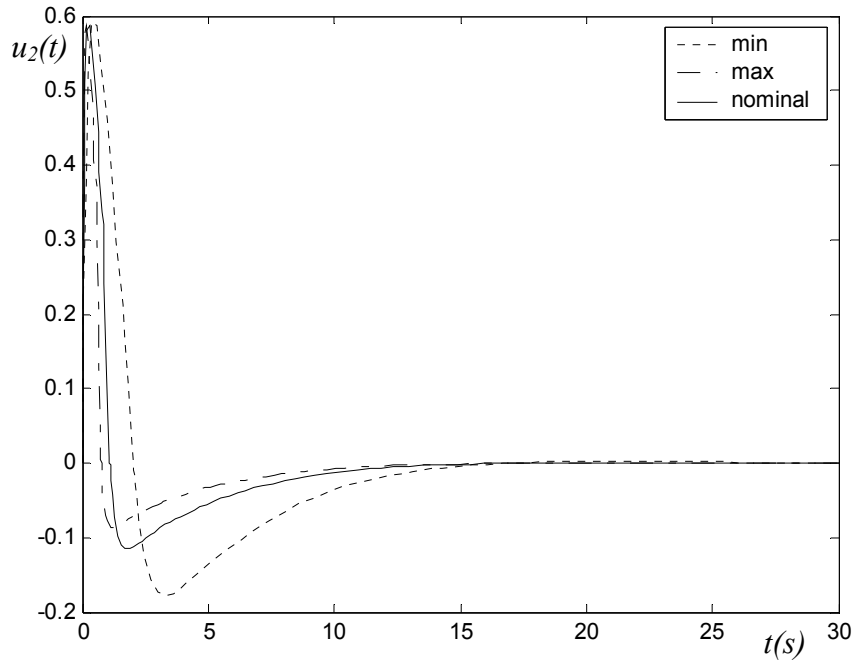
Şekil 2-4'teki ve Şekil 5-7 ile verilen si-



Şekil 5. Eşitlik (50)'deki $P_R = P_L$ ve durum değişkenlerin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$, belirsizliklerin minimum, sıfır ve maksimum değerleri için; x_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi.



Şekil 6. Eşitlik (50)'deki $P_R = P_L$ ve durum değişkenlerin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$, belirsizliklerin minimum, sıfır ve maksimum değerleri için; $u_1(t)$ denetim sinyali.



Şekil 7. Eşitlik (50)'deki $P_R = P_L$ ve durum değişkenlerin başlangıç şartları $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [-1, 0, 0, 0]^T$, belirsizliklerin minimum, sıfır ve maksimum değerleri için; $u_2(t)$ denetim sinyali.

Eşitlik (52)'deki doğrusal olmayan denetleçte, $\varepsilon \rightarrow 0$ için denetlecin yalnızca ilk durumu vardır. Bu durum içinde Şekil 1'deki sistemin simülasyon sonuçları elde edilmiştir. Sistemin kararlılığı ve hedeflenen performansı sağladığı görülmüştür; ancak beklenildiği gibi denetim sinyalinde pratik uygulamalarda sorun olan ve istenmeyen çatlardama görülmüştür.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada (Breinl ve Leitmann, 1987)'de verilen doğrusal sistemler için geliştirilen denetlecin doğrusal olmayan sistemlere uygulanması gösterildi ve doğrusal olmayan ve belirsizlik içeren esnek eklemlerli robot kollarının denetimi gerçekleştirildi. Denetlecin doğrusal kısım nominal sistemin kapalı çevrim performansını sağlarken, denetlecin doğrusal olmayan kısım sistemdeki belirsizliklerin etkilerini karşılamak ve kapalı çevrimli sistemin kararlılığını sağladı.

Bu çalışmada kapalı çevrimli sistemin kararlılığı, önerilen bir teoremle ispatı verilerek sistematik olarak gösterildi. Uygulama olarak doğrusal olmayan eleman ve parametre belirsizliği içeren iki eklemlerli bir manipülatörün matematiksel modeli (Slotine ve Li, 1991) alındı. Belirsizliklerin değişim aralığının minimum

$\beta_1 = -0.4$, $\beta_2 = \beta_3 = -0.825$ ve $\beta_4 = -2.225$,
sıfır $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ ve maksimum

$\beta_1 = 0.4$, $\beta_2 = \beta_3 = 0.825$ ve $\beta_4 = 2.225$
değerleri için kapalı çevrimli sistemin performansı incelendi. Tasarlanan denetlecin manipülatör modelindeki parametre belirsizliklerinin değişimine göre beklenen performansı gösterdiği görüldü. Özellikle denetim parametrelerinin ayarlanmasında verilen $P_R = P_L$ alındığında denetim sinyallerindeki değişimlerin daha da iyileştiği görüldü.

Bu denetlecin pratikte manipülatörlerde uygulanabilmesi için durum değişkenlerinin iyi ölçülmesi gerekir. Ancak manipülatörlerde pratikte görülen açısal hızdaki gürültülerden dolayı bir gözleyiciye gereksinim olabilir (Uçar, 2005). Burada tartışılan denetleçle beraber tasarlanabilecek tüm durum gözleyici veya indirgenmiş mertebeli gözleyiciden elde edilen açısal hızlara ilişkin durum değişkenleri kullanılarak yapılan denetimden elde edilecek sonuçlar başka bir çalışma olarak tartışılacaktır.

KAYNAKLAR

- Barmish, B.R., Corless, M. ve Leitmann, G. (1983). A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM Journal of Control and Optimization* 21, 246-255. Reprinted in *Robust Control*, P. Dorato, ed., IEEE Pres, New York, 1987.
- Bayır, İ. ve Uçar, A. (2004). Belirsizlik içeren sistemlerin Gutman-Hagander metoduyla kontrolü. *Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu* ss.281-285.
- Breinl, W. ve Leitmann, G. (1987). State feedback for uncertain dynamical systems. *Applied Mathematics and Computation* 22, 65-87.
- Brogan, W.L. (1991). *Modern Control Theory*. Prentice-Hall International, Third Edition.
- Burk, F. (1998). *Lebesgue Measure and Integration An Introduction*. John Wiley&Sons, Canada.
- Corless, M. (1993). Control of uncertain nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 115, 362-372.
- Franklin, G.F., Powell, J.D. ve Emami-Naeini, A. (2002). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Fourth Edition.
- Hamamci, S. ve Uçar, A. (2002). A robust model based control for uncertain systems. *Trans. Inst. of Measurement and Control* 24, 331-345.
- Kolman, B. ve Hill, D.R. (2000). *Elementary Linear Algebra*. Prentice-Hall International, Seventh Edition.
- Leitmann, G. (1981). On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control* 102, 95-102.
- Leitmann, G. ve Wan, H.Y. (1979). *Performance Improvement of Uncertain Macroeconomic Systems, in Dynamic Optimization and Mathematical Economics*. Plenum Press, New York.

Payandeh, S. (1995). On the effect of compliance in robotic contact tasks problem. *American Control Conference*, 387-391.

Slotine, J.J.E. ve Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey.

Uçar, A. (2005). Belirsizlik içeren sistemlerin durum değişkenlerinin elde edilmesi için bir gözleyici. *Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, TOK'05, İTÜ, İstanbul*, 139-142.



Günyaz ABLAY, Öğrenimine Ohio State University, Nuclear Engineering bölümünde doktora öğrencisi olarak devam etmektedir. Yazar, lisans ve yüksek lisans derecelerini Fırat

Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden aldı. Yazar, American Nuclear Society (ANS) ve TÜBİTAK'ın öğrenci üyesidir. Doğrusal olmayan kontrol, nükleer enerji teknolojileri, nükleer reaktörlerin kontrolü ve kaotik sistemler ve uygulamaları yazarın çalışma ve ilgi alanlarıdır.



Ahmet UÇAR, Lisans ve yüksek lisans derecelerini Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden sırası ile 1987 ve 1989'da aldı. Doktora derecesini Coventry Üniversitesi, İngiltere,

1998'de aldı. Fırat Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde 2004 yılından beri Doçent olarak görev yapmaktadır. İlgi alanları: Kontrol teorisi ve uygulamaları, Doğrusal olmayan sistemlerdir.