

**ARAŞTIRMA MAKALESİ / RESEARCH ARTICLE**

**İKİ PARAMETRELİ WEIBULL DAĞILIMINDA PARAMETRE TAHMİN  
YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASINA İLİŞKİN BİR SİMÜLASYON  
ÇALIŞMASI**

**M. Nuri ALMALI<sup>1</sup>, Hayrettin OKUT<sup>2</sup>**

**ÖZ**

Yapılan çalışmada farklı örnek büyüklüklerine (n=5, 10, 15, 20, 30, 40) sahip olan iki parametrelili Weibull dağılımının  $\beta$  şekil parametresinin tahmini, En Küçük Kareler ve En Yüksek Olabilirlik yöntemleri kullanılarak araştırılmıştır. Her bir örnek büyüklüğü için  $\alpha=1$  ve  $\beta=0.5, 1, 1.5, 2$  değerlerine sahip örnekler simülasyon ile üretilmiştir. Tahmin yöntemleri  $\hat{\beta}$ 'nin hata kareler ortalaması ( $HKO[\hat{\beta}]$ ) ve toplam sapma (TS) ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır. Hem simülasyon ve hem de parametre tahminlerinin elde edilmesi için bir MATLAB programı geliştirilmiştir. İki parametrelili Weibull dağılımında parametre tahmin yöntemi olarak  $n \leq 15$  değeri için En Küçük Kareler Yönteminin,  $n > 15$  için de En Yüksek Olabilirlik yönteminin kullanılması uygun olacağı sonucuna varılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Weibull dağılımı, En yüksek olabilirlik yöntemi, En küçük kareler yöntemi, Hata kareler ortalaması, Toplam sapma.

**A SIMULATION STUDY ON THE COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATING  
METHODS FOR 2-PARAMETERS WEIBULL DISTRIBUTION**

**ABSTRACT**

In this study, the estimation of  $\beta$  shape parameter in 2-parameters Weibull distribution having various sample size (n=5, 10, 15, 20, 30, 40) is investigated using the least square (LSM) and maximum likelihood (ML) method. The samples having  $\alpha=1$  ve  $\beta=0.5, 1, 1.5, 2$  values for each sample are produced simulation method. The estimation methods are compared according to mean square error of  $\hat{\beta}$  ( $MSE[\hat{\beta}]$ ) and total deviation (TD) criteria. A MATLAB programming has been developed for both simulation and obtaining estimation parameter. It has been concluded that in 2-parameters Weibull distribution, as a estimation method, for  $n \leq 15$  the least square method is better to be used, on the other hand for  $n > 15$  it is beter to use maximum likelihood method.

**Keywords:** Weibull distribution, The least square method (LSM), Maximum likelihood (ML)method, Mean square error, Total deviation.

<sup>1</sup> Yüzüncü Yıl Üniversitesi Müh.-Mim.- Fak. Elek.-Elektro. Müh. Bölümü 65080 VAN.  
mna1@yyu.edu.tr (Haberleşme adresi)

<sup>2</sup> Yüzüncü Yıl Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü 65080 VAN.  
hokut@yyu.edu.tr

## 1. GİRİŞ

Weibull Dağılımı, adını İsveçli fizikçi Waloddi Weibull'dan almaktadır. Waloddi Weibull'un 1939 yılında bu dağılımı ilk kez malzemenin çekme gerilmesinin dağılımını açıklamak için kullanmıştır (Zenbil, 1991; Gupta ve Kundu, 2001).

Weibull dağılımında, dağılımın parametrelerinin tahmininde örnek sayısının az olması sorun oluşturmaktadır. Bu nedenle yapılan çalışmada farklı örnek büyüklükleri ve farklı parametre değerlerine sahip örnekler üzerinde çalışılmış ve En Yüksek Olabilirlik (EYO) ve En Küçük Kareler (EKK) yöntemleri karşılaştırılmıştır.

Keats vd. (1997), I. ve II. tip çoklu-sansürlü (multiply-censored), sansürlü ve tamamlanmış (complete) verilerde, iki parametrelili Weibull dağılımında parametrelerinin nokta ve aralık tahminlerini EYO ile hesaplayan bir fortran programı sunmuşlardır. Log-olabilirlik eşitliğinin çözümü için Newton Raphson (NR) yöntemini kullanmışlardır. NR çözümü için gerekli olan  $\hat{\beta}_0$  başlangıç değerini Menon eşitliği ile hesaplamışlardır.

Hossain ve Zimmer (2003), tamamlanmış, çoklu zaman sansürlü (multiply time censored) ve Type II sansürlü örneklerde iki parametrelili Weibull dağılımında parametre tahminleri için En Yüksek Olabilirlik (EYO) ve En Küçük Kareler (EKK) yöntemlerinin karşılaştırmasını yapmışlardır. Bu karşılaştırma için tahminlerin hata kareler ortalamasını kullanmışlardır. Tamamlanmış örneklerde örnek büyüklüğünün 20'den küçük olması durumunda EKK, 20'den büyük olması durumunda ise EYO yönteminin en küçük hata kareler ortalaması verdiğini gözlemişlerdir.

Kaya vd. (2003), Weibull Dağılımında  $\alpha$  ölçek (scala) ve  $\beta$  şekil (shape) parametrelerinin tahmini için altı tahminleyici hakkında bilgi vermişlerdir. Çalışmalarında EYO, EKK, momentler tahmin edicisi, olasılıkla ağırlıklandırılmış momentler tahmin edicisi (L-moment), Menon ve White tahmin edicilerini kullanmışlar ve bu tahmin edicileri Monte Carlo simülasyonu yardımıyla hata kareler ortalaması ölçütüne göre karşılaştırmışlardır.  $\beta$  şekil parametresinin tahmininde, örnek büyüklüğü  $n \leq 12$  için moment yöntemi,  $n > 12$  için de En Yüksek Olabilirlik ile olasılık ağırlıklandırılmış momentler tahmin edicisi hata kareler ortalamasının daha küçük olduğunu göstermişlerdir. Bu

çalışmada EKK yöntemi ile elde edilen hata kareler ortalaması diğer yöntemlere göre daha büyük bulunmuştur.

Weibull dağılımında, örnek sayısının az olması dağılımın parametrelerinin tahmininde sorun oluşturmaktadır. Bu çalışmada farklı örnek büyüklükleri ( $n=5, 10, 15, 20, 30, 40$ ) ile farklı parametre değerlerine  $\alpha=1$  ve  $\beta=0.5, 1, 1.5, 2$  sahip örnekler üretilmiştir. Üretilen bu örneklerde, parametre tahmini için kullanılan En Yüksek Olabilirlik (EYO) ve En Küçük Kareler (EKK) yöntemleri karşılaştırılmıştır.

Çalışmada sırasıyla Weibull dağılımı genel özellikleri, dağılım parametrelerinin tahmini için kullanılan EKK ve EYO yöntemi ve simülasyon çalışmasının akış diyagramı verilmiştir. Daha sonra elde edilen bulgular sunulmuş ve kullanılan yöntemler karşılaştırılarak sonuç ve önerilerde bulunulmuştur.

## 2. WEIBULL DAĞILIMI

X rasgele bir değişken olmak üzere, üç parametrelili ( $\zeta, \alpha, \beta$ ) bir Weibull dağılımı (WD) için eklemeli olasılık fonksiyonu ile yoğunluk fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır (Heo vd., 2001);

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\zeta}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad x \geq \zeta \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\zeta}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\zeta}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad x \geq \zeta \quad (2)$$

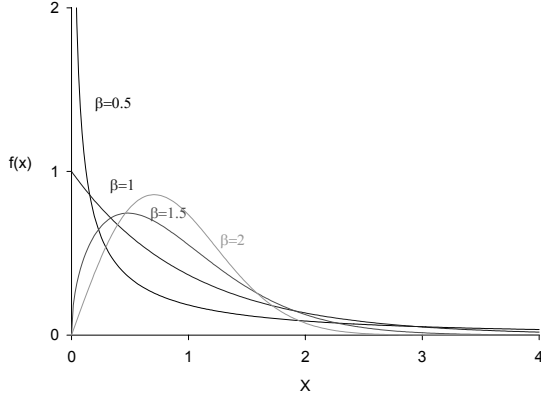
Bu eşitliklerde  $\zeta$  yer (location),  $\alpha$  ölçek (scala) ve  $\beta$  ise şekil (shape) parametresi olarak adlandırılır. WD'nin ortalama ve varyansı sırasıyla;

$$\mu = \zeta + \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right] \quad (4)$$

dir. Burada  $\Gamma(\cdot)$  gamma fonksiyonunu göstermektedir. Yukarıda verilen (1) ve (2) numaralı eşitliklerde,  $\zeta$  yer (location) parametresi 0 alındığında dağılım iki parametrelili bir dağılıma dönüşür ve iki parametrelili Weibull dağılımı olarak isimlendirilir.

Standart iki parametrelili Weibull dağılımının yoğunluk fonksiyonunun ( $\zeta=0$  ve  $\alpha=1$ )  $\beta$  parametresinin farklı değerleri için değişimi Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Farklı  $\beta$  değerleri için standart iki parametrelili Weibull dağılımının ( $\zeta=0$  ve  $\alpha=1$ ) olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x)$ 'in değişimi.

Dağılımın şekli, şekil parametresi  $\beta \cong 3.6$  olduğunda hemen hemen simetrik, eğrilik katsayısı sıfır ve dağılımın şekli normal dağılıma yakın olur (Johnson ve Kotz, 1970). Ayrıca,  $\beta$ 'nin sıfıra yakın değerleri için aşırı derecede sağa,  $\beta > 3.6$  değerleri için sola yatıktır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmada farklı örnek büyüklüklerine sahip iki parametrelili Weibull dağılımında,  $\beta$  şekil parametresinin farklı yöntemlerle tahminleri araştırılmıştır. Örnek büyüklüğü ( $n=5, 10, 15, 20, 30, 40$ ) olarak seçilmiştir. Her bir örnek büyüklüğü için  $\alpha=1$  ve  $\beta=0.5, 1, 1.5, 2$  değerlerine sahip örnekler simülasyon ile üretilmiştir. Her bir örnek için 20.000 simülasyon verisi üretilmiştir. Elde edilen her bir veri setinden  $\beta$  şekil parametresinin tahmini EYO ve EKK yöntemi ile elde edilmiştir. Tahminlenen  $\beta$  şekil parametresine bağlı olarak  $\alpha$  ölçek parametresi hesaplanmıştır. Tahmin yöntemleri  $\hat{\beta}$ 'nin hata kareler ortalaması ( $HKO[\hat{\beta}]$ ) ve toplam sapma (TS) değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Geliştirilen bir MATLAB programı yardımı ile simülasyon verileri üretilmiş ve üretilen bu verilerden  $\beta$  ve  $\alpha$  parametrelerinin EKK ve EYO tahminleri hesaplanmıştır.

### 3.1 İki Parametrelili Weibull Dağılımı Parametrelerinin En Yüksek Olabilirlik Yöntemi ile Tahminlenmesi

$X_1, X_2, \dots, X_n$   $\theta$  parametrelili ( $\theta = \alpha, \beta$  sırasıyla ölçek ve şekil parametresi) iki parametrelili Weibull dağılımı gösteren bir rasgele örnek olarak göz önüne alalım. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (5)$$

WD'nin olabilirlik fonksiyonu;

$$LL = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir (Zenbil,1991).

EYO tahminleri olabilirlik eşitliğini sağlayan ya da olabilirlik (veya log-olabilirlik) eşitliklerini maksimum yapan  $\hat{\theta}_{EYO} = (\hat{\alpha}_{EYO}, \hat{\beta}_{EYO})'$  değerleri olarak tanımlanabilir.

Matematiksel işlemleri kolaylaştırmak için çarpım ifadesini toplam haline dönüştürmek amacıyla LL olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu;

$$L = \ln LL = n \ln(\beta) - n\beta \ln(\alpha) + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \quad (7)$$

şeklinde elde edilir.  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin EYO tahminlerini elde etmek için log-olabilirlik fonksiyonunun  $\alpha$  ve  $\beta$  parametresine göre birinci dereceden kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenir;

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -n + \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta = 0 \quad (8)$$

yukarıdaki eşitlikten  $\alpha$  ;

$$\alpha = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right)^{1/\beta} \quad (9)$$

olarak bulunur.  $\alpha$ 'nın logaritması alınacak olursa;

$$\ln \alpha = \frac{1}{\beta} \ln \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \ln n \quad (10)$$

elde edilir.

Aynı şekilde log-olabilirlik fonksiyonunun  $\beta$  parametresine göre birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenecek olursa;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i) + \frac{1}{\alpha^\beta} \ln \alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta = 0 \quad (11)$$

eşitliği elde edilir. (9) ve (10) numaralı eşitliklerde verilen  $\alpha$  ile  $\ln \alpha$  ifadeleri, (11) numaralı eşitlikte yerlerine konarak gerekli sadeleştirmeler yapılacak olursa, elde edilecek olan yeni ifade;

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta} = 0 \quad (12)$$

şeklini alır. Bu ifadede  $\beta$  çekilerek;

$$\beta = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \right]^{-1} \quad (13)$$

ifadesi bulunur. Elde edilen (13) numaralı eşitlik Newton-Raphson yöntemi kullanılarak  $\beta$ 'ya göre çözülebilir. Bu yöntemin en büyük avantajı çözüme quadratik olarak yaklaşmasıdır. Bu iterasyon sayısını azaltarak köke daha hızlı yakınsama sağlar.  $\hat{\beta}_{k+1}$  ve  $\hat{\alpha}$  aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{\frac{1}{\beta_k} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta_k} \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta_k}}}{\frac{1}{\beta_k^2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta_k} \sum_{i=1}^n [x_i^{\beta_k} \ln^2 x_i] - \left[ \sum_{i=1}^n x_i^{\beta_k} \ln x_i \right]^2}{\left( \sum_{i=1}^n x_i^{\beta_k} \right)^2}} \quad (14)$$

$$\alpha = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right)^{1/\beta} \quad (15)$$

Yukarıdaki eşitlikte ( $|\beta_{k+1} - \beta_k| < h$ ) olunca kadar işleme devam edilerek  $\hat{\beta}_{EYO}$  bulunur. Burada  $h=0.00001$  ve Newton-Raphson yöntemi için kullanılan  $\hat{\beta}_0$  başlangıç değeri Menon eşitliğinden hesaplanır (Keats vd.,1997). Bu eşitlik

$$\hat{\beta}_0 = \sqrt{\frac{6}{\pi^2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i}{n} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2}{n^2} \right]} \quad (16)$$

şeklinindedir.

### 3.2 İki Parametrelili Weibull Dağılımı Parametrelerinin En Küçük Kareler Yöntemi ile Tahminlenmesi

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  veri çiftleri gözlenmiş olsun. EKK yönteminin temel ilkesi, bu verileri temsil eden doğru ile gözlem verileri arasındaki dikey farkları minimum yapmaya dayanır. Verileri en iyi temsil eden doğru  $y = \hat{a} + \hat{b}x$  doğrusudur. Bu doğru;

$$\sum_{i=1}^n (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2 = \min(a, b) \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \quad (17)$$

şeklinden tanımlanır. Bu eşitlikte  $\hat{a}$  ve  $\hat{b}$  sırasıyla a ve b katsayılarının EKK tahminleri, n veri sayısıdır.

(17) numaralı eşitliğinin sağ tarafında verilen  $\hat{a}$  ve  $\hat{b}$  katsayıları aşağıda verilen eşitlikler yardımı ile bulunur;

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - \hat{b} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \quad (18)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n}} \quad (19)$$

Yukarıda açıklanan yöntemle iki parametrelili Weibull dağılımı için parametre tahminlerinin EKK çözümünün gerçekleştirilebilmesi için, (1) numaralı eşitliğinin ( $\zeta$  yer (location) parametresi 0 olmak üzere) her iki yanının iki defa logaritması alınırsa,

$$\ln[-\ln(1-F(x))] = -\beta \ln(\alpha) + \beta \ln(x) \quad (20)$$

şekline dönüşür. (20) numaralı eşitlikte  $y = \ln[-\ln(1-F(x))]$  ve  $x = \ln(x)$  olur. Ayrıca

$$a = -\beta \ln(\alpha) \quad (21)$$

$$b = \beta \quad (22)$$

dönüşümleri yapılacak olursa,

$$y = a + bx \quad (23)$$

doğrusal eşitliği haline dönüşür (Hossain ve Zimmer, 2003). (23) numaralı eşitlikte verilen  $a$  ile  $b$  katsayıları aşağıda verilen  $y_i$  ile  $x_i$  değerleri,

$$y_i = \ln[-\ln(1-F(x_i))]$$

$$x_i = \ln(x_i)$$

yazılarak hesaplanır. Hesaplanan değerler  $a$  ve  $b$  parametrelerini EKK tahminleridir. (21) ve (22) eşitlikleri kullanılarak  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin EKK tahminleri,

$\hat{\alpha}_{EKK} = e^{-\frac{a}{b}}$  ve  $\hat{\beta}_{EKK} = \hat{b}$  eşitliklerinden hesaplanır. Eşitliklerin çözümünde kullanılan  $y_i$ ,  $x_i$  ve  $F(x_i)$  değerleri sıralanmış değerlerdir:  $1 \leq i \leq j \leq n$  için  $y_i \leq y_j$ ,  $x_i \leq x_j$  ve  $F(x_i) \leq F(x_j)$  dir.

Yapılan çalışmada Weibull Dağılımının EKK tahminlerini elde etmek için  $F(x_i)$  değerlerinin parametrelerden bağımsız olarak hesaplanması gerekmektedir.  $F(x_i)$  'leri hesaplamak için iki farklı eşitlik kullanılmıştır. Bu eşitliklerin ilki,  $y_i$  'lerin ortanca değerlerini kullanarak elde edilen

$$F_i \approx \frac{i-0.3}{n+0.4} \quad (24)$$

eşitliğidir (Ross, 1999). İkinci de  $F_i$  'lerin beklenen olasılıklarından elde edilir ve

$$F_i = \frac{i}{n+1} \quad (25)$$

şeklinde (Ross, 1999).

### 3.3 Simülasyon

Çalışmanın bu bölümünde üretilen 20,000 örneğin En Yüksek Olabilirlik ve En Küçük Kareler yöntemleri ile elde edilen  $\hat{\beta}$  değerlerine ait hata kareler ortalamasının yanında toplam sapma değeri de hesaplanmıştır. Simülasyon ve hesaplamalar için MATLAB da bir program kodu geliştirilmiştir.  $\hat{\beta}$  değerinin elde edilmesinde kullanılan parametre tahmin yöntemleri ve kullandıkları eşitlikler Tablo 1 'de verilmiştir.

Tablo 1. Parametre tahmin yöntemleri ve kullandıkları eşitlikler

Yöntem	Yöntem Adı	$F_i$ değeri
1	En Yüksek Olabilirlik Yöntemi	-
2	En Küçük Kareler Yöntemi	$F_i = \frac{i}{n+1}$
3	En Küçük Kareler Yöntemi	$F_i \approx \frac{i-0.3}{n+0.4}$

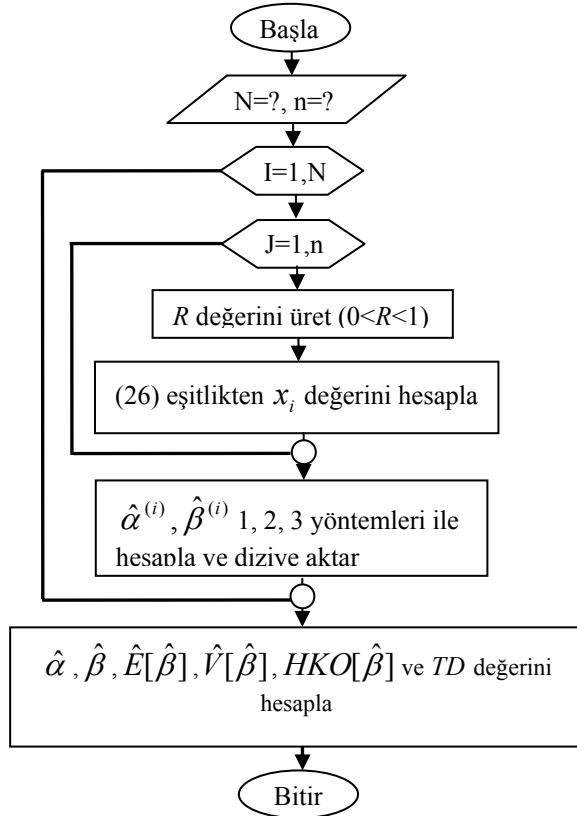
İki parametrelili Weibull dağılımına ait örnekleri elde etmek için eklemeli olasılık fonksiyonu  $F(x)$  'den yararlanılmıştır. Yeni örnekler elde etmek için  $F(x)$  olasılık fonksiyonundan  $x$  değişkeni çekilecek olursa

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}, x \geq 0.$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} = R \quad x = \alpha [-\ln(1-R)]^{1/\beta} \quad (26)$$

ifadesi elde edilir (Ghosh, 1999; Banks vd., 2001). Burada  $R$  Uniform dağılımdan rasgele çekilmiş 0 ile 1 arasında sayıdır.

İki parametrelili Weibull dağılımından, örnek büyüklüğü ( $n=5, 10, 15, 20, 30, 40$ ) ve  $\alpha=1, \beta=0.5, 1, 1.5, 2$  parametre değerlerine sahip olan örneklerin üretilmesi ile üretilen her bir örnek için En Yüksek Olabilirlik ve En Küçük Kareler yöntemi kullanılarak parametre tahminlerinin hesaplanmasında kullanılan programın akış şeması Şekil 2’de verilmiştir.



Şekil 2. İki parametrelili Weibull Dağılımı parametre tahminlerinin hesaplanması için kullanılan programın akış şeması.

Üretilen Weibull rasgele örneklerinde  $(\alpha, \beta)$  parametre çifti sırasıyla  $(1,0.5), (1,1), (1,1.5), (1,2)$  olarak alınmıştır. Her bir parametre seti için  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  En Yüksek Olabilirlik ve En Küçük Kareler yöntemleriyle elde edilmiştir. Örnek büyüklüğü olarak  $n=5, 10, 15, 20, 30$  ve  $40$  olarak alınmıştır. 20000 simülasyon deneğinde elde edilen  $\beta$  tahminleri  $\hat{\beta}^{(1)}, \hat{\beta}^{(2)}, \dots, \hat{\beta}^{(20000)}$  olmak üzere,  $\beta$  parametresine ait beklenen değer, varyansı, hata kareler ortalaması ve toplam sapma değeri sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\hat{E}[\hat{\beta}] = \frac{1}{20000} \sum_{i=1}^{20000} \hat{\beta}^{(i)}$$

$$\hat{V}[\hat{\beta}] = \frac{1}{19999} \sum_{i=1}^{20000} (\hat{\beta}^{(i)} - \hat{E}[\hat{\beta}])^2$$

$$HKO[\hat{\beta}] = \frac{1}{20000} \sum_{i=1}^{20000} (\hat{\beta}^{(i)} - \beta)^2$$

$$TD = \left| \frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} \right| + \left| \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\alpha} \right|$$

#### 4. BULGULAR

İki parametrelili Weibull dağılımında parametre tahminleri için yapılan simülasyon çalışmasında farklı  $\beta$  değerleri ve örnek büyüklüğü için, üç ayrı yöntemle elde edilen değerler  $\hat{\beta}, \hat{V}[\hat{\beta}]$  ve  $HKO[\hat{\beta}]$  Tablo 2. de verilmiştir.

Tablo 2’de görüldüğü gibi ele alınan  $(\alpha, \beta)$  parametre çiftlerinin tamamında,  $n=5$  ve  $n=10$  örnek büyüklükleri için en küçük  $HKO[\hat{\beta}]$  değeri 2. yöntemle,  $n=15$  örnek büyüklüğü için 3. yöntemle ve  $n=20, 30$  ve  $40$  örnek büyüklükleri için ise 1. yöntemle elde edilmiştir.

Farklı örnek büyüklükleri ve  $\beta$ ’nin farklı değerleri için üç farklı yöntemle hesaplanan  $HKO[\hat{\beta}]$  ile örnek büyüklükleri arasındaki ilişki Şekil 3’de verilmiştir.

Şekil 3’de de görüldüğü gibi farklı  $\beta$  değerlerinde, örnek büyüklüğü  $n=5$  ve  $n=10$  için 2. yöntemle elde edilen  $HKO[\hat{\beta}]$  daha küçük çıkmıştır. Örnek büyüklüğü  $n=15$  için 2. ve 3. yöntemlerle elde edilen  $HKO[\hat{\beta}]$  birbirine çok yakın değerler almışlardır ama 3. yöntem ile elde edilen  $HKO[\hat{\beta}]$  değerleri  $\beta$ ’nin bütün değerleri için daha küçük bulunmuştur. Örnek büyüklüğü arttıkça ( $n \geq 20$ ) 1. Yöntemle elde edilen  $HKO[\hat{\beta}]$ , diğer iki yönteme göre daha küçük bulunmuştur.

İki parametrelili Weibull dağılımında parametre tahminleri için yapılan simülasyon çalışmasında farklı  $\beta$  değerleri ve örnek büyüklüğü için elde edilen  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  ve toplam sapma (TS) değerleri Tablo 3.’de verilmiştir.

Tablo 3’de görüldüğü gibi  $(\alpha, \beta)$  parametre çiftlerinin tamamında örnek büyüklüğü  $n=5$  ve  $n=10$  için 3. yöntemle,  $n=30$  ve  $n=40$  için de 1. yöntemle en küçük TS değeri elde edilmiştir. Ancak,  $n=15$  ve  $n=20$  için bütün  $(\alpha, \beta)$  parametre çiftleri için genel bir şey söylemek mümkün olmamıştır. Tablo 3’de de görüldüğü gibi 2. yöntem ile elde edilen TS değeri her zaman 1. ve 3. yöntemlerle elde edilen TS değerinden büyük bulunmuştur.

Farklı örnek büyüklüğü ve Tablo 3’de  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri için elde edilen TS değerlerindeki değişim Şekil 4’de verilmiştir.

Şekil 4’de 3. yöntem ile elde edilen TS değerinin her zaman 2. yöntemle elde edilen TS değerinden daha küçük değerler aldığı görülmektedir. Ayrıca örnek büyüklüğünün 15 de büyük olması durumunda,  $\beta$  değeri arttıkça 1. ve 3. yöntemler ile elde edilen TS değerinin birbirine yaklaştığı görülmektedir.

## 5. SONUÇ

Yapılan çalışmada farklı örnek büyüklüklerine sahip iki parametrelili Weibull dağılımında,  $\beta$  şekil parametresinin farklı yöntemlerle tahminleri araştırılmıştır. Örnek büyüklüğü ( $n=5, 10, 15, 20, 30, 40$ ) olarak seçilmiştir. Her bir örnek büyüklüğü için  $\alpha=1$  ve  $\beta=0.5, 1, 1.5, 2$  değerlerine sahip örnekler simülasyon ile üretilmiştir.

Tahmin yöntemleri  $\hat{\beta}^i$  nin hata kareler ortalaması ve toplam sapma değerlerine göre karşılaştırılmıştır.

Kullanılan yöntemlerin  $HKO[\hat{\beta}]$  kriterine göre değerlendirildiği bu çalışmada  $n \leq 15$  olması durumunda En Küçük Kareler yöntemi ile elde edilen  $HKO[\hat{\beta}]$  değeri, En Yüksek Olabilirlik yöntemine göre daha küçük bulunmuştur. Bu durum, iki parametrelili Weibull dağılımında, küçük örnek büyüklüklerinde ( $n \leq 15$ ) parametre tahminleri için En Küçük Kareler yönteminin daha uygun olduğunu göstermektedir. Özellikle örnek büyüklüğü  $n \leq 10$  için 2. yöntem ile bulunan  $HKO[\hat{\beta}]$ ’nin en küçük olması, En Küçük Kareler yöntemini kullanırken  $F_i$  değerini hesaplamak için kullanılacak olan eşitliğin de önemli olduğunu göstermektedir. Örnek büyüklüğü ( $n > 15$ ) arttıkça En Yüksek Olabilirlik yöntemi ile elde edilen  $HKO[\hat{\beta}]$ ’da

azalmıştır. Şekil 3’de görüldüğü gibi özellikle örnek büyüklüğü 15 ile 20 arasında olması durumunda hangi yöntemle en küçük  $HKO[\hat{\beta}]$  elde edilebileceği konusunun araştırılması gerektiği görülmektedir.

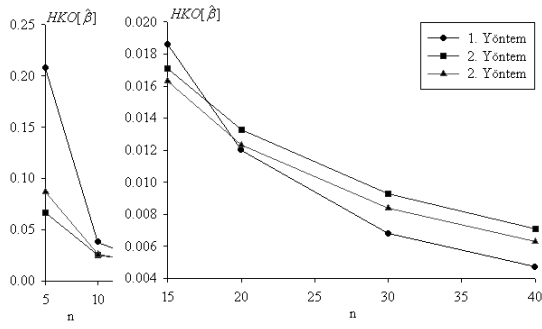
Yöntemler TS değerlerine bakılarak değerlendirildiğinde,  $n=5$  ve  $n=10$  için 3. yöntemin,  $n=30$  ve  $n=40$  için de 1. yöntemin daha uygun olduğu görülmektedir. Ancak,  $n=15$  ve  $n=20$  için bütün  $(\alpha, \beta)$  parametre çiftleri için genel bir yöntem önermek mümkün olmamıştır.

İki parametrelili Weibull dağılımında parametre tahmin yöntemi olarak  $n \leq 15$  için En Küçük Kareler Yönteminin,  $n > 15$  için de En Yüksek Olabilirlik yönteminin kullanılması uygun görülmektedir. Ancak En Küçük Kareler yöntemini kullanırken  $F_i$  değerini hesaplamak için kullanılacak olan bağıntının da önemli olduğunu görülmektedir.

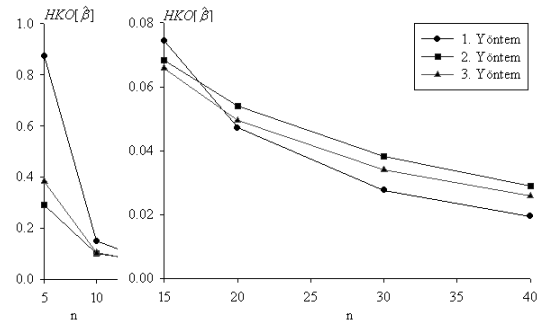
Tablo 2. Farklı  $\beta$  değerleri ve örnek büyüklüğü için, üç ayrı yöntemle elde edilen  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{V}[\hat{\beta}]$  ve  $HKO[\hat{\beta}]$  değerleri

Parametre Değerleri	n	1. Yöntem			2. Yöntem			3. Yöntem		
		$\hat{\beta}$	$\hat{V}[\hat{\beta}]$	$HKO[\hat{\beta}]$	$\hat{\beta}$	$\hat{V}[\hat{\beta}]$	$HKO[\hat{\beta}]$	$\hat{\beta}$	$\hat{V}[\hat{\beta}]$	$HKO[\hat{\beta}]$
$\beta = 0.5$ $\alpha = 1$	5	0,7179	0,1603	0,2077	0,4458	0,0636	0,0665	0,5214	0,0867	0,0871
	10	0,5823	0,0306	0,0379	0,4350	0,0209	0,0251	0,4844	0,0256	0,0258
	15	0,5528	0,1580	0,0186	0,4413	0,0136	0,0171	0,4807	0,0159	0,0163
	20	0,5387	0,0105	0,0120	0,4469	0,0105	0,0133	0,4804	0,0119	0,0123
	30	0,5241	0,0062	0,0068	0,4548	0,0073	0,0093	0,4813	0,0080	0,0084
	40	0,5179	0,0044	0,0047	0,4602	0,0056	0,0071	0,4826	0,0060	0,0063
$\beta = 1$ $\alpha = 1$	5	1,4416	0,6793	0,8742	0,8980	0,2798	0,2902	1,0502	0,3811	0,3836
	10	1,1707	0,1204	0,1495	0,8703	0,0834	0,1002	0,9692	0,1022	0,1032
	15	1,1070	0,6300	0,0744	0,8847	0,0551	0,0684	0,9636	0,0644	0,0657
	20	1,0750	0,0416	0,0472	0,8918	0,0422	0,0539	0,9585	0,0475	0,0496
	30	1,0488	0,0252	0,0276	0,9073	0,0295	0,0381	0,9602	0,0324	0,0340
	40	1,0370	0,0180	0,0194	0,9210	0,0228	0,0290	0,9658	0,0246	0,0258
$\beta = 1.5$ $\alpha = 1$	5	2,1523	1,3910	1,8164	1,3359	0,5501	0,5770	1,5624	0,7498	0,7537
	10	1,7558	0,2669	0,3323	1,3064	0,1841	0,2216	1,4548	0,2256	0,2276
	15	1,6560	0,1411	0,1654	1,3237	0,1241	0,1552	1,4417	0,1450	0,1448
	20	1,6165	0,0945	0,1081	1,3392	0,0955	0,1213	1,4396	0,1085	0,1121
	30	1,5710	0,0565	0,0615	1,3613	0,0671	0,0863	1,4405	0,0737	0,0772
	40	1,5548	0,0395	0,0426	1,3818	0,0504	0,0644	1,4489	0,0544	0,0570
$\beta = 2$ $\alpha = 1$	5	2,8954	3,0057	3,8074	1,7991	1,2230	1,2633	2,1043	1,6664	1,6772
	10	2,3441	0,4920	0,6105	1,7435	0,3333	0,3991	1,9414	0,4087	0,4121
	15	2,2073	0,2540	0,2970	1,7600	0,2187	0,2763	1,9171	0,2556	0,2624
	20	2,1559	0,1710	0,1953	1,7887	0,1691	0,2137	1,9226	0,1921	0,1981
	30	2,0969	0,0989	0,1083	1,8166	0,1152	0,1488	1,9224	0,1265	0,1326
	40	2,0731	0,0704	0,0757	1,8428	0,0904	0,1152	1,9323	0,0975	0,1021

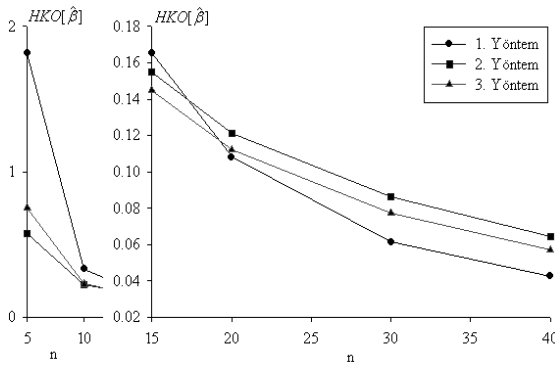




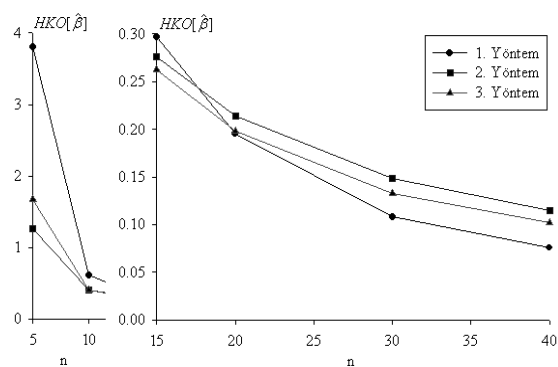
a)  $\beta = 0.5$



b)  $\beta = 1$

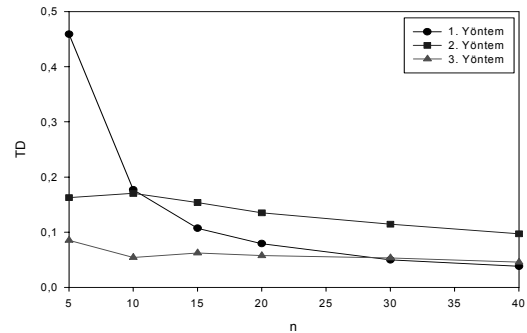
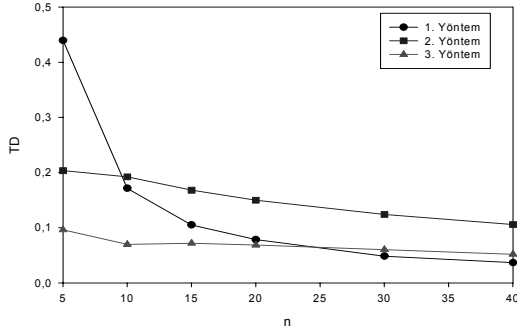
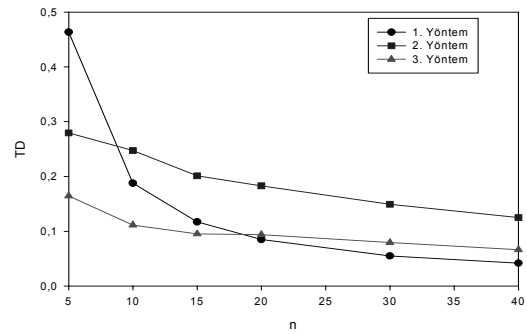
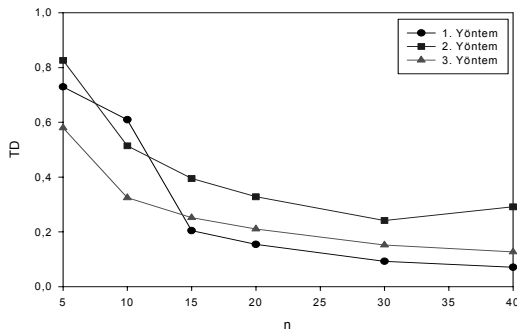


c)  $\beta = 1.5$



d)  $\beta = 2$

Şekil 3. Farklı örnek büyüklüğü ve  $\beta$  değerleri için  $HKO[\hat{\beta}]$  değişimi.



Şekil 4. Farklı örnek büyüklüğü ve  $\beta$  değerleri için  $TD$  değerlerinin değişimi.

Tablo 3. Farklı  $\beta$  değerleri ve örnek büyüklüğü için elde edilen  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  ve toplam sapma (TS) değerleri

Parametre Değerleri	n	1. Yöntem			2. Yöntem			3. Yöntem		
		$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	TS	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	TS	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	TS
$\beta = 0.5$ $\alpha = 1$	5	0,7179	1,2937	0,7295	0,4458	1,7182	0,8266	0,5214	1,5370	0,5798
	10	0,5823	1,4449	0,6095	0,4350	1,3847	0,5147	0,4844	1,2939	0,3251
	15	0,5528	1,0992	0,2048	0,4413	1,2775	0,3949	0,4807	1,2135	0,2521
	20	0,5387	1,0771	0,1545	0,4469	1,2221	0,3283	0,4804	1,1714	0,2106
	30	0,5241	1,0446	0,0928	0,4548	1,1514	0,2418	0,4813	1,1148	0,1522
	40	0,5179	1,0350	0,0708	0,4602	1,2119	0,2915	0,4826	1,0922	0,1270
$\beta = 1$ $\alpha = 1$	5	1,4416	1,0218	0,4634	0,8980	1,1775	0,2795	1,0502	1,1142	0,1644
	10	1,1707	1,0170	0,1877	0,8703	1,1175	0,2472	0,9692	1,0806	0,1114
	15	1,1070	1,0101	0,1171	0,8847	1,0859	0,2012	0,9636	1,0588	0,0952
	20	1,0750	1,0099	0,0849	0,8918	1,0747	0,1829	0,9585	1,0523	0,0938
	30	1,0488	1,0063	0,0551	0,9073	1,0565	0,1492	0,9602	1,0396	0,0794
	40	1,0370	1,0050	0,0420	0,9210	1,0459	0,1249	0,9658	1,0321	0,0663
$\beta = 1.5$ $\alpha = 1$	5	2,1523	0,9955	0,4394	1,3359	1,0940	0,2034	1,5624	1,0545	0,0961
	10	1,7558	0,9991	0,1714	1,3064	1,0630	0,1921	1,4548	1,0396	0,0697
	15	1,6560	1,0010	0,1050	1,3237	1,0504	0,1679	1,4417	1,0329	0,0718
	20	1,6165	1,0007	0,0784	1,3392	1,0426	0,1498	1,4396	1,0282	0,0685
	30	1,5710	0,9990	0,0483	1,3613	1,0315	0,1240	1,4405	1,0205	0,0602
	40	1,5548	1,0001	0,0366	1,3818	1,0268	0,1056	1,4489	1,0177	0,0518
$\beta = 2$ $\alpha = 1$	5	2,8954	0,9889	0,4588	1,7991	1,0622	0,1627	2,1043	1,0331	0,0852
	10	2,3441	0,9951	0,1770	1,7435	1,0421	0,1704	1,9414	1,0249	0,0542
	15	2,2073	0,9966	0,1071	1,7600	1,0338	0,1538	1,9171	1,0208	0,0622
	20	2,1559	0,9987	0,0792	1,7887	1,0294	0,1351	1,9226	1,0188	0,0575
	30	2,0969	0,9988	0,0497	1,8166	1,0228	0,1145	1,9224	1,0146	0,0534
	40	2,0731	0,9985	0,0381	1,8428	1,0185	0,0971	1,9323	1,0117	0,0456

**KAYNAKLAR**

Banks, J., Carso, J.S., Nelson, B.L. ve Nicol, D.M. (2001). *Discrete-Event System Simulation*. Prentice Hall, 3rd. Edition.

Ghosh, A. (1999). A Fortran program for fitting Weibull distribution and generating samples. *Computer Geosciences*, 25,729-738.

Gupta, R.D. ve Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull Distributions. *Biometrical*. Vol.43 1, 117-130.

Heo, J.H., Salas, J.D. ve Kim, K.D. (2001). Estimate of confidence intervals of quantiles for the Weibull distribution. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 15, 284-309.

Hossain, A.M. ve Zimmer, W.J. (2003). Comparison of Estimation methods for weibull parameters: complet and censored samples. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 73(2), 145-153.

Johnson, N.L. ve Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distribution-1*. Hough ton Mifflin Company, Boston.

Kaya, M.F., Kuş, C. Ve Saraçoğlu, B. (2003). Weibull Dağılım Parametrelerinin Tahmini ve Simulasyon Yardımıyla Tahmin Edicilerin Hata Kareleri Ortalamasının Karşılaştırılması. *VI. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu.*, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Keats, J.B., Lawrence, F.P. ve Wang, F.K. (1997). Weibull Maximum Likelihood Parameter Estimates with Censored Data. *Journal of Quality Technol.* 29(1), 105-110.

Ross, R. (1999). Comparing Linear Regression and Maximum Likelihood Methods to Estimate Weibull Distribution on Limited Data Sets: Systematic and Random Errors. *IEEE Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*.

Zenbil, A. (1991). *Estimation Technigues for A Class of Non-regular Distributions: The Weibull Case*. A. Ph. D. Thesis in Statistics Middle East Technical University.



**M. Nuri ALMALI**, Karedeniz Teknik Üniversitesi Müh.-Mim. Fak. Elk.-Elkt. Müh. Bölümünden mezun olduktan sonra yüksek lisans ve doktorasını Yüzüncü Yıl Üniversitesi nde tamamladı. Halen

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Müh.-M.m. Fakültesinde görev yapmaktadır.



**Hayrettin OKUT**, Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi'nden mezun oladıktan sonra yüksek lisansını Yüzüncü Yıl Üniversitesi doktorasında Ege Üniversitesi ve University of Minnesota (39.

Madde ile 1 yıllık görevlendirme) ile 1992 de tamamladı. Bir çok ulusal ve uluslar arası dergide çalışmaları yayımlandı. Halen Yüzüncü

Yıl Üniversitesi Ziraat Fakültesinde görev yapmaktadır.

