ANADOLU ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
ANADOLU UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Cilt/Vol.:10-Sayı/No: 2 : 537-547 (2009)

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

$(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$ KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMÜNÜN PARAMETRELENDİRİLMESİ

Serpil ALTAY [1]

ÖZ

Bu çalışmada (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli ve konveks kompakt değerli $(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi incelenmektedir. Ele alınan küme değerli dönüşümün (t,x,u,v)'ye göre sürekli x'e göre yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesinin varlığı kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Küme değerli dönüşüm, Steiner noktası, Süreklilik, Parametrelendirme.

PARAMETRIZATION OF THE SET VALUED MAP $(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$

ABSTRACT

In this paper the parametrization of the set valued map $(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$ which is continuous with respect to (t,x,u,v) and locally Lipschitz continuous with respect x is studied. It is proved that the considered set valued map has a parametrization which is continuous with respect to (t,x,u,v) and locally Lipschitz continuous with respect x.

Keywords: Set valued map, Steiner point, Continuity, Parametrization.

1. GİRİŞ

R^n uzayının boş kümeden farklı alt kümeleri ailesini 2^{R^n} ile, R^n uzayının boş kümeden farklı kompakt alt kümeleri ailesini $comp(R^n)$ ile, R^n'in boş kümeden farklı kompakt konveks alt kümeleri ailesini ise $conv(R^n)$ ile gösterelim. $A \in 2^{R^n}$ ve $E \in 2^{R^n}$ için A ve E kümeleri arasında Hausdorff uzaklığı $h(A,E)$ olarak gösterilir ve

$$h(A,E) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,E), \sup_{y\in E} d(y,A)\}$$

olarak tanımlanır. Burada $d(x,A)$ ile x noktasından A kümesine olan uzaklık gösterilir ve $d(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$, $\|\cdot\|$ Euclidean normu göstermektedir.

Önerme 1. (Aubin ve Frankowska, 1990), (Hu ve Papageorgiou, 1997)

$(comp(R^n), h(\cdot,\cdot))$ ve $(conv(R^n), h(\cdot,\cdot))$ metrik uzaylardır.

[1,] Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 26470, Eskişehir.
Tel: + 90 222 3350580/4643; Fax: + 90 222 3204910; E-posta: sizgi@anadolu.edu.tr

Geliş: 23 Şubat 2009 **Kabul:** 1 Haziran 2009

$x_0 \in R^n$ ve $r > 0$ için

$$B_n(x_0, r) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| < r\},$$
$$\overline{B}_n(x_0, r) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

olsun. $F(\cdot): R^n \to comp(R^m)$ küme değerli dönüşümünün verilen noktada sürekliliğini tanımlayalım.

Tanım 1. (Aubin ve Frankowska, 1990) $F(\cdot): R^n \to comp(R^m)$ küme değerli dönüşüm,

$x_0 \in R^n$ olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için $x \in B_n(x_0, \delta(\varepsilon, x_0))$ iken

$$h(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ varsa, $F(\cdot): R^n \to comp(R^m)$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in R^n$ noktasında süreklidir denir.

Tanım 2. (Aubin ve Frankowska, 1990) $F(\cdot): R^n \to comp(R^m)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer keyfi $x_1, x_2 \in R^n$ için

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

olacak biçimde $L \geq 0$ varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü L sabiti ile Lipschitz süreklidir denir.

Tanım 3. $F(\cdot): R^n \to comp(R^m)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her sınırlı $D \subset R^n$ ve $x_1, x_2 \in D$ için

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

olacak biçimde $L = L(D) \geq 0$ varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne yerel Lipschitz süreklidir denir.

Önerme 2. $F(\cdot): R^n \to comp(R^m)$ sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman

$$g(x) = \max_{y \in F(x)} \|y\|$$

şeklinde tanımlı $g(\cdot): R^m \to R$ fonksiyonu da süreklidir.

Önerme 3. $f(\cdot)R^n \to R^m$, $g(\cdot): R^n \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. O zaman

$$G(x) = B(f(x), g(x))$$

olmak üzere $G(\cdot): R^n \to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümü süreklidir.

Önerme 4. $F(\cdot)R^m \to comp(R^n)$ yerel Lipschitz sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman

$$g(x) = \max_{y \in F(x)} \|y\|$$

olarak tanımlı $g(\cdot): R^n \to R$ fonksiyonu yerel Lipschitz süreklidir.

2. KONVEKS KÜMENİN STEİNER NOKTASI

$K \in conv(R^m)$ ve $p \in R^n$ için

$$\sigma(K,p) = \max_{x \in K} \langle p, x \rangle ,$$

$$S_{m-1} = \{x \in R^m : \|x\| = 1\} ,$$

$$\overline{B}_m = \{x \in R^m : \|x\| \le 1\}$$

olsun. Burada $\langle \cdot,\cdot \rangle$ iç çarpımı göstermektedir.

$K \in conv(R^m)$ kümesinin Steiner noktası aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4. (Aubin ve Frankowska 1990), (Positcelskii, 1974), (Schnieder, 1971), (Shepard, 1968) $K \in conv(R^m)$ kümesi için Steiner noktası $s_m(K)$ ile gösterilir ve

$$s_m(K) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(K,+1)}{2} - \dfrac{\sigma(K,-1)}{2}, & m = 1 \\ m\displaystyle\int_{S_{m-1}} p \cdot \sigma(K,p)\omega dp, & m \ge 2 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada ω, $\omega(S_{m-1}) = 1$ koşulunu sağlayan ve S_{m-1}'de Lebesgue ölçümü ile orantılı olan ölçümdür.

Aşağıdaki teorem $K \in conv(R^m)$ kümesinin Steiner noktasını karakterize etmektedir.

Teorem 1. (Aubin ve Frankowska, 1990) Keyfi $K \in conv(R^m)$ için $s_m(K) \in K$ ve ayrıca, keyfi $K, L \in conv(R^m)$ için

$$\|s_m(K) - s_m(L)\| \le m \cdot h(K,L)$$

eşitsizliği doğrudur, yani $s_m(\cdot): conv(R^m) \to R^m$ dönüşümü m sabiti ile Lipschitz süreklidir.

Küme değerli dönüşümleri parametrelendirirken kullanılacak bir başka teorem verelim.

Teorem 2. (Aubin ve Frankowska,1990) $K \in conv(R^m)$ ve $y \in R^m$ için

$$P(y,K) = K \cap \overline{B}_m(y, 2d(y,K))$$

olmak üzere $P(\cdot): R^m \times conv(R^m) \to conv(R^m)$ dönüşümü 5 sayısı ile Lipschitz süreklidir. Yani keyfi $K, L \in conv(R^m)$ ve $x, y \in R^m$ için

$$h(P(x,K), P(y,L)) \le 5\big(h(K,L) + \|x - y\|\big)$$

eşitsizliği doğrudur.

3. PARAMETRELENDİRME

$F(t,x,u,v):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\rightarrow comp(R^m)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi tanımını verelim. Burada $P\subset R^p, Q\subset R^q$.

Tanım 5. (Aubin ve Frankowska, 1990) $F(t,x,u,v):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\rightarrow comp(R^m)$ küme değerli dönüşüm, $P\subset R^p, Q\subset R^q$ olsun. $W\subset R^k$ olmak üzere her $(t,x,u,v)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q$ için

$$F(t,x,u,v)=\{f(t,x,u,v,w): w\in W\} \tag{3.1}$$

olacak biçimde $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times W\rightarrow R^m$ fonksiyonu varsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bir parametrelendirilmesi denir.

(3.1) koşulunu sağlayan $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times W\rightarrow R^m$ fonksiyonu (t,x,u,v,w)'ya göre sürekli ise, $f(\cdot)$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x,u,v)'ye göre sürekli parametrelendirilmesi denir.

Eğer (3.1) koşulunu sağlayan $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times W\rightarrow R^m$ fonksiyonu x'e göre yerel Lipschitz ise, $f(\cdot)$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün x'e göre yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi denir.

Küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. (Aubin ve Frankowska, 1990), (Le Done ve Marchi, 1980), (Hu ve Papageorgiou, 1997)'de Lipschitz sürekli kompakt konveks değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi incelenmiş, (Lojasiewicz, 1991)'de konveks kümelerin parametrelendirilmesi üzerinde durulmuş ve (Ornelas, 1990)'da ise Caratheodory küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi incelenmiştir.

(t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli $F(t,x,u,v):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\rightarrow conv(R^m)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi , (Aubin ve Frankowska, 1990) ve (Ornelas, 1990)'da verilen ve (t,x)'e göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli $\Phi(t,x):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\rightarrow conv(R^m)$ biçiminde olan küme değerli dönüşümün parametrelendirilmesine benzer olarak yapılır.

Teorem 3. $P\subset R^p, Q\subset R^q$ kompakt kümeler, $F(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\rightarrow conv(R^m)$ küme değerli dönüşümü (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x,u,v)'ye göre sürekli ve x'e göre yerel Lipschitz sürekli $f(t,x,u,v,w):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m\rightarrow R^m$ parametrelendirilmesi vardır. Yani $f(t,x,u,v,w):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m\rightarrow R^m$ fonksiyonu (t,x,u,v,w)'ya göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olmak üzere, keyfi $(t,x,u,v)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q$ için

$$F(t,x,u,v)=\{f(t,x,u,v,w): w\in \overline{B}_m\}$$

olur.

Kanıt: $(t,x,u,v)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q$ için

$$M(t,x,u,v)=\max_{f\in F(t,x,u,v)}\|f\|$$

olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğundan Önerme 2 ve Önerme 4'den $M(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\to R$ fonksiyonu da (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olur.

$(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ olsun. $M(t,x,u,v)\cdot w$ merkezli ve $2d(M(t,x,u,v)\cdot w,F(t,x,u,v))$ yarıçaplı kapalı yuvarı $G(t,x,u,v,w)$ ile gösterelim, yani

$$G(t,x,u,v,w)=\overline{B}_m(M(t,x,u,v)\cdot w,2d(M(t,x,u,v)\cdot w,F(t,x,u,v))) \tag{3.2}$$

olsun. $(t,x,u,v,w)\to G(t,x,u,v,w)$, $(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ bir küme değerli dönüşüm belirtir.

$(t,x,u,v,w)\to M(t,x,u,v)\cdot w$, $(t,x,u,v,w)\to d(M(t,x,u,v)\cdot w,F(t,x,u,v))$ fonksiyonları sürekli olduğundan Önerme 3'e göre $G(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m\to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümü (t,x,u,v,w)'ya göre süreklidir.

Keyfi $y\in R^m$, $K\in conv(R^m)$ için

$$P(y,K)=K\cap\overline{B}_m(y,2d(y,K))$$

olmak üzere $P(\cdot,\cdot):R^m\times conv(R^m)\to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümünü tanımlayalım.

Şimdi her $(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ için

$$\begin{aligned}\Phi(t,x,u,v,w)&=P(M(t,x,u,v)\cdot w,F(t,x,u,v))\\&=F(t,x,u,v)\cap\overline{B}_m(M(t,x,u,v)\cdot w,2d(M(t,x,u,v)\cdot w,F(t,x,u,v)))\end{aligned} \tag{3.3}$$

olmak üzere $(t,x,u,v,w)\to\Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümünü ele alalım. Bu durumda, açıktır ki, keyfi $(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ için

$$\Phi(t,x,u,v,w)\subset F(t,x,u,v,w) \tag{3.4}$$

ve $\Phi(t,x,u,v,w)\subset R^m$ konveks kompakt kümedir. Yani $(t,x,u,v,w)\to\Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümü $\Phi(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m\to conv(R^m)$ biçiminde küme değerli dönüşümdür.

(3.2) ve (3.3)'den keyfi $(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ için

$$\Phi(t,x,u,v,w)=F(t,x,u,v,w)\cap G(t,x,u,v,w) \tag{3.5}$$

olur. Keyfi $(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\in[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ alalım ve sabitleyelim. O zaman Teorem 2'den

$$\begin{aligned}&h(\Phi(t,x,u,v,w),\Phi(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*))\\&=h(P(M(t,x,u,v)\cdot w,F(t,x,u,v)),P(M(t_*,x_*,u_*,v_*)\cdot w_*,F(t_*,x_*,u_*,v_*)))\\&\le 5\cdot\left[h((F(t,x,u,v),F(t_*,x_*,u_*,v_*))+\left\|M(t,x,u,v)\cdot w-M(t_*,x_*,u_*,v_*)\cdot w_*\right\|\right]\end{aligned} \tag{3.6}$$

olur.

$(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$ küme değerli dönüşümü ve $(t,x,u,v) \to M(t,x,u,v)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$ için $\|(t,x,u,v,w)-(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$h(F(t,x,u,v),F(t_*,x_*,u_*,v_*)) \le \frac{\varepsilon}{10} \tag{3.7}$$

ve

$$\|M(t,x,u,v)\cdot w - M(t_*,x_*,u_*,v_*)\cdot w_*\| \le \frac{\varepsilon}{10} \tag{3.8}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. O zaman (3.6), (3.7) ve (3.8)'den $\|(t,x,u,v,w)-(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$h(\Phi(t,x,u,v,w),\Phi(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)) \le \varepsilon$$

olduğu elde edilir. Bu ise, $(t,x,u,v,w) \to \Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümünün (t_*,x_*,u_*,v_*,w_*) noktasında sürekli olması demektir. $(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*) \in [t_0,\theta]\times R^n \times P \times Q \times R^m$ keyfi seçildiğinden $\Phi(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n \times P\times Q\times R^m \to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümü sürekli küme değerli dönüşümdür.

Şimdi $\Phi(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n \times P\times Q\times R^m \to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümünün x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğunu kanıtlayalım. Keyfi sınırlı $D \subset [t_0,\theta]\times R^n \times P\times Q\times R^m$ kümesi alalım ve $(t,x_i,u,v,w)\in D$, $(i=1,2)$ olsun. O zaman (3.6)'ya benzer olarak

$$\begin{aligned}&h(\Phi(t,x_1,u,v,w),\Phi(t,x_2,u,v,w))\\ &\le 5\cdot\left[h((F(t,x_1,u,v),F(t,x_2,u,v))+\|M(t,x_1,u,v)\cdot w - M(t,x_2,u,v)\cdot w\|\right]\end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğu elde edilir. $(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$ küme değerli dönüşümü x'e göre yerel Lipschitz sürekli küme değerli dönüşüm, $(t,x,u,v) \to M(t,x,u,v)$ fonksiyonu ise x'e göre yerel Lipschitz sürekli fonksiyon olduğundan

$$h(F(t,x_1,u,v),F(t,x_2,u,v)) \le L_1(D)\|x_1 - x_2\| \tag{3.10}$$

ve

$$\|M(t,x_1,u,v)\cdot w - M(t,x_2,u,v)\cdot w\| \le L_2(D)\|x_1-x_2\|\cdot\|w\| \tag{3.11}$$

olacak biçimde $L_1(D)>0$, $L_2(D)>0$ vardır. $(t,x_i,u,v,w)\in D$ ve D sınırlı olduğundan

$$\|w\| \le L_3(D) \tag{3.12}$$

olacak biçimde $L_3(D)>0$ vardır.

$$L(D) = 5[L_1(D) + L_2(D)\cdot L_3(D)] \tag{3.13}$$

dersek, (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) ve (3.13)'den

$$h(\Phi(t,x_1,u,v,w),\Phi(t,x_2,u,v,w)) \le L(D)\cdot\|x_1-x_2\| \tag{3.14}$$

olduğu elde edilir. Böylece $(t,x,u,v,w) \to \Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümü x'e göre yerel Lipschitz süreklidir.

Keyfi $(t,x,u,v,w) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q \times R^m$ için

$$f(t,x,u,v,w) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$$

olmak üzere $f(\cdot):[t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q \times R^m \to R^m$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$, $\Phi(t,x,u,v,w)$ kümesinin Steiner noktasıdır.

Şimdi keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q$ için

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olduğunu, yani $f(\cdot)$ fonksiyonunun $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bir parametrelendirilmesi olduğunu gösterelim.

$(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q$ alalım ve sabitleyelim. Eğer $M(t,x,u,v) = 0$ ise $M(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından $F(t,x,u,v) = \{0\}$ olur. Buradan ve (3.2)'den keyfi $w \in \overline{B}_m$ için $G(t,x,u,v,w) = \{0\}$ olduğu bulunur. Dolayısıyla (3.3)'den, keyfi $w \in \overline{B}_m$ için $\Phi(t,x,u,v,w) = \{0\}$ olur.

$$f(t,x,u,v,w) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$$

ve $s_m\{0\} = 0$ olduğundan, keyfi $w \in \overline{B}_m$ için $f(t,x,u,v,w) = 0$ olur.

O halde $M(t,x,u,v) = 0$ iken

$$\{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\} = \{0\} = F(t,x,u,v)$$

olur.

Şimdi $M(t,x,u,v) \neq 0$ durumunu inceleyelim. Önce

$$F(t,x,u,v) \subset \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olduğunu gösterelim.

$y_* \in F(t,x,u,v)$ alalım ve sabitleyelim.

$$w_* = \frac{y_*}{M(t,x,u,v)}$$

olsun. $M(t,x,u,v) \neq 0$ olduğundan $y_* = M(t,x,u,v) \cdot w_*$ olur. $y_* \in F(t,x,u,v)$ olarak seçildiğinden, $M(t,x,u,v)$'nin tanımından

$$\|y_*\| \leq M(t,x,u,v)$$

olduğu elde edilir. O halde

$$\|w_*\| = \frac{\|y_*\|}{M(t,x,u,v)} \le 1$$

ve $w_* \in \overline{B}_m$ olduğu bulunur.

$(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q$ ve $w_* \in \overline{B}_m$ için $y_* = M(t,x,u,v) \cdot w_* \in F(t,x,u,v)$ olduğundan $G(\cdot)$ fonksiyonunun tanımına göre

$$\begin{aligned} &G(t,x,u,v,w_*) = \overline{B}_m(M(t,x,u,v)\cdot w_*, 2d(M(t,x,u,v)\cdot w_*, F(t,x,u,v))) \\ &= \overline{B}_m(y_*, 2d(y_*, F(t,x,u,v))) \\ &= \overline{B}_m(y_*, 0) = \{y_*\} = \{M(t,x,u,v)\cdot w_*\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. $y_* = M(t,x,u,v) \cdot w_* \in F(t,x,u,v)$ olduğundan (3.2), (3.5) ve (3.16)'dan

$$\begin{aligned} &\Phi(t,x,u,v,w_*) = F(t,x,u,v) \cap G(t,x,u,v,w_*) \\ &= F(t,x,u,v) \cap \{M(t,x,u,v)\cdot w_*\} = \{M(t,x,u,v)\cdot w_*\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. Böylece $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q$ ve $w_* \in \overline{B}_m$ için (3.17)'den $\Phi(t,x,u,v,w_*) = M(t,x,u,v) \cdot w_* = y_*$ olur. Tek nokta kümesinin Steiner noktası kendisi olacağından

$$f(t,x,u,v,w_*) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w_*)) = M(t,x,u,v) \cdot w_* = y_*$$

olduğu bulunur. O zaman $y_* \in \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$ olur. $y_* \in F(t,x,u,v)$ keyfi seçildiğinden $F(t,x,u,v) \subset \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$

olur. Böylece (3.15) kapsamının doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q$ için

$$\{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\} \subset F(t,x,u,v) \tag{3.18}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Keyfi $(t,x,u,v,w) \in [t_0,\theta] \times R^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ için $f(t,x,u,v,w) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$ şeklinde tanımlandığından Teorem 1'den, keyfi $w \in \overline{B}_m$ için

$$f(t,x,u,v,w) \in \Phi(t,x,u,v,w) \tag{3.19}$$

olur. (3.4)'den keyfi $w \in \overline{B}_m$ için

$$\Phi(t,x,u,v,w) \subset F(t,x,u,v)$$

olduğundan (3.19)'dan keyfi $w \in \overline{B}_m$ için

$$f(t,x,u,v,w)\in F(t,x,u,v) \quad \textbf{(3.20)}$$

olduğu elde edilir. O halde (3.20)'den

$$\{f(t,x,u,v,w): w\in \overline{B}_m\}\subset F(t,x,u,v)$$

olduğu bulunur ve böylece (3.18) kapsamının doğru olduğu kanıtlanmış olur.

(3.15) ve (3.18)'den $\forall (t,x,u,v)\in [t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q$ için

$$F(t,x,u,v)=\{f(t,x,u,v,w): w\in \overline{B}_m\}$$

olur. Sonuç olarak $M(t,x,u,v)=0$ ve $M(t,x,u,v)\neq 0$ durumlarının her ikisi içinde

$$F(t,x,u,v)=\{f(t,x,u,v,w): w\in \overline{B}_m\}$$

olduğu kanıtlanmış olur.

O halde $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m\to R^m$ fonksiyonu $F(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümünün bir parametrelendirilmesidir.

Şimdi $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m\to R^m$ fonksiyonunun keyfi $(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)\in [t_0\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

$\Phi(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m\to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümü $(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)\in [t_0\theta]\times R^n\times P\times Q\times R^m$ noktasında sürekli olduğundan keyfi $\varepsilon>0$ için $\|(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)-(t,x,u,v,w)\|\leq \delta_0$ iken

$$h(\Phi(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0),\Phi(t,x,u,v,w))\leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta_0=\delta(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)>0$ vardır. O zaman Teorem 1'den, $\varepsilon>0$ için $\|(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)-(t,x,u,v,w)\|\leq \delta_0$ iken

$$\|f(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)-f(t,x,u,v,w)\|=\|s_m(\Phi(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0))-s_m(\Phi(t,x,u,v,w))\|$$
$$\leq m\cdot h(\Phi(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0),\Phi(t,x,u,v,w))\leq m\cdot\varepsilon$$

olur. Bu ise $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m\to R^m$ fonksiyonunun $(t_0,x_0,u_0,v_0,w_0)\in [t_0\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m$ noktasında sürekli olması demektir.

Şimdi $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m\to R^m$ fonksiyonunun x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğunu gösterelim. Keyfi sınırlı $D\subset [t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times \overline{B}_m$ kümesi alalım ve $(t,x_1,u,v,w)\in D,(t,x_2,u,v,w)\in D$ olsun. Teorem 1'den

$$\begin{aligned}&\|f(t,x_1,u,v,w)-f(t,x_2,u,v,w)\|=\|s_m(\Phi(t,x_1,u,v,w))-s_m(\Phi(t,x_2,u,v,w))\|\\&\leq m\cdot h(\Phi(t,x_1,u,v,w),\Phi(t,x_2,u,v,w))\end{aligned} \quad \textbf{(3.21)}$$

olduğu elde edilir. $(t,x_1,u,v,w),(t,x_2,u,v,w)\in D\subset[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times\overline{B}_m$ olduğundan $w\in\overline{B}_m$ ve $\|w\|\le 1$ olur. O halde (3.3), (3.21) ve Teorem 2'den

$$\begin{aligned}&\|f(t,x_1,u,v,w)-f(t,x_2,u,v,w)\|\\&\le 5m\cdot\left[h(F(t,x_1,u,v),F(t,x_2,u,v))+\|M(t,x_1,u,v)\cdot w-M(t,x_2,u,v)\cdot w\|\right]\\&\le 5m\cdot\left[h(F(t,x_1,u,v),F(t,x_2,u,v))+|M(t,x_1,u,v)-M(t,x_2,u,v)|\|w\|\right]\\&\le 5m\cdot\left[h(F(t,x_1,u,v),F(t,x_2,u,v))+|M(t,x_1,u,v)-M(t,x_2,u,v)|\right]\end{aligned}\qquad\textbf{(3.22)}$$

olur. $F(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\to conv(R^m)$ küme değerli dönüşümü ve $M(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\to R$ fonksiyonu x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğundan sınırlı $D\subset[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times\overline{B}_m$ kümesi için $(t,x_1,u,v,w),(t,x_2,u,v,w)\in D$ iken

$$\|F(t,x_1,u,v)-F(t,x_2,u,v)\|\le L_1(D)\|x_1-x_2\|\qquad\textbf{(3.23)}$$

ve

$$\|M(t,x_1,u,v)-M(t,x_2,u,v)\|\le L_2(D)\|x_1-x_2\|\qquad\textbf{(3.24)}$$

olacak biçimde $L_1(D),L_2(D)>0$ sayıları vardır. O halde (3.22), (3.23) ve (3.24)'den

$$\begin{aligned}&\|f(t,x_1,u,v,w)-f(t,x_2,u,v,w)\|\\&\le 5m\cdot\left[h(F(t,x_1,u,v),F(t,x_2,u,v))+|M(t,x_1,u,v)-M(t,x_2,u,v)|\right]\\&\le 5m\cdot\left[L_1(D)\|x_1-x_2\|+L_2(D)\|x_1-x_2\|\right]\end{aligned}\qquad\textbf{(3.25)}$$

olduğu elde edilir. $L_3(D)=5m\cdot(L_1(D)+L_2(D))$ dersek, (3.25)'den

$$\|f(t,x_1,u,v,w)-f(t,x_2,u,v,w)\|\le L_3(D)\|x_1-x_2\|\qquad\textbf{(3.26)}$$

olur. Bu ise $f(\cdot):[t_0,\theta]\times R^n\times P\times Q\times\overline{B}_m\to R^m$ fonksiyonunun x'e göre yerel Lipschitz sürekli olması demektir.

4. SONUÇ

(t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli ve konveks kompakt değerli $(t,x,u,v)\to F(t,x,u,v)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi verilmiştir. Bu küme değerli dönüşümün (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli paametrelendirilmesinin var olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Aubin, J.P. ve Frankowska, H. (1990). *Set Valued Analysis,* Birkhauser, Boston.

Hu, S., ve Papageorgiou, N.S. (1997). *Handbook of Multivalued Analysis,* Vol.I: Theory, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Le Done, A. ve Marchi, M.V. (1980). Representation of Lipschitzean Compact Convex Valued Mappings. *Rend. Acc. Naz. Lincei* 68, 278-280.

Lojasiewicz, S.Jr. (1991). *Parametrizations of Convex Sets*. Pogress in approximation theory. Academic Pres, Boston, MA 629-648.

Ornelas, A. (1990). Parametrization of Caratheodory Multifunctions. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 83, 33-44.

Positcelskii, E.D. (1974). Caracterizations of Steiner Points. *Math. Notes* 14, 698-700.

Schneider, R. (1971). On Steiner Points of Convex Bodies. *Israel J. Math.* 9, 241-249.

Shepard, G.C. (1968). A Uniqueness Theorem for the Steiner Point of a Convex Region. *J. London Math. Soc.* 43, 439-444.

Serpil ALTAY, 1998'de Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünden mezun oldu. 2001 yılında Yüksek Lisansını ve 2006'da Doktorasını aynı üniversitede tamamladı. Halen Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Öğretim Üyesi olarak görev yapmaktadır.